



HAL
open science

Contribution à l'analyse des risques financiers: risque de crédit, asymétrie d'information, analyse chartiste

Christophette Blanchet-Scalliet

► To cite this version:

Christophette Blanchet-Scalliet. Contribution à l'analyse des risques financiers: risque de crédit, asymétrie d'information, analyse chartiste. Probabilités [math.PR]. Université Lyon 1, 2016. tel-03163237

HAL Id: tel-03163237

<https://hal.science/tel-03163237>

Submitted on 15 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ECOLE CENTRALE DE LYON
UNIVERSITE LYON I**

Mémoire

en vue de l'obtention de

l' Habilitation à Diriger des Recherches

présenté et soutenu par

Christophette Blanchet-Scalliet

le 20 mai 2016

**Contribution à l'analyse des risques financiers :
risque de crédit, asymétrie d'information, analyse chartiste**

Jury :

Stéphane Crépey	Université d'Evry-Val-d'Essonne	Rapporteur
Monique Jeanblanc	Université d'Evry-Val-d'Essonne	Examinatrice
Elisabeth Mironescu	Ecole Centrale de Lyon	Examinatrice
Marie-Claire Quenez	Université Paris Diderot	Rapporteur
Christian Robert	Université Claude Bernard- Lyon	Examineur
Marek Rutkowski	University of Sydney	Rapporteur
Denis Talay	INRIA Sophia-Antipolis	Examineur

Remerciements

Je remercie sincèrement Marie-Claire Quenez, Stéphane Crépey et Marek Rutkowski d'avoir accepté de rapporter ce mémoire, malgré des agendas chargés. Je leur suis reconnaissante pour leur lecture attentive et leur intérêt pour mon travail.

Un grand merci à Monique Jeanblanc de m'avoir initié à la recherche : ce fut le début... Son avis et ses conseils sont toujours précieux pour moi. La présence de Denis Talay dans ce jury est toute particulière. En m'accueillant à l'Inria régulièrement, il a permis que je ne "décroche" pas.

J'apprécie aussi la présence d'Elisabeth Mirosnecu et de Christian Robert dans ce jury. Ils représentent plus que les simples "membres locaux".

Tous ces travaux n'auraient pas existé sans des rencontres et des échanges. Merci à tous mes coauteurs, et plus particulièrement à Etienne, Anne, Stefan, Diana, Ying et Caroline pour toutes nos discussions et projets.

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du département Math-Info de l'ECL et spécialement à ceux de l'équipe de Math (Céline, Elisabeth, François, Grégory, Laurent, Malek, Martine, Philippe et nos thésards). L'ambiance agréable qui règne est une motivation pour venir chaque jour. Merci à Florence qui est devenue au fil du temps une amie, plus qu'une ancienne collègue.

A Camille, Colombe, Vianney et Fabien.

Table des matières

Introduction	3
1 Grossissements de filtration : applications au risque de crédit et assurance-vie	7
1.1 EDSR dans une filtration élargie progressivement	8
1.1.1 Horizon aléatoire et générateur lipschitzien	9
1.1.2 Générateur quadratique	10
1.2 Utilité espérée et investissement optimal	12
1.2.1 Modèle financier	12
1.2.2 Prix d'indifférence pour le risque de crédit	13
1.3 Prime d'indifférence pour des contrats variable annuités	14
1.3.1 Marché financier et variable annuités	14
1.3.2 Maximisation d'utilité et prime d'indifférence	16
1.3.3 Problème d'optimisation Min-Max	17
1.3.4 Résolution numérique	19
1.4 Grossissements initiaux successifs	20
1.4.1 Hypothèse de densité	21
1.4.2 Des hypothèses de densité plus fortes	23
1.4.3 Application et illustrations numériques	26
1.5 Bibliographie récente et Perspectives	28
2 Trois problèmes de contrôle stochastique	29
2.1 Investissement optimal en horizon aléatoire	30
2.1.1 Modèle	30
2.1.2 Probabilité conditionnelle déterministe	31
2.1.3 Probabilité conditionnelle stochastique	32
2.2 Liquidation et information supplémentaire	33
2.2.1 Liquidation dans un modèle brownien avec drift	33
2.2.2 Comparaison agent informé et agent non-informé	34
2.2.3 Sensibilité par rapport aux paramètres	36
2.3 Maximisation du temps d'occupation d'une martingale exponentielle	37
2.3.1 Un problème de contrôle auxiliaire	38
2.3.2 Propriété de la densité du temps d'occupation	38
2.4 Bibliographie récente et Perspectives	39

3	Temps d'atteinte et applications	41
3.1	Evaluation du risque de contrepartie dans un modèle structurel	41
3.1.1	Le modèle	41
3.1.2	Jambe de défaut de contrepartie	42
3.1.3	Le juste prix d'un CDS	45
3.2	Temps de passage pour un processus de renouvellement perturbé par une diffusion	46
3.2.1	Notations et hypothèses	46
3.2.2	Densité du premier temps de passage	47
3.3	Bibliographie récente et Perspectives	48
4	Analyse technique	49
4.1	L'analyse technique comparée aux modèles mathématiques	50
4.1.1	Le modèle	50
4.1.2	Portefeuille optimal	50
4.1.3	Deux stratégies de détection	52
4.1.4	Les modèles mal calibrés	52
4.1.5	L'investissement chartiste	53
4.1.6	Quelques comparaisons numériques de diverses stratégies	53
4.2	Modèle avec changements aléatoires de drift et coûts de transaction	54
4.2.1	Modèle	54
4.2.2	Les fonctions valeurs comme solutions	56
4.2.3	Résultats numériques	57
	Bibliographie	61

Introduction

Ce mémoire résume mes travaux de recherche depuis ma thèse en probabilités et en mathématiques financières. Ces travaux ont été regroupés en quatre chapitres.

Dans mes travaux de thèse, je m'étais essentiellement intéressée aux propriétés de représentation des martingales dans une filtration brownienne grossie progressivement et de leurs applications à la couverture de produits dérivés de crédit dans l'approche forme réduite. Le premier chapitre prolonge ces travaux en considérant des équations stochastiques rétrogrades associées présentant un unique saut au moment du défaut qui permettent de retrouver la couverture des dérivés de crédit ou de déterminer un prix d'indifférence en cas de marché incomplet. La modélisation des contrats d'assurance-vie et plus particulièrement des contrats de type variable annuities fait intervenir les mêmes outils (temps aléatoire et grossissement de filtration progressif). Ainsi, nous nous sommes naturellement intéressés à appliquer les résultats obtenus pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades afin de déterminer une prime d'indifférence pour l'assureur en prenant en compte la pire stratégie de retraits possibles. Enfin, dans un modèle de risque de crédit structurel avec une barrière aléatoire évoluant au cours du temps, nous avons été amenés à considérer une succession de grossissements initiaux et à calculer les espérances conditionnelles dans ce contexte.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution de trois problèmes de contrôle stochastique issus de trois questions financières. Dans ces trois problèmes, la solution est obtenue en considérant l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée. Le premier problème consiste à caractériser le portefeuille d'investissement optimal lorsque l'horizon est aléatoire. Dans le second, nous analysons l'impact d'informations supplémentaires sur la stratégie de liquidation d'une position. Enfin, le troisième problème consiste à maximiser le temps d'occupation d'une martingale exponentielle dont on contrôle le niveau de la volatilité.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la loi de temps d'atteinte de processus. Tout d'abord, nous déterminons la loi de sortie d'un brownien bidimensionnel d'un domaine polyédral. Ainsi nous déterminons le prix d'un contrat CDS en tenant compte du risque de contrepartie. Dans un second temps, nous déterminons la densité du temps de passage d'un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien. Les sauts du processus de renouvellement peuvent être soit positifs, soit négatifs. De plus, nous proposons une méthode de simulation de la densité basée uniquement sur l'observation du processus aux instants de sauts. L'avantage principal de cette méthode est d'obtenir la probabilité de ruine à partir de moins de simulations que la distribution empirique du temps de ruine.

Le quatrième chapitre résume les résultats obtenus en collaboration avec des membres du projet TOSCA-INRIA-Sophia-Antipolis sur l'analyse technique. Si on considère un mar-

ché financier, il n'est pas possible de calibrer un modèle qui tienne compte de tous les risques pendant un intervalle de temps long. Ainsi, il est nécessaire d'examiner des modèles avec ruptures. Dans ces situations, il peut apparaître plus opportun d'utiliser l'analyse technique dont le but est de capturer les tendances basiques du marché sans supposer de modèles. La question suivante est donc naturelle et pourtant à notre connaissance elle n'avait jamais été étudiée auparavant : est-il possible de comparer les performances obtenues par l'utilisation de modèles inappropriés à celles obtenues par l'analyse technique ? Pour cela, nous avons développé une étude mathématique et numérique avec le but de comparer les stratégies basées sur des modèles mathématiques mal-spécifiés et des stratégies purement empiriques dans un modèle présentant une rupture de drift. Dans un second temps, nous avons étudié un problème de contrôle stochastique faisant intervenir un processus de Black et Scholes à régime markovien. Nous avons entièrement caractérisé la fonction valeur de ce problème comme unique solution de viscosité d'un jeu d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, proposé un schéma d'approximation de cette fonction valeur et d'une stratégie de gestion proche de l'optimalité. Nous avons comparé les performances de la stratégie mathématique optimale en présence d'erreurs de calibration des paramètres du modèle avec une stratégie de type moyenne mobile qui ne requiert aucune modélisation sous-jacente.

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches se base sur les publications et prépublications suivantes.

Publications après la thèse :

- [B1] C. Blanchet-Scalliet, A. Diop, R. Gibson, D. Talay, E. Tanré. Technical analysis versus mathematical models :boundaries of their validity domains. in *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2004*. H. Niederreiter, D. Talay (Eds.), 15-30. Springer, 2005.
- [B2] C. Blanchet-Scalliet, A. Diop, R. Gibson, D. Talay, E. Tanré. Technical Analysis Compared to Mathematical Models Based Methods Under Parameters Misspecification. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31 (5), pp. 1351-1373.
- [B3] C. Blanchet-Scalliet, N. El Karoui, M. Jeanblanc, L. Martellini. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain. *Journal of Mathematical Economics*, 2008, 44 (11), pp. 1100-1113.
- [B4] C. Blanchet-Scalliet, R. Gibson, B. de Saporta, D. Talay, E. Tanré. Viscosity solutions to optimal portfolio allocation problems in models with random time changes and transaction costs. *Advanced Financial Modelling. H. Albrecher, W. Runggaldier, W. Schachermayer (Eds). Radon Series on Computational and Applied Mathematics 8*. De Gruyter, 2009.
- [B5] C. Blanchet-Scalliet, A. Eyraud-Loisel, M. Royer-Carenzi : Hedging of Defaultable Contingent Claims using BSDE with uncertain time horizon. *Le bulletin français d'actuariat*, 2010, 20 (10).
- [B6] S. Ankirchner, C. Blanchet-Scalliet, A. Eyraud-Loisel : Credit Risk Premia and Quadratic BSDEs with a single jump. *Int. Journal of Theor. and App. Fin.*, 2010, 13 (7), pp. 1103-1129.
- [B7] C. Blanchet-Scalliet, F. Patras. Structural Counterparty Risk Valuation for Credit Default Swaps, *Credit Risk Frontiers : Subprime Crisis, Pricing and Hedging, CVA, MBS, Ratings, and Liquidity*, WILEY, pp. 437-456, 2011.

- [B8] C. Blanchet-Scalliet, D. Dorobantu, D. Rullière. The density of the ruin time for a renewal-reward process perturbed by a diffusion. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26 (1), pp. 108-112.
- [B9] C. Blanchet-Scalliet, E. Chevalier, I. Kharroubi, T. Lim. Variable Annuities indifference fees. *Int. Journal of Theor. and App. Fin.*, 2015, 18 (8).
- [B10] S. Ankirchner, C. Blanchet-Scalliet, A. Eyraud-Loisel. Optimal liquidation with directional views and additional information. *Mathematics and Financial Economics*, 2016, 10 (1), pp. 1-14.

Prépublications :

- [B11] C. Blanchet-Scalliet, A. Diop, R. Gibson, D. Talay, E. Tanré, K. Kaminski : Technical Analysis Compared to Mathematical Models Based Under Misspecification, Working Paper Series 253, FINRISK.
- [B12] C. Blanchet-Scalliet, A. Cousin, D. Dorobantu : Hitting time for correlated three-dimensional Brownian motion. Preprint 2013.
- [B13] C. Blanchet-Scalliet, C. Hillairet, Y. Jiao, Successive enlargements of filtrations and Applications to Insider Modeling, soumis dans *Advances on Applied probability*, 2016.
- [B14] S. Ankirchner, C. Blanchet-Scalliet, M. Jeanblanc : Controlling the occupation time of a geometric martingale, soumis dans *Applied Mathematics & Optimization*, 2015.
- [B15] C. Blanchet-Scalliet, D. Dorobantu, Y. Salhi , A Model-Point Approach to Indifference Pricing of Life Insurance Portfolios with Dependent Lives soumis dans *Journal Of Risk and Assurance*, 2016.

Chapitre 1

Grossissements de filtration : applications au risque de crédit et assurance-vie

Depuis une vingtaine d'années, les travaux sur le grossissement de filtration des années 80 ([36, 37, 42, 41, 43]) ont été réinvestis dans le cadre des applications à la finance, plus particulièrement dans le contexte de l'asymétrie d'information ([5, 28, 31]) et du risque de crédit ([8, 9, 10, 11]). Le grossissement de filtration progressif apparaît classiquement pour modéliser l'information disponible en risque de crédit ou en assurance vie. Le temps aléatoire est soit le temps de défaut, soit l'instant de décès. Dans mes travaux de thèse, je m'étais essentiellement intéressée aux propriétés de représentation des martingales dans une filtration brownienne grossie progressivement et de leurs applications à la couverture de produits dérivés de crédit dans les modèles formes réduites. Par la suite, dans une série de travaux [B5, B6, B9], nous avons étudié et utilisé les solutions d'équations différentielles rétrogrades dans une filtration brownienne élargie progressivement par un temps aléatoire. Les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades avec horizon aléatoire ont été étudiées par S. Peng [69] E. Pardoux [65], P. Briand et Y. Hu [15], M. Royer [72] lorsque l'horizon est un temps d'arrêt pour la filtration brownienne ou par A. Eyraud-Loisel et M. Royer [27] lorsque l'horizon est un temps d'arrêt pour la filtration brownienne grossie initialement par une variable aléatoire. Dans [B5], nous considérons une équation différentielle rétrograde avec horizon aléatoire qui n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration de référence. Par conséquent, nous introduisons la filtration élargie progressivement \mathbb{G} et nous cherchons des solutions de l'équation différentielle adaptées à cette filtration. Pour un générateur lipschitzien, l'existence et l'unicité des solutions sont établies. Ce qui nous a permis de retrouver les résultats de couverture des dérivées de crédit obtenus précédemment dans [11].

Lorsqu'on impose des contraintes d'investissement, par exemple si on ne peut traiter les dérivés de crédit, le marché devient incomplet. Une méthode pour évaluer les actifs dans ce cas est de déterminer le prix d'indifférence introduite par Hodges et Neuberger [34]. Nous avons utilisé l'approche développée par El Karoui et Rouge [71] introduisant deux problèmes d'optimisation stochastique pour déterminer le prix d'indifférence d'un dérivé de crédit. Dans notre contexte de risque de crédit et de contraintes d'investissement, la résolution du problème de maximisation fait apparaître une équation différentielle rétrograde

dans la filtration élargie avec un générateur quadratique. Nous avons montré dans [B6] que la solution pouvait s'écrire comme un combinaison de solutions d'équations écrites dans la filtration brownienne et ainsi caractérisé le prix d'indifférence d'un dérivé de crédit comme solution d'une équation différentielle rétrograde dans la filtration élargie avec un générateur quadratique.

En assurance, le temps de mort d'un assuré est naturellement modélisé par un temps aléatoire et donc le cadre du grossissement de filtration progressif est adapté pour la modélisation des contrats d'assurance vie dont l'évaluation est complexe. Dans [B9], nous déterminons le prix d'indifférence de contrats de type variable annuités comme la solution d'un problème d'optimisation min-max. Nous montrons que ce problème peut se résoudre de manière séquentielle. A chaque étape, la résolution de l'équation différentielle stochastique rétrograde associée permet d'obtenir la stratégie optimale d'investissement.

Enfin, dans [B13], nous avons considéré un modèle de défaut de type structurel où l'instant de défaut est le premier instant où la valeur de l'entreprise passe en-dessous d'une barrière qui est réactualisée au cours du temps. Ce modèle est une généralisation de celui introduit dans [33] en considérant que l'agent initié peut réactualiser le niveau de la barrière de défaut. Soit $t_i, i = 1, \dots, n$ une famille de temps discrets et $L^i, i = 1, \dots, n$ les variables aléatoires modélisant l'information supplémentaire disponible à l'instant t_i . L'information disponible pour l'agent initié est modélisé par la filtration \mathbb{G}^I donnée par la de grossissements initiaux de la filtration de référence par les variables aléatoires $L_i, i = 1, \dots, n$. Dans les cas d'un seul grossissement initial par la variable aléatoire L , l'hypothèse dite de Jacod ou l'hypothèse de densité lorsque l'on suppose que la loi conditionnelle de la variable L par rapport à la filtration de référence est équivalente à la loi de L joue un rôle important. En effet cela implique en particulier qu'il existe une martingale mesure équivalente et la propriété de No Free Lunch with Vanishing Risk (cf [31] et [3]). De plus, en suivant l'approche de Föllmer et Imkeller [28], il est possible de construire (cf [31]) une martingale mesure équivalente sous laquelle la filtration de référence est indépendante de la variable aléatoire L . Notre travail a consisté à généraliser ces propriétés dans le contexte d'une succession de grossissements.

Ce chapitre repose sur les articles [B5, B6, B9, B13]. Pour plus de clarté, nous présentons les résultats obtenus dans [B5, B6] en dimension un. Le lecteur pourra se référer aux versions publiées pour le cas général.

1.1 EDSR dans une filtration élargie progressivement

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par un mouvement brownien unidimensionnel $(W_t)_{t \geq 0}$. Soit τ un temps aléatoire et on note $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ la plus petite filtration continue à droite contenant \mathbb{F} et telle que τ est un \mathbb{G} temps d'arrêt. Plus précisément $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ est définie, pour tout $t \geq 0$ par

$$\mathcal{G}_t := \bigcap_{\varepsilon > 0} \tilde{\mathcal{G}}_{t+\varepsilon},$$

où $\tilde{\mathcal{G}}_s := \mathcal{F}_s \vee \sigma(1_{\tau \leq u}, u \in [0, s])$, pour tout $s \geq 0$.

On note $(N_t)_{t \geq 0}$ le processus de défaut défini par $N_t = 1_{\tau \leq t}$, $t \geq 0$.

Sans hypothèse supplémentaire sur τ , les \mathbb{F} -martingales ne sont plus des \mathbb{G} -semimartingales. Plusieurs hypothèses (temps honnêtes, hypothèse de densité, hypothèse (H) assurent cette propriété. Dans le cadre de la modélisation du risque de crédit, afin d'éviter les opportunités d'arbitrage, on considérera les hypothèses suivantes.

Hypothèse 1.1. *Hypothèse de densité : Il existe une fonction $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ -mesurable $\alpha_t : (\omega, \theta) \rightarrow \alpha_t(\omega, \theta)$ telle que*

$$\mathbf{P}(\tau \in d\theta | \mathcal{F}_t) := \alpha_t(\theta) d\theta, \mathbf{P} - ps.$$

Hypothèse 1.2. *Hypothèse H : Le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ reste un \mathbb{G} -mouvement brownien.*

Hypothèse 1.3. *Le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ admet un \mathbb{G} -compensateur de la forme $\int_0^{\cdot \wedge \tau} \lambda_t dt$, i.e. le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ défini par*

$$M_t = N_t - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_u du \quad (1.1)$$

est une \mathbb{G} -martingale, où λ est un processus positif borné \mathbb{F} -prévisible.

Remarque 1.4. Sous l'hypothèse de densité, l'Hypothèse (H) ou propriété d'immersion est équivalente à

$$\alpha_t(u) = \alpha_u(u), \quad \forall u \leq t.$$

De plus, l'Hypothèse 1.1 implique l'Hypothèse 1.3.

Soit (\mathcal{J}_t) une filtration arbitraire. On note par

- $\mathcal{H}^2(\mathcal{J}_t) = \{X_t \text{ processus } (\mathcal{J}_t)\text{-prévisibles, } \mathbf{E} \left(\int_0^T |X_t|^2 ds \right) < \infty\}$,
- $\mathcal{H}^\infty(\mathcal{J}_t) = \{X_t \text{ processus } (\mathcal{J}_t)\text{-prévisibles essentiellement bornés}\}$,
- $\mathcal{R}^p(\mathcal{J}_t) = \{X_t \text{ processus } (\mathcal{J}_t)\text{-optionnels, } \mathbf{E} \left(\sup_{s \in [0, T]} |X_s|^p \right) < \infty\}$,
- $\mathcal{R}^\infty(\mathcal{J}_t) = \{X_t \text{ processus } (\mathcal{J}_t)\text{-optionnels bornés}\}$,
- $\mathcal{S}^\infty(\mathcal{J}_t) = \{X_t \text{ processus } (\mathcal{J}_t)\text{-prévisibles, } \mathbf{E} \left(\int_0^{T \wedge \tau} |X_s|^2 \lambda_s ds \right) < \infty\}$.

1.1.1 Horizon aléatoire et générateur lipschitzien

Dans cette section, on suppose que τ vérifie l'Hypothèse 1.1 et donc l'Hypothèse 1.3. Dans ce contexte toute (\mathbb{F}, \mathbf{P}) -martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est une (\mathbb{G}, \mathbf{P}) semi-martingale. Soit $F_t = \mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) = \int_0^t \alpha_t(s) ds$ et le processus $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\bar{X}_t = X_t - \int_0^{t \wedge \tau} \frac{d \langle X, F \rangle_s}{1 - F_{s-}} - \int_{t \wedge \tau}^t \frac{d \langle X, \alpha(u) \rangle_s}{\alpha_{s-}(u)} \Big|_{u=\tau}, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

est une (\mathbb{G}, \mathbf{P}) -martingale ([38]). On note $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ le \mathbb{G} -mouvement brownien associé à W , défini par (1.2).

Soit $T > 0$ et $\xi \in L^2(\mathcal{G}_{T \wedge \tau})$. On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$Y_{t \wedge \tau} = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s d\bar{W}_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dM_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Cette équation intervient naturellement dans le cadre de la couverture d'actifs soumis au risque de défaut. En effet, les processus $(Z_t, U_t)_{t \geq 0}$ permettent la construction de l'unique

portefeuille de couverture lorsqu'on considère un marché composé d'un actif sans risque, d'un actif risqué dirigé par le mouvement brownien et d'un actif soumis au risque de défaut. Le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ représente la richesse associée à ce portefeuille.

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle stochastique rétrograde définie par (1.3) avec la condition que le générateur f est lipschitzien. Il repose sur le théorème de représentation des \mathbb{G} -martingales disponible sous l'hypothèse de densité.

Théorème 1.5. *Soit $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_{T \wedge \tau}, \mathbf{P})$ et $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be \mathbb{G} -mesurable, vérifiant $\mathbf{E} \left(\int_0^T |f(s, 0, 0, 0)|^2 ds \right) < \infty$ et*

$$|f(s, y, z, u) - f(s, y', z', u')| \leq K (|y - y'| + \|z - z'\|) + \lambda_s |u - u'|.$$

où K est une constante positive et λ est défini par (1.1). Il existe un unique triplet de processus $(Y_t, Z_t, U_t)_{0 \leq t \leq T}$ appartenant à $\mathcal{R}^\infty(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{S}^\infty(\mathcal{G}_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$Y_{t \wedge \tau} = \xi + \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} Z_s d\bar{W}_s - \int_{t \wedge \tau}^{T \wedge \tau} U_s dM_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ce résultat permet de retrouver la couverture d'un actif soumis au défaut obtenu précédemment dans [11].

1.1.2 Générateur quadratique

Lorsque l'on introduit des contraintes sur les investissements possibles, les problèmes d'optimisation de portefeuille se trouvent assez naturellement reliés à des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec un générateur quadratique. On suppose dans ce paragraphe que les Hypothèses 1.2 et 1.3 sont vérifiées. Plus précisément, nous considérons l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s dM_s + \int_t^T f(s, Z_s, U_s) ds \quad (1.4)$$

où ξ est une v.a \mathcal{G}_T -mesurable bornée et f un générateur vérifiant une condition de croissance quadratique en z de la forme suivante :

Hypothèse 1.6. *Le générateur f peut se décomposer en une somme*

$$f(s, z, u) = [l(s, z) + j(s, u)](1 - N_{s-}) + m(s, z)N_{s-},$$

où $l : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $m : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $j : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient :

- $l(\cdot, z)$, $m(\cdot, z)$ et $j(\cdot, u)$ sont prévisibles pour tous $z \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathbb{R}$ respectivement,
- $l(\cdot, 0)$, $m(\cdot, 0)$ and $j(\cdot, 0)$ sont bornés par $\Lambda \in \mathbb{R}_+$,
- il existe une constante $L \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tous z et $z' \in \mathbb{R}^d$

$$|l(s, z) - l(s, z')| + |m(s, z) - m(s, z')| \leq L(1 + |z| + |z'|)|z - z'|,$$

- $j \geq 0$, et j est Lipschitz sur $(-K, \infty)$ pour tout $K \in \mathbb{R}_+$, avec une constante de Lipschitz $L_j(K)$.

