



HAL
open science

Développement d'un nouveau coeur numérique pour le code de calcul Salammbô de modélisation des ceintures de radiation terrestres

Nour Allah Dahmen

► **To cite this version:**

Nour Allah Dahmen. Développement d'un nouveau coeur numérique pour le code de calcul Salammbô de modélisation des ceintures de radiation terrestres. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2020. Français. NNT: . tel-03158067

HAL Id: tel-03158067

<https://hal.science/tel-03158067v1>

Submitted on 3 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

**En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Délivré par l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**

**Présentée et soutenue par
Nour Allah DAHMEN**

Le 17 décembre 2020

**Développement d'un nouveau coeur numérique pour le code de
calcul Salammbô de modélisation des ceintures de radiation
terrestres**

Ecole doctorale : **AA - Aéronautique, Astronautique**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
ISAE-ONERA PSI Physique Spatiale et Instrumentation

Thèse dirigée par
Vincent MAGET et François ROGIER

Jury

Mme Hélène BARUCQ, Rapporteur
Mme Viviane PIERRARD, Rapporteur
M. Philippe HELLUY, Examineur
M. Vincent MAGET, Directeur de thèse
M. François ROGIER, Co-directeur de thèse
M. Pierre-Louis BLELLY, Président

M. Jérôme DRONIOU, Invité
M. Nicolas BALCON, Invité

ONERA

THE FRENCH AEROSPACE LAB

"La totalité est plus que la somme des parties."
Aristote

Remerciements

Nietzsche avait dit que "si on regardait longtemps au fond des abysses, ces derniers pouvaient voir au fond de nous-même". La thèse aura été pour moi un abysse de la taille de la fosse des Mariannes ! Ça aura été 3 années, deux mois, 15 jours, 2 heures et 30 minutes d'émotions intenses pendant lesquelles je jonglais entre un doute permanent teinté de nihilisme (c'est fou ce qu'un schéma numérique peut vous faire quand il ne converge pas) et un optimisme sans limite (c'est encore plus fou ce que peut vous faire un schéma numérique quand il converge).

Ça aura été un chapitre de vie palpitant, pendant lequel j'aurai exploré les tréfonds de mon existence pour trouver l'énergie nécessaire à mon combat contre le bruit de fond destructeur du syndrome de l'imposteur ! Vous connaissez sûrement ce maudit parasite qui fait des ravages dans la population des doctorants chétifs, qui vous suit partout et tel un anti Jiminy Cricket vous pourrit la vie à coup de « Comment ont-ils pu donner ce travail à un incompetent comme toi . . . » ou encore « Ton entourloupe n'a fait que trop durer ! » Malheureusement, je ne suis pas en mesure de donner aux futures générations de doctorants une recette de vaccin miracle pour combattre ce fléau (cc *Pfizer*TM) pour autant, je peux vous assurer qu'avoir de merveilleux êtres humains autour de vous peut être une partie de la solution.

Gladys Bronwyn Stern avait dit que "la reconnaissance silencieuse ne servait à personne". Je pense aussi que quand on est reconnaissant envers quelqu'un, il faut le lui faire savoir. Voyez-en cela un corollaire social du principe d'action réaction. C'est à cela que sert la rubrique de remerciements dans un manuscrit de thèse (merci pour l'info) dont j'appréhendais la rédaction plus que celle de mon dernier chapitre de résultats. Je vais donc essayer, avec mes mots, de témoigner ma gratitude aux personnes qui m'auront été, pendant la thèse et dans ma vie en général, d'un mentorat académique et intellectuel exemplaire, d'un soutien moral et émotionnel infaillible.

Baaaaan, trêve de mondanité...

Je commence par Vincent, mon directeur de thèse, l'éternel trentenaire, qui m'a ouvert la porte du monde fantastique du *Space Physics*, à qui je dois ma première entorse de la cheville, ainsi que d'innombrables "*remontada*" de moral inespérées (maudit confinement) grâce à sa gentillesse et sa bienveillance inégalée (Le détecteur de phrases longues de Vincent a sûrement explosé il y a un bon moment). Il aura amplement mérité le titre du meilleur directeur de thèse du 1er étage du DPHY au moins et sans doute celui de meilleur directeur de thèse du monde.

À François, mon co-directeur de thèse, le saint patron des schémas numériques, qui a su depuis les premiers jours de la thèse, placer en moi une confiance totale en mes capacités et qui a toujours su me parler avec les mots justes et vrais aux moments fatidiques. Nous n'aurons hélas pas réussi à établir un théorème ensemble François, mais je me contenterai tout de même de l'axiome qui établit à quel point travailler avec toi était enrichissant.

À Jérôme, le meilleur coach du "*mercato*" des volumes finis, qui m'a abondé de son hospitalité et de son temps quand j'ai eu le privilège de le visiter dans son unité de recherche en Australie et dont l'intervention dans mes travaux de thèse fut cruciale.

Mon séjour en Australie n'aura pas été possible sans l'appui matériel du Centre National d'études spatiales - CNES, co-financeur de ma thèse et véritable institution de dégustation culinaire inégalée (e.g. les buffets des JC1,JC2,TTVS...) représentée par mes correspondants Denis Standarovski qui m'a suivi durant les 2 premières années et Nicolas Balcon qui m'a suivi pendant la dernière année.

Je tiens également à remercier chaleureusement Hélène Barucq et Vivianne Pierrard pour avoir accepté d'être rapporteuses de ma thèse et pour leurs précieuses corrections et rectifications sur le manuscrit. Je remercie aussi Philippe Helluy et Pierre-Louis Bletly pour m'avoir honoré de leur présence en tant que membre du jury et pour leurs retours très encourageants sur mes travaux.

Aux ERSiens, et tout particulièrement, au patriarche de la tribu Sébastien pour son dévouement à l'équipe et sa disponibilité quand j'avais des questions aussi bêtes soient-elles, Angélica pour la bonne humeur qu'elle installe avec ses éclats de rire que j'entendais depuis le couloir, Didier pour ses encouragements et son aide inestimable lors des répétés de la soutenance, Antoine le futur récipiendaire du Nobel d'informatique (il faut lui en créer un si il n'existe pas) qui n'hésitait pas à m'aider quand le maillage Salammbô me faisait tourner la tête, Pablo le farceur du bureau 206 qui m'a rendu caféinoman. Grâce à vous, je me sens encore plus chanceux et comblé de pouvoir continuer l'aventure à l'ONERA.

Aux membres du DPHY, véritable ruche humaine, constituée de femmes et d'hommes d'une excellence académique sans équivoque avec de grandes qualités humaines rendant le travail avec eux très convivial. Je tiens en particulier à remercier Christine pour m'avoir accompagné durant la thèse dans toutes mes démarches administratives et pour m'avoir épaulé pendant l'organisation des JDD en 2ème année.

Évidemment qui dit DPHY dit forcément *Les Bonny and Clyde* des détecteurs, *les Chevallier et Lasपाल* de l'irradiation, les *Daft Punk* des expériences à savoir Claude et Stéphane ou Stéphane et Claude (à vous de décider de l'ordre). Merci pour toutes vos farces hilarantes, vos passages inopinés au bureau, sacrément efficaces pour me réchauffer le cœur lors d'un énième bug de Salammbô VF, et de me rappeler la futilité de la vie. Vous êtes l'incarnation humaine de la citation de *Spinoza* : "Si vous voulez que la vie vous sourit, apportez-lui d'abord votre bonne humeur". Mention spéciale pour les tentatives ratées de Claude pour parler en arabe (parfois ça virait involontairement vers un mélange entre du kurde et de l'albanais) et pour les discussions passionnantes avec Stéphane sur la beauté de l'Australie.

Aux doctorants et post-doc que j'ai pu rencontrer pendant cette aventure, et qui ont été de sacrés compagnons de route avec qui j'ai partagé de super moments de convivialité comme la bande du DTIS : Emanuele (avec qui j'ai enterré la hache de guerre carthago-romaine... ou pas?), Mathieu, Nadir, César, Jeanne (Bonne année!), Konstantinos, Paul, Ronan... mais aussi la bande du DPHY : Marine et Kevin (mes premiers co-bureaux avec qui on formait les pépites de l'ONERA, toujours copié, jamais égalé), Eudes, Adrien, Guilhem, Guillaume, Pauline (compère du dessous des cartes version ONERA), Hector (*Viva Zapata!*), Abdess (l'écriture de ce pavé m'a trop fatigué, ça te dit une pause-café?), Maxime et Guillaume, en espérant revoir un de ces quatre ceux qui sont passés à d'autres batailles de la vie et en souhaitant pleins de courage et de ténacité pour tous ceux qui ont encore le nez dans le guidon (le paragraphe 1 pourrait vous être utile).

À la clique de "jeunes cadres dynamiques" que je fréquente depuis 8 ans déjà, dont les rangs se sont renforcés d'année en année par des personnes remarquables, qui porte le glorieux patronyme des *howm* (initialement en référence au fameux morceau "*Lil' homies*" de *2pac*) mais dont l'homophonie avec le mot anglais *home*, rappelle à quel point je me sens "chez moi" quand je suis avec eux : Les

inébranlables fondateurs Fet et Hachem (to ze moon), mon éternel coloc Houcem, la rayonnante Bochra, l'humble seigneur du Gémini 209 Adnane, mon double compatriote Med Azri, the best Bestie Ainsley, Mehdi l'érudit, Alexandre le marabout de la clio (et futur confrère), Nick le magnifique, Rizck le « Rzouga », Nour mon homonyme préférée, Skander l'inventif, Akshara la joyeuse et Fatima la sage (Bon courage pour ta thèse!).

À mes acolytes de la prépa Tarek et Raed, qui derrière leurs carapaces de brutes conservent un fond aussi pur qu'un diamant. Petite pensée à Rourou le doctorant, à qui je rappelle que "la rouille ne pourra jamais dégrader, son immense coeur d'acier!".

À l'indétrônable, l'incomparable (et probablement indéfendable) « groupe BEHIA » et son univers étendu, un patchwork hétéroclite d'êtres humains (faudra vérifier quand même) aussi déjantés qu'exceptionnels, qui pendant mes phases d'apnées dans les océans des doutes aura été mon réservoir d'oxygène, et qui m'auront fait tenir debout par une thérapie d'intox (sacrement efficace) un certain été 2019, j'ai nommé : Le couple mythique Sélim (mon tournevis préféré) et Mariem (le rayon de soleil incarné), à qui je conseille vivement de breveter le concept Sloumita, Les Tghaanks ou mes chères mélancoliques anonymes et mon premier rempart contre la déprime : Mourad l'empereur généreux (sosie officiel de *Spinoza*), Sabrina ma jumelle ex utero et le Don quichotte de Oued Ellil Ghassen, mais aussi Fares le baron du fonfon, Les Maalejettes guillerettes Marwa et Safa, la douce Zeineb, mon complice intellectuel Ismail (à qui je dois ma première rencontre avec un astronaute!) et le légendaire Housseem.

On dit que le choix fait les amitiés et que le sort fait les parents. Pour ma part, le sort ne pouvait mieux m'offrir qu'une famille aussi aimante et généreuse comme la mienne : À mon père, Omar, ce personnage avec une carrure digne d'une divinité de l'Olympe et qui m'aura divulgué et transmis au fil du temps, ses meilleures qualités humaines. À ma mère, Latifa, qui incarne au mieux avec sa délicatesse la signification de son nom en arabe et qui fut, est et restera toujours ma boussole dans les tempêtes de la vie. À mes sœurs Mariem et Aicha pour qui je témoignes mon immense fierté envers les accomplissements qu'elles ont réalisés et ceux qui restent à venir et qui peuvent être sûr que je serais toujours à leurs côtés (Hélas je suis tenu par le sermon de la Pomme).

À ma défunte grand-mère, Hamida, une battante admirable, simple dans sa grandeur et grande dans sa simplicité, qui a mon grand dam n'aura pas été présente parmi nous dans ce monde pour assister à ma consécration mais qui est partie avec la sérénité que j'allais y parvenir.

À tous les membres de ma famille élargie, mes oncles, mes tantes, qui m'ont comblé d'amour et de bienveillance, qui m'ont toujours soutenu et cru en mes capacités, à mes cousins aînés (Safia, Safouen, Manel, Oussema...) qui ont découvert chez moi ma fibre scientifique ou qui ont contribué au déterminisme positif qui m'a amené à écrire ces lignes, à mes professeurs du lycée et de la prépa qui ont bien entretenu cette flamme. Vous méritez chacun une rubrique de remerciements à part! Peut-être dans un prochain manuscrit de thèse de doctorat, mais en histoire cette fois...

À la magie du destin (ou l'ironie du sort), qui m'a étrangement lié à Gustave Flaubert, ayant écrit le roman *Salammbô* après un voyage à Tunis, ma ville natale...

Table des matières

Introduction	11
I Introduction à la modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres	13
I.1 Présentation des ceintures de radiation	14
I.1.1 Le champ magnétique terrestre à l'origine des ceintures de radiation	14
I.1.2 Caractéristiques physiques des ceintures de radiation terrestres	14
I.1.3 Le mouvement des particules piégées des ceintures de radiation	17
I.2 La dynamique des ceintures de radiation terrestres	23
I.2.1 Une dynamique pilotée par les interactions Soleil - Terre	23
I.2.2 Activité solaire et ceintures de radiation électrons : Une dynamique multi-physiques et multi-échelles	30
I.2.3 Synthèse des processus d'interactions	33
I.2.4 Exemples de couplage entre le vent solaire et la dynamique des ceintures de radiation électrons de la Terre	34
I.3 La modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres	36
I.3.1 Besoins et enjeux de la modélisation	36
I.3.2 Boite à outils de la modélisation : modèles empiriques, codes physiques et outils d'assimilations de données	37
I.3.3 La modélisation théorique de la dynamique des ceintures de radiation : L'équation de Fokker-Planck	38
I.3.4 Le code Salammbô de l'ONERA de modélisation des ceintures de radiation	40
I.4 Les limitations du coeur numérique du code Salammbô	43
I.4.1 Le coeur numérique actuel de Salammbô	43
I.4.2 Limitations du coeur numérique de Salammbô	45
I.4.3 Pistes d'évolution existantes pour le coeur numérique de Salammbô	50
I.5 Présentation des objectifs de la thèse	52
II Caractérisation du nouveau coeur numérique de Salammbô-Électron	53
II.1 Éléments d'analyse fonctionnelle et algébrique	54
II.1.1 Notations, définitions et espaces fonctionnels	54
II.1.2 Formulation mathématique du problème diffusif étudié	54
II.2 Représentativité physique de la solution numérique de l'équation de diffusion	55
II.2.1 Formulations continues des principes du maximum, du minimum et de la positivité	55
II.2.2 Formulations discrètes des principes du maximum, du minimum et de la positivité	56
II.2.3 Préliminaires algébriques : M -matrice, matrice monotone et <i>Weakly regular splitting</i>	56
II.2.4 Préserver le principe du maximum et la positivité par la monotonie du schéma	59
II.2.5 Exemples de perte de la monotonie du schéma par perte de la structure M -matrice	59
II.3 La méthode des volumes finis comme alternative pour la discrétisation spatiale	61
II.3.1 Principe de la méthode des volumes finis	61
II.3.2 Les différentes familles de schémas aux volumes finis	64

II.4	Conditions de monotonie alternatives pour un schéma aux volumes finis : les conditions de <i>Nordbotten</i>	75
II.5	Mise en place du socle de la nouvelle résolution numérique	79
II.5.1	Application de la méthode des volumes finis au problème de diffusion avec la formulation (y, E, L^*) de l'équation de diffusion	79
II.5.2	Construction du nouveau maillage aux volumes finis (y, E, L^*)	79
II.5.3	Sélection des schémas pour l'étude numérique	80
II.5.4	Une intégration inconditionnellement stable	80
III	Développement d'un nouveau coeur numérique pour Salammbô-Électron	81
III.1	Notations adoptées dans les tests numériques	82
III.2	La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte inhomogénéité	83
III.2.1	Étude comparative de la précision des méthodes DF et VF en situation de diffusion stationnaire 1D raide	83
III.2.2	Étude comparative de la gestion des conditions aux limites réalistes par les méthodes DF et VF	86
III.2.3	Étude comparative de l'effet du raffinement du maillage sur les méthodes DF et VF	87
III.2.4	Étude comparative des méthodes DF et VF sur la précision numérique en situation de diffusion analytique 2D raide	89
III.2.5	Application de la méthode VF à un problème de diffusion transitoire réelle	90
III.2.6	Conclusion	92
III.3	La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte anisotropie	92
III.3.1	Analyse de la monotonie d'un schéma VF linéaire vues par les conditions de <i>Nordbotten</i> dans le cadre diffusif réel	92
III.3.2	Construction d'un nouveau schéma non-linéaire monotone sur la base des conditions de <i>Nordbotten</i>	102
III.3.3	Études des performances des schémas non-linéaires	104
III.3.4	Application des schémas non-linéaires sur un problème de diffusion 2D réelle transitoire	112
III.3.5	Obtient-on la monotonie du schéma <i>LIN 2</i> si on généralise sa construction ?	117
III.3.6	Conclusion	120
III.4	Mise en oeuvre d'un schéma numérique dédié à la diffusion radiale	122
III.4.1	Logique de discrétisation de la diffusion radiale dans le coeur numérique actuel de Salammbô	122
III.4.2	Construction et propriétés numériques du nouveau schéma radial	123
III.4.3	Application du nouveau schéma sur un problème de diffusion radiale transitoire réelle	124
III.5	Récapitulatifs des améliorations apportées par le nouveau coeur numérique à la résolution de l'équation de diffusion	125
IV	Apport du nouveau coeur numérique de Salammbô-Électron dans les simulations physiques	127
IV.1	Respect de la dynamique radiale seule : mesure de l'effet transitoire	129
IV.2	Respect de l'équilibre entre la diffusion locale et radiale : mesure de l'effet du raffinement de grille spatiale	133
IV.3	Simulation de la période étudiée en présence de la diffusion croisée	139
IV.3.1	Caractérisation du rôle de la diffusion croisée dans un cas physique simple	139
IV.3.2	Observation du rôle de la diffusion croisée dans l'orage magnétique de Septembre 2017	144

IV.4 Comparaison de la restitution de l'ancien et du nouveau coeur avec les mesures de la sonde RBSP-B	148
Conclusion et perspective	151
A Construction du schéma NLMPFA sur une grille cartésienne	155
B Conditions de Nordbotten : conditions nécessaires et suffisantes de monotonie?	157
C Termes m_k du schéma <i>LIN 2</i> quand $D_{xy} < 0$	159
D Contruction du schéma NLMONOT sur une grille cartésienne et identification des (c_1, c_2)	161
D.1 Construction du schéma NLMONOT	161
D.2 Identification d'un couple (c_1, c_2)	161
Bibliographie	165

Introduction

Les ceintures de radiation sont des structures physiques très dynamiques de l'environnement spatial terrestre. De formes toroïdales et étendues sur la majorité des orbites satellites, elles sont constituées d'électrons et de protons très énergétiques piégés par le champ magnétique terrestre. Ces particules décrivent des mouvements quasi-périodiques, qui induisent des périodes de vie de quelques semaines à plusieurs années et on observe des variations de leurs flux très intenses essentiellement dues à un fort couplage avec le vent solaire.

Cette dynamique très variable et intense représente une contrainte très forte pour les missions spatiales. En effet, ces flux peuvent provoquer différents types de dommages sur les revêtements et les équipements électroniques des satellites, ce qui peut les dégrader et les rendre inopérants. Ce fut le cas en 1994 pour le satellite Anik E2, dont le contrôle total n'a été repris que 8 mois après sa défaillance initiale. Au vu des enjeux actuels de l'industrie spatiale, en forte croissance (revenus estimés à 307 Md en 2016) avec des applications critiques dans plusieurs domaines (dans la télécommunication, l'observation de la Terre, la navigation et la défense), il devient indispensable de bien comprendre le fonctionnement de cet environnement agressif et de spécifier le plus précisément possible ses contraintes.

C'est dans ce contexte que l'unité Environnement Radiatif Spatial (ERS) du département Physique, Instrumentation, Environnement et Espace (DPHY) de l'ONERA développe depuis de nombreuses années le code physique Salammbô de restitution de la dynamique des ceintures de radiation des électrons et des protons. Formulé à partir d'un modèle d'équation de diffusion, ce code pionnier a acquis une forte maturité dans sa représentation physique. Véritable laboratoire de recherche et de compréhension des processus d'interactions, Salammbô a récemment été intégré à des outils de prévisions et d'anticipation des risques encourus par les satellites, s'inscrivant dans le cadre de la météorologie de l'Espace. Pour pouvoir remplir ce travail, la résolution numérique du code Salammbô doit être précise, robuste et rapide. Le cœur numérique actuel de Salammbô, discrétisé en différences finies–Euler explicite, n'a pratiquement pas subi d'évolution depuis sa toute première version. Comme les processus mis en jeu dans l'équation de diffusion sont multi-échelles et multi-physiques, le code est de plus en plus contraint numériquement, en particulier pour sa version électron. De plus, il ne permet pas la prise en compte de processus physiques représentés dans l'équation par des termes de diffusion croisés, dont le rôle dans la dynamique des électrons piégés est de plus en plus reconnu.

C'est dans cette optique que s'inscrit mon travail de thèse, dont l'objectif est d'identifier et élaborer une nouvelle stratégie de résolution pour le code Salammbô afin de lever ses verrous numériques. Cela permettrait de réaliser un pas en avant important vers un code de calcul plus précis dans sa prise en compte de la physique mise en jeu, plus robuste vis-à-vis des artefacts numériques et plus flexible dans le choix de ses paramètres de résolution.

Ainsi, je vais introduire dans le premier chapitre le cadre physique de ce travail de thèse. Je présente d'abord les spécificités physiques des ceintures de radiation et j'aborde la théorie des invariants adiabatiques qui modélise le mouvement quasi-périodique des particules piégées. Ensuite, après avoir rappelé quelques aspects de l'activité du Soleil, je m'intéresse à son impact sur la magnétosphère interne et je détaille les différents processus qu'elle induit sur l'équilibre de la dynamique des ceintures de

radiation. Suite à cela, je détaille la problématique de la modélisation de cet environnement hostile en rappelant les besoins des acteurs du spatial. Ensuite, j'établis le cadre de sa modélisation théorique par une équation de diffusion 3D issue d'un modèle d'équation de Fokker-Planck. Je termine ce chapitre par la synthèse des contraintes imposées par ce cadre physique sur la résolution numérique associée, puis je précise les pistes identifiées pour les surmonter dans le cadre de ma thèse.

Le second chapitre sert à l'établissement du socle de la nouvelle résolution numérique à adopter dans le code Salammbô. Pour cela, je reviens dans un premier temps sur le cadre mathématique de l'équation de diffusion étudiée et je rappelle les différents principes mathématiques qui s'appliquent à la solution de l'équation et qui lui procurent une représentativité physique. Ensuite, je décris en détails la méthode des volumes finis, ma principale piste d'amélioration pour la discrétisation spatiale. Je présente différentes variantes de la méthode et je décris une stratégie alternative et plus générale permettant d'obtenir la représentativité physique de la solution. Je conclus le chapitre par la présentation des choix préliminaires à adopter sur la résolution du nouveau cœur.

Ceci me conduit dans le chapitre 3 à introduire l'étude numérique menée au cours de ma thèse pour mettre en place ce nouveau cœur numérique de Salammbô. Je présente les différents tests numériques mis en place pour analyser les performances des schémas et vérifier leur adéquation avec notre application. En particulier, je compare l'ancienne et la nouvelle discrétisation spatiale sur des cas tests de diffusion fortement localisée. J'analyse ensuite l'effet de la diffusion croisée sur l'émergence d'artefacts numériques. Je détaille enfin une nouvelle discrétisation numérique développée au cours de ma thèse qui permet de surmonter les contraintes associées à la diffusion croisée. Je conclus le chapitre en présentant la stratégie adoptée pour prendre en compte la troisième direction de diffusion.

Enfin, dans le dernier chapitre, j'analyse l'apport du nouveau cœur numérique dans un cas concret et réel : Septembre 2017, période très représentative de la dynamique des ceintures de radiation électrons. Pour cela, je compare la physique observée à celle restituée par notre nouveau cœur numérique, tout en caractérisant ses apports par rapport à l'ancien. Enfin, j'analyse l'effet de la diffusion croisée sur notre restitution de la dynamique des ceintures de radiation, analyse qui n'a jamais été conduite avant mes travaux dans notre domaine.

Chapitre I

Introduction à la modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres

I.1	Présentation des ceintures de radiation	14
I.1.1	Le champ magnétique terrestre à l'origine des ceintures de radiation	14
I.1.2	Caractéristiques physiques des ceintures de radiation terrestres	14
I.1.3	Le mouvement des particules piégées des ceintures de radiation	17
I.2	La dynamique des ceintures de radiation terrestres	23
I.2.1	Une dynamique pilotée par les interactions Soleil - Terre	23
I.2.2	Activité solaire et ceintures de radiation électrons : Une dynamique multi-physiques et multi-échelles	30
I.2.3	Synthèse des processus d'interactions	33
I.2.4	Exemples de couplage entre le vent solaire et la dynamique des ceintures de radiation électrons de la Terre	34
I.3	La modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres	36
I.3.1	Besoins et enjeux de la modélisation	36
I.3.2	Boîte à outils de la modélisation : modèles empiriques, codes physiques et outils d'assimilations de données	37
I.3.3	La modélisation théorique de la dynamique des ceintures de radiation : L'équation de Fokker-Planck	38
I.3.4	Le code Salammbô de l'ONERA de modélisation des ceintures de radiation	40
I.4	Les limitations du coeur numérique du code Salammbô	43
I.4.1	Le coeur numérique actuel de Salammbô	43
I.4.2	Limitations du coeur numérique de Salammbô	45
I.4.3	Pistes d'évolution existantes pour le coeur numérique de Salammbô	50
I.5	Présentation des objectifs de la thèse	52

Nous allons présenter dans ce chapitre, le contexte général de la thèse, relatif à la modélisation de la dynamique des ceintures de radiation électrons. En premier lieu, nous allons aborder le cadre physique de notre étude en rappelant les spécificités du champ magnétique terrestre, les caractéristiques des ceintures de radiations et la matérialisation de l'interaction Soleil-Terre sur l'environnement radiatif terrestre. Après avoir rappelé les besoins pressants des acteurs du spatial pour une modélisation fiable de cet environnement hostile, nous présenterons sa modélisation théorique sur laquelle se base le modèle de restitution Salammbô, développé par l'ONERA. On finira par relater les contraintes imposées par la physique étudiée sur la résolution numérique et les pistes envisagées pour les surmonter.

I.1 Présentation des ceintures de radiation

I.1.1 Le champ magnétique terrestre à l'origine des ceintures de radiation

La Terre possède un champ magnétique dynamique, en constante interaction avec son environnement. Son origine est interne, liée au mouvement des courants de métaux liquides de son noyau (Théorie de la dynamo terrestre) [1]. A la surface de la Terre, son intensité varie entre 30 et 60 μT , soit 3 à 4 ordres de grandeur de moins que le champ magnétique du Soleil à sa surface (environ 0.1 T) [2]. En première approximation, il est possible de le modéliser par un champ magnétique dipolaire incliné de 11.6° de l'axe de rotation de la terre et décentré de 500 km de cet axe. Du fait de ce tilt et de ce décentrement, une région, centrée au dessus de l'Atlantique Sud, présente (pour une altitude donnée) un champ magnétique plus faible, c'est l'anomalie de l'Atlantique Sud (ou SAA pour *South Atlantic Anomaly*). Le modèle dipolaire présenté dans la figure I.1 illustre cette asymétrie. Ainsi, dans la SAA, l'intensité du champ magnétique est plus faible ($\approx 24\mu\text{T}$) qu'au point qui lui est opposé par rapport à l'axe du dipôle ($\approx 400\mu\text{T}$) [2].

Le champ magnétique interne de la Terre n'est pas constant, il varie lentement dans le temps (variations séculaires). Actuellement, son intensité décroît globalement, avec une variation annuelle de l'ordre de 0.06%, combinée à une dérive de son axe vers l'Ouest [3]. D'autres irrégularités secondaires sont observées dans ce champ, limitant l'utilisation d'une modélisation dipolaire simple pour le représenter. On cite par exemple, le maximum local d'intensité situé au niveau de la Sibérie et dont la prise en compte dans la modélisation du champ nécessite l'ajout de termes quadripolaires [3]. Le modèle *International Geomagnetic Reference Field* (IGRF) est actuellement le modèle de référence permettant de retranscrire ces spécificités. Il se base sur un développement du potentiel magnétique sous forme d'harmoniques sphériques, permettant de décrire finement cette configuration multipolaire. Les termes de pondération des harmoniques du modèle sont fixés par des mesures et sont mis à jour en moyenne tous les 5 ans [4].

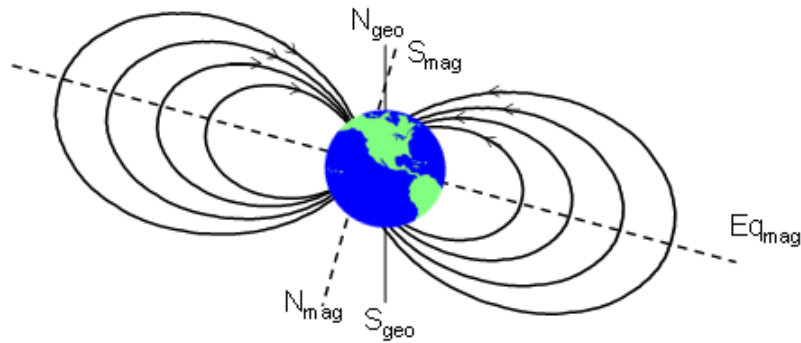


FIGURE I.1 – Représentation du modèle dipolaire du champ magnétique terrestre.

A ce champ magnétique d'origine interne vient s'ajouter une contribution qui provient du fait que la Terre et son environnement baignent dans le vent solaire (présenté avec plus de détails la partie I.2.1.2). Un fort couplage magnéto-hydrodynamique est induit entre ces deux composantes, comprimant le champ magnétique terrestre côté jour et l'étirant côté nuit, comme illustré sur la figure I.2 [3]. La modélisation du champ terrestre globale nécessite donc de combiner une composante interne basée sur le modèle IGRF, et une composante externe décrivant les interactions induites par le vent solaire [2].

I.1.2 Caractéristiques physiques des ceintures de radiation terrestres

La découverte des ceintures de radiation est attribuée au physicien américain *James Van Allen* en 1958, après l'analyse des mesures de compteurs *Geiger* embarqués sur la sonde américaine *Explorer*

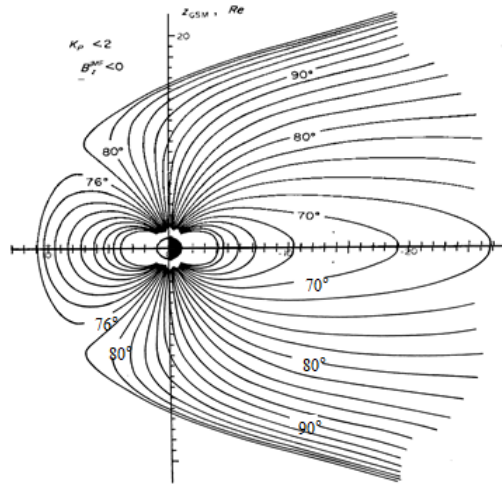


FIGURE I.2 – Champ magnétique magnétosphérique terrestre.

III. Sa découverte a été popularisée par sa fameuse citation "*Space is radioactive*" [5]. Pour l'anecdote, on sait maintenant que les radiations émises par les ceintures avaient déjà été observées par le satellite soviétique *Sputnik 2* quelques mois auparavant (en 1957) [6]. Cependant, les mauvaises interprétations de l'équipe de recherche soviétique dirigée par *Sergei Vernov*, et le secret entourant les projets spatiaux soviétiques de l'époque lui ont sans doute fait perdre la primeur de la découverte [7].

Les ceintures de Van Allen ont une forme toroïdale et s'étendent à plus de 6 rayons terrestres. Elles englobent ainsi la plupart des orbites satellites scientifiques et commerciaux, de l'orbite basse (≈ 700 km) et au-delà de l'orbite géostationnaire (voir figure I.3). Elles sont peuplées de protons et d'électrons piégés par le champ magnétique terrestre. Leurs structures sont stables dans le temps et la durée de vie des particules piégées peut atteindre le mois voire l'année en fonction de la région où elles évoluent [2].

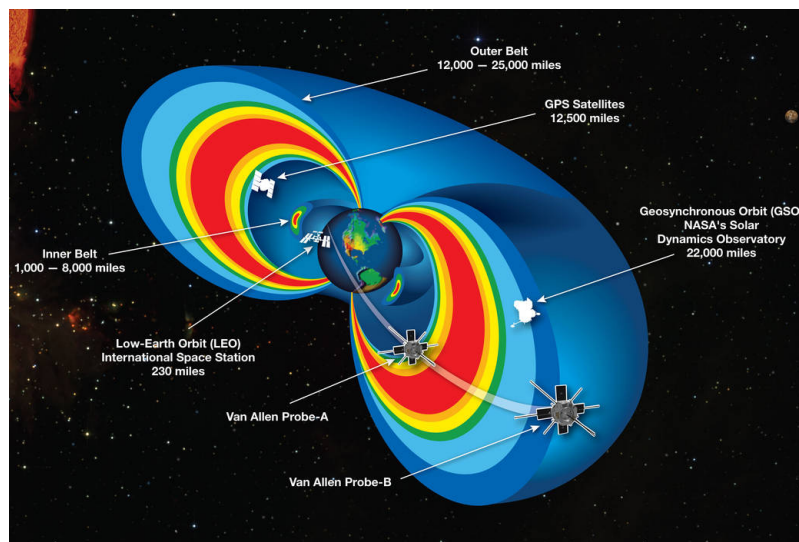


FIGURE I.3 – Étendue des ceintures de radiation électron relativement aux différentes orbites satellites. Crédit NASA.

