



**HAL**  
open science

# Conception de dispositifs piézoélectriques fortement couplés pour la récupération d'énergie vibratoire large bande

David Gibus

► **To cite this version:**

David Gibus. Conception de dispositifs piézoélectriques fortement couplés pour la récupération d'énergie vibratoire large bande. Vibrations [physics.class-ph]. Université Savoie Mont Blanc, 2020. Français. NNT : 2020CHAMA044 . tel-03169860v2

**HAL Id: tel-03169860**

**<https://hal.science/tel-03169860v2>**

Submitted on 17 Dec 2021 (v2), last revised 17 Dec 2021 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC

Spécialité : **Sciences pour l'ingénieur**

Arrêté ministériel : 25 Mai 2016

Présentée par

**David GIBUS**

Thèse dirigée par **Adrien BADEL** et  
co-encadrée par **Pierre GASNIER**

préparée au sein du **Laboratoire Autonomie et Intégration des  
Capteurs (CEA-LETI)**,  
dans l'**École Doctorale SISEO**

# Conception de dispositifs piézoélectriques fortement couplés pour la récupération d'énergie vibratoire large bande

Thèse soutenue publiquement le **2 décembre 2020**,  
devant le jury composé de :

**Monsieur Skandar BASROUR**

Professeur, Université Grenoble Alpes (TIMA), Président

**Madame Guylaine POULIN-VITTRANT**

Directrice de recherche HDR, GREMAN-CNRS Tours, Rapportrice

**Monsieur Olivier THOMAS**

Professeur, Arts et Métiers Lille (LISPEN), Rapporteur

**Monsieur François PIGACHE**

Maître de conférences HDR, INP Toulouse (Laplace), Examineur

**Monsieur Adrien BADEL**

Professeur, Université Savoie Mont-Blanc (SYMME), Directeur de thèse

**Monsieur Pierre GASNIER**

Ingénieur de recherche, CEA-LETI Université Grenoble-Alpes, Encadrant

*Ils véchurent enfants et firent beaucoup d'heureux.*

Auteur inconnu

# Remerciements

Décembre 2020 : voilà 3 ans et 2 mois que j'ai signé pour cette aventure. Celle-ci fut riche en rebondissements et en instants inoubliables. Je souhaite exprimer des remerciements pour de multiples raisons.

Je tiens en premier lieu à remercier mes fervents encadrants, Pierre Gasnier et Adrien Badel, pour leurs soutiens et conseils tout au long de ces 3 années. Le suivi quotidien et les encouragements sans faille de Pierre m'ont été d'une aide précieuse durant ces recherches. Au-delà d'être un simple encadrant, il a su faire preuve d'une grande écoute et de bienveillance. Je remercie tout autant, Adrien, qui a su se montrer très présent et réactif malgré la distance. Son engouement et sa curiosité ont permis de nourrir ma soif de connaissance. Je sais à quel point il est rare d'être si bien encadré et je vous en remercie.

Je souhaite exprimer ensuite mes remerciements aux membres de mon jury de thèse. Je remercie Guylaine Poulin-Vittrant d'avoir minutieusement rapporté mon manuscrit. Sa lecture attentive et ses compétences en matériaux ont permis de mettre en lumière des points de détails qui ont été clarifiés dans cette version. Aussi, je suis ravi d'avoir pu discuter avec Olivier Thomas, second rapporteur de mon manuscrit, au cours de ma soutenance. Son expertise et son engouement pour les effets électromécaniques des matériaux piézoélectriques ainsi que pour les modèles non-linéaires ont permis un retour très enrichissant sur mes travaux. Je remercie également Skandar Basrour d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Je le remercie particulièrement pour sa disponibilité et ses retours pertinents. Finalement, je remercie François Pigache, examinateur de mes travaux, d'avoir partagé ses observations concernant l'augmentation de la température durant ses expérimentations. Par ailleurs, je le remercie pour son commentaire sur la citation de ce manuscrit qui m'a fortement réjoui durant la soutenance.

Concernant l'aspect technique de mes travaux, je suis redevable à plusieurs personnes qui ont enrichi mes connaissances et que j'ai eu le plaisir de rencontrer. Je pense naturellement à Adrien Morel qui m'a apporté une aide significative pour les mesures et des discussions passionnantes sur l'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques. Un grand merci également à Olivier Freychet qui, grâce à ses interrogations permanentes, m'a permis de démultiplier mes connaissances sur les matériaux piézoélectriques. Aussi, car le modèle à deux degrés de liberté n'aurait pas été aussi sublime sans leur aide, je suis reconnaissant envers Fabien Formosa et Ludovic Charleux. Concernant la modélisation non-linéaire, je remercie Nicolas Garraud pour les nombreuses discussions. Merci à Rémy Gohier pour la réalisation du banc d'analyse d'impédance et merci à Adrien Ameye de donner une seconde vie à mes modèles. Je tiens également à remercier les belles rencontres de conférence telles que La HarvesTeam, Alexis Brenes et Thomas Huguet. Outre l'enrichissement professionnel, ce fut un réel plaisir de discuter avec toutes ces personnes qui m'ont apporté leur aide au cours de ces 3 ans.

Sur l'aspect personnel, je tiens à remercier chaleureusement tous ceux qui m'ont accompagné et qui ont égayé mon aventure à Grenoble. J'ai notamment été très heureux de partager l'ambiance du LAIC & Friends durant ces 3 ans. Plus précisément, je remercie ceux qui ont

tenu à m'aérer l'esprit en m'emmenant courir aux Vouillants ainsi que ceux qui l'ont fait en me suivant à la Bobine ou au Not a Bear. J'ai également une entière gratitude envers ceux qui m'ont détendu avec la gracieuse danse de l'orang-outan ainsi qu'envers les membres du bureau du thésard qui l'ont fait grâce aux blagues quotidiennes. Cette atmosphère de travail a joué pour beaucoup à la réussite de ma thèse. Je suis aussi énormément reconnaissant envers tous les amis que j'ai pu rencontrer à Grenoble. Grenoble est pour moi bien plus que la ville où j'ai réalisé ma thèse. C'est une ville où j'ai rencontré des gens formidables que je prendrai plaisir à revoir.

Concernant la rédaction de ce manuscrit, je remercie mes colocataires grenoblois et Freddy d'avoir accordé de leur temps précieux à la correction orthographique. Je tiens également à remercier mes colocataires de Pringy et mes collègues du Symme pour leur soutien lors de la préparation de la soutenance. Un grand merci également à Julie pour son aide à la rédaction et pour avoir su être à l'écoute de mes questions existentielles.

Pour finir, je remercie mes parents qui m'ont permis d'être la personne que je suis aujourd'hui. Notamment, un immense MERCI à ma mère d'avoir fait autant pour que me rendre épanoui.

## Table des matières

Introduction .....	8
Chapitre I : Etat de l'art et positionnement de la thèse.....	10
I.1. La récupération d'énergie .....	10
I.2. Procédés de récupération d'énergie vibratoire.....	14
I.3. Récupération d'énergie large bande.....	16
I.3.1. Structure résonante et problématique .....	16
I.3.2. Solutions existantes .....	19
I.3.3. Positionnement de la thèse .....	29
I.4. Notion de couplage électromécanique et intérêt .....	32
I.4.1. Introduction aux équations de la piézoélectricité .....	32
I.4.2. Les différents modes de couplage .....	34
I.4.3. Définition du coefficient de couplage électromécanique .....	36
I.4.4. Intérêt de la maximisation du coefficient de couplage global .....	41
I.5. Optimisation du coefficient de couplage .....	44
I.5.1. Les matériaux piézoélectriques en récupération d'énergie.....	44
I.5.2. Comparaison de configuration de récupérateur d'énergie.....	45
I.5.3. Optimisation de poutres piézoélectriques avec masse mobile.....	57
I.6. Conclusion du chapitre .....	58
Chapitre II : Modélisation .....	59
II.1. Littérature sur les modèles de poutre piézoélectrique avec masse mobile .....	59
II.1.1. Théories des poutres .....	59
II.1.2. Présentation et comparaison des modèles de la littérature .....	61
II.2. Méthodologie .....	66
II.3. Moment fléchissant et équation de courant.....	67
II.3.1. Hypothèses.....	67
II.3.2. Expression de la déformation et du champ électrique .....	69
II.3.3. Moment fléchissant et équation de courant .....	71
II.4. Modèle à 2 degrés de liberté (2DDL) .....	72
II.4.1. Mise en équation.....	72
II.4.2. Résolution directe du modèle (2DDL-RD) .....	76
II.5. Application de la méthode de Rayleigh-Ritz (2DDL-PM) .....	77
II.5.1. La méthode de Rayleigh-Ritz .....	78
II.5.2. Calcul des modes de vibration.....	81

II.5.3.	Expression des coefficients des matrices.....	82
II.5.4.	Déduction des fréquences de résonance .....	83
II.6.	Comparaison des modèles.....	85
II.7.	Conclusion du chapitre .....	91
Chapitre III :	Optimisation du coefficient de couplage de poutres piézoélectriques.....	92
III.1.	Compréhension des aspects électromécaniques par le modèle .....	92
III.1.1.	Aspects de localisation et d'homogénéisation des contraintes .....	92
III.1.2.	Optimisation de la distribution longitudinale des contraintes.....	97
III.1.3.	Optimisation de la répartition transversale des contraintes .....	105
III.1.4.	Augmentation du couplage matériau .....	108
III.2.	Optimisation par simulations par éléments finis .....	109
III.2.1.	Influence de la largeur de la poutre et largeur optimale .....	110
III.2.2.	Impact de l'épaisseur la poutre .....	113
III.3.	Amélioration du récupérateur à l'aide de barreaux .....	114
III.3.1.	Blocage de la déformation latérale.....	114
III.3.2.	Etude sur l'influence des dimensions des barreaux .....	117
III.3.3.	Essai expérimental .....	119
III.4.	Conclusion du chapitre.....	120
Chapitre IV :	Fabrication et caractérisation de récupérateurs fortement couplés .....	122
IV.1.	Dimensionnement des prototypes .....	122
IV.2.	Procédé de fabrication.....	126
IV.3.	Influence des conditions d'encastrement et de collage .....	130
IV.3.1.	Analyse des influences avec des simulations par éléments finis .....	130
IV.3.2.	Solutions envisagées .....	133
IV.4.	Caractérisation.....	136
IV.4.1.	Mesures d'impédances.....	136
IV.4.2.	Mesures vibratoires .....	137
IV.4.3.	Comparaison avec l'état de l'art .....	147
IV.5.	Conclusion du chapitre.....	150
Chapitre V :	Pertes et non-linéarités des récupérateurs d'énergie piézoélectriques.....	152
V.1.	Introduction au chapitre .....	152
V.2.	Pertes linéaires.....	154
V.2.1.	Coefficient visqueux d'amortissement .....	154
V.2.2.	Pertes par hystérésis.....	158
V.3.	Discussion sur l'angle de phase piézoélectrique .....	163

V.4.	Présentation d'un modèle non-linéaire.....	167
V.4.1.	Equations de mouvement et de courant.....	167
V.4.2.	Ajout des coefficients de pertes.....	171
V.4.3.	Résolution des équations .....	173
V.5.	Ajustement du modèle sur les mesures et discussions .....	175
V.6.	Conclusion du chapitre.....	186
	Conclusion et perspectives .....	187
	Bibliographie .....	191
	Annexe 1 : Modèle à paramètres distribués exploité par la méthode de Rayleigh-Ritz .	204
	Annexe 2 : Expression de la raideur et du terme de couplage équivalents .....	209
	Annexe 3 : Exploitation d'un récupérateur par un circuit électrique dédié .....	212
	Annexe 4 : Conception d'un récupérateur très fortement couplé à base de PZN-PT .....	216
	Table des variables .....	219
	Liste des publications .....	223



# Introduction

Cette thèse s'intéresse au domaine de la récupération de l'énergie des vibrations pour l'alimentation électrique de capteurs sans fil communicants. Elle aborde un des verrous majeurs de ce domaine, qui est la faible bande de fréquence de fonctionnement des récupérateurs. En réponse à cette problématique, la solution discutée dans ce manuscrit est l'ajustement de fréquence de résonance par des méthodes électriques. Il est en effet possible de faire varier la fréquence de résonance des récupérateurs d'énergie piézoélectriques par l'intermédiaire d'un circuit électrique dédié. Cette méthode repose sur l'influence mutuelle qui existe entre le domaine mécanique et le domaine électrique du récupérateur. Comme l'ajustement de fréquence de résonance par des méthodes électriques est envisageable sur une large bande de fréquence uniquement si les récupérateurs présentent un fort coefficient de couplage électromécanique, les travaux présentés dans cette thèse s'intéressent à la maximisation de ce coefficient de couplage. Le besoin de très forts coefficients de couplage électromécanique dans les récupérateurs fait apparaître de nouveaux défis dans les activités de modélisation, de fabrication et de caractérisation de tels dispositifs. Dans ce travail, des configurations optimales de récupérateurs sont proposées et les résultats de leurs caractérisations sont discutés. Les principaux axes étudiés durant ces trois années de doctorat sont les suivants :

Le premier chapitre présente le domaine de la **récupération d'énergie vibratoire** et le verrou de la sélectivité en fréquence. Après avoir présenté les différentes solutions envisagées par l'état de l'art pour répondre à cette problématique, nous montrons les avantages de l'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques pour la récupération d'énergie vibratoire. La notion de coefficient de couplage électromécanique est ensuite introduite et l'intérêt de sa maximisation pour l'ajustement de fréquence de résonance est démontré. Enfin, après avoir discuté des différentes configurations de récupérateurs, nous montrons qu'une poutre encastree-libre ayant une longue masse mobile est une configuration intéressante pour maximiser le coefficient de couplage électromécanique global.

Le deuxième chapitre aborde donc la **modélisation** des poutres piézoélectriques encastrees-libres comportant une masse mobile. Un modèle analytique est présenté et une nouvelle expression analytique du coefficient de couplage électromécanique global est déduite pour permettre l'optimisation de récupérateurs.

Le troisième chapitre concerne l'**optimisation** des poutres piézoélectriques pour la maximisation du coefficient de couplage global. Des règles générales de dimensionnement sont ainsi proposées grâce à l'exploitation de l'expression analytique du coefficient de couplage introduite dans le deuxième chapitre. D'autre part, des simulations par éléments finis permettent de préciser les règles importantes de conception de telles structures.

Le quatrième chapitre est consacré à la **fabrication et à la caractérisation** de récupérateurs fortement couplés. L'influence des imperfections de fabrication sur les coefficients de couplage

expérimentaux est discutée. L'analyse est appuyée par des simulations par éléments finis. Les performances des récupérateurs fabriqués sont ensuite comparées à celles de l'état de l'art en matière de coefficient de couplage global, de bande passante et de densité de puissance.

Le cinquième chapitre s'intéresse à la **modélisation des effets non-linéaires et des pertes** observés expérimentalement sur les récupérateurs fabriqués. Une discussion sur la modélisation des pertes des matériaux piézoélectriques nous permet ensuite de proposer un modèle non-linéaire s'ajustant aux résultats de mesures. L'évolution des performances des récupérateurs en réponse à l'augmentation du niveau d'accélération est finalement discutée.

# Chapitre I : Etat de l'art et positionnement de la thèse

*La récupération d'énergie est un domaine qui s'intéresse à utiliser l'énergie de l'environnement extérieur pour produire de l'électricité. Ainsi, la récupération d'énergie vibratoire tend à profiter des vibrations issues de machines (moteurs, roulements), de structures (immeubles, ponts par exemple) ou de personnes (chaussures, mouvements d'un poignet par exemple) pour produire de l'électricité. Bien qu'il semble prometteur de récupérer la moindre vibration perdue pour en faire de l'électricité, le domaine de la récupération d'énergie vibratoire se consacre principalement à l'alimentation de capteurs sans fil communicants par la réalisation de systèmes de petites tailles (quelques centimètres cubes) produisant de faibles puissances électriques (quelques microwatts à quelques milliwatts).*

## I.1. La récupération d'énergie

La miniaturisation des systèmes électroniques et l'émergence de protocoles basse-consommation (comme le protocole ZigBee et le Bluetooth Low Energy par exemple) ont permis de simplifier l'intégration de capteurs sans fil communicants (*Wireless Sensors Node* en anglais). En effet, saisissant l'opportunité de collecter des informations facilement, des secteurs très variés s'intéressent à utiliser des objets connectés et des capteurs sans fil. Ces secteurs vont de l'agriculture aux activités sportives en passant par la gestion de production et l'analyse du vieillissement des structures (*Structure Health Monitoring* en anglais) pour des ponts ou des bâtiments par exemple.

L'objectif d'un capteur est de collecter des informations telles que la valeur de la température, celle de la pression ou celle de l'accélération, de traiter éventuellement ces informations, puis de les transmettre à un autre capteur ou à un système central (station de base : *base station* en anglais) par radiofréquences (Figure I.1). Si le capteur est autonome en énergie, aucun câble n'est nécessaire ni à l'alimentation, ni à la transmission des données. L'intégration de tels capteurs dans un environnement est alors grandement simplifiée. Afin d'alimenter le capteur,

l'utilisation de piles est une solution simple et efficace dans certaines applications mais celles-ci offrent une quantité d'énergie limitée. Les batteries, quant à elles, ont besoin d'être rechargées ou remplacées, ce qui représente un coût de maintenance. Afin d'accroître l'autonomie d'un capteur sans fil communicant, il est possible de le solliciter uniquement lorsque l'acquisition de données est nécessaire (une acquisition et un transfert toutes les minutes par exemple) et de le laisser en veille le reste du temps. Lorsqu'il est actif, un capteur de température du commerce consomme en moyenne 10 à 20 $\mu$ W et la transmission de données par Bluetooth Low Energy nécessite 40mW alors qu'un microcontrôleur en veille ne consomme que 1 à 5  $\mu$ W [1], [2]. En considérant qu'un capteur autonome a besoin de 20mW en moyenne pour l'acquisition et le transfert de données, Matthias Geisler a calculé dans sa thèse [1] la durée de vie des piles et des batteries en fonction du taux d'utilisation d'un capteur (Tableau I.1). D'après cette analyse, une pile ou une batterie n'est pas suffisante pour alimenter un capteur du commerce sur plusieurs années. En réponse à cette problématique, il est donc intéressant de pouvoir récupérer une partie de l'énergie disponible dans l'environnement du capteur pour produire de l'électricité et ainsi accroître son autonomie.

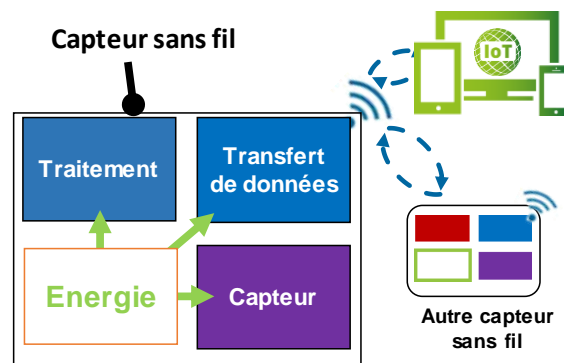


Figure I.1 : Fonctions d'un capteur sans fil communicant

Tableau I.1 : Durée de vie des piles et batteries [1]

Système	Energie 100% charge	Taux d'auto-décharge ( <i>tad</i> )	Durée de vie @ 20mW de consommation en utilisation, avec prise en compte de l'autodécharge des batteries		
			2h/semaine	2h/jour	Continu
Pile AA	15.4 kJ	3% / an	1 an et 9 mois	3 mois 3 jours	8 jours
Pile bouton lithium (CR2012)	420 J	1% / an	2 semaines	2 jours 1 heure	5 heures
Batterie Li-ion (PGF534848)	20kJ	2% / mois	1 an 9 mois	3 mois 27 jours	10 jours 8 heures
Pile rechargeable NiMH (2.4V, 80mAh)	690 J	1% / jour	3 semaines	4 jours	8 heures

Les dispositifs de récupération d'énergie disposent toujours d'un élément de transduction permettant de convertir l'énergie environnante (vibration, lumière, etc.) en électricité. Soit l'électricité ainsi produite est suffisante pour alimenter directement le capteur, soit elle est stockée dans une batterie ou un super-condensateur puis transmise au système pour l'acquisition et la transmission de données. En temporisant l'acquisition et l'envoi de données et grâce à l'utilisation d'une batterie tampon ou d'un super-condensateur, il est alors possible d'alimenter un capteur autonome avec une source d'énergie fournissant uniquement quelques dizaines de microwatts [3]. Les systèmes de récupération d'énergie permettant de fournir une telle puissance sur plusieurs années offrent donc de nouvelles perspectives à l'intégration de

capteurs. Il existe différentes sources d'énergies récupérables et le choix de l'énergie que l'on récupère est réalisé en fonction de l'application et de l'environnement dans lequel sera intégré le capteur. Certains contextes sont plus propices à la récupération de lumière (environnement extérieur) alors que d'autres sont favorables à la récupération des vibrations (intérieur d'une usine). Les types d'énergies majoritairement récupérées sont [4]:

- *La lumière* : l'énergie lumineuse extérieure ( $>150 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ) et intérieure ( $<10 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ) sont toutes les deux récupérables par des panneaux photovoltaïques même si les densités surfaciques de puissance ne sont pas équivalentes selon le lieu d'intégration des panneaux [4]. Un exemple d'application envisagée est l'alimentation de capteurs pour des systèmes d'irrigation [5] à partir de la lumière du soleil.
- *La chaleur* : des éléments thermoélectriques permettent de transformer des gradients de température en électricité et les matériaux pyroélectriques produisent de l'électricité lorsqu'ils sont chauffés ou refroidis. Des flux de chaleur à la fenêtre d'un bâtiment peuvent par exemple être récupérés pour alimenter des capteurs [6].
- *L'énergie mécanique* : l'énergie mécanique qui est présente sous forme de forces ou de mouvements (telles que les vibrations) peut être récupérée. Il est par exemple possible de récupérer l'énergie des pas [7] ou des mouvements de bras [8] grâce à des systèmes électromagnétiques, piézoélectriques ou électrostatiques.
- *Les flux d'air ou d'eau* : au même titre que ce qui est réalisé par une hydrolienne ou une éolienne, les flux d'eau et les flux d'air peuvent être transformés en électricité à petite échelle. Des micro-turbines possédant des diamètres inférieurs à la dizaine de centimètres permettent par exemple de récupérer l'énergie d'un flux d'eau dans des canalisations afin de détecter des fuites [9]. D'autres dispositifs permettent de récupérer l'énergie des flux d'airs présents dans des systèmes de climatisation [10].
- *La biomasse* : l'utilisation de piles à combustible microbiennes récupérant l'énergie stockée dans les sédiments est une solution envisagée pour intégrer des capteurs dans les milieux aquatiques [11]. Cependant, la biomasse est une source d'énergie moins communément récupérée pour alimenter un capteur que celles citées ci-dessus.



Figure I.2 : Exemples de sources d'énergie et d'applications de la récupération d'énergie [12]

De plus, des récupérateurs hybrides sont parfois conçus afin de récupérer l'énergie de différentes sources. A titre d'exemple, un dispositif comportant une structure flexible, composée d'un panneau solaire et un matériau piézoélectrique, a été associée à un élément

thermoélectrique par Gambier *et al.* [13]. Ce dispositif est destiné à la récupération d'énergies vibratoire, lumineuse et thermique dans des applications spatiales.

Dans ce contexte, la récupération d'énergie vibratoire est une solution pertinente pour alimenter les capteurs autonomes de diverses applications. C'est notamment le cas du secteur du bâtiment (vibrations des canalisations de climatisations, vibrations des ponts), des transports (vibrations de moteurs ou carrosseries de voitures ou de coques d'avions) et du secteur de l'industrie (vibrations des moteurs et roulements). La récupération d'énergie des mouvements de personnes est également étudiée pour le suivi de performances sportives [10] ainsi que pour l'alimentation de pacemakers [14].

Afin de récupérer suffisamment d'énergie pour alimenter un capteur, il est nécessaire que l'amplitude des vibrations soit suffisamment grande. La Figure I.3 représente un exemple de spectre fréquentiel de l'accélération d'une machine-outil [15]. Sur ce graphique, on remarque que l'accélération mesurée comporte des pics d'amplitude à différentes fréquences. Il est donc nécessaire que le récupérateur opère à ces fréquences pour produire un maximum d'énergie électrique. La fréquence dominante des vibrations (fréquence du premier pic d'amplitude significative sur le spectre) est en général considérée pour dimensionner le récupérateur d'énergie vibratoire. Le Tableau I.2 donne des valeurs d'accélération et de fréquences dominantes de vibrations mesurées sur des sources vibratoires différentes.

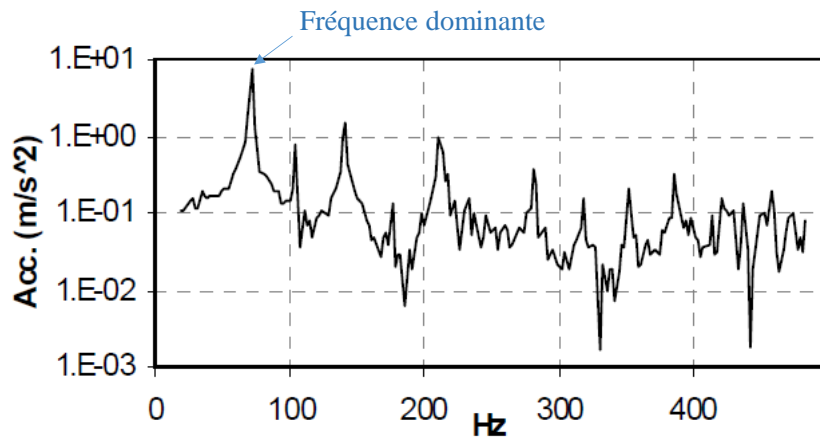


Figure I.3 : Spectre fréquentiel des vibrations d'une machine-outil 3 axes [15]  
(Acc. : amplitude de l'accélération en  $m \cdot s^{-2}$ )

Tableau I.2 : Sources de vibrations exploitables pour de la récupération d'énergie vibratoire [16]–[18]

Source de vibrations	Accélération ( $m \cdot s^{-2}$ )	Fréquence (Hz)
Moteur de voiture	12	200
Tableau de bord d'une voiture	3	13
Support d'une machine-outil 3 axes	10	70
Tuyaux de ventilation d'un bureau	0,2 - 1,5	60
Deuxième étage d'un immeuble occupé	0,2	100
Rail de train	1.5	5 - 20
Trafic autoroutier	0.01	5 - 100
Pont	0.01 – 0.1	5 - 20
Moteur d'avion	/	≈ 1 000

Le Tableau I.2 montre que la fréquence et l'amplitude des vibrations dépendent fortement de la source et donc de l'application visée. De plus, il se peut que, selon les applications, la fréquence et l'amplitude des vibrations varient dans le temps.

En conclusion de cette section, l'énergie de diverses sources peut être récupérée pour alimenter un capteur en électricité. Une puissance moyenne récupérée de plusieurs dizaines de microwatts est suffisante pour alimenter un capteur dont la gestion électrique est optimisée. De plus, comme l'énergie vibratoire est présente dans de nombreux domaines applicatifs, la récupération d'énergie des vibrations est pertinente pour des applications variées telles que l'analyse de vieillissement de structures [14] ou la mesure d'accélération sur les moteurs d'avion [18]. La fréquence et l'amplitude des vibrations ainsi que leurs variations sont des critères importants à prendre en compte pour la conception d'un récupérateur d'énergie vibratoire. Ces critères dépendent fortement de l'application visée. Dans la section suivante, nous allons voir comment cette énergie peut être transformée en énergie électrique récupérable.

## I.2. Procédés de récupération d'énergie vibratoire

Les récupérateurs d'énergie vibratoire sont des systèmes capables de tirer profit des vibrations pour produire de l'électricité. Afin d'être efficaces et utilisables, ils mettent en œuvre généralement :

- Un comportement résonant : la résonance mécanique permettant d'amplifier les déplacements relatifs dans le récupérateur afin de maximiser l'énergie récupérée.
- Un ou plusieurs principes de transduction pour transformer l'énergie mécanique en énergie électrique.
- Un circuit de gestion d'énergie : l'énergie électrique fournie par le récupérateur d'énergie vibratoire est en général alternative et son amplitude souvent très différente de la tension nécessaire pour alimenter un capteur communicant (3V typiquement). Il est donc nécessaire de la redresser et de la convertir (abaisser, élever) pour charger une batterie ou alimenter un capteur avec une tension continue.

Bien que les structures les plus courantes soient de types piézoélectriques et électromagnétiques, plusieurs principes de transductions ont été proposés dans la littérature pour convertir l'énergie des vibrations en énergie électrique. Plusieurs articles de revues permettent de comparer les avantages et inconvénients de chacun des principes [19]–[22]. Les principes de transduction les plus courants sont :

- L'électromagnétisme : le récupérateur exploite un mouvement relatif entre un aimant et une bobine permettant l'apparition d'un courant induit dans cette dernière. Ce type de récupérateur peut être réalisé pour des systèmes de grandes tailles mais il est généralement difficile à concevoir à des petites échelles ( $< \text{cm}^3$ ) à cause de la difficulté de miniaturisation des aimants et des bobines. De plus, ce type de récupérateur fournit généralement une faible amplitude de tension de sortie ( $< 1 \text{ V}$ ) qui est difficile à redresser.
- La piézoélectricité : les matériaux piézoélectriques sont des matériaux qui, sous l'action d'une contrainte, se polarisent électriquement et développent une différence de potentiel aux bornes de leurs électrodes. Un récupérateur piézoélectrique est un système qui induit la déformation d'un matériau piézoélectrique afin de produire de l'électricité. Des

structures de petites tailles sont réalisables avec des procédés de type MEMS (*MicroElectroMechanical System*). Les récupérateurs piézoélectriques génèrent une tension suffisante ( $>5V$ ) pour simplifier la gestion électrique mais les faibles courants de sortie (quelques  $\mu A$ ) peuvent être parfois limitants pour charger une batterie. Par ailleurs, comme le matériau piézoélectrique contribue à la raideur du résonateur et subit de fortes contraintes, la fragilité des matériaux piézoélectriques complexifie le dimensionnement de tels récupérateurs.

- L'électrostatique : les dispositifs électrostatiques exploitent la variation de capacité d'un système capacitif chargé pour produire de l'énergie. Les récupérateurs électrostatiques sont réalisés soit avec des matériaux actifs de type électrets (matériaux diélectriques chargés électriquement [23]) ou des matériaux triboélectriques (génération de charges à partir de frottements), soit sans matériau actif. Si aucun matériau actif n'est utilisé, une source de tension est nécessaire pour charger le système capacitif. L'utilisation d'électrets permet de s'affranchir de ce besoin mais ils ont l'inconvénient de décharger avec le temps. De plus, les générateurs électrostatiques présentent l'inconvénient de ne fournir que de très faibles courants de sortie (de quelques nA à quelques  $\mu A$ ). De plus, leurs hautes tensions associées aux très faibles valeurs de capacités participent aux faibles rendements de conversion des dispositifs de gestion d'énergie électrique en aval.
- La flexoélectricité : la flexoélectricité est la capacité des matériaux à se polariser électriquement sous l'action d'un gradient de déformation (en comparaison, l'effet piézoélectrique est la polarisation sous l'action d'une déformation). A l'opposé de la piézoélectricité, la flexoélectricité est présente dans tous les matériaux, même si elle l'est à très faible amplitude [24], [25]. L'effet flexoélectrique semble intéressant à l'échelle micrométrique voir nanométrique car les gradients de déformations augmentent avec la diminution des échelles. Cependant, l'utilisation de la flexoélectricité est récente pour la récupération d'énergie et peu de travaux y sont consacrés.
- Les systèmes magnétoélectriques : les systèmes magnétoélectriques sont des dispositifs utilisant les propriétés des matériaux magnétostrictifs (matériaux qui se déforment sous l'action d'un champ magnétique). Les dispositifs magnétoélectriques se composent généralement d'un matériau piézoélectrique intégré ou reporté dans un matériau magnétostrictif et d'un aimant. A chaque cycle, la variation relative de champ magnétique causée par l'aimant induit une déformation du matériau magnétostrictif qui comprime le matériau piézoélectrique. Ce dernier développe une tension électrique aux bornes de ses électrodes. Comme le récupérateur peut être conçu de sorte que le matériau piézoélectrique soit principalement sollicité sous compression [26], le matériau est donc moins sujet à la fatigue et à la dépolarisation que dans le cas de récupérateurs piézoélectriques classiques (les matériaux piézoélectriques sont plus résistants à la compression qu'à la tension mécanique et qu'à la flexion). Les récupérateurs magnétoélectriques sont cependant plus complexes à mettre en œuvre que les récupérateurs piézoélectriques classiques et sont difficilement réalisables en petites dimensions ( $<cm^3$ ).

Afin d'analyser les pistes privilégiées par la recherche dans le domaine de la récupération d'énergie vibratoire, le nombre de publications par année est donné dans la Figure I.4, pour chaque principe de transductions (on notera l'échelle logarithmique utilisée pour l'axe des abscisses). A titre informatif, les requêtes réalisées sur Scopus sont données dans le Tableau



I.3. Les récupérateurs à bases d'électrets et de matériaux triboélectriques n'étant pas toujours recensés comme de type « électrostatique », des requêtes spécifiques ont été réalisées.

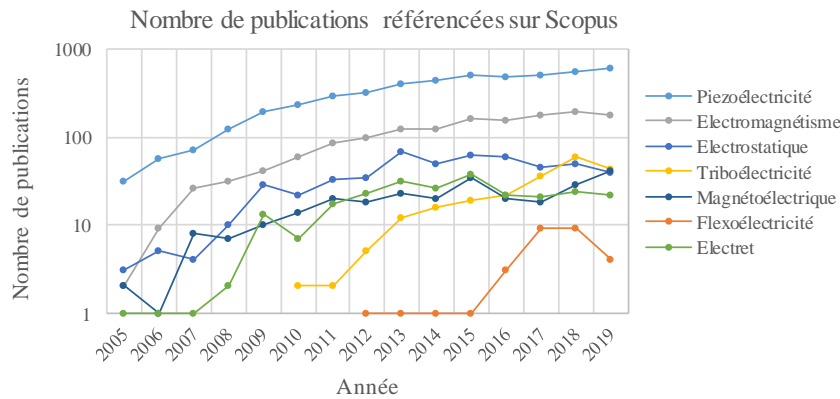


Figure I.4: Nombre de publications référencées sur Scopus par années pour les différents moyens de transductions. Les requêtes réalisées sont données dans le Tableau I.3 et les résultats datent du 04/06/2020

Tableau I.3 : Nombre de publications par années pour les différents moyens de transductions

Méthode	Requête
Piézoélectricité	<i>(TITLE-ABS-KEY(piezolectr* vibrat* harvest*))</i>
Electromagnétisme	<i>(TITLE-ABS-KEY(electromag* vibrat* harvest*))</i>
Electrostatique	<i>(TITLE-ABS-KEY(electrostat* vibrat* harvest*))</i>
Triboélectricité	<i>(TITLE-ABS-KEY(tribo* vibrat* harvest*))</i>
Magnétoélectrique	<i>(TITLE-ABS-KEY(vibrat* AND harvest* AND (magnetolectr* OR magnetostr*)))</i>
Electret	<i>(TITLE-ABS-KEY(electret* vibrat* harvest*))</i>
Flexoélectricité	<i>(TITLE-ABS-KEY(flexo* vibrat* harvest*))</i>

La piézoélectricité est la solution la plus envisagée par les chercheurs pour produire de l'électricité à partir de vibrations et la triboélectricité est une solution récemment envisagée qui semble prendre de l'ampleur pour les années à venir. En plus de montrer que la récupération d'énergie vibratoire est un domaine prometteur, le nombre croissant de publications observé sur la Figure I.4 peut également révéler que des verrous importants doivent encore être levés avant de permettre l'utilisation de récupérateurs à très grande échelle. Les verrous majeurs étant la sélectivité en fréquence comme discuté dans la section suivante et la robustesse des systèmes.

## I.3. Récupération d'énergie large bande

### I.3.1. Structure résonante et problématique

Lorsqu'une structure résonante est utilisée en récupération d'énergie pour amplifier les déplacements, la puissance récupérée est maximale à la fréquence de résonance du résonateur. Il est alors nécessaire de dimensionner le récupérateur pour que sa fréquence de résonance coïncide avec la fréquence dominante des vibrations pour récupérer le maximum d'énergie. A partir d'un modèle simplifié détaillé par Badel et Lefeuvre [27], nous proposons d'analyser l'influence du comportement résonant d'un récupérateur d'énergie sur la puissance récupérée en fonction de la fréquence.

La Figure I.5.a donne la représentation simplifiée d'un système de récupération d'énergie vibratoire résonant à un degré de liberté, où  $M$  est la masse équivalente,  $K$  la raideur

équivalente,  $y(t)$  le déplacement de la base et  $z(t)$  le déplacement équivalent de la masse,  $D_L$  un amortissement correspondant aux pertes mécaniques.  $D_H$  est un amortissement qui permet de modéliser de manière simplifiée l'influence de la récupération d'énergie par l'élément de transduction sur la dynamique du résonateur [27].  $D_L$  est relié au coefficient d'amortissement mécanique global  $\xi_L$  et au facteur de qualité mécanique  $Q_m$  ( $\xi_L = D_L/2\sqrt{K/M}$  et  $Q_m = 1/2\xi_L$ ). De la même manière, un coefficient d'amortissement équivalent  $\xi_H$  lié à la récupération d'énergie peut être déduit du terme  $D_H$ .

Comme détaillé par Badel et Lefeuvre dans [27], il est possible de démontrer à partir du modèle décrivant le résonateur que  $\xi_H$  doit être égal à  $\xi_L$  pour maximiser la puissance électrique récupérée lorsque les vibrations sont sinusoïdales et que la fréquence des vibrations est égale à la fréquence de résonance du résonateur. Par ailleurs, la valeur optimale de  $\xi_H$ , notée  $\xi_{Hopt}$ , permettant de maximiser la puissance peut être déterminée analytiquement à chaque fréquence. La valeur de  $\xi_{Hopt}$  est représentée sur la Figure I.5.b en fonction de la pulsation normalisée  $\Omega$ .  $\Omega$  est exprimée en (I-1) et correspond la pulsation des vibrations  $\omega$  normalisée par la pulsation propre du résonateur  $\omega_1$  donnée en (I-2). On note  $f_1$  la fréquence propre. La puissance moyenne  $P$  récupérée à chaque fréquence peut finalement être déduite pour un amortissement  $\xi_H$  pris à ses valeurs optimales  $\xi_{Hopt}$ . La Figure I.5.c. représente la valeur de la puissance normalisée  $P'$  exprimée en (I-3) où  $\mathcal{A}_B$  est l'amplitude de l'accélération correspondant au déplacement  $y(t)$ .

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (I-1) \quad \omega_1 = 2\pi f_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (I-2) \quad P' = \frac{P8\omega_1}{M\mathcal{A}_B^2} \quad (I-3)$$

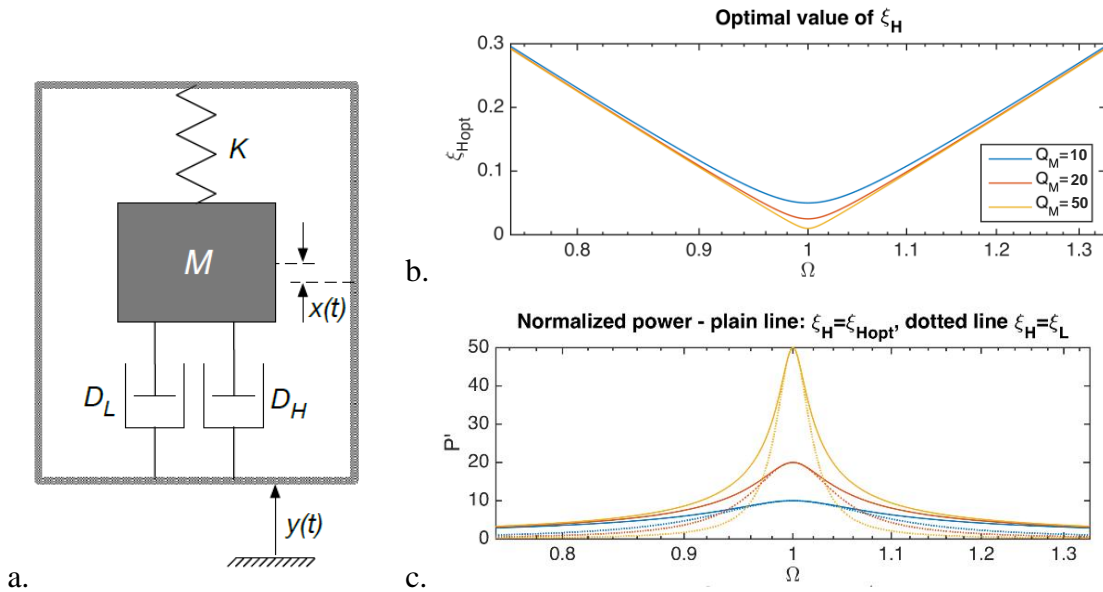


Figure I.5 : a. Schéma équivalent d'un système résonant de récupération d'énergie, b. Amplitude de la puissance normalisée  $P'$ , c. Valeurs de  $\xi_{Hopt}$ . [27]

La Figure I.5.c montre que les pertes mécaniques limitent la puissance récupérée pour une accélération  $\mathcal{A}_B$ , une pulsation de résonance  $\omega_1$  et une masse équivalente  $M$  fixées. Lorsque le couplage électromécanique d'un récupérateur est suffisamment grand, la puissance maximale récupérée à la résonance est proportionnelle au facteur de qualité (Figure I.5.c) et vaut  $M\mathcal{A}_B^2 Q_m/8\omega_1$ . Il paraît donc nécessaire de maximiser le facteur de qualité pour augmenter la puissance récupérée sans avoir à augmenter la masse équivalente du récupérateur  $M$ . D'autant

plus que l'augmentation du facteur de qualité permet aussi d'augmenter la puissance récupérée aux fréquences de vibration autres que la fréquence de résonance si l'amortissement électrique  $\xi_H$  est ajusté à chaque fréquence de vibration à la valeur optimale  $\xi_{Hopt}$ .

Cependant, lorsqu'un récupérateur résonant est utilisé, la puissance récupérée hors résonance (pour une fréquence de vibration éloignée de la résonance) reste très faible. Par ailleurs, plus le facteur de qualité est grand, plus la décroissance de puissance est abrupte lorsque la fréquence des vibrations s'éloigne de la fréquence de résonance (Figure I.5.c). La puissance est par exemple divisée par deux lorsque la fréquence des vibrations est éloignée de 0,5% de la fréquence de résonance du récupérateur lorsque le facteur de qualité mécanique est de 100. Il est donc nécessaire que la fréquence de résonance du récupérateur et la fréquence de vibration coïncident pour maximiser la puissance récupérée comme représenté sur la Figure I.6.a. Cependant, il est difficile de faire coïncider parfaitement ces deux fréquences dans le cadre d'applications réelles. En effet, la fréquence dominante des vibrations peut varier au court du temps et la fréquence de résonance du récupérateur peut être affectée par son vieillissement et/ou des variations de température.

Rantz et Roundy [28] ont analysé la base de données "Real Vibration" proposée par le laboratoire NiPS [29]. Ils ont montré qu'un tiers des signaux de véhicules (trains, voitures, etc.) analysés comportaient une fréquence dominante de vibration qui varie avec le temps. De plus, des mesures rapportées par Beeby *et al.* [30] montrent que les vibrations d'une pompe à eau d'une centrale de cogénération et celles du moteur d'un véhicule de ferry comportent des fréquences dominantes qui fluctuent respectivement de 2,5% et 2% autour de leurs fréquences de vibrations centrales. Si la fréquence de résonance du récupérateur est fixe et que la fréquence des vibrations varie alors la puissance récupérée est parfois très inférieure à celle récupérée à la résonance comme illustré sur la Figure I.6.b. De plus, même si la fréquence des vibrations est fixe (comme 58% des signaux de machines analysés par Rantz et Roundy [28]), la puissance diminue drastiquement (comme illustré sur la Figure I.6.c) si la fréquence de résonance du récupérateur varie avec la température. A titre d'exemple, Wozniak *et al.* [31] et Gasnier *et al.* [18] ont tous deux mesuré des variations de fréquences de résonance de leurs récupérateurs d'énergie dédiés à des applications aéronautiques lorsqu'ils les ont soumis à des variations de température. Wozniak *et al.* ont mesuré une variation de la fréquence de résonance de -7,0% de leur récupérateur en PMN-PT entre 0°C et 70°C tandis que Gasnier *et al.* ont mesuré une variation de -5,6% avec un récupérateur en PZT-5A entre 90°C et 120°C.

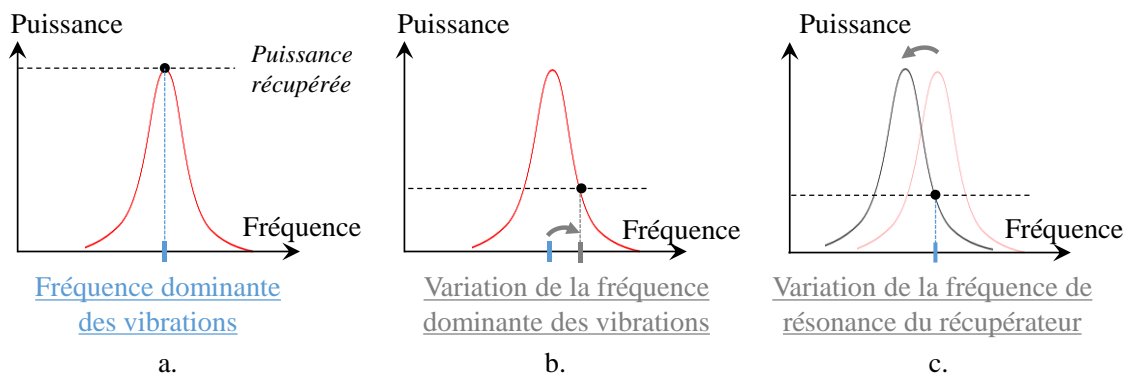


Figure I.6 : Influence de la variation de la fréquence de vibration et de la fréquence de résonance du récupérateur

Ainsi, au regard des différents cas présentés ci-dessus, la puissance devient rapidement insuffisante pour alimenter un capteur lorsque la fréquence de résonance du récupérateur et la fréquence des vibrations ne sont pas accordées. Par ailleurs, si le facteur de qualité est grand, de faibles variations de fréquences peuvent induire d'importantes variations de déplacements et d'amplitudes de tension. En outre, si la puissance est tout de même suffisante hors résonance grâce à l'utilisation d'un récupérateur possédant une très grande masse ou à l'exploitation d'une forte accélération, les contraintes en jeu lors d'un éventuel passage à la résonance pourraient dégrader le récupérateur. Finalement, il se peut que le circuit électronique ne sache pas s'adapter à des niveaux de tensions très variables.

Lorsque l'amplitude de l'accélération est limitée et qu'une très grande masse n'est pas envisageable, des récupérateurs résonants ayant de forts facteurs de qualité sont malgré tout nécessaires afin de produire suffisamment de puissance pour alimenter un capteur sans fil communicant. L'exploitation d'un phénomène de résonance est ainsi utile pour maximiser la puissance récupérée de récupérateurs d'énergie ayant des masses et des volumes restreints mais le phénomène de résonance n'est intéressant que sur une bande limitée de fréquences. Pour cette raison, la sélectivité en fréquence est un verrou majeur de la récupération vibratoire. La section suivante présente les solutions proposées dans la littérature pour résoudre les problèmes de sélectivité en fréquence des récupérateurs d'énergie vibratoire.

### I.3.2. Solutions existantes

Deux critères sont importants pour comparer les récupérateurs d'énergie vibratoire :

- La **bande passante** : afin d'aborder la problématique de la sélectivité en fréquence, nous définissons le terme de « bande passante » comme la plage de fréquences dans laquelle la fréquence des vibrations peut varier sans affecter fortement la puissance récupérée. La bande passante est généralement représentée par les fréquences  $f_{min}$  et  $f_{max}$  à laquelle la puissance vaut la moitié de la puissance maximale récupérable (bande passante à -3dB). Elle est donnée en pourcentage et est égale à  $[f_{min} - f_{max}] / [(f_{min} + f_{max}) / 2]$ .
- La **densité de puissance** : les récupérateurs doivent fournir une énergie suffisante tout en conservant de petites dimensions pour faciliter leur intégration dans des applications réelles. La densité de puissance, en  $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ , est alors souvent utilisée : elle équivaut à la puissance électrique récupérée, normalisée par le volume global du récupérateur. La puissance étant proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, les chercheurs utilisent parfois la **densité de puissance normalisée** (ou NPD pour *Normalized Power Density*) qui correspond à la densité de puissance normalisée par le carré de l'amplitude de l'accélération. La NPD est exprimée soit en  $\mu\text{W}/\text{cm}^3/\text{g}^2$ , soit en  $\text{kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Dans la suite, nous présentons les différentes solutions envisagées dans l'état de l'art pour élargir la bande passante.

#### a. Systèmes à plusieurs degrés de liberté

La conception de récupérateurs d'énergie ayant plusieurs fréquences de résonance a depuis longtemps été envisagée dans la littérature. Dans ce cas, deux méthodes sont généralement envisagées dans la littérature : l'utilisation de plusieurs résonateurs découplés ou l'exploitation de plusieurs fréquences de résonance d'un seul résonateur.

La Figure I.7 représente le schéma d'un récupérateur comportant plusieurs poutres<sup>1</sup> encastrées sur un socle commun tel que présenté en 2006 par Shahruz [32]. Bien que leur bande passante soit large, les récupérateurs utilisant plusieurs résonateurs offrent des faibles densités de puissance. En effet, à une fréquence de vibration donnée, seulement un résonateur est sollicité à sa résonance pour produire de l'électricité alors que les autres sont hors résonance.

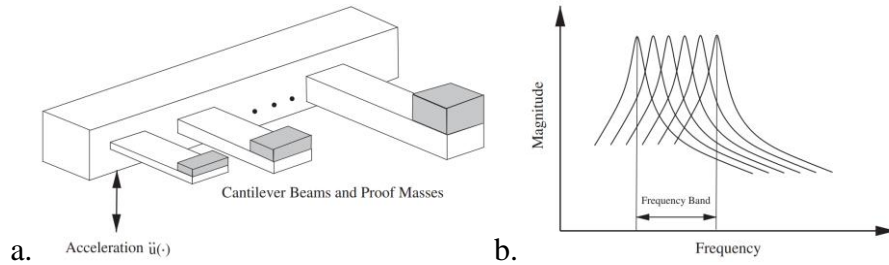


Figure I.7 : a. Schéma d'un système à plusieurs poutres de récupération, b. amplitude de la puissance en fonction de la fréquence [32]

Concernant les récupérateurs exploitant plusieurs fréquences de résonance d'un résonateur, plusieurs propositions ont été faites dans l'état de l'art afin de rapprocher la première et la seconde fréquence de résonance du dispositif. C'est le cas des dispositifs proposés par Tang *et al.* [33] et Moon *et al.* [34] qui sont représentées sur la Figure I.8 et la Figure I.9. Ces systèmes à plusieurs degrés de liberté offrent des bandes passantes intéressantes dans des volumes plus restreints que lorsque plusieurs poutres sont utilisées. Cependant, l'interaction entre les modes peut induire des phénomènes d'antirésonance préjudiciables pour la bande passante tels qu'observés sur le récupérateur de Tang *et al.* sur la Figure I.8.

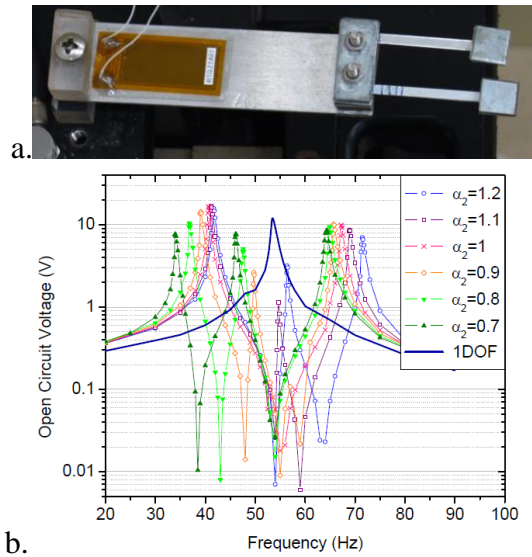


Figure I.8 : a. Système à deux degrés de liberté utilisant deux poutres, b. tension en fonction de la fréquence pour différents ratios de fréquences de résonance ( $\alpha_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ) [33]

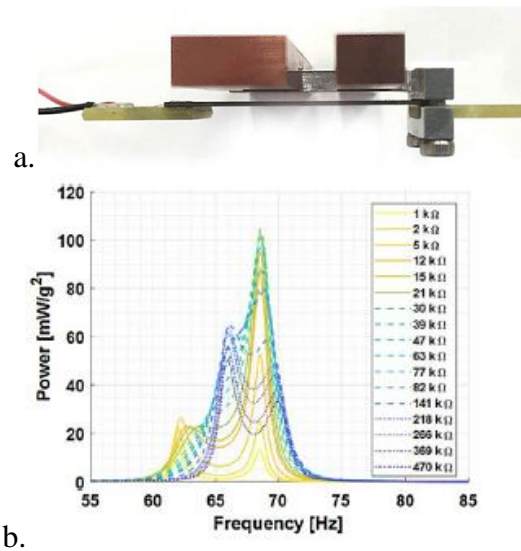


Figure I.9 : a. Système à deux degrés de liberté obtenu par la position du centre gravité de la masse mobile, b. puissance en fonction de la fréquence pour différentes résistances de charge [34]

<sup>1</sup> Les poutres encastrées-libre (également appelé *cantilever*) étant facile à dimensionner, il est simple de faire correspondre leur fréquence de résonance à la fréquence de vibration des applications. Ce type de structure est donc couramment utilisé pour réaliser des récupérateurs résonants, notamment de types piézoélectriques.

Pour permettre une large bande passante, les récupérateurs possédant plusieurs degrés de liberté nécessitent un grand nombre de fréquences de résonance. Or, la conception d'un récupérateur ayant plusieurs modes de résonances sur une bande restreinte de fréquences est complexe. De plus, l'utilisation d'un tel récupérateur augmente le risque d'interactions entre les modes de résonance.

*b. Système à ajustement mécanique de la fréquence de résonance*

Plusieurs systèmes permettant de modifier mécaniquement la fréquence de résonance des récupérateurs (*mechanical frequency tuning* en anglais) ont été proposés dans la littérature. Ce sont des solutions efficaces pour ajuster la fréquence de résonance des récupérateurs à la fréquence de vibration. Leland et Wright [35] ont par exemple montré qu'il était possible de faire varier la fréquence de résonance des récupérateurs piézoélectriques en appliquant manuellement une précontrainte axiale à l'installation. Depuis, plusieurs propositions ont été faites afin d'automatiser et de rendre autonome l'ajustement mécanique de fréquence de résonance. L'utilisation de l'interaction entre des aimants a par exemple été envisagée par Aboulfotouh *et al.* [36] qui ont utilisé en 2013 un moteur pas-à-pas pour automatiser l'ajustement. Cependant, l'énergie récupérée est inférieure à l'énergie nécessaire à l'ajustement. Des publications récentes (2017 et 2020) proposent des systèmes autonomes d'ajustement faisant varier la position du centre de gravité de la masse mobile de poutres encastrées-libres à l'aide d'un moteur piézoélectrique [37] ou d'un moteur pas-à-pas [38]. La proposition de Karadag et Topaloglu [37], qui permet une bande passante de 10%, nécessite l'utilisation d'une poutre piézoélectrique complémentaire pour assister l'algorithme d'ajustement de fréquence de résonance (Figure I.10), ce qui dégrade la densité de puissance. Le système de Shi *et al.* [38], quant à lui, ne nécessite pas de capteurs (Figure I.11) et permet une bande passante de 60% mais la puissance nécessaire aux moteurs est très supérieure (6,5mW) à la puissance récupérée (0,36mW). L'ajustement de fréquence ne peut alors se faire qu'après la durée nécessaire au chargement d'une super-capacité. Bien que ces deux systèmes soient autonomes en énergie, la consommation électrique des moteurs ( $>100\mu\text{W}$ ) et leur taille représentent un frein à l'utilisation de tels systèmes ainsi qu'à la réduction des dimensions.

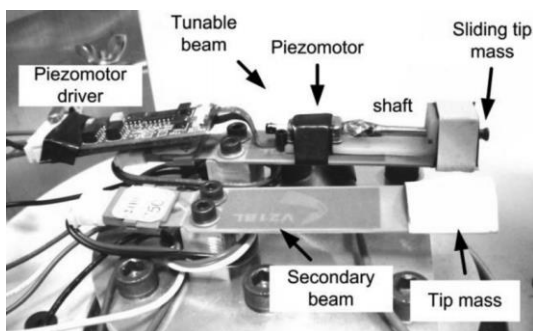


Figure I.10 : Récupérateur avec ajustement de fréquence par le déplacement de la masse grâce à un moteur piézoélectrique consommant  $130\mu\text{W}$ . Ce système offre une bande passante de 10% [37]

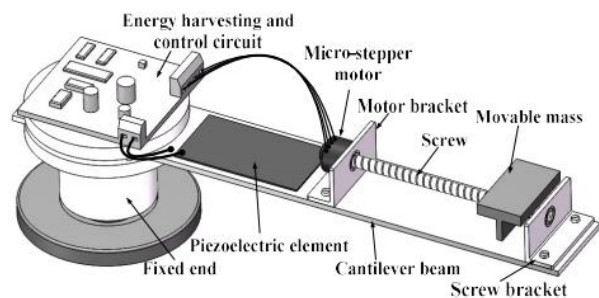


Figure I.11 : Récupérateur avec ajustement de fréquence par le déplacement de la masse grâce à un moteur pas à pas offrant une bande passante de 60% [38]

### c. Oscillateurs non-linéaires

L'ajout d'effets non-linéaires aux résonateurs est une solution répandue dans le domaine de la récupération d'énergie vibratoire. Les non-linéarités permettent de modifier la réponse fréquentielle du système résonant et d'élargir la plage de fréquence de récupération. De nombreux types de non-linéarités ont été proposés pour les récupérateurs d'énergie vibratoire. Celles-ci ont été répertoriées dans des articles de revues comme celle de Tran *et al.* [39] en 2018 et Jia [40] en 2020. On relève notamment :

- Les oscillateurs monostables de Duffing : l'oscillateur est réalisé de sorte à ce que son équation de mouvement comporte une raideur non-linéaire tout en conservant une unique position stable. La raideur équivalente du résonateur diminue (effet assouplissant ou *softening* en anglais) ou augmente (effet raidissant ou *hardening* en anglais) lorsque que le système s'éloigne de sa position d'équilibre. La réponse fréquentielle de tels systèmes est représentée en Figure I.12.a. Une des méthodes pour implémenter une raideur non-linéaire dans un récupérateur est l'intégration d'aimants induisant des forces d'attraction et/ou de répulsion. Cette méthode a été notamment réalisée par Stanton *et al.* [41] avec le récupérateur représenté sur la Figure I.12.b. Ces travaux ont permis d'atteindre expérimentalement une bande passante importante (24%) pour un balayage en fréquence descendant.

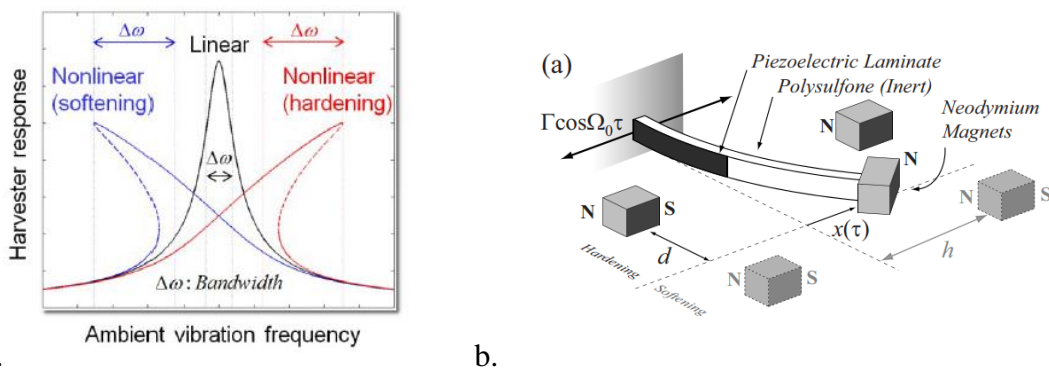


Figure I.12 : a. Réponses fréquentielles d'un oscillateur raidissant et d'un oscillateur assouplissant comparée à celle d'un oscillateur linéaire [42], b. oscillateur monostable de Duffing réalisé avec une poutre piézoélectrique et des aimants [41]

- Les oscillateurs bistables et multi-stables de Duffing : les systèmes multi-stables comportent également un élément de raideur non-linéaire tout en ayant la particularité d'avoir deux positions stables ou plus. Leur implémentation peut également se faire par l'intermédiaire d'aimants (Figure I.13) ou par le flambage d'une poutre (Figure I.14). La bande passante des récupérateurs bistables est plus grande que les récupérateurs monostables mais le comportement fréquentiel des oscillateurs bistables reste très dépendant du niveau d'accélération [43].

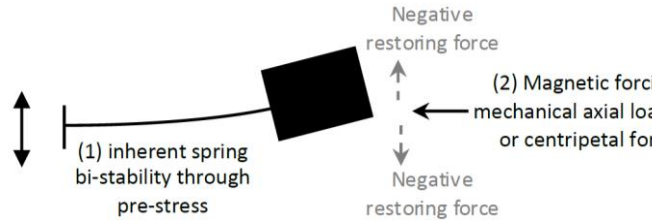
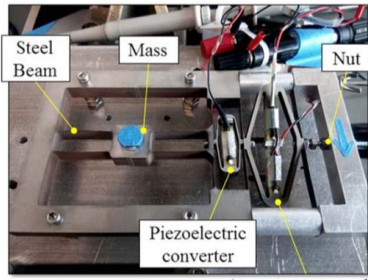
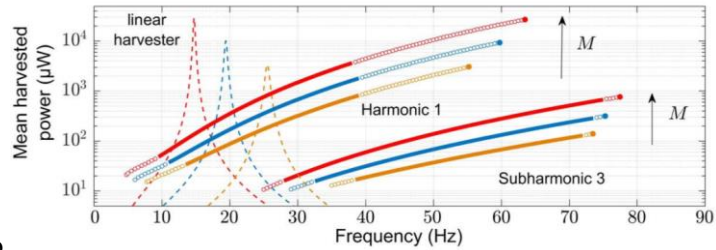


Figure I.13 : Illustration de l'intégration du comportement bistable sur une poutre encastree-libre [40]



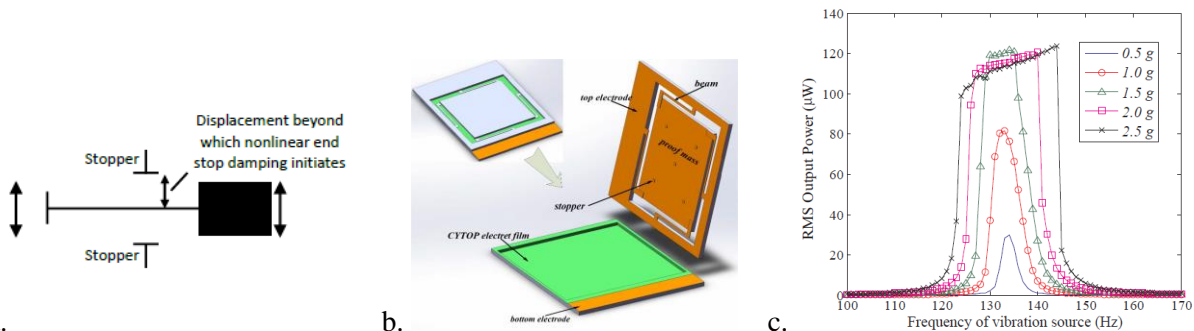
a.



b.

Figure I.14 : a. Exemple d'un récupérateur bistable par flambage, b. puissance théorique en fonction de la fréquence pour plusieurs masses équivalentes [44]. La puissance est également donnée pour des configurations de récupérateurs linéaires équivalents.

- La résonance stochastique : la résonance stochastique est un phénomène qui permet d'amplifier la réponse harmonique d'un résonateur non-linéaire uniquement par l'ajout de bruit aux vibrations. La résonance stochastique est notamment exploitée pour permettre à des récupérateurs bistables de vibrer entre leurs deux positions stables à de plus faibles niveaux accélération que lorsqu'ils sont utilisés sans ce phénomène. Cette solution s'avère pertinente pour des applications où les signaux des vibrations comportent du bruit [45].
- Les butées mécaniques : des butées mécaniques peuvent être intégrées à un récupérateur pour limiter le déplacement relatif du résonateur et limiter les contraintes maximales dans les matériaux tel qu'illustré sur la Figure I.15.a. Celles-ci peuvent de plus servir à induire des effets non-linéaires, à l'image des travaux de Zhang *et al.* [46] sur un récupérateur électrostatique (Figure I.15). Ce dispositif permet d'obtenir une bande passante de 30% à 2,5g d'amplitude d'accélération. Cependant, les chocs mécaniques peuvent être un frein à l'utilisation de butées car ils induisent de l'usure. Pour des récupérateurs de types MEMS, l'air peut aussi jouer un rôle de « butée douce », à l'image du phénomène d'amortissement à film écrasé (*squeeze film damping*) [47].



a.

b.

c.

Figure I.15 : a. Illustration de l'implémentation de butées sur une poutre [40], b. système électrostatique avec butées, c. puissance mesurée pour plusieurs accélérations [46]



- **Les oscillateurs paramétriques :** les oscillateurs paramétriques sont des résonateurs dont un des paramètres (la raideur ou la masse équivalente par exemple) varie temporellement. L'exemple courant d'un résonateur paramétrique est l'enfant qui plie périodiquement ses genoux sur une balançoire (variation de la répartition de la masse) pour amplifier son mouvement [48]. Dans le cadre de la récupération d'énergie, la variation de paramètres peut intervenir soit en réponse à une excitation externe ou soit de manière interne au récupérateur grâce à la présence d'un coefficient de proportionnalité entre ses fréquences de résonance (principe de résonances internes illustré en Figure I.16.a.). L'influence entre les fréquences de résonance permet d'élargir la bande passante et d'augmenter la puissance récupérée (Figure I.16).

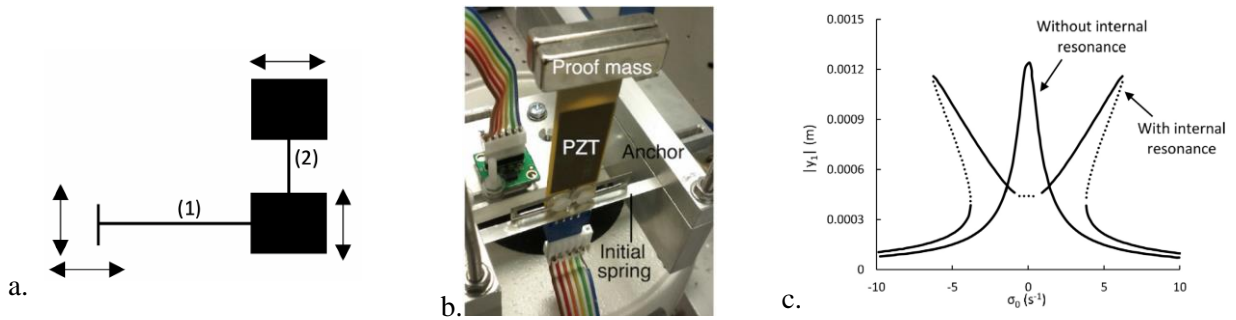


Figure I.16 : a. Illustration de l'implémentation de résonances internes sur une poutre [40]. Le résonateur (1) et le résonateur (2) sont liés par un rapport de 2:1 ou 1:2 de leurs fréquences de résonance. Ce rapport interne de fréquence  $f$  permet à un résonateur d'être en résonance à la fréquence  $2f$  pour entraîner l'autre ( $1f$ ) en résonance paramétrique. b. prototype à résonance paramétrique [49], c. représentation théorique de l'amplitude de la puissance récupérée avec une résonance interne [39]

- **Les conversions de fréquences :** les systèmes de conversions de fréquences induisent des effets non-linéaires en utilisant un couplage physique entre un résonateur haute fréquence et un résonateur basse fréquence. Le résonateur de récupération étant souvent haute fréquence, le résonateur basse fréquence non utilisé pour la récupération sert à la conversion de fréquence (Figure I.17). Cela permet, d'une part, de récupérer de l'énergie à des fréquences plus basses que si le système de récupération était utilisé seul et d'autre part, d'avoir un comportement non-linéaire. A titre d'exemple, le récupérateur proposé par Zhang et Qin [50] atteint une bande passante intéressante de 10%.



Figure I.17 : a. Illustration de l'implémentation de conversion de fréquence, [40], b. prototype sollicitant la conversion de fréquence [50], c. puissance récupérée pour plusieurs configurations de distances entre les poutres (LFDB : *low frequency driving beam*, HFGB : *high frequency generating beam*)

- Les systèmes avec auto-ajustement : certains systèmes ont été réalisés pour être capables d'ajuster eux-mêmes leur fréquence de résonance sans énergie extérieur. A l'inverse des systèmes à ajustement de fréquence proposés dans la section précédente, la fréquence de résonance de tels récupérateurs s'accorde automatiquement à la fréquence des vibrations sans l'intervention d'un actionneur. C'est le cas notamment de la poutre bi-encastree avec une masse glissante représentée sur la Figure I.18 qui permet une bande passante de 45%. Cependant, un délai est nécessaire pour que la masse se déplace à chaque variation de fréquence de vibration. Le récupérateur peut de plus être sujet à l'usure à cause des frottements de la masse mobile sur la poutre.

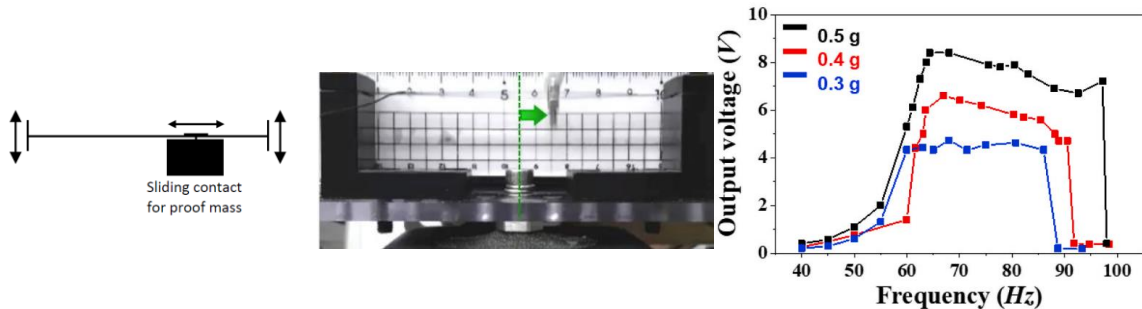


Figure I.18 : a. Illustration de l'implémentation de l'auto-ajustement sur poutre bi-encastree b. prototype avec auto-ajustement [51], c. tension mesurée pour différents niveaux d'accélération

Les techniques non-linéaires présentées ci-dessus montrent que des solutions variées sont proposées dans la littérature pour introduire des non-linéarités aux récupérateurs d'énergie vibratoire et étendre la bande passante. Certaines techniques peuvent être très efficaces pour élargir la bande passante mais chacune présente des inconvénients. Comme mentionné dans l'article de revue de Jia [40], chaque technique non-linéaire ne donne en général de très bons résultats que sur un type de vibration (vibration mono-harmonique à fréquence variable, vibration avec bruit, vibration sur large spectre, etc.). Par exemple, plusieurs techniques non-linéaires, telles que les monostables de Duffing et la résonance paramétrique, présentent un comportement différent en réponse à un balayage fréquentiel descendant (*down frequency sweep*) et en réponse à un balayage fréquentiel ascendant (*up frequency sweep*). A une fréquence de vibration donnée et pour un oscillateur de type *hardening* (Figure I.12), la puissance récupérée suite à un balayage descendant peut être inférieure à celle récupérée suite à un balayage ascendant. Ce phénomène, que l'on appelle hystérésis dans le domaine fréquentiel, représente un frein à l'intégration de ces techniques non-linéaires pour certaines applications car la réponse des récupérateurs dépend des conditions initiales.

Par ailleurs, les récupérateurs bistables peuvent être sollicités hors résonance pour récupérer de l'énergie sur un large spectre de fréquence de vibration. Dans ce cas, la puissance récupérée est indépendante de la fréquence et dépend uniquement de l'amplitude des déplacements [40]. Cependant, pour des vibrations ayant une fréquence dominante unique, un récupérateur bistable permet de récupérer moins de puissance à la résonance qu'un récupérateur linéaire équivalent. Ainsi, les récupérateurs bistables sont avantageux pour le cas d'applications à large spectre fréquentiel.

Les avantages et inconvénients des systèmes non-linéaires sont synthétisés dans le Tableau I.4.

Tableau I.4: Avantages et inconvénients des approches non-linéaires, basé sur [40]

<b>Principe</b>	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
Monostable de Duffing	Meilleure bande passante comparée aux systèmes linéaires Les oscillateurs faiblement non-linéaires n'ajoutent pas de complexité importante à la conception Les systèmes fortement non-linéaires permettent une très grande bande passante	Leur réponse n'a pas de différence fondamentale comparée aux oscillateurs linéaires lorsqu'ils sont sujets à une excitation large bande Conception complexe pour des résonateurs fortement non-linéaires Hystérésis dans le domaine fréquentiel
Bistable et multi-stable de Duffing	Approprié à des faibles fréquences et des grandes amplitudes d'accélération. Approprié pour répondre à un bruit de vibration large bande de grande amplitude	La précontrainte inhérente à la bistabilité induit des complexités de fabrication La conception nécessite la connaissance des niveaux d'accélération de l'application
Résonance stochastique	Capable d'utiliser le bruit large bande pour augmenter la puissance de sortie	Simulation et conception complexes La puissance de sortie est faible en dehors de la résonance stochastique
Résonance paramétrique	Plus grande puissance et plus grande bande passante que les systèmes linéaires. La bande passante et la puissance peuvent augmenter simultanément avec la réduction de l'amortissement	Simulation et conception complexes. Hystérésis dans le domaine fréquentiel.
Conversion de fréquence	Approprié pour des vibrations de basses fréquences	Fatigue mécanique si le système induit des impacts
Butées mécanique	Bande passante plus large que les systèmes linéaires au-delà d'une certaine amplitude Approprié aux récupérateurs qui aurait fourni un excès de puissance	Fatigue mécanique due aux impacts Perte de puissance due à l'amortissement de la butée
Auto-ajustement	Capabilité d'ajuster la fréquence de résonance à la fréquence de vibration sans énergie extérieur	Fatigue mécanique due au glissement

Pour finir, les techniques non-linéaires nécessitent l'addition de mécanismes, tels que des aimants ou un double encastrement, pour introduire des non-linéarités aux systèmes de récupération basiques (Figure I.12 à Figure I.18). Le volume d'un récupérateur non-linéaire est alors généralement plus important, la densité de puissance est réduite par rapport au cas où un système de récupération est utilisé seul. De plus, la réponse des récupérateurs non-linéaires dépendant en général fortement de l'amplitude d'accélération des vibrations. Ceci implique une complexité supplémentaire à la conception et peut induire des performances (puissance récupérée et bande passante) très variables suivant le niveau d'accélération.

#### d. Ajustement de fréquence de résonance par des méthodes électriques

Contrairement à l'ajout de dispositifs mécaniques pour introduire des non-linéarités ou ajuster la fréquence de résonance, il a été proposé par plusieurs équipes de recherche d'étendre la bande passante de récupérateurs d'énergie piézoélectriques en ajustant leurs fréquences de résonance avec des méthodes électriques. Grâce au couplage électromécanique des récupérateurs piézoélectriques, il est possible de faire varier leurs fréquences de résonance uniquement grâce à un circuit électrique dédié. Un circuit de gestion électrique basé sur des capacités variables a par exemple été proposé par Wu *et al.* [52] en 2006. De la même manière, en 2007, Charnergie [53] a étudié l'ajustement de fréquence de résonance par l'intermédiaire de capacités et il a par ailleurs proposé des éléments d'optimisation du récupérateur piézoélectrique. Même si les propositions de Wu et Charnergie étaient prometteuses, elles nécessitaient l'utilisation d'un réseau de plusieurs condensateurs dans le circuit. De plus, de faibles bandes passantes (<4%) ont été atteintes par ces systèmes.

Des travaux récents sur l'ajustement électrique de fréquence de résonance rendent cette technique de plus en plus intéressante pour élargir la bande passante de récupérateurs d'énergie vibratoire. Il a notamment été montré qu'utiliser des récupérateurs à fort coefficient de couplage électromécanique global permet d'élargir considérablement la bande passante [27]. Dans ce contexte, des prototypes basés sur des matériaux piézoélectriques monocristallins ont été proposés par les équipes de recherches dont le CEA-Leti. Ahmed-Seddik *et al.* [54], [55] ont proposé un prototype très fortement couplé ( $k^2 = 49\%$ ) comportant du PZN-PT et pouvant atteindre 32,7% de bande passante lorsqu'il est associé à un réseau de capacités.

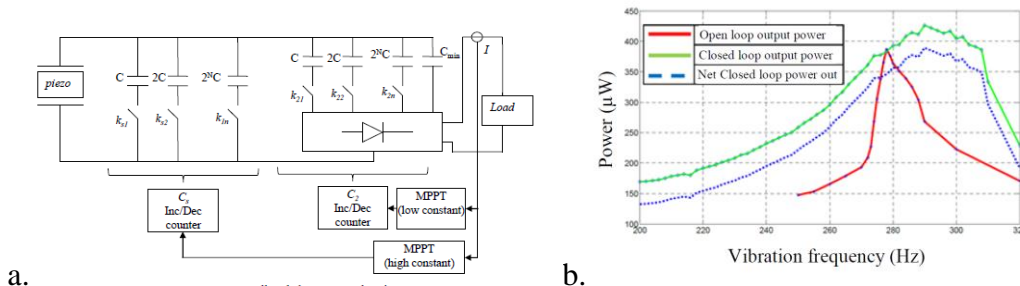


Figure I.19 : a. Circuit proposé par Ahmed-Seddik *et al.* [55], b. puissance récupérée sans système d'ajustement (BO : boucle ouverte) et avec système d'ajustement (BF : boucle fermée)

Par ailleurs, des techniques électriques non-linéaires basées sur la technique SECE (*Synchronous Electric Charge Extraction* [56]) ou la technique SSHI (*Synchronized Switch Harvesting on Inductor* [57]) ont été proposées afin d'éviter l'intégration de plusieurs capacités dans un circuit. Badel et Lefeuvre [58] ont notamment présenté en 2014 la technique de FT-SECE (*Frequency Tuning SECE*) qui permet théoriquement d'atteindre une bande passante de 45 % si elle est utilisée avec leur prototype en PZN-PT très fortement couplé ( $k^2 = 53\%$ ). La FT-SECE a récemment permis à une équipe comportant 3 laboratoires français [59] d'atteindre une bande passante expérimentale de 12% avec un prototype en PMN-PT ( $k^2 = 13\%$ ).

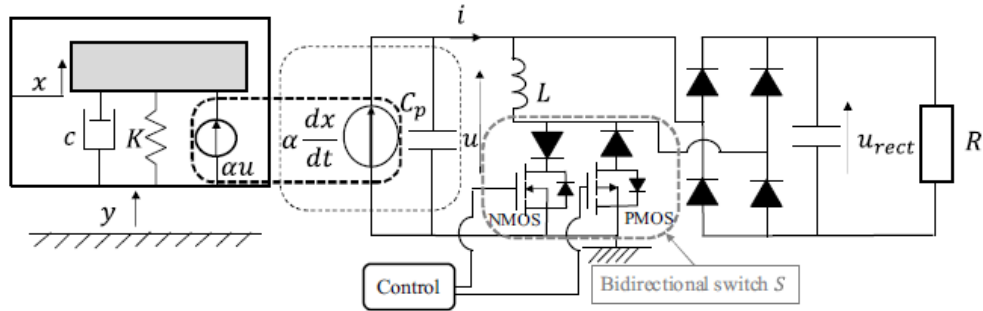


Figure I.20 : Circuit FT-SECE dédié à l'ajustement de fréquence de résonance proposé dans [59]

D'autres méthodes telles que la N-SECE [60], la Phase-Shift SECE [61] et la Short-Circuit SECE (SC-SECE) [62] ont été proposées et expérimentées sur des prototypes très fortement couplés. Grâce à la SC-SECE [62], Morel *et al.* ont par exemple atteint une bande passante de 43% avec un prototype de PZN-PT (Figure I.21).

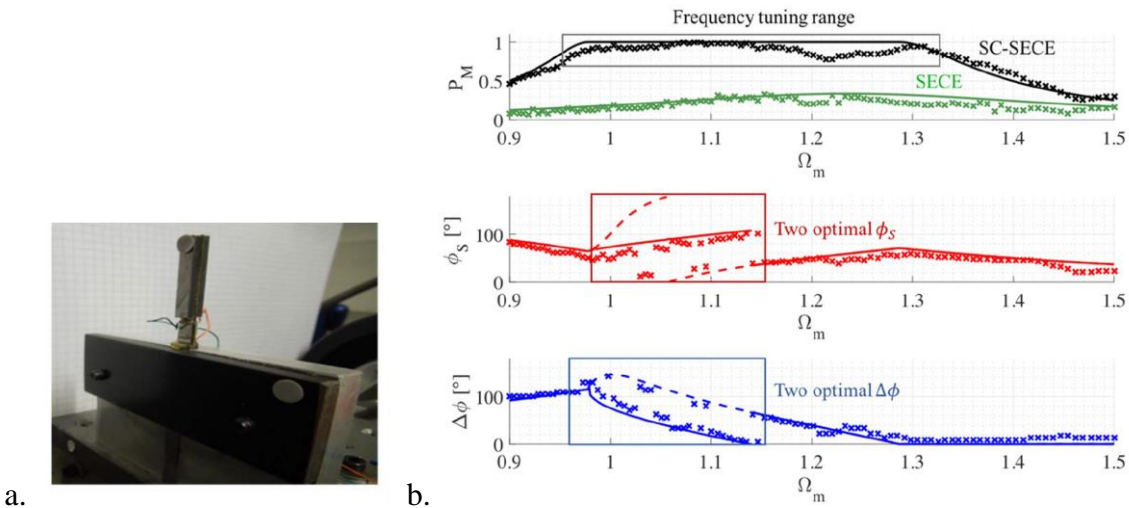


Figure I.21 : a. Prototype et b. résultats de puissance normalisée de SC-SECE [62] Le *Frequency tuning range* sur la figure correspond à la plage où les paramètres  $\phi_s$  et  $\Delta\phi$  doivent être ajustés pour obtenir la puissance maximale

Bien que les monocristaux utilisés (PMN-PT et PZN-PT) permettent d'obtenir très bons résultats en matière de bande passante (jusqu'à 43%), ces derniers ont une mauvaise tenue à la température par rapport aux céramiques piézoélectriques. Ils sont également difficiles et coûteux à produire industriellement à l'heure actuelle. Plusieurs équipes ont donc travaillé sur l'utilisation de céramiques avec des techniques non-linéaires électriques. En 2018, Cai et Manoli [63] de l'IMTEK ont réussi à obtenir une bande passante de 9,0 % avec une interface améliorée se basant sur la SECE et, en 2019, Zhao *et al.* [64] ont atteint une bande passante de 6,9 % avec une technique électrique non-linéaire couplée à un cantilever à base de PZT-5H ( $k^2 = 6,5 \%$ ). Malgré ces réalisations intéressantes, ces deux travaux ont utilisé des poutres du commerce ayant des coefficients de couplage électromécanique modérés et des facteurs de qualité faibles. Même si les techniques d'extraction électriques présentées par ces deux équipes ont une influence notable sur les bandes passantes expérimentées, leurs remarquables bandes

passantes sont en partie dues au faible facteur de qualité des récupérateurs ( $Q_m = 28$  pour Cai et Manoli et  $Q_m = 40$  pour Zhao *et al.*), ce qui conduit à des solutions à faible densité de puissance.

La solution d'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques présente l'avantage de ne nécessiter aucun dispositif mécanique supplémentaire pour effectuer l'ajustement de fréquence. Un sous-circuit supplémentaire au circuit de gestion électrique est malgré tout nécessaire pour réaliser le suivi de fréquence en « temps réel ». Des circuits intégrés très basse consommation ont récemment été proposés dans ce but. A titre d'exemple, le circuit de Cai et Manoli [63] ne consomme que  $0,38\mu\text{W}$ , soit 0.5% de l'énergie récupérée, pour réaliser le suivi de fréquence. Morel *et al.* [65] ont proposé un circuit intégrant une *Phased-Shifted* SECE et permettant d'obtenir une bande passante de 17% avec un des prototypes en PZT ( $k^2 = 17\%$ ) proposés dans ce manuscrit. Le circuit d'ajustement fréquentiel ne consomme que 30 nW alors que la puissance récupérée est de  $60\mu\text{W}$ .

Bien que l'ajustement de la fréquence de résonance électrique se consacre, jusqu'alors, uniquement à des vibrations mono-harmoniques et ne représente qu'une alternative parmi d'autres pour récupérer de l'énergie vibratoire à large bande, cette solution est en plein essor et présente des avantages considérables :

- Comme aucun système mécanique supplémentaire n'est nécessaire, une bonne densité de puissance est envisageable.
- Un circuit de gestion électrique est déjà nécessaire pour les récupérateurs d'énergie vibratoire. L'intégration d'un système d'ajustement de fréquence optimisé à ce circuit n'induit pas nécessairement une surconsommation excessive comme démontré expérimentalement par Morel *et al.* [65]. L'ajustement de fréquence de résonance peut donc se faire quasiment en continu et à consommation et encombrement négligeables.
- Contrairement aux techniques non-linéaires mécaniques, l'efficacité de l'ajustement de fréquence de résonance par méthode électrique ne dépend a priori pas de l'amplitude de l'accélération.

Jusqu'alors, les travaux d'ajustement par méthodes électriques se concentrent principalement sur les récupérateurs de type piézoélectriques car leur potentiel d'ajustement en terme de bande passante a été démontré [27]. Il est important de mentionner que les chercheurs commencent aussi à étudier l'application de ces méthodes sur des récupérateurs vibratoires électromagnétiques. La thèse de Gallien Delattre (CEA) débutée en novembre 2019 en est un exemple.

### I.3.3. Positionnement de la thèse

Nous avons répertorié dans la Figure I.22 les récupérateurs démontrant de larges bandes passantes et de grandes densités de puissance normalisée (NPD) recensés dans les travaux de Liu *et al.* [66] et Zhang *et al.* [46]. Les travaux répertoriés ici sont limités aux récupérateurs ayant des bandes passantes supérieures à 2% et des NPDs supérieures à  $10\mu\text{W}/\text{cm}^3/\text{g}^2$ . Les caractéristiques et les références de ces récupérateurs sont données dans le Tableau I.5.

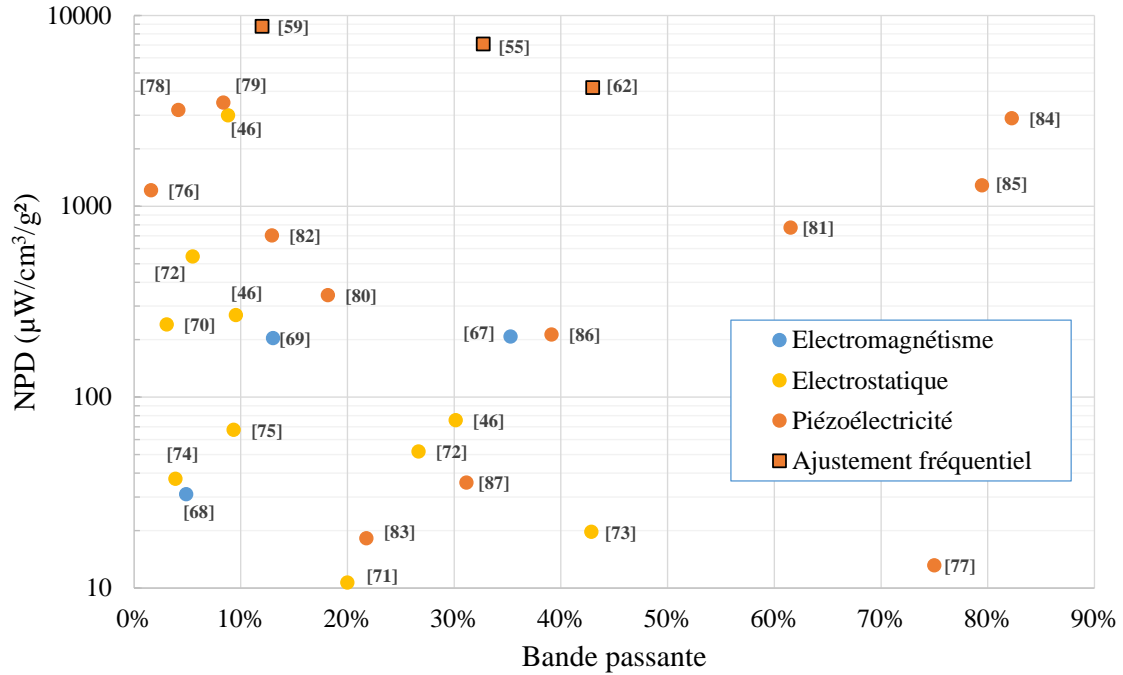


Figure I.22 : Prototypes à forte NPD et à large bande passante. « Ajustement fréquentiel » correspond aux récupérateurs piézoélectriques mettant en œuvre l'ajustement de fréquence de résonance par des méthodes électriques. Les valeurs sont données dans le Tableau I.5.

Tableau I.5 : Caractéristiques et références des récupérateurs à forte densité de puissance et à large bande passante

	Source	Fréquence centrale (Hz)	Accélération (m/s <sup>2</sup> )	Puissance (µW)	Volume totale (cm <sup>3</sup> )	NPD (µW/cm <sup>3</sup> /g <sup>2</sup> )	Bande passante
<b>Electromagnétique</b>	[67]	8,5	5	2010	40,1	208	35,3%
	[68]	102	9,8	290	8,6	31	4,9%
	[69]	59,8	9,8	1180	5,8	203	13%
<b>Electrostatique</b>	[70]	179	0,3	0,03	0,15	241	3,1%
	[71]	110	20	20,7	0,484	10,7	20,0%
	[72]	150	10	2,2	0,042	52	26,7%
	[72]	109	2,5	1,3	0,038	547	5,5%
	[73]	28	5	1,5	0,305	19,7	42,9%
	[74]	95	4,2	0,95	0,14	37,4	3,9%
	[75]	139	9,8	54	0,8	67,5	9,4%
	[46]	136	0,9	4,95	0,187	2995	8,8%
	[46]	136	3,1	4,94	0,187	269	9,6%
	[46]	136	6,1	5,56	0,187	75,8	30,1%
<b>Piézoélectricité</b>	[76]	263	1	0,15	0,0121	1220	1,6%
	[77]	16	10	22	1,67	13,2	75,0%
	[78]	385	0,5	52,9	6,5	3200	4,2%
	[79]	155	9,8	95	0,027	3500	8,4%
	[80]	16,5	9,8	9360	27,3	342	18,2%
	[81]	5,2	10	105000	130	773	61,5%
	[82]	29,4	1	920	125	704	12,9%
	[83]	12,6	10	360	19	18,2	21,8%
	[84]	19,4	3	13000	48	2900	82,3%
	[85]	47,1	6	2634	5,46	1290	79,5%
	[86]	11,5	19,6	34000	40	213	39,1%
[87]	74,6	14	720	9,9	35,7	31,2%	
<b>Ajustement de fréquence</b>	[55]	208	0,98	480	6,76	7100	32,7%
	[62]	115	0,29	4	1,06	4190	43,0%
	[59]	29	0,40	93	6,3	8780	12,0%

A la lecture de la Figure I.22, on peut tout d'abord remarquer que peu de récupérateurs électromagnétiques semblent présenter à la fois une large bande passante et une grande densité de puissance. La plupart des récupérateurs larges bandes électromagnétiques relevés dans [46] et [88] présentent de faibles NPDs. A l'inverse, la bande passante des systèmes électromagnétiques à très fortes densités de puissance est soit faible, soit non fournie dans les références. Les systèmes de types piézoélectriques semblent globalement présenter de meilleures densités de puissance par rapport aux récupérateurs électrostatiques et électromagnétiques. De très larges bandes passantes sont accessibles par le récupérateur piézoélectrique bistable présenté par Mann et Owens [81] et ceux présentés de Liu *et al.* [84], [85]. Cependant, de forts niveaux d'accélération sont nécessaires pour profiter d'un comportement bistable (mesures à 10, 3 et 6 m/s<sup>2</sup> respectivement dans [81], [84], [85]).

Les récupérateurs piézoélectriques utilisant l'ajustement de fréquence de résonance par méthode électrique, quant à eux, peuvent être appliqués à de faibles niveaux d'accélération et présentent de très grandes NPD (>4000μW/cm<sup>3</sup>/g<sup>2</sup>) tout en ayant de larges bandes passantes (>10%). Même si les bandes passantes recensées correspondent davantage à l'ajustement d'une bande étroite de fréquence qu'à un comportement vraiment large bande, ce comportement est intéressant pour les applications où les vibrations comportent une fréquence dominante qui varie. De larges bandes de fréquences d'ajustement sont accessibles par des méthodes électriques si, d'une part, le récupérateur est optimisé pour démontrer un fort couplage électromécanique global ainsi qu'une forte NPD et si, d'autre part, le circuit de gestion électrique permet d'ajuster efficacement la fréquence de résonance (Figure I.23).

De nombreux travaux ont été proposés pour optimiser les circuits de gestion électrique [59], [62], [65] mais peu se sont concentrés sur l'optimisation des structures piézoélectriques à fort couplage électromécanique (partie bleue sur la Figure I.23). Les prototypes à base de monocristaux utilisés jusqu'alors sont soit complexes [54], soit dépourvus de méthode de conception [58]. Quant aux prototypes utilisant des céramiques piézoélectriques, ils sont généralement faiblement couplés et ne permettent un ajustement en fréquence que sur de faibles bandes de fréquences.

Il est donc pertinent de fournir des règles de dimensionnement pour les prototypes très fortement couplés afin de généraliser l'utilisation de l'ajustement de fréquence de résonance par méthode électrique. Cette thèse vise à apporter des éléments de réponse à cette problématique : ***Comment réaliser des récupérateurs d'énergie vibratoires piézoélectriques simples, performants et robustes qui permettent l'ajustement de la fréquence de résonance grâce par méthodes électriques ?***



Figure I.23 : Représentation du positionnement de la thèse

Au cours de ce manuscrit, nous traiterons cette problématique en considérant les critères de performances de la récupération d'énergie vibratoire, que sont la densité de puissance et la



bande passante. Nous aborderons notamment la simplicité de conception et de fabrication des récupérateurs étudiés afin de mieux envisager un processus d'industrialisation. Nous chercherons également le maintien des performances en environnements sévères tels qu'en réponse à des variations de la température ambiante.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons la notion de coefficient de couplage électromécanique qui est le facteur de mérite que nous cherchons à maximiser dans cette thèse. Dans ce but, nous rappelons tout d'abord les équations fondamentales de la piézoélectricité et nous présentons les modes de couplages des matériaux piézoélectriques communément utilisés. Nous démontrons ensuite analytiquement qu'il est intéressant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique global des récupérateurs piézoélectriques pour l'ajustement de fréquence de résonance. Enfin, après avoir analysé les différentes méthodes de la littérature pour maximiser le coefficient de couplage électromécanique global de récupérateurs piézoélectriques, nous présentons à la fin de ce chapitre la configuration que nous avons choisie d'étudier dans cette thèse.

## **I.4. Notion de couplage électromécanique et intérêt**

### **I.4.1. Introduction aux équations de la piézoélectricité**

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux qui comportent un couplage électromécanique. Ils font intervenir ensemble des grandeurs mécaniques (contrainte, déformation) et des grandeurs électriques (champ électrique et champ de déplacement électrique). En petites déformations et pour des champs électriques faibles, leurs comportements peuvent être modélisés par des équations linéaires. Ainsi, il est possible de déterminer des tenseurs qui définissent les relations entre la contrainte  $T$ , la déformation  $S$ , le champ électrique  $E$  et le champ de déplacement électrique  $D$  grâce à l'approche thermodynamique.

Comme certains de ces tenseurs sont d'ordre 4 et sont difficiles à aborder, la convention matricielle de Voigt est largement utilisée pour décrire les relations de la piézoélectricité et simplifier la lecture des équations. Comme les tenseurs sont symétriques, les tenseurs d'ordre 2 de contraintes et de déformations sont remplacés par des vecteurs  $1 \times 6$ . Les composantes 1, 2 et 3 des vecteurs correspondent alors aux composantes normales  $xx$ ,  $yy$  et  $zz$ . Les composantes de cisaillement  $yz$ ,  $zx$  et  $xy$  sont représenté par les composantes 4, 5 et 6 respectivement [89]. L'orientation des axes est représentée dans la Figure I.24. Les axes 1, 2 et 3 correspondent aux axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  respectivement. Les tenseurs de rigidité et de compliance d'ordres 4 sont décrits par des matrices de dimension  $6 \times 6$ . Les termes de cisaillement sont divisés par 2 entre les notations tensorielles et matricielles. La correspondance entre les relations tensorielles et matricielle est détaillée dans le document [90].

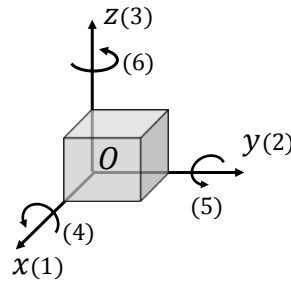


Figure I.24 : Axes pour la notation tensorielle pour les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et pour la notation de Voigt pour les directions 1 à 6.