Parfois, nous supposons que le générateur f vérifie de plus l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.7. *Il existe une fonction continue croissante γ telle que pour tout $s \in [0, T]$ et $u, u' \in [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$|j(s, u) - j(s, u')| \leq \gamma(n) \sqrt{\lambda_s} |u - u'|,$$

où λ est défini par (1.1)

Comme ξ est une v.a \mathcal{G}_T -mesurable bornée, elle s'écrit sous la forme suivante

$$\xi = \xi^0 1_{\{T < \tau\}} + \xi^1(\tau) 1_{\{\tau \leq T\}},$$

où ξ^0 est une v.a \mathcal{F}_T -mesurable bornée et ξ^1 est un processus $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(R^+)$ -mesurable borné.

Afin d'obtenir un résultat d'existence de solutions pour l'équation différentielle stochastique rétrograde (1.4), on commence par montrer des estimations a priori sur les solutions. Le contrôle de la norme BMO de la martingale $\int_0^\cdot Z_s dW_s$ et le fait que le processus $(U_t)_{0 \leq t \leq T}$ est borné permet d'obtenir :

Théorème 1.8. *Soit ξ^1 et ξ^2 deux variables aléatoires bornées \mathcal{G}_T -mesurable, f^1 et f^2 deux générateurs vérifiant les Hypothèses 1.6 et 1.7, et soit $(Y_t^i, Z_t^i, U_t^i)_{0 \leq t \leq T}$ appartenant à $\mathcal{R}^\infty(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^\infty(\mathcal{G}_t)$ solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades*

$$Y_t^i = \xi^i - \int_t^T Z_s^i dW_s - \int_t^T U_s^i dM_s + \int_t^T f^i(s, Z_s^i, U_s^i) ds.$$

On pose $\delta\xi = \xi^1 - \xi^2$, $\delta f_s = f^1(s, Z_s^1, U_s^1) - f^2(s, Z_s^1, U_s^1)$, $\delta Y = Y^1 - Y^2$, $\delta Z = Z^1 - Z^2$ et $\delta U = U^1 - U^2$. Il existe des constantes $q \geq 1$ et $C \in \mathbb{R}_+$, dépendant seulement de T , Λ , L , $\|k\|_\infty$, $\|\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^1|\|_\infty$, $\|\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^2|\|_\infty$ et des fonctions L_j et γ , tels que

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |\delta Y_t|^2 + \left(\int_0^T (|\delta Z_s|^2 + |\delta U_s|^2 (1 - D_{s-}) \frac{\lambda_s}{2}) ds \right) \right] \leq C \left(E \left[|\delta \xi|^{2q} + \left(\int_0^T |\delta f_s| ds \right)^{2q} \right] \right)^{\frac{1}{q}}.$$

A l'aide des résultats techniques préliminaires, nous pouvons montrer l'existence de solutions pour (1.4)

Théorème 1.9. (Existence) *Soit ξ^0 une v.a \mathcal{F}_T -mesurable bornée et $(\xi^1(t))_{0 \leq t \leq T}$ un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible borné, tel que $t \mapsto \xi^1(t)$ est presque sûrement continu à droite sur $[0, T]$. Soit f vérifiant les Hypothèses 1.6 et 1.7. Alors il existe une solution $(Y_t, Z_t, U_t)_{0 \leq t \leq T}$ appartenant à $\mathcal{R}^\infty(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^\infty(\mathcal{G}_t)$ à l'équation différentielle stochastique rétrograde*

$$Y_t = \xi_{\{\tau > T\}}^0 + \xi^1(\tau) 1_{\{\tau \leq T\}} - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s dM_s + \int_t^T f(s, Z_s, U_s) ds.$$

On construit explicitement une solution à partir des solutions de deux équations différentielles stochastiques rétrogrades auxiliaires. En effet, nous considérons deux équations différentielles quadratiques dirigées par le mouvement brownien de conditions terminales ξ^0 et ξ^1 . L'existence de solutions de ces équations auxiliaires résultent des travaux de Kobylanski [54]. Le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ est quant à lui défini pour compenser exactement le saut dans la solution à l'instant τ . Enfin le Théorème 1.8 permet d'obtenir le théorème suivant sur l'unicité des solutions.

Théorème 1.10. *Soit ξ une v.a \mathcal{G}_T -mesurable bornée et f un générateur vérifiant 1.6 et 1.7, alors l'équation différentielle stochastique rétrograde (1.4) a une unique solution dans $\mathcal{R}^\infty(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_t) \times \mathcal{S}^\infty(\mathcal{G}_t)$.*

On peut noter que sous les Hypothèses 1.6 et 1.7, le générateur f ne dépend pas de y . Par la suite, T. Lim et I. Kharroubi [52] ont affaibli ces conditions en considérant entre autre des générateurs dépendant de y en montrant que dès que les équations différentielles auxiliaires écrites dans la filtration brownienne admettaient des solutions, on pouvait construire une solution pour l'équation différentielle (1.4). Ils ont de plus étendu ces résultats au cas de défauts multiples. Récemment, Crépey et Song [23] ont considéré des équations différentielles stochastiques avec un horizon aléatoire τ vérifiant une hypothèse plus faible que l'Hypothèse 1.2. Le temps aléatoire est un temps invariant au sens de Crépey et Song[22]. La condition terminale peut aussi dépendre de la solution à l'instant $\tau-$.

1.2 Utilité espérée et investissement optimal

Nous allons utiliser le résultat précédent pour résoudre un problème d'investissement optimal en présence de contraintes. Nous déterminons aussi un prix d'indifférence pour un actif soumis au risque de crédit. Pour cela nous commençons par décrire le modèle financier considéré. On suppose encore que les Hypothèses 1.2 et 1.3 sont vérifiées.

1.2.1 Modèle financier

Le marché financier est composé d'un actif risqué, d'un actif non-risqué (utilisé comme numéraire) et d'un bond soumis au défaut. Le prix de l'actif risqué actualisé évolue suivant l'équation suivante

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t),$$

où μ et σ sont des processus \mathbb{F} -prévisibles bornés et σ est borné inférieurement par $\underline{\sigma} > 0$. La prime de risque, donnée par

$$\theta_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t},$$

est bornée. Le prix du bond soumis au défaut ρ_t est

$$d\rho_t = \rho_{t-}(a_t dt + c_t dW_t - dM_t) \tag{1.5}$$

où $(a_t, c_t)_{t \geq 0}$ sont des processus mesurables.

Un processus d'investissement est un processus \mathbb{G} -prévisible (ν, ν^ρ) , où ν est à valeurs dans \mathbb{R} (ou un sous-ensemble) tel que le processus $\int_0^t \nu_r \frac{dS_r}{S_r}$ est défini, et ν^ρ à valeurs dans \mathbb{R} (ou un sous-ensemble) tel que $\int_0^t \nu^\rho \frac{d\rho_t}{\rho_{t-}}$ est défini.

Définition 1.11. *Soit $p_t = \nu_t \sigma_t$ et $q_t = \nu^\rho \rho_{t-}$. On appelle stratégie le couple (p, q) . Le gain total à l'instant t pour une stratégie (p, q) est*

$$G_t^{p,q} = \int_0^t (p_s \theta_s + q_s a_s) ds + \int_0^t (p_s + q_s c_s) dW_s - \int_0^t q_s dM_s.$$

Soit \mathcal{A}_1 l'ensemble des stratégies admissibles (p, q) , vérifiant

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T |p_s|^2 + |q_s|^2 ds \right) < \infty.$$

Soit un investisseur dont les préférences sont décrites par U , la fonction d'utilité exponentielle de coefficient d'aversion au risque $\eta > 0$. On suppose que des contraintes d'investissement sont imposées à l'agent, de sorte qu'à tout instant, toute stratégie (p_t, q_t) appartient à l'ensemble $C_t = C_t^1 \times C_t^2 \subset \mathbb{R}\sigma_t \times \mathbb{R}\rho_{t-}$. vérifiant $(0, 0) \in C_t^1 \times C_t^2$ pour tout t , et

$$C_t^1 \text{ est fermé, } \quad C_t^2 \text{ est borné.}$$

Si l'agent possède la position soumise au défaut F dans son portefeuille, alors son utilité maximale espérée est donnée par

$$V^F(v) = \sup \left\{ \mathbf{E} (U(v + G_T^{p,q} + F)) : (p, q) \in \mathcal{A}_1, (p_s, q_s) \in C_s^1 \times C_s^2 \text{ for all } s \in [0, T] \right\}. \quad (1.6)$$

Théorème 1.12. Soit $F = F^0 1_{\{\tau > T\}} + F^1(\tau) 1_{\{\tau \leq T\}}$ où F^0 est une v.a \mathcal{F}_T -mesurable bornée et F^1 est un processus (\mathcal{F}_t) -prévisible borné. Soit

$$h(s, p, q, z, u) = -p\theta_s - qa_s + \frac{1}{2}\eta|p + qc_s - z|^2 + \frac{1}{\eta}(1 - D_{s-})k_s [e^{\eta(u+q)} - 1 - \eta(u+q)],$$

$$f(s, z, u) = \min_{(p,q) \in C_s} h(s, p, q, z, u), \quad (1.7)$$

et $(Y_t, Z_t, U_t)_{0 \leq t \leq T}$ solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (1.4) avec le générateur défini par (1.7) et F .

Supposons que le générateur défini par (1.7) vérifie les Hypothèses 1.6 et 1.7. Alors

$$V^F(v) = U(v - Y_0),$$

et tout processus prévisible (\hat{p}, \hat{q}) vérifiant $\mathbf{P} \otimes \lambda$ -ps.

$$h(s, \hat{p}_s, \hat{q}_s, Z_s, U_s) = \min_{(p,q) \in C_s} h(s, p, q, Z_s, U_s).$$

est une stratégie optimale.

1.2.2 Prix d'indifférence pour le risque de crédit

Supposons que le bond soumis au défaut ne soit pas négociable, ainsi l'ensemble de contraintes est de la forme $C_t = C_t^1 \times \{0\}$.

Soit ξ une v.a \mathcal{F}_T -mesurable bornée représentant la valeur d'une position si aucun défaut ne se produit. Le prix d'indifférence de risque de crédit est le montant c tel que un investisseur est indifférent à détenir un actif ξ non soumis au défaut, ou détenir un actif soumis au défaut $\xi 1_{\{\tau > T\}}$ et recevoir une compensation c à l'instant 0. En notant $V^\xi(v)$ et $V^{\xi 1_{\{\tau > T\}}}(v)$ l'utilité maximale espérée avec une richesse initiale v , et de payoff ξ et $\xi 1_{\{\tau > T\}}$ respectivement, alors le prix d'indifférence c est défini comme l'unique réel vérifiant

$$V^\xi(0) = V^{\xi 1_{\{\tau > T\}}}(c).$$

En appliquant le Théorème 1.12, on a que $V^\xi(0) = U(-\tilde{Y}_0)$, (resp $V^{\xi 1_{\{\tau > T\}}}(c) = U(c - Y_0)$), où (\tilde{Y}, \tilde{Z}) , (resp. (Y, Z, U)), est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde associée au problème d'optimisation. Ainsi, on obtient le résultat suivant

Proposition 1.13. *Prix d'indifférence pour le risque de crédit vérifie*

$$c = \bar{Y}_0,$$

où $(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$\bar{Y}_t = \xi 1_{\{\tau \leq T\}} - \int_t^T \bar{Z}_s d\widehat{W}_s - \int_t^T \bar{U}_s dM_s + \int_t^T h(s, \bar{Z}_s, \bar{U}_s) ds,$$

avec le générateur $h(t, z, u) = -\theta_t z + \frac{1}{\eta}(1 - N_{t-})\lambda_t[e^{\eta u} - 1 - \eta u]$ et $\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t \delta_s ds$, où δ est le processus prévisible défini par

$$\delta_s = \frac{\text{dist}^2(Z_s + \frac{1}{\eta}\theta_s, C_s^1) - \text{dist}^2(\widehat{Z}_s + \frac{1}{\eta}\theta_s, C_s^1)}{Z_s - \widehat{Z}_s}.$$

De plus, on peut calculer une borne inférieure pour le prix d'indifférence c .

Corollaire 1.14. *Soit Q la probabilité définie par*

$$\frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \theta_s d\widehat{W}_s\right)_T \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \delta_s dW_s\right)_T.$$

Alors le prix d'indifférence c est minoré par $E^Q[\xi 1_{\{\tau \leq T\}}]$. De plus, si le coefficient d'aversion au risque η tend vers zéro, c converge vers $E^Q[\xi 1_{\{\tau \leq T\}}]$.

1.3 Prime d'indifférence pour des contrats variable annuités

En assurance vie, de nombreux contrats dépendent de l'instant de mort de l'assuré. Parmi ceux-ci, les variable annuités ont connu ces dernières années un fort développement. Cependant, ces contrats sont complexes avec de nombreuses clauses possibles de retraits par l'assuré, ce qui rend difficile leur évaluation. Nous proposons une méthode d'évaluation basée sur le prix d'indifférence en considérant la pire stratégie de retraits du point de vue de l'assureur. Ceci correspond à une évaluation prudente du risque.

1.3.1 Marché financier et variable annuités

Nous commençons par décrire le modèle financier et les caractéristiques d'un contrat de variable annuités. Le marché financier sur lequel l'assureur peut investir est composé de deux actifs. Le premier est un bond sans risque \hat{S}^0 et le second \hat{S} est un portefeuille de référence d'actifs risqués servant de sous-jacent à la police de variable annuités. Les processus \hat{S}^0 et \hat{S} vérifient les équations

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t^0 &= r_t \hat{S}_t^0 dt, \quad \forall t \in [0, T], \quad \hat{S}_0^0 = 1, \\ d\hat{S}_t &= \hat{S}_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad t \geq 0, \quad \hat{S}_0 = s \geq 0, \end{aligned}$$

où r , μ et σ sont des processus \mathbb{F} -prévisibles, bornés et σ est borné inférieurement par $\underline{\sigma} > 0$.

On note S la valeur actualisée de \hat{S} et θ la prime de risque de \hat{S}

$$S_t := e^{-\int_0^t r_s ds} \hat{S}_t \quad \text{et} \quad \theta_t := \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t},$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Soient ν_1 et ν_2 deux \mathbb{G} -temps d'arrêt tels que $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq T$. Un processus \mathbb{G} -prévisible $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une stratégie d'investissement admissible si la stratégie est autofinancée, si

$$\mathbf{E} \left(\int_{\nu_1}^{\nu_2} |\pi_t|^2 dt \right) < +\infty,$$

et si la famille $\{ \exp(-\eta X_\nu^\pi), \nu \text{ un temps d'arrêt tel que } \nu_1 \leq \nu \leq \nu_2 \}$ est uniformément intégrable où X_t^π est la valeur actualisée du portefeuille de richesse initiale 0 et de stratégie π . On note $\mathcal{A}_2[\nu_1, \nu_2]$ l'ensemble des stratégies admissibles sur $[\nu_1, \nu_2]$.

Les préférences de l'assureur sont de nouveau données par la fonction d'utilité exponentielle U de paramètre $\eta > 0$. Les contrats de type variable annuités sont complexes et peuvent posséder de nombreuses garanties. Nous décrivons brièvement un contrat de variable annuités assez classique.

Investissement initial. L'assuré investit un capital initial noté A_0 , dans un fonds relié au contrat à l'instant $t = 0$.

Retraits. Soit $\mathbb{T} := (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ l'ensemble des dates anniversaires du contrat, avec $t_0 = 0$ et $t_n = T$.

A tout instant t_i , pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, l'assuré, s'il est toujours en vie, peut retirer un montant d'argent qui est plus petit qu'une v.a positive \mathcal{G}_{t_i} -mesurable \hat{G}_i , dépendant des retraits précédents, de la valeur précédente du fonds et des garanties du contrat.

Soit $\hat{\mathcal{W}}$ un sous-ensemble fini de $[0, 1]$ contenant 0 et 1, l'ensemble des politiques de retrait admissible est

$$\hat{\mathcal{E}} = \left\{ (\alpha_i \hat{G}_i)_{1 \leq i \leq n-1} : \alpha_i \text{ est une v.a. } \mathcal{G}_{t_i}\text{-mesurable telle que} \right. \\ \left. \alpha_i \in \hat{\mathcal{W}} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Pour $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{E}}$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\hat{\xi}_i$ est le retrait effectué par l'assuré à l'instant t_i et on note $\xi_i := e^{-\int_0^{t_i} r_s ds} \hat{\xi}_i$ le retrait actualisé effectué à l'instant t_i . Nous définissons \mathcal{E} l'ensemble des politiques de retraits actualisés admissibles avec $\xi \in \mathcal{E}$ si et seulement si $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{E}}$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$ et $i \in \{1, \dots, n-k-1\}$, l'ensemble \mathcal{E}_k^i défini par

$$\mathcal{E}_k^i = \left\{ \xi \in \mathcal{E} \text{ t.q. } \xi_j = 0 \text{ pour tout } j \notin \{k+1, \dots, k+i\} \right\}.$$

\mathcal{E}_k^i est l'ensemble des politiques de retraits actualisés admissibles telles que tous les retraits sont effectués entre les instants t_{k+1} et t_{k+i} .

Dynamique du fonds relié au contrat. Soit A_t^p la valeur actualisée au temps t du fonds relié au contrat vendu avec une prime de taux p . Si l'assuré effectue les retraits $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{E}}$, on a

$$\begin{cases} dA_t^p &= A_t^p [(\mu_t - r_t - p)dt + \sigma_t dB_t], & \text{pour } t \notin \mathbb{T}, \\ A_{t_i}^p &= (A_{t_i^-}^p - f_i) \vee 0, & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

f_i est une v.a \mathcal{G}_{t_i} -mesurable supérieure ou égale à ξ_i pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et dépendant des retraits précédents, de la valeur précédente du fonds et des garanties du contrat. Le cas le plus simple est d'avoir $f_i = \xi_i$ mais les contrats peuvent être beaucoup plus complexes.

Payoff du contrat. Le payoff est croissant par rapport à la valeur du fond et décroissant par rapport aux retraits. Soient \hat{F}^L et \hat{F}^D vérifiant ces propriétés, le payoff est payé à l'instant $T \wedge \tau$ à l'assuré ou ses bénéficiaires, et est égal à

$$\hat{F}(p, \hat{\xi}) := \hat{F}^L(T, \hat{a}^p, \hat{\xi}) \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} + \hat{F}^D(\tau, \hat{a}^p, \hat{\xi}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}},$$

où $\hat{a}^p := (\hat{A}_{t_i \wedge \tau}^p)_{0 \leq i \leq n}$. \hat{F}^L est le payoff si l'assuré est toujours en vie à l'instant T et \hat{F}^D est le payoff si l'assuré décède à l'instant τ . Dans la suite, on note $F(p, \hat{\xi})$ le payoff actualisé.

1.3.2 Maximisation d'utilité et prime d'indifférence

Comme le marché financier est incomplet, nous avons utilisé l'approche de prix d'indifférence pour déterminer le taux de prime. Nous cherchons la prime p^* , si elle existe, telle que

- l'assureur à intérêt à vendre le contrat si la prime est supérieur à p^* ,
- il a intérêt à ne pas vendre si la est inférieur à p^* .

La prime optimale p^* est le plus petit p tel que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]} \mathbf{E}(U(X_T^\pi)) \leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]} \inf_{\xi \in \mathcal{E}} \mathbf{E} \left(U \left(A_0 + X_T^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{t_i \leq \tau} - F(p, \hat{\xi}) \right) \right). \quad (1.8)$$

Une solution de (1.8) est appelée prime d'indifférence. On peut remarquer que, comme la fonction d'utilité est exponentielle, la prime d'indifférence ne dépend pas de la richesse initiale de l'assureur qui est investie mais seulement du dépôt initial A_0 réalisé par l'assuré. C'est pourquoi, nous considérons toujours une richesse initiale égale à zéro pour l'assureur. On note $V^0 = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]} \mathbf{E}(U(X_T^\pi))$ et

$$V(p) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]} \inf_{\xi \in \mathcal{E}} \mathbf{E} \left(U \left(A_0 + X_T^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{t_i \leq \tau} - F(p, \hat{\xi}) \right) \right).$$

Une des difficultés de cette approche est que la prime est payée continûment par l'assuré et qu'elle apparaît dans le payoff $F(p, \hat{\xi})$. Ainsi, on ne peut utiliser les propriétés algébriques de la fonction d'utilité pour obtenir une expression semi-explicite de la prime d'indifférence. Cependant, nous obtenons des résultats de monotonie de la fonction valeur V qui permettent de prouver l'existence ou non d'une prime d'indifférence, et de la calculer numériquement.

Proposition 1.15. *La fonction valeur V est croissante sur \mathbb{R} .*

Ainsi,

- si $V(-\infty) < V^0 < V(+\infty)$, alors il existe p^* tel que si $p < p^*$, l'assureur n'a pas intérêt à vendre le contrat, et si $p \geq p^*$ l'assureur a intérêt à vendre le contrat.
- si $V(-\infty) > V^0$, l'assureur vendra toujours à vendre le contrat.
- si $V(+\infty) < V^0$, l'assureur ne vendra jamais le contrat.

Le comportement asymptotique de V est étudié dans [B9] pour des garanties usuelles.

1.3.3 Problème d'optimisation Min-Max

La résolution du problème d'optimisation (1.8) n'est pas classique. En effet,

- la richesse terminale est \mathcal{G}_T -mesurable et le payoff est $\mathcal{G}_{T \wedge \tau}$ -mesurable,
- il y a une maximisation par rapport aux retraits ξ et une minimisation par rapport à la stratégie d'investissement π .

L'idée est de résoudre ce problème de manière séquentielle.

Notations : Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leq k \leq n$, $x^{(k)}$ est le vecteur de \mathbb{R}^k défini par

$$x^{(k)} := (x_1, \dots, x_k),$$

et pour $y \in \mathbb{R}^k$, \hat{y} le vecteur

$$\hat{y} := (y_1 e^{\int_0^{t_1} r_s ds}, \dots, y_k e^{\int_0^{t_k} r_s ds}).$$

Enfin on note

$$w(p) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]} \sup_{\xi \in \mathcal{E}} \mathbf{E} \left(u \left(X_T^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i 1_{t_i \leq \tau} - F(p, \hat{\xi}) \right) \right)$$

où $u(y) = e^{-\eta y}$. On a que $V(p) = -e^{-\eta A_0} w(p)$.

Maximisation d'utilité séquentielle

On commence par modifier le problème pour obtenir une richesse terminale $\mathcal{G}_{T \wedge \tau}$ -mesurable et un payoff $\mathcal{G}_{T \wedge \tau}$ -mesurable.

Soit ν un temps d'arrêt et $\pi \in \mathcal{A}_2[0, T]$ une stratégie d'investissement, on note par $(X_t^{\nu, \pi})_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$X_t^{\nu, \pi} = \int_{\nu}^{t \wedge \nu} \pi_s (\mu_s - r_s) ds + \int_{\nu}^{t \wedge \nu} \pi_s \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

$X_t^{\nu, \pi}$ correspond à la richesse à l'instant t pour une stratégie π commençant à l'instant ν avec une richesse 0.

Proposition 1.16 (Initialization). *Pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a*

$$w(p) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, T \wedge \tau]} \sup_{\xi \in \mathcal{E}} \mathbf{E} \left(u \left(X_{T \wedge \tau}^\pi - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i 1_{t_i \leq \tau} - H(p, \hat{\xi}) \right) \right),$$

où

$$H(p, \hat{\xi}) := F(p, \hat{\xi}) + \frac{1}{\gamma} \log \left[\operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}[T \wedge \tau, T]} \mathbf{E} [u(X_T^{T \wedge \tau, \pi}) | \mathcal{G}_{T \wedge \tau}] \right],$$

et $X_T^{T \wedge \tau, \pi}$ est donné par (1.9).

En effet, après le décès de l'assuré le contrat continue à exister jusqu'en T mais il n'y a plus de retrait possible. Entre $T \wedge \tau$ et T , l'assureur a donc à maximiser son utilité sans faire face à des retraits ou au décès de l'assuré. Ainsi, nous commençons par résoudre ce problème classique.

La proposition précédente nous permet de considérer un problème de maturité $T \wedge \tau$ avec un payoff modifié, noté H . Ensuite, nous décomposons ce nouveau problème en n sous-problèmes.