Généralement, on observe une seule ceinture peuplée de protons, dont l'énergie s'étale de quelques keV à plusieurs centaines de MeV (un maximum d'énergie de 2 GeV a même été observé pour des protons piégés à basse altitude, par un instrument embarqué sur le satellite Resours-DK1 [8]). A basse énergie (en deçà du MeV), la ceinture proton s'étend jusqu'à environ 7 rayons terrestres. Mais plus l'énergie des protons piégés est importante et plus leur région de piégeage est resserrée autour de la Terre. Par exemple, les protons d'énergie supérieure à 10 MeV ont un maximum de flux se situant en moyenne entre 1.5 et 2 rayons terrestres (voir figure I.4) et il est de l'ordre de 10^6 particules $cm^{-2}s^{-1}$ en moyenne [2][9]. Le maximum de flux des protons de 100 MeV est situé encore plus bas, comme à cette énergie, les protons ne sont piégés qu'en-dessous de 2.5 rayons terrestres [10][11]. En période de fortes perturbations électromagnétiques, on observe parfois la création d'une seconde ceinture éphémère de protons d'énergies comprises entre 10 à 50 MeV, au dessus de la ceinture principale et pour une durée de temps variable. Les données du satellite *Combined Release and Radiation Effects Satellite (CRRES)* ont par exemple montré la formation en Mars 1991 d'une seconde ceinture protons entre 1.8 et 2.6 rayons terrestres, pour des énergies de plus de 20 MeV et ayant persisté plusieurs mois [12].

Les ceintures de radiation électrons s'étendent quant à elles jusqu'à environ 10 rayons terrestres (voir figure I.4) et elles sont au nombre de deux :

- Une ceinture interne de basse altitude où la distribution en électrons est assez stable. Les énergies des électrons qui y sont piégés sont la plupart du temps inférieures au MeV. Les mesures des sondes *Van Allen Probes* ont toutefois démontré une persistance occasionnelle ($T \geq$ une année et demie) dans cette zone d'électrons avec une énergie de l'ordre du MeV [13]. Pour les électrons d'énergie supérieure à 0.5 MeV, le maximum de flux se situe en-dessous de 2 rayons terrestres et peut dépasser $10^6 cm^{-2}s^{-1}$ (voir figure I.4).
- Une ceinture externe de haute altitude où les flux d'électrons sont beaucoup plus variables et très sensibles à la dynamique du vent solaire et aux perturbations électromagnétiques. L'énergie des électrons piégés peut atteindre plusieurs MeV dans cette région dû à des processus internes d'énergisation liés aux interactions avec les ondes électromagnétiques qu'on décrira dans la partie I.2.2.1. On y observe généralement un maximum de flux de l'ordre de $3 \cdot 10^6 cm^{-2}s^{-1}$ vers 5 rayons terrestres pour les électrons d'énergie supérieure au MeV [2]. Comme ce maximum est proche de l'orbite des satellites GNSS (*Global Navigation Satellite System*), on impose des conceptions spécifiques aux satellites pour voler sur de telles orbites[14][15].

Les deux ceintures électrons sont séparées par la région du *slot*. On y observe une forte chute du flux d'électrons de haute énergie supérieure à quelques centaines de keV. De la même manière que pour la ceinture externe, cette structure particulière est induite par les interactions de type onde électromagnétique - particule en fonction de leur énergie et vidant cette région des ceintures de radiation (voir partie I.2.2.1).

Les ceintures de radiation ne sont pas propres qu'à la Terre. Elles peuvent aussi se former autour d'autres planètes disposant d'un champ magnétique assez stable, comme c'est le cas pour Jupiter et Saturne [16][17]. On résume dans le tableau I.1 les caractéristiques des ceintures de radiation de ces trois planètes magnétisées du système solaire.

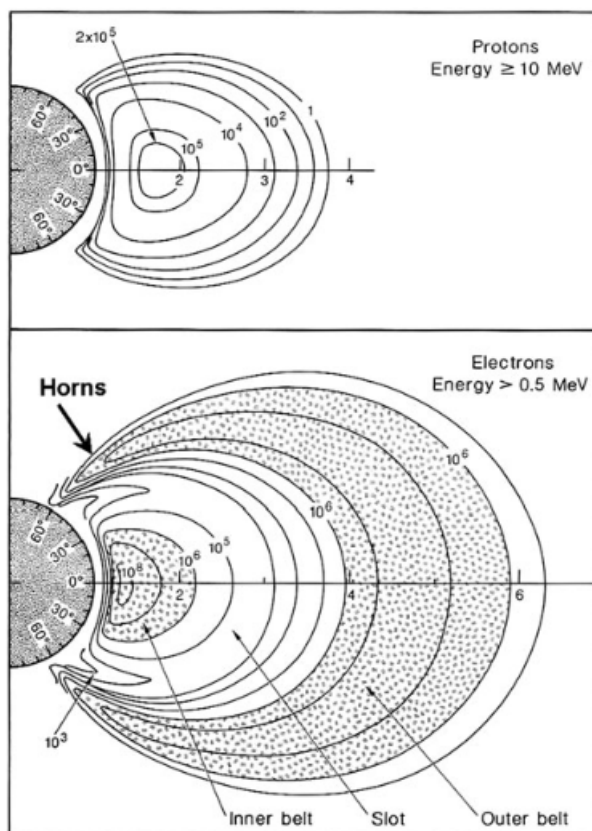


FIGURE I.4 – Contours isoflux sur une coupe méridionale des ceintures de radiation protons et électrons. Figure extraite de [10].

Planète	Particule	Énergie	Extension (rayons planétaires)
Terre	e^-	1 keV - 10 MeV	1-10
	p^+	1 keV - 300 MeV	1-7
Jupiter	e^-	1 keV - 300 MeV	1-quelques dizaines
	p^+	1 keV - environ 100 MeV	1-quelques dizaines
Saturne	e^-	1 keV - 10 MeV	1-10
	p^+	1 keV - 100 MeV	1-10

TABLEAU I.1 – Propriétés des ceintures de radiation des planètes magnétisées du système solaire.

I.1.3 Le mouvement des particules piégées des ceintures de radiation

Comme introduit précédemment, les ceintures de radiation sont peuplées de particules dont la cinétique est pilotée par le champ magnétique. Bien que ce dernier ait une structure complexe, il est possible de décrire théoriquement le mouvement des particules piégées en le décomposant en trois mouvements élémentaires [18] :

- Un mouvement de giration autour d'une ligne de champ magnétique.
- Un mouvement de rebond le long d'une ligne de champ, entre deux points miroirs.
- Un mouvement de dérive à travers les lignes de champ magnétique, autour de la Terre.

Dans les paragraphes suivants, on va présenter chacun de ces trois mouvements afin de poser les bases de la modélisation des ceintures de radiation terrestres. On va s'appuyer en particulier sur une approximation dipolaire du champ magnétique terrestre pour présenter ces mouvements quasi-périodiques à l'origine du piégeage magnétique. Bien que "simplistes", ces résultats théoriques restent

valides dans le cas d'une modélisation plus réaliste du champ, mais les formulations analytiques ne sont plus directes, et des calculs numériques sont alors nécessaires, comme décrit dans [19].

I.1.3.1 Le mouvement de giration

Une particule chargée soumise à un champ magnétique subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \times \vec{V} \wedge \vec{B} + q\vec{E} \quad (\text{I.1})$$

q est la charge de la particule, \vec{V} son vecteur vitesse, \vec{B} et \vec{E} respectivement le champ magnétique et électrique dans lesquels la particule évolue. Pour un champ magnétique homogène et plan, la force de Lorentz impose à la particule un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire à \vec{B} (voir figure I.5). Ce mouvement est caractérisé par un rayon de giration ou rayon de *Larmor* noté r_c , et une période de giration/cyclotron notée τ_c tel que :

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{p_{\perp}}{qB} \\ \tau_c &= \frac{2\pi m}{|q|B} \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

avec m la masse de la particule, $p_{\perp} = mV_{\perp}$ sa quantité de mouvement perpendiculaire et α l'angle d'attaque local. Sans contribution électrique ($\vec{E} = \vec{0}$), la force de *Lorentz* ne travaille pas. L'énergie cinétique de la particule est conservée. On définit une grandeur physique caractéristique de ce mouvement de giration, le moment magnétique μ , lui aussi conservé si le champ \vec{E} est nul et \vec{B} constant :

$$\mu = \frac{p_{\perp}^2}{2mB} = \frac{m^2 V_{\perp}^2}{2mB} = \frac{m^2 V \sin(\alpha)^2}{2mB} \quad (\text{I.3})$$

Dans les ceintures de radiation, bien que le champ magnétique ne soit pas uniforme et constant, les particules de hautes énergies sont également soumises à la force de *Lorentz* d'origine magnétique, la contribution électrique étant faible [20]. Dans l'hypothèse d'un champ statique (variations spatiales et temporelles négligeables), il est tout à fait raisonnable de le supposer comme localement uniforme et stationnaire (comme dans la figure I.5) ce qui permet au mouvement de giration de s'installer.

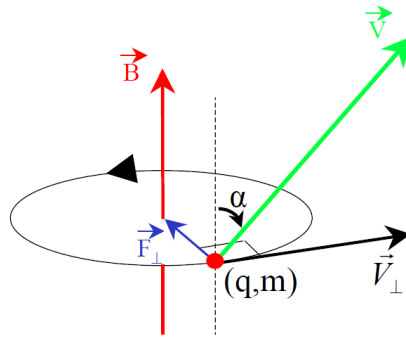


FIGURE I.5 – Mouvement de giration d'une particule autour d'une ligne de champ magnétique. Figure extraite de [21].

On démontre que quand le champ magnétique varie lentement, c'est à dire :

$$\begin{aligned} r_c &\ll \frac{B}{\nabla_{\perp} B} \\ \tau_c &\ll \frac{B}{\frac{\partial B}{\partial t}} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

alors, le moment magnétique μ reste constant [18][19]. Autrement dit, dans les conditions (I.4), la particule s'adapte naturellement et graduellement au changement d'environnement magnétique et conserve

son moment magnétique. On parle alors de μ en tant qu'invariant adiabatique de giration. La notion d'adiabaticité est utilisée pour illustrer un retour de la particule dans son état de giration initial si elle est soumise à la perturbation inverse équivalente. Si on considère maintenant que le champ magnétique subit des fluctuations temporelles et spatiales supérieures à $\frac{B}{\frac{\partial B}{\partial t}}$ respectivement $\frac{B}{\nabla_{\perp} B}$, alors le moment magnétique n'est plus conservé. On parle dans ce cas de violation de l'invariant adiabatique [18]. Pour simplifier la description du mouvement d'une particule évoluant dans un champ \vec{B} respectant (I.4), on utilise l'approximation du centre-guide [22]. Au lieu de suivre la trajectoire exacte de la particule, on s'intéresse plutôt à la trajectoire instantanée de son centre de giration, dont la grandeur caractéristique associée est μ (voir figure I.6).

Si la particule s'engage avec une composante de vitesse parallèle au même champ uniforme \vec{B} , alors son mouvement sera hélicoïdal autour de la ligne de champ rectiligne. Pour un champ magnétique plus complexe et respectant les conditions (I.4), le mouvement parallèle s'adapte instantanément pour accompagner la conservation de la giration. C'est ce qu'on va voir dans le paragraphe suivant.

I.1.3.2 Mouvement de rebond

Dans son approximation dipolaire, l'intensité du champ magnétique le long d'une de ses lignes de champ n'est pas uniforme. Elle est minimale à l'équateur et maximale aux pôles. En restant dans le cadre des conditions d'adiabaticité (I.4), ce gradient longitudinal de \vec{B} et le resserrement des lignes de champ imposent sur le centre guide d'une particule piégée une force de rappel bien décrite dans [22] et qui s'écrit :

$$\vec{F} = -\mu \frac{\partial B(s)}{\partial s} \vec{u}_s \quad (\text{I.5})$$

avec s l'abscisse curviligne du centre guide sur la ligne de champ considérée et \vec{u}_s le vecteur unitaire tangent à \vec{B} .

Respectant (I.4), μ est conservé. A mesure que la particule s'approche des pôles, p_{\perp} doit augmenter (équation (I.3)). De plus, comme \vec{B} ne travaille pas, l'énergie cinétique de la particule est donc conservée. Par conséquent comme p_{\perp} augmente, p_{\parallel} , la quantité de mouvement parallèle à \vec{B} , doit diminuer. Du coup, l'angle d'attaque de la particule va croître jusqu'à atteindre un angle d'attaque égal à $\frac{\pi}{2}$. A ce moment, on dit que la particule a atteint son point miroir, et on note B_m l'intensité du champ en ce point. La particule rebrousse ensuite chemin, passant par l'équateur où p_{\parallel} est maximale (et son angle d'attaque est minimal) et atteint le point miroir symétrique, situé dans l'autre hémisphère. Par conséquent, le centre guide décrit un mouvement curviligne appelé mouvement de rebond et la particule piégée est mue d'un mouvement hélicoïdal non uniforme comme le montre la figure I.6.

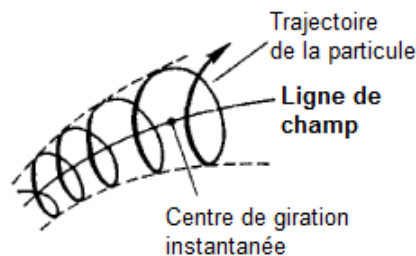


FIGURE I.6 – Trajectoire d'une particule le long d'une ligne de champ magnétique et mouvement de son centre guide.

Pour une ligne de champ dipolaire, on peut exprimer B_m à partir de l'intensité du champ à l'équateur, notée B_{eq} . Pour cela, on part de la conservation du moment magnétique entre le point miroir et

l'équateur :

$$\mu = \frac{m^2 V \sin(\alpha_{eq})^2}{2m_0 B_{eq}} = \frac{m^2 V \sin(\alpha_m)^2}{2m_0 B_m} \quad (I.6)$$

avec α_{eq} l'angle d'attaque à l'équateur et α_m l'angle d'attaque au point miroir égale à $\frac{\pi}{2}$. On pose $y = \sin(\alpha_{eq})$ et on obtient :

$$B_m = \frac{B_{eq}}{y^2} \quad (I.7)$$

La formule (I.7) montre une dépendance entre l'intensité du point miroir avec l'angle d'attaque à l'équateur α_{eq} . Plus α_{eq} est faible, plus B_m est grand et plus le point miroir sera proche du pied de la ligne de champ et donc de la Terre. S'il devient trop petit, i.e., si la particule a une vitesse parallèle à B importante, alors le point miroir peut se trouver dans l'atmosphère, voire même dans la Terre elle-même. En conséquence, la particule n'est pas viable et n'est pas piégée, puisqu'au bout d'un rebond, elle sera perdue par précipitation dans l'atmosphère. On définit ainsi un angle d'attaque équatorial limite noté α_c , en deçà duquel, le point miroir sera situé dans l'atmosphère. L'ensemble des angles d'attaque équatoriaux inférieurs à α_c forment le cône de perte, comme illustré sur la figure I.7.

A l'image du mouvement de giration, le mouvement quasi-périodique de rebond est associé lui aussi à un invariant adiabatique noté J . Il est souvent interprété comme la rigidité élastique d'une corde magnétique limitée par les deux points miroirs et s'écrit :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\parallel} ds = \frac{p}{\pi} \int_{s_m}^{s'_m} \sqrt{1 - \frac{B(s)}{B_m}} ds \quad (I.8)$$

s_m et s'_m les abscisses curvilignes des points miroirs.

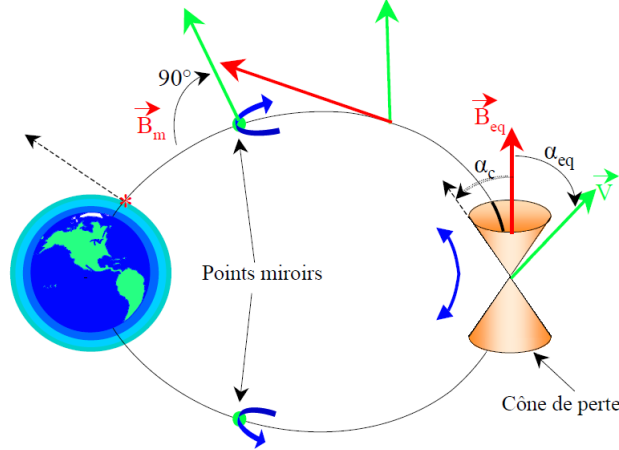


FIGURE I.7 – Mouvement de rebond d'une particule le long d'une ligne de champ magnétique entre les points miroirs. Figure extraite de [21].

I.1.3.3 Mouvement de dérive

Toujours dans l'approximation dipolaire, on sait que B admet un gradient radial positif quand on s'approche de la Terre. Ainsi, r_c varie d'une ligne de champ à une autre en fonction de la distance radiale de la particule piégée (équation (I.2)). Au cours de sa giration, une particule chargée verra donc un champ magnétique plus fort (resp. plus faible) quand elle s'approchera (resp. s'éloignera) de la Terre, diminuant (resp. augmentant) son rayon de Larmor instantané r_c (voir figure I.8). La particule décrit ainsi un mouvement cycloïdal autour de la Terre, lui aussi quasi-périodique, appelée mouvement de dérive. Les contours de dérive définis par les positions successives équatoriales de la particule et

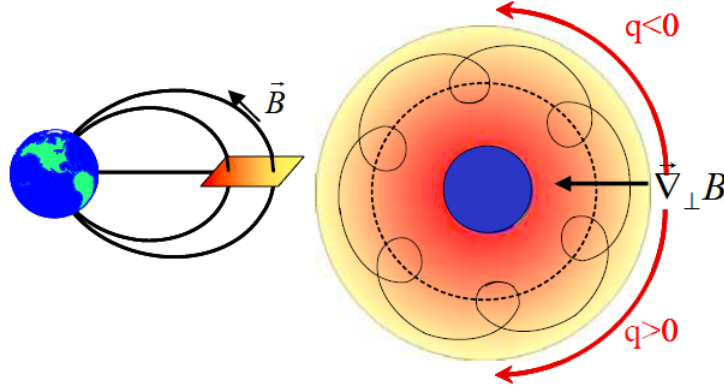


FIGURE I.8 – À gauche : Illustration du gradient radial du champ magnétique de la Terre. À droite : Le mouvement de dérive des particules chargées autour de la Terre. Figures extraites de [21].

celles des deux points miroirs permettent de définir une surface que l'on nomme coquille de dérive (voir I.9). Cette dernière capture le flux magnétique Φ :

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} \quad (\text{I.9})$$

Ce flux magnétique caractérise la troisième caractéristique du mouvement quasi-périodique ou 3^{ème} invariant adiabatique, associé au mouvement de dérive.

$$J_3 = \frac{2|q|}{\pi} \iint \vec{B} d\vec{S} = \frac{|q|}{2\pi} \Phi \quad (\text{I.10})$$

On associe à une coquille de dérive donnée, le paramètre de *Roederer*, noté L^* :

$$L^* = \frac{2\pi B_0 a^2}{\Phi} \quad (\text{I.11})$$

a est le rayon terrestre moyen et B_0 l'intensité du champ à la surface de la Terre au niveau de l'équateur magnétique [18]. L^* est très utilisé pour décrire des topologies magnétiques complexes (notamment dans le cas d'une asymétrie entre le côté jour et le côté nuit). Dans le cas d'une modélisation dipolaire, L^* devient équivalent à L , le paramètre de *McIlwain* [23]. Il est égal à la distance adimensionnée en rayons terrestres entre l'apex de la ligne de champ à l'équateur et le centre du dipôle magnétique.

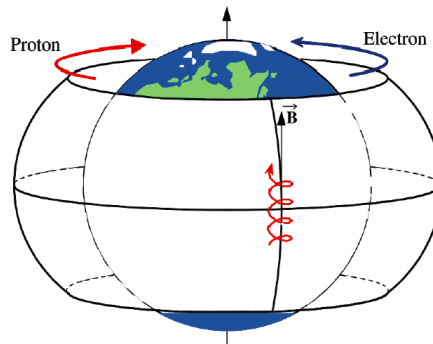


FIGURE I.9 – Coquille de dérive qui illustre l'apport des trois mouvements élémentaires de giration, de rebond et de dérive. Figure extraite de [21].

I.1.3.4 Finesse de la représentation du mouvement des particules piégées

L'hypothèse dipolaire adoptée dans les développements précédents permet de simplifier la représentation des mouvements de giration, de rebond et de dérive. Ce modèle de décomposition en mouvements élémentaires reste pertinent et valide dans le cadre d'un champ réel [19]. Si les variations temporelles du champ magnétique sont plus lentes que le temps caractéristique de dérive, les particules girant, rebondissant et dérivant, restent "accrochées" à leurs coquilles de dérive. De plus, comme on le verra dans la section I.3, on a accès à différentes finesses de représentation du mouvement des particules piégées, et ce, selon le degré de précision et la simplicité du modèle de représentation (voir figure I.10) :

- La trajectoire exacte d'une particule piégée, filamenteaire et hélicoïdale, associant les trois mouvements quasi-périodiques (à gauche de la figure I.10).
- La trajectoire moyennée sur la giration du centre-guide, rectiligne courbée (au centre de la figure I.10)
- La trajectoire moyennée sur la giration et le rebond du centre-guide, s'opérant simplement dans le plan équatorial et décrivant l'intersection du plan avec la coquille de dérive (à droite de la figure I.10)

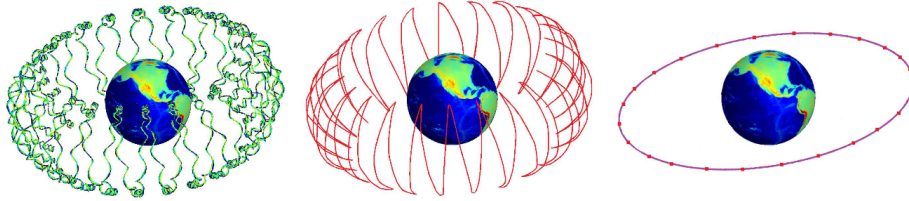


FIGURE I.10 – À gauche : Trajectoire exacte d'une particule piégée des ceintures de radiation. Au centre : Trajectoire de son centre-guide qui décrit la coquille de dérive. À droite : Trajectoire du centre-guide moyennée sur le mouvement de rebond, reportée au niveau de l'équateur magnétique. Figures extraites de [19].

I.1.3.5 Temps caractéristiques des mouvements élémentaires

Le tableau I.2 rassemble quelques temps caractéristiques des mouvements de giration τ_c , de rebond τ_r et de dérive τ_d pour des électrons et des protons piégés à différentes énergies et altitudes. On constate une grande disparité entre les temps caractéristiques de dérive, de rebond et de giration. Les trois mouvements sont donc décorrélés.

2000 km	r_c (m)	τ_1 (s)	τ_2 (s)	τ_3 (s)
Électron 50 keV	50	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.25	41400
Électron 1 MeV	320	$7 \cdot 7^{-6}$	0.1	3180
Proton 1 MeV	10^4	$4 \cdot 10^{-3}$	2.2	1920
Proton 10 MeV	$3 \cdot 10^4$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	0.65	192
$L = 2$	r_c (m)	τ_1 (s)	τ_2 (s)	τ_3 (s)
Électron 1 MeV	1000	10^{-2}	1	1000
Protons 1 MeV	25000	10^{-2}	1	1000

TABLEAU I.2 – Temps caractéristiques des mouvements de giration, rebond et de dérive et rayon de Larmor pour des électrons et des protons piégées à différentes énergies et altitudes, autour de la Terre.

I.2 La dynamique des ceintures de radiation terrestres

I.2.1 Une dynamique pilotée par les interactions Soleil - Terre

I.2.1.1 L'activité solaire

Le Soleil est une étoile active. Sa dynamique interne complexe combine des réactions nucléaires et des mécanismes de convection du plasma à grande échelle. Il en résulte une libération d'énergie à l'extérieur du Soleil, qui va se propager dans l'espace interplanétaire sous forme de rayonnements énergétiques et particulaires. Sans rentrer dans les détails des mécanismes physiques, on va décrire succinctement les différentes formes que peut prendre l'activité du Soleil (schématisée dans la figure I.11), qui influe sur l'environnement spatial terrestre et en particulier sur les ceintures de radiation. Ainsi, l'activité solaire peut être décomposée en deux formes :

- le vent solaire, composante continue de plasma émis par le Soleil, dont les énergies sont de l'ordre du keV.
- les éruptions solaires, bouffées de particules de très hautes énergies, de la dizaine à la centaine de MeV (protons et ions), émises sporadiquement.

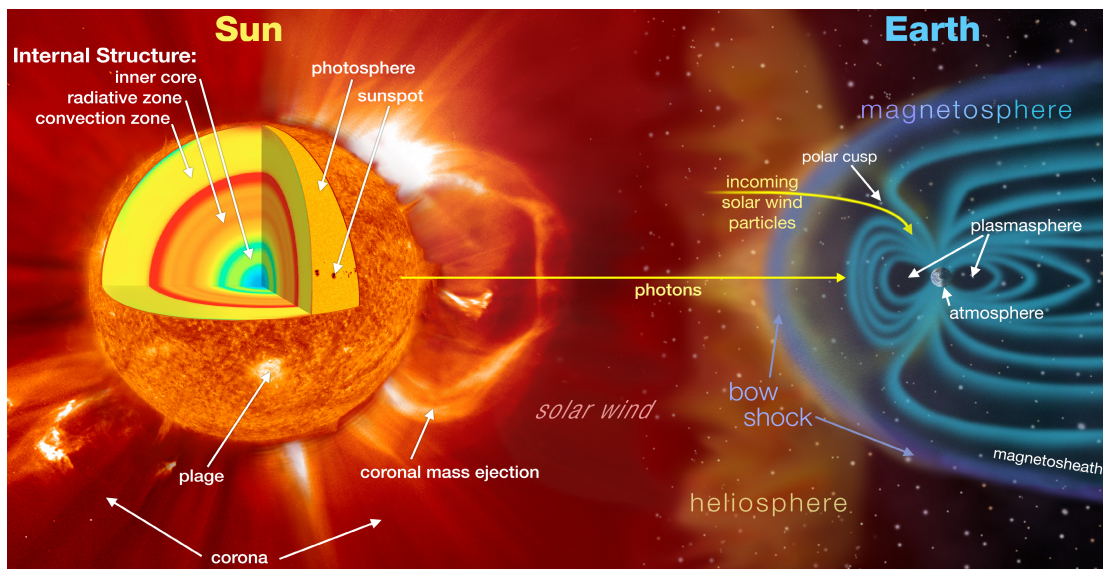


FIGURE I.11 – Activité du soleil et interaction avec la magnétosphère terrestre. Crédit NASA.

En premier lieu, le vent solaire est la composante particulaire continue émise par le Soleil, qui vient affecter l'environnement spatial terrestre. Il est composé principalement d'électrons et de protons d'énergies de l'ordre du keV, expulsé en continu depuis la couronne solaire [24]. En s'échappant de l'atmosphère solaire vers l'espace interplanétaire, le vent solaire décrit une spirale due à la rotation du Soleil. Figeant le champ magnétique émergent du Soleil, il le transporte jusqu'à l'orbite de la Terre en quelques jours.

Le vent solaire possède deux composantes. La première est lente et continue (de l'ordre de quelques centaines de km/s). Elle correspond à l'échappement des électrons sous l'effet de leur agitation thermique. La différence de charges locale induit l'échappement combiné des protons lourds dans le vent solaire également. Elle est davantage observable dans le plan équatorial du Soleil et reste confinée entre les lignes du champ magnétique qui émergent d'un hémisphère solaire et se referment de l'autre. La seconde composante du vent solaire est dite rapide ($V \sim 1000$ km/s). Elle tire son origine principalement des trous coronaux polaires, régions où les lignes du champ magnétique solaire sont ouvertes. La seconde composante du vent solaire est lente ($V \sim 400$ km/s). Lors du déclin cyclique de l'activité du soleil, les deux composantes se rejoignent quand les trous coronaux se déplacent vers l'équateur,

formant alors dans le vent solaire, sus-jacent, une région d'interaction en corotation entre les vents solaires rapide et lent, la *Corotating Interaction Region* (CIR) [25].

Une deuxième source du vent solaire rapide, mais cette fois-ci sporadique, provient des éjections de masses coronales ou *Coronal Mass Ejection* (CME). Il s'agit d'un phénomène de relâchement de plasma à grande échelle. Une boucle magnétique dense en gaz ionisé est relâchée, suite à la déstabilisation de l'équilibre entre force de pression magnétique qui la confinait près de la surface du Soleil, et force de pression liée à l'agitation thermique. Cette "boule de plasma" se propage ensuite dans le vent solaire environnant, avec une vitesse pouvant dépasser 600 km/s [26]. L'éjection du plasma est généralement devancée par une onde de choc qui atteint la Terre au bout de quelques jours comprimant alors notablement le champ magnétosphérique. Les CMEs sont statistiquement plus nombreuses en période de maximum solaire, lorsque les régions actives du Soleil (zones regroupant des groupes de tâches solaires) se complexifient [27].

Les éruptions solaires constituent la seconde forme d'activité solaire. Elles sont sporadiques et brutales, les rendant très difficiles à prévoir. Elles sont engendrées par un relâchement d'excès d'énergie stockée à la surface du Soleil au niveau des régions actives. Chaque éruption solaire s'accompagne d'une émission particulaire violente de protons et d'ions de $\sim 10\text{-}100$ MeV ainsi que d'une émission de photons, essentiellement dans les longueurs d'onde UV et X. Du fait de la haute énergie des protons propulsés dans l'espace environnant, ils atteignent le voisinage de la Terre au bout de quelques heures [2], et atteignent très facilement les orbites traditionnelles des satellites terrestres, aussi bien l'orbite géostationnaire que les orbites basses (aux hautes latitudes uniquement).

Comme évoqué précédemment, ces phénomènes actifs sont régis par un cycle d'activité solaire, d'une durée de 11 ans environ. Elle a longtemps été mesurée par le nombre moyen des tâches visibles chaque jour à la surface du Soleil. Depuis la naissance de la radioastronomie, la mesure se fait plus précisément à travers le flux d'émission radio solaire appelé $F_{10.7}$ (pris à la longueur d'onde de 10.7 cm) [28]. Le cycle solaire est divisé en moyenne en une période de maximum d'activité de 7 ans et une période de minimum de 4 ans. Si l'on prend en compte l'inversion du champ magnétique du Soleil s'opérant à la fin de chaque cycle, le cycle solaire réel dure approximativement 22 ans. Comme l'illustre la figure I.12, les cycles solaires ne sont pas identiques. La prévision à plus ou moins longue échéance de son évolution reste encore aujourd'hui un défi difficile à surmonter et de nombreuses techniques ont été développées, mais leur précision n'est pas encore suffisante [29]. Cet aspect est actuellement une thématique très étudiée du fait de son importance pour la météorologie et la climatologie de l'Espace.

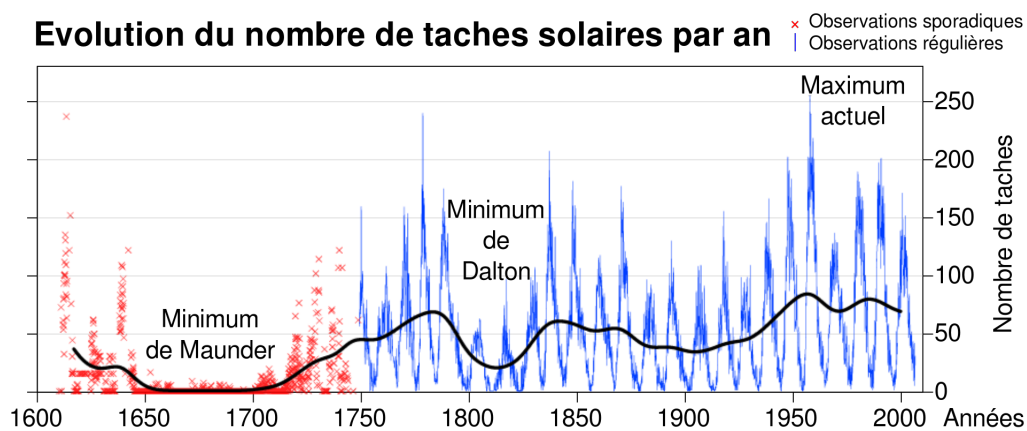


FIGURE I.12 – Évolution annuelle du nombre de tâches solaires répertoriées et disparité entre les différents cycles solaires. En rouge les observations sporadiques, en bleu les observations mensuelles régulières, en noir les observations lissées sur l'année, Crédit NASA.

I.2.1.2 La magnétosphère, cavité protectrice de la Terre

Établissement de la magnétosphère : Lorsque le vent solaire atteint l'orbite de la Terre, il se trouve confronté au champ magnétique terrestre. Comme illustré sur la figure I.13, un équilibre de type magnéto-hydrodynamique s'établit entre la pression magnétique du champ magnétique et la pression du vent solaire, formant une cavité magnétique autour de la Terre, la magnétosphère [30]. Une onde de choc se forme en amont de la magnétopause, nom donné à la frontière de la magnétosphère. Le champ magnétique parvient ainsi à réduire drastiquement la vitesse du plasma solaire et le force à la contourner en s'écoulant le long de ses flancs. La localisation de la magnétopause est très variable. Elle est fortement liée aux fluctuations de la pression du vent solaire côté jour (en direction du Soleil) et au cisaillement de vitesse côté aube et crépuscule [31][32]. Cette interaction dynamique est responsable de la génération d'ondes électromagnétiques *Ultra Low Frequency* (ULF) qui vont se propager à l'intérieur de la magnétosphère et participer à sa dynamique interne et en particulier à celle des ceintures de radiation terrestres, comme on le verra dans le paragraphe I.2.2.1.

Comme elle ne laisse pénétrer qu'une faible partie des particules et de l'énergie du vent solaire ($\sim 2\%$) [33], la magnétosphère représente une véritable enveloppe protectrice pour la Terre et encapsule la zone d'influence du champ magnétique de la Terre. Elle s'étend sur environ 16 rayons terrestres en moyenne [34]. Elle est asymétrique, comprimée côté jour et s'étend en moyenne jusqu'à 10 rayons terrestres. Elle est étirée côté nuit, pouvant s'étendre au-delà de l'orbite lunaire. La magnétosphère est un système complexe, composé de différentes régions aux caractéristiques très différentes. On citera en particulier deux régions en lien direct avec la dynamique des ceintures de radiation :

- la magnétosphère interne, région de la magnétosphère proche de la Terre (en-dessous de 10 rayons terrestres côté nuit) dont on décrira la composition succinctement dans le paragraphe suivant.
- le feuillet de plasma, au-delà de 8 rayons terrestres côté nuit, confiné au niveau de l'équateur magnétique.