Tableau I.6 : Relations matricielles piézoélectriques [91, p. 16]

Variables indépendantes	Type	Relations piézoélectriques	Forme
$S, D$	Extensif	$\begin{cases} T = c^D S - h D \\ E = -h S + \beta^S D \end{cases}$	Forme $h$
$T, E$	Intensif	$\begin{cases} S = s^E T + d E \\ D = d T + \epsilon^T E \end{cases}$	Forme $d$
$T, D$	Mixte	$\begin{cases} S = s^D T + g D \\ E = -g T + \beta^T D \end{cases}$	Forme $g$
$S, E$	Mixte	$\begin{cases} T = c^E S - e E \\ D = e^t S + \epsilon^S E \end{cases}$	Forme $e$

Tableau I.7 : Définition des grandeurs et des coefficients des matériaux piézoélectriques [90]

Grandeur	Ecriture	Signification	Ordre du tenseur	Dimensions de la matrice	Unité
Mécanique	$S$	Déformation	2	6x1	
	$T$	Contrainte	2	6x1	N/m <sup>2</sup>
	$c$	Rigidité	4	6x6	N/m <sup>2</sup>
	$s$	Compliance	4	6x6	m <sup>2</sup> /N
Électrique	$E$	Champ électrique	1	3x1	V/m
	$D$	Induction	1	3x1	C/m <sup>2</sup>
	$\epsilon$	Permittivité diélectrique	2	3x3	F/m
	$\beta$	Imperméabilité	2	3x3	m/F
Piézoélectrique	$d$	Coefficients piézoélectriques	3	3x6	C/N ou m/V
	$g$		3	3x6	Vm/N ou m <sup>2</sup> /C
	$e$		3	3x6	C/m <sup>2</sup> ou N/Vm
	$h$		3	3x6	V/m ou N/C

Les exposants  $E$ ,  $T$ ,  $S$  et  $D$  utilisés dans le Tableau I.6 informent que les coefficients sont mesurés respectivement à champ électrique constant, à contraintes constantes, à déformations constantes et à inductions électriques constantes. L'exposant  $\square^t$  signifie transposée de la matrice. Les vecteurs et les matrices seront notés en gras dans ce manuscrit. La forme d'équation utilisée ( $h$ ,  $d$ ,  $g$  ou  $e$  dans le Tableau I.6) est choisie en fonction des grandeurs imposées et celles mesurées dans le cadre de l'application considérée [91, p. 23]. Lorsqu'un matériau piézoélectrique est utilisé en tant qu'actionneur, un champ électrique  $E$  est utilisé pour engendrer une déformation  $S$ . Comme on souhaite dans ce cas exprimer  $S$  en fonction de  $E$ , il est donc préférable d'utiliser les équations sous la forme intensive (ou forme  $d$ ). Dans le cadre de la récupération d'énergie, une déformation est utilisée pour engendrer une variation de la

polarisation. On utilise alors la forme mixte  $S, E$  (ou forme  $e$ ). Dans tous les cas, il est possible de passer d'une forme à une autre grâce aux équations du Tableau I.8.

Tableau I.8: Relations entre les formes piézoélectrique [89]

Elastique	Piézoélectrique	Diélectrique
$c^E = (s^E)^{-1}$	$d = \epsilon^T g = es^E$	$\beta^S = (\epsilon^S)^{-1}$
$c^D = (s^D)^{-1}$	$e = \epsilon^S h = dc^E$	$\beta^T = (\epsilon^T)^{-1}$
$c^D = c^E + e^t h$	$g = \beta^T d = hs^D$	$\epsilon^S = \epsilon^T - ed^t$
$s^D = s^E - d^t g$	$h = \beta^S e = gc^D$	$\beta^S = \beta^T + hg^t$

Les matériaux piézoélectriques généralement utilisés par la récupération d'énergie appartiennent aux groupes cristallins  $mm2$ ,  $4mm$ ,  $6mm$  ou  $\infty m$ . Ces matériaux sont pyroélectriques : ils comportent une polarisation rémanente au niveau macroscopique sans l'application d'une contrainte [92, p. 22]. Dans ce cas, l'axe 3 correspond à la direction de la polarisation pour les notations matricielles par convention [89, p. 21]. Les matrices des matériaux  $mm2$ , tel que le PZN-PT polarisé selon l'axe [011], sont sous la forme (I-4). L'équation (I-4) est la même pour les matériaux des groupe  $\infty m$  (dont les céramiques),  $4mm$  et  $6mm$  avec comme particularité :  $c_{11} = c_{22}$ ,  $e_{31} = e_{32}$  et  $e_{24} = e_{15}$  [93], [94, p. 92].

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{I-4})$$

#### I.4.2. Les différents modes de couplage

En fonction des systèmes, les matériaux sont généralement sollicités selon une direction principale privilégiée. Les électrodes placées sur le matériau ainsi que la polarisation du matériau orientent le déplacement des charges libres et influencent ce qui est appelé le mode de couplage. A partir d'hypothèses sur la géométrie du matériau et sur la sollicitation, il est possible de simplifier les équations piézoélectriques et d'exprimer uniquement les variables qui nous intéressent. Ces configurations de sollicitations sont appelées « modes de couplage » ou tout simplement « mode ». Un mode piézoélectrique peut être sollicité selon l'effet direct (réponse électrique à une sollicitation mécanique) ou selon l'effet inverse (réponse mécanique à une sollicitation électrique). Les modes les plus courants sont :

- *Mode longitudinal* (ou mode 33) : la sollicitation mécanique et la polarisation sont dans la même direction. La déformation mécanique et le champ électrique sont dans la même direction.

- *Mode transversal ou transverse* (ou mode 31) : la sollicitation ou la réponse mécanique se fait dans la direction orthogonale à la polarisation. La direction de la déformation et celle du champ électrique sont perpendiculaires.
- *Mode de cisaillement* (ou mode 15) : un cisaillement autour de l'axe  $Oy$  est développé sous l'action d'un champ électrique perpendiculaire à la direction de polarisation (selon l'axe  $Oz$ ).
- *Mode radial* : ce mode est propre aux disques piézoélectriques. Un champ électrique dans la direction de la polarisation induit une déformation radiale du disque. Pour cela, le diamètre cylindre doit être bien supérieur à son épaisseur.

Les équations correspondantes à chaque mode sont données dans le Tableau I.9.

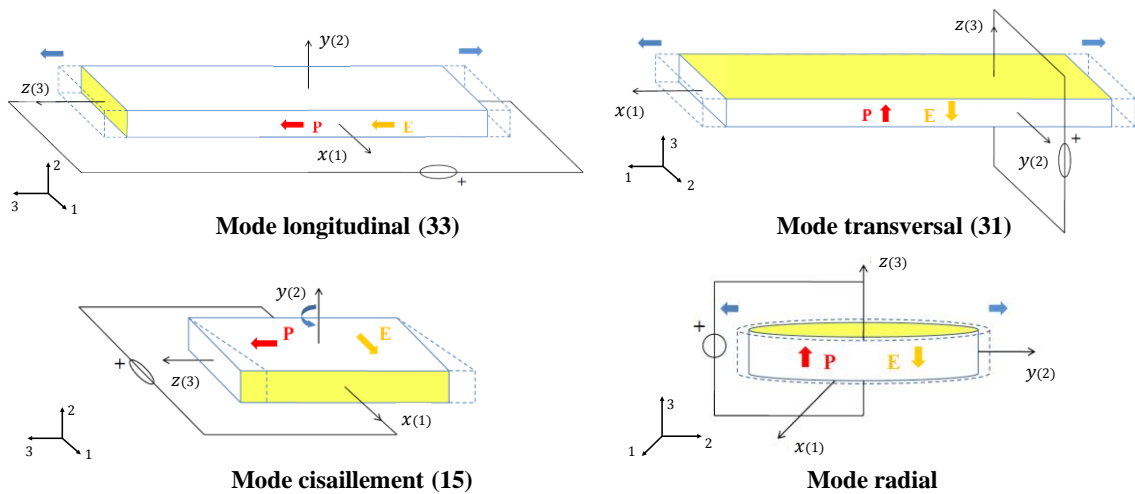


Figure I.25: Représentation des modes piézoélectriques [89]. P : polarisation, E : champ électrique, flèche bleu : direction des déformations

Tableau I.9: Equations et hypothèses selon le mode sollicité [91, p. 108]

Mode	Equations	Hypothèses
<b>Longitudinal (33)</b>	$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3$ $D_3 = d_{33} T_3 + \epsilon_{33}^T E_3$	Long barreau $T_1 = T_2 = 0$ et $\frac{\partial D_3}{\partial x} = 0$
<b>Transversal (31)</b>	$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3$ $D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3$	Plaque fine et étroite $T_2 = T_3 = 0$ et $\frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$
<b>Cisaillement (15)</b>	$S_5 = s_{55}^E T_5 + d_{15} E_1$ $D_1 = d_{15} T_5 + \epsilon_{11}^T E_1$	Parallélépipède épais $S_4 = 0$ $\frac{\partial D_1}{\partial x} = 0$
<b>Radial</b>	$S_1 = s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + d_{31} E_3$ $S_2 = s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + d_{31} E_3$ $D_3 = d_{31} (T_1 + T_2) + \epsilon_{33}^T E_3$	Disque fin $T_3 = 0, T_1 = T_2$ ( $u_\theta = 0$ ) $\frac{\partial E_3}{\partial r}$

La conformité des équations du Tableau I.9 avec l'expérience dépend du respect des ratios d'aspect qui permettent aux hypothèses d'être vérifiées. Nous ne présentons ici que les modes d'utilisation les plus fréquents et nécessaires à la compréhension du domaine de la récupération d'énergie. D'autres configurations permettent de faire intervenir des modes de couplage différents tels que ceux présentés dans [95] ou dans [91].

### I.4.3. Définition du coefficient de couplage électromécanique

Plusieurs définitions peuvent être apportées à la notion de « coefficient de couplage électromécanique » (parfois réduit au terme « coefficient de couplage ») dans le domaine de récupération d'énergie utilisant le phénomène piézoélectrique. Des confusions peuvent résulter d'une mauvaise définition des termes ou des variables. Dans cette section, nous donnons les différentes définitions apportées à cette notion.

Sans être forcément contradictoires, plusieurs définitions du coefficient de couplage électromécanique  $k$  coexistent dans les ouvrages sur la piézoélectricité [91], [96].  $k$  peut être défini par la racine carrée d'un ratio d'énergie en régime statique alors qu'il est également défini dans le domaine fréquentiel et influe sur les performances. On distingue le coefficient de couplage électromécanique intrinsèque au matériau (communément appelé coefficient de couplage matériau) du coefficient de couplage électromécanique global d'une structure comportant une partie de matériau piézoélectrique et une autre de matériau non piézoélectrique (communément appelé coefficient de couplage global). Que ce soit en statique ou en fréquentiel, au niveau matériau ou au niveau global, le coefficient de couplage est toujours défini pour un mode de couplage donné. Le couplage matériau est généralement défini selon un mode (longitudinal, radial, etc.) tels que ceux présentés dans la section précédente. Le coefficient de couplage global, quant à lui, est défini pour une répartition donnée de déformations ou de contraintes dans la structure. Dans le cas d'études fréquentielles, cette répartition correspond à la forme d'un mode vibration.

#### a. Définition du coefficient de couplage du matériau

Au niveau matériau, deux définitions du coefficient de couplage électromécanique coexistent et ne représentent pas la même chose selon les relations piézoélectriques considérées :

- D'une part, le coefficient de couplage est un coefficient exprimé à partir des coefficients matériaux (équation (I-5)) prenant en compte les interactions physiques mutuelles (par la constante piézoélectrique) et les interactions physiques propres (par la constante élastique et la constante diélectrique).
- D'autre part, le coefficient de couplage est défini par un ratio d'énergies. Dans le cadre d'un cycle virtuel donné, le carré de  $k$  correspond alors à l'énergie dissipée dans une charge électrique virtuelle divisée par l'énergie mécanique totale apportée.

Ces deux définitions coïncident pour les relations fondamentales de types intensives (forme  $d$  du Tableau I.6) et extensives (forme  $h$ ) mais donnent un résultat différent avec les relations mixtes comme nous allons le voir la section suivante.

$$k^2 = \frac{\text{constante piézoélectrique}^2}{\text{constante élastique} \times \text{constante diélectrique}} \quad (\text{I-5})$$

La définition (I-5) appliquée au mode 31 avec la relation fondamentale de type intensif donne l'équation (I-6).

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (\text{I-6})$$

Pour établir la deuxième définition, le cycle virtuel est défini par les étapes suivantes et est considéré de manière quasi-statique [91, p. 20]:

- Application d'une contrainte mécanique en court-circuit (champ électrique nul et champ de déplacement électrique augmente)
- Déchargement mécanique en circuit ouvert (le champ de déplacement électrique augmente et le champ de déplacement électrique augmente)
- Dissipation de l'énergie électrique dans une résistance à contrainte nulle.

Pour réaliser virtuellement un cycle selon le mode 31, une contrainte est appliquée selon l'axe 1 ( $T_1$ ), une déformation est développée selon l'axe 1 ( $S_1$ ) et les champs électriques et de déplacements électrique considérés sont uniquement selon l'axe 3 ( $E_3$  et  $D_3$ ). Ce cycle est schématisé en Figure I.26. Les coefficients directeurs des droites sont donnés en fonction des coefficients matériaux de la forme intensive.

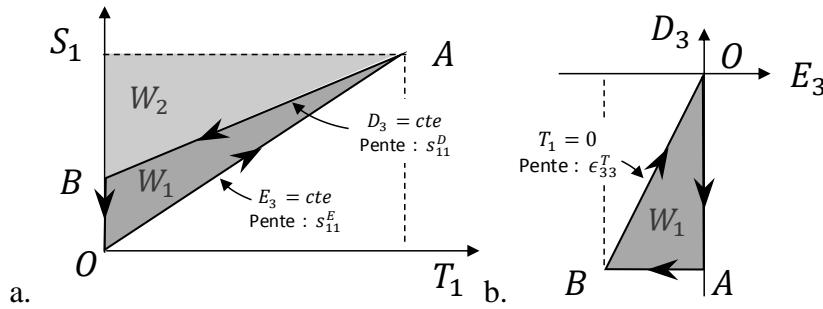


Figure I.26 : Cycle piézoélectrique pour le mode 31 (réalisé à partir de [95], [97]) a. comportement mécanique, b. comportement électrique.

L'énergie totale mécanique appliquée au système correspond à l'aire  $W = W_1 + W_2$  où  $W_1$  est l'énergie dissipée dans la charge électrique. En considérant la deuxième définition du coefficient de couplage, le coefficient de couplage matériau<sup>2</sup>  $k_{31}^2$  est alors donné par l'équation (I-7).

$$k_{31}^2 = \frac{W_1}{W} \quad (\text{I-7})$$

Les énergies sont données par les équations (I-8) à (I-10) et le carré du coefficient de couplage obtenu est exprimé en (I-11).

$$W = \int_0^A S_1 dT_1 = \frac{1}{2} s_{11}^E T_1^2 \quad (\text{I-8}) \quad W_2 = \int_A^B S_1 dT_1 = \frac{1}{2} s_{11}^D T_1^2 \quad (\text{I-9})$$

$$W_1 = W - W_2 = \frac{1}{2} (s_{11}^E - s_{11}^D) T_1^2 \quad (\text{I-10})$$

<sup>2</sup> En toute rigueur,  $k_{31}^2$  devrait être appelé le « carré du coefficient de couplage matériau ». Par simplicité d'écriture dans ce manuscrit, nous omettrons le terme « carré » pour parler des coefficients de couplage et nous les nommerons « coefficient de couplage matériau  $k_{31}^2$  » (cas du mode de couplage 31).

$$k_{31}^2 = \frac{s_{11}^E - s_{11}^D}{s_{11}^E} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (\text{I-11})$$

On retrouve bien la définition (I-5). Les deux définitions coïncident pour les couples de relations fondamentales intensives (forme  $d$ ) et extensives (forme  $h$ ).

Cette deuxième définition du coefficient de couplage, donnée par le ratio des énergies, est vérifiée si l'énergie stockée dans le matériau est uniquement l'énergie correspondant au mode sollicité. Des hypothèses supplémentaires à celles évoquées dans le Tableau I.9 sont alors nécessaires pour établir la définition du coefficient de couplage et sont exprimées dans le tableau suivant.

Tableau I.10 : Expression des coefficients de couplage matériaux

Mode	Conditions	Expression du coefficient de couplage
<b>Longitudinal (33)</b>	$T_3$ est la seule contrainte non-nulle $E_1 = E_2 = 0$	$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{55}^E \epsilon_{15}^T}$
<b>Transversal (31)</b>	$T_1$ est la seule contrainte non nulle $E_1 = E_2 = 0$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}$
<b>Cisaillement (15)</b>	$S_5$ est la seule déformation non-nulle $E_2 = E_3 = 0$	$k_{15}^{2*} = \frac{d_{15}^2}{s_{55}^E \epsilon_{11}^T}$
<b>Radial</b>	$T_1$ et $T_2$ les seules contraintes non-nulles et $T_1 = T_2$ $E_1 = E_2 = 0$	$k_p^{2\circ} = k_{31}^2 \frac{2}{1 - \nu^E}$

\*Un matériau piézoélectrique seul ne peut pas être sollicité selon mode 15 en condition statique ou quasi-statique. Ce mode peut être obtenu en excitant le matériau de manière quasi-statique dans une structure résonante plus grande.  
 ◦  $k_p$  sous cette forme correspond uniquement aux matériaux de type  $\infty m$ ,  $6m$ ,  $3m$ ,  $3$  et  $6$ .  $\nu^E = -s_{12}^E/s_{11}^E$

Comme l'effet piézoélectrique est symétrique, le coefficient de couplage peut également être déduit d'un cycle électrique par le ratio de l'énergie dissipée dans une charge mécanique et de l'énergie électrique appliquée.

### b. Définition du coefficient de couplage matériau alternatif

Analysons maintenant le coefficient de couplage à partir de la relation de type mixte avec les variables  $S$  et  $E$  indépendantes (forme  $e$ ). On exprime  $T_1$  et  $D_3$  en fonction de  $S_1$  et de  $E_3$  en (I-12) en considérant les hypothèses du mode 31 (seul  $T_1$  non nul,  $E_3$  et  $E_2$  nuls) grâce aux coefficients équivalents  $c_{11}^{ef}$ ,  $e_{31}^{ef}$  et  $\epsilon_{33}^{ef}$  donnés en (I-13).

$$\begin{cases} T_1 = c_{11}^{ef} S_1 - e_{31}^{ef} E_3 \\ D_3 = e_{31}^{ef} S_1 + \epsilon_{33}^{ef} E_3 \end{cases} \quad (\text{I-12})$$

$$c_{11}^{ef} = \frac{1}{s_{11}^E} \quad \epsilon_{33}^{ef} = \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad e_{31}^{ef} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \quad (\text{I-13})$$

En reprenant le cycle mécanique virtuel présenté dans la partie précédente, la rigidité en court-circuit est  $c_{11}^{ef E} = c_{11}^{ef}$  et celle circuit-ouvert est  $c_{11}^{ef D} = c_{11}^{ef} + \frac{e_{31}^{ef 2}}{\epsilon_{33}^{ef}}$ . Les compliances sont

donc de  $1/c_{11}^{ef E}$  et  $1/c_{11}^{ef D}$ . Le cycle mécanique est alors représenté par la figure suivante avec les nouveaux coefficients directeurs des droites pris en compte.

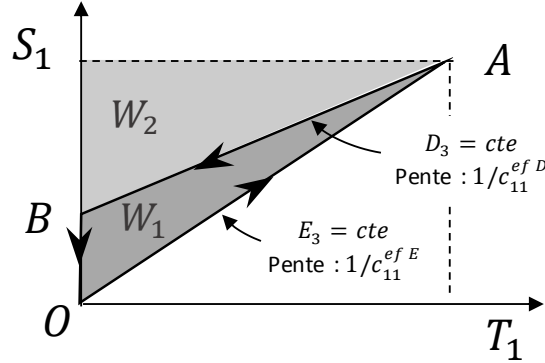


Figure I.27 : Cycle mécanique en considérant les coefficients de la forme  $e$

L'expression de  $k^2$  est alors :

$$k_{31}^2 = \frac{\frac{1}{c_{11}^{ef E}} - \frac{1}{c_{11}^{ef D}}}{\frac{1}{c_{11}^{ef E}}} = \frac{c_{11}^{ef D} - c_{11}^{ef E}}{c_{11}^{ef D}} = \frac{\frac{e_{31}^{ef 2}}{c_{11}^{ef} \epsilon_{33}^{ef}}}{1 + \frac{e_{31}^{ef 2}}{c_{11}^{ef} \epsilon_{33}^{ef}}} = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (\text{I-14})$$

En remplaçant dans (I-14), les coefficients équivalents par leurs expressions en (I-13), on retrouve la même expression du  $k_{31}^2$  que celle de l'équation (I-11). Or, cette expression ne correspond pas à la définition (I-5) appliquée à la relation (I-12). Lorsqu'elle est appliquée aux relations mixtes, la définition du coefficient de couplage donnée en (I-5) fait apparaître un coefficient que nous appelons couplage matériau alternatif  $k_{e31}$  comme exprimé en (I-15) (ce coefficient est appelé *expedient coupling* par Ikeda [91]).

$$k_{e31}^2 = \frac{e_{31}^{ef 2}}{c_{11}^{ef} \epsilon_{33}^{ef}} \quad (\text{I-15})$$

Le coefficient de couplage alternatif  $k_{e31}^2$  est directement relié au coefficient de couplage électromécanique  $k_{31}^2$  comme exprimé en (I-16) à partir de (I-14) et (I-15). En utilisant l'expression (I-7) de  $k_{31}^2$  qui considère les énergies  $W_1$  et  $W_2$ , on montre que le coefficient de couplage alternatif  $k_{e31}^2$  correspond au ratio d'énergie  $W_1/W_2$ .

$$k_{e31}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} = \frac{\frac{W_1}{W_1 + W_2}}{1 - \frac{W_1}{W_1 + W_2}} = \frac{W_1}{W_2} \quad (\text{I-16})$$

Considérant ces ratios d'énergies, on peut déduire que le coefficient de couplage  $k_{31}^2$  est nécessairement inférieur à 1 alors que le coefficient de couplage alternatif  $k_{e31}^2$  peut être supérieur à 1. Comme l'énergie représentée par  $W$  correspond à l'énergie totale fournie au matériau, le coefficient  $k_{31}^2$  correspond au rapport de l'énergie stockée électriquement (puis transmise à la charge) et de l'énergie totale.  $k_{e31}^2$ , quant à lui, représente le rapport entre l'énergie stockée électriquement et l'énergie stockée mécaniquement par la rigidité du matériau. Dans ce manuscrit, on définira  $k_{31}$  comme le coefficient de couplage matériau alors que  $k_{e31}$  est le coefficient de couplage matériau alternatif. L'ambiguïté au niveau matériau entre



le coefficient de couplage et le coefficient de couplage alternatif est retrouvée au niveau global du récupérateur comme discuté dans la section suivante.

*c. Définition du coefficient de couplage global*

Dans le domaine de la récupération d'énergie vibratoire, les matériaux piézoélectriques font généralement partie d'un transducteur global qui comporte également du matériau non-piézoélectrique. En connaissant la répartition des grandeurs électriques et mécaniques dans le récupérateur, il est possible d'aboutir à une version intégrée des équations (appelée forme globale). Ces équations donnent les relations entre la force équivalente  $F$  appliquée en un point du transducteur, le déplacement  $r$  du point, la tension  $v$  développée aux bornes de ses électrodes et la charge  $q$  sur les électrodes. La force, le déplacement, la tension et la charge correspondent respectivement aux formes globales de la contrainte, de la déformation, du champ électrique et du champ de déplacement électrique.

$$\begin{cases} F = Kr - \Theta v \\ q = \Theta r + C_p v \end{cases} \quad (\text{I-17})$$

La relation proposée (I-17) est la forme globale de la relation fondamentale de type  $(S, E)$  en considérant le récupérateur de manière statique. Ainsi, le coefficient  $k_e^2$  calculé en (I-18) à partir des coefficients est la version intégrée équivalente au coefficient de couplage matériau alternatif  $k_{e31}$ .

$$k_e^2 = \frac{\Theta^2}{KC_p} \quad (\text{I-18})$$

Le coefficient  $k_e$  est connu sous différents noms dans la littérature. Il est appelé *mixed coefficient* par Ikeda [91], *alternative coefficient* par Dutoit *et al.* [98] ou *modified coupling* noté  $k_m^2$  par Badel et Lefeuvre [27]. Dans cette thèse, nous choisirons le terme de coefficient de couplage global alternatif.

Le coefficient de couplage électromécanique global, quant à lui, est donné par :

$$k^2 = \frac{k_e^2}{1 + k_e^2} = \frac{\Theta^2}{KC_p + \Theta^2} \quad (\text{I-19})$$

De la même manière qu'avec les équations localisées, le coefficient de couplage global peut être retrouvé par un cycle mécanique. On déduit le coefficient de couplage électromécanique grâce à la raideur en court-circuit ( $K_{sc} = K$  quand  $V = 0$ ) et la raideur en circuit ouvert ( $K_{oc} = K + \alpha^2/C_p$  quand  $q = 0$ ).

$$k^2 = \frac{K_{oc} - K_{sc}}{K_{oc}} = \frac{\Theta^2}{KC_p + \Theta^2} \quad (\text{I-20})$$

Il est intéressant de noter que sous la forme globale, les conditions électriques considérées sur le volume au niveau matériau ( $E = 0$  et  $D = 0$ ) sont remplacées par des conditions électriques uniquement limitées aux électrodes ( $V = 0$  et  $q = 0$ ).

*d. Définition du coefficient de couplage en dynamique*

L'étude fréquentielle d'un transducteur piézoélectrique autour d'un mode de vibration fait intervenir des termes correspondant à l'énergie cinétique et aux pertes mécaniques. La modélisation se fait alors par l'ajout des termes de masse et d'amortissement à l'équation (I-17).

La connaissance de la répartition des déformations et contraintes en fonction d'un mode de vibration permet d'aboutir à un système résonant sous la forme globale en (I-21) où  $B_f$  est le terme de force,  $\ddot{w}_B$  est l'accélération de la base,  $M$  est la masse équivalente.  $C$  correspond à un terme d'amortissement visqueux représentant les pertes mécaniques.

$$\begin{cases} M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr - \Theta v = -B_f \ddot{w}_B \\ \Theta \dot{r} + C_p \dot{v} + i = 0 \end{cases} \quad (\text{I-21})$$

L'étude des fréquences de résonance en court-circuit ( $v = 0$ ) et en circuit ouvert ( $q = 0$ ) d'un tel système permet d'aboutir à une expression du coefficient de couplage global. Si on suppose que l'amortissement est nul, la pulsation de résonance en court-circuit  $\omega_1^{sc}$  d'un tel système est donné par (I-22) et la pulsation de résonance en circuit ouvert  $\omega_1^{oc}$  est donnée par (I-23).

$$\omega_1^{sc} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{I-22}) \quad \omega_1^{oc} = \sqrt{\frac{K}{M} + \frac{\Theta^2}{MC_p}} = \omega_1^{sc} \sqrt{1 + k_e^2} \quad (\text{I-23})$$

Dans l'expression de la pulsation de résonance en circuit ouvert en (I-23), on retrouve l'expression du coefficient de couplage alternatif  $k_e^2$  donné en (I-18). On peut alors simplement déterminer le coefficient couplage global et le coefficient de couplage alternatif d'un système à partir de sa fréquence en court-circuit  $f_{sc}$  et sa fréquence en circuit ouvert  $f_{oc}$  comme exprimés respectivement en (I-24) et (I-25).

$$k^2 = \frac{f_{oc}^2 - f_{sc}^2}{f_{oc}^2} \quad (\text{I-24}) \quad k_e^2 = \frac{f_{oc}^2 - f_{sc}^2}{f_{sc}^2} \quad (\text{I-25})$$

A partir de l'équation (I-24), on peut déduire que le coefficient de couplage électromécanique traduit l'écart relatif entre la fréquence de résonance en court-circuit et la fréquence de résonance en circuit-ouvert d'un récupérateur. Nous allons voir dans la section suivante que l'augmentation de cet écart relatif grâce à la maximisation de  $k^2$  permet d'augmenter la bande passante des récupérateurs d'énergie s'ils sont aidés d'un circuit électrique d'ajustement de fréquence de résonance.

#### I.4.4. Intérêt de la maximisation du coefficient de couplage global

Dans cette section, on observe l'influence de la charge électrique en sortie du récupérateur sur le comportement du récupérateur et la puissance récupérée.

Dans l'équation (I-21), le terme de perte visqueuse peut être exprimé en fonction du facteur d'amortissement  $\zeta_m$  ou du facteur de qualité  $Q_m$  (I-26).

$$C = 2\zeta_m M \omega_1^{sc} = \frac{M \omega_1^{sc}}{Q_m} \quad (\text{I-26})$$

L'expression de la puissance moyenne  $P$  extraite du récupérateur en fonction de la pulsation et des paramètres équivalents peut être trouvée dans différents travaux [27], [98]–[101]. En utilisant la normalisation proposée dans [27] exprimée en (I-27), la Figure I.28.a montre la puissance normalisée  $P_{norm}$  en fonction de la résistance de charge  $R_{load}$  et de la pulsation normalisée  $\Omega$  donnée par l'équation (I-28) où  $\omega$  est la pulsation d'excitation. L'utilisation d'une puissance normalisée permet d'étudier les performances des générateurs indépendamment de leurs fréquences de résonances, de leur masse ou de l'accélération d'excitation.

$$P_{norm} = P \frac{8M\omega_1^{sc}}{B_f^2 |\dot{w}_b|^2} \leq Q_m \quad (\text{I-27})$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1^{sc}} \quad (\text{I-28})$$

Pour des systèmes dont les coefficients  $k_e^2$  et  $Q_m$  sont suffisamment grands ( $k_e^2 Q_m \geq 2$ ) et lorsque des charges résistives sont connectées en sortie du récupérateur, la courbe  $P_{norm}$  présente deux pics de puissance (où  $P_{norm}^{max} = Q_m$ ) intervenant aux fréquences  $f_a$  et  $f_b$  proches respectivement des fréquences en court-circuit  $f_{sc}$  et en circuit ouvert  $f_{oc}$ . En effet, comme précisés dans les travaux de Morel *et al.* [102], la résistance de charge  $R_{load}$  induit une raideur électrique équivalente et un amortissement électrique équivalent dépendant de la valeur de  $R_{load}$  et agissant sur la dynamique du récupérateur. Aux couples optimaux de fréquences et de résistances, l'amortissement électrique dû à la récupération d'énergie et perçu par la dynamique du récupérateur est égal à l'amortissement purement mécanique. Cet ajustement d'amortissement permet de maximiser la puissance récupérée comme énoncé dans l'article de William et Yates [103].

A partir de la Figure I.28.a, on peut déterminer la résistance qui maximise la puissance à chaque fréquence et tracer la puissance en fonction de la fréquence lorsque les résistances optimales sont considérées en sortie du récupérateur (cas  $R$  sur la Figure I.28.a.). Dans le cas résistif, une « cuvette » est donc présente entre les fréquences  $f_a$  et  $f_b$ . En effet, entre les deux pics de puissance, la résistance de charge influence la raideur électrique et l'amortissement électrique du récupérateur mais l'amortissement électrique n'est pas optimal pour maximiser la puissance récupérée. L'ajout d'un condensateur dont la capacité est adaptée en parallèle de la résistance de charge permet d'ajuster la raideur et l'amortissement électriques entre les deux pics de puissance pour maximiser la puissance récupérée.

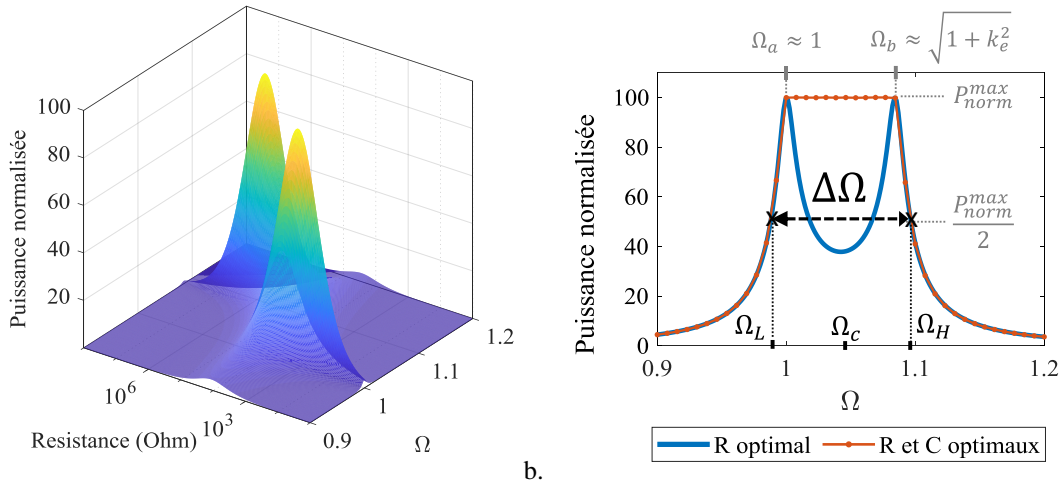


Figure I.28 : a. Puissance normalisée pour un récupérateur dont  $k^2 = 15\%$  et  $Q_m = 100$  en fonction de la pulsation normalisée et de la résistance de sortie b. Puissance normalisée en fonction de la pulsation normalisée pour des résistances optimales et des couples optimaux de résistances et de capacités.

Si le récupérateur est linéaire et si les pertes sont modélisées par un facteur de qualité mécanique  $Q_m$  constant entre les fréquences  $f_a$  et  $f_b$ , les puissances récupérées aux deux pics obtenus avec des charges résistives ont la même valeur  $P^{max}$ . A partir de cette considération, l'utilisation de couples optimaux de résistances et de capacités permet de récupérer la puissance

maximale  $P^{max}$  aux fréquences situées entre les deux pics (cas R and C sur la Figure I.28.b) [102].

Une banque de capacités étant difficilement intégrable dans un circuit, des stratégies mettant en œuvre des techniques non linéaires électriques ont été développées pour optimiser l'énergie récupérée entre les deux pics (dans la bande  $[f_a, f_b]$ ) et même au-delà avec des techniques telles que la SC-SECE [62] et la FT-SECE [59].

Nous pouvons alors définir la bande passante d'un récupérateur d'énergie vibratoire fortement couplé en prenant en compte l'ajustement sur des couples optimaux de résistances et capacités tel qu'exprimé par (I-29) où  $\Omega_L$  et  $\Omega_H$  (représentés sur la Figure I.28.b) sont définis à la moitié de la puissance maximale lorsque les couples optimaux sont considérés et  $\Omega_c$  est la pulsation centrale normalisée donnée par  $(\Omega_L + \Omega_H)/2$ .<sup>3</sup>

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_c} = \frac{\Omega_H - \Omega_L}{\Omega_c} \quad (I-29)$$

La Figure I.29 trace la valeur maximale  $P_{norm}^{max}$  de la puissance normalisée et la bande passante en fonction de  $k^2$  pour plusieurs facteurs de qualité. Cette figure illustre le fait qu'augmenter  $k^2$  au-delà d'une certaine valeur n'a pas d'intérêt pour augmenter la puissance maximale. Cependant, on peut voir qu'augmenter  $k^2$  améliore significativement la bande passante des récupérateurs. Par conséquent, augmenter le coefficient de couplage électromécanique global des récupérateurs piézoélectriques est nécessaire pour élargir la bande passante lorsque l'ajustement fréquentiel par méthodes électriques est utilisé.

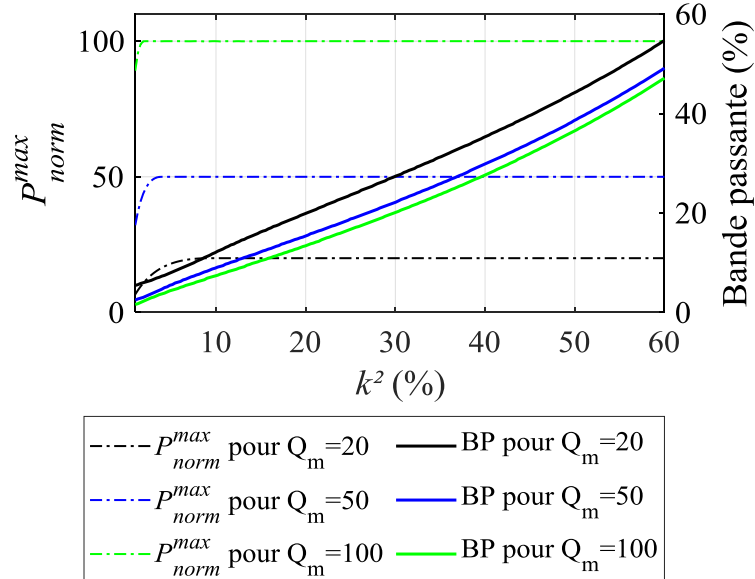


Figure I.29 : Puissance normalisée maximale et bande passante (BP) en fonction de  $k^2$  pour des couples optimaux de charges R et C

Dans la suite du chapitre, nous discutons des matériaux piézoélectriques et des structures permettant de maximiser le coefficient couplage électromécanique global.

<sup>3</sup>  $\Omega_c$  est la pulsation centrale utilisée pour le calcul de bande passante. La pulsation  $\Omega_m$  à laquelle la puissance est minimale entre les deux pics sur la Figure I.28.b correspond, quant à elle, à la moyenne géométrique des pulsations  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  :  $\Omega_m = \sqrt{\Omega_a \Omega_b}$ .

## I.5. Optimisation du coefficient de couplage

Comme il sera discuté dans le chapitre III, section III.1, le coefficient de couplage d'un récupérateur piézoélectrique peut être maximisé par le biais de deux leviers : i. en utilisant des matériaux piézoélectriques fortement couplés, ii. en optimisant le récupérateur de sorte à ce que la déformation soit principalement dans le matériau piézoélectrique et qu'elle y soit homogène.

### I.5.1. Les matériaux piézoélectriques en récupération d'énergie

Différents matériaux piézoélectriques et plusieurs méthodes d'assemblage et de fabrications sont utilisés pour réaliser des récupérateurs d'énergie vibratoire. Les procédés de fabrication sont expliqués dans le chapitre numéro 7 du livre [104] de Defay *et al.* On recense les propriétés des matériaux courants dans le Tableau I.11.

Tableau I.11 : Coefficients de couplage de matériaux piézoélectriques et température de Curie selon [76], [90], [93], [105]–[107], [108, p. 122], [109], [110]

	$k_{31}^2$	$k_{33}^2$	$k_{15}^2$	Température maximale	Module de Young $c_{11}$ (GPa)
PZT-5A Céramique	14.44%	54.76%	53.29%	360°	62.5
[001] PMN-29PT Monocristal	19.36%	82.8%	12.25%	170°	19
[011] PZN-PT 5.5% Monocristal	81.0% ( $k_{32}$ )	81.0%	79.21%	105*	7.3 ( $c_{22}$ )
PVDF Polymère	1.1%	2.25%	-	170/180+	3
ZnO Semi-conducteur	4.9%	23%	-	1975+	124
AlN Semi-conducteur	1.7%-3.0%	5.3%	-	2200+	300

° Température de Curie  
\* Température de transformation rhomboédrique à orthorhombique (transition cristalline)  
+ Température de fusion

Les matériaux PZT sont parmi les matériaux les plus utilisés en récupération d'énergie vibratoire par conversion piézoélectrique. Ils présentent de bons coefficients de couplage tout en étant moins cher que les matériaux très fortement couplés. Les matériaux PZT sont généralement fournis soit sous forme de céramiques – ce qui permet d'obtenir des configurations variées (cylindre, plaque, etc.) – soit ils sont déposés grâce à des procédés MEMS. Les céramiques sont utilisées pour des systèmes méso-échelle (mm-cm) alors que les procédés MEMS permettent de réaliser des récupérateurs de très petites dimensions ( $\mu\text{m}$ -mm).

Les procédés MEMS permettent également de fabriquer des récupérateurs à base d'AlN (Nitrure d'Aluminium) et ZnO (Oxyde de Zinc) qui ont l'avantage d'être sans plomb. Cependant, ces derniers ont des coefficients de couplage moindres par rapport au PZT. Les monocristaux de matériaux relaxeurs comme le PMN-PT ou le PZN-PT, quant à eux, offrent des coefficients de couplages matériaux bien supérieurs à ceux du PZT mais ils sont également

plus difficiles à produire et très coûteux. Des monocristaux sont disponibles sous forme de plaques électrodées auprès de rares fournisseurs.

Les matériaux polymères, tel que le PDVF, ont également été envisagés dans le domaine de la récupération d'énergie pour leur flexibilité qui permet une intégration plus simple à certaines applications [111] et de réaliser des récupérateurs ayant de très basses fréquences de résonances. Leur coefficient de couplage est cependant faible. D'autres matériaux tels que le  $K_{0.5}Na_{0.5}NbO_3$  (KNN) [112] ou le  $LiNbO_3$  [113] semblent prometteurs pour la récupération d'énergie mais leurs performances restent encore insuffisantes pour concurrencer le PZT.

### **I.5.2. Comparaison de configuration de récupérateur d'énergie**

Dans cette section, nous réalisons un inventaire des configurations permettant potentiellement d'atteindre de très forts coefficients de couplage globaux. Chaque configuration est discutée selon ses avantages et ses inconvénients. Les prototypes les plus fortement couplés de la littérature sont ensuite recensés et comparés à la fin de cette section.

#### *a. Structure classique de type poutre sollicitant le mode 31*

Dans le domaine de la récupération d'énergie, la configuration résonante la plus courante est une structure de type poutre encastrée-libre (*cantilever*) multicouche ayant une masse mobile. C'est une configuration résonante capable de résonner à de faibles fréquences (<200 Hz). Elle permet de solliciter le mode 31 des matériaux piézoélectriques tout en étant simple à fabriquer et à dimensionner comparativement aux autres structures détaillées dans cette section. La masse mobile qui est placée au niveau de l'extrémité libre permet de réduire la fréquence de résonance et/ou d'augmenter la puissance en augmentant la valeur de la masse dynamique équivalente  $M$  sans beaucoup influencer la raideur équivalente.

Comme la déformation dans la poutre est symétrique par rapport à la fibre neutre pour une poutre monocouche et afin d'éviter l'annulation de la tension au sein du matériau piézoélectrique, les poutres travaillant sur le mode de flexion sont nécessairement multicouches. Elles comportent généralement une ou deux plaques de matériau piézoélectrique (appelé patch) et une partie inactive que l'on appelle substrat (*substrate* ou parfois *shim* en anglais). Le substrat peut être en acier, en laiton ou même en silicium. Les poutres comportant un seul patch piézoélectrique sont communément appelées *unimorphs* alors que les poutres *bimorphs* comportent deux patches de part et d'autre du substrat (Figure I.30). Chacun des patches comporte des électrodes sur ses surfaces inférieure et supérieure.

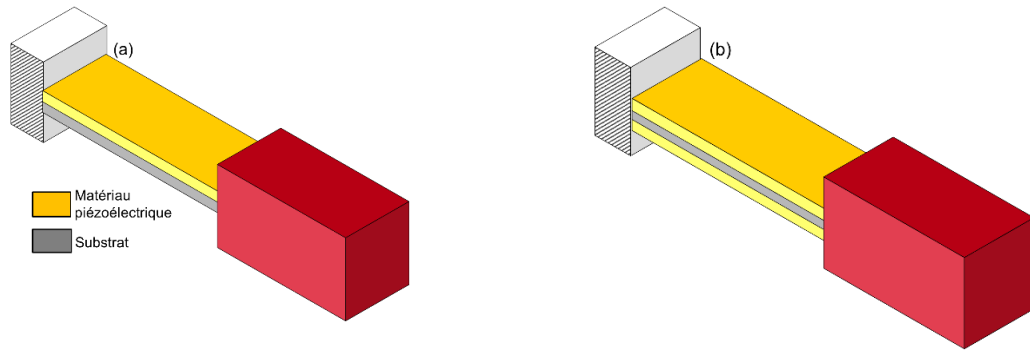


Figure I.30 : (a) Poutre de type *unimorph* avec masse mobile (b) Poutre de type *bimorph* avec masse mobile

Lorsque la poutre est de type *bimorph*, les patches peuvent être polarisés dans des sens opposés (Figure I.31.a.) ou dans le même sens (Figure I.31.b). Lorsque le substrat sert de conducteur entre le patch inférieur et le patch supérieur, la connexion électrique est déterminée selon l'orientation des polarisations pour éviter l'annulation des tensions. Lors de la flexion, un des patches est en traction alors que l'autre est en compression. Ainsi, si les polarisations des deux patches sont dans des sens opposés, les champs électriques sont dans le même sens et les électrodes doivent être connectées en série. Si les deux patches ont leurs polarisations dans le même sens, les champs électriques sont alors dans des sens opposés et la connexion des électrodes doit être réalisée en parallèle.

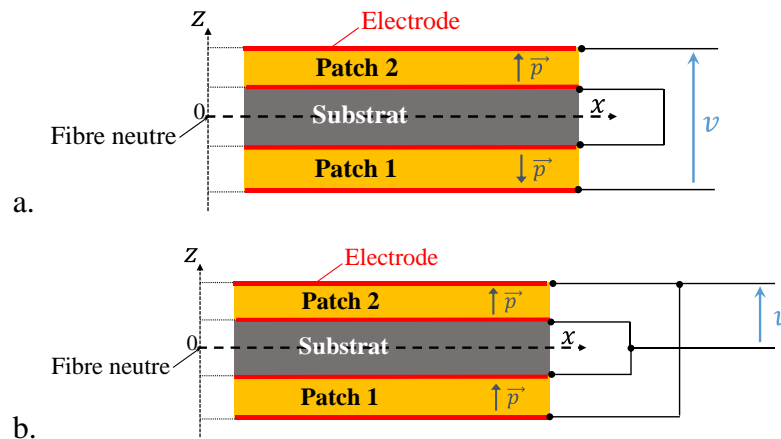


Figure I.31 : *Bimorph* connecté a. en série et b. en parallèle

Lorsque le patch recouvre toute la poutre, il a été montré analytiquement par Wang *et al.* [114] que le coefficient de couplage global atteignable avec une poutre *bimorph* est supérieur au coefficient de couplage d'une poutre *unimorph*. Ceci a été retrouvé plus tard par Xiong *et al.* [100] grâce à des simulations par éléments finis. Pour les mêmes dimensions et matériaux, les structures *bimorphs* connectées en parallèle proposent le même coefficient de couplage global que les *bimorphs* connectés en série.

### b. Optimisation de poutres piézoélectriques sollicitant le mode 31

Plusieurs travaux ont été proposés pour optimiser le coefficient de couplage de récupérateurs de type poutre. Comme nous le détaillerons dans le chapitre III, localiser et homogénéiser les contraintes dans le matériau piézoélectrique permet d'augmenter le coefficient de couplage

global. De nombreuses propositions ont été faites afin d'homogénéiser les contraintes dans les structures de type poutre, pour des questions de robustesse principalement. Cependant, très peu de travaux discutent du coefficient de couplage électromécanique global. Pour une poutre de type encastree-libre, les contraintes sont nulles à l'extrémité et maximales à l'encastrement (Figure I.32). Homogénéiser les contraintes permet de limiter la contrainte maximale en évitant une concentration des contraintes à l'encastrement. Ainsi le système est plus robuste et moins sujet à la fatigue.

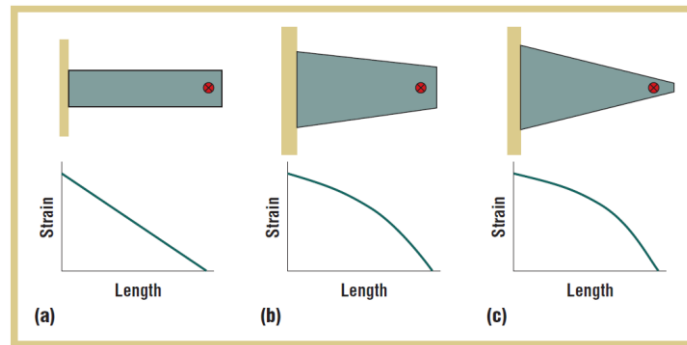


Figure I.32 : Répartition des déformations le long de poutres rectangulaires et triangulaires. Les poutres sont vues de dessus dans les schémas [115]

La méthode la plus courante pour homogénéiser les contraintes dans une poutre est de réaliser des poutres triangulaires ou trapézoïdales. Les poutres proposées sont « fuselées » soit selon leur largeur, soit selon leur épaisseur, soit selon les deux. En plus de réduire la contrainte maximale, Roundy *et al.* [115] a montré qu'une poutre triangulaire permet d'améliorer la puissance générée par un récupérateur en sollicitant mieux le matériau piézoélectrique (Figure I.32). Cependant, Matova *et al.* [116] ont proposé une étude sur 4 configurations de récupérateurs avec masses par des simulations par éléments finis et 4 prototypes. Ils ont montré qu'une poutre fuselée sur la largeur permet d'avoir une meilleure puissance comparée à une structure rectangulaire uniquement si la poutre est longue et étroite. Selon cette étude, pour des ratios largeur/longueur importants, la configuration triangulaire selon la largeur n'a pas d'influence significative sur la puissance maximale même si elle permet d'homogénéiser les contraintes. En 2017, Siddiqui *et al.* [117] ont montré par l'intermédiaire de plusieurs configurations par simulations par éléments finis et de prototypes qu'une poutre triangulaire selon la largeur et ayant une masse mobile permet d'augmenter le coefficient de couplage global comparé à une autre poutre rectangulaire ayant masse mobile. Ils ont par ailleurs proposé un prototype triangulaire en PZT-5H ayant un coefficient de couplage global de 12,3%.

D'autres travaux de la littérature ont été proposés pour homogénéiser les contraintes. C'est le cas du brevet [118] déposé par l'entreprise Vermon qui propose d'utiliser un matériau composite en tant que substrat. Un substrat composite permet de modifier la raideur de la poutre selon la distance à l'encastrement (Figure I.33). Čeponis *et al.* [119] ont, quant à eux, proposé de texturer un substrat en laiton pour homogénéiser les contraintes longitudinales (Figure I.34). Ichige *et al.* [120] ont profité d'une structure de type auxétique pour homogénéiser les contraintes longitudinales dans la poutre en jouant sur la taille des mailles (Figure I.35). Les structures auxétiques sont initialement conçues, grâce à une forme particulière du substrat, pour influencer les déformations latérales dans le matériau piézoélectrique [121]. Sans s'intéresser au substrat, Xu *et al.* [122] ont proposé une structure en forme d'angle droit permettant



d'homogénéiser les contraintes alors que Guan *et al.* [123] ont proposé une structure avec des masses en forme de H (Figure I.36).

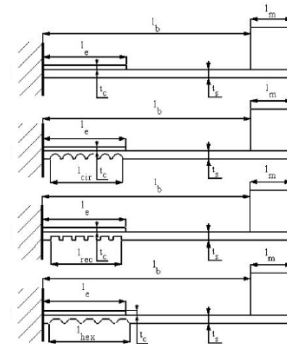
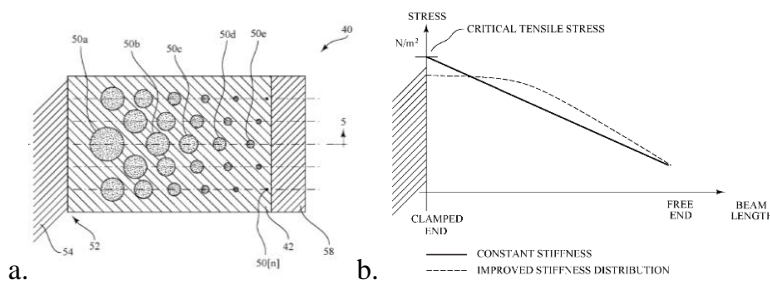


Figure I.33 : Poutre composite où le placement des disques permet d'homogénéiser les contraintes [118] a. Schéma de la poutre vue du dessus, b. représentation de la répartition des contraintes selon la longueur de la poutre

Figure I.34 : Schéma de la texturation du substrat du brevet de [119]

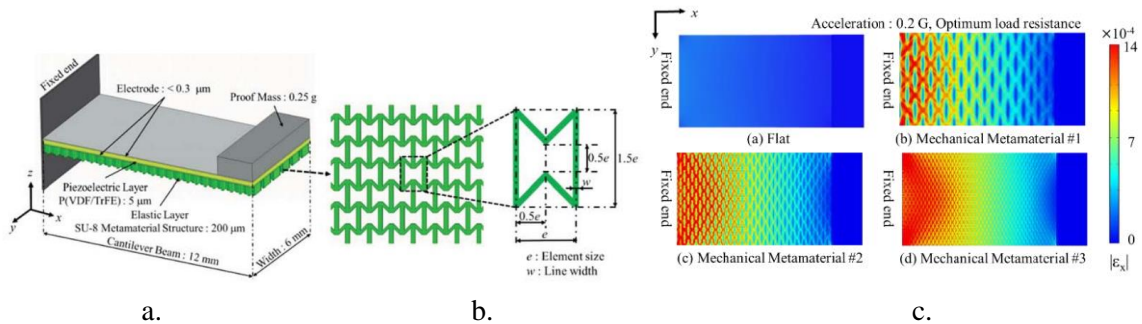


Figure I.35 : a. Poutre de type auxétique, b. forme des mailles de la poutre auxétique, c. répartition des déformations longitudinales selon différentes tailles de mailles [120]

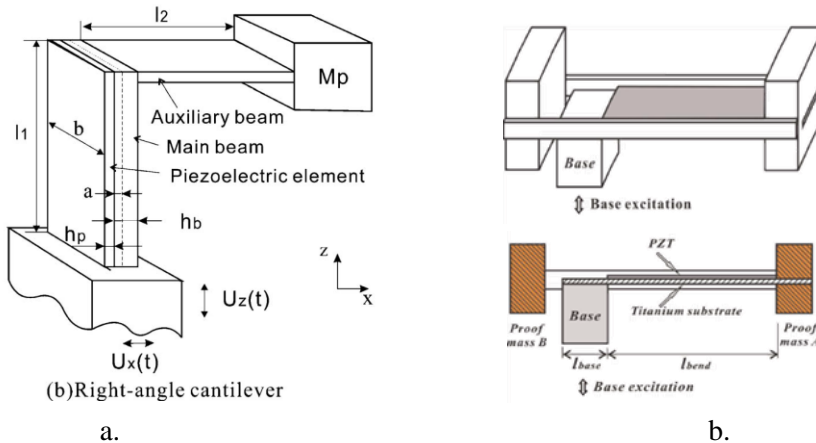


Figure I.36 : a. Structure à angle droit [122], b. masse en forme de H à droite [123]

A l'opposé de ces structures complexes, Badel et Lefeuvre [58] ont proposé une structure très simple mais pourtant très fortement couplée : une poutre en aluminium et en PZN-PT ayant une longue masse mobile et atteignant un coefficient de couplage  $k^2$  de 53% (Figure I.37). Ce type de structure semble donc très efficace pour augmenter le coefficient de couplage électromécanique global sans recourir à une structure complexe. Kim *et al.* [124] ont effectivement montré par l'intermédiaire de 3 prototypes qu'une longue masse permettait d'homogénéiser les contraintes dans la poutre mais aucune étude analytique ou simulations par éléments finis ne permettent de quantifier l'influence d'une telle configuration sur le coefficient

couplage global. Comme nous le montrons dans la section III.1.2.a, le fort coefficient de couplage du prototype de Badel et Lefevre peut être expliqué par la grande inertie en rotation de la masse mobile.

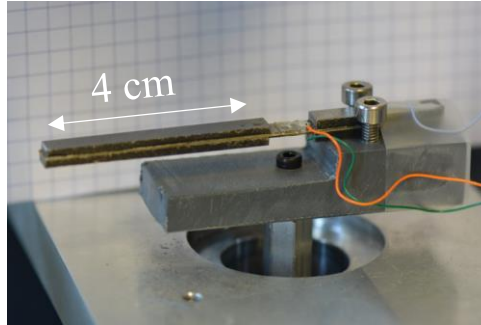


Figure I.37 : Prototype à longue masse mobile présenté par Badel et Lefevre [58]

### c. Structure de type poutre sollicitant le mode 33

Le Tableau I.11 répertoriant les principaux matériaux piézoélectriques montre que les matériaux piézoélectriques possèdent généralement un meilleur coefficient de couplage électromécanique selon le mode 33 que selon le mode 31. Il paraît donc intéressant de solliciter le mode 33 des matériaux piézoélectriques afin de maximiser le coefficient de couplage global de la structure complète.

Afin de solliciter ce couplage 33, des poutres à électrodes inter-digitées ont été proposées dans la littérature (Figure I.38). La configuration des électrodes permet d'orienter le champ électrique dans la même direction que la déformation dans la poutre (selon l'axe  $Ox$ ). Cette configuration semble notamment avantageuse et facilement réalisable pour des structures de type MEMS. En effet, à l'échelle MEMS, les tensions obtenues avec des structures 31 (Figure I.38) sont parfois trop faibles pour l'étage de gestion électrique et les structures de type 33 permettent de générer une tension suffisante pour être exploitable. Cependant, les procédés MEMS sont principalement dédiés à la fabrication de structures *unimorph* [125]. De plus, le champ électrique n'est pas totalement longitudinal (Figure I.38). Par conséquent, les coefficients de couplage obtenus sont souvent faibles par rapport aux structures *bimorphs* méso-échelles. Le fait que des poutres *unimorphs* inter-digitées MEMS permettent d'atteindre de meilleurs coefficients de couplage globaux  $k^2$  que les poutres *bimorphs* sollicitant le mode 31 ne semble pas avoir été démontré dans la littérature. Par ailleurs, la capacité équivalente des récupérateurs ayant des électrodes inter-digitées est faible. Cet aspect pose un problème pour le circuit de gestion électrique car les récupérateurs sont sujets à des pertes importantes dans les capacités parasites des composants de puissance (transistors, inductances, diodes) lors de la conversion d'énergie électrique.

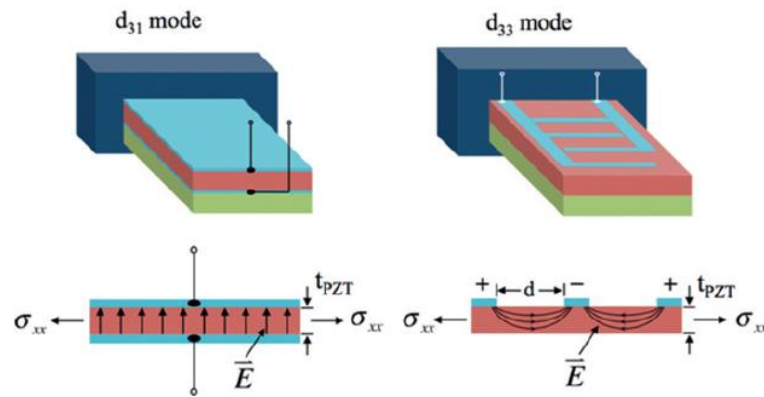


Figure I.38 : Comparaison du champ électrique dans une poutre de type 31 et une poutre à électrode inter-digitées [126]

Des plaques qui exploitent la configuration des électrodes inter-digitées sont disponibles commercialement pour des tailles méso-échelles ( $>1\text{cm}^2$ ). Ce fut le cas des structures Quick Pack QNi qui sont des plaques monolithiques piézoélectriques réalisées par Mide mais dont la production semble arrêtée. Les structures MFC (macro-fiber composites), quant à elles, sont toujours en vente sous licence (brevet de la NASA) et sont principalement utilisées comme actionneurs et comme capteurs. Les MFCs sont des structures composites composées de matériaux piézoélectriques intégrés dans une matrice de matériau époxy. Les structures MFC sont disponibles pour la sollicitation du mode 31 du matériau piézoélectrique et celle du mode 33 avec des électrodes inter-digitées [127]. Elles présentent l'avantage d'être plus flexibles et moins fragiles que des patches monolithiques de PZT. Leurs performances dans le cadre de la récupération d'énergie ont été analysés mais aucun article ne semble présenter de résultats tant sur l'optimisation que sur une analyse quantitative du coefficient de couplage global d'une poutre comportant des MFCs. Peu d'informations sont disponibles sur le coefficient de couplage global des patches MFCs. Par le biais du matériau époxy, les structures MFC sollicitant le mode 33 devraient avoir un coefficient de couplage plus faible que le matériau seul. Les structures MFCs sollicitant le mode 33 pourraient malgré tout bénéficier d'un couplage intéressant (jusqu'à  $k_{33}^2 = 36\%$  d'après les mesures Li [128]) grâce au fort couplage des matériaux piézoélectriques selon mode 33.

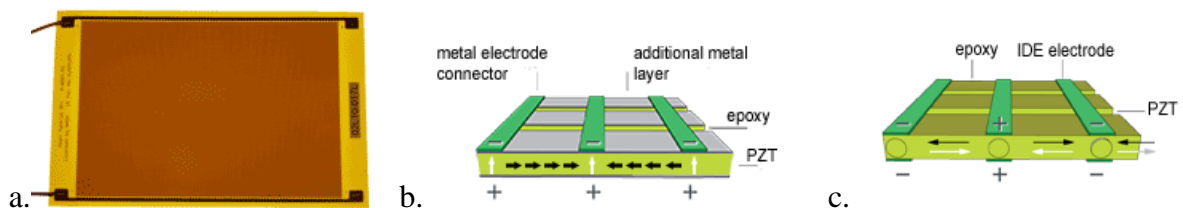


Figure I.39 : a. Photographie d'un MFC, b. représentation du type 31, c. représentation du type 33 [129].  
Flèche blanche : champ électrique, flèche noire : déformation

Parmi les conclusions sur les MFCs sollicitant le mode 33, on note :

- La capacité étant faible, les MFCs sollicitant le mode 33 génère de fortes tensions pour des courants de sortie faibles, rendant ce type de structure inadéquate pour la récupération d'énergie due à la difficulté de gestion électrique [128].
- Les MFCs étant flexibles, il est possible de réaliser des structures basses fréquences. Cependant, comme il sera discuté dans le chapitre III, l'optimisation du coefficient de couplage global d'une poutre est d'autant plus compliquée que le patch est souple. Le

substrat doit être en effet d'autant plus souple que le matériau piézoélectrique est souple afin d'atteindre un bon coefficient de couplage global.

Au cours de sa thèse, Ahmed-Seddik [130] a proposé une structure de type poutre permettant de solliciter le mode 33 par l'intermédiaire d'un *stack* piézoélectrique (empilement de plaques, barreaux ou cubes piézoélectriques) sur une poutre triangulaire. Le prototype utilisant du PZN-5.5PT a atteint le coefficient de couplage  $k^2$  très élevé de 49%. Cependant cette configuration est compliquée à fabriquer et sa tenue mécanique reste à démontrer. Les éléments de PZN-PT sont collés manuellement pour former le *stack*. De plus, le prototype présente un faible facteur de qualité mécanique ( $Q_m \approx 20$ ), certainement expliqué par la quantité de colle utilisée.

Par ailleurs, ce type de structure ne semble pas convenir pour des récupérateurs utilisant des céramiques. En effet, bien que la rigidité du PZN-PT est faible (Tableau I.11), la poutre a une fréquence de résonance supérieure à 200 Hz. Le module du Young des céramiques étant bien plus grand que celui du PZN-PT, ce type de structure n'est propice ni à la réalisation de récupérateurs basses fréquence ni à la réduction des dimensions.

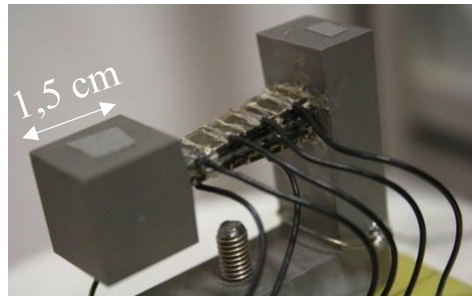


Figure I.40 : Photographie du prototype proposé par Ahmed-Seddik [130]

#### d. Structure de type APA sollicitant le mode 33

Les structures de type Actionneurs Piézoélectriques Amplifiés (APA) (également appelé *flexionnal actuator/harvester* en anglais) permettent de solliciter le mode 33 d'un *stack* piézoélectrique [131]. Principalement utilisé en tant qu'actionneur, ce type dispositif permet d'amplifier mécaniquement le déplacement du *stack* piézoélectrique. Un petit déplacement selon l'axe x sur la Figure I.41 induit un grand déplacement selon l'axe z. Les APAs comportent plusieurs avantages : le matériau piézoélectrique n'est sollicité qu'en compression par le biais d'une précontrainte et le déplacement du *stack* est amplifié donc la raideur apparente du système est plus faible que celle du *stack* seul ; ce qui permet *in fine* de réduire la fréquence de résonance. Malgré l'amplification mécanique, la raideur apparente des APAs est très grande. Sous licence de Cédrat Technologies jusqu'en 2015 [132], seuls quelques travaux récents ont étudié les capacités et les performances des APAs dans le cadre de la récupération d'énergie : soit sous l'action de forces importantes hors résonance [7], soit en intégrant une masse au système pour une application à la résonance [133], [134]. La fréquence de résonance de ces systèmes avec masses reste de haute (>150 Hz) mais suffisamment basse pour certaines applications.

Peu d'informations sont disponibles concernant les coefficients de couplage électromécanique globaux des APAs. De prime abord, il semble compliqué d'obtenir un fort coefficient de couplage et une faible fréquence de résonance. En effet, augmenter

l'amplification mécanique conduirait à diminuer la raideur globale du système et la fréquence de résonance du système. Mais d'autre part, cela conduirait à une baisse du coefficient de couplage électromécanique global car les déformations seront principalement situées dans la structure d'amplification (matériau non-piézoélectrique) et non dans le matériau piézoélectrique. Kuang *et al.* [134] a malgré tout fabriqué récemment (début 2020) un prototype vibrant à 180 Hz avec un coefficient de couplage  $k^2$  égal à 11,5%. Ces résultats semblent prometteurs mais le coefficient de couplage global reste faible par rapport au coefficient de couplage du matériau ( $k_{33}^2 = 47\%$ ). Des structures de type APA ont été proposées à partir de monocristaux de PMN-PT [135], [136], mais aucune information n'est donnée concernant leur coefficient de couplage global.

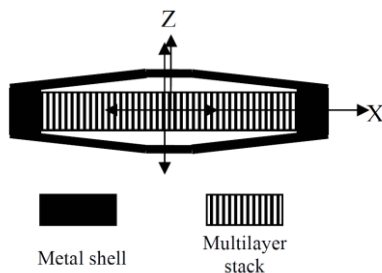


Figure I.41 : Représentation d'un APA [136]

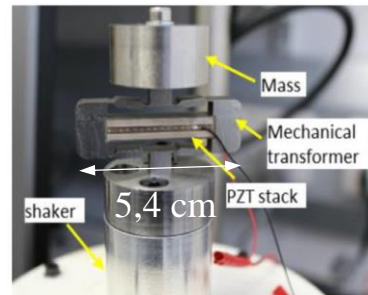


Figure I.42 : Système de type flexionnel proposé par [134] en 2020

e. Structures sollicitant le mode 15

Le coefficient de couplage  $k_{15}^2$  obtenu par le cisaillement des matériaux piézoélectriques usuels étant également très grand (Tableau I.11), des structures (appelées structures de type  $d_{15}$ ) ont été proposées dans l'état de l'art pour engendrer un cisaillement dans le matériau piézoélectrique. C'est le cas par exemple de la configuration de type « cruciforme » proposée en 2020 par Li *et al* (Figure I.43). Les structures de type  $d_{15}$  sont capables de récupérer des puissances comparables à celles de structures sollicitant le mode 31 [14] mais leur mise en œuvre est complexe et aucun avantage ne semble avoir été démontré en terme de coefficient de couplage électromécanique global. Des structures complexes sont nécessaires pour engendrer le cisaillement dans les patches piézoélectriques et les déformations semblent intervenir davantage dans le matériau non-piézoélectrique que dans le matériau piézoélectrique. De plus, la sollicitation du coefficient  $d_{15}$  nécessite des patches épais, dont la polarisation est difficile à réaliser [14], [137].

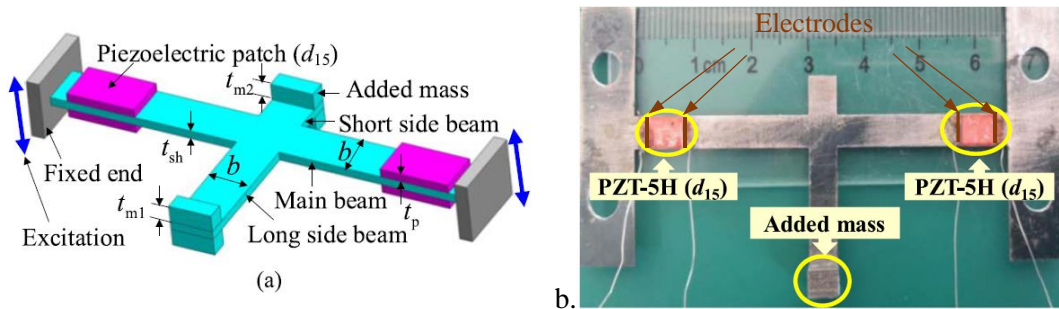


Figure I.43 : Configuration de poutres de type cruciforme [138] a. conception 3D et b. réalisation

*f. Comparaison des structures*

Les récupérateurs les plus fortement couplés de la littérature sont regroupés dans le Tableau I.12 afin d'effectuer une comparaison des configurations. Ce tableau a pour objectif d'être exhaustif mais l'émergence du besoin de récupérateurs très fortement couplés étant récente, il se peut que des récupérateurs fortement couplés non destinés à l'ajustement de fréquence de résonance aient échappés à notre état de l'art.

Afin d'étudier l'intérêt de chaque configuration, on propose d'étudier le coefficient de couplage des matériaux piézoélectriques et le coefficient de couplage global des systèmes proposés. Comme discuté dans les travaux de Cao *et al.* [139] et comme discuté dans la section III.1.4, une poutre large (largeur de la poutre 5 fois plus grande que la longueur) tend à solliciter un coefficient de couplage matériau différent du coefficient  $k_{31}$  couramment utilisé pour les poutres étroites (longueur de la poutre 5 fois plus grande que la largeur). A partir de [95], on définit le coefficient de couplage  $k_{31}$  pour une poutre étroite noté  $k_{31}^l$  et le coefficient pour une poutre large noté  $k_{31}^w$ . Lorsqu'ils sont donnés dans les références ou par les fournisseurs, ces coefficients de couplage sont fournis dans le Tableau I.12. Nous proposons un facteur de mérite afin de comparer l'habileté des structures à bénéficier du coefficient de couplage du matériau appelée **Optimisation Structurale du Couplage** et notée SCO pour *Structural Coupling Optimization*. Elle correspond au coefficient de couplage global normalisé par le coefficient de couplage matériau maximal pris entre  $k_{31}^l$  et  $k_{31}^w$ . Les coefficients  $k_{33}^2$  sont donnés pour les structures sollicitant le mode 33.

On calcule également dans le Tableau I.12, la densité de puissance normalisée (NPD) des récupérateurs selon le volume global (volume maximal inscrit/balayé prenant en compte la hauteur de la masse, la longueur et la largeur totales). Le volume de l'encastrement n'est pas pris en compte dans le calcul du volume global. La NPD est également fournie selon le volume de matériau piézoélectrique. Si la normalisation par le volume global est intéressante pour tenir compte des contraintes en matière d'espace disponible, la normalisation par le volume de matériau piézoélectrique permet de mettre en évidence les structures qui optimisent le mieux l'utilisation du matériau piézoélectrique, pour la réduction des coûts par exemple. Comme les déplacements sont rarement fournis dans les références, les dimensions des récupérateurs données dans le Tableau I.12 ne prennent pas en compte le volume balayé lors des vibrations. La bande passante mesurée avec de l'ajustement de fréquence de résonance par méthode électrique est fournie lorsqu'elle est accessible. Lorsqu'elle n'est pas accessible, nous calculons sa valeur théorique à partir des valeurs du coefficient de couplage global  $k^2$  et du facteur de qualité  $Q_m$  (voir équation (I-21) et Figure I.29).

Les données du Tableau I.12 sont reportées sur la Figure I.44. Les points placent les récupérateurs en fonction de leur facteur de qualité mécanique et leur coefficient de couplage global. La largeur et la hauteur des ellipses correspondent respectivement à la densité de puissance et à la bande passante. Les récupérateurs notés en gras sont les prototypes qui ont été développés au cours de cette thèse et qui sont présentés dans le chapitre III.

Tableau I.12 : Performances des récupérateurs les plus fortement couplés de l'état de l'art

	Référence	Méthode	Matériau	Coefficient de couplage du matériau $k_{31}^l{}^2 - k_{31}^w{}^2$	Facteur de qualité $Q_m$	Coefficient de couplage global $k_e^2$	$k_e^2 Q_m$	$SCO$	Volume global (mm <sup>3</sup> )	Volume piézo (mm <sup>3</sup> )	Fréquence (Hz)	Accélération (m.s <sup>-2</sup> )	Puissance maximale (μW)	NPD selon volume global (kg. s. m <sup>-3</sup> )	NPD selon volume piézo (kg. s. m <sup>-3</sup> )	Bande passante
Prototypes à base de monocristaux	Badel et Lefeuvre [58]	—	PZN-PT	85%-N/A	28	<b>53,0%</b>	<b>32</b>	<b>64%</b>	1000	350	<b>48,5</b>	0,707	47,1	<b>94,3</b>	<b>1 890</b>	<b>39,0%</b> □
	Ahmed Seddik <i>et al.</i> [54], [55]	►	PZN-PT	85%*-N/A	20*	<b>49,9%</b>	<b>20</b>	<b>59%*</b>	6750	50	208	0,981	480	<b>73,9</b>	1 430	<b>32,7%</b>
	Morel <i>et al.</i> [140]	►	PZN-PT	85%-N/A	50	15,4%	9,1	19%	1560*	N/A	253	5,69	670	13,2	N/A	7,5%*
	Tang <i>et al.</i> [141]		PMN-PT	N/A	22*	6,0%*	1,4	N/A	1,21	0,148	406	14,7	7,18	27,2	224	8,4%□
	<b>PMN-PT N</b>	—	PMN-PT	20%-68%	130	16,6%	26	24%	5 640	450	29,1	0,019	0,586	283	3 550	10,1%
Prototypes à base de céramiques	Zhao <i>et al.</i> [64]	◎	PZT-5H	18%-43%	40	6,5%	2,78	15%	914	190	673	9,81	141	1,6	7,71	6,9%
	Kuang <i>et al.</i> [134]	◇	PZT-5	48%*-N/A	<b>60</b>	11,5%	7,8	24%*	15300*	1764	189	2,5	5220	<b>54,6</b>	473	9,3%
	Benchemoul <i>et al.</i> [142]	W	PZT dur	N/A	<b>200*</b>	<b>12,0%</b>	27,2	N/A	700*	N/A	42,5	1,96	400	165	N/A	7,6%□
	Siddiqui <i>et al.</i> [117]	▲	PZT-5H	19%-46%	<b>65</b>	<b>12,3%</b>	9,1	27%	3750	104	116	2,45	88,8	3,94	142	9,7%□
	Kim <i>et al.</i> [124]	—	PZT-5A	12%-27%	32	<b>12,5%</b>	4,6	<b>46%</b>	12300	926	41,6	0,500	160	<b>52,2</b>	691	<b>12,2%</b> □
	<b>PZT N</b>	—	PZT-5A	15%-34%	85	11,3%	11	<b>33%</b>	4000	45	32,1	0,021	0,393	<b>221</b>	<b>19 700</b>	7,8%
	<b>PZT W</b>	W —	PZT-5A	15%-34%	91	<b>16,4%</b>	18	<b>48%</b>	19400	225	32,5	0,018	1,31	<b>214</b>	<b>18 400</b>	<b>11,3%</b>

— : Longue masse, ► : Poutre effilée selon l'épaisseur, ▲ : Poutre effilée selon la largeur ||||| : Electrodes inter-digitées,  
 ◇ : APA, ◎ : Poutre commerciale sans masse, W : Poutre large, □ : Déduit de la théorie en considérant  $k^2$  et  $Q_m$   
 \* : valeurs approximatives déduites de figures ou photographie, \* : le mode 33 est utilisé. Piézo : matériau piézoélectrique

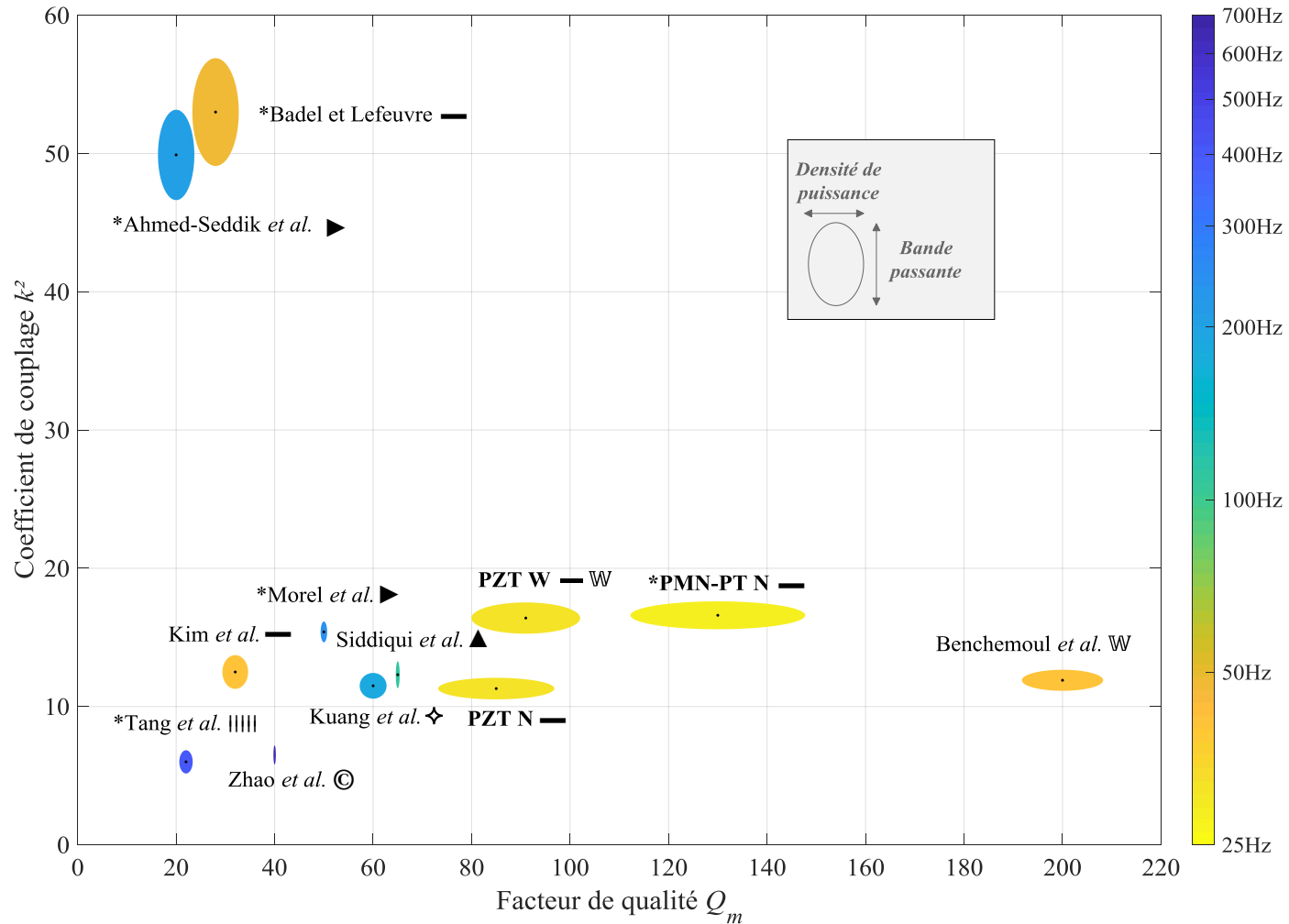


Figure I.44 : Comparaison des récupérateurs très fortement couplés en fonction de leur facteur de qualité et coefficient de couplage. Afin de rendre les marques visibles, la largeur des ellipses de Siddiqui *et al.* et Zhao *et al.* ont été multipliées respectivement par 2 et 3 sur la figure. L'étoile \* avant le nom correspond aux prototypes utilisant des monocristaux.



Cette figure montre que la configuration « poutre » permet d'atteindre de très bons coefficients de couplage et de très bonnes bandes passantes. Ceci est particulièrement vrai pour les poutres utilisant des monocristaux de PZN-PT ( $k^2$  jusqu'à 53% et bande passante jusqu'à 39%). L'utilisation de matériaux fortement couplés est donc nécessaire pour maximiser le coefficient de couplage. Néanmoins, on remarque que l'optimisation des récupérateurs permet d'atteindre de bons coefficients de couplage avec des céramiques PZTs plus robustes et moins coûteuses. A titre d'exemple, le prototype en PZT de Kim *et al.* obtient des résultats similaires en matière de coefficient de couplage à ceux obtenus avec les monocristaux de Tang *et al.* et Morel *et al.*

Le prototype de Kuang *et al.* basé sur une structure de type APA est prometteur car il atteint un bon coefficient de couplage (11,5%) en utilisant du matériau PZT. Les APAs présentent l'avantage de solliciter le matériau piézoélectrique en compression et sont donc plus résistants à la fatigue et aux grandes accélérations que des poutres piézoélectriques. Ces dispositifs restent cependant hautes fréquences et le couplage global est faible comparé au couplage matériau ( $SCO = 24\%$  pour le prototype de Kuang *et al.* alors que  $SCO = 64\%$  pour la poutre de Badel et Lefevre). Comme le processus d'amplification passe par une déformation de matériau non-piézoélectrique, il semble compliqué d'atteindre, avec une structure de type APA, un très grand coefficient de couplage ( $k^2 > 30\%$ ) même si des monocristaux sont utilisés. Les APAs apparaissent donc comme une solution robuste pour réaliser une structure à coefficient de couplage global modéré mais les dimensions, les fréquences de résonances sont limitées.

Concernant les structures de types poutres, on remarque que de « simples » poutres ayant de longues masses mobiles permettent d'atteindre des coefficients de couplage équivalents à ceux obtenus avec des poutres triangles sophistiquées. Au même titre que l'aspect effilé d'une poutre triangle, l'utilisation d'une longue masse semble permettre d'homogénéiser la répartition longitudinale des contraintes [124] et d'augmenter le coefficient de couplage tout en étant plus simple à concevoir. Par ailleurs, alors qu'aucune explication n'est fournie sur la conception du récupérateur, la poutre large de Benchemoul *et al.* [142] atteint un fort coefficient de couplage. Comme nous l'évoquerons dans la section III.1.4, maximiser le ratio entre la largeur et la longueur de la poutre permet d'augmenter le coefficient de couplage global lorsque des matériaux céramiques sont utilisés.

Les poutres piézoélectriques encastrées-libres avec masse sont des systèmes très utilisés en récupération d'énergie et de nombreux travaux ont déjà été publiés sur cette configuration. On relève notamment des articles sur les procédés de fabrications [104] et le vieillissement [143]. Des poutres piézoélectriques *bimorphs* sont même disponibles commercialement, chez le fabricant Mide par exemple.

Pour ces raisons, nous proposons d'étudier dans cette thèse la configuration de poutre piézoélectrique avec masse mobile pour la réalisation de récupérateurs dont le coefficient de couplage électromécanique global est important. Bien que les poutres piézoélectriques avec masse mobile semblent simplistes et la technologie mature, des verrous persistent sur l'optimisation de tels systèmes. Aucun travail de recherche ne semble avoir jusqu'alors permis une compréhension exhaustive des aspects électromécaniques de telles structures. La simulation par éléments finis reste en effet souvent l'unique outil d'étude et d'optimisation. Notre travail se concentrera donc sur la modélisation et la compréhension des interactions électromécaniques au sein des poutres piézoélectriques très fortement couplées destinées à l'ajustement de fréquence de résonance en récupération d'énergie vibratoire.

### I.5.3. Optimisation de poutres piézoélectriques avec masse mobile

À ce jour, plusieurs travaux ont étudié l'optimisation des poutres encastées-libres piézoélectrique ayant une masse mobile. En 2011, Patel *et al.* [144] ont analysé l'influence des paramètres géométriques des poutres *unimorphs* avec masses mobiles sur la puissance récupérée à l'aide d'un modèle se basant sur la méthode des éléments finis. En raison du manque d'exhaustivité de leur étude, les conclusions qu'ils déduisent sont limitées à leurs configurations (patch piézoélectrique très fin par rapport au substrat) et se révèlent inexactes pour des cas généraux. En effet, comme les patches piézoélectriques étudiés étaient minces par rapport à l'épaisseur du substrat, ils n'ont discuté que de configurations ayant des coefficients de couplage  $k^2$  faibles à modérés. A titre d'exemple, ils ont conclu que les patches piézoélectriques doivent couvrir 60% de la longueur de la poutre, notamment lorsqu'une masse est placée en bout de poutre. Cette assertion a été réfutée plus tard par Xiong *et al.* [100].

En 2014, Xiong *et al.* ont discuté de l'optimisation du coefficient de couplage électromécanique des poutres piézoélectriques en utilisant un modèle associé à des simulations par éléments finis. Bien qu'ils aient limité leur analyse aux masses mobile cubiques, ils ont révélé que les patches piézoélectriques doivent couvrir toute la longueur de la poutre lorsqu'une masse mobile est utilisée. Dans cette condition, la masse mobile pourrait augmenter le coefficient de couplage global  $k^2$  de plus de 10% par rapport au cas sans masse. En 2016, Jia *et al.* [145] ont analysé l'influence de la longueur de la masse mobile sur la puissance générée par le récupérateur grâce à un modèle associé à des simulations par éléments finis et 4 prototypes. Ils ont conclu que, dans le cadre d'une réponse linéaire du récupérateur, la puissance générée est maximale pour des masses mobiles occupant 60 à 70 % de la longueur totale du *cantilever*. Plus récemment, en 2019, Pradeesh et Udhayakumar [146] ont montré, par des simulations par éléments finis de cantilevers *unimorphs* avec des masses mobiles de tailles modérées (Figure I.45), que la forme de la masse mobile avait un effet minimal sur la puissance récupérée. La masse de la masse mobile a, quant à elle, un impact significatif.

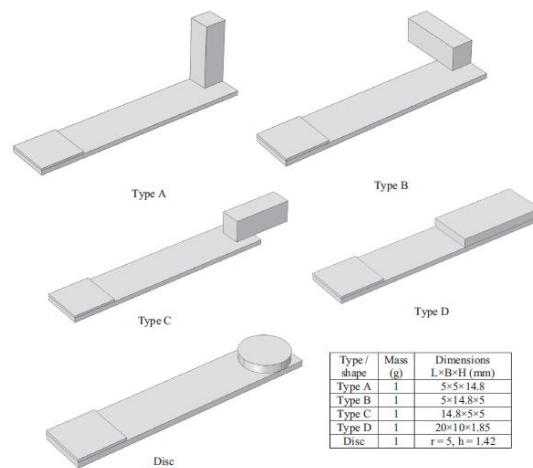


Figure I.45 : Configuration de poutres et masses mobiles étudiées par Pradeesh et Udhayakumar [146]

Les travaux cités ci-dessus montrent que la connaissance des systèmes à longue masse est complexe et est encore un sujet de discussion aujourd'hui. Les résultats obtenus par des simulations par éléments finis peuvent mener à de mauvaises conclusions ou des conclusions

restreintes à une configuration particulière. Par ailleurs, peu de modèles totalement analytiques prenant en compte les effets de rotation de la masse mobile sont utilisés pour l'optimisation du coefficient de couplage de récupérateurs. L'étude de ce type de structure grâce au modèle analytique présenté dans le chapitre suivant nous permet de mener une étude qui se veut exhaustive. Ce modèle permet de mieux comprendre les phénomènes physiques en jeux par rapport à l'unique utilisation de simulations par éléments finis.

## **I.6. Conclusion du chapitre**

Dans ce chapitre, nous avons présenté le domaine de la récupération d'énergie vibratoire ainsi que les deux principaux critères de performances de ce domaine que sont la bande passante et la densité de puissance. Une comparaison des solutions de l'état de l'art pour élargir la bande passante des récupérateurs a permis de révéler le potentiel de l'ajustement de fréquence de résonance des récupérateurs piézoélectriques par des méthodes électriques. Après avoir défini la notion de coefficient de couplage électromécanique global des récupérateurs piézoélectriques, nous avons montré qu'il est important d'augmenter ce coefficient pour élargir la bande passante atteinte par cette solution. Nous avons ensuite pu comparer les différentes configurations de récupérateurs d'énergie piézoélectriques et leur éventuel intérêt pour maximiser le coefficient de couplage global. Une comparaison des récupérateurs les plus couplés de la littérature a permis d'établir que la configuration de poutre encastree-libre ayant une longue masse mobile est efficace pour obtenir de très fort coefficients de couplage globaux. De surcroît, cette configuration permet de concevoir des récupérateurs ayant de basses fréquences de résonance et de fortes densités de puissance. Elle est de plus simple à fabriquer et à concevoir par rapport aux structures complexes évoquées dans l'état de l'art. Cependant, comme nous l'avons montré, l'optimisation de poutres piézoélectriques avec masses mobiles est encore aujourd'hui l'objet de questionnements.

La suite de cette thèse se consacre alors à la compréhension des aspects électromécaniques des poutres piézoélectriques ayant une masse mobile dans le but de leur optimisation. Les règles d'optimisation discutées sont destinées à maximiser le coefficient de couplage global pour permettre l'ajustement de fréquence de résonance par méthode électrique sur une large bande de fréquence. Nous abordons dans le chapitre suivant la modélisation des récupérateurs par des modèles analytiques et nous présentons un modèle pratique pour l'optimisation. Ce modèle permet de déduire une expression du coefficient de couplage électromécanique qui utilisée dans le chapitre III pour fournir des règles de conception.

# Chapitre II : Modélisation

*L'objectif de ce chapitre est d'introduire des modèles propices à l'optimisation du couplage électromécanique de poutres piézoélectriques comportant une masse mobile. Il commencera par un état de l'art des modèles utilisés pour les poutres piézoélectriques comportant une masse mobile ainsi qu'une comparaison de ceux-ci. Nous introduisons ensuite deux approches considérant un modèle à deux degrés de liberté (2DDL) totalement analytique prenant en compte l'inertie en rotation de la masse mobile. Les résultats de ces modèles sont comparés aux simulations par éléments finis pour plusieurs configurations de masse mobile en fin de chapitre. Ce modèle sera utilisé dans le chapitre suivant pour fournir des règles de conception de poutres piézoélectriques fortement couplées.*

## II.1. Littérature sur les modèles de poutre piézoélectrique avec masse mobile

### II.1.1. Théories des poutres

Bien que plusieurs théories existent pour l'étude des poutres, la théorie d'Euler-Bernoulli est la théorie la plus utilisée pour l'étude de poutres piézoélectriques. Un article d'Erturk *et al.* [147] présente 3 théories communes de poutres appliquées aux vibrations d'un cantilever piézoélectrique :

- La théorie d'Euler-Bernoulli considère la flexion pure des poutres. Les contraintes sont uniquement longitudinales dans la poutre. Celles-ci induisent un moment de flexion à la fibre neutre. Les déformations longitudinales sont proportionnelles à la distance à la fibre neutre.
- La théorie des poutres de Rayleigh considère l'inertie en rotation de chaque élément de la poutre en supplément à la théorie d'Euler-Bernoulli. L'inertie en rotation de chaque élément de la poutre induit un moment supplémentaire à celui de la flexion.
- La théorie de Timoshenko considère les contraintes de cisaillement dans la poutre en supplément de la théorie de Rayleigh.

Ces trois théories considèrent des petites déformations (utilisation de la loi de Hooke) et leur précision par rapport à l'expérience dépend du ratio longueur/épaisseur de la poutre. La théorie d'Euler-Bernoulli est vérifiée pour de grands ratios longueur/épaisseur de poutre et est donc imprécise pour des poutres épaisses. On considère que le ratio longueur/épaisseur de la poutre doit généralement être supérieur à 10 afin que la théorie d'Euler-Bernoulli puisse être précise par rapport à l'expérience. Les poutres piézoélectriques utilisées en récupération d'énergie sont conçues pour solliciter le mode 31 des matériaux piézoélectriques à partir des déformations longitudinales dans la poutre. Celles-ci sont alors habituellement fines et correspondent aux hypothèses d'Euler-Bernoulli. Le cisaillement induit dans des poutres épaisses n'est pas utile pour la production d'électricité lorsque les électrodes sont orthogonales à l'axe 3 du matériau piézoélectrique et réduit le coefficient de couplage global.

A partir de la théorie d'Euler-Bernoulli, on distingue plusieurs modèles selon les hypothèses sur la masse de la poutre et sur la masse mobile.

- Les modèles à paramètres distribués où la masse répartie dans la poutre est prise en compte. Les modes exactes de vibration selon la théorie d'Euler Bernoulli sont considérés.
- Les modèles à deux degrés-de-libertés où la masse de la poutre est négligée et l'inertie en rotation de la masse est considérée. Les formes des modes des deux premières fréquences de résonance en flexion sont approximées par des polynômes. Les deux degrés de libertés correspondent à la translation et la rotation de la masse mobile.
- Les modèles à un degré-de-liberté où la masse de la poutre et l'inertie en rotation de la masse mobile sont négligées. La masse est considérée ponctuelle placée au bout de la poutre ( $x = L_b$ ) ou à une certaine distance  $D_t$  du bout de la poutre (Figure II.1). Le mode de vibration est approximé par un polynôme. Le degré de liberté correspond à la translation de la masse mobile.

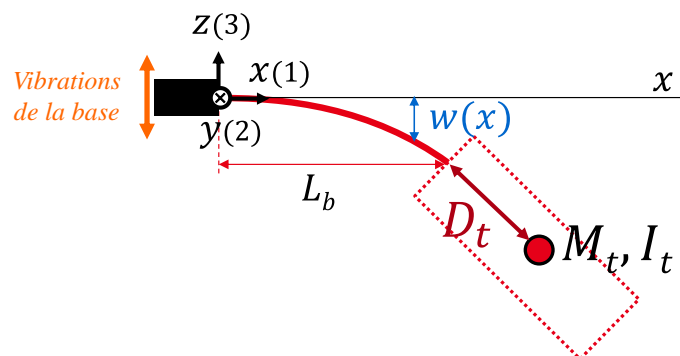


Figure II.1 : Représentation d'une poutre en flexion. La masse mobile possède une inertie en rotation  $I_t$  par rapport à son centre de gravité et son centre de gravité est placé à une distance  $D_t$  du bout de la poutre.

L'exploitation de ces modèles peut se faire par :

- Résolution directe : la réponse fréquentielle du système (puissances et déplacements en fonction de la fréquence et de la résistance de charge) est déterminée à partir de l'équation constitutive donnée par le modèle.

- **Projection modale** : dans cette thèse, on appelle projection modale, l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz (également appelée méthode de Ritz). La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode basée sur une approche énergétique (notamment sur le principe de Hamilton) permettant l'analyse de vibrations de systèmes à plusieurs degrés de libertés. L'application de la méthode de Rayleigh-Ritz peut se baser sur une expression considérée exacte des modes de vibration pour réduire l'analyse d'un modèle à paramètres distribués à quelques modes de vibration uniquement. La méthode de Rayleigh-Ritz peut également se baser sur l'expression approchée des modes vibration. Par exemple, la méthode de Rayleigh<sup>4</sup> peut permettre d'améliorer la précision du modèle à 1 degré de liberté par rapport à sa résolution directe.

Les différentes approches sont résumées dans la Figure II.2 et sont discutées ci-après.

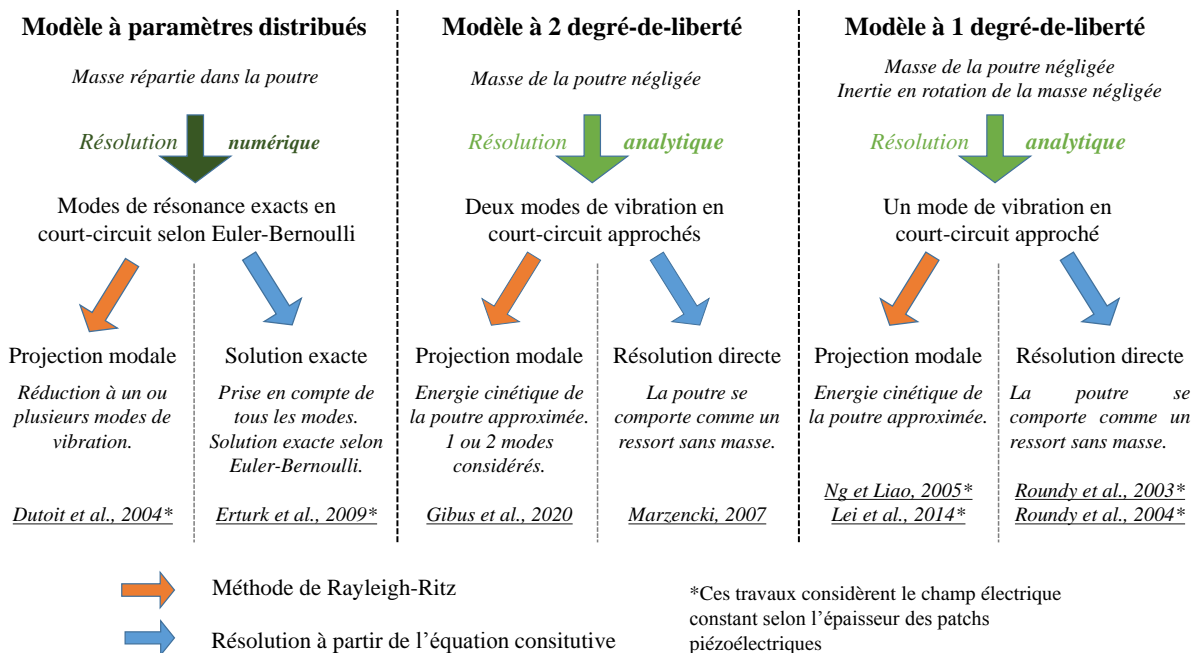


Figure II.2 : Illustration des différentes méthodes de modélisation de poutres piézoélectriques avec masse mobile

## II.1.2. Présentation et comparaison des modèles de la littérature

### a. Modèles à paramètres distribués

Lorsque le patch piézoélectrique est disposé sur toute la poutre (ce qui a un intérêt pour maximiser le coefficient de couplage global quand la masse est volumineuse comme expliqué plus tard) et lorsqu'aucun amortissement est considéré, l'équation constitutive de la poutre en court-circuit selon la théorie d'Euler-Bernoulli est donnée en (II-1) par [149], [150]. Où  $YI$  est le terme de raideur à la flexion,  $m$  est la masse linéique de la poutre,  $w$  est la flexion de la poutre,  $v(t)$  est la tension aux bornes des électrodes,  $\vartheta$  est le terme de couplage (parfois appelé terme de tension),  $L_b$  est la longueur de la poutre,  $f_r(x, t)$  est la force appliquée sur chaque

<sup>4</sup> On appelle généralement méthode de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz appliquée à un seul mode de vibration [148].