Théorème 1.17. *La fonction valeur w est donnée par*

$$w(p) = \inf_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, t_1 \wedge \tau]} \mathbf{E} \left(u \left(X_{t_1 \wedge \tau}^\pi \right) v(1) \right),$$

où

– $v(i, \xi^{(i-1)})$ est définie récursivement pour tous $i \in \{2, \dots, n\}$ et $\xi \in \mathcal{E}$ par

$$\begin{cases} v(n, \xi^{(n-1)}) & := e^{\gamma H(p, \xi^{(n-1)})}, \\ v(i, \xi^{(i-1)}) & := \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathcal{E}_{i-1}^1} \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_2[t_i \wedge \tau, t_{i+1} \wedge \tau]} J(i, \pi, \xi^{(i-1)}, \zeta), \end{cases}$$

avec pour tous $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\pi \in \mathcal{A}_2[t_i \wedge \tau, t_{i+1} \wedge \tau]$ et $\zeta \in \mathcal{E}_{i-1}^1$

$$J(i, \pi, \xi^{(i-1)}, \zeta) := \mathbf{E} \left(u \left(X_{t_{i+1} \wedge \tau}^{t_i \wedge \tau, \pi} - \zeta \mathbf{1}_{t_i < \tau} \right) v(i+1, (\xi^{(i-1)}, \zeta)) \middle| \mathcal{G}_{t_i \wedge \tau} \right),$$

$$- v(1) := \operatorname{ess\,sup}_{\zeta \in \mathcal{E}_0^1} \operatorname{ess\,inf}_{\pi \in \mathcal{A}_2[t_1 \wedge \tau, t_2 \wedge \tau]} \mathbf{E} \left(u \left(X_{t_2 \wedge \tau}^{t_1 \wedge \tau, \pi} - \zeta \mathbf{1}_{t_1 < \tau} \right) v(2, \zeta) \middle| \mathcal{G}_{t_1 \wedge \tau} \right).$$

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes. Pour chaque étape, on utilise une méthode inductive de type forward pour la première étape et de type backward pour la seconde. La première étape consiste à montrer que

$$w(p) \geq \inf_{\pi \in \mathcal{A}_2[0, t_1 \wedge \tau]} \mathbf{E} \left(u \left(X_{t_1 \wedge \tau}^\pi \right) v(1) \right).$$

en réalisant une induction croissante sur le nombre de dates anniversaires. La seconde étape consiste à montrer l'inégalité inverse par une induction décroissante.

Investissement optimal et pire politique de retraits pour l'assureur

Le résultat suivant montre qu'il existe un retrait ξ_i^* et une stratégie d'investissement $\pi^{*,i}$ qui permettent d'atteindre les fonctions $v(i, \cdot)$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$. D'après le Théorème 1.17, cela correspond à la stratégie d'investissement optimale et à la pire politique de retraits pour l'assureur. Par un raisonnement par récurrence descendante en deux étapes on montre

Proposition 1.18. *Quel que soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe une stratégie $\pi^{*,i} \in \mathcal{A}_2[t_i \wedge \tau, t_{i+1} \wedge \tau]$, un retrait $\xi_i^* \in \mathcal{E}_{i-1}^1$, et une fonction $y^{(i),*}$ de $\hat{\mathcal{W}}^{i-1}$ dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{G}_{t_i \wedge \tau}, \mathbf{P})$ tels que*

$$\begin{aligned} v(i, \xi^{(i-1)}) &= \mathbf{E} \left(u \left(X_{t_{i+1} \wedge \tau}^{t_i \wedge \tau, \pi^{*,i}} - \xi_i^* \mathbf{1}_{t_i < \tau} \right) v(i+1, (\xi^{(i-1)}, \xi_i^*)) \middle| \mathcal{G}_{t_i \wedge \tau} \right) \\ &= \exp \left(\eta y^{(i),*}(\hat{\xi}^{(i-1)}) \right). \end{aligned}$$

De plus il existe $y^{(0)}$ tel que la fonction valeur v du problème initial (1.8) est donnée par

$$w(p) = \exp(\eta y^{(0)}) .$$

A chaque étape de la récurrence, on obtient la stratégie optimale $\pi^{*,i}$ à l'aide de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde, puis la stratégie de retraits ξ_i^* en utilisant que l'ensemble des retraits possibles est fini.

1.3.4 Résolution numérique

Les résultats précédents permettent de mettre en place une méthode numérique itérative pour calculer $V(p)$. Nous présentons maintenant quelques illustrations numériques de la sensibilité de la prime d'indifférence aux paramètres. Pour cela nous calculons la solution des deux problèmes d'optimisation : V^0 , le problème d'optimisation sans contrat de variable annuités, et $V(p)$, le problème d'optimisation avec un contrat de variable annuités. Nous utilisons la méthode décrite dans [52, B6] pour décomposer les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec saut en un système récursif de deux équations différentielles stochastiques rétrogrades browniennes. On utilise le schéma de discrétisation étudié dans [13] pour simuler ces équations différentielles stochastiques rétrogrades browniennes. Les espérances conditionnelles sont évaluées en utilisant une méthode de régression paramétrique sur une base polynomiale. On trouve p^* tel que

$$p^* = \inf\{p \in \mathbb{R}, V^0 \leq V(p)\} .$$

par une méthode de dichotomie.

Par simplicité, on suppose que l'assuré ne peut retirer que tous les dix ans et les paramètres ont les valeurs suivantes.

$$\gamma = 1.3, T = 30, A_0 = 1, r = 0.01, \mu = 0.04, \sigma = 0.1 .$$

La Figure 1.1 montre la dépendance de la prime d'indifférence par rapport à certains paramètres : le drift, la volatilité, le taux d'intérêt et la valeur initiale du dépôt A_0 .

Dans la Figure 1.1(a), on constate que la prime d'indifférence est décroissante par rapport au drift jusqu'à une certaine valeur. En effet, plus le drift est élevé, moins les garanties du contrat sont intéressantes pour l'assuré. Lorsque μ est très grand, la prime augmente car vendre un contrat oblige l'assureur à se couvrir contre les variations du taux d'intérêt. De même, la monotonie de la prime par rapport à la volatilité observée dans la Figure 1.1(b) s'interprète par le fait que si la volatilité augmente, les garanties deviennent plus intéressantes pour couvrir ce risque.

La sensibilité au taux d'intérêt est plus complexe comme le montre la Figure 1.1(c). La prime est croissante lorsque la valeur absolue de la différence entre le drift et le taux d'intérêt augmente. D'un côté, si r est inférieur à μ , lorsqu'il augmente, l'actualisation rend les paiements futurs moindres et donc la prime baisse. D'un autre côté, quand r est supérieur au drift, un agent avec une utilité exponentielle ne devrait pas s'exposer à la volatilité du marché. Donc il doit recevoir une plus grande compensation pour cela. Si l'assureur vend un contrat, il doit se couvrir contre la volatilité et avoir une position non-nulle dans les actifs risqués. Le prix du contrat sera donc plus cher si le taux d'intérêt est supérieur à μ et augmente.

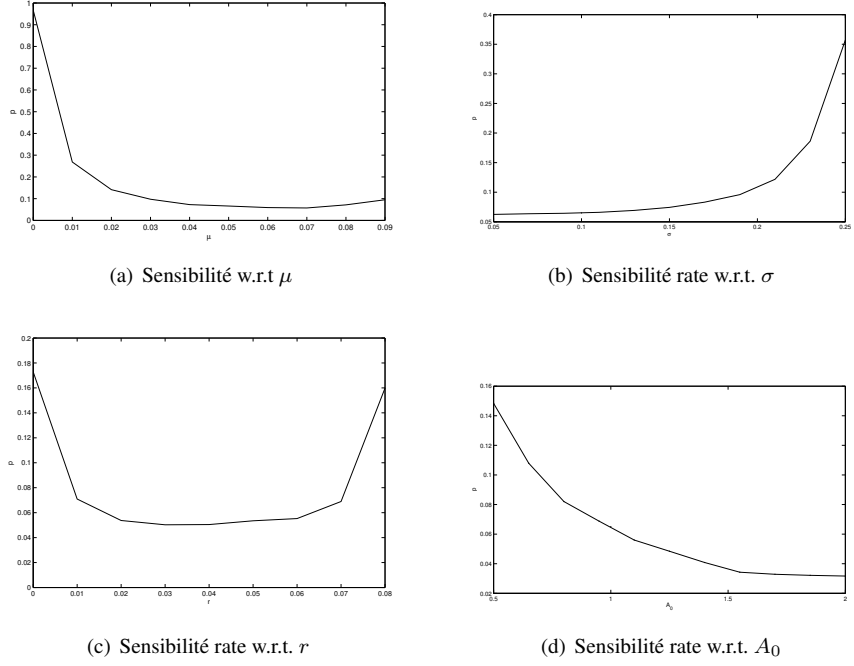


FIGURE 1.1 – Prime d’indifférence par rapport à resp. μ , σ , r , A_0

Comme la prime est proportionnelle, plus l’assuré investit au début, plus l’assureur gagnera. Ainsi, la prime d’indifférence est décroissante en fonction du capital initial A_0 investi (cf Figure 1.1(d)).

1.4 Grossissements initiaux successifs

Dans les sections précédentes, nous avons considéré que l’information disponible pour l’agent était modélisée par une filtration élargie progressivement. Nous considérons ici un agent initié dont l’information supplémentaire est révélée au cours du temps aux instants $\{t_i, i = 1, \dots, n\}$ tels que $0 = t_1 < \dots < t_n < T$. Par convention $t_{n+1} = T$. La filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ représente dans cette section l’information commune sur le marché financier où T l’horizon de temps est fini. L’information de l’initié est décrite par une famille de variables aléatoires $\{L^i, i = 1, \dots, n\}$, \mathcal{F} -mesurables et à valeurs dans un espace polonais E . On note \mathcal{E} la tribu borélienne associée E . L’initié reçoit l’information L^i à l’instant t_i , ainsi l’information de l’initié est décrite par la filtration $\mathbb{G}^I = (\mathcal{G}_t^I)_{t \geq 0}$ où

$$\mathcal{G}_t^I := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L^1) \vee \dots \vee \sigma(L^i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

La théorie du grossissement de filtration permet d’interpréter cette information de deux manières différentes mais équivalentes. D’une part, pour tout $t \in [0, T]$, on définit le processus d’information supplémentaire par

$$L_t = \sum_{i=1}^n L^i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \tag{1.10}$$

alors $\mathcal{G}_t^I = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t)$. La filtration \mathbb{G}^I est la filtration \mathbb{F} grossie progressivement par le processus L . D'autre part, on peut définir la famille de filtrations $\mathbb{G}^i = (\mathcal{G}_t^i)_{t \geq 0}$, pour tout $i = 1, \dots, n$, où

$$\mathcal{G}_t^i := \mathcal{F}_t \vee \sigma(L^1) \vee \dots \vee \sigma(L^i), \quad t \in [0, T].$$

Par définition, on a $\mathcal{G}_t^I = \mathcal{G}_t^i$ pour $t \in [t_i, t_{i+1})$ et $\mathcal{G}_t^i = \mathcal{G}_t^{i-1} \vee \sigma(L^i)$, avec la convention $\mathcal{G}_t^0 = \mathcal{F}_t$. Chaque filtration \mathbb{G}^i est la filtration \mathbb{G}^{i-1} élargie initialement par la variable aléatoire L^i . On construit ainsi une famille croissante de filtrations obtenues par des grossissements initiaux successifs.

On note \mathbf{L} le vecteur aléatoire (L^1, \dots, L^n) et pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{L}^{(i)} := (L^1, \dots, L^i)$. De même, \mathbf{x} représente le vecteur (x^1, \dots, x^n) de E^n , et $\mathbf{x}^{(i)} := (x^1, \dots, x^i)$. Pour tout $t \in [0, T]$, on remarque que la tribu \mathcal{G}_t^i est engendrée par \mathcal{F}_t et $\sigma(\mathbf{L}^{(i)})$. Par conséquent, tout processus \mathbb{G}^i -adapté peut s'écrire $(Y_t(\mathbf{L}^{(i)}), 0 \leq t \leq T)$ où $Y_t(\cdot)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{E}^{\otimes i}$ -mesurable (c.f. Jeulin [41, Lemme 3.13]).

1.4.1 Hypothèse de densité

Dans la théorie du grossissement, la loi conditionnelle de L^i par rapport aux différentes filtrations joue un rôle important dans l'étude des propriétés dynamiques de \mathbb{G}^I . Nous introduisons l'hypothèse de densité successive :

Hypothèse 1.19. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi conditionnelle de L^i par rapport à \mathcal{G}_T^{i-1} est équivalente à sa loi conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_{t_i}^{i-1}$ sous la probabilité \mathbf{P} , i.e il existe une fonction positive $\mathcal{G}_T^{i-1} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable $\alpha_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, \cdot)$ telle que*

$$\mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_T^{i-1}) = \alpha_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x) \mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_{t_i}^{i-1}).$$

Cette hypothèse de densité est légèrement différente de l'hypothèse de Jacod [37] introduite pour un grossissement initial. Elle permet d'une part, de prendre en compte l'information de l'initié de manière progressive à chaque instant. D'autre part, la loi conditionnelle $\mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_{t_i}^{i-1})$ étant aléatoire, il apparaît difficile d'appliquer la méthode de Jacod [37, Lemme 1.8] pour prouver l'existence d'une version martingale du processus de densité. Nous avons choisi de travailler avec un horizon T à la place de tout t pour contourner cette difficulté. De fait, l'Hypothèse 1.19 implique que pour $t \in [t_i, T]$, la loi \mathcal{G}_t^{i-1} -conditionnelle de L^i sous \mathbf{P} est équivalente à la loi $\mathcal{G}_{t_i}^{i-1}$ -conditionnelle de L^i . Cette hypothèse permet de montrer la continuité à droite de la filtration \mathbb{G}^i sur $[t_i, T]$ et donc la continuité à droite de la filtration \mathbb{G}^I (La démonstration suit celle proposée par Amendinger dans [3]). En particulier, toutes les espérances conditionnelles seront prises par rapport à des filtrations continues à droite.

Nous introduisons maintenant deux familles de probabilités équivalentes qui permettront par la suite de calculer les espérances conditionnelles par rapport à la filtration \mathbb{G}^I .

Définition 1.20. *Soit $\mathbf{P}^0 := \mathbf{P}$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit \mathbf{P}^i la probabilité définie sur (Ω, \mathcal{F}) par*

$$\frac{d\mathbf{P}^i}{d\mathbf{P}^{i-1}} = \frac{1}{\alpha_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i)})}.$$

Pour tout $\mathbf{x}^{(i)} \in E^i$, on pose

$$\psi_t^i(\mathbf{x}^{(i)}) := \prod_{k=1}^i \frac{1}{\alpha_t^{k|k-1}(\mathbf{x}^{(k)})}, \quad t \in [t_i, T] \text{ ps.}$$

La Proposition 1.21 décrit les propriétés des probabilités $(\mathbb{P}^i)_{i=1,\dots,n}$ définies précédemment.

Proposition 1.21. *Les probabilités $(\mathbb{P}^i)_{i=1,\dots,n}$ sont bien définies et équivalentes à \mathbb{P} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,*

1. *les probabilités \mathbb{P}^i et \mathbb{P}^{i-1} coïncide sur \mathcal{G}_T^{i-1} , en particulier, toutes les probabilités $(\mathbb{P}^i)_{i=1,\dots,n}$ coïncide avec \mathbb{P} sur \mathcal{F}_T ,*
2. *$\mathbf{L}^{(i)}$ et \mathcal{F}_T sont indépendantes conditionnellement à \mathcal{F}_{t_i} sous \mathbb{P}^i ,*
3. *pour tout $t \in [t_i, T]$, la densité de Radon-Nikodym de \mathbb{P}^i par rapport à \mathbb{P}^{i-1} est donnée par $\alpha_t^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i)})^{-1}$ sur \mathcal{G}_t^i et celle de \mathbb{P}^i par rapport à \mathbb{P} est donnée par $\psi_t^i(\mathbf{L}^{(i)})$ sur \mathcal{G}_t^i .*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur i . Le résultat pour $i = 1$ est une généralisation de Föllmer et Imkeller [28] et Grorud et Pontier [31]. Pour la démonstration de $i - 1$ à i , on utilise la stabilité de l'Hypothèse 1.19 par changement de probabilité équivalente. \square

Cette construction de probabilités successives est naturelle et n'utilise que la connaissance de $\mathbf{L}^{(i)}$ pour construire \mathbb{P}^i . Cependant, sous la probabilité \mathbb{P}^i , la loi de L^k , $k \in \{i + 1, \dots, n\}$ n'est pas égale à la loi de L^k sous \mathbb{P}^{i-1} . C'est pourquoi nous construisons dans la Proposition 1.23 une famille de probabilités sous lesquelles la loi conditionnelle de L^i reste inchangée. La construction utilise un changement backward de probabilité. La famille de probabilité ainsi obtenue sera cruciale pour l'évaluation d'actifs financiers.

Définition 1.22. *Soit $\mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{P}$, et pour $i \in \{1, \dots, n\}$, soit \mathbb{Q}^i la probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) définie par*

$$\frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{Q}^{i+1}} := \frac{1}{\alpha_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i)})}$$

On note

$$\varphi_T^i(\mathbf{x}) = \prod_{k=i}^n \frac{1}{\alpha_T^{k|k-1}(\mathbf{x}^{(k)})},$$

alors la densité de Radon-Nikodym de \mathbb{Q}^i par rapport à \mathbb{P} est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}^i}{d\mathbb{P}} = \varphi_T^i(\mathbf{L}).$$

La variable $\varphi_T^i(\mathbf{L})$ est une variable aléatoire \mathcal{G}_T^n -mesurable.

Proposition 1.23. *Les probabilités équivalentes $(\mathbb{Q}^i)_{i=1,\dots,n}$ sont bien définies et vérifient les propriétés suivantes pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$*

1. *\mathbb{Q}^i coïncide avec \mathbb{P} sur \mathcal{G}_T^{i-1} ,*

2. pour tout $k \in \{i, \dots, n\}$, L^k et \mathcal{G}_T^{k-1} sont indépendants conditionnellement à $\mathcal{G}_{t_k}^{k-1}$ sous \mathbf{Q}^i ,
3. pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, L^k a la même loi conditionnelle sachant $\mathcal{G}_{t_k}^{k-1}$ sous $(\mathbf{Q}^i)_{i=1, \dots, n}$ et \mathbf{P} .

A l'aide de la proposition précédente, nous pouvons nous intéresser à calculer les espérances conditionnelles par rapport à \mathbb{G}^I . Ces espérances conditionnelles représentent la valeur d'un actif financier vue par l'initié. L'idée est d'exprimer les espérances conditionnelles par rapport à \mathbb{G}^I à l'aide d'espérances conditionnelles par rapport à \mathbb{F} qui seront plus faciles à évaluer.

Soit $Y_T(\mathbf{L})$ une variable aléatoire \mathcal{G}_T^I -mesurable positive. Notre but est de calculer l'espérance conditionnelle de $Y_T(\mathbf{L})$ sachant l'information de l'initié \mathcal{G}_t^I à l'instant $t \in [0, T]$. Pour cela, on introduit l'opérateur J_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ J_i défini de la manière suivante. Soit une variable aléatoire positive bornée \mathcal{G}_T^i -mesurable $X_T(\mathbf{L}^{(i)})$, on pose

$$J_i(X_T(\mathbf{L}^{(i)})) = \mathbb{E}^{\mathbf{Q}^i}[X_T(\mathbf{L}^{(i)}) | \mathcal{G}_{t_i}^{i-1}].$$

Ainsi, en décomposant l'espérance conditionnelle sur chaque intervalle de temps et en utilisant les probabilités \mathbf{Q}^i , $i = 1, \dots, n$, on obtient le résultat suivant

Théorème 1.24. *Soit $Y_T(\mathbf{L})$ une variable aléatoire \mathcal{G}_T^I -mesurable bornée ou positive. Pour tout $t \in [0, T]$, il vient que*

$$\mathbb{E}^{\mathbf{P}}[Y_T(\mathbf{L}) | \mathcal{G}_t^I] = \sum_{i=1}^n 1_{[t_i, t_{i+1})}(t) \frac{\mathbb{E}^{\mathbf{P}}[Y_{t_{i+1}}(\mathbf{x}^{(i)}) \psi_{t_{i+1}}^i(\mathbf{x}^{(i)})^{-1} | \mathcal{F}_t]}{\psi_{t_i}^i(\mathbf{x}^{(i)})^{-1}} \Big|_{\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}}$$

où $Y_{t_{i+1}}(\cdot)$ est $\mathcal{F}_{t_{i+1}} \otimes \mathcal{E}^{\otimes i}$ -mesurable telle que $Y_{t_{i+1}}(\mathbf{L}^{(i)}) = \mathbb{E}^{\mathbf{P}}[Y_T(\mathbf{L}) | \mathcal{G}_{t_{i+1}}^i]$. De plus, la suite de variables aléatoires $(Y_{t_{i+1}}(\mathbf{L}^{(i)}))_{i=0, \dots, n}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$Y_{t_{i+1}}(\mathbf{L}^{(i)}) = \frac{J_{i+1}(Y_{t_{i+2}}(\mathbf{L}^{(i+1)}) \Phi_{t_{i+2}}(\mathbf{L}^{(i+1)}))}{J_{i+1}(\Phi_{t_{i+2}}(\mathbf{L}^{(i+1)}))}, \quad i \in \{0, \dots, n-1\},$$

où $Y_{t_{n+1}}(\mathbf{L}^{(n)}) = Y_T(\mathbf{L})$ et le noyau est donné par

$$\Phi_{t_{i+2}}(\mathbf{L}^{(i+1)}) := J_{i+2} \circ \dots \circ J_n(\alpha_{t_{i+2}}^{i+1|i}(\mathbf{L}^{(i)}) \dots \alpha_T^{n|n-1}(\mathbf{L}^{(n)}))$$

avec la convention $\Phi_{t_1} = 1$.

1.4.2 Des hypothèses de densité plus fortes

Nous introduisons d'autres hypothèses de densité plus fortes que l'Hypothèse 1.19 que nous comparons. Pour plus de simplicité nous supposons que \mathcal{F}_0 est triviale.

Hypothèse de densité avec différentes tribus initiales

Dans un premier temps, nous considérons la loi conditionnelle de L^i par rapport à la tribu $\mathcal{G}_0^{i-1} = \sigma(\mathbf{L}^{(i-1)})$.

Hypothèse 1.25. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi conditionnelle L^i sachant \mathcal{G}_T^{i-1} est équivalente à sa loi conditionnelle sachant \mathcal{G}_0^{i-1} sous la probabilité \mathbf{P} , i.e il existe une fonction strictement positive $\mathcal{G}_T^{i-1} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable $\beta_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, \cdot)$ telle que

$$\mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_T^{i-1}) = \beta_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x) \mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_0^{i-1}). \quad (1.11)$$

Une autre hypothèse naturelle est de supposer l'hypothèse de Jacod vérifiée à chaque grossissement, i.e la loi conditionnelle de L^i sachant la filtration précédente $\mathbb{G}^{(i-1)}$ est équivalente à sa loi de probabilité.

Hypothèse 1.26. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi conditionnelle de L^i sachant \mathcal{G}_T^{i-1} est équivalente à sa loi sous la probabilité \mathbb{P} , i.e il existe une fonction $\mathcal{G}_T^{i-1} \otimes \mathcal{E}$ -mesurable $p_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, \cdot)$ telle que

$$\mathbf{P}(L^i \in dx | \mathcal{G}_T^{i-1}) = p_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x) \mathbb{P}(L^i \in dx).$$

En raison de la transitivité des relations d'équivalence, on obtient

$$\text{Hypothèse 1.26} \Rightarrow \text{Hypothèse 1.25} \Rightarrow \text{Hypothèse 1.19}.$$

On trouvera dans [B13] des exemples permettant de comparer ces différentes hypothèses. Sous ces hypothèses, il est possible d'obtenir un énoncé plus simple pour la Proposition 1.24 en explicitant les opérateurs $J^i, i = 1, \dots, n$, ainsi qu'une formulation adaptée de la Proposition 1.23.

Grossissement global de filtration

Jusqu'à présent nous avons supposé une hypothèse de densité successive, nous considérons maintenant le vecteur \mathbf{L} globalement et nous supposons une hypothèse de type Jacod pour le vecteur comme suit :

Hypothèse 1.27. La loi conditionnelle sachant \mathbb{F} de $\mathbf{L} = (L^1, \dots, L^n)$ est équivalente à sa loi de probabilité, i.e., il existe une fonction $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{E}^n$ -mesurable $p_T(\cdot)$ telle que

$$\mathbf{P}(\mathbf{L} \in d\mathbf{x} | \mathcal{F}_T) = p_T(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{L} \in d\mathbf{x})$$

où $d\mathbf{x} = (dx^1, \dots, dx^n)$.

On note $(p_t(\mathbf{x}), t \in [0, T])$ la densité de \mathbf{L} sachant \mathbb{F} , qui est une (\mathbf{P}, \mathbb{F}) -martingale pour tout $\mathbf{x} \in E^n$. La filtration $\mathbb{G}^{\mathbf{L}} = (\mathcal{G}_t^{\mathbf{L}})_{t \in [0, T]}$, où $\mathcal{G}_t^{\mathbf{L}} := \mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathbf{L})$ coïncide avec \mathcal{G}_t^n . De plus, \mathbf{L} et \mathbb{F} sont indépendants sous une probabilité équivalente $\mathbb{P}^{\mathbf{L}}$ définie par

$$\frac{d\mathbf{P}^{\mathbf{L}}}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{G}_t^{\mathbf{L}}} := \frac{1}{p_t(\mathbf{L})}.$$

Par contre, L^1, \dots, L^n ne sont pas mutuellement indépendantes sous $\mathbf{P}^{\mathbf{L}}$.