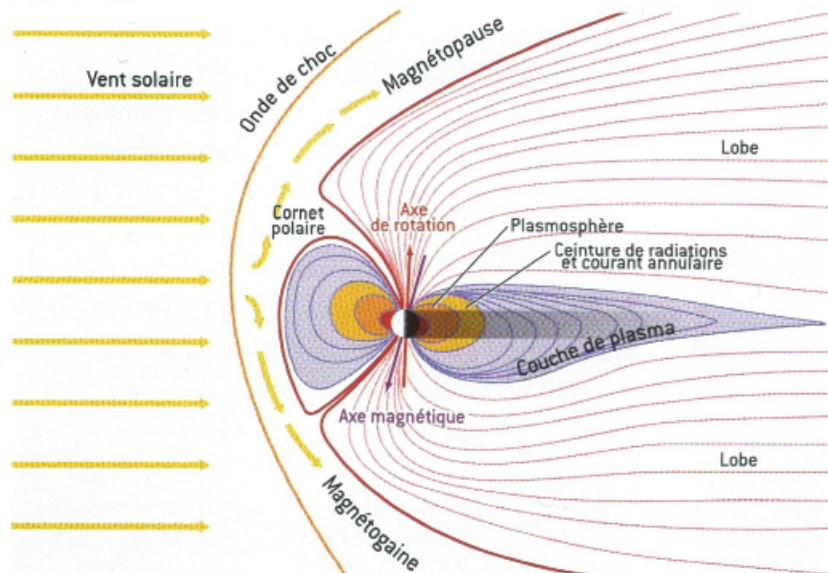


FIGURE I.13 – Coupe méridienne de la magnétosphère de la Terre. Figure extraite de [35].

Composition de la magnétosphère interne : La magnétosphère interne est peuplée de particules (e^- , p^+ et ions) issues du vent solaire et de l'ionosphère terrestre. Ces particules peuvent être mues par des courants de convection ou rassemblées sous forme de plasmas de différentes énergies. Comme le montre la figure I.14, on y trouve aussi différentes familles d'ondes électromagnétiques, distribuées d'une manière hétérogène autour de la Terre.

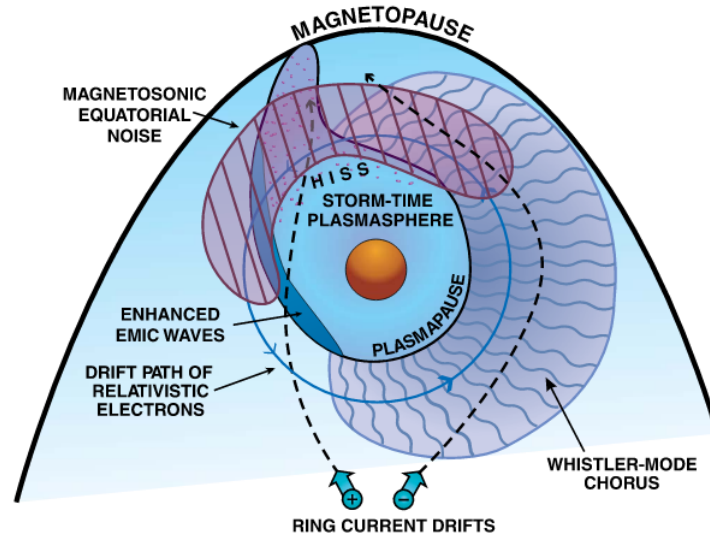


FIGURE I.14 – Composition interne de la magnétosphère et disposition des ondes magnétosphériques autour de la Terre. Figure extraite de [36].

Partant de l'atmosphère terrestre et du sommet de l'ionosphère (environ 1000 km d'altitude), on distingue une première zone importante : la plasmasphère. Elle est composée d'un plasma froid et dense (électrons et protons d'énergie inférieure à ~ 100 eV et une densité pouvant atteindre ~ 1000 particules/cm³ [2]). L'apport en particules chargées de la plasmasphère se fait grâce à l'ionisation des particules neutres de la haute atmosphère par le rayonnement ultraviolet solaire. Ces particules chargées sont ensuite confinées autour de la Terre par l'effet combiné du champ électrique de corotation et de la gravité terrestre, donnant à la plasmasphère sa forme de "beignet" en période calme et une forme de "goutte" étirée côté jour en période perturbée comme le montre la figure I.14. En réalité, la densité interne de la plasmasphère n'est pas uniforme et elle présente souvent des irrégularités locales dont la caractérisation est encore incomplète [37]. Néanmoins, les observations des satellites *CLUSTER* et *THEMIS* ont permis une nette amélioration de la compréhension de ces structures ainsi que ses différents processus de remplissage et d'érosion [37]. La frontière externe de la plasmasphère nommée plasmopause, est caractérisée par une baisse drastique de la densité des particules de plusieurs ordres de grandeur (voir figure I.15). L'emplacement de la plasmopause n'est pas statique. L'analyse des observations du satellite *IMAGE* rapportée dans [38] a permis de lier la dynamique de cette frontière externe à la zone d'influence du champ de corotation ainsi qu'à l'activité géomagnétique ainsi qu'aux caractéristiques du vent solaire [39][40]. Ainsi, la plasmopause peut se situer au-delà de 5 rayons terrestres en période de calme géomagnétique. En période de forte activité, elle peut être réduite très fortement, atteignant un rayon terrestre et demi comme observé par le satellite *CRRES* durant l'intense orage géomagnétique de Mars 1991 [2]. On verra par la suite que la plasmasphère constitue une région privilégiée pour le développement d'une famille d'ondes électromagnétiques particulièrement influente dans la dynamique des ceintures de radiation électronique, à savoir les ondes de types *Hiss* et *lightning whistler*.

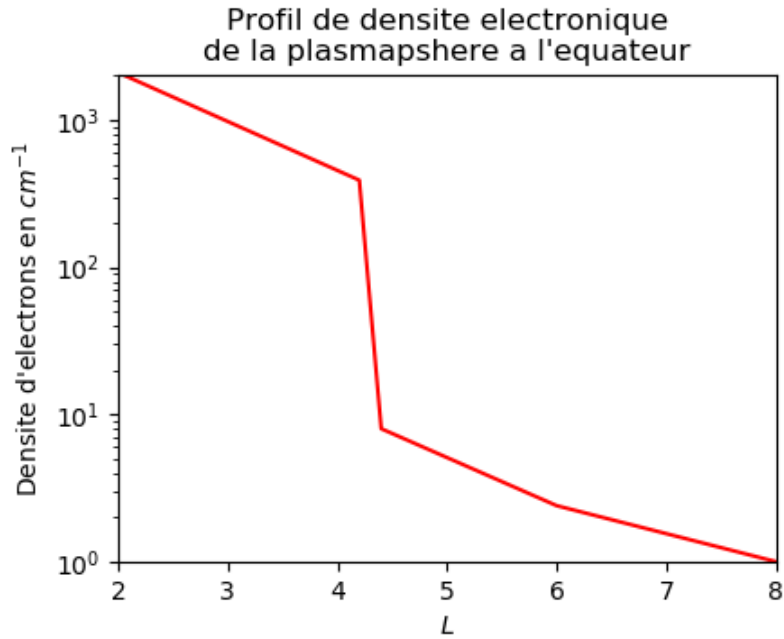


FIGURE I.15 – Profil de densité électronique de part et d'autre de la plasmapause, en fonction de la distance adimensionnée en rayons terrestres. Figure reproduite à partir de [41].

Les ceintures de radiation terrestres partagent aussi cette région et ces deux populations de plasma ("froid" pour la plasmasphère et "chaud" pour les ceintures de radiation) se côtoient et peuvent interagir entre elles comme on le verra dans le paragraphe I.2.2.1.

Le feuillet neutre, source de plasma "frais" pour la magnétosphère interne : Du côté nuit de la magnétosphère, et au-delà de 8 rayons terrestres, se trouve le feuillet neutre (appelé "couche de plasma" dans la figure I.13). Il est constitué d'un plasma de basses énergies (\sim keV) [42] évoluant dans le plan équatorial magnétique. Les particules du feuillet neutre proviennent du vent solaire et elles sont soumises à un champ magnétique d'intensité plus faible. Lors des perturbations électromagnétiques dues à l'interaction de la magnétosphère avec le vent solaire, les particules du feuillet neutre sont accélérées vers la Terre et leurs énergies peuvent atteindre la centaine de keV. Comme le champ magnétique au voisinage de la Terre est plus fort, une séparation de charge s'opère et la structure du courant annulaire se forme. Ce dernier s'étend entre 3 et 5 rayons terrestres et produit un champ magnétique opposé à celui de la Terre, capable d'altérer sa structure dipolaire [43] [44]. Le feuillet neutre joue un rôle crucial dans la mécanique de remplissage des ceintures de radiation. En effet, on sait maintenant que les particules de basses énergies des ceintures de radiation prennent source principalement au feuillet neutre et sont injectées lors des perturbations géomagnétiques accompagnées d'épisodes de convection soutenus. Ces particules seront aussi responsables de la génération de différents types d'ondes électromagnétiques à l'origine d'interactions responsables d'énergisation et de pertes dans les ceintures de radiation [44].

Focus sur les ondes électromagnétiques évoluant dans la magnétosphère interne : Comme mentionné précédemment, la magnétosphère est peuplée de plusieurs familles d’ondes électromagnétiques. Distribuées de manière inhomogène (voir figure I.14), ces ondes ont des caractéristiques très différentes les unes des autres en terme de temps de vie, d’intensité et de fréquences. On distingue en particulier deux types d’ondes primordiales pour la compréhension de la dynamique des ceintures de radiation à savoir :

- Les ondes de type *Ultra Low Frequency* (ULF), dont la fréquence est $1 \text{ mHz} \leq f \leq 10 \text{ Hz}$ [45]. Elles sont principalement excitées au niveau de la magnétopause à cause des fluctuations de la pression exercée par le vent solaire [36]. Elles peuvent aussi provenir d’instabilités naturelles du plasma magnétosphérique.
- Les ondes de type *Very Low Frequency* (VLF), dont la fréquence est de l’ordre du kHz[46]. Les ondes VLF sont excitées par des inhomogénéités ou perturbations des plasmas.

Le mode privilégié de propagation des ondes VLF dans la magnétosphère est le mode *Whistler*. Ce mode de propagation, analogue à celui des ondes atmosphériques issues de la foudre, se caractérise par une gamme de fréquence inférieure à la fréquence du plasma électronique et à la fréquence cyclotron du milieu [47]. Elles jouent un rôle crucial dans la dynamique des ceintures de radiation électrons à travers le phénomène de résonance entre la fréquence de giration des électrons et la fréquence de l’onde [48]. On y distingue les principales sous-familles d’ondes suivantes :

- Les ondes cohérentes de type *Chorus*. Elles sont générées sur deux bandes de fréquences autour de la moitié de la fréquence de giration des électrons du plasma f_{ce} [49]. Situées à l’extérieur de la plasmasphère, elles sont excitées par le phénomène d’injection des électrons du feuillet neutre vers les ceintures de radiation[36] et se propagent en mode *Whistler*. Elles sont en particulier responsables de la précipitation des électrons à l’origine des aurores boréales. De plus, leur intensité est très liée à l’activité géomagnétique et, comme on le verra dans le paragraphe I.2.2.1, elles sont à l’origine de l’intensification des flux à hautes énergies dans la ceinture externe des électrons [50].
- Les ondes incohérentes de type *Hiss* (10 Hz - kHz), confinées dans la plasmaphère [51]. Pour des fréquences $< 1 \text{ kHz}$, les ondes *Hiss* sont issues des amplifications in-situ de la turbulence spatiale des ondes, alors que pour des fréquences $> 2 \text{ kHz}$, elles découlent directement d’ondes *Whistler* atmosphériques [52]. Dans certains cas, elles peuvent provenir d’un mélange non-structuré d’émissions de type *Chorus* se propageant dans la plasmasphère en mode *Whistler*, en périphérie de la plasmopause [36][53]. Leurs intensités sont liées à l’activité géomagnétique ainsi qu’au temps local magnétique [54].
- Les ondes de type *Electro Magnetic Ion Cyclotron* (EMIC) dont la fréquence est de l’ordre du Hz. Elles sont discrètes sur différentes bandes de fréquences, et sont généralement observées à une dizaine de degrés du plan équatorial géomagnétique en périphérie de la plasmopause également. De caractère sporadique, elles sont renforcées en période de forte activité géomagnétique à cause des injections d’ions dans la magnétosphère interne ainsi que lors des épisodes de forte compression magnétosphérique[36][55][56].
- Les ondes *Lightning Whistler* avec $1 \text{ kHz} \leq f \leq 10 \text{ kHz}$. Elles sont générées par les orages se produisant dans l’atmosphère terrestre et se trouvent souvent dans la plasmasphère. Elles génèrent aussi un fort couplage entre la plasmasphère et les ceintures de radiation [57].

I.2.1.3 Impact de l'activité solaire sur la dynamique de la magnétosphère

Les orages et sous orages magnétiques : L'intensité de la contrainte imposée sur la magnétosphère par le vent solaire varie en fonction de la vitesse et la densité de ce dernier. Elle induit une perturbation continue et dynamique du champ magnétique, se répercutant ensuite sur la dynamique même de la magnétosphère. En particulier, on observe pendant les phases agitées (impact d'un CIR ou d'une CME sur la magnétosphère par exemple), une forte variation des flux de particules dans les ceintures de radiation. On classe les activités géomagnétiques en deux catégories en fonction de leurs durées et leurs amplitudes : les sous-orages et les orages magnétiques.

Les sous-orages magnétiques représentent l'évènement de perturbation géomagnétique élémentaire. Ayant une durée de quelques heures (de 1h à 3h), ce mécanisme très fréquent sert à la dissipation de l'énergie accumulée par la magnétosphère[58]. Les orages magnétiques rassemblent les événements majeurs de forte intensité. Un orage magnétique est issu d'une succession de plusieurs sous-orages. Sa durée peut être de quelques heures à plusieurs jours. Les orages magnétiques sont étroitement liés à l'activité solaire et sont provoqués par l'impact d'éjections de masse coronale et de trous coronaux sur la magnétosphère. Il est possible de schématiser le déroulement d'un orage magnétique en par une décomposition en 3 phases (voir figure I.16) :

- La phase initiale, qui dure quelques heures et pendant laquelle la magnétosphère subit une compression côté jour sous l'effet de la pression du vent solaire, provoquant l'augmentation de l'intensité du champ magnétique localement.
- La phase principale, qui dure de quelques heures à une journée environ et pendant laquelle le courant annulaire se renforce et la composante horizontale du champ magnétique terrestre s'affaiblit. Durant cette phase, l'injection de particules depuis la queue de la magnétosphère est renforcée.
- La phase de retour à l'équilibre suite à l'affaiblissement du courant annulaire et le retour du champ magnétique à son intensité de période calme. Cette phase peut durer jusqu'à plusieurs jours. Au cours de cette phase, les ondes électromagnétiques, peuvent s'intensifier si le retour à l'équilibre est suffisamment lent. C'est pendant cette phase qu'elles ont le plus d'influence sur la dynamique des ceintures de radiation terrestres.

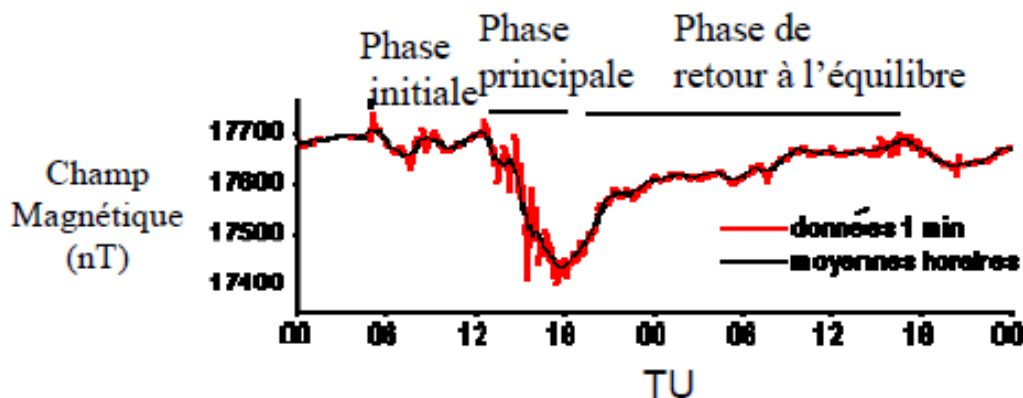


FIGURE I.16 – Les phases d'un orage magnétique. Figure extraite de [59].

La mesure des perturbations géomagnétiques par les indices géomagnétiques : La mesure des perturbations du champ magnétique est importante. Elle renseigne de façon continue sur l'état de la magnétosphère et l'intensité de ses perturbations, y compris en l'absence de données provenant du vent solaire. Elle est retranscrite à travers différents indices empiriques estimés par des stations de mesures au sol, disséminées autour du globe. On cite par en particulier deux indices très utiles à la

description de la dynamique des ceintures de radiation et le pilotage de leur modélisation :

- L'indice Kp , indice planétaire tri-horaire et considéré comme "l'échelle de Richter" de l'activité géomagnétique globale. Il représente le maximum de variation de la composante horizontale du champ magnétique exprimé selon une échelle logarithmique allant de 0 à 9 (voir figure I.17) [2]. Il est issu de la moyenne des mesures effectuées sur 13 stations réparties de manière déséquilibrée entre l'hémisphère nord (11 stations) et l'hémisphère sud (2 stations). Du fait de sa résolution temporelle limitée à 3 heures, il ne permet pas d'accéder précisément à toutes les interactions et dynamiques qu'ont les particules et les ondes dans la magnétosphère interne, certaines s'opérant selon des temps caractéristiques plus faibles. Néanmoins, il constitue un important indicateur global et décrit bien les tendances d'évolution et l'occurrence des orages magnétiques.
- L'indice Dst est un indice linéaire horaire exprimé en nT. Il représente la moyenne de la composante horizontale du champ magnétique mesuré non loin de l'équateur (4 stations situées à des latitudes entre 20° et 30°). Il permet d'estimer l'intensité du courant annulaire et d'accéder à la magnitude des orages magnétiques. Dst est complémentaire à Kp , ayant une meilleure finesse temporelle. En situation de calme, Dst est proche de zéro. Lors d'un orage magnétique, il augmente pendant la phase initiale et finit par chuter brutalement lors de la phase principale pour atteindre des valeurs minimales négatives de plusieurs centaines de nT. Lors du retour à l'équilibre, il revient à zéro.

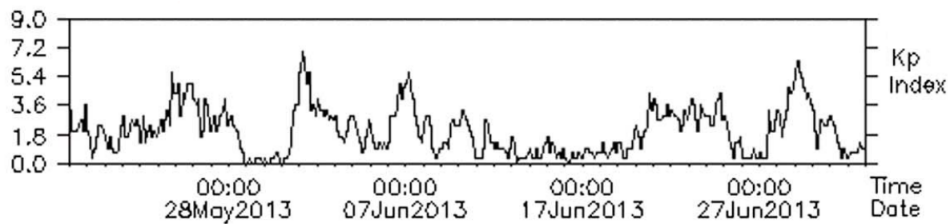


FIGURE I.17 – Évolution mensuelle de l'indice magnétique Kp . Figure extraite de [60].

I.2.2 Activité solaire et ceintures de radiation électrons : Une dynamique multi-physiques et multi-échelles

Le couplage entre l'activité solaire et la magnétosphère est responsable de l'établissement de plusieurs processus d'interactions qui seront entretenus dans la zone d'évolution des ceintures de radiation et qui vont conférer à ces dernières une dynamique temporelle complexe. Dans cette partie, on présente les processus relatifs aux ceintures électrons, qui ont des origines physiques différentes et qui sont étroitement liés à la mécanique des orages magnétiques. Ensuite, on présente une synthèse du fonctionnement de cette dynamique et deux études concrètes d'orages magnétiques, afin d'exposer son étroite relation avec la structure du vent solaire.

I.2.2.1 Les processus d'interactions

La diffusion radiale : La diffusion radiale est l'un des principaux moteurs de la dynamique globale des ceintures de radiation [61][62]. Elle est responsable du transport des particules piégées le long des différentes couches radiales des ceintures de radiation. Elle prend origine principalement dans les variations du champ magnétique et électrique dont les temps caractéristiques sont inférieurs aux périodes de dérive des particules piégées [2]. Les ondes ULF, et en particulier celles de type PC4 et PC5 en sont principalement à l'origine [63]. Son concept a été introduit depuis la découverte des ceintures de radiation pour expliquer leurs existences [62]. Son caractère diffusif vient du formalisme mathématique sous-lequel elle est exprimée, décrivant la moyenne de la contribution des différents processus physiques

de transfert d'énergie dues aux variations temporelles du champ magnétique [62].

La diffusion radiale conserve les grandeurs de mouvement plus rapides, dont en particulier le moment magnétique. Ainsi, les particules transportées sous son effet en direction de la Terre gagneront de l'énergie, et inversement. Elle va donc jouer à la fois la fonction d'un processus de source et de perte [64][65], selon le gradient radial. On peut voir ça notamment dans son rôle de remplissage des ceintures par les particules de faible énergie du feuillet neutre [2][3]. Bien qu'on arrive à la modéliser analytiquement [66][67], elle reste encore un processus complexe et on n'arrive pas encore à bien la maîtriser [3][62]. Cependant, on sait maintenant qu'elle est fortement corrélée à l'interaction du vent solaire et qu'elle s'intensifie fortement en période d'orage magnétique [64][68].

Interaction particule - particule : Les particules piégées vont subir des interactions particule-particule avec celles de la haute atmosphère et la plasmasphère. La haute atmosphère est le lieu de perte par précipitation des particules piégées et l'étendue de l'interaction avec la haute atmosphère n'est pas statique. En effet, son épaisseur se dilate et se contracte sous l'effet de l'émission UV du Soleil. Dans la plasmasphère, les particules des ceintures de radiation vont subir des interactions collisionnelles Coulombiennes. Ces interactions sont faibles et rapides et leurs impacts n'est "senti" qu'après plusieurs périodes de dérive (temps caractéristique $> 24\text{h}$). De plus, plus l'énergie des particules piégées est grande, moins elles sont sensibles à ces interactions. Vue d'une façon globale, ces processus peuvent induire :

- Une diffusion sur l'angle d'attaque [69]. Ce processus reflète un changement de trajectoire et peut contribuer à la précipitation des particules piégées par la modification de leur point miroir.
- Une friction en énergie [70]. C'est une dissipation continue et un échange permanent d'énergie avec des électrons libres ou liés de la plasmasphère et de la haute atmosphère.

Interaction onde-particule résonnante : Ce processus physique se produit quand une particule piégée rencontre une onde électromagnétique ayant une fréquence proche de sa fréquence de giration (ou de ses harmoniques) [59]. C'est pour cela que l'on parle d'interaction résonnante. Ce type d'interaction est très efficace sur les ceintures de radiation électrons avec les ondes de type VLF présentées précédemment. Les protons y sont insensibles du fait de leurs masses, induisant une période de giration bien plus grande (sauf pour les protons de faible énergie pouvant interagir avec les ondes EMIC). L'interaction onde-particule a un rôle primordial dans la dynamique des ceintures de radiation électrons, sur une large bande en énergies et peut induire une diffusion en énergie (gain ou perte) ainsi qu'une diffusion en angle d'attaque. Si l'interaction est suffisamment efficace, alors cette interaction peut faire précipiter une quantité importante d'électrons dans l'atmosphère en période d'orage géomagnétique [71].

Les ondes de type *Hiss* localisées dans la plasmasphère, génèrent une diffusion en angle d'attaque. Elles favorisent un vidage lent des ceintures électrons par précipitation, après leur remplissage survenu lors de la phase principale d'un orage magnétique. Elles sont ainsi à l'origine de l'apparition de la région du *slot* en période d'activité calme [72][73][74]. Pour visualiser cet effet, on représente dans la figure I.18 l'évolution de l'intensité de la diffusion en angle d'attaque induite en fonction de l'énergie, pour $L = 3.5$ et $L = 4$. On observe un accroissement local de la diffusion pour les électrons $\sim \text{MeV}$ qui vont subir fortement cette diffusion et auront tendance à plus précipiter dans le cône de perte, vidant les ceintures de radiation à cette gamme d'énergie.

Les ondes EMIC en revanche, résonnent avec les électrons piégés de haute énergie (supérieure à 500 keV) et favorisent leur précipitation. Les mesures du satellite *CRRES* ont confirmé leur rôle dans la réduction significative des flux d'électrons de plus de 2 MeV à des angles d'attaques supérieurs à 60° [75]. Elles peuvent interagir aussi avec les protons piégés de faibles énergies et ceux du courant an-

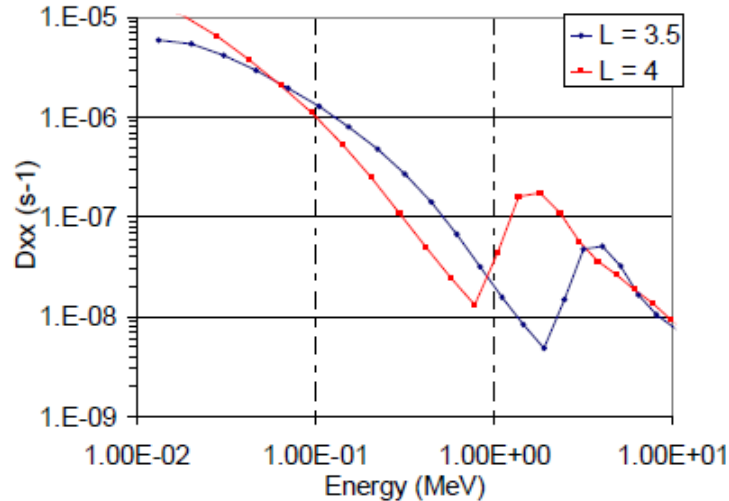


FIGURE I.18 – Intensité de la diffusion générée par les ondes *Hiss* en fonction de l'énergie, pour deux distances adimensionnées en rayons terrestres. Figure extraite de [2].

nulaire en provoquant leurs précipitations rapides pendant la phase principale d'un orage magnétique [76][56].

L'extérieur de la plasmasphère est l'endroit où l'interaction avec les ondes de type *Chorus* devient prépondérante. Elles agissent sur les électrons de la ceinture externe avec une diffusion en angle d'attaque favorisant les pertes par précipitation [36], une diffusion en énergie pouvant accélérer les électrons, ainsi qu'une diffusion croisée [77]. Un changement de paradigme s'est opéré à partir de la décennie précédente vis-à-vis du rôle des ondes *Chorus* dans la dynamique des ceintures électrons. La diffusion radiale était considérée comme le mécanisme majoritairement responsable de l'accélération des électrons. Pourtant, à elle seule elle ne pouvait prédire qu'une distribution particulière plate à grand L^* et décroissante à bas L^* . En réalité, on pouvait observer, un pic local dans la distribution des électrons entre $L^* = 4$ et $L^* = 6$ (comme le schématise la figure I.19) [78][79][66]. Ce phénomène attesté entre autres par les mesures du satellite *POLAR* entre Janvier et Mai 1998 et ceux du satellite *CRRES* lors de l'orage du 9 octobre 1991, indique clairement qu'un autre processus d'accélération est impliqué et que celui-ci agit localement. On sait maintenant, suite à une succession d'études que les interactions résonnantes avec les ondes *Chorus* sont responsables de cette accélération [80][81][82]. Ces dernières sont notamment à l'origine du renforcement des flux d'électrons de la ceinture externe, en particulier après des pertes induites par une forte activité géomagnétique durant la phase principale d'un orage géomagnétique [83].

Les dropouts : Les dropouts rassemblent les différents phénomènes de pertes brusques et intenses pouvant affecter sans distinction les électrons et les protons des ceintures de radiation, sur une large bande d'énergie et à différentes distances radiales. Elles peuvent être engendrées par une forte précipitation atmosphérique ou par une traversée de la magnétopause à cause d'une forte compression du vent solaire, provoquant la fuite des particules piégées dans le milieu interplanétaire [84][60].

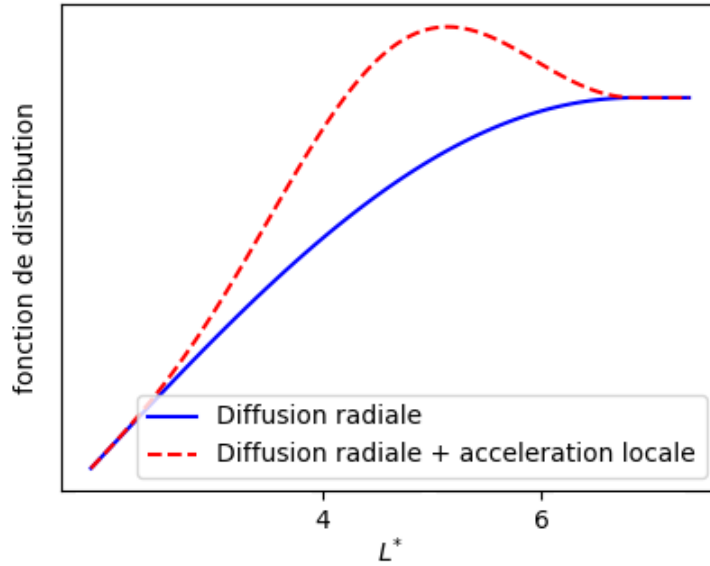


FIGURE I.19 – Représentation schématique des distributions radiales des électrons piégés pendant un orage magnétique : en bleu celle prédite par la diffusion radiale seulement, en rouge celle observée sous l’effet d’accélération locales supplémentaires.

I.2.3 Synthèse des processus d’interactions

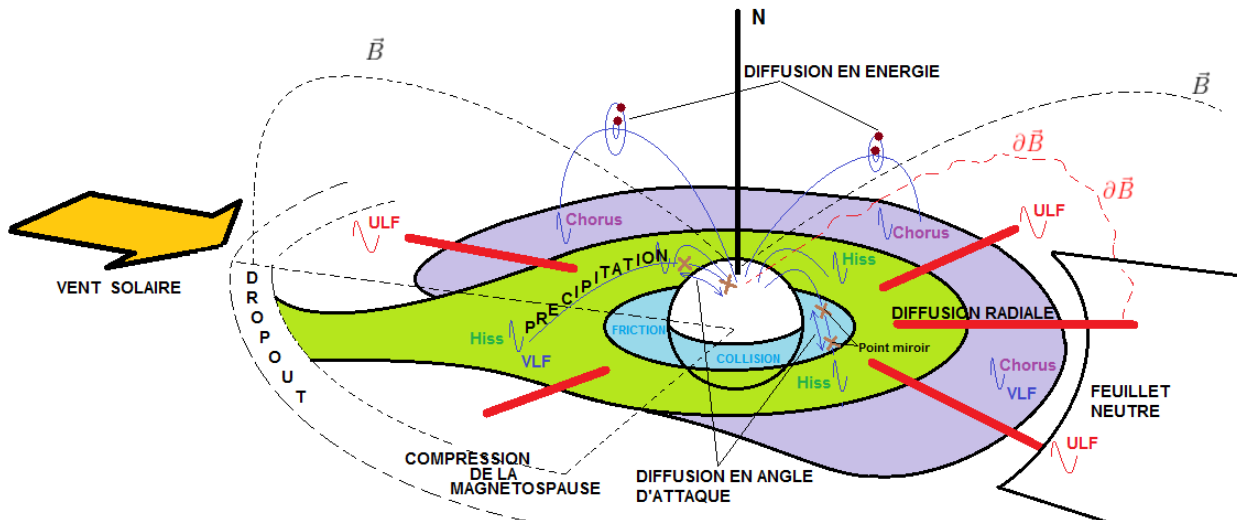


FIGURE I.20 – Schéma récapitulatif des principaux mécanismes physiques pilotant la dynamique des ceintures de radiation électrons et leurs zones de prédominance.

On vient de décrire un à un dans la sous section précédente, les différentes briques de processus qui participent à la dynamique multi-échelle, multi-physique des ceintures de radiation électrons. Elles sont rassemblées et présentées schématiquement dans la figure I.20. Il est possible de les classer selon :

- l’étendue spatiale de leur action : processus global ou local
- leur contribution dans l’équilibre dynamique des ceintures : processus de perte ou processus d’apport et d’accélération.

Concrètement, la diffusion radiale agit à la fois comme un processus global et comme un processus d’apport, dont l’intensité diminue à mesure qu’on s’approche de la Terre. En revanche, les interactions

onde-particule et particule-particule sont des processus locaux, comme elles n'ont lieu que dans une région et/ou une bande d'énergie et/ou angle d'attaque donnés. Les ondes *Hiss* de la plasmasphère ainsi que les populations denses de plasma froid autour de la Terre vont induire une diffusion en angle d'attaque (sur les électrons) et une friction en énergie favorisant les phénomènes de perte. Les ondes *Chorus* entretenues à l'extérieur de la plasmasphère vont induire une diffusion en angle d'attaque favorisant les pertes mais aussi une diffusion en énergie, pouvant accélérer localement les électrons piégés. Par conséquent, on peut identifier en fonction du paramètre radial, deux régimes de dynamique prépondérants (voir figure I.21). Une zone à bas L où les pertes dominent, une zone à grand L^* où les accélérations dominent, avec la plasmopause qui joue le rôle de frontière entre ces deux zones et qui va moduler le passage entre ces deux régimes [2]. De cette représentation simplifiée on conclut que pour avoir une représentation pertinente de la dynamique, il est primordial de disposer d'une compréhension correcte de la physique en jeu ainsi que d'une modélisation fiable de l'intensité des processus en fonction de l'activité géomagnétique.