élément de longueur de la poutre et  $\delta(x)$  est défini comme  $\delta(x) = 1$  pour  $x = 0$  et  $\delta(x) = 0$  pour  $x \neq 0$ .

$$YI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \vartheta v(t) \left[ \frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x - L_b)}{dx} \right] = f_r(x, t) \quad (\text{II-1})$$

Les modes de vibration ainsi que les fréquences de résonance de la poutre doivent être déterminés de manière numérique à partir de l'équation (II-1) en considérant la force et la tension nulles, et à partir des conditions limites (l'encastrement et l'extrémité libre avec masse pour notre cas). La résolution se fait par une séparation des aspects temporels et spatiaux et donne une infinité de solutions. Ainsi, les déformées de la poutre  $w(x, t)$  peuvent être modélisées par une infinité de modes de vibration  $\phi_i(x)$  auxquels sont associés une composante temporelle  $\eta_i(t)$  comme exprimé dans l'équation (II-2).

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \quad (\text{II-2})$$

Selon la théorie d'Euler Bernoulli, les modes de vibration sont de la forme (II-3). Les valeurs propres  $\lambda_i$  (paramètres de fréquences adimensionnels) sont calculées à partir des conditions aux limites et les coefficients  $A_i, B_i, C_i, D_i$  dépendent de la normalisation. Les pulsations propres sont directement données à partir des valeurs propres  $\lambda_i$  en (II-4) où  $L_b$  est la longueur de la poutre.

$$\phi_i(x) = A_i \cos\left(\frac{\lambda_i}{L_b} x\right) + B_i \cosh\left(\frac{\lambda_i}{L_b} x\right) + C_r \sin\left(\frac{\lambda_i}{L_b} x\right) + D_r \sinh\left(\frac{\lambda_i}{L_b} x\right) \quad (\text{II-3})$$

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{YI}{mL_b^4}} \quad (\text{II-4})$$

L'étude des vibrations d'une poutre selon la théorie d'Euler-Bernoulli revient à ce que l'on appelle « modèle à paramètres distribués ». Grâce à la prise en compte de la totalité des modes de vibrations, Erturk et Inman ont fourni en 2009 une solution exacte au sens de la théorie d'Euler-Bernoulli [149]. Le modèle à paramètres distribués d'Erturk et Inman permet de connaître fidèlement le comportement de la poutre en considérant l'influence de tous les modes de vibration. Cependant, la version dans laquelle ils ont présenté le modèle ne considère pas totalement la distance  $D_t$  entre le centre de gravité de la masse mobile et le bout de poutre. Il est donc inapproprié dans le cas où la masse est longue.

Dutoit *et al.* [98] ont considéré en 2004 cette distance  $D_t$  dans leur modèle basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz et considérant plusieurs modes de vibration de la théorie d'Euler-Bernoulli. Elvin et Elvin [151] ont montré que l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz en considérant un grand nombre de modes de vibration donne des résultats très similaires à la solution exacte du modèle à paramètres distribués. Les approches se basant sur le modèle à paramètres distribués comme celle de Dutoit *et al.* sont très pratiques car les puissances et déplacements peuvent être exprimés analytiquement. Les valeurs propres  $\lambda_i$  doivent cependant être obtenues de manière numérique. La résolution numérique rend complexe les processus d'optimisation. Elle induit en effet la nécessité de réaliser des études paramétriques de grandes ampleurs qui entraînent de grandes durées de calculs. Finalement, les modèles à paramètres distribués sont utiles pour la connaissance du comportement des récupérateurs mais sont peu propices aux optimisations.

*b. Modèles à un degré de liberté (1DDL)*

Au lieu de considérer les modes exacts de vibration des poutres selon la théorie d'Euler-Bernoulli donnés par (II-3), des modèles plus simples considèrent des modes de vibration approchés permettant d'aboutir à des résultats totalement analytiques. L'approximation la plus courante est de considérer la déformée de la poutre comme si la poutre était sollicitée statiquement par une force transversale (selon l'axe  $O_z$ ) en son extrémité libre. Cette hypothèse correspond au modèle à 1 degré de liberté (1DDL) et revient à négliger la masse de la poutre par rapport à celle de la masse mobile ainsi qu'à négliger l'inertie en rotation de la masse mobile. De la même manière qu'un ressort sans masse dans un système masse-ressort, on considère que la masse de la poutre n'a aucune influence sur la dynamique du récupérateur. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au centre de gravité de la masse mobile, permet d'aboutir à l'équation constitutive du récupérateur dont la résolution directe permet de déterminer la réponse fréquentielle de la poutre.

Bien que les résultats soient moins précis pour des masses de tailles modérées, les résultats des modèles à 1 degré de liberté sont cohérents avec ceux des modèles à paramètres distribués pour des masses mobiles lourdes mais ponctuelles [152]. Par ailleurs, sans toujours être nommée comme telle par les auteurs des publications, la méthode de Rayleigh est souvent appliquée à des poutres piézoélectriques en considérant l'approximation du mode de vibration donnée par le modèle à 1 degré de liberté. Cette approche permet d'approximer l'énergie cinétique de la poutre tout en négligeant la masse de la poutre dans le calcul de la déformée. Le système à 1 degré de liberté obtenu par la méthode de Rayleigh donne ainsi de meilleurs résultats que la résolution directe du modèle à 1 degré de liberté. Selon les articles utilisant les modèles à 1 degré de liberté, soit la masse mobile est considérée ponctuelle en bout de poutre et la distance  $D_t$  est négligée [153], soit la distance  $D_t$  est prise en compte [101]. En tout état de cause, les modèles à 1 degré de liberté ne prennent pas en compte l'inertie en rotation de la masse mobile dont l'effet n'est pas négligeable lorsque la masse s'allonge.

*c. Modèle à deux degrés de liberté (2DDL)*

Dans sa thèse, Marzencki [154] a proposé un modèle à 2 degrés de liberté qui néglige la masse la poutre et qui considère l'inertie en rotation de la masse mobile  $I_t$  ainsi que la distance  $D_t$  entre son centre de gravité et le bout de poutre. Cette proposition est intéressante car elle peut conduire à des résultats fiables pour de grandes masses mobiles. Cependant, comme détaillé dans la section II.4.1.a, nous avons remarqué qu'une mauvaise considération des paramètres  $I_t$  et  $D_t$  avait conduit à une erreur non-négligeable sur le calcul de la première fréquence de résonance. Même si l'erreur sur le calcul de la fréquence de résonance du premier mode est proche de 20% par rapport aux simulations éléments finis, Marzencki a montré que son modèle présente une erreur plus faible que le modèle à 1 degré de liberté pour des récupérateurs dont la masse mobile est volumineuse.



*d. Modèles par la méthode des éléments finis*

En marge de ces modèles courants, des modèles utilisant la méthode des éléments finis<sup>5</sup> ont été également proposés dans certains articles tels que celui de De Marqui Junior *et al.* [155]. Les modèles utilisant la méthode des éléments finis permettent de réaliser des études paramétriques plus rapidement par rapport à l'utilisation de modèles à paramètres distribués. Cependant, par la discrétisation de la poutre en un nombre important d'éléments, ces modèles peuvent rendre complexe l'exploitation des équations et l'interprétation physique des résultats.

*e. Comparaison des modèles*

Une comparaison des modèles précédemment présentés ainsi que de ceux proposés dans cette thèse est résumée dans le Tableau II.1. En se basant sur les mêmes considérations que celles proposées dans la thèse de Marzencki [154], nous proposons dans cette thèse un modèle à 2 degrés de liberté. Nous exploiterons la résolution directe de ce modèle (appelé modèle 2DDL-RD dans ce manuscrit) ainsi que l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz (appelé modèle 2DDL-PM dans ce manuscrit) afin de donner des nouvelles expressions analytiques du coefficient de couplage global des poutres piézoélectriques avec masse mobile. Une de ces expressions nous permettra de fournir des conclusions sur l'optimisation du coefficient de couplage de récupérateurs dédiés à l'ajustement de fréquence de résonance.

---


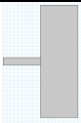
<sup>5</sup> La mise en place d'un modèle utilisant la méthode des éléments finis diffère de l'utilisation d'un logiciel utilisant la méthode des éléments finis de type Comsol ou Ansys.

Tableau II.1: Comparaison des modèles analytiques et semi-analytiques de poutres piézoélectriques appliqués à la récupération d'énergie vibratoire

Source	Masse de la poutre	Inertie de rotation $I_t$	Distance $D_t$	Obtention des fréquences de résonance	Méthode
Erturk <i>et al.</i> 2009 [149]	<u>Masse répartie dans la poutre</u>	<u>Prise en compte</u>	Négligée	Numérique	Résolution directe
Dutoit <i>et al.</i> 2004 [98]	<u>Masse répartie dans la poutre</u>	<u>Prise en compte</u>	<u>Prise en compte</u>	Numérique	Méthode de Rayleigh-Ritz
Ng et Liao, 2005 [153]	Masse de la poutre négligée pour le calcul du mode de vibration. Energie cinétique de la poutre approchée	Négligée	Négligée	<u>Analytique</u>	Méthode de Rayleigh
Lei <i>et al.</i> , 2014 [101]	Masse de la poutre négligée pour le calcul du mode de vibration. Energie cinétique de la poutre approchée	Négligée	<u>Prise en compte</u>	<u>Analytique</u>	Méthode de Rayleigh
Roundy <i>et al.</i> , 2004 [156]	Masse de la poutre négligée	Négligée	<u>Prise en compte</u>	<u>Analytique</u>	Résolution directe
Roundy <i>et al.</i> , 2003[16]	Masse de la poutre négligée	Négligée	Négligée	<u>Analytique</u>	Résolution directe
Marzencki, 2007 [154]	Masse de la poutre négligée	<u>Prise en compte</u>	<u>Prise en compte</u>	<u>Analytique</u>	Résolution directe
<b>2DDL-RD</b> (cette thèse)	Masse de la poutre négligée	<u>Prise en compte</u>	<u>Prise en compte</u>	<u>Analytique</u>	Résolution directe
<b>2DDL-PM</b> (cette thèse)	Masse de la poutre négligée pour le calcul du mode de vibration. Energie cinétique de la poutre approchée	<u>Prise en compte</u>	<u>Prise en compte</u>	<u>Analytique</u>	Résolution directe

Aucun modèle, ayant une précision comparable à celle des modèles à paramètres distribués, n'avait jusqu'alors permis la prise en compte de l'effet de l'inertie de rotation de la masse mobile de manière analytique. On montre en effet dans le Tableau II.2 que prendre en compte l'inertie de rotation est nécessaire lorsque la masse mobile est volumineuse. On compare dans ce tableau les résultats obtenus par le modèle à 1 degré de liberté de Roundy *et al.* [156], par le modèle à paramètres distribués exploité avec la méthode de Rayleigh-Ritz de Dutoit *et al.* [98] ainsi que par le modèle 2DDL-RD présenté dans cette thèse pour la première fréquence de résonance de poutres non-piézoélectriques à ceux obtenus avec des simulations par éléments finis en 2 dimensions (2D-FEM). On remarque que la prise en compte de l'inertie de rotation permet de réduire considérablement l'erreur sur la fréquence de résonance. Les résultats du modèle 2DDL-RD sont très proches du modèle à paramètres distribués de Dutoit *et al.* tout en étant analytiques. Les modèles à deux degrés de liberté proposés dans cette thèse vont donc permettre une compréhension fine des interactions dans les poutres piézoélectriques avec masse mobile.

Tableau II.2 : Comparaison des modèles à la simulation par éléments finis en 2 dimensions (2D FEM) pour une poutre sans matériau piézoélectrique. L'erreur est donnée par  $|f_{modele} - f_{FEM}|/f_{FEM}$ . Paramètres : module de Young (200GPa), masse volumique (2330kg.m<sup>3</sup>), longueur de poutre (10mm), épaisseur de poutre (2mm) et taille de la masse (30 × 10mm)

		2D FEM Comsol	Roundy <i>et al.</i> , 2004 [156]	Dutoit <i>et al.</i> 2004 [98]	2DDL-RD (cette thèse)
	Fréquence	989Hz	1 079Hz	992Hz	993Hz
	Erreur		9,13%	0,34%	0,38%
	Fréquence	1 596Hz	2 096Hz	1 602Hz	1 603Hz
	Erreur		31,29%	0,34%	0,45%

Pour conclure, nous avons montré qu'il existe différents modèles permettant la modélisation de poutres piézoélectriques comportant une masse mobile. Les modèles à 1DDL sont totalement analytiques mais ils sont cependant imprécis pour des masses mobiles volumineuses. Les modèles à paramètres distribués sont précis pour des masses mobiles volumineuses mais ils nécessitent d'être résolus numériquement. Le modèle 2DDL introduit dans ce chapitre nous permet d'obtenir des résultats totalement analytiques et précis pour des masses mobiles volumineuses. Les résultats détaillés de ce modèle sont donnés dans la section II.6.

Par ailleurs, l'utilisation de matériaux piézoélectriques très fortement couplés nous mène également à reconsidérer les hypothèses courantes sur le champ électrique au sein des patches. En effet, la majorité des sources référencées sur la Figure II.2 considère que le champ électrique est constant selon l'épaisseur des patches piézoélectriques. Hors, l'approche développée par Tadmor *et al.* [157] permet de prendre en compte la variation du champ électrique. Gong *et al.* [158] ont d'ailleurs montré que négliger cette variation pouvait conduire à une erreur supérieure à 24% sur la fréquence de résonance d'une poutre comportant du PZN-PT. Les approches proposées dans cette thèse considèrent alors le champ électrique variable selon l'épaisseur des patches piézoélectriques.

## II.2. Méthodologie

L'objectif de la suite du chapitre est d'introduire les modèles propices à l'optimisation du coefficient de couplage global de poutres piézoélectriques comportant une masse mobile. Deux approches analytiques sont ainsi présentées et se basent sur la modélisation à deux degrés de liberté (2DDL) du système {poutre + masse mobile}. Par cette modélisation, nous considérons que la masse de la masse mobile est prépondérante par rapport celle de la poutre. De plus, nous prenons en compte l'inertie en rotation de la masse mobile ainsi que la distance entre son centre de gravité et le bout de poutre. La première approche, que nous présentons dans la section II.4, correspond à la résolution directe du modèle à 2DDL et la seconde approche, que nous présentons dans la section II.5, correspond à une projection modale par l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz. Ainsi, les acronymes suivants seront utilisés dans le manuscrit :

- « 2DDL-RD » pour Modèle à 2 degrés de liberté par Résolution Directe

- « 2DDL-PM » pour Modèle à 2 degrés de liberté par Projection Modale. 2DDL-PM2 est utilisé lorsque la projection modale est réalisée sur les 2 modes et 2DDL-PM1 est utilisé lors d'une projection sur un unique mode.

Ces modèles considèrent également que le champ électrique est variable selon l'épaisseur des patches piézoélectriques afin d'être applicables à des poutres comportant des matériaux piézoélectriques très fortement couplés.

Dans ce chapitre, nous exprimons analytiquement les pulsations de résonance en court-circuit  $\omega_{sc}$  et en circuit ouvert  $\omega_{oc}$  des deux premiers modes de flexion à partir de chacun des modèles. Ces expressions permettent *in fine* de déduire les expressions des coefficients de couplage globaux associés aux modes de résonance. Comme discuté dans la section I.4.3.d, le coefficient de couplage électromécanique global  $k^2$  d'un système piézoélectrique peut être calculé par (II-5).

$$k^2 = \frac{\omega_{oc}^2 - \omega_{sc}^2}{\omega_{oc}^2} \quad (\text{II-5})$$

Avant de présenter ces modèles en détail, nous introduisons les hypothèses propres à la théorie d'Euler-Bernoulli appliquées aux poutres piézoélectriques. Nous donnons ensuite l'expression du moment fléchissant dans la poutre et l'expression du courant de sortie du récupérateur. Enfin, après avoir présenté les modèles, nous comparons la précision des différentes approches à des simulations par éléments finis ainsi qu'à des modèles à paramètres distribués sur le calcul des fréquences de résonance et des coefficients de couplage.

Dans le but de simplifier le discours au sein de ce chapitre, les travaux de modélisation seront détaillés ici pour des poutres de types *bimorphs* connectées en parallèle. Les structures de type *bimorphs* permettent d'obtenir un meilleur couplage que les structures *unimorphs* dans le cas où le matériau piézoélectrique est réparti sur toute la poutre [114], cette configuration est choisie pour réaliser nos optimisations. La connexion parallèle permet, quant à elle, d'avoir une capacité équivalente quatre fois plus grande que la connexion série à configurations équivalentes tout en permettant d'obtenir le même coefficient de couplage global. La connexion parallèle permet de plus d'avoir une tension deux fois plus faible qu'en connexion série. Ceci est a priori favorable pour la gestion électrique car de fortes tensions sont relevées sur nos récupérateurs lors de caractérisations vibratoires. Les poutres que nous considérons dans les modèles sont recouvertes de matériau piézoélectrique sur toute la longueur et toute la largeur de poutre. Les électrodes couvrent toute la longueur et toute la largeur des patches piézoélectriques. Cette configuration d'électrodes et de patches est la configuration optimale lorsqu'une masse mobile volumineuse est utilisée comme nous l'expliquons dans le chapitre III.

## II.3. Moment fléchissant et équation de courant

### II.3.1. Hypothèses

La Figure II.3 représente le schéma d'une poutre piézoélectrique ayant une masse mobile. Lors de la flexion de la poutre, le mode 31 des patches piézoélectriques est sollicité : un champ de déplacement électrique est développé selon l'axe  $O_z$  sous l'action d'une déformation selon

l'axe  $O_x$ . A partir des hypothèses qui sont détaillées ci-dessous, il est possible d'exprimer les variables pertinentes grâce à une relation de type  $(S,E)$  donnée en (II-6).

$$\begin{cases} T_1 = c_{11}^{ef} S_1 - e_{31}^{ef} E_3 \\ D_3 = e_{31}^{ef} S_1 + \epsilon_{33}^{ef} E_3 \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

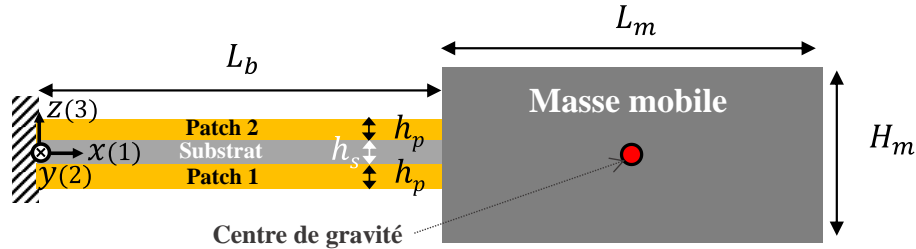


Figure II.3 : Représentation d'une poutre piézoélectrique *bimorph* avec masse mobile

Les hypothèses permettant d'écrire l'équation (II-6) sont les suivantes :

- Comme la poutre est fine, les contraintes selon l'axe  $O_z$  sont négligeables ( $T_3 = 0$ ).
- Le champ électrique et le champ de déplacement électrique sont uniquement selon l'axe  $O_z$  ( $E_1 = E_2 = 0$  et  $D_2 = D_1 = 0$ )
- Le champ électrique  $E_3$  ne dépend que des coordonnées  $z$  et  $x$ . Il est invariant selon  $y$ .
- Le champ de déplacement électrique  $D_3$  ne dépend que de la coordonnée  $x$ . Il est invariant selon  $x$  et  $y$ .
- L'hypothèse sur les contraintes et déformations latérales dépend de la largeur de la poutre. Deux hypothèses sont possibles selon la configuration de la largeur de la poutre tel que représenté sur la Figure II.4 :
  - o Si la poutre est très **étroite**, les contraintes latérales sont considérées nulles ( $T_2 = 0$ ). Cette configuration correspond à l'hypothèse des **contraintes planes**
  - o La poutre est très **large**, les déformations latérales sont considérées nulles ( $S_2 = 0$ ). Cette configuration correspond à l'hypothèse des **déformations planes**

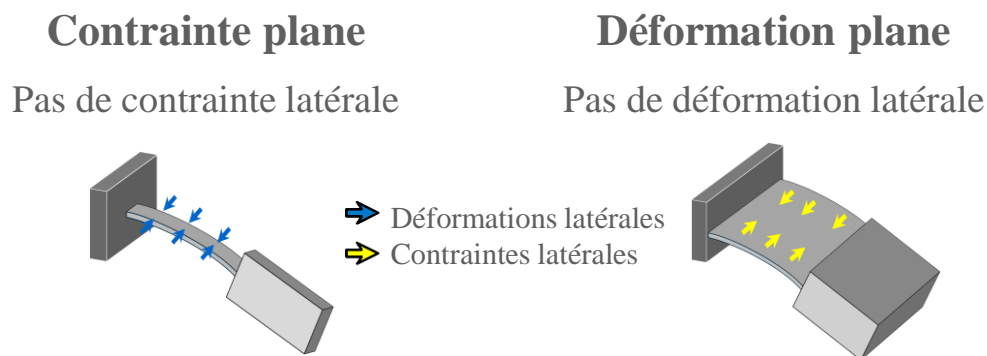


Figure II.4: Représentation simplifiée des hypothèses de contraintes planes et déformations planes

A partir des relations matricielles des équations fondamentales piézoélectriques sous la forme intensive et en considérant les hypothèses présentées ci-dessus, nous pouvons déterminer l'expression des variables de  $T_1$  et  $D_3$ . Nous pouvons ainsi déduire les expressions des coefficients équivalents piézoélectriques de l'équation (II-6).

De la même manière, la rigidité équivalente  $Y_s^{ef}$  du substrat, qui traduit la relation entre la contrainte longitudinale et la déformation longitudinale dans l'équation (II-7), peut être déterminée et dépend de l'hypothèse d'élasticité plane.

$$T_1 = Y_s^{ef} S_1 \quad (\text{II-7})$$

Les coefficients matériaux équivalents selon les deux hypothèses d'élasticité plane sont exprimés dans le Tableau II.3.  $Y_s^{ef}$  est donné pour le cas d'un matériau isotrope de module de Young  $Y_s$  et de coefficient de poisson  $\nu$ .

Tableau II.3: Coefficients matériaux équivalents selon l'hypothèse de contrainte plane et selon l'hypothèse de déformation plane

	Contrainte plane	Déformation plane
$\epsilon_{33}^{ef}$	$\epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$	$\epsilon_{33}^T + \frac{s_{22}^E d_{31}^2 - 2 d_{31} d_{32} s_{12}^E + s_{11}^E d_{32}^2}{s_{12}^E{}^2 - s_{11}^E s_{22}^E}$
$c_{11}^{ef}$	$\frac{1}{s_{11}^E}$	$\frac{s_{22}^E}{s_{22}^E s_{11}^E - s_{12}^E{}^2}$
$e_{31}^{ef}$	$\frac{d_{31}}{s_{11}^E}$	$\frac{s_{22}^E d_{31} - d_{32} s_{12}^E}{s_{22}^E s_{11}^E - s_{12}^E{}^2}$
$Y_s^{ef}$	$Y_s$	$\frac{Y_s}{1 - \nu^2}$

### II.3.2. Expression de la déformation et du champ électrique

#### a. Expression de la déformation selon la théorie d'Euler-Bernoulli

Le comportement mécanique de la poutre piézoélectrique est régi par l'expression de son moment fléchissant. Selon la théorie d'Euler-Bernoulli, chaque élément de volume subit un déplacement longitudinal. Les sections droites restent perpendiculaires à la fibre neutre lors de la flexion et forment un l'angle de flexion  $\theta_f$  autour de l'axe  $O_y$  tel qu'illustré sur la Figure II.5.

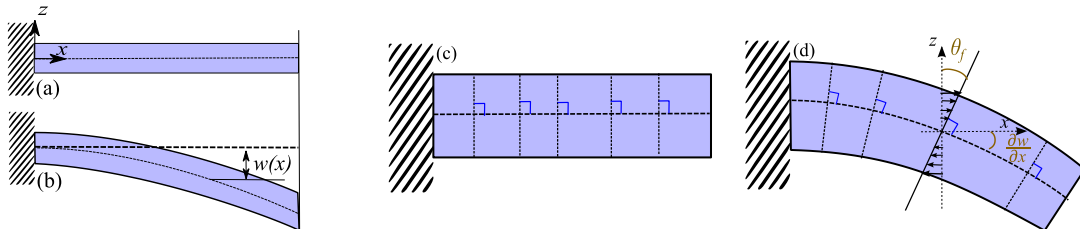


Figure II.5: (a) Poutre à l'état initial, (b) flexion en petit déplacement. Représentation des sections droites à l'état initial et (d) suite aux déformations correspondant à la théorie d'Euler-Bernoulli en (f)

En petites déformations, l'angle de flexion  $\theta_f$  est donné par l'équation (II-8) avec  $w(x)$  la déformée de la poutre à la coordonnée  $x$ .

$$\theta_f(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II-8})$$

Le déplacement  $u_1$  longitudinal de chaque élément de volume de la poutre dépend de cet angle de flexion  $\theta_f$  et de la distance à la fibre neutre  $z$  comme exprimé en (II-9). La déformation  $S_1$  longitudinale étant la dérivée du déplacement longitudinal (II-10), on peut aboutir à une expression de la déformation en tout point de la poutre comme exprimé en (II-11).

$$u_1(x, z, t) = -z\theta_f(x, t) \quad (\text{II-9}) \quad S_1 = \frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial x} \quad (\text{II-10})$$

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{II-11})$$

L'équation (II-11) traduit donc l'expression des déformations dans la poutre selon l'hypothèse d'Euler Bernoulli.

### b. Expression du champ électrique

Deux hypothèses sont possibles pour exprimer le champ électrique  $E_3$ . Alors que le champ électrique  $E_3$  est communément considéré constant selon l'épaisseur des patches piézoélectriques, il est possible de considérer la variation de celui-ci selon l'épaisseur des patches piézoélectriques en exprimant d'abord le champ de déplacement électrique  $D_3$ .

Lorsque le champ électrique  $E_3$  est considéré constant, son expression  $E_3^{Pn}$  dans chaque patch numéroté  $n$  (avec  $n \in [1,2]$ ) comme représenté sur la Figure II.3) dépend uniquement de la tension  $v$  et de l'épaisseur  $h_p$  des patches piézoélectriques tel qu'exprimé en (II-12). Comme les patches ont leurs polarisations dans le même sens, les sens des champs électriques sont opposés. De plus, comme les électrodes sont connectées en parallèle, la tension aux bornes des électrodes de chaque patch est  $v(t)$  (cf. Figure I.31).

$$E_3^{Pn}(t) = (-1)^{n+1} \frac{v(t)}{h_p} \quad (\text{II-12})$$

Pour les matériaux fortement couplés, la variation de  $E_3$  selon  $z$  sur l'épaisseur du patch piézoélectrique ne peut pas être négligée. A l'inverse  $D_3$  est considéré invariant selon  $z$  dans les patches piézoélectriques<sup>6</sup>. A partir de cette considération, l'expression du champ électrique peut être déterminée en fonction de  $z$  grâce à l'expression de la tension en (II-13) ainsi que l'expression de  $E_3$  dans le matériau obtenue à partir de l'équation (II-6) et exprimée en (II-14).

$$-\int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} E_3^{P1}(x, z, t) dz = + \int_{-h_p-\frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}} E_3^{P2}(x, z, t) dz = v(t) \quad (\text{II-13})$$

$$E_3(x, z, t) = \frac{D_3(x, t) - e_{31}^{ef} S_1(x, z, t)}{\epsilon_{33}^{ef}} \quad (\text{II-14})$$

En remplaçant  $E_3$  dans (II-13) par l'expression (II-14), on détermine l'expression de  $D_3$  dans chaque patch en (II-15) et les équations (II-14) et (II-15) permettent d'aboutir à l'expression du champ électrique donné en (II-16).  $z_{mn}$  correspond aux coordonnées  $z_{m1}$  et  $z_{m2}$  du centre de chaque patch, comme exprimées en (II-17) et (II-18).

<sup>6</sup> Cette assertion vient de l'expression du théorème de Gauss [157]. A l'intérieur du matériau piézoélectrique, la divergence du champ de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  est égale à la densité volumique de charge libre  $\rho_L$  ( $\text{div } \mathbf{D} = \rho_L$ ). Comme  $\mathbf{D}$  est uniquement défini selon l'axe 3 ( $\mathbf{D} = D_3 \vec{z}$ ) et que les charges dans le matériau piézoélectrique sont uniquement des charges liées ( $\rho_L = 0$ ) [97, p. 33] alors  $D_3$  est invariant selon  $z$  ( $\partial D_3 / \partial z = 0$ ).

$$D_3^{Pn}(x, t) = (-1)^{n+1} \epsilon_{33}^{ef} \frac{v(t)}{h_p} - z_{mn} e_{31}^{ef} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{II-15})$$

$$E_3^{Pn}(x, z, t) = (-1)^{n+1} \frac{v(t)}{h_p} + \frac{e_{31}^{ef}}{\epsilon_{33}^{ef}} (z - z_{mn}) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{II-16})$$

$$z_{m1} = -\frac{h_p + h_s}{2} \quad (\text{II-17}) \quad z_{m1} = \frac{h_p + h_s}{2} \quad (\text{II-18})$$

A partir de l'expression du champ électrique et de la déformation, nous pouvons déterminer le moment fléchissant et l'équation de courant dans la section suivante.

### II.3.3. Moment fléchissant et équation de courant

#### a. Expression du moment fléchissant

Lors de la flexion, les déformations longitudinales induisent des contraintes longitudinales et un champ électrique transversal. Ces derniers font apparaître un moment de flexion  $M_y$  (que l'on appelle moment fléchissant) autour de l'axe  $O_y$  à la fibre neutre. Le moment fléchissant  $M_y$  correspond à l'intégrale des contraintes sur la section de poutre. Son expression est fournie par l'équation (II-19) où  $B$  est la largeur de la poutre.

$$M_y = B \left( - \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} T_1^{P1} z dz - \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} T_1 z dz - \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} T_1^{P2} z dz \right) \quad (\text{II-19})$$

Les expressions des contraintes dans le matériau piézoélectrique et dans le substrat respectivement données en (II-6) et en (II-7) ainsi que les expressions de la déformation et du champ électrique respectivement données en (II-11) en (II-16) permettent d'aboutir à l'expression du moment fléchissant sous la forme (II-20) où  $YI$  est appelé raideur à la flexion,  $\vartheta$  est le terme de couplage direct linéique. Les expressions de  $YI$  et  $\vartheta$  sont données en (II-21) et (II-22) où  $h_s$  est l'épaisseur du substrat.

$$M_y = YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t) \quad (\text{II-20})$$

$$\vartheta = -B e_{31} (h_p + h_s) \quad (\text{II-21})$$

$$YI = B \left( \frac{2}{3} \left[ \frac{Y_s^{ef} h_s^3}{8} + c_{11}^{ef} \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right) \right] + \frac{1}{6} \frac{e_{31}^{ef2} h_p^3}{\epsilon_{33}^{ef}} \right) \quad (\text{II-22})$$

Alors que la valeur de  $\vartheta$  est la même quelle que soit l'hypothèse sur le champ électrique, le terme  $e_{31}^{ef2} h_p^3 / 6 \epsilon_{33}^{ef}$  dans l'expression de  $YI$  en (II-22) provient de la variation du champ électrique selon  $z$ . Ce terme n'est pas présent dans l'expression de  $YI$  lorsque  $E_3$  est considéré constant selon  $z$  [149]. Ainsi, la variation du champ électrique  $E_3$  selon l'épaisseur des patches piézoélectrique a une influence sur la raideur la poutre mais pas sur son terme de couplage. La variation du champ électrique a donc une influence sur le coefficient de couplage global  $k^2$ .



### b. Equation de courant

Le comportement électrique de la poutre piézoélectrique est défini par l'équation de courant. Cette équation s'obtient en calculant la charge  $q$  sur les électrodes des patches piézoélectriques. La charge est donnée par l'intégrale du champ de déplacement électrique  $D_3$  sur la surface des électrodes comme exprimé en (II-23). Comme les électrodes sont connectées en parallèle, la valeur de la charge  $q$  s'obtient par la différence des charges de chaque patch.

$$q(t) = B \left( \int_0^{L_b} D_3^{P_1}(x, t) dx - \int_0^{L_b} D_3^{P_2}(x, t) dx \right) \quad (\text{II-23})$$

En remplaçant  $D_3$  dans (II-23) par son expression donnée en (II-15), on obtient l'expression de la charge sous la forme (II-24) où  $C_p$  est la capacité équivalente des patches piézoélectriques connectés en parallèle et  $\alpha$  est le terme de couplage inverse linéique, données en (II-25) et (II-26).

$$q(t) = -C_p v(t) - \alpha \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]_{L_b} \quad (\text{II-24})$$

$$\alpha = B_p e_{31} (h_p + h_s) \quad (\text{II-25}) \quad C_p = 2 \frac{B L_b \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (\text{II-26})$$

Considérer le champ électrique  $E_3$  constant en fonction de  $z$ , donne les mêmes expressions (II-25) et (II-26) de  $\alpha$  et  $C_p$  que lorsqu'il est considéré variable. A partir des équations (II-21) et (II-25), on peut vérifier par calcul, que le terme de couplage direct linéique est égal au terme de couplage inverse linéique ( $\vartheta = -\alpha$ ). L'expression du courant sortant des électrodes du récupérateur est déterminée en dérivant  $q$  en (II-24) par rapport au temps et est exprimée en (II-27).

$$i(t) + C_p \frac{dv(t)}{dt} + \alpha \left[ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} \right]_{L_b} = 0 \quad (\text{II-27})$$

A partir de l'expression du moment fléchissant et de l'équation de courant, nous pouvons développer le modèle à deux degrés de liberté dans la section suivante.

## II.4. Modèle à 2 degrés de liberté (2DDL)

### II.4.1. Mise en équation

#### a. Equation constitutive du modèle à 2DDL

Comme la masse de la masse mobile des récupérateurs que nous souhaitons concevoir est importante en comparaison à la masse de poutre, il est possible de négliger la masse de la poutre dans nos calculs sans que cela n'introduise une grande erreur par rapport au modèle à paramètres distribués. Par ailleurs, la masse mobile est considérée indéformable car la hauteur  $H_m$  de la masse mobile est grande par rapport à l'épaisseur totale de la poutre. De cette manière, seules la masse de la masse mobile et son inertie en rotation sont prises en compte dans les calculs pour considérer les coefficients de masse équivalents. De plus, les déformations sont seulement considérées dans la poutre.

Dans nos calculs, nous considérons la masse mobile par une masse localisée à la distance  $D_t$  de l'extrémité de la poutre dans le prolongement de la fibre neutre (au point H sur la Figure II.6). La masse mobile est définie par sa masse  $M_t$  et son inertie en rotation  $I_t$  autour du point H selon l'axe parallèle à  $O_y$ . Cette considération peut être réalisée quelle que soit la forme de la masse à partir du moment où elle peut être supposée indéformable.

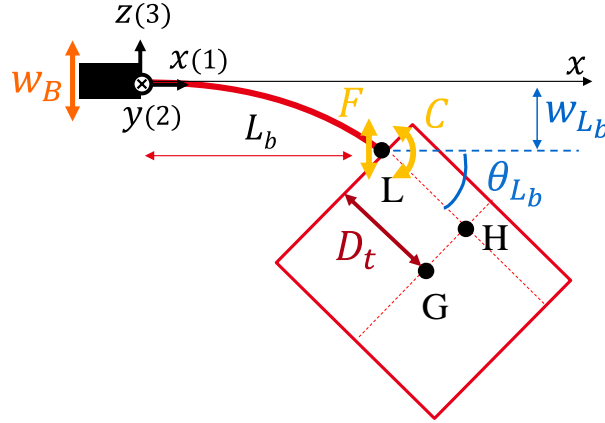


Figure II.6 : Paramètres du modèle à 2DDL

Lors de l'application d'une accélération de translation  $\ddot{w}_B$  à la base de la poutre (à l'encastrement), la poutre fléchit. La masse subit donc un mouvement de translation selon l'axe  $O_z$  et de rotation autour de l'axe  $O_y$ . Le déplacement relatif et la rotation relative du bout de la poutre (au point L sur la Figure II.6) par rapport à la base sont respectivement notés  $w_{L_b}$  et  $\theta_{L_b}$ . Ainsi, le déplacement relatif de la masse mobile en H selon l'axe z est  $w_{L_b} + D_t \theta_{L_b}$ . L'angle de rotation  $\theta_{L_b}$  est donné par la tangente de l'angle en petites déformations (II-28). La notation prime « ' » correspond à la dérivée spatiale par rapport à la coordonnée  $x$ .

$$\theta_{L_b}(t) \approx \tan \theta_{L_b}(t) = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{L_b} = w'_{L_b}(t) \quad (\text{II-28})$$

Lors de son mouvement, la masse impose une force  $F(t)$  et un couple  $C(t)$  sur le bout de la poutre (au point L).  $F(t)$  et  $C(t)$  dépendent de l'accélération en translation et de l'accélération en rotation de la masse mobile et sont exprimés en (II-29) et (II-30). La notation avec le point « · » correspond à la dérivée par rapport au temps.

$$F(t) = M_t \ddot{w}_{L_b}(t) + M_t D_t \ddot{\theta}_{L_b}(t) \quad (\text{II-29})$$

$$C(t) = I_t \ddot{\theta}_{L_b} + M_t D_t^2 \ddot{\theta}_{L_b} + D_t M_t \ddot{w}_{L_b} \quad (\text{II-30})$$

Comme la masse de la poutre est négligée, le moment fléchissant à tout moment et à toute position de la fibre neutre dépend uniquement du couple et de la force appliqués par la masse mobile en bout de poutre. De la même manière qu'une poutre sollicitée de manière statique en son extrémité par un couple et une force, le moment  $M_y$  est donné par (II-31).

$$M_y(x, t) = F(t)[L_b - x] + C(t) \quad (\text{II-31})$$

En remplaçant le moment fléchissant dans la poutre  $M_y(x, t)$ , la force  $F(t)$  et le couple  $C(t)$  dans l'équation (II-31) par leurs expressions respectivement données en (II-20), (II-29) et (II-30), nous aboutissons finalement à l'équation constitutive du modèle à 2DDL exprimée en (II-32).

$$\begin{aligned} YIw''(x, t) - \alpha v(t) \\ = [M_t \ddot{w}_{L_b}(t) + M_t D_t \ddot{\theta}_{L_b}(t)] [L_b - x] + I_t \ddot{\theta}_{L_b}(t) + M_t D_t^2 \ddot{\theta}_{L_b}(t) \\ + D_t M_t \ddot{w}_{L_b}(t) \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

Bien que l'équation (II-32) soit similaire à celles qui sont présentées dans le chapitre V de la thèse de Marzencki [154, p. 120], une correction sur le terme d'inertie en rotation améliore sensiblement la précision des résultats. Alors que Marzencki a considéré l'inertie en rotation de la masse mobile autour du point L (Figure II.6) notée  $J_0$ , nous considérons ici l'inertie en rotation autour du point H notée  $I_t$ . Ainsi, comme la valeur de  $J_0$  est égale à  $I_t + M_t D_t^2$ , la distance  $D_t$  a doublement été prise en compte dans la thèse de Marzencki. Notre correction permet notamment de réduire l'erreur sur la valeur de la première fréquence de résonance par rapport aux simulations par éléments finis en 2 dimensions. En effet, lorsque la masse mobile est volumineuse, l'erreur relative est inférieure à 2% pour notre modèle (voir section II.6) au moment où celle relevée dans la thèse de Marzencki pour son modèle est d'environ 20%.

L'équation de courant exprimée en (II-27) s'ajoute à l'équation constitutive mécanique donnée en (II-32) pour traduire le comportement de la poutre. Il est alors possible de résoudre ce système d'équations grâce aux méthodes suivantes :

- De la même manière que l'a fait Marzencki avec son modèle [154], il est possible par des intégrations successives d'obtenir une équation qui ne dépende que du déplacement du bout de poutre  $w_{L_b}$ , de la tension  $v$  et de l'accélération de la base  $\ddot{w}_b$  puis d'appliquer transformée de Laplace pour exprimer le déplacement et la puissance en fonction de la fréquence.
- Nous proposons dans ce chapitre de définir le déplacement  $w_{L_b}$  et la rotation  $\theta_{L_b}$  comme deux coordonnées généralisées qui correspondent à un système à deux degrés de liberté mécaniques. Pour des paramètres géométriques, matériaux et une résistance de charge en sortie du récupérateur donnés, chaque variable mécanique et électrique peut être déduite de l'unique connaissance du déplacement du bout de poutre, de l'angle de rotation en bout de poutre ainsi que de la tension. Ainsi, nous pouvons modéliser le comportement du récupérateur à partir d'un système à deux degrés de liberté mécaniques et un degré de liberté électrique.

De cette manière, plutôt que de considérer le récupérateur par des fonctions de transfert tel que réalisé dans la thèse de Marzencki, nous choisissons dans ce manuscrit de le décrire par un modèle d'état. La section suivante consiste à déterminer la matrice de raideur (propre à la raideur de la poutre) et la matrice de masse (propre à la masse mobile) afin d'établir l'équilibre dynamique des forces et des moments.

### b. Calcul de la matrice de raideur

Lors de l'application d'un déplacement relatif  $w_{L_b}$  et d'une rotation relative  $\theta_{L_b}$  en bout poutre, la poutre, par sa raideur, induit une force de réaction  $F_k$  et un couple  $C_k$ . La détermination de la matrice de raideur de la poutre  $[\mathbf{K}]$  se fait par le calcul de sa matrice de souplesse  $[\mathbf{S}]$ . Pour une force  $F_k$  et un couple  $C_k$  en bout de poutre, on sait d'une part que le

moment fléchissant est réparti tel que décrit en (II-31) et d'autre part que le moment fléchissant de la poutre est donné par (II-20). Cela permet d'aboutir à l'équation (II-33).

$$YIw''(x, t) - \alpha v(t) = F_k(t)[L_p - x] + C_k(t) \quad (\text{II-33})$$

En intégrant successivement par rapport à  $x$  et en respectant les conditions aux limites à l'encastrement (équations (II-34) et (II-35)), on peut déduire les expressions de  $w_{L_b}$  et  $\theta_{L_b}$  en fonction de  $F_k$ ,  $C_k$  et  $v$ .

$$w(0) = 0 \quad (\text{II-34}) \quad w'(0) = 0 \quad (\text{II-35})$$

$$\theta_{L_b} = w'(L_b) = \frac{1}{YI} L_b \left( \frac{F}{2} L_b + C_k + \alpha v(t) \right) \quad (\text{II-36})$$

$$w_{L_b} = w(L_b) = \frac{1}{YI} L_b^2 \left( \frac{F_k L_b}{3} + \frac{C_k}{2} + \frac{\alpha v(t)}{2} \right) \quad (\text{II-37})$$

On peut finalement écrire la relation entre  $w_{L_b}$ ,  $\theta_{L_b}$ ,  $F_k$ ,  $C_k$  et  $v$  sous forme matricielle en (II-38) où  $[\mathbf{S}]$  est la matrice de souplesse mécanique de la poutre.

$$\begin{bmatrix} w_{L_b} \\ \theta_{L_b} \end{bmatrix} = [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} F_k \\ C_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_b^2 \alpha}{2YI} \\ \frac{L_b \alpha}{YI} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} \frac{L_b^3}{3YI} & \frac{L_b^2}{2YI} \\ \frac{L_b^2}{2YI} & \frac{L_b}{YI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ C_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_b^2 \alpha}{2YI} \\ \frac{L_b \alpha}{YI} \end{bmatrix} v \quad (\text{II-38})$$

En multipliant à gauche par l'inverse de la matrice de souplesse  $[\mathbf{S}]^{-1}$  l'équation (II-38), on obtient une équation simplifiée sous la forme de (II-39) où  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de raideur donnée en (II-40).

$$[\mathbf{K}] \begin{pmatrix} w_{L_b} \\ \theta_{L_b} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} F \\ C \end{bmatrix} \quad (\text{II-39})$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{YI}{L_b^2} \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ L_b & 4L_b \\ -6 & 4L_b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_{L_b} \\ \theta_{L_b} \end{pmatrix} \quad (\text{II-40})$$

On peut notamment remarquer de l'équation (II-39) qu'une tension aux bornes des électrodes n'implique qu'un couple au bout de la poutre et que le coefficient est directement égal au terme de couplage linéique  $\alpha$ .

### c. Equilibre des forces et des moments

La matrice de masse  $[\mathbf{M}]$  traduit la force  $F_M$  et le couple  $C_M$  appliqués par la masse mobile pour une accélération de translation  $\dot{w}_{L_b}$  et une accélération de rotation  $\ddot{\theta}_{L_b}$  données. L'expression de la matrice est directement déduite des équations (II-29) et (II-30) dans (II-41) :

$$\begin{bmatrix} F_M \\ C_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_t & M_t D_t \\ M_t D_t & I_t + M_t D_t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_{L_b} \\ \ddot{\theta}_{L_b} \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \dot{w}_{L_b} \\ \ddot{\theta}_{L_b} \end{bmatrix} \quad (\text{II-41})$$

Sous l'action d'une force extérieure  $F_{ext}$  et d'un couple extérieur  $C_{ext}$  l'équation de mouvement est obtenue à partir de l'équilibre dynamique des forces et des moments en prenant compte de la raideur de la poutre (II-39) et de la dynamique de la masse mobile (II-41). L'équation de mouvement est alors donnée en (II-42). L'équation de courant finale (II-43) est obtenue en exprimant l'équation de courant (II-27) avec les coordonnées généralisées.

$$[\mathbf{M}] \begin{pmatrix} \dot{w}_{L_b} \\ \dot{\theta}_{L_b} \end{pmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{pmatrix} w_{L_b} \\ \theta_{L_b} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ C_{ext} \end{bmatrix} \quad (\text{II-42})$$

$$\alpha \dot{\theta} + C_p \dot{v} + i = 0 \quad (\text{II-43})$$

Dans le cadre de la récupération d'énergie vibratoire, l'accélération transverse de la base n'engendre qu'une force extérieure induite par l'accélération de la masse mobile  $F_{ext} = -M_t \ddot{w}_B$  comme exprimé en (II-44).

$$[\mathbf{M}] \begin{pmatrix} \dot{w}_{L_b} \\ \dot{\theta}_{L_b} \end{pmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{pmatrix} w_{L_b} \\ \theta_{L_b} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -M_t \ddot{w}_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-44})$$

Dans cette section nous avons donc introduit un modèle à deux degrés de liberté basé sur une correction du modèle présenté par Marzencki [154]. Ce modèle considère l'inertie en rotation de la masse mobile et la distance entre son centre de gravité avec le bout de poutre. La résolution de ce modèle ainsi que l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz sont détaillées dans les sections suivantes. Celles-ci permettent d'obtenir des résultats cohérents avec ceux des simulations par éléments finis détaillés dans la section II.6.

#### II.4.2. Résolution directe du modèle (2DDL-RD)

Grâce aux équations (II-42) et (II-43), nous pouvons calculer les fréquences de résonance en court-circuit et les fréquences de résonance en circuit ouvert des deux premiers modes de flexion. En considérant que l'accélération de la base  $\ddot{w}_B$  est harmonique et de pulsation  $\omega$ , la transformation dans l'espace complexe est utilisée telle qu'exprimée en (II-45). Le système étant linéaire,  $w_{L_b}$ ,  $\theta_{L_b}$  et  $v$  sont également harmoniques et de pulsation  $\omega$ . Leurs amplitudes et leurs déphasages par rapport à l'accélération de la base sont pris en compte par les amplitudes complexes  $W^*$ ,  $O^*$ ,  $V^*$  et  $I^*$  dans les équations (II-46) à (II-49). Dans ce manuscrit, les termes soulignés correspondent aux variables traduites dans l'espace complexe alors que les termes avec une étoile représentent des coefficients complexes.

$$\underline{\ddot{w}_b} = \mathcal{A}_b e^{j\omega t} \quad (\text{II-45}) \quad \underline{w_{L_b}} = \mathcal{W}^* e^{j\omega t} \quad (\text{II-46})$$

$$\underline{\theta_{L_b}} = \mathcal{O}^* e^{j\omega t} \quad (\text{II-47}) \quad \underline{v} = V^* e^{j\omega t} \quad (\text{II-48})$$

$$\underline{I} = I^* e^{j\omega t} \quad (\text{II-49})$$

En considérant l'espace complexe, les équations (II-43) et (II-44) se simplifient et ne dépendent que des amplitudes complexes comme exprimé en (II-50) et (II-51).

$$-\omega^2 [\mathbf{M}] \begin{pmatrix} W^* \\ O^* \end{pmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{pmatrix} W^* \\ O^* \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} -M_t \\ 0 \end{bmatrix} W_b \quad (\text{II-50})$$

$$j\omega \alpha O^* + j\omega C_p V^* + I^* = 0 \quad (\text{II-51})$$

Les fréquences de résonance en court-circuit sont déterminées en calculant les pulsations propres pour une accélération de la base nulle et une tension nulle ( $\mathcal{A}_b = 0$  et  $V^* = 0$ ) comme exprimé en (II-52).

$$-\omega^2 [\mathbf{M}] \begin{pmatrix} W^* \\ O^* \end{pmatrix} + [\mathbf{K}] \begin{pmatrix} W^* \\ O^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-52})$$

Les pulsations en court-circuit  $\omega_1^{sc}$  et  $\omega_2^{sc}$  ont obtenues en calculant les zéros du déterminant en (II-53) et sont exprimées par (II-54) et (II-55). Le terme  $\Gamma^{sc}$ , exprimé par (II-56), est utilisé pour simplifier l'écriture des équations.

$$\det(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (\text{II-53})$$

$$\omega_1^{sc2} = \frac{2 YI (3 I_t - \sqrt{\Gamma^{sc}} + 3 D_t^2 M_t + L_b^2 M_t + 3 D_t L_b M_t)}{I_t L_b^3 M_t} \quad (\text{II-54})$$

$$\omega_2^{sc2} = \frac{2 YI (3 I_t + \sqrt{\Gamma^{sc}} + 3 D_t^2 M_t + L_b^2 M_t + 3 D_t L_b M_t)}{I_t L_b^3 M_t} \quad (\text{II-55})$$

$$\Gamma^{sc} = 9 D_t^4 M_t^2 + 18 D_t^3 L_b M_t^2 + 18 D_t^2 I_t M_t + 15 D_t^2 L_b^2 M_t^2 + 18 D_t I_t L_b M_t + 6 D_t L_b^3 M_t^2 + 9 I_t^2 + 3 I_t L_b^2 M_t + L_b^4 M_t^2 \quad (\text{II-56})$$

En circuit ouvert, le courant de sortie est nul et la tension peut être exprimée par (II-57). Les pulsations de résonance en circuit ouvert  $\omega_1^{oc}$  et  $\omega_2^{oc}$  sont obtenues en résolvant (II-58) et sont données en (II-59) et (II-60). Le terme  $\Gamma^{oc}$  est exprimé en (II-61)

$$V^* = -\frac{\alpha \mathcal{O}^*}{C_p} \quad (\text{II-57})$$

$$\det\left(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2}{C_p} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (\text{II-58})$$

$$\omega_1^{oc2} = \frac{L_b^3 M_t \alpha^2 + 12 C_p I_t YI + 12 C_p D_t^2 M_t YI + 4 C_p L_b^2 M_t YI + 12 C_p D_t L_b M_t YI - \sqrt{\Gamma^{oc}}}{2 C_p I_t L_b^3 M_t} \quad (\text{II-59})$$

$$\omega_2^{oc2} = \frac{L_b^3 M_t \alpha^2 + 12 C_p I_t YI + 12 C_p D_t^2 M_t YI + 4 C_p L_b^2 M_t YI + 12 C_p D_t L_b M_t YI + \sqrt{\Gamma^{oc}}}{2 C_p I_t L_b^3 M_t} \quad (\text{II-60})$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{oc} = & 144 C_p^2 D_t^4 M_t^2 YI^2 + 288 C_p^2 D_t^3 L_b M_t^2 YI^2 + 288 C_p^2 D_t^2 I_t M_t YI^2 + 240 C_p^2 D_t^2 L_b^2 M_t^2 YI^2 \\ & + 288 C_p^2 D_t I_t L_b M_t YI^2 + 96 C_p^2 D_t L_b^3 M_t^2 YI^2 + 144 C_p^2 I_t^2 YI^2 \\ & + 48 C_p^2 I_t L_b^2 M_t YI^2 + 16 C_p^2 L_b^4 M_t^2 YI^2 + 24 C_p D_t^2 L_b^3 M_t^2 YI \alpha^2 \\ & + 24 C_p D_t L_b^4 M_t^2 YI \alpha^2 - 24 C_p I_t L_b^3 M_t YI \alpha^2 + 8 C_p L_b^5 M_t^2 YI \alpha^2 + L_b^6 M_t^2 \alpha^4 \end{aligned} \quad (\text{II-61})$$

La résolution directe du modèle à deux degrés de liberté (modèle 2DDL-RD) permet finalement d'obtenir des expressions analytiques des fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert pour les deux premiers modes de flexion. Comme nous le verrons dans la section II.6, le modèle 2DDL-RD donne des résultats cohérents lorsque la masse de la masse mobile très supérieure à la masse de la poutre. Cependant, lorsque la masse de la poutre est équivalente à la masse de masse mobile, la masse de la poutre a une influence non-négligeable sur la valeur de la fréquence de résonance en court-circuit du second mode. Dans ce cas, il est possible de considérer de manière approchée l'énergie cinétique de la poutre grâce à l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz. Nous détaillons l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz au modèle à deux degrés de libertés dans la section suivante.

## II.5. Application de la méthode de Rayleigh-Ritz (2DDL-PM)

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode communément utilisée pour la modélisation des vibrations des structures mécaniques. Son application aux transducteurs piézoélectriques a notamment été détaillée dans l'article de Hagood *et al.* [159]. La méthode de Rayleigh-Ritz se base sur l'utilisation du principe de Hamilton et sur la connaissance de la forme de plusieurs modes de vibration d'une structure (disons au nombre de  $n$ ) pour déterminer un système de  $n$  équations qui modélise son comportement vibratoire. Ainsi, l'application de la méthode

Rayleigh-Ritz au modèle à 2DDL nous permettra d'obtenir un système d'équations à 2 degrés de liberté. La détermination des fréquences de résonance à partir du système déduit est détaillée dans la section II.5.4.

### II.5.1. La méthode de Rayleigh-Ritz

Le principe de Hamilton dont l'expression généralisée est donnée (II-62) énonce que : pour un système physique, la moindre variation virtuelle  $\delta$  du travail extérieur  $W$  entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$  se traduit par la variation du Lagrangien  $L$ . Le Lagrangien est défini par la différence entre l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie potentielle  $U$ .

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T_k - U) + \delta W] dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta W) dt = 0 \quad (\text{II-62})$$

$$L = T - U \quad (\text{II-63})$$

Au sein du matériau piézoélectrique, l'enthalpie  $H$  est donnée par l'équation (II-64) où la déformation  $\mathbf{S}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont notés sous forme vectorielle avec la notation de Voigt.  $\mathbf{c}^E$ ,  $\mathbf{e}^t$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^S$  sont respectivement la matrice de rigidité à champ électrique nul, la matrice piézoélectrique et la matrice de permittivité à déformation nulle.

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{S}^t \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{S}^t \mathbf{e}^t \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^t \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E} \quad (\text{II-64})$$

L'énergie potentielle dans le patch piézoélectrique  $U_p$  est donnée par l'intégrale de l'enthalpie sur le volume piézoélectrique tel qu'exprimé en (II-65). L'énergie potentielle (élastique) dans le substrat  $U_s$  est donnée par (II-66) où  $\mathbf{c}_s$  est la matrice de rigidité du substrat. Comme la masse mobile est considérée indéformable, l'énergie potentielle totale correspond à la somme de l'énergie potentielle dans le matériau piézoélectrique et de l'énergie élastique dans le substrat exprimée en (II-67).

$$U_p = \int_{\mathcal{V}_p} H d\mathcal{V}_p \quad (\text{II-65}) \quad U_s = \int_{\mathcal{V}_s} \mathbf{S}^t \mathbf{c}_s \mathbf{S} d\mathcal{V}_s \quad (\text{II-66}) \quad U = U_p + U_s \quad (\text{II-67})$$

Deux choix sont possibles pour le calcul de l'énergie cinétique : soit le référentiel est supposé Galiléen et la vitesse de la base de la poutre est prise en compte dans l'énergie cinétique, soit la base de la poutre est considérée comme référentiel et l'accélération de la base est considérée comme une force extérieure induisant un travail [160]. Nous considérons ici la base de la poutre comme référentiel. L'énergie cinétique du système  $T_k$  exprimée par (II-68) dépend donc de la vitesse relative de la poutre  $\dot{w}$ , de la vitesse de translation relative de la masse mobile au point H (voir Figure II.6) donnée par  $\dot{w}_{L_b} + D_t \dot{w}'_{L_b}$  et de sa vitesse de rotation  $\dot{w}'_{L_b}$  autour du point H.

$$T_k = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} m \int_0^{L_b} (\vec{z}\dot{w})^t (\vec{z}\dot{w}) dx \\ \text{Energie cinétique correspondant à la translation relative de la poutre} \\ + \underbrace{M_t \left( \vec{z}(\dot{w}_{L_b} + D_t \dot{w}'_{L_b}) \right)^t \left( \vec{z}(\dot{w}_{L_b} + D_t \dot{w}'_{L_b}) \right)}_{\text{Energie cinétique correspondant à la translation relative de la masse mobile}} \\ + \underbrace{I_t (\vec{y}\dot{w}'_{L_b})^t (\vec{y}\dot{w}'_{L_b})}_{\text{Energie cinétique correspondant à la rotation relative de la masse mobile}} \end{array} \right] \quad (\text{II-68})$$

Les travaux extérieurs  $W$  correspondent au travail mécanique dû à la force inertielle  $F_B$  venant de l'accélération de la base  $\ddot{w}_B$  et au travail électrique lié à l'extraction de charges (II-69).  $q$  correspond aux charges extraites des électrodes des patches piézoélectriques. Les pertes ne sont pas considérées ici comme un travail extérieur. Elles seront prises en compte dans ce chapitre par l'ajout d'un coefficient d'amortissement visqueux à l'équation de mouvement.

$$\delta W = - \int_0^{L_b} (\delta w \vec{z}) \cdot (m \vec{z} \ddot{w}_B) dx - (\delta (w_{L_b} + D_t w'_{L_b}) \vec{z}) \cdot (M_t \vec{z} \ddot{w}_B) + \delta v \cdot q \quad (\text{II-69})$$

En utilisant l'approche de Rayleigh-Ritz, il est possible de considérer que la déformée  $w(x, t)$  de la poutre correspond à une combinaison linéaire des deux premiers modes de vibrations lorsque le récupérateur est excité à une fréquence proche de ses deux premières fréquences de résonance.  $w(x, t)$  est ainsi exprimé par la somme de 2 modes individuels  $\phi_i(x)$  chacun multiplié par une coordonnée généralisée  $r_i(t)$  tel qu'exprimé par (II-70). La coordonnée généralisée  $r_i(t)$  définie ici correspond alors à l'expression de la réponse mécanique modale. La relation (II-70) peut être exprimée de manière matricielle. On définit alors  $\boldsymbol{\phi}_r(x)$  comme un vecteur ligne des modes de vibration  $[\phi_1(x), \phi_2(x)]$  et  $\mathbf{r}(t)$  comme un vecteur colonne des coordonnées généralisées de chaque mode  $[r_1(t); r_2(t)]$ .

$$w(x, t) = \phi_1(x)r_1(t) + \phi_2(x)r_2(t) \equiv \boldsymbol{\phi}_r(x)\mathbf{r}(t) \quad (\text{II-70})$$

Dans le cas d'une poutre fine piézoélectrique correspondant à la théorie d'Euler-Bernoulli, l'enthalpie piézoélectrique et l'énergie élastique du substrat sont réduites aux implications des déformations longitudinales  $S_1$  et du champ électrique transverse  $E_3$  comme discuté précédemment dans la section II.3.1. Ainsi, seules les composantes  $S_1$  et  $E_3$  sont considérées dans l'expression de l'enthalpie. Les expressions de  $S_1$  et  $E_3$  sont respectivement données en (II-11) et (II-16). On les exprime en fonction des coordonnées généralisées en (II-71) et (II-72).

$$S_1(x, z, t) = -z\boldsymbol{\phi}''(x)\mathbf{r}(t) \quad (\text{II-71})$$

$$E_3^n(x, z, t) = (-1)^{n+1} \frac{v(t)}{h_p} + \frac{e_{31}^{ef}}{\epsilon_{33}^{ef}} (z - z_{mn}) \boldsymbol{\phi}''(x)\mathbf{r}(t) \quad (\text{II-72})$$

En utilisant la décomposition modale de la déformée exprimée par (II-70) et l'expression des déformations et du champ électrique, il est possible d'exprimer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail à partir des coordonnées généralisées  $r_1$ ,  $r_2$  et  $v$  dans l'expression générale du principe de Hamilton (II-62). La variation différentielle du Lagrangien est alors donnée par (II-73).



$$\delta L(r_1, \dot{r}_1, r_2, \dot{r}_2, v) = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} \delta \dot{r}_1 + \frac{\partial L}{\partial r_1} \delta r_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} \delta \dot{r}_2 + \frac{\partial L}{\partial r_2} \delta r_2 + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \quad (\text{II-73})$$

A partir des équations (II-64) à (II-73), l'expression du principe de Hamilton (II-62) peut alors s'écrire sous la forme (II-74).

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \dot{\mathbf{r}}^t \widehat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{r}^t \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}^t \widehat{\boldsymbol{\Theta}} v + \delta v \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^t \mathbf{r} + \delta v \widehat{C}_p v - \delta \mathbf{r}^t \widehat{\mathbf{B}}_f \ddot{w}_b + \delta v q] dt = 0 \quad (\text{II-74})$$

$\widehat{\mathbf{M}}$ ,  $\widehat{\mathbf{K}}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}_f$  et  $C_p$  sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur, le vecteur de couplage, le vecteur force et la capacité équivalente. Ils sont exprimés dans les équations (II-75) à (II-79).

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}} = & \int_{V_{p1}} \boldsymbol{\phi}_r'^t c_{11}^{ef} (z^2 + k_{e31}^2 (z^2 - z_{m1}^2)) \boldsymbol{\phi}_r'' dV_p \\ & + \int_{V_{p2}} \boldsymbol{\phi}_r'^t c_{11}^{ef} (z^2 + k_{e31}^2 (z^2 - z_{m2}^2)) \boldsymbol{\phi}_r'' dV_p \\ & + \int_{V_s} \boldsymbol{\phi}_r'^t Y_s^{ef} z^2 \boldsymbol{\phi}_r'' dV_s \end{aligned} \quad (\text{II-75})$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} = & \int_0^{L_b} m \boldsymbol{\phi}_r^t \boldsymbol{\phi}_r dx + M_t (\boldsymbol{\phi}_r(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r(L_b) + M_t D_t (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r(L_b) \\ & + M_t D_t (\boldsymbol{\phi}_r(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r'(L_b) + (I_t + M_t D_t^2) (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r'(L_b) \end{aligned} \quad (\text{II-76})$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}} = B e_{31}^{ef} (h_p + h_s) (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \quad (\text{II-77})$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_f = \int_0^{L_b} m \boldsymbol{\phi}_r^t dx + M_t (\boldsymbol{\phi}_r(L_b))^t + D_t M_t (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \quad (\text{II-78})$$

$$C_p = B \frac{2L_b \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (\text{II-79})$$

Les matrices de masse et de raideur sont des matrices carrées de dimensions 2x2.  $\boldsymbol{\Theta}$  et  $\mathbf{B}_f$  sont des vecteurs colonnes de dimensions 2x1. Pour obtenir la valeur des coefficients des matrices, il est nécessaire de connaître la forme des modes de vibration  $\phi_i(x)$  dont la détermination est détaillée dans la section suivante. A partir d'une intégration par partie par rapport au temps, il est possible d'écrire (II-74), sous la forme (II-80).

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathbf{r}^t (-\widehat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{r}} - \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{r} + \widehat{\boldsymbol{\Theta}} v - \widehat{\mathbf{B}}_f \ddot{w}_b) + \delta v (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^t \mathbf{r} + C_p v + q)] dt = 0 \quad (\text{II-80})$$

Comme les variations  $\delta \mathbf{r}^t$  et  $\delta v$  sont considérées aléatoires, l'équation (II-80) nous permet de déduire une équation matricielle régissant le domaine mécanique de la poutre (II-81) et une équation matricielle régissant le domaine électrique (II-82).

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{r}} + \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{r} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}} v = -\widehat{\mathbf{B}}_f \ddot{w}_B \end{cases} \quad (\text{II-81})$$

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^t \mathbf{r} + C_p v + q = 0 \end{cases} \quad (\text{II-82})$$

Il est nécessaire de déterminer la valeur des coefficients des équations ci-dessus avant de procéder à la résolution du système. Pour cela, nous avons besoin de connaître la forme des deux premiers modes de vibration  $\phi_i(x)$ . Alors que ceux-ci peuvent être déterminés à partir

d'un modèle à paramètres distribués tel que détaillé dans l'annexe 1, nous déterminons les modes approchés de vibrations dans la section suivante à l'aide de la modélisation à 2DDL présentée dans la section II.4.1. Ces modes de vibrations permettent de déduire des expressions analytiques des coefficients.

### II.5.2. Calcul des modes de vibration

Comme expliqué dans la partie II.4.1, la masse de la poutre n'est pas prise en compte dans la modélisation à 2DDL. Il est donc possible de connaître la déformée de la poutre en connaissant uniquement le déplacement et l'angle de rotation du bout de la poutre (au point L).

Le système à deux degrés de libertés en court-circuit donné en (II-52) permet de calculer les vecteurs propres  $[W_1, \mathcal{O}_1]$  et  $[W_2, \mathcal{O}_2]$  réels pour chaque fréquence de résonance  $i$  ( $i \in [1,2]$ ). Pour chaque fréquence de résonance  $i$ , ces vecteurs propres permettent d'exprimer l'amplitude  $\mathcal{O}_i$  de l'angle en bout de poutre  $\theta_{L_b}$  en fonction de l'amplitude  $W_i$  du déplacement en bout de poutre  $w_{L_b}$ . Nous proposons de définir les « taux de rotation »  $\beta_i = \mathcal{O}_i/W_i$  pour chaque mode de vibration exprimés en (II-83) et (II-84) à partir de la résolution de (II-52).  $J_t$ , appelé ici « ratio d'inertie de la masse », est le ratio entre l'inertie en rotation et la masse de la masse mobile. Son expression est donnée en (II-85).

$$\beta_1 = -\frac{3(2D_t + L_b)}{3J_t - (9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 3D_t^2 - L_b^2} \quad (\text{II-83})$$

$$\beta_2 = -\frac{3(2D_t + L_b)}{3J_t + (9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 3D_t^2 - L_b^2} \quad (\text{II-84})$$

$$J_t = \frac{I_t}{M_t} \quad (\text{II-85})$$

A partir de l'équation constitutive en (II-32) représentant la répartition du moment fléchissant le long de la poutre et de l'expression de la déformation longitudinale (II-71), on peut montrer que les fonctions  $\phi_i''(x)$  sont affines. Elles peuvent donc être exprimées par (II-86) grâce à un coefficient directeur  $a_i$  et une ordonnée  $b_i$  en bout de poutre (Figure II.7). En respectant les conditions à l'encastrement ((II-34) et (II-35)), les modes de vibrations et leurs dérivées premières sont alors exprimés respectivement par (II-87) et (II-88).

$$\phi_i''(x) = b_i + a_i \left(1 - \frac{x}{L_b}\right) \quad (\text{II-86}) \quad \phi_i(x) = \frac{x^2 \left(3b_i - a_i \frac{x}{L_b} + 3a_i\right)}{6} \quad (\text{II-87})$$

$$\phi_i'(x) = \frac{x \left(2b_i - a_i \frac{x}{L_b} + 2a_i\right)}{2} \quad (\text{II-88})$$

En utilisant l'expression des taux de rotations  $\beta_i$  et en choisissant de normaliser les modes par rapport au déplacement en bout de poutre, les fonctions  $\phi_i(x)$  et  $\phi_i'(x)$  doivent respecter les équations (II-89) et (II-90).

$$\phi_i(L_b) = 1 \quad (\text{II-89}) \quad \phi_i'(L_b) = \beta_i \quad (\text{II-90})$$

A partir des expressions (II-87) et (II-88) et des conditions (II-89) et (II-90), on trouve finalement les expressions des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  en (II-91) et (II-92) tenant compte de la

normalisation en bout de poutre. Avec cette normalisation, le vecteur  $\mathbf{r}$  (équation (II-70)) correspond à la projection du déplacement du bout de la poutre selon chaque mode vibration.

$$a_i = \frac{6(2 - L_b \beta_i)}{L_b^2} \quad (\text{II-91})$$

$$b_i = \frac{2(2L_b \beta_i - 3)}{L_b^2} \quad (\text{II-92})$$

Une représentation de la forme des modes  $\phi_i(x)$  et de leurs dérivées secondes  $\phi_i''(x)$  est proposée en Figure II.7.

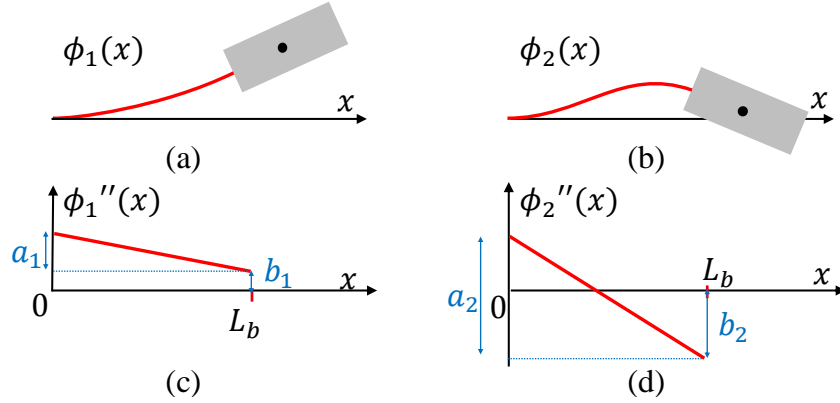


Figure II.7 : Forme des modes  $\phi_i(x)$  et leurs dérivées spatiales secondes par rapport à  $x$   $\phi_i''(x)$  pour  $D_t \geq 0$ . (a) Forme du premier mode, (b) forme du second mode, (c) dérivée spatiale seconde par rapport à  $x$  du premier mode, (d) dérivée spatiale seconde par rapport à  $x$  du second mode

### II.5.3. Expression des coefficients des matrices

En intégrant les expressions des formes des modes et de leurs dérivées ((II-86) à (II-88)) dans les expressions des matrices de masse  $\widehat{\mathbf{M}}$ , de raideur  $\widehat{\mathbf{K}}$ , de couplage  $\widehat{\mathbf{\Theta}}$  et de force  $\widehat{\mathbf{B}}_f$  données en équations (II-75) à (II-78), on déduit l'expression de chaque élément des matrices.

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{ij} = & \frac{L_b^5 m (66 a_i a_j + 91 a_i b_j + 91 a_j b_i + 126 b_i b_j)}{2520} \\ & + \frac{L_b^2 (a_i + 2 b_i)(a_j + 2 b_j)(M_t D_t^2 + I_t)}{4} \\ & + \frac{L_b^4 M_t (2 a_i + 3 b_i)(2 a_j + 3 b_j)}{36} + \frac{D_t L_b^3 M_t (a_i + 2 b_i)(2 a_j + 3 b_j)}{12} \\ & + \frac{D_t L_b^3 M_t (a_j + 2 b_j)(2 a_i + 3 b_i)}{12} \end{aligned} \quad (\text{II-93})$$

$$\widehat{K}_{ij} = \frac{L_b (2 a_i a_j + 3 a_i b_j + 3 a_j b_i + 6 b_i b_j)}{6} YI \quad (\text{II-94})$$

$$\widehat{B}_{f_i} = \frac{L_b^2 M_t (3 b_i + 2 a_i)}{6} + \frac{L_b^3 m (4 b_i + 3 a_i)}{24} + \frac{D_t L_b M_t (2 b_i + a_i)}{2} \quad (\text{II-95})$$

$$\widehat{\Theta}_i = \frac{B L_b e_{31}^{ef} (2 b_i + a_i)(h_p + h_s)}{2} \quad (\text{II-96})$$

A partir de (II-93) et (II-94), il est possible de montrer que la matrice de masse  $\widehat{\mathbf{M}}$  et la matrice de raideur  $\widehat{\mathbf{K}}$  sont symétriques ( $\widehat{M}_{12} = \widehat{M}_{21}$  et  $\widehat{K}_{12} = \widehat{K}_{21} = 0$ ). Le système à deux degrés de liberté mécanique final peut alors s'écrire de la forme donnée en (II-97).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{12} & \widehat{M}_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} + \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & 0 \\ 0 & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{r} - \begin{bmatrix} \widehat{\Theta}_1 \\ \widehat{\Theta}_2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \widehat{B}_{f1} \\ \widehat{B}_{f2} \end{bmatrix} \ddot{w}_b \\ \begin{bmatrix} \widehat{\Theta}_1 & \widehat{\Theta}_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} + \widehat{C}_p \dot{v} = i \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(II-97)} \\ \text{(II-98)} \end{array}$$

La valeur de  $\widehat{M}_{12}$  est non-nulle car les modes de vibration sont approximés par rapport aux modes déterminés par le modèle à paramètres distribués. La valeur de  $\widehat{M}_{12}$  est négligeable lorsque la masse de la masse mobile est grande par rapport à la masse de la poutre.  $\widehat{M}_{12}$  est d'ailleurs nul si la masse linéique de la poutre  $m$  est considérée nulle. En effet, les modes approchés de vibration déduits du modèle 2DDL sont orthogonaux si la masse de la poutre est négligée. Comme la masse de la poutre est prise en compte dans l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz les modes ne sont pas orthogonaux et un terme de couplage inertiel est présent (la matrice  $\widehat{\mathbf{M}}$  n'est pas diagonale) [161, p. 228].

#### II.5.4. Dédution des fréquences de résonance

##### a. Cas de la projection sur 2 modes (2DDL-PM2)

En considérant les deux modes de vibration, les pulsations en court-circuit s'obtiennent en résolvant (II-99).

$$\det[-\widehat{\mathbf{M}} \omega^2 + \widehat{\mathbf{K}}] = \det\left(-\begin{bmatrix} \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{12} & \widehat{M}_{22} \end{bmatrix} \omega^2 + \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & 0 \\ 0 & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{(II-99)}$$

Les deux premières pulsations de résonance en flexion  $\omega_1^{sc}$  et  $\omega_2^{sc}$  sont alors données par (II-100) et (II-101) avec  $\Upsilon^{sc}$  exprimé en (II-102).

$$\widehat{\omega}_1^{sc2} = \frac{\widehat{K}_{11}\widehat{M}_{22} + \widehat{K}_{22}\widehat{M}_{11} - \sqrt{\Upsilon^{sc}}}{2(\widehat{M}_{11}\widehat{M}_{22} - \widehat{M}_{12}^2)} \quad \text{(II-100)} \quad \widehat{\omega}_2^{sc2} = \frac{\widehat{K}_{11}\widehat{M}_{22} + \widehat{K}_{22}\widehat{M}_{11} + \sqrt{\Upsilon^{sc}}}{2(\widehat{M}_{11}\widehat{M}_{22} - \widehat{M}_{12}^2)} \quad \text{(II-101)}$$

$$\Upsilon^{sc} = \widehat{K}_{11}^2 \widehat{M}_{22}^2 - 2 \widehat{K}_{11} \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} + 4 \widehat{K}_{11} \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{12}^2 + \widehat{K}_{22}^2 \widehat{M}_{11}^2 \quad \text{(II-102)}$$

Les fréquences de résonance en circuit ouvert s'obtiennent en considérant l'expression de la tension (II-103) à partir de l'équation (II-98) à courant nul. Les pulsations de résonance en circuit ouvert  $\omega_1^{oc}$  et  $\omega_2^{oc}$  sont alors déduites de la résolution de (II-104) et sont données par (II-105) et (II-106) avec  $\Upsilon^{oc}$  défini en (II-107).

$$v = -\frac{\widehat{\Theta}^t \mathbf{r}^*}{\widehat{C}_p} \quad \text{(II-103)}$$

$$\det\left[-\widehat{\mathbf{M}} \omega^2 + \widehat{\mathbf{K}} + \frac{\widehat{\Theta} \widehat{\Theta}^t}{\widehat{C}_p}\right] = \det\left(-\begin{bmatrix} \widehat{M}_{11} & \widehat{M}_{12} \\ \widehat{M}_{12} & \widehat{M}_{22} \end{bmatrix} \omega^2 + \begin{bmatrix} \widehat{K}_1 + \frac{\widehat{\Theta}_1^2}{\widehat{C}_p} & \widehat{K}_{12} + \frac{\widehat{\Theta}_1 \widehat{\Theta}_2}{\widehat{C}_p} \\ \widehat{K}_{12} + \frac{\widehat{\Theta}_1 \widehat{\Theta}_2}{\widehat{C}_p} & \widehat{K}_2 + \frac{\widehat{\Theta}_2^2}{\widehat{C}_p} \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{(II-104)}$$

$$\hat{\omega}_1^{oc2} = \frac{\widehat{M}_{11} \hat{\theta}_2^2 + \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1^2 + C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{22} + \hat{C}_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} - 2 \widehat{M}_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - \sqrt{\Upsilon^{oc}}}{2 C_p (\widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} - \widehat{M}_{12}^2)} \quad (\text{II-105})$$

$$\hat{\omega}_2^{oc2} = \frac{\widehat{M}_{11} \hat{\theta}_2^2 + \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1^2 + C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{22} + \hat{C}_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} - 2 \widehat{M}_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 + \sqrt{\Upsilon^{oc}}}{2 C_p (\widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} - \widehat{M}_{12}^2)} \quad (\text{II-106})$$

$$\begin{aligned} \Upsilon^{oc} = & C_p^2 \widehat{K}_{11}^2 \widehat{M}_{22}^2 - 2 \hat{C}_p^2 \widehat{K}_{11} \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} + 4 C_p^2 \widehat{K}_{11} \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{12}^2 + C_p^2 \widehat{K}_{22}^2 \widehat{M}_{11}^2 \\ & - 2 C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} \theta_2^2 + 4 C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{12}^2 \theta_2^2 \\ & - 4 C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{12} \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 + 2 C_p \widehat{K}_{11} \widehat{M}_{22}^2 \hat{\theta}_1^2 + 2 C_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11}^2 \theta_2^2 \\ & - 4 C_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 - 2 C_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1^2 \\ & + 4 C_p \widehat{K}_{22} \widehat{M}_{12}^2 \hat{\theta}_1^2 + \widehat{M}_{11}^2 \hat{\theta}_2^4 - 4 \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{12} \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2^3 \\ & + 2 \widehat{M}_{11} \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1^2 \theta_2^2 + 4 \widehat{M}_{12}^2 \hat{\theta}_1^2 \hat{\theta}_2^2 - 4 \widehat{M}_{12} \widehat{M}_{22} \hat{\theta}_1^3 \hat{\theta}_2 + \widehat{M}_{22}^2 \hat{\theta}_1^4 \end{aligned} \quad (\text{II-107})$$

### b. Cas de la projection sur 1 mode (2DDL-PM1)

Afin de déterminer une expression simple du coefficient de couplage global, nous proposons dans cette section de considérer uniquement le premier mode de vibration pour réaliser la projection modale. En effet, autour de la première fréquence de résonance, c'est le premier mode de vibration qui influence majoritairement la réponse du récupérateur et on peut modéliser son comportement avec un système à un degré de liberté. La projection sur 1 mode présentée ici correspond alors à l'application de la méthode Rayleigh au premier mode de vibration déduit par le modèle 2DDL<sup>7</sup>. De cette manière, nous négligeons le second mode ainsi que ses interactions avec le premier mode. Le récupérateur est alors modélisable par le système à 1DDL donné en (II-108). En appliquant la méthode de Rayleigh au le premier mode de vibration déduit de la section II.5.2, les coefficients  $M$ ,  $K$ ,  $\Theta$  et  $B_f$  sont respectivement égaux à  $\widehat{M}_{11}$ ,  $\widehat{K}_{11}$ ,  $\widehat{\Theta}_1$  et  $\widehat{B}_{f1}$  dont les expressions sont données par les équations (II-93) à (II-96).  $C$  correspond à un amortissement visqueux considérant les pertes mécaniques.

$$\begin{cases} M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr - \Theta v = -B_f \ddot{w}_B \\ \Theta \dot{r} + C_p \dot{v} + i = 0 \end{cases} \quad (\text{II-108})$$

Les fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert déduites du système (II-108) sont données par (II-109) et (II-110) où  $k_e^2$  est le coefficient de couplage global alternatif tel que défini dans la section I.4 du Chapitre I.  $k_e^2$  est exprimé en fonction des coefficient matériaux et de la géométrie du récupérateur par (II-111) où nous introduisons deux facteurs  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  exprimés en (II-112) et (II-113).  $k_{e31}^2$  est le couplage électromécanique alternatif du matériau piézoélectrique.

<sup>7</sup> Le modèle 2DDL-PM1 présenté dans cette section ne correspond pas à l'orthogonalisation du système d'équations du modèle 2DDL-PM2 (équations (II-97) et (II-98)) et à la réduction au premier mode de vibration. Le modèle 2DDL-PM1, par l'application de la méthode de Rayleigh à un unique mode de vibration, conduit à un système à un degré de liberté différent de celui obtenu par l'orthogonalisation des modes.

$$\omega_1^{sc} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{II-109})$$

$$\omega_1^{oc} = \omega_1^{sc} \sqrt{1 + k_e^2} \quad (\text{II-110})$$

$$k_e^2 = \frac{\Theta^2}{K C_p} = k_{e_{31}}^2 \mathcal{R}_L \mathcal{R}_T \quad (\text{II-111})$$

$$\mathcal{R}_L = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{3}} \quad (\text{II-112})$$

$$\mathcal{R}_T = \frac{\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^3 + 2\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{h_s}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{Y_s^{ef}}{c_{11}^{ef}}\right) + \frac{4 + k_{e_{31}}^2}{3}\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^3 + 2\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{h_s}\right)} \quad (\text{II-113})$$

On appelle  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  respectivement « facteur de longueur » et « facteur d'épaisseur ».  $\mathcal{R}_L$  dépend uniquement de la distribution longitudinale des déformations dans la poutre alors que  $\mathcal{R}_T$  correspond à la répartition des contraintes selon l'épaisseur de la poutre.

Le coefficient  $b/a$  décrit donc l'homogénéisation des déformations longitudinales dans la poutre : plus  $b/a$  est grand, plus les déformations sont homogènes.  $a$  et  $b$  représentent respectivement  $a_1$  et  $b_1$  pour le premier mode comme introduits dans la partie II.5.2 et notamment sur la Figure II.7. L'expression de  $b/a$  est donnée à partir des équations (II-83), (II-91) et (II-92) en (II-114).

$$\frac{b}{a} = -\frac{3J_t - (9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 3D_t^2 + L_b^2 + 4D_tL_b}{6J_t - 2(9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 6D_t^2 + L_b^2 + 6D_tL_b} \quad (\text{II-114})$$

En réalisant la même démarche que pour le premier mode, l'équation (II-108) permet de décrire le comportement de la poutre autour de la deuxième fréquence de résonance si on prend  $M = \widehat{M}_{22}$ ,  $K = \widehat{K}_{22}$ ,  $\Theta = \widehat{\Theta}_2$  et  $B_f = \widehat{B}_{f2}$ . L'expression du coefficient de couplage global alternatif est donnée par (II-111) en remplaçant  $b/a$  par  $b_2/a_2$  exprimé en (II-115).

$$\frac{b_2}{a_2} = -\frac{3J_t + (9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 3D_t^2 + L_b^2 + 4D_tL_b}{6J_t + 2(9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2)^{\frac{1}{2}} + 6D_t^2 + L_b^2 + 6D_tL_b} \quad (\text{II-115})$$

Nous avons finalement présenté dans cette section l'application de la méthode de Rayleigh-Ritz au modèle à deux degrés de libertés. Soit les deux modes de vibration peuvent être considérés, soit un seul des deux modes peut être considéré pour étudier la réponse proche de la fréquence de résonance en court-circuit.

## II.6. Comparaison des modèles

On propose dans cette section de comparer les modèles à des résultats de simulations par éléments finis en deux dimensions. Les modèles que l'on compare sont :

- 2DDL-RD : modèle à 2 degrés de liberté par résolution directe
- 2DLL-PM1 : modèle à 2 degrés de liberté avec projection modale sur 1 mode.
- 2DLL-PM2 : modèle à 2 degrés de liberté avec projection modale sur 2 modes
- DP-PM1 : modèle à paramètres distribués avec projection modale sur 1 mode présenté en annexe 1.
- DP-PM4 : modèle à paramètres distribués avec projection modale sur 4 modes présenté en annexe 1.
- DP-PM1-CC : modèle à paramètres distribués avec projection modale sur 1 mode en considérant le champ électrique constant selon l'épaisseur des patchs piézoélectriques tel que présenté par Dutoit *et al* [98].
- FEM : acronyme utilisé pour les résultats donnés par les simulations par éléments finis en deux dimensions (Comsol Multiphysics)

A l'exception de DP-PM1-CC, tous les modèles considèrent le champ électrique variable selon l'épaisseur des patchs piézoélectriques. On considère le modèle DP-PM4 comme donnant des résultats très proches de la solution exacte au sens de la théorie d'Euler Bernoulli. Dans leurs travaux, Elvin et Elvin [151] ont en effet montré qu'en prenant en compte plusieurs ( $\geq 4$ ) modes de vibration avec la méthode de Rayleigh-Ritz, ils obtenaient des résultats très similaires aux modèles à paramètres distribués d'Erturk et Inman [162]. Le modèle DP-PM4 a l'avantage de considérer les interactions entre les 4 premiers modes de flexion comparé à DP-PM1.

On détermine, à partir de chaque modèle, les fréquences de résonance en court-circuit  $f_{sc}$  et en circuit ouvert  $f_{oc}$  pour les deux premiers modes de flexion puis on calcule les coefficients  $k_f^2$  grâce à l'équation (II-116). De la même manière, les fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert et le coefficient  $k_f^2$  sont déterminés par des simulations par éléments finis en 2 dimensions avec Comsol Multiphysics (également appelée « FEM » dans ce manuscrit).

$$k_f^2 = \frac{f_{oc}^2 - f_{sc}^2}{f_{oc}^2} \quad (\text{II-116})$$

Il est intéressant de noter que, pour les modèles DP-PM4, 2DDL-RD et 2DDL-PM2,  $k_f^2$  ne correspond pas à un coefficient de couplage électromécanique global  $k^2$  au sens strict du terme. Comme mentionné dans la section I.4.3.d, la définition d'un coefficient de couplage est donnée pour un mode de vibration donné tout en négligeant les autres modes de vibration. L'utilisation de modèles à plusieurs degrés de libertés tels que DP-PM4, 2DDL-RD et 2DDL-PM2 permet d'obtenir une meilleure précision sur l'écart entre la fréquence de résonance en court-circuit et la fréquence en circuit ouvert grâce à la prise en compte des interactions entre les modes. Cependant leurs résultats ne correspondent pas au coefficient de couplage électromécanique global  $k^2$  d'un unique mode de vibration.

Par extension de ce raisonnement, l'utilisation de simulations par éléments finis pour déduire le coefficient de couplage global d'un récupérateur grâce aux fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert ne donne qu'une estimation (même si elle est très précise) de ce coefficient de couplage. En effet, les simulations par éléments finis prennent nécessairement en compte un grand nombre de modes de vibration lors de leur résolution.

Les modèles sont comparés aux simulations pour une configuration fixe de poutre *bimorph* ayant une masse mobile carrée dont les dimensions varient. Les dimensions sont données dans

le Tableau II.4. La largeur de la masse mobile et la largeur de la poutre sont égales et l'hypothèse de contraintes planes est considérée pour les calculs et la simulation. Cette hypothèse est valide pour une configuration de poutre étroite. Le substrat et la masse mobile sont en acier et on considère deux types de matériaux piézoélectriques : le PZT-5A de Noliac qui est modérément couplé et le PZN-PT 5.5% polarisé selon l'axe [011] qui est très fortement couplé. Nous calculons l'erreur sur la fréquence de résonance en court-circuit et sur  $k_f^2$  lorsque le ratio entre la masse de la masse mobile ( $M_t$ ) et la masse de la poutre ( $mL_b$ ) augmente. Ce rapport de masse ( $M_t/mL_b$ ) varie de 1 à 20. (Figure II.8). A partir de ces configurations extrêmes, nous pouvons analyser la précision dans le cas où la masse est quasiment ponctuelle ainsi que dans le cas où la masse de la masse mobile est grande par rapport à la masse de la poutre. De plus, l'inertie en rotation de la masse mobile est non-négligeable lorsque la masse mobile est volumineuse.

Tableau II.4 : Configurations étudiées

Longueur de la poutre	$L_b = 30mm$
Epaisseurs des patches et de l'acier	$h_s = h_p = 0.5mm$
Taille de la masse carrée	$H_m = L_m = 6.5mm$ à $30mm$
Configuration	Contraintes planes
Matériau piézoélectrique	PZN-PT ( $k_{31}^2 = 81\%$ ), PZT ( $k_{31}^2 = 15\%$ )

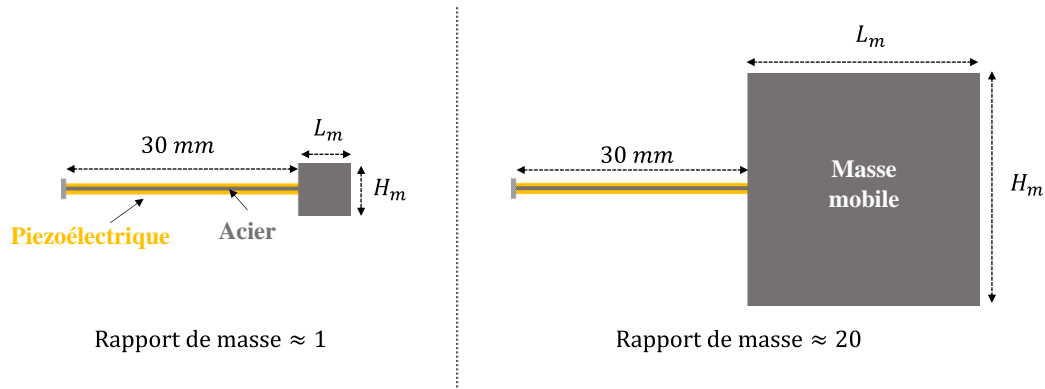


Figure II.8 : Représentation à l'échelle des configurations géométriques pour la comparaison des modèles

Les fréquences de résonances en court-circuit des deux premiers modes de flexion et les coefficients  $k_f^2$  associés sont donnés pour du PZT sur la Figure II.9 et la Figure II.10. Les valeurs absolues des erreurs relatives de chaque modèle par rapport aux simulations éléments finis ( $|f_{\text{modele}} - f_{FEM}|/f_{FEM}$  et  $|k_{f\text{modele}}^2 - k_{fFEM}^2|/k_{fFEM}^2$ ) est donnée en Figure II.11 et Figure II.12.



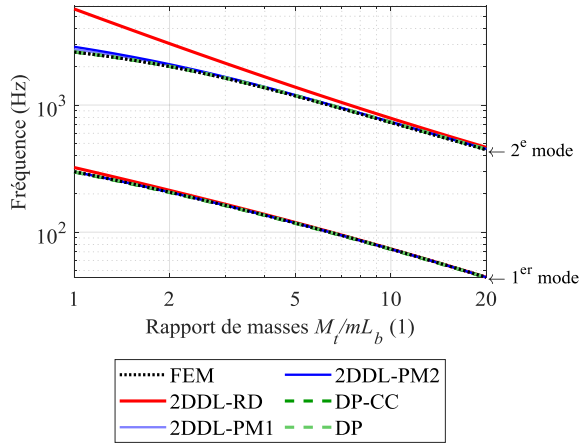


Figure II.9 : Fréquences de résonance en court-circuit pour le matériau PZT ( $k_{31}^2 = 15\%$ )

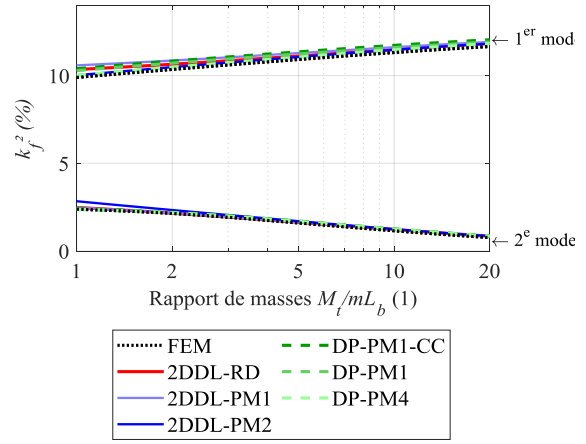


Figure II.10 : Coefficients  $k_f^2$  pour le matériau PZT ( $k_{31}^2 = 15\%$ )

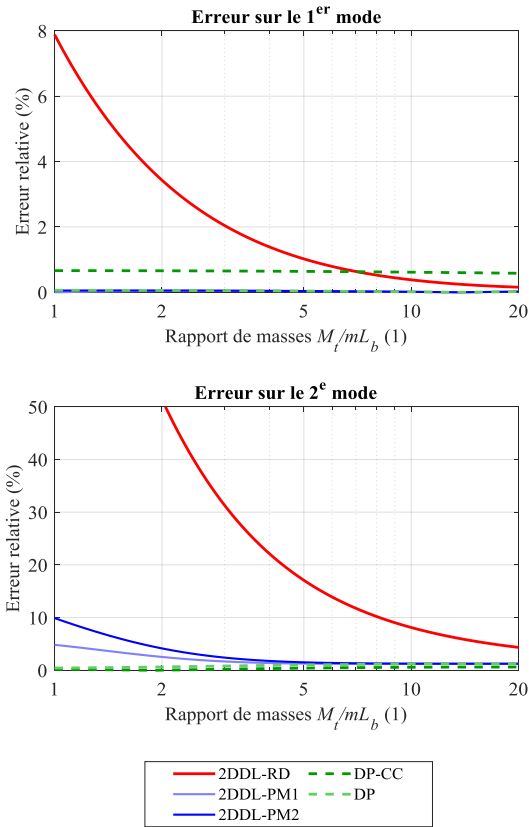


Figure II.11 : Erreur  $|f_{\text{modele}} - f_{FEM}|/f_{FEM}$  sur la fréquence de résonance en court-circuit pour le matériau PZT. Les courbes de 2DDL-PM1, 2DDL-PM2 et DP sont confondues pour le premier mode.

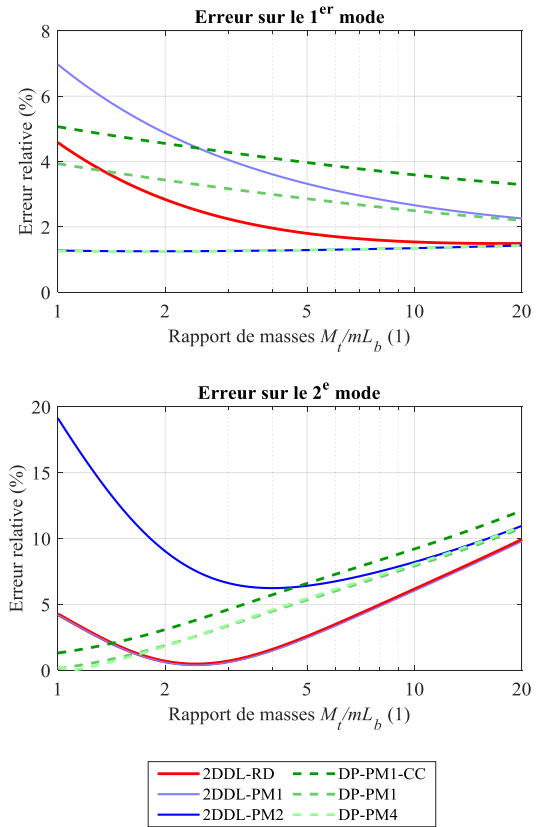


Figure II.12 : Erreur  $|k_{f\text{modele}}^2 - k_{fFEM}^2|/k_{fFEM}^2$  sur le coefficient  $k_f^2$  pour le matériau PZT. La courbe de 2DDL-PM1 est confondue avec celle de 2DDL-RD pour le second mode.