La proposition suivante permet de comparer l'Hypothèse 1.27 avec les hypothèses précédentes.

Proposition 1.28. 1. L'Hypothèse 1.27 est équivalente à l'Hypothèse 1.25. Les densités conditionnelles sont données par : d'une part,

$$p_T(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \beta_T^{i|i-1}(\mathbf{x}^{(i)})$$

et d'autre part,

$$\beta_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i) = \frac{\int_{E^{n-i}} p_T(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i, \dots, x_n) \mathbf{P}(L^{i+1} \in dx^{i+1}, \dots, L^n \in dx^n | \mathcal{G}_0^i)}{\int_{E^{n-i+1}} p_T(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i, \dots, x_n) \mathbf{P}(L^i \in dx^i, \dots, L^n \in dx^n | \mathcal{G}_0^{i-1})},$$

2. la probabilité \mathbf{P}^L coïncide avec la probabilité $\bar{\mathbf{Q}}^1$ construite sous l'Hypothèse 1.25.
3. L'Hypothèse 1.27 avec la condition supplémentaire $\mathbf{P}(\mathbf{L} \in d\mathbf{x}) \sim \prod_{i=0}^n \mathbf{P}(L^i \in dx^i)$ est équivalente à l'Hypothèse 1.26. Les densités conditionnelles sont données par : d'une part,

$$p_T(\mathbf{x}) = \frac{\tilde{Z}_T^n(\mathbf{x})}{\tilde{Z}_0^n(\mathbf{x})} = \prod_{i=1}^n \frac{p_T^{i|i-1}(\mathbf{x}^{(i)})}{p_0^{i|i-1}(\mathbf{x}^{(i)})}$$

et d'autre part,

$$p_T^{i|i-1}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i) = \frac{\int_{E^{n-i}} \frac{p_T}{\zeta}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i, \dots, x_n) \mathbf{P}(L^{i+1} \in dx^{i+1}) \dots \mathbf{P}(L^n \in dx^n)}{\int_{E^{n-i+1}} \frac{p_T}{\zeta}(\mathbf{L}^{(i-1)}, x^i, \dots, x_n) \mathbf{P}(L^i \in dx^i) \dots \mathbf{P}(L^n \in dx^n)},$$

où $\zeta(\cdot)$ est la densité de Radon-Nikodym de $\prod_{i=1}^n \mathbf{P}(L^i \in dx^i)$ par rapport $\mathbf{P}(\mathbf{L} \in d\mathbf{x})$.

4. Sous l'Hypothèse 1.27 et si $\mathbf{P}(\mathbf{L} \in d\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})^{-1} \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(L^i \in dx^i)$ où $\zeta(\cdot)$ est une fonction positive sur E^n , la probabilité équivalente \mathbf{Q}^L définie par

$$\frac{d\mathbf{Q}^L}{d\mathbf{P}} \Big|_{\mathcal{G}_T^n} = \frac{\zeta(\mathbf{L})}{p_T(\mathbf{L})}$$

vérifie

- (a) \mathbb{F} et les variables aléatoires L^1, \dots, L^n sont mutuellement indépendants sous \mathbf{Q}^L
- (b) la loi marginale de chaque L_1, \dots, L_n sous \mathbf{Q}^L coïncide avec celle sous \mathbf{P} .

5. La probabilité \mathbf{Q}^L coïncide avec la probabilité $\bar{\mathbf{Q}}^1$ définie sous l'Hypothèse 1.26.

Espérance conditionnelle avec l'approche globale

Afin de calculer l'espérance conditionnelle par rapport à la filtration de l'initié sous les Hypothèses équivalentes 1.25 et 1.27, nous utilisons la probabilité \mathbf{P}^L , qui rend les calculs plus faciles.

Proposition 1.29. *Supposons l'Hypothèse 1.27. Soit $Y_T(\mathbf{L})$ une variable aléatoire positive \mathcal{G}_T^n -mesurable. Alors, pour $t \in [0, T]$,*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(Y_T(\mathbf{L}) | \mathcal{G}_t^L \right) = \sum_{i=1}^n 1_{[t_i, t_{i+1})}(t) \frac{\int_{E^{n-i}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(Y_T(\mathbf{x}) p_T(\mathbf{x}) | \mathcal{F}_t \right) \mathbf{P} \left(L^{i+1} \in dx^{i+1}, \dots, L^n \in dx^n | \mathbf{L}^{(i)} \right)}{\int_{E^{n-i}} p_t(\mathbf{x}) \mathbf{P}(L^{i+1} \in dx^{i+1}, \dots, L^n \in dx^n | \mathbf{L}^{(i)})} \Big|_{\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}}.$$

1.4.3 Application et illustrations numériques

Modèle de défaut

Comme illustration, nous appliquons les résultats obtenus à un modèle de risque de défaut avec un agent initié qui est une extension du modèle considéré dans [33]. Plus particulièrement, nous déterminons la probabilité de défaut/survie avec différents niveaux d'information. Soit la barrière de défaut $(L_t, t \in [0, T])$ de la forme (1.10), l'instant de défaut est défini par

$$\tau := \inf\{t : X_t < L_t\}$$

où $(X_t, t \geq 0)$ est un processus continu \mathbb{F} -adapté et où les variables aléatoires L^1, \dots, L^n représentent l'information privée du manager sur la barrière aux instants t_1, \dots, t_n . Cette information n'est pas disponible pour un agent standard. Afin de comparer les différents niveaux d'information, nous introduisons la filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ où

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s \vee \sigma(\tau \wedge s)$$

La filtration \mathbb{G} est la filtration \mathbb{F} grossie par un temps aléatoire τ et est utilisée classiquement pour modéliser l'information disponible pour un agent standard sur un marché soumis à un risque de défaut. La filtration \mathbb{G}^I représente l'information de l'initié.

La probabilité de survie, quantité fondamentale dans les modèles de risque de crédit est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.30. *Soit $0 \leq t \leq s \leq T$, i et j les indices tels que $t_i \leq t < t_{i+1}$ et $t_j \leq s < t_{j+1}$. Alors*

$$\mathbf{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t^I) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}^{\mathbf{P}} \left[\chi_s^i(\mathbf{x}^{(i)}) \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\int_{E^{n-i}} \frac{p_s}{\zeta}(\mathbf{x}^{(i)}, x^{i+1}, \dots, x^n) \prod_{k=i+1}^n \mathbf{P}(L^k \in dx^k) \Big|_{\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}}$$

où $X_t^* := X_{[0, t]}$ si $i < j$,

$$\chi_s^i(\mathbf{x}^{(i)}) = \int_{E^{n-i}} \frac{p_s}{\zeta}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\{X_{[t, t_{i+1}]}^* > x^i\}} \mathbf{1}_{\{X_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}^* > x^{i+1}\}} \cdots \mathbf{1}_{\{X_{[t_j, s]}^* > x^j\}} \prod_{k=i+1}^n \mathbf{P}(L^k \in dx^k),$$

et si $i = j$

$$\chi_s^i(\mathbf{x}^{(i)}) = \int_{E^{n-i}} \frac{p_s}{\zeta}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\{X_{[t, s]}^* > x^i\}} \prod_{k=i+1}^n \mathbf{P}(L^k \in dx^k).$$

Ce résultat découle de la Proposition 1.29 appliquée à la variable aléatoire

$$Y_T(x) = \mathbf{1}_{\{X_{[t_1, t_2]}^* > x^1\}} \cdots \mathbf{1}_{\{X_{[t_i, t]}^* > x^i\}} \mathbf{1}_{\{X_{[t, t_{i+1}]}^* > x^i\}} \cdots \mathbf{1}_{\{X_{[t_j, s]}^* > x^j\}}$$

où $X_{[t, s]}^* := \inf_{t \leq u < s} X_u$. Pour comparer les probabilités de survie sous les différents niveaux d'information, on rappelle que pour l'information standard,

$$\mathbf{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbf{P}(\tau > s | \mathcal{F}_t)}{\mathbf{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t)}.$$

Dans la suite, nous comparons les probabilités de survie pour l'initié et pour un agent standard dans un cas particulier afin d'étudier l'impact de l'information de l'initié.

Résultats Numériques

Trois périodes $0 = t_1 < t_2 < t_3 = T$ sont considérées et la valeur de la firme X suit un mouvement brownien géométrique (avec dérive μ et volatilité σ). L'information sur le niveau de la barrière L^1 (resp. L^2) est révélée à l'instant t_1 (resp. t_2). L^1 et L^2 sont des variables aléatoires exponentielles d'intensité λ_1 and λ_2 , dont la loi jointe est donnée par une copule de Gumbel-Barnett (cf [32]) avec le paramètre $0 \leq \theta \leq 1$. De plus, $\mathbf{L} = (L^1, L^2)$ est indépendant de \mathcal{F}_T . Ainsi, on a que

$$\frac{1}{\zeta(x_1, x_2)} = e^{-(\theta\lambda_1\lambda_2x_1x_2)}((\theta\lambda_1x_1 + 1)(\theta\lambda_2x_2 + 1) - \theta).$$

Les valeurs des paramètres sont $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.8$, $\lambda_1 = 1.5$ et $\lambda_2 = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ et $t_3 = T = 2$. On analyse plus particulièrement l'impact du paramètre de corrélation entre L^1 et L^2 à travers le paramètre θ . Le cas $\theta = 0$ correspond au cas où les deux barrières sont indépendantes. Nous présentons ici une situation où un événement de défaut survient avant la maturité. On trouvera dans [B13] d'autres situations. Nous comparons sur une trajectoire de la valeur de la firme les probabilités de survie $P(\tau > T | \mathcal{G}_t^I)$ et $P(\tau > T | \mathcal{G}_t)$.

La Figure 1.2 représente la trajectoire réalisée de la firme. On suppose que le manager réajuste le niveau de la barrière à $t_2 = 1$ de $L^1 = 0.8$ à $L^2 = 1.5$. Le risque de défaut t_2 est élevé et surtout beaucoup plus grand que la valeur espérée. Dans tous les cas (see Figure 1.3), l'initié modifie immédiatement son estimation et on observe un saut dans la probabilité de survie à l'instant t_2 quelque soit la valeur du paramètre θ . Tandis que l'investisseur standard n'ayant pas accès à cette information garde une estimation élevée de la probabilité de survie et ne pourra réajuster son estimation que quand le défaut se produira. Enfin, si on analyse à travers ces trois graphiques l'impact du paramètre θ , on remarque que, comme le niveau de la firme est élevé à l'approche de t_2 , l'initié a une estimation plus élevée de la probabilité de survie lorsque la corrélation est forte (grande valeur de θ) que dans le cas indépendant. En effet, dans le cas d'une corrélation forte, l'initié s'attend à ce que le niveau L^2 soit proche de L^1 . Ces différences disparaissent dès que la valeur exacte de L^2 est connue à l'instant t_2 .

FIGURE 1.2 – Default during $[1, 2]$, $L^1 = 0.8$, $L^2 = 1.5$

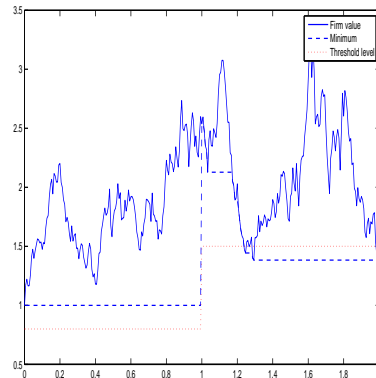
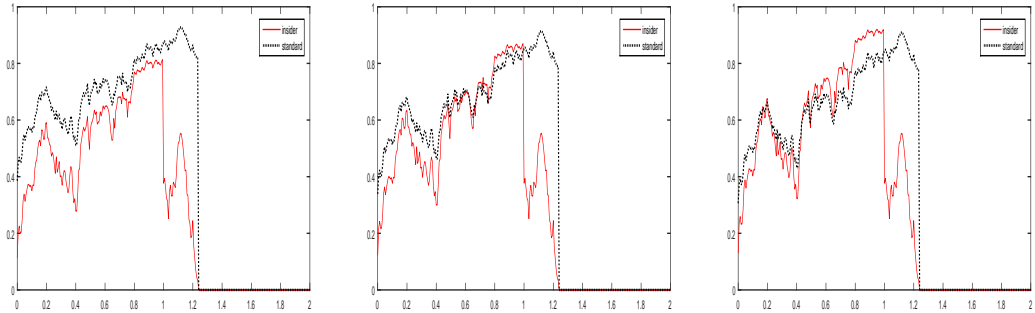


FIGURE 1.3 – Probabilités de survie $P(\tau > T|\mathcal{G}_t^I)$ et $P(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ pour $\theta = 0, 0.5$ et 1



1.5 Bibliographie récente et Perspectives

Dans un travail récent en collaboration avec D. Dorobantu et Y. Sahli, nous avons déterminé le prix d'indifférence du rachat d'un portefeuille d'assurance-vie. Les instants de décès des assurés n'étant pas ordonnés, le nombre d'équations différentielles stochastiques rétrogrades à résoudre augmente de manière exponentielle avec la taille du portefeuille. Pour contourner cette difficulté, nous avons proposé une approche 'Model-Point', i.e basée sur la construction d'un portefeuille représentatif (cf [B15]). Cette approche Model-point permet est une façon de répondre aux problèmes de gestion des risques des assureurs. En effet, contrairement aux banques, les assureurs couvrent leurs risques non pas contrats par contrats, mais de manière plus globale par type de produits. Dans une perspectives proche, en continuité avec les travaux sur les variable annuités et les portefeuille d'assurance-vie, nous souhaitons développer une méthodologie permettant de construire des portefeuilles représentatifs par type de contrat (par exemple pour des variable annuités, equities in presence of impairment). Ceci nécessite entre autre de définir des critères pour préciser la notion de portefeuille représentatif qui puissent être utilisés en pratique. Le travail initié dans [B13] a permis de poser un cadre théorique de grossissement successif de filtrations. Pour l'instant, nous n'avons appliqué ce contexte que pour un modèle très simple de risque de crédit où l'Hypothèse 1.26 est vérifiée et où de plus la filtration de référence \mathbb{F} est indépendante des variables aléatoires $L^i, i = 1, \dots, n$. Dans la suite, il est nécessaire de développer d'autres exemples pertinents en finance où seulement l'Hypothèse 1.19 serait vérifiée et pour lesquels l'évaluation des espérances conditionnelles dans la filtration \mathbb{G}^I est numériquement réalisable. Par ailleurs, nous n'avons pas pour l'instant investigué le problème de la décomposition des martingales dans la filtration \mathbb{G}^I . Ceci doit pouvoir se faire en utilisant les résultats de Song [77, 78] sur la décomposition des martingales. Ainsi nous pourrions nous intéresser au problème d'optimisation de portefeuille et la quantification de l'information supplémentaire détenue par un agent initié. Enfin, une extension naturelle serait de considérer des instants $t_i, i = 1, \dots, n$ aléatoires.

Chapitre 2

Trois problèmes de contrôle stochastique

Ce chapitre présente trois problèmes d'optimisation liés au contrôle stochastique. Ces problèmes ont tous les trois une motivation financière au départ et sont résolus en utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée. Le premier problème [B3] est un problème investissement optimal lorsque l'horizon de temps est incertain. On suppose que l'horizon temporel de l'agent τ n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration des prix \mathbb{F} et nécessite l'introduction de la probabilité conditionnelle F de l'horizon aléatoire sachant la filtration \mathbb{F} . Le cas où τ est un temps d'arrêt a été traité auparavant par Karatzas et Wang [50]. Dans le cas où le processus F est déterministe, nous obtenons par une approche programmation dynamique une solution optimale pour les fonctions d'utilité de type CRRA. Le cas d'une probabilité F stochastique est regardé dans un cadre particulier. Par la suite, Bouchard et Pham [12] ont prouvé l'existence d'une stratégie optimale en utilisant la théorie de dualité convexe sans hypothèse sur la probabilité conditionnelle F . Récemment, ce problème a été résolu à l'aide d'équations différentielles stochastiques rétrogrades permettant une caractérisation de la fonction valeur et de la stratégie optimale (cf Kharroubi et al. [53] et Jeanblanc et al. [39]).

Le problème de clôturer de manière optimale un large portefeuille d'actifs sur le marché est une question récurrente pour les entreprises. Dans ce contexte, il peut arriver que les agents de part leur position aient des informations sur les prix futurs des actifs. Dans [B10], nous étudions la valeur de cette information avant qu'elle ne soit publique. Pour cela, nous considérons un agent devant clôturer sa position et pouvant (agent informé) ou ne pouvant pas (agent non informé) détenir une information supplémentaire. L'information de l'agent informé est modélisée en utilisant un grossissement de filtration. Comme dans [4, 6, 7, 48], la valeur de l'information supplémentaire est obtenue à partir d'un problème de maximisation d'utilité. Dans la littérature sur la liquidation, l'impact d'une information supplémentaire n'a que très peu été étudié. Dans [1, 74], les stratégies optimales ont été étudiées dans le cas de préférences CARA pour un modèle discret ou un modèle de type Bachelier avec une tendance. Dans [73], l'influence de la tendance sur les stratégies de liquidation est analysée dans une modélisation très générale où les prix sont modélisés par des semimartingales. Notre optique est de considérer un modèle simple de type Bachelier avec un drift. En considérant le critère de maximisation du revenu final, ce modèle permet d'évaluer explicitement le gain additionnel provenant de l'information supplémentaire et d'analyser l'impact des paramètres du modèle sur le gain additionnel.

Enfin dans [B14], nous considérons le problème de maximisation du temps d'occupation au-dessus d'une barrière par un brownien géométrique lorsque le niveau de volatilité peut être choisi entre deux valeurs σ_1 et σ_2 où $\sigma_1 < \sigma_2$. Le problème similaire pour un mouvement brownien arithmétique a déjà été étudié dans la littérature. MacNamara [62] étudie les fonctions objectifs pour lesquelles le contrôle, qui vaut σ_1 si le mouvement brownien contrôlé est au-dessus de 0 et σ_2 sinon, est optimal. Dans ce même contexte, Keilson et Wellner [51] ont quant à eux étudié la probabilité de transition pour le processus contrôlé optimalement $dZ_t = \sigma(Z_t)dW_t$. Enfin, récemment Althöfer et al. [2] ont étudié le contrôle bang-bang σ pour une marche aléatoire. On montre que pour le brownien géométrique le contrôle qui maximise le temps d'occupation au-dessus de 1 est le contrôle de type bang-bang qui consiste à choisir σ_1 lorsque le processus est au-dessus de 1 et σ_2 sinon. De plus, on obtient une expression pour la transformée de Laplace du temps d'occupation au-dessus de la barrière.

Ce chapitre repose sur les articles [B3, B10, B14].

2.1 Investissement optimal en horizon aléatoire

2.1.1 Modèle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, W un mouvement brownien standard n -dimensionnel et $T \in \mathbb{R}_*^+$ l'horizon économique. On considère un actif risque, dont le prix, S_t , est donné par

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t),$$

où $(\mu_t)_{t \geq 0}$ et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ sont déterministes. Un actif sans risque est aussi disponible dont le prix est $\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r_t dt$, où $(r_t)_{t \geq 0}$ est le taux sans risque supposé déterministe. L'information est modélisée par la filtration $\mathbb{F} = \{\sigma(S_s, s \leq t); t \geq 0\}$, vérifiant les hypothèses usuelles. On suppose les hypothèses classiques suivantes qui assurent que le marché est sans arbitrage

- (i) les coefficients μ, r sont bornés et $r_t \geq 0$,
- (ii) le coefficient σ est borné, inversible et σ^{-1} est aussi une fonction bornée,
- (iii) $(W_t)_{t \geq 0}$ est un \mathbb{F} -mouvement brownien.

On note $(Z_t)_{t \geq 0}$ la densité de Radon-Nikodym permettant de construire l'unique probabilité risque-neutre. Son équation est $dZ_t = -\theta_t Z_t dW_t$, où $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - \mathbf{1}r_t)$, où $\mathbf{1}$ est le vecteur formé de 1 de dimension n . Une stratégie d'investissement (ou portefeuille) est un processus π , \mathbb{F} -prévisible tel que

$\int_0^T (\pi_s)^2 ds < +\infty$ p.s. Un investisseur utilise de manière autofinancée la stratégie π en investissant le montant π_t dans l'actif risqué à la date t . Le processus de richesse $X_t^{t, \pi, x} = x$, vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dX_s^{t, \pi, x} = X_s^{t, \pi, x} r_s ds + \pi_s [(\mu_s - r_s) ds + \sigma_s dW_s], \quad t \leq s \leq T.$$

Un portefeuille $(\pi_t, 0 \leq t \leq T)$ est dit admissible si la richesse associée est positive et $\mathcal{A}(t, x)$ est l'ensemble des portefeuilles admissibles de valeur x à l'instant t .

L'horizon de l'agent est modélisé par τ un temps aléatoire par rapport à \mathcal{F} . Cet horizon peut représenter par exemple l'instant de décès de l'investisseur. Comme τ n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration \mathbb{F} , nous introduisons la probabilité conditionnelle $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$, et faisons l'hypothèse suivante :

[G] : $F_t = \mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$ est un processus croissant absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, dont la densité est notée f , i.e. $F_t = \int_0^t f_s ds$.

Une condition suffisante pour le processus F soit croissant est que $\mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) = \mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty)$, i.e., τ est modélisé par un processus de Cox. De manière plus générale il existe des cas où **(G)** est vérifiée et $\mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) \neq \mathbf{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_\infty)$. Ces temps sont appelés pseudo-temps (cf. [64]).

Les préférences d'un agent sont représentées par une fonction d'utilité U , continue, strictement croissante, strictement concave et dont la dérivée est continue et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} U'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = +\infty$. Le problème d'optimisation s'écrit

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(0,x)} \mathbf{E} (U(X_{\tau \wedge T}^{\pi,x})) \quad (2.1)$$

où τ est l'horizon de l'agent et $X^{\pi,x} = X^{0,\pi,x}$.

Le problème peut se réécrire à l'aide du processus $(F_t)_{t \geq 0}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} V(x) &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}(0,x)} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty U(X_{t \wedge T}^{\pi,x}) dF_t \right) \\ &= \sup_{\pi \in \mathcal{A}(0,x)} \mathbf{E} \left(\int_0^T U(X_u^{\pi,x}) dF_u + U(X_T^{\pi,x})(1 - F_T) \right). \end{aligned}$$

2.1.2 Probabilité conditionnelle déterministe

On considère dans ce paragraphe que le processus F est déterministe de densité f . Ce cadre restrictif nécessite l'indépendance entre τ et $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Comme dans le cas d'un horizon fixé (Cox-Huang [21], Karatzas et al [47]), le problème peut être résolu par l'approche programmation dynamique ou par l'approche dualité convexe. On introduit de manière classique la fonction V à tout instant t

$$V(t, x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbf{E} \left(\int_t^T U(X_s^{t,\pi,x}) f(s) ds + (1 - F(T)) U(X_T^{t,\pi,x}) \right).$$

Le résultat suivant donne une caractérisation de la fonction valeur comme solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Théorème 2.1. *i) Si Y est une $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman suivante*

$$0 = f(t)U(x) + \left(\frac{\partial Y(t, x)}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathbb{R}^d} A(t, x, \pi) \right) \quad (2.2)$$

où $A(t, x, \pi) = [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]Y_x(t, x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 Y_{xx}(t, x)$ et Y_x (resp. Y_{xx}) est la dérivée première (resp. seconde) par rapport à la variable d'espace, et avec la condition au bord

$$Y(T, x) = U(x)(1 - F(T)),$$

alors $V = Y$.

ii) Si la condition (i) est vérifiée, la stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t = -\sigma_t^{-1} \theta_t \frac{V_x(t, x)}{V_{xx}(t, x)}, \theta_t = \sigma_t^{-1} (\mu_t - r_t).$$

La démonstration peut se faire par des arguments classiques de vérification. La difficulté est d'obtenir une solution explicite de l'équation (2.2) ce qui n'est pas facile en général. On trouvera dans [B3], les solutions explicites dans le cas où la fonction d'utilité est la fonction logarithme ou une fonction puissance. Il est aussi possible d'avoir une caractérisation du portefeuille optimal en utilisant une approche de dualité convexe. Le théorème suivant en donne le résultat.

Théorème 2.2. *Soit $I(x) = (U')^{-1}(x)$. Si I est C^2 et s'il existe une fonction déterministe ν vérifiant $I(\nu(0)) = x$ telle que le processus $(H_t I(\nu(t)H_t), t \geq 0)$ est une martingale, alors le processus de richesse X^* défini par $X_t^* = I(\nu(t)H_t)$ est optimal et la stratégie optimale π^* est définie par*

$$\pi_t^* = -I'(\nu(t)H_t) \nu(t) H_t \sigma_t^{-1} \theta_t$$

où $H_t = \exp(-\int_0^t r_s ds) Z_t$.