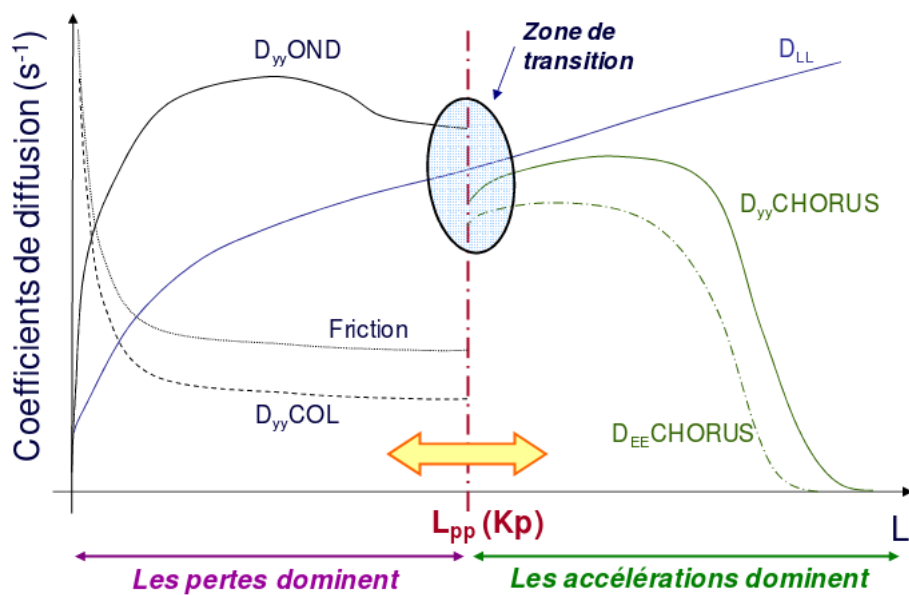


FIGURE I.21 – Synthèse des processus physiques et régimes de dynamique des ceintures électrons. Figure extraite de [2].

I.2.4 Exemples de couplage entre le vent solaire et la dynamique des ceintures de radiation électrons de la Terre

Dans l'absolu, la balance entre les processus de perte et d'apport est certes le principal levier qui va façonner la dynamique des ceintures. On sait aussi que l'activité solaire renforce, en période d'orage, les interactions physiques subies par les particules piégées des ceintures de radiation. Pourtant, selon la phase de l'orage et son intensité, certains processus d'interactions deviennent plus prépondérants que d'autres. Ainsi, en fonction de la structure du vent solaire venant impacter la magnétosphère, l'évolution induite au niveau des ceintures de radiation peut être très différente, comme c'est illustré sur la figure I.22. On y présente deux cas d'orages magnétiques typiques (qu'une modélisation numérique doit être apte à reproduire). Celui de droite est issu de l'éjection d'une masse coronale du 22 Août 2005 et celui de gauche issu du trou coronal du 16 Septembre 2003. Pour ces deux événements, on rapporte la cartographie des flux électrons aux énergies de 300 keV et 3 MeV en fonction du temps et de L^* (mesurés par le satellite NOAA-POES 15), ainsi que l'évolution de l'indice Kp .

Pour les deux événements géomagnétiques, on observe une augmentation de Kp . Comme la diffusion radiale est directement liée à l'activité géomagnétique, elle s'en trouve stimulée et l'accélération des particules vers la Terre est intensifiée. On peut le voir sur la cartographie des flux à 300 keV pour les deux événements avec l'émergence d'une population d'électrons à moins de $L^* = 6$. La limite basse entre les deux événements est cependant différente. Comme l'évènement CME est brusque et violent, son Kp croit d'une façon raide (passant de 1.8 à 9 en moins de 24h). La plasmasphère est donc vite "balayée", le "slot" est rempli, et les électrons poussés jusqu'à $L^* = 2$. En revanche, comme l'évènement CIR est plus étendu dans le temps, l'évolution de Kp est progressive. Ainsi, le remplissage des électrons de 300 keV est moins profond que celui observé dans une CME et se limite à $L^* = 3$. Comme la plasmasphère a été épargnée, les interactions physiques s'y produisant prennent la relève en phase de recouvrement, d'où le vidage observée entre $L^* = 3$ et $L^* = 4$ à partir du 23 Septembre. Pour le cas de la CME en revanche, il faudra attendre de reformation de la plasmasphère (~ 48 h) et que ces processus redeviennent efficaces (temps caractéristique de l'ordre de la semaine et dépendant de L^*), ce qui explique la persistance dans le temps d'électrons de 300 keV à bas L^* . La cartographie des flux d'électrons à 3 MeV sert à évaluer l'effet des ondes sur la ceinture externe des électrons. Lors de l'augmentation graduelle de Kp dans le cas de la CIR, les ondes *Chorus* auront "assez de temps" pour se créer et pour s'intensifier. Comme on peut le voir à partir du 18 Septembre, elle vont pouvoir énergiser les électrons et augmenter leur population dans la ceinture externe ($L^* > 3$). Ce phénomène est pratiquement absent dans la cartographie à 3 MeV de l'évènement CME car les ondes *Chorus* n'ont pas le temps de s'établir du fait de l'activité géomagnétique initialement très intense.

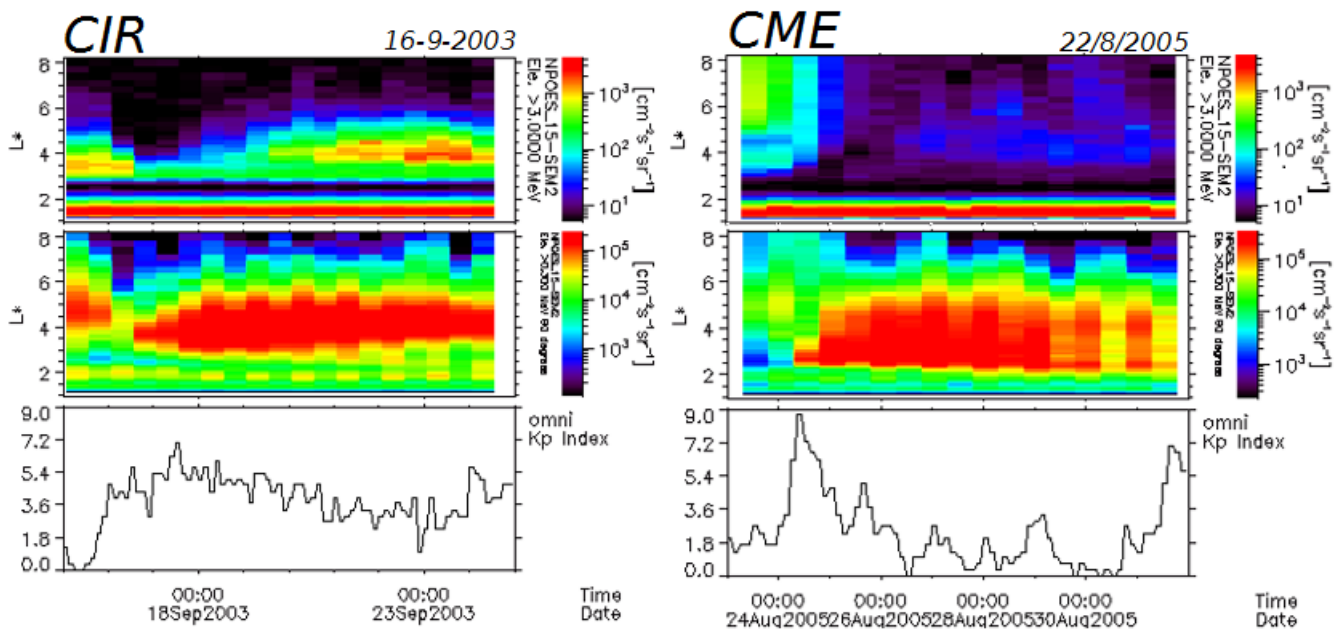


FIGURE I.22 – À gauche : Illustration d'un orage magnétique causé par un trou coronal du 16/9/2003. À droite : Illustration d'un orage magnétique causé par une éjection de masse coronale du 22/8/2005. On rapporte du haut vers le bas, les flux de particules mesurés par le satellite *NOAA POES-15* pour les énergies > 3 MeV et > 300 keV avec l'évolution de Kp .

Ces deux exemples de dynamique, résument bien l'équilibre complexe qui s'opère à chaque instant dans les ceintures de radiation. On verra, dans la section suivante que la modélisation de cette dynamique est une tâche très ardue, et on exposera en détails son cadre théorique et pratique très particulier.

I.3 La modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestres

I.3.1 Besoins et enjeux de la modélisation

La section précédente a permis de caractériser la dynamique complexe des ceintures de radiation qui se matérialise par des flux de particules de haute énergie pouvant varier de plusieurs ordres de grandeur en quelques heures [2]. Elles représentent donc une zone à risque pour l'activité spatiale humaine (voir figure I.23). En particulier, un satellite traversant cette région risque de subir :

- Une dégradation à long terme de ses matériaux, caractérisée par des dérives de leurs caractéristiques physiques comme c'est le cas pour les panneaux solaires ou les revêtements thermiques.
- Un endommagement ponctuel ou permanent des équipements électroniques.

L'endommagement de l'électronique à bord est une source majeure d'anomalies des satellites en orbite. Lors d'orages géomagnétiques ou d'éruptions solaires, on observe une forte corrélation entre ces anomalies et l'augmentation des flux d'électrons et de protons [85][86]. En effet, une particule chargée de haute énergie traverse facilement l'enceinte externe d'un satellite et pénètre profondément jusqu'au niveau de ses composants électroniques. Elle peut donc générer différentes perturbations sur le fonctionnement des circuits qu'on rassemble dans deux famille : les perturbations ponctuelles *Single Event Effect* (SEE) [87] et le vieillissement (phénomène cumulatif de dose reçue). Les flux de particules chargées provoquent aussi des phénomènes de charges internes [88][89][90] particulièrement dangereux et pouvant rendre les satellites incontrôlables [91].

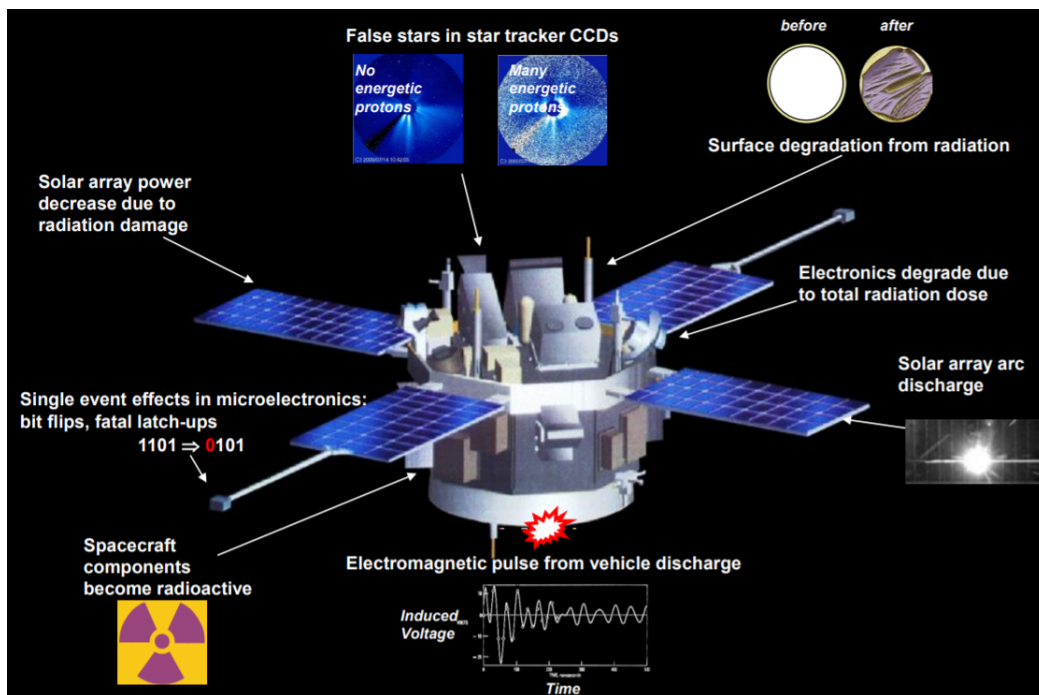


FIGURE I.23 – Potentiels risques d'endommagement subis par un satellite à cause de l'environnement radiatif spatial. Crédit *The Aerospace Corporation*.

Le risque d'endommagement électronique est d'autant plus accru, connaissant le contexte actuel de miniaturisation des composants, et la conception de plus en plus standardisée des satellites. Bien qu'on adopte actuellement des stratégies de duplications des circuits, de corrections des erreurs numériques qui peuvent suffire à contenir les effets d'événements de courte durée, on n'est toujours pas à l'abri quand on a affaire à des événements de longue durée.

L'inquiétude actuelle des industriels et des opérateurs du spatial vis-à-vis des événements dits extrêmes prend actuellement de l'ampleur, en réponse à la faible activité solaire observée depuis des années. Suite à ces interrogations, la communauté scientifique (en particulier la communauté française du Programme National Soleil-Terre, "PNST") axe de nombreux travaux autour des thématiques de la météo et la climatologie de l'Espace. Une connaissance précise couplée à une modélisation fine de l'environnement spatial terrestre est donc nécessaire pour s'inscrire dans ces thématiques. Cette thèse a ainsi pour but de contribuer à cela.

Au vu des enjeux actuels de l'industrie spatiale, il devient indispensable de bien comprendre le fonctionnement de cet environnement agressif et de spécifier ses états. En particulier, les acteurs du spatial sont demandeurs de :

- modèles de spécifications de nouvelles générations pour mieux dimensionner les satellites ou les missions habitées et prendre en compte les nouvelles contraintes imposées par le *New Space* (rentabilité économique et l'optimisation des charges utiles) ou les nouvelles stratégies de mise en orbite électrique *Electric Orbit Rising* (EOR).
- modèles précis type météorologie de l'Espace de prédiction pour bien opérer leurs satellites et pour identifier des liens de causalité entre des problèmes survenus à bord et des phénomènes survenus dans cet environnement [92].

I.3.2 Boite à outils de la modélisation : modèles empiriques, codes physiques et outils d'assimilations de données

Pour répondre aux besoins spécifiques énoncés précédemment, les acteurs du spatial s'appuient sur une panoplie d'outils complémentaires [93] constituée de :

- modèles empiriques développés à partir de mesures satellites. Ils peuvent être globaux comme les modèles AE8-AP8 de la NASA [94][95] ou le modèle GREEN de l'ONERA [96], décrivant une zone large de la magnétosphère interne ou bien spécifiques à une zone donnée, comme le modèle IGE (*International Geostationary Electron*) des électrons de l'orbite géostationnaire d'énergie entre 1 keV et 5 MeV [97]. Ces modèles rassemblent des mesures statiques et moyennées sur des périodes de temps données et des mesures dynamiques relatives à des événements géomagnétiques particuliers.
- modèles physiques qui se basent sur une modélisation théorique de la dynamique comme le modèle Salammbô de l'ONERA, objet d'étude de cette thèse, qu'on présentera succinctement dans la partie I.3.3.
- modèles d'assimilation de données mettant à disposition les avantages des deux outils précédents pour construire une modélisation couplée aux mesures, plus fidèle à la réalité [2].

Bien que les modèles empiriques soient très utiles pour approcher la dose totale reçue par un satellite au cours de sa mission, ils restent limités par la résolution spatio-temporelle des orbites et des temps de vols des satellites réalisant ces mesures. De plus, les moniteurs de radiation embarqués sur les satellites ne peuvent détecter que des énergies déposées par les particules. La discrimination du type de particule (électron, proton) se fait donc en aval, en plus d'un filtrage des artefacts de contamination de l'instrument de mesure, de sa saturation et d'élimination du bruit de fond [98]. On peut donc se trouver avec des modèles qui diffèrent de la réalité comme c'est le cas du modèle AP8 qui sous-estime considérablement les flux de protons d'énergie inférieure à 10 MeV situés à $L^* < 1.4$ [99][100], et le modèle AE8 qui surestime d'un facteur 3 les flux d'électrons de haute énergie situés dans la ceinture externe [2][101].

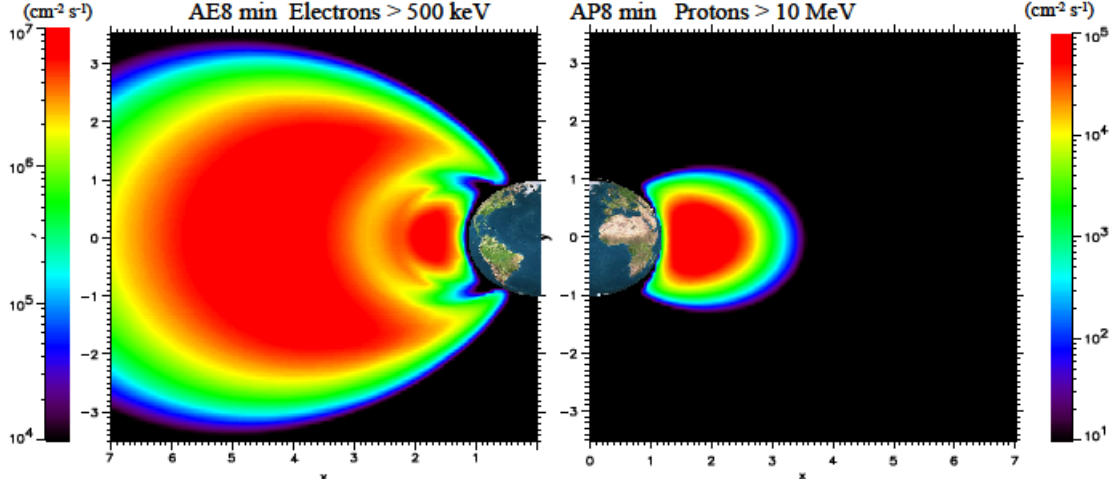


FIGURE I.24 – Cartographie des flux omnidirectionnels intégrés des électrons de plus de 500 keV (à gauche) et des protons d'énergie supérieure à 10 MeV (à droite) pris des modèles AE 8 et AP 8 de la NASA en minimum solaire. Figure extraite de [2].

Récemment, l'amélioration notable de la représentativité des modélisations des ceintures de radiation a rendu pertinente la combinaison des mesures et des modélisations physiques dans le cadre de l'assimilation de données. Ce couplage permet à la fois d'affiner la résolution spatio-temporelle des mesures et de mieux approcher la dynamique de l'environnement radiatif là où il y a peu ou pas de mesures.

I.3.3 La modélisation théorique de la dynamique des ceintures de radiation : L'équation de Fokker-Planck

Pour modéliser la dynamique des ceintures de radiation, on pourrait être tenté de résoudre l'équation de mouvement pour chaque particule piégée :

$$m \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = q \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \wedge \vec{B} \quad (\text{I.12})$$

Cette approche qui parait en premier lieu anodine, est en réalité très compliquée car elle nécessite une modélisation fine du champ magnétique \vec{B} en tout point et à chaque instant. Ensuite, on serait amené à résoudre l'équation du mouvement pour un nombre gigantesque de particules piégées et suivre une par une leurs trajectoires.

Une meilleure alternative consiste à appréhender le problème physique d'un point de vue "mésoscopique" en adoptant un modèle d'équation de Boltzmann dans l'espace position-moment à 6 dimensions $(\vec{r}, \vec{p}) = ((r_x, r_y, r_z), (p_x, p_y, p_z))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (\text{I.13})$$

f est la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases appelée aussi **Phase Space Density** (PSD) exprimée en $\text{MeV}^{-1} \text{s}^{-3}$. Le membre de droite décrit les interactions physiques subies par cette distribution avec son environnement [9][102]. Pour relier l'équation (I.13) au mouvement quasi-périodique des particules piégées, on adopte une formulation hamiltonienne de l'équation en l'exprimant d'abord dans l'espace des variables action, angle $(\vec{J}, \vec{\varphi})$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{J}} + \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{\varphi}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (\text{I.14})$$

On assimile ensuite les composantes de la variable vectorielle \vec{J} avec les invariants adiabatiques présentés dans la section I.1.3. Ceux de la variable vectorielle $\vec{\varphi}$ sont confondus avec les angles définissant la position des particules dans le cercle de giration, la corde de rebond et la coquille de dérive. Le terme de droite est par la suite approché par un opérateur stochastique de Fokker-Planck ainsi que deux termes de sources et de pertes non diffusives. En particulier, l'opérateur de Fokker-Planck [102] va introduire l'opérateur de diffusion et l'équation devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{dJ_i}{dt} \frac{df}{dJ_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{d\varphi_i}{dt} \frac{df}{d\varphi_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial J_i} (D_{J_i J_j} \frac{\partial f}{\partial J_j}) - \frac{\partial}{\partial J_i} (D_{J_i} f) + \text{Sources} - \text{Pertes} \quad (\text{I.15})$$

De ce fait, on ne suivra plus l'évolution de chaque particule piégée pour décrire l'état des ceintures mais plutôt les populations de particules présentant une configuration d'invariants adiabatiques donnée. Le choix des invariants comme variables d'actions permet de simplifier l'équation en annulant les dérivations temporelles des J_i . Si on se met dans l'approximation du centre guide, et en supposant des temps d'évolution plus grands que ceux de la dérive, les dérivations temporelles des φ_i s'annulent elles aussi [18]. Une fois toutes ces hypothèses appliquées à l'équation I.15, on se retrouve au final avec la forme canonique de l'équation tridimensionnelle de diffusion, régissant la dynamique des ceintures pour des temps d'évolution supérieurs au temps de dérive :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial J_i} (D_{J_i J_j} \frac{\partial f}{\partial J_j}) - \frac{\partial}{\partial J_i} (D_{J_i} f) + \text{Sources} - \text{Pertes} \quad (\text{I.16})$$

Le premier terme du membre de droite représente les termes de diffusion. Le second terme en revanche modélise les processus non-diffusifs issus de décélérations non-stochastiques de friction. Les termes de sources et de pertes traduisent les processus physiques non diffusifs comme les *dropouts* (présentés dans la partie I.2.2.1). Le terme de gauche en revanche, caractérise l'évolution temporelle de la cellule élémentaire dans l'espace des invariants, qui subit les interactions physiques modélisées par les termes de droite de l'équation.

Du fait de la corrélation du mouvement de giration avec le mouvement de rebond et la différence notable de leurs temps caractéristiques avec ceux de la dérive, on distingue deux niveaux de diffusion. Un niveau de diffusion global unidimensionnel qui s'opère sur Φ et un autre local bidimensionnel qui s'opère entre μ et J . Cette décorrélation fait que $D_{\mu\Phi} = D_{J\Phi} = D_{\Phi\mu} = D_{\Phi J} = 0$.

La forme canonique de l'équation (I.16) n'est pas la forme usuelle pour décrire la dynamique des ceintures de radiation. En réalité, on préfère réaliser le changement de variable de l'espace (μ, J, Φ) vers l'espace (y, E, L^*) [103]. Ce dernier est plus adapté à l'estimation des coefficients de diffusion ainsi qu'à la représentation de l'état des ceintures (dans le cas d'une comparaison avec des mesures). Pour y parvenir, on réalise une séparation de l'équation entre la dérive d'un côté (équation de diffusion unidimensionnelle sur Φ) et la giration et le rebond de l'autre (équation de diffusion bidimensionnelle sur (μ, J)). Ensuite, on effectue deux changements de variables intermédiaires : le premier, opéré sur l'équation de diffusion 1D $(\mu, J, \Phi) \rightarrow (\mu, J, L^*)$ et le second opéré sur l'équation de diffusion 2D $(\mu, J, \Phi) \rightarrow (E, y, L^*)$. Au final, l'équation modélisant la dynamique des ceintures de radiation s'écrit dans l'espace (y, E, L^*) comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{E, L^*} (G D_{yy} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{E, L^*} + G_1 D_{yE} \frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{y, L^*}) \\ & + \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial E} \Big|_{y, L^*} (G_1 D_{EE} \frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{y, L^*} + G_1 D_{yE} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{E, L^*}) \\ & + G_2 \frac{\partial}{\partial L^*} \Big|_{J_1, J_2} (G_2 D_{L^* L^*} \frac{\partial f}{\partial L^*} \Big|_{J_1, J_2}) - \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial E} (G_1 \frac{\partial E}{\partial t} f) + \text{Sources} - \text{Pertes} \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

avec G_1 et G_2 respectivement les jacobiens des transformations $(\mu, J, L^*) \rightarrow (E, y, L^*)$ et $(\mu, J, \Phi) \rightarrow (\mu, J, L^*)$. Sous cette forme, la diffusion en énergie et en angle d'attaque s'effectue à L^* constant, alors

que la diffusion radiale s'effectue à μ et J constants. Dans ce travail de thèse, nous nous intéresserons tout particulièrement à la forme diffusivo-pure de l'équation précédente, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{E,L^*} \left(G D_{yy} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{E,L^*} + G_1 D_{yE} \frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{y,L^*} \right) \\ & + \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial E} \Big|_{y,L^*} \left(G_1 D_{EE} \frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{y,L^*} + G_1 D_{yE} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{E,L^*} \right) \\ & + G_2 \frac{\partial}{\partial L^*} \Big|_{J_1,J_2} \left(G_2 D_{L^*L^*} \frac{\partial f}{\partial L^*} \Big|_{J_1,J_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Notons que la fonction de distribution est directement liée au flux unidirectionnel différentiel à travers la relation suivante [102] :

$$j(y, E, L^*, t) = p^2 f(y, E, L^*, t) \quad [\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{MeV}^{-1}] \quad (\text{I.19})$$

En se basant sur ce formalisme théorique, plusieurs codes physiques de restitution de l'état des ceintures ont été développés, comme le code physique Salammbô de l'ONERA que l'on va présenter dans la partie suivante.

I.3.4 Le code Salammbô de l'ONERA de modélisation des ceintures de radiation

I.3.4.1 Présentation du code et de ses différentes versions

Salammbô est un code physique de modélisation de la dynamique des ceintures de radiation terrestre, écrit en Fortran et développé depuis les années 90 par l'équipe de modélisation de l'Environnement Radiatif Spatial de la Terre (ERS, anciennement MEM), du département de Physique, Instrumentation, Environnement et Espace (DPHY, anciennement DESP) de l'ONERA. Le modèle Salammbô a été initialement développé pour accéder à l'état stationnaire des ceintures de radiation, s'appuyant sur les résultats et mesures de la mission *CRRES* [102]. L'aspect temporel a ensuite été intégré [9]. Le code permet à la fois de simuler les ceintures électrons (Salammbô-Électron) et protons (Salammbô-Proton), ce qui fait sa particularité dans la famille des codes physiques de la communauté d'étude des ceintures, en plus d'en être le pionnier. Comme l'atteste le tableau I.3, il a subi des améliorations incrémentales pour permettre la prise en compte de nouveaux processus physiques et a été décliné pour Jupiter et Saturne [16][17][103].

Version	Planète	Particule	Dépendance temporelle	Caractéristiques et application
Beutier 1993	Terre	Électron/Proton	Stationnaire	-1 ^{er} modèle de Salammbô Formulation 3D -Prise en compte des processus dominants
Bourdarie 1996	Terre	Électron	Dynamique	-Dynamique à l'échelle de l'orage magnétique -Prise en compte des mouvements de convection
Vacaresse 1999	Terre	Électron/Proton	Stationnaire	-Échelle du cycle solaire
Santos Costa 2001	Jupiter	Électron	Stationnaire	-Effet des satellites naturels et des anneaux - Changement de variable $(\mu, J, \Phi) \rightarrow (E, y, L^*)$
Sicard 2004	Jupiter	Électron/ions	Stationnaire	-Modélisation des ceintures de radiation d'électrons et d'ions de Jupiter
Varoutsou 2005	Terre	Électron	Dynamique	-Meilleure modélisation de la ceinture externe -Prise en compte de l'interaction onde-particule
Lorenzato 2012	Saturne	Électron	Dynamique	-Prise en compte des processus dominants
Lesogne 2013	Terre	Électron/Proton	Dynamique	-Modélisation fine de la diffusion radiale par technique de changement d'échelle
Herrera 2017	Terre	Électron	Dynamique	-Prise en compte du temps magnétique local (4D) -Prise en compte des champs électriques magnétosphériques
Nénon 2018	Jupiter	Électron/Proton	Stationnaire	- modèle protons étalé jusqu'à l'orbite d'Europe - Mise en évidence du rôle des ondes électromagnétiques

TABLEAU I.3 – Tableau récapitulatif des différentes versions du code Salammbô développées lors des thèses ONERA.

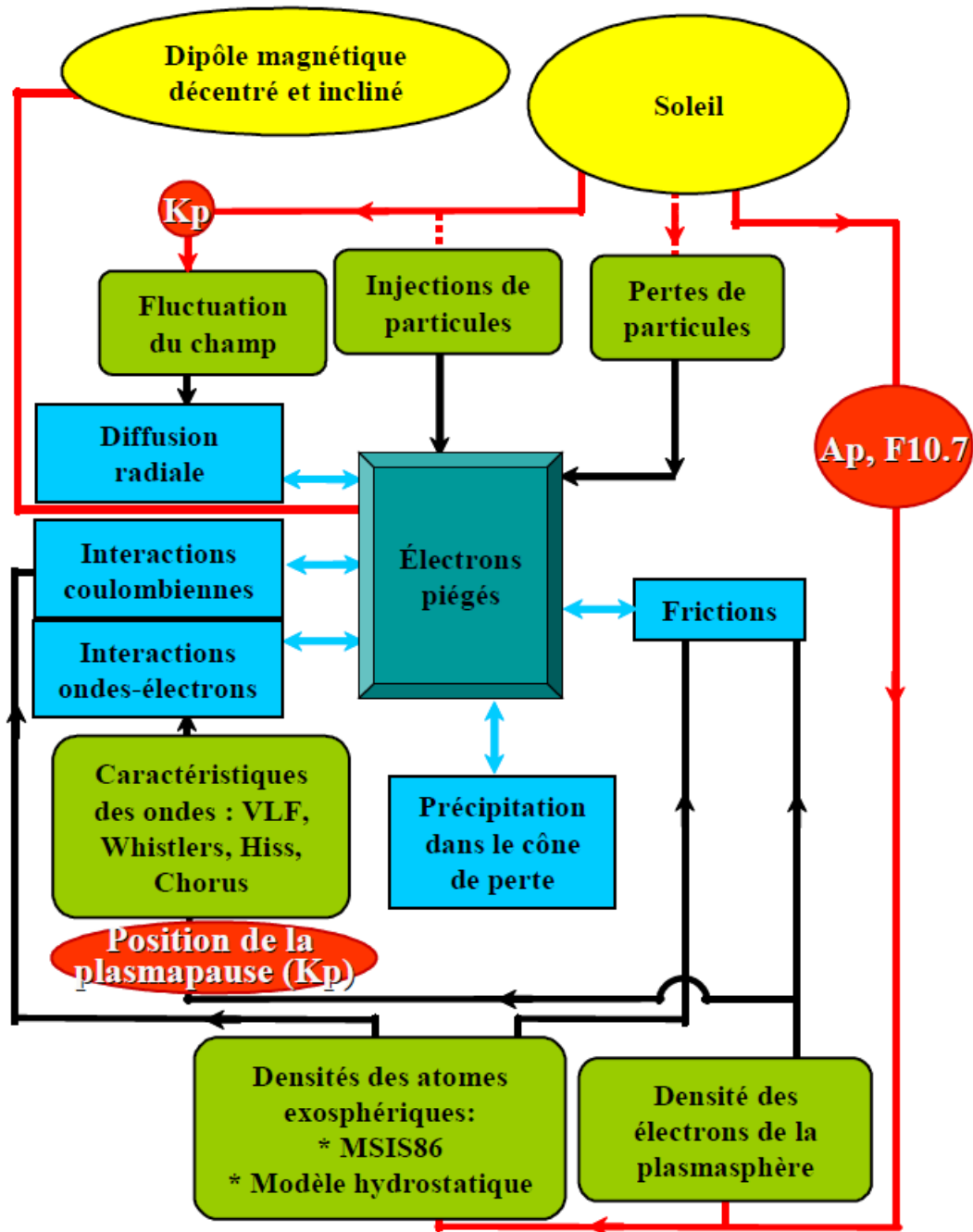


FIGURE I.25 – Schéma de fonctionnement de Salammbô-Électron : en jaune les modèles d’environnement, en vert les entrées empiriques, en bleu les modèles d’interactions, le tout piloté par les proxy en rouge.

I.3.4.2 Le fonctionnement du code

Salammbô adopte une logique d’implémentation modulaire comme le montre la figure I.25. On y distingue en jaune, les modules de modélisation de l’environnement dans lequel baignent les ceintures de radiation (champ magnétique tilté décentré, interaction Soleil-Terre), en vert, les modules d’entrées de donnée issus des mesures (densité de particules dans la haute atmosphère, statistique des ondes électromagnétiques...), en bleu clair, les modules d’estimations des interactions physiques (coefficients de diffusion, friction...) et enfin le coeur numérique, élément central qui va résoudre numériquement l’équation de diffusion et auquel on s’intéressera en détails dans la section (I.4). Les différents modules

du code sont pilotés par le paramètre géomagnétique Kp ainsi que le paramètre d'émission radio du soleil $F10.7$. Cette dépendance favorise une résolution dynamique, ajustée à l'intensité de l'activité géomagnétique et celle du Soleil.

Les processus physiques intervenant dans la résolution de Salammbô sont pré-calculés par des codes à part, comme par exemple le code *Wave Particle Interaction* (WAPI) [104]. WAPI estime les coefficients de diffusion issus des interactions onde-particule en se basant sur la théorie de diffusion quasi-linéaire [105] et en parcourant une bande de fréquence de 100 Hz à 10 kHz, pour deux densités des particules du plasma froid (à l'intérieur et à l'extérieur de la plasmasphère, voir partie I.2.1.2). Deux configurations de coefficients de diffusion sont donc calculées et le choix entre elles se fait selon où on se trouve par rapport à l'emplacement de la plasmopause noté L_{pp} , elle même déterminée par un modèle empirique (celui de *Carpenter & Anderson [41]*). Avec cette approche, on parvient à bien restituer l'interaction avec les ondes, pour un coût de calcul largement avantageux comparé à une estimation des coefficients pour chaque valeur de Kp .

Néanmoins, l'estimation rigoureuse de l'interaction onde-particule se révèle être une tâche très compliquée. Elle nécessite une connaissance fidèle des ondes (distributions spatiales, densités spectrales, polarisations et directions de propagation) et du plasma froid (les évolutions locales de la densité de plasmasphère jouent un rôle majeur dans l'intensité des processus diffusifs [106]). Or les mesures relatives aux ondes sont souvent limitées à l'intensité de leurs champs électromagnétiques sur une orbite satellite donnée et leurs corrélations à l'activité géomagnétique sont pauvres.