Ces résultats montrent que pour le matériau PZT, les modèles présentés sont précis pour le premier mode de vibration car ils ont une erreur inférieure à 8% lorsqu'ils sont comparés aux simulations par éléments finis. Le modèle 2DDL-RD a une plus grande erreur relative que les autres modèles sur la fréquence de résonance lorsque  $M_t/mL_b$  est faible. Le modèle 2DDL-RD néglige en effet la masse de poutre qui est non-négligeable lorsque  $M_t/mL_b$  est faible. Comme le montre la Figure II.12, les modèles 2DDL-RD, 2DDL-PM2 et DP-PM4, qui considèrent plusieurs modes de vibration, permettent d'avoir une erreur très faible sur  $k_f^2$  au premier mode. Cependant, lorsque la masse mobile est petite, l'erreur sur  $k_f^2$  au second mode est plus grande avec le modèle 2DDL-PM2 qu'avec le modèle 2DDL-PM1. En d'autres termes, l'erreur est plus importante en considérant les deux modes pour la projection modale du modèle à deux degrés de liberté par rapport au cas où uniquement un mode est considéré. Cette erreur sur le modèle 2DDL-PM2 provient probablement de l'approximation de l'influence du premier mode de vibration sur le second mode (coefficient  $\overline{M}_{12}$  de l'équation (II-97)). La forme des modes de vibrations est en effet approximée avec le modèle 2DDL. Par ailleurs, l'utilisation de la méthode de Rayleigh-Ritz considérant deux modes approchés de vibration permet d'augmenter la précision de la première fréquence de résonance mais une précision moindre est attendue sur la seconde [161, p. 503].

Lorsque la taille de la masse mobile augmente, l'erreur sur  $k_f^2$  au second mode augmente pour tous les modèles (supérieure à 10%). La masse mobile devenant très volumineuse par rapport aux dimensions de la poutre, il se peut qu'elle se déforme dans les résultats des simulations par éléments finis alors que la masse mobile est supposée indéformable dans les modèles.

On constate (voir Figure II.12) que le modèle 2DDL-PM1 donne des résultats sur  $k_f^2$  très proches du modèle à paramètres distribués DP-PM1 au premier mode tout en fournissant une expression analytique simple du coefficient du couplage global. De plus, l'erreur sur la fréquence de résonance du modèle 2DDL-PM1 est plus faible que celle du modèle 2DDL-RD et que celle du modèle DP-PM1-CC présenté par Dutoit *et al.* [98]. Le calcul du coefficient  $k_f^2$  est plus précis avec 2DDL-PM1 qu'avec DP-PM1-CC lorsque  $M_t/mL_b$  est supérieur à 2,5. Négliger la variation du champ électrique selon l'épaisseur des patches piézoélectriques dans DP-PM1-CC conduit à une erreur supplémentaire d'environ 0,5% sur la fréquence de résonance et 1% sur le coefficient  $k_f^2$  comparé au modèle DP-PM1.

Les fréquences de résonance en court-circuit des deux premiers modes de flexion et les coefficients  $k_f^2$  associés sont donnés pour du PZN-PT dans la Figure II.13 et la Figure II.14. Les valeurs absolues des erreurs relatives de chaque modèle par rapport aux simulations éléments finis est donnée en Figure II.15 et Figure II.16.

Avec le PZN-PT comme matériau, les erreurs sur la première fréquence de résonance sont comparables à celles obtenues avec du PZT sauf pour le modèle DP-PM1-CC pour lequel l'erreur est proche de 8%. Ceci montre l'importance de considérer la variation du champ électrique selon les épaisseurs de matériau piézoélectrique. L'erreur sur  $k_f^2$  au premier mode est faible (inférieure à 5%) lorsque plusieurs modes sont considérés dans les modèles (2DDL-RD, 2DDL-PM2 et DP-PM4). Avec du matériau PZN-PT, l'erreur sur  $k_f^2$  est plus importante pour les modèles ne considérant qu'un seul mode (2DDL-PM1 et DP-PM1) en comparaison à une poutre utilisant du matériau PZT.

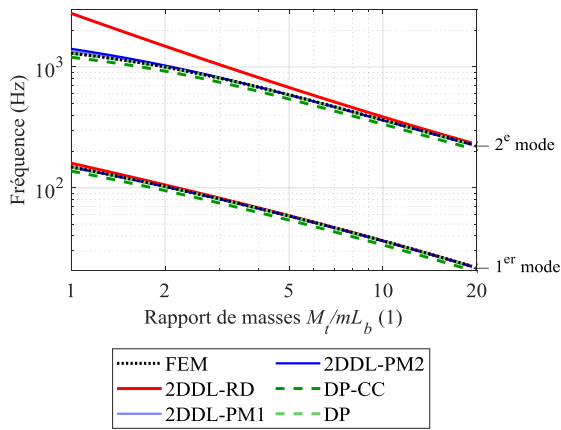


Figure II.13 : Fréquences pour le matériau PZN-PT ( $k_{31}^2 = 81\%$ )

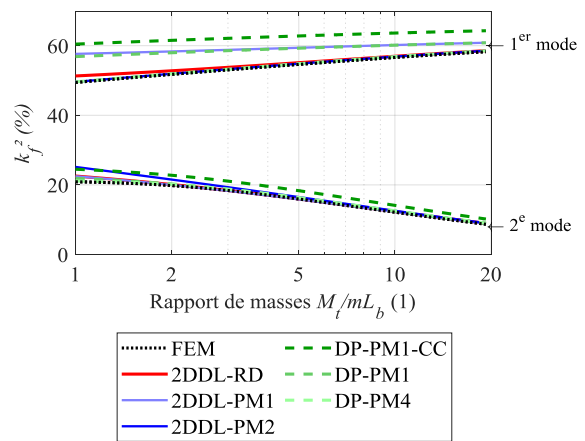


Figure II.14 : Coefficients  $k_f^2$  pour le matériau PZN-PT ( $k_{31}^2 = 81\%$ )

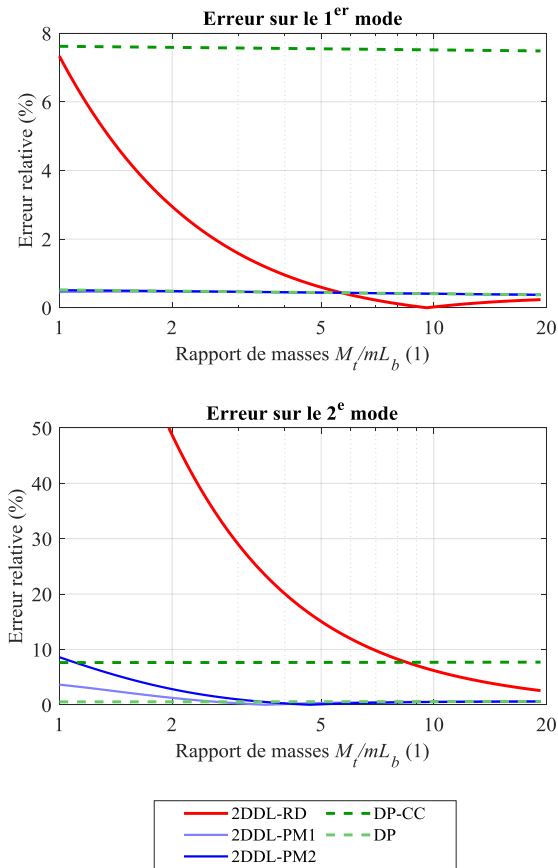


Figure II.15 : Erreur  $|f_{\text{modele}} - f_{FEM}|/f_{FEM}$  sur la fréquence pour le matériau PZN-PT ( $k_{31}^2 = 81\%$ ). Les courbes de 2DDL-PM1, 2DDL-PM2 et DP sont confondues pour le premier mode.

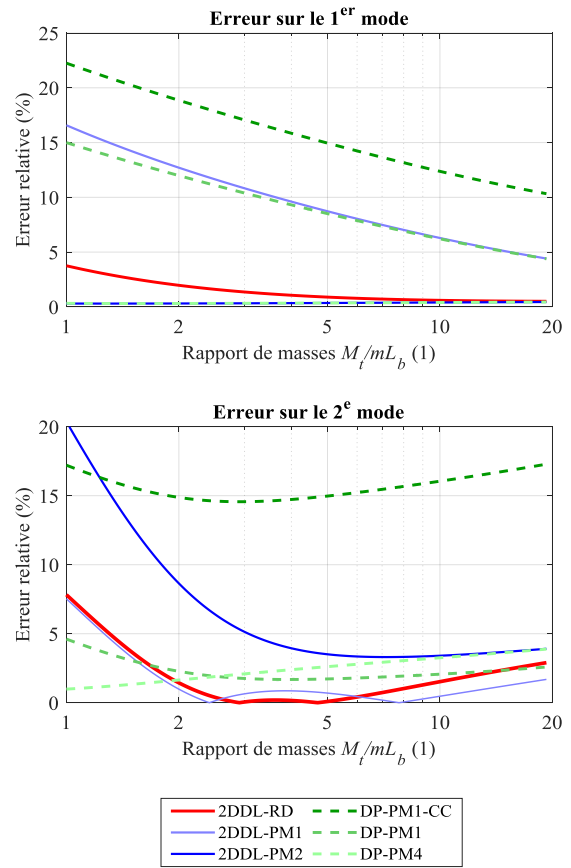


Figure II.16 : Erreur  $|k_{f\text{modele}}^2 - k_{fFEM}^2|/k_{fFEM}^2$  sur le coefficient  $k_f^2$  pour le matériau PZN-PT ( $k_{31}^2 = 81\%$ )

Le coefficient  $k_f^2$  du second mode des poutres en PZN-PT modélisées est supérieur à 10% (Figure II.14) alors que celui des poutres en PZT est inférieur à 3% (Figure II.12). Comme le ratio entre la première et la deuxième fréquence de résonances sont similaires pour les matériaux PZT et PZN-PT (Figure II.9 et Figure II.13), le coefficient de couplage du second mode semble avoir une influence sur le coefficient  $k_f^2$  du premier mode. Les influences mutuelles entre les deux premiers modes de flexion semblent plus importantes lorsque le coefficient de couplage matériaux  $k_{31}^2$  est grand que lorsqu'il est faible.

Parmi tous ces modèles, le modèle à deux degrés de liberté par projection modale sur 1 mode (2DDL-PM1) offre l'avantage de fournir une expression analytique du coefficient de couplage électromécanique alternatif  $k_e^2$  très facilement analysable (l'équation (II-111)). Il donne précisément la fréquence de résonance et le coefficient de couplage du premier mode pour des matériaux piézoélectriques modérément couplés à fortement couplés. Pour ces raisons, nous décidons d'utiliser ce modèle pour proposer dans le chapitre suivant des pistes d'optimisation du coefficient de couplage du premier mode de vibration de poutres piézoélectriques. Pour le dimensionnement de structures utilisant des matériaux très fortement couplés, les conclusions du modèle 2DDL-PM1 pourraient être complétées dans de futures recherches (non réalisé dans la thèse) par une étude basée sur les modèles 2DDL-PM2 ou 2DDL-RD afin de considérer les interactions entre les deux premiers modes de vibration.

## II.7. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons proposé et détaillé le modèle analytique 2DDL-PM1 qui sera utilisé pour la conception de récupérateurs piézoélectriques très fortement couplés. Une comparaison des modèles de la littérature consacrés aux poutres ayant une masse mobile a permis de faire ressortir le besoin d'un modèle pour la conception de récupérateurs fortement couplés. Ainsi, les modèles proposés dans ce chapitre (2DDL-RD et 2DDL-PM) présentent les avantages de pouvoir être résolus analytiquement et d'être précis comparés aux simulations par éléments finis. Ceux-ci prennent en compte l'inertie en rotation de la masse mobile et considèrent que le champ électrique est variable selon l'épaisseur des patches piézoélectriques. Par ailleurs, le modèle 2DDL-PM1 offre une expression du coefficient de couplage global alternatif  $k_e^2$  plus facile à analyser que les modèles 2DDL-RD et 2DDL-PM2. Par conséquent, l'expression de  $k_e^2$  obtenue à partir du modèle 2DDL-PM1 va être utilisée dans le chapitre suivant pour fournir des règles de conception de récupérateurs très fortement couplés.

# Chapitre III : Optimisation du coefficient de couplage de poutres piézoélectriques

*Dans ce chapitre, nous proposons des règles générales d'optimisation permettant de maximiser le coefficient de couplage électromécanique global de poutres piézoélectriques avec masses mobiles. A partir de l'expression analytique du coefficient de couplage alternatif  $k_e^2$ , obtenue grâce au modèle 2DDL-PM1 présenté dans le chapitre précédent, nous fournissons des indications inédites et utiles au dimensionnement de récupérateurs d'énergie vibratoire. L'exploitation d'une expression analytique nous permet de réaliser une analyse adimensionnelle et d'étudier les aspects électromécaniques de manière approfondie. Des simulations, réalisées sur des logiciels de simulations par éléments finis, permettent de compléter cette étude et d'analyser l'influence des contraintes et des déformations latérales sur le coefficient de couplage. Pour finir, nous proposons une solution innovante permettant d'augmenter le coefficient de couplage des structures de type cantilever.*

## III.1. Compréhension des aspects électromécaniques par le modèle

### III.1.1. Aspects de localisation et d'homogénéisation des contraintes

#### a. Définition des coefficients

Avant de procéder à l'analyse détaillée de l'expression du coefficient de couplage alternatif obtenue par le modèle 2DDL-PM1, nous proposons d'exposer la relation entre la distribution des contraintes dans la poutre et la valeur du coefficient de couplage global. A partir d'une étude générale se basant sur la méthode de Rayleigh (indépendante du modèle à 2DDL), nous montrons dans cette section l'influence de la distribution longitudinale des contraintes, d'une part, et de la répartition transversale des contraintes, d'autre part, sur le coefficient de couplage.

Pour y parvenir, nous donnons dans cette partie une expression générale de  $k_e^2$  qui ne considère pas d'hypothèse sur le mode de vibration.

Les déformations d'une poutre en vibration selon un mode de résonance, analysées à partir de la méthode de Rayleigh, sont exprimées par l'équation (III-1). Pour rappel,  $z$  est la distance à la fibre neutre,  $w(x, t)$  est la déformée de la poutre,  $\phi(x)$  est la forme du mode de vibration et  $\phi''(x)$  est sa dérivée seconde par rapport à la coordonnée spatiale  $x$ ,  $r(t)$  est la composante temporelle donnée dans notre cas par le déplacement transverse en  $x = L_b$ . La forme du mode  $\phi(x)$  est normalisée telle que  $\phi(L_b) = 1$ .

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = -z \phi''(x) r(t) \quad (III-1)$$

L'équation (III-1) permet de dissocier l'expression des déformations par le produit de deux termes, le premier,  $\psi_x(x)$ , représente la distribution longitudinale des déformations et le deuxième,  $\psi_z(z)$ , représente la répartition transversale des déformations comme exprimé en (III-2).  $\psi_x(x)$  et  $\psi_z(z)$  sont exprimées en (III-3).

$$S_1(x, z, t) = -\psi_z(z)\psi_x(x)r(t) \quad (III-2)$$

$$\begin{cases} \psi_z(z) = z \\ \psi_x(x) = \phi''(x) \end{cases} \quad (III-3)$$

Une représentation graphique des termes  $\psi_x(x)$  et  $\psi_z(z)$  est donnée en Figure III.1. Bien que la distribution longitudinale  $\psi_x(x)$  soit définie par une combinaison linéaire de fonctions sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique avec le modèle à paramètres distribués [149], la fonction  $\psi_x(x)$  pour le premier mode de flexion est assez fidèlement représentée avec une fonction affine, comme illustrée sur la Figure III.1, lorsque la masse de la masse mobile est importante par rapport à la masse de la poutre. Cette section se voulant générale, d'autres configurations de fonctions peuvent être considérées pour  $\psi_x(x)$  en fonction du mode de flexion considéré.

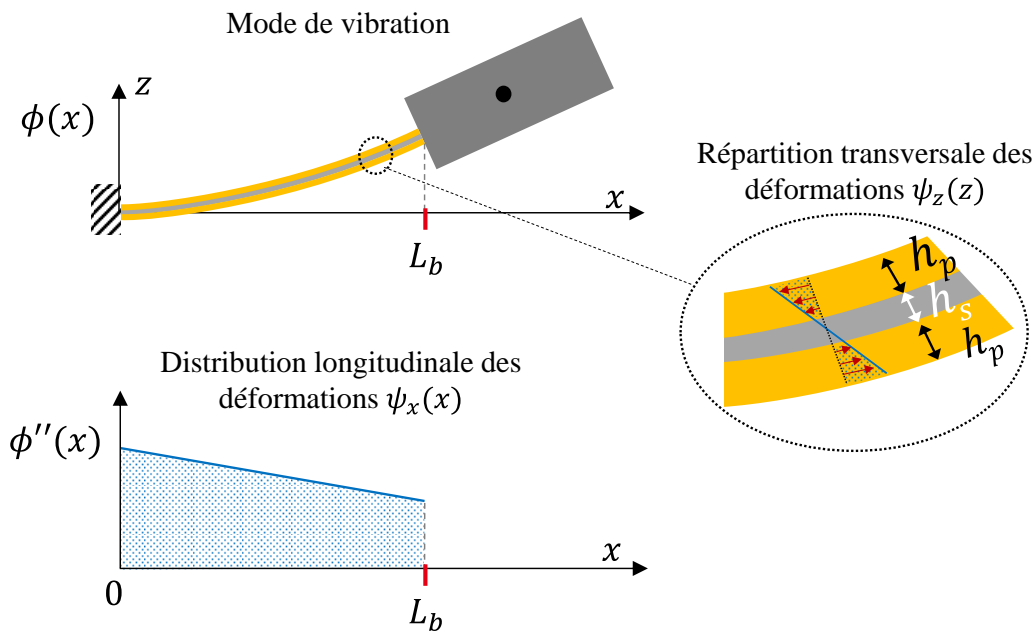


Figure III.1 : Mode de vibration et répartition des contraintes dans une poutre piézoélectrique

Par l'utilisation du principe de Hamilton et en appliquant la méthode de Rayleigh, le comportement vibratoire du récupérateur autour d'un mode de vibration peut être modélisé par un système à un degré de liberté (1DDL). Nous pouvons exprimer le coefficient de raideur équivalent  $K$  et le terme de couplage équivalent  $\Theta$  de ce système à 1DDL en fonction des termes  $\psi_x(x)$  et  $\psi_z(z)$ . Les expressions de  $\Theta$  et  $K$  sont données en (III-4) et (III-5).  $\psi_x^{moy}$  et  $\psi_x^{eff}$  correspondent respectivement la valeur moyenne et la valeur efficace de  $\psi_x(x)$  calculées sur la longueur de la poutre et sont exprimées en (III-6) et (III-7).  $\psi_z^{Pmoy}$  est la valeur moyenne de  $\psi_z(z)$  calculée sur l'épaisseur d'un patch piézoélectrique et exprimée en (III-8).  $L_b$ ,  $h_s$  et  $h_p$  sont respectivement la longueur de poutre, l'épaisseur de substrat et l'épaisseur des patches piézoélectriques. Les calculs sont détaillés dans l'annexe 2.

$$K = YI L_b \psi_x^{eff^2} \quad (III-4) \quad \Theta = 2B e_{31}^{ef} L_b \psi_x^{moy} \psi_z^{Pmoy} \quad (III-5)$$

$$\psi_x^{moy} = \frac{1}{L_b} \int_0^{L_b} \psi_x(x) dx \quad (III-6) \quad \psi_x^{eff} = \sqrt{\frac{1}{L_b} \int_0^{L_b} \psi_x(x)^2 dx} \quad (III-7)$$

$$\psi_z^{Pmoy} = \frac{1}{h_p} \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} \psi_z(z) dz = \frac{1}{h_p} \int_{-\frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}-h_p} \psi_z(z) dz = \frac{h_p + h_s}{2} \quad (III-8)$$

La raideur à la flexion  $YI$  dans l'expression de  $K$  en (III-4) est également exprimée en fonction de la répartition des déformations  $\psi_z(z)$  dans le matériau piézoélectrique et dans le substrat en (III-9).  $\psi_z^{Peff}$  est la valeur efficace de  $\psi_z(z)$  sur l'épaisseur d'un patch piézoélectrique exprimée en (III-10) et  $\psi_z^{Seff}$  est la valeur efficace de  $\psi_z(z)$  sur une demie épaisseur de substrat exprimée en (III-11).

$$YI = B2h_p \left( c_{11}^{ef} \psi_z^{Peff^2} + c_{11}^{ef} k_{e_{31}}^2 \left( \psi_z^{Peff^2} - \psi_z^{Pmoy^2} \right) \right) + Bh_s Y_s^{ef} \psi_z^{Seff^2} \quad (III-9)$$

$$\psi_z^{Seff^2} = \frac{2}{h_s} \int_0^{\frac{h_s}{2}} \psi_z^2 dz = \frac{2}{h_s} \int_{-\frac{h_s}{2}}^0 \psi_z^2 dz = \frac{h_s^2}{12} \quad (III-10)$$

$$\psi_z^{Peff^2} = \frac{1}{h_p} \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} \psi_z^2 dz = \frac{1}{h_p} \int_{-\frac{h_s}{2}}^{-\frac{h_s}{2}-h_p} \psi_z^2 dz = \frac{1}{3h_p} \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right) \quad (III-11)$$

A partir de l'expression de  $\Theta$  et  $K$  en (III-4) et (III-5) et de la capacité équivalente  $C_p$  en (III-12), on déduit en (III-13) une expression générale du coefficient de couplage d'une poutre *bimorph* vibrant selon un mode flexion.

$$C_p = \frac{2BL_b \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (III-12)$$

$$k_e^2 = \frac{\Theta^2}{KC_p} = k_{e31}^2 \frac{\psi_{Pmoy}^2}{\psi_{Peff}^2} \frac{1}{1 + k_{e31}^2 \left(1 - \frac{\psi_{Pmoy}^2}{\psi_{Peff}^2}\right) + \frac{h_s Y_s^{ef} \psi_{Seff}^2}{2h_p c_{11}^{ef} \psi_{Peff}^2}} \left(\frac{\psi_x^{moy}}{\psi_x^{eff}}\right)^2 \quad (\text{III-13})$$

$\mathcal{R}_T$   $\mathcal{R}_L$   
 $\mathbb{E}$   $\mathbb{S}$

L'expression du coefficient de couplage global alternatif  $k_e^2$  peut être considérée comme étant le produit du coefficient de couplage matériau alternatif  $k_{e31}^2$ , d'un facteur noté  $\mathcal{R}_L$  et un facteur noté  $\mathcal{R}_T$ .  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  sont deux facteurs adimensionnels que nous choisissons d'appeler respectivement "facteur de longueur" et "facteur d'épaisseur".  $\mathcal{R}_L$  ne dépend que de la répartition des contraintes le long de la poutre, tandis que  $\mathcal{R}_T$  est lié à la répartition des contraintes dans l'épaisseur de la poutre.

Comme le rapport entre valeur moyenne d'une fonction et sa valeur efficace  $\psi^{moy}/\psi^{eff}$  est inférieur ou égale à 1, les facteurs  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  sont tous deux inférieurs ou égaux à 1. Par ailleurs, le rapport  $\psi^{moy}/\psi^{eff}$  vaut 1 lorsque  $\psi$  vaut 1. L'objectif du processus d'optimisation consiste alors à faire tendre  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  autant que possible vers l'unité.

A partir de l'équation (III-13), on comprend que maximiser de  $\mathcal{R}_L$  revient à homogénéiser les déformations selon la longueur de la poutre. Augmenter  $\mathcal{R}_L$  est en effet équivalent à augmenter le ratio  $\psi_x^{moy}/\psi_x^{eff}$ .  $\mathcal{R}_L$  vaut 1 lorsque les contraintes sont totalement uniformes. Ainsi, quelle que soit la forme d'un mode de vibration  $\phi(x)$ , il faut homogénéiser les contraintes selon la longueur la poutre pour maximiser le coefficient de couplage correspondant à ce mode.

La maximisation de  $\mathcal{R}_T$ , quant à elle, passe par l'homogénéisation de la répartition transversale des contraintes dans les matériaux piézoélectriques. De la même manière que pour  $\mathcal{R}_L$ , augmenter le ratio  $\psi_z^{Pmoy}/\psi_z^{Peff}$  par l'homogénéisation des contraintes dans le matériau piézoélectrique selon l'épaisseur permet en effet d'augmenter  $\mathcal{R}_T$ . Cependant, l'énergie élastique stockée dans le substrat à chaque période doit être également prise en compte.  $\mathbb{S}$  est égal au rapport entre l'énergie élastique stockée dans le substrat et l'énergie stockée par la rigidité du matériau piézoélectrique. L'énergie élastique stockée dans le substrat doit donc être minimisée pour maximiser  $\mathcal{R}_T$ .

La présence du terme  $\mathbb{E}$  dans l'expression de  $\mathcal{R}_T$  est due à la variation du champ électrique selon l'épaisseur des patchs piézoélectriques.  $\mathbb{E}$  étant toujours positif, la variation du champ électrique selon l'épaisseur des patchs induit une diminution de la valeur de  $\mathcal{R}_T$ . L'impact de  $\mathbb{E}$  est d'autant plus important que les contraintes sont inhomogènes selon l'épaisseur des patchs piézoélectriques et que le coefficient de couplage alternatif du matériau piézoélectrique  $k_{e31}^2$  est grand. Ainsi, la variation spatiale du champ électrique doit nécessairement être prise en compte pour le dimensionnement de récupérateurs fortement couplés car la valeur de  $\mathbb{E}$  peut être non-négligeable dans ce cas. Si le champ électrique est considéré constant selon les épaisseurs des patchs dans le modèle, la valeur de  $\mathbb{E}$  est considérée nulle. Cette hypothèse peut conduire à des conclusions fausses sur l'optimisation de poutres.



Il est intéressant de noter que l'interprétation du coefficient de couplage par l'analyse de la répartition des contraintes offerte par l'équation (III-13) est originale par rapport aux travaux de la littérature. Parmi les travaux les plus pertinents sur l'expression du coefficient de couplage des poutres piézoélectriques, on peut notamment citer Ducarne *et al.* [163] qui ont étudié l'optimisation d'une poutre sans masse mobile. En effet, l'expression qu'ils ont proposée a permis de mettre en valeur la dépendance du coefficient de couplage par rapport à la différence de pente entre les extrémités des patchs piézoélectriques. Cependant, aucun commentaire n'a pu être fait sur l'influence répartition des déformations. Par ailleurs, l'expression proposée par Ducarne *et al.* ne permet pas de considérer une masse mobile et son utilisation nécessite une résolution numérique.

En conclusion de l'analyse de l'équation (III-13), nous avons démontré que, pour maximiser les coefficients de couplage d'un récupérateur d'énergie vibratoire piézoélectrique, il est nécessaire de : i) Minimiser l'énergie élastique stockée dans le substrat et diriger les contraintes dans le matériau piézoélectrique, ii) Homogénéiser la distribution des contraintes dans le matériau piézoélectrique.

#### b. Expression du couplage à partir de 2DDL-PM1

Afin de fournir des règles de dimensionnement, nous proposons, à partir du modèle 2DDL-PM1, des expressions simples de  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  pour le premier mode de flexion d'un cantilever piézoélectrique avec masse mobile. Nous rappelons l'expression de  $k_e^2$  dans l'équation (III-14) et les expressions de  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  sont données en (III-15) et (III-16).

$$k_e^2 = k_{e_{31}}^2 \mathcal{R}_L \mathcal{R}_T \quad (\text{III-14})$$

$$\mathcal{R}_L = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{4}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{3}} \quad (\text{III-15})$$

$$\mathcal{R}_T = \frac{\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^3 + 2\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{h_s}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{Y_s^{ef}}{c_{11}^{ef}}\right) + \frac{4 + k_{e_{31}}^2}{3}\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^3 + 2\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{h_s}\right)} \quad (\text{III-16})$$

Le rapport  $b/a$ , tel que défini dans la section II.5.4.b, est lié à la dérivée seconde de la déformée du premier mode de flexion  $\phi_1''(x)$ , comme représenté dans la Figure III.2, il exprime l'uniformité de la distribution des contraintes le long de la poutre (plus  $b/a$  est élevé, plus les contraintes sont homogènes). Comme exprimé à partir du modèle à 2DDL en (III-17) avec  $\Gamma$  exprimé par (III-18), le rapport  $b/a$  ne dépend que de la longueur de la poutre  $L_b$ , du ratio d'inertie de la masse mobile  $J_t$  et de la distance  $D_t$

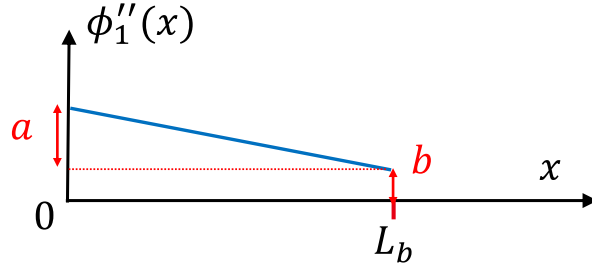


Figure III.2 : Représentation  $\phi_1''(x)$  avec les coefficients  $a$  et  $b$  donnée par le modèle 2DDL-PM1

$$\frac{b}{a} = - \frac{3J_t - \Gamma^{\frac{1}{2}} + 3D_t^2 + L_b^2 + 4D_tL_b}{6J_t - 2\Gamma^{\frac{1}{2}} + 6D_t^2 + L_b^2 + 6D_tL_b} \quad (\text{III-17})$$

$$\Gamma = 9D_t^4 + 18D_t^3L_b + 15D_t^2L_b^2 + 18D_t^2J_t + 6D_tL_b^3 + 18D_tL_bJ_t + L_b^4 + 3L_b^2J_t + 9J_t^2 \quad (\text{III-18})$$

A notre connaissance, c'est la première fois qu'une expression analytique du coefficient de couplage électromécanique alternatif est donnée pour un cantilever piézoélectrique dont la géométrie de la masse mobile est prise en compte et pour lequel le champ électrique est considéré variable selon l'épaisseur des patches piézoélectriques. L'exploitation de cette expression permet de déduire des indications utiles à l'optimisation de poutres.

Il est important de noter que les optimisations de la distribution longitudinale des contraintes et de la distribution transversale des contraintes (c'est-à-dire l'optimisation de  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$ ) peuvent être réalisées séparément car elles ne dépendent pas des mêmes paramètres. De plus,  $\mathcal{R}_T$  et  $\mathcal{R}_L$  ne dépendent ni de l'épaisseur totale de la poutre, ni de la densité du matériau de la masse mobile. Nous pouvons alors ajuster ces derniers dans le seul but de cibler une fréquence souhaitée sans impact sur le coefficient  $k^2$ . Ce résultat simplifie grandement la conception des poutres piézoélectriques très fortement couplées. Dans les sections suivantes, nous analysons comment les coefficients  $\mathcal{R}_L$ ,  $\mathcal{R}_T$  et  $k_{e31}^2$  peuvent être maximisés pour maximiser  $k_e^2$ .

### III.1.2. Optimisation de la distribution longitudinale des contraintes

#### a. Maximisation du coefficient $\mathcal{R}_L$

À partir des équations (III-15) et (III-17), on remarque que seules la longueur de la poutre et la forme de la masse mobile ont une influence sur les valeurs de  $b/a$  et  $\mathcal{R}_L$ . Les densités et les rigidités des matériaux n'ont aucune influence sur ces deux coefficients. La Figure III.3 montre l'évolution de  $\mathcal{R}_L$  en fonction du rapport  $b/a$ .  $\mathcal{R}_L$  vaut 0,75 dans le cas d'un cantilever avec une masse mobile ponctuelle placée à l'extrémité de la poutre ( $J_t = 0$ ,  $D_t = 0$  et  $b/a = 0$ ) et  $\mathcal{R}_L$  tend vers 1 lorsque  $b/a$  tend vers l'infini. Des contraintes totalement uniformes selon la longueur de la poutre entraîneraient alors une augmentation de +33% sur le coefficient  $k_e^2$  par rapport au cas de masse ponctuelle. Il est également intéressant de noter que  $\mathcal{R}_L$  croît très rapidement avec  $b/a$ . Un rapport modéré de  $b/a$  permet d'atteindre une valeur élevée de  $\mathcal{R}_L$  (par exemple  $\mathcal{R}_L = 0,964$  pour  $b/a = 1$ ).

Les équations (III-17) et (III-18) montrent que  $b/a$  dépend des caractéristiques géométriques de la masse mobile ( $J_t$  et  $D_t$ ) et de la longueur de la poutre  $L_b$ . La Figure III.4 représente  $\mathcal{R}_L$  en fonction de  $J_t$  et  $D_t$  pour une longueur de poutre  $L_b$  de 20mm. Cette figure souligne l'intérêt d'augmenter à la fois  $J_t$  et  $D_t$ . Même si  $\mathcal{R}_L$  est théoriquement maximal pour une valeur nulle de  $D_t$  lorsque  $J_t$  est très grand (difficilement perceptible sur la figure, le point A est plus haut que le point B), il est plus commode de concevoir des masses mobiles dont les valeurs de  $J_t$  et  $D_t$  sont modérées (point C par exemple). Tel que détaillé ci-dessous, la conception de récupérateurs impliquant un grand  $J_t$  et un petit  $D_t$  conduirait en effet à des récupérateurs de volumes globaux si importants, qu'ils seraient difficiles à fabriquer.

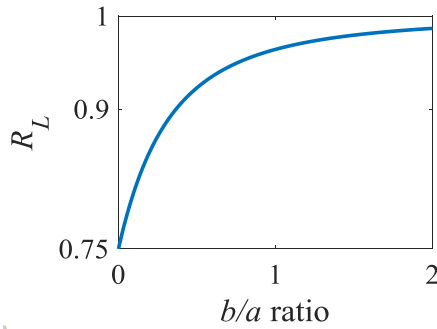


Figure III.3: Valeur du facteur  $\mathcal{R}_L$  en fonction de la distribution longitudinale des contraintes exprimée par  $b/a$ .  $b/a$  est positif pour le premier mode de résonance lorsque  $D_t \geq 0$ .

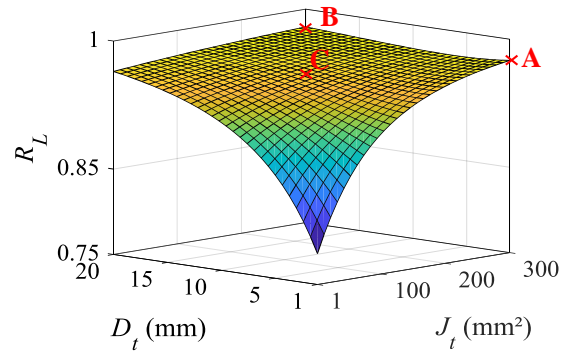


Figure III.4: Evolution du facteur  $\mathcal{R}_L$  en fonction de la distance  $D_t$  et du ratio d'inertie de la masse mobile  $J_t$  pour une longueur  $L_b$  de 20mm.

Nous proposons d'illustrer cela par plusieurs exemples de configurations de poutres ayant des masses mobiles rectangulaires. Lorsque la masse est rectangulaire,  $J_t$  et  $D_t$  sont exprimés par les expressions (III-19) et (III-20).  $H_m$  et  $L_m$  sont respectivement la hauteur et la longueur de la masse mobile alors que  $H_t$  est la distance du centre de gravité de la masse par rapport au prolongement de la fibre neutre comme représenté dans la Figure III.5.

$$D_t = \frac{L_m}{2} \quad (III-19)$$

$$J_t = \frac{L_m^2 + H_m^2}{12} + H_t^2 \quad (III-20)$$

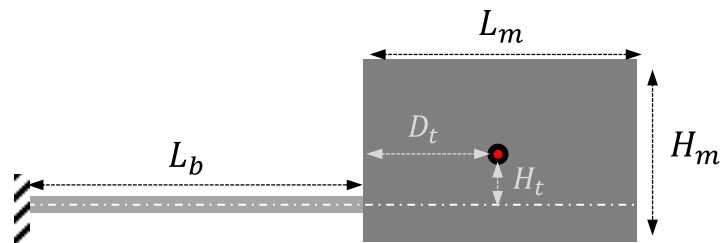


Figure III.5 : Paramètres géométriques de la masse mobile

On calcule la valeur de  $\mathcal{R}_L$  pour les configurations de masses mobiles représentées sur la Figure III.6. On calcule également la surface totale des récupérateurs  $\mathcal{S}$  en considérant l'encombrement de la poutre et de la masse mobile afin de représenter l'espace minimum

nécessaire à l'intégration de tels récupérateurs. L'expression de la surface  $\mathcal{S}$  est donnée en (III-21). On montre en Figure III.6.a. que la masse mobile, même de taille modérée, a une influence importante sur  $\mathcal{R}_L$  et donc sur le coefficient de couplage  $k_e^2$ .  $\mathcal{R}_L$  vaut 0,885 pour une masse mobile de  $10 \times 10 \text{ mm}^2$  alors qu'il vaut 0,75 pour une masse ponctuelle. Lorsque la masse mobile est symétrique par rapport à la fibre neutre ( $H_t = 0$ ), l'augmentation de sa longueur  $L_m$  a une influence plus importante sur  $\mathcal{R}_L$  que l'augmentation de sa hauteur  $H_m$  tout en permettant un encombrement plus restreint. Ceci est montré avec une masse de taille  $25 \times 10 \text{ mm}^2$  en Figure III.6.b. et Figure III.6.c. Lorsque la masse mobile est placée de manière horizontale,  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{S}$  valent respectivement 0,949 et  $4,5 \text{ cm}^3$  alors qu'ils valent respectivement 0,912 et  $7,5 \text{ cm}^3$  lorsque la masse est placée de manière verticale. Déporter la masse par rapport à la fibre neutre ( $|H_t| > 0$ ) permet une augmentation intéressante du coefficient de couplage uniquement si la hauteur de la masse  $H_m$  est importante comme montré en Figure III.6.d et Figure III.6.e. La configuration de la masse haute et déportée (Figure III.6.e) permet d'avoir un coefficient  $\mathcal{R}_L$  intéressant mais la surface nécessaire au dispositif total est considérable ( $7,5 \text{ cm}^2$ ) comparé à la configuration de longue masse mobile illustrée sur la Figure III.6.b. ( $4,5 \text{ cm}^2$ ). Dimensionner une masse mobile longue et peu haute (grande valeur de  $L_m$  et valeur modérée de  $H_m$ ) est alors une solution optimale car cette configuration permet d'augmenter conjointement  $J_t$  et  $D_t$  tout en gardant une surface totale raisonnable.

$$\mathcal{S} = (L_b + L_m)H_m \quad (\text{III-21})$$

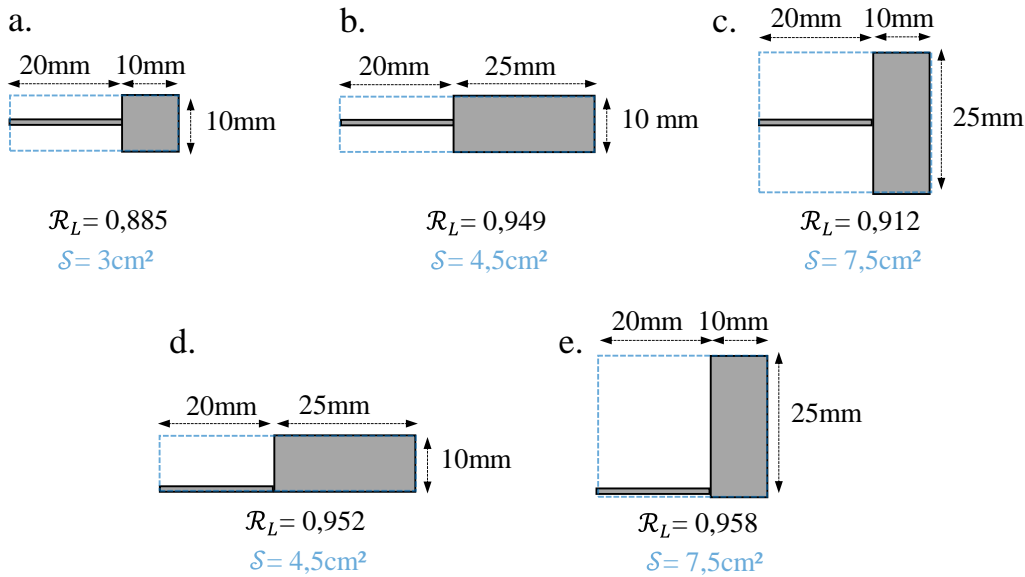


Figure III.6: Valeurs du facteur  $\mathcal{R}_L$  et de surface totale  $\mathcal{S}$  pour une même longueur de poutre et plusieurs configurations de masses mobiles rectangulaires

Pour conclure sur la maximisation du coefficient  $\mathcal{R}_L$ , la distribution longitudinale des déformations, exprimée par  $b/a$ , est suffisamment influencée par de masses mobiles de tailles modérées pour augmenter le coefficient de couplage alternatif  $k_e^2$ . Il n'est donc pas nécessaire de concevoir des poutres triangles sophistiquées afin de maximiser le coefficient de couplage. L'utilisation d'une longue masse permet d'homogénéiser facilement les contraintes et d'augmenter le coefficient de couplage.

## b. Discussions concernant la longueur des électrodes

L'expression du coefficient de couplage ainsi que l'étude concernant facteur  $\mathcal{R}_L$  ci-dessus ont été proposées pour des récupérateurs pour lesquels les patches piézoélectriques et leurs électrodes couvrent toute la poutre (sur la longueur  $x \in [0, L_b]$ ). Grâce à une extension du modèle 2DDL-PM1, on montre dans cette section que l'électrode doit couvrir tout le patch piézoélectrique lorsque les contraintes sont réparties de manière uniforme le long de la poutre.

On considère donc maintenant dans la modélisation que les électrodes ne recouvrent qu'une partie des patches. La longueur des électrodes  $L_e$  est inférieure à la longueur  $L_b$  des patches et les électrodes sont réparties sur une longueur  $x \in [0, L_e]$  comme représenté dans la Figure III.7. On estime que les électrodes sont suffisamment fines pour ne pas influencer le comportement mécanique des patches piézoélectriques et de la poutre.

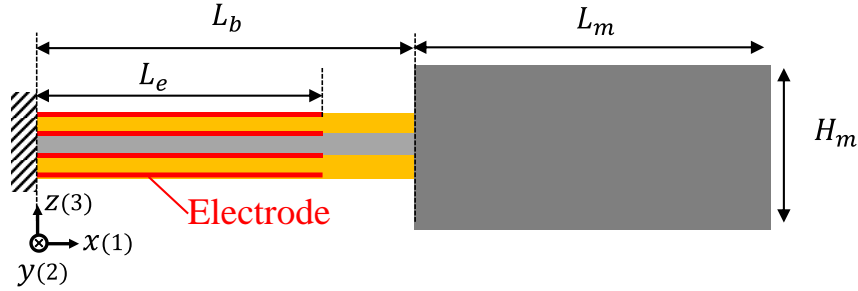


Figure III.7: Représentation d'une poutre dont la longueur des électrodes est plus courte que celle des patches piézoélectriques

On note  $R_e$  le rapport entre la longueur des électrodes et la longueur des patches exprimé par (III-22) que l'on appelle ratio de longueur des électrodes. Pour notre analyse,  $R_e$  est inférieur à 1.

$$R_e = \frac{L_e}{L_b} < 1 \quad (\text{III-22})$$

Avec cette nouvelle configuration, le terme de couplage  $\Theta_e$  et la capacité équivalente  $C_{pe}$  doivent être recalculés par rapport au cas où les électrodes couvrent toute la longueur des patches. Par hypothèse<sup>8</sup>, nous considérons que la raideur équivalente est la raideur équivalente en court-circuit  $K$  et que son expression est inchangée par rapport à la configuration avec les électrodes couvrant totalement les patches.  $\Theta_e$  et  $C_{pe}$  sont exprimés en (III-23) et (III-24). Il est notamment intéressant de remarquer que le terme de couplage  $\Theta_e$  dépend de la pente<sup>9</sup> en bout d'électrode  $\phi'(L_e)$ . Lorsque les électrodes couvrent toute la longueur des patches, le terme de couplage dépend de la pente en bout de poutre  $\phi'(L_b)$  tel qu'exprimé en (II-77).

$$\Theta_e = B e_{31}^{ef} (h_p + h_s) \phi'(L_e) = -B e_{31}^{ef} L_b R_e (h_p + h_s) \frac{2a + 2b - R_e a}{2} \quad (\text{III-23})$$

$$C_{pe} = \frac{2B L_e \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (\text{III-24})$$

<sup>8</sup> Comme les patches piézoélectriques sur la Figure III.7 ont des électrodes uniquement sur une partie de leur longueur, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  n'ont pas d'orientation privilégiée sur la longueur non-couverte d'électrode. La raideur de la poutre sur cette longueur ne correspond donc pas exactement à la raideur en court-circuit.

<sup>9</sup> On définit la pente du mode  $\phi(x)$  par sa dérivée spatiale par rapport à  $x$  :  $\phi'(x) = d\phi(x)/dx$

A partir des coefficients ci-dessus, on exprime le coefficient de couplage global alternatif pour des électrodes tronquées  $k_{el}^2$  en (III-25). On en déduit alors une nouvelle expression du facteur de longueur noté  $\mathcal{R}_{Le}$  et exprimé en (III-26).

$$k_{el}^2 = \frac{\Theta_e^2}{K C_{pe}} = k_{e31}^2 \mathcal{R}_T \mathcal{R}_{Le} \quad (\text{III-25})$$

$$\mathcal{R}_{Le} = \frac{R_e \left[ \frac{(2 - R_e)^2}{4} + (2 - R_e) \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right]}{\frac{1}{3} + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}} \quad (\text{III-26})$$

A partir de l'expression (III-26), on remarque que  $\mathcal{R}_{Le}$  dépend uniquement du ratio de longueur des électrodes  $R_e$  et de  $b/a$ . Il est par conséquent possible de déterminer la longueur optimale des électrodes pour chaque configuration de poutre. La Figure III.8 représente la valeur  $\mathcal{R}_{Le}$  en fonction du ratio de  $R_e$  et de  $b/a$ . On note alors que  $\mathcal{R}_{Le}$  est maximal lorsque les contraintes sont totalement homogènes ( $b/a$  tend vers l'infini) et lorsque les électrodes couvrent toute la longueur des patches piézoélectriques ( $R_e$  vaut 1).

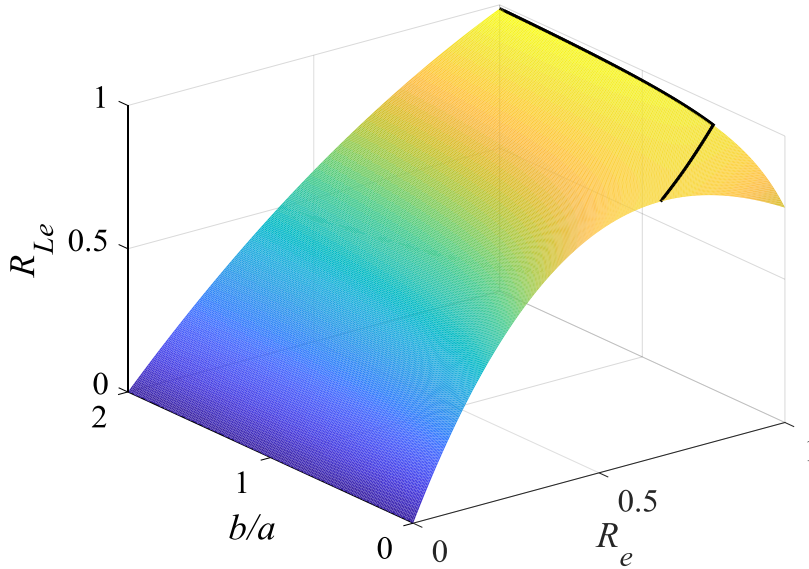


Figure III.8 : Valeur de  $\mathcal{R}_{Le}$  en fonction du ratio de longueur des électrodes  $R_e$  et de l'homogénéisation des contraintes  $b/a$  pour des patches piézoélectriques qui couvrent toute la poutre. Le trait noir représente la ligne donnant les valeurs maximales de  $\mathcal{R}_{Le}$ .

A partir de la Figure III.8, nous pouvons trouver la valeur de  $R_e$  optimale qui maximise  $\mathcal{R}_{Le}$  en fonction de la valeur de  $b/a$ . La Figure III.9 représente  $R_e^{opt}$ , la valeur optimale de  $R_e$ , en fonction de  $b/a$ . Grâce à cette figure, nous pouvons déterminer la longueur des électrodes qui maximise le coefficient de couplage global pour chaque configuration de récupérateurs dont les dimensions de la poutre et de la masse mobile sont connues. Comme  $k_{el}^2$  est inversement proportionnel à  $C_{pe}$  et est proportionnel au carré de  $\Theta_e$ , il existe un compromis entre l'augmentation de  $\Theta_e$  et de  $C_{pe}$ .  $C_{pe}$  est directement proportionnel à  $L_e$  comme exprimé en (III-24) et  $\Theta_e$  dépend de la pente du mode de vibration en bout d'électrode  $\phi'(L_e)$  comme

exprimé en (III-23). Lorsque les contraintes ne sont pas totalement homogènes selon la longueur de la poutre, augmenter la longueur d'électrode au-delà du ratio optimal  $R_e^{opt}$  augmente linéairement la capacité  $C_{pe}$  sans augmenter de manière significative le terme de tension  $\Theta_e$ . Ceci induit alors la diminution du coefficient  $k_{el}^2$ .

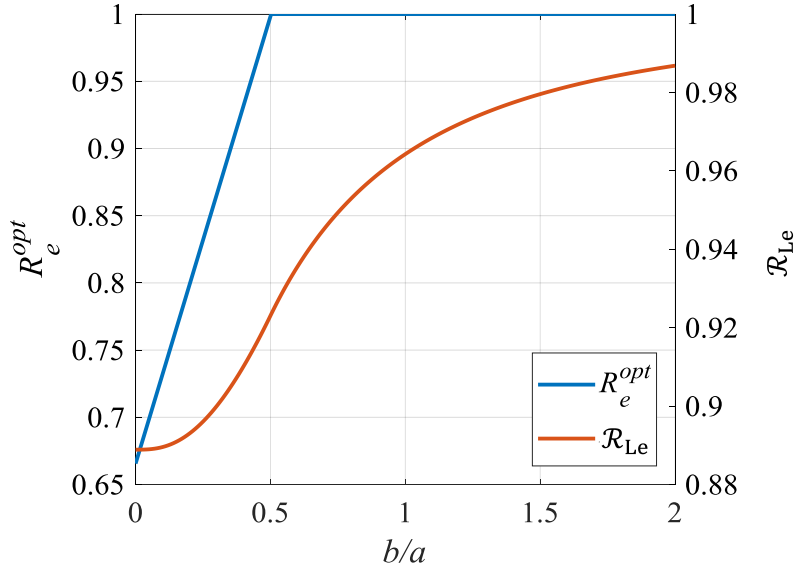


Figure III.9 : Valeur du ratio de longueur des électrodes  $R_e$  optimal ( $R_e^{opt}$ ) qui maximise  $\mathcal{R}_L$  en fonction de l'homogénéisation des contraintes  $b/a$  pour des patches piézoélectriques qui couvrent toute la poutre

On note à partir de la Figure III.9 que lorsque  $b/a$  vaut 0,  $R_e^{opt}$  vaut 0,67. Autrement dit, lorsque la masse mobile est ponctuelle, les électrodes doivent couvrir deux tiers de la surface des patches piézoélectriques pour maximiser le coefficient de couplage. Dans cette configuration,  $\mathcal{R}_{Le}$  vaut 0,89. Puis,  $R_e^{opt}$  augmente linéairement avec la valeur de  $b/a$  jusqu'à la valeur 1 atteinte pour  $b/a$  égal à 0,5. Les électrodes doivent couvrir la totalité de la surface des patches piézoélectriques pour des valeurs de  $b/a$  supérieures à 0,5. Par ailleurs, on montre à partir de l'expression de  $b/a$  en (III-17) que  $b/a$  est supérieur à 0,5 pour des récupérateurs ayant une masse rectangulaire dont la longueur est supérieure à la longueur de la poutre ( $2D_t = L_m > L_b$ ). Ainsi, lorsque qu'une masse longue est utilisée, il est préférable de disposer des électrodes sur toute la longueur des patches piézoélectriques. De plus, si la longueur des électrodes est prise à sa valeur optimale, on remarque sur la Figure III.9 que  $\mathcal{R}_{Le}$  augmente lorsque  $b/a$  augmente.

### c. Discussion concernant la longueur des patches piézoélectriques

L'optimisation de poutres piézoélectriques est différente pour des systèmes dont les patches ont une longueur différente de celle de la poutre. Modifier la longueur des patches, influence non seulement la capacité équivalente  $C_p$  et le terme de couplage équivalent  $\Theta$  mais également la raideur équivalente  $K$ . La Figure III.10 représente une poutre dont les patches piézoélectriques ont une longueur  $L_p$  différente de la longueur de la poutre  $L_b$ . Ducarne *et al.* [163] ont montré par un modèle semi-analytique que, pour maximiser le coefficient de couplage du premier mode d'une poutre sans masse, la longueur des patches doit être inférieure à la longueur de la poutre.

La longueur optimale de matériau piézoélectrique dépend du matériau du substrat et du matériau piézoélectrique utilisés ainsi que de leurs épaisseurs. Les travaux de Ducarne *et al.* se sont concentrés sur des configurations dont la surface des patchs piézoélectriques est entièrement recouverte d'électrode ( $L_e = L_p$ ). Réduire la taille des patchs par rapport à la taille de la poutre permet de réduire la capacité et la raideur équivalentes afin d'augmenter le coefficient de couplage. Cependant, réduire la longueur des patchs réduit également le terme de couplage.

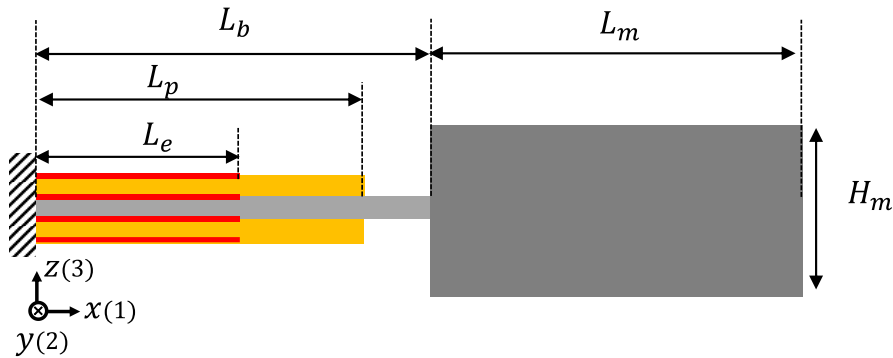


Figure III.10: Représentation d'une poutre dont la longueur des patchs  $L_p$  est inférieure à la longueur de la poutre  $L_b$

Lorsqu'une masse mobile est placée en bout de poutre, la distribution longitudinale des contraintes dans la poutre est affectée et l'optimisation de  $L_p$  est différente. On pourrait calculer la longueur optimale des patchs en fonction de la distribution longitudinale des contraintes ainsi que du ratio des épaisseurs de matériau piézoélectrique et de substrat grâce à un modèle supplémentaire plus complexe. Or, on peut déduire aisément, tel que détaillé ci-dessous, qu'il est préférable de placer les patchs piézoélectriques sur toute la longueur de la poutre lorsqu'une masse mobile volumineuse est utilisée car celle-ci homogénéise le moment fléchissant  $M_y$  le long de la poutre<sup>10</sup>.

Lorsque les patchs sont très fins et peu rigides par rapport au substrat, la longueur des patchs influe très peu sur la raideur équivalente et a uniquement une influence sur la capacité équivalente et le terme de couplage équivalent. L'optimisation de la longueur des patchs revient à la même problématique que l'optimisation de la longueur des électrodes évoquée précédemment : les patchs et les électrodes doivent être sur toute la longueur de la poutre lorsque le moment de flexion est homogène. Cependant, comme il sera discuté dans la partie suivante (III.1.3), l'utilisation de patchs très fins et peu rigides par rapport au substrat conduit à une faible valeur de  $\mathcal{R}_T$  et à un faible coefficient de couplage global.

Si les patchs ont une épaisseur et une raideur au moins équivalentes à celles du substrat et s'ils ne recouvrent pas toute la longueur de la poutre ( $L_p < L_b$ ), la longueur sans matériau piézoélectrique ( $x \in [L_p, L_b]$ ) sera plus souple que la partie comportant du matériau

<sup>10</sup> Le moment fléchissant correspond à l'intégrale des contraintes sur l'épaisseur de la poutre ( $M_y(x) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} T_1 dz = YI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ). Si les patchs piézoélectriques ne sont présents que sur une partie de la poutre, la raideur à la flexion est variable sur la longueur de la poutre ( $YI = YI(x)$ ). Malgré tout, une masse mobile volumineuse conditionne la répartition du moment de flexion par la force  $F$  et le couple  $C$  qu'elle induit en bout de poutre avec la relation :  $M_y(x) = F(L_b - x) + C$ .



piézoélectrique ( $x \in [0, L_p]$ ). Si le moment de flexion est constant le long de la poutre dans cette configuration alors de grandes déformations interviendront sur la longueur ne comportant pas de matériau piézoélectrique comparé au cas où les patches recouvrent toute la poutre. Une grande partie de l'énergie potentielle du récupérateur sera alors stockée sous forme élastique dans le substrat au lieu de conduire à la déformation du matériau piézoélectrique. Le coefficient de couplage sera alors réduit par rapport au cas où le matériau piézoélectrique est disposé sur toute la poutre.

Nous illustrons cette discussion avec un exemple : on considère deux récupérateurs composés de patches piézoélectriques en PMN-PT X2B de l'entreprise TRS, d'un substrat en acier et d'une masse mobile en acier ( $L_b = 30\text{mm}$ ,  $h_p = h_s = 0,5\text{mm}$ ,  $L_m = H_m = 10\text{mm}$ ). Les patches de l'un des récupérateurs recouvrent la totalité de la poutre ( $L_p = L_b = 30\text{mm}$ ) alors que ceux de l'autre récupérateur ne recouvrent que  $2/3$  de la poutre ( $L_p = 20\text{mm}$ ). Pour les deux configurations, les électrodes couvrent la totalité des patches piézoélectriques ( $L_e = L_p$ ). A partir de simulations par éléments finis à 2 dimensions (sur le logiciel Comsol) réalisées avec l'hypothèse de contrainte plane, on montre que le coefficient de couplage subit une diminution relative de 17% lorsque la longueur des patches est réduite d'un tiers (de  $k^2 = 12,6\%$  à  $k^2 = 10,5\%$ ). La Figure III.11 représente les contraintes longitudinales  $T_1$  dans le substrat pour les deux configurations lorsque le déplacement en bout de poutre est de  $100\ \mu\text{m}$ . Lorsque le matériau piézoélectrique ne couvre pas toute la poutre, de fortes contraintes apparaissent dans le substrat sur la distance  $[L_p, L_b]$ , ce qui réduit le coefficient de couplage. Comme le récupérateur pour lequel le patch couvre toute la poutre possède la même raideur à la flexion  $YI$  tout au long de la poutre, sa distribution longitudinale des contraintes sur la Figure III.11 représente la distribution longitudinale du moment de flexion des deux récupérateurs. Ainsi, on remarque que même si le moment de flexion n'est pas totalement uniforme le long de la poutre, la réduction de la longueur des patches piézoélectriques a un fort impact négatif sur le coefficient de couplage global.

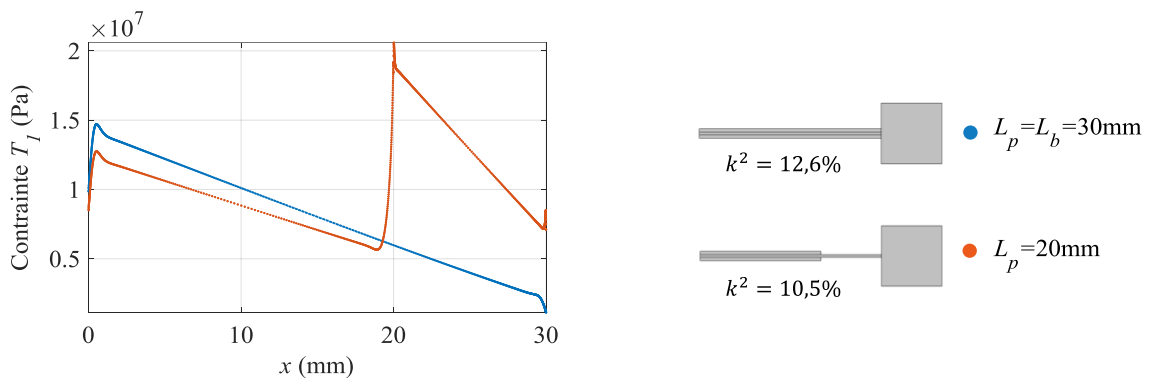


Figure III.11: Valeurs des contraintes longitudinales dans le substrat des deux récupérateurs obtenues à partir de simulation FEM à la coordonnée  $z = 9h_s/10$  et pour un déplacement en bout de poutre de  $100\ \mu\text{m}$

En synthèse de ces discussions, il apparaît idéal de concevoir des récupérateurs dont la masse mobile est longue et dont les patches et les électrodes couvrent toute la longueur de la poutre pour optimiser la répartition longitudinale des contraintes et maximiser le coefficient de couplage global.

### III.1.3. Optimisation de la répartition transversale des contraintes

Dans cette section, l'analyse de  $\mathcal{R}_T$  exprimé en (III-16) nous permet d'étudier l'optimisation de la répartition transversale des contraintes dans la poutre pour maximiser le coefficient de couplage. La Figure III.12 montre l'évolution de  $\mathcal{R}_T$  en fonction du ratio des épaisseurs  $h_p/h_s$  (l'épaisseur de matériau piézoélectrique  $h_p$  divisée par l'épaisseur de substrat  $h_s$ ) pour des couples de matériaux PZT NCE51 et acier ainsi que PMN-PT X2B et acier. Pour chaque couple de matériaux de substrat et de matériau piézoélectrique, il existe un ratio d'épaisseurs  $(h_p/h_s)^{opt}$  pour lequel  $\mathcal{R}_T$  est maximal. Ce ratio optimal peut être exprimé analytiquement et est donné par l'équation (III-27). Il dépend uniquement d'un ratio de raideurs équivalentes  $\kappa$  défini en (III-28).

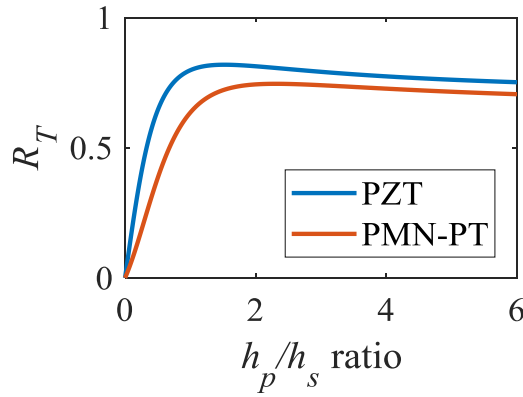


Figure III.12:  $\mathcal{R}_T$  en fonction du ratio d'épaisseur pour des patches en PZT ou PMN-PT et un substrat en acier ( $Y_s = 200$  GPa). L'hypothèse de contrainte plane est considérée.

$$\left(\frac{h_p}{h_s}\right)^{opt} = \begin{cases} \frac{1}{2}\kappa^{\frac{1}{3}} \left[ (1 - \sqrt{1 - \kappa})^{\frac{1}{3}} + (1 + \sqrt{1 - \kappa})^{\frac{1}{3}} \right] & \text{pour } \kappa \leq 1 \\ \sqrt{\kappa} \cos\left(\frac{\arctan \sqrt{\kappa - 1}}{3}\right) & \text{pour } \kappa > 1 \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

$$\kappa = \frac{Y_s^{ef}}{c_{11}^{ef} k_{e_{31}}^2 + 1} \quad (\text{III-28})$$

Comme les contraintes augmentent linéairement avec la distance à la fibre neutre (hypothèse d'Euler-Bernoulli représentée dans la Figure III.1), on pourrait penser que la configuration avec de fins patches piézoélectriques situés loin de l'axe neutre (c'est-à-dire avec un faible ratio  $h_p/h_s$ ) est la meilleure. Néanmoins, cette configuration implique que l'énergie élastique soit davantage stockée, à chaque période, dans le substrat plutôt que dans le matériau piézoélectrique. Ainsi, le rapport optimal  $(h_p/h_s)^{opt}$  est un compromis entre la maximisation de l'énergie élastique dans le matériau piézoélectrique et l'homogénéisation de la distribution des contraintes. Par ailleurs, il est intéressant de noter que  $\kappa$  ne dépend pas uniquement de la rigidité du matériau piézoélectrique  $c_{11}^{ef}$ , mais aussi du coefficient de couplage alternatif du matériau  $k_{e_{31}}^2$ . La présence de  $k_{e_{31}}^2$  dans l'expression de  $\kappa$  vient de la considération de la variation du champ électrique selon l'épaisseur des patches piézoélectriques. Cette considération

est une amélioration significative par rapport aux travaux antérieurs sur l'optimisation du coefficient de couplage global [163], [64] puisque des matériaux fortement couplés (comme du PZN-PT ou du PZT) sont utilisés pour améliorer le coefficient de couplage global du récupérateur. L'influence de la variation du champ électrique est en effet plus importante lorsque les matériaux sont fortement couplés.

En utilisant (III-27) et (III-28), la valeur maximale de  $\mathcal{R}_T$ , notée  $\mathcal{R}_T^{max}$ , peut être déterminée pour des couples de matériaux (piézoélectrique et substrat) analytiquement. On déduit ainsi que la valeur de  $\mathcal{R}_T^{max}$  est uniquement limitée par  $\kappa$  et  $k_{e31}^2$ . À titre d'exemple, pour les matériaux PMN-PT X2B et PZT NCE51 associés à un substrat en acier, les ratios d'épaisseurs optimaux  $(h_p/h_s)^{opt}$  sont respectivement 2,3 et 1,5 pour l'hypothèse de contrainte plane. Les valeurs maximales de  $\mathcal{R}_T$  sont respectivement 0,74 et 0,82. En comparaison, la valeur maximale de  $\mathcal{R}_T$  ainsi que les épaisseurs optimales sont différentes dans la configuration de déformation plane :  $\mathcal{R}_T = 0,65$  et  $0,81$  à  $(h_p/h_s)^{opt} = 1,6$  et  $1,4$  respectivement pour les matériaux X2B et NCE51.

La Figure III.13 représente  $\mathcal{R}_T^{max}$ , la valeur maximale de  $\mathcal{R}_T$  atteignable, en fonction du ratio  $\kappa$  pour trois valeurs de coefficient de couplage matériau  $k_{31}^2$  (15%, 25% et 81%). La valeur de  $\mathcal{R}_T^{max}$  est tout simplement déterminée en remplaçant  $(h_p/h_s)^{opt}$  exprimé par l'équation (III-27) dans l'expression de  $\mathcal{R}_T$  donnée en (III-16). Comme  $k_{31}^2$  est fixé pour chaque courbe, la Figure III.13 revient à analyser l'effet du ratio des rigidités des matériaux ( $c_{11}^{ef}$  et  $Y_s^{ef}$ ) sur  $\mathcal{R}_T^{max}$ . A partir de cette figure, nous remarquons que, plus le matériau a un fort coefficient de couplage, plus la valeur du ratio  $\kappa$  a un impact sur la valeur  $\mathcal{R}_T^{max}$  et, par extension, sur le coefficient de couplage global atteignable. L'optimisation de  $\kappa$  par le choix des matériaux revêt donc un aspect primordial dans l'optimisation de poutres piézoélectriques.

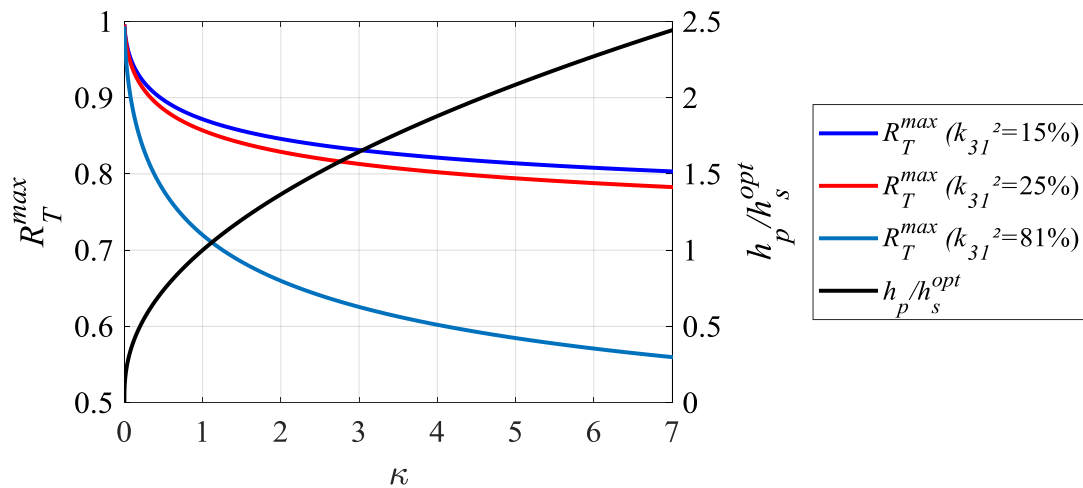


Figure III.13 : Valeur analytique de  $\mathcal{R}_T^{max}$  et de  $(\frac{h_p}{h_s})^{opt}$  en fonction de  $\kappa$  pour 3 valeurs de coefficient de couplage matériau

Le Tableau III.1 contient la valeur de  $\kappa$ , la valeur de  $\mathcal{R}_T^{max}$  et la valeur maximale atteignable pour le coefficient de couplage  $k_{max}^2$  pour des associations de matériaux piézoélectriques (PZT, PMN-PT et PZN-PT) et de substrats (acier, aluminium et composite FR4). Le matériau FR4 est un composite de résine époxyde et fibre de verre qui est utilisé pour la fabrication de circuits imprimés et notamment pour la fabrication de poutres piézoélectriques *bimorph* par l'entreprise Mide [164]. Le coefficient de couplage maximal atteignable  $k_{max}^2$  est calculé en considérant la

distribution longitudinale des contraintes comme totalement uniforme ( $\mathcal{R}_L = 1$ ). Par ces calculs, on détermine la valeur maximale de coefficient de couplage global atteignable avec une combinaison de matériau piézoélectrique et de substrat lorsque la poutre est considérée en contrainte plane. Le facteur d'amortissement  $\eta$  est également donné dans le Tableau III.1 pour les trois substrats. Ce facteur permet de quantifier le rapport de l'énergie perdue par l'énergie stockée de manière élastique à chaque cycle par le matériau [165]. Il nous donne une indication sur les pertes que comportera le récupérateur global si le matériau est utilisé comme substrat.

Tableau III.1: Valeurs de  $\kappa$  et  $\mathcal{R}_T^{max}$  pour plusieurs couples matériaux piézoélectriques et substrats. Les valeurs sont données pour l'hypothèse de contrainte plane et les valeurs d'amortissement sont données par [165], [166].

		PZT NCE51	PMN-PT TRS X2B	PZN-5.5PT [011] Microfine
	$k_{31}^2$	15,1%	19,6%	81,0%
	$c_{11}^{ef}$	59GPa	19GPa	5,8GPa
	$c_{11}^{ef}(k_{e31}^2 + 1)$	69GPa	24GPa	30,2GPa
<b>Acier</b>	$\kappa$	2,9	8,4	6,4
$Y_s^{ef}=200$ GPa	$\mathcal{R}_T^{max}$	0,83	0,78	0,48
$\eta = 2 \times 10^{-4}$ à $5 \times 10^{-3}$	$k_{max}^2$	12,8%	16,1%	67,2%
<b>Aluminium</b>	$\kappa$	0,99	2,9	2,2
$Y_s^{ef}=69$ GPa	$\mathcal{R}_T^{max}$	0,87	0,82	0,54
$\eta = 10^{-4}$ à $5 \times 10^{-3}$	$k_{max}^2$	13,3%	16,7%	69,9%
<b>Composite FR4</b>	$\kappa$	0,38	1,1	0,89
$Y_s^{ef}=26$ GPa	$\mathcal{R}_T^{max}$	0,90	0,86	0,61
$\eta = 10^{-2}$ à $2 \times 10^{-3}$	$k_{max}^2$	13,8%	17,4%	72,5%

On déduit du Tableau III.1 que le matériau utilisé en tant que substrat a une influence non-négligeable sur le coefficient de couplage maximal. A titre d'exemple, le coefficient de couplage d'une poutre comportant du PZN-PT et de l'acier ne peut pas dépasser 67% alors que le couplage matériau  $k_{31}^2$  du PZN-PT est de 81%. Le ratio  $\kappa$  et le coefficient de couplage matériau alternatif  $k_{e31}^2$  ont un impact important sur la valeur de  $\mathcal{R}_T^{max}$ .  $\mathcal{R}_T^{max}$  est égal 0,48 pour du PZN-PT et de l'acier alors qu'il est égal à 0,61 pour du PZN-PT et du FR4. Des matériaux souples, tels que l'époxy ou le matériau composite FR4, pourraient être privilégiés pour la fabrication de récupérateurs piézoélectriques. Cependant, ces matériaux comportent de grands facteurs d'amortissement et la puissance récupérée par un récupérateur est inversement proportionnelle à son coefficient d'amortissement global. Ainsi, utiliser de tels matériaux comme substrat peut conduire à des récupérateurs ayant de faibles densités de puissance comparés à des structures utilisant de l'aluminium ou de l'acier.

Par ailleurs, une seconde lecture du Tableau III.1 peut nous faire remarquer qu'il est plus difficile d'atteindre une très grande valeur de  $\mathcal{R}_T$  avec un matériau souple et fortement couplé qu'avec un matériau rigide et modérément couplé. Les valeurs relevées de  $\mathcal{R}_T^{max}$  sont inférieures à 0,61 pour le PZN-PT alors qu'elles sont supérieures à 0,83 pour le PZT. De plus, bien que  $\kappa$  soit plus grand pour le couple PMN-PT/acier que pour le couple PZN-PT/acier,  $\mathcal{R}_T^{max}$  est plus faible pour le couple PZN-PT/acier car le coefficient de couplage du PZN-PT de l'entreprise Microfine est très grand comparé à celui du PMN-PT X2B. Ainsi, il est plus complexe de concevoir un récupérateur très fortement couplé avec du matériau piézoélectrique

souple très fortement couplé qu'un récupérateur modérément couplé avec du matériau piézoélectrique rigide modérément couplé.

En conclusion, les choix du substrat et du ratio d'épaisseur doivent être convenablement réalisés pour maximiser  $\mathcal{R}_T$  et  $k_e^2$ . La valeur de  $\mathcal{R}_T$  est fortement influencée par le matériau du substrat et par le ratio d'épaisseur  $h_p/h_s$ . De mauvais choix de conception peuvent induire de faible valeur de  $\mathcal{R}_T$  et peuvent être limitant pour la maximisation du coefficient de couplage global. La considération de la variation du champ électrique selon l'épaisseur des matériaux très fortement couplés est de plus primordiale. Pour finir, un compromis doit être trouvé pour maximiser le coefficient de couplage tout en ayant un bon facteur de qualité mécanique.

### III.1.4. Augmentation du couplage matériau

En complément de l'optimisation des facteurs  $\mathcal{R}_T$  et  $\mathcal{R}_L$ , le coefficient de couplage global alternatif  $k_e^2$  peut être augmenté en maximisant le coefficient de couplage matériau alternatif  $k_{e31}^2$  des matériaux piézoélectriques (cf. équation (III-14)). Cela peut être fait par l'utilisation de matériaux fortement couplés et par l'optimisation du ratio largeur/longueur ( $B/L_b$ ) de la poutre. En effet, le coefficient de couplage électromécanique des matériaux piézoélectriques est considérablement influencé par les hypothèses de contrainte plane et de déformation plane (équations (III-29), (III-30) et Tableau III.2).  $k_{31}^{l\ 2}$  est le coefficient de couplage matériau correspondant à l'hypothèse de contrainte plane et  $k_{31}^{w\ 2}$  est le coefficient de couplage matériau correspondant à l'hypothèse de déformation plane. Certains matériaux, tels que les céramiques PZT et les monocristaux de PMN-PT et de PZN-PT polarisés selon l'axe [001], présentent un coefficient de couplage en mode 31 plus élevé dans la configuration de déformation plane, tandis que d'autres, comme le PMN-PT et le PZN-PT polarisés selon l'axe [011], présentent un coefficient de couplage plus élevé dans la configuration de contrainte plane. Nous devons donc concevoir des poutres larges pour la première catégorie et des poutres étroites pour la seconde si nous souhaitons maximiser le coefficient de couplage global. Ces propensions dépendent des classes de cristaux, des directions de polarisation et des orientations de coupe.

$$k_{31}^{l\ 2} = \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T s_{11}^E} \quad (\text{III-29}) \quad k_{31}^{w\ 2} = \frac{\left(d_{31} - \frac{s_{12}^E}{s_{22}^E} d_{32}\right)^2}{\left(\varepsilon_{33}^T - \frac{d_{32}^2}{s_{22}^E}\right) \left(s_{11}^E - \frac{s_{12}^E}{s_{22}^E}\right)} \quad (\text{III-30})$$

Tableau III.2: Propriétés des matériaux piézoélectriques selon les différentes hypothèses d'élasticité plane

	Contrainte plane		Déformation plane	
	$k_{31}^{l\ 2}$	$k_{e31}^{l\ 2}$	$k_{31}^{w\ 2}$	$k_{e31}^{w\ 2}$
TRS X2B [001] PMN-29PT [106]	19,6%	0,244	68,1%	2,13
Noliac NCE51 PZT-5A [105]	15,1%	0,178	34,3%	0,522
Microfine* [93] PZN-PT 5.5% [011]	81,0%	4,26	60,0%	1,50

\* $k_{32}^{l\ 2}$  et  $k_{32}^{w\ 2}$  sont données pour le PZN-PT [011]

En raison de leur symétrie, les céramiques PZT présentent des coefficients de couplage plus élevés pour les poutres larges que pour les poutres étroites. En effet, les céramiques PZT appartiennent à la classe de cristaux  $\infty m$  [167, p. 12]. Pour cette configuration, le coefficient de couplage considéré en déformation plane  $k_{31}^{w2}$  peut être exprimé par l'équation (III-31) en fonction du coefficient du couplage considéré en contrainte plane  $k_{31}^{l2}$ .  $\nu_p$  est un coefficient équivalent au coefficient de Poisson donné en (III-32).

$$k_{31}^{w2} = \frac{k_{31}^{l2} (1 + \nu_p)^2}{1 - k_{31}^{l2} \nu_p^2} \quad (\text{III-31}) \quad \nu_p = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E} \quad (\text{III-32})$$

Comme  $\nu_p$  est toujours positif et inférieur à 1 pour les céramiques, l'équation (III-31) montre que  $k_{31}^{w2}$  est toujours supérieur à  $k_{31}^{l2}$  pour les céramiques. L'équation (III-31) est également vraie pour les matériaux de la classe  $4mm$  et  $6mm$  lorsque les axes 1 et 3 du matériau piézoélectrique correspondent respectivement aux axes  $O_x$  et  $O_z$  du récupérateur.

La conception de poutres larges peut cependant être problématique si des dispositifs ayant des petits volumes et de faibles fréquences de résonance sont nécessaires. En effet, le rapport  $B/L_b$  recherché est souvent supérieur à 5 afin de satisfaire l'hypothèse de déformation plane [6]. Par ailleurs, la longueur de la poutre  $L_b$  est souvent maximisée pour réduire la fréquence de résonance. Ainsi, en suivant ces principes de conception, un récupérateur correspondant à l'état de déformation plane et ayant une faible fréquence de résonance nécessiterait d'avoir une grande longueur  $L_b$  et une très grande largeur  $B$ . Il faut donc trouver un compromis pour le rapport largeur/longueur de la poutre lors des dimensionnements.

## III.2. Optimisation par simulations par éléments finis

L'écart important entre les coefficients  $k_{31}^{l2}$  et  $k_{31}^{w2}$  pour un matériau piézoélectrique entraîne de grandes différences en matière de coefficient de couplage global du récupérateur entre l'état de contrainte plane et l'état de déformation plane. Ainsi la largeur et l'épaisseur de la poutre ont une influence importante sur le coefficient de couplage global des récupérateurs. Dans cette partie, on propose d'analyser ces influences grâce à des simulations en 3 dimensions (3D) à partir du logiciel de simulations par éléments finis (FEM) Comsol.

Notre analyse se concentre sur les trois configurations de récupérateurs qui ont été dimensionnés dans cette thèse et dont la conception est détaillée dans le chapitre IV. Une configuration utilise du matériau PMN-PT X2B de l'entreprise TRS et deux configurations utilisent du PZT NCE51 de l'entreprise Noliac. Les dimensions de chaque configuration sont données dans le Tableau III.3. La configuration PMN-PT N correspond à un récupérateur étroit (proche de l'hypothèse de contrainte plane) utilisant un monocristal de PMN-PT. Les configurations PZT N et PZT W correspondent respectivement à la version étroite (proche de l'hypothèse de contrainte plane) et à la version large (hypothèse de déformation plane) d'une configuration de récupérateur utilisant une céramique de PZT A.

Tableau III.3 : Configuration des poutres considérées pour l'analyse par simulations par éléments finis. « N » et « W » à la fin des noms des récupérateurs correspondent respectivement à étroit et large pour *Narrow* et *Wide*.

	PMN-PT N	PZT N	PZT W
Matériau	PMN-29PT [001] TRS X2B		PZT-5A NCE51
Longueur de la poutre $L_b$	45mm		15 mm
Longueur de la masse $L_m$	45mm		60 mm
Hauteur de la masse $H_m$	5mm		10 mm
Épaisseur du substrat $h_s$	0.5mm		0.4mm
Épaisseur des patchs $h_p$	0.5mm		0.3 mm
Largeur de la poutre et de la masse mobile $B$	10mm	5mm	25mm

### III.2.1. Influence de la largeur de la poutre et largeur optimale

Nous proposons tout d'abord d'analyser l'influence de la largeur de la poutre pour les configurations de poutres du Tableau III.3. Nous calculons les fréquences de résonance en court-circuit du premier mode et les coefficients de couplage associés grâce au modèle 2DDL-PM1 en considérant l'hypothèse de contrainte plane d'une part et l'hypothèse de déformation plane d'autre part. Nous déterminons aussi les fréquences de résonance et les coefficients de couplage par des simulations par éléments finis (analyse modale) en faisant varier la largeur  $B$  des récupérateurs. Dans le cas des simulations par éléments finis, les coefficients  $k^2$  sont obtenus en calculant  $(f_{sc}^2 - f_{oc}^2)/f_{oc}^2$  où  $f_{sc}$  et  $f_{oc}$  sont respectivement les fréquences de résonance déterminées en court-circuit et en circuit ouvert. Les fréquences de résonance et coefficients de couplage sont respectivement donnés en fonction du rapport largeur/longueur dans la Figure III.15 et la Figure III.14.

On peut voir que, pour les petits et grands rapports largeur/longueur (c'est-à-dire  $B/L_b$  respectivement égal à 0,1 et 10),  $k^2$  est déterminé avec précision par le modèle respectivement avec l'hypothèse de contrainte plane et l'hypothèse de déformation plane pour les poutres en PZT. Une différence est cependant notable pour la poutre utilisant du PMN-PT. Il semble que cette différence est due aux interactions latérales dans la poutre, associée à un fort coefficient de couplage du matériau. Alors que le coefficient de couplage est multiplié par 2,4 entre l'hypothèse de contrainte plane et l'hypothèse de déformation plane pour le PZT ( $k^2$  de 11,8% à 27,9%), il est multiplié par 4,3 pour le PMN-PT (de 12,9% à 55,0%). Les fréquences de résonance, quant à elles, sont multipliées par moins de 1,18 entre les deux hypothèses pour les deux configurations de récupérateur (Figure III.15). La valeur de la fréquence de résonance déduite par le modèle est précise pour des configurations étroites et larges de poutre.

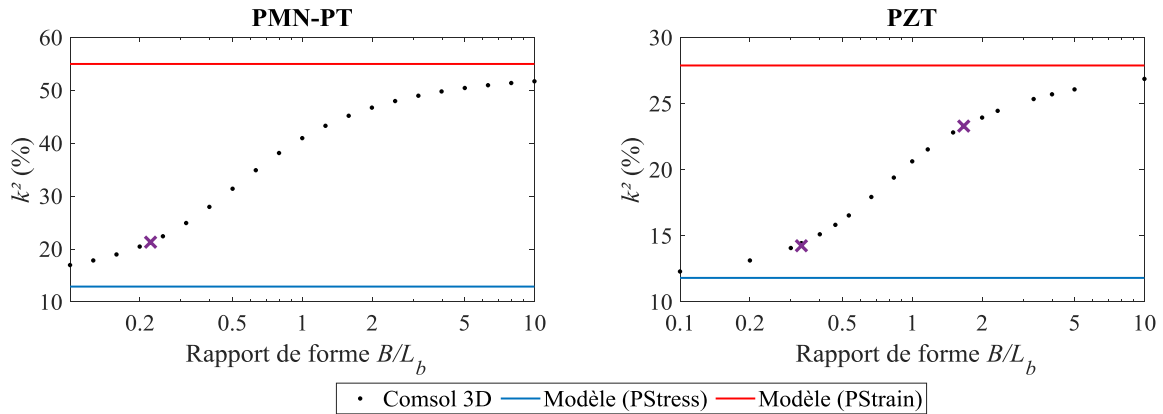


Figure III.14: Coefficient de couplage  $k^2$  simulé en 3D en fonction du rapport largeur/longueur de la poutre PMN-PT et PZT. Les valeurs du modèle sont obtenues grâce au modèle 2DDL-PM1. Les croix correspondent aux largeurs dont les contraintes et les déformations sont analysées dans cette section.

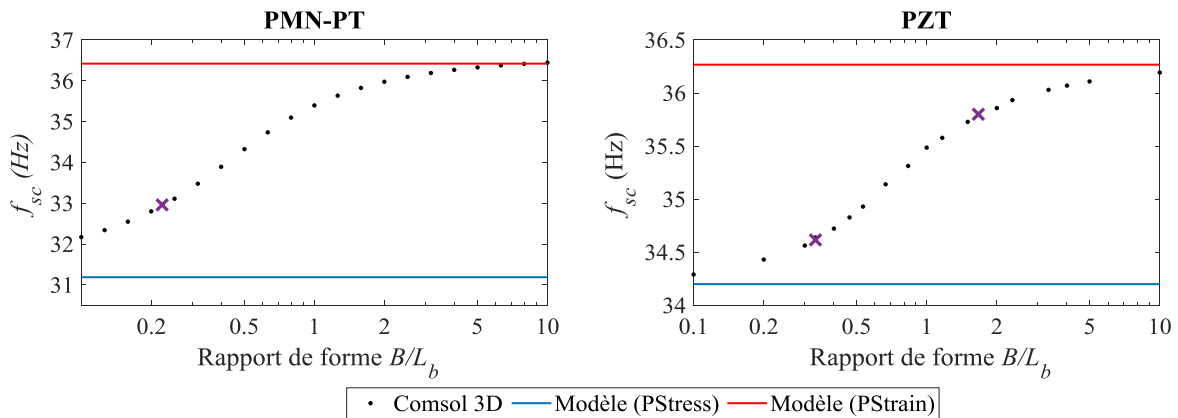


Figure III.15: Fréquences de résonance en court-circuit simulées en 3D en fonction du rapport largeur/longueur de la poutre PMN-PT et PZT. Les valeurs du modèle sont obtenues grâce au modèle 2DDL-PM1. Les croix correspondent aux largeurs dont les contraintes et les déformations sont analysées dans cette section.

Afin d'analyser les différences entre les simulations et le modèle, nous étudions la répartition des contraintes et la répartition des déformations obtenues par des analyses modales sur Comsol et représentées sur la Figure III.16 et la Figure III.17 pour plusieurs configurations de largeur. La largeur  $B$  des poutres est égale à 5 mm et 10 mm respectivement pour les configurations PZT N et PMN-PT N, et elle est égale à 25 mm pour la configuration PZT W. La Figure III.16 et la Figure III.17 représentent également la répartition des contraintes et la répartition des déformations déduites du modèle à 2DDL pour les deux hypothèses d'élasticité plane. Les déformations sont les mêmes avec l'hypothèse de contrainte plane et avec l'hypothèse de déformation plane pour un même déplacement en bout de poutre.

Le modèle détermine donc avec précision la déformation et la contrainte par rapport aux simulations par éléments finis même si on remarque une légère différence entre la modélisation de la contrainte plane et les résultats en 3D pour la configuration PMN-PT N. Comme les déformations sont correctement déterminées pour la configuration PMN-PT N, les hypothèses sur les déformations latérales (contrainte plane ou déformation plane) n'induisent pas d'approximation sur la répartition des déformations mais plutôt sur les coefficients matériaux



équivalents (rigidité, permittivité et coefficient piézoélectrique équivalents). On peut donc en conclure que les paramètres équivalents des matériaux piézoélectriques sont fortement influencés par la largeur de la poutre.

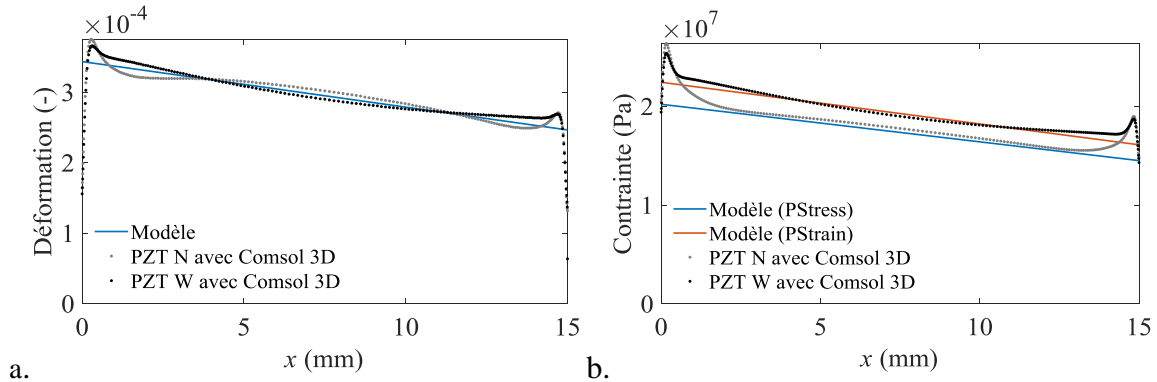


Figure III.16: a. Répartition des déformations et b. répartition des contraintes au centre du patch supérieur de PZT pour un déplacement en bout de poutre (en  $x = L_b$ ) égal à 0,1mm. PStress: Contrainte plane, PStrain: Déformation plane.

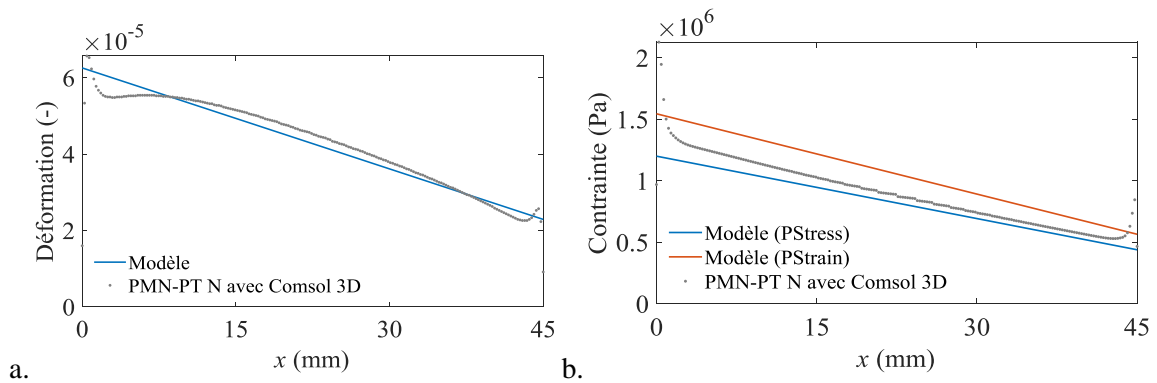


Figure III.17: a. Répartition des déformations et b. répartition des contraintes au centre du patch supérieur de PMN-PT pour un déplacement en bout de poutre (en  $x = L_b$ ) égal à 0,1mm.

Pour finir, on remarque à partir de la Figure III.14 qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un grand rapport de forme  $B/L_b$  pour se rapprocher du couplage considéré en déformation plane. A titre d'exemple, une poutre de PZT W ayant un rapport  $B/L_b$  de 1,67 atteint un coefficient couplage de 23% par des simulations aux éléments alors que le coefficient de couplage calculé en contrainte plane est de 11,8%. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir des poutres très larges pour bénéficier d'une amélioration du coefficient de couplage grâce à l'effet de la largeur. L'utilisation de logiciels de simulations par éléments finis en 3 dimensions permet donc d'avoir une information sur le comportement en fonction de la largeur et permet de dimensionner la largeur des récupérateurs après un pré-dimensionnement réalisé grâce au modèle 2DDL-PM1. Il serait aussi possible de modéliser approximativement l'influence de la largeur de la poutre en interpolant le comportement des matériaux entre l'hypothèse de contrainte plane et l'hypothèse de déformation plane comme proposé par Kim et Kim [168] et Cao *et al.* [139].

### III.2.2. Impact de l'épaisseur la poutre

L'épaisseur de la poutre a également un effet sur les coefficients équivalents des matériaux. La Figure III.18 montre la variation du coefficient de couplage en fonction de l'épaisseur du substrat pour la poutre PMN-PT N ayant une largeur de poutre de 10 mm (les autres paramètres du Tableau III.3 étant conservés). Par le modèle 2DDL-PM1, on retrouve que l'épaisseur optimale de matériau piézoélectrique et le coefficient de couplage maximal sont différents selon l'hypothèse d'élasticité plane considérée. On remarque cependant que l'épaisseur optimale obtenue par les simulations par éléments finis en 3D est différente de celles obtenues par le modèle et par les simulations par éléments finis en 2D (environ 0,5 mm par simulations par éléments finis en 3D contre environ 0,2 mm et 0,3 mm respectivement pour les modélisations en contrainte plane et en déformation plane). On trouve ainsi par les simulations par éléments finis une épaisseur optimale supérieure à celles données par le modèle. En effet, l'augmentation de l'épaisseur de la poutre réduit les déformations latérales en augmentant la surface de la section droite de la poutre. Ainsi, le récupérateur se rapproche légèrement de l'état de déformation plane. La différence entre les épaisseurs optimales est vraiment notable pour notre configuration, car le ratio entre les coefficients de couplage matériaux  $k_{31}^{l\ 2}$  et  $k_{31}^{w\ 2}$  est grand pour le PMN-PT X2B ( $k_{31}^{w\ 2}/k_{31}^{l\ 2} \approx 3,5$ ). Une différence moins significative est attendue pour des céramiques PZT sur le calcul des épaisseurs optimales entre le modèle et la simulation par éléments finis en 3D.

Malgré tout, on peut noter à partir de la Figure III.18 que, si l'épaisseur du substrat  $h_s$  est optimisée à l'aide du modèle, un fort coefficient de couplage global est attendu pour le récupérateur final. En effet, la valeur de  $k^2$  varie peu entre l'épaisseur optimale déduite des simulations par éléments finis ( $k^2 = 21,3\%$  pour  $h_s = 0,5$  mm) et les épaisseurs optimales déduites du modèle ( $k^2 = 18,9\%$  et  $k^2 = 20,6\%$  respectivement pour  $h_s = 0,2$  mm et  $h_s = 0,3$  mm). Même si une approximation est faite sur les coefficients matériaux, l'épaisseur optimale déduite du modèle correspond à l'optimisation du rapport des énergies élastiques stockées par le substrat et par le matériau piézoélectrique ainsi qu'à l'optimisation de la distribution transversale des déformations dans le matériau piézoélectrique. L'optimisation par le modèle permet donc d'atteindre un bon coefficient de couplage global.

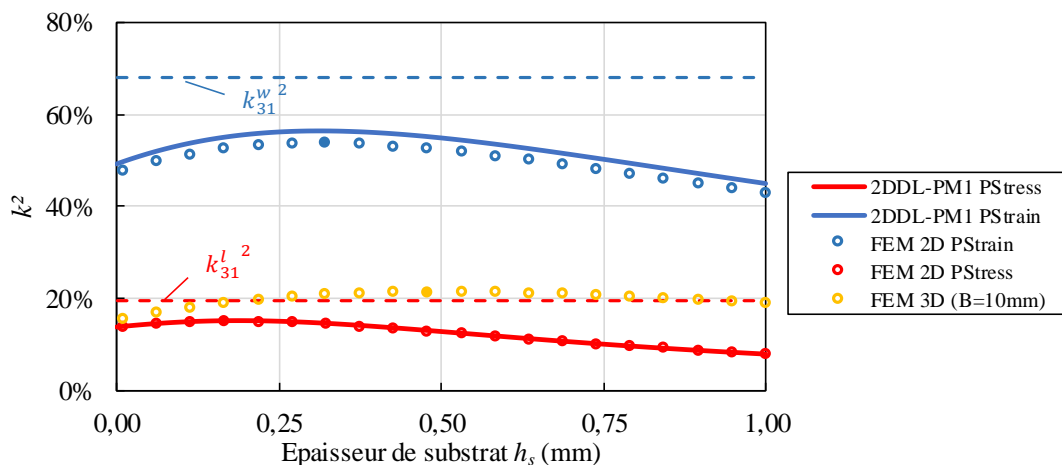


Figure III.18 : Coefficient de couplage en fonction de l'épaisseur du substrat pour la configuration en PMN-PT. PStress : Contrainte plane, PStrain : Déformation plane.

Ces analyses par simulations par éléments finis en 3D confirment finalement que les distributions longitudinales et transversales des déformations jouent un rôle important dans les processus d'optimisation des poutres. Elles montrent, d'autre part, que les coefficients équivalents des matériaux, dont les valeurs sont en réalité comprises entre les coefficients donnés par l'hypothèse de contrainte plane et les coefficients donnés par l'hypothèse de déformation plane, ont une influence importante sur le coefficient de couplage global des récupérateurs.