La difficulté de cette approche est de montrer l'existence de la fonction ν . Dans le cas de coefficients constants, cette existence est acquise uniquement pour une utilité CRRA. On obtient que les stratégies optimales coïncident avec celles obtenues en horizon fixé. Ce résultat provient du fait que les stratégies optimales dans ces cas simples ne dépendent pas de l'horizon. Dans le cas d'un horizon temporel possiblement infini, moyennant une adaptation de la notion de stratégies admissibles, on obtient aussi une caractérisation de la fonction valeur à l'aide d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

2.1.3 Probabilité conditionnelle stochastique

Nous élargissons ensuite l'étude au cas où le processus F n'est plus déterministe. Ce cas est évidemment plus réaliste. Cependant, afin de garder des expressions explicites, nous supposons que le processus F vérifie $F_t = \int_0^t f_s ds$ avec f solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$df_s = f_s(a(s)ds + b(s)dW_s^f), \quad f_0 = y, \quad 0 \leq s \leq T.$$

Les coefficients a, b sont déterministes avec $\int_0^\infty \exp(\int_0^u a(s)ds) du < \infty$ et $(W_t^f)_{t \geq 0}$ est mouvement brownien corrélé aux mouvements browniens $(W_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, \dots, n$, avec une corrélation $\sigma_{S,f} = (\sigma_{if})_{1 \leq i \leq n}$. L'inconvénient de cette modélisation est que rien n'empêche le processus F de prendre des valeurs plus grandes que un. Ce modèle ne reste donc pertinent que sur un ensemble de paramètres où la probabilité que le processus F prenne des valeurs plus grandes que un est suffisamment faible. Ce qui est réalisable en pratique. La fonction valeur V dépend maintenant de t, x, y . A l'instant 0, on a

$$V(0, x, y) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(0,x)} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty f_u U(X_{u \wedge T}^{x,\pi}) du \right).$$

Soit \mathbf{Q} la probabilité définie sur \mathcal{F}_T par

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left(\int_0^T b(u)dW_u^f - \frac{1}{2} \int_0^T b^2(u)du\right),$$

et A une primitive de a s'annulant en 0, alors la fonction valeur peut s'écrire

$$V(0, X, y) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(0,x)} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(y \int_0^\infty \exp(A(u)) U(X_{u \wedge T}^x) du \right).$$

Dans le cas de coefficients constants et d'utilité CRRA, on obtient les solutions explicites.

2.2 Liquidation et information supplémentaire

2.2.1 Liquidation dans un modèle brownien avec drift

Soit un agent ayant une position $X_0 \in \mathbb{R}$ d'actifs à clôturer avant $T > 0$. Le prix *fundamental* forward de l'actif vérifie

$$dS_t = a(t, S_t)dt + \sigma dW_t,$$

où $\sigma > 0$ est constant, $a : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$, $|a(t, s)| \leq C(1 + s)$ pour tout $t \in [0, T]$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbf{P})$. Le drift peut être interprété comme des vues directionnelles ou une information supplémentaire sur le prix futur. La filtration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}$ représente l'information de l'agent.

Une stratégie de clôture (ou stratégie) de la position $x \in \mathbb{R}$ à l'instant $t \in [0, T)$ est un processus $\xi = (\xi_u)_{0 \leq u \leq T}$ (\mathbb{H}) -prévisible vérifiant $\int_t^T \xi_u du = x$. La stratégie ξ étant fixée, la position à l'instant $t \in [0, T]$ est donnée par

$$X_t = X_0 - \int_0^t \xi_s ds.$$

On peut noter que $X_T = 0$, i.e. la position est clôturée en T .

On impose sur les stratégies (pour des raisons techniques) les hypothèses d'intégrabilité suivantes : une stratégie $(\xi_u)_{0 \leq u \leq T}$ est dite *admissible* si

(A1) le processus ξ est L^2 -intégrable, i.e $\mathbf{E} \left(\int_0^T \xi_u^2 du \right) < \infty$,

(A2) la famille $\left(\left(\frac{X_t}{T-t} \right)^2 \right)_{0 \leq t \leq T}$ est uniformément intégrable, et $\lim_{t \rightarrow T} \frac{X_t^2}{T-t} = 0$, ps où $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la stratégie associée.

On note par $\mathcal{A}^{\mathcal{H}}(t, x)$ l'ensemble de toutes les stratégies de clôture admissibles de valeur x en t . Les positions à clôturer en un temps court ont un impact sur le prix de l'actif. On suppose que cet impact est temporaire et proportionnel au taux de vente. Le prix auquel est réalisé la vente est donc

$$\tilde{S}_t = S_t - \eta \xi_t,$$

où $\eta > 0$ est le paramètre d'impact du prix. En suivant la stratégie ξ le revenu final d'un agent est

$$R_T = \int_0^T \xi_u \tilde{S}_u du.$$

Après réécriture, maximiser le revenu final espéré revient à résoudre le problème d'optimisation

$$V(t, x, s) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}^{\mathcal{H}}(t, x)} \mathbf{E} \left(\int_t^T (X_u a(u, S_u) - \eta \xi_u^2) du \mid X_t = x, S_t = s \right). \quad (2.3)$$

pour $(t, x, s) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème de contrôle (2.3) est

$$-V_t - a(t, s)V_s - \frac{1}{2}\sigma^2 V_{ss} - a(t, s)x - \sup_{\xi \in \mathbb{R}} [-\xi V_x - \eta \xi^2] = 0,$$

avec la condition terminale singulière

$$\lim_{t \uparrow T} V(t, x, s) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ -\infty, & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

Si le drift $a(t, x)$ est linéaire en x , alors la fonction valeur est quadratique en le prix et la position restante, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Supposons que $a(t, s) = \alpha(t) + \beta(t)s$, où α et β sont bornés. Alors la fonction valeur vérifie*

$$V(t, x, s) = b(t)x^2 + c(t)xs + d(t)s^2 + e(t)x + f(t)s + g(t), \quad (2.4)$$

où b, c, d, e, f et g sont des fonctions déterministes explicites. La position optimale est donnée par

$$X_t^* = \frac{T-t}{T} \left(X_0 + \frac{1}{2\eta} \int_0^t [c(u)S_u + e(u)] \frac{T}{T-u} du \right).$$

On trouvera dans l'appendice de [B10] les expressions explicites des fonctions b, c, d, e, f et g . Ce résultat peut être obtenu à partir des résultats de [73]. Néanmoins, nous proposons dans [B10] une preuve plus simple basée sur des arguments classiques de vérification.

2.2.2 Comparaison agent informé et agent non-informé

On suppose que l'information supplémentaire est un signal sur le prix de l'actif à l'instant T . On souhaite quantifier la valeur de ce signal. Pour plus de simplicité, on considère que le processus de prix S est un mouvement brownien, i.e $S_t = \sigma W_t$. En particulier, S est une martingale par rapport à la filtration engendrée par W , notée $(\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t}$. L'information sur le prix à l'instant T est modélisée par $G = S_T + N$, où N est une v.a gaussienne centrée indépendante du processus S . Ceci est équivalent au signal envoyé par $S_{T'}$, pour $T' \geq T$. La différence $\sigma^2(T' - T)$ peut s'interpréter comme la variance du bruit de l'information. Si l'agent dispose de cette information, on dira qu'il est informé et son information est modélisée de manière classique (cf par exemple [5, 31]) par

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \sigma(S_{T'}), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Sinon, on dira que l'agent est non-informé. Conditionnellement à $S_{T'}$, la fonction valeur du problème d'optimisation associé à la clôture du portefeuille est pour l'agent informé

$$V^I(t, x, s) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}^{\mathcal{G}}(t, x)} E \left[\int_t^T (X_u a(u, S_u) - \eta \xi_u^2) du \middle| X_t = x, S_t = s, S_{T'} \right], \quad (2.5)$$

et pour l'agent non-informé

$$V^N(t, x, s) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}^{\mathcal{F}}(t, x)} \mathbf{E} \left(\int_t^T (X_u a(u, S_u) - \eta \xi_u^2) du \middle| X_t = x, S_t = s \right). \quad (2.6)$$

On remarque que la dynamique du prix sous la filtration (\mathcal{G}_t) vérifie

$$dS_t = \sigma dW_t^{\mathcal{G}} + \sigma \frac{S_{T'} - S_t}{T' - t} dt, \quad (2.7)$$

où $W^{\mathcal{G}}$ est un mouvement brownien par rapport (\mathcal{G}_t) (cf par exemple [61]). Le drift de la (\mathcal{G}_t) -dynamique dans (2.7) est linéaire avec $\alpha(t) = \frac{S'_T}{T'-t}$ et $\beta(t) = -\frac{1}{T'-t}$. Si $T' > T$, alors α et β sont bornés, on peut donc appliquer le résultat du théorème 2.3. On obtient le résultat suivant pour les fonctions valeurs de l'agent informé et non-informé.

Théorème 2.4. *Soit $T' > T$. La fonction valeur de l'agent informé est de la forme donnée par*

$$V^I(t, x, s) = -\eta \frac{1}{T-t} x^2 + c^I(t)xs + d^I(t)s^2 + e^I(t)x + f^I(t)s + g^I(t),$$

où c^I, d^I, e^I, f^I et g^I sont les fonctions déterministes explicites, dépendant de T, T' et S_T' suivantes

$$\begin{aligned} c^I(t) &= -\frac{1}{2} \frac{T-t}{T'-t} \\ d^I(t) &= \frac{1}{48\eta} \frac{(T-t)^3}{(T'-t)^2} \\ e^I(t) &= \frac{1}{2} \frac{T-t}{T'-t} S_{T'} \\ f^I(t) &= \frac{1}{\eta} \frac{S_{T'}}{T'-t} \left(\frac{1}{8}(T'-T)(T-t) - \frac{1}{24}(T'-t)^2 + \frac{1}{24} \frac{(T'-T)^3}{T'-t} \right) \\ g^I(t) &= \frac{S_{T'}^2}{\eta} \left(\frac{1}{12}(T'-T) - \frac{1}{16} \frac{(T'-T)^2}{T'-t} - \frac{1}{8}(T'-T) \frac{T-t}{T'-t} + \frac{1}{24}(T-t) + \frac{1}{48} \frac{(T'-T)^3}{(T'-t)^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{48\eta} \left(\frac{(T'-T)^3}{T'-t} - 3(T'-T)^2 \left(\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{T'-t}{T'-T} \right) \right) - 3(T'-T)(T-t) + \frac{1}{2}(T'-t)^2 \right). \end{aligned}$$

Pour le non-informé, la fonction valeur est donnée par $V^N(t, x, s) = -\eta \frac{x^2}{T-t}$.

Le gain additionnel espéré

Comme dans Karatzas et Pikowsky [48], on définit la valeur de l'information additionnelle comme le gain additionnel espéré, i.e $E[V^I(0, s, x)] - V^N(0, s, x)$. Le résultat précédent nous permet d'obtenir une expression explicite.

Théorème 2.5. *Soit $T' > T$. Le gain additionnel espéré vérifie*

$$E[V^I(0, s, x) - V^N(0, s, x)] = \frac{\sigma^2}{16\eta} \left((T'-T)^2 \ln \left(\frac{T'}{T'-T} \right) - TT' + \frac{3}{2}T^2 \right). \quad (2.8)$$

On remarque que ce gain ne dépend ni de la position initiale, ni de la valeur du sous-jacent. Pour la position initiale, on peut l'expliquer par le fait que l'information n'est pas très précise et donc que l'on peut avoir un drift positif ou négatif. En moyenne les effets se compensent. En effet, l'espérance de S'_T est égale à s et donc le gain est indépendant de la position. Le fait que le gain ne dépende pas du prix provient du modèle utilisé. En effet, donc un modèle brownien, la taille des incréments du prix ne dépend pas de la valeur de départ du prix.

On notera dans la suite $\Delta(T, T') = E[V^I(0, s, x) - V^N(0, s, x)]$ ou $\Delta(T, T', \sigma, \eta)$ si on souhaite insister sur la dépendance en σ et η . Il est à noter $\Delta(T, T')$ converge vers une

valeur finie quand $T' \downarrow T$. Si $T = T'$, le marché admettrait des arbitrages s'il n'y avait pas d'impact sur le prix. En effet, dans un marché sans friction, Karatzas et Piskowsky [48] et Grorud et Pontier [31] ont montré qu'un agent informé peut obtenir une utilité espérée infinie.

On remarque que si $T' = T$, alors le drift dans (\mathcal{G}_t) -dynamique du prix (2.7) n'est plus borné. Par conséquent, on ne peut appliquer le Théorème 2.3. Cependant, dans ce cas particulier, les résultats restent valides car le candidat pour le contrôle optimal est admissible. D'où la proposition suivante

Proposition 2.6. *Si $T' = T$, alors le gain additionnel espéré pour l'agent informé est égal à*

$$E[V^I(0, s, x) - V^N(0, s, x)] = \frac{\sigma^2}{32\eta} T^2. \quad (2.9)$$

La stratégie optimale est admissible et le processus de position vérifie

$$X_t^* = \frac{T-t}{T} \left(x + \frac{1}{4\eta} T \int_0^t \frac{S_T - S_u}{T-u} du \right).$$

2.2.3 Sensibilité par rapport aux paramètres

L'expression explicite du gain additionnel espéré nous permet d'obtenir sa sensibilité par rapport aux paramètres du modèle.

Sensibilité par rapport au bruit

Lemme 2.7. *Le gain additionnel décroît quand T' croît et $\lim_{T' \rightarrow \infty} \Delta(T, T') = 0$.*

Sensibilité par rapport à l'horizon

On remarque que le gain additionnel augmente lorsque l'horizon de T croît jusqu'à T' fixé. Trois raisons expliquent cette augmentation : premièrement l'information est de plus en plus précise si la différence entre T et T' diminue, c'est ce qu'on appelle *l'effet information* ; deuxièmement, plus T est grand, plus l'agent a du temps pour clôturer sa position et il peut donc réduire ces coûts de transaction, c'est *l'effet liquidité*. Enfin la variance du prix sur la période augmente (*l'effet variance*). On peut analyser ces effets séparément. Le gain additionnel dépend linéairement de la volatilité au carré. On peut donc éliminer l'effet variance en considérant le gain corrigé de la variance l

$$l(T, x) = \Delta(T, x, \sigma/\sqrt{T}, \eta) = \frac{\sigma^2}{16\eta} \left(\frac{(x-T)^2}{T} \ln \left(\frac{x}{x-T} \right) - x + \frac{3}{2}T \right),$$

pour $0 \leq T \leq x$. Pour étudier l'effet liquidité, on change simultanément T et T' de telle sorte que l'information mutuelle contenue dans le signal reste inchangée. En introduisant l'information mutuelle entre deux variables aléatoires, on a pour $\gamma > 0$ l'information mutuelle $I(S_T, S_{(\gamma+1)T}) = \frac{1}{2} \ln(1 + \gamma)$ ne dépend pas de T . On peut donc interpréter

$$h(T) = l(T, (1 + \gamma)T)$$

comme le gain corrigé de la variance et de l'information (v&i). Le gain corrigé v&i est croissant quand l'horizon temporel augmente comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.8 (L'effet liquidité). *Soit $\gamma > 0$. Le gain corrigé v&i est linéaire, croissant et vérifie $h(0) = 0$.*

On peut expliquer ce résultat par le fait que l'allongement de l'intervalle de trading permet de réduire les coûts de liquidité et de profiter plus longtemps de l'avantage d'information.

Enfin, nous analysons l'effet de l'information en introduisant le gain corrigé de la variance et de la liquidité (v&l) par

$$k(y) = \Delta(y, T', \sigma/\sqrt{y}, \eta y),$$

défini pour tout $y \in [0, T']$. La fonction k décrit le gain qui provient exclusivement de l'information supplémentaire, quand T tend vers T' . Il vient que :

Proposition 2.9 (L'effet information). *Le gain corrigé v&l croit de manière surlinéaire sur $[0, T']$ et vérifie $\lim_{x \uparrow T'} k(x) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{16\eta}$.*

2.3 Maximisation du temps d'occupation d'une martingale exponentielle

On souhaite maximiser le temps moyen passé au dessus d'un niveau constant pour une martingale exponentielle dont on contrôle le niveau de volatilité. Soit W un mouvement brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle augmentée. Soit \mathcal{A} l'ensemble des processus (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurables à valeurs dans $[\sigma_1, \sigma_2]$, où $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $x > 0$, $X^{x,\alpha}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^{x,\alpha} = \alpha_t X_t^{x,\alpha} dW_t, \quad X_0^{x,\alpha} = x.$$

On note

$$K(t, x, \alpha) = \int_0^t 1_{\{X_s^{x,\alpha} \geq 1\}} ds, \quad t \in [0, \infty],$$

le temps d'occupation de $(X_t^{x,\alpha})_{t \geq 0}$ au-dessus du niveau 1 jusqu'à l'instant t . On considère le problème de maximisation du temps d'occupation moyen. Soit la fonction valeur associée au problème

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} E[K(t, x, \alpha)] = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^t P(X_s^{x,\alpha} \geq 1) ds, \quad t \in [0, \infty). \quad (2.10)$$

Le résultat suivant montre que le contrôle optimal est de type feedback et consiste à choisir la volatilité la plus faible quand le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est au-dessus de 1 et la volatilité la plus élevée quand $(X_t)_{t \geq 0}$ est en-dessous de un. Ce problème de contrôle est une version stylisée d'une situation où un manager peut contrôler le niveau de volatilité de la valeur de la firme en prenant plus ou moins de risque. Si le manager reçoit un bonus constant tant que la valeur de l'entreprise est supérieure à un indice. Ainsi l'objectif du manager sera de maximiser le temps moyen que la valeur de la firme passe au-dessus de l'index. Un tel schéma de bonus va inciter le manager à choisir une stratégie risquée lorsque le niveau de la firme sous-performe et sécurisée dans le cas contraire.

Le calcul explicite de la fonction valeur est par contre difficile à obtenir. A la place, nous donnons une expression pour sa transformée de Laplace $\mathcal{L}[v(\cdot, x)](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} v(t, x) dt$.

Théorème 2.10. *L'unique contrôle optimal pour le problème (2.10) est la fonction η , définie par*

$$\eta(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x \geq 1, \\ \sigma_2, & x < 1. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $t \mapsto v(t, x)$ vérifie

$$\mathcal{L}[v(\cdot, x)](\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma_1}} \sqrt{\sigma_1^2 + 8\lambda} \frac{\frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\sigma_2^2 + 8\lambda} - 1}{\frac{1}{\sigma_1} \sqrt{\sigma_1^2 + 8\lambda} + \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\sigma_2^2 + 8\lambda}} & \text{if } x \geq 1, \\ \frac{1}{\lambda^2} x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma_2}} \sqrt{\sigma_1^2 + 8\lambda} \frac{\frac{1}{\sigma_1} \sqrt{\sigma_1^2 + 8\lambda} - 1}{\frac{1}{\sigma_1} \sqrt{\sigma_1^2 + 8\lambda} + \frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\sigma_2^2 + 8\lambda}} & \text{if } x < 1. \end{cases}$$

Soit

$$Q(t, x) = P(X_t^{x, \eta} \geq 1)$$

et $w(t, x) = \int_0^t Q(s, x) ds$. On montre que w coïncide avec la fonction valeur v . Pour cela, on commence par montrer que la transformée de Laplace de Q est solution d'un problème de contrôle en horizon infini (Proposition 2.11). Ensuite, on obtient par une inversion de Laplace une formule intégrale pour Q qui nous permet de montrer sa régularité (Proposition 2.12). On obtient ainsi que $w \in \mathcal{C}^{1,2}((0, \infty) \times (0, \infty) \setminus \{1\}) \cap \mathcal{C}^{1,1}((0, \infty) \times (0, \infty))$.

2.3.1 Un problème de contrôle auxiliaire

Pour tout contrôle $\alpha \in \mathcal{A}$ on introduit la fonction de gain

$$J(x, \alpha; \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(X_t^{x, \alpha} \geq 1) dt,$$

avec $\lambda > 0$, et la fonction de valeur associée par

$$V(\lambda, x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, \alpha; \lambda). \quad (2.11)$$

Proposition 2.11. *Soit la fonction G définie par*

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} + B_1 x^{\gamma_1}, & x \geq 1, \\ A_2 x^{\beta_2}, & x < 1; \end{cases} \quad (2.12)$$

Alors $V(x) = G(x)$ et η est l'unique contrôle optimal pour le problème (2.11).

La preuve est réalisée par vérification. Il faut juste noter que la fonction G n'est pas deux fois dérivable en 1. Néanmoins, la fonction est continûment dérivable avec des dérivées absolument continues et donc on peut appliquer la formule d'Itô à G (cf Section 3.7 dans [49]). Une conséquence immédiate de ce résultat est que la transformée de Laplace de $t \mapsto Q(t, x)$ est égale à $\mathcal{L}[Q(\cdot, x)](\lambda) = G(\lambda, x)$.

2.3.2 Propriété de la densité du temps d'occupation

Dans cette section afin de pouvoir démontrer le théorème 2.10, on étudie la régularité de la fonction $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$. Soit $\tau(x) = \inf\{s \geq 0 : X_s^{x, \eta} = 1\}$. Jusqu'au temps $\tau(x)$, le processus $X^{x, \eta}$ est un brownien géométrique de volatilité σ_1 ou σ_2 .

Soit $g(t) = Q(t, 1)$ et $c = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$. La propriété de Markov appliquée à $X^{x,\eta}$ implique que pour tout t , pour $x < 1$

$$Q(t, x) = E[1_{\{\tau(x) \leq t\}} g(t - \tau(x))] = \int_0^t g(t - u) H(x, du),$$

et pour $x > 1$,

$$Q(t, x) = E[1_{\{\tau(x) > t\}} + 1_{\{\tau(x) \leq t\}} g(t - \tau(x))] = 1 - H(x, t) + \int_0^t g(t - u) H(x, du)$$

où H est définie par

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma_2} \ln(x) - \sigma_2 t/2}{\sqrt{t}}\right) + x \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma_2} \ln(x) + \sigma_2 t/2}{\sqrt{t}}\right), \quad x \in (0, 1), \\ H(x, t) &= \Phi\left(\frac{-\frac{1}{\sigma_1} \ln(x) + \sigma_1 t/2}{\sqrt{t}}\right) + x \Phi\left(\frac{-\frac{1}{\sigma_1} \ln(x) - \sigma_1 t/2}{\sqrt{t}}\right), \quad x > 1. \end{aligned}$$

A partir de cette expression intégrale de Q , on montre le résultat suivant

Proposition 2.12. $Q \in \mathcal{C}^{0,2}((0, \infty) \times (0, \infty) \setminus \{1\}) \cap \mathcal{C}^{0,1}((0, \infty) \times (0, \infty))$.

La preuve assez technique repose sur les propriétés de la transformée de Laplace inverse. En effet, on montre que l'on peut obtenir une expression explicite de g à l'aide de la transformée inverse de Fourier, puis ensuite que g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et décroissante.

2.4 Bibliographie récente et Perspectives

L'hypothèse contraignante sur la modélisation du processus $(F_t)_{t \geq 0}$ dans la première partie de ce chapitre nécessitait des investigations supplémentaires. Celles-ci ont été réalisées en outre dans les travaux postérieurs de Bouchard et Pham [12], Kharroubi et al. [53] et Jeanblanc et al. [39]. Plus particulièrement, Bouchard et Pham [12] ont prouvé l'existence d'une stratégie optimale en utilisant la théorie de dualité convexe sans hypothèse sur la probabilité conditionnelle $(F_t)_{t \geq 0}$. Récemment, ce problème a été résolu à l'aide d'équations différentielles stochastiques rétrogrades permettant une caractérisation de la fonction valeur et de la stratégie optimale (cf Kharroubi et al. [53] et Jeanblanc et al. [39]). Le cas où l'agent peut investir dans l'actif après le défaut a été aussi investigué. On peut citer par exemple les travaux de Lim et Quenez [57, 56], Jiao et Pham [45, 44].

De nombreuses questions restent ouvertes sur le contrôle η et le processus optimal X^η . Pour le mouvement brownien, Keilson et Wellner [51] ont déterminé la probabilité de transition associée au processus solution de $dZ_t = \sigma(Z_t) dW_t$ où σ est défini par $\sigma(x) = \sigma_1$ si $x \geq 0$ et par $\sigma(x) = \sigma_2$ sinon. Qu'en est-il dans le cas exponentiel ? Le processus X^η admet-il une densité ? D'autre part, peut-on caractériser comme le fait MacNamara [62] les fonctions objectifs pour lesquelles le contrôle η serait optimal.

Chapitre 3

Temps d'atteinte et applications

Les temps d'atteinte d'un niveau donné par un processus apparaissent dans les modèles structurels de risque de crédit introduits par Merton [63]. En assurance, l'instant de ruine d'une compagnie est lui aussi modélisé par le premier instant de passage d'un processus (en général un processus de Poisson composé) en-dessous du niveau zéro. Dans ce chapitre nous étudions la loi de deux temps d'atteinte. Dans la première partie, nous considérons le premier temps de sortie d'un brownien bidimensionnel d'un domaine polyédral et nous déterminons le prix d'un contrat CDS en tenant compte du risque de contrepartie. Dans la seconde partie, nous généralisons les travaux de [20] à un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien. Les sauts du processus de renouvellement peuvent être soit positifs, soit négatifs. De plus, nous proposons une méthode de simulation de la densité basée uniquement sur l'observation du processus aux instants de sauts. Lorsque les sauts sont négatifs, ce modèle a été introduit pour modéliser les réserves d'une compagnie d'assurance (cf par exemple [29, 75]). Le calcul de la probabilité de ruine est un enjeu important et l'avantage principal de cette méthode est d'obtenir cette probabilité à partir de moins de simulations numériques que la distribution empirique du temps de ruine.