Salammbô-Électron parvient à bien restituer la dynamique globale des ceintures de radiation des électrons post-orage géomagnétique [107], malgré l'incertitude non-négligeable sur les conditions aux limites et sur les processus d'interactions. Il constitue aussi un véritable laboratoire de test et de validation de nouveaux modèles de processus d'interactions physiques [82].

I.4 Les limitations du coeur numérique du code Salammbô

Dans cette partie, nous allons clôturer la présentation de notre cadre d'étude physique et faire le lien avec l'étude numérique effectuée pendant la thèse. Pour cela, on va d'abord présenter le coeur numérique de Salammbô. Ensuite, on va exposer les limitations numériques et physiques qu'il impose sur la représentation du code et ses performances. Par la même occasion, on relatera quelques pistes d'améliorations explorées dans la littérature de modélisation numérique des ceintures, ayant permis d'orienter mes développements numériques pendant la thèse.

I.4.1 Le coeur numérique actuel de Salammbô

I.4.1.1 Une discrétisation différences finies explicite

La résolution numérique de l'équation I.18 dans Salammbô se fait avec un schéma aux différences finis-Euler explicite.

Avec la méthode différence finies (DF), on estime les dérivées d'une équation aux dérivées partielles (EDP) par un développement de Taylor tronqué :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{I.20})$$

Le domaine de résolution est quadrillé par un des nœuds x_i , où sera calculée la solution de l'équation à résoudre $f_i \approx f(x_i)$. Le coeur numérique de Salammbô utilise les formules de discrétisation centrées suivantes pour approcher les dérivée partielles premières et secondes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &\approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x_+ + \Delta x_-} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i &\approx \frac{2\Delta x^- f_{i+1} + 2\Delta x^+ f_{i-1} - 2(\Delta x^- + \Delta x^+) f_i}{\Delta x^+ \Delta x^- (\Delta x^+ + \Delta x^-)} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

$\Delta x^+ = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta x^- = x_i - x_{i-1}$. Dans le cas d'un maillage uniforme ($\Delta x^+ = \Delta x^- = cte$) les formules de discrétisation (I.21) sont d'ordre 2. L'ordre du schéma représente le niveau de troncature du développement de Taylor considéré, autrement dit l'ordre d'évolution asymptotique de l'erreur de discrétisation. En considérant un domaine de résolution bidimensionnel, on rajoute l'indice j de la deuxième direction de discrétisation et $f(x_i, y_j)$ est approchée par $f_{i,j}$. Dans ce cas, la dérivée croisée est approchée avec le schéma centré par :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta x_+ \Delta x^+ + \Delta x^- \Delta x^+ + \Delta x^+ \Delta x^- + \Delta x^- \Delta x^-} \quad (\text{I.22})$$

La discrétisation d'un problème de diffusion 2D complet (diffusion croisée non nulle) au noeud (i, j) aura donc besoin de l'approximation de f sur ses 8 voisins directs. On parle dans ce cas d'un schéma numérique avec un stencil de 9 points.

Quant à l'intégration temporelle, le temps de simulation t_{simu} est discrétisé en n intervalles de pas constant Δt tel que $t_{simu} = n\Delta t$. Salammbô estime la dérivée temporelle par l'approximation décentrée à l'ordre 1 du schéma Euler explicite :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^n \approx \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} \quad (\text{I.23})$$

f^n est l'estimation de la fonction de distribution à l'instant $t = n\Delta t$ ou à l'itération n .

Avant de discrétiser l'équation de diffusion (I.18), on rassemble les termes multiplicatifs de chacune de ses dérivées partielles comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & D_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} |_{E,L^*} + g_y \frac{\partial f}{\partial y} |_{E,L^*} D_{EE} \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} |_{y,L^*} + g_E \frac{\partial f}{\partial E} |_{y,L^*} \\ & + 2D_{yE} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial E} |_{L^*} + D_{L^*L^*} \frac{\partial^2 f}{\partial L^{*2}} |_{\mu,J} + g_{L^*} \frac{\partial f}{\partial L^*} |_{\mu,J} \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

avec

$$\begin{aligned} g_y = & \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial y} |_{E,L^*} (G_1 D_{yy}) + \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial E} |_{y,L^*} (G_1 D_{yE}) = D_y D_{yy} + D_E D_{yE} \\ g_E = & \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial E} |_{y,L^*} (G_1 D_{EE}) + \frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial y} |_{E,L^*} (G_1 D_{yE}) = D_E D_{EE} + D_y D_{yE} \\ g_{L^*} = & \frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial L^*} |_{\mu,J} G_2 D_{L^*L^*} = D_{L^*} D_{L^*L^*} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Les terme $D_y D_{yy}, D_E D_{EE}, D_y D_{yE}, D_E D_{yE}$ et $D_{L^*} D_{L^*L^*}$ sont pré-calculés à partir des coefficients de diffusion.

On se retrouve au final avec une équation algébrique régissant l'évolution de $f_{i,j,k}^{n+1}$ en fonction de $f_{i,j,k}^n$, de l'approximation de f sur ses 8 voisins directs dans le plan (y, E) , ainsi que f_a^n et f_c^n qui sont les valeurs de f interpolées sur le maillage (y, E, L^*) pour réaliser la diffusion radiale à μ et J constants :

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^{n+1} = & (1 - A_0 + B_0 + C_0 + H_0) f_{i,j,k}^n + A_1 f_{i+1,j,k}^n + A_2 f_{i-1,j,k}^n \\ & + B_1 f_{i,j+1,k}^n + B_2 f_{i,j-1,k}^n \\ & + D_1 f_{i+1,j+1,k}^n - D_2 f_{i-1,j+1,k}^n - D_3 f_{i+1,j-1,k}^n + D_4 f_{i-1,j-1,k}^n \\ & + H_1 f_a^n + H_2 f_c^n \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Les poids de discrétisations A_p, B_p, C_p, D_i et E_p contiennent dans leurs expressions, les coefficients de diffusion, leurs gradients ainsi que les pas d'intégrations spatiales et temporelles. Dans la version actuelle de Salammbô-Électron, $D_p = 0$ car la diffusion croisée n'est pas prise en compte ($D_{yE} = 0$) pour des considérations numériques qui seront détaillées dans la partie I.4.2.3.

I.4.1.2 Le domaine de résolution du code Électron et les conditions aux limites adoptées à ses bords

Le domaine de résolution 3D du code (y, E, L^*) est discrétisé sur une grille d'une taille de $34 \times 25 \times 34$ nœuds. Elle peut être raffinée vers une taille intermédiaire $67 \times 49 \times 67$ ou complète de $133 \times 49 \times 133$ (voir figure I.26). Le pas d'intégration temporelle adopté pour une simulation avec la grille complète est $\Delta t = 10^{-2} s$ et il est $\Delta t = 1 s$ pour une simulation avec la grille réduite. Le choix entre ces configurations de maillage est justifié par un compromis entre le coût en temps de calcul et la précision de l'estimation numérique. très souvent, il est porté sur la grille réduite ou intermédiaire.

La dimension radiale s'étend entre $L^* = 1$ et $L^* = 8$ et sa discrétisation est adaptative, conservant une bonne résolution aux orbites LEO et GEO. La grille de calcul en angle d'attaque est définie à partir du modèle de champ magnétique IGRF [2] et on impose en bout de ligne de champ (proche de l'atmosphère) une résolution ultime à 100 Km. Comme l'atteste la figure I.26, les maillages de E et y présentent des raffinements fins au voisinage de leurs extrémités. Cela permet une meilleure prise en compte des processus de diffusion dans ces zones d'intérêts, en particulier à l'équateur magnétique (y_{max}) et proche du cône de perte (y_{min}).

Enfin, on rapporte dans le tableau I.4, les conditions aux limites adoptées au bord du domaine de calcul dans les simulations de Salammbô-Électron, ainsi que la condition initiale.

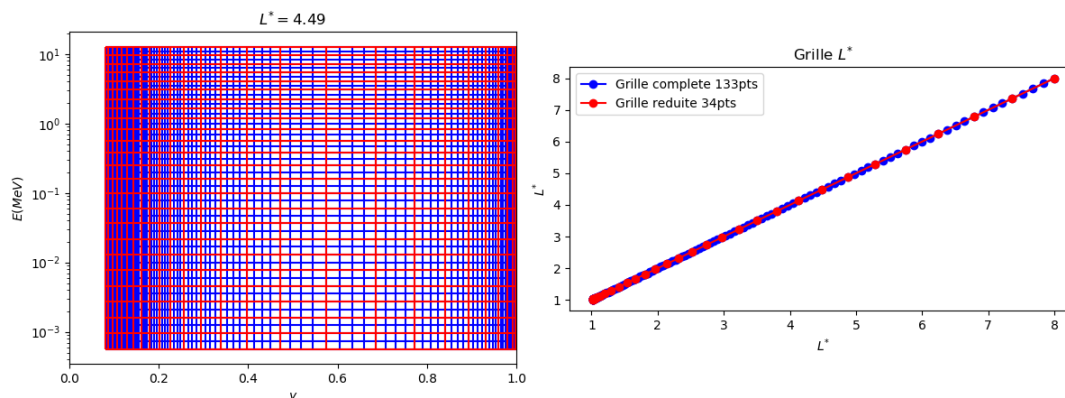


FIGURE I.26 – Maillages fin (bleu) et grossier (rouge) des grilles (y, E) (à gauche) et L^* (à droite) de Salammbô-Électron.

Frontière	Condition	Explications
y_{min}	$f = 0$	Absence de particules piégées dans le cône de perte
y_{max}	$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$	Symétrie à l'équateur Distribution plate de f en angle d'attaque
E_{min}	$\frac{\partial f}{\partial E} = 0$	Distribution plate de f en énergie
E_{max}	$f = 0$	Absence d'électrons piégés de hautes énergies
L_{min}	$f = 0$	Perte dans l'atmosphère terrestre
L_{max}	$f = h(y, E, t)$	Apport de particules du feuillet neutre
f_{init}	$f = q(y, E, t)$	État vide ou un état particulier issu d'une simulation

TABLEAU I.4 – Conditions aux limites sur les trois dimensions, utilisées dans le code Salammbô-Électron.

I.4.2 Limitations du cœur numérique de Salammbô

L'implémentation du code Salammbô a très peu évolué au cours des années à l'inverse de sa modélisation de plus en plus complexe et raffinée des interactions physiques. Cette dette technique induit aujourd'hui de fortes limitations aussi bien numériques que physiques, qu'on va maintenant préciser, et qui forment les verrous auxquels on s'est attaqué dans ce travail de thèse.

I.4.2.1 Rappels sur les propriétés des schémas de résolution numérique

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles exige le respect de propriétés numériques primordiales assurant la cohérence de la solution numérique vis-à-vis de la solution exacte, comme schématisé dans la figure I.27 :

- La précision, reflète le degré de fidélité de la solution numérique à la solution exacte, pour un raffinement de maillage donné. Elle est transcrite par l'erreur numérique $Err = f_{exacte} - f_{num}$ et son évolution asymptotique à travers l'ordre de convergence.
- La consistance, lie la solution discrète à la solution continue quand les pas de discrétisation spatial et temporel tendent vers 0. Le schéma DF est consistant par définition (développement de Taylor tronqué).
- La stabilité, reflète la capacité d'un schéma numérique à limiter l'amplification des erreurs numériques dans le temps.
- La convergence, assure une solution numérique qui tend vers la solution exacte de l'EDP quand le pas de temps et la taille des éléments du maillage spatial tendent vers 0.

Grâce au théorème de Lax, la convergence d'un schéma est obtenue lorsqu'il est consistant et stable [108]. Comme la convergence est asymptotique ($\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} f_{num} = f_{exacte}$), il faut s'assurer que la solution numérique sur un maillage fini, respecte elle aussi les propriétés physiques imposées par le problème étudié (conservation de la masse, de l'énergie, fonction de distribution positive...).

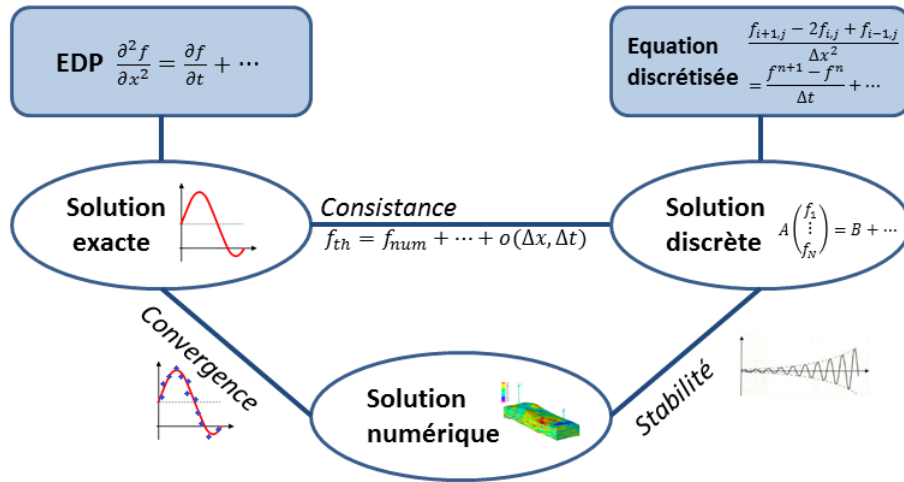


FIGURE I.27 – Relation entre les propriétés du schéma numérique avec le problème discret et le problème continu. Figure inspirée de [109].

L'étude des schémas n'est pas limitée à la discipline d'analyse numérique. On accorde une grande importance à leur complexité d'implémentation, leur coût en temps de calcul et leur extensibilité (*scalability*) au changement d'échelle de la résolution (temps de simulation, raffinement du maillage spatial...). Cet aspect d'étude est d'autant plus pertinent si le schéma numérique est intégré à un outil d'analyse statistique ou séquentielle, comme c'est le cas pour Salammbô avec l'assimilation de donnée [2].

I.4.2.2 Origine des limitations : une diffusion locale spatialement très homogène et très anisotrope

Les cartographies 2D de la figure I.28 rapportent l'évolution bidimensionnelle des coefficients de diffusion D_{yy}, D_{EE} et D_{yE} sur le plan $L^* = 6.2$, représentatifs qualitativement de ce qui se passe sur d'autres plans L^* . Elles montrent en particulier une évolution spatiale très inhomogène et très raide. La diffusion en angle d'attaque présente souvent un plateau de forte diffusion à haute énergie, relatif aux interactions résonnantes avec les ondes. On observe aussi un fort gradient de D_{yy} proche de $y = 1$, imputé à l'effondrement du régime diffusif à l'équateur. La diffusion en énergie en revanche, est concentrée essentiellement à haute énergie à des angles d'attaques grands. Un petit saut du coefficient D_{EE} s'opère sur un nombre réduit de nœuds proche de $E = 10^{-2}$ MeV. La diffusion croisée ne déroge pas à la règle, présentant une évolution spatiale disparate ainsi qu'un changement de signe brutal proche de l'équateur ou à faible énergie.

Cette évolution spatiale particulière des coefficients de diffusion est observée sur tous les plans L^* comme on le voit dans la figure I.29. Il y a un fort déséquilibre entre les valeurs moyennes et minimales de chacun des coefficients D_{yy} et D_{EE} . On voit aussi que très souvent, D_{yy} domine D_{EE} . Les évolutions moyennes des coefficients D_{yy}, D_{EE} et $D_{L^*L^*}$ rappellent la balance des processus invoquée dans la partie I.2.3, avec une prédominance de la diffusion radiale à fort L^* favorisant l'apport de particules et la prédominance de la diffusion en angle d'attaque à faible L^* , favorisant les pertes.

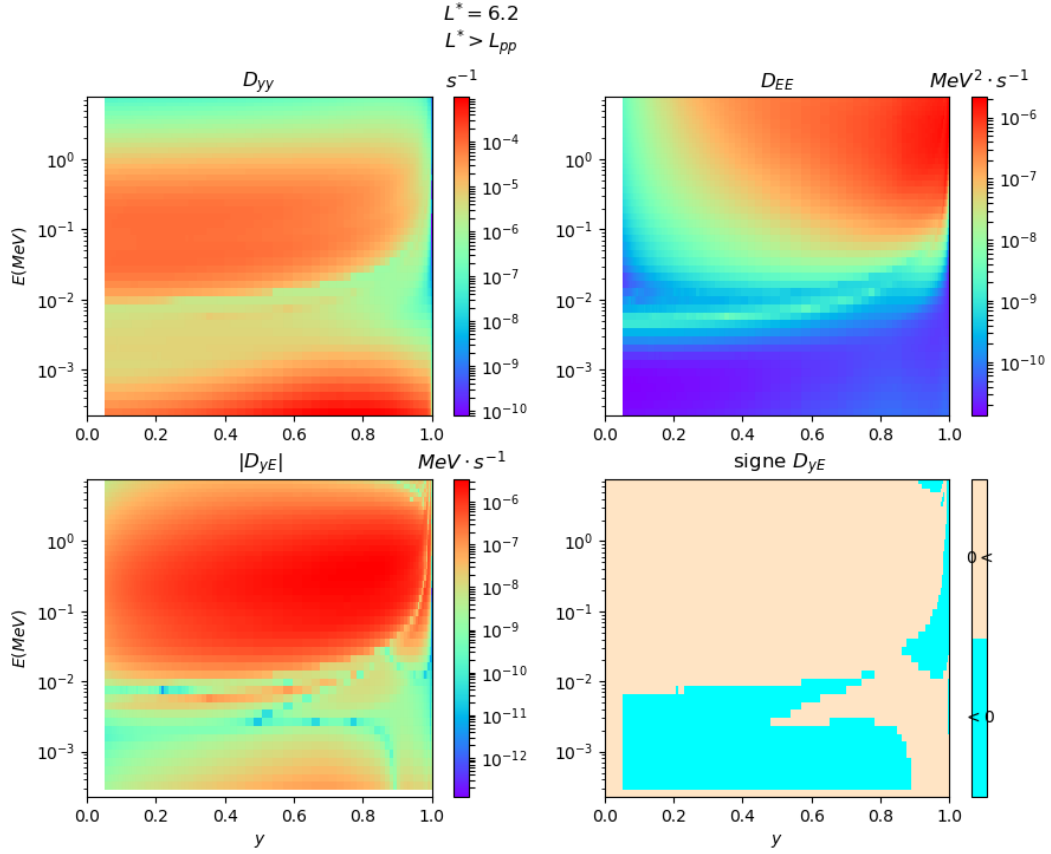


FIGURE I.28 – Représentation 2D des coefficients de diffusion D_{yy}, D_{EE} et D_{yE} sur la grille fine (y, E) de Salammbô, évalués au le plan $L^* = 6.2$ et à l’extérieur de la plasmasphère (coefficients de diffusion issus de l’interaction onde-particule).

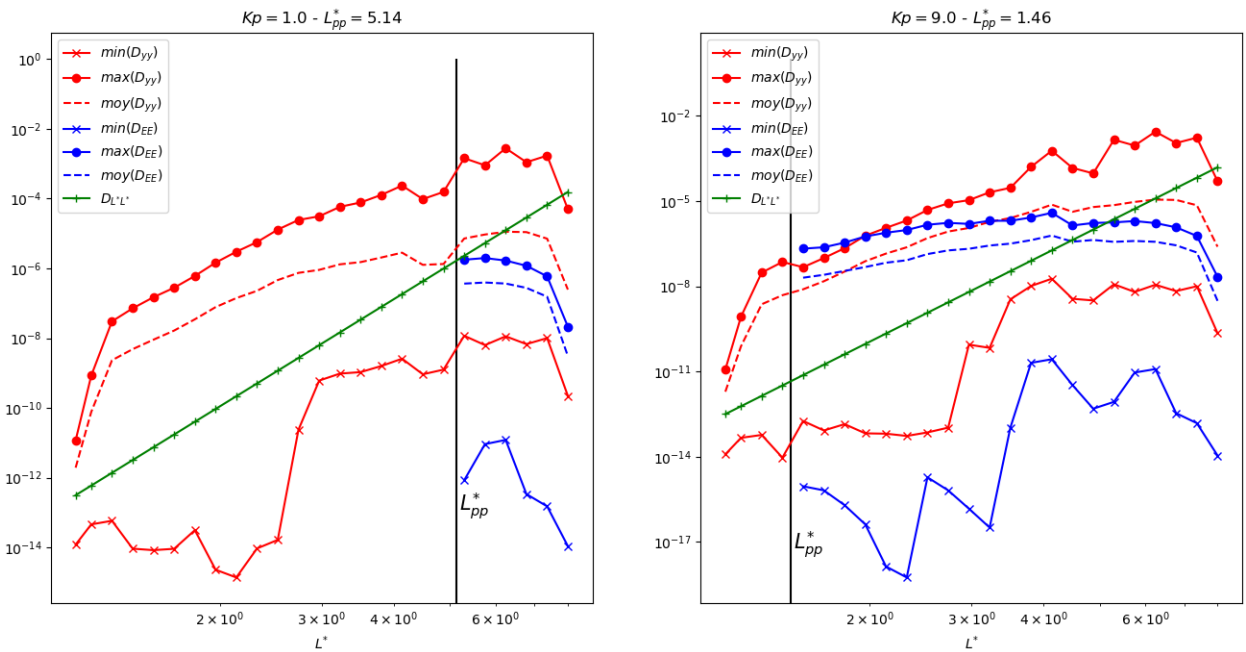


FIGURE I.29 – Valeurs maximales, minimales et moyennes des coefficients de diffusion D_{yy}, D_{EE} et $D_{L^*L^*}$ en fonction de L^* pour un étalement de la plasmasphère maximal (à gauche) et minimal (à droite) (selon de le modèle de *Carpenter* [41]).

En plus de cette forte inhomogénéité spatiale, les coefficients de diffusion sont variables via Kp . Cette contrainte temporelle risque de s'accroître dans le futur, si on envisage une mise à jour rapide des coefficients, grâce à une meilleure cartographie spatiale et temporelle des mesures ou par la paramétrisation via un indice géomagnétique plus fin.

Compte tenu du déséquilibre entre les coefficients de diffusion D_{yy}, D_{EE} et D_{yE} , la diffusion locale est caractérisée par une très forte anisotropie. Cette dernière est mesurée par le ratio d'anisotropie, qui est le rapport entre la valeur propre maximale et la valeur propre minimale du tenseur de diffusion. Comme le montre la figure I.30, ce ratio évolue en moyenne sur 5 ordres de grandeur, à des valeurs conséquentes ($10^5 - 10^{10}$). A titre indicatif, les ratios d'anisotropie moyens observés sur des problèmes usuels de diffusion (thermique, mécanique des fluides) se limitent à 10^2 .

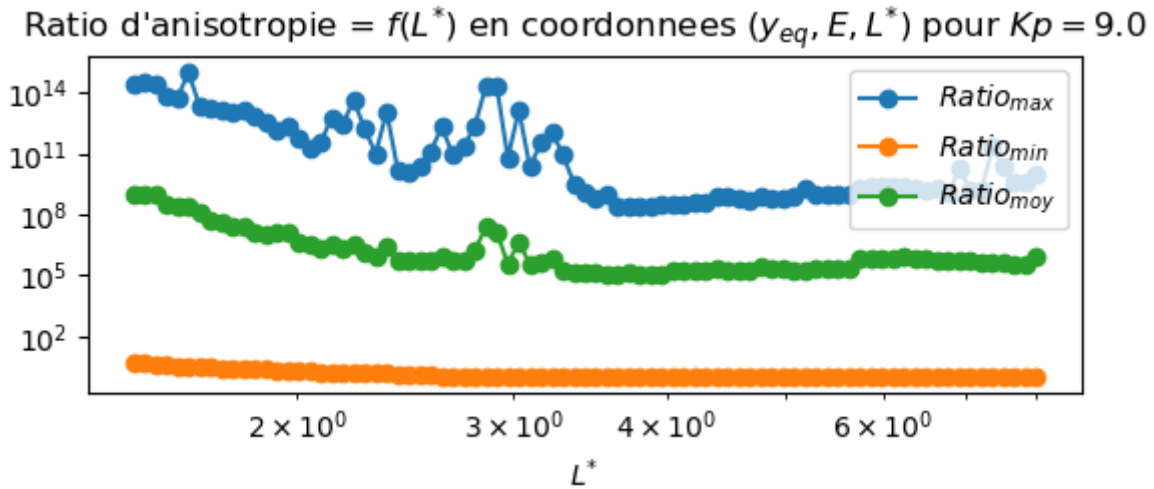


FIGURE I.30 – Évolution radiale du ratio d'anisotropie du tenseur de diffusion locale quand il est exprimé dans les coordonnées (y, E) , pour $Kp = 9$.

I.4.2.3 Impacts sur le coeur numérique : Dégradation de la précision, de la stabilité et omission de processus physiques

Une gestion limitée de la forte inhomogénéité spatiale des coefficients : La discrétisation de Salammbô nécessite l'estimation numérique des termes $D_a D_{aa}$, analogues à des gradients de coefficients de diffusion. Or comme le montrent les courbes de la figure I.31, les gradients numériques des coefficients de diffusion peuvent évoluer sur plus de 6 ordres de grandeur d'un noeud du maillage à un autre. On introduit donc une forte erreur sur l'estimation des termes $D_a D_{aa}$.

Une contrainte très restrictive sur le pas de temps : Le schéma Euler explicite est conditionnellement stable. Sa stabilité est imposée par le respect de la condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) [110] qui dans un cas de diffusion 1D uniforme s'écrit :

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{D} \quad (\text{I.27})$$

Dans le cas de Salammbô, la condition de stabilité est très restrictive du fait du raffinement fin de la grille E ($\Delta E_{min} \sim 10^{-4}$) et des résonances des coefficients ($D_{max}/D_{min} \sim 10^6$). Elle impose une forte contrainte sur le choix du pas de temps, ce qui accroît vigoureusement le temps de calcul. Actuellement, une simulation 3D d'un jour sur la grille fine, nécessite $\sim 4h$ de calcul avec une machine dotée de 8 Go de RAM et d'un processeur 3.5 Ghz, dans une configuration de calcul en série. La même simulation dure ≈ 10 minutes si on utilise la grille réduite.

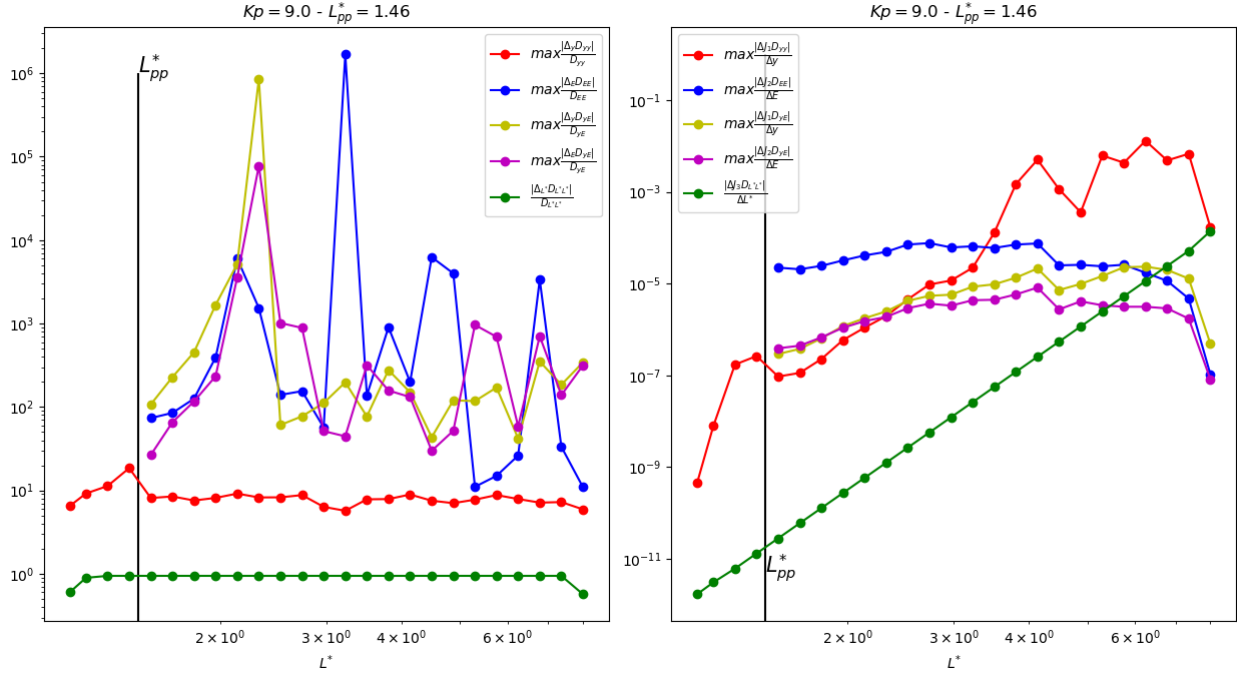


FIGURE I.31 – À gauche : Évolution radiale du maximum du gradient discret des coefficients de diffusion $D_{yy}, D_{EE}, D_{yE}, D_{L^*L^*}$ pour un étalement minimal de la plasmaphère ($Kp = 9$). À droite : Évolution radiale du maximum du gradients discret des termes du tenseur de diffusion effectif $J_1D_{yy}, J_2D_{EE}, J_1D_{yE}, J_2D_{yE}, J_3D_{L^*L^*}$, pour un étalement minimal de la plasmasphère ($Kp = 9$).

Omission de la diffusion croisée, à l'origine d'artefacts numériques fâcheux : La diffusion croisée n'est pas prise en compte dans la version actuelle du code. En effet, quand $D_{yE} \neq 0$, on observe l'apparition de valeurs non physiques de la fonction de distribution ($f < 0$, $f > \text{maximum requis}$ par la physique, oscillations internes), dégradant fortement la qualité de la restitution (voir les zones blanches de figure I.32). Cette déstabilisation est souvent imputée à la forte intensité du coefficient de diffusion croisée, qui rend les termes $D_{1,2,3,4}$ dans (I.26) dominants par rapport aux autres poids de discrétisation [111].

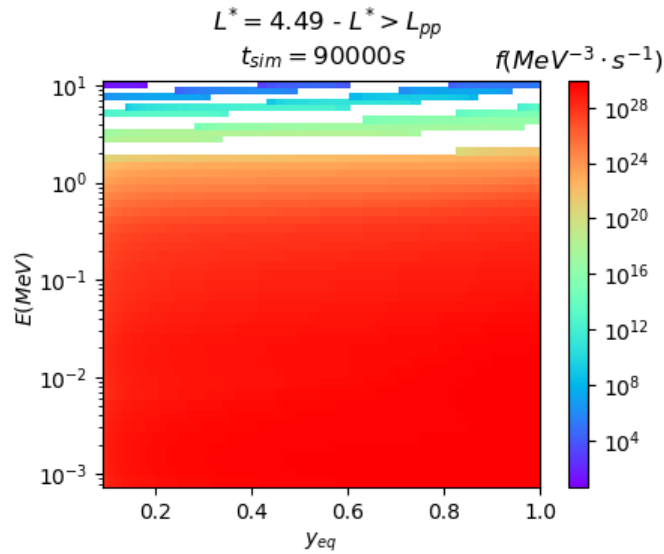


FIGURE I.32 – Apparition de valeurs négatives (en blanc) de la fonction de distribution à haute énergie pendant une simulation avec le coeur numérique actuel de Salammbô, quand $D_{yE} \neq 0$.

Notons que le rôle de la diffusion croisée dans le modèle diffusif théorique fut sujette à diverses discussions. Jusqu'à récemment et à cause des artefacts numériques qu'elle engendre, elle a été ignorée dans la représentation physique de plusieurs codes de calcul de la communauté d'étude des ceintures de radiation [112][113] à l'image de Salammbô-Électron [82][114][115][107]. Cependant, on a commencé à voir surgir un intérêt à sa prise en compte dernièrement pour une description plus complète de la diffusion locale [116][117][118][119]. Grâce à une approche analytique basée sur la fonction de Green, on sait que la diffusion croisée a un rôle non négligeable sur la forme de la fonction de distribution et impacte sa jonction avec le bord du domaine [111]. Sur des cas de simulations réelles, elle est responsable d'une diminution plus forte de la PSD proche du cône de perte [116][120]. Un effet dynamique lui a été attribué lors des phases de rétablissement post-orage magnétique en inhibant les accélérations locales issues des ondes [120].

I.4.3 Pistes d'évolution existantes pour le coeur numérique de Salammbô

I.4.3.1 Les principaux codes physiques : une base différences finies commune et divers choix d'intégration temporelle

À l'instar du code Salammbô de l'ONERA, plusieurs équipes de recherche à travers le monde ont développé des codes physiques de modélisation des ceintures de radiation électrons. Ils adoptent tous une discrétisation spatiale différences finies mais se distinguent par rapport à leurs schémas d'intégration temporelle, leurs maillages ou leurs traitements de la diffusion radiale. Sans rentrer dans les détails de leurs implémentations, on cite quelques-uns de ces codes et les spécificités de leurs résolutions numériques :

- Le code *Storm-Time Evolution of Electron Radiation Belt* (STEERB) [121][122]. Sa discrétisation temporelle se fait par le schéma conditionnellement stable *Alternating Direction Implicit* (ADI) [123][124]. Il adopte un maillage en double grille (α_{eq}, p, L^*) et (μ, J, L^*) pour traiter la diffusion radiale.
- Le code *Versatile Electron Radiation Belt* (VERB) [112][122]. Son intégration temporelle se fait par un schéma Euler implicite inconditionnellement stable, ce qui lui procure un temps de calcul court (10 min pour une simulation de 50 jours sur une grille de $79 \times 79 \times 79$ noeuds avec $\Delta t = 360s$) [112]. Le code VERB est pratiquement le seul code dont la validation numérique a été communiquée, mais sur un problème de diffusion très simple avec un tenseur de diffusion uniforme [125]. Quand la diffusion croisée est prise en compte, un raffinement de sa grille 2D est préconisé pour éviter la perte de la positivité [122].
- Le code *British Atlantic Survey - Radiation Belt Model* (BAS-RBM)[113]. Comme VERB, il adopte un schéma Euler implicite. La diffusion croisée est prise en compte dans sa modélisation, sans mention d'une quelconque dégradation numérique [113].

I.4.3.2 Caractérisation actuelle de la modélisation numérique appliquée aux ceintures de radiation

Bien que la modélisation numérique appliquée à notre cadre physique mérite une grande attention, on ne trouve qu'un nombre très restreint de travaux de recherche qui s'attellent à diagnostiquer finement ses limitations et proposer des solutions adéquates. Dans ce qui suit, on résume succinctement les résultats des études les plus importantes.