En conclusion, le processus de dimensionnement se doit, autant que possible, de coupler une analyse réalisée à l'aide d'une modélisation analytique et une analyse réalisée à l'aide de simulations par éléments finis en 3 dimensions. La démarche de dimensionnement que nous proposons se compose des deux étapes suivantes : i) pré-dimensionnement à l'aide du modèle analytique, ii) optimisation par des simulations par éléments finis autour de la configuration pré-dimensionnée. L'analyse par le modèle analytique permet par ailleurs de dissocier les effets électromécaniques entre eux et de distinguer l'influence des distributions des contraintes de l'influence des coefficients matériaux. Finalement, ces deux aspects, l'analyse des distributions des contraintes dans le récupérateur et la compréhension des phénomènes matériaux, sont primordiaux pour un dimensionnement optimal.

### III.3. Amélioration du récupérateur à l'aide de barreaux

#### III.3.1. Blocage de la déformation latérale

##### a. Présentation

Comme discuté dans la section III.1.4, le coefficient de couplage des matériaux piézoélectriques est plus important, pour de nombreux matériaux piézoélectriques (dont les céramiques), lorsqu'ils sont sollicités avec un état de déformation plane qu'avec un état de contrainte plane. Ainsi, le coefficient de couplage global est maximisé lorsque les déformations latérales sont minimisées et les contraintes latérales sont maximisées dans la poutre. Pour cette raison, les poutres larges présentant de faibles déformations selon la largeur offrent un bien meilleur coefficient de couplage que les poutres étroites. Nous proposons dans cette section une méthode qui permet d'améliorer le coefficient de couplage de poutres de largeur faible. Le but ici est de bloquer les déformations latérales tout en permettant les déformations longitudinales afin d'obtenir un fort coefficient de couplage avec un récupérateur d'encombrement réduit (largeur faible). Ceci est mis en œuvre en plaçant plusieurs barres rigides (que l'on appelle barreaux) sur les patchs piézoélectriques dans le sens de la largeur. La Figure III.19 représente un récupérateur basique et une version améliorée avec l'ajout de barreaux. Les paramètres géométriques des barreaux sont définis dans la Figure III.20.

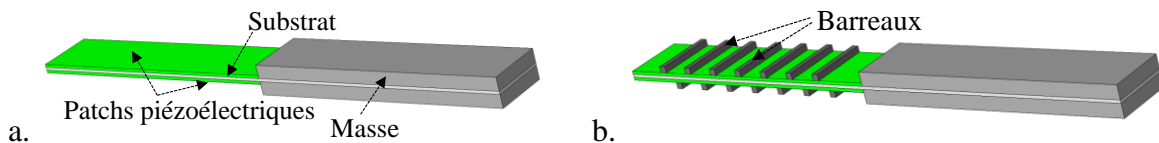


Figure III.19 : a. Poutre de base, b. Poutre améliorée avec barreaux

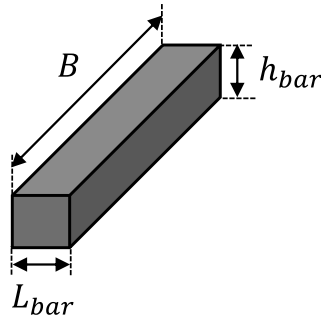


Figure III.20 : Dimensions des barreaux

La fabrication peut être réalisée en collant les barreaux sur une poutre piézoélectrique existante. Les barreaux doivent être suffisamment larges pour être rigides ( $L_{bar}$  suffisamment grand) et suffisamment fins pour ne pas empêcher la poutre de se déformer selon le sens longitudinal (la valeur de  $L_{bar}$  ne doit pas être trop importante). Les barreaux sont disposés sur les matériaux piézoélectriques de part et d'autre de la poutre.

L'amélioration du couplage dépend :

- Du système de base :
  - Des coefficients de couplage  $k_{31}^l$  et  $k_{31}^w$  du matériau piézoélectrique,
  - De la rigidité du matériau piézoélectrique et du substrat
  - De la géométrie (longueur de la poutre, masse et épaisseur des matériaux piézoélectriques et du substrat)
- Des barreaux :
  - Des dimensions (hauteur  $h_{bar}$ , longueur  $L_{bar}$ )
  - De leur nombre et de leur disposition (distance entre chaque barreau, disposition en quinconce ou en regard)
  - De la raideur du matériau des barreaux

#### b. Exemple sur le récupérateur PMN-PT N

Nous proposons d'estimer l'apport des barreaux en matière de coefficient de couplage par des simulations par éléments finis en 3 dimensions sur un exemple. Le système de base est la poutre PMN-PT N dont les dimensions sont définies dans le Tableau III.3. Les répartitions des déformations longitudinales et latérales sont données dans la Figure III.21 et la Figure III.22. On réalise une deuxième simulation pour laquelle on a ajouté 14 barreaux en acier de dimensions  $1 \times 1 \times 10$  mm (7 de part et d'autre de la poutre) comme illustré dans la Figure III.19.b. Pour cette simulation, les barreaux sont considérés comme parfaitement fixés au matériau piézoélectrique. Les distributions des déformations longitudinales et latérales sont données dans la Figure III.23 et la Figure III.24. Grâce aux simulations, on remarque que les déformations longitudinales sont conservées entre le système de base et le système avec barreaux (Figure III.21 à Figure III.25) tandis que les déformations latérales sont réduites. La fréquence de résonance en court-circuit ( $f_{sc}$ ) et celle en circuit ouvert ( $f_{oc}$ ) permettent de calculer le couplage et sont données à droite des figures. La fréquence de résonance en court-circuit est faiblement influencée par l'ajout de barreaux alors que le coefficient de couplage est augmenté de plus de 75% par rapport au récupérateur de base.

Tableau III.4: Exemple de l'influence de l'ajout de barreaux latéraux sur le coefficient de couplage et la fréquence de résonance

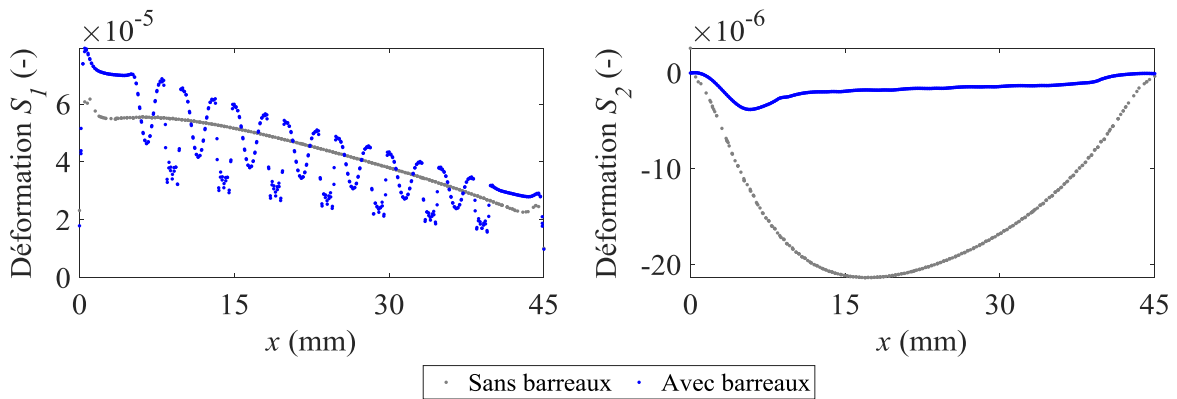
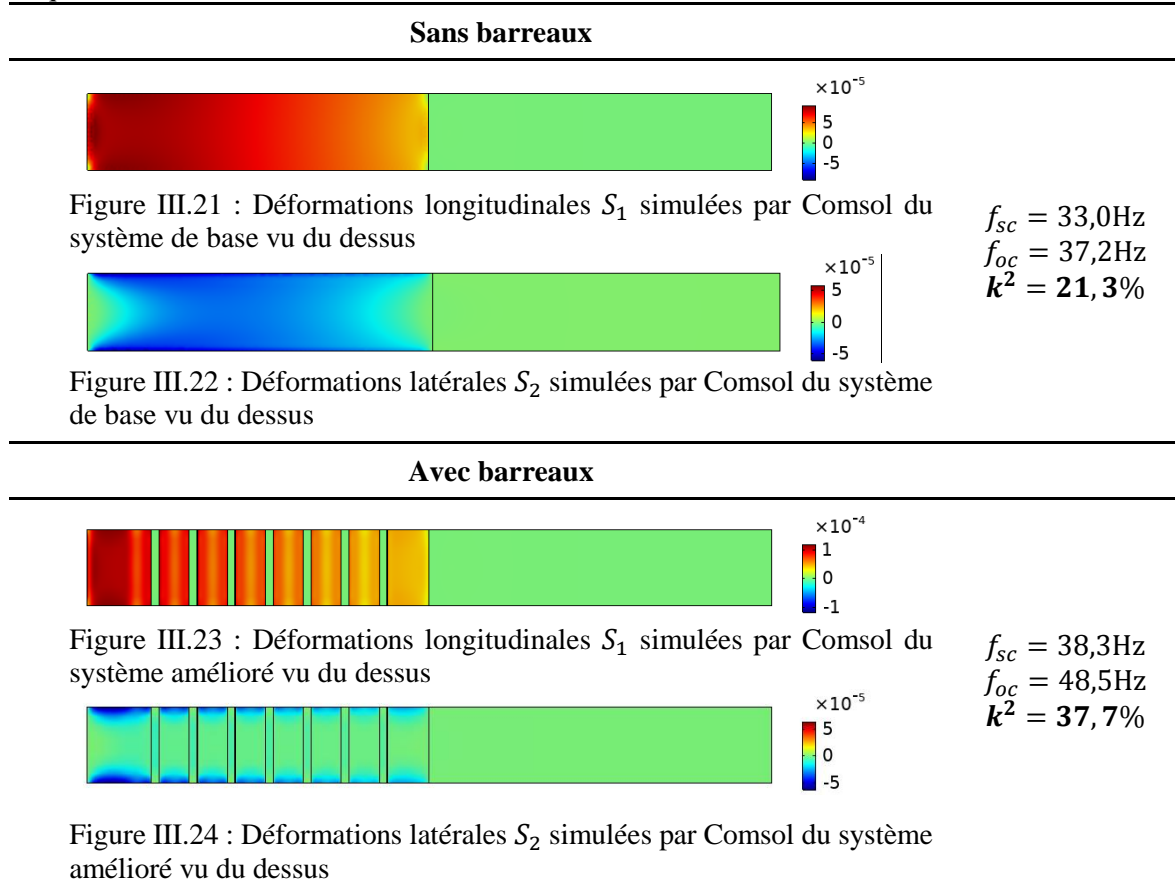


Figure III.25 : Déformations longitudinales  $S_1$  à gauche et latérales  $S_2$  à droite simulées par Comsol 3D au centre du patch piézoélectrique supérieur pour un déplacement de 0,1mm en  $x = L_b$

Pour la simplicité d'assemblage, on peut limiter le nombre de barreaux et une amélioration du couplage est malgré tout possible. Par exemple, le coefficient de couplage est augmenté de 25% si uniquement 1 barreau est utilisé de part et d'autre de la poutre (2 barreaux en tout). Les dimensions optimales des barreaux dépendent de leur nombre.

L'ajout de barreaux permet donc une augmentation importante du couplage associé à une simplicité de fabrication, le tout dans un encombrement réduit puisqu'il n'est plus nécessaire

d'avoir une structure de largeur importante. Cette proposition d'amélioration de poutres par l'ajout de barreau a fait l'objet d'un dépôt de brevet au cours de la thèse.

### III.3.2. Etude sur l'influence des dimensions des barreaux

A partir de la poutre de base PMN-PT N, on propose d'analyser l'influence des paramètres géométriques et matériaux des barreaux grâce à une analyse paramétrique par des simulations par éléments finis. On garde la même configuration de poutre et le même nombre de barreaux : ils seront au nombre de 7 de part et d'autre (14 barreaux au total). Dans cette analyse, nous faisons varier les dimensions et le modules de Young des barreaux.

Tableau III.5 : Configurations des barreaux testés en simulation

Module de Young des barreaux $Y_b$ (GPa)	[4 ; 20 ; 200]
Hauteur des barreaux $h_{bar}$ (mm)	[0,25 ; 0,5 ; 1 ; 2,5 ; 5]
Longueur des barreaux $L_{bar}$ (mm)	[0,5 ; 1 ; 2,5 ; 5]

On propose d'analyser l'évolution du coefficient de couplage en fonction des ratios de dimensions selon l'épaisseur  $e_H$  et selon la longueur  $e_L$  exprimés en (III-33) et (III-34) où  $n_{bar}$  est le nombre de barreaux.  $e_H$  représente le rapport entre l'épaisseur des barreaux et l'épaisseur de la poutre de base comprenant le substrat et les patches piézoélectriques.  $e_L$  représente le rapport entre la longueur de poutre sur laquelle des barreaux sont disposés et la longueur totale de la poutre.

$$e_H = h_{bar}/(h_s + 2h_p) \quad (III-33) \quad e_L = n_{bar}L_{bar}/L_b \quad (III-34)$$

Les coefficients de couplage du récupérateur de base, noté  $k_{base}^2$ , et des récupérateurs avec barreaux, notés  $k_{bar}^2$ , sont calculés à partir des fréquences de résonance en court-circuit et circuit ouvert. La variation de coefficient de couplage  $(k_{bar}^2 - k_{base}^2)/k_{base}^2$  est donnée sur la Figure III.26 en fonction de  $e_H$  et  $e_L$  où  $k_{base}^2$  est le coefficient de couplage de la poutre sans barreau.

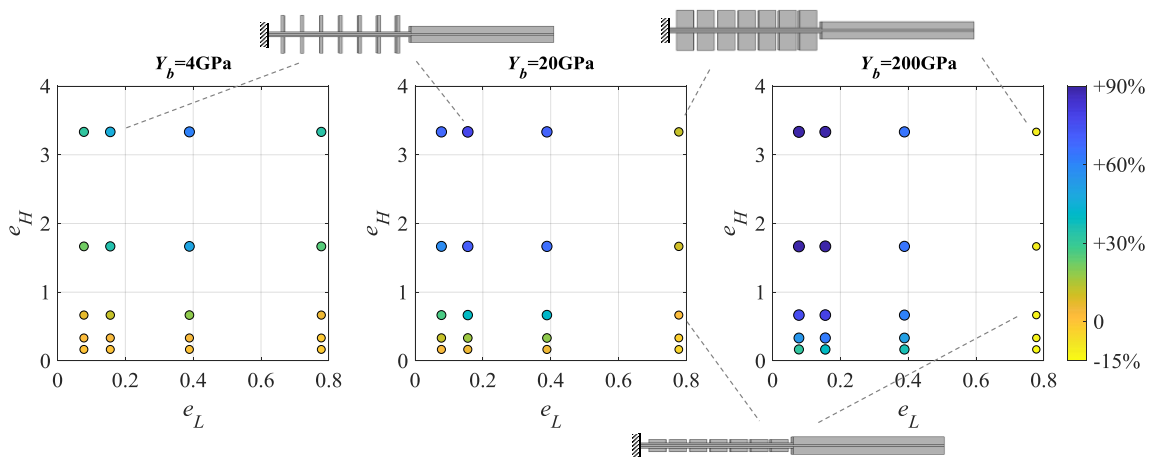


Figure III.26 : Variation du coefficient de couplage  $(k_{bar}^2 - k_{base}^2)/k_{base}^2$  engendrée par l'ajout de barreaux en fonction du ratio de longueur  $e_L$  et du ratio d'épaisseur  $e_H$

On remarque alors que, plus le matériau des barreaux est rigide, plus les barreaux ont une influence sur le récupérateur. Ainsi, des barreaux de dimensions  $(L_{bar}; h_{bar}) = (1\text{mm}; 5\text{mm})$  permettent une augmentation relative de 89% du coefficient de couplage pour de l'acier ( $Y_b = 200\text{ GPa}$ ) alors que l'augmentation est respectivement de 78% et 47% pour des modules de Young  $Y_b$  de 20 GPa et de 4 GPa pour les mêmes dimensions. Cependant, un matériau rigide peut entraîner une réduction importante du coefficient de couplage. Pour  $(L_{bar}; h_{bar}) = (5\text{mm}; 5\text{mm})$  et  $Y_b = 200\text{ GPa}$ , les barreaux entraînent une diminution de 11% du coefficient de couplage alors que ces dimensions entraînent une augmentation de 33% pour  $Y_b = 4\text{ GPa}$ . Ainsi, nous retrouvons que les barreaux doivent être suffisamment rigides pour bloquer les déformations latérales. Il faut également que les barreaux soient suffisamment courts pour éviter de bloquer les déformations longitudinales.

Nous proposons d'analyser la variation du couplage en fonction d'un coefficient équivalent à la raideur des barreaux :  $Y_b h_{bar}^3$ . Comme la raideur à la flexion d'une poutre dépend du cube de son épaisseur, le coefficient  $Y_b h_{bar}^3$  semble donc intéressant pour exprimer l'influence de la hauteur des barreaux sur la raideur à la flexion de la poutre. On trace dans la Figure III.27 la variation de couplage en fonction du rapport  $Y_b h_{bar}^3 / YI$  pour les différentes valeurs de  $e_L$ , où  $YI$  est la raideur à la flexion de la poutre de base. On note que, plus  $Y_b h_{bar}^3$  est grand, plus l'ajout des barreaux a un impact sur le coefficient de couplage global. Pour notre récupérateur, l'ajout de barreaux a un impact significatif sur le coefficient de couplage lorsque  $Y_b h_{bar}^3 / YI > 10^{-1}$ . Lorsque  $e_L$  est faible, l'impact est positif (augmentation du coefficient de couplage) et lorsque  $e_L$  est important, l'impact peut être négatif. Pour nos configurations, le coefficient de couplage est toujours augmenté lorsque les barreaux couvrent moins de 40% de la longueur totale de la poutre. La configuration optimale correspond à des barreaux fins et rigides car le produit  $n_{bar} L_{bar}$  est faible et le produit  $Y_b h_{bar}^3$  est grand.

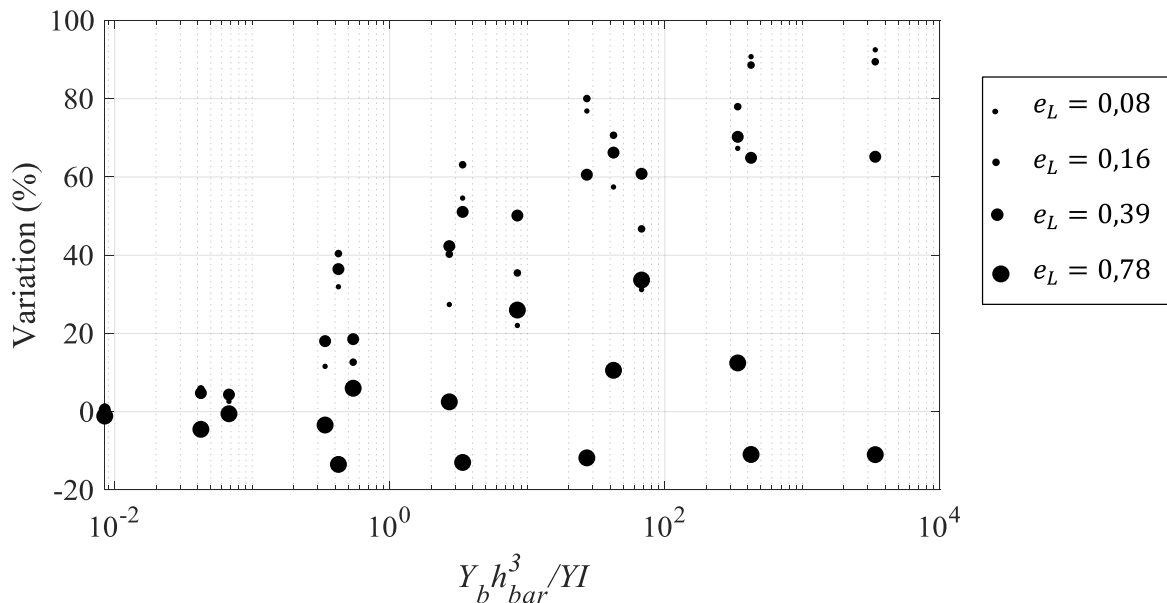


Figure III.27 : Variation de couplage en fonction du ratio des raideurs à la flexion équivalentes pour plusieurs ratios de longueur  $e_L$ . La taille des points représente la valeur de  $e_L$

### III.3.3. Essai expérimental

Nous avons expérimenté le collage des barreaux sur un prototype de PZT au laboratoire. Le prototype de base correspond au dimensionnement PZT N du Tableau III.3 pour lequel la masse mobile est en aluminium. Les patches piézoélectriques ont été collés avec de la colle Epotecny E505 sur le substrat en acier et la masse mobile a été collée avec de la colle 3M DP460<sup>11</sup>. Par une analyse d'impédance, nous déduisons les paramètres de ce prototype de base qui sont reportés dans le Tableau III.6 : la fréquence de résonance en court-circuit, le coefficient de couplage et le facteur de qualité.

Nous avons ensuite collé un barreau en laiton ( $Y_b = 110\text{Gpa}$ ) de dimension  $1 \times 1 \times 5\text{mm}$  de part et d'autre de la poutre avec de la colle 3M DP460. La Figure III.28 montre les photographies du prototype avec les barreaux collés. Une analyse d'impédance a ensuite été réalisée pour déterminer les paramètres équivalents du prototype avec les barreaux. Les résultats sont reportés dans le Tableau III.6.

Grâce à des simulations par éléments finis en 3 dimensions, nous estimons l'apport attendu sur le coefficient de couplage par le collage des barreaux. Les simulations révèlent que l'ajout des barreaux parfaitement fixés devrait augmenter le coefficient de couplage de 19% (de  $k^2 = 11,8\%$  à  $k^2 = 14,1\%$ ). Par ailleurs, même si l'épaisseur de colle entre le matériau piézoélectrique et les barreaux est importante, le coefficient de couplage devrait être augmenté ( $k^2 = 13,8\%$  pour une épaisseur de colle de  $100\mu\text{m}$ ).

Cependant, aucun changement du coefficient de couplage n'a été mesuré avec le collage des barreaux en laiton. La fréquence de résonance est néanmoins légèrement plus faible avec les barreaux. Ceci s'explique par l'ajout de masse au récupérateur. La baisse de facteur de qualité, quant à elle, peut s'expliquer par l'ajout de colle sur la poutre. Toutefois, nous n'avons, au moment de la rédaction de ce manuscrit, aucune explication précise pour expliquer la différence de coefficient de couplage entre la simulation et l'expérience.

Tableau III.6: Résultats de simulation et expérimentaux du prototype réalisé

	$f_{sc}$	$k^2$	$Q_m$
Simulation* de la poutre de base	53,1 Hz	11,8%	/
Simulation* de la poutre avec barreaux (fixation parfaite)	54,9 Hz	14,1%	/
Simulation* de la poutre avec barreaux (0.1mm de colle)	53,9 Hz	13,8%	/
Prototype de base (mesures)	54,3 Hz	11,9%	115
Prototype avec barreaux (mesures)	52,9 Hz	11,9%	70
* On considère une épaisseur de colle entre les patches piézoélectriques et le substrat de $10\mu\text{m}$ une et distance par rapport à l'encastrement de $0.15\text{mm}$ .			

<sup>11</sup> Le précédé de fabrication est expliqué plus en détail dans la section IV.2.b.





Figure III.28 : Prototype avec barreaux a. vu de profil, b. vu du dessus

Plusieurs pistes sont envisagées pour expliquer les résultats de cette expérimentation. Le récupérateur étant petit (patches piézoélectriques de 1,5 cm de long), le collage des barreaux fut complexe et il se peut que le récupérateur ait été dégradé lors du collage des barreaux. L'alignement des barreaux pourrait également avoir un impact sur l'amélioration de coefficient de couplage même si les barreaux semblent convenablement alignés sur le prototype (Figure III.28).

Des travaux supplémentaires sont donc à réaliser pour perfectionner la procédure de fabrication et l'assemblage des barreaux. Des barreaux plus rigides pourraient être utilisés pour améliorer les résultats. Pour ce premier essai, le module de Young des barreaux était proche de celui du PZT et de l'acier : 110 GPa pour les barreaux contre 58 GPa et 200 GPa respectivement pour le PZT et l'acier. Un dispositif de placement des barreaux en téflon pourrait enfin être envisagé pour assurer le parfait alignement des barreaux sur la poutre.

### III.4. Conclusion du chapitre

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre les critères permettant la maximisation du coefficient de couplage des poutres piézoélectriques. Cette étude fut réalisée, d'une part, grâce au modèle 2DDL-PM1 proposé dans le chapitre II et, d'autre part, grâce à des simulations par éléments finis réalisées sur le logiciel Comsol. Nous avons démontré analytiquement que la maximisation du coefficient de couplage passe par la localisation des déformations dans le matériau piézoélectrique et l'homogénéisation de ces déformations. La distribution longitudinale et la répartition transversale des contraintes dans la poutre doivent être étudiées pour maximiser le coefficient de couplage global. Comme ces dernières ne dépendent pas des mêmes paramètres, leurs optimisations peuvent être dissociées par l'intermédiaire de deux facteurs :  $\mathcal{R}_L$  pour la répartition longitudinale des contraintes et  $\mathcal{R}_T$  pour la répartition transversale des contraintes. Les coefficients  $\mathcal{R}_L$  et  $\mathcal{R}_T$  étant analytiquement exprimés grâce au modèle 2DDL-PM1, nous avons pu établir des règles de conception :

- Une masse mobile volumineuse, et particulièrement une longue masse mobile, placée en bout de poutre permet de maximiser  $\mathcal{R}_L$ .
- Lorsqu'aucune masse mobile n'est utilisée la longueur des patches piézoélectriques et celle des électrodes peuvent être optimisées. Lorsqu'une masse mobile volumineuse est

utilisée, les patchs piézoélectriques et leurs électrodes doivent couvrir toute la longueur de la poutre pour maximiser le coefficient de couplage.

- Les épaisseurs de matériaux piézoélectriques et des substrats doivent être optimisées pour maximiser le coefficient de couplage. Le ratio des épaisseurs optimales dépend, entre autres, du coefficient de couplage du matériau piézoélectrique. Par ailleurs, si le matériau piézoélectrique est souple par rapport à la rigidité du substrat, la valeur maximale de  $\mathcal{R}_T$  est limitée. Le choix du matériau du substrat doit être fait en considérant son module de Young et son facteur d'amortissement.

De plus, nous avons montré qu'élargir les poutres piézoélectriques permet de réduire les déformations latérales et d'influencer les coefficients matériaux équivalents. Ainsi, les poutres à base de céramiques présentent un meilleur coefficient de couplage lorsqu'elles sont larges que lorsqu'elles sont étroites. D'autres matériaux, tels que les monocristaux de PMN-PT et de PZN-PT polarisés selon l'axe [011], offrent quant à eux un meilleur coefficient de couplage lorsque la poutre est étroite.

Par ailleurs, nous avons observé, grâce à des simulations par éléments finis en 3D, que la largeur de la poutre a un impact sur les épaisseurs optimales des patchs piézoélectriques et du substrat du fait de son influence sur la valeur des déformations latérales. Ainsi, nous avons pu proposer une méthode pour dimensionner des récupérateurs très fortement couplés. Cette méthode consiste tout d'abord en un pré-dimensionnement réalisé à l'aide du modèle 2DDL-PM1. Ce pré-dimensionnement permet d'obtenir une configuration de récupérateur correspondant à des critères de conception (fréquence, volume, masse, etc.) et ayant un fort coefficient de couplage électromécanique. Les dimensions de cette configuration peuvent ensuite être affinées par des simulations par éléments finis en 3D.

Par ailleurs, comme la conception de poutres larges peut poser des complexités de dimensionnement lorsque le volume est contraint, nous avons proposé une solution permettant de limiter les déformations latérales de poutre étroites. Par des simulations par éléments finis en 3D, nous avons montré que l'ajout de barreaux disposés latéralement sur une poutre piézoélectrique peut augmenter considérablement le coefficient de couplage. L'apport de cette solution n'a pas encore pu être démontré expérimentalement.

Le chapitre suivant concerne la fabrication et la caractérisation des poutres piézoélectriques. Nous allons notamment discuter de l'influence du procédé de la fabrication sur les coefficients de couplage mesurés et nous allons comparer les résultats de nos prototypes à ceux de l'état de l'art.

# Chapitre IV : Fabrication et caractérisation de récupérateurs fortement couplés

*Dans le chapitre précédent, nous avons fourni des règles de conception pour la réalisation de récupérateurs d'énergie vibratoire piézoélectriques très fortement couplés. Nous proposons de les valider expérimentalement dans ce chapitre par l'intermédiaire de la fabrication et la caractérisation de prototypes fortement couplés. Nous montrons qu'une attention particulière doit être portée au protocole de fabrication afin de maximiser le coefficient de couplage. Après avoir présenté la caractérisation de nos prototypes, nous comparons leurs performances aux récupérateurs de l'état de l'art selon le coefficient de couplage, la bande passante et la densité de puissance.*

## IV.1. Dimensionnement des prototypes

Les prototypes réalisés au cours de cette thèse ont été conçus dans le but de valider expérimentalement les deux principaux points énoncés dans le chapitre précédent :

- Utiliser une longue masse mobile en bout de poutre permet d'augmenter le coefficient de couplage.
- Elargir une poutre en céramique permet d'accroître le coefficient de couplage en comparaison à une poutre étroite.

Nous avons alors fabriqué trois types de récupérateurs piézoélectriques fortement couplés à longue masse mobile. Les récupérateurs PMN-PT N et PZT N sont constitués de poutres étroites et le récupérateur PZT W est constitué d'une poutre large.

La conception du récupérateur PMN-PT N fut effectuée en début de thèse (début 2018) dans le but de démontrer l'intérêt d'une longue masse mobile pour maximiser le coefficient de couplage et de réaliser le dimensionnement d'un prototype à base de matériau monocristallin fortement couplé. A partir de patchs de PMN-PT X2B de dimension  $45 \times 10 \times 0,5 \text{ mm}^3$  initialement présents dans le laboratoire, nous avons dimensionné le prototype PMN-PT N dont les dimensions sont fournies dans le Tableau IV.1. L'acier ( $Y_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0,3$  et  $\rho_s =$

7930 kg.m<sup>-3</sup>) fut choisi comme matériau pour le substrat et la masse mobile, car l'acier présente de faibles pertes mécaniques intrinsèques et une grande valeur de limite d'élasticité. Le prototype PMN-PT N fut dimensionné pour une fréquence de résonance de 30 Hz afin de correspondre aux applications basses fréquences de la récupération d'énergie vibratoire. Pour atteindre une faible fréquence de résonance dans un volume restreint, le prototype PMN-PT N a été dimensionné selon une configuration de poutre étroite correspondant à l'état de contrainte plane. La conception optimale a été obtenue en utilisant le modèle 2DDL-PM1 et affinée avec des simulations par éléments finis par Comsol 3D. La configuration de récupérateur PMN-PT N permet d'obtenir un coefficient de couplage global de 12,9% selon le modèle et de 21,3% selon la simulation par éléments finis en 3D pour un coefficient de couplage matériau  $k_{31}^{l2}$  de 19,6%. Comme discuté dans le chapitre précédent, le coefficient de couplage matériau  $k_{31}^{w2}$  étant très grand (= 68%), la largeur de la poutre a une influence considérable sur le coefficient de couplage global. Il est donc théoriquement possible que le coefficient de couplage global  $k^2$  d'une poutre pourtant relativement étroite dépasse le coefficient de couplage matériau  $k_{31}^{l2}$ .

Tableau IV.1 : Paramètres géométriques des récupérateurs conçus pendant cette thèse. « N » et « W » à la fin des noms des récupérateurs correspondent respectivement à étroit et large pour *Narrow* et *Wide*.

Configuration	PMN-PT N	PZT N	PZT W
Matériau	PMN-PT [001] TRS X2B	PZT 5A NCE51	
Longueur de la poutre $L_b$	45 mm	15 mm	
Longueur de la masse $L_m$	45 mm	60 mm	
Hauteur de la masse $H_m$	5 mm	10 mm	
Épaisseur du substrat $h_s$	0,5 mm	0,4 mm	
Épaisseur des patches $h_p$	0,5 mm	0,3 mm	
Largeur de la poutre et de la masse mobile $B$	10 mm	5 mm	25 mm
Ratio largeur/longueur $B/L_b$	0,22	0,33	1,67
Fréquence de résonance $f_{sc}$ par simulation par éléments finis 3D	34,3 Hz	34,8 Hz	35,8 Hz
Coefficient $B_f^2/M$	18,2 g	19,8 g	99,1 g
Coefficient de couplage $k^2$ par simulation par éléments finis 3D	21,3%	14,1%	23,3%

En dimensionnant les récupérateurs en PZT, nous avons voulu, entre autres, montrer que l'on peut concevoir des récupérateurs très fortement couplés moins coûteux et plus résistants en température que les récupérateurs basés sur des monocristaux. Dans ce but, nous avons choisi le matériau PZT-5A NCE51 de l'entreprise en Noliac. Le PZT-5A est une céramique douce présentant un facteur de qualité moindre que les céramiques PZT dures mais un meilleur coefficient de couplage. Les PZTs durs ont en effet de manière générale un facteur de qualité plus important et un coefficient de couplage plus faible que les PZTs doux. Parmi les PZTs doux, le PZT-5H présente globalement le meilleur coefficient de couplage matériau (les matériaux PZT-5H référencés dans [169], [170] ont des coefficients de couplage  $k_{31}^{l2}$  allant jusqu'à 19%). Cependant, sa température de Curie reste faible (de 195°C à 250°C selon les fournisseurs). Le coefficient de couplage du PZT-5A ( $k_{31}^{l2}$  de 12% à 15%) est plus faible que

celui du PZT-5H mais sa température de Curie s'élève à 360°C. Ainsi, en choisissant le PZT-5A, nous réalisons des récupérateurs d'énergie résistants à des températures plus importantes.

En concevant les récupérateurs en PZT, nous avons également souhaité montrer l'effet de la largeur de la poutre sur le coefficient de couplage global. Pour cela, nous avons conçu un prototype étroit respectant l'hypothèse de contrainte plane et un prototype large respectant l'hypothèse de déformation plane. Par ailleurs, nous avons voulu garder un critère constant entre le prototype PMN-PT N et les prototypes en PZT afin, aussi, de comparer les performances des matériaux piézoélectriques. Bien que divers paramètres peuvent être similaires entre deux prototypes (le volume, la masse du système, la fréquence de résonance, etc.), nous avons utilisé l'expression (IV-1), qui exprime la puissance maximale récupérable par un cantilever piézoélectrique grâce au modèle à 1DDL, pour déterminer un critère pertinent.

$$p^{max} = \frac{B_f^2}{M} \frac{Q_m}{8\omega_1^{sc}} \mathcal{A}_B^2 \quad (IV-1)$$

Où  $B_f$  est le terme de force,  $M$  est la masse équivalente,  $\omega_1^{sc}$  est la pulsation de résonance en court-circuit,  $Q_m$  est le facteur de qualité,  $\mathcal{A}_B$  est l'amplitude de l'accélération de la base. L'équation (IV-1) est vérifiée pour des récupérateurs suffisamment couplés ayant des pertes mécaniques modérées ( $k_e^2 Q_m > 2$ ) et lorsque les pertes diélectriques sont négligées.

A partir de l'analyse de (IV-1), on note que, quels que soient les matériaux et les configurations de deux récupérateurs distincts, seules les pertes influent sur la puissance maximale générée à amplitude d'accélération fixée s'ils ont la même fréquence de résonance en court-circuit et la même valeur de coefficient  $B_f^2/M$ .

Ainsi, une première idée fut de concevoir deux nouveaux récupérateurs d'énergie vibratoire en PZT-5A, un étroit et un large, ayant la même valeur de  $B_f^2/M$  et la même fréquence de résonance que le prototype PMN-PT N. Or, les configurations larges, pour lesquelles  $B/L_b$  est supérieur à 5, correspondant à ces critères ne sont pas réalisables dans notre laboratoire car les dimensions des patches piézoélectriques nécessaires ne sont pas disponibles auprès des fournisseurs. En effet, lorsque la fréquence de résonance recherchée est faible et que la masse du récupérateur et/ou son volume sont restreints, la fabrication de poutres piézoélectriques larges nécessite alors des patches piézoélectriques très fins indisponibles auprès des fournisseurs courants. Un équipement serait nécessaire pour polir les matériaux piézoélectriques et réduire l'épaisseur de la poutre comme présenté dans les travaux de Ferin *et al.* [171]. Nous avons alors écarté cette première proposition de dimensionnement en modifiant les critères de conception du prototype large.

Les deux récupérateurs finalement conçus sont :

- Le récupérateur PZT N : un prototype étroit à longue masse à base de PZT ayant la même fréquence de résonance et la même valeur de  $B_f^2/M$  que la configuration PMN-PT N.
- Le récupérateur PZT W : un prototype large à longue masse ayant les mêmes dimensions que la configuration PZT N et dont les largeurs  $B$  de la poutre et de la masse mobile sont augmentées. Le récupérateur PZT W permet de distinguer expérimentalement l'influence de la largeur sur le coefficient de couplage alors que la fréquence de résonance en court-circuit est quasiment inchangée.

Ces récupérateurs ont été pré-dimensionnés grâce au modèle 2DDL-PM1 puis le dimensionnement a été affiné grâce à des simulations par éléments finis en 3D tout en tenant

compte des dimensions de patches piézoélectriques disponibles auprès des fournisseurs. Bien que les restrictions de dimensions des patches par les fournisseurs aient fortement contraint le dimensionnement des récupérateurs finaux, les deux récupérateurs dont les paramètres sont fournis dans le Tableau IV.1 respectent nos critères de conception en matière de fréquence de résonance, de  $B_f^2/M$  pour le PZT N et de largeur pour le PZT W. Afin de limiter la largeur du PZT W, une faible longueur de poutre  $L_b$  et une grande longueur de masse mobile ont été choisies pour le prototype PZT N. De plus, nous avons choisi un ratio  $B/L_b$  modéré ( $=1,7$ ) pour le PZT W. Néanmoins, le PZT W est 5 fois plus large que le PZT N, permettant de présager une augmentation significative du coefficient de couplage global. D'après les simulations par éléments finis en 3D, l'élargissement de la poutre devrait montrer une augmentation de 65% du coefficient de couplage (Tableau IV.1).

En conclusion, nous avons proposé 3 récupérateurs piézoélectriques à longue masse mobile. Les prototypes PMN-PT N et PZT N sont étroits et ont la même valeur de  $B_f^2/M$  ainsi que la même fréquence de résonance en court-circuit. Ils vont permettre de comparer les performances des deux matériaux PMN-PT X2B et PZT NCE51. L'élargissement de la poutre entre le PZT N et le PZT W, quant à elle, va permettre d'étudier l'influence de la largeur de la poutre sur le coefficient de couplage, la bande passante et la densité de puissance des récupérateurs.

Tous les prototypes ont été fabriqués au laboratoire et leurs photographies sont données en Figure IV.1. Leur procédé de fabrication est détaillé dans la section suivante. Un seul exemplaire PMN-PT N a été fabriqué alors que plusieurs exemplaires des récupérateurs PZT N et PZT W ont été fabriqués.

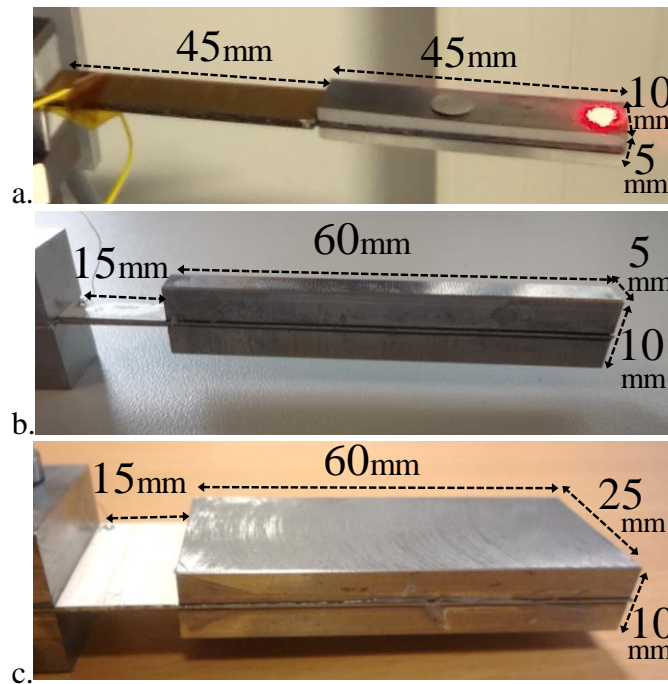


Figure IV.1: Photographie des prototypes assemblés : a. le récupérateur PMN-PT N, b. le récupérateur PZT N et c. le récupérateur PZT W

## IV.2. Procédé de fabrication

### a. Configuration des prototypes

Le procédé de fabrication a progressivement évolué au cours de la thèse et plusieurs améliorations ont été apportées au fil de la fabrication des prototypes. Le protocole présenté ici est la version finale dont plusieurs étapes sont des améliorations issues du retour d'expérience des premières fabrications. Certaines de ces améliorations sont discutées dans la section IV.4.2.b qui traite, grâce à des simulations par éléments finis, de l'influence des conditions d'encastrement et de collage sur le coefficient de couplage global des prototypes. Plusieurs exemplaires des récupérateurs PZT N et PZT W ont donc été réalisés avant d'obtenir les prototypes finaux dont les résultats de caractérisation sont présentés dans la section IV.4. Le protocole présenté dans cette section permet au final des réalisations reproductibles.

La configuration des prototypes est présentée dans la Figure IV.2 pour le récupérateur PZT W. Les patches piézoélectriques sont collés sur le substrat en acier dans notre laboratoire avec la colle époxy Epotecny E505 nécessitant une cuisson en étuve. La masse mobile est constituée de deux blocs d'acier collés sur le substrat avec une colle époxy 3M® dont la polymérisation est réalisée à température ambiante. L'utilisation de colle époxy 3M® pour la masse mobile évite une seconde cuisson en étuve. L'encastrement est obtenu en vissant des parallélépipèdes en acier pour maintenir l'autre extrémité du substrat. La Figure IV.3 est une photographie des blocs de la masse mobile, des blocs d'encastrement, du substrat et des patches piézoélectriques. L'encastrement est maintenu par quatre vis M4 d'une longueur de 20 mm. Deux vis M4 d'une longueur de 25 mm permettent de placer le récupérateur sur le support du pot vibrant.

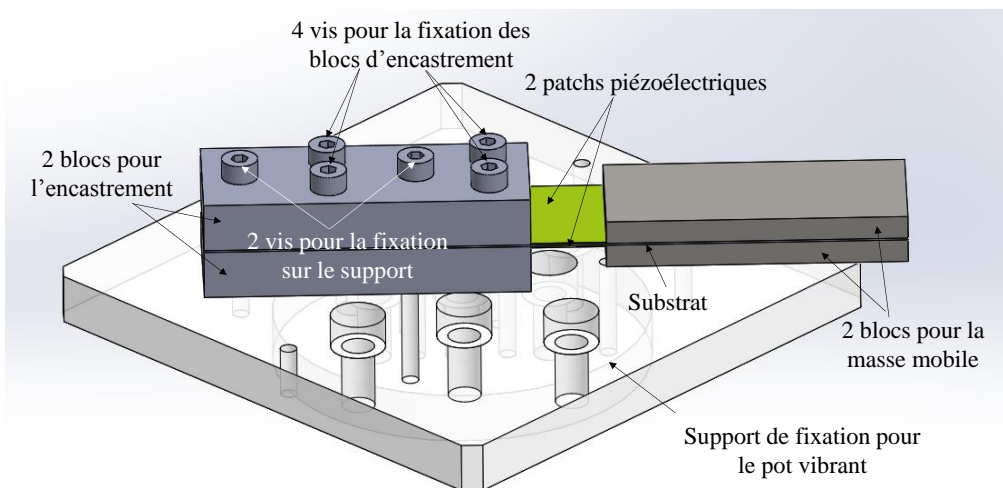


Figure IV.2 : Configuration du prototype PZT W réalisé sur logiciel de CAO (SolidWorks)



Figure IV.3 : Photographie des éléments du prototype PZT W avant assemblage

Pour l'assemblage de nos prototypes, nous collons les patches piézoélectriques sur le substrat avec une colle non-conductrice (la colle E505) afin de réduire au maximum l'épaisseur de la colle. En effet, comme nous le verrons dans la section IV.3.1, l'épaisseur de colle entre le substrat et les patches piézoélectriques a une influence importante sur le coefficient de couplage global. Cependant, le contact électrique est nécessaire entre les électrodes centrales des patches et le substrat qui est conducteur. L'utilisation de colles dites « conductrices » permettrait d'obtenir aisément cette connexion électrique car elles contiennent des particules conductrices. Toutefois, la taille de ces particules est généralement grande (diamètre supérieur à 20  $\mu\text{m}$  pour les colles de l'entreprise Epotek [172]) et l'épaisseur de colle aurait été trop importante. Nous avons alors décidé de réaliser le collage et la connexion électrique par l'intermédiaire d'une épaisseur de colle non-conductrice très fine. Pendant le processus de collage, une force de compression importante est appliquée pour connecter électriquement l'électrode centrale des patches piézoélectriques au substrat. En préparant l'état de surface du substrat (ponçage avec un grain 120) et celui des électrodes des patches piézoélectriques (ponçage léger avec un grain 800), les aspérités permettent le contact électrique entre l'électrode collée et le substrat.

#### *b. Le procédé de fabrication*

La fabrication des prototypes se compose d'étapes de préparation des surfaces, d'étapes de collage des patches sur le substrat et d'étapes finales pour la fixation de la masse mobile et de l'encastrement.

Les étapes de préparation sont les suivantes :

1. Poncer chaque côté du substrat sur la zone qui accueillera le patch et la masse avec une feuille abrasive à grain épais (taille 120). Poncer également une face de chacun des blocs de la masse mobile.
2. Nettoyer le substrat et les blocs de masse à l'acétone pour enlever les résidus de poudre métallique puis rincer à l'éthanol.
3. Placer des rubans adhésifs en polyimide préalablement coupés de part et d'autre du substrat au niveau de l'encastrement et de la masse mobile. Les rubans tels que représentés dans la Figure IV.4 servent de butées pour aider au placement des patches piézoélectriques lors du collage.



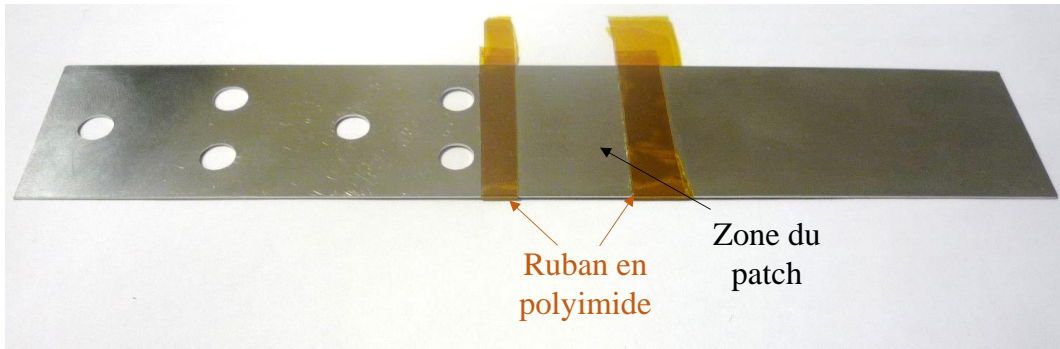


Figure IV.4 : Rubans en polyimide collés au substrat pour l'aide au placement des patches piézoélectriques

4. Poncer très légèrement une face de chacun des deux patches piézoélectriques avec une feuille abrasive à gains fins (taille 800). Le ponçage permet une meilleure fixation des patches sur le substrat lors du collage mais une attention particulière est nécessaire pour ne pas supprimer l'électrode. Le ponçage est facilement réalisable lorsque les électrodes sont épaisses. Afin de réaliser la connexion en parallèle, un patch doit être poncé sur la face où la polarisation est marquée (généralement par un point ou une croix) et l'autre patch doit être poncé sur la face opposée à la marque de polarisation.
5. Comme les blocs de masses et d'encastremets sont conducteurs et connectés à la masse par l'intermédiaire du substrat, il est nécessaire de supprimer une légère partie d'électrode sur les patches par des chanfreins (Figure IV.5). En effet, l'électrode de la face libre du matériau piézoélectrique ne doit pas rentrer en contact électrique avec les blocs d'encastremets et de masse. Le chanfrein est réalisé en ponçant délicatement le patch piézoélectrique avec une feuille abrasive à grains fin.

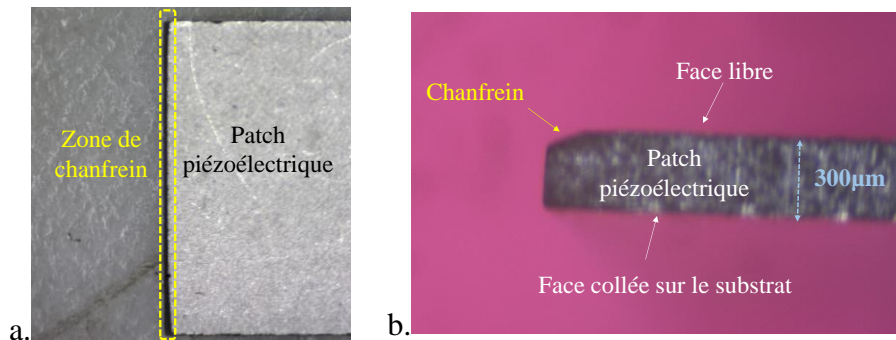


Figure IV.5 : Chanfrein réalisé sur un patch piézoélectrique : a. vue de dessus, b. vue de côté

6. Nettoyer le patch à l'éthanol pour enlever les résidus de ponçage et de l'eau ultra pure.

A la suite de ces étapes, les patches piézoélectriques et les substrats sont prêts à être collés. D'après sa fiche technique, la colle E505 nécessite un passage en étuve avec un temps de cuisson de 90 minutes à 60°C, de 30 minutes à 80°C, de 5 minutes à 100°C ou de 1 minute à 150°C. Nous avons choisi la cuisson à 60°C pour éviter de soumettre les matériaux piézoélectriques à de fortes températures.

Les étapes de collage des patches piézoélectriques sur le substrat sont les suivantes :

1. Mélanger les deux phases de la colle dans un récipient à l'aide d'une spatule. Il est important de mélanger doucement afin d'éviter l'apparition de bulles d'air. La colle peut être dégazée sous vide ou elle peut être placée dans l'étuve à 35°C quelques minutes.
2. Préchauffer l'étuve à 60°C.
3. Placer un patch piézoélectrique sur une feuille de ruban adhésif en polyimide (Figure IV.6.a). La face collée du patch est la face non poncée.
4. Prédisposer le patch sur la poutre en s'assurant du bon ajustement (Figure IV.6.b)
5. Mettre une fine couche de colle sur la zone prévue.
6. Plaquer le patch piézoélectrique sur le substrat et comprimer légèrement avec les doigts afin de dégager le surplus de colle.
7. Réaliser le collage du deuxième patch sur l'autre face du substrat.
8. Une fois les deux patches plaqués (Figure IV.6.c), comprimer à nouveau avec les doigts afin de chasser la colle entre les patches et le substrat
9. Comprimer l'ensemble, substrat et patches, par un étau et des gommages (Figure IV.6.d). Un fort serrage de l'étau permet de réduire au mieux l'épaisseur de colle. Les gommages évitent que le matériau piézoélectrique ne soit soumis localement à de fortes contraintes.

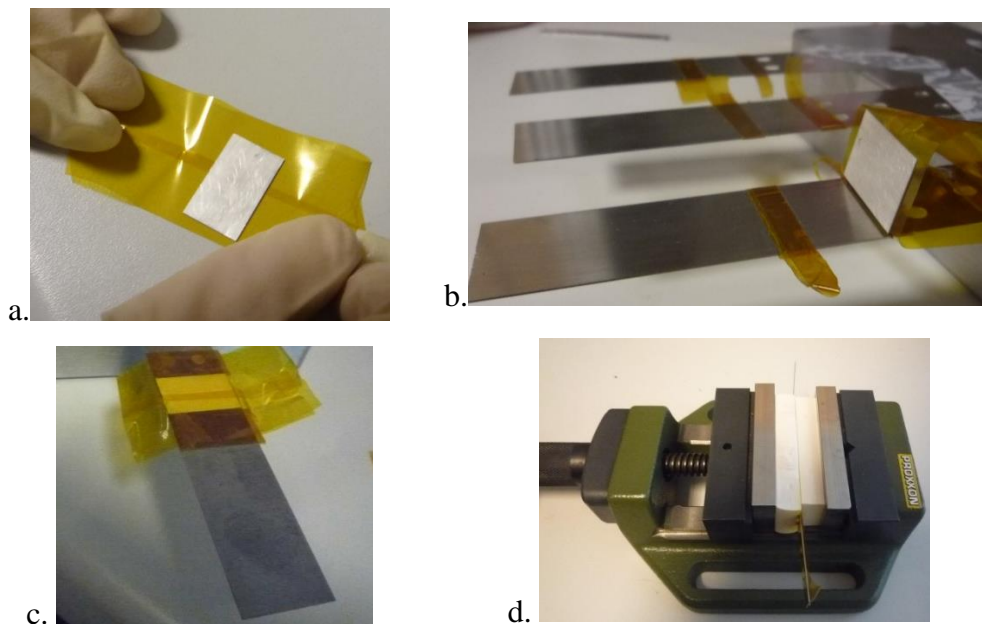


Figure IV.6 : a. Patch sur le ruban en polyimide, b. patch prédisposé sur le substrat, c. substrat avec les patches piézoélectriques fixés, d. ensemble dans l'étau.

10. Placer ensuite l'étau et l'ensemble dans l'étuve pendant 2 heures minimum afin que la colle soit mise à température.
11. A la fin du temps imparti, retirer l'étau de l'étuve et enlever délicatement le ruban en polyimide.

Après ces étapes, les patches sont fixés sur le substrat. Les blocs de la masse mobile et ceux de l'encastrement doivent être fixés mais une étape de grattage de la colle permet de maximiser le coefficient de couplage expérimental. En effet, sur la plupart des prototypes, on note un débordement de colle de part et d'autre des patches selon la longueur (Figure IV.7.a). Il est donc

nécessaire de gratter cette colle (Figure IV.7.b) à l'aide d'un scalpel pour pouvoir plaquer le patch piézoélectrique contre les blocs de la masse mobile et ceux de l'encastrement.

Les étapes finales sont :

1. Gratter les débordements de colle à l'aide d'un scalpel. L'utilisation d'une loupe binoculaire aide grandement à un retrait précis de la colle.

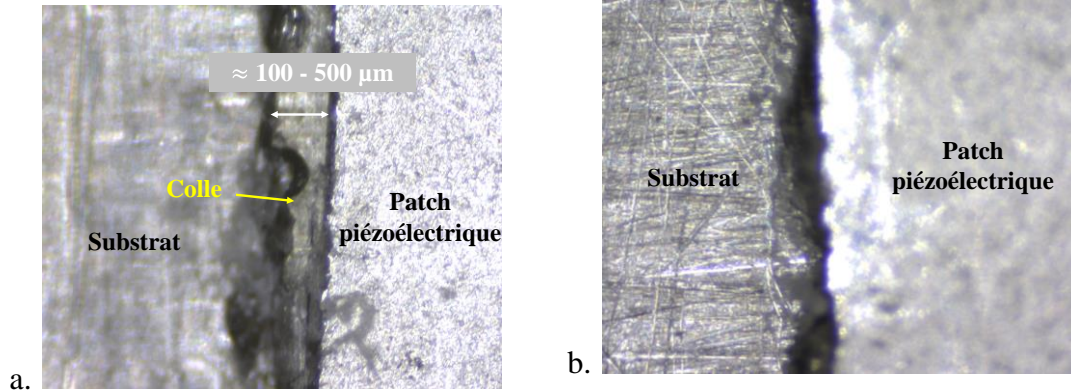


Figure IV.7 : a. Photographie prise à la loupe binoculaire de l'ensemble, substrat et patches, sorti d'étuve. b. ensemble après le retrait de la colle.

2. Coller les blocs de la masse mobile à la colle époxy séchant à la température ambiante (une colle de la marque 3M est utilisée pour nos prototypes) à l'aide d'un étau et du ruban en polyimide.
3. Souder les fils de connexion sur les faces libres des patches piézoélectriques. La masse électrique peut être prise sur l'encastrement.
4. Assembler les encastements avec les vis. Lors de l'assemblage, il est important de bien caler les patches piézoélectriques contre l'encastrement.

Le protocole présenté ci-dessus a permis de fabriquer les prototypes durant la thèse. Bien qu'une attention particulière soit portée à chaque étape de fabrication, les conditions d'encastements et de collage influent sur les coefficients de couplage expérimentés sur nos prototypes. Dans la section suivante grâce à des simulations par éléments finis, nous analysons quantitativement l'influence de ces conditions expérimentales sur la valeur du coefficient de couplage.

### IV.3. Influence des conditions d'encastrement et de collage

#### IV.3.1. Analyse des influences avec des simulations par éléments finis

##### a. Influence des distances à l'encastrement et à la masse

Lorsque des poutres piézoélectriques sont modélisées ou sont dessinées sur des logiciels de simulations par éléments finis, l'encastrement est généralement considéré parfait tel que représenté sur la Figure IV.8.a. Or, en fabricant des prototypes, des distances sont inévitablement présentes entre les patches piézoélectriques et l'encastrement (distance  $d_c$  sur la Figure IV.8.b.) ainsi qu'entre les patches et la masse mobile (distance  $d_m$ ).

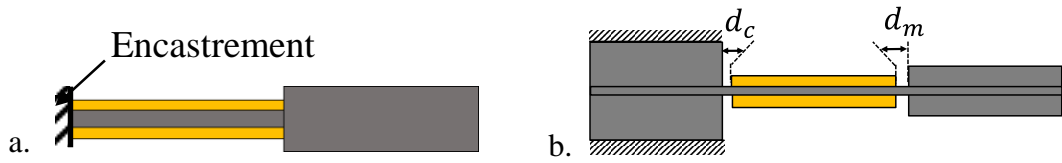


Figure IV.8 : a. Représentation d'un encastrement parfait, b. configuration réelle avec des distances entre les patches piézoélectriques et l'encastrement  $d_c$  et la masse mobile  $d_m$

Il est possible de quantifier l'influence de ces distances à l'aide de simulations par éléments finis sur le logiciel Comsol (Figure IV.9). On propose, à titre d'exemple, de calculer le coefficient de couplage du récupérateur PZT N en fonction des distances  $d_c$  et  $d_m$  à partir des fréquences de résonance en court-circuit et en circuit-ouvert. Pour ces simulations, la fixation entre les patches et le substrat est considérée parfaite. Les distances  $d_c$  et  $d_m$  étant très faibles en pratique (quelques dizaines à quelques centaines de micromètres), il est important d'avoir un maillage fin au niveau de l'encastrement et de la masse mobile (Figure IV.9.b.). La Figure IV.10 donne le coefficient de couplage du récupérateur PZT N en fonction des distances  $d_m$  et  $d_c$ .

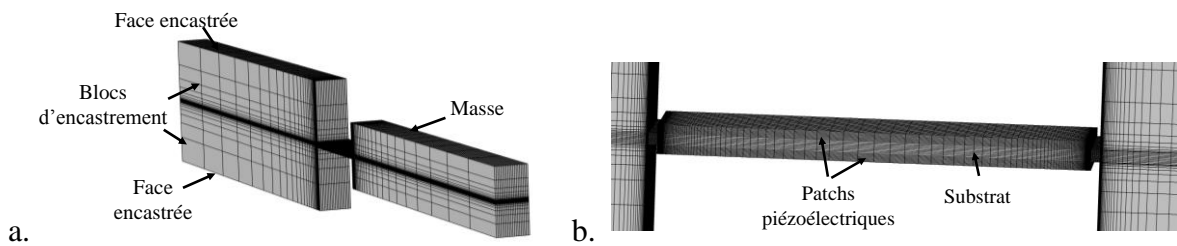


Figure IV.9 : a. Maillage de la configuration PZT N sur Comsol Multiphysics, b. zoom sur la poutre

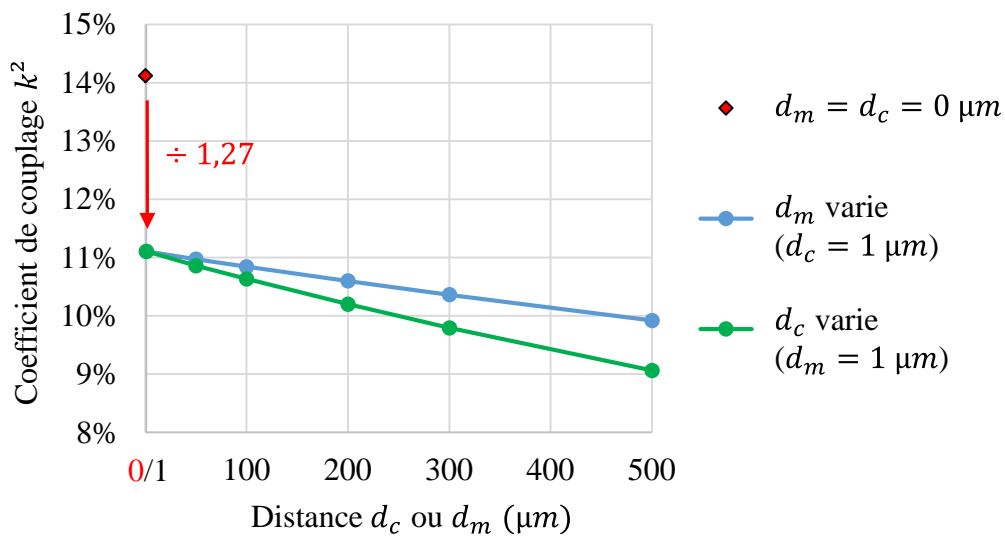


Figure IV.10 : Coefficient de couplage  $k^2$  de la configuration PZT N obtenu par simulations 3D en fonction des distances à l'encastrement et à la masse.  $d_c$  et  $d_m$  vont de  $1 \mu\text{m}$  à  $500 \mu\text{m}$ .

On voit qu'un encastrement imparfait entraîne une diminution importante du coefficient de couplage et l'augmentation des distances à l'encastrement  $d_c$  et à la masse  $d_m$  diminue d'autant plus le coefficient de couplage. Lorsque l'encastrement est parfait, le coefficient de couplage du récupérateur PZT N est de 14,1% alors qu'il est égal à 11,1% lorsque  $d_c$  et  $d_m$  sont de 1 $\mu$ m. Cette forte diminution s'explique par le relâchement des contraintes aux extrémités des patches piézoélectriques. En effet, lorsque que les patches sont fixés aux blocs de l'encastrement et à ceux de la masse mobile, le blocage des déformations permet d'obtenir un coefficient de couplage global important. Lorsque que ces fixations sont relâchée (dès que  $d_c > 0$  ou  $d_m > 0$ ), les patches piézoélectriques sont libres de se déformer à leurs extrémités et le coefficient de couplage global est réduit.

Par ailleurs, lorsque  $d_c$  et  $d_m$  augmentent, de grandes déformations sont localisées aux zones où il n'y a pas de matériau piézoélectrique (zones correspondant aux distances  $d_c$  et  $d_m$ ). Lors des vibrations, une partie de l'énergie mécanique sert donc à déformer les liaisons à l'encastrement et à la masse mobile plutôt qu'à déformer le matériau piézoélectrique. Ceci a pour conséquence de baisser du coefficient de couplage comparé à des liaisons parfaites. Comme les contraintes sont maximales au niveau de l'encastrement pour une poutre encastree-libre, la distance  $d_c$  à l'encastrement a une plus grande influence sur le coefficient de couplage que la distance  $d_m$  à la masse (Figure IV.10). La configuration de l'encastrement est un élément important à considérer dans la conception de récupérateurs piézoélectriques fortement couplés. Les distances à l'encastrement et à la masse doivent donc être minimisées au mieux afin d'atteindre de forts coefficients de couplage.

#### *b. Influence de la colle*

L'influence de l'épaisseur de la colle peut également être évaluée à l'aide de simulations par éléments finis. A partir du logiciel Comsol Multiphysics, nous insérons une « couche élastique mince » à la liaison entre le substrat et le matériau piézoélectrique. Bien que la colle époxy soit un matériau viscoélastique, nous la modélisons par un matériau ayant module de Young  $Y_g$  de 4 GPa et coefficient de poisson de 0,35 comme réalisé dans un exemple de la documentation Comsol<sup>12</sup> [174] . Pour différentes épaisseurs de colle  $h_{epoxy}$ , nous déterminons le coefficient de couplage  $k^2$  lorsque les distances  $d_c$  et  $d_m$  augmentent simultanément. Les coefficients de couplage obtenus sont présentés dans la Figure IV.11.

<sup>12</sup> Le module de Young équivalent d'une résine époxy dépend en réalité du type de résine, du fabricant, de la température de cuisson et de la température ambiante. Les colles époxy analysées par Cease *et al.* [173] ont des modules de Young compris entre 2,5 GPa et 10 GPa à température ambiante. L'objectif de nos simulations est d'observer l'influence de la colle en simulant une fine couche souple entre le substrat et les patches piézoélectriques sans chercher à quantifier précisément cette influence.

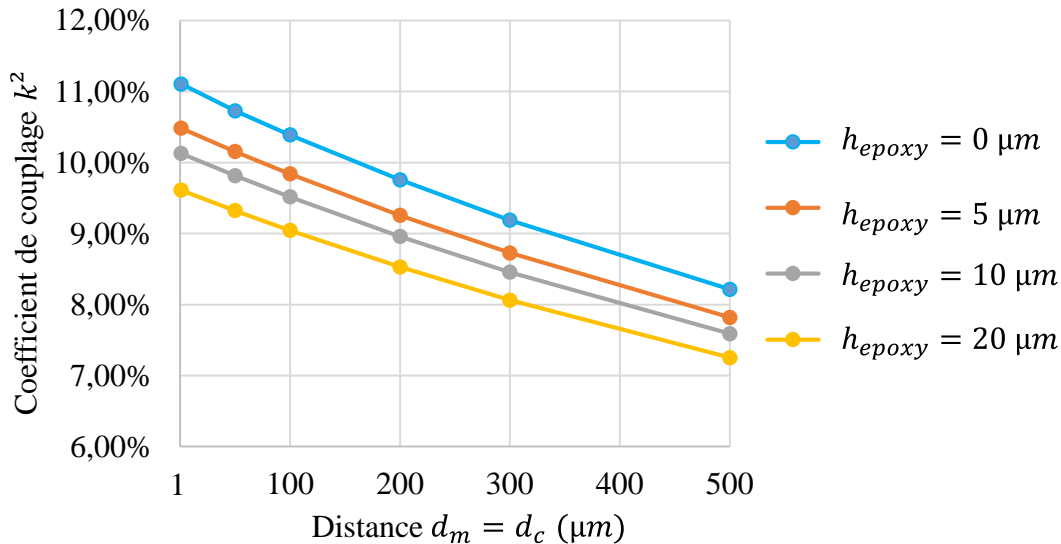


Figure IV.11 : Coefficient de couplage  $k^2$  de la configuration PZT N simulé en fonction des distances des extrémités des patches à l'encastrement et à la masse mobile pour différentes épaisseurs de colle  $h_{epoxy}$

Pour  $d_c$  et  $d_m$  égaux à 1  $\mu\text{m}$ ,  $k^2$  vaut 9,6% pour une épaisseur de colle de 20 $\mu\text{m}$ . Ainsi, le coefficient de couplage  $k^2$  est divisé par 1,15 par rapport à une fixation parfaite des patches sur le substrat ( $h_{epoxy} = 0 \mu\text{m}$ ) et  $d_c$  et  $d_m$  égaux. De cette manière,  $k^2$  est divisé par 1,46 entre la configuration pour laquelle l'encastrement et la fixation patches/substrat sont parfaites et la configuration pour laquelle les distances  $d_c$  et  $d_m$  valent 1  $\mu\text{m}$  et l'épaisseur de colle est de 20 $\mu\text{m}$ .

En conclusion, les conditions d'encastrement, de fixation de la masse mobile et de collage des patches piézoélectriques ont une influence non-négligeable sur le coefficient de couplage global d'une poutre piézoélectrique. La configuration de la poutre et le procédé de fabrication doivent être pensés pour minimiser l'influence de ces paramètres sur le coefficient de couplage expérimental.

### IV.3.2. Solutions envisagées

Afin de rendre l'encastrement plus rigide et de réduire l'influence du procédé de fabrication sur le coefficient de couplage expérimental, une solution possible serait de mettre le matériau piézoélectrique sous pression avec les blocs de l'encastrement comme illustré dans la Figure IV.12.a au lieu de comprimer uniquement le substrat. La configuration de la Figure IV.12.a montre également que les blocs de la masse mobile peuvent être collés directement sur le matériau piézoélectrique. Cette configuration a notamment été utilisée par Kim *et al.* [124] pour valider leur modèle semi-analytique (Figure IV.12.b). Cependant, comprimer le matériau piézoélectrique au niveau de l'encastrement induit une concentration de contraintes sur le matériau et peut détériorer le récupérateur ou le rendre fragile. De plus, avec cette configuration, le matériau piézoélectrique n'est pas déformé sur les longueurs où sont disposés l'encastrement et la masse mobile. Une partie du matériau piézoélectrique n'est donc pas utilisée pour produire de l'électricité et le coût du récupérateur est augmenté par rapport à notre configuration. De plus, si le matériau piézoélectrique comporte des électrodes aux zones non-déformées, le

coefficient de couplage global peut être diminué par rapport au cas où le matériau se déforme. En effet, si le matériau piézoélectrique ne se déforme pas, une partie des électrodes n'est pas exploitée pour augmenter le terme de tension équivalent  $\Theta$  (la pente  $\phi'(x)$  introduite dans la section III.1.2 ne varie pas aux zones sans déformation) alors qu'elle augmente la valeur de la capacité équivalente  $C_p$ .

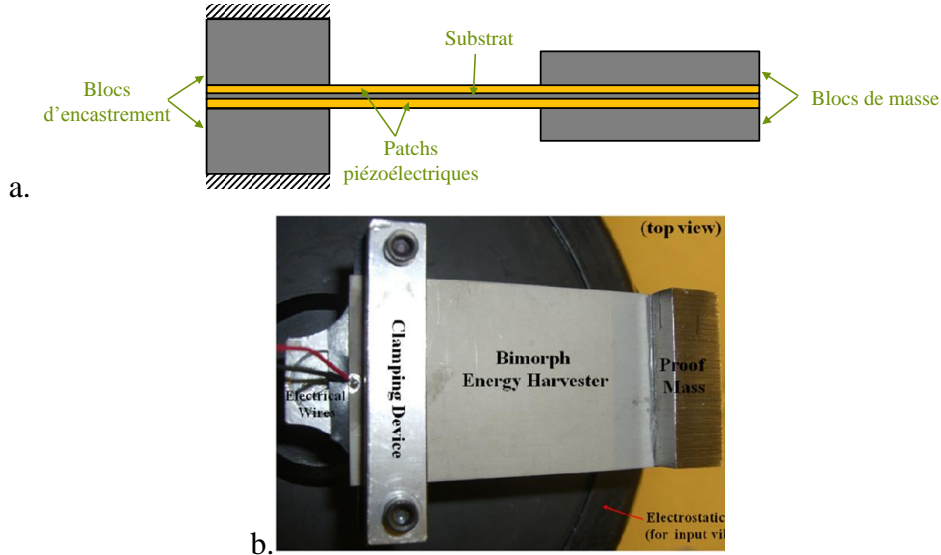


Figure IV.12 : Configuration de masse utilisée par Kim *et al.* [124] : a. représentation, b. photographie du prototype de Kim *et al.* [124]

Une alternative à la configuration de la Figure IV.12 est de mettre des éléments de consolidation à l'encastrement et à la masse afin de renforcer les liaisons. Cette option fait cependant l'objet d'un brevet déposé par l'Université Grenoble Alpes et l'entreprise Vermon [175]. Ce brevet montre notamment qu'il est possible d'uniformiser les contraintes au niveau de l'encastrement en ajustant la forme et les matériaux des éléments de consolidation. Les éléments doivent être judicieusement conçus afin d'éviter une concentration de contrainte comme évoqué pour la configuration de la Figure IV.12.



Figure IV.13 : Configuration avec éléments de consolidations : a. représentation, b. figure du brevet [175]

Les éléments de consolidation n'ont pas été expérimentés pour la fabrication de nos prototypes. Cette solution est en effet complexe et la réalisation d'éléments rigides, non-conducteurs et n'induisant pas de concentration de contraintes n'a pas pu être effectuée pendant le doctorat.

Grâce au protocole de fabrication présenté en IV.2, nous avons réduit au mieux les distances  $d_c$  et  $d_m$ . A titre d'exemple, la Figure IV.14.a. montre l'encastrement d'un des premiers prototypes PZT W fabriqués au cours du doctorat alors que Figure IV.14.b. montre

l'encastrement d'un prototype fabriqué avec le protocole présenté en IV.2. Le prototype sur la Figure IV.14.a. comportait un chanfrein induisant un faible coefficient de couplage ( $k^2 = 10,7\%$ ). Nous avons donc demandé au fabricant de pièces mécaniques de ne pas ébavurer les pièces d'encastrement pour les prochains prototypes. De cette manière, la présence d'une arête vive en angle droit sur la Figure IV.14.b. permet de rapprocher au mieux les patches piézoélectriques de l'encastrement et d'améliorer le coefficient de couplage ( $k^2 = 16,4\%$ ). Un tel rapprochement de l'encastrement a également été possible grâce au retrait de la colle par un scalpel tel que présenté dans la Figure IV.7. Le léger chanfrein réalisé sur le matériau piézoélectrique (Figure IV.5) permet d'éviter le contact électrique entre les faces libres de patches et les blocs d'encastrement (Figure IV.14.b.).

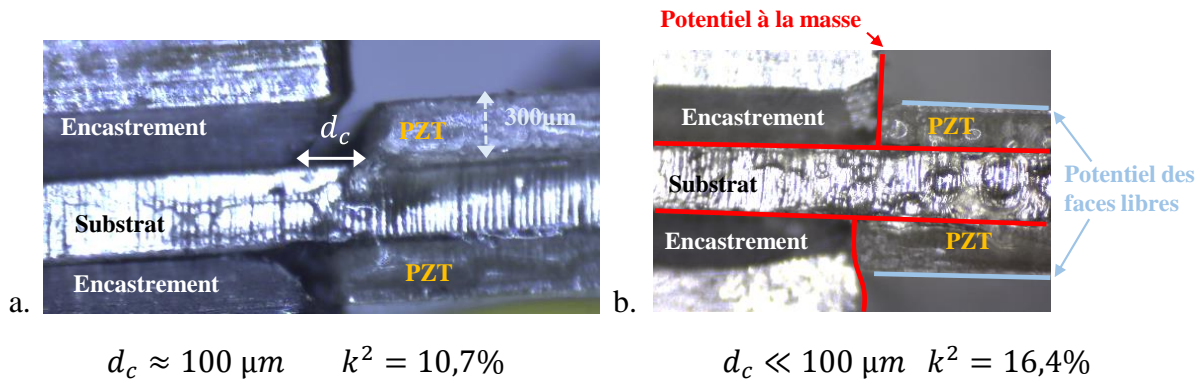


Figure IV.14 : a. Premier prototype PZT W fabriqué avant l'amélioration du procédé de fabrication. b. Prototype PZT W fabriqué avec le procédé de fabrication final sur lequel les potentiels sont représentés.

Une autre tentative d'amélioration du protocole de fabrication a été proposée au cours des expérimentations mais n'a pas été retenue : pour la fabrication du prototype en Figure IV.14.a, des morceaux de feuilles d'aluminium (dont l'épaisseur a été estimée à  $7 \mu\text{m}$  à l'aide d'un pied à coulisse) ont été utilisés afin de contrôler l'épaisseur de la colle entre les patches et le substrat et ainsi réaliser le contact électrique. Lors du collage des patches piézoélectriques, 4 à 6 morceaux d'aluminium ont été disposés entre le substrat et les patches. Le papier d'aluminium offre notamment l'avantage d'être conducteur et d'être très fin par rapport aux particules de colles conductrices ( $7 \mu\text{m}$  contre  $20 \mu\text{m}$ ). Or, lors de la fabrication et particulièrement lors de l'utilisation de l'étau (Figure IV.6.d), la répartition aléatoire des feuilles d'aluminium a induit des zones de concentrations de contraintes et a rendu les prototypes très fragiles. Ces derniers ont en effet cassé lors de leur caractérisation. Par conséquent, la solution des feuilles d'aluminium a été abandonnée. Un ponçage profond du substrat est finalement suffisant pour permettre une conduction entre le substrat et l'électrode des patches piézoélectriques.

En conclusion, nous avons proposé, réalisé et amélioré une méthode de fabrication de prototypes très fortement couplés. La configuration choisie pour les récupérateurs induit une baisse expérimentale du coefficient de couplage par rapport aux résultats obtenus avec des fixations parfaites considérées en simulation par éléments finis en 3D. Cependant, notre configuration évite la concentration des contraintes par rapport à la solution de Kim *et al.* [124]. La diminution du coefficient de couplage due aux défauts d'encastrement et à l'épaisseur de colle a pu être évaluée avec des simulations par éléments finis. Ces imperfections peuvent entraîner une diminution relative de 30% du coefficient de couplage sur les résultats



expérimentaux même si des efforts sont réalisés sur la précision de fabrication (diminution relative de 28% pour le PZT N entre le cas parfait et le cas considérant des distances de  $1 \mu\text{m}$  à l'encastrement et à la masse mobile ainsi qu'une épaisseur de colle de  $10 \mu\text{m}$ ). De très forts coefficients de couplage restent malgré tout attendus pour les prototypes réalisés. Dans la section suivante, nous abordons la caractérisation des récupérateurs fabriqués.

## IV.4. Caractérisation

Les prototypes sont caractérisés pour déterminer leurs performances en matière de coefficient de couplage, de bande passante et de densité de puissance. Une mesure d'impédance est tout d'abord un moyen simple et efficace pour déterminer le coefficient de couplage. Des mesures en vibrations sur une plage de fréquences et une plage de résistances de charges sont ensuite réalisées. Ces dernières permettent de déterminer expérimentalement la densité de puissance des récupérateurs ainsi que leurs bandes passantes attendues par leur exploitation avec un circuit électrique capable d'ajuster la fréquence de résonance.

### IV.4.1. Mesures d'impédances

Les mesures d'impédances permettent de déduire un certain nombre de paramètres pour chaque récupérateur : la fréquence de résonance, le coefficient de couplage ainsi que le facteur de qualité en petits signaux. Chaque prototype a été caractérisé par l'analyseur d'impédance 6500B de Wayne Kerr® à 0,1V. Les mesures sont données en Figure IV.15. Les fréquences de résonance de court-circuit  $f_{sc}$ , les coefficients de couplage électromécanique globaux  $k^2$  et les facteurs de qualité  $Q_m$  sont déterminés grâce à l'ajustement d'un modèle à 1DDL sur les points de mesures comme présenté dans le chapitre de Badel et Lefeuvre [27]. L'expression théorique de l'impédance du récupérateur modélisée pour le modèle à 1DDL utilisée pour l'ajustement peut être retrouvée dans l'équation (V-14) du chapitre V. Les paramètres déduits sont fournis dans le Tableau IV.2. Nous donnons également ; dans le Tableau IV.2, les valeurs obtenues par les simulations par éléments finis pour des fixations parfaites.

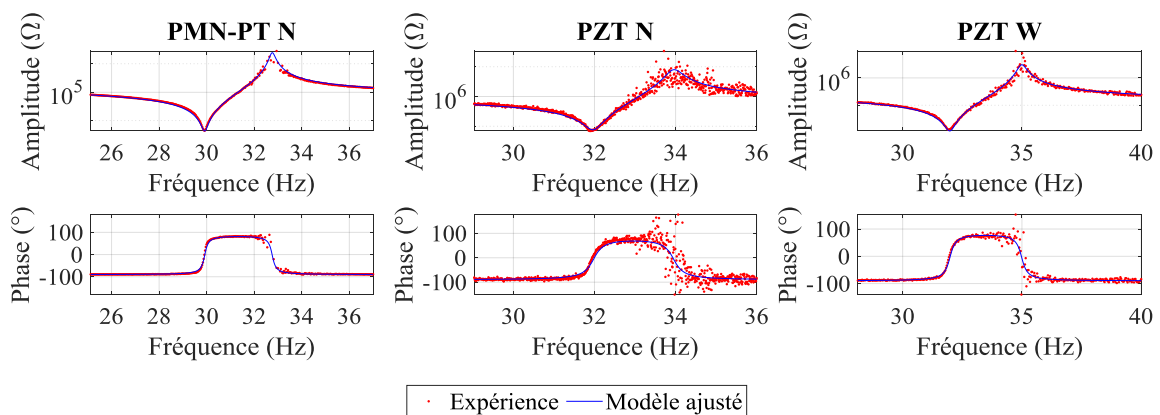


Figure IV.15: Amplitude et phase de l'impédance mesurée à 0,1V sur chaque prototype et courbes du modèle avec les paramètres ajustés.

Tableau IV.2 : Fréquence de résonance en court-circuit  $f_{sc}$ , coefficient de couplage global  $k^2$  et facteur de qualité  $Q_m$  des trois prototypes déduits des simulations par éléments finis pour des fixations parfaites et de la mesure d'impédance.

		PMN-PT N	PZT N	PZT W
Simulations par éléments finis en considérant des fixations parfaites	$f_{sc}$	34,3 Hz	34,8 Hz	35,8 Hz
	$k^2$	21,3%	14,1%	23,3%
Mesure d'impédance	$f_{sc}$	29,9 Hz	32,0 Hz	32,0 Hz
	$k^2$	16,6 %	11,3%	16,4%
	$Q_m$	130	85	91

Bien que les coefficients de couplage expérimentaux soient plus faibles que ceux attendus par la simulation 3D considérant des fixations parfaites (Tableau IV.2), les règles de conception et le procédé de fabrication proposés permettent d'atteindre de très forts coefficients de couplage globaux. Comme énoncé dans la section IV.3.1, l'épaisseur de colle et les distances à l'encastrement et à la masse mobile peuvent expliquer la variation de coefficient de couplage global entre la simulation et l'expérience. Les coefficients de couplage globaux des récupérateurs PMN-PMN-PT N, PZT N et PZT W sont divisés respectivement par 1,3, 1,24 et 1,42 entre la simulation et l'expérience.

Malgré tout, le coefficient de couplage du PMN-PT N atteint 16,6% alors que le coefficient de couplage matériau considéré en contrainte plane  $k_{31}^{l,2}$  est de 19,6%. Ainsi, l'utilisation d'une longue masse mobile est bien une solution efficace pour maximiser le coefficient de couplage. Bien que le coefficient de couplage du prototype PZT N soit déjà très important ( $k^2 = 11,3\%$ ), l'élargissement de la poutre entre le récupérateur PZT N et le récupérateur PZT W permet de multiplier expérimentalement le coefficient de couplage par 1,45. Par conséquent, l'élargissement de la poutre est également une solution très efficace pour maximiser le coefficient de couplage des récupérateurs piézoélectriques à base de céramique. Comme discuté dans la section suivante, les forts coefficients de couplage  $k^2$  des prototypes PMN-PT N, PZT N et PZT W vont permettre d'atteindre des bandes passantes intéressantes lorsqu'ils seront associés à des méthodes d'ajustement de fréquence électriques.

#### IV.4.2. Mesures vibratoires

##### a. Mesures réalisées et banc de test

Chaque prototype a été testé sous excitation vibratoire afin de déterminer la puissance de sortie et la bande passante pour différents niveaux d'accélération. Comme il sera expliqué dans la section IV.4.2.b, la bande passante déduite de mesures pour plusieurs valeurs de résistances et plusieurs valeurs de fréquences permet de connaître la bande passante attendue lorsque que le récupérateur est connecté à des couples optimaux de résistances et capacité. Par extension, cette bande passante est à minima celle attendue en utilisant certaines techniques non-linéaires d'ajustement de fréquence de résonance telle que la de FT-SECE [102].

Il est possible de caractériser les effets linéaires des récupérateurs à partir de mesures utilisant uniquement deux résistances de charge comme proposé dans l'article de Freychet *et al* [176]. Cependant, comme nous cherchons repérer les effets non-linéaires des récupérateurs à l'aide de

nos mesures, un plus grand nombre de résistance est considéré. En effet, les modèles (y compris les simulations par éléments finis) utilisés pour le dimensionnement sont linéaires mais les récupérateurs présentent des comportements non-linéaires lors des essais vibratoires. Afin de quantifier ces effets non-linéaires, nous mesurons donc la réponse vibratoire des prototypes pour plusieurs valeurs d'accélération sur un grand nombre de résistances et de fréquences. Chaque point de mesure est réalisé en excitant sinusoidalement le récupérateur à une fréquence  $f_{ext}$  et une amplitude d'accélération  $\mathcal{A}_B$  données et pour une résistance de charge  $R_{load}$  donnée. Une fois le régime établi atteint, on détermine la puissance de sortie grâce à la mesure de la tension  $v(t)$  sur une certaine durée en calculant  $P = V_{rms}^2/R_{load}$ , où  $V_{rms}$  est la valeur efficace de la tension  $v(t)$ . En réalisant cette manipulation pour plusieurs valeurs de fréquences, de résistances et d'accélération, nous déduisons la valeur de la puissance récupérée en fonction de la fréquence et de la résistance pour plusieurs niveaux d'accélération. Les prototypes ont été caractérisés pour 60 charges résistives comprises entre 1 k $\Omega$  et 10 M $\Omega$  sur 100 fréquences d'excitation, soit 6 000 mesures au total.

Les expérimentations vibratoires ont été réalisées au laboratoire SYMME de l'Université de Savoie Mont-Blanc. Pour réaliser les mesures, un script Matlab permet de contrôler une carte d'interface temps-réel dSPACE qui est connectée aux équipements d'expérimentations représentés sur la Figure IV.16 et la Figure IV.17. Le montage expérimental consiste en un pot vibrant électromagnétique (K2075E-HT) piloté avec la carte dSPACE par l'intermédiaire d'une rétroaction intégrant un accéléromètre (PCB Piezotronics 356A17). Cette rétroaction permet l'asservissement de l'amplitude de l'excitation. Le script Matlab définit le niveau et la fréquence de l'accélération et contrôle la résistance de charge aux bornes du récupérateur en pilotant la résistance à décade programmable Meatest M642. Le vibromètre OVF-5000 de Polytec connecté aux têtes lasers à fibre optique OVF-552 mesure le déplacement relatif d'un point de la masse mobile par rapport à l'encastrement. Un montage suiveur de tension permet de mesurer la tension en sortie du récupérateur sans modifier la résistance de charge effective vue par le récupérateur grâce à la très forte impédance d'entrée de l'amplificateur opérationnel.

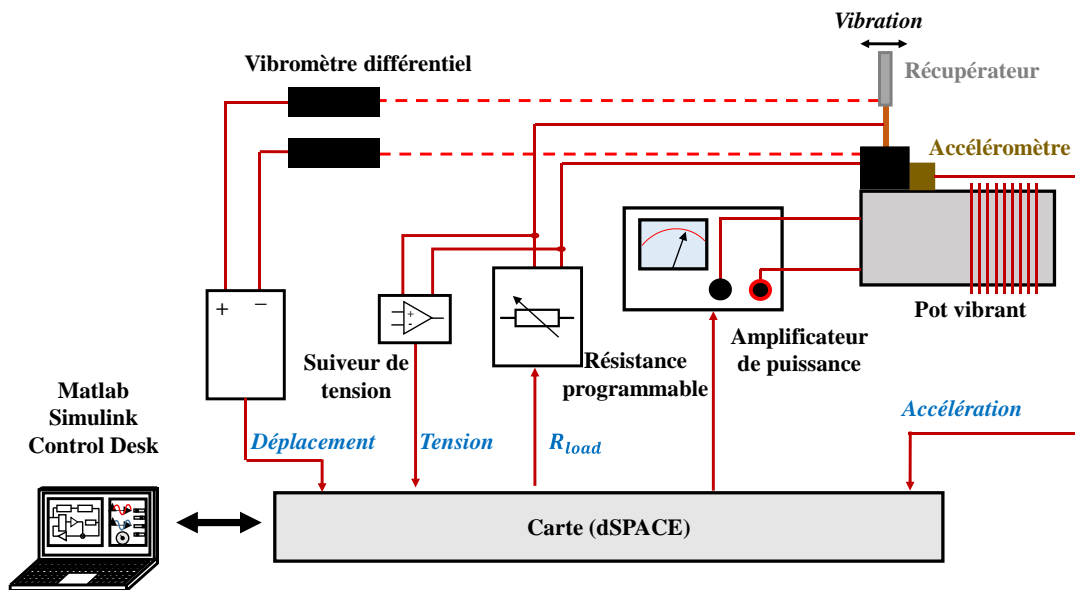


Figure IV.16 : Représentation du montage expérimental pour la mesure en vibrations

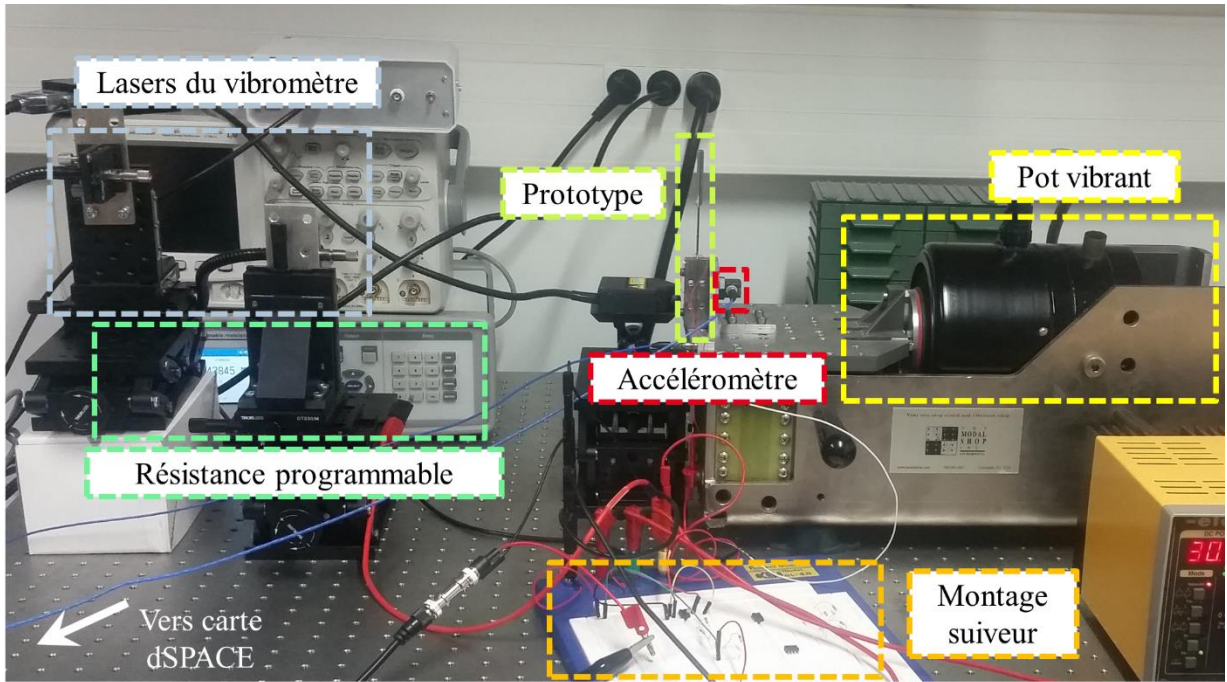


Figure IV.17 : Photographie du montage expérimental pour la mesure en vibrations. Le prototype PMN PT N est disposé sur le banc de mesure.

*b. Résultats de mesures*

La Figure IV.18, la Figure IV.19 et la Figure IV.20 représentent les puissances mesurées en fonction de la fréquence d'excitation  $f_{ext}$  et de la résistance de charges  $R_{load}$  pour différentes valeurs d'accélération pour les prototypes PMN-PT N, PZT N et PZT W.

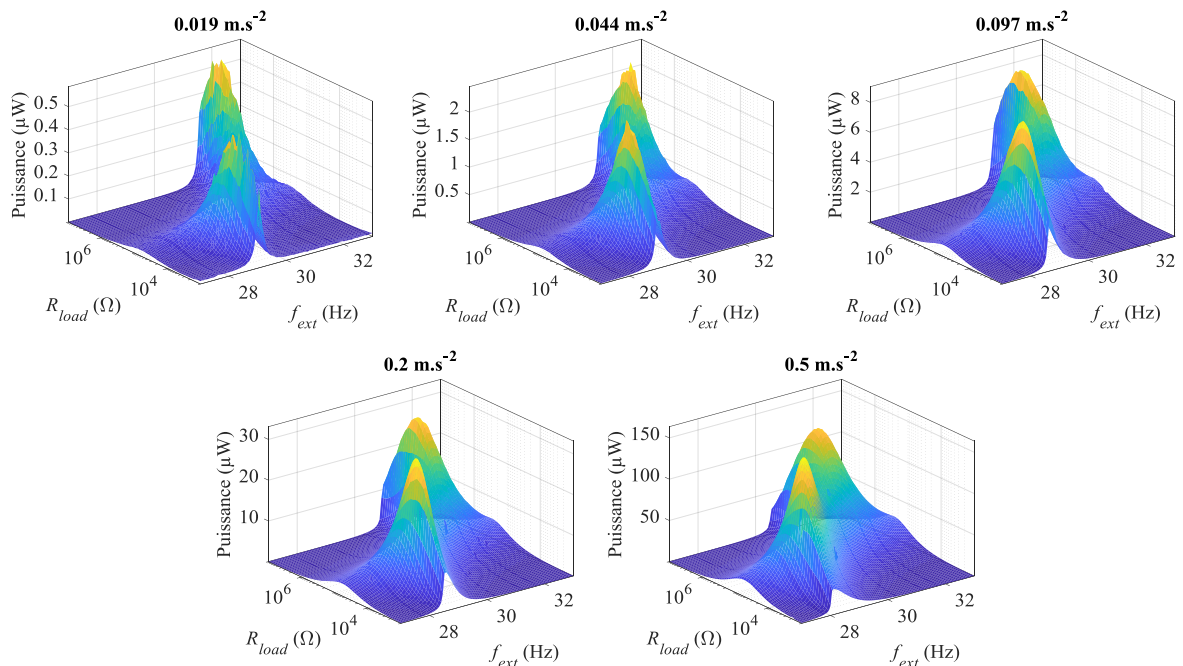


Figure IV.18 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PMN-PT N en fonction de la fréquence d'excitation  $f_{ext}$  et de la résistance de charge  $R_{load}$  pour différentes valeurs d'accélération

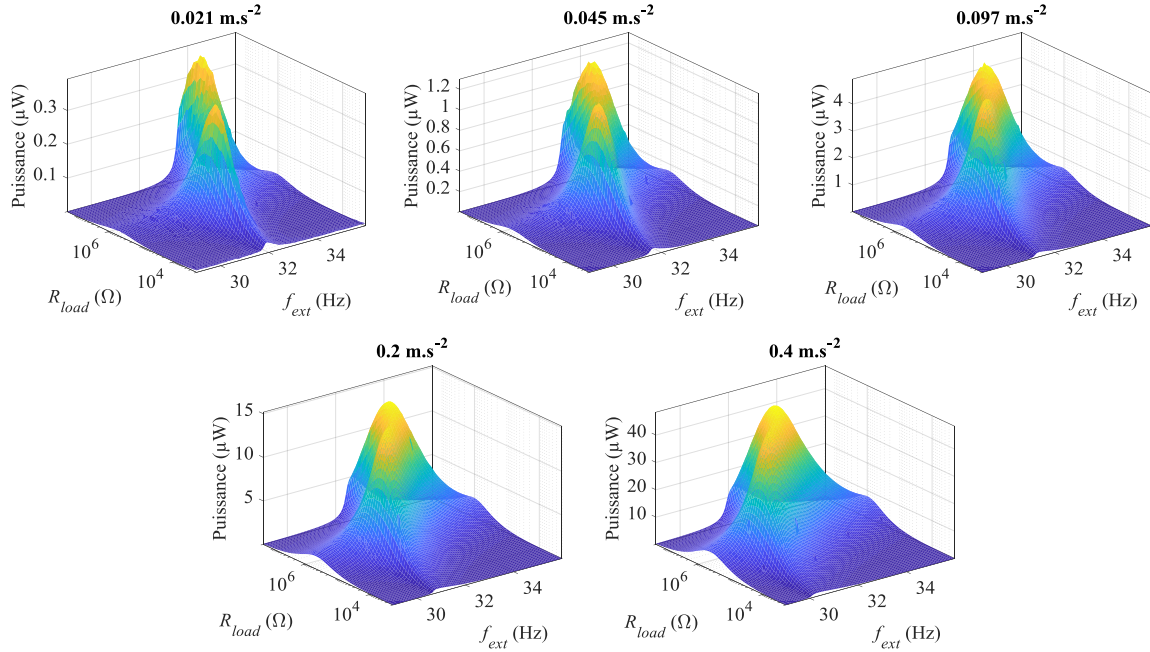


Figure IV.19 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PZT N en fonction de la fréquence d'excitation  $f_{ext}$  et de la résistance de charge  $R_{load}$  pour différentes valeurs d'accélération

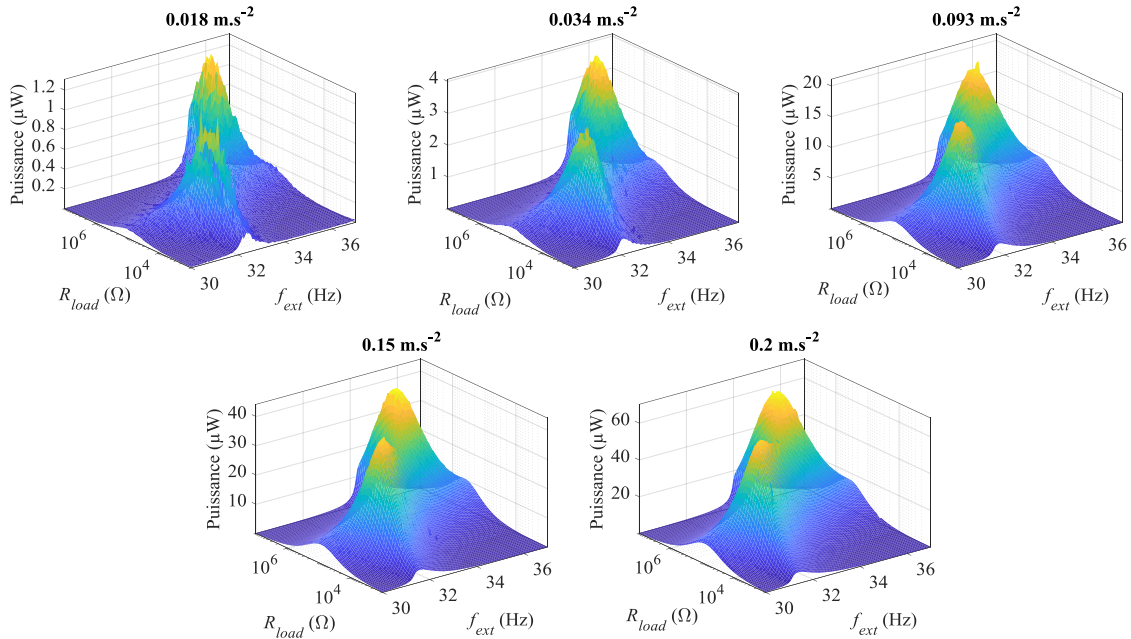


Figure IV.20 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PZT W en fonction de la fréquence d'excitation  $f_{ext}$  et de la résistance de charge  $R_{load}$  pour différentes valeurs d'accélération

On observe sur chacune des figures précédentes la présence des deux pics caractéristiques des mesures de puissances en fonction de la résistance et de la fréquence observés sur les récupérateurs d'énergie piézoélectriques très fortement couplés. Tel que discuté dans la section I.4.4, il existe en effet deux pics pour lesquels la puissance récupérée est maximale pour deux couples  $(f_{ext} ; R_{load})$ . Ces deux pics de puissance, que l'on note  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$ , interviennent aux fréquences, notées  $f_a$  et  $f_b$ , respectivement très proches de la fréquence de résonance en

court-circuit et de la fréquence de résonance en circuit ouvert<sup>13</sup>. Ces fréquences  $f_a$  et  $f_b$  sont respectivement associées aux résistances optimales notées  $R_a^{opt}$  et  $R_b^{opt}$ . Pour les récupérateurs piézoélectriques, la valeur de la résistance  $R_b^{opt}$  est toujours supérieure à la valeur de la résistance  $R_a^{opt}$ . Pour nos récupérateurs, les valeurs de  $R_a^{opt}$  et  $R_b^{opt}$  sont respectivement proches du kilo-ohm et proches du méga-ohm.