Ce chapitre est basé sur les travaux [B7, B12, B8].

3.1 Evaluation du risque de contrepartie dans un modèle structurel

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité sur lequel seront définis tous les processus.

3.1.1 Le modèle

Un CDS est un contrat entre un acheteur de protection qui souhaite se couvrir contre le défaut d'un sous-jacent en contrepartie du paiement à un vendeur de protection d'un coupon périodique. Alors que le défaut du sous-jacent est couvert par le CDS, l'acheteur de protection reste exposé au défaut du vendeur si la valeur de marché du contrat est positive. Normalement, le risque de contrepartie est bilatéral. Mais comme le risque possible de contrepartie subi par le vendeur est moins problématique, nous ne considérons que le risque subi par l'acheteur (cf [30] pour plus de détails et Brigo-Masetti [16] comme référence classique sur le risque de contrepartie). De plus, on considère qu'il n'y a pas d'accord de marge. Dans [B7], on explique comment adapter les résultats suivants dans les cas où il y a des accords de marge. L'évaluation du risque de contrepartie dans un modèle structurel nécessite de connaître la distribution conjointe des temps de défaut.

Cela impose de considérer un modèle relativement simple. Le modèle pour lequel nous obtenons des formules explicites est une version générique du modèle de Black et Cox en dimension deux. On note 1 et 2 les deux entités soumises au défaut. La contrepartie est notée 2. Les défauts sont déclenchés lorsque deux processus log-normaux V_1 et V_2 avec des dynamiques risque-neutres

$$\frac{dV_i(t)}{V_i(t)} = (r - k_i)dt + \sigma_i dB_i(t), i = 1, 2$$

associés à la première et à la deuxième entité passent en-dessous des barrières $v_i(t) := K_i e^{\gamma_i t}$. Alors, si on note τ_i l'instant de défaut de l'entité i , $\tau_i = \inf\{t, V_i(t) \leq K_i e^{\gamma_i t}\}$. Enfin, on suppose que les mouvements browniens B_1 et B_2 sont corrélés : $Cov(B_1(t), B_2(t)) = \rho t$, $1 < \rho < 1$. On note \mathcal{F}_t la filtration naturelle engendrée par les deux mouvements browniens $B_1(t), B_2(t)$. La corrélation reflète le fait que la contrepartie (le vendeur de protection) est souvent bien notée et ne fait défaut que dans des cas où la conjoncture économique est très mauvaise. En particulier, si la contrepartie fait défaut, on peut s'attendre à ce que les spreads de CDS sur d'autres entités augmentent considérablement simultanément. Ce phénomène est pris en compte par une corrélation positive.

3.1.2 Jambe de défaut de contrepartie

Les caractéristiques du CDS sont de manière classique :

- C la valeur nominale,
- si le sous-jacent fait défaut, l'acheteur reçoit du vendeur $(1 - R_u) \cdot C$, où R_u est le taux de recouvrement du sous-jacent,
- si la contrepartie (le vendeur) fait défaut en t , l'acheteur reçoit $l(p_t) = R_c \cdot p_t^+$, où p_t^+ est la partie positive de la valeur de marché p_t du CDS en t , et où R_c est le taux de recouvrement de la contrepartie,
- le spread de CDS s est payé continûment.

En utilisant la loi jointe du temps de défaut de la contrepartie et du sous-jacent du CDS, nous calculons la probabilité de défaut du sous-jacent conditionnellement au défaut de la contrepartie et nous obtenons une formule pour la jambe de contrepartie. Dans la suite, le moment présent est normalisé à $t = 0$ qui peut ou peut ne pas coïncider avec le début du contrat.

L'évaluation de la jambe de défaut de contrepartie D_c est donnée par

$$D_c = \mathbf{E} \left(e^{-r\tau_2} \cdot l(p(V_1(\tau_2), \tau_2)) 1_{\tau_2 < (T \wedge \tau_1)} \right)$$

où $p(V_1(\tau_2), \tau_2)$ est le prix de marché du CDS à $t = \tau_2$ (quand $\tau_1 \geq \tau_2$). La valeur $p(V_1(\tau_2), \tau_2)$ est obtenue par différence entre la jambe de défaut (sans risque de contrepartie) et la jambe fixe, c'est-à-dire :

$$p(V_1(\tau_2), \tau_2) = D_l(V_1(\tau_2), \tau_2) - \frac{sC}{r} \cdot \mathbf{E} \left((1 - e^{-r((T \wedge \tau_1) - \tau_2)}) 1_{\tau_1 \geq \tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_2} \right)$$

où

$$D_l(V_1(\tau_2), \tau_2) = \mathbf{E} \left(C(1 - R_u) e^{-r(\tau_1 - \tau_2)} 1_{\tau_2 \leq \tau_1 \leq T} | \mathcal{F}_{\tau_2} \right).$$

Ce qui peut se réécrire de la manière suivante

$$p(V_1(\tau_2), \tau_2)1_{\tau_2 < (T \wedge \tau_1)} = C1_{\tau_2 < (T \wedge \tau_1)} \left(\mathbf{E} \left((1 - R_u + \frac{S}{r}) e^{-r(\tau_1 - \tau_2)} 1_{\tau_2 \leq \tau_1 < T} | \mathcal{F}_{\tau_2} \right) - \mathbf{E} \left(\frac{S}{r} 1_{\tau_2 < \tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_2} \right) + \mathbf{E} \left(\frac{S}{r} e^{-r(T - \tau_2)} 1_{\tau_2 \leq T < \tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_2} \right) \right).$$

Ainsi, la valeur de D_c est donnée de manière quasi explicite par le théorème suivant

Théorème 3.1. *La jambe de défaut de contrepartie D_c est donnée par :*

$$D_c = CR_c$$

$$*\mathbf{E} \left[1_{\tau_2 < (T \wedge \tau_1)} \left(e^{-r\tau_2} (1 - R_u + \frac{S}{r}) \left(e^{-\mu_{\tau_2}(\beta - \eta)} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{\tau_2} - \eta(T - \tau_2)}{\sqrt{T - \tau_2}} \right) + e^{-\mu_{\tau_2}(\beta + \eta)} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{\tau_2} + \eta(T - \tau_2)}{\sqrt{T - \tau_2}} \right) \right) - \frac{S}{r} \left(1 - e^{-r(T - \tau_2)} \left(1 - \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{\tau_2} - \beta(T - \tau_2)}{\sqrt{T - \tau_2}} \right) - e^{-2\mu_{\tau_2}\beta} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{\tau_2} + \beta(T - \tau_2)}{\sqrt{T - \tau_2}} \right) \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{où } \nu_1 := r - k_1 - \gamma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2, \eta := \sqrt{\frac{\nu_1^2}{\sigma_1^2} + 2r}, \beta := \frac{\nu_1}{\sigma_1}, \mu_{\tau_2} := \frac{\ln(\frac{V_1(\tau_2)}{v_1(\tau_2)})}{\sigma_1}.$$

Le théorème s'obtient par des calculs standards d'intégrales sur des densités gaussiennes. On peut noter que dans beaucoup de situations, le terme $T \wedge \tau_1$ est remplacé par T ce qui simplifie les expressions. On peut justifier cette simplification par le fait que pour des valeurs usuelles du spread et des probabilités implicites de défaut, l'évaluation de la jambe fixe du CDS conditionnellement à l'absence de défaut est une bonne approximation de première ordre la jambe fixe du contrat non conditionnée.

Formules explicites

La condition $V_i(t) \leq K_i e^{\gamma_i t}$ se réécrit : $W_i(t) \geq y_0^i$, où $W_i(t) = \ln(\frac{K_i e^{\gamma_i t}}{V_i(t)}) - \ln(\frac{K_i}{V_i(0)})$ et $y_0^i = \ln V_i(0) - \ln K_i$. Ainsi, si on pose $\nu_i := r - k_i - \gamma_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2$, $W_i(t)$ est une diffusion vérifiant

$$W_i(t) = -\nu_i t - \sigma_i B_i(t), \quad W_i(0) = 0.$$

Définissons $\mathbf{Z}(t)$ par :

$$\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & -\rho\sigma_2^{-1} \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^1 - W_1(t) \\ y_0^2 - W_2(t) \end{pmatrix}.$$

On a :

$$dZ_1(t) = \phi_1 dt + dX_1(t), \quad dZ_2(t) = \phi_2 dt + dX_2(t),$$

où $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ est un mouvement brownien standard bidimensionnel et

$$\phi_1 = \frac{\nu_1\sigma_2 - \nu_2\sigma_1\rho}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \phi_2 = \frac{\nu_2}{\sigma_2}.$$

En particulier, $\mathbf{Z}(t)$ mouvement brownien 2-dim avec drift et les conditions de barrière $V_i(t) = v_i(t)$ deviennent : $Z_2(t) = 0$ et $\sqrt{1 - \rho^2}Z_1(t) + \rho Z_2(t) = 0$. Par conséquent, le calcul de la jambe de défaut D_c est équivalent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (h(B_1(\tau_2), \tau_2)1_{\tau_2 \leq (T \wedge \tau_1)}) &= \mathbf{E} \left(\tilde{h}(Z_1(\tau_2), \tau_2)1_{\tau_2 \leq (T \wedge \tau_1)} \right) \\ &= \int_0^T \int_0^{+\infty} \tilde{h}(a, s) \mathbf{P}(\tau_2 \in ds, \tau_2 = \tau_2 \wedge \tau_1, Z_1(\tau_2) \in da) dad s \end{aligned}$$

où $h(x, t) :=$

$$\left(e^{-rt} \left(1 - R_u + \frac{s}{r} \right) \left(e^{-\mu_{x,t}(\beta-\eta)} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{x,t} - \eta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) + e^{-\mu_{x,t}(\beta+\eta)} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{x,t} + \eta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right) - \frac{s}{r} \left(1 - e^{-r(T-t)} \left(1 - \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{x,t} - \beta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) - e^{-2\mu_{x,t}\beta} \mathcal{N} \left(\frac{-\mu_{x,t} + \beta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right) \right) \right)^+,$$

$\mu_{x,t} := \sigma_1^{-1}(\nu_1 t + \sigma_1 x + \ln V_1(0) - \ln K_1)$ and $\tilde{h}(z, t) = h\left(\frac{-y_0^1 - \nu_1 t}{\sigma_1} + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot z, t\right)$.

En appliquant le théorème de Girsanov, $(Z_1(t), Z_2(t))^*$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité \mathbf{Q} :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = e^{-\phi_1 X_1(T) - \phi_2 X_2(T) - [\frac{\phi_1^2}{2} + \frac{\phi_2^2}{2}]T} \mathbf{P}ps.$$

Soit $r_0 e^{i\theta_0} := Z_1(0) + iZ_2(0) = \frac{y_0^1 \sigma_2 - \varrho y_0^2 \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \varrho^2}} + i \frac{y_0^2}{\sigma_2}$.

Lemme 3.2. Pour $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a > 0$, il vient :

$$\mathbf{P}(\tau_2 \in dt, \tau_2 = \tau_2 \wedge \tau_1, Z_1(\tau_2) \in da) = e^{\phi_1(a - r_0 \cos(\theta_0)) - \phi_2 r_0 \sin(\theta_0) - \frac{\|\vec{\phi}\|^2 t}{2}} \frac{\pi}{\alpha^2 t a} e^{-(a^2 + r_0^2)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} n \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{ar_0}{t} \right) dadt.$$

où $\|\vec{\phi}\|^2 := \phi_1^2 + \phi_2^2$, $\alpha := \arcsin(\varrho) + \frac{\pi}{2}$ et $I_{n\pi/\alpha}$ est la fonction modifiée de Bessel d'indice $n\pi/\alpha$.

La preuve est une extension à la dimension deux du théorème de Daniels ([25]) du premier temps d'atteinte d'un domaine polyédral qui se trouve sans démonstration dans Iyengar [35]. La distribution du processus sous-jacent avant la sortie du domaine est donnée par la solution de l'équation de la chaleur qui est résolue en utilisant la méthode des images. On obtient ainsi le résultat suivant

Théorème 3.3. La jambe défaut de contrepartie D_c du CDS est donnée par :

$$D_c = CR_c \int_0^T \int_0^{+\infty} \tilde{h}(\mu, t) e^{\phi_1(\mu - r_0 \cos(\theta_0)) - \phi_2 r_0 \sin(\theta_0) - \frac{\|\vec{\phi}\|^2 t}{2}} \frac{\pi}{\alpha^2 t \mu} e^{-(\mu^2 + r_0^2)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} n \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{\mu r_0}{t} \right) dt d\mu.$$

Bien qu'il apparaisse une intégrale double avec des densité gaussiennes et des fonctions de Bessel (dont le comportement asymptotique est bien connu et les approximations numériques faciles à réaliser et efficaces), il est possible d'évaluer numériquement ces expressions.

3.1.3 Le juste prix d'un CDS

En utilisant l'évaluation de la jambe de défaut de contrepartie, nous pouvons maintenant calculer le juste prix d'un CDS à l'instant t compris entre le début du contrat et sa maturité. Il est obtenu par la différence entre la jambe de défaut et la jambe fixe, mais contrairement à ce qui était fait habituellement on prend en compte le risque de contrepartie dans la jambe de défaut.

Notons D_s pour la jambe standard de défaut, qui est la valeur actuelle des cash-flows correspondants aux paiements par le vendeur s'il y a un défaut sur le sous-jacent pendant la durée du CDS. La jambe totale de défaut D_{tot} du CDS est $D_s + D_c$, où D_c est donnée par Théorème 3.3. En appliquant le même raisonnement que dans le lemme 3.2, on obtient :

Lemme 3.4. *La jambe 'standard' de défaut est égale à :*

$$D_s = C(1 - R_u) \int_0^T \int_0^{+\infty} e^{\phi_1(\mu \cos(\alpha) - r_0 \cos(\theta_0)) + \phi_2(\mu \sin(\alpha) - r_0 \sin(\theta_0)) - \frac{\|\bar{\phi}\|^2 T}{2}} \frac{\pi}{\alpha^2 t \mu} e^{-(\mu^2 + r_0^2)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{\mu r_0}{t} \right) d\mu dt.$$

Comme la jambe fixe d'un CDS est la valeur actuelle des paiements cumulés par l'acheteur. En notant τ pour $\tau_1 \wedge \tau_2$, on a :

Lemme 3.5. *La jambe fixe F du CDS vérifie :*

$$\begin{aligned} F_s^{-1} &= \frac{1 - e^{-rT}}{r} \mathbf{P}(\tau \geq T) + E \left[\frac{1 - e^{-r\tau}}{r} 1_{\tau \leq T} \right] \\ &= \frac{1 - e^{-rT}}{r} \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} e^{\phi_1(\mu \cos(\kappa) - r_0 \cos(\theta_0)) + \phi_2(\mu \sin(\kappa) - r_0 \sin(\theta_0)) - \frac{\|\bar{\phi}\|^2 T}{2}} \frac{2\mu}{\alpha T} e^{-(\mu^2 + r_0^2)/2T} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\kappa}{\alpha} \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{\mu r_0}{T} \right) d\mu d\kappa \\ &+ \int_0^T \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-rt}}{r} e^{\phi_1(\mu \cos(\alpha) - r_0 \cos(\theta_0)) + \phi_2(\mu \sin(\alpha) - r_0 \sin(\theta_0)) - \frac{\|\bar{\phi}\|^2 T}{2}} \frac{\pi}{\alpha^2 t \mu} e^{-(\mu^2 + r_0^2)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{\mu r_0}{t} \right) d\mu dt \\ &+ \int_0^T \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-rt}}{r} e^{\phi_1(\mu - r_0 \cos(\theta_0)) - \phi_2 r_0 \sin(\theta_0) - \frac{\|\bar{\phi}\|^2 t}{2}} \frac{\pi}{\alpha^2 t \mu} e^{-(\mu^2 + r_0^2)/2t} \sum_{n=0}^{\infty} n \sin \frac{n\pi\theta_0}{\alpha} I_{n\pi/\alpha} \left(\frac{\mu r_0}{t} \right) dt d\mu. \end{aligned}$$

Le premier terme a été calculé dans [68], les deux suivants viennent des résultats précédents.

Théorème 3.6. *Enfin, nous pouvons calculer le juste prix du CDS en prenant en compte le risque de contrepartie comme*

$$D_{tot} - F$$

où F et D_{tot} sont donnés précédemment.

De plus, la plupart des dérivés de crédit sur deux entités avec des payoffs dépendant du temps peuvent être évalués (au moins théoriquement) en utilisant les mêmes techniques que celles présentées précédemment. On trouvera dans [B7] le spread pour un contrat firms-to-default sur deux sous-jacents. On peut noter que nous avons obtenu des formules exactes en vue de contribuer à la théorie générale du risque de crédit sur plusieurs entités. Mais que d'un point de vue pratique, il peut être intéressant pour simplifier les formules et accélérer leur évaluation de supposer par exemple que les défauts ne peuvent survenir qu'à des instants $t_i, i = 1 \dots n$. Ainsi les expressions intégrales sont remplacées par une somme où on a seulement besoin de calculer les probabilités de défaut $\mathbf{P}(\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t_i)$.

Dans une prépublication avec Diana Dorobantu et Areski Cousin [B12], nous nous sommes intéressés au cas où nous aurions trois ou plus entités dans le même modèle. L'extension à des dimensions supérieures ou égales à trois de la loi du temps d'atteinte en utilisant la méthode des images n'est possible que pour des domaines polyédraux bien particuliers. En effet, en dimension trois cette méthode est équivalente à trouver un moyen de recouvrir l'espace par le même trièdre en utilisant uniquement des symétries planes. Or il n'existe que peu de solutions pour réaliser ceci. Dans ce travail, nous montrons que la méthode des images en dimension trois ne donne des expressions analytiques pour la loi des temps d'atteinte que dans quelques cas particuliers. Ce résultat a été obtenu de manière concomitante par Escobar et al. [26]. Malheureusement, ces configurations particulières ne correspondent pas à celles qui apparaissent dans les applications au risque de défaut.

3.2 Temps de passage pour un processus de renouvellement perturbé par une diffusion

Dans cette section, on propose une expression de la densité du temps de passage d'un processus de renouvellement perturbé par un mouvement brownien. Proposer une expression qui puisse être évaluée facilement théoriquement ou numériquement est important en assurance (cf [19] et les références se trouvant dedans), car cela permet d'avoir une idée plus précise des périodes qui peuvent se révéler dangereuses et revêt donc une grande importance pour l'asset-liability management.

3.2.1 Notations et hypothèses

Soient $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement et $(Y_i, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a i.i.d. de fonction de répartition F_Y . On suppose $(W_t)_{t \geq 0}$, $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_i, i \in \mathbb{N}^*)$ indépendants.

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t) \vee \sigma(N_s, s \leq t, Y_1, \dots, Y_{N_t})$.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par $X_t = mt + W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, $t \geq 0$, où $m \in \mathbb{R}$.

Soit τ_x le premier temps de passage du niveau $x < 0$ par $X : \tau_x = \inf\{u \geq 0 : X_u \leq x\}$.

Soient $(T_n, n \in \mathbb{N}^*)$ la suite des instants de sauts du processus N et $(S_i = T_i - T_{i-1}, i \in \mathbb{N}^*)$ les temps d'inter-sauts i.i.d. Par convention, $T_0 = 0$. On suppose que la suite $(S_i, i \in \mathbb{N}^*)$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.7. *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, S_i est une v.a absolument continue positive dont la densité f_S est continue et bornée. On note F_S la fonction de répartition.*

3.2.2 Densité du premier temps de passage

Le premier résultat qui s'inspire fortement du résultat de [20] permet de montrer l'existence d'une densité pour le temps d'arrêt τ_x

Théorème 3.8. *La fonction de répartition de τ_x admet une dérivée à droite en 0 et est différentiable en tout point de $]0, \infty[$. Sa dérivée, notée $f(\cdot, x)$, est égale à*

$$f(0, x) = f_S(0) \frac{3F_Y(x) + F_Y(x^-)}{4}$$

et pour tout $t > 0$

$$f(t, x) = \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{\tau_x > T_{N_t}\}} \tilde{f}(t - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}}) \right) + \sum_{i \geq 0} \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{T_i < t \wedge \tau_x} f_S(t - T_i) \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\tilde{\tau}_x - X_{T_i} > t - T_i} F_Y(x - X_{T_i} - W_{t - T_i} - m(t - T_i)) \mid \mathcal{F}_{T_i} \right) \right),$$

où $\tilde{\tau}_z = \inf\{t \geq 0 : mt + W_t \leq z\}$, $z < 0$ et $\tilde{f}(u, z) = \frac{|z|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\frac{(z - mu)^2}{2u}} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(u)$ sa densité.

De plus si S_1 et Y_1 sont intégrables, alors $\mathbf{P}(\tau_x = \infty) = 0$ si et seulement si $m\mathbf{E}(S_1) + \mathbf{E}(Y_1) \leq 0$.

Une des difficultés de la formule précédente du Théorème 3.8 vient du fait que la densité est donnée comme une espérance dépendant d'un temps d'atteinte, qui requiert donc le calcul de sa densité. Le résultat suivant permet d'exprimer la densité de τ_x à partir seulement de la taille des sauts, du processus X aux instants de sauts, i.e. (X_{T_i}, T_i, Y_i) , $i \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3.9. *Soit $t > 0$ et $x < 0$. La densité de τ_x peut s'écrire comme :*

$$f(t, x) = \mathbf{E} \left(\tilde{f}(t - T_{N_t}, X_{T_{N_t}} - x) \gamma_{N_t} \right) + \mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{N_t} f_S(t - T_i) g(t - T_i, X_{T_i} - x) \gamma_i \right)$$

où $g(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot)$ et $\{\gamma_i\}_{i \geq 0}$ sont :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u, z) &= \frac{|z|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-\frac{(z - mu)^2}{2u}} \mathbf{1}_{u > 0, z < 0}, \\ \beta(a, b, d) &= \left(1 - e^{-\frac{2ab}{d}}\right) \mathbf{1}_{a > 0, b > 0}, \\ \gamma_i &= \prod_{j=1}^i \beta(X_{T_{j-1}} - x, X_{T_j} - Y_j - x, T_j - T_{j-1}) \mathbf{1}_{X_{T_j} - x > 0}, \\ g(t, \alpha) &= \int_{-\alpha}^0 \int_a^{+\infty} f_{m,t}(a, u) F_Y(-\alpha - u) du da, \\ f_{m,t}(a, u) &= \frac{\sqrt{2}(u - 2a)}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(u - 2a)^2}{2t} - \frac{m^2 t}{2} - mu\right). \end{aligned}$$

Cette formule présente un réel avantage d'un point de vue numérique. En effet, la simulation peut s'écrire comme une chaîne de Markov de dimension trois (X_{T_i}, T_i, Y_i) , $i \in \mathbb{N}^*$.

Cela évite en particulier les problèmes de discrétisation en temps et donc de temps de calcul : seul un ensemble fini d'accroissements gaussiens est nécessaire. On trouvera dans [B8] des simulations numériques dans le cas markovien (inter-sauts de loi exponentielle) et dans le cas non-markovien.

3.3 Bibliographie récente et Perspectives

Depuis la parution de [B7], de nombreux travaux sur le risque de contrepartie ont été réalisés. Dans une série de travaux, S. Crépey [24, 23, 22] a développé une analyse pour le risque de contrepartie bilatéral et le problème de funding. Les techniques utilisées dans ces articles sont différentes de celles de [B7] puisque le temps de premier défaut est modélisé comme un temps aléatoire et les techniques de grossissement progressif sont utilisées. Pour une approche plus financière, on peut citer les travaux de Brigo et al [17].

La loi des temps d'atteinte ou de passage d'un processus est reliée aux lois du maximum ou du minimum du processus sur un intervalle donné. En météorologie, les observations transmises sont souvent les maxima de température observés chaque jour. Or pour déterminer des probabilités de dépassement de seuil, il nous faut reconstruire le processus température sous-jacent. Les processus utilisés pour les modèles de température sont en général des processus de retour à la moyenne de type Orstein-Uhlenbeck. Dans un travail en cours en collaboration avec D. Dorobantu, V. Maumes-Deschamps et P. Ribereau nous cherchons une procédure d'estimation des paramètres d'un processus d'Orstein-Uhlenbeck à partir de l'observation des maxima sur des intervalles de temps consécutifs. Les travaux de Patie et al [67] donnent la loi du temps d'atteinte d'un Orstein-Uhlenbeck, ce qui permet d'obtenir la fonction de répartition du maximum du processus. Deux questions se posent : dans un premier temps, peut-on estimer avec des techniques de type Quantile Matching [55] les paramètres du processus ? Dans un second temps, il apparaît pertinent de considérer des processus d'Orstein-Uhlenbeck plus généraux, intégrant notamment dans leur tendance une composante saisonnière.