Comme solution pour éliminer l'effet néfaste de la diffusion croisée sur la résolution numérique, *J.M Albert* propose dans [116], une procédure de diagonalisation du tenseur de diffusion, et l'expression du problème diffusif dans un nouvel espace construit artificiellement, où le tenseur de diffusion sera diagonal. Suite à cela, une discussion scientifique s'est engagée entre *E. Camporeale* et *M.J. Albert*, sur la pertinence de cette méthode et son apport à la robustesse de la résolution quand la diffusion croisée est prise en compte. Le premier énonce que cette procédure est trop coûteuse en temps de

calcul et inutile, vu qu'il suffit d'un schéma implicite et d'une grille spatiale bien raffinée pour éliminer les artefacts numériques générés par la diffusion croisée [126][127]. *J. M. Albert* en revanche, défend l'idée que ces artefacts sont totalement dissociés du type d'intégration temporelle, de sa stabilité, et du raffinement spatial et temporel. Par conséquent et jusqu'à preuve du contraire, il affirme que sa procédure de diagonalisation est la méthode la plus pertinente pour assurer la propriété fondamentale de positivité de la fonction de distribution. Alternativement, il faudrait réaliser des corrections "ad-hoc" comme l'ajout d'une diffusion numérique ou filtrer les valeurs négatives, au risque de complexifier la résolution numérique et lui faire perdre sa précision [128]. *E. Camporeale* et ses co-auteurs se sont penchés aussi dans [122][126] sur l'optimisation du temps de calcul de la résolution numérique de la diffusion locale et les résultats de l'étude sont résumés dans la figure I.33. Pour $\Delta t \sim 1$, ils préconisent l'utilisation du schéma temporel conditionnellement stable ADI. Pour un Δt au-delà du domaine de son domaine de stabilité, il faut selon eux passer à un schéma d'intégration implicite. Le choix de la technique de résolution matricielle (directe ou itérative) se fait ensuite en fonction de la fréquence de mise à jour des coefficients de diffusion.

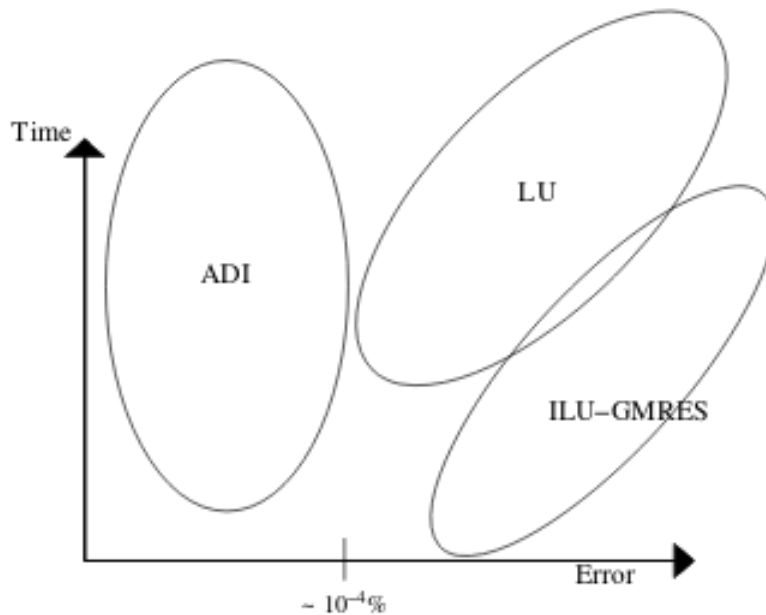


FIGURE I.33 – Schéma de recommandation de la méthode d'intégration efficace selon le niveau d'erreur recherchée et selon le temps de mise à jour des coefficients de diffusion. Figure extraite de [122].

Comme dernière piste d'amélioration, l'équipe de développement du code VERB propose la formulation de l'équation de Fokker-Planck dans un nouveau jeu de coordonnées (V, K, L^*) avec K et V deux invariants adiabatiques [129]. Dans ce nouvel espace, la diffusion radiale s'opère à K et V constants, facilitant son implémentation. Cependant, les nouveaux coefficients de diffusion D_{KK}, D_{VV} et D_{KV} sont encore plus raides que leurs semblables exprimés dans (y, E, L^*) et imposent des ratios d'anisotropies encore plus forts (voir figure I.34).

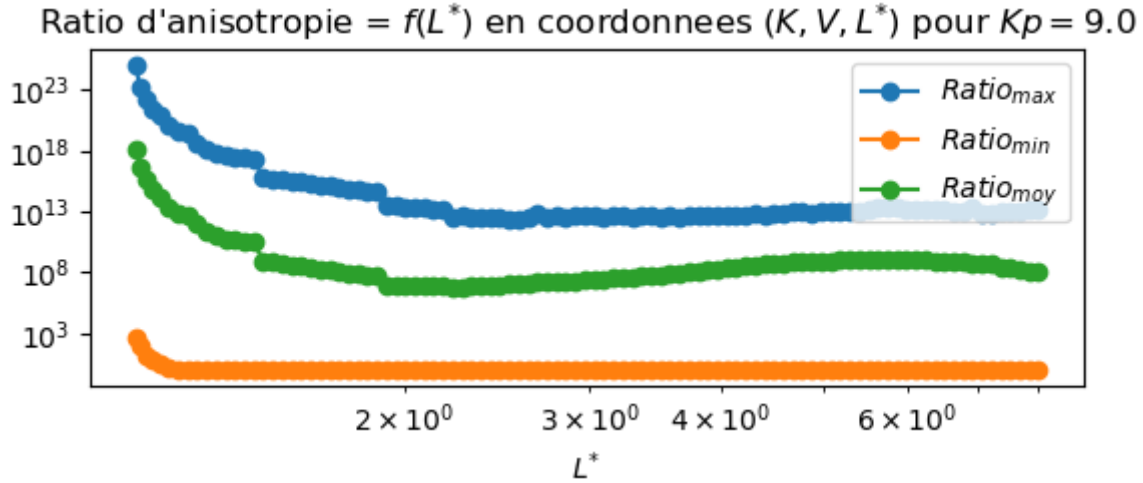


FIGURE I.34 – Évolution radiale du ratio d'anisotropie du tenseur de diffusion locale quand il est exprimé dans les coordonnées (K, V) , pour un étalement de la plasmasphère minimal ($Kp = 9$).

I.5 Présentation des objectifs de la thèse

Mon travail de thèse s'inscrit dans le projet de refonte du coeur numérique de Salammbô-Électron, initié récemment [130][131][132][133] dans l'optique de relever ses limitations présentées dans la section I.4.2. On cherche en particulier à rendre la nouvelle résolution de Salammbô :

- Plus précise, vis-à-vis de la forte inhomogénéité spatiale des processus physiques et conservant la masse du système.
- Plus robuste, vis-à-vis des artefacts numériques générés par la diffusion croisée et disposant d'un argument de stabilité inconditionnelle.
- Plus rapide, justifiant l'utilisation du code dans des outils de prédiction de la météorologie spatiale, ou dans le cadre de l'assimilation de données.

Pour cela, on plaide pour l'adoption d'une nouvelle discrétisation de type volumes finis - implicite. Comme on le verra avec plus de détails dans la partie II.3, la méthode des volumes finis est particulièrement adaptée pour les lois de conservation (comme la diffusion) du fait de sa propriété de conservation et régit mieux à une diffusion fortement inhomogène. L'intégration implicite assurera une stabilité inconditionnelle de la résolution, qui relaxera la contrainte sur le pas de temps et accélérera la résolution numérique. Cependant, on ne se contentera pas de l'argument de stabilité du schéma implicite pour résoudre la problématique de la diffusion croisée. En effet, j'ai décidé d'analyser finement l'origine théorique de la perte de la représentativité physique de l'approximation numérique et les éventuelles pistes à adopter pour une prise en compte fiable et sûre de la diffusion croisée. On décide de rester sur une formulation du problème diffusif avec le jeu de coordonnées (y, E, L^*) , comme la formulation (V, K, L^*) risque d'imposer des contraintes numériques trop fortes.

Pour pouvoir étudier les performances des éventuels schémas à considérer, il a fallu surmonter la contrainte d'absence d'une solution physique de référence et de l'absence d'une procédure de validation numérique représentative des challenges numériques que peut imposer la physique des ceintures de radiation électrons. Ainsi, j'ai mis en place différentes configurations de tests numériques réalistes appelés "cas jouets", ayant permis d'isoler chacune des particularités numériques de la diffusion et d'évaluer le comportement des schémas numériques testés. Garantir ces nouvelles propriétés au nouveau coeur de Salammbô assurera une mise à niveau indéniable du code physique en permettant une restitution de la dynamique des ceintures d'une meilleure qualité, dans les limites de la compréhension actuelle de la physique mise en jeu et dans le cadre de l'incertitude actuelle sur les données et sur les mesures in-situ.

Chapitre II

Caractérisation du nouveau coeur numérique de Salammbô-Électron

II.1	Éléments d'analyse fonctionnelle et algébrique	54
II.1.1	Notations, définitions et espaces fonctionnels	54
II.1.2	Formulation mathématique du problème diffusif étudié	54
II.2	Représentativité physique de la solution numérique de l'équation de diffusion	55
II.2.1	Formulations continues des principes du maximum, du minimum et de la positivité	55
II.2.2	Formulations discrètes des principes du maximum, du minimum et de la positivité	56
II.2.3	Préliminaires algébriques : M -matrice, matrice monotone et <i>Weakly regular splitting</i>	56
II.2.4	Préserver le principe du maximum et la positivité par la monotonie du schéma	59
II.2.5	Exemples de perte de la monotonie du schéma par perte de la structure M -matrice	59
II.3	La méthode des volumes finis comme alternative pour la discrétisation spatiale	61
II.3.1	Principe de la méthode des volumes finis	61
II.3.2	Les différentes familles de schémas aux volumes finis	64
II.4	Conditions de monotonie alternatives pour un schéma aux volumes finis : les conditions de <i>Nordbotten</i>	75
II.5	Mise en place du socle de la nouvelle résolution numérique	79
II.5.1	Application de la méthode des volumes finis au problème de diffusion avec la formulation (y, E, L^*) de l'équation de diffusion	79
II.5.2	Construction du nouveau maillage aux volumes finis (y, E, L^*)	79
II.5.3	Sélection des schémas pour l'étude numérique	80
II.5.4	Une intégration inconditionnellement stable	80

Ayant cerné les différentes contraintes pratiques auxquelles fait face le coeur numérique actuel de Salammbô, nous allons dans ce chapitre chercher à caractériser une discrétisation adéquate à notre problème physique particulier. Pour cela, nous allons commencer par rappeler les principes mathématiques régissant la solution de l'équation de diffusion à savoir les principes de positivité, le principe du maximum et le principe du minimum. Ces principes sont très importants car ils procurent une représentativité physique de la solution continue. Ne pas assurer ces principes au niveau discret risque de faire apparaître des artefacts numériques dans le profil de la solution numérique, qui vont fortement dégrader sa qualité (comme c'est le cas avec l'ancien coeur quand $D_{yE} \neq$). On verra en particulier que le respect de ces principes est obtenu par la propriété de monotonie de la matrice de discrétisation. Ensuite, nous présenterons en détail la méthode des volumes finis qui sera le socle de la discrétisation

spatiale du nouveau coeur numérique ainsi ces différentes variantes utiles à notre application. Nous décrirons aussi une stratégie alternative permettant d'obtenir la monotonie d'un schéma volumes fins. Ce chapitre sera clos par l'exposition des choix préliminaires adoptés dans la nouvelle résolution.

II.1 Éléments d'analyse fonctionnelle et algébrique

II.1.1 Notations, définitions et espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 0$ de classe C^1 . On pose pour la suite du manuscrit :

- f : la solution du problème différentiel continu. Cette notation réfère aussi à la solution numérique du problème différentiel discrétisé.
- ∇ : l'opérateur gradient défini dans \mathbb{R}^n par $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.
- $\nabla \cdot$: l'opérateur divergence défini dans \mathbb{R} par $\nabla \cdot := \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}$.
- Δ : l'opérateur Laplacien défini dans \mathbb{R}^n par $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
- $C^0(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec une trace.
- $C^k(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont la k ème dérivée est continue sur Ω .
- $L^2(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} f^2 < \infty\}$, l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Cet espace vectoriel contient les fonctions continues par morceaux quand Ω est borné.
- D_i la dérivée au sens des distributions par rapport à la variable x_i .
- $H^1(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \in L^2(\Omega), D_i f \in L^2(\Omega) \forall i = 1..n\}$.
- (\cdot, \cdot) : le produit scalaire défini dans \mathbb{R}^n .
- $\|\cdot\|$: la norme associée au produit scalaire ci-dessus.
- Soit $b : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ une forme bilinéaire, b est coercive si $\exists \alpha > 0, \forall x \in \Omega b(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$.
- On note $\mathbf{0}$ le vecteur nul de \mathbb{R}^n et O la matrice carrée nulle de taille $n \times n$.
- Pour $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n , on écrit $U \leq V$ (respectivement $U < V$) si $\forall i \in \{1 \dots n\} u_i \leq v_i$ (respectivement $u_i < v_i$).
- Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices carrées réelles, on écrit $A \leq B$ (respectivement $A < B$) si $\forall i, j \in \{1 \dots n\}^2 a_{i,j} \leq b_{i,j}$ (respectivement $a_{i,j} < b_{i,j}$).
- $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice A .
- $\|\cdot\|_{\infty}$: la norme infinie matricielle telle que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée réelle, $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} (\sum_{1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|)$.

II.1.2 Formulation mathématique du problème diffusif étudié

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné ouvert de classe C^1 , $\partial\Omega$ sa frontière et $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$ (on supposera également que $\partial\Omega_i$ est de classe C^1 , $i = 1, 2$). On note \vec{n}_{ext} la normale extérieure à $\partial\Omega$. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0..T]$. Le problème de diffusion s'écrit :

Trouver f tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot (\overline{\overline{D}} \nabla f) + S \text{ sur } \Omega \times [0, T] \\ f(x, t) = \overline{f}(x, t) \text{ sur } \partial\Omega_1 \times [0, T] \\ \overline{\overline{D}} \nabla f \cdot \vec{n}_{ext} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \times [0, T] \\ f(x, t = 0) = f_0(x) \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

- $\overline{\overline{D}} = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une matrice carrée $n \times n$ qui représente le tenseur de diffusion. On suppose que $\overline{\overline{D}}$ est symétrique, définie positive avec des valeurs propres bornées et la forme bilinéaire qui lui est associée $x \rightarrow (\overline{\overline{D}}x, x)$ est coercive. De plus, on suppose que $d_{ij} \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T]), \forall 1 \leq i, j \leq n$.

- S est le terme source.
- $\bar{f} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ la restriction de f au bord $\partial\Omega_1$.
- $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ la distribution initiale de f sur Ω .

La théorie des équations paraboliques (voir [134]) permet d'affirmer, sous des hypothèses de régularité suffisantes des données S , f_0 et \bar{f} , que la solution f existe et est unique dans l'espace fonctionnel $C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$. Ainsi, on peut démontrer que la solution faible de l'équation $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $H^1(\Omega \times [0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ [REF].

Puis, on s'intéresse à la discrétisation temporelle de II.1 par un schéma de type Euler implicite. En supposant que le temps d'évolution $t = n\Delta t$ avec $n \in \mathbb{N}$, on obtient l'équation semi-discrétisée suivante :

$$-\Delta t \nabla \cdot (\bar{D} \nabla f^{n+1}) + f^{n+1} = f^n + \Delta t S \quad (\text{II.2})$$

avec $f^n = f(n\Delta t)$. Cette équation possède beaucoup de propriétés analogues à l'équation de diffusion. On se rapportera dans toute la suite essentiellement à cette formulation implicite.

II.2 Représentativité physique de la solution numérique de l'équation de diffusion

L'équation II.1 dans sa formulation faible impose un certain nombre de principes qui contrôlent l'évolution de f dans Ω , en fonction de son état au bord du domaine, comme on va le voir dans ce qui suit.

II.2.1 Formulations continues des principes du maximum, du minimum et de la positivité

On considère tout d'abord l'équation de diffusion dans sa forme stationnaire. En suivant les développements présentés dans [134][135], on peut établir pour un opérateur général de second ordre elliptique le théorème suivant :

Proposition 1. Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 , $S \in L^2(\Omega)$, $a_{i,j}$ bornés tel que le tenseur construit à partir de $a_{i,j}$ soit coercif, $b_0 \geq 0$ et borné, $f \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_0 f = S \text{ dans } \Omega \\ f = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Si $S \geq 0$ alors $f \geq 0$: c'est le **Principe de positivité**

Cette proposition s'applique à l'équation de diffusion stationnaire ($b_0 = 0$) et on peut en établir plusieurs variantes, selon le signe de S et de \bar{f} :

- Si $f = \bar{f}$ sur $\partial\Omega$ et $S \geq 0$, alors $f \geq \inf_{\partial\Omega}(\bar{f})$: **Principe du minimum.**
- Si $f = \bar{f}$ sur $\partial\Omega$ et $S \leq 0$, alors $f \leq \sup_{\partial\Omega}(\bar{f})$: **Principe du maximum.**
- Si $f = \bar{f}$ sur $\partial\Omega$ et $S = 0$, alors $\inf_{\partial\Omega}(\bar{f}) \leq f \leq \sup_{\partial\Omega}(\bar{f})$: **Principe du min-max.**

Ces principes restent valables aussi dans le cas de conditions aux limites de Neumann [134] et sont généralisables dans des domaines moins réguliers comme un domaine polygonal. Par conséquent, en considérant le cadre stationnaire de (II.1) avec ses conditions aux limites mixtes et pour $S = 0$ (pas de source dans le cas des électrons), les principes de positivité et du min-max s'appliquent et stipulent que f est contrôlée par la solution au bord du domaine où s'applique une condition de Dirichlet [135] :

$$0 \leq \min_{\partial\Omega_1}(\bar{f}) \leq f \leq \max_{\partial\Omega_1}(\bar{f}) \quad (\text{II.4})$$

Ces principes sont étendus aussi dans le cas de l'équation semi-discrétisée en temps II.2. Ainsi en prenant un terme source $S = f^n \geq 0$, cela donne :

$$0 \leq \min(\min_{\partial\Omega_1}(\bar{f}^{n+1}), \min_{\Omega}(f^n)) \leq f^{n+1} \leq \max(\max_{\partial\Omega_1}(\bar{f}^{n+1}), \max_{\Omega}(f^n)) \quad (\text{II.5})$$

II.2.2 Formulations discrètes des principes du maximum, du minimum et de la positivité

Soit un schéma numérique qui discrétise l'équation de diffusion stationnaire s'écrivant sous forme matricielle $AU = R$ avec :

- A sa matrice de discrétisation.
- $U = (f_i)_{i \in I}$ le vecteur qui rassemble l'estimation de la solution sur l'ensemble I des éléments du maillage à l'intérieur du domaine.
- R le vecteur second membre construit à partir de la source S (évaluée sur I) et de la discrétisation des conditions aux limites sur l'ensemble B des éléments du maillage au bord du domaine $B = (\bar{f}_j)_{j \in B}$.

Les formulations discrètes des principes de positivité et du min-max s'écrivent :

- **Principe discret de la positivité** : Si $R \geq \mathbf{0}$ et $\bar{f}_j \geq 0 \forall j \in B$ alors $f_i \geq 0 \forall i \in I$.
- **Principe discret du min-max** : Si $R = \mathbf{0}$ alors $\min_{j \in B} \bar{f}_j \geq f_i \geq \max_{j \in B} \bar{f}_j \forall i \in I$.

Notons que l'équivalence entre le principe du maximum et la positivité de la solution reste valable, quand le schéma numérique est linéaire [136].

On verra plus tard dans ce manuscrit que garantir le respect de ces principes discrets par la solution numérique d'un schéma, revient à garantir une structure particulière de sa matrice de discrétisation. Pour cela, on a besoin d'établir quelques propriétés matricielles qu'on présentera dans la section II.2.3. Sans préservation de ces principes discrets, on risque d'obtenir une solution numérique avec des valeurs non-physiques et générer des oscillations internes pouvant dégrader fortement la stabilité numérique.

II.2.3 Préliminaires algébriques : M -matrice, matrice monotone et *Weakly regular splitting*

Définition 1 (Z -matrice). On dit que A est une Z -matrice si tous ses éléments extra-diagonaux sont négatifs : $a_{i,j} \leq 0 \forall i \neq j$.

Définition 2 (M -matrice). Soit A une Z -matrice et B une matrice tel que $b_{i,j} \geq 0 \ i \neq j$, si A peut s'écrire sous la forme $A = sId - B$ avec $s \geq \rho(B)$ alors A est une M -matrice.

Définition 3 (Matrice à diagonale dominante). On dit que A est une matrice à diagonale dominante si $\forall i \ |a_{i,i}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$.

Définition 4 (Matrice irréductible). On dit que A est une matrice irréductible si son graphe est fortement connexe.

Cela signifie que $\forall i, j$ on peut relier i à j à partir d'une liste de $p \leq n$ éléments $a_{i,k_1}, a_{k_1,k_2}, \dots, a_{k_{p-1},k_p}, a_{k_p,j} \neq 0$.

Remarque 1. Si A est une matrice de discrétisation d'un schéma dont les termes extra-diagonaux sont négatifs, elle est souvent irréductible à diagonale dominante.

Définition 5 (Matrice monotone). Soit U un vecteur de \mathbb{R}^n , on dit que la matrice A est monotone si $\forall U \in \mathbb{R}^n, AU \geq \mathbf{0} \Rightarrow U \geq \mathbf{0}$.

Proposition 2. Si A est une matrice monotone, alors elle est inversible.

Démonstration. Soit X un vecteur de \mathbb{R}^n non nul tel que $AX = \mathbf{0}$. Comme A est monotone alors $X \geq \mathbf{0}$ de même que $X \leq \mathbf{0}$ car $-AX = \mathbf{0}$ ainsi $X = \mathbf{0}$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Théorème 1. Soit A une matrice inversible, A est monotone si et seulement si $A^{-1} \geq O$

Démonstration. \Rightarrow : Si on suppose que X est la colonne i de A^{-1} , on $AX \geq \mathbf{0}$ et par monotonie de A , on obtient $X \geq \mathbf{0}$ et donc $A^{-1} \geq O$.

\Leftarrow : On suppose que $A^{-1} \geq O$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \geq \mathbf{0}$ alors $X = A^{-1}Ax \geq \mathbf{0}$ donc A est monotone.

Propriétés 1 (M -matrice et monotonie). Si A est une M -matrice non singulière alors A est monotone.

Propriétés 2. Soit A une Z -matrice, à diagonale dominante avec une dominance stricte pour au moins un terme, à termes diagonaux positifs et irréductible, alors A est une M -matrice.

Définition 6 (Matrice convergente). On dit qu'une matrice A est convergente si $\rho(A) < 1$.

Théorème 2. A est une matrice convergente si et seulement si $(Id - A)^{-1}$ existe et

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \geq O \quad (\text{II.6})$$

Démonstration. \Rightarrow : L'identité $(Id - A)(Id + A + A^2 + \dots + A^k) = (Id - A^{k+1})$ est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$. Comme A est convergente alors $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ d'où $(Id - A)(\sum_{k=0}^{\infty} A^k) = Id$.

\Leftarrow : On suppose maintenant que $(Id - A)^{-1}$ existe et que II.6 est vraie pour A . Pour $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \geq \mathbf{0}$ et $AX = \rho(A)X$ alors $\rho(A) \neq 1$ car $(Id - A)^{-1}$ existe. Grâce à $(Id - A)X = (1 - \rho(A))X$ on obtient $(Id - A)^{-1}X = \frac{1}{1 - \rho(A)}X$. En se rappelant que $X \geq \mathbf{0}$ et $(Id - A)^{-1} \geq O$, alors $\rho(A) < 1$.

Théorème 3. Si $A \geq O$ est une matrice irréductible, alors soit

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \rho(A) \quad \forall i \in \{1..n\} \quad (\text{II.7})$$

ou bien

$$\rho(A) < \max_i \left(\sum_j a_{i,j} \right) \quad (\text{II.8})$$

Définition 7 (Weakly regular splitting). Soit A une matrice carrée. On dit que A admet un *weakly regular splitting* (ou une décomposition faiblement régulière) $A = B - C$ si B est inversible, $B^{-1} \geq O$ et $B^{-1}C \geq O$.

Théorème 4. Soit A une matrice qui admet un *weakly regular splitting* $A = B - C$

A est monotone si et seulement si le rayon spectral de $B^{-1}C$ satisfait l'inégalité :

$$\rho(B^{-1}C) < 1 \quad (\text{II.9})$$

Démonstration. $\iff: \rho(B^{-1}C) < 1 \iff B^{-1}C$ est une matrice convergente $\iff (Id - B^{-1}C)^{-1} \geq O$
 $\iff A^{-1} = (Id - B^{-1}C)^{-1}B^{-1} \geq O \iff A$ est monotone.

Théorème 5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice qui admet un *weakly regular splitting* $A = B - C$ et l'inégalité suivante est vraie sur toutes les lignes de la matrice A :

$$\forall i : \sum_j a_{i,j} \geq 0 \quad (\text{II.10})$$

alors $\|B^{-1}C\|_\infty \leq 1$.

De plus, on suppose que l'inégalité $\sum_j a_{i,j} > 0$ est stricte pour tout i ou $B^{-1}C$ est irréductible et l'inégalité $\sum_j a_{i,j} \geq 0$ est stricte pour au moins un i .

alors $\rho(B^{-1}C) < 1$ et par conséquent A est monotone.

Démonstration. Pour le premier résultat, on considère le vecteur $e = (1, 1, \dots, 1)^T$. Comme $\forall i$ on a $\sum_j a_{i,j} \geq 0$ alors $Ae \geq \mathbf{0}$ et $Ce = Be - Ae \leq Be$. Comme $B^{-1} \geq \mathbf{0}$ alors $\mathbf{0} \leq B^{-1}Ce \leq B^{-1}Be = e$ par conséquent $\|B^{-1}C\|_\infty \leq 1$.

Pour la deuxième partie du théorème si $\sum_j a_{i,j} > 0 \forall i$ le cheminement précédent est refait avec $\sum_j a_{i,j} > 0$ et on obtient $\|B^{-1}C\|_\infty \leq 1 < 1$ alors $\rho(B^{-1}C) \leq \|B^{-1}C\|_\infty < 1$.

On suppose maintenant que $\sum_j a_{i,j} > 0$ pour $i = k$ alors $[Ae]_k > \mathbf{0}$ ce qui donne $[Ce]_k = [Be - Ae]_k < [Be]_k$. De plus, comme $B^{-1} \geq O$ et B^{-1} est inversible donc elle admet au moins un élément strictement positif d'indice l, k . Ainsi $[B^{-1}Ce]_l < [B^{-1}Be]_l = 1$. On suppose maintenant que $\max_i [B^{-1}Ce]_i = 1$ comme $B^{-1}C$ est positive et irréductible, on applique le deuxième résultat du théorème 3 et on obtient $\rho(B^{-1}C) < 1$.

Proposition 3. On suppose que A^T admet un *weakly regular splitting* $A^T = B^T - C^T$ alors $B^{-1} \geq O$ (comme $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1} \geq O$) et $CB^{-1} \geq O$ (comme $(CB^{-1})^T = (B^T)^{-1}C^T \geq O$). De plus si l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\forall j : \sum_i a_{i,j} \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

et stricte pour au moins un j alors pour avoir la monotonie de A^T (et par conséquent A), il suffit de prouver que $(B^{-1})^T C^T = (CB^{-1})^T$ est irréductible, ce qui revient aussi à prouver que CB^{-1} est irréductible.

Corollaire 1. Soit A une matrice qui admet une décomposition $A = B - C$ tel que $B^{-1} \geq O$ et $CB^{-1} \geq O$. De plus l'inégalité (II.11) est vraie et stricte pour tout j ou stricte pour au moins un j et CB^{-1} est irréductible, alors A est monotone.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3 sur $(A^T)^T = A$. □

II.2.4 Préserver le principe du maximum et la positivité par la monotonie du schéma

De retour au schéma numérique $AU = R$ défini dans la partie II.2.2, garantir la positivité du vecteur U (et par équivalence le principe du maximum quand $S = 0$) revient à prouver la monotonie de la matrice de discrétisation A du schéma. En effet, si $S \geq 0$ et $\bar{f} \geq 0$ alors la monotonie de A implique que $A^{-1} \geq O$ et comme $R \geq \mathbf{0}$ alors $U = A^{-1}R \geq \mathbf{0}$ i.e. $\forall i \in I, f_i \geq 0$. Dans ce cas, on dit que le schéma est monotone.

La preuve de la monotonie d'un schéma numérique est très souvent obtenue par une preuve d'une construction M -matrice de sa matrice de discrétisation A (propriétés 1 et 2 de la partie II.2.3). On peut visualiser cette construction à travers l'exemple de discrétisation par un schéma DF centré d'une équation de diffusion 2D stationnaire adimensionnée¹ sur un domaine Ω rectangulaire maillé uniformément, dans le cas d'un tenseur de diffusion diagonal et uniforme :

$$D_{xx} \frac{-f_{i+1,j} + 2f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + D_{yy} \frac{-f_{i,j+1} + 2f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} = S_{i,j} \quad (\text{II.12})$$

La matrice de discrétisation A va disposer dans ce cas de 5 diagonales : une diagonale principale à termes strictement positifs égale à $\frac{2D_{xx}}{\Delta x} + \frac{2D_{yy}}{\Delta y}$ qui va dominer les 4 diagonales secondaires négatives égales à $-\frac{D_{xx}}{\Delta x}$ et $-\frac{D_{yy}}{\Delta y}$ (dominance stricte pour les noeuds du bord de Ω). A est donc une M -matrice. En considérant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur tout $\partial\Omega$ avec $S \geq 0$, le vecteur second membre R n'aura que des termes positifs, d'où la monotonie du schéma.

La structure de M -matrice est une structure remarquable. Elle est souvent recherchée dans les problèmes de modélisation numérique (Méthode de discrétisation ou méthode itérative ...) [137]. Elle implique diverses propriétés intéressantes sur la matrice elle-même, sur ses mineurs, son inverse et son spectre. On la retrouve aussi dans l'étude des chaînes de Markov ou en calcul des probabilités [137]. Toutefois, elle est souvent très difficile à obtenir dans certains cas d'applications numériques et ne laisse pratiquement pas de marge pour valider conditionnellement sa structure.

II.2.5 Exemples de perte de la monotonie du schéma par perte de la structure M -matrice

A l'exemple précédent, on rajoute maintenant un coefficient de diffusion croisée uniforme. L'équation de diffusion discrétisée II.12 devient :

$$D_{xx} \frac{-f_{i+1,j} + 2f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + D_{yy} \frac{-f_{i,j+1} + 2f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + 2D_{xy} \frac{-f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{\Delta x \Delta y} = S_{i,j} \quad (\text{II.13})$$

Ce changement se répercute sur A par l'ajout de 4 diagonales secondaires relatives aux inconnues des 4 coins $f_{i+1,j+1}, f_{i+1,j-1}, f_{i-1,j+1}, f_{i-1,j-1}$, dont deux diagonales contenant des termes positifs (sur $f_{i-1,j+1}$ et $f_{i+1,j-1}$). Ainsi, la matrice A perd la structure Z -matrice et M -matrice et on ne peut plus statuer sur sa monotonie, quelle que soit le raffinement du maillage.

La perte de la structure de M -matrice peut être observée aussi en l'absence de la diffusion croisée. Quand le tenseur de diffusion est inhomogène, l'estimation du gradient des coefficients de diffusion

1. Ne pas confondre la variable muette y avec la variable d'angle d'attaque y .

impose sur l'équation (II.12) cette nouvelle forme :

$$\begin{aligned}
& D_{xx}^{i,j} \frac{-f_{i+1,j} + 2f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{D_{xx}^{i+1,j} - D_{xx}^{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \\
& + D_{yy}^{i,j} \frac{-f_{i,j+1} + 2f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{D_{yy}^{i,j+1} - D_{yy}^{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} = S_{i,j}
\end{aligned} \tag{II.14}$$

On voit rapidement qu'on ne peut pas statuer sur le signe des termes des diagonales secondaires relatives à $(f_{i+1,j})$ ou $f_{i,j+1} - (\frac{D_{xx}^{i,j}}{\Delta x} - \frac{D_{xx}^{i+1,j} - D_{xx}^{i-1,j}}{2\Delta x})$. Il va dépendre du raffinement du maillage et de l'échantillonnage des coefficients sur ce dernier.

On peut donc affirmer que les artefacts numériques de la fonction de distribution ne sont pas imputés à une non-convergence du maillage spatial, comme présenté par *Camporeale et al. (2013)* dans [127]. Ils sont plutôt causés par la non monotonie des schémas utilisés dans [128][127] par perte de la structure M -matrice. De plus, si cette structure n'est pas obtenue dans le cas stationnaire, elle ne pourra pas être obtenue dans le cas transitoire, même en adoptant un schéma temporel inconditionnellement stable. Pour le voir, il suffit d'associer l'un des deux schémas non monotones précédents à une intégration Euler implicite. On verra que la nouvelle matrice de discrétisation $A' = Id + \Delta t A$ aura les mêmes soucis de "mauvais" signe sur ses diagonales que A .

II.3 La méthode des volumes finis comme alternative pour la discrétisation spatiale

La méthode des volumes finis (VF) est recommandée pour les problèmes de conservation de masse et largement utilisée pour résoudre des problèmes de diffusion dans les milieux poreux ou de transfert de chaleur [138]. Avec un schéma VF, l'EDP continue est considérée sous sa forme conservative faible et discrétisée en un ensemble d'équations algébriques traduisant un équilibre d'entrée, de sortie et de création dans chaque volume de contrôle du domaine. Elle s'adapte bien à différentes formes de maillages et n'est pas affectée par la forte disparité spatiale du tenseur de diffusion. En particulier, il existe dans la littérature VF plusieurs variantes de schémas VF pouvant a minima conserver la positivité et au mieux le principe du min-max. De plus, il est possible de valider la monotonie d'un schéma VF autrement qu'avec une structure M -matrice. Elle représente donc une sérieuse alternative à explorer pour la discrétisation spatiale.