A partir des mesures de puissance de chacun des récupérateurs, nous pouvons déterminer, à chaque fréquence, la valeur de résistance qui maximise la puissance. Ainsi, nous pouvons tracer sur la Figure IV.21 la puissance en fonction de la fréquence pour chaque récupérateur lorsque les résistances optimales sont considérées en sortie. Les bandes de fréquences  $\Delta f$  représentées par des doubles flèches sur la figure correspondent aux bandes passantes pour chaque niveau d'accélération. Telle que définie dans la section I.4.4, la bande passante correspond à la bande de fréquences pour laquelle la puissance récupérée est supérieure à la moitié de la puissance maximale ( $P^{max}$ ) lorsque des couples optimaux de résistances et de capacités sont considérées en sortie du récupérateur. Comme des non-linéarités et des pertes diélectriques sont expérimentées par nos récupérateurs, les puissances mesurées n'ont pas la même valeur aux deux pics de puissance  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  et la puissance maximale  $P^{max}$  est donnée par la valeur maximale des deux pics ( $P^{max} = \max(P_a^{max}, P_b^{max})$ ).

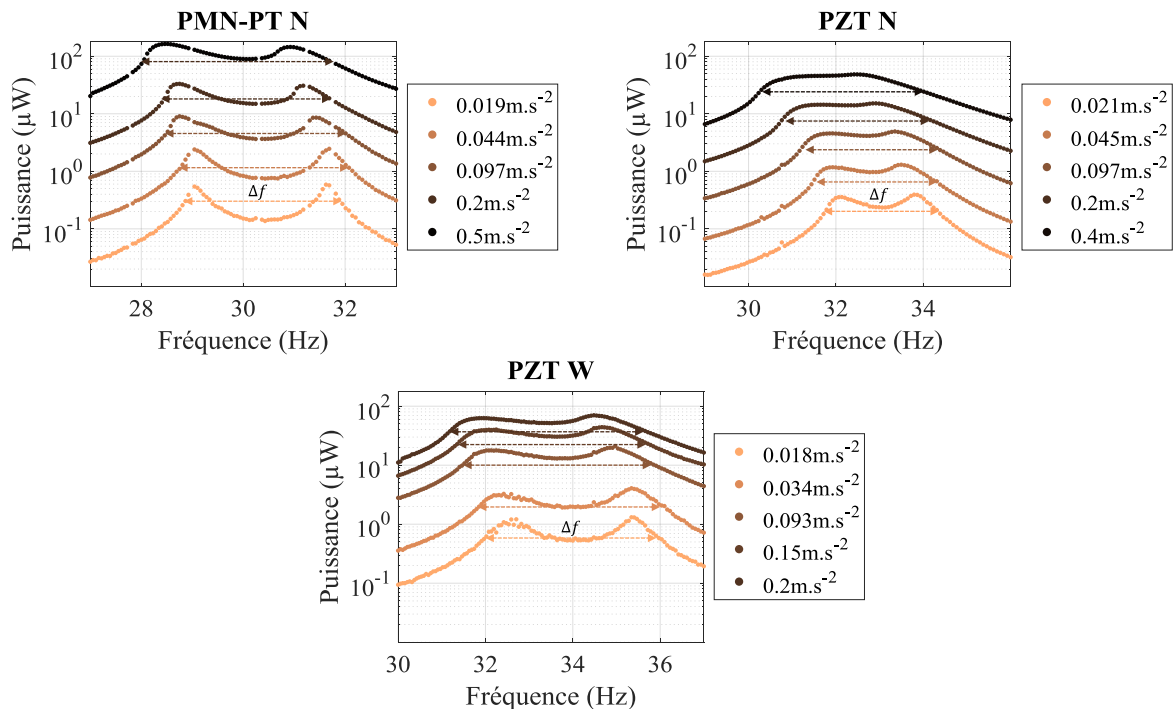


Figure IV.21 : Puissance mesurée en sortie de chaque prototype en fonction de la fréquence pour des résistances optimales.  $\Delta f$  représente les bandes passantes absolues attendues à la moitié de la puissance maximale par l'utilisation de couples de résistances et capacités optimaux.

<sup>13</sup> La fréquence de résonance est légèrement décalée entre la mesure de résonance en court-circuit ( $f_{sc}$ ) et la mesure de résonance à la résistance optimale ( $f_a$ ) à cause de l'amortissement électrique. Les fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert sont parfois appelées respectivement fréquence de résonance et fréquence d'antirésonance. Cependant, la fréquence résonance en circuit ouvert n'a aucun lien avec un phénomène d'antirésonance mécanique.

Malgré les non-linéarités et les pertes, on peut considérer sans grande erreur que les couples optimaux de résistances et de capacités permettent de rejoindre les deux pics de puissance par une courbe analogue à une droite tel qu'illustré sur la Figure IV.22 [177].

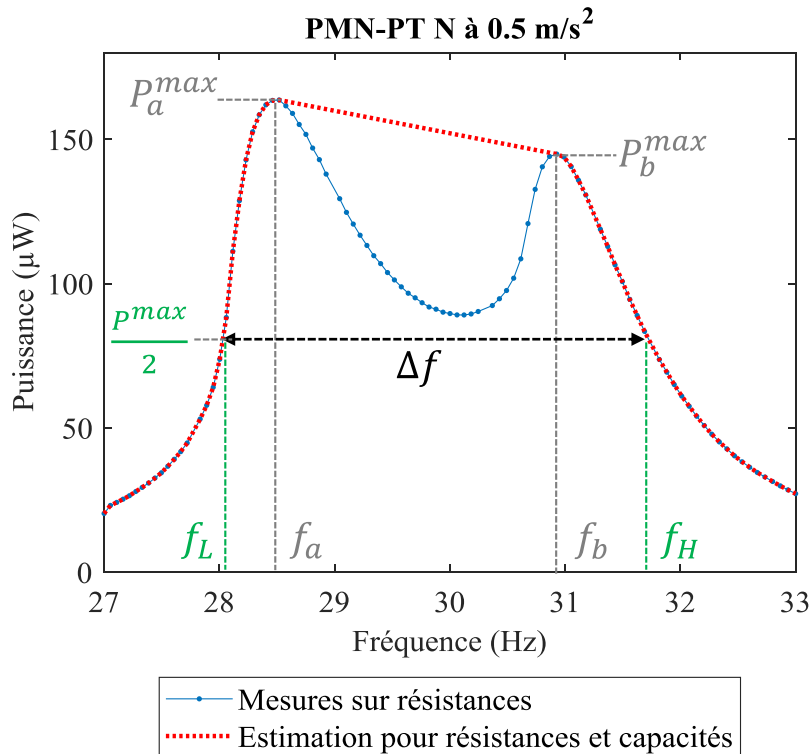


Figure IV.22 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PMN-PT N à 0,5 m/s<sup>2</sup> pour les charges résistives optimales et estimation faite sur la puissance récupérée avec des couples de résistances et capacités optimaux pour le calcul de la bande passante

A partir de cette considération sur la puissance récupérée par les couples optimaux de résistances et de capacités, nous calculons la bande passante  $\Delta f$  en prenant en compte la bande de fréquence comprise entre  $f_a$  et  $f_b$ . De cette manière, nous incluons la bande  $[f_a; f_b]$  dans le calcul de  $\Delta f$  même si la puissance mesurée avec des charges résistives sur nos récupérateurs est inférieure à  $P^{max}/2$  à certaines fréquences entre  $f_a$  et  $f_b$ . Entre d'autres termes, nous considérons que l'utilisation de couples optimaux de résistances et capacités ou d'une technique non-linéaire électrique permet de récupérer une puissance supérieure à  $P^{max}/2$  à chaque fréquence entre  $f_a$  et  $f_b$ . Nous pouvons par conséquent déterminer les bandes passantes  $\Delta f$  pour chaque valeur d'accélération à partir de la Figure IV.21. Le Tableau IV.3 regroupe les bandes passantes absolues et relatives pour chaque accélération. Nous donnons également dans le Tableau IV.3 la fréquence centrale  $f_c$  exprimée par  $f_c = (f_L + f_H)/2$  avec  $f_L$  et  $f_H$  respectivement les fréquences basses et hautes telles qu'illustrées sur la Figure IV.22.

Les valeurs maximales de densités de puissance normalisées ( $NPD^{max}$ ) pour chaque récupérateur et à chaque niveau d'accélération sont également relevées dans le Tableau IV.3. La densité de puissance normalisée (NPD), exprimée par l'équation (IV-2), est définie par la puissance moyenne  $P$  récupérée normalisée par le carré de l'amplitude de l'accélération  $\mathcal{A}_B$  et le volume  $\mathcal{V}$ . Le volume correspond généralement au volume du global  $\mathcal{V}_g$  correspondant à l'encombrement des récupérateurs sans tenir compte des déplacements. Le volume  $\mathcal{V}_g$ , exprimé par (IV-3) pour nos récupérateurs, est pris égal au volume du parallélépipède rectangle pouvant

contenir le récupérateur. Par ailleurs, nous pouvons aussi calculer la NPD des récupérateurs en considérant le volume balayé  $\mathcal{V}_b$ . Le volume  $\mathcal{V}_b$  tient compte des déplacements comme exprimé en (IV-4) où  $d_b$  est l'amplitude maximale de déplacement en bout de masse mobile déduite des mesures par vibromètre. La NPD considérant le volume balayé  $\mathcal{V}_b$  noté  $\text{NPD}_b$  permet de comparer les récupérateurs en matière d'encombrement pour les applications concrètes. La NPD considérant le volume global  $\mathcal{V}_g$  noté  $\text{NPD}_g$ , quant à elle, permet d'analyser l'influence des pertes sur la puissance récupérée en fonction du niveau d'accélération,

$$\text{NPD} = \frac{P}{\mathcal{A}_B^2 \mathcal{V}} \quad (\text{IV-2})$$

$$\mathcal{V}_g = B(L_m + L_b)H_m \quad (\text{IV-3})$$

$$\mathcal{V}_b = B(L_m + L_b)(H_m + 2d_b) \quad (\text{IV-4})$$

Les données du Tableau IV.3 indiquent que les récupérateurs réalisés présentent de larges bandes passantes relatives. A la plus faible accélération (environ  $0,02\text{m/s}^2$ ), les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W présentent respectivement 10,1%, 7,8% et 11,3% de bandes passantes relatives. Ces bandes passantes sont suffisantes pour résoudre des problèmes de variations de fréquence des vibrations dans certaines applications tels que les cas recensés dans la section I.3.1.



Tableau IV.3 : Résultats (bande passante et densité de puissance) des mesures en résistances et fréquences pour les prototypes fabriqués

	Volume du récupérateur	Amplitude de l'accélération	Fréquence centrale	Large de bande absolue	Bande passante relative	Puissance maximale	NPD à la puissance maximale	Déplacement en bout de masse	Volume balayé	NPD avec déplacement en bout de masse
	$V_r$	$\mathcal{A}_B$	$f_c$	$\Delta f$	$\Delta f/f_c$	$P_{rms}^{max}$	$NPD_g^{max}$	$d_b$	$V_b$	$NPD_b^{max}$
<b>PMN-PT N</b>	4,5 cm <sup>3</sup>	0,019 m.s <sup>-2</sup>	30,4 Hz	3,06 Hz	10,1%	0,586 μW	355 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0679 mm	4,62 cm <sup>3</sup>	346 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,044 m.s <sup>-2</sup>	30,4 Hz	3,25 Hz	10,7%	2,46 μW	285 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,129 mm	4,73 cm <sup>3</sup>	271 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,097 m.s <sup>-2</sup>	30,3 Hz	3,53 Hz	11,7%	9,04 μW	213 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,263 mm	4,97 cm <sup>3</sup>	193 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,199 m.s <sup>-2</sup>	30,1 Hz	3,36 Hz	11,2%	33,1 μW	187 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,424 mm	5,26 cm <sup>3</sup>	160 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,499 m.s <sup>-2</sup>	29,9 Hz	3,67 Hz	12,3%	163 μW	146 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,631 mm	5,64 cm <sup>3</sup>	116 kg.s.m <sup>-3</sup>
<b>PZT N</b>	3,75 cm <sup>3</sup>	0,021 m.s <sup>-2</sup>	33,1 Hz	2,59 Hz	7,8%	0,393 μW	236 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0462 mm	3,78 cm <sup>3</sup>	234 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,045 m.s <sup>-2</sup>	32,9 Hz	2,84 Hz	8,6%	1,30 μW	173 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0714 mm	3,80 cm <sup>3</sup>	171 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,097 m.s <sup>-2</sup>	32,8 Hz	3,13 Hz	9,5%	4,93 μW	138 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,125 mm	3,84 cm <sup>3</sup>	135 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,199 m.s <sup>-2</sup>	32,5 Hz	3,43 Hz	10,6%	15,2 μW	102 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,203 mm	3,90 cm <sup>3</sup>	98,5 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,399 m.s <sup>-2</sup>	32,1 Hz	3,75 Hz	11,7%	48,4 μW	80,9 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,336 mm	4,00 cm <sup>3</sup>	75,8 kg.s.m <sup>-3</sup>
<b>PZT W</b>	18,75 cm <sup>3</sup>	0,018 m.s <sup>-2</sup>	34,0 Hz	3,85 Hz	11,3%	1,31 μW	221 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0286 mm	18,9 cm <sup>3</sup>	220 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,034 m.s <sup>-2</sup>	34,0 Hz	4,20 Hz	12,4%	4,07 μW	182 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0444 mm	18,9 cm <sup>3</sup>	181 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,093 m.s <sup>-2</sup>	33,7 Hz	4,30 Hz	12,8%	21,1 μW	130 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,0948 mm	19,1 cm <sup>3</sup>	128 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,145 m.s <sup>-2</sup>	33,6 Hz	4,44 Hz	13,2%	44,2 μW	111 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,138 mm	19,3 cm <sup>3</sup>	108 kg.s.m <sup>-3</sup>
		0,197 m.s <sup>-2</sup>	33,5 Hz	4,62 Hz	13,8%	70,2 μW	97,0 kg.s.m <sup>-3</sup>	0,165 mm	19,4 cm <sup>3</sup>	93,9 kg.s.m <sup>-3</sup>

Le prototype PMN PT N produit plus de puissance que le PZT N bien que les deux récupérateurs aient quasiment la même valeur de  $B_f^2/M$ . Les pertes sont donc plus importantes pour le prototype PZT N. Comme détaillé dans le chapitre V, les pertes globales de nos récupérateurs peuvent être majoritairement attribuées aux pertes des matériaux piézoélectriques à forte accélération. La céramique PZT induit donc davantage de pertes dans le récupérateur PZT N que le matériau PMN-PT monocristallin dans le récupérateur PMN-PT N. En revanche, nous pouvons remarquer que les valeurs de  $NPD^{\max}$  à chaque niveau d'accélération sont les mêmes pour les récupérateurs PZT N et PZT W. A la différence de leurs largeurs, les deux récupérateurs ont en effet la même configuration et sont composés des mêmes matériaux. La largeur de la poutre ne semble donc pas avoir d'influence sur les pertes matériaux. Grâce à son grand coefficient de couplage ( $k^2 = 16,4\%$ ), le PZT W a cependant une bande passante bien plus importante que celle du PZT N (+45% de bande passante pour l'accélération d'environ  $0,02 \text{ m.s}^2$ ). Augmenter la largeur d'un récupérateur à base de céramique piézoélectrique permet donc d'augmenter la bande passante sans avoir d'effet sur la densité de puissance.

### c. Discussion sur les effets non-linéaires

Nous pouvons observer sur la Figure IV.21 que la puissance récupérée augmente avec l'amplitude de l'accélération. D'après l'expression de la puissance maximale donnée par le modèle linéaire en (IV-1), la puissance maximale devrait être proportionnelle au carré de l'accélération et la NPD devrait rester constante. Or, un amortissement non-linéaire entraîne une décroissance de la NPD calculée sur le volume  $\mathcal{V}_g$ . On remarque par ailleurs dans le Tableau IV.3 que la bande passante des récupérateurs augmente lorsque l'accélération augmente et que la fréquence centrale diminue. Tous ces comportements sont attribués aux effets non linéaires des matériaux piézoélectriques discutés dans les travaux de Leadenham *et al.* [178] et dans le chapitre suivant.

Afin d'analyser le comportement fréquentiel des récupérateurs, la NPD (exprimée en (IV-2)) de chaque récupérateur est représentée en fonction de la fréquence pour les résistances optimales à chaque accélération dans la Figure IV.23. Cette Figure IV.23 révèle en effet la diminution des fréquences  $f_a$  et  $f_b$  (pour lesquelles les pics de puissances sont atteints) avec l'augmentation du niveau d'accélération. Cette caractéristique traduit la présence d'un terme de raideur non-linéaire assouplissant dans l'équation de mouvement des récupérateurs. On appelle également cette caractéristique effet de *softening* en anglais. Par ailleurs, la diminution de la NPD des récupérateurs et l'élargissement fréquentiel des pics avec le niveau d'accélération démontrent la présence d'un amortissement non-linéaire. La Figure IV.24 représente l'évolution de la valeur maximale de la NPD et de la bande passante en fonction de l'amplitude de l'accélération pour chaque récupérateur.

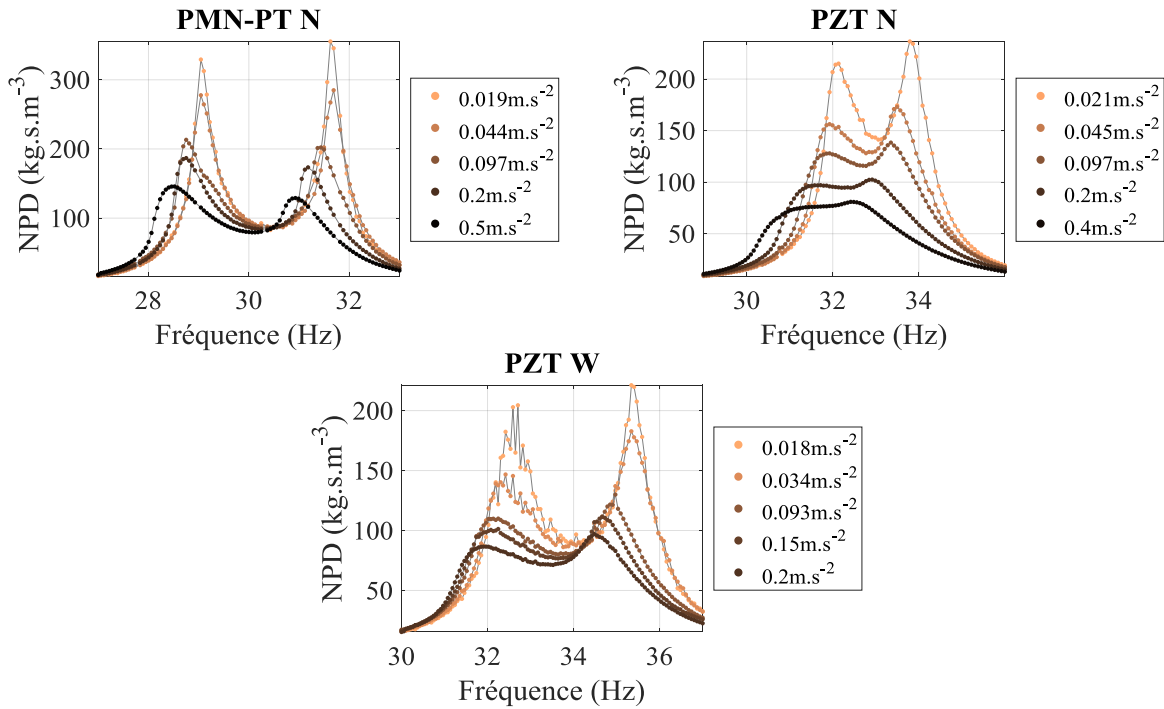


Figure IV.23 : Densités de puissance normalisées (NPD) calculées sur le volume des récupérateurs  $V_r$  pour chaque prototype en fonction de la fréquence pour des résistances optimales.

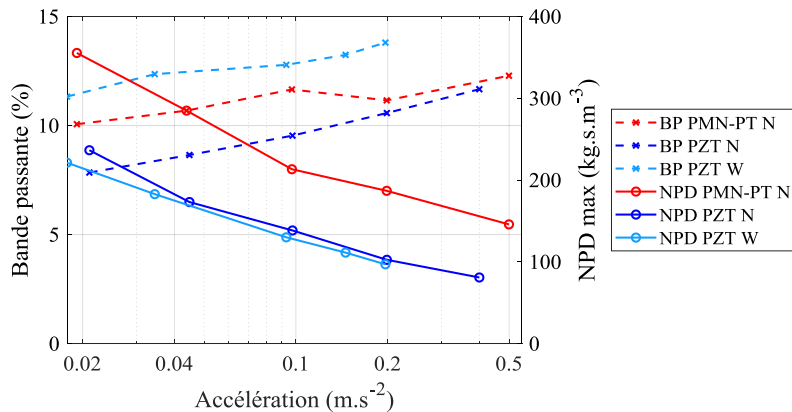


Figure IV.24 : Bande passante (BP) et  $\text{NPD}^{\text{max}}$  calculées selon le volume des récupérateurs pour chaque prototype en fonction du niveau d'accélération

On remarque alors que les valeurs maximales de la NPD sont divisées par 2 environ pour chaque prototype lorsque l'accélération est multipliée par 10 (de 0,02  $\text{m.s}^{-2}$  et 0,2  $\text{m.s}^{-2}$ ), tandis que la largeur de bande augmente de 11%, 34% et 22% respectivement pour les prototypes PMN-PT N, PZT N et PZT W. Nos récupérateurs ont de très bonnes NPDs à basse accélération car ils ont de faibles fréquences de résonance, de longues masses mobiles et peu de pertes à basse accélération. Les patchs piézoélectriques sont donc soumis à de fortes de contraintes même pour de très faibles niveaux d'accélération. Cependant, lorsque l'amplitude de l'accélération augmente, les pertes augmentent et la NPD diminue. Dans le cadre de la conception d'un récupérateur destiné à une application précise, une étude des contraintes maximales en jeux serait nécessaire lors du dimensionnement. Alors que de bonnes performances à faible accélération sont un atout pour les applications où les vibrations sont de

très faibles amplitudes (comme les conduits des systèmes d'air conditionnés [16]), soumettre les matériaux piézoélectriques à de trop fortes contraintes réduit la densité puissance et affecte la robustesse des récupérateurs.

En conclusion, les caractérisations réalisées par des mesures d'impédances et des mesures vibratoires ont permis de déterminer les performances des récupérateurs fabriqués. Les prototypes présentent de très bons coefficients de couplage  $k^2$  (11,3%, 16,4% et 16,6%), de larges bandes passantes relatives (7,8%, 11,3% et 10,1%) et des fortes densités de puissance. Les effets non-linéaires des matériaux piézoélectriques augmentent sensiblement la bande passante des récupérateurs mais affectent fortement la densité de puissance lorsque le niveau de l'accélération augmente. Nous comparons nos résultats à l'état de l'art dans la section suivante.

#### IV.4.3. Comparaison avec l'état de l'art

Les prototypes réalisés sont parmi les récupérateurs les plus couplés de l'état de l'art et, pour la première fois, des prototypes très fortement couplés utilisant des céramiques PZT sont envisagés pour l'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques. Le Tableau IV.4 recense les récupérateurs d'énergie piézoélectriques les plus couplés de l'état de l'art. Dans ce tableau, nous comparons nos prototypes à d'autres récupérateurs selon les coefficients de couplage globaux  $k^2$ , les facteurs de qualité  $Q_m$ , les densités de puissance maximales  $NPD^{\max}$  et les bandes passantes relatives. Nous fournissons également les valeurs du facteur de mérite  $k_e^2 Q_m$  qui est un critère de performance important des récupérateurs piézoélectriques notamment pour l'utilisation des techniques d'extraction d'énergie non-linéaires [27]. De plus, comme réalisé dans la section I.5.2.f, nous étudions la facteur de mérite appelée Optimisation Structurelle du Couplage et notée SCO pour *Structural Coupling Optimization* qui permet de comparer l'aptitude des structures à bénéficier du coefficient de couplage du matériau. Elle correspond au coefficient de couplage global du récupérateur normalisé par le coefficient de couplage matériau maximal pris entre  $k_{31}^l$  et  $k_{31}^w$ . Les coefficients  $k_{33}^2$  sont donnés pour les structures sollicitant le mode 33. L'expression de la SCO est donnée en (IV-5)

$$SCO = \frac{k^2}{\max(k_{31}^{l^2}; k_{31}^{w^2})} \quad (IV-5)$$

Lorsqu'aucune information n'est disponible sur la bande passante des récupérateurs associés à des techniques d'ajustement de fréquence, nous donnons la bande passante théorique attendue par l'utilisation de couples optimaux de résistances et capacités à partir des valeurs de  $k^2$  et  $Q_m$ .

Les dimensions des récupérateurs de l'état de l'art données dans le Tableau IV.4 ne prennent pas en compte le volume balayé lors des vibrations car l'amplitude des déplacements est rarement fournie dans les références. Les volumes de nos prototypes considèrent, quant à eux, le volume balayé à la plus forte accélération de mesure car les déplacements ont une forte influence sur le volume balayé pour nos récupérateurs. Les résultats du Tableau IV.4 sont résumés graphiquement dans la Figure IV.25 en plaçant les récupérateurs en fonction de leur  $NPD^{\max}$  et de leur bande passante.

Tableau IV.4 : Comparaison des récupérateurs les plus couplés de l'état de l'art en matière de coefficient de couplage, densité de puissance et bande passante mesurée ou théorique.

	Ref.	Mét.	Matériau	$k_{31}^l{}^2$ - $k_{31}^w{}^2$	$Q_m$	$k^2$	$k_e^2 Q_m$	SCO	$\mathcal{V}_g$ ou $\mathcal{V}_b$	$f_{sc}$	$\mathcal{A}_B$	$P_{rms}^{max}$	$NPD^{max}$	Bande Passante
Prototypes à base de monocristaux	Badel et Lefevre [58]	—	PZN-PT	85%-N/A	28	53,0%	32	64%	1,00 cm <sup>3</sup>	48,5 Hz	0,707 m.s <sup>-2</sup>	47,1 μW	94,3 kg.s.m <sup>-3</sup>	39,0% <sup>□</sup>
	Ahmed Seddik <i>et al.</i> [54], [55]	►	PZN-PT	85%*-N/A	20 <sup>•</sup>	49,9%	20	59%*	6,75 cm <sup>3</sup>	208 Hz	0,981 m.s <sup>-2</sup>	480 μW	73,9 kg.s.m <sup>-3</sup>	32,7%
	Morel <i>et al.</i> [140]	►	PZN-PT	85%-N/A	50	15,4%	9,1	19%	1,56 cm <sup>3</sup> •	253 Hz	5,69 m.s <sup>-2</sup>	67μW	13,2 kg.s.m <sup>-3</sup>	7,5%
	Tang <i>et al.</i> [141]		PMN-PT	N/A-N/A	22 <sup>•</sup>	6,0% <sup>•</sup>	1,4	N/A	1,21 mm <sup>3</sup>	406 Hz	14,7 m.s <sup>-2</sup>	7,18 μW	27,2 kg.s.m <sup>-3</sup>	8,4% <sup>□</sup>
	<b>PMN-PT N</b>	—	PMN-PT	20%- 68%	<b>130</b>	<b>16,6%</b>	26	24%	5,64 cm <sup>3</sup>	29,1 Hz	0,019 m.s <sup>-2</sup>	0,586 μW	<b>283</b> kg.s.m <sup>-3</sup>	<b>10,1%</b>
Prototypes à base de céramiques	Zhao <i>et al.</i> [64]	©	PZT-5H	18%-43%	40	6,5%	2,78	15%	0,914 cm <sup>3</sup>	673 Hz	9,81 m.s <sup>-2</sup>	141 μW	1,6 kg.s.m <sup>-3</sup>	6,9%
	Kuang <i>et al.</i> [134]	◇	PZT-5	48%*-N/A	60	11,5%	7,8	24%*	1,53 cm <sup>3</sup> •	189 Hz	2,5 m.s <sup>-2</sup>	5220 μW	54,6 kg.s.m <sup>-3</sup>	9,3%
	Benchemoul <i>et al.</i> [142]	W	PZT dur	N/A-N/A	200 <sup>•</sup>	12,0%	27,2	N/A	0,70 cm <sup>3</sup> •	42,5 Hz	1,96 m.s <sup>-2</sup>	400 μW	165 kg.s.m <sup>-3</sup>	7,6% <sup>□</sup>
	Siddiqui <i>et al.</i> [117]	▲	PZT-5H	19%-46%	65	12,3%	9,1	27%	3,75 mm <sup>3</sup>	116 Hz	2,45 m.s <sup>-2</sup>	88,8 μW	3,94 kg.s.m <sup>-3</sup>	9,7% <sup>□</sup>
	Kim <i>et al.</i> [124]	—	PZT-5A	12%-27%	32	12,5%	4,6	46%	12,3 cm <sup>3</sup>	41,6 Hz	0,500 m.s <sup>-2</sup>	160 μW	52,2 kg.s.m <sup>-3</sup>	12,2% <sup>□</sup>
	<b>PZT N</b>	—	PZT-5A	15% - 34%	85	11,3%	11	33%	4,00 cm <sup>3</sup>	32,1 Hz	0,021 m.s <sup>-2</sup>	0,393 μW	<b>221</b> kg.s.m <sup>-3</sup>	7,8%
	<b>PZT W</b>	W —	PZT-5A	15% - 34%	91	<b>16,4%</b>	18	<b>48%</b>	19,4 cm <sup>3</sup>	32,5 Hz	0,018 m.s <sup>-2</sup>	1,31 μW	<b>214</b> kg.s.m <sup>-3</sup>	<b>11,3%</b>

— : Longue masse, ► : Poutre effilée selon l'épaisseur, ▲ : Poutre effilée selon la largeur

|||| : Electrodes inter-digitées, ◇ : APA, © : Poutre commerciale sans masse, W : Poutre large <sup>□</sup> : Déduit de la théorie en considérant  $k^2$  et  $Q_m$

• : valeurs approximatives déduites de figures ou photographie, \* : le mode 33 est utilisé.

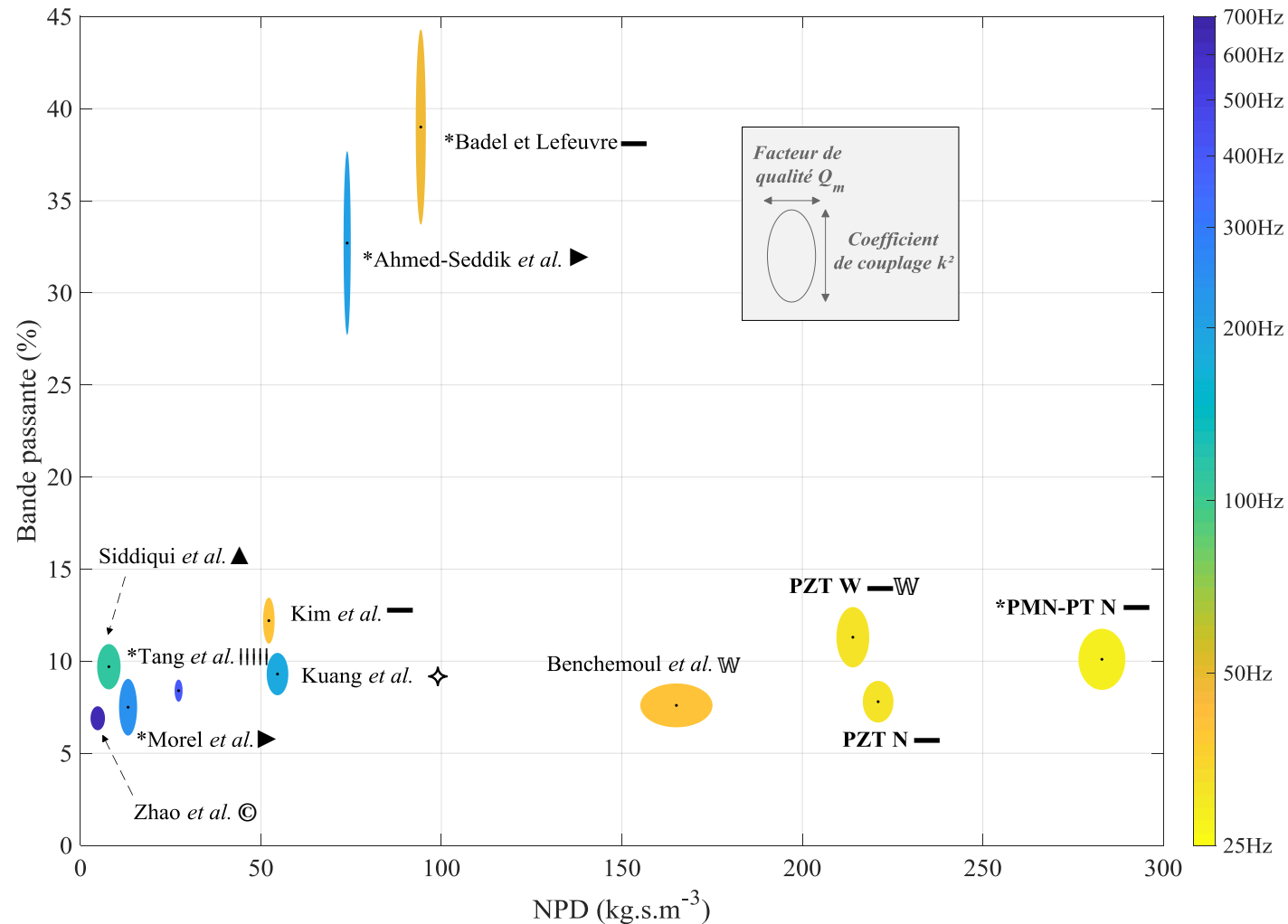


Figure IV.25 : Classement des récupérateurs très fortement couplés de l'état de l'art et ceux réalisés durant cette thèse (notés en gras) en fonction de la NPD et de la bande passante. La largeur et la hauteur des ellipses correspondent respectivement au facteur de qualité et au coefficient de couplage. La couleur des ellipses correspond à la fréquence de résonance en court-circuit. Les '\*' correspondent aux récupérateurs utilisant des matériaux monocristallins.

Nos prototypes présentent de très fortes valeurs de  $k^2$  et de  $SCO$  lorsqu'ils sont comparés à l'état de l'art. Le prototype PZT W permet notamment de dépasser le coefficient de couplage de 31% par rapport à l'état de l'art des récupérateurs à base de céramique. Son coefficient de couplage global  $k^2$  est de 16,4% alors que celui du meilleur récupérateur présenté par Kim *et al.* [124] est de 12,5%. Le prototype PMN-PT N ne peut concurrencer les prototypes de Badel et Lefeuvre [58] et Ahmed-Seddik *et al.* [54] en matière de coefficient de couplage global car le PZN-PT polarisé selon l'axe [011] utilisé dans ces travaux présente un très fort coefficient de couplage matériau lorsqu'il est utilisé sur des poutres étroites. Cependant, le processus d'optimisation du prototype PMN-PT N a permis d'atteindre un coefficient de couplage expérimental très proche du coefficient de couplage matériau considéré en contrainte plane  $k_{31}^{l,2}$  tout en concevant un récupérateur à très forte densité de puissance. En effet, la NPD du PMN-PT N (283 kg.s.m<sup>-3</sup> @0,019 m/s<sup>2</sup>) est 3 fois supérieure à celle des récupérateurs de Badel et Lefeuvre et de Ahmed-Seddik *et al.*

Les densités de puissances sont très importantes avec les récupérateurs réalisés d'une part grâce aux faibles pertes des récupérateurs et d'autre part grâce à l'utilisation d'une longue masse mobile. Une longue masse mobile permet en effet d'optimiser le volume disponible en le remplissant au mieux avec du matériau. De plus, la puissance étant proportionnelle au terme  $B_f^2/M$  qui est homogène à une masse en kilogramme comme énoncé dans l'équation (IV-1), augmenter la longueur de la masse mobile par rapport à la longueur totale (i.e. augmenter  $L_m/(L_b + L_m)$ ) permet d'augmenter la masse répartie dans le volume global  $\mathcal{V}_g$ . Par ailleurs, il peut être démontré que (non réalisé dans ce manuscrit), même si une longue masse mobile augmente le volume balayé en augmentant le déplacement en bout de masse pour une accélération donnée, le gain est suffisant en puissance pour maximiser la densité de puissance comparé à un système à masse mobile courte. L'intérêt d'une longue masse mobile pour la maximisation de la puissance a notamment été validé expérimentalement par Jia et Seshia [145].

## IV.5. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié la fabrication et la caractérisation de récupérateurs très fortement couplés par l'intermédiaire de 3 prototypes ayant de longues masses mobiles. Nous avons proposé un procédé de fabrication permettant de minimiser l'influence des défauts de fabrication. Nous avons montré à l'aide de simulations par éléments finis que le mode de réalisation de l'encastrement et l'épaisseur de la colle ont un effet non-négligeable sur le coefficient de couplage global. Un mauvais encastrement et une grande épaisseur de colle réduisent la valeur du coefficient de couplage des prototypes.

Malgré tout, les dispositifs fabriqués présentent les meilleurs coefficients de couplage globaux  $k^2$  obtenus avec de tels matériaux : 16,6 % et 11,3 % respectivement pour les prototypes étroits en PMN-PT et en PZT-5A et 16,4 % pour le prototype large en PZT-5A. En ce qui concerne le coefficient de couplage global du prototype large, il représente une augmentation de 31 % par rapport au coefficient de couplage global du *cantilever* à base de céramique PZT le plus couplé de l'état de l'art. Grâce à ces prototypes, nous avons validé expérimentalement que le coefficient de couplage global d'un récupérateur en céramique PZT augmente lorsqu'il est élargi.

Les mesures en vibrations sur des plages de résistances et de fréquences montrent que les prototypes présentent des densités de puissance normalisées très élevées grâce à leurs longues masses mobiles. A partir de ces mesures, on déduit que les récupérateurs réalisés atteindraient de larges bandes passantes s'ils sont associés à des techniques non-linéaires électriques d'ajustement de fréquence. Les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W permettraient respectivement d'atteindre des bandes passantes de 10,1%, 7,8% et 11,3% de la fréquence centrale lorsqu'ils sont connectés à des couples de résistances et de capacités optimaux.

Le prototype PMN-PT N exploité par la technique FT-SECE a notamment permis d'atteindre une bande passante de 12,0% de la fréquence centrale dans le cadre d'une collaboration avec d'autres laboratoires de recherche dont l'Institut Supérieur d'Electronique de Paris et le Centre de Nanosciences et de Nanotechnologies (C2N). Ces travaux ont permis la publication d'un article de recherche par Brenes *et al.* [59]. Un prototype identique au récupérateur PZT W (dont uniquement le matériau de la masse mobile fut remplacé par de l'aluminium), quant à lui, a permis d'atteindre 17,8% de bande passante lorsqu'il a été associé à la technique électrique PSSECE. Les tests réalisés avec un ASIC développé par Adrien Morel au cours de sa thèse ont permis une communication à l'ISSCC [65] et ont été détaillés dans l'article rédigé au cours de cette thèse [179]. Les résultats de ces expérimentations sont détaillés en annexe 3.

Le chapitre suivant est consacré à la modélisation des comportements non-linéaires des matériaux piézoélectriques dans les récupérateurs. Cette modélisation permet d'une part d'expliquer l'allure des courbes de puissances relevées par nos mesures. D'autre part, elle permet de quantifier l'évolution des performances des récupérateurs en réponse à un niveau d'accélération croissant.



# Chapitre V : Pertes et non-linéarités des récupérateurs d'énergie piézoélectriques

*L'objectif de ce chapitre est d'expliquer et de modéliser les non-linéarités et les pertes intrinsèques observées sur les prototypes du chapitre précédent. Par l'intermédiaire de ce chapitre, nous discutons de l'importance de bien considérer les pertes présentes au sein de récupérateurs très fortement couplés. Nous montrons notamment que des pertes par mécaniques et diélectriques doivent être prises en compte pour nos récupérateurs. Nous proposons un modèle permettant de prendre en compte les pertes diélectriques non-linéaires.*

## V.1. Introduction au chapitre

### a. Contexte

La Figure V.1 représente les NPDs mesurées pour les récupérateurs PMN-PT N et PZT N en considérant le volume global  $\mathcal{V}_g$  pour deux niveaux d'accélération (0,045 m/s<sup>2</sup> et 0,2 m/s<sup>2</sup>). Comme introduit dans le chapitre précédent, on peut remarquer, d'une part, que les récupérateurs présentent des effets d'assouplissement car les fréquences  $f_a$  et  $f_b$  des pics de puissances respectifs  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  sont décalées vers des fréquences plus basses lorsque l'amplitude de l'accélération augmente. D'autre part, un amortissement non-linéaire se remarque par la diminution de la valeur de la NPD avec le niveau d'accélération. Dans ce chapitre, nous cherchons à modéliser ces non-linéarités qui sont propres aux matériaux piézoélectriques.

Par ailleurs, on peut noter que les deux pics de puissance  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  ont des amplitudes relatives variables selon le niveau d'accélération et le récupérateur. En effet, la puissance  $P_a^{max}$  est environ égale à la puissance  $P_b^{max}$  pour le PMN-PT N à 0,045 m/s<sup>2</sup> alors que  $P_b^{max}$  est nettement inférieur à  $P_a^{max}$  à 0,2 m/s<sup>2</sup>. A l'inverse, la puissance  $P_b^{max}$  est toujours supérieur à la puissance  $P_a^{max}$  pour le récupérateur PZT N quel que soit le niveau d'accélération.

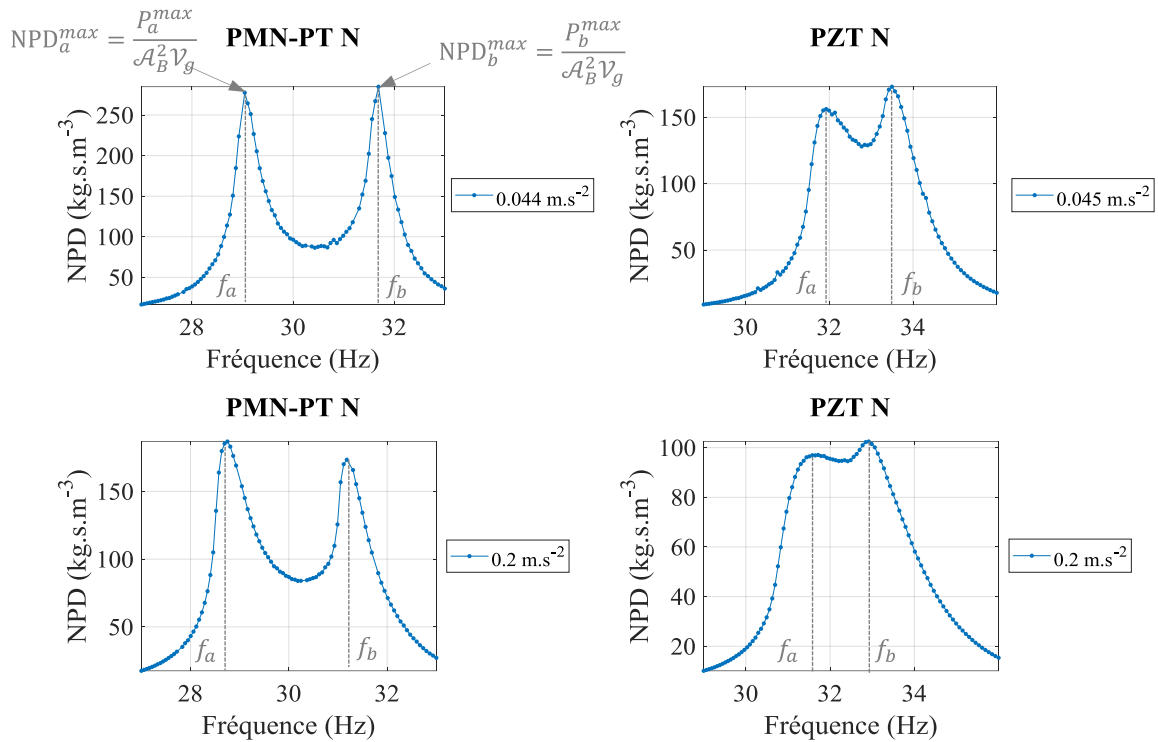


Figure V.1 : NPDs mesurées sur les récupérateurs PMN-PT N et PZT N en fonction de la fréquence aux résistances optimales et pour des amplitudes d'accélération de  $0,045 \text{ m/s}^2$  et de  $0,2 \text{ m/s}^2$

Nous proposons donc d'analyser les amplitudes relatives entre les deux pics  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  qui peuvent nous donner des indications sur le type de pertes présent dans les récupérateurs. En effet, si la totalité des pertes du récupérateur étaient modélisées par un terme d'amortissement visqueux constant comme ce qui est couramment effectué dans la littérature [124], alors les deux pics de puissances devraient avoir théoriquement la même amplitude. Un terme d'amortissement visqueux est notamment utilisé pour considérer les pertes linéaires d'un récupérateur piézoélectrique proche de sa fréquence de résonance en court-circuit. Cependant, comme nous le verrons par la suite, l'utilisation de récupérateurs fortement couplés nécessitent de considérer plus fidèlement les interactions électromécaniques présentes dans les matériaux piézoélectriques.

*b. Etat de l'art de la considération des pertes et des non-linéarités en récupération d'énergie vibratoire*

L'utilisation d'un coefficient d'amortissement visqueux est une méthode répandue pour considérer les pertes mécaniques des récupérateurs d'énergie vibratoire selon un mode de vibration. Cependant, les pertes des matériaux piézoélectriques sont principalement caractérisés par des pertes par hystérésis [180] et leurs pertes peuvent être prédominantes sur le comportement des récupérateurs [181]. Par ailleurs, l'analyse des comportements d'hystérésis des matériaux piézoélectriques peut être utile pour modéliser les pertes diélectriques et piézoélectriques des récupérateurs d'énergie vibratoire. Les pertes diélectriques sont notamment non-négligeables pour des récupérateurs utilisant des matériaux fortement couplés tels que le PMN-PT ou le PZN-PT.

La modélisation de ces pertes par hystérésis est généralement réalisée dans le régime linéaire en considérant des coefficients matériaux complexes tel que détaillé dans l'article de Uchino et Hirose [182]. Cependant, des comportements non-linéaires attribués aux matériaux piézoélectriques sont souvent observés sur les récupérateurs d'énergie vibratoire [178], [183] et ceux-ci ne permettent pas de considérer uniquement des pertes linéaires. Parmi les modèles de pertes non-linéaires de l'état de l'art, la considération d'un amortissement structural du second ordre dans le modèle à 1 degré de liberté tel que proposé par le modèle Leadenham et Erturk [178] permet de modéliser précisément les *cantilevers* utilisant des céramiques PZT. Ces derniers proposent de plus de considérer un effet assouplissant de second ordre pour modéliser la raideur non-linéaire des céramiques. Outre la précision de ses résultats par rapport aux mesures, le modèle de Leadenham et Erturk est cohérent avec le comportement de la loi de Rayleigh<sup>14</sup> observé expérimentalement sur les matériaux piézoélectriques [185], [186]. Cependant, il ne tient pas compte des pertes piézoélectriques et diélectriques des matériaux piézoélectriques. Or, dans le cas de récupérateurs piézoélectriques impliquant des matériaux très fortement couplés, il est nécessaire de modéliser les pertes diélectriques non-linéaires. En effet, l'augmentation non-négligeable des pertes diélectriques sur un récupérateur en PZN-PT en réponse à un niveau de tension croissant ainsi qu'à niveau d'accélération croissant a été observée par les travaux Morel *et al.* [187]. Ces travaux ont d'ailleurs montré qu'il était important de considérer les pertes diélectriques des récupérateurs piézoélectriques pour le domaine de l'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques.

Dans ce chapitre, nous étudions par conséquent les modèles de pertes dans les récupérateurs piézoélectriques et nous proposons un modèle non-linéaire adapté aux récupérateurs piézoélectriques fortement couplés. La section V.2 reprend les équations des modèles de pertes linéaires afin de discuter de l'influence des coefficients de pertes sur le comportement des récupérateurs. Après avoir montré dans la section V.3 que l'influence des pertes piézoélectriques et celle des pertes diélectriques peuvent être prises en compte dans un unique coefficient de pertes diélectriques, nous introduisons dans la section V.4 un modèle considérant un coefficient de pertes diélectriques non-linéaires. Grâce à l'ajustement du modèle aux mesures dans la section V.5, nous montrons que les pertes diélectriques non-linéaires ne peuvent être négligées pour le prototype PMN-PT N. Le modèle est également exploité pour analyser l'influence des non-linéarités sur la puissance récupérée et la bande passante

## V.2. Pertes linéaires

### V.2.1. Coefficient visqueux d'amortissement

#### a. Coefficient d'amortissement visqueux appliqué à un modèle à IDDL

La méthode la plus pratique pour considérer les pertes dans un récupérateur d'énergie vibratoire est de les modéliser par un coefficient d'amortissement visqueux  $\zeta_m$ . Ce coefficient

---

<sup>14</sup> Réservee originellement à la description du comportement d'hystérésis des matériaux magnétiques, la loi de Rayleigh permet également de décrire le comportement de matériau piézoélectrique [184]. Le terme « loi de Rayleigh » diffère de l'« amortissement de Rayleigh », de la « méthode de Rayleigh » et de la « théorie des poutres de Rayleigh » qui sont quatre notions différentes.

déduit de mesures sur le récupérateur complet permet de considérer les pertes mécaniques dans les matériaux, dans l'assemblage ainsi que les pertes dues à l'amortissement de l'air. Ce coefficient d'amortissement  $\zeta_m$  est pris en compte par le biais du terme d'amortissement  $C$  dans l'équation de mouvement du système à 1DDL qui est rappelé dans l'équation (V-1) où  $M$ ,  $K$ ,  $\Theta$ ,  $C_p$  et  $B_f$  sont respectivement la masse équivalente, la raideur équivalente, le terme de couplage, la capacité équivalente et le terme de force.  $w_B$ ,  $r$ ,  $v$  et  $i$  sont respectivement le déplacement de la base, le déplacement relatif en bout de poutre, la tension aux bornes des électrodes et le courant sortant du récupérateur.

$$\begin{cases} M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr - \Theta v = -B_f\ddot{w}_B \\ \Theta\dot{r} + C_p\dot{v} + i + A_p v = 0 \end{cases} \quad (\text{V-1})$$

Le terme d'amortissement  $C$ , exprimé en (V-2), permet d'induire une force non-conservative proportionnelle à la vitesse. Les pertes électriques, quant à elles, sont considérées par l'effet Joule d'une résistance de perte  $R_p$  placée en parallèle de la capacité équivalente du matériau piézoélectrique tel que détaillé par Badel and Lefeuvre [27]. La conductance  $A_p$  dans l'équation (V-1) correspond à l'inverse de  $R_p$ . Le coefficient d'amortissement électrique  $\zeta_e$  équivalent peut être obtenu à partir de l'expression de la conductance  $A_p$  en (V-3).

$$C = 2\zeta_m \omega_1^{sc} M \quad (\text{V-2}) \quad A_p = 2\zeta_e C_p \omega_1^{sc} \quad (\text{V-3})$$

Pour une accélération d'excitation sinusoïdale  $\ddot{w}_B$  de pulsation  $\omega$ , la tension, le déplacement et le courant peuvent être décrits dans un espace complexe (équation (V-4)) avec  $j = \sqrt{-1}$ .

$$\underline{\ddot{w}}_B = \mathcal{A}_B e^{j\omega t} \quad (\text{V-4})$$

On propose dans cette section d'analyser le comportement de la puissance de sortie du récupérateur et du déplacement en bout de poutre en fonction de la fréquence lorsqu'une charge d'impédance complexe  $Z_{load}$  est placée en sortie du récupérateur. Ainsi, pour une impédance de charge  $Z_{load}$ , le courant  $i$  en sortie du récupérateur et la puissance récupérée  $P$  sont donnés par (V-5) et (V-6) où la fonction  $\text{Real}()$  correspond à la partie réelle d'un nombre complexe et la fonction  $\text{conj}()$  correspond au complexe conjugué d'un nombre.

$$\underline{v} = Z_{load} \underline{i} \quad (\text{V-5}) \quad P = \text{Real}\left(\frac{1}{2} \underline{v} \text{conj}(\underline{i})\right) \quad (\text{V-6})$$

A partir des équations de mouvement et de courant en (V-1), on détermine les expressions du déplacement  $\underline{r}$  et de la tension  $\underline{v}$  dans l'espace complexe exprimées en (V-7) et (V-8). Les coefficients normalisés  $k_e^2$ ,  $\omega_1^{sc}$ ,  $\Omega$  et  $z$  sont donnés en (V-9) à (V-12).

$$\begin{aligned} \frac{\underline{r}}{B_f \ddot{w}_B} &= -\frac{1}{K} \frac{1 + z2\zeta_e + zi\Omega}{[1 + z2\zeta_e - \Omega^2(z2\zeta_e + z2\zeta_m + 1)] + j[(1 - \Omega^2 + k_e^2)(z\Omega) + 2\zeta_m\Omega(1 + z2\zeta_e)]} \end{aligned} \quad (\text{V-7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{v}}{B_f \ddot{w}_B} &= -\frac{i}{\Theta} \frac{z\Omega k_e^2}{[1 + z2\zeta_e - \Omega^2(z2\zeta_e + z2\zeta_m + 1)] + j[(1 - \Omega^2 + k_e^2)(z\Omega) + 2\zeta_m\Omega(1 + z2\zeta_e)]} \end{aligned} \quad (\text{V-8})$$

$$k_e^2 = \frac{\Theta^2}{KC_p} \quad (\text{V-9}) \quad \omega_1^{sc} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{V-10}) \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1^{sc}} \quad (\text{V-11}) \quad z = Z_{load} \omega_1^{sc} C_p \quad (\text{V-12})$$

Par ailleurs à chaque fréquence d'excitation et quel que soit le modèle de perte linéaire considéré [176], la puissance de sortie du récupérateur est maximale si l'impédance de charge  $Z_{load}$  est le complexe conjugué de l'impédance interne du récupérateur  $Z_p$  comme exprimé en (V-13). Ainsi, à partir de l'expression de  $Z_p$  donnée en (V-14) à partir de l'exploitation du système d'équation (V-1), nous pouvons déterminer à chaque fréquence l'impédance complexe de la charge qui permet de maximiser la puissance de sortie.

$$Z_{load} = \text{conj}(Z_p) \quad (V-13)$$

$$\underline{Z}_p = -\frac{v}{i} = \frac{1}{jC_p\omega} \frac{1}{1 + \frac{k_e^2}{1 - \Omega^2 + j2\zeta_m\Omega} - \frac{2j\zeta_e}{\Omega}} \quad (V-14)$$

Pour les coefficients du récupérateur PMN-PT N donnés par le modèle 2DDL-PM1 (disponibles dans le Tableau V.3 de la section V.5.b), la Figure V.2 représente la puissance normalisée  $P_{norm}$  exprimée en (V-15) et le déplacement normalisé  $r_{norm}$  exprimé en (V-16) en fonction de la fréquence pour des charges d'impédances complexes optimales ainsi que pour des charges résistives optimales.  $R$  dans l'expression de  $r_{norm}$  correspond à l'amplitude de  $\underline{r}$ . Pour la Figure V.2, un amortissement visqueux  $\zeta_m$  de 0,005 est considéré dans les calculs et l'amortissement électrique  $\zeta_e$  a pour valeur 0 et 0,005.

$$P_{norm} = P \frac{8M\omega_1^{sc}}{B_f^2 \mathcal{A}_B^2} \quad (V-15)$$

$$r_{norm} = R \frac{2K}{B_f \mathcal{A}_B} \quad (V-16)$$

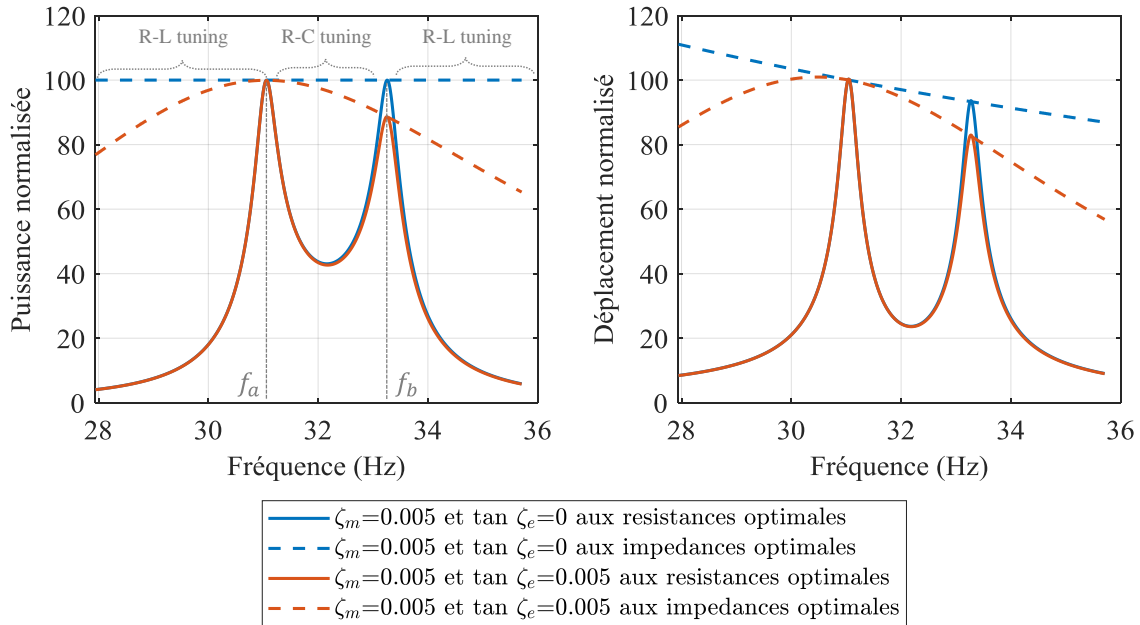


Figure V.2 : Puissance normalisée de sortie  $P_{norm}$  et déplacement normalisé  $r_{norm}$  en fonction de la fréquence pour le récupérateur PMN-PT N modélisé par le modèle 2DDL-PM1 associé à un amortissement mécanique visqueux  $\zeta_m$  et un amortissement électrique  $\zeta_e$

Sur la Figure V.2, on retrouve les deux pics de puissance observés sur nos mesures (voir section IV.4.2.b) pour des charges résistives optimales. Si l'amortissement mécanique est

linéaire et visqueux et qu'il n'y a pas de pertes électriques, les deux pics permettent de récupérer la même valeur de puissance  $P^{max}$  donnée par l'équation (V-17).

$$P^{max} = \frac{B_f^2}{M} \frac{Q_m}{8\omega_1^{sc}} \mathcal{A}_B^2 = P_{norm} Q_m \quad (V-17)$$

L'utilisation de charges d'impédances complexes permet théoriquement de récupérer la puissance  $P^{max}$  à chaque fréquence si aucune perte électrique n'est considérée. Des combinaisons optimales de condensateurs et résistances permettent de récupérer la puissance  $P^{max}$  entre  $f_a$  et  $f_b$  (bande *R-C tuning* sur la Figure V.2). Des combinaisons optimales d'inductances et résistances permettent de récupérer  $P^{max}$  pour les bandes de fréquences situées en dehors deux pics de puissance (bande *R-L tuning* sur la Figure V.2). En pratique, pour la bande de fréquence de *R-C tuning*, une banque de condensateurs peut être intégrée dans un circuit [55]. D'autre part, le comportement capacitif peut être émulé grâce aux techniques non-linéaires d'ajustement de fréquence de résonance [102]. En revanche, les valeurs des inductances pour la bande de fréquence *R-L tuning* sont trop importantes pour être intégrées dans un circuit. De plus, une banque d'inductance est difficile à émuler dans le domaine de la récupération d'énergie [27]. Les techniques FT-SECE [59] et SC-SECE [62], notamment, ne permettent de travailler que partiellement sur la zone *R-L tuning*.

La Figure V.2 montre que, lorsqu'un amortissement visqueux est considéré, l'amplitude du déplacement relatif en bout de poutre  $R$  diminue avec la fréquence d'excitation. On peut également noter que les pertes électriques ont peu d'influence sur la puissance  $P_a^{max}$  mais qu'elles réduisent significativement la puissance  $P_b^{max}$ . En effet, les pertes induisent une énergie dissipée par cycle proportionnelle au carré de la tension. La tension est plus importante en  $P_b^{max}$  qu'en  $P_a^{max}$  car la résistance optimale  $R_b^{opt}$  est plus importante que la résistance  $R_a^{opt}$ . En d'autres termes, on peut considérer que la résistance de perte équivalente  $R_p$  est du même ordre de grandeur que la résistance de charge  $R_b^{opt}$  à la puissance  $P_b^{max}$ .  $R_p$  induit donc plus de perte avec  $R_b^{opt}$  qu'avec  $R_a^{opt}$  car elle est placée en parallèle de la résistance de charge. Les pertes électriques permettent finalement d'expliquer la différence d'amplitude entre les deux pics de puissances observée sur la mesure à 0,2m/s<sup>2</sup> du récupérateur PMN-PT N (Figure V.1). On notera aussi que lorsque des pertes électriques sont prises en compte, la courbe de puissance récupérée pour des charges d'impédances complexes optimales ne représente pas une droite horizontale. De plus, la puissance récupérée se rapproche de  $P^{max}$  lorsque la fréquence d'excitation s'approche de  $f_a$ . En effet, lorsque des charges complexes optimales sont considérées, l'amplitude de tension augmente quand la fréquence d'excitation s'éloigne de  $f_a$  [27]. Cette augmentation de la tension induit une augmentation des pertes électriques et une baisse de la puissance.

### b. Amortissement de Rayleigh

La présence de plusieurs modes de résonance dans le récupérateur influence le comportement de la courbe de puissance et de la courbe du déplacement autour de la première fréquence de résonance, notamment si les fréquences de résonance sont proches. Pour l'étude d'un récupérateur sur plusieurs degrés de liberté, l'amortissement de Rayleigh est couramment utilisé et permet d'estimer la valeur d'un amortissement visqueux  $\zeta_i$  à chaque fréquence de résonance [188], [189]. Si l'amortissement de Rayleigh est considéré, la matrice  $\mathbf{C}$  d'amortissement du système à plusieurs degrés de liberté est donnée par une combinaison

linéaire de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  et de la matrice de masse  $\mathbf{M}$  tel qu'exprimé en (V-18). De cette façon, le coefficient d'amortissement  $\zeta_i$  pour un mode de vibration dépend de la pulsation de résonance  $\omega_i$  et est exprimé à partir des coefficients  $\alpha_{Ray}$  et  $\beta_{Ray}$  par (V-19). Les coefficients  $\alpha_{Ray}$  et  $\beta_{Ray}$  doivent être déterminés expérimentalement à partir de la mesure du coefficient d'amortissement sur deux modes de résonance.

$$\mathbf{C} = \alpha_{Ray}\mathbf{M} + \beta_{Ray}\mathbf{K} \quad (\text{V-18})$$

$$\zeta_i = \frac{\alpha_{Ray}}{2\omega_i} + \frac{\beta_{Ray}\omega_i}{2} \quad (\text{V-19})$$

Même s'il ne se base pas sur l'étude des phénomènes physiques de la structure résonante, l'amortissement de Rayleigh permet généralement de fournir une modélisation cohérente des pertes par rapport à l'expérience. Malgré tout, Lim et Soh [181] ont montré que la modélisation des pertes de leur système piézoélectrique était plus précise en utilisant des pertes par hystérésis plutôt qu'un amortissement de Rayleigh. Par ailleurs, pour les récupérateurs que nous avons fabriqués, la fréquence de résonance en court-circuit du deuxième mode de flexion est environ 10 fois supérieure à celle du premier mode de flexion. Le second mode de vibration ne semble donc pas influencer de façon importante la puissance récupérée par nos récupérateurs sur des résistances optimales. Par la suite, nous ne considérons pas l'amortissement de Rayleigh et nous analysons comment les pertes par hystérésis peuvent être prises en compte dans la modélisation.

## V.2.2. Pertes par hystérésis

### a. Introduction aux pertes par hystérésis des matériaux piézoélectriques

Les pertes dominantes des matériaux piézoélectriques correspondent à des pertes par hystérésis. Le comportement hystérique des matériaux piézoélectriques est observé sur la réponse de la déformation à l'application d'une contrainte, mais également sur le champ de déplacement électrique résultant de l'application d'un champ électrique ainsi que sur la déformation en réponse à champ électrique [180]. La relation contrainte-déformation d'un grand nombre de matériaux métalliques comportent également des cycles d'hystérésis [190]. L'amortissement dû à des pertes par hystérésis est notamment appelé amortissement structural dans le domaine mécanique.

Contrairement aux pertes visqueuses qui correspondent à des pertes par cycle proportionnelles à la fréquence, les pertes par cycle sur un cycle d'hystérésis sont indépendantes de la fréquence. Même si le comportement temporel de la relation contrainte-déformation n'est pas fidèlement pris en compte, l'ajout d'un angle de retard de phase indépendant de la fréquence entre l'excitation et la réponse (entre la contrainte et la déformation par exemple) permet de prendre en compte l'énergie perdue à chaque cycle dans la modélisation. La Figure V.3 donne l'exemple du cycle d'hystérésis de la relation contrainte-déformation pour un matériau élasto-plastique et le cycle obtenu par un déphasage.

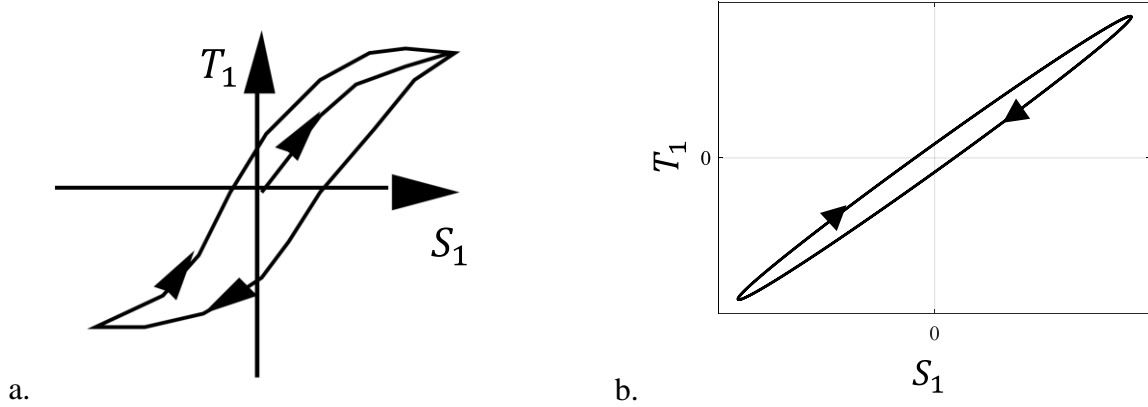


Figure V.3: a. Cycle d'hystérésis de la relation contrainte-déformation pour un matériau élasto-plastique [191], b. cycle d'hystérésis donné pour un déphasage

### b. Formalisme mathématiques des pertes par hystérésis

Pour les matériaux métalliques, le retard de la déformation par rapport à la contrainte appliquée peut être représenté mathématiquement à l'aide un module de Young complexe  $Y_s^*$  où  $\eta$  est le coefficient d'amortissement structural [192, p. 13]. Le terme imaginaire positif  $j\eta$  permet de traduire l'avance de phase de la contrainte par rapport à la déformation.

$$Y_s^* = Y_s(1 + j\eta) \quad (\text{V-20})$$

De la même manière, les cycles d'hystérésis des matériaux piézoélectriques peuvent être modélisés par l'intermédiaire de termes imaginaires attribués aux coefficients matériaux [193]. L'ajout de parties imaginaires aux coefficients des matériaux piézoélectriques est réalisable pour toutes les formes d'équations constitutives piézoélectriques (forme  $d$ , forme  $h$ , forme  $e$  ou forme  $g$  telles que présentées dans la section I.4.1) [194]. Par exemple, les équations (V-21) à (V-23) donnent les coefficients des équations constitutives piézoélectriques sous la forme  $d$  pour le mode 31 (mode utilisé pour les poutres étroites) où  $\varphi_d$ ,  $\theta_d$  et  $\delta_d$  sont les angles de retard de phases respectivement de la déformation  $S_1$  par rapport à la contrainte  $T_1$ , du champ de déplacement électrique  $D_3$  par rapport à la contrainte  $T_1$  et du champ de déplacement électrique  $D_3$  par rapport au champ électrique  $E_3$ . Les parties imaginaires négatives permettent ici de traduire des retards de phase.

$$s_{11}^{E*} = s_{11}^E(1 - j \tan \varphi_d) \quad (\text{V-21}) \quad d_{31}^* = d_{31}(1 - j \tan \theta_d) \quad (\text{V-22})$$

$$\epsilon_{33}^T = \epsilon_{33}^T(1 - j \tan \delta_d) \quad (\text{V-23})$$

Zhuang *et al.* [195] ont proposé une méthode pour déterminer les angles de retards de phases  $\varphi_d$ ,  $\theta_d$  et  $\delta_d$  d'un patch piézoélectrique étroit (mode 31) à partir de mesures d'impédance. A partir de ces derniers, les angles de retard de phase  $\varphi_e$ ,  $\delta_e$  et  $\theta_e$  peuvent être trouvés pour la forme  $e$  couramment utilisée en récupération d'énergie. Les expressions des coefficients complexes  $c_{11}^{ef*}$ ,  $\epsilon_{33}^{ef*}$  et  $e_{31}^{ef*}$  pour le mode 31 sont données dans les équations (V-24) à (V-26). Les parties réelles  $\widetilde{c}_{11}^{ef}$ ,  $\widetilde{\epsilon}_{33}^{ef}$  et  $\widetilde{e}_{31}^{ef}$  varient très légèrement des coefficients réels  $c_{11}^{ef}$ ,  $\epsilon_{33}^{ef}$  et  $e_{31}^{ef}$  pour des faibles valeurs d'angles de retards de phases (0,1). A titre d'exemple :  $\widetilde{c}_{11}^{ef} = c_{11}^{ef}/(1 + \tan^2 \varphi_d)$ .



$$c_{11}^{ef*} = \frac{1}{s_{11}^{E*}} = \overline{c_{11}^{ef}} (1 + j \tan \varphi_e) \approx c_{11}^{ef} (1 + j \tan \varphi_e) \quad (\text{V-24})$$

$$\epsilon_{33}^{ef*} = \epsilon_{33}^{*T} - \frac{d_{31}^{*2}}{s_{11}^{E*}} = \overline{\epsilon_{33}^{ef}} (1 - j \tan \delta_e) \approx \epsilon_{33}^{ef} (1 - j \tan \delta_e) \quad (\text{V-25})$$

$$e_{31}^{ef*} = \frac{d_{31}^*}{s_{11}^{E*}} = \overline{e_{31}^{ef}} (1 + j \tan \theta_e) \approx e_{31}^{ef} (1 + j \tan \theta_e) \quad (\text{V-26})$$

L'utilisation de coefficients complexes offre un formalisme utile à la modélisation des pertes. Cependant, à cause des influences électromécaniques mutuelles, il n'est pas possible de considérer un angle de phase ( $\varphi_e$ ,  $\delta_e$  ou  $\theta_e$ ) comme la représentation de pertes propres à un unique domaine physique (mécanique, piézoélectrique ou diélectrique). Par exemple, les angles « mécaniques »  $\varphi_d$  et  $\varphi_e$  n'induisent pas le même type de pertes sur la puissance récupérée. Lors du passage d'une forme constitutive d'équations à une autre, seule la puissance dissipée par la totalité des pertes est la même et non la contribution de chacun des termes comme expliqué par Wild *et al.* [194]. Par ailleurs, un déphasage ne représente pas forcément un phénomène physique de perte. En effet, le coefficient  $\tan \theta_d$  peut être soit positif soit négatif en fonction des matériaux [196]. Afin que la globalité de angles de retard de phase représente des pertes et puisse correspondre à une réalité physique, il faut tout de même que plusieurs conditions soient respectées sur les coefficients [193]. A titre d'exemple, l'inégalité (V-27) doit être respectée pour les coefficients du mode 31.

$$s_{11}^E \tan \phi_d \times \epsilon_{33}^T \tan \delta_d \geq 2(d_{31} \tan \theta_d)^2 \quad (\text{V-27})$$

A partir de l'équation (V-27), on remarque qu'il n'est pas possible de considérer un angle  $\theta_d$  sur le coefficient piézoélectrique sans considérer simultanément des angles de phases  $\varphi_d$  et  $\delta_d$  sur les coefficients mécaniques et diélectriques.

Bien que cette dénomination soit particulière à la forme  $e$ , nous appelons dans la suite du chapitre les angles  $\varphi_e$ ,  $\theta_e$  et  $\delta_e$  respectivement les angles de phase mécanique, piézoélectrique et diélectrique. Nous appellerons **pertes mécaniques** les pertes qui induisent une dissipation d'énergie par cycle croissante avec la déformation, même si les phénomènes induisant ces pertes ne sont pas uniquement d'origine mécanique. Les **pertes diélectriques** sont les pertes qui induisent une dissipation d'énergie par cycle croissante avec l'amplitude du champ électrique. Au niveau global du récupérateur, les pertes mécaniques et les pertes diélectriques désignent respectivement les pertes par cycle qui augmentent avec l'amplitude du déplacement en bout de poutre et avec la tension aux bornes des électrodes.

### c. Influence des pertes par hystérésis sur le comportement récupérateur

Comme les coefficients matériaux sont complexes, les coefficients globaux équivalents du modèle à 1DDL (V-1) sont eux aussi complexes. Les coefficients  $K$ ,  $\theta$  et  $C_p$  de l'équation (V-1) sont respectivement transformés en  $K^*$ ,  $\theta^*$  et  $C_p^*$  (coefficients complexes<sup>15</sup>). Comme les coefficients  $\theta^*$  et  $C_p^*$  sont respectivement proportionnels à  $e_{31}^{ef*}$  et  $\epsilon_{33}^*$ , leurs parties imaginaires sont respectivement proportionnelles à  $\tan \theta_e$  et  $\tan \delta_e$  comme exprimés dans (V-28) et (V-29).

<sup>15</sup> Pour rappel, les termes soulignés correspondent aux variables traduites dans l'espace complexe alors que les termes avec une étoile représentent des coefficients complexes.

Il est possible de montrer que, comme pour les coefficients matériaux, les valeurs des parties réelles de  $\Theta^*$  et  $C_p^*$  varient peu des valeurs de  $\Theta$  et  $C_p$ .

$$\Theta^* = \bar{\Theta}(1 + j \tan \theta_e) \approx \Theta(1 + j \tan \theta_e) \quad (\text{V-28})$$

$$C_p^* = \bar{C}_p(1 - j \tan \delta_e) \approx C_p(1 - j \tan \delta_e) \quad (\text{V-29})$$

Le coefficient complexe de raideur  $K^*$ , quant à lui, est influencé par les pertes dans le substrat. On peut, grâce à l'expression de la raideur obtenue par la méthode de Rayleigh, déterminer un angle de perte équivalent [197], appelé ici angle de phase mécanique équivalent et noté  $\varphi_{eq}$ . L'expression de  $K^*$  est donnée par (V-30) avec  $YI^*$  exprimé en (V-31).

$$K^* = YI^* L_b \int_0^{L_b} \phi''(x)^2 dx = \bar{K}(1 + j \tan \varphi_{eq}) \approx K(1 + j \tan \varphi_{eq}) \quad (\text{V-30})$$

$$YI^* = B \left( \frac{2}{3} \left[ \frac{Y_s^{ef*} h_s^3}{8} + c_{11}^{ef*} \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right) \right] + \frac{1}{6} \frac{e_{31}^{ef*2}}{\epsilon_{33}^{ef*2}} h_p^3 \right) \quad (\text{V-31})$$

Si aucun amortissement visqueux n'est considéré ( $\zeta_m = 0$ ), le déplacement et la tension sont donnés par les équations (V-32) et (V-33) où les termes complexes normalisés sont exprimés dans les équations (V-34) à (V-37).

$$\frac{\underline{r}}{B_f \ddot{w}_B} = - \frac{1}{K^*} \frac{1 + z^* j \Omega^*}{(1 - \Omega^{*2}) + j[(1 - \Omega^{*2} + k_e^{*2})(z^* \Omega^*)]} \quad (\text{V-32})$$

$$\frac{\underline{v}}{B_f \ddot{w}_B} = - \frac{i}{\Theta^*} \frac{z^* k_e^{*2} \Omega^*}{(1 - \Omega^{*2}) + i[(1 - \Omega^{*2} + k_e^{*2})(z^* \Omega^*)]} \quad (\text{V-33})$$

$$k_e^{*2} = \frac{\Theta^{*2}}{K^* C_p^*} \quad (\text{V-34}) \quad \omega_1^{sc*} = \sqrt{\frac{K^*}{M}} \quad (\text{V-35}) \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1^{sc*}} \quad (\text{V-36}) \quad z^* = Z_{load} \omega_1^{sc*} C_p^* \quad (\text{V-37})$$

De façon similaire à la section V.2.1.a, la charge d'impédance complexe, exprimée en (V-13), permettant de maximiser la puissance à chaque fréquence correspond au complexe conjugué de l'impédance du récupérateur. L'impédance du récupérateur est exprimée par (V-38) lorsque des coefficients imaginaires sont considérés.

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{j C_p^* \omega} \frac{1}{1 + \frac{k_e^{*2}}{1 - \Omega^{*2}}} \quad (\text{V-38})$$

La Figure V.4 représente la puissance normalisée et le déplacement normalisé pour le récupérateur PMN-PT N modélisé par le modèle 2DDL-PM1 en contrainte plane en prenant arbitrairement la tangente de l'angle de phase mécanique équivalent  $\tan \varphi_{eq}$  égale à 0,01 ainsi que la tangente de l'angle de phase diélectrique  $\tan \delta_e$  égale à 0 puis 0,01. La puissance est calculée à partir de la tension  $\underline{v}$  et du courant  $\underline{i}$  (voir équation (V-6)) et des normalisations associées ((V-15) et (V-16)).

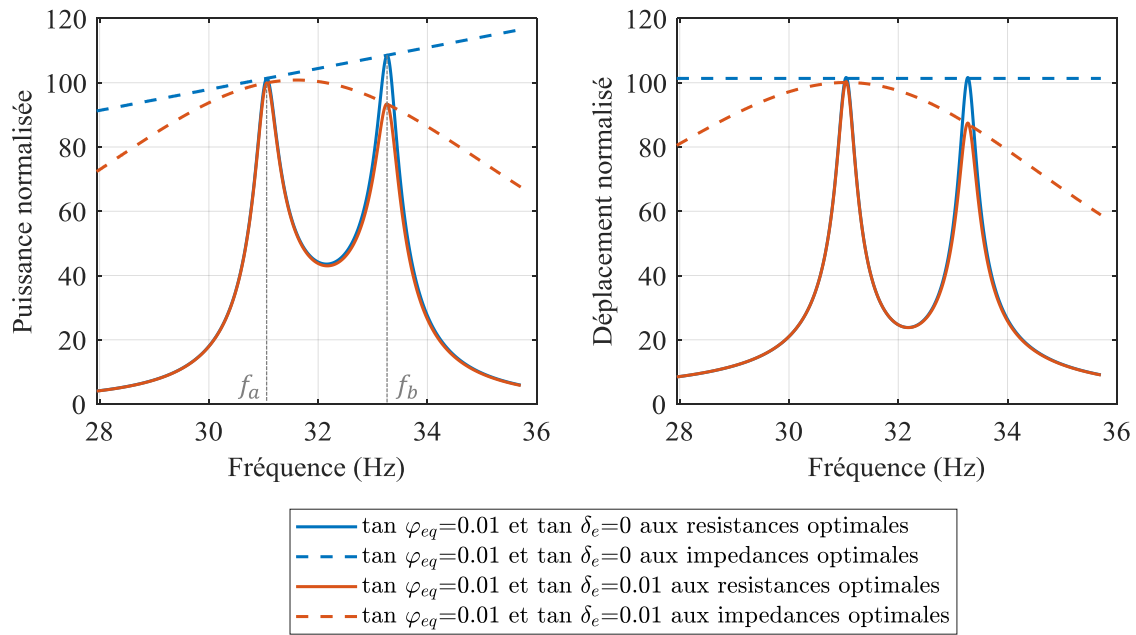


Figure V.4 : Puissance de sortie normalisée et déplacement normalisé en fonction de la fréquence pour le récupérateur PMN-PT N modélisé par le modèle 2DDL-PM1 associé à un angle de phase mécanique équivalent  $\varphi_{eq}$  et à un angle de phase diélectrique  $\delta_e$

Cette figure montre que, lorsque seul un angle de phase mécanique  $\varphi_{eq}$  est considéré, la puissance récupérée  $P_b^{max}$  en  $f_b$  est supérieure à la puissance  $P_a^{max}$  en  $f_a$ . Ainsi, contrairement à la considération d'un coefficient d'amortissement visqueux pour laquelle les deux pics de puissances ont la même hauteur ( $P_a^{max} = P_b^{max}$  sur la Figure V.2), la considération d'angle de phase mécanique équivalent  $\varphi_{eq}$  permet d'expliquer que la puissance récupérée puisse être maximale en  $f_b$ . Les pertes par hystérésis expliquent donc le comportement du récupérateur PZT N sur nos mesures (voir la Figure V.1). Lorsque des charges optimales d'impédances complexes sont considérées, la courbe de puissance forme une droite croissante avec la fréquence et le déplacement est constant quelle que soit la fréquence. L'amplitude du déplacement a donc la même valeur pour les deux pics obtenus avec les charges résistives.

On remarque aussi que la prise en compte de l'angle de phase diélectrique  $\delta_e$  a peu d'influence sur la puissance  $P_a^{max}$ . Par contre, ce dernier réduit la valeur de la puissance  $P_b^{max}$ . Ainsi, la combinaison d'un angle phase mécanique  $\varphi_{eq}$  et diélectrique  $\delta_e$  peut mener à ce que les deux pics de puissances aux résistances optimales aient des valeurs identiques ( $P_a^{max} \approx P_b^{max}$ ). L'égalité des puissances aux deux pics n'induit donc pas forcément la présence de pertes visqueuses constantes sur la bande de fréquence.

En conclusion, la prise en compte d'un amortissement visqueux et celle de pertes par hystérésis n'ont pas les mêmes effets sur les pics de puissances. On remarque alors que le comportement du PZT N correspond davantage à un modèle de pertes mécaniques par hystérésis. Le comportement du PMN-PT, quant à lui, fait apparaître des pertes diélectriques à 0,2 m/s<sup>2</sup>. Lorsque les deux pics de puissances mesurés sont à la même hauteur, il peut être compliqué de déterminer l'origine des pertes.

### V.3. Discussion sur l'angle de phase piézoélectrique

#### a. Influence de l'angle de phase piézoélectrique sur la puissance et le déplacement

Les discussions précédentes ne concernaient pas l'angle de phase piézoélectrique  $\theta_e$  car son influence est difficilement distinguable de celle de pertes diélectriques sur des mesures réalisées entre les fréquences  $f_a$  et  $f_b$ . Comme il le sera discuté dans cette section, les pertes qui ont été imputées à des pertes diélectriques dans [187] et pour les mesures à 0,2 m/s<sup>2</sup> du récupérateurs PMN-PT N sont vraisemblablement dues à une combinaison de l'angle de phase diélectrique  $\delta_e$  et de l'angle de phase piézoélectrique  $\theta_e$ . Il serait possible, grâce à des mesures d'impédances hors résonance et à la résonance, de distinguer l'influence de chacun des angles de phases diélectrique et piézoélectrique linéaires [195] et de déduire des angles de phases équivalents  $\theta_e$  et  $\delta_e$ . Cependant, cette méthode ne semble pas applicable dans le cas de comportements non-linéaires mécaniques assouplissants tels que ceux observés sur nos récupérateurs. Une bonne connaissance des angles de phases piézoélectrique  $\theta_e$  et diélectrique  $\delta_e$  est surtout nécessaire aux actionneurs linéaires qui peuvent agir à la résonance et hors résonance [180]. Nous montrons dans cette section que la considération de l'angle de phase piézoélectrique  $\theta_e$  peut être incluse dans la valeur de l'angle de phase diélectrique  $\delta_e$  pour des mesures effectuées entre les fréquences  $f_a$  et  $f_b$ . Cette étude nous permet ensuite de nous affranchir de l'utilisation d'un angle de phase piézoélectrique non-linéaire dans la section V.4 et de proposer un modèle simple ajustable aux mesures.

La Figure V.5 représente la puissance normalisée en fonction de la fréquence à des charges résistives optimales pour différentes valeurs de  $\tan \theta_e$  et une valeur  $\tan \delta_e$  constante égale à 0,015. La valeur de  $\tan \varphi_{eq}$  est égale à 0,01. On remarque que l'angle de phase piézoélectrique  $\theta_e$  influence la puissance  $P_b^{max}$  et le déplacement obtenus pour le couple  $f_b$  et  $R_b^{opt}$ . Ce dernier influence dans une moindre mesure le comportement à la fréquence  $f_a$  et la résistance  $R_a^{opt}$ . La puissance  $P_b^{max}$  diminue lorsque  $\tan \theta_e$  est positif et elle augmente lorsque  $\tan \theta_e$  est négatif. Ainsi, lorsqu'il est négatif, le coefficient  $\tan \theta_e$  s'oppose à l'effet de l'angle de phase diélectrique  $\delta_e$  qui tend à diminuer  $P_b^{max}$  comme observé dans la Figure V.4. Lorsque  $\tan \theta_e$  est positif, son influence sur la puissance et le déplacement est similaire à celle de  $\tan \delta_e$  en amplifiant les pertes au pic de puissance en  $f_b$ .

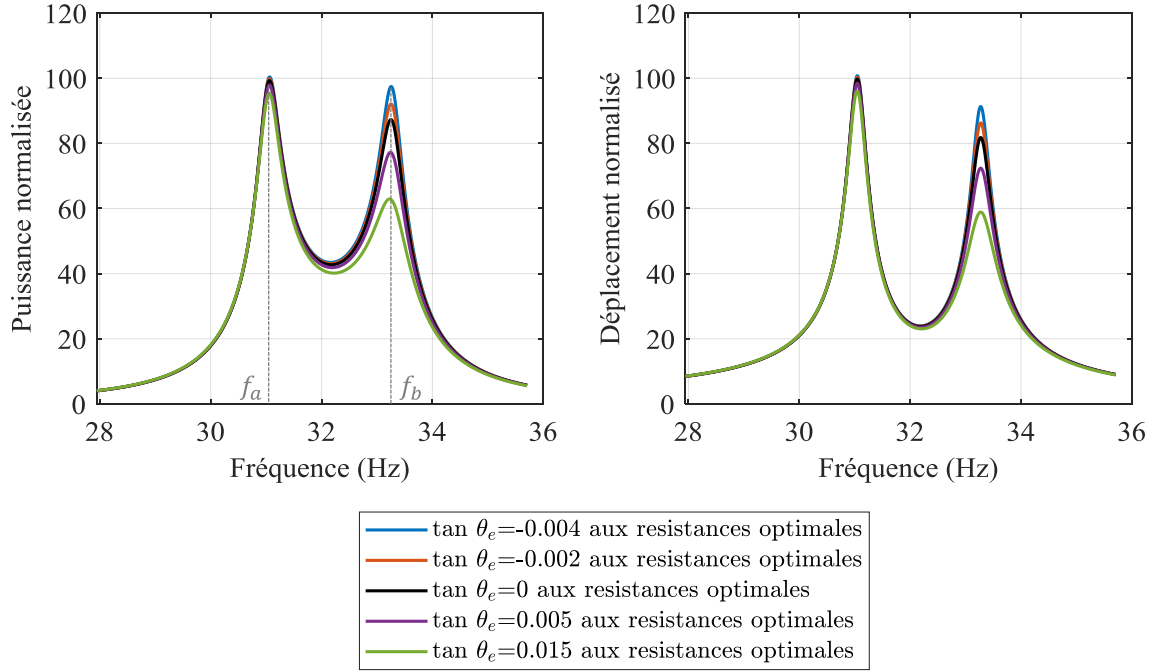


Figure V.5 : Puissance normalisée de sortie en fonction de la fréquence sur charges résistives optimales pour le récupérateur PMN-PT N modélisé par le modèle 2DDL-PM1 associé à différents angles de phase piézoélectrique  $\theta_e$ . Les valeurs  $\tan \delta_e$  et  $\tan \varphi_{eq}$  sont égales à 0,015 et 0,01.

### b. Analyse des expressions du déplacement et de la tension

Nous proposons par la suite d'analyser plus en détails les expressions du déplacement et de la tension afin de comparer l'influence de l'angle de phase diélectrique  $\delta_e$  et celle de l'angle de phase piézoélectrique  $\theta_e$ . Dédites directement des équations (V-32) et (V-33), les équations (V-39) et (V-40) expriment le déplacement et la tension en mettant en valeur les angles de phases de chaque coefficient où  $\mathbb{D}$  est le dénominateur exprimé en (V-41). Les coefficients  $\bar{k}_e^2$ ,  $\bar{\omega}_1^{sc}$ ,  $\bar{\Omega}$  et  $\bar{z}$  sont exprimés dans les équations (V-42) à (V-45).

$$\frac{\underline{r}}{B_f \ddot{w}_B} = -\frac{1}{\bar{K}} \frac{1 + \bar{z} j \bar{\Omega} (1 - j \tan \delta_{eq})}{\mathbb{D}} \quad (\text{V-39})$$

$$\frac{\underline{v}}{B_f \ddot{w}_B} = -\frac{j}{\bar{\Theta}} \frac{\bar{z} \bar{k}_e^2 \bar{\Omega} (1 + j \tan \theta_e)}{\mathbb{D}} \quad (\text{V-40})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & \left[ 1 - \bar{\Omega}^2 - \left( \tan \varphi_{eq} + 2 \bar{k}_e^2 \tan \theta_e - \tan \delta_e (1 - \bar{\Omega}^2) \right) \bar{z} \bar{\Omega} \right] \\ & + j \left[ \left( (1 + \tan \delta_{eq} \tan \varphi_{eq} - \bar{\Omega}^2) + (1 - \tan^2 \theta_e) \bar{k}_e^2 \right) (\bar{z} \bar{\Omega}) \right. \\ & \left. + \tan \varphi_{eq} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-41})$$

$$\bar{k}_e^2 = \frac{\bar{\Theta}^2}{\bar{K} \bar{C}_p} \approx k_e^2 \quad (\text{V-42})$$

$$\bar{\omega}_1^{sc} = \sqrt{\frac{\bar{K}}{M}} \approx \omega_1^{sc} \quad (\text{V-43})$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\omega}{\bar{\omega}_1^{sc}} \approx \Omega \quad (\text{V-44})$$

$$\bar{z} = Z_{load} \bar{\omega}_1^{sc} \bar{C}_p \approx z \quad (\text{V-45})$$

Nous remarquons à partir des équations (V-39) à (V-41) que les tangentes  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  n'ont pas les mêmes implications dans les équations. L'angle de phase piézoélectrique ne peut donc pas être réduit à un simple angle de phase diélectrique. Cependant, nous pouvons montrer par l'analyse du dénominateur  $\mathbb{D}$  (non démontré dans le détail ici) que les influences de chacune des tangentes  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  au pic de puissance à la fréquence  $f_b$  et à la résistance optimale  $R_b^{opt}$  peuvent être assimilées à un unique terme de pertes.

Pour des valeurs de  $\tan \theta_e$  et de  $\tan \delta_e$  raisonnablement faibles (<10%), nous pouvons simplifier l'expression du déplacement aux fréquences en court-circuit  $f_{sc}$  et en circuit ouvert  $f_{oc}$  respectivement lorsque les électrodes en court-circuit ( $\check{z} = 0$ ) et en circuit ouvert ( $\check{z} \rightarrow \infty$ ). Comme, pour nos récupérateurs,  $k_e^2$  est grand et les pertes mécaniques sont faibles ( $k_e^2 / \tan \varphi_{eq} > 2$ ), on peut considérer que les pertes aux pics  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  sont respectivement équivalentes aux pertes du récupérateur à la résonance en court-circuit et à la résonance en circuit-ouvert [102]. Ainsi, à partir de l'analyse d'expression  $\mathbb{D}$  donnée par (V-41) à la résonance en court-circuit et à la résonance en circuit ouvert, nous pouvons déterminer les termes qui ont le plus d'influence sur les pertes aux pics obtenus en  $f_a$  et  $R_a^{opt}$  ainsi qu'en  $f_b$  et  $R_b^{opt}$ . Ces termes de pertes sont fournis dans le Tableau V.1.  $\tan \theta_e$  et  $\tan \delta_e$  n'ont donc qu'une faible influence sur la tension et le déplacement à la fréquence  $f_a$  et la résistance optimale  $R_a^{opt}$ . L'influence de  $\tan \varphi_{eq}$  est par conséquent prépondérante sur le comportement du récupérateur en  $f_a$  et  $R_a^{opt}$ . A la fréquence  $f_b$  et à la résistance optimale  $R_b^{opt}$ , c'est le terme  $\tan \varphi_{eq} + \bar{k}_e^2(2 \tan \theta_e - \tan \delta_e)$  qui a une influence prépondérante sur le comportement du récupérateur. Ainsi, la différence entre le déplacement à la fréquence  $f_a$  et à la fréquence  $f_b$  est majoritairement déterminée par le terme  $\bar{k}_e^2(2 \tan \theta_e - \tan \delta_e)$ .

Tableau V.1 : Termes ayant des influences prépondérantes sur les pertes selon la fréquence et la charge de sortie

Fréquence considérée	Impédance de charge considérée	Terme d'influence prépondérante sur les pertes
$\check{\Omega} = 1$	$\check{z} = 0$	$\tan \varphi_{eq}$ (V-46)
$\check{\Omega} = \sqrt{1 + \bar{k}_e^2}$	$\check{z} \rightarrow \infty$	$\tan \varphi_{eq} + 2\bar{k}_e^2 \tan \theta_e - \tan \delta_e (1 - \check{\Omega}^2)$ $= \tan \varphi_{eq} + \bar{k}_e^2(2 \tan \theta_e - \tan \delta_e)$ (V-47)

Par conséquent, si le terme  $\tan \delta_e - 2 \tan \theta_e$  est gardé **constant** tout en faisant varier les valeurs de  $\tan \delta_e$  et de  $\tan \theta_e$ , alors le rapport entre  $P_a^{max}$  et  $P_b^{max}$  est quasiment inchangé. Ceci est observé sur la puissance normalisée et le déplacement normalisé tracés sur la Figure V.6. Sur cette figure, nous faisons varier les valeurs  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  en gardant le terme  $\tan \delta_e - 2 \tan \theta_e$  constant et égal à 0,03.