Chapitre 4

Analyse technique

Bien qu'utilisée par les investisseurs depuis plus d'un siècle, l'analyse technique est toujours considérée avec un certain scepticisme par la communauté académique. En effet, l'analyse technique (ou l'analyse chartiste) repose sur l'analyse des graphiques des cours de bourse et de différents indicateurs construits à partir de ces cours dans le but d'anticiper les évolutions du marché. Elle apparaît donc comme ayant une justification théorique limitée. Quelques travaux sont apparus dans les années 1990-2000 pour étudier la performance des investissements basés sur les méthodes d'analyse technique. La plupart de ces travaux cherchent à montrer la sur ou sous-performance des règles de trading de l'analyse technique par rapport à un portefeuille benchmark ([18, 40, 58, 79]). Plus récemment, Pastukov [66] a étudié les propriétés mathématiques des indicateurs basés sur la volatilité. Si on considère un marché financier, il n'est pas possible de calibrer un modèle qui tienne compte de tous les risques pendant un intervalle de temps long. Ainsi, il est nécessaire d'examiner des modèles avec ruptures. Dans ces situations, il peut apparaître plus opportun d'utiliser l'analyse technique dont le but est de capturer les tendances basiques du marché sans supposer de modèles. La question suivante est donc naturelle et pourtant à notre connaissance elle n'avait jamais été étudiée auparavant : est-il possible de comparer les performances obtenues par l'utilisation de modèles inappropriés à celles obtenues par l'analyse technique ?

Dans un ensemble de travaux en collaboration avec le projet TOSCA de l'INRIA Sophia-Antipolis, nous avons développé une étude mathématique et numérique dans le but de comparer les stratégies basées sur des modèles mathématiques mal-calibrés et des stratégies purement empiriques. Dans une seconde étape, nous avons naturellement étendu notre modèle à un modèle avec un nombre aléatoire de changement de régime et incluant des coûts de transaction. En particulier nous avons étudié un problème de contrôle stochastique faisant intervenir un processus de Black et Scholes à régime markovien. Nous avons entièrement caractérisé la fonction valeur de ce problème comme unique solution de viscosité d'un jeu d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, proposé un schéma d'approximation de cette fonction valeur et d'une stratégie de gestion proche de l'optimalité. Nous avons comparé les performances de la stratégie mathématique optimale en présence d'erreurs de calibration des paramètres du modèle avec une stratégie de type moyenne mobile qui ne requiert aucune modélisation sous-jacente.

Ce chapitre est basé sur les travaux [B11, B1, B2, B4]

4.1 L'analyse technique comparée aux modèles mathématiques

4.1.1 Le modèle

Nous considérons un modèle financier avec deux actifs traités en continu : un actif sans risque S^0 dont le taux d'intérêt r est déterministe et d'une action dont l'évolution du prix à l'instant t est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dS_t &= S_t (\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)\mathbf{1}_{(t \leq \tau)}) dt + \sigma S_t dB_t, \\ S_0 &= S^0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\sigma > 0$ la volatilité est constante. Le temps aléatoire τ où le drift change est indépendant du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ et suit une distribution d'exponentielle de paramètre λ . A l'instant τ , qui n'est pas connu, ni directement observable, le rendement espéré change instantanément de μ_1 à μ_2 .

On suppose de plus $\mu_1 - \frac{\sigma^2}{2} < r < \mu_2 - \frac{\sigma^2}{2}$, c'est-à-dire que le rendement actualisé de l'actif risqué est tout d'abord négatif, puis devient positif après τ . On note $\mathbb{F}^S := (\mathcal{F}_t^S, 0 \leq t \leq T)$ la filtration engendrée par les prix.

4.1.2 Portefeuille optimal

Dans le but de comparer les performances des stratégies chartistes avec celles des stratégies basées sur un modèle mathématique, nous commençons par caractériser le portefeuille optimal lorsque l'agent connaît parfaitement les paramètres du modèle μ_1, μ_2, λ et σ . Bien que cette situation soit peu réaliste, cela nous servira comme référence optimale. Soit π_t la proportion de richesse de l'investisseur investie dans le sous-jacent à l'instant t ; la proportion restante $1 - \pi_t$ est investie dans le bond. Soit $W^{x,\pi}$ le processus de richesse correspondant au portefeuille π pour un capital initial $x > 0$. On a

$$dW_t^{x,\pi} = W_t^{x,\pi} \left(r dt + \pi_t \left[(\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)\mathbf{1}_{(\tau \leq t)}) dt + \sigma dB_t \right] \right).$$

Pour avoir des stratégies comparables aux stratégies de l'analyse technique, nous imposons des contraintes sur le portefeuille. En particulier, nous excluons les stratégies de short-selling ce qui impose que la proportion investie dans le sous-jacent soit comprise dans $[0, 1]$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{A}(x)$ l'ensemble des stratégies admissibles vérifie

$$\mathcal{A}(x) := \left\{ \pi \text{ } \mathbb{F}^S\text{-progressivement mesurable à valeurs dans } [0, 1] \text{ tel que } W_0^{x,\pi} = x, W_t^{x,\pi} > 0 \text{ pour tout } t > 0 \right\}.$$

L'aversion au risque de l'agent est caractérisé par une fonction d'utilité $U(\cdot)$ supposée logarithmique. La stratégie optimale est donnée par

$$V(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \mathbf{E} (U(W_T^{x,\pi})).$$

Pour calculer la richesse optimale sous cette contrainte, nous adaptons l'approche martingale développée par Karatzas-Shreve [49]. Nous introduisons un marché auxiliaire sans

contrainte \mathcal{M}_ν défini comme suit : soit \mathcal{D} le sous-ensemble des processus $\nu \mathbb{F}^S$ - progressivement mesurables définis de $[0, T] \times \Omega$ dans \mathbb{R} tels que

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \nu(t)^- dt \right) < \infty, \text{ où } \nu(t)^- := -\inf(0, \nu(t)).$$

Le processus de prix du bond $S^0(\nu)$ et le prix du sous-jacent $S(\nu)$ vérifient

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^0(\nu)}{S_t^0(\nu)} &= \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \nu^-(t) dt, \\ \frac{dS_t(\nu)}{S_t(\nu)} &= \frac{dS_t}{S_t} + (\nu(t) + \nu^-(t)) dt. \end{aligned}$$

Pour chaque marché auxiliaire, on note $(W_t^{\nu, \pi})_{t \geq 0}$ la richesse associée au portefeuille π qui vérifie l'équation

$$\frac{dW_t^{\nu, x, \pi}}{W_t^{\nu, x, \pi}} = \frac{dW_t^{x, \pi}}{W_t^{x, \pi}} + (\nu^-(t) + \pi_t \nu(t)) dt, \quad W_0^{\nu, x, \pi} = x$$

et $\mathcal{A}(x, \nu)$ l'ensemble des stratégies admissibles, i.e,

$$\mathcal{A}(x, \nu) := \{ \pi \mathbb{F}^S\text{-progressivement mesurable tel que } W_0^{\nu, \pi} = x, W_t^{\nu, \pi} > 0 \text{ pour tout } t > 0 \}.$$

Nous avons donc à résoudre, pour tout ν dans \mathcal{D} , le problème (\mathcal{P}_ν) suivant :

$$V(\nu, x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(\nu, x)} \mathbf{E}(U(W_T^{\nu, x, \pi})). \quad (4.2)$$

Pour tout $\nu \in \mathcal{D}$, on caractérise la stratégie et la richesse optimales. Elles s'expriment en particulier à partir de la probabilité conditionnelle à posteriori que le point de changement apparaisse avant t , noté $F_t := \mathbb{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t^S)$ et du processus d'innovation $(\bar{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\bar{B}_t = \frac{1}{\sigma} \left(\log(S_t) - (\mu_1 - \frac{\sigma^2}{2})t - (\mu_2 - \mu_1) \int_0^t F_s ds \right), \quad t \geq 0.$$

On obtient ensuite la stratégie optimale sous contrainte à partir de stratégies optimales non contraintes.

Proposition 4.1. *S'il existe $\tilde{\nu}$ dans \mathcal{D} tel que*

$$V(\tilde{\nu}, x) = \inf_{\nu \in \mathcal{D}} V(\nu, x),$$

alors un portefeuille optimal $\pi^{, \tilde{\nu}}$ pour le problème sans contrainte $\mathcal{P}_{\tilde{\nu}}$ est aussi un portefeuille optimal pour le problème original avec contraintes \mathcal{P} , tel que*

$$W_t^{*, x} = W_t^{x, \pi^{*, \tilde{\nu}, \tilde{\nu}}} \quad \text{et} \quad V(x) = V(\tilde{\nu}, x).$$

Dans le cas particulier où la fonction d'utilité est logarithmique, il est possible de déterminer explicitement $\tilde{\nu}$. On remarque que la stratégie optimale est la projection sur l'espace des contraintes de la stratégie optimale non contrainte.

Proposition 4.2. Si $U(\cdot) = \log(\cdot)$ et x est la richesse initiale, alors \tilde{v} vérifie :

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} -(\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)F_t) & \text{si } \frac{\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)F_t}{\sigma^2} < 0, \\ 0 & \text{si } \frac{\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)F_t}{\sigma^2} \in [0, 1], \\ \sigma^2 - (\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)F_t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, la stratégie optimale est donnée par :

$$\pi_t^* = \text{proj}_{[0,1]} \left(\frac{\mu_1 - r + (\mu_2 - \mu_1)F_t}{\sigma^2} \right).$$

4.1.3 Deux stratégies de détection

Suivre la stratégie optimale nécessite de réactualiser son portefeuille en continu. Dans cette partie, on suppose que l'agent ne peut rebalancer son portefeuille qu'une seule fois. Pour cela, il utilise une procédure de détection optimale de l'instant de changement du rendement de l'actif. Le but des méthodes de détection est de construire une règle d'arrêt Θ qui détecte l'instant τ auquel le drift du sous-jacent change. Nous considérons deux méthodes de détection : la première proposée par Karatzas [46] minimise la perte espérée et l'autre proposée par Shiryaev [76] minimise le critère $\mathbb{P}(\Theta < \tau) + c\mathbb{E}(\Theta - \tau)^+$. Afin de comparer ces performances à l'analyse technique, on suppose que le poids du sous-jacent dans le portefeuille est $\pi = 0$ avant Θ et $\pi = 1$ ensuite. Ainsi, la richesse de l'agent calculée par plugging dans les deux cas vérifie :

$$W_T^\Theta = \frac{xS_\Theta^0}{S_\Theta} S_T \mathbf{1}_{(\Theta \leq T)} + xS_T^0 \mathbf{1}_{(\Theta > T)}.$$

Si on note Θ^K le temps d'arrêt qui minimise la perte espérée $\mathbb{E}|\Theta - \tau|$ parmi tous les temps d'arrêt Θ avec $\mathbb{E}(\Theta) < \infty$, resp. pour tout $c > 0$, Θ^S le temps d'arrêt qui minimise

$$B(c) := \inf_{\Theta} \{ \mathbb{P}(\Theta < \tau) + c\mathbb{E}((\Theta - \tau)^+) \}.$$

On montre que Θ^K (resp. Θ^S) est défini comme le premier instant où le processus $(F_t)_{t \geq 0}$ dépasse un seul p^* (resp. A^*) entièrement caractérisé.

4.1.4 Les modèles mal calibrés

Dans la réalité, il est extrêmement difficile de connaître parfaitement les paramètres du modèle. Il est possible de calibrer la valeur μ_1 du drift avant le changement et la volatilité sur les données historiques. Par contre la valeur μ_2 ne peut être déterminée a priori et la loi de τ est difficile à estimer par manque d'observations. On considère donc un modèle mal calibré.

$$dS_t = S_t (\bar{\mu}_2 + (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \mathbf{1}_{(t \leq \bar{\tau})}) dt + \bar{\sigma} S_t dB_t, \quad (4.3)$$

où la loi de $\bar{\tau}$ est exponentielle de paramètre $\bar{\lambda}$, tandis que le vrai prix du sous-jacent est toujours donné par l'Equation (4.1). Les stratégies optimales ou de détection dans ce cas se réécrivent de la même façon avec les nouvelles valeurs des paramètres.

4.1.5 L'investissement chartiste

De nombreux indicateurs (cf Sullivan et al [79]) sont utilisés par les praticiens. Nous avons limité notre étude à la moyenne mobile. Elle est en effet facile à calculer et est très utilisée pour détecter les changements de tendance dans les prix des sous-jacents. On considère un chartiste qui prend des décisions aux instants de temps discrets :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T; \quad t_k = k\Delta t.$$

où $\Delta t = \frac{T}{N}$. L'indicateur de moyenne mobile M_t^δ est défini par

$$M_t^\delta = \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t S_u du. \quad (4.4)$$

Le paramètre δ représente la taille de la fenêtre de temps utilisée pour calculer la moyenne mobile.

A l'instant 0, l'agent connaît l'historique des prix et a assez d'informations pour calculer M_0^δ . A chaque t_n , $n \in [1 \dots N]$, le chartiste suit une stratégie très simple : il investit toute sa richesse dans le sous-jacent si S_{t_n} est plus grand que la moyenne mobile $M_{t_n}^\delta$. Dans le cas contraire, il investit toute sa richesse dans l'actif sans risque. Cette stratégie d'investissement est similaire à celle utilisée par l'agent qui cherche à détecter le point de rupture. Ainsi,

$$\pi_{t_n} = \mathbf{1}_{(S_{t_n} \geq M_{t_n}^\delta)}. \quad (4.5)$$

Soit x la richesse initiale du chartiste, sa richesse à l'instant T est

$$W_T^{ch} = x \prod_{n=0}^{N-1} \left[\pi_{t_n} \left(\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} - \exp(r\Delta t) \right) + \exp(r\Delta t) \right].$$

On suppose que le chartiste utilise une fonction d'utilité logarithmique. Dans ce cas, nous pouvons calculer l'utilité espérée de sa richesse terminale. Le calcul fait en particulier apparaître la loi du mouvement brownien et de l'intégrale du mouvement brownien obtenue par Yor [81]. On trouvera dans [B2] l'expression explicite de son utilité espérée.

4.1.6 Quelques comparaisons numériques de diverses stratégies

Voici quelques comparaisons numériques en appliquant différentes stratégies. La première question que l'on peut se poser est le choix de la fenêtre pour le calcul de la moyenne mobile. La Figure 4.1 illustre la relation entre $\mathbb{E} \log(W_T)$ et δ pour deux valeurs de la volatilité. Il est clair que le choix de la valeur optimale de δ dépend du niveau de la volatilité. Quand la volatilité est faible à 0.05 (Fig. 4.1(a)), le choix optimal de δ est autour 0.3 tandis que, lorsque la volatilité est égale à 0.15 (Fig. 4.1(b)), le choix optimal de δ est autour 0.8. Ceci s'explique par le fait que le prix de l'actif étant plus variable, il faut prendre une moyenne mobile sur une plus grande période pour pouvoir analyser le dépassement de la moyenne mobile comme un signal de croissance. Une étude plus poussée de l'impact de tous les paramètres a été réalisé dans [B11].

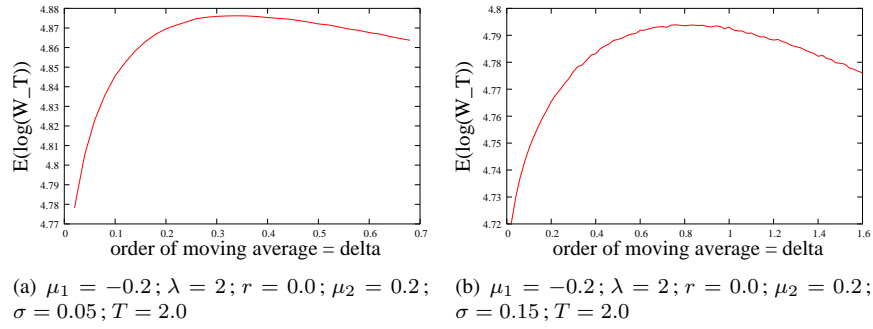


FIGURE 4.1 – Logarithme de la valeur espérée de la richesse terminale ($\mathbb{E}(\log(W_T))$) pour l’agent utilisant une moyenne mobile d’ordre δ comme fonction de δ .

Enfin, nous pouvons répondre à notre principale question : Est-il plus intéressant de suivre une stratégie de détection dans un modèle mal-spécifié ou bien de suivre une stratégie de type chartiste « libre de tout modèle ». Les résultats numériques suivants permettent de donner des éléments de réponses.

La Figure 4.2 montre que, malgré un grand nombre de paramètres mal-spécifiés, les stratégies de détection représentées dans les Figures 4.2(a) et 4.2(b) présentent de bonnes performances et sur-performent la stratégie chartiste. Cependant, la Figure 4.2(c) que la stratégie optimale avec des paramètres mal-calibrés est sur-performée par la stratégie chartiste. Ceci suggère que les techniques de détection ou l’approche de l’analyse technique peuvent être plus intéressante lorsque les paramètres sont mal-spécifiés. D’autres simulations sont disponibles dans [B11, B1, B2]. Pour conclure, notre étude numérique suggère qu’il n’y a pas de solution universelle au problème de la mauvaise spécification des paramètres.

4.2 Modèle avec changements aléatoires de drift et coûts de transaction

Par la suite, il est apparu naturel de généraliser le modèle précédent en un modèle présentant un nombre aléatoire de changement dans le drift. De plus, des coûts de transactions ont été introduits afin d’être plus réaliste.

4.2.1 Modèle

Le marché est constitué d’un actif non-risqué S^0 avec un taux sans-risque déterministe r , et d’un actif risqué de prix S dont la dérive ne prend que deux valeurs μ_1 et μ_2 avec $\mu_1 < r < \mu_2$. Les changements dans la dérive interviennent aux instants τ_n définis comme suit :

$$\tau_0 = 0, \tau_n := \nu_1 + \dots + \nu_n, n \geq 1$$

où les intervalles de temps ν_j entre deux changements sont indépendants. Les variables ν_{2n+1} (resp. ν_{2n}) sont identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ_1 (resp.

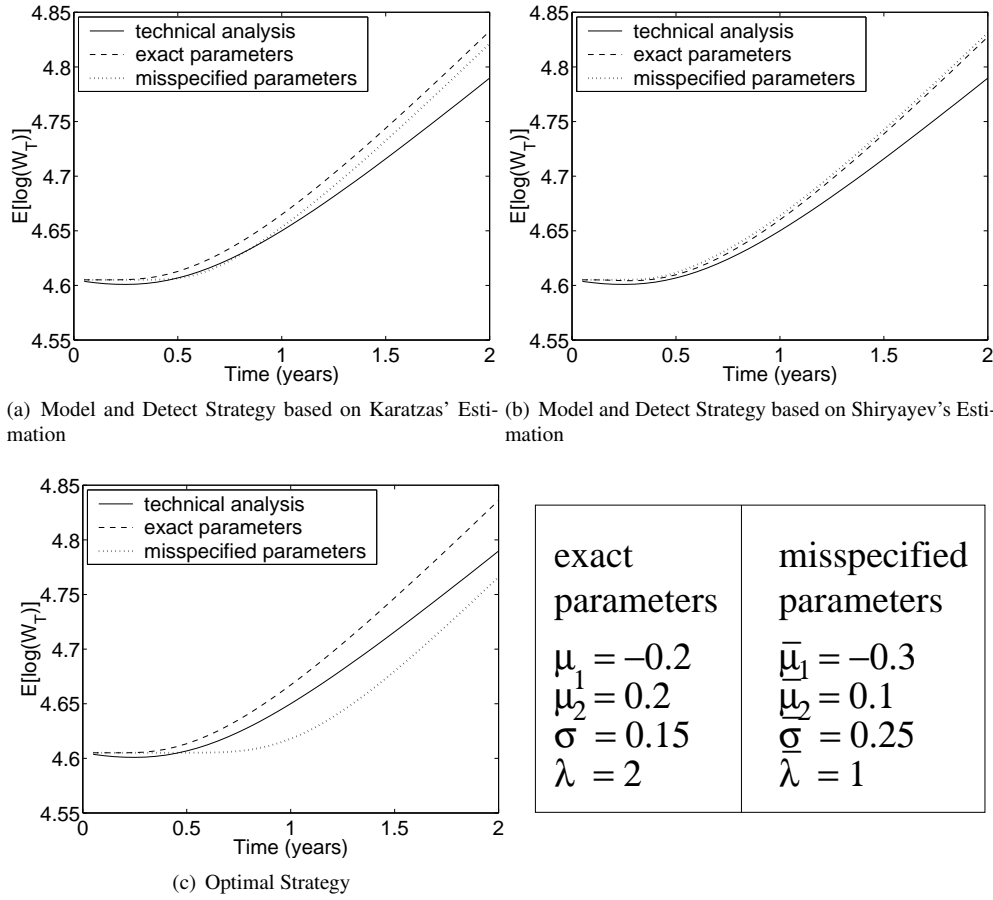


FIGURE 4.2 – Comparaison de la valeur espérée du logarithme de la richesse quand l'agent utilise une stratégie avec les paramètres exacts et avec les paramètres mal-calibrés.

λ_2). Ainsi le processus de dérive vérifie

$$\mu(t) := \begin{cases} \mu_1 & \text{si } \tau_{2n} \leq t < \tau_{2n+1}, \\ \mu_2 & \text{si } \tau_{2n+1} \leq t < \tau_{2n+2}. \end{cases}$$

On suppose que la dynamique du prix du stock satisfait l'équation

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)dt + \sigma dB_t,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité historique et la volatilité supposée constante, $\sigma > 0$.

Afin de pouvoir comparer les stratégies optimales aux stratégies chartistes, on impose que l'agent rebalance complètement son portefeuille idéalement à un instant égal au changement de tendance. Cependant les instants τ_n ne peuvent être détectés avec précision et la stratégie de l'agent doit être progressivement mesurable par rapport à la filtration des prix \mathbb{F}^S . Or cette filtration est strictement plus petite que la filtration engendrée par le mouvement brownien et les instants τ_n .

Soit T la période d'investissement. On note comme précédemment π_t la proportion de

richesse investie à l'instant t dans l'actif risqué et par U la fonction d'utilité de l'agent ayant les propriétés suivantes :

- U est la fonction log de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , ou U est strictement croissante et concave de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , $U(0) = 0$, et U est C^1 sur $]0; +\infty[$,
- il existe une constante $C = C_U$ et $0 \leq k \leq 1$ tels que pour tout $x > 0$,

$$U'(x) \leq C(1 + x^{-k}).$$

Une stratégie π est dite admissible si c'est un processus constant par morceaux, càdlàg, à valeurs dans $\{0; 1\}$, progressivement mesurable par rapport à la filtration \mathbb{F}^S et satisfaisant

$$\mathbf{E}(|U(W_T^\pi)|) < +\infty,$$

où W^π est la richesse associée à la stratégie π .

Comme précédemment, on introduit le processus de projection optionnelle

$$F_t := \mathbb{P}(\mu(t) = \mu_1 \mid \mathcal{F}_t^S),$$

et le processus d'innovation qui est défini dans ce cas par

$$\tilde{B}_t := \frac{1}{\sigma} \left(\log \frac{S_t}{S_0} - \int_0^t \left(\mu_1 F_s + \mu_2 (1 - F_s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds \right)$$

qui est un \mathbb{F}^S -mouvement brownien. On obtient que l'équation de l'actif risqué S se réécrit

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_1 F_t + \mu_2 (1 - F_t)) dt + \sigma d\tilde{B}_t. \quad (4.6)$$

L'agent fait, de plus face, à des coûts de transactions proportionnels (g_{01} pour l'achat du stock et g_{10} pour la vente). Ainsi en utilisant (4.6), le processus de richesse vérifie, pour tout $t > 0$,

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2 (1 - F_t)) - r) dt + \pi_t \sigma d\tilde{B}_t - g_{01} \mathbf{1}_{\Delta\pi_t=1} - g_{10} \mathbf{1}_{\Delta\pi_t=-1}, \quad (4.7)$$

où $\Delta\pi_t := \pi_t - \pi_{t-}$. Soit $t \in [0, T]$, on note \mathcal{A}_t l'ensemble des stratégies admissibles π définies sur $[t, T]$. Pour $i \in \{0; 1\}$ et pour tous $t \in [0; T]$, $x > 0$, $0 \leq f \leq 1$, π contrôle admissible, on pose :

$$J^i(t, x, f, \pi) = \mathbf{E}(U(W_T^\pi) \mid \pi_{t-} = i, W_{t-} = x, F_t = f),$$

et on s'intéresse au problème d'optimisation suivant :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_t} J^i(t, x, f, \pi), \quad i = 1, 2.$$

D'autres travaux traitent d'un problème similaire pour d'autres dynamiques (Brekke et Oksendal [14], Ly Vath et Pham [59], Ly Vath et al [60], Pham [70], Tang et Yong [80]).

4.2.2 Les fonctions valeurs comme solutions

Le système d'inéquation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associé au problème d'optimisation est donné par

$$(S) \quad \begin{cases} \min \left\{ -\frac{\partial V^0}{\partial t} - \mathcal{L}^0 V^0; V^0(t, x, f) - V^1(t, x(1 - g_{01}), f) \right\} = 0 \\ \min \left\{ -\frac{\partial V^1}{\partial t} - \mathcal{L}^1 V^1; V^1(t, x, f) - V^0(t, x(1 - g_{10}), f) \right\} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$\mathcal{L}^0\varphi(t, x, f) = xr \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1-f)) \frac{\partial\varphi}{\partial f}(t, x, f) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2(1-f)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial f^2}(t, x, f),$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1\varphi(t, x, f) &= x(\mu_1 f + \mu_2(1-f) - r) \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1-f)) \frac{\partial\varphi}{\partial f}(t, x, f) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, x, f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2(1-f)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial f^2}(t, x, f) + x(\mu_1 - \mu_2) f(1-f) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial f}(t, x, f). \end{aligned}$$

Le système précédent combine les spécificités des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour des contrôles impulsions et de switching. La partie impulsionsnelle qui provient des coûts de transactions, donne la comparaison entre le terme d'EDP et le terme de frontière. La partie switching est due au changement de valeur du portefeuille à chaque transaction. On montre ensuite que les fonctions valeurs (V^0, V^1) sont solutions de viscosité de ce système.