II.3.1 Principe de la méthode des volumes finis

On considère l'équation de diffusion stationnaire (II.1) (pour simplifier le développement), et on l'intègre dans un volume de contrôle noté $C \in \Omega$. On applique ensuite la formule de la divergence, qui permet d'accéder à l'équation de conservation locale :

$$\int_{\partial C} -\overline{D}\nabla f \cdot \vec{n}_C dl = \int_C S dV = \sum_{\sigma \in \partial C} \overline{F}_{C,\sigma} \quad (\text{II.15})$$

L'équation (II.15) établit l'équilibre dans la cellule élémentaire C entre la création volumique et la somme des flux notée $\overline{F}_{C,\sigma}$ venant de C et traversant les interfaces $\sigma \in \partial C$. Les flux sont définis comme suit :

$$\overline{F}_{C,\sigma} = - \int_{\sigma} \overline{D}\nabla f \cdot \vec{n}_{C,\sigma} dl \quad (\text{II.16})$$

\vec{n}_C est le vecteur de la normale extérieure à ∂C et $\vec{n}_{C,\sigma}$ le vecteur de la normale extérieure à l'interface σ (voir figure II.1). Par définition du flux dans l'équation (II.16), pour deux cellules voisines C et M partageant une interface σ , on a :

$$\overline{F}_{C,\sigma} + \overline{F}_{M,\sigma} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Il s'agit de la propriété de conservation des flux.

Une discrétisation par volumes finis va donc fournir une approximation numérique consistante de $F_{C,\sigma}$ du flux exact $\overline{F}_{C,\sigma}$, permettant d'assurer l'équation de bilan (II.15) et la propriété de conservation (II.17) dans une cellule C de petite taille (cellule d'un maillage)[139].

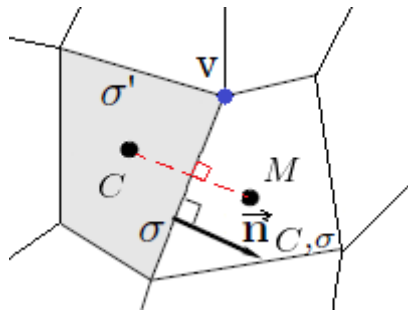


FIGURE II.1 – Exemple de maillage aux volumes finis. Figure adaptée de [136].

II.3.1.1 La construction du aux maillage volumes finis

Le domaine Ω est divisé en plusieurs cellules $C \in T$ avec $\bar{\Omega} = \cup_{C \in T} \bar{C}$. On note $d(.,.)$ la distance entre les éléments du maillage. On pose m_C , une quantité caractéristique de C qu'on assimile à son "volume" et h_C la mesure de sa longueur caractéristique. Chaque cellule C est représentée par un point qui porte son nom et qui est souvent confondu avec son centre. On note f_C la valeur de la solution numérique dans C . D'autre part, on pose ε l'ensemble des interfaces σ du domaine discrétisé et on note $|\sigma|$ la mesure de σ . Pour toute cellule C , l'ensemble de ses interfaces ε_C est un sous-ensemble de ε , tel que $\partial C = \cup_{\sigma \in \varepsilon_C} \bar{\sigma}$. On note f_σ , la valeur de la solution sur une interface σ . Pour $\sigma \in \varepsilon$, il ne peut appartenir qu'à un ou deux sous ensemble ε_C . Autrement dit, une interface est soit interceptée par deux cellules voisines et dans ce cas elle se trouve à l'intérieur du domaine, ou bien elle se trouve au bord. Par conséquent, ε est aussi la réunion des ensembles des interfaces intérieures ε_{int} et des interfaces extérieures ε_{ext} tel que $\partial\Omega = \cup_{\sigma \in \varepsilon_{ext}} \bar{\sigma}$.

La méthode des volumes finis s'adapte à différents types de maillage : structuré, non-structuré, conforme et non conforme (voir figure II.2). Elle offre aussi une large panoplie de choix de forme de la cellule (rectangulaire, triangulaire, hexagonale...) permettant de bien mailler des domaines de calcul avec des géométries complexes. Pour notre application, nous allons travailler avec un maillage VF cartésien (rectangle (c) de la figure II.2) comme ce dernier doit dériver directement de la grille DF cartésienne de Salammbô.

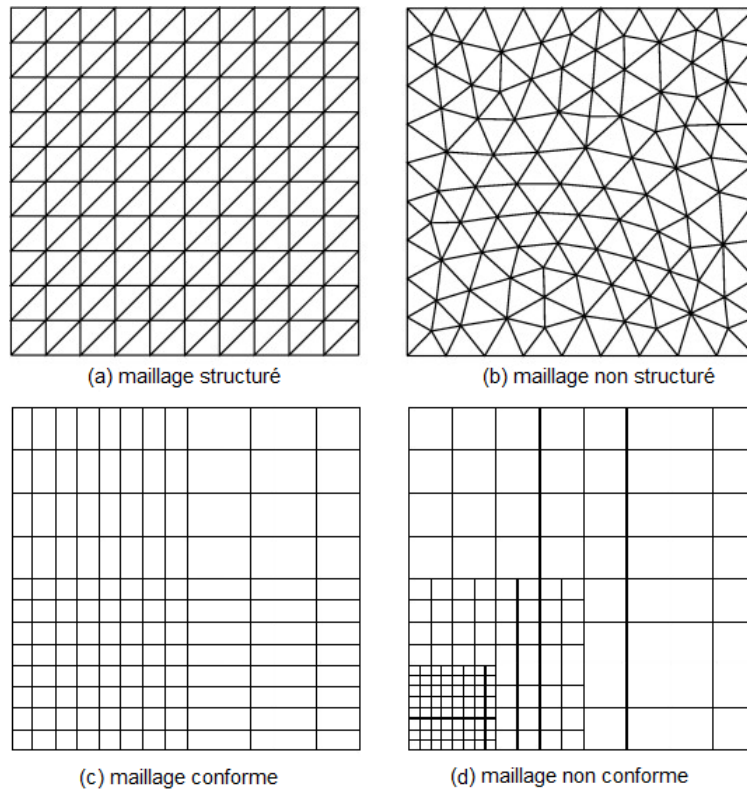


FIGURE II.2 – Exemples d'un maillage structuré (a), non structuré (b), conforme (c) et non conforme (d).

II.3.1.2 La consistance selon la méthode des volumes finis

Définition 8. Un schéma volumes finis est dit consistant si :

$$F_{C,\sigma} = \overline{F}_{C,\sigma} + O(|\sigma|h_C) \quad (\text{II.18})$$

Le flux numérique $F_{C,\sigma}$ est estimé ici avec les valeurs de la solution exacte. La consistance d'un schéma VF est en réalité associée à la consistance de sa discrétisation du flux [136].

La méthode VF n'apporte pas une notion de consistance au sens différences finies (basée sur un développement de Taylor) de l'opérateur de diffusion $-\nabla \cdot (\overline{D}\nabla f)$. C'est plutôt la quantité $\int_C -\nabla \cdot (\overline{D}\nabla f)$ qui est approchée par une expression consistante, étant égale à la somme des flux numériques consistants (II.18). On peut se référer à la section 3.3 de [140] pour plus de détails théoriques sur la définition de consistance au sens VF.

L'ordre d'un schéma VF ne se base pas sur l'ordre de troncature du développement de Taylor comme pour un schéma DF. On dit d'un schéma VF qu'il est linéairement exact s'il est exact pour les solutions linéaires par morceaux sur chacune des cellules du maillage, ce qui *in fine*, correspond à une convergence au second ordre [136].

II.3.1.3 La monotonie des schémas volumes finis

Bien que la méthode VF apporte plusieurs propriétés intéressantes, elle n'est pas pour autant miraculeuse. En effet, jusqu'à présent il n'existe pas un schéma linéaire VF discrétisant un problème diffusif 2D sur un stencil de 9 points avec un maillage quadrangulaire, qui soit à la fois d'ordre 2 et monotone, et ceci sur tout type de maillage et pour tout tenseur de diffusion [136]. Et il se trouve que cette constatation est souvent admise comme un résultat général dans la littérature des schémas volumes finis [136] [141][142]. Par conséquent, la monotonie d'un schéma VF doit être prouvée à posteriori, et elle va dépendre du type de maillage utilisé et de la forme du tenseur de diffusion.

Prouver la monotonie d'un schéma VF passe généralement par une preuve de sa structure M -matrice [136] et souvent, on cherche à mettre sa discrétisation du flux $F_{C,\sigma}$ sous la forme suivante :

$$F_{C,\sigma} = \sum_M \tau_{C,\sigma,M} (f_C - f_M) \quad (\text{II.19})$$

où $\tau > 0$ est appelée transmissibilité. Cette structure de schéma, appelée structure LMP (*Local Maximum Principle*)[143] est très prisée car elle permet une implémentation simple, optimise le coût computationnel et par dessus tout, elle garanti la monotonie par une structure M -matrice : les termes non diagonaux recevant $-\tau_k$, les termes de la diagonale principale recevant $\sum_k \tau_k$ et la dominance diagonale obtenue par $|\sum_k \tau_k| = \sum_k |\tau_k|$ car $\tau_k > 0$ (stricte pour les noeuds au bord). En plus de garantir la positivité de la solution, la structure LMP élimine grâce au théorème suivant, le risque d'oscillations internes sur la solution numérique et assure le principe du min-max dans sa forme discrète forte.

Théorème 6. Soit un schéma VF discrétisant l'équation de diffusion (II.1) stationnaire et dont l'équilibre de flux pour une cellule C de Ω s'écrit :

$$\sum_{\sigma \in \partial C} \sum_M \tau_{C,\sigma,M} (f_C - f_M) = \tilde{S}_C \quad (\text{II.20})$$

avec $\tau_{C,M} > 0$, et \tilde{S}_C construit à partir de S dans C et ayant le même signe que S , alors ce schéma respecte le principe du min-max dans sa formulation discrète forte i.e. le minimum/maximum n'est atteint que sur $\partial\Omega$ à moins que f ne soit constante sur Ω .

Démonstration. Soit $S \geq 0$, on suppose que $f_{C_0} = \min_{\Omega}(f)$, alors $f_M - f_{C_0} \geq 0$ ainsi $\sum_M \tau_{C_0,M} (f_{C_0} - f_M) \leq 0$ or $\tilde{S}_{C_0} \geq 0$ ce qui est absurde à moins que f soit constante sur tout le domaine. Pour prouver le principe du maximum quand $S \leq 0$ on suit le même raisonnement par l'absurde en supposant $f_{C_0} = \max_{\Omega}(f)$.

Évidemment, on doit bien se douter que la structure LMP ne s'obtient pas facilement à l'instar de la structure M -matrice et la dégradation de la monotonie des schémas est très liée à la structure du maillage ou au ratio d'anisotropie du tenseur de diffusion (à partir de $\geq 10^2$) [136][144]. On verra avec plus de détails dans la partie II.3.2.2, qu'une des solutions envisagées pour accéder à la monotonie est la relaxation de la linéarité et l'adoption d'une construction qui corrige les sources de la perte de monotonie.

II.3.2 Les différentes familles de schémas aux volumes finis

Selon le type d'inconnues calculées, les schémas VF peuvent être classés dans deux grandes familles distinctes [136][144] :

- La famille des schémas dit centrés "*cell-centered*" qui estiment la solution aux centres des cellules (f_C).
- La famille des schémas *Hybrid Mimetic Mixed* ou HMM, dont les inconnues sont à la fois aux centres des cellules et aux interfaces (f_C, f_{σ}).

Nous allons nous intéresser dans cette étude, à la première famille des schémas centrés comme leur implémentation est plus simple. De plus, on y trouve plusieurs variantes de schémas disposant d'un argument de monotonie, ce qui n'est pas le cas des schémas HMM. Notons que la famille des schémas centrés est, elle aussi, subdivisée en deux sous familles :

- La famille des schémas linéaires pour lesquels la matrice de discrétisation A ne dépend pas de la solution.
- La famille des schémas non-linéaires pour lesquels A dépend de la solution $A = A(U)$.

II.3.2.1 Les schémas linéaires centrés

Nous allons maintenant présenter différents exemples de schémas VF centrés de la littérature et rappeler leurs propriétés.

Le schéma linéaire LIN 1 : On reprend le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ qu'on décrit par un maillage rectangulaire conforme constitué de cellules $C_{i,j}$ de centre (x_i, y_j) (voir figure II.3). On considère dans un premier temps un tenseur de diffusion $\overline{\overline{D}}$ diagonal.

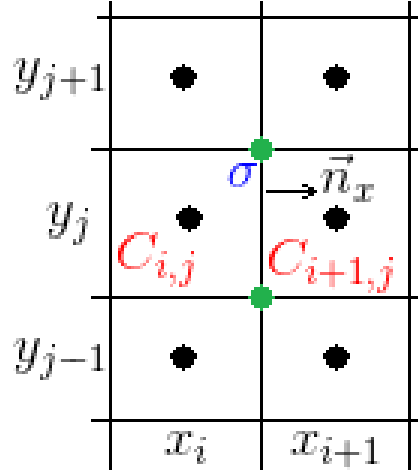


FIGURE II.3 – Maillage volumes fins rectangulaire 2D.

L'équation de conservation (II.15) exprimée dans la cellule $C_{i,j}$ donne dans ce cas :

$$\begin{aligned}
& \bar{F}_{C_{i,j},x_{i+1/2}} + \bar{F}_{C_{i,j},x_{i-1/2}} + \bar{F}_{C_{i,j},y_{j+1/2}} + \bar{F}_{C_{i,j},y_{j-1/2}} \\
&= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} -D_{xx}(x_{i+1/2}, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1/2}) dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} -D_{xx}(x_{i-1/2}, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i-1/2}) dy \\
&+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -D_{yy}(x, y_{j+1/2}) \frac{\partial f}{\partial y}(y_{j+1/2}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -D_{yy}(x, y_{j-1/2}) \frac{\partial f}{\partial y}(y_{j-1/2}) dx \\
&= \int S dx dy
\end{aligned} \tag{II.21}$$

Avec le schéma *LIN 1*, on suppose que la dérivée normale à σ est constante le long de l'interface et elle est approchée par une formule de discrétisation centrée. Cela donne les approximations suivantes des flux $\bar{F}_{C_{i,j},\sigma}$:

$$\begin{aligned}
F_{C_{i,j},x_{i+1/2}} &= -D_{xx}(x_{i+1/2}, y_j) \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \\
F_{C_{i,j},x_{i-1/2}} &= -D_{xx}(x_{i-1/2}, y_j) \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \\
F_{C_{i,j},y_{j+1/2}} &= -D_{yy}(x_i, y_{j+1/2}) \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \\
F_{C_{i,j},y_{j-1/2}} &= -D_{yy}(x_i, y_{j-1/2}) \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})
\end{aligned} \tag{II.22}$$

$D_{xx}(x_{i\pm 1/2}, y_j)$ et $D_{yy}(x_i, y_{j\pm 1/2})$ sont les valeurs respectives de D_{xx} et D_{yy} aux interfaces de $C_{i,j}$ et sont notées respectivement $D_{xx}^{i\pm 1/2,j}$ et $D_{yy}^{i,j\pm 1/2}$. L'intégrale de S dans $C_{i,j}$ est approchée par $\tilde{S}_{i,j} m_{i,j}$ avec $\tilde{S}_{i,j}$ la valeur moyenne de S dans $C_{i,j}$ et $m_{i,j} = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(y_{j+1/2} - y_{j-1/2})$. Par conséquent, la discrétisation de l'équation de diffusion 2D stationnaire avec le schéma *LIN 1* s'écrit :

$$\begin{aligned}
& -\frac{D_{xx}^{i+1/2,j}(y_{j+1/2} - y_{j-1/2})}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1,j} - \frac{D_{xx}^{i-1/2,j}(y_{j+1/2} - y_{j-1/2})}{x_i - x_{i-1}} f_{i-1,j} \\
& -\frac{D_{yy}^{i,j+1/2}(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})}{y_{j+1} - y_j} f_{i,j+1} - \frac{D_{yy}^{i,j-1/2}(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})}{y_j - y_{j-1}} f_{i,j-1} \\
& + [(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \left(\frac{D_{xx}^{i,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{D_{xx}^{i-1/2,j}}{x_i - x_{i-1}} \right) + (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \left(\frac{D_{yy}^{i,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{D_{yy}^{i,j-1/2}}{y_j - y_{j-1}} \right)] f_{i,j} \\
& = m_{i,j} \tilde{S}_{i,j}
\end{aligned} \tag{II.23}$$

Avec cette nouvelle discrétisation et contrairement à ce qui se fait actuellement dans Salammbô, on ne cherche plus à estimer le gradient des coefficients de diffusion. De plus, le traitement de la condition de Neumann se fait plus naturellement en imposant un flux nul à l'interface concernée. Dans le cas d'une diffusion transitoire, la dérivation temporelle est traitée comme avec le terme source :

$$\int y_{j-1/2}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \int y_{j-1/2}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx = m_{i,j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

\tilde{f} est la valeur moyenne de la fonction dans la cellule C_i . En pratique \tilde{f} et \tilde{S} sont estimées dans $C_{i,j}$ par leurs valeurs au centre de la cellule (x_i, y_j) . C'est pour cela qu'on dit que la solution d'un schéma VF est une approximation de la moyenne de la solution exacte par une fonction constante par morceaux.

On considère maintenant que $\overline{\overline{D}}$ est un tenseur de diffusion 2D complet ($D_{xy} \neq 0$) et s'intéresse à l'approximation du flux $\overline{F}_{C_{i,j},x_{i+1/2}}$:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{C_{i,j},x_{i+1/2}} &= - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_x dy = - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (D_{xx}(x_{i+1/2}, y) \frac{\partial f}{\partial x} + D_{xy}(x_{i+1/2}, y) \frac{\partial f}{\partial y}) dy \\ &\approx -(D_{xx}^{i+1/2,j} \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1/2}, y_j) + D_{xy}^{i+1/2,j} \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1/2}, y_j))(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Pour approcher la deuxième dérivée, on fait intervenir des inconnues aux coins (en vert dans la figure II.3) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1/2}) \approx \frac{f_{i+1/2,j+1/2} - f_{i+1/2,j-1/2}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} \quad (\text{II.26})$$

et pour rester dans la logique "cell-centered" du schéma, les termes des coins sont approchés par la combinaison de f sur les centres de cellules qui les entourent, ce qui donne sur un maillage cartésien uniforme :

$$\begin{aligned} f_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i,j+1} + f_{i,j}}{4} \\ f_{i+1/2,j-1/2} &= \frac{f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i,j}}{4} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

La discrétisation (II.23) montre que dans le cas d'un tenseur diagonal, le schéma *LIN 1* est monotone, grâce à sa structure LMP, y compris quand $\overline{\overline{D}}$ est spatialement inhomogène. De plus, grâce au maillage cartésien, le ratio d'anisotropie ici n'a aucun effet sur la déstabilisation de la monotonie. En revanche, quand la diffusion croisée est non-nulle, l'approximation des termes des coins fait perdre la structure de Z -matrice et la justification de la monotonie du schéma par une structure M -matrice n'est plus possible.

Le schéma TPFA - Une approximation linéaire à deux points du flux numérique : Dans la famille des schémas "cell-centered", on présente le schéma *Two-Points Flux Approximation*. Comme son nom l'indique, le schéma TPFA approche lui aussi le flux numérique en fonction de 2 inconnues de centre de la cellule [136][144].

Pour expliciter la construction du schéma, on considère le cas simple où $\overline{\overline{D}}$ est un tenseur de diffusion diagonal et isotrope ($\overline{\overline{D}} = D \cdot Id$). On discrétise le domaine Ω avec un maillage respectant les conditions d'orthogonalité suivantes (comme c'est le cas dans la figure II.1) :

Condition d'orthogonalité pour un tenseur diagonal

- A l'intérieur du domaine, le segment construit entre les deux centres de cellules voisines C et M est perpendiculaire à σ .
- A la frontière, la demi-droite formée par le centre de la cellule de bord et le vecteur normal $\vec{n}_{C,\sigma}$ intersecte σ .

Dans ce cas, les expressions consistantes des flux numériques traversant de part et d'autre σ sont :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= D(C) \frac{f_C - f_\sigma}{d(C,\sigma)} \\ F_{M,\sigma} &= D(M) \frac{f_M - f_\sigma}{d(M,\sigma)} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

En égalisant les deux expressions de flux pour imposer la conservation des flux (II.17), on élimine l'inconnue d'interface f_σ et on obtient l'expression à 2 points du flux :

$$F_{C,\sigma} = \frac{|\sigma| D(C) D(M) d(C,M)}{(D(C)d(M,\sigma) + D(M)d(C,\sigma))} \frac{(f_C - f_M)}{d(C,M)} \quad (\text{II.29})$$

Cette expression de flux est similaire à celle de *LIN 1* (équation (II.22)), mais elle fait intervenir la moyenne harmonique de D entre C et M ($\frac{D(C)D(M)d(C,M)}{D(C)d(M,\sigma)+D(M)d(C,\sigma)}$) au lieu de $D(\sigma)$.

En restant dans le cadre d'un maillage respectant ces conditions d'orthogonalité, le schéma TPFA est irréprochable. En effet, il a un stencil restreint de 5 points en 2D, il est linéairement exact (ordre 2 observé numériquement), a une structure LMP et dispose même d'un argument théorique de convergence spatiale [136]. De plus, sa discrétisation est généralisable pour un tenseur de diffusion complet. Dans ce cas, le maillage doit obéir à de nouvelles conditions d'orthogonalité [139]. Cependant, quand les conditions d'orthogonalité ne sont pas remplies, le schéma perd sa consistance [145]. C'est le cas de la discrétisation d'une équation de diffusion sur un maillage cartésien avec pour un tenseur de diffusion complet, car la structure à 2 points n'est pas suffisante pour intercepter la direction de $\overline{\overline{D}}\vec{n}_\sigma$.

Le schéma MPFA - une généralisation de type multipoints du schéma TPFA : Le schéma *Multi-Points Flux Approximation* généralise la construction du schéma TPFA à des maillages ne respectant pas les conditions d'orthogonalité générales [145]. Au lieu de limiter la discrétisation du flux $F_{C,\sigma}$ aux seules informations se trouvant dans C et dans sa cellule voisine M , on fait intervenir d'autres inconnues de cellules et on construit une discrétisation multipoints du flux. Il existe plusieurs variétés du schéma MPFA, selon la forme décrite par le chemin qui lie les centres des cellules invoquées dans la discrétisation, comme la *L-method*, *G-method*, ou encore la *O-method* que nous allons décrire dans le paragraphe suivant.

On considère une configuration de maillage comme celle rapportée dans la figure II.4 et on cherche à construire la discrétisation de $F_{M_1,\sigma}$. On définit le volume d'interaction autour du coin V , délimité par les centres des cellules qui l'entourent, décrivant ainsi la lettre O autour de V (zone colorée en bleu dans la figure II.4).

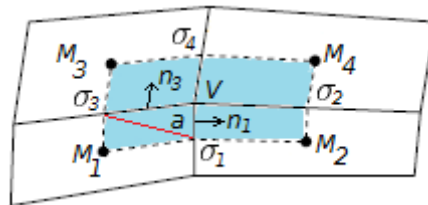


FIGURE II.4 – Volume d'interaction considéré dans le schéma MPFA et sa variante *O-method*. Figure adaptée de [145].

La construction du schéma MPFA part de l'hypothèse que f est linéaire par morceaux dans chaque sous-cellule du volume d'interaction (Cette approximation est d'autant plus vérifiée quand le maillage

est fin [145] et en supposant que $\overline{\overline{D}}$ et S soient réguliers). Suite à cela, on construit simplement le gradient de la fonction f dans la sous cellule a formée par le triangle (M, σ_1, σ_3) :

$$(\nabla f)_a = \frac{1}{2T}((f_{\sigma_1} - f_{M_1})d(\sigma_3, M_1)\vec{n}_1 + (f_{\sigma_3} - f_{M_1})d(\sigma_1, M_1)\vec{n}_3) \quad (\text{II.30})$$

T est l'aire du triangle $(M_1, \sigma_1, \sigma_3)$. Dans le cas d'un maillage cartésien, l'expression du gradient devient :

$$(\nabla f)_a = \frac{f_{\sigma_1} - f_{M_1}}{x_{\sigma_1} - x_{M_1}}\vec{n}_1 + \frac{f_{\sigma_3} - f_{M_1}}{y_{\sigma_3} - y_{M_1}}\vec{n}_3 \quad (\text{II.31})$$

Grâce à l'expression (II.30) du gradient dans a , on peut construire les flux numériques \hat{F}_{M_1, σ_1} et \hat{F}_{M_1, σ_3} définis dans a et traversant les segments $[V, \sigma_1]$ et $[V, \sigma_3]$ dont les mesures respectives sont notées Γ_1 et Γ_3 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{F}_{M_1, \sigma_1} \\ \hat{F}_{M_1, \sigma_3} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \Gamma_1 \vec{n}_1 \\ \Gamma_3 \vec{n}_3 \end{pmatrix} \cdot \overline{\overline{D}} (\nabla f)_a = - \frac{1}{2T} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \vec{n}_1 \\ \Gamma_3 \vec{n}_3 \end{pmatrix} \cdot \overline{\overline{D}} \begin{pmatrix} d(\sigma_3, M_1) \vec{n}_1 \\ d(\sigma_1, M_1) \vec{n}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} - f_{M_1} \\ f_{\sigma_3} - f_{M_1} \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{2T} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \vec{n}_1 \cdot \overline{\overline{D}} d(\sigma_3, M_1) \vec{n}_1 & \Gamma_1 \vec{n}_1 \cdot \overline{\overline{D}} d(\sigma_1, M_1) \vec{n}_3 \\ \Gamma_3 \vec{n}_3 \cdot \overline{\overline{D}} d(\sigma_3, M_1) \vec{n}_1 & \Gamma_3 \vec{n}_3 \cdot \overline{\overline{D}} d(\sigma_1, M_1) \vec{n}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} - f_{M_1} \\ f_{\sigma_3} - f_{M_1} \end{pmatrix} = -G_1 \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} - f_{M_1} \\ f_{\sigma_3} - f_{M_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

De la même manière, on définit les autres flux sur les sous-cellules restantes entourant V , et on établit les 4 égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{F}_{M_1, \sigma_1} \\ \hat{F}_{M_1, \sigma_3} \end{pmatrix} &= -G_1 \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} - f_{M_1} \\ f_{\sigma_3} - f_{M_1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{F}_{M_2, \sigma_1} \\ \hat{F}_{M_2, \sigma_2} \end{pmatrix} &= -G_2 \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} - f_{M_2} \\ f_{\sigma_2} - f_{M_2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{F}_{M_4, \sigma_2} \\ \hat{F}_{M_4, \sigma_4} \end{pmatrix} &= -G_4 \begin{pmatrix} f_{\sigma_2} - f_{M_4} \\ f_{\sigma_4} - f_{M_4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{F}_{M_3, \sigma_3} \\ \hat{F}_{M_3, \sigma_4} \end{pmatrix} &= -G_3 \begin{pmatrix} f_{\sigma_3} - f_{M_3} \\ f_{\sigma_4} - f_{M_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

La continuité des flux sur les interfaces et la continuité de f aux interfaces imposent :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{M_1, \sigma_1} &= -\hat{F}_{M_2, \sigma_1} = F_1 \\ \hat{F}_{M_2, \sigma_2} &= -\hat{F}_{M_4, \sigma_2} = F_2 \\ \hat{F}_{M_4, \sigma_4} &= -\hat{F}_{M_3, \sigma_4} = F_4 \\ \hat{F}_{M_3, \sigma_3} &= -\hat{F}_{M_1, \sigma_3} = F_3 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

On traduit ensuite les égalités de (II.33) et (II.34) comme un grand système matriciel :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_{M_1} \\ f_{M_2} \\ f_{M_3} \\ f_{M_4} \end{pmatrix} \quad (\text{II.35})$$

où T est appelée matrice des transmissibilités. Les inconnues d'interface sont ensuite éliminées par la

construction de T , qui traduit les égalités (II.33) et (II.34) :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} \\ f_{\sigma_2} \\ f_{\sigma_3} \\ f_{\sigma_4} \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} f_{M_1} \\ f_{M_2} \\ f_{M_3} \\ f_{M_4} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} f_{\sigma_1} \\ f_{\sigma_2} \\ f_{\sigma_3} \\ f_{\sigma_4} \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} f_{M_1} \\ f_{M_2} \\ f_{M_3} \\ f_{M_4} \end{pmatrix} \\ T &= CA^{-1}B + F \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Différents tests numériques attestent une convergence à l'ordre 2 du schéma MPFA [136][145][146]. Si on considère le cas d'un maillage uniforme et d'un tenseur homogène, sa monotonie est conditionnelle [145]. Par ailleurs, différents travaux de recherche et *benchmarks* effectués sur les différentes variantes du schéma avec différentes configurations de maillage ont montré que pour des niveaux d'anisotropie conséquents ($\geq 10^2$), le schéma perdait sa monotonie et son second ordre de convergence spatiale [136][146][144].

Le schéma LIN 2 - Un schéma linéaire multipoints moyenné : Une autre construction de schéma VF linéaire et centrée est possible si on exprime $F_{C,\sigma}$ comme la moyenne² de deux flux constants et décentrés F_1 et F_2 , définis dans les cellules voisines partageant σ :

$$F_{C,\sigma} = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 \quad (\text{II.37})$$

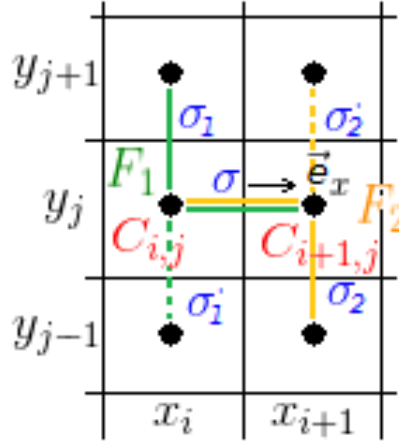


FIGURE II.5 – Construction du schéma VF LIN2 sur un maillage cartésien.

De retour à la définition du flux (II.16), on fait apparaître le vecteur $\overline{\overline{D}}\vec{n}$ sachant que $\overline{\overline{D}}\nabla f \cdot \vec{n} = \nabla f \cdot \overline{\overline{D}}^T \vec{n}$ et que $\overline{\overline{D}}$ est symétrique :

$$\overline{F}_{C,\sigma} = - \int_{\sigma} \overline{\overline{D}}\nabla f \cdot \vec{n}_{C,\sigma} dl = - \int_{\sigma} \nabla f \cdot \overline{\overline{D}}^T \vec{n}_{C,\sigma} dl = - \int_{\sigma} \nabla f \cdot \overline{\overline{D}}\vec{n}_{C,\sigma} dl \quad (\text{II.38})$$

On choisit ensuite de discrétiser ∇f suivant la direction du vecteur $\overline{\overline{D}}\vec{n}$, en se positionnant dans la cellule C pour exprimer F_1 et en positionnant dans la cellule M pour exprimer F_2 .

2. Le signe (-) adossé à $\frac{1}{2}F_2$ dans l'expression de la moyenne provient de la direction de discrétisation de F_2 , opposée à celle de F_1 par définition.

On considère le cas d'un maillage cartésien et on s'intéresse à la discrétisation de $F_{C_{i,j},\sigma}$, comme représenté dans la figure II.5. Dans $C_{i,j}$ on a $\overline{\overline{D}}(C_{i,j})\vec{n}_{C_{i,j},\sigma} = \overline{\overline{D}}(C_{i,j})\vec{e}_x = \begin{pmatrix} D_{xx}(C_{i,j}) \\ D_{xy}(C_{i,j}) \end{pmatrix}$.

Si $D_{xx}(C_{i,j}) \geq 0$ on aura :

$$F_1 = -\left(D_{xx}^{i,j} \frac{f_\sigma - f_{i,j}}{x_\sigma - x_i} + D_{xy}^{i,j} \frac{f_{\sigma_1} - f_{i,j}}{y_{\sigma_1} - y_j}\right)|\sigma| \quad (\text{II.39})$$

Pour aboutir à une formulation "cell-centered" du schéma, on remplace les inconnues d'interface par des pondérations d'inconnues aux centres des cellules voisines. Cela donne l'expression suivante de F_1 , schématisée en trait continu vert dans la figure II.5 :

$$F_1 = -\left(D_{xx}^{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} + D_{xy}^{i,j} \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \quad (\text{II.40})$$

De la même manière, on construit le flux décentré F_2 défini dans $C_{i+1,j}$ sachant que $\overline{\overline{D}}^T(C_{i+1,j})\vec{n}_{C_{i+1,j},\sigma} = \overline{\overline{D}}^T(C_{i+1,j})(-\vec{e}_x) = \begin{pmatrix} -D_{xx}(C_{i+1,j}) \\ -D_{xy}(C_{i+1,j}) \end{pmatrix}$. Si $D_{xy}(C_{i+1,j}) \geq 0$, l'expression de F_2 , schématisée en trait continu orange dans la figure II.5, devient :

$$F_2 = -\left(-D_{xx}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} - D_{xy}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \quad (\text{II.41})$$

On peut remarquer $F_1(C_{i,j},\sigma) = -F_2(C_{i+1,j},\sigma)$ ce qui permet d'assurer la conservation du flux $F_{C_{i,j},\sigma}$.

Quand $D_{xy} < 0$, le stencil de discrétisation doit changer pour accompagner la nouvelle direction du vecteur $\overline{\overline{D}}\vec{n}$. Cela donne les nouvelles expressions suivantes de F_1 et F_2 (schématisées dans la figure II.5 en trait discontinu vert pour F_1 et en trait discontinu orange pour F_2) :

$$\begin{aligned} F_1 &= -\left(D_{xx}^{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} + D_{xy}^{i,j} \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \\ F_2 &= -\left(-D_{xx}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} - D_{xy}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{y_{j+1} - y_j}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

ce qui donne l'expression de $F_{C_{i,j},\sigma}$ suivante :

$$\begin{aligned} F_{C_{i,j},\sigma} &= \left[\left(\frac{D_{xx}^{i,j} + D_{xx}^{i+1,j}}{2}\right) \frac{(f_{i,j} - f_{i+1,j})}{(x_{i+1} - x_i)} + \frac{D_{xy}^{i,j}}{2} \frac{(f_{i,j} - f_{i,j+1})}{(y_{j+1} - y_j)}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{D_{xy}^{i+1,j}}{2} \frac{(f_{i+1,j-1} - f_{i+1,j})}{(y_{j+1} - y_j)}\right](y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

D'une manière générale, on peut mettre la discrétisation de $F_{C,\sigma}$ par le schéma *LIN 2* sous la forme suivante :

$$F_{C,\sigma} = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 = \gamma_1(f_C - f_M) + \gamma_2(f_C - f_{N_C}) + \gamma_3(f_{N_M} - f_M) \quad (\text{II.44})$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{D_{nn}(C) + D_{nn}(M)}{2d(C,M)}|\sigma| \\ \gamma_2 = \frac{|D_{nt}(C)|}{2d(C,N_C)}|\sigma| \\ \gamma_3 = \frac{|D_{nt}(M)|}{2d(M,M)}|\sigma| \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

N_C et N_M sont les cellules voisines à C et M , dont l'emplacement dépend du signe de la diffusion croisée, D_{nn} est le coefficient de diffusion de direction normale à σ et D_{nt} est le coefficient de diffusion croisée.

Expérimentalement, le schéma *LIN 2* garantit une précision d'ordre 2 [144]. Quand la diffusion croisée est non nulle, la construction du schéma ne permet pas d'avoir une matrice de discrétisation de type *M*-matrice car le terme du coin f_{N_M} dans (II.45) casse la structure *Z*-matrice. Cependant, ce schéma est légèrement plus robuste que *LIN 1* comme on le verra dans la partie III.3.1.1, comme sa structure étant plus proche d'une *M*-matrice.

II.3.2.2 Les schémas non-linéaires centrés

Les schémas non-linéaires représentent une alternative sérieuse pouvant apporter une résolution monotone. En particulier, on choisit de relaxer la linéarité du schéma au profit d'une construction qui va éliminer les termes de discrétisation responsables de la perte de la monotonie, mais au prix d'un coût en temps de calcul supplémentaire introduit par la résolution non-linéaire itérative.

Pour cela, l'idée principale des schémas non-linéaires se base sur l'expression du flux $F_{C,\sigma}$ en fonction de deux flux décentrés F_1 et F_2 , mais cette fois en adoptant une combinaison convexe :

$$F_{C,\sigma} = \mu_1(f)F_1 - \mu_2(f)F_2 \quad (\text{II.46})$$

avec $\mu_1(f) > 0$ et $\mu_2(f) > 0$ des facteurs de pondération tel que $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Ces facteurs dépendent de la solution et ils sont choisis pour assurer une construction particulière. Notons que dans le cas non-linéaire, l'équivalence entre la positivité et le respect du principe du maximum est perdue et il est possible que des schémas assurant une solution positive, ne respectent pas le principe du min/max [136][144][147].

Le schéma NLTPFA - un schéma non-linéaire à deux points monotone : A partir de (II.46), le schéma NLTPFA construit une approximation à deux points du flux $F_{C,\sigma}$ sous la forme :

$$F_{C,\sigma} = \alpha_{C,M}(f)f_C - \beta_{C,M}(f)f_M \quad (\text{II.47})$$

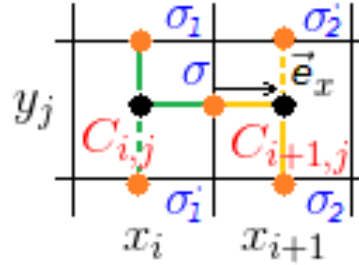


FIGURE II.6 – Construction du schéma NLTPFA sur un maillage cartésien.

Pour cela, on exprime F_1 et F_2 dans ce schéma sous le format (II.39). Cela donne sur le maillage cartésien de la figure II.6 quand $D_{xy} \geq 0$ (traits pleins en vert pour F_1 et traits pleins en orange pour F_2) :

$$\begin{aligned} F_1 &= -\left(D_{xx}^{i,j} \frac{f_\sigma - f_{i,j}}{x_\sigma - x_i} + D_{xy}^{i,j} \frac{f_{\sigma_1} - f_{i,j}}{y_{\sigma_1} - y_j}\right) |\sigma| \\ F_2 &= -\left(-D_{xx}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j} - f_\sigma}{x_{i+1} - x_\sigma} - D_{xy}^{i+1,j} \frac{f_{\sigma_2} - f_{i+1,j}}{y_j - y_{\sigma_2}}\right) |\sigma| \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

On injecte ensuite ces deux expressions dans (II.46) :

$$\begin{aligned} F_{C_{i,j},\sigma} &= \mu_1 |\sigma| \left(\frac{D_{xx}^{i,j}}{x_\sigma - x_i} + \frac{D_{xy}^{i,j}}{y_{\sigma_1} - y_j} \right) f_{i,j} - \mu_2 |\sigma| \left(\frac{D_{xx}^{i+1,j}}{x_{i+1} - x_\sigma} + \frac{D_{xy}^{i+1,j}}{y_j - y_{\sigma_2}} \right) f_{i+1,j} \\ &\quad - \left(\mu_1 |\sigma| \left(\frac{D_{xx}^{i,j}}{x_\sigma - x_i} f_\sigma + \frac{D_{xy}^{i,j}}{y_{\sigma_1} - y_j} f_{\sigma_1} \right) - \mu_2 |\sigma| \left(\frac{D_{xx}^{i+1,j}}{x_{i+1} - x_\sigma} f_\sigma + \frac{D_{xy}^{i+1,j}}{y_j - y_{\sigma_2}} f_{\sigma_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

qu'on met sous la forme :

$$F_{C_{i,j},\sigma} = \alpha f_{i,j} - \beta f_{i+1,j} - (\mu_1 a_1(f) - \mu_2 a_2(f)) \quad (\text{II.50})$$

qui dans le cas général s'écrit :

$$F_{C,\sigma} = \alpha_{C,M} f_C - \beta_{C,M} f_M - (\mu_1 a_{1C,M}(f) - \mu_2 a_{2C,M}(f)) \quad (\text{II.51})$$

a_1 et a_2 contiennent les termes associés aux inconnues d'interface, représentés par les noeuds oranges dans la figure II.6, et qui sont responsables de la perte de la monotonie. On construit donc μ_1 et μ_2 de sorte que $\mu_1 a_{1C,M}(f) - \mu_2 a_{2C,M}(f) = 0$, ce qui nécessite la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 a_1 - \mu_2 a_2 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 = 1 \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Ainsi

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \\ \mu_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \end{cases} \text{ si } a_1 + a_2 \neq 0 \text{ sinon } \mu_1 = \mu_2 = 1/2 \quad (\text{II.53})$$

Avec cette construction, la matrice de discrétisation A est une Z -matrice ($\beta > 0$), et ses termes diagonaux sont strictement positifs ($\alpha > 0$). De plus, elle est à diagonale dominante car $\alpha_{C,\sigma} = \beta_{M,\sigma}$ (imposée par la conservation du flux (II.17)). A est donc une M -matrice et le schéma est monotone.

L'algorithme de Picard est utilisé pour résoudre le système d'équation non-linéaire car il permet d'assurer une solution positive à chaque itération non-linéaire.

Algorithme 1 : Algorithme de Picard

```

1  $f \leftarrow f^0 \geq 0$  : Initialisation
2 tant que  $\|f^{s+1} - f^s\| \geq \epsilon$  faire
3    $f^s \leftarrow f^{s-1}$ 
4   Résoudre  $A(f^s)U^{s+1} = R(f^s)$ 
5    $s \leftarrow s + 1$ 
6 fin

```

L'algorithme de Newton en revanche n'assure pas la positivité de la solution à chaque itération et risque de faire perdre l'apport principal du schéma [148]. De plus, son implémentation est contraignante à la vue des expressions souvent non dérivables des facteurs de pondérations μ_1 et μ_2 .

Initialement développé sur un maillage triangulaire [149], le schéma NLTPFA a été étendu sur des maillages de forme polygonale [150]. Différents tests numériques confirment sa convergence au second ordre [150] et une étude théorique de sa convergence a été présentée dans [148].

Le schéma NLMPFA - un schéma non-linéaire multipoints préservant le principe du min/max : On cherche avec le schéma non-linéaire NLMPFA à obtenir une expression du flux $F_{C,\sigma}$ sous la forme LMP qui lui permet de préserver la positivité et le principe du min-max :

$$F_{C,\sigma} = \sum_M \tau_{C,\sigma,M} (f_C - f_M) \quad (\text{II.54})$$

Pour cela, on reprend les expressions F_1 et F_2 sous leurs formes "cell-centered" (II.40) et (II.41), ce

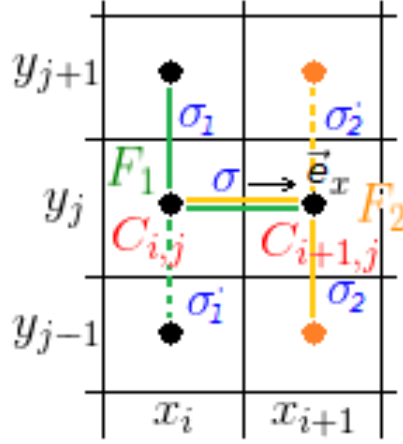


FIGURE II.7 – Construction du schéma NLMPFA sur un maillage cartésien.

qui donne dans la configuration du maillage catésien de la figure II.7 :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= -\left(D_{xx}^{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} + \underbrace{D_{xy}^{i,j} \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{y_j - y_{j-1}}}_{G_1}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \\
 F_2 &= -\left(-D_{xx}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} - \underbrace{D_{xy}^{i+1,j} \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{y_{j+1} - y_j}_{G_2}}\right)(y_{j+1/2} - y_{j-1/2})
 \end{aligned} \tag{II.55}$$

Comme nous l'avons vu précédemment avec le schéma *LIN 2* ($\mu_1 = \mu_2 = 1/2$), la portion de flux relative à γ_3 (nommée G_2 dans l'expression précédente de F_2) empêche l'établissement de la structure LMP et la M -matrice. Or, par un choix adéquat de μ_1 et μ_2 , le schéma NLMPFA fait disparaître la portion de flux G_2 de F_2 de la discrétisation (noeuds oranges de la figure II.7). Ainsi, on ne laisse que les portions de flux dans F_1 et F_2 respectant la structure LMP (noeuds noirs de la figure II.7). La contribution de G_2 dans l'équilibre des flux est comptabilisée implicitement dans les facteurs de pondérations (voir annexe A).

De la même manière que pour le schéma NLTPFA, l'algorithme de Picard est primordial pour le bon fonctionnement de la résolution non-linéaire du schéma NLMPFA et les tests numériques montrent aussi sa convergence à l'ordre 2 [151][148].

II.3.2.3 Synthèse des schémas aux volumes finis présentés

On résume dans le tableau II.3.2 les différentes caractéristiques des schémas présentés précédemment et on schématise dans la figure II.8, leur logique de discrétisation sur un maillage cartésien.

Schéma	Ordre de convergence (Num.)	Linéarité	Monotonie quand $Dyx \neq 0$ (M -matrice)	Remarque
TPFA	2	linéaire	non	non consistant en grille rectangulaire pour $D_{xy} \neq 0$
MPFA	2	linéaire	non	termes de la matrice de discrétisation inaccessible
<i>LIN 1</i>	2	linéaire	non	
<i>LIN 2</i>	2	linéaire	non	
NLTPFA	2	non-linéaire	oui	assure la positivité seulement
NLMPFA	2	non-linéaire	oui	respecte le principe du min-max

TABLEAU II.1 – Résumé des principales caractéristiques numériques des schémas VF présentés dans la section II.3.2.

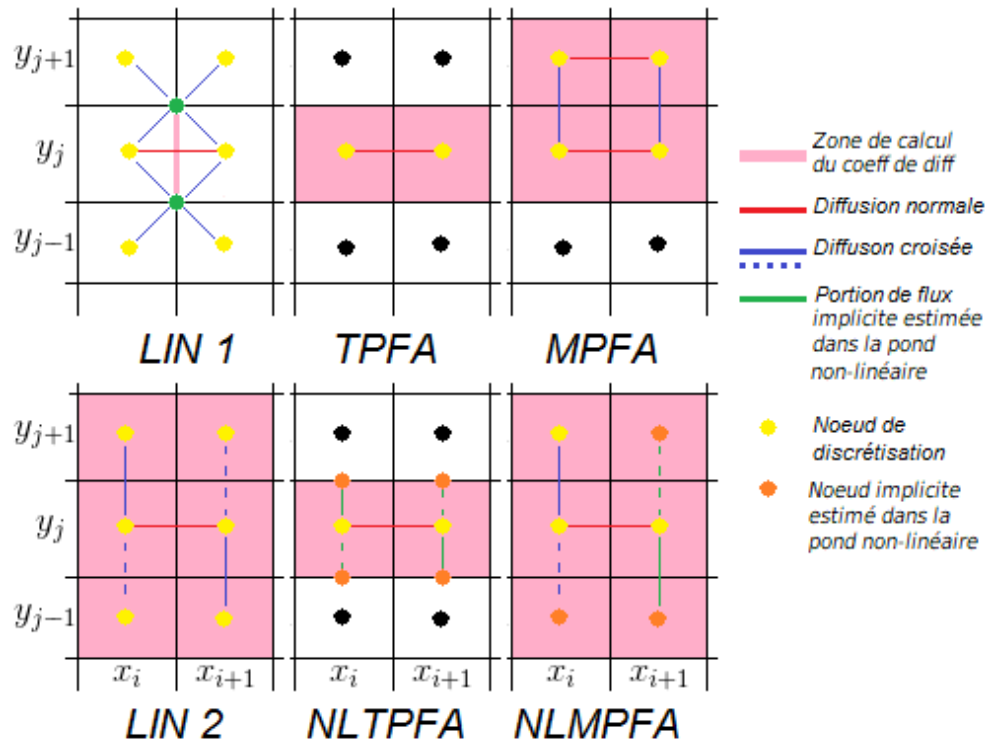


FIGURE II.8 – Schéma récapitulatif de la logique de discrétisation sur un maillage cartésien des différents schémas VF présentés.

II.4 Conditions de monotonie alternatives pour un schéma aux volumes finis : les conditions de *Nordbotten*

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié la monotonie des schémas que par rapport à la structure M -matrice. Cependant, nous avons vu dans la section II.2.3 qu'il était possible d'obtenir la monotonie alternativement, par une décomposition *weakly regular splitting*. Sur la base du corollaire 1 présenté dans la section II.2.3, *Nordbotten et al. (2007)* présentent un développement théorique qui fait découler un jeu de conditions à assurer sur les termes d'une matrice de discrétisation, afin de garantir sa monotonie [141].

Considérons un schéma aux volumes finis discrétisant l'équation de diffusion stationnaire 2D sur un maillage quadrangulaire général avec un stencil de 9 points :

$$\sum_{k=1}^9 m_k^{i,j} f_k = Q_{i,j} \quad (\text{II.56})$$

$m_k^{i,j}$ représente le poids de discrétisation associé au voisin numéroté k , utilisé dans le stencil de discrétisation dans la cellule $C_{i,j}$ (voir figure II.9) et $Q_{i,j}$ est construit à partir du terme source. En suivant un ordonnancement naturel des inconnues du maillage dans A (on parcourt les lignes à partir du coin bas gauche), les termes $m_k^{i,j}$ sont placés sur la ligne relative à l'inconnue d'indice (i, j) dans la matrice de discrétisation A . Ainsi, $m_1^{i,j}$ représente le terme de diagonale principale dans la ligne de (i, j) , $m_2^{i,j}$ et $m_6^{i,j}$ les termes des diagonales de rang 1 et -1 et ainsi de suite.

Si on considère $f = cte$, alors les flux numériques sont nuls. Cela impose l'égalité suivante sur les cellules à l'intérieur du domaine :

$$\sum_{k=1}^9 m_k^{i,j} = 0 \quad (\text{II.57})$$

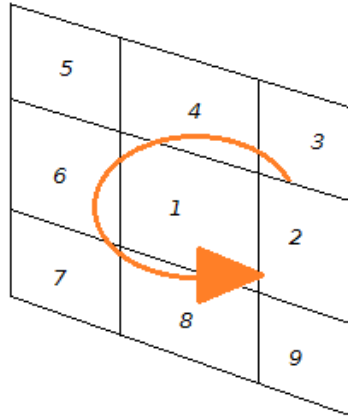


FIGURE II.9 – Sens de numérotation des poids du stencil autour d'une cellule (i, j) du maillage. Figure adaptée de [141].

Avec l'équation (II.57), (II.10) est respectée (égalité à l'intérieur du domaine et stricte au bord). Pour pouvoir appliquer le corollaire 1, on doit construire B et C selon la définition 4. Notons que selon la décomposition adoptée, on peut faire découler des conditions de monotonie différentes. Par exemple, si on choisit B comme la partie diagonale de A , on établit les conditions de monotonie d'une M -matrice. Dans [141], la décomposition choisie se base sur la forme tridiagonale par bloc de la matrice de discrétisation du schéma (II.56) comme schématisé dans la figure II.10.

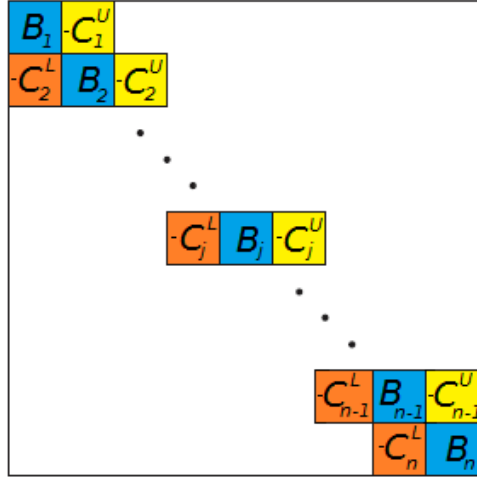


FIGURE II.10 – Forme tridiagonale par bloc de la matrice de discrétisation et construction du *splitting*. Figure adaptée de [141].

La matrice B est formée des blocs diagonaux de A notés B_j qui sont des matrices tridiagonales contenant les termes m_1 , m_2 et m_6 :

$$B_j = \begin{pmatrix} \cdot\cdot & m_2^{i-1,j} & \\ m_2^{i,j} & m_1^{i,j} & m_2^{i,j} \\ & m_6^{i+1,j} & \cdot\cdot \end{pmatrix} \quad (\text{II.58})$$

La matrice C contient les éléments restants de A , partagés en deux matrices triangulaires $C = C^U + C^L$: C^U une matrice triangulaire supérieure par bloc constituée des blocs tridiagonaux C_j^U contenant les termes m_3, m_4 et m_5 et C^L une matrice triangulaire inférieure par bloc constituée des blocs tridiagonaux C_j^L contenant les termes m_7, m_8 et m_9 .

$$C_j^L = \begin{pmatrix} \cdot\cdot & m_9^{i-1,j} & \\ m_7^{i,j} & m_8^{i,j} & m_9^{i,j} \\ & m_7^{i+1,j} & \cdot\cdot \end{pmatrix} \quad (\text{II.59})$$

$$C_j^U = \begin{pmatrix} \cdot\cdot & m_3^{i-1,j} & \\ m_5^{i,j} & m_4^{i,j} & m_3^{i,j} \\ & m_5^{i+1,j} & \cdot\cdot \end{pmatrix} \quad (\text{II.60})$$

Partant de cette construction de B et C , on va appliquer les conditions du corollaire 1 pour obtenir la monotonie de A . Tout d'abord la propriété $B^{-1} \geq O$ est obtenue si on impose la monotonie de B , elle même obtenue par une construction M -matrice de B , ce qui impose selon la propriété 2 :

$$m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A0})$$

$$m_2^{i,j} < 0 \quad (\text{A1a})$$

$$m_6^{i,j} < 0 \quad (\text{A1c})$$

$$m_1^{i,j} + m_2^{i,j} + m_6^{i,j} > 0 \quad (\text{A2})$$

Par la suite, on cherche à obtenir $CB^{-1} \geq 0$. On remarque d'abord que CB^{-1} est une matrice tridiagonale avec un bloc diagonal nul. Ensuite, on introduit les matrices $D_j = B_j^{-1} = \{d_{i,k}^j\}$,

$E_{j+1}^L = C_{j+1}^L B_j^{-1} = C_{j+1}^L D_j = \{e_{i,k}^{j,L}\}$, $E_{j-1}^U = C_{j-1}^U B_j^{-1} = C_{j-1}^U D_j = \{e_{i,k}^{j,U}\}$. E_j^L et E_j^U sont les blocs extra-diagonaux non nuls de CB^{-1} .

$$CB^{-1} = \begin{pmatrix} O & E_1^U & \cdots & O & O \\ E_2^L & O & E_2^U & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & E_{n-1}^L & O & E_{n-1}^U \\ O & O & \cdots & E_n^L & O \end{pmatrix} \quad (\text{II.61})$$

On cherche donc à s'assurer que les blocs $E_j^L \geq O$ et $E_j^U \geq O$. Pour cela on part de $B_j D_j = I$, ce qui donne :

$$m_6^{i,j} d_{i-1,k}^j + m_1^{i,j} d_{i,k}^j + m_2^{i,j} d_{i+1,k}^j = \delta_{i,k} \quad (\text{II.62})$$

Cela permet d'isoler $d_{i,k}^j$:

$$d_{i,k}^j = \frac{\delta_{i,k}}{m_1^{i,j}} - \frac{m_6^{i,j}}{m_1^{i,j}} d_{i-1,k}^j - \frac{m_2^{i,j}}{m_1^{i,j}} d_{i+1,k}^j \quad (\text{II.63})$$

De plus, par définition de E_{j+1}^L et E_{j-1}^U on a :

$$\begin{aligned} e_{i,k}^{j+1,L} &= -m_7^{i,j+1} d_{i-1,k}^j - m_8^{i,j+1} d_{i,k}^j - m_9^{i,j+1} d_{i+1,k}^j \\ e_{i,k}^{j-1,U} &= -m_5^{i,j-1} d_{i-1,k}^j - m_4^{i,j-1} d_{i,k}^j - m_3^{i,j-1} d_{i+1,k}^j \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

On injecte (II.63) dans les deux expressions précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned} e_{i,k}^{j+1,L} &= -\frac{m_8^{i,j+1}}{m_1^{i,j}} \delta_{i,k} + \left(\frac{m_6^{i,j}}{m_1^{i,j}} m_8^{i,j+1} - m_7^{i,j+1} \right) d_{i-1,k}^j + \left(\frac{m_2^{i,j}}{m_1^{i,j}} m_8^{i,j+1} - m_9^{i,j+1} \right) d_{i+1,k}^j \\ e_{i,k}^{j-1,U} &= -\frac{m_4^{i,j-1}}{m_1^{i,j}} \delta_{i,k} + \left(\frac{m_6^{i,j}}{m_1^{i,j}} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} \right) d_{i-1,k}^j + \left(\frac{m_2^{i,j}}{m_1^{i,j}} m_4^{i,j-1} - m_3^{i,j-1} \right) d_{i+1,k}^j \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

Ainsi, pour avoir $e_{i,k}^{j,L} \geq 0$ et $e_{i,k}^{j,U} \geq 0$ et comme on ne dispose pas d'indications sur les valeurs des termes D_j (à part qu'ils sont positifs), il faut montrer que les facteurs multiplicatifs de $d_{i+1,k}^j, d_{i-1,k}^j$ dans (II.65) sont positifs, ce qui fait découler les conditions suivantes :

$$m_4^{i,j} < 0 \quad (\text{A1a})$$

$$m_8^{i,j} < 0 \quad (\text{A1b})$$

$$m_2^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_3^{i,j-1} m_1^{i,j} < 0 \quad (\text{A3a})$$

$$m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3b})$$

$$m_2^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_9^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3c})$$

$$m_6^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_7^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3d})$$

Les inégalités **A1** et **A3** sont strictes afin de s'assurer que les blocs extra-diagonaux non-nuls de CB^{-1} sont $> O$. Par conséquent, CB^{-1} est irréductible. Ainsi, prouver la monotonie de A selon le corollaire 1 revient à prouver l'ensemble des 10 inégalités de **A1** à **A3**.

En inversant la logique d'ordonnement des inconnues (i, j) dans la matrice A (commencer par la colonne $j = 1$ et balayer les lignes i) la construction de B et C s'en trouve modifiée et il en découle un nouvel ensemble de conditions légèrement différent :

$$m_1^{i,j} > 0 \quad (\mathbf{B0})$$

$$m_2^{i,j} < 0 \quad (\mathbf{B1a})$$

$$m_4^{i,j} < 0 \quad (\mathbf{B1b})$$

$$m_6^{i,j} < 0 \quad (\mathbf{B1c})$$

$$m_8^{i,j} < 0 \quad (\mathbf{B1d})$$

$$m_1^{i,j} + m_4^{i,j} + m_8^{i,j} > 0 \quad (\mathbf{B2})$$

$$m_4^{i,j} m_2^{i-1,j} - m_3^{i-1,j} m_1^{i,j} < 0 \quad (\mathbf{B3a})$$

$$m_4^{i,j} m_6^{i+1,j} - m_5^{i+1,j} m_1^{i,j} > 0 \quad (\mathbf{B3b})$$

$$m_8^{i,j} m_2^{i-1,j} - m_9^{i-1,j} m_1^{i,j} > 0 \quad (\mathbf{B3c})$$

$$m_8^{i,j} m_6^{i+1,j} - m_7^{i+1,j} m_1^{i,j} > 0 \quad (\mathbf{B3d})$$

Au final, à partir des deux jeux de conditions **A** et **B**, on énonce le théorème suivant :

Théorème 7. Soit A la matrice de discrétisation d'un schéma vérifiant l'équation (II.57). Si A vérifie les conditions **A** ou **B**, alors A est monotone.

L'intérêt des "conditions de *Nordbotten*" est qu'elles sont moins contraignantes que celles d'une M -matrice. En effet, elles s'affranchissent de la condition de Z -matrice qui est impossible à obtenir dans notre application en présence de la diffusion croisée. De plus, elles peuvent être considérées comme les conditions les plus générales pour un schéma VF sur un maillage quadrilatère (voir annexe B). Du fait de leur caractère local qui fait qu'elles imposent la monotonie sur chaque sous-maillage du domaine, elles apportent une propriété de monotonie du schéma plus forte que la monotonie de la matrice de discrétisation elle-même. Le respect des conditions de *Nordbotten* empêche donc les oscillations internes (*Property MD* dans [141]).

II.5 Mise en place du socle de la nouvelle résolution numérique

II.5.1 Application de la méthode des volumes finis au problème de diffusion avec la formulation (y, E, L^*) de l'équation de diffusion

Nous avons énoncé précédemment que la méthode VF s'appliquait dans le cadre d'une EDP conservative. Or, notre problème de diffusion 3D, tel qu'il est exprimé dans l'équation I.18, ne peut pas se mettre sous forme conservative, à cause de la diffusion radiale.

On peut tout de même envisager l'application de la méthode VF sur l'équation de diffusion locale, si on adopte un *splitting* temporel entre les deux niveaux de diffusion. Dans ce cas, la forme conservative de l'équation de diffusion locale s'obtient en la multipliant par G_1 le jacobien de la transformation $(\mu, J) \rightarrow (E, y)$, ce qui donne la nouvelle forme d'équation locale conservative :

$$G_1 \frac{\partial f}{\partial t} = \text{div}(\overline{\overline{D}}_{eff} \nabla f) \quad (\text{II.66})$$

$\overline{\overline{D}}_{eff}$ est le tenseur de diffusion effectif égale à $G_1 \cdot \begin{pmatrix} D_{yy} & D_{yE} \\ D_{yE} & D_{EE} \end{pmatrix}$.

En revanche, la diffusion radiale exprimée sur une grille (y, E, L^*) devra être traitée par un schéma numérique adapté.

II.5.2 Construction du nouveau maillage aux volumes finis (y, E, L^*)

Adopter une nouvelle construction de maillage pour le nouveau coeur de calcul serait une tâche très complexe à entreprendre au vu différents paramètres physiques et pratiques pourraient entrer en jeu (re-calcul des coefficients, choix de la structure, choix du raffinement...) et qui ne seraient pas dans le coeur du sujet de la thèse. Ainsi, le nouveau maillage VF (y, E, L^*) est construit directement à partir du maillage DF existant de Salammbô, sur lequel sont évalués les coefficients de diffusion.

En partant d'une grille DF 1D quelconque, on identifie deux constructions de grille VF possibles, comme présenté dans la figure II.11 :

- Une première méthode qui marche sur toute grille DF, pour laquelle on associe les noeuds de la grille DF avec les interfaces de la grille VF. Cette méthode sera utilisée pour la construction de la nouvelle grille VF associée à l'énergie E .
- Une seconde méthode qui fait coïncider les centres des cellules de la grille VF avec les noeuds de la grille DF et qui nécessite la résolution d'un système linéaire. Ce dernier peut ne pas avoir de solution exploitable quand la grille DF est très irrégulière comme la grille de l'énergie. Cette méthode sera utilisée pour les nouvelles grilles VF associé à l'angle d'attaque y et à la dimension radiale L^* .

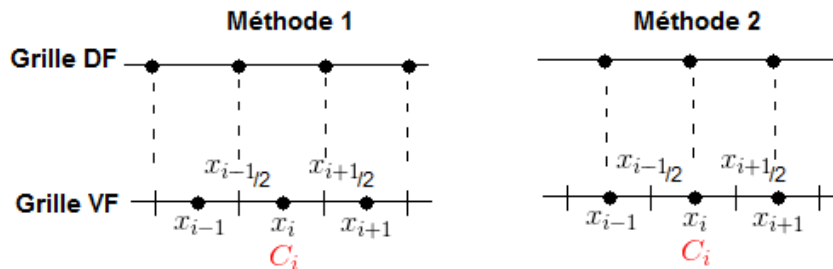


FIGURE II.11 – Illustration des deux possibilités de construction d'un maillage aux volumes finis en partant d'un maillage aux différences finies pré-établi.

II.5.3 Sélection des schémas pour l'étude numérique

Avant d'entamer le développement numérique du nouveau coeur, nous avons effectué une pré-sélection des schémas VF à tester. Parmi les schémas identifiés et présentés dans la partie II.3.2, nous avons décidé de retenir *LIN 1*, *LIN 2*, NLTPFA et NLMPFA. Bien que le schéma TPFA soit irréprochable quand le tenseur de diffusion local est diagonal, il n'est plus consistant quand la diffusion croisée est retenue sur le maillage cartésien. L'investigation bibliographique montre que le schéma MPFA n'est pas monotone même pour des ratios d'anisotropie très bas par rapport à ceux qu'on peut atteindre dans notre application, y compris sous les conditions de *Nordbotten*. En plus de cela, sa construction ne permet pas d'accéder à ses poids de discrétisation et empêche donc toute analyse théorique de sa monotonie. Les schémas non-linéaires NLTPFA et NLMPFA sont évidemment retenus du fait de leur monotonie infaillible, dont il faudra mesurer le coût sur la résolution. On retient aussi les schémas *LIN 1* et *LIN 2*, car on peut espérer obtenir leur monotonie pour notre application, grâce aux conditions de *Nordbotten*.

II.5.4 Une intégration inconditionnellement stable

Le coeur actuel de Salammbô est fortement limité dans son choix de pas de temps, à cause de sa condition de stabilité restreinte (voir I.4.2). Il semble donc évident d'adopter pour le prototype du nouveau coeur numérique, une discrétisation temporelle inconditionnellement stable. Comme le modèle d'équation de Fokker-Planck 3D est valide pour des temps d'évolution supérieurs au temps caractéristique de dérive (\sim heure), choisir des pas de temps $\Delta t \ll$ heure n'introduira pas une meilleure précision dans l'estimation du modèle physique. Ainsi, on décide d'adopter pour le nouveau coeur numérique, une intégration implicite, avec des pas de temps supérieurs à 100s. Ce choix de pas de temps devra tout de même être testé pour évaluer son effet sur la précision temporelle.

Chapitre III

Développement d'un nouveau coeur numérique pour Salammbô-Électron

III.1 Notations adoptées dans les tests numériques	82
III.2 La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte inhomogénéité	83
III.2.1 Étude comparative de la précision des méthodes DF et VF en situation de diffusion stationnaire 1D raide	83
III.2.2 Étude comparative de la gestion des conditions aux limites réalistes par les méthodes DF et VF	86
III.2.3 Étude comparative de l'effet du raffinement du maillage sur les méthodes DF et VF	87
III.2.4 Étude comparative des méthodes DF et VF sur la précision numérique en situation de diffusion analytique 2D raide	89
III.2.5 Application de la méthode VF à un problème de diffusion transitoire réelle	90
III.2.6 Conclusion	92
III.3 La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte anisotropie	92
III.3.1 Analyse de la monotonie d'un schéma VF linéaire vues par les conditions de <i>Nordbotten</i> dans le cadre diffusif réel	92
III.3.2 Construction d'un nouveau schéma non-linéaire monotone sur la base des conditions de <i>Nordbotten</i>	102
III.3.3 Études des performances des schémas non-linéaires	104
III.3.4 Application des schémas non-linéaires sur un problème de diffusion 2D réelle transitoire	112
III.3.5 Obtient-on la monotonie du schéma <i>LIN 2</i> si on généralise sa construction?	117
III.3.6 Conclusion	120
III.4 Mise en oeuvre d'un schéma numérique dédié à la diffusion radiale	122
III.4.1 Logique de discrétisation de la diffusion radiale dans le coeur numérique actuel de Salammbô	122
III.4.2 Construction et propriétés numériques du nouveau schéma radial	123
III.4.3 Application du nouveau schéma sur un problème de diffusion radiale transitoire réelle	124
III.5 Récapitulatifs des améliorations apportées par le nouveau coeur numérique à la résolution de l'équation de diffusion	125

Nous allons exposer dans ce chapitre la méthodologie suivie pour mettre en oeuvre le prototype du nouveau coeur numérique de Salammbô. Elle s'articule autour des axes de développement et d'investigation majeurs suivants :

- La gestion de la forte inhomogénéité spatiale de la diffusion par l'adoption d'une discrétisation VF conservative.
- La gestion de la forte anisotropie et la prise en compte de la diffusion croisée par l'adoption d'un schéma monotone.
- La construction d'un schéma dédié à la diffusion radiale.

Pour conduire ces investigations, nous avons mis en place ce qu'on a appelé précédemment les "cas jouets". Ils consistent