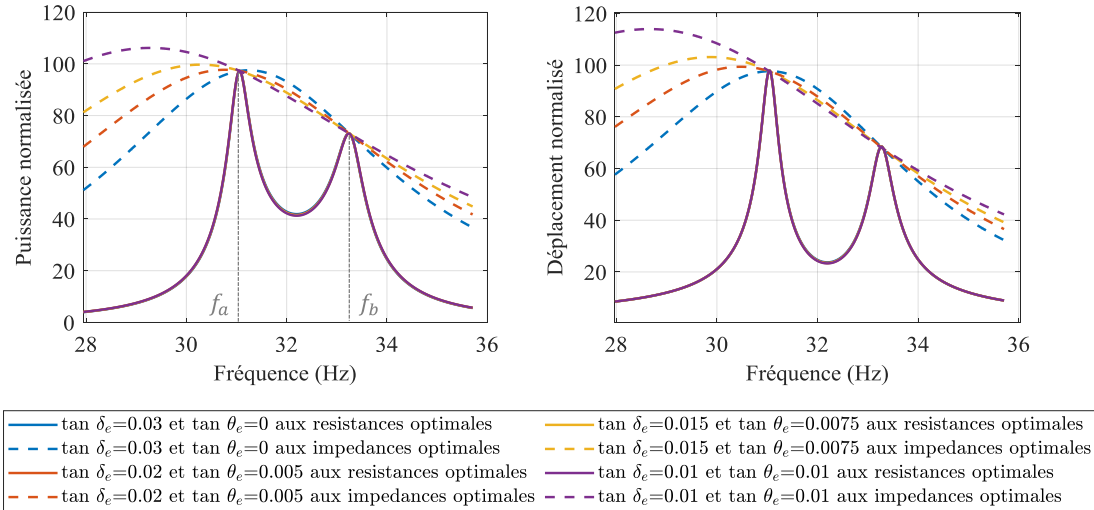


Figure V.6 : Puissance de sortie normalisée en fonction de la fréquence pour le récupérateur PMN-PT N modélisé par le modèle 2DDL-PM1 associé à différents angles de phase diélectriques  $\delta_e$  et piézoélectriques  $\theta_e$  et avec  $\tan \delta_e - 2 \tan \theta_e = 0,03$

Les courbes obtenues sur la Figure V.6 pour des charges résistives optimales sont visuellement confondues. Cette analyse révèle la difficulté de distinguer l'influence de l'angle de phase piézoélectrique de celle de l'angle de phase diélectrique pour des mesures en vibrations utilisant uniquement des charges résistives et proches des fréquences  $f_a$  et  $f_b$ . Pour une même courbe de mesure, plusieurs valeurs de  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  peuvent en effet être ajustées avec le modèle.

Une distinction entre  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  est davantage perceptible sur des charges d'impédances complexes notamment lorsque la fréquence est inférieure à  $f_a$  ou supérieure à  $f_b$ . Comme les puissances récupérées en hors de la bande de fréquences  $[f_a; f_b]$  varient en fonction des configurations de  $\tan \delta_e$  et de  $\tan \theta_e$  sur la Figure V.6, une mauvaise modélisation de  $\tan \delta_e$  et  $\tan \theta_e$  peut provoquer des résultats incohérents pour ces bandes fréquences.

Or, dans la pratique, les récupérateurs sont principalement sollicités entre leur fréquences  $f_a$  et  $f_b$  car le *R-L tuning* est complexe à réaliser en récupération d'énergie (voir section V.2.1.a). Ainsi, considérer les effets des angles de phases diélectriques et piézoélectriques uniquement par la valeur  $\tan \delta_e$  non-nulle et en prenant  $\tan \theta_e$  nul n'induit pas d'erreur considérable dans le cadre de la récupération d'énergie vibratoire. On remarque notamment sur la Figure V.6 que la puissance récupérée sur charge d'impédance complexe entre les fréquences  $f_a$  et  $f_b$  ne varie que très peu en fonction des valeurs de  $\tan \delta_e$  et de  $\tan \theta_e$ . En conclusion, considérer uniquement un angle de phase diélectrique  $\delta_e$  simplifie grandement les équations et permet de fournir des résultats cohérents.

Pour conclure, l'effet de l'angle de phase piézoélectrique n'est pas distinguable pour des mesures vibratoires réalisées proches des fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert. Pour des mesures de puissance et de déplacement, l'influence de l'angle de phase piézoélectrique revient soit à augmenter l'effet des pertes diélectrique (lorsque  $\tan \theta_e > 0$ ) soit à son inhibition (lorsque  $\tan \theta_e < 0$ ). Dans le cadre de la modélisation des effets non-linéaires, nous faisons le choix de ne pas considérer l'angle de phase piézoélectrique. En effet, son influence sur les mesures n'est pas discernable et sa prise en compte a pour conséquence de

complexifier le modèle présenté dans la section suivante. De plus, à partir des équations (V-25) et (V-27), nous pouvons affirmer qu'il n'est mathématiquement pas possible de considérer un angle de phase piézoélectrique sans considérer des pertes diélectriques. Ainsi, le récupérateur PMN-PT N présente incontestablement des pertes diélectriques. Il est donc pertinent de ne considérer que des pertes diélectriques non-linéaires dans le modèle qui sera ajusté aux mesures. Le coefficient de pertes diélectriques non-linéaires qui sera déduit des mesures traduira en réalité les effets diélectriques et les effets piézoélectriques du matériau. Malgré tout, ce coefficient représentera les pertes par cycle qui augmentent de manière non-linéaire avec le niveau de tension comme nous l'avons constaté sur nos mesures. Dans la section V.5, il est notamment montré que la considération des pertes diélectriques non-linéaires est nécessaire et suffisante pour décrire le comportement des récupérateurs d'énergie fortement couplés.

## V.4. Présentation d'un modèle non-linéaire

L'objectif de cette section est d'introduire un modèle permettant de prendre en compte les comportements non-linéaires de nos récupérateurs très fortement couplés. De la même manière que réalisé par Leadenham et Erturk [178], nous considérons une raideur assouplissante de second ordre, un terme de couplage de second ordre et un amortissement structural de second ordre dans le système à un degré de liberté modélisant le premier mode de résonance. A la différence de [178], le modèle présenté ici se base sur le modèle 2DDL-PM1 présenté dans le chapitre II et considérant notamment le champ électrique variable selon l'épaisseur des patches piézoélectriques. De plus, en se basant sur la discussion de la section précédente, nous ajoutons un terme de pertes diélectriques non-linéaires de second ordre au système à un degré de liberté.

Pour développer ce modèle non-linéaire, nous déterminons tout d'abord dans la section V.4.1 l'équation de mouvement et de courant à partir du principe de Hamilton sans considérer les pertes. Les étapes détaillées dans la section V.4.1 sont similaires à celles présentées dans la section II.5.1, à la différence que l'expression de l'enthalpie comporte des termes non-linéaires. Les pertes linéaires et non-linéaires sont introduites dans la section V.4.2. La résolution du système non-linéaire est ensuite détaillée dans la section V.4.3 avec l'utilisation de la méthode de la balance harmonique.

### V.4.1. Equations de mouvement et de courant

#### a. Le principe de Hamilton et expression de l'enthalpie

De la même manière que pour le modèle linéaire dans la section II.5.1, le principe de Hamilton exprimé dans l'équation (V-48) et appliqué au système {poutre+masse mobile} permet d'obtenir les équations de mouvement et de courants. Ce principe énonce que : entre les deux instants  $t_0$  et  $t_1$ , la moindre variation aléatoire  $\delta$  du travail extérieur  $W$  se traduit par la variation du Lagrangien  $L$  dans le système. Le Lagrangien est la différence de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $U$  exprimé en (V-49).

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta(T - U) + \delta W_{ext}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta W) dt = 0 \quad (V-48)$$

$$L = T - U \quad (V-49)$$



L'énergie potentielle au niveau local dans le matériau piézoélectrique est donnée par l'enthalpie non-linéaire  $H_n$  proposée par Leadenham et Erturk [178] exprimée en (V-50) où la fonction  $\text{sgn}(x)$  est la fonction signe exprimée en (V-51).

$$H_n = \frac{1}{2} c_{11}^{ef} S_1^2 + \frac{1}{3} c_{111} S_1^3 \text{sgn}(S_1) - e_{31}^{ef} S_1 E_3 - \frac{1}{2} e_{311} S_1^2 \text{sgn}(S_1) E_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{33}^{ef} E_3^2 \quad (\text{V-50})$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{V-51})$$

En comparaison à l'enthalpie linéaire  $H$  exprimée par l'équation (II-64) dans la section II.5.1, un terme non-linéaire mécanique  $\frac{1}{3} c_{111} S_1^3 \text{sgn}(S_1)$  et un terme non-linéaire électromécanique  $\frac{1}{2} e_{311} S_1^2 \text{sgn}(S_1) E_3$  ont été ajouté à l'expression de  $H_n$ . Ce sont ces deux termes qui permettent de prendre en comptes les effets d'assouplissement des matériaux piézoélectriques. Les étapes qui vont suivre permettent de retrouver l'équation de courant et de mouvement à partir de l'expression de  $H_n$  et sont très similaires à celles présentées dans la section II.5.1 pour le modèle linéaire.

De la même manière que réalisé pour l'énergie potentielle linéaire, l'énergie potentielle  $U_p$  totale des patchs piézoélectriques correspond à l'intégrale de l'enthalpie  $H_n$  sur le volume des patchs  $\mathcal{V}_p$ . L'énergie potentielle totale dans le récupérateur  $U$  est obtenue en ajoutant à  $U_p$  l'énergie potentielle mécanique du substrat qui est supposée linéaire tel qu'exprimé en (V-52). La masse mobile est supposée indéformable.

$$U = \int_{\mathcal{V}_p} H_n d\mathcal{V}_p + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_s} \gamma_s^{ef} S_1^2 d\mathcal{V}_s \quad (\text{V-52})$$

L'expression de  $H_n$  est déduite de l'expression des déformations donnée par la théorie d'Euler-Bernoulli en (V-53) avec  $z$  la distance à la fibre neutre,  $w(x, t)$  la flexion de la poutre (déplacement selon l'axe  $z$ ) et  $w''(x, t)$  sa dérivée spatiale seconde selon la variable  $x$ . Le champ électrique, lorsqu'il est considéré variable selon l'épaisseur, est donné par (V-54) où  $\lambda$  est appelé *flux linkage*<sup>16</sup>. La dérivée temporelle de  $\lambda$ , notée  $\dot{\lambda}$ , correspond à la tension comme exprimé en (V-55).  $z_m$  est la coordonnées du milieu du patch piézoélectrique du haut donné par l'équation (V-56) où  $h_p$  et  $h_s$  sont les épaisseurs respectives des patchs piézoélectriques et du substrat.

$$S_1 = -z w''(x, t) \quad (\text{V-53})$$

$$E_3 = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{h_p} \text{sgn}(z) + \frac{e_{31}^{ef}}{\epsilon_{33}^{ef}} (z - z_m \text{sgn}(z)) w''(x, t) \quad (\text{V-54})$$

$$\dot{\lambda} = v \quad (\text{V-55}) \quad z_m = \frac{h_p + h_s}{2} \quad (\text{V-56})$$

En introduisant les expressions de  $S_1$  et  $E_3$  dans l'expression de l'enthalpie  $H_n$  (V-50) et en intégrant sur le volume (V-52), on obtient l'expression de l'énergie potentielle en (V-57).

<sup>16</sup> Nous préférons utiliser le *flux linkage*  $\lambda$ , tel que détaillé dans le livre de Preumont [198] et réalisé par Leadenham et Erturk [178], que la tension  $v$  en tant que coordonnée généralisée pour le développement du modèle non-linéaire. L'utilisation *flux linkage* permet de déduire directement l'équation de courant de l'exploitation du principe de Hamilton et évite la dérivation temporelle de la fonction  $\text{sgn}()$ . L'utilisation de la tension comme coordonnée généralisée dans la section II.5.1, quant à elle, permet de déduire l'expression de la charge  $q$  aux bornes des électrodes.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \left\{ YI(w'')^2 + \frac{1}{3} \widetilde{k}_2 (w'')^3 \operatorname{sgn}(w'') - [\alpha w'' + \widetilde{\theta}_2 (w'')^2 \operatorname{sgn}(w'')] \lambda \right\} dx - \frac{1}{2} C_p \lambda^2 \quad (\text{V-57})$$

$YI$  est la raideur à la flexion linéaire de poutre exprimé en (V-58),  $\widetilde{k}_2$  est la raideur mécanique à la flexion non-linéaire de second-order exprimée en (V-59),  $\alpha$  est le terme de couplage linéaire exprimé en (V-60) et  $\widetilde{\theta}_2$  est le terme de couplage non-linéaire linéaire exprimé en (V-61).  $C_p$  est la capacité équivalente exprimée en (V-62).

$$YI = B \left[ Y_s^{ef} \frac{h_s^3}{12} + c_{11}^{ef} \left( \frac{2}{3} \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{12} + k_{e_{31}}^2 \frac{h_p^3}{6} \right) \right] \quad (\text{V-58})$$

$$\widetilde{k}_2 = B \frac{1}{2} h_p \left[ c_{111} (h_p^3 + 4h_p^2 h_s + 3h_p h_s^2 + h_s^3) + \frac{e_{31}^{ef}}{\epsilon_{33}^{ef}} e_{311} (h_p^3 + h_p^2 h_s) \right] \quad (\text{V-59})$$

$$\alpha = e_{31}^{ef} B (h_p + h_s) \quad (\text{V-60})$$

$$\widetilde{\theta}_2 = \frac{1}{6} e_{311} B (4h_p^2 + 6h_p h_s + 3h_s^2) \quad (\text{V-61})$$

$$C_p = \frac{B 2l \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (\text{V-62})$$

Pour que le lecteur puisse se référer plus facilement à la littérature de référence [178], la vitesse de la base est considérée dans le calcul de l'énergie cinétique dans cette section. Cette approche diffère de celle présentée dans la section II.5.1 où la vitesse de la base est considérée par une force correspondant à un travail extérieur. Les deux approches permettent malgré tout d'obtenir la même équation de mouvement. L'énergie cinétique est alors ici exprimée par l'équation (V-63) avec  $m$  la masse linéique de la poutre,  $M_t$  et  $I_t$  sont la masse et l'inertie en rotation de la masse mobile.  $D_t$  est la distance du centre de gravité de la masse mobile avec le bout de poutre.  $\dot{w}_B$  est la vitesse de la base de la poutre alors que  $w_{L_b}$  est le déplacement relatif en bout de poutre. L'expression de l'énergie cinétique en (V-63) prend en compte les effets de rotation de la masse tel que présenté dans la section II.5.1.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} m [\dot{w} + \dot{w}_B(t)]^2 dx_1 + \left[ M_t (\dot{w}_{L_b} + \dot{w}_B)^2 + M_t D_t \left( (\dot{w}_{L_b} + \dot{w}_B) \dot{w}_{L_b}' + \dot{w}_{L_b}' (\dot{w}_{L_b} + \dot{w}_B) \right) + (M_t D_t^2 + I_t) \dot{w}_{L_b}'^2 \right] \quad (\text{V-63})$$

Comme les pertes ne seront considérées que dans la section suivante, le travail extérieur  $W$  correspond uniquement à l'énergie récupérée dans la résistance  $R_{load}$  exprimée en (V-64).

$$\delta W_{ext} = - \frac{\dot{\lambda}}{R_{load}} \delta \lambda \quad (\text{V-64})$$

## b. Détermination des équations de mouvement et de courant

En utilisant la forme du mode de vibration  $\phi(x)$  pour la première fréquence de résonance obtenue avec le modèle 2DDL, la flexion  $w(x, t)$  peut être exprimée par (V-65). Ainsi, nous pouvons définir le déplacement en bout de poutre  $r(t)$  en  $x = L_b$  comme variable généralisée.

$$w(x, t) = \phi(x)r(t) \quad (\text{V-65})$$

Comme le déplacement  $r$  et le flux linkage  $\lambda$  sont les coordonnées généralisées, alors la variation du Lagrangien  $\delta L$  est donnée par l'équation (V-66).

$$\delta L(r, \dot{r}, \dot{\lambda}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \delta \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial r} \delta r + \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} \quad (\text{V-66})$$

Une intégration par partie permet d'obtenir l'équation (V-67) à partir de l'expression du principe de Hamilton en (V-48), des expressions du travail en (V-64) et de l'expression de la variation du Lagrangien en (V-66).

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) + \frac{\partial L}{\partial r} \right] \delta r + \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\dot{\lambda}}{R_{load}} \right] \delta \lambda \right\} dt = 0 \quad (\text{V-67})$$

En remplaçant le Lagrangien dans l'expression du principe de Hamilton en (V-67) avec les expressions de l'énergie cinétique en (V-57) et de l'énergie potentielle en (V-63) ainsi qu'en utilisant la décomposition donnée en (V-65), nous pouvons exprimer l'équation du principe de Hamilton à partir de coefficients équivalents en (V-68).

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ (M\ddot{r} + Kr + K_2 r \text{sgn}(r) - \Theta v - \Theta_2 v r \text{sgn}(r) + B_f \ddot{w}_B) \delta r + \left( (\Theta + \Theta_2 r \text{sgn}(r)) \dot{r} + C_p \dot{v} + \frac{v}{R} \right) \delta \lambda \right] dt = 0 \quad (\text{V-68})$$

$M$ ,  $K$ ,  $\Theta$  et  $B_f$  sont respectivement la masse équivalente, la raideur équivalente, le terme de couplage équivalent et le terme de force équivalent exprimés dans les équations (V-69) à (V-72). La raideur non-linéaire  $K_2$  et le terme de couplage non-linéaire  $\Theta_2$  sont exprimés en (V-73) et (V-74).

$$M = m \int_0^{L_b} \phi(x)^2 dx + M_t [\phi(L_b)]^2 + 2M_t D_t \phi'(L_b) \phi(L_b) \quad (\text{V-69})$$

$$+ (I_t + M_t D_t^2) [\phi'(L_b)]^2 \quad (\text{V-70})$$

$$K = YI \int_0^{L_b} (\phi''(x))^2 dx \quad (\text{V-70})$$

$$\Theta = \alpha \phi'(L_b) \quad (\text{V-71})$$

$$B_f = \hat{m} \int_0^l \phi(x) dx + M_t \phi(L_b) + D_t M_t \phi'(L_b) \quad (\text{V-72})$$

$$K_2 = \tilde{k}_2 \int_0^{L_b} \text{sgn}(\phi''(x)) (\phi''(x))^3 dx \quad (\text{V-73})$$

$$\Theta_2 = \tilde{\theta}_1 \int_0^{L_b} \text{sgn}(\phi''(x)) (\phi''(x))^2 dx \quad (\text{V-74})$$

L'équation (V-68) permet de retrouver l'équation de mouvement et l'équation de courant exprimées en (V-75) comme les variations  $\delta r$  et  $\delta \lambda$  sont considérées aléatoires.

$$\begin{cases} M\ddot{r} + Kr + K_2 r^2 \text{sgn}(r) - \Theta v - \Theta_2 v r \text{sgn}(r) = -B_f \ddot{w}_B \\ \Theta \dot{r} + \Theta_2 r \dot{r} \text{sgn}(r) + C_p \dot{v} + \frac{v}{R_{load}} = 0 \end{cases} \quad (\text{V-75})$$

L'équation (V-75) ne considère aucune perte. Des pertes linéaires et non-linéaires peuvent y être introduites.

#### V.4.2. Ajout des coefficients de pertes

Dans cette section, nous introduisons des pertes aux équations de mouvement et de courant données en (V-75). Les équations étant non-linéaires, il n'est pas envisageable d'utiliser les coefficients imaginaires pour modéliser les pertes. En effet, l'utilisation de termes imaginaires dans les équations complexifie la résolution d'un système non-linéaire par la méthode de la balance harmonique, [199]. Cependant, il est possible de considérer les pertes dues à l'angle de phase mécanique équivalent  $\varphi_{eq}$  et à l'angle de phase mécanique diélectrique  $\delta_e$  en utilisant des coefficients équivalents réels. Ces coefficients sont obtenus à partir de l'analyse de l'énergie perdue par cycle tel que l'a réalisé Leadenham dans sa thèse [197] pour intégrer des coefficients équivalents de pertes mécaniques linéaires et non-linéaires. Nous proposons dans cette section de retrouver les résultats de Leadenham par l'analyse l'énergie dissipée due à l'angle de perte  $\varphi_{eq}$ , d'une part, et au coefficient linéaire équivalent d'autre part. Par analogie et grâce à la compréhension des phénomènes de pertes, il nous est ensuite possible d'introduire des coefficients équivalents de pertes diélectriques linéaires et non-linéaires à l'équation de courant.

##### a. Pertes linéaire

Si l'accélération de la base  $\ddot{w}_b$  est sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et en ne tenant compte que la première harmonique de la réponse, on considère que le déplacement en bout de poutre  $r(t)$  et la tension  $v(t)$  sont de pulsation  $\omega$  et sont déphasés d'angles respectivement notés  $\gamma_r$  et  $\gamma_v$ .

$$\ddot{w}_b = \mathcal{A}_B \cos \omega t \quad (\text{V-76}) \quad r = R \cos(\omega t + \gamma_r) \quad (\text{V-77}) \quad v = V \cos(\omega t + \gamma_v) \quad (\text{V-78})$$

Si la contrainte au sein de la poutre est déphasée par rapport à la déformation alors la force équivalente  $F_k$  résultante du déplacement  $r(t)$  du bout de la poutre est déphasée par rapport à  $r(t)$  d'un angle noté  $\varphi_{eq}$  comme exprimé en (V-79). On peut distinguer dans l'expression de  $F_k$ , le terme induisant des pertes que l'on nomme force non-conservative. On déduit l'énergie perdue sur un cycle  $\omega_m$  en calculant l'énergie induite par la force  $F_k$  sur une période dans l'équation (V-80).

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \frac{K}{\cos \varphi_{eq}} R \cos(\omega t + \gamma_r + \varphi_{eq}) \\ &= \underbrace{KR \cos(\omega t + \gamma_r)}_{\text{Force conservative}} - \underbrace{KR \sin(\omega t + \gamma_r) \tan \varphi_{eq}}_{\text{Force non-conservative}} \end{aligned} \quad (\text{V-79})$$

$$\omega_m = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_k \dot{r} dt = -\pi KR^2 \tan \varphi_{eq} \quad (\text{V-80})$$

A partir de l'équation (V-80), on retrouve que l'énergie perdue par le déphasage  $\varphi_{eq}$  correspond à des pertes par hystérésis car les pertes sont indépendantes de la fréquence et proportionnelles au carré de l'amplitude  $R$  du déplacement.

De son côté, pour considérer les pertes linéaires par hystérésis, Leademham a proposé une force non-conservative  $F_{n1}$  s'opposant à la vitesse et proportionnelle à la distance avec la position d'équilibre telle qu'exprimée en (V-81) où  $b_1$  est le coefficient linéaire de perte structurale. Cette force induit un comportement temporel différent de celui induit par un déphasage  $\varphi_{eq}$  mais induit des pertes par cycles qui y sont équivalentes. Les pertes par cycles  $w_{m1}$  causées par la force  $F_{n1}$  sont exprimées en (V-82).

$$F_{n1} = -b_1 r \operatorname{sgn}(r) \operatorname{sgn}(\dot{r}) \quad (\text{V-81})$$

$$w_{m1} = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_1 r \operatorname{sgn}(r) \operatorname{sgn}(\dot{r}) \dot{r} dt = -2b_1 R^2 \quad (\text{V-82})$$

Les pertes  $w_{m1}$  correspondent bien à des pertes par hystérésis car elles sont indépendantes de la fréquence et proportionnelles au carré de l'amplitude du déplacement.

A partir des équations (V-80) et (V-82), nous pouvons déduire que les pertes causées par le déphasage  $\varphi_{eq}$  et par la force  $F_{n1}$  sont équivalentes si  $b_1$  vérifie l'équation (V-83).

$$b_1 = \frac{\pi}{2} K \tan \varphi_{eq} \quad (\text{V-83})$$

De la même manière que pour le domaine mécanique, un coefficient équivalent diélectrique peut être trouvé pour les pertes par hystérésis. Si le courant équivalent  $I_c$  résultant de la tension est en retard de  $\delta_e$  tel qu'exprimé en (V-84), les pertes associées  $w_e$  calculées en (V-85) sont proportionnelles au carré de l'amplitude de la tension et sont indépendantes de la fréquence.

$$I_c = - \frac{C_p}{\cos \delta_e} V \omega \sin(\omega t + \gamma_v - \delta_e) \quad (\text{V-84})$$

$$w_e = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_c v dt = -\pi C_p \tan \delta_e V^2 \quad (\text{V-85})$$

Pour modéliser des pertes équivalentes, on propose alors un courant de fuite  $I_{n1}$  pour lequel les charges extraites sont proportionnelles à la valeur absolue de tension et s'opposant à la variation de tension exprimé en (V-86).  $d_1$  est le coefficient de pertes diélectriques linéaires équivalent.

$$I_{n1} = -d_1 \operatorname{sgn}(v) \dot{v} \operatorname{sgn}(\dot{v}) \quad (\text{V-86})$$

L'énergie perdue par cycle  $w_{e1}$  induit par le courant  $I_n$  est exprimée en (V-87). Ces pertes sont équivalentes aux pertes par le déphasage  $\delta_e$  pour une valeur  $d_1$  respectant l'équation (V-88).

$$w_{e1} = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} d_1 \operatorname{sgn}(v) \dot{v} \operatorname{sgn}(\dot{v}) \times v dt = -2d_1 V^2 \quad (\text{V-87})$$

$$d_1 = \frac{\pi}{2} C_p \tan \delta_{eq} \quad (\text{V-88})$$

### b. Pertes non-linéaires

Afin de prendre en compte un amortissement structural de second ordre, Leademham a proposé une force non-conservative  $F_{n2}$  proportionnelle au carré du déplacement et opposé à la vitesse. Les pertes correspondantes  $w_{m2}$  exprimées en (V-90) sont proportionnelles au cube de l'amplitude du déplacement du bout de la poutre et sont indépendantes de la fréquence.

$$F_{n2} = -b_2 r^2 \text{sgn}(\dot{r}) \quad (\text{V-89})$$

$$w_{m2} = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_2 r^2 \text{sgn}(\dot{r}) \dot{r} dt = -\frac{4}{3} R^3 b_2 \quad (\text{V-90})$$

De la même manière, nous pouvons introduire un courant de fuite non-linéaire  $I_{n2}$  dans l'équation de courant exprimé en (V-91) avec  $d_2$  le coefficient équivalent de pertes diélectriques non-linéaires. Les pertes par cycle  $w_{e2}$  données par l'équation (V-92) sont proportionnelles au cube de la tension et ne dépendent pas de la fréquence.

$$I_{n2} = -d_2 v \dot{v} \text{sgn}(\dot{v}) v \quad (\text{V-91})$$

$$w_{e2} = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} d_2 v \dot{v} \text{sgn}(\dot{v}) v dt = -\frac{4}{3} V^3 d_2 \quad (\text{V-92})$$

### c. Equations de courant et de mouvement finales

Pour finir, on peut intégrer les pertes mécaniques et diélectriques linéaires et non linéaires dans l'équation de mouvement et l'équation de courant exprimées en (V-75). Les équations de comportement du récupérateur comportant les pertes sont alors données par les équations (V-93) et (V-94).

$$M\ddot{r} + Kr + K_2 r^2 \text{sgn}(r) - \Theta v - \Theta_2 v r \text{sgn}(r) + (b_1 r \text{sgn}(r) + b_2 r^2) \text{sgn}(\dot{r}) = -B_f \ddot{w}_B \quad (\text{V-93})$$

$$\Theta \dot{r} + \Theta_2 r \dot{r} \text{sgn}(r) + C_p \dot{v} + \frac{v}{R_{load}} + (d_1 \dot{v} \text{sgn}(v) + d_2 v \dot{v}) \text{sgn}(\dot{v}) = 0 \quad (\text{V-94})$$

Nous avons donc finalement pu intégrer dans les équations des termes de pertes qui induisent des pertes mécaniques linéaires et non-linéaires avec les coefficients respectifs  $b_1$  et  $b_2$  ainsi que des pertes diélectriques linéaires et non-linéaires avec les coefficients respectifs  $d_1$  et  $d_2$ . Les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  expriment les pertes par cycle qui sont respectivement proportionnelles au carré et au cube de l'amplitude du déplacement relatif alors que  $d_1$  et  $d_2$  expriment les pertes par cycle qui sont respectivement proportionnelles au carré et au cube de l'amplitude de la tension.

### V.4.3. Résolution des équations

La résolution des équations de vibration non-linéaires est réalisable grâce à la méthode de la balance harmonique [200] qui associe une résolution de Newton-Raphson à la procédure de Galerkin. Par l'application de cette méthode, les réponses temporelles de la tension et du déplacement sont données par des séries de Fourier obtenues par des projections sur les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus). Comme nous ne considérons que la première harmonique des réponses à une excitation de pulsation  $\omega$ , les séries de Fourier ne contiennent

qu'un terme en sinus et un terme en cosinus comme exprimé en (V-95) et (V-96) où  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  sont les coefficients de la série de Fourier.

$$r = R_1 \cos(\omega t) + R_2 \sin(\omega t) \quad (\text{V-95}) \quad v = V_1 \cos(\omega t) + V_2 \sin(\omega t) \quad (\text{V-96})$$

A partir de cette considération, l'accélération de la base  $\ddot{w}_B$ , le déplacement  $r$  et la tension  $v$  exprimés respectivement en (V-76), (V-95) et (V-96) peuvent être intégrés dans l'équation de mouvement (V-93) et de courant (V-94). La procédure de Galerkin revient à projeter les équations de mouvement et de courants sur la base trigonométrique puis à déterminer les coefficients de la série Fourier qui annulent les équations résultantes. Les projections sont exprimées en (V-97) et (V-98) où  $\mathcal{F}$  est la fonction projetée.

Projection sur la fonction cosinus	$\langle \mathcal{F}   \cos(\omega t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathcal{F} \cos(\omega t) dt$	(V-97)
Projection sur la fonction sinus	$\langle \mathcal{F}   \sin(\omega t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathcal{F} \sin(\omega t) dt$	(V-98)

Les équations résultantes des projections sont données par les équations (V-99) à (V-102) où  $R$  et  $V$  sont les amplitudes respectives du déplacement et de la tension exprimées par  $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$  et  $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ . Pour rappel,  $\mathcal{A}_B$  est l'amplitude de l'accélération de la base.

$$-M\omega^2 R_1 + \left( \frac{2}{\pi} b_1 + \frac{4}{3\pi} b_2 R \right) R_2 + \left( K + \frac{8}{3\pi} K_2 R \right) R_1 - \theta V_1 - \frac{4}{3\pi} \theta_2 \left[ \frac{(2R_1^2 + R_2^2)V_1 + R_1 R_2 V_2}{R} \right] + B_f \mathcal{A}_B = 0 \quad (\text{V-99})$$

$$-M\omega^2 R_2 - \left( \frac{2}{\pi} b_1 + \frac{4}{3\pi} b_2 R \right) R_1 + \left( K + \frac{8}{3\pi} K_2 R \right) R_2 - \theta V_2 - \frac{4}{3\pi} \theta_2 \left[ \frac{(2R_2^2 + R_1^2)V_2 + R_1 R_2 V_1}{R} \right] = 0 \quad (\text{V-100})$$

$$C_p \omega V_2 + \frac{1}{R_{load}} V_1 + \left( \theta + \frac{4}{3\pi} \theta_2 R \right) \omega R_2 + \frac{2}{\pi} d_1 \omega V_1 + d_2 \frac{4}{3\pi} V \omega V_1 = 0 \quad (\text{V-101})$$

$$C_p \omega V_1 - \frac{1}{R_{load}} V_2 + \left( \theta + \frac{4}{3\pi} \theta_2 R \right) \omega R_1 - \frac{2}{\pi} d_1 \omega V_2 - d_2 \frac{4}{3\pi} V \omega V_2 = 0 \quad (\text{V-102})$$

Comme les équations ci-dessus n'ont pas de solution analytique, la résolution se fait à l'aide d'un algorithme itératif de Newton-Raphson sur Matlab. Pour donner la réponse d'un récupérateur en fonction de la fréquence et de la résistance à une accélération d'amplitude  $\mathcal{A}_B$ , on détermine par l'algorithme les termes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  qui annulent les équations (V-99) à (V-102) à chaque valeur de résistance  $R_{load}$  et à chaque valeur de pulsation  $\omega$ .

## V.5. Ajustement du modèle sur les mesures et discussions

### a. Présentation des mesures et des coefficients du modèle ajusté

Le modèle non linéaire présenté dans la section précédente a été ajusté aux mesures de puissances et de déplacements réalisées sur les trois récupérateurs et présentées dans le chapitre précédent. Cet ajustement (dit *fitting*) permet de retrouver les coefficients linéaires et non-linéaires équivalents qui modélisent les récupérateurs. Pour effectuer celui-ci, les paramètres linéaires  $M$ ,  $K$ ,  $\theta$ ,  $C_p$  et  $B_f$  peuvent être préalablement estimés à partir des coefficients matériaux et du modèle 2DDL-PM1. Les coefficients de pertes linéaires et non-linéaires nécessitent quant eux d'être déterminés uniquement à partir de l'ajustement sur les mesures. La Figure V.7, la Figure V.8, la Figure V.9, la Figure V.10, la Figure V.11 et la Figure V.12 tracent les résultats du modèle avec les coefficients ajustés sur les mesures de puissance et de déplacement pour les prototypes PMN-PT N, PZT N et PZT W. Les coefficients ajustés du modèle sont donnés dans le Tableau V.2 pour chaque récupérateur.

L'ajustement a été réalisé sur tous les coefficients du modèle (11 coefficients linéaires et non-linéaires au total) en prenant comme point de départ les paramètres linéaires fournis par le modèle. Les coefficients ont été déterminés en minimisant la somme des erreurs sur la puissance et le déplacement entre le modèle et la mesure pour toutes les accélérations, les fréquences, les résistances mesurées. Ceci a été réalisé grâce un algorithme Matlab utilisant la fonction *fminsearch* et en résolvant les équations (V-99) à (V-102) par un algorithme de Newton-Raphson à chaque jeu de paramètre testé.

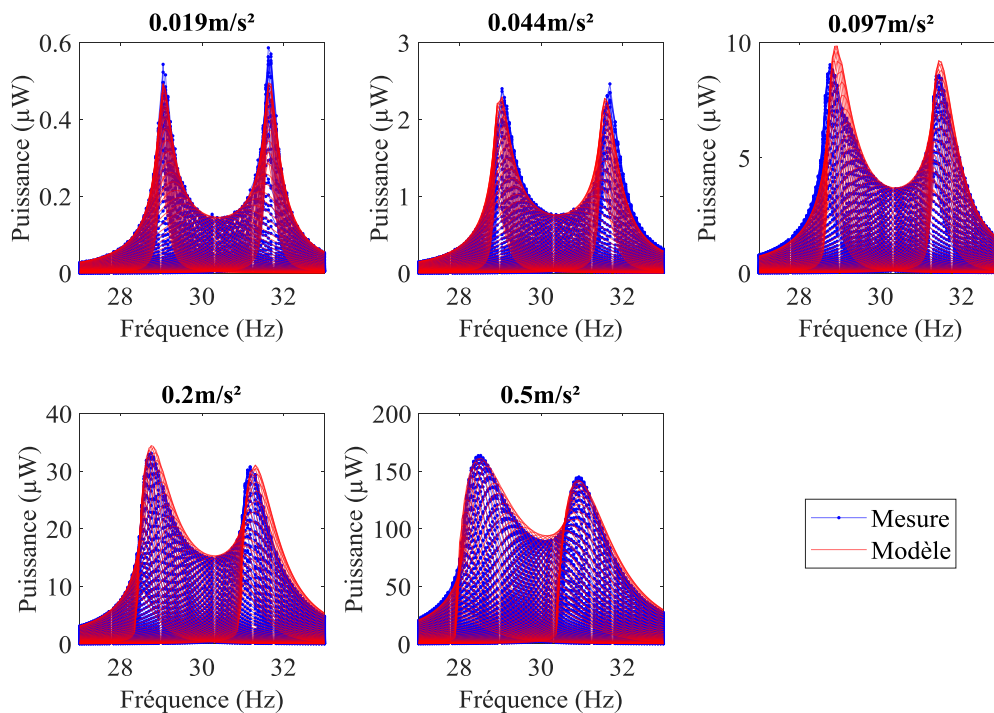


Figure V.7 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PMN-PT N en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés



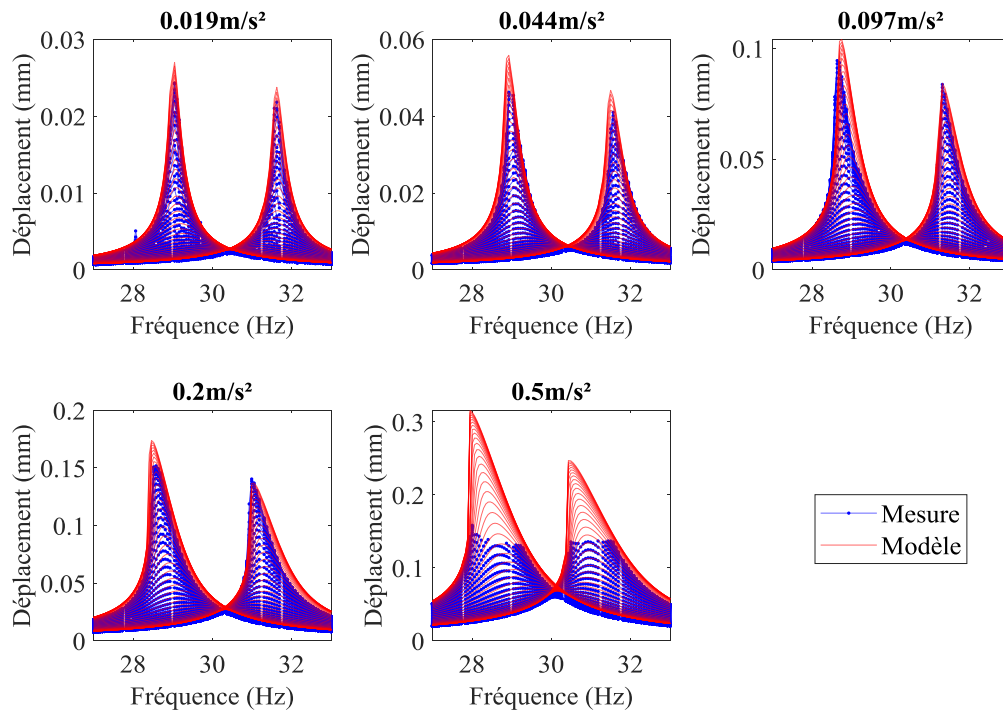


Figure V.8 : Valeur RMS du déplacement mesuré en sortie du récupérateur PMN-PT N en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés. A  $0,5 \text{ m/s}^2$ , des points sont malheureusement manquants sur la mesure de déplacement car sa valeur dépassait la pleine échelle de mesure du vibromètre ( $\approx 0,2 \text{ mm}$ ).

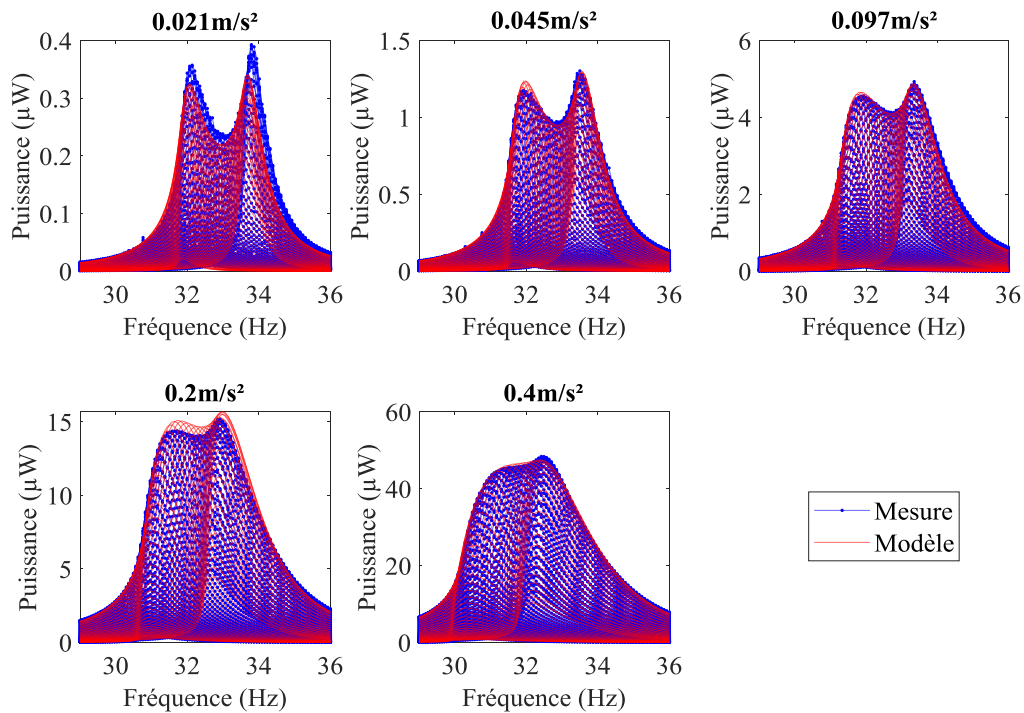


Figure V.9 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PZT N en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés

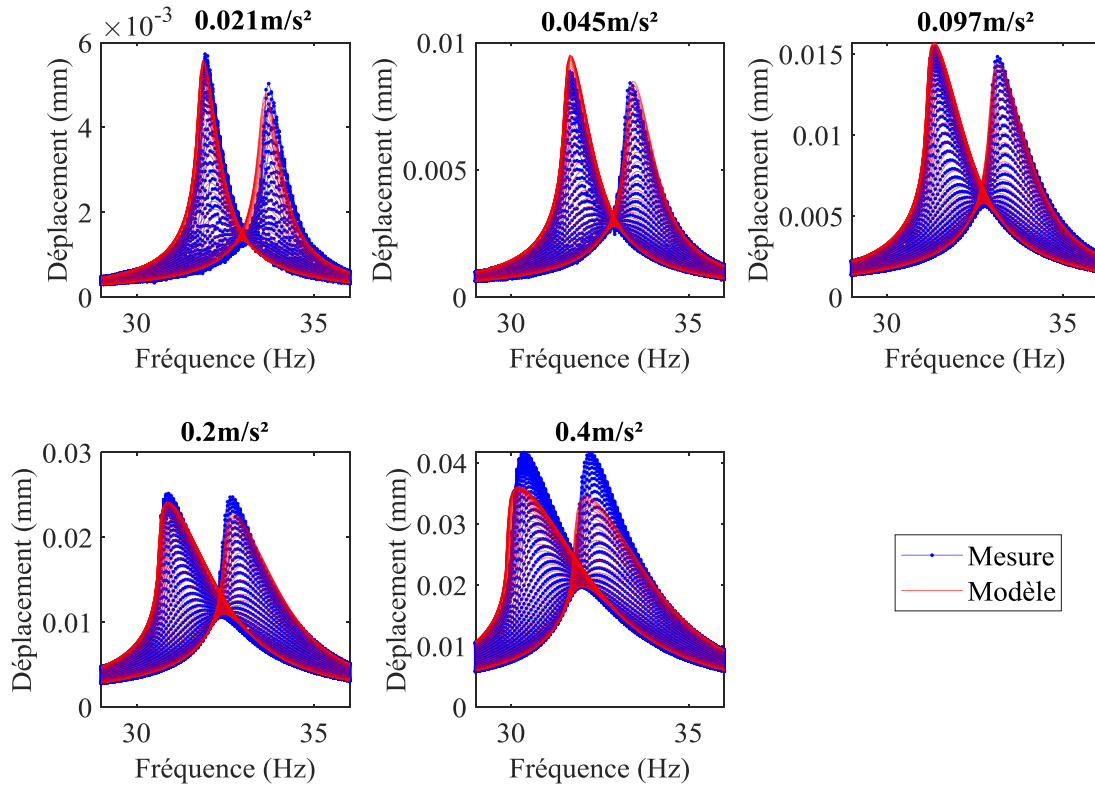


Figure V.10 : Valeur RMS du déplacement mesuré en sortie du récupérateur PZT N en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés

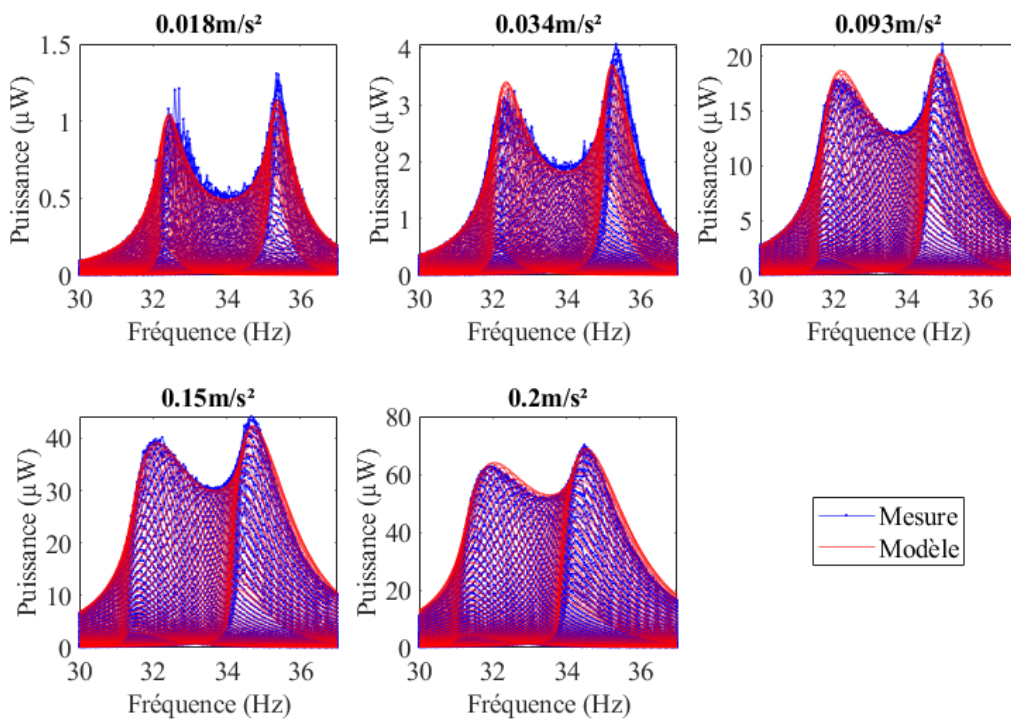


Figure V.11 : Puissance mesurée en sortie du récupérateur PZT W en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés

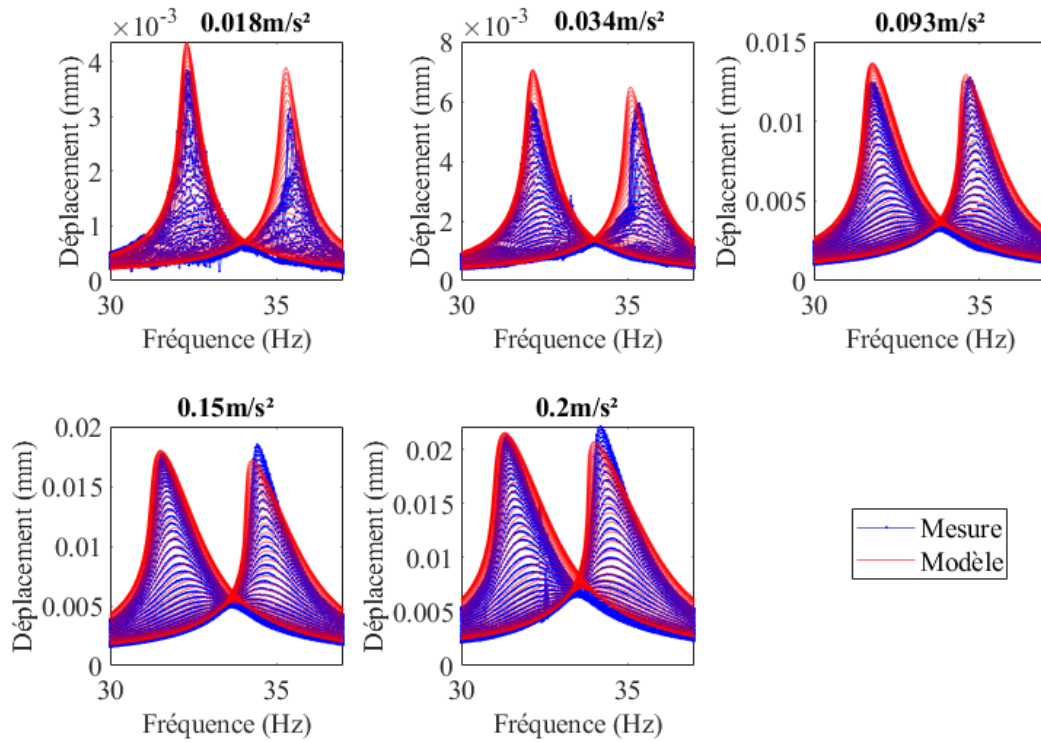


Figure V.12 : Valeur RMS du déplacement mesuré en sortie du récupérateur PZT W en fonction de la fréquence d'excitation pour toutes les résistances de charge et résultats du modèle avec les coefficients ajustés

Tableau V.2: Coefficients du modèle non-linéaire ajusté sur les mesures pour les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W

Coefficient	Unité	PMN-PT N	PZT N	PZT W
$M$	g	35,2	268	1 260
$B_f$	g	23,1	64,3	304
$K$	N/m	1 178	$1,10 \times 10^4$	$5,26 \times 10^4$
$\theta$	N/V	$-3,05 \times 10^{-3}$	$-2,88 \times 10^{-3}$	$-1,58 \times 10^{-2}$
$C_p$	F	$41,9 \times 10^{-9}$	$6,99 \times 10^{-9}$	$24,5 \times 10^{-9}$
$K_2$	N/m <sup>2</sup>	$-2,44 \times 10^5$	$-2,99 \times 10^7$	$-1,52 \times 10^8$
$\theta_2$	N/Vm	1,22	-0,65	69
$b_1$	N/m	12,8	167	864
$1/\tan \varphi_{eq} = \pi K/2b_1$	-	145	103	95
$b_2$	N/m <sup>2</sup>	$8,57 \times 10^4$	$1,82 \times 10^7$	$1,06 \times 10^8$
$d_1$	F	0	0	0
$d_2$	F/V	$2,03 \times 10^{-10}$	0	0

Comme on peut l'observer sur les figures ci-dessus, le modèle s'ajuste bien aux mesures de puissances et de déplacements. D'une part, ces résultats indiquent que les récupérateurs ont bien un comportement assouplissant du second ordre. De plus, il est maintenant possible

d'affirmer que les pertes mécaniques ont bien une composante du second ordre<sup>17</sup>. Les pertes mécaniques peuvent donc être associées aux pertes des matériaux piézoélectriques. Seul le déplacement du récupérateur PZT N à 0,4 m/s<sup>2</sup> présente un écart significatif entre la mesure et le modèle. On peut émettre l'hypothèse qu'à cette accélération, les contraintes dans le matériau piézoélectrique sont trop importantes et qu'une modélisation utilisant des termes du troisième ordre permettrait de mieux rapprocher le modèle des mesures.

*b. Discussion sur les coefficients linéaires*

Les coefficients linéaires obtenus à partir du modèle 2DDL-PM1 et des paramètres matériaux sont fournis dans le Tableau V.3. Comme la mesure de déplacement n'est pas réalisée exactement à la jonction entre la poutre et la masse mobile (en  $x = L_b$ ) mais sur la masse mobile à une distance  $d_j$  de la jonction (en  $x = L_b + d_j$ ), la normalisation du mode de vibration  $\phi(x)$  pour le calcul des coefficients se fait en prenant  $\phi(L_b + d_j) = 1$ . Ainsi  $r(t)$  correspond au déplacement mesuré. Le distance  $d_j$  sont respectivement de 10 mm, 5 mm et 5 mm pour les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W.

Tableau V.3: Coefficients linéaires du modèle obtenus à partir des coefficients matériaux et du modèle 2DDL-PM1 pour les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W

Coefficient	Unité	PMN-PT N	PZT N	PZT W
$M$	g	35,4	249	1 250
$B_f$	g	25,4	70	350
$K$	N/m	1 358	$1,15 \times 10^4$	$6,47 \times 10^4$
$\Theta$	N/V	$-3,70 \times 10^{-3}$	$-3,33 \times 10^{-3}$	$-2,42 \times 10^{-2}$
$C_p$	F	$69,1 \times 10^{-9}$	$7,13 \times 10^{-9}$	$23,5 \times 10^{-9}$

Les coefficients linéaires déduits des coefficients matériaux donnés dans le Tableau V.3 sont proches des coefficients ajustés sur les mesures donnés dans le Tableau V.2. Des écarts sont notables (sur le terme de couplage  $\Theta$  notamment) mais ces différences sont associées au ratio largeur/longueur des poutres, aux défauts de fabrications ainsi qu'aux incertitudes sur les paramètres matériaux donnés par les fournisseurs comme expliqué dans le Chapitre III et Chapitre IV.

*c. Discussions sur le comportement des pertes*

L'allure des courbes de puissances et de déplacements mesurés et la valeur des coefficients ajustés dans le Tableau V.2 nous fournissent finalement des informations essentielles sur le comportement des récupérateurs et leurs pertes. D'un point de vue général, on peut remarquer que les récupérateurs à base de PZT (le PZT N et le PZT W) sont davantage marqués par des

<sup>17</sup> Le lecteur attentif notera que l'amplitude du déplacement n'est pas égale aux deux pics sur la Figure V.10 et la Figure V.12. Aux résistances optimales le déplacement est bien le même tel qu'affirmé pour les pertes mécaniques par hystérésis dans la section V.2.2.c. La différence sur les figures vient de la variation de la résistance de charge qui ne se limite pas aux charges optimales.

perdes mécaniques par hystérésis alors que le récupérateur PMN-PT N comporte des pertes diélectriques non-linéaires non-négligeables.

Concernant les PZT, l'ajustement du modèle ne fait pas apparaître de coefficient associé à des pertes diélectriques. Ces coefficients sont fixés à une valeur nulle pour l'ajustement ( $d_1 = d_2 = 0$  dans le Tableau V.2). Bien que des pertes diélectriques soient inévitablement présentes pour ces récupérateurs, elles n'ont pas d'impact significatif sur la puissance récupérée comparées aux pertes structurales mécaniques.

Concernant le récupérateur PMN-PT N, son comportement est bien différent des deux récupérateurs précédents : un coefficient de pertes diélectriques non-linéaires non nul ( $d_2 \neq 0$ ) doit être pris en compte afin que le modèle soit correctement ajusté aux mesures. Sur la puissance mesurée du récupérateur PMN-PT N (Figure V.7), l'amplitude du pic de puissance  $P_b^{max}$  diminue davantage avec l'augmentation de l'accélération que l'amplitude du pic  $P_a^{max}$ . Ce comportement ne peut être expliqué que par des pertes diélectriques (et éventuellement piézoélectriques) non-linéaires. La Figure V.13 représente la puissance mesurée et la puissance déduite du modèle pour le cas où les pertes diélectriques sont considérées et pour le cas où les pertes diélectriques sont négligées. Il est notamment intéressant de faire remarquer que le modèle négligeant les pertes diélectriques ( $d_2 = 0$ ) correspond au modèle de pertes considéré par Leadenham et Erturk [178].

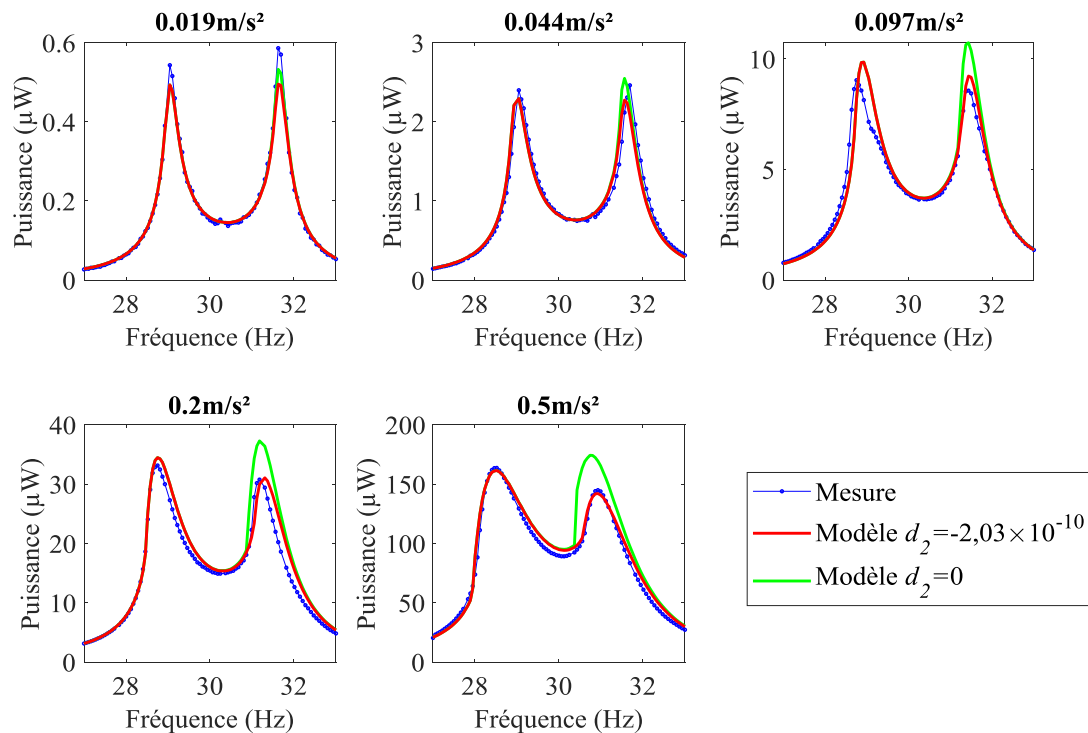


Figure V.13 : Puissance mesurée du récupérateur PMN-PT N en fonction de la fréquence d'excitation pour les résistances optimales. Le modèle est tracé avec et sans la prise en compte du coefficient  $d_2$ . Les autres coefficients sont donnés dans le Tableau V.2.

On remarque sur la Figure V.13 que, si les pertes diélectriques sont négligées, le ratio d'amplitude des deux pics de puissance reste constant ( $P_b^{max}/P_a^{max} \approx \text{cte}$ ). Dans le cas où les pertes diélectriques non-linéaires sont négligées, l'erreur entre le modèle et la mesure est par conséquent importante sur la puissance  $P_b^{max}$  à 0,5 m/s<sup>2</sup>. Ainsi, l'ajout du coefficient non-

linéaire de perte diélectrique permet de mieux modéliser la puissance récupérée par un récupérateur utilisant un matériau piézoélectrique très fortement couplé. Par ailleurs, on peut également noter que les pertes diélectriques linéaires ne semblent pas avoir d'impact significatif sur le comportement du récupérateur à faible accélération car le coefficient  $d_1$  est pris égal à 0 pour l'ajustement.

Bien que le récupérateur PZT W ait quasiment le même coefficient de couplage global que le récupérateur PMN-PT N ( $k^2 = 16,4\%$  pour le PZT W et  $k^2 = 16,6\%$  pour le PMN-PT N), les pertes diélectriques sont indiscernables sur ses mesures de puissance. La différence entre les deux comportements ne semble pouvoir s'expliquer que par des pertes diélectriques qui sont en proportions plus importantes pour le matériau PMN-PT que pour le matériau PZT. En effet, à amplitude d'accélération fixée, le champ électrique développé est plus faible dans le matériau du récupérateur PMN-PT N que celui du le récupérateur PZT W. A  $0,2 \text{ m/s}^2$ , l'amplitude du champ électrique est égale  $1,66 \text{ kV/m}$  en moyenne<sup>18</sup> dans l'épaisseur du patch de PMN-PT au pic de puissance  $P_b^{max}$ , alors que le récupérateur PZT W développe un champ électrique moyen  $35,5 \text{ kV/m}$  au pic de puissance  $P_b^{max}$  pour cette même accélération. Les pertes diélectriques sont davantage marquées pour le récupérateur PMN-PT N mais les récupérateurs PZT W et le PZT N démontrent des pertes mécaniques plus importantes que le PMN-PT N à une accélération donnée comme il va l'être expliqué ci-dessous.

#### *d. Evolution des performances avec le niveau d'accélération*

A partir de l'exploitation du modèle et des coefficients du Tableau V.2, nous pouvons déterminer la puissance maximale attendue à chaque niveau d'accélération. La Figure V.12 représente la valeur maximale de la puissance normalisée  $P_{norm}^{max}$ , dont la normalisation est exprimée en (V-15), en fonction du niveau d'accélération pour chaque récupérateur. La valeur  $P_{norm}^{max}$  correspondrait à la valeur du facteur de qualité mécanique  $Q_m$  si la totalité des pertes était assimilées à un amortissement visqueux (voir équation (V-17)). Bien qu'on ne puisse qualifier  $P_{norm}^{max}$  comme un facteur de qualité étant donné les effets non-linéaires et diélectriques des récupérateurs, cette normalisation nous paraît pertinente pour étudier les pertes dans les récupérateurs car elle est indépendante du volume et de la masse des récupérateurs.

La Figure V.14 montre que les récupérateurs présentent peu de pertes et des valeurs importantes de  $P_{norm}^{max}$  aux faibles valeurs d'accélération. Par exemple, à  $0,02 \text{ m/s}^2$ ,  $P_{norm}^{max}$  est d'environ 80 pour les récupérateurs PZT W et PZT N et d'environ 130 pour le récupérateur PMN-PT N. Ces valeurs importantes, obtenues en partie grâce aux faibles pertes intrinsèques de l'acier, expliquent les grandes valeurs de densités de puissance relevées dans le chapitre IV. Il est de plus intéressant de remarquer que ces valeurs de  $P_{norm}^{max}$  à faible accélération sont proches des facteurs de qualité  $Q_m$  équivalents déduits des mesures d'impédance en petit signaux relevées dans le Tableau IV.2 de la section IV.4.1. Les valeurs de  $Q_m$  déduites des mesures sont en effet égales à 130, 85 et 91 respectivement pour les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W. Concernant les fortes valeurs d'accélération, on remarque que la valeur de  $P_{norm}^{max}$  diminue rapidement avec l'augmentation de l'accélération ( $P_{norm}^{max} \approx 25$  pour les récupérateurs PZT W et PZT N à  $0,5 \text{ m/s}^2$ ).

<sup>18</sup> Le champ électrique moyen est calculé en divisant l'amplitude de la tension par l'épaisseur d'un patch piézoélectrique.

Le récupérateur PMN-PT N présente de meilleures valeurs de  $P_{norm}^{max}$  comparé aux récupérateurs utilisant du PZT. Cela signifie, qu'à accélération fixée, les pertes mécaniques sont davantage présentes pour les récupérateurs PZT N et PZT W que le PMN PT N. On peut attribuer ce résultat au matériau PZT NCE51 de Noliac qui présente davantage de pertes que le matériau PMN-PT X2B de TRS et/ou au fait qu'il soit soumis à de plus fortes contraintes à accélération donnée. Le NCE51 est en effet plus rigide<sup>19</sup> que le X2B et est donc soumis une plus grande valeur de contrainte pour une même déformation.

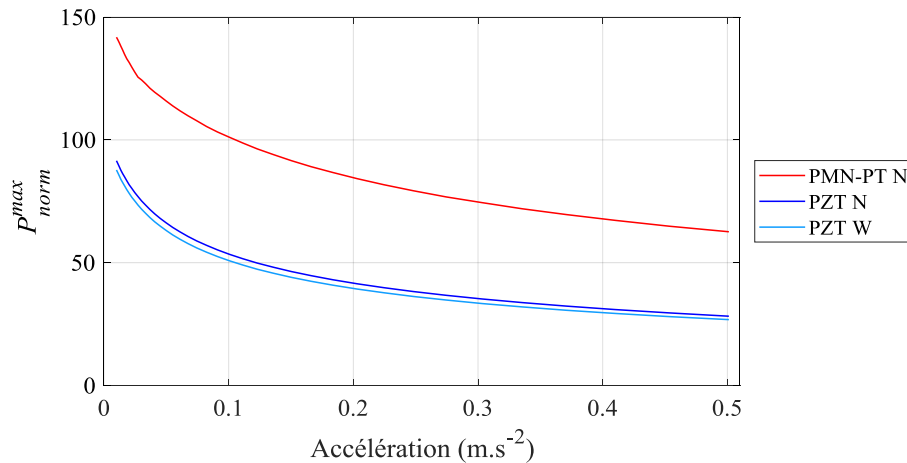


Figure V.14 : Evolution de la valeur maximale puissance normalisée  $P_{norm}^{max}$  en fonction du niveau d'accélération

La bande passante attendue par les récupérateurs lorsqu'ils sont associés à des couples de résistances et de capacités optimales (technique du *R-C tuning*) augmente avec le niveau d'accélération. La raideur non-linéaire, le terme de couplage non-linéaire et les pertes mécaniques non-linéaires respectivement exprimées dans le modèle par  $K_2$ ,  $\Theta_2$ ,  $b_2$  contribuent à l'augmentation de la bande passante. Les pertes non-linéaires sont cependant défavorables pour les performances car elles réduisent la puissance récupérée. L'augmentation de la bande passante grâce à la raideur et au terme de couplage non-linéaires paraît, quant à elle, intéressante car ces coefficients n'influent théoriquement pas sur la puissance maximale récupérable. Néanmoins, comme des sauts d'orbites peuvent être causés par les non-linéarités des matériaux piézoélectriques [42], il est probable que la puissance maximale ne soit pas récupérable expérimentalement si l'orbite permettant de l'atteindre n'est pas suffisamment stable [201].

Afin de connaître la contribution des coefficients dans nos récupérateurs, on propose de calculer la bande passante à partir du modèle en négligeant les amortissements non-linéaire d'une part (en prenant  $b_2 = d_2 = 0$ ) et en négligeant la raideur et le terme de couplage non-linéaires d'autre part (en prenant  $K_2 = \Theta_2 = 0$ ). La Figure V.15 représente la valeur de la bande passante en fonction de l'amplitude de l'accélération avec la prise en compte de la totalité des coefficients du Tableau V.2 et pour les cas où ne sont considérées que les pertes non-linéaires ou que la raideur et le terme de couplage non-linéaires.

<sup>19</sup> Pour l'hypothèse de contrainte plane, la rigidité  $c_{11}^{ef}(k_{e31}^2 + 1)$  est égale à 69GPa pour le PZT NCE51 et à 24GPa pour le PMN-PT X2B.

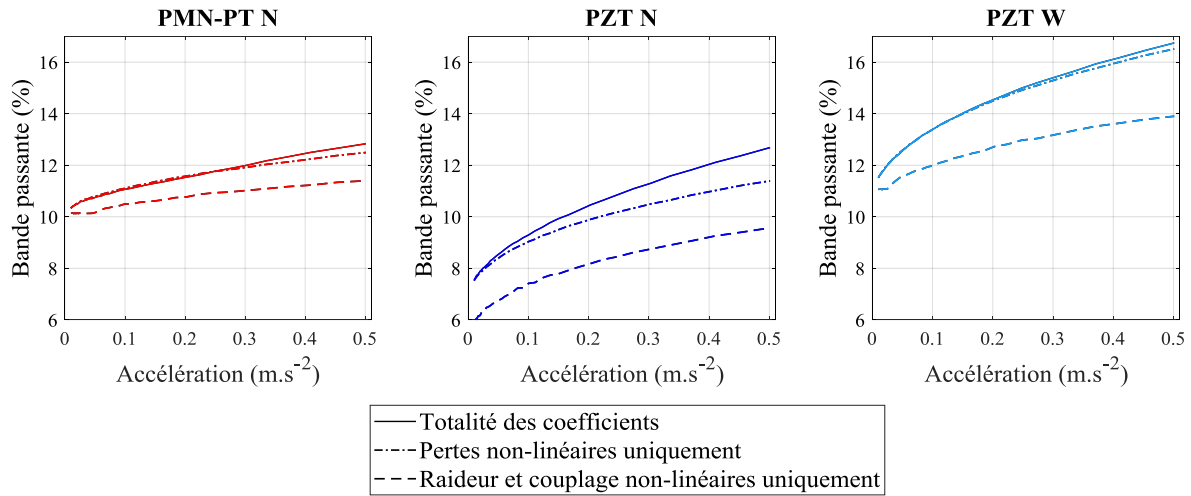


Figure V.15 : Evolution de de la bande passante en fonction du niveau d'accélération. La raideur et le couplage non-linéaire sont pris nuls ( $K_2 = \Theta_2 = 0$ ) pour relever l'effet des amortissements non-linéaires uniquement et les pertes non-linéaires mécaniques et diélectriques sont prises nulles ( $b_2 = d_2 = 0$ ) pour révéler l'effet de la raideur et du couplage non-linéaire uniquement.

Il est intéressant de remarquer que pour tous les récupérateurs, les pertes non-linéaires sont la source principale de l'augmentation de la bande passante. La raideur et le terme de couplage non-linéaires permettent d'augmenter significativement la bande passante si aucune perte non-linéaire n'est considérée. Leur influence sur l'augmentation de la bande passante est cependant négligeable si des pertes non-linéaires sont déjà considérées. Seuls les effets de la raideur et du couplage non-linéaires du récupérateur PZT N semblent avoir une influence importante sur la bande passante. Il est d'ailleurs intéressant de noter que le récupérateur PZT N, moins couplé que le récupérateur PZT W, atteint la même bande passante à forte accélération (environ 12% à 0,4 m/s<sup>2</sup>) que celle du récupérateur PZT W à faible accélération (environ 11% à 0,02 m/s<sup>2</sup>). Les effets non-linéaires ont donc un effet significatif sur la bande passante des récupérateurs et notamment sur celle du récupérateur le moins couplé ayant la plus faible bande passante en régime linéaire (le PZT N).

Cependant, étant donné la présence de pertes non-linéaires, les effets assouplissants des matériaux PZT-5A et le PMN-PT X2B ne semblent pas intéressants pour augmenter les performances des récupérateurs fortement couplés en terme de bande passante. La Figure V.16 montre en effet l'évolution du produit de la puissance maximale normalisée  $P_{norm}^{max}$  et de la bande passante en fonction du niveau d'accélération pour chaque récupérateur. On remarque alors que ce produit diminue avec l'augmentation du niveau d'accélération. La puissance normalisée diminue trop pour que les effets non-linéaires piézoélectriques soient intéressants.



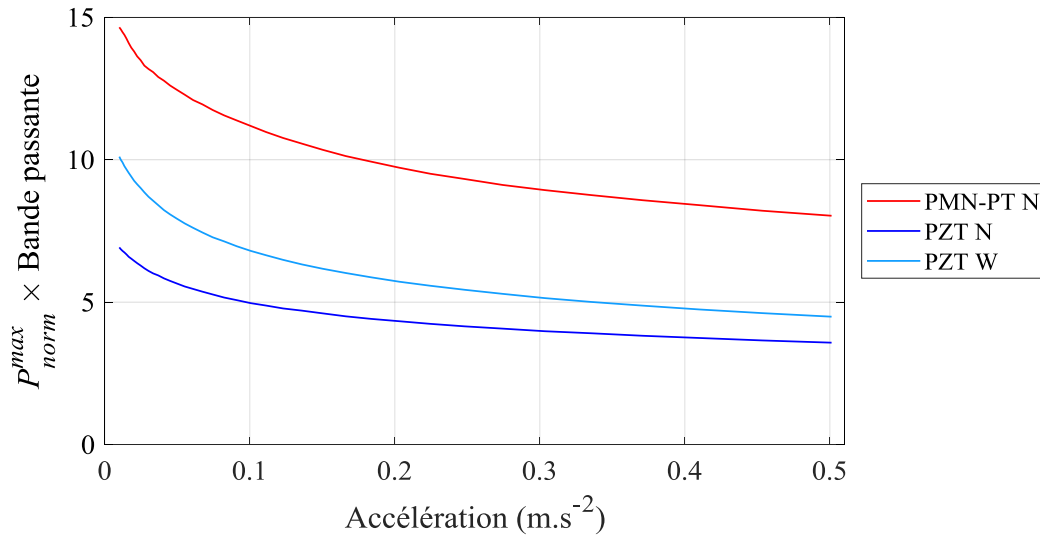


Figure V.16 : Evolution du produit de  $P_{norm}^{max}$  et de la bande passante en fonction du niveau d'accélération pour chaque récupérateur

Grâce au modèle non-linéaire, nous pouvons déterminer les performances de nos récupérateurs en matière de NPD et de bande passante pour différents niveaux d'accélération et comparer celles-ci à l'état de l'art évoqué dans le chapitre IV. La Figure V.17 place ainsi nos récupérateurs en fonction de leur bande passante et de leur densité de puissances déterminées à partir modèle. Les résultats sont donnés pour 14 amplitudes d'accélération  $\mathcal{A}_B$  linéairement espacées entre 0,01 m/s<sup>2</sup> et 0,05 m/s<sup>2</sup> et la NPD est calculée en prenant en compte le volume global  $\mathcal{V}_g$  de nos récupérateurs<sup>20</sup>. La largeur des ellipses sur la Figure V.17 correspond à la valeur de  $P_{norm}^{max}$  et leur hauteur correspond au coefficient de couplage linéaire  $k^2$ . Les valeurs de  $k^2$  sont calculées à partir des valeurs des termes de couplages linéaires  $\Theta$ , des capacités équivalentes  $C_p$  et des raideurs linéaires équivalentes  $K$  fournies dans le Tableau V.2. Nous plaçons également plusieurs récupérateurs de l'état de l'art sur la Figure V.17 tel que réalisé sur la Figure IV.25. Seuls quelques récupérateurs significatifs de l'état de l'art sont repris sur la Figure V.17 dans le but de simplifier la lecture du graphique. La largeur des ellipses des récupérateurs de l'état de l'art correspond à leur facteur de qualité  $Q_m$ . Les hauteurs des ellipses correspondent aux coefficients de couplage globaux  $k^2$ .

La Figure V.17 révèle bien la diminution de la NPD et l'augmentation de la bande passante expérimentées sur nos récupérateurs avec l'augmentation du niveau d'accélération. Lorsque l'accélération augmente, la diminution de la NPD se fait conjointement avec l'augmentation des pertes exprimée par la diminution de la valeur de  $P_{norm}^{max}$ . A faible accélération ( $\mathcal{A}_B=0,5\text{m/s}^2$ ), tous nos récupérateurs ont une NPD supérieure à 200 kg.s.m<sup>-3</sup>. A une accélération d'amplitude 0,5m/s<sup>2</sup>, les récupérateurs PZT W et PZT N ont sensiblement la même NPD que le récupérateur de Ahmed-Seddik *et al.* [55] (NPD $\approx 75$  kg.s.m<sup>-3</sup>). La Figure V.17 révèle donc l'importance de solliciter les matériaux piézoélectriques dans le régime linéaire pour maximiser la NPD des récupérateurs.

<sup>20</sup> Le déplacement en bout de masse mobile n'est pas pris en compte dans le calcul du volume.

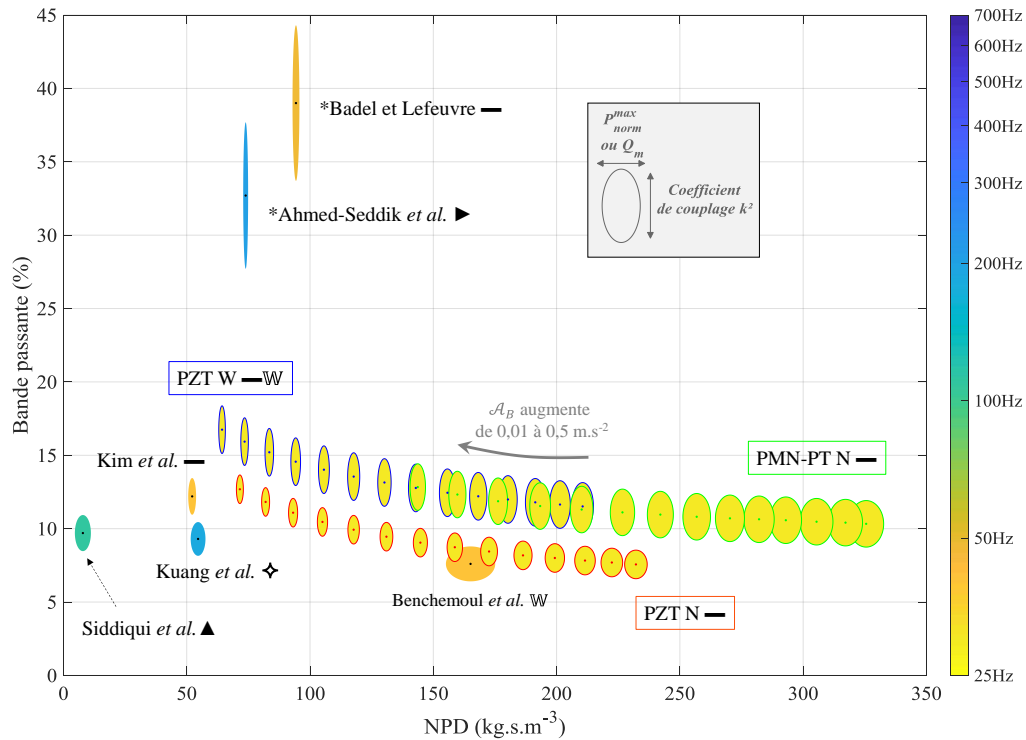


Figure V.17 : Classement des récupérateurs en fonction de la NPD et de la bande passante. La hauteur et la largeur des ellipses correspondent respectivement au coefficient de couplage et au facteur de qualité (ou à la valeur maximale de la puissance normalisée  $P_{norm}^{max}$  pour nos récupérateurs). La couleur des ellipses correspond à la fréquence de résonance en court-circuit. Les '\*' correspondent aux récupérateurs utilisant des matériaux monocristallins. Les valeurs de nos récupérateurs sont déterminées à partir du modèle pour une amplitude de l'accélération  $\mathcal{A}_B$  comprise entre 0,01 et 0,5  $m/s^2$ . Les valeurs des récupérateurs de l'état de l'art sont dans données le Tableau IV.4.

Par ailleurs, nous pouvons également déduire de la Figure V.17 que la comparaison de la bande passante des récupérateurs ne peut pas être dissociée de la comparaison des densités de puissances. A titre d'exemple, la bande passante du récupérateur PZT W à  $0,01 m.s^{-2}$  ne dépasse pas celle du récupérateur de Kim *et al.* [124] même si son coefficient de couplage est supérieur (bande passante et coefficient de couplage  $k^2$  respectivement de 11,5% et 16,4% pour le PZT W et de 12,2% et 12,5% pour Kim *et al.*). La forte bande passante du récupérateur de Kim *et al.* est obtenue grâce à son faible facteur de qualité ( $Q_m=32$ ) qui induit également une faible NPD ( $52,2 kg.s.m^{-3}$ ). De la même manière, lorsque la valeur de  $P_{norm}^{max}$  pour le récupérateur PZT W diminue avec l'augmentation de l'accélération, sa bande passante augmente et devient supérieure à celle du récupérateur de Kim *et al.* La bande passante théorique du PZT W est en effet de 15,6% lorsque  $P_{norm}^{max}$  est de 32 à une amplitude d'accélération de  $0,33 m.s^{-2}$ . A ce niveau d'accélération, sa NPD vaut seulement  $76,7 kg.s.m^{-3}$ . Ainsi, le récupérateur PZT a une très large bande passante à  $0,33 m.s^{-2}$  mais ce résultat est obtenu en dépit de la NPD. Cet exemple montre alors que, même s'il est important de comparer les bandes passantes des récupérateurs d'énergie vibratoire, cette comparaison ne peut pas être faite sans discussion sur la NPD.

## **V.6. Conclusion du chapitre**

En conclusion, nous avons pu montrer que les effets non-linéaires des récupérateurs pouvaient être modélisés grâce à une raideur assouplissante de second ordre et des pertes par hystérésis non-linéaires de second ordre. Comme les coefficients non-linéaires sont de second ordre, ces effets sont attribués aux comportements non-linéaires des matériaux piézoélectriques. De plus, bien que l'influence des pertes diélectriques semble négligeable sur le comportement des récupérateurs utilisant du PZT-5A, nous avons montré qu'il est nécessaire de considérer des pertes diélectriques non-linéaires de second ordre pour le récupérateur utilisant du matériau PMN-PT monocristallin. Ces pertes ont une forte influence sur la puissance maximale récupérable au pic de puissance proche de la fréquence de résonance en circuit-ouvert.

Pour finir, nous avons montré que les récupérateurs PZT N et PZT W présentent des pertes mécaniques plus importantes que le PMN-PT N. Ces pertes augmentent la bande passante lorsque les récupérateurs sont associés à des techniques non-linéaires pour de fortes accélérations mais elles diminuent considérablement la puissance normalisée en contrepartie.

# Conclusion et perspectives

## *a. Synthèse des travaux réalisés*

Ce manuscrit a présenté les recherches effectuées au cours de mon doctorat sur les récupérateurs d'énergie vibratoire à forts coefficients de couplage électromécanique dédiés à l'ajustement de fréquence de résonance par méthodes électriques. Ainsi, la notion de coefficient de couplage électromécanique des récupérateurs été étudiée tout au long du manuscrit. En particulier, nos travaux se sont intéressés à la modélisation, à l'optimisation, à la fabrication et à la caractérisation de récupérateurs très fortement couplés.

Nous avons pu notamment retrouver dans le Chapitre I qu'il est nécessaire d'augmenter le coefficient de couplage électromécanique global des récupérateurs piézoélectriques pour maximiser leur bande passante s'ils sont exploités par des méthodes électriques d'ajustement de fréquence de résonance. Une analyse des configurations de récupérateurs piézoélectriques a ensuite permis d'estimer qu'une poutre à longue masse mobile est un excellent candidat pour concevoir des récupérateurs piézoélectriques à forts coefficients de couplage et à fortes densités de puissance. Cette configuration a donc été étudiée dans ce manuscrit. Bien que la poutre encastrée-libre paraisse simple et que son utilisation soit courante en récupération d'énergie vibratoire, nos analyses ont permis de fournir de nouveaux résultats et d'établir de nouvelles connaissances sur la conception de récupérateurs fortement couplés.

Le Chapitre II a notamment été dédié à l'introduction de modèles analytiques permettant la compréhension des aspects électromécaniques au sein de poutres piézoélectriques avec masse mobile. Le modèle mis en avant dans cette thèse est un modèle que nous avons nommé 2DDL-PM1 et qui se base sur une approche à deux degrés de liberté exploitée par la méthode de Rayleigh. En considérant l'inertie en rotation de la masse mobile, ce modèle permet de modéliser les récupérateurs ayant une masse mobile volumineuse de manière plus précise qu'avec les modèles à un degré de liberté communément utilisés dans la littérature. Par ailleurs, l'expression analytique du coefficient de couplage alternatif du récupérateur déduite de ce modèle permet d'étudier les effets électromécaniques beaucoup plus simplement que par l'utilisation de modèles semi-analytiques ou de simulations par éléments finis. Ainsi, nous avons montré qu'il est nécessaire de prendre en compte l'inertie en rotation de la masse mobile lorsqu'une masse volumineuse est utilisée. Nous avons de plus souligné qu'il est nécessaire de considérer la variation du champ électrique selon l'épaisseur des patches piézoélectriques, tel

que réalisé avec le modèle 2DDL-PM1, lorsque des matériaux très fortement couplés sont utilisés.

Le chapitre III a permis de fournir des règles de conception pour la maximisation du coefficient de couplage de poutres piézoélectriques. Nous avons notamment rappelé l'importance de localiser les contraintes dans le matériau piézoélectrique ainsi que l'importance de leur homogénéisation pour maximiser le coefficient de couplage global. L'étude de l'expression analytique du coefficient de couplage global alternatif a permis de montrer que l'optimisation du coefficient de couplage pouvait être scindée en trois optimisations distinctes : i) l'homogénéisation de la distribution longitudinale des déformations, ii) l'optimisation de la répartition transversale des contraintes, iii) la maximisation du coefficient de couplage du matériau. Nous avons notamment montré que l'utilisation d'une longue masse mobile permet de maximiser le coefficient de couplage. En effet, au même titre que le fuselage d'une poutre triangulaire, l'utilisation d'une longue masse mobile sur une poutre rectangulaire permet d'homogénéiser les contraintes le long de la poutre. Nous avons notamment pu démontrer qu'une masse mobile de la même longueur que la poutre permet d'homogénéiser suffisamment les contraintes pour rendre le fuselage de la poutre superflu pour l'augmentation du coefficient de couplage par l'homogénéisation des contraintes. Nous avons de plus montré que la longueur optimale des électrodes sur les patches piézoélectriques dépend de la longueur de la poutre et de la forme de masse. Cette longueur optimale peut notamment être facilement déterminée à partir du modèle. Nous avons d'ailleurs montré que les patches et les électrodes doivent couvrir toute la longueur de la poutre lorsqu'une longue masse mobile est utilisée. Concernant l'optimisation de la répartition transversale des contraintes, nous avons montré que le substrat et la répartition des déformations dans le matériau piézoélectrique ont une influence considérable sur le coefficient de couplage global du récupérateur. Le choix d'un substrat en matériau rigide par rapport à la rigidité du matériau piézoélectrique complexifie la procédure de conception. En effet, plus le matériau du substrat est rigide, plus son influence est grande sur le coefficient de couplage global maximal atteignable par le récupérateur. L'utilisation de métaux en tant que substrat permet cependant de réduire les pertes mécaniques du récupérateur. Pour finir, nous avons également étudié la maximisation du coefficient de couplage matériau pour augmenter le coefficient de couplage global. Nous avons montré que, dans le cadre de l'utilisation de matériaux céramiques, cette maximisation peut être réalisée par la minimisation des déformations latérales. Cette dernière peut être mise en œuvre soit par l'augmentation de la largeur de la poutre (état de déformation plane) soit par la fixation de barreaux latéraux sur la poutre. La solution des barreaux n'a malheureusement pas pu être validée expérimentalement pour le moment.

En abordant la fabrication et la caractérisation de prototypes fortement couplés dans le chapitre IV, nous avons montré que les défauts d'encastrement et l'influence de la colle ne peuvent pas être négligés pour de tels récupérateurs. En effet, à cause de l'influence de la configuration du prototype et du processus de fabrication, il se peut que le coefficient de couplage soit divisé par 1,5 entre la simulation par éléments finis et la mesure même si des efforts sont réalisés pour minimiser les imperfections de fabrication. Par l'intermédiaire d'un prototype à base de PMN-29PT monocristallin polarisé selon l'axe [001], nous avons malgré tout pu valider expérimentalement l'intérêt d'une longue masse mobile pour maximiser le coefficient de couplage global. Le coefficient de couplage obtenu par ce prototype ( $k^2 = 16,6\%$ ) est en effet un des meilleurs coefficients de couplage expérimenté par un récupérateur d'énergie piézoélectrique recensé dans l'état de l'art. Par ailleurs, la fabrication de deux

prototypes en PZT-5A à longue masse, un étroit appelé PZT N ( $k^2 = 11,3\%$ ) et un large appelé PZT W ( $k^2 = 16,4\%$ ), a permis de valider l'intérêt de l'augmentation de la largeur de la poutre pour maximiser le coefficient de couplage. Le prototype PZT W ainsi réalisé est, à notre connaissance, le récupérateur piézoélectrique à base de céramique le plus couplé de la littérature. Des essais vibratoires réalisés sur plusieurs résistances de charges ont ensuite permis de montrer que les récupérateurs peuvent atteindre de larges bandes passantes s'ils sont associés à des méthodes électriques d'ajustement de fréquence de résonance. Pour un ajustement réalisé avec des couples optimaux de résistances et de capacités, les récupérateurs PMN-PT N, PZT N et PZT W permettraient un ajustement sur une bande de fréquence de 10,1%, 7,8% et 11,3% de la fréquence centrale. Un prototype en PZT de la même configuration que le PZT W et exploité par un circuit utilisant la technique Phase Shift Synchronous Electric Charge Extraction (PSSECE) a notamment permis d'obtenir une bande passante de 17,8% de la fréquence centrale. Par ailleurs, nous avons montré que l'utilisation d'une longue masse mobile permet d'attendre de fortes densités de puissances normalisées. Une longue masse mobile permet en effet d'homogénéiser les contraintes le long de la poutre tout en profitant pleinement du volume correspondant l'encombrement du récupérateur. Cependant, des effets non-linéaires peuvent être observés sur les récupérateurs avec l'augmentation du niveau de l'accélération. Ces effets non-linéaires sont notamment observables par la diminution de la puissance normalisée et l'augmentation de la bande passante avec le niveau d'accélération.

Les non-linéarités des récupérateurs ont justement pu être modélisées dans le chapitre V. Nous avons alors montré par l'intermédiaire de l'analyse des mesures que, plutôt que de considérer des pertes visqueuses, les pertes par hystérésis des matériaux piézoélectriques doivent être prises en compte pour décrire le comportement de nos récupérateurs très fortement couplés. Les pertes du matériau piézoélectrique peuvent en effet fortement influencer la puissance récupérée lorsque les contraintes sont majoritairement localisées dans les patches piézoélectriques. Nous avons notamment montré que nos récupérateurs en PZT étaient majoritairement influencés par des pertes correspondant à des cycles d'hystérésis mécaniques (pertes par cycle qui augmentent avec le niveau de déformation et qui sont indépendantes de la fréquence). Le PMN-PT N est quant à lui influencé par des pertes par hystérésis mécaniques et diélectriques (pertes par cycle qui augmentent avec le niveau de tension et qui sont indépendantes de la fréquence). Nous avons montré par ailleurs que les cycles d'hystérésis dits « piézoélectriques » induisent, soit un comportement équivalent, soit un comportement opposé, à des pertes diélectriques sur des mesures proches des fréquences de résonance en court-circuit et en circuit ouvert. Ainsi, nous avons révélé que le comportement des pertes diélectriques et piézoélectriques du récupérateur PMN-PT N en réponse à l'augmentation de l'accélération peut être considéré fidèlement avec un coefficient unique de pertes diélectriques non-linéaires. Nous montrons alors que, au même titre que les effets non-linéaires mécaniques ne peuvent être négligés pour les récupérateurs utilisant du PZT, les pertes diélectriques non-linéaires ne peuvent pas être négligées pour les récupérateurs utilisant du PMN-PT. Par ailleurs, l'influence de ces pertes sur la bande passante et la densité de puissance normalisée a pu être modélisée grâce à un modèle non-linéaire que nous avons proposé.

## ***b. Perspectives***

Bien que ce doctorat ait permis des avancées sur la compréhension des phénomènes électromécaniques dans les récupérateurs très fortement couplés, de nombreuses perspectives restent envisagées pour chacun des aspects étudiés dans ce manuscrit.

Concernant la modélisation, l'utilisation des modèles à deux degrés de libertés proposé dans cette thèse peut permettre de comprendre les influences mutuelles entre le premier mode et le second mode de résonance en flexion des récupérateurs. Ainsi il serait possible d'étudier le rapprochement des deux premières fréquences de résonance ainsi que la maximisation du coefficient de couplage de chacun des deux modes de vibrations. L'intérêt de l'ajustement de fréquence résonance par méthodes électriques sur ces deux modes pourrait être étudié. Par ailleurs, un modèle à deux degrés de libertés pourrait être utilisé pour analyser le comportement d'un récupérateur fortement couplé lors des commutations électriques des méthodes d'ajustement de fréquence de résonance. En effet, les événements d'extractions des charges, de ces techniques, peuvent exciter le second mode de résonance des récupérateurs. L'influence entre les commutations et le comportement mécanique du récupérateur pourrait ainsi être modélisé.

Concernant l'optimisation des récupérateurs, l'influence des pertes du substrat sur les pertes du récupérateur global pourrait être analysée. Ainsi, le dimensionnement d'un récupérateur permettrait de combiner simultanément la maximisation du coefficient de couplage global et la réduction des pertes dans le prototype final. Sur un autre aspect, la maximisation du coefficient de couplage par la fixation de barreaux doit être étudiée expérimentalement de manière plus poussée que dans ce manuscrit. La mise en place d'un procédé d'assemblage de barreaux dédié et le choix de matériaux adéquats pourront être envisagés.

L'analyse des non-linéarités des matériaux piézoélectriques pourra également être poursuivie par l'intermédiaire de l'exploitation du modèle non-linéaire introduit dans ce manuscrit et par l'intermédiaire de nouvelles expérimentations. L'analyse des non-linéarités de récupérateurs comportant des patches en PZT dur est notamment prévue prochainement. Les performances des récupérateurs en PZT dur pourront être comparées à celles des récupérateurs en PZT doux (PZT5-A) présentés dans ce manuscrit. Le modèle, quant à lui, pourra permettre de déduire des coefficients matériaux linéaires et non-linéaires équivalents. Nous pourrons ainsi conclure concernant les paramètres influents sur les pertes et comparer les différents matériaux.

Des caractérisations sur circuit électrique dédié sont également prévues. La fabrication d'un prototype à très fort coefficient de couplage ( $k^2 \approx 50\%$  espéré comme détaillé en annexe 4) est prévue très prochainement pour permettre d'expérimenter l'ajustement automatique de la fréquence de résonance proposé par les circuits intégrés conçus par Adrien Morel sur une très large bande de fréquences. Par ailleurs, les prototypes en PZT pourront être caractérisés en étuve en réponse à des températures variables. Ces caractérisations permettront de dévoiler les variations de fréquence de résonances de nos récupérateurs et de vérifier l'ajustement en fréquence automatique mis en œuvre par les circuits.

Sur une vision plus large et à plus long terme, notre connaissance en dimensionnement et en compréhension des phénomènes électromécaniques des récupérateurs de type poutre pourraient être étendues à l'étude d'autres configurations de récupérateurs. Des configurations implémentant des Amplified Piezoelectric Actuators pourraient notamment être étudiées.

## Bibliographie

- [1] M. Geisler, “Récupération d’énergie mécanique pour vêtements connectés autonomes,” PhD Thesis, Université Grenoble Alpes, 2017.
- [2] S. Boisseau, “Autonomie des Systèmes : Récupération d’énergie, Gestion d’énergie et Electronique basse consommation,” Habilitation à diriger des recherches, Université Grenoble Alpes (France), 2019.
- [3] R. Torah, P. Glynne-Jones, M. Tudor, T. O’Donnell, S. Roy, and S. Beeby, “Self-powered autonomous wireless sensor node using vibration energy harvesting,” *Meas. Sci. Technol.*, vol. 19, no. 12, p. 125202, Oct. 2008, doi: 10.1088/0957-0233/19/12/125202.
- [4] S. Basagni, M. Y. Naderi, C. Petrioli, and D. Spenza, “Wireless Sensor Networks with Energy Harvesting,” in *Mobile Ad Hoc Networking*, John Wiley & Sons, Ltd, 2013, pp. 701–736.
- [5] V. Kyriatzis, N. S. Samaras, P. Stavroulakis, H. Takruri-Rizk, and S. Tzortzios, “Enviromote: A New Solar-Harvesting Platform Prototype for Wireless Sensor Networks / Work-in-Progress Report,” in *2007 IEEE 18th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, Sep. 2007, pp. 1–5, doi: 10.1109/PIMRC.2007.4394148.
- [6] R. Abbaspour, “A practical approach to powering wireless sensor nodes by harvesting energy from heat flow in room temperature,” in *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems*, Oct. 2010, pp. 178–181, doi: 10.1109/ICUMT.2010.5676640.
- [7] S. Wen, Q. Xu, and B. Zi, “Design of a New Piezoelectric Energy Harvester Based on Compound Two-Stage Force Amplification Frame,” *IEEE Sens. J.*, vol. 18, no. 10, pp. 3989–4000, May 2018, doi: 10.1109/JSEN.2018.2820221.
- [8] M. Geisler, S. Boisseau, M. Perez, I. Ait-Ali, and S. Perraud, “Scaling effects in a non-linear electromagnetic energy harvester for wearable sensors,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 773, p. 012044, Nov. 2016, doi: 10.1088/1742-6596/773/1/012044.
- [9] P. Gasnier, E. Saoutieff, O. Soriano, B. Alessandri, J. Ojer-Aranguren, and S. Boisseau, “Cm-scale axial flow water turbines for autonomous flowmeters: an experimental study,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 27, no. 11, p. 115035, Oct. 2018, doi: 10.1088/1361-665X/aae774.
- [10] M. Perez, S. Boisseau, P. Gasnier, J. Willemin, M. Geisler, and J. L. Reboud, “A cm scale electret-based electrostatic wind turbine for low-speed energy harvesting applications,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 25, no. 4, p. 045015, Mar. 2016, doi: 10.1088/0964-1726/25/4/045015.
- [11] A. Capitaine, G. Pillonnet, T. Chailloux, O. Ondel, and B. Allard, “10  $\mu$ W converter for energy harvesting from sedimentary microbial fuel cells,” in *2017 IEEE 60th International*



- Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*, Aug. 2017, pp. 337–340, doi: 10.1109/MWSCAS.2017.8052929.
- [12] A. Theron-Ord, “ZigBee partners with EnOcean to extend energy harvesting benefits,” *Smart Energy International*, Mar. 15, 2016. <https://www.smart-energy.com/regional-news/europe-uk/zigbee-partners-enocean-extend-energy-harvesting-benefits/> (accessed Jun. 09, 2020).
- [13] P. Gambier, S. R. Anton, N. Kong, A. Erturk, and D. J. Inman, “Piezoelectric, solar and thermal energy harvesting for hybrid low-power generator systems with thin-film batteries,” *Meas. Sci. Technol.*, vol. 23, no. 1, p. 015101, Nov. 2011, doi: 10.1088/0957-0233/23/1/015101.
- [14] Z. Yang, S. Zhou, J. Zu, and D. Inman, “High-Performance Piezoelectric Energy Harvesters and Their Applications,” *Joule*, 2018.
- [15] S. J. Roundy, “Energy scavenging for wireless sensor nodes with a focus on vibration to electricity conversion,” PhD Thesis, University of California, Berkeley Berkeley, CA, 2003.
- [16] S. Roundy, P. K. Wright, and J. Rabaey, “A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes,” *Comput. Commun.*, vol. 26, no. 11, pp. 1131–1144, 2003.
- [17] “Thorlabs - Your Source for Fiber Optics, Laser Diodes, Optical Instrumentation and Polarization Measurement & Control.” <https://www.thorlabs.de/tutorials/tables2.cfm?> (accessed Jun. 04, 2020).
- [18] P. Gasnier *et al.*, “A 120°C 20G-compliant vibration energy harvester for aeronautic environments,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1407, p. 012118, Nov. 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1407/1/012118.
- [19] S. P. Beeby, M. J. Tudor, and N. M. White, “Energy harvesting vibration sources for microsystems applications,” *Meas. Sci. Technol.*, vol. 17, no. 12, pp. R175–R195, Oct. 2006, doi: 10.1088/0957-0233/17/12/R01.
- [20] A. Khaligh, P. Zeng, and C. Zheng, “Kinetic Energy Harvesting Using Piezoelectric and Electromagnetic Technologies—State of the Art,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 3, pp. 850–860, Mar. 2010, doi: 10.1109/TIE.2009.2024652.
- [21] A. R. M. Siddique, S. Mahmud, and B. V. Heyst, “A comprehensive review on vibration based micro power generators using electromagnetic and piezoelectric transducer mechanisms,” *Energy Convers. Manag.*, vol. 106, pp. 728–747, Dec. 2015, doi: 10.1016/j.enconman.2015.09.071.
- [22] J. Siang, M. H. Lim, and M. Salman Leong, “Review of vibration-based energy harvesting technology: Mechanism and architectural approach,” *Int. J. Energy Res.*, vol. 42, no. 5, pp. 1866–1893, Apr. 2018, doi: 10.1002/er.3986.
- [23] S. Boisseau, G. Despesse, and A. Sylvestre, “Optimization of an electret-based energy harvester,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 19, no. 7, p. 075015, Jun. 2010, doi: 10.1088/0964-1726/19/7/075015.
- [24] K. F. Wang and B. L. Wang, “Non-linear flexoelectricity in energy harvesting,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 116, pp. 88–103, Jul. 2017, doi: 10.1016/j.ijengsci.2017.02.010.
- [25] G. Lecoutre, “Etude de la fléxoélectricité de nanosystèmes par le développement d’algorithmes mêlant approche atomistique et mécanique des milieux continus,” phdthesis, Université Bourgogne Franche-Comté, 2018.
- [26] Z.-W. Fang, Y.-W. Zhang, X. Li, H. Ding, and L.-Q. Chen, “Integration of a nonlinear energy sink and a giant magnetostrictive energy harvester,” *J. Sound Vib.*, vol. 391, pp. 35–49, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.jsv.2016.12.019.
- [27] A. Badel and E. Lefeuvre, “Nonlinear Conditioning Circuits for Piezoelectric Energy Harvesters,” in *Nonlinearity in Energy Harvesting Systems: Micro- and Nanoscale*

- Applications*, E. Blokhina, A. El Aroudi, E. Alarcon, and D. Galayko, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 321–359.
- [28] R. Rantz and S. Roundy, “Characterization of real-world vibration sources with a view toward optimal energy harvesting architectures,” in *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies 2016*, Apr. 2016, vol. 9801, p. 98010P, doi: 10.1117/12.2219416.
- [29] I. Neri, F. Travasso, R. Mincigrucci, H. Vocca, F. Orfei, and L. Gammaitoni, “A real vibration database for kinetic energy harvesting application,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 23, no. 18, pp. 2095–2101, Dec. 2012, doi: 10.1177/1045389X12444488.
- [30] S. P. Beeby *et al.*, “A comparison of power output from linear and nonlinear kinetic energy harvesters using real vibration data,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 22, no. 7, p. 075022, Jun. 2013, doi: 10.1088/0964-1726/22/7/075022.
- [31] M. V. Wozniak, S. C. Conlon, E. C. Smith, and K. M. Reichard, “Design, Analysis, and Characterization of Single Crystal Energy Harvesters for Rotorcraft Wireless Sensor Applications,” Apr. 2015. <http://www.ingentaconnect.com/content/ahs/jahs/2015/00000060/00000002/art00006;jse-ssionid=7luo6li9t4bqr.x-ic-live-03> (accessed Jul. 17, 2018).
- [32] S. M. Shahruz, “Design of mechanical band-pass filters for energy scavenging,” *J. Sound Vib.*, vol. 292, no. 3, pp. 987–998, May 2006, doi: 10.1016/j.jsv.2005.08.018.
- [33] L. Tang, Y. Yang, and H. Wu, “Modeling and experiment of a multiple-DOF piezoelectric energy harvester,” Apr. 2012, p. 83411E, doi: 10.1117/12.914764.
- [34] K. Moon, J. Choe, H. Kim, D. Ahn, and J. Jeong, “A method of broadening the bandwidth by tuning the proof mass in a piezoelectric energy harvesting cantilever,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 276, pp. 17–25, Jun. 2018, doi: 10.1016/j.sna.2018.04.004.
- [35] E. S. Leland and P. K. Wright, “Resonance tuning of piezoelectric vibration energy scavenging generators using compressive axial preload,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 15, no. 5, pp. 1413–1420, Oct. 2006, doi: 10.1088/0964-1726/15/5/030.
- [36] N. A. Aboufotouh, M. H. Arafa, and S. M. Megahed, “A self-tuning resonator for vibration energy harvesting,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 201, pp. 328–334, Oct. 2013, doi: 10.1016/j.sna.2013.07.030.
- [37] C. V. Karadag and N. Topaloglu, “A Self-Sufficient and Frequency Tunable Piezoelectric Vibration Energy Harvester,” *J. Vib. Acoust.*, vol. 139, no. 1, Feb. 2017, doi: 10.1115/1.4034775.
- [38] G. Shi *et al.*, “A Sensor-less Self-tuning Resonance System for Piezoelectric Broadband Vibration Energy Harvesting,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, pp. 1–1, 2020, doi: 10.1109/TIE.2020.2975457.
- [39] N. Tran, M. H. Ghayesh, and M. Arjomandi, “Ambient vibration energy harvesters: A review on nonlinear techniques for performance enhancement,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 127, pp. 162–185, Jun. 2018, doi: 10.1016/j.ijengsci.2018.02.003.
- [40] Y. Jia, “Review of nonlinear vibration energy harvesting: Duffing, bistability, parametric, stochastic and others,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 31, no. 7, pp. 921–944, Apr. 2020, doi: 10.1177/1045389X20905989.
- [41] S. C. Stanton, C. C. McGehee, and B. P. Mann, “Reversible hysteresis for broadband magnetopiezoelastic energy harvesting,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 95, no. 17, p. 174103, Oct. 2009, doi: 10.1063/1.3253710.
- [42] S. Leadenham, A. Moura, and A. Erturk, “Exploiting material softening in hard PZTs for resonant bandwidth enhancement,” Las Vegas, Nevada, United States, Apr. 2016, p. 97992F, doi: 10.1117/12.2219370.

- [43] T. Huguet, “Vers une meilleure exploitation des dispositifs de récupération d’énergie vibratoire bistables : Analyse et utilisation de comportements originaux pour améliorer la bande passante,” thesis, Lyon, 2018.
- [44] T. Huguet, A. Badel, and M. Lallart, “Parametric analysis for optimized piezoelectric bistable vibration energy harvesters,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 28, no. 11, p. 115009, Oct. 2019, doi: 10.1088/1361-665X/ab45c6.
- [45] M. Xu and X. Li, “Stochastic averaging for bistable vibration energy harvesting system,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 141, pp. 206–212, Jun. 2018, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2018.04.014.
- [46] Y. Zhang, T. Wang, A. Luo, Y. Hu, X. Li, and F. Wang, “Micro electrostatic energy harvester with both broad bandwidth and high normalized power density,” *Appl. Energy*, vol. 212, pp. 362–371, Feb. 2018, doi: 10.1016/j.apenergy.2017.12.053.
- [47] S.-T. Chen, S. Du, E. Arroyo, Y. Jia, and A. Seshia, “Shock reliability enhancement for MEMS vibration energy harvesters with nonlinear air damping as a soft stopper,” *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 27, no. 10, p. 104003, Sep. 2017, doi: 10.1088/1361-6439/aa82ed.
- [48] “28.1 Résonance paramétrique - Résonance paramétrique,” *Coursera*. <https://fr.coursera.org/lecture/mecanique-lagrangienne/28-1-resonance-parametrique-Mi11N> (accessed Jun. 05, 2020).
- [49] Y. Jia, J. Yan, K. Soga, and A. A. Seshia, “Parametric resonance for vibration energy harvesting with design techniques to passively reduce the initiation threshold amplitude,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 23, no. 6, p. 065011, Apr. 2014, doi: 10.1088/0964-1726/23/6/065011.
- [50] J. Zhang and L. Qin, “A tunable frequency up-conversion wideband piezoelectric vibration energy harvester for low-frequency variable environment using a novel impact-and rope-driven hybrid mechanism,” *Appl. Energy*, vol. 240, pp. 26–34, Apr. 2019, doi: 10.1016/j.apenergy.2019.01.261.
- [51] Y.-H. Shin *et al.*, “Automatic resonance tuning mechanism for ultra-wide bandwidth mechanical energy harvesting,” *Nano Energy*, vol. 77, p. 104986, Nov. 2020, doi: 10.1016/j.nanoen.2020.104986.
- [52] W.-J. Wu, Y.-Y. Chen, B.-S. Lee, J.-J. He, and Y.-T. Peng, “Tunable resonant frequency power harvesting devices,” San Diego, CA, Mar. 2006, p. 61690A, doi: 10.1117/12.658546.
- [53] D. Charnegie, “Frequency Tuning Concepts For Piezoelectric Cantilever Beams And Plates For Energy Harvesting,” Sep. 25, 2007. <http://d-scholarship.pitt.edu/7865/> (accessed Oct. 08, 2019).
- [54] B. A. Seddik, G. Despesse, and E. Defay, “Wideband mechanical energy harvester based on piezoelectric longitudinal mode,” in *New Circuits and Systems Conference (NEWCAS), 2012 IEEE 10th International*, 2012, pp. 453–456.
- [55] B. Ahmed-Seddik, G. Despesse, S. Boisseau, and E. Defay, “Self-powered resonant frequency tuning for Piezoelectric Vibration Energy Harvesters,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 476, p. 012069, Dec. 2013, doi: 10.1088/1742-6596/476/1/012069.
- [56] E. Lefeuvre, A. Badel, C. Richard, and D. Guyomar, “Piezoelectric Energy Harvesting Device Optimization by Synchronous Electric Charge Extraction,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 16, no. 10, pp. 865–876, Oct. 2005, doi: 10.1177/1045389X05056859.
- [57] D. Guyomar, A. Badel, E. Lefeuvre, and C. Richard, “Toward energy harvesting using active materials and conversion improvement by nonlinear processing,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 52, no. 4, pp. 584–595, 2005.
- [58] A. Badel and E. Lefeuvre, “Wideband Piezoelectric Energy Harvester Tuned Through its Electronic Interface Circuit,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 557, p. 012115, Nov. 2014, doi: 10.1088/1742-6596/557/1/012115.

- [59] A. Brenes *et al.*, “Large-bandwidth piezoelectric energy harvesting with frequency-tuning synchronized electric charge extraction,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 302, p. 111759, Feb. 2020, doi: 10.1016/j.sna.2019.111759.
- [60] A. Morel, A. Badel, Y. Wanderoild, and G. Pillonnet, “A unified N-SECE strategy for highly coupled piezoelectric energy scavengers,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 27, no. 8, p. 084002, Aug. 2018, doi: 10.1088/1361-665X/aac3b6.
- [61] E. Lefeuvre, A. Badel, A. Brenes, S. Seok, and C.-S. Yoo, “Power and frequency bandwidth improvement of piezoelectric energy harvesting devices using phase-shifted synchronous electric charge extraction interface circuit,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 28, no. 20, pp. 2988–2995, Dec. 2017, doi: 10.1177/1045389X17704914.
- [62] A. Morel, G. Pillonnet, P. Gasnier, E. Lefeuvre, and A. Badel, “Frequency tuning of piezoelectric energy harvesters thanks to a short-circuit synchronous electric charge extraction,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 28, no. 2, p. 025009, Dec. 2018, doi: 10.1088/1361-665X/aaf0ea.
- [63] Y. Cai and Y. Manoli, “A piezoelectric energy-harvesting interface circuit with fully autonomous conjugate impedance matching, 156% extended bandwidth, and 0.38 $\mu$ W power consumption,” in *2018 IEEE International Solid - State Circuits Conference - (ISSCC)*, Feb. 2018, pp. 148–150, doi: 10.1109/ISSCC.2018.8310227.
- [64] S. Zhao, U. Radhakrishna, S. Hanly, J. Ma, J. H. Lang, and D. Buss, “Co-optimization of a piezoelectric energy harvesting system for broadband operation,” *ArXiv E-Prints*, p. arXiv:1910.00557, Oct. 2019.
- [65] A. Morel *et al.*, “32.2 Self-Tunable Phase-Shifted SECE Piezoelectric Energy-Harvesting IC with a 30nW MPPT Achieving 446% Energy-Bandwidth Improvement and 94% Efficiency,” in *2020 IEEE International Solid- State Circuits Conference - (ISSCC)*, Feb. 2020, pp. 488–490, doi: 10.1109/ISSCC19947.2020.9062972.
- [66] W. Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, and Y. P. Wu, “A new figure of merit for wideband vibration energy harvesters,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 24, no. 12, p. 125012, Oct. 2015, doi: 10.1088/0964-1726/24/12/125012.
- [67] A. R. Md. Foisal, C. Hong, and G.-S. Chung, “Multi-frequency electromagnetic energy harvester using a magnetic spring cantilever,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 182, pp. 106–113, Aug. 2012, doi: 10.1016/j.sna.2012.05.009.
- [68] E. Sardini and M. Serpelloni, “An efficient electromagnetic power harvesting device for low-frequency applications,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 172, no. 2, pp. 475–482, Dec. 2011, doi: 10.1016/j.sna.2011.09.013.
- [69] S. Roy, P. Podder, and D. Mallick, “Nonlinear Energy Harvesting Using Electromagnetic Transduction for Wide Bandwidth,” *IEEE Magn. Lett.*, vol. 7, pp. 1–4, 2016, doi: 10.1109/LMAG.2015.2509938.
- [70] A. Crovetto, F. Wang, and O. Hansen, “An electret-based energy harvesting device with a wafer-level fabrication process,” *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 23, no. 11, p. 114010, Oct. 2013, doi: 10.1088/0960-1317/23/11/114010.
- [71] Y. Chiu and Y.-C. Lee, “Flat and robust out-of-plane vibrational electret energy harvester,” *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 23, no. 1, p. 015012, Dec. 2012, doi: 10.1088/0960-1317/23/1/015012.
- [72] R. Guillemet, P. Basset, D. Galayko, F. Cottone, F. Marty, and T. Bourouina, “Wideband MEMS electrostatic vibration energy harvesters based on gap-closing interdigitated combs with a trapezoidal cross section,” in *2013 IEEE 26th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, Jan. 2013, pp. 817–820, doi: 10.1109/MEMSYS.2013.6474368.
- [73] Y. Minakawa, R. Chen, and Y. Suzuki, “X-shaped-spring enhanced MEMS electret generator for energy harvesting,” in *2013 Transducers Eurosensors XXVII: The 17th*

- International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS EUROSENSORS XXVII)*, Jun. 2013, pp. 2241–2244, doi: 10.1109/Transducers.2013.6627250.
- [74] K. Tao, S. W. Lye, J. Miao, L. Tang, and X. Hu, “Out-of-plane electret-based MEMS energy harvester with the combined nonlinear effect from electrostatic force and a mechanical elastic stopper,” *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 25, no. 10, p. 104014, Sep. 2015, doi: 10.1088/0960-1317/25/10/104014.
- [75] H. Asanuma, M. Hara, H. Oguchi, and H. Kuwano, “Nonlinear restoring force of spring with stopper for ferroelectric dipole electret-based electrostatic vibration energy harvesters,” *AIP Adv.*, vol. 6, no. 7, p. 075206, Jul. 2016, doi: 10.1063/1.4958884.
- [76] E. E. Aktakka, R. L. Peterson, and K. Najafi, “A CMOS-compatible piezoelectric vibration energy scavenger based on the integration of bulk PZT films on silicon,” in *2010 International Electron Devices Meeting*, Dec. 2010, p. 31.5.1-31.5.4, doi: 10.1109/IEDM.2010.5703459.
- [77] Q. C. Tang, Y. L. Yang, and X. Li, “Bi-stable frequency up-conversion piezoelectric energy harvester driven by non-contact magnetic repulsion,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 20, no. 12, p. 125011, Nov. 2011, doi: 10.1088/0964-1726/20/12/125011.
- [78] E. E. Aktakka and K. Najafi, “Three-axis piezoelectric vibration energy harvester,” in *2015 28th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, Jan. 2015, pp. 1141–1144, doi: 10.1109/MEMSYS.2015.7051166.
- [79] E. E. Aktakka and K. Najafi, “A Micro Inertial Energy Harvesting Platform With Self-Supplied Power Management Circuit for Autonomous Wireless Sensor Nodes,” *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 49, no. 9, pp. 2017–2029, Sep. 2014, doi: 10.1109/JSSC.2014.2331953.
- [80] K. Ashraf, M. H. M. Khir, J. O. Dennis, and Z. Baharudin, “A wideband, frequency up-converting bounded vibration energy harvester for a low-frequency environment,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 22, no. 2, p. 025018, Jan. 2013, doi: 10.1088/0964-1726/22/2/025018.
- [81] B. P. Mann and B. A. Owens, “Investigations of a nonlinear energy harvester with a bistable potential well,” *J. Sound Vib.*, vol. 329, no. 9, pp. 1215–1226, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.jsv.2009.11.034.
- [82] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and B. Ducharme, “Simulation of a Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 20, no. 7, p. 075022, Jun. 2011, doi: 10.1088/0964-1726/20/7/075022.
- [83] S. C. Stanton, C. C. McGehee, and B. P. Mann, “Nonlinear dynamics for broadband energy harvesting: Investigation of a bistable piezoelectric inertial generator,” *Phys. Nonlinear Phenom.*, vol. 239, no. 10, pp. 640–653, May 2010, doi: 10.1016/j.physd.2010.01.019.
- [84] W. Q. Liu, A. Badel, F. Formosa, Y. P. Wu, and A. Agbossou, “Wideband energy harvesting using a combination of an optimized synchronous electric charge extraction circuit and a bistable harvester,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 22, no. 12, p. 125038, Nov. 2013, doi: 10.1088/0964-1726/22/12/125038.
- [85] W. Liu, A. Badel, F. Formosa, Y. Wu, N. Bencheikh, and A. Agbossou, “A wideband integrated piezoelectric bistable generator: Experimental performance evaluation and potential for real environmental vibrations,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 26, no. 7, pp. 872–877, May 2015, doi: 10.1177/1045389X14546660.
- [86] A. F. Arrieta, P. Hagedorn, A. Erturk, and D. J. Inman, “A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, no. 10, p. 104102, Sep. 2010, doi: 10.1063/1.3487780.

- [87] R. Masana and M. F. Daqaq, "Relative performance of a vibratory energy harvester in mono- and bi-stable potentials," *J. Sound Vib.*, vol. 330, no. 24, pp. 6036–6052, Nov. 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2011.07.031.
- [88] Y. Tan, Y. Dong, and X. Wang, "Review of MEMS Electromagnetic Vibration Energy Harvester," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 26, no. 1, pp. 1–16, Feb. 2017, doi: 10.1109/JMEMS.2016.2611677.
- [89] C. Nadal, "Contribution à la conception et la modélisation transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma," phd, 2011.
- [90] P. PAPET, "Matériaux piézoélectriques : les céramiques oxydes à base de métaux de transition," *Tech. Ing. Céramiques*, vol. base documentaire : TIB578DUO., no. ref. article : k740, 2012, [Online]. Available: <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/materiaux-th11/ceramiques-42578210/materiaux-piezo-electriques-les-ceramiques-oxydes-a-base-de-metaux-de-transition-k740/>.
- [91] T. Ikeda, *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1996.
- [92] J. Abergel, "Matériaux piézoélectriques à forte déformation pour l'actionnement microsystème," phdthesis, Université de Grenoble, 2014.
- [93] S. Zhang and L. C. Lim, "Property matrices of [011]-poled rhombohedral  $\text{Pb}(\text{Zn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3-(4.5-7)\%\text{PbTiO}_3$  single crystals," *AIP Adv.*, vol. 8, no. 11, p. 115010, Nov. 2018, doi: 10.1063/1.5064418.
- [94] R. E. Newnham, *Properties of materials: anisotropy, symmetry, structure*. Oxford ; New York: Oxford University Press, 2005.
- [95] The Institute of Electrical and Electronics Engineers, "IEEE Standard on Piezoelectricity," *ANSI/IEEE Std 176-1987*, 1988, doi: 10.1109/IEEESTD.1988.79638.
- [96] W. P. Mason, *Physical Acoustics And The Properties Of Solids*. 1958.
- [97] J. Ducarne, "Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés," PhD Thesis, Paris, CNAM, 2009.
- [98] N. E. Dutoit, B. L. Wardle, and S.-G. Kim, "DESIGN CONSIDERATIONS FOR MEMS-SCALE PIEZOELECTRIC MECHANICAL VIBRATION ENERGY HARVESTERS," *Integr. Ferroelectr.*, vol. 71, no. 1, pp. 121–160, Jul. 2005, doi: 10.1080/10584580590964574.
- [99] F. Goldschmidtboeing, M. Wischke, C. Eichhorn, and P. Woias, "Parameter identification for resonant piezoelectric energy harvesters in the low- and high-coupling regimes," *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 21, no. 4, p. 045006, Apr. 2011, doi: 10.1088/0960-1317/21/4/045006.
- [100] X. Xiong and S. O. Oyadiji, "Modal electromechanical optimization of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters by geometric variation," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 25, no. 10, pp. 1177–1195, Jul. 2014, doi: 10.1177/1045389X13502872.
- [101] A. Lei, R. Xu, L. M. Borregaard, M. Guizzetti, O. Hansen, and E. V. Thomsen, "Impedance Based Characterization of a High-Coupled Screen Printed PZT Thick Film Unimorph Energy Harvester," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 23, no. 4, pp. 842–854, Aug. 2014, doi: 10.1109/JMEMS.2013.2295625.
- [102] A. Morel, A. Badel, R. Grézaud, P. Gasnier, G. Despesse, and G. Pillonnet, "Resistive and reactive loads' influences on highly coupled piezoelectric generators for wideband vibrations energy harvesting," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 30, no. 3, pp. 386–399, Feb. 2019, doi: 10.1177/1045389X18810802.
- [103] C. B. Williams and R. B. Yates, "Analysis of a micro-electric generator for microsystems," *Sens. Actuators Phys.*, vol. 52, no. 1–3, pp. 8–11, 1996.
- [104] E. Defay, S. Boisseau, and G. Despesse, "Piezoelectric Materials for Energy Harvesting," in *Micro Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, Ltd, 2015, pp. 123–148.

- [105] “Noliac piezoceramic material NCE51,” *Noliac - Your Piezo Partner*. <http://www.noliac.com/products/materials/nce51/> (accessed Oct. 16, 2019).
- [106] “TRS Technologies, Inc.,” <http://www.trstechnologies.com/Resources>. <http://www.trstechnologies.com/Resources> (accessed Sep. 19, 2018).
- [107] R. Andosca *et al.*, “Experimental and theoretical studies on MEMS piezoelectric vibrational energy harvesters with mass loading,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 178, pp. 76–87, May 2012, doi: 10.1016/j.sna.2012.02.028.
- [108] C. R. Bowen, V. Yu. Topolov, and H. A. Kim, *Modern Piezoelectric Energy-Harvesting Materials*, vol. 238. Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [109] CDC, “OG Title,” *Centers for Disease Control and Prevention*, Mar. 28, 2018. <https://www.cdc.gov/index.htm> (accessed Jun. 27, 2020).
- [110] Z. Liu, P. Maréchal, and R. Jérôme, “Melting and crystallization of poly(vinylidene fluoride) blended with polyamide 6,” *Polymer*, vol. 38, no. 20, pp. 5149–5153, Sep. 1997, doi: 10.1016/S0032-3861(97)00047-5.
- [111] A. Talbourdet *et al.*, “Development of mono-component and tri-component fibres 100% polymer based piezoelectric PVDF to harvest energy,” *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 254, p. 072026, Oct. 2017, doi: 10.1088/1757-899X/254/7/072026.
- [112] D. Maurya *et al.*, “Lead-free piezoelectric materials and composites for high power density energy harvesting,” *J. Mater. Res.*, vol. 33, no. 16, pp. 2235–2263, Aug. 2018, doi: 10.1557/jmr.2018.172.
- [113] G. Clementi, S. Margueron, M. A. Suarez, T. Baron, B. Dulmet, and A. Bartasyte, “Piezoelectric and Pyroelectric Energy Harvesting from Lithium Niobate Films,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1407, p. 012039, Nov. 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1407/1/012039.
- [114] Q.-M. Wang, X.-H. Du, B. Xu, and L. E. Cross, “Electromechanical coupling and output efficiency of piezoelectric bending actuators,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 46, no. 3, pp. 638–646, 1999.
- [115] S. Roundy *et al.*, “Improving power output for vibration-based energy scavengers,” *IEEE Pervasive Comput.*, vol. 4, no. 1, pp. 28–36, 2005.
- [116] S. P. Matova, M. Renaud, M. Jambunathan, M. Goedbloed, and R. Van Schaijk, “Effect of length/width ratio of tapered beams on the performance of piezoelectric energy harvesters,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 22, no. 7, p. 075015, Jul. 2013, doi: 10.1088/0964-1726/22/7/075015.
- [117] N. A. Siddiqui, D.-J. Kim, R. A. Overfelt, and B. C. Prorok, “Electromechanical coupling effects in tapered piezoelectric bimorphs for vibration energy harvesting,” *Microsyst. Technol.*, vol. 23, no. 5, pp. 1537–1551, May 2017, doi: 10.1007/s00542-016-3197-4.
- [118] NGUYEN-DINH AN; FERIN GUILLAUME; BANTIGNIES CLAIRE; LE KHANH HUNG; MEYNIER CYRIL; FLESCH ETIENNE, “Piezoelectric energy harvester system with composite shim,” US20170257040 A1 2017-09-07 [US20170257040]-WO2017195014 A1 2017-11-16 [WO2017195014]-US10097112 B2 2018-10-09 [US10097112]-CN108713260 A 2018-10-26 [CN108713260]-EP3424086 A1 2019-01-09 [EP3424086].
- [119] A. Čeponis, D. Mažeika, G. Kulvietis, and Y. Ying, “Piezoelectric Cantilevers for Energy Harvesting With Irregular Design of the Cross Sections,” *Mechanics*, vol. 24, no. 2, May 2018, doi: 10.5755/j01.mech.24.2.18019.
- [120] R. Ichige *et al.*, “Size Optimization of Metamaterial Structure for Elastic Layer of a Piezoelectric Vibration Energy Harvester,” in *2019 19th International Conference on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications (PowerMEMS)*, Dec. 2019, pp. 1–4, doi: 10.1109/PowerMEMS49317.2019.92321109369.

- [121] W. J. G. Ferguson, Y. Kuang, K. E. Evans, C. W. Smith, and M. Zhu, “Auxetic structure for increased power output of strain vibration energy harvester,” *Sens. Actuators Phys.*, vol. 282, pp. 90–96, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.sna.2018.09.019.
- [122] J. W. (徐佳文) Xu, W. W. (邵维维) Shao, F. R. (孔凡让) Kong, and Z. H. (冯志华) Feng, “Right-angle piezoelectric cantilever with improved energy harvesting efficiency,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 96, no. 15, p. 152904, Apr. 2010, doi: 10.1063/1.3374880.
- [123] Q. C. Guan, B. Ju, J. W. Xu, Y. B. Liu, and Z. H. Feng, “Improved strain distribution of cantilever piezoelectric energy harvesting devices using H-shaped proof masses,” *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 24, no. 9, pp. 1059–1066, Jun. 2013, doi: 10.1177/1045389X13476150.
- [124] M. Kim, M. Hoegen, J. Dugundji, and B. L. Wardle, “Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester performance,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 19, no. 4, p. 045023, Apr. 2010, doi: 10.1088/0964-1726/19/4/045023.
- [125] H. Shi, J. Chen, G. Liu, W. Xiao, and S. Dong, “A piezoelectric pseudo-bimorph actuator,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 102, no. 24, p. 242904, Jun. 2013, doi: 10.1063/1.4811259.
- [126] S. Priya *et al.*, “A Review on Piezoelectric Energy Harvesting: Materials, Methods, and Circuits,” *Energy Harvest. Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 3–39, Aug. 2019, doi: 10.1515/ehs-2016-0028.
- [127] S. Priya, “Advances in energy harvesting using low profile piezoelectric transducers,” *J. Electroceramics*, vol. 19, no. 1, pp. 167–184, Sep. 2007, doi: 10.1007/s10832-007-9043-4.
- [128] Y. Yang, L. Tang, and H. Li, “Vibration energy harvesting using macro-fiber composites,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 18, no. 11, p. 115025, Sep. 2009, doi: 10.1088/0964-1726/18/11/115025.
- [129] “MFC.” <https://www.smart-material.com/MFC-product-main.html> (accessed May 25, 2020).
- [130] B. Ahmed-Seddik, “Systèmes de récupération d’énergie vibratoire large bande,” thesis, Grenoble, 2012.
- [131] R. L. Letty, F. Claeysen, N. Lhermet, and P. Bouchilloux, “New amplified piezoelectric actuator for precision positioning and active damping,” in *Smart Structures and Materials 1997: Smart Structures and Integrated Systems*, Jun. 1997, vol. 3041, pp. 496–504, doi: 10.1117/12.275673.
- [132] F. Claeysen, L. R. Le, and N. Lhermet, “Actionneur piezoactif amplifié a raideur élevée,” FR2740276A1, Apr. 25, 1997.
- [133] T.-B. Xu and L. Zuo, “Key Issues on Flexensional Piezoelectric Energy Harvester Developments,” presented at the ASME 2019 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Nov. 2019, doi: 10.1115/DETC2019-98499.
- [134] Y. Kuang, Z. J. Chew, and M. Zhu, “Strongly coupled piezoelectric energy harvesters: Finite element modelling and experimental validation,” *Energy Convers. Manag.*, vol. 213, p. 112855, Jun. 2020, doi: 10.1016/j.enconman.2020.112855.
- [135] X. Jiang *et al.*, “Advanced piezoelectric single crystal based actuators,” in *Smart Structures and Materials 2005: Active Materials: Behavior and Mechanics*, May 2005, vol. 5761, pp. 253–262, doi: 10.1117/12.600019.
- [136] T.-B. Xu, J. Su, X. Jiang, P. W. Rehrig, and W. S. Hackenberger, “The Load Capability of Piezoelectric Single Crystal Actuators,” *MRS Online Proc. Libr. Arch.*, vol. 888, ed 2005, doi: 10.1557/PROC-0888-V08-02.



- [137] M. H. Malakooti and H. A. Sodano, "Piezoelectric energy harvesting through shear mode operation," *Smart Mater. Struct.*, vol. 24, no. 5, p. 055005, Apr. 2015, doi: 10.1088/0964-1726/24/5/055005.
- [138] M. Li, R. Gao, S. Liu, and L. Tong, "Modeling, analysis and validation of a novel asymmetric cruciform harvester with d15 mode," *Smart Mater. Struct.*, vol. 29, no. 2, p. 025014, Jan. 2020, doi: 10.1088/1361-665X/ab607a.
- [139] Z. Cao, J. Zhang, and H. Kuwano, "Design and characterization of miniature piezoelectric generators with low resonant frequency," *Sens. Actuators Phys.*, vol. 179, pp. 178–184, Jun. 2012, doi: 10.1016/j.sna.2012.02.026.
- [140] A. Morel, R. Grézaud, G. Pillonnet, P. Gasnier, G. Despesse, and A. Badel, "Active AC/DC control for wideband piezoelectric energy harvesting," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 773, no. 1, p. 012059, 2016, doi: 10.1088/1742-6596/773/1/012059.
- [141] G. Tang, B. Yang, J. Liu, B. Xu, H. Zhu, and C. Yang, "Development of high performance piezoelectric d33 mode MEMS vibration energy harvester based on PMN-PT single crystal thick film," *Sens. Actuators Phys.*, vol. 205, pp. 150–155, Jan. 2014, doi: 10.1016/j.sna.2013.11.007.
- [142] M. Benchemoul *et al.*, "Wireless Inertial Sensing Platform Self-Powered by Piezoelectric Energy Harvester for Industrial Predictive Maintenance," in *2018 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, Oct. 2018, pp. 1–4, doi: 10.1109/ULTSYM.2018.8580029.
- [143] R. Salazar, M. Serrano, and A. Abdelkefi, "Fatigue in piezoelectric ceramic vibrational energy harvesting: A review," *Appl. Energy*, vol. 270, p. 115161, Jul. 2020, doi: 10.1016/j.apenergy.2020.115161.
- [144] R. Patel, S. McWilliam, and A. A. Popov, "A geometric parameter study of piezoelectric coverage on a rectangular cantilever energy harvester," *Smart Mater. Struct.*, vol. 20, no. 8, p. 085004, Aug. 2011, doi: 10.1088/0964-1726/20/8/085004.
- [145] Y. Jia and A. A. Seshia, "Power Optimization by Mass Tuning for MEMS Piezoelectric Cantilever Vibration Energy Harvesting," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 25, no. 1, pp. 108–117, Feb. 2016, doi: 10.1109/JMEMS.2015.2496346.
- [146] E. L. Pradeesh and S. Udhayakumar, "Effect of placement of piezoelectric material and proof mass on the performance of piezoelectric energy harvester," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 130, pp. 664–676, Sep. 2019, doi: 10.1016/j.ymsp.2019.05.044.
- [147] A. Erturk, "Assumed-modes modeling of piezoelectric energy harvesters: Euler–Bernoulli, Rayleigh, and Timoshenko models with axial deformations," *Comput. Struct.*, vol. 106–107, pp. 214–227, Sep. 2012, doi: 10.1016/j.compstruc.2012.05.010.
- [148] A. W. Leissa, "The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods," *J. Sound Vib.*, vol. 287, no. 4, pp. 961–978, Nov. 2005, doi: 10.1016/j.jsv.2004.12.021.
- [149] A. Erturk and D. J. Inman, "An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations," *Smart Mater. Struct.*, vol. 18, no. 2, p. 025009, 2009.
- [150] A. Erturk and D. J. Inman, "Appendix C: Modal Analysis of a Uniform Cantilever with a Tip Mass," in *Piezoelectric Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, Ltd, 2011, pp. 353–366.
- [151] N. G. Elvin and A. A. Elvin, "A General Equivalent Circuit Model for Piezoelectric Generators," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 20, no. 1, pp. 3–9, Jan. 2009, doi: 10.1177/1045389X08089957.
- [152] A. Erturk and D. J. Inman, "Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters," *Smart Mater. Struct.*, vol. 17, no. 6, p. 065016, 2008.

- [153] T. H. Ng and W. H. Liao, "Sensitivity Analysis and Energy Harvesting for a Self-Powered Piezoelectric Sensor," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 16, no. 10, pp. 785–797, Oct. 2005, doi: 10.1177/1045389X05053151.
- [154] M. Marzencki, "Conception de microgénérateurs intégrés pour systèmes sur puce autonomes," PhD Thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2007.
- [155] C. De Marqui Junior, A. Erturk, and D. J. Inman, "An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates," *J. Sound Vib.*, vol. 327, no. 1–2, pp. 9–25, Oct. 2009, doi: 10.1016/j.jsv.2009.05.015.
- [156] S. Roundy and P. K. Wright, "A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics," *Smart Mater. Struct.*, vol. 13, no. 5, pp. 1131–1142, Aug. 2004, doi: 10.1088/0964-1726/13/5/018.
- [157] E. B. Tadmor and G. Kosa, "Electromechanical coupling correction for piezoelectric layered beams," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 12, no. 6, pp. 899–906, Dec. 2003, doi: 10.1109/JMEMS.2003.820286.
- [158] L. J. Gong, C. L. Pan, Q. S. Pan, and Z. H. Feng, "Theoretical analysis of dynamic property for piezoelectric cantilever triple-layer benders with large piezoelectric and electromechanical coupling coefficients," *J. Adv. Dielectr.*, vol. 06, no. 03, p. 1650017, Sep. 2016, doi: 10.1142/S2010135X1650017X.
- [159] N. W. Hagood, W. H. Chung, and A. Von Flotow, "Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 1, no. 3, pp. 327–354, 1990.
- [160] "Le Formalisme Variationnel en Physique - Introduction." [http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_C\\_M03\\_G03/co/Module\\_NLP\\_C\\_M03\\_G03\\_21.html](http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M03_G03/co/Module_NLP_C_M03_G03_21.html) (accessed Sep. 04, 2020).
- [161] Meirovitch and Parker, "Fundamentals of Vibrations," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 54, no. 6, pp. B100–B101, Nov. 2001, doi: 10.1115/1.1421112.
- [162] A. Erturk and D. J. Inman, "A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters," *J. Vib. Acoust.*, vol. 130, no. 4, p. 041002, 2008, doi: 10.1115/1.2890402.
- [163] J. Ducarne, O. Thomas, and J.-F. Deü, "Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction," *J. Sound Vib.*, vol. 331, no. 14, pp. 3286–3303, Jul. 2012, doi: 10.1016/j.jsv.2012.03.002.
- [164] "Piezoelectric Bending Transducer (S230-J1FR-1808XB)," *PIEZO.COM*. <https://piezo.com/products/piezoelectric-bending-transducer-s230-j1fr-1808xb> (accessed Sep. 07, 2020).
- [165] J. Zhang, R. J. Perez, and E. J. Lavernia, "Documentation of damping capacity of metallic, ceramic and metal-matrix composite materials," *J. Mater. Sci.*, vol. 28, no. 9, pp. 2395–2404, May 1993, doi: 10.1007/BF01151671.
- [166] R. M. Crane, "Damping loss factor determination of glass and graphite epoxy laminated composites using vertically oriented cantilever beams," DAVID TAYLOR RESEARCH CENTER BETHESDA MD SHIP MATERIALS ENGINEERING DEPT, 1989.
- [167] J. Erhart, P. Pulpán, and M. Pustka, *Piezoelectric Ceramic Resonators*. Cham: Springer International Publishing, 2017.
- [168] J. E. Kim and Y. Y. Kim, "Analysis of Piezoelectric Energy Harvesters of a Moderate Aspect Ratio With a Distributed Tip Mass," *J. Vib. Acoust.*, vol. 133, no. 4, p. 041010, 2011, doi: 10.1115/1.4003598.
- [169] "Soft PZT." <https://www.ceramtec.com/ceramic-materials/soft-pzt/> (accessed Jul. 30, 2020).
- [170] "Piezoelectric | CTS Corp," *CTS*. <https://www.ctscorp.com/products/piezoelectric-products/> (accessed Jul. 30, 2020).

- [171] G. Ferin, C. Bantignies, H. L. Khanh, E. Flesch, and A. Nguyen-Dinh, "Powering autonomous sensors with miniaturized piezoelectric based energy harvesting devices operating at very low frequency," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 660, p. 012085, Dec. 2015, doi: 10.1088/1742-6596/660/1/012085.
- [172] "Products List." [https://www.epotek.com/site/component/products/products.html?cat=1&title=Electrical %20Products&search=0&sign=0&value=](https://www.epotek.com/site/component/products/products.html?cat=1&title=Electrical%20Products&search=0&sign=0&value=) (accessed Jul. 15, 2020).
- [173] H. Cease, P. Derwent, H. Diehl, J. Fast, and D. Finley, "Measurement of mechanical properties of three epoxy adhesives at cryogenic temperatures for CCD construction," *Fermi Lab Rep. Fermilab-TM-2366-A*, 2006.
- [174] "Forced Vibration Analysis of a Composite Laminate," *COMSOL*. <https://www.comsol.fr/model/forced-vibration-analysis-of-a-composite-laminate-67731> (accessed Sep. 07, 2020).
- [175] L. Rufer *et al.*, "Piezoelectric Energy Harvesting Bending Structure and the Method of Manufacturing Thereof," U.S. Provisional Patent Application No. 62/532,195, Jul. 2017.
- [176] O. Freychet *et al.*, "Efficient optimal load and maximum output power determination for linear vibration energy harvesters with a two-measurement characterization method," *Smart Mater. Struct.*, 2019, doi: 10.1088/1361-665X/ab516f.
- [177] D. GIBUS, P. GASNIER, A. MORL, S. BOISSEAU, and A. BADEL, "Nonlinearities influences on performances of a strongly-coupled piezoelectric generator for broadband vibration energy harvesting," in *2019 19th International Conference on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications (PowerMEMS)*, Dec. 2019, pp. 1–5, doi: 10.1109/PowerMEMS49317.2019.61547410359.
- [178] S. Leadenham and A. Erturk, "Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation," *Nonlinear Dyn.*, vol. 79, no. 3, pp. 1727–1743, Feb. 2015, doi: 10.1007/s11071-014-1770-x.
- [179] D. Gibus *et al.*, "Strongly coupled piezoelectric cantilevers for broadband vibration energy harvesting," *Appl. Energy*, vol. 277, p. 115518, Nov. 2020, doi: 10.1016/j.apenergy.2020.115518.
- [180] K. Uchino *et al.*, "Loss mechanisms and high power piezoelectrics," *J. Mater. Sci.*, vol. 41, no. 1, pp. 217–228, Jan. 2006, doi: 10.1007/s10853-005-7201-0.
- [181] Y. Y. Lim and C. K. Soh, "Towards more accurate numerical modeling of impedance based high frequency harmonic vibration," *Smart Mater. Struct.*, vol. 23, no. 3, p. 035017, Feb. 2014, doi: 10.1088/0964-1726/23/3/035017.
- [182] K. Uchino and S. Hirose, "Loss mechanisms in piezoelectrics: how to measure different losses separately," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 48, no. 1, pp. 307–321, Jan. 2001, doi: 10.1109/58.896144.
- [183] S. C. Stanton, A. Erturk, B. P. Mann, E. H. Dowell, and D. J. Inman, "Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof mass effects," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 23, no. 2, pp. 183–199, Jan. 2012, doi: 10.1177/1045389X11432656.
- [184] D. Damjanovic, "Stress and frequency dependence of the direct piezoelectric effect in ferroelectric ceramics," *J. Appl. Phys.*, vol. 82, no. 4, pp. 1788–1797, Aug. 1997, doi: 10.1063/1.365981.
- [185] G. Robert, D. Damjanovic, and N. Setter, "Piezoelectric hysteresis analysis and loss separation," *J. Appl. Phys.*, vol. 90, no. 9, pp. 4668–4675, Oct. 2001, doi: 10.1063/1.1405822.
- [186] D. Damjanovic, "Hysteresis in piezoelectric and ferroelectric materials," Academic Press, 2006.

- [187] A. Morel, G. Pillonnet, Y. Wanderoild, and A. Badel, “Dielectric Losses Considerations for Piezoelectric Energy Harvesting,” Jun. 2018. <https://www.ingentaconnect.com/content/asp/jolpe/2018/00000014/00000002/art00008> (accessed Mar. 23, 2020).
- [188] A. Erturk, “Electromechanical modeling of piezoelectric energy harvesters,” PhD Thesis, Virginia Tech, 2009.
- [189] M. Liu and D. G. Gorman, “Formulation of Rayleigh damping and its extensions,” *Comput. Struct.*, vol. 57, no. 2, pp. 277–285, Oct. 1995, doi: 10.1016/0045-7949(94)00611-6.
- [190] J. PLUSQUELLEC, “Vibrations,” 2004.
- [191] E. BOYERE, “Modélisation de l’amortissement en dynamique linéaire.” Nov. 04, 2011, Accessed: Apr. 10, 2020. [Online]. Available: [https://www.code-aster.org/V2/doc/v10/fr/man\\_r/r5/r5.05.04.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v10/fr/man_r/r5/r5.05.04.pdf).
- [192] N. Peyret, “Dissipation de l’énergie mécanique dans les assemblages : effet du frottement en sollicitation dynamique,” phdthesis, Université Paris-Est, 2012.
- [193] R. Holland, “Representation of Dielectric, Elastic, and Piezoelectric Losses by Complex Coefficients,” *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. 14, no. 1, pp. 18–20, Jan. 1967, doi: 10.1109/T-SU.1967.29405.
- [194] M. Wild, M. Bring, E. Halvorsen, L. Hoff, and K. Hjelmervik, “The challenge of distinguishing mechanical, electrical and piezoelectric losses,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 144, no. 4, pp. 2128–2134, Oct. 2018, doi: 10.1121/1.5057443.
- [195] Y. Zhuang, S. O. Ural, A. Rajapurkar, S. Tuncdemir, A. Amin, and K. Uchino, “Derivation of Piezoelectric Losses from Admittance Spectra,” *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 48, no. 4R, p. 041401, Apr. 2009, doi: 10.1143/JJAP.48.041401.
- [196] G. Liu, S. Zhang, W. Jiang, and W. Cao, “Losses in ferroelectric materials,” *Mater. Sci. Eng. R Rep.*, vol. 89, pp. 1–48, Mar. 2015, doi: 10.1016/j.mser.2015.01.002.
- [197] S. Leadenham, “Advanced concepts in nonlinear piezoelectric energy harvesting: intentionally designed, inherently present, and circuit nonlinearities,” PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, 2015.
- [198] A. Preumont, *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*. Springer Netherlands, 2006.
- [199] S. Tatzko and M. Jahn, “On the use of complex numbers in equations of nonlinear structural dynamics,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 126, pp. 626–635, Jul. 2019, doi: 10.1016/j.ymsp.2019.02.041.
- [200] V. Jaumouillé, “Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique,” phdthesis, Ecole Centrale de Lyon, 2011.
- [201] T. Huguet, A. Badel, O. Druet, and M. Lallart, “Drastic bandwidth enhancement of bistable energy harvesters: Study of subharmonic behaviors and their stability robustness,” *Appl. Energy*, vol. 226, pp. 607–617, Sep. 2018, doi: 10.1016/j.apenergy.2018.06.011.
- [202] “[ Microfine.” <https://microfine-piezo.com/product.php?id=1> (accessed Apr. 30, 2020).
- [203] “CTS.” [http://www.hcmat.com/Pmn\\_Properties.html](http://www.hcmat.com/Pmn_Properties.html) (accessed Sep. 11, 2020).

# Annexe 1 : Modèle à paramètres distribués exploité par la méthode de Rayleigh-Ritz

On propose dans cette annexe de détailler un modèle basé sur la détermination des modes de résonance par le modèle à paramètres distribués. Ce modèle est appliqué pour une poutre *cantilever* piézoélectrique avec masse mobile dont les patchs sont connectés en parallèle. La méthode de Rayleigh-Ritz permet une réduction modale sur un nombre  $n_r$  de modes de résonance pour déterminer les fréquences de résonances en court-circuit et en circuit ouvert. Le modèle introduit ici se base sur la méthode de Rayleigh-Ritz présentée dans la section II.5.1. Seule la méthode de détermination des modes de vibrations ainsi que leur nombre varient comparé au modèle 2DDL-PM présenté dans la section II.5. Les modes de vibrations pris en compte ici sont les modes considérés exactes selon la théorie d'Euler-Bernoulli.

## 1. Rappel de la méthode de Rayleigh-Ritz

A partir de la présentation de la méthode de Rayleigh-Ritz dans la section II.5.1, on sait que la déformée  $w(x, t)$  de la poutre peut être exprimée par une somme de  $n_r$  modes de vibrations  $\phi_i(x)$  multiplié par une composante temporelle  $r_i(t)$  dans l'équation (1). On définit alors un vecteur ligne  $\boldsymbol{\phi}_r(x)$  comportant les modes de vibration de la poutre et un vecteur colonne  $\mathbf{r}(t)$  comportant la coordonnée généralisée de déplacement.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{n_r} \phi_i(x) r_i(t) \equiv \boldsymbol{\phi}_r(x) \mathbf{r}(t) \quad (1)$$

Grâce au principe de Hamilton et à la méthode de Rayleigh-Ritz tel que détaillé dans la section II.5.1, la poutre peut être modélisé par un système de deux équations matricielles à  $n_r$  degrés de liberté mécanique et un degré de liberté électrique.

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{r}} + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{r} - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}v = -\widehat{\mathbf{B}}_f\ddot{w}_B \\ \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^t\mathbf{r} + C_p v + q = 0 \end{cases} \quad (2)$$

La matrice de masse  $\widehat{\mathbf{M}}$ , la matrice de raideur  $\widehat{\mathbf{K}}$ , le vecteur de couplage  $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$ , le vecteur force  $\widehat{\mathbf{B}}_f$  ainsi que la capacité équivalente  $C_p$  sont exprimés en fonction des modes de vibration par les équations (3) à (7).  $c_{11}^{ef}$  est le coefficient de rigidité équivalent du matériau piézoélectrique,  $\epsilon_{33}^{ef}$  est la permittivité diélectrique équivalente et  $e_{31}^{ef}$  est le coefficient piézoélectrique équivalent.  $k_{e_{31}}^2$  est le coefficient de couplage alternatif du matériau piézoélectrique.  $Y_s^{ef}$  est la rigidité équivalente du matériau du substrat.  $m$  est la masse linéique de la poutre,  $M_t$  et  $I_t$  sont respectivement la masse et l'inertie de rotation de la masse mobile.  $D_t$  est la distance entre le centre de gravité de la masse mobile et le bout de poutre.  $\mathcal{V}_{p1}$ ,  $\mathcal{V}_{p2}$  et  $\mathcal{V}_s$  sont respectivement les volumes du patch piézoélectrique inférieur, du patch piézoélectrique supérieur et du substrat.

$L_b$  est la longueur de la poutre.  $B$  est la longueur de la poutre et de la masse mobile.  $z$  est la position transversale par rapport à la fibre neutre

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{K}} = & \int_{\mathcal{V}_{p1}} \boldsymbol{\phi}_r''^t c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m1}^2) \right) \boldsymbol{\phi}_r'' d\mathcal{V}_p \\ & + \int_{\mathcal{V}_{p2}} \boldsymbol{\phi}_r''^t c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m2}^2) \right) \boldsymbol{\phi}_r'' d\mathcal{V}_p \\ & + \int_{\mathcal{V}_s} \boldsymbol{\phi}_r''^t Y_s^{ef} z^2 \boldsymbol{\phi}_r'' d\mathcal{V}_s\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{M}} = & \int_0^{L_b} m \boldsymbol{\phi}_r^t \boldsymbol{\phi}_r dx + M_t (\boldsymbol{\phi}_r(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r(L_b) + M_t D_t (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r(L_b) \\ & + M_t D_t (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r'(L_b) + (I_t + M_t D_t^2) (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \boldsymbol{\phi}_r'(L_b)\end{aligned}\quad (4)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = B e_{31}^{ef} (h_p + h_s) (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \quad (5)$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_f = \int_0^{L_b} m \boldsymbol{\phi}_r^t dx + M_t (\boldsymbol{\phi}_r(L_b))^t + D_t M_t (\boldsymbol{\phi}_r'(L_b))^t \quad (6)$$

$$C_p = B \frac{2L_b \epsilon_{33}^{ef}}{h_p} \quad (7)$$

## 2. Détermination des modes de vibrations

On détermine ici les modes de vibration  $\phi_i(x)$  en court-circuit à partir de la théorie d'Euler Bernoulli. Lorsque la poutre est en court-circuit, le moment fléchissant  $M_y$  de la poutre est donné en (8) et le principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément infinitésimal de la poutre de longueur  $dx$  donne l'équation constitutive des vibrations dans la poutre en (9). Où  $YI$  est la raideur à la flexion de la poutre.

$$M_y = YI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$YI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

Les conditions limites au niveau de l'encastrement sont données par les équations (10) et (11) et les conditions limites en bout de poutre sont données par les équations (12) et (13) [98]

$$w(0, t) = 0 \quad (10) \quad w'(0, t) = 0 \quad (11)$$

$$YI w_{L_b}'''(t) - M_t \ddot{w}_{L_b}(t) - M_t D_t \dot{w}'_{L_b}(t) = 0 \quad (12)$$

$$YI w_{L_b}''(t) + I_t \dot{w}'_{L_b}(t) + M_t D_t^2 \dot{w}'_{L_b}(t) + D_t M_t \ddot{w}_{L_b} = 0 \quad (13)$$

Les modes de vibration peuvent être trouvés en procédant à une séparation de variable sur l'expression de la déformée  $w(x, t)$  qui devient le produit d'une fonction dépendant du temps  $r(t)$  et d'une autre dépendant de l'espace  $\phi(x)$ .<sup>21</sup>

$$w(x, t) = \phi(x)r(t) \quad (14)$$

En insérant la formule (14) décrivant la séparation des variables temporelles et spatiales dans l'équation constitutive (9), on obtient l'équation suivante.

$$\frac{YI}{m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{r(t)} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \quad (15)$$

Comme le premier et le second membre de (15) sont respectivement indépendants du temps et de l'espace, cette équation est égale à une constante  $\gamma$ .

$$\frac{YI}{m} \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} = - \frac{1}{r(t)} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \gamma \quad (16)$$

On peut alors séparer l'équation (15) en deux équations distinctes exprimées en (17) et (18) en prenant  $\gamma = \omega^2$ .

$$YI \frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \omega^2 m \phi(x) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \omega^2 r(t) = 0 \quad (18)$$

Seule l'équation (17) nous est utile pour déterminer les modes de vibration en court-circuit et appliquer ensuite la méthode de Rayleigh-Ritz. La résolution de l'équation (18) est notamment réalisée pour la résolution exacte du modèle à paramètres distribués [150] mais elle n'est pas réalisée pour la méthode de Rayleigh-Ritz.

Comme l'équation (17) est une équation différentielle d'ordre 4, ses solutions sont une combinaison linéaire de fonctions sinus, cosinus, sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique. Les solutions l'équation (17) sont de la forme donnée par l'équation (19) où  $\lambda$  est un paramètre adimensionnel de fréquence exprimé par  $\lambda^4 = \omega^2 \frac{mL_b^4}{YI}$ .

$$\phi(x) = A \cos \frac{\lambda}{L_b} x + B \cosh \frac{\lambda}{L_b} x + C \sin \frac{\lambda}{L_b} x + D \sinh \frac{\lambda}{L_b} x \quad (19)$$

$A, B, C$  et  $D$  sont des constantes qui dépendent des conditions limites. Grâce à la séparation de variables exprimée en (14) et à l'équation (18), les conditions limites exprimés par les équations (10) à (13) sont réduites à des équations dépendant uniquement de  $\phi(x)$  données dans les équations (20) à (23)

$$\phi(0, t) = 0 \quad (20) \quad \phi'(0, t) = 0 \quad (21)$$

$$YI \phi_{L_b}'''(x) + \omega^2 M_t \phi_{L_b}(x) + \omega^2 M_t D_t \phi_{L_b}'(x) = 0 \quad (22)$$

$$YI \phi''(x) - \omega^2 I_t \phi_{L_b}'(x) - \omega^2 M_t D_t \phi_{L_b}(x) - \omega^2 M_t D_t^2 \phi_{L_b}'(x) = 0 \quad (23)$$

Les conditions limites à l'encastrement exprimées en (20) et (21) permettent de déduire que  $A = -B$  et  $C = -D$ . L'expression de  $\phi(x)$  se réduit donc en l'équation (24).

<sup>21</sup> On note  $\phi(x)$ , la fonction « générique » du mode de vibration qui va permettre de déduire tous les modes de vibrations  $\phi_i(x)$  spécifiques à des fréquences de résonance grâce à la résolution de l'équation (9).

$$D'où \phi(x) = A \left( \cos \frac{\lambda}{L_b} x - \cosh \frac{\lambda}{L_b} x \right) + C \left( \sin \frac{\lambda}{L_b} x - \sinh \frac{\lambda}{L_b} x \right) \quad (24)$$

Les conditions limites au bout de la poutre nous permettent de déduire la valeur des paramètres de fréquences  $\lambda$ . En remplaçant  $\phi(x)$  par son expression en (24), les équations (22) et (23) peuvent s'exprimer sous forme matricielle donnée par l'équation (25) avec les coefficients de la matrice exprimés dans les équations (26) à (29).

$$\begin{bmatrix} M_{1,A} & M_{1,C} \\ M_{2,A} & M_{2,C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$M_{1,A} = L_b^3 m \cos(\lambda) + L_b^3 m \cosh(\lambda) - I_t \lambda^3 \sin(\lambda) - I_t \lambda^3 \sinh(\lambda) + D_t L_b M_t \lambda^2 \cos(\lambda) - D_t L_b M_t \lambda^2 \cosh(\lambda) \quad (26)$$

$$M_{1,C} = I_t \lambda^3 \cos(\lambda) - I_t \lambda^3 \cosh(\lambda) + L_b^3 m \sin(\lambda) + L_b^3 m \sinh(\lambda) + D_t L_b M_t \lambda^2 \sin(\lambda) - D_t L_b M_t \lambda^2 \sinh(\lambda) \quad (27)$$

$$M_{2,A} = \lambda \left( L_b^2 m \sinh(\lambda) - L_b^2 m \sin(\lambda) - L_b M_t \lambda \cos(\lambda) + L_b M_t \lambda \cosh(\lambda) + D_t M_t \lambda^2 \sin(\lambda) + D_t M_t \lambda^2 \sinh(\lambda) \right) \quad (28)$$

$$M_{2,C} = \lambda \left( L_b^2 m \cos(\lambda) + L_b^2 m \cosh(\lambda) - L_b M_t \lambda \sin(\lambda) + L_b M_t \lambda \sinh(\lambda) - D_t M_t \lambda^2 \cos(\lambda) + D_t M_t \lambda^2 \cosh(\lambda) \right) \quad (29)$$

Les paramètres de fréquence sont obtenus en calculant les valeurs qui annule le déterminant de la matrice tel qu'exprimé en (25). L'équation à résoudre est alors donnée en (31) pour déterminer les paramètres  $\lambda$ .

$$\det \begin{bmatrix} M_{1,A} & M_{1,C} \\ M_{2,A} & M_{2,C} \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & I_t M_t \lambda^4 \cos \lambda \cosh \lambda - I_t M_t \lambda^4 - L_b^4 m^2 \cos \lambda \cosh \lambda - L_b^4 m^2 + \\ & I_t L_b \lambda^3 m \cos \lambda \sinh \lambda + I_t L_b \lambda^3 m \cosh \lambda \sin \lambda - L_b^3 M_t \lambda m \cos \lambda \sinh \lambda + \\ & L_b^3 M_t \lambda m \cosh \lambda \sin \lambda + D_t^2 L_b M_t \lambda^3 m \cos \lambda \sinh \lambda + D_t^2 L_b M_t \lambda^3 m \cosh \lambda \sin \lambda + \\ & 2 D_t L_b^2 M_t \lambda^2 m \sin \lambda \sinh \lambda = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

L'équation (31) a une infinité de solutions  $\lambda_i$ , chacune correspondant à un de mode  $i$  de résonance. Elle ne peut être résolue que numériquement. A partir des valeurs de  $\lambda_i$ , on peut retrouver les valeurs des pulsations de résonances en court-circuit exprimées par (32).

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{YI}{mL_b^4}} \quad (32)$$

L'exploitation de la première ligne du système en (25) permet de permettre d'exprimer le coefficient A en fonction de C pour chaque mode de résonance  $i$  et permet, ainsi, la forme du mode de vibration  $\phi_i(x)$  en (33) avec  $\zeta_i$  exprimée en (34).  $\mathbb{A}$  est un coefficient qui permet de normaliser arbitrairement la forme de mode. On peut par exemple déterminer  $\mathbb{A}$  de sorte que  $\phi_i(L_b)=1$ .

$$\phi_i(x) = \mathbb{A} \left[ \cos \frac{\lambda_i}{L_b} x - \cosh \frac{\lambda_i}{L_b} x + \zeta_i \left( \sin \frac{\lambda_i}{L_b} x - \sinh \frac{\lambda_i}{L_b} x \right) \right] \quad (33)$$



$$\zeta_i = -\frac{M_{2,A}}{M_{2,C}} = \frac{L_b^2 m \sinh(\lambda_i) - L_b^2 m \sin(\lambda_i) - L_b M_t \lambda_i \cos(\lambda_i) + L_b M_t \lambda_i \cosh(\lambda_i) + D_t M_t \lambda_i^2 \sin(\lambda_i) + D_t M_t \lambda_i^2 \sinh(\lambda_i)}{L_b^2 m \cos(\lambda_i) + L_b^2 m \cosh(\lambda_i) - L_b M_t \lambda_i \sin(\lambda_i) + L_b M_t \lambda_i \sinh(\lambda_i) - D_t M_t \lambda_i^2 \cos(\lambda_i) + D_t M_t \lambda_i^2 \cosh(\lambda_i)} \quad (34)$$

Il est donc finalement possible d'exprimer les coefficients du système à  $n_r$  degrés de liberté en (2) à l'aide des expressions des  $n_r$  formes de modes de vibrations  $\phi_i(x)$  exprimés en (33). L'utilisation de ces modes de vibrations permet d'aboutir à des matrices  $\hat{\mathbf{M}}$  et  $\hat{\mathbf{K}}$  qui sont diagonales.

### 3. Détermination des fréquences de résonances

De la même manière que présenté pour le modèle 2DDL-PM2 dans la section II.5.4.a, on peut déterminer les  $n_r$  fréquences de résonance en court-circuit  $f_{sc}$  en calculant les zéros du déterminant de la matrice tel qu'exprimé en (35).

$$\det[-\hat{\mathbf{M}} \omega^2 + \hat{\mathbf{K}}] = 0 \quad (35)$$

La résolution de l'équation (35) permet d'aboutir aux mêmes fréquences de résonance en court-circuit que l'équation (32). Cette résolution n'a donc pas de grand intérêt hormis pour la vérification des calculs. Par contre, la méthode de Rayleigh-Ritz permet de déterminer les fréquences de résonances en circuit ouvert  $f_{oc}$  par la résolution de l'équation (36).

$$\det\left[-\hat{\mathbf{M}} \omega^2 + \hat{\mathbf{K}} + \frac{\hat{\mathbf{\Theta}} \hat{\mathbf{\Theta}}^t}{C_p}\right] \quad (36)$$

Les fréquences de résonances en court-circuit  $f_{sc}$  et en circuit ouvert  $f_{oc}$  permettent finalement de calculer le coefficient  $k_f^2$  exprimé en (37).

$$k_f^2 = \frac{f_{oc}^2 - f_{sc}^2}{f_{oc}^2} \quad (37)$$

La fréquence de résonance en court-circuit et le coefficient  $k_f^2$  obtenu par le modèle présenté dans cette annexe sont comparés aux résultats des autres modèles dans la section II.6.

## Annexe 2 : Expression de la raideur et du terme de couplage équivalents

Nous détaillons dans cette annexe les calculs permettant d'exprimer les coefficients équivalents en fonction de la répartition transversale et de la distribution longitudinal des déformations. Les expressions déduites sont exploitées dans la section III.1.1 pour exprimer le coefficient de couplage global alternatif  $k_e^2$ .

### 1. Expression de la raideur équivalente $K$

A partir de l'équation (II-75) rappelée en (3), l'expression de la raideur équivalente  $K$  pour le premier mode de vibration en flexion est fournie en (38).

$$\begin{aligned}
 K = \int_{\mathcal{V}_{p1}} \phi''(x) c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m1}^2) \right) \phi''(x) d\mathcal{V}_p \\
 + \int_{\mathcal{V}_{p2}} \phi''(x) c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m2}^2) \right) \phi''(x) d\mathcal{V}_p \\
 + \int_{\mathcal{V}_s} \phi''(x) Y_s^{ef} z^2 \phi''(x) d\mathcal{V}_s
 \end{aligned} \quad (38)$$

Comme l'expression de  $K$  en (38) correspond à l'intégrale d'un produit de fonctions indépendantes sur le volume,  $K$  peut être décomposé en un produit de 3 intégrales distinctes: selon la largeur  $B$ , selon l'épaisseur et selon la longueur  $L_b$  de la poutre. L'expression ainsi obtenue est fournie en (39).

$$\begin{aligned}
 K = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 1 dy \times \left[ \int_{-\frac{h_s}{2} - h_p}^{-\frac{h_s}{2}} c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m1}^2) \right) dz \right. \\
 \left. + \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2} + h_p} c_{11}^{ef} \left( z^2 + k_{e_{31}}^2 (z^2 - z_{m2}^2) \right) dz + \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} Y_s^{ef} z^2 dz \right] \\
 \times \int_0^{L_b} \phi''(x) \phi''(x) dx
 \end{aligned} \quad (39)$$

Grâce à l'équation (39) nous pouvons exprimer  $K$  en fonction de la distribution longitudinale des déformations, notée  $\psi_x(x)$ , et de la répartition transversale des déformations, notée  $\psi_z(z)$ .  $\psi_x(x)$  et  $\psi_z(z)$  sont exprimées en (40) à partir de l'expression des déformations donnée en (III-1).

$$\begin{cases} \psi_z(z) = z \\ \psi_x(x) = \phi''(x) \end{cases} \quad (40)$$

Par identification sur l'équation (39), il est possible d'exprimer  $K$  en fonction des valeurs efficaces ainsi que des valeurs moyennes de la répartition transversale des déformation  $\psi_z$ . Les

valeurs efficaces de  $\psi_z(z)$  calculées sur l'épaisseur de chaque patch piézoélectrique et sur une demi-épaisseur de substrat sont respectivement notées  $\psi_z^{Peff}$  et  $\psi_z^{Seff}$  et sont exprimées en (41) et en (42). La valeur moyenne sur l'épaisseur de chaque patch est notée  $\psi_z^{Pmoy}$  et est exprimée en (43).

$$\psi_z^{Peff^2} = \frac{1}{h_p} \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} z^2 dz = \frac{1}{h_p} \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z^2 dz \quad (41)$$

$$\psi_z^{Seff^2} = \frac{2}{h_s} \int_{-\frac{h_s}{2}}^0 z^2 dz = \frac{2}{h_s} \int_0^{\frac{h_s}{2}} z^2 dz \quad (42)$$

$$\psi_z^{Pmoy} = \frac{1}{h_p} \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z dz = \frac{1}{h_p} \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} z dz \quad (43)$$

Nous pouvons également remplacer le troisième facteur de l'expression en (39) par la valeur efficace de la distribution des déformations le long de la poutre  $\psi_x^{eff}$  exprimée en (43).

$$\psi_x^{eff} = \sqrt{\frac{1}{L_b} \int_0^{L_b} \psi_x(x)^2 dx} \quad (44)$$

En exprimant l'équation (39) à partir de la distribution  $\psi_x$  et des répartitions  $\psi_z$ , nous aboutissons finalement à l'équation (45).

$$K = \psi_x^{eff^2} \times B \left[ h_p \psi_z^{Peff^2} + h_p c_{11}^{ef} k_{e_{31}}^2 \left( \psi_z^{Peff^2} - \psi_z^{Pmoy^2} \right) + h_p \psi_z^{Peff^2} \right. \\ \left. + h_p c_{11}^{ef} k_{e_{31}}^2 \left( \psi_z^{Peff^2} - \psi_z^{Pmoy^2} \right) + h_s Y_s^{ef} \psi_z^{Seff^2} \right] \quad (45)$$

Comme exprimé en (46), les deux derniers facteurs de l'équation (45) font apparaître le terme de raideur à la flexion  $YI$  défini dans la section II.3.3.a.

$$K = \psi_x^{eff^2} \times B \underbrace{\left( \frac{2}{3} \left[ \frac{Y_s^{ef} h_s^3}{8} + c_{11}^{ef} \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s^3}{8} \right) \right] + \frac{1}{6} \frac{e_{31}^{ef^2} h_p^3}{\epsilon_{33}^{ef}} \right)}_{YI} \quad (46)$$

## 2. Expression du terme de couplage $\Theta$

Le terme de couplage  $\Theta$  pour un mode de vibration est exprimé en (47) à partir de l'équation (5).

$$\Theta = B e_{31}^{ef} (h_p + h_s) \phi'(L_b) \quad (47)$$

De la même manière que  $K$ , l'expression de  $\Theta$  est issue l'intégrale sur le volume de fonctions indépendantes. A partir de la méthode de Rayleigh-Ritz détaillée dans la section II.5.1 et notamment de l'exploitation de l'expression de l'enthalpie fournie en (II-64) et (II-65), il est possible de décomposer l'expression de  $\Theta$  en quatre facteurs (48).

$$\Theta = e_{31}^{ef} \times \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 1 \, dy \times \left[ \frac{1}{h_p} \int_{-\frac{h_s}{2}-h_p}^{-\frac{h_s}{2}} z \, dz + \frac{1}{h_p} \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} z \, dz \right] \times \int_0^{L_b} \phi''(x) dx \quad (48)$$

L'équation (48) fait alors apparaître la valeur moyenne de  $\psi_z$  dans les patches piézoélectriques,  $\psi_z^{Pmoy}$  exprimée en (43). Elle fait également apparaître la valeur moyenne de  $\psi_x$  le long de la poutre,  $\psi_x^{moy}$  exprimée en (49).

$$\psi_x^{moy} = \frac{1}{L_b} \int_0^{L_b} \psi_x(x) dx \quad (49)$$

L'expression de  $\Theta$  devient alors :

$$\Theta = 2B e_{31}^{ef} L_b \psi_x^{moy} \psi_z^{Pmoy} \quad (50)$$

## Annexe 3 : Exploitation d'un récupérateur par un circuit électrique dédié

Dans cette section, nous montrons que la fréquence de vibrations peut être suivie de manière dynamique grâce à un récupérateur fortement couplé exploité par un circuit intégré. Le prototype utilisé pour ces tests est un récupérateur partageant les mêmes dimensions et le même matériau que le récupérateur PZT (donnés dans le Tableau IV.1) à la différence que le matériau de la masse mobile est de l'aluminium. La fréquence de résonance en court-circuit de ce récupérateur est de 52,5 Hz et son coefficient de couplage  $k^2$  est de 17%<sup>22</sup>. Le circuit intégré utilisé a été développé par Adrien Morel dans le cadre de sa thèse [65]. Il réalise la technique de la *Phase-Shift* SECE (PSSECE) [61].

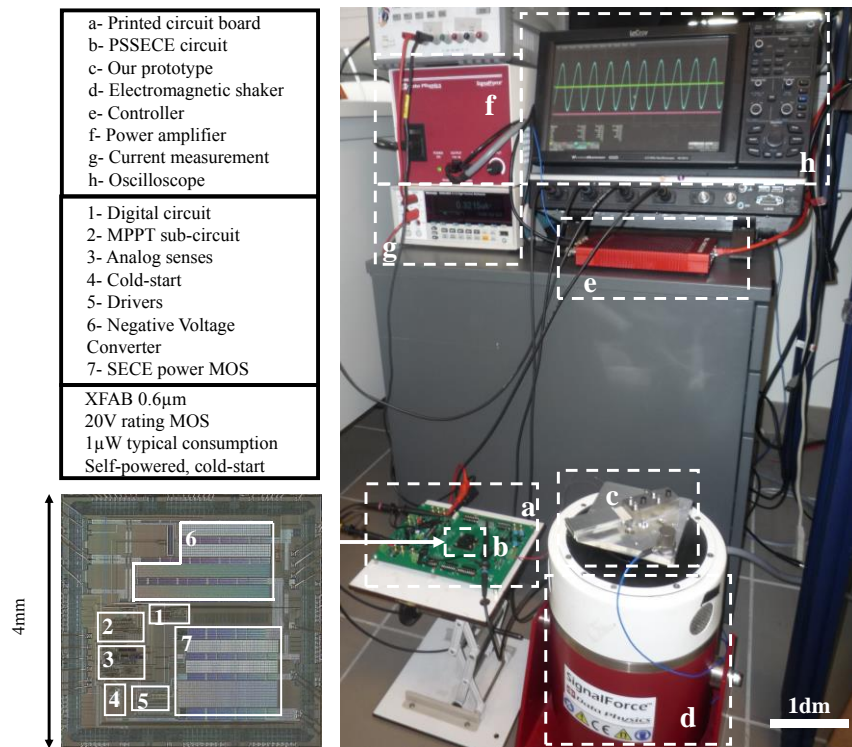


Figure 1 : Dispositif expérimental pour valider la large bande d'ajustement de la fréquence de résonance du prototype connecté à un circuit intégré d'ajustement autoalimenté

<sup>22</sup> Ce résultat confirme expérimentalement que le matériau de la masse mobile n'a pas beaucoup d'influence sur le coefficient de couplage global, puisque ce nouveau prototype présente un coefficient de couplage similaire à celui du prototype PZT W ( $k^2 = 16,4\%$  dans le Tableau IV.2).

La stratégie SECE a été initialement développée par Lefeuvre *et al.* [56] en 2005. Pendant la plupart du temps des demi-périodes de vibration, le récupérateur travaille en circuit ouvert. La valeur absolue de la tension aux bornes des patches piézoélectriques augmente à mesure que les charges électriques s'accumulent dans la capacité piézoélectrique. Dès que la tension atteint un extremum, une inductance est connectée aux patches piézoélectriques. La tension piézoélectrique diminue alors rapidement jusqu'à zéro et l'énergie est transférée à l'inductance pour être acheminée vers un condensateur de stockage. La technique PSSECE, également introduit par Lefeuvre *et al.* en 2017 [61] est une technique de récupération dérivée de la technique SECE. Dans le séquençement de la PSSECE, l'énergie est extraite du matériau piézoélectrique avec un déphasage accordable en comparaison avec la SECE standard. La valeur de ce déphasage, grâce à l'important coefficient de couplage électromécanique du prototype, influence considérablement la dynamique du récupérateur, et permet de régler sa fréquence de résonance sur une bande de fréquence relativement large.

Le circuit comprend un étage de gestion de la puissance à haute tension, un démarrage à froid et un sous-système de suivi du point de puissance maximale (MPPT). Le circuit est assemblé sur une carte de circuit imprimé (PCB) et connecté au récupérateur. Le dispositif expérimental est illustré sur la Figure 1. Le générateur de signaux envoie un signal alternatif à un amplificateur de puissance, qui actionne le pot vibrant électromagnétique. Le prototype en PZT fixé sur le pot vibrant est soumis à une excitation sinusoïdale à des fréquences allant de 46 Hz à 65 Hz et ayant une amplitude de 0,98 m/s<sup>2</sup>. Le prototype est connecté au circuit PSSECE, qui transmet la puissance extraite dans un condensateur de stockage hors puce de 94µF.

La Figure 2 montre les formes d'ondes transitoires des tensions mesurées obtenues avec le circuit PSSECE à la fréquence d'excitation de 58 Hz et après un décalage de fréquence à 53 Hz. Pendant les 4 premières secondes, le circuit recueille de l'énergie dans le condensateur de stockage de manière non optimale, afin d'effectuer un démarrage à froid. Par la suite, lorsque la tension aux bornes du condensateur atteint 1,9 V (ce qui signifie que le circuit a collecté suffisamment d'énergie pour démarrer son fonctionnement optimal), les techniques SECE démarrent. Le sous-système MPPT commence à ajuster le déphasage des événements de récupération. Cet ajustement qui permet d'accorder la fréquence de résonance du prototype avec la fréquence des vibrations. De la 5<sup>e</sup> à la 17<sup>e</sup> seconde, l'amplitude de la tension continue d'augmenter, ce qui signifie que la puissance récoltée augmente. La puissance extraite est presque maximale et supérieure à 200 µW en seulement 19 secondes après le démarrage du circuit. Vers la 19<sup>e</sup> seconde, nous modifions manuellement la fréquence de vibration de 58 Hz à 53 Hz, ce qui entraîne une chute rapide de la tension aux bornes du récupérateur. Aussitôt, le sous-système MPPT commence automatiquement à converger vers un nouveau déphasage optimal afin de rapprocher la fréquence de résonance du prototype de la nouvelle fréquence de vibration. Une fois de plus, la bonne convergence du sous-système MPPT est illustrée par une augmentation de l'amplitude de la tension, jusqu'à la 33<sup>e</sup> seconde. Grâce à cette expérience, nous montrons que le système génère une puissance utile et optimale même peu de temps après de grandes variations de la fréquence de vibration.

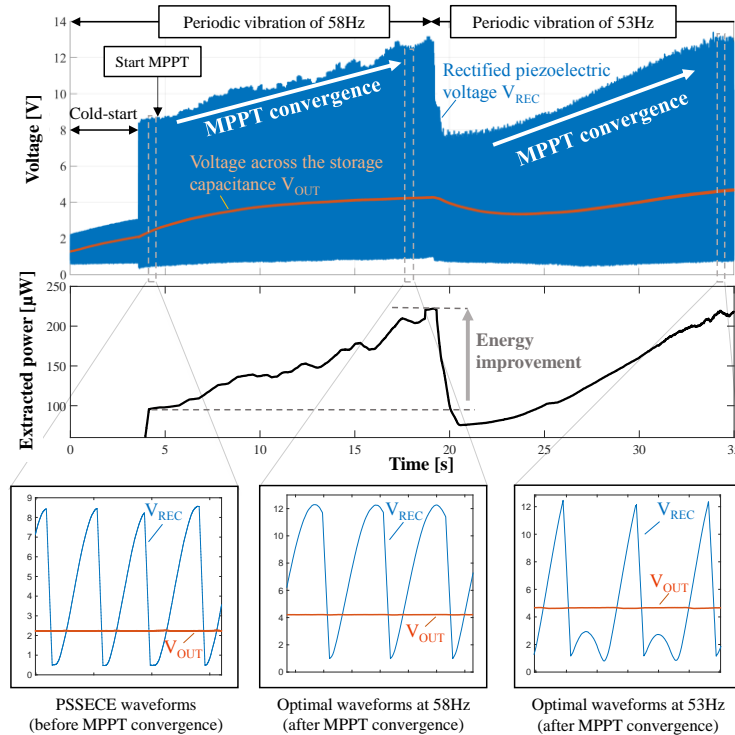


Figure 2 : Réponse transitoire de la tension du prototype connecté au circuit PSSECE illustrant l'auto-ajustement de la fréquence de résonance quand la fréquence de vibration varie de 58 Hz à 53Hz

La Figure 3 montre la puissance en fonction de la fréquence mesurée avec le prototype connecté au circuit PSSECE. La puissance récupérée a été mesurée en multipliant le courant moyen circulant dans le condensateur de stockage par la tension continue qui le traverse après convergence du sous-système MPPT pour 20 fréquences de vibration linéairement espacées entre 46 Hz et 65 Hz. Les résultats présentés sur la Figure 3 montrent que notre système est capable de récolter plus de 100  $\mu$ W pour des fréquences de vibration allant de 50 Hz à 62 Hz. Cela représente suffisamment de puissance pour alimenter un nœud de capteur sans fil sur une bande passante de fréquence aussi large que 21 % de la fréquence centrale. La bande passante définie à la moitié de la puissance maximale est, quant à elle, égale à 17,8 %. Il est à noter que la bande passante obtenue avec le circuit PSSECE est plus large que celles estimées par les autres prototypes dans la section IV.4.2.b avec un réglage résistif et capacitif, ce qui confirme les performances élevées de ce circuit dans ce domaine, comme décrit dans [27]. Par ailleurs la consommation globale du circuit PSSECE est généralement inférieure à 1  $\mu$ W, ce qui reste négligeable par rapport à la puissance récupérée.

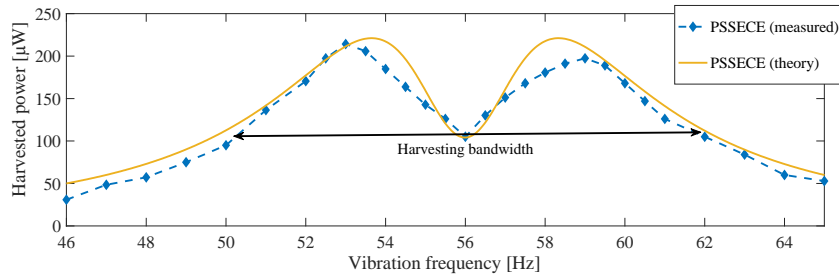


Figure 3 : Puissance récupérée avec notre prototype connecté au circuit PSSECE pour des fréquences de vibration de 46 Hz à 65 Hz. La ligne jaune est la prédiction théorique obtenue de [61] multipliée par un facteur de 85% correspondant au rendement typique des circuit PSSECE [65]

Notre prototype fortement couplé, exploité par le circuit PSSECE, présente finalement une large bande passante de récupération (17,8% de la fréquence centrale) alors que le sous-système d'accord de fréquence de résonance ne consomme qu'une partie négligeable de la puissance extraite.



## Annexe 4 : Conception d'un récupérateur très fortement couplé à base de PZN-PT

Le prototype PMN-PT N fabriqué au cours de la thèse a été conçu à partir de patches piézoélectriques présents dans le laboratoire. Un second prototype utilisant du matériau piézoélectrique monocristallin a été dimensionné au cours de la thèse mais n'a pas pu être fabriqué pour le rendu du manuscrit. L'épidémie de COVID-19 étant intervenue pendant la troisième année de thèse, la fabrication et les essais n'ont pas pu être réalisés. Cette section présente malgré tout la conception du récupérateur très fortement couplé et les résultats espérés.

Pour le dimensionnement de ce récupérateur le choix a été laissé libre sur les paramètres de conception afin de pouvoir maximiser au mieux le coefficient de couplage global. On souhaite malgré tout concevoir un récupérateur de petites dimensions et ayant une fréquence de résonance en court-circuit inférieure à 200 Hz.

Le matériau possédant le coefficient de couplage le plus élevé selon le mode de poutre étroite (coefficient  $k_{31}^l$ ) a été recherché. De cette manière, le prototype n'a pas besoin de comporter une poutre large pour maximiser le coefficient de couplage. D'après nos recherches auprès de fournisseurs de patches piézoélectriques, le matériau PZN-5.5PT polarisé selon l'axe [011] de la société Microfine [202] et le 0.7PMN-0.3PT polarisé selon l'axe [011] de la société Cts [203] semblent fournir les meilleurs coefficients de couplage ( $k_{31}^l \approx 81\%$ )<sup>23</sup>. Le 0.7PMN-0.3PT présente l'avantage d'être plus rigide que le PZN-PT mais peu d'informations sur les coefficients matériaux sont disponibles auprès du fournisseur. Le manque d'informations est notamment contraignant pour réaliser un dimensionnement, car, comme nous l'avons mentionné dans les sections III.1.4 et III.2, les paramètres équivalents des matériaux sur une poutre sont fortement influencés par les coefficients des matrices (notamment  $s_{11}^E, s_{22}^E, d_{32}, d_{31}$  et  $\epsilon_{33}^T$ ) et la distribution des déformations latérales. Le PZN-5.5PT polarisé selon l'axe [011] dont les coefficients matériaux sont détaillés par [93, p. 011] a donc été choisi comme matériau piézoélectrique pour notre récupérateur.

Le PZN-PT étant un matériau très souple (5,8GPa) et ayant un très fort coefficient de couplage  $k_{31}^l$ , une attention toute particulière doit être portée à la conception afin d'obtenir un coefficient de couplage global qui soit proche du coefficient de couplage matériau. Tel qu'expliqué dans la section III.1.3, un substrat souple est préférable pour maximiser le coefficient de couplage. Cependant, comme les matériaux à base d'époxy présentent un fort facteur d'amortissement, l'utilisation de ce type de matériau pour fabriquer un récupérateur réduit la puissance récupérée. Des métaux ont donc finalement été envisagés pour concevoir le prototype. Les métaux présentent l'avantage d'avoir un faible facteur d'amortissement et d'être facilement usinables par les fournisseurs de pièces mécaniques. Trois matériaux ont été considérés pour le dimensionnement : l'aluminium ( $Y_s = 69$  GPa), le laiton ( $Y_s = 110$  GPa) et l'acier ( $Y_s = 200$  GPa). Chaque matériau a donc été envisagé pour fournir une configuration de

<sup>23</sup> Le coefficient fourni est en réalité  $k_{32}^l$  selon la convention de l'orientation des axes piézoélectriques [95].

prototype. Le facteur d'amortissement du substrat va être mesuré par des essais vibratoires sur des poutres nues au laboratoire. Ainsi, le matériau disposant du minimum de perte sera choisi pour la fabrication du prototype.

Le Tableau 1 donne les paramètres géométriques du récupérateur PZN-PT N qui sont communs entre les trois matériaux de substrat.

Tableau 1 : Paramètres géométriques du récupérateur PZN-PT conçu

Configuration	PZN-PT N
Matériau	PZN-5.5PT [011] Microfine
Longueur de la poutre $L_b$	15 mm
Longueur de la masse $L_m$	20 mm
Hauteur de la masse $H_m$	4 mm
Épaisseur des patchs $h_p$	0,4 mm
Largeur de la poutre et de la masse mobile $B$	5 mm

Pour chaque matériau, l'épaisseur de substrat  $h_s$  optimale est différente et est donnée dans le Tableau 2. Ces épaisseurs optimales ont été choisies en fonction de leur disponibilité auprès de notre fournisseur. Le Tableau 2 fournit également les fréquences de résonance en court-circuit ainsi que les coefficients de couplage globaux  $k^2$  calculés à partir de simulations par éléments finis. Comme les distances entre les patchs piézoélectriques et l'encastrement  $d_c$  ainsi qu'entre les patchs piézoélectriques et la masse mobile  $d_m$  ont une forte influence sur le coefficient de couplage (cf. section IV.3.1), des simulations par éléments finis permettent de déterminer le coefficient de couplage espéré par la fabrication des prototypes. Le coefficient de couplage global  $k^2$  est donné pour le cas où  $d_c$  et  $d_m$  sont égaux à 50  $\mu\text{m}$  dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Épaisseur de substrat et résultats obtenus par simulations par éléments finis en 3 dimensions

Matériau	Épaisseur substrat $h_s$	Fréquence de résonance en court-circuit	Coefficient de couplage global $k^2$	
			Encastrement parfait $d_c = d_m = 0 \mu\text{m}$	$d_c = d_m = 50 \mu\text{m}$
Aluminium	0,5 mm	130 Hz	59,9%	53,7%
Laiton	0,4 mm	118 Hz	58,6%	52,8%
Acier	0,3 mm	108 Hz	57,2%	51,5%

Le Tableau 2 révèle que, si les fixations sont parfaites, le coefficient de couplage espéré par le prototype est supérieur au coefficient de couplage des récupérateurs de Badel et Lefevre [58] et d'Ahmed-Seddik *et al.* [54] (respectivement  $k^2 = 53\%$  et  $k^2 = 50\%$ ). Cependant, le coefficient de couplage du prototype fabriqué pourrait être légèrement inférieur au coefficient de couplage du récupérateur de Badel et Lefevre à cause des imperfections de fabrications. Tous les efforts vont être mis en œuvre pour minimiser ceux-ci lors de l'assemblage du prototype. La figure ci-dessous représente la conception du récupérateur sur SolidWorks.

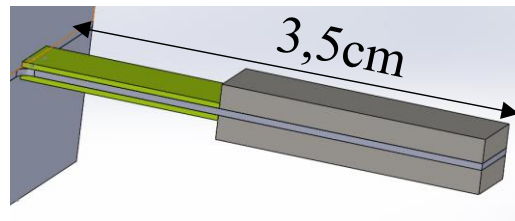


Figure 4 : Configuration du récupérateur en PZN-PT sur SolidWorks

Ce travail de conception va finalement nous permettre de fabriquer un prototype très fortement couplé ( $k^2 \approx 50\%$ ) et à fort facteur de qualité concurrençant l'état de l'art. Ce prototype pourra être utilisé avec les circuits de gestion électrique permettant l'ajustement de fréquence de résonance développés par Adrien Morel au cours de sa thèse [65].

# Table des variables

<b>Paramètres géométriques</b>	$M_t$	Masse de la masse en bout de poutre
	$I_t$	Inertie de rotation de la masse mobile par rapport à son centre de gravité
	$D_t$	Distance entre le centre de gravité de la masse mobile et le bout de poutre
	$J_t$	ratio d'inertie de la masse d'épreuve
	$L_b$	Longueur de la poutre
	$L_m$	Longueur de la masse mobile
	$H_m$	Hauteur de la masse mobile
	$B$	Largeur de la poutre et de la masse mobile
	$\mathcal{V}_p$	Volume de substrat
	$\mathcal{V}_p$	Volume de matériau piézoélectrique
	$R_e$	Rapport entre la longueur des électrode et la longueur total des patches piézoélectriques
	$h_{bar}$	Hauteur des barreaux
	$L_{bar}$	Longueur des barreaux
	$e_H$	Rapport entre l'épaisseur des barreaux et l'épaisseur de la poutre sans barreaux
$e_L$	Rapport entre la longueur de poutre couverte de barreaux et la longueur totale de la poutre	
<b>Paramètres matériaux</b>	$e_{31}$	Coefficient de la matrice piézoélectrique du matériau piézoélectrique
	$\epsilon_{33}$	Coefficient de la matrice de permittivité diélectrique du matériau piézoélectrique
	$c_{11}$	Coefficient de la matrice de rigidité du matériau piézoélectrique
	$Y_s$	Module de Young du substrat
	$\nu$	Coefficient de Poisson du substrat
	$\kappa$	Ratio de raideurs équivalentes
<b>Coordonnées</b>	$x$	Coordonnée longitudinale
	$y$	Coordonnée latérale
	$z$	Coordonnée transversale

	$\mathbf{T}$	Vecteur des contraintes selon la notation de Voigt	
	$\mathbf{S}$	Vecteur des déformations selon la notation de Voigt	
	$\mathbf{E}$	Vecteur des champs électriques selon la notation de Voigt	
	$\mathbf{D}$	Vecteur des champs de déplacement électrique selon la notation de Voigt	
	$v$	Tension	
	$V$	Amplitude de la tension	
	$r$	Coordonnée généralisée de déplacement	
	$R$	Amplitude de $r$	
	$i$	Courant	
	$M_y$	Moment fléchissant dans la poutre	
	$w_{L_b}$	Déplacement en bout de poutre	
	$\theta_{L_b}$	Rotation en bout de poutre	
<b>Grandeurs physiques</b>	$w_B$	Déplacement de la base de la poutre	
	$\mathcal{A}_B$	Amplitude de l'accélération de la base de la poutre	
	$w(x)$	Déformée de la poutre	
	$H$	Enthalpie linéaire du matériau piézoélectrique	
	$F$	Force	
	$C$	Couple	
	$H_n$	Enthalpie non-linéaire du matériau piézoélectrique	
	$L$	Lagrangien	
	$W$	Travail extérieur	
	$\omega$	Energie perdue par cycle par un coefficient de perte	
	$\lambda$	Paramètre de fréquence pour le modèle à paramètres distribués ou <i>flux linkage</i> ( $\lambda = v$ ) pour le modèle non-linéaire	
	$\omega$	Pulsation de vibration	
	$f$	Fréquence de vibration	
	<b>Fonctions et variables de distributions</b>	$\phi(x)$	Forme du mode de vibration
		$\psi_x(x)$	Distribution longitudinale des déformations
		$\psi_z(z)$	Répartition transversale des déformations
$\mathcal{R}_L$		Facteur de longueur du coefficient de couplage alternatif	
$\mathcal{R}_T$		Facteur d'épaisseur du coefficient de couplage alternatif	

<b>Coefficients équivalents</b>	$e_{31}^{ef}$	Coefficient piézoélectrique du matériau piézoélectrique disposé sur une poutre
	$\epsilon_{33}^{ef}$	Coefficient diélectrique équivalent du matériau piézoélectrique disposé sur une poutre
	$c_{11}^{ef}$	Coefficient de rigidité du matériau piézoélectrique disposé sur une poutre
	$k_{31}^2$	Coefficient de couplage électromécanique du matériau piézoélectrique selon le mode 31
	$k_{e31}^2$	Coefficient de couplage alternatif électromécanique du matériau piézoélectrique selon le mode 31
	$k^2$	Coefficient de couplage électromécanique global de selon le 1 <sup>er</sup> mode de vibration
	$k_e^2$	Coefficient de couplage électromécanique global alternatif de selon le 1 <sup>er</sup> mode de vibration
	$\mathbf{K}$	Matrice de raideur équivalente du récupérateur sur plusieurs degrés de liberté
	$\mathbf{B}_f$	Vecteur de force du récupérateur sur plusieurs degrés de liberté
	$\mathbf{M}$	Matrice de masse équivalente du récupérateur sur plusieurs degrés de liberté
	$\Theta$	Vecteur de couplage équivalent du récupérateur
	$C_p$	Capacité globale
	$\alpha$	Terme de couplage direct linéique
	$\vartheta$	Terme de couplage inverse linéique
	$\widetilde{\theta}_2$	Terme de couplage non-linéaire linéique
	$\widetilde{k}_2$	Raideur à la flexion de second-ordre mécanique non linéaire
	$K_2$	Raideur non-linéaire de second ordre équivalente
	$\Theta_2$	Terme de couplage non-linéaire équivalent
	$R_{load}$	Résistance de charge en sortie du récupérateur
	$\alpha$	Couplage globale
$YI$	Raideur à la flexion de la poutre	
<b>Particularités de variable</b>	$\hat{\square}$	Coefficients équivalents obtenus avec la méthode de Rayleigh-Ritz
	$\square^*$	Coefficient complexe
	$\square$	Grandeur exprimée dans l'espace complexe
	$\check{\square}$	Valeur réel d'un coefficient complexe
	$j$	Imaginaire pur égale à $\sqrt{-1}$

<b>Données des récupérateurs</b>	$f_{sc}$	Fréquence de résonance en court-circuit
	$f_{oc}$	Fréquence de résonance en circuit ouvert
	$\omega_1^{sc}$	Pulsation de résonance en court-circuit d'un résonateur piézoélectrique modélisé par un système à 1DDL
	$\Omega$	Pulsation normalisée par la pulsation de résonance en court-circuit ( $= \omega/\omega_1^{sc}$ )
	$k_f^2$	Coefficient décrivant l'écart entre la fréquence de résonance en court-circuit et la fréquence de résonance en circuit ouvert ( $= (f_{oc}^2 - f_{sc}^2)/f_{oc}^2$ )
	$f_a$	Fréquence du pic de puissance proche de la fréquence de résonance en court-circuit
	$f_b$	Fréquence du pic de puissance proche de la fréquence de résonance en circuit ouvert
	$R_a^{opt}$	Résistance optimale permettant d'atteindre le pic de puissance en $f_a$
	$R_b^{opt}$	Résistance optimale permettant d'atteindre le pic de puissance en $f_b$
	$P_a^{max}$	Puissance récupérée au pic de puissance proche de la fréquence de résonance en court-circuit
	$P_a^{max}$	Puissance récupérée au pic de puissance proche de la fréquence de résonance en circuit ouvert
	$Z_p$	Impédance interne du récupérateur
<b>Coefficients de pertes</b>	$\zeta_m$	Amortissement mécanique visqueux
	$\zeta_e$	Amortissement électrique
	$Q_m$	Facteur de qualité mécanique
	$\varphi_e$	Angle d'avance de phase mécanique du matériau piézoélectrique pour la forme $e$
	$\delta_e$	Angle de retard de phase diélectrique du matériau piézoélectrique pour la forme $e$
	$\theta_e$	Angle de phase piézoélectrique du matériau piézoélectrique pour la forme $e$
	$\varphi_{eq}$	Angle d'avance de phase mécanique équivalent du récupérateur
	$\eta$	Facteur d'amortissement du substrat
	$b_1$	Coefficient linéaire équivalent de pertes mécaniques par hystérésis
	$b_2$	Coefficient non-linéaire équivalent de pertes mécaniques par hystérésis
	$d_1$	Coefficient linéaire équivalent de pertes diélectriques par hystérésis
$d_2$	Coefficient non-linéaire équivalent de pertes diélectriques par hystérésis	

# Liste des publications

## Revue internationale

- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Formosa F, Charleux L, Boisseau S, Pillonnet G, Berlitz C A, Quelen A and Badel A, 2020 Strongly coupled piezoelectric cantilevers for broadband vibration energy harvesting Applied Energy 277 115518
- Brenes A, Morel A, Gibus D, Yoo C-S, Gasnier P, Lefeuvre E and Badel A, 2020 Large-bandwidth piezoelectric energy harvesting with frequency-tuning synchronized electric charge extraction Sensors and Actuators A: Physical 302 111759
- Morel A, Quelen A, Berlitz C A, Gibus D, Gasnier P, Badel A and Pillonnet G, 2020 Fast-Convergence Self-Adjusting SECE Circuit With Tunable Short-Circuit Duration Exhibiting 368% Bandwidth Improvement IEEE Solid-State Circuits Letters 3 222–5
- Freychet O, Boisseau S, Frassati F, Morel A, Gasnier P, Gibus D, Badel A and Despesse G 2019 Efficient optimal load and maximum output power determination for linear vibration energy harvesters with a two-measurement characterization method Smart Materials and Structures 29 015003

## Brevets

- Gibus D, Gasnier P, Freychet O and Badel A, Dispositif de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique fonctionnant sur une gamme de fréquence de vibration élargie, Demande N° FR1910240 déposée le 17/09/2019

## Conférences internationales avec actes

- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Boisseau S and Badel A 2019 Modelling and design of highly coupled piezoelectric energy harvesters for broadband applications Journal of Physics Conference Series (PowerMEMS 2018) 1407 012009 *Présentation orale*
- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Boisseau S and Badel A 2019 Nonlinearities influences on performances of a strongly-coupled piezoelectric generator for broadband vibration energy harvesting *19th International Conference on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications* (PowerMEMS 2019) pp 1–5 *Présentation orale*
- Morel A, Quelen A, Berlitz C A, Gibus D, Gasnier P, Badel A and Pillonnet G, 2020, 32.2 Self-Tunable Phase-Shifted SECE Piezoelectric Energy-Harvesting IC with a 30nW MPPT Achieving 446% Energy-Bandwidth Improvement and 94% Efficiency 2020 IEEE International Solid- State Circuits Conference - (ISSCC 2020) pp 488–90



### **Conférence internationale**

- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Boisseau S and Badel A, 2019, High electromechanical coupling of a broadband PZT-based vibration energy harvester. International Workshop on Piezoelectric Materials and Applications in Actuators (IWPMA 2019), Oct 2020, Lyon, France *Présentation orale*

### **Conférences nationales**

- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Boisseau S and Badel A, 2018 Modeling and design of highly-coupled piezoelectric energy harvesters for broadband applications *Journées Nationales sur la Récupération et le Stockage d'Énergie (JNRSE 2018) Présentation orale*
- Gibus D, Gasnier P, Morel A, Boisseau S and Badel A, 2019, Highly-coupled PZT-based vibration energy harvester for broadband applications. *9th National Days on Energy Harvesting and Storage (JNRSE 2019) Présentation orale*