Théorème 4.3. *Soit \mathcal{V}_α l'ensemble des fonctions φ continues sur $[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]$ telles que $\varphi(t, 0, f) = 0$ et*

$$\sup_{[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]^2} \frac{|\varphi(t, x, f) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{f})|}{(1 + x^{\alpha-1} + \hat{x}^{\alpha-1})(|x - \hat{x}| + |f - \hat{f}|)} < \infty.$$

On suppose que la fonction d'utilité appartient à la classe \mathcal{U} définie ci-dessus. Alors le couple (V^0, V^1) est l'unique solution de viscosité de (4.8) sur $\mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\alpha$ vérifiant $V^0(T, x, f) = V^1(T, x, f) = U(x) =$ pour tout $(x, f) \in [0, +\infty) \times [0, 1]$. Si U est l'utilité logarithmique, alors (V^0, V^1) est l'unique solution de (4.8) dans l'ensemble des fonctions $\{\ln(x) + \bar{V}(t, f)\}$ où \bar{V} est continue sur $[0, T] \times [0, 1]$.

La preuve est assez classique. La difficulté réside dans le fait de trouver deux contrôles admissibles proches qui ont le même coût ξ .

4.2.3 Résultats numériques

Schéma numérique

La caractérisation de (V^0, V^1) comme unique solution de (4.8) permet de proposer un schéma numérique d'approximations. On considère le cas où la fonction d'utilité $U(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas, pour tous t, x, f, i et π on a $V^i(t, x, f) = U(x)V^i(t, 1, f)$ pour $i \in \{0, 1\}$. En notant $V^i(t, f) = V^i(t, 1, f)$, le système (4.8) se simplifie de la manière suivante

$$\begin{cases} \min \left\{ -\frac{\partial V^0}{\partial t}(t, f) - \tilde{\mathcal{L}}^0 V^0(t, f); V^0(t, f) - (1 - g_{01})^\alpha V^1(t, f) \right\} = 0 \\ \min \left\{ -\frac{\partial V^1}{\partial t}(t, f) - \tilde{\mathcal{L}}^1 V^1(t, f); V^1(t, f) - (1 - g_{10})^\alpha V^0(t, f) \right\} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions $V^0(T, f) = 1$ et $V^1(T, f) = 1$ pour tout $0 \leq f \leq 1$. Les opérateurs $\tilde{\mathcal{L}}^i, i = 1, 2$ sont obtenus à partir des opérateurs $\mathcal{L}^i, i = 1, 2$ définis précédemment.

On construit les approximations (\hat{V}^0, \hat{V}^1) des fonctions valeur (V^0, V^1) par discrétisation. Soit $\hat{V}^0(T, \cdot) = \hat{V}^1(T, \cdot) = 1$. A chaque instant,

- on pose $\bar{V}^0(t, \cdot) = \hat{V}^0(t, \cdot)$ et $\bar{V}^1(t, \cdot) = \hat{V}^1(t, \cdot)$,
- on calcule $\bar{V}^i(t - \delta t, f)$ solution de $S^i \bar{V}^i(t, f) = 0$ où S^i est l'opérateur différences finies défini pour un pas de discrétisation en temps δt et en espace δf par

$$\begin{aligned} S^i \varphi(t, f) &= \frac{\varphi(t, f) - \varphi(t - \delta t, f)}{\delta t} + \hat{\mathcal{L}}^i \varphi(t, f) \\ &= \frac{\varphi(t, f) - \varphi(t - \delta t, f)}{\delta t} + c(f, i) \varphi(t, f) \\ &\quad + b(f, i)^+ \frac{\varphi(t, f + \delta f) - \varphi(t, f)}{\delta f} - b(f, i)^- \frac{\varphi(t, f) - \varphi(t, f - \delta f)}{\delta f} \\ &\quad + a(f) \frac{\varphi(t, f + \delta f) - 2\varphi(t, f) + \varphi(t, f - \delta f)}{\delta f^2}, \end{aligned}$$

$$\text{où } x^+ = \frac{|x|+x}{2} \text{ et } x^- = \frac{|x|-x}{2},$$

- enfin on pose $\hat{V}^0(t - \delta t, f) = \max\{\bar{V}^0(t - \delta t, f); (1 - g_{01})^\alpha \bar{V}^1(t - \delta t, f)\}$, et $\hat{V}^1(t - \delta t, f) = \max\{\bar{V}^1(t - \delta t, f); (1 - g_{10})^\alpha \bar{V}^0(t - \delta t, f)\}$.

Par induction, on obtient le résultat suivant

Lemme 4.4. (\hat{V}^0, \hat{V}^1) est l'unique solution du système

$$\begin{cases} \min \left\{ -S^0 \varphi^0(t, f); \varphi^0(t - \delta t, f) - (1 - g_{01})^\alpha \varphi^1(t - \delta t, f) \right\} = 0, \\ \min \left\{ -S^1 \varphi^1(t, f); \varphi^1(t - \delta t, f) - (1 - g_{10})^\alpha \varphi^0(t - \delta t, f) \right\} = 0, \\ \hat{V}^0(T, \cdot) = \hat{V}^1(T, \cdot) = 1. \end{cases}$$

Fonction valeur approchée

Le schéma précédent a été implémenté pour $U(x) = \sqrt{x}$. La Figure 4.3(a) montre la fonction valeur approchée \hat{V}^0 en fonction du temps et de la variable f . La Figure 4.3(b) est un zoom du graphique précédent pour $2.5 \leq t \leq 3$. La Figure 4.4 montre la régularité en temps. En particulier, il apparaît que la dérivée en temps est discontinue, ce qui est conforme au résultat du Théorème 4.3. En effet, nous avons montré que la fonction valeur est Lipschitz continue en la variable f et Hölder d'indice $1/2$ en temps.

Stratégie efficiente

Comme $\mu_2 > \mu_1$, l'investisseur souhaite investir dans le sous-jacent quand $\mu(t) = \mu_2$, i.e lorsque f est proche de 0, et vendre quand $\mu(t) = \mu_1$, i.e lorsque f est proche de 1. Sous réserve de donner un sens à cette notion de proximité, nous proposons une stratégie que nous appelons 'efficiente' qui correspond au Principe de Programmation Dynamique pour \hat{V}^0, \hat{V}^1 i.e

- Calculer (\hat{V}^0, \hat{V}^1) pour tous t et f sur une grille de discrétisation.
- A l'instant t de la grille, calculer une estimation \hat{F}_t de F_t à partir des observations des prix

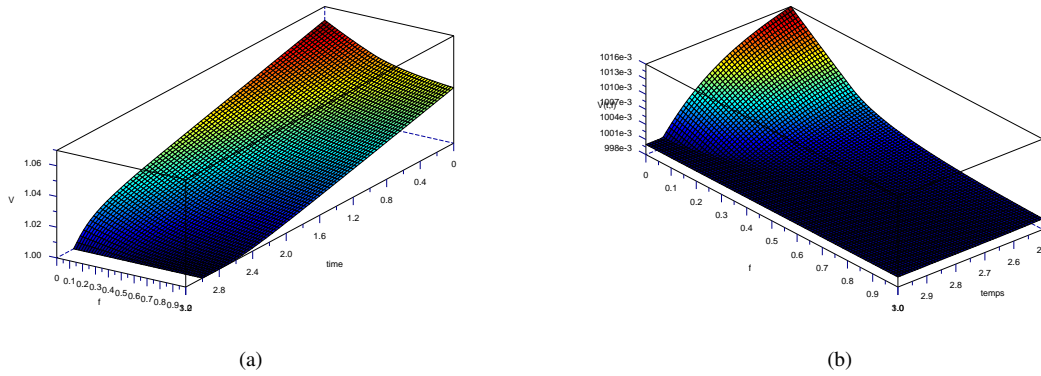
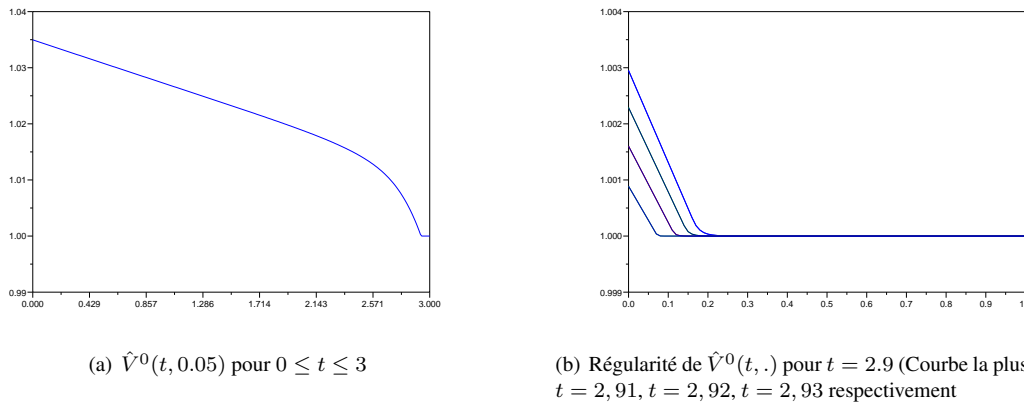


FIGURE 4.3 – Fonction valeur V^0



(a) $\hat{V}^0(t, 0.05)$ pour $0 \leq t \leq 3$

(b) Régularité de $\hat{V}^0(t, \cdot)$ pour $t = 2.9$ (Courbe la plus haute), $t = 2.91$, $t = 2.92$, $t = 2.93$ respectivement

FIGURE 4.4 – Régularité de \hat{V}^0 en temps

- Comparer $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$ et $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$: acheter si $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{01})^\alpha \hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$, vendre si $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{10})^\alpha \hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$.

Une étude numérique a montré que les performances de cette stratégie étaient comparables à celles de la stratégie optimale.

Paramètres mal spécifiés

Enfin, dans la suite des études menées dans [B2], nous comparons deux stratégies : la première nommée stratégie mal-spécifiée est la stratégie efficiente lorsque les coefficients sont mal calibrés. La seconde provient d'une stratégie utilisant l'analyse technique et basée sur la moyenne mobile. Cette seconde stratégie ne requiert aucune connaissance sur la dynamique du sous-jacent (cf [B1]). La stratégie est définie par $\pi_t = 1_{S_t \geq M_t^\delta}$ où M^δ est la moyenne mobile définie par (4.4).

Les vrais paramètres du modèle sont $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\sigma = 0.15$, $g_{01} = g_{10} = 0.005$. On utilise comme benchmark la stratégie efficiente avec les vrais paramètres et une stratégie de type 'buy and hold'. Dans la Figure 4.5(a), les paramètres mal spécifiés sont $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.3$, $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$. On observe dans ce

cas que la stratégie efficiente sur la modèle mal calibré est encore meilleure que la stratégie basée sur la moyenne mobile. Cependant, pour un autre jeu de paramètres mal spécifiés $\mu_1 = -0.3, \mu_2 = 0.17, \sigma = 0.3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$, la Figure 4.5(b) montre au contraire que la stratégie chartiste est plus performante.

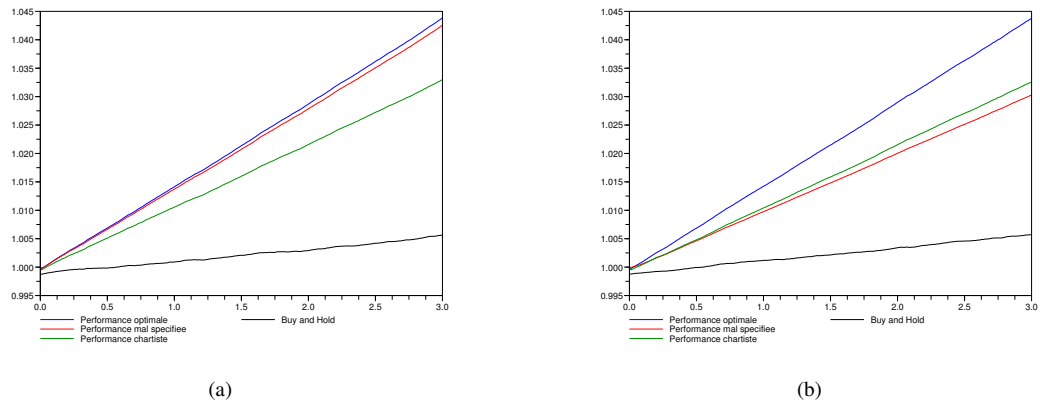


FIGURE 4.5 – Comparaison de stratégies

Lors de ces travaux, nous avons étudié les performances de stratégies chartistes par rapport à des stratégies d'investissement basés sur des modèles mathématiques. En particulier, nous avons montré que pour certains choix de paramètres mal-calibrés, les stratégies chartistes étaient plus performantes. Des études mathématiques supplémentaires pourraient être faites pour bien comprendre les effets de la mauvaise calibration des paramètres dans les modèles étudiés.

Bibliographie

- [1] R. Almgren and N. Chriss. Optimal execution of portfolio transactions. *J. Risk*, 3 :5–39, 2000.
- [2] I. Althöfer, M. Beckmann, and F. Salzer. On some Random Walk Games with Diffusion Control. *Preprint*, 2015.
- [3] J. Amendinger. Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations. *Stochastic Process. Appl.*, 89(1) :101 – 116, 2000.
- [4] J. Amendinger, D. Becherer, and M. Schweizer. A monetary value for initial information in portfolio optimization. *Finance Stoch.*, 7(1) :29–46, 2003.
- [5] J. Amendinger, P. Imkeller, and M. Schweizer. Additional logarithmic utility of an insider. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :263–286, 1998.
- [6] S. Ankirchner, S. Dereich, and P. Imkeller. The Shannon information of filtrations and the additional logarithmic utility of insiders. *Ann. Probab.*, 34(2) :743–778, 2006.
- [7] S. Ankirchner and P. Imkeller. Financial markets with asymmetric information : information drift, additional utility and entropy. In *Stochastic processes and applications to mathematical finance*, pages 1–21. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [8] T. R. Bielecki, M. Jeanblanc, and M. Rutkowski. Hedging of defaultable claims. In *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003*, volume 1847 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–132. Springer, Berlin, 2004.
- [9] T. R. Bielecki, M. Jeanblanc, and M. Rutkowski. Modeling and valuation of credit risk. In *Stochastic methods in finance*, volume 1856 of *Lecture Notes in Math.*, pages 27–126. Springer, Berlin, 2004.
- [10] T. R. Bielecki and M. Rutkowski. *Credit Risk : modeling, valuation and hedging*. Springer, Berlin, 2002.
- [11] C. Blanchet-Scalliet and M. Jeanblanc. Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims. *Finance Stoch.*, 8(1) :145–159, 2004.
- [12] B. Bouchard and H. Pham. Wealth-path dependent utility maximization in incomplete markets. *Finance Stoch.*, 8(4) :579–603, 2004.
- [13] B. Bouchard and N. Touzi. Discrete-time approximation and monte-carlo simulation of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 111(2) :175 – 206, 2004.
- [14] K.A. Brekke and B. Oksendal. Optimal switching in an economic activity under uncertainty. *SIAM J. Control Optim.*, 32(4) :1021–1036, 1994.
- [15] P. Briand and Y. Hu. Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs. *J. Funct. Anal.*, 155(2) :455–494, 1998.

- [16] D. Brigo and M. Masetti. Risk neutral pricing of counterparty risk. In M. Pykhtin, editor, *In Counterparty Credit Risk Modeling : Risk Management, Pricing and Regulation*. Risk Books, London, 2006.
- [17] D. Brigo, M. Morini, and A. Pallavicini. *Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding : With Pricing Cases For All Asset Classes*. Wiley, 2013.
- [18] W. Brock, J. Lakonishok, and B. Lebaron. Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. *The Journal of Finance*, 47(5) :1731–1764, 1992.
- [19] Y. Chi and X. S. Lin. On the threshold dividend strategy for a generalized jump–diffusion risk model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 48(3) :326–337, 2011.
- [20] L. Coutin and D. Dorobantu. First passage time law for some lévy processes with compound poisson : Existence of a density. *Bernoulli*, 17(4) :1127–1135, 11 2011.
- [21] J. Cox and C.F. Huang. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49(1) :33 – 83, 1989.
- [22] S. Crépey and S. Song. Invariant Times. working paper or preprint, November 2014.
- [23] S. Crépey and S. Song. Bsdés of counterparty risk. *Stochastic Process. Appl.*, 125(8) :3023–3052, 2015.
- [24] Stéphane Crépey and Tomasz R. Bielecki. *Counterparty risk and funding*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 2014. A tale of two puzzles, With an introductory dialogue by Damiano Brigo.
- [25] H. Daniels. Sequential tests constructed from images. *Ann. Stat.*, 10 :394–400, 1982.
- [26] M. Escobar, S. Ferrando, and X. Wen. Three dimensional distribution of Brownian motion extrema. *Stochastics*, 85(5) :807–832, 2013.
- [27] A. Eyraud-Loisel and M. Royer-Carenzi. BSDEs with random terminal time under enlarged filtration. American-style options hedging by an insider. *Random Oper. Stoch. Equ.*, 18(2) :141–163, 2010.
- [28] H. Föllmer and P. Imkeller. Anticipation cancelled by a Girsanov transformation : a paradox on Wiener space. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 29(4) :569–586, 1993.
- [29] H. J. Furrer and H. Schmidli. Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insurance Math. Econom.*, 15(1) :23–36, 1994.
- [30] J. Gregory. Being two-faced over counterparty risk. *Risk*, 22(2) :86–90, 2009.
- [31] A. Grorud and M. Pontier. Insider trading in a continuous time market model. *Int. Journal of Theor. and App. Fin.*, 1(3) :331–347, 1998.
- [32] E. J. Gumbel. Bivariate logistic distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 56(294) :335–349, 1961.
- [33] C. Hillairet and Y. Jiao. Credit risk with asymmetric information on the default threshold. *Stochastics*, 84(2-3) :183–198, 2012.
- [34] S. D. Hodges and A. Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of futures markets*, 8(2) :222–239, 1989.

- [35] S. Iyengar. Hitting lines with two-dimensional brownian motion. *SIAM J. Appl. Math.*, 45(6) :983–989, 1985.
- [36] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, volume 714 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1979.
- [37] J. Jacod. Grossissement initial, hypothèse h' et théorème de girsanov. In *Séminaire de calcul stochastique 1982 – 83, Paris*, volume 1118 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [38] M. Jeanblanc and Y. Le Cam. Progressive enlargement of filtrations with initial times. *Stochastic Processes Appl.*, 119 :2523–2543, 2009.
- [39] M. Jeanblanc, D. Mastrolia, T. and Possamai, and A. Réveillac. Utility maximization with random horizon : a bsde approach. *ArXiv e-prints*, 2015.
- [40] N. Jegadeesh. Discussion. *The Journal of Finance*, 55(4) :1765–1770, 2000.
- [41] T. Jeulin. *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, volume 833 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1980.
- [42] T. Jeulin and M. Yor. Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, volume 649 of *Lecture Notes in Math.*, pages 78–97. Springer, Berlin, 1978.
- [43] T. Jeulin and M. Yor, editors. *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, volume 1118 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1985. Papers from the seminar on stochastic calculus held at the Université de Paris VI, Paris, 1982/1983.
- [44] Ying Jiao, Idris Kharroubi, and Huyên Pham. Optimal investment under multiple defaults risk : a BSDE-decomposition approach. *Ann. Appl. Probab.*, 23(2) :455–491, 2013.
- [45] Ying Jiao and Huyên Pham. Optimal investment with counterparty risk : a default-density model approach. *Finance Stoch.*, 15(4) :725–753, 2011.
- [46] I. Karatzas. A note on bayesian detection change-of-poits with an expected miss criterium. *Statistical Decisions*, 21(1) :1–13, 2003.
- [47] I. Karatzas, J. P. Lehoczky, and Steven E. Shreve. Optimal portfolio and consumption decisions for a 'small investor' on a finite horizon. *SIAM J. Control Optim.*, 25(6) :1557–1586, 1987.
- [48] I. Karatzas and I. Pikovsky. Anticipative portfolio optimization. *Adv. in Appl. Probab.*, 28(4) :1095–1122, 1996.
- [49] I. Karatzas and Schreve S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer New York, 1998.
- [50] I. Karatzas and H. Wang. Utility maximization with discretionary stopping. *SIAM J. Control Optim.*, 39(1) :306–329, 2000.
- [51] J. Keilson and J. A. Wellner. Oscillating Brownian motion. *J. Appl. Probability*, 15(2) :300–310, 1978.
- [52] I. Kharroubi and T. Lim. Progressive enlargement of filtrations and backward stochastic differential equations with jumps. *J. Theoret. Probab.*, 27(3) :683–724, 2014.

- [53] I. Kharroubi, T. Lim, and A. Ngupeyou. Mean-variance hedging on uncertain time horizon in a market with a jump. *Appl. Math. Optim.*, 68(3) :413–444, 2013.
- [54] M. Kobylanski. Résultats d’existence et d’unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs à croissance quadratique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(1) :81–86, 1997.
- [55] H. Li, J. Sheffield, and E.F. Wood. Bias correction of monthly precipitation and temperature fields from intergovernmental panel on climate change ar4 models using equidistant quantile matching. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 115(D10) :n/a–n/a, 2010. D10101.
- [56] T. Lim and M.-C. Quenez. Portfolio optimization in a default model under full/partial information. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 29(4) :565–587, 2015.
- [57] Thomas Lim and Marie-Claire Quenez. Exponential utility maximization in an incomplete market with defaults. *Electron. J. Probab.*, 16 :no. 53, 1434–1464, 2011.
- [58] A. W. Lo, H. Mamaysky, and J. Wang. Foundations of technical analysis : Computational algorithms, statistical inference, and empirical implementation. *The Journal of Finance*, 55(4) :1705–1770, 2000.
- [59] V. Ly Vath and H. Pham. Explicit solution to an optimal switching problem in the two-regime case. *SIAM J. Control Optim.*, 46(2) :395–426, 2007.
- [60] V. Ly Vath, H. Pham, and S. Villeneuve. A mixed singular/switching control problem for a dividend policy with reversible technology investment. *Ann. Appl. Probab.*, 18(3) :1164–1200, 06 2008.
- [61] R. Mansuy and M. Yor. *Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting*, volume 1873 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [62] J. M. McNamara. Optimal control of the diffusion coefficient of a simple diffusion process. *Math. Oper. Res.*, 8(3) :373–380, 1983.
- [63] R.C. Merton. On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 :449–470, 1974.
- [64] A. Nikeghbali and M. Yor. A definition and some characteristic properties of pseudo-stopping times. *Ann. Probab.*, 33(5) :1804–1824, 09 2005.
- [65] E. Pardoux. BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 503–549. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [66] S. V. Pastukhov. On some probabilistic-statistical methods in technical analysis. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 49 :297–316, 2004.
- [67] P. Patie. *On some first passage times problems motivated by financial applications*. PhD thesis, ETH Zurich, 2004.
- [68] F. Patras. A reflection principle for correlated defaults. *Stoch. Processes Appl.*, 116 :690–698, 2006.
- [69] S. Peng. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics Stochastics Rep.*, 37(1-2) :61–74, 1991.
- [70] H. Pham. On the smooth-fit property for one-dimensional optimal switching problem. In Catherine Donati-Martin, Michel Émery, Alain Rouault, and Christophe Stricker,

- editors, *Séminaire de Probabilités XL*, volume 1899 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 187–199. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [71] Richard Rouge and Nicole El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Mathematical Finance*, 10(2) :259–276, 2000.
- [72] M. Royer. Bsdes with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with pdes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 76(4) :281–307, 2004.
- [73] A. Schied. A control problem with fuel constraint and Dawson-Watanabe superprocesses. *Ann. Appl. Probab.*, 23(6) :2472–2499, 2013.
- [74] A. Schied, T. Schöneborn, and M. Tehranchi. Optimal basket liquidation for cara investors is deterministic. *Applied Mathematical Finance*, 17(6) :471–489, 2010.
- [75] H. Schmidli. Cramer-lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insurance Math. Econom.*, 16(2) :135–149, 1995.
- [76] A. Shiryaev. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. In *Mathematical Finance-Bachelier Congress, 2000 (Paris)*, pages 487–521. Springer Finance, Springer, Berlin, 2002.
- [77] S. Song. *Grossissement de filtrations et problèmes connexes*. PhD thesis, Paris VII, 1987.
- [78] S. Song. Local solution method for the problem of enlargement of filtration. *ArXiv e-prints*, February 2013.
- [79] R. Sullivan, A. Timmermann, and H. White. Data-snooping, technical trading rule performance, and the bootstrap. *The Journal of Finance*, 54(5) :1647–1691, 1999.
- [80] S. Tang and J. Yong. Finite horizon stochastic optimal switching and impulse controls with a viscosity solution approach. *Stochastics Stochastics Rep.*, 45(3-4) :145–176, 1993.
- [81] M. Yor. On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(3) :509–531, 1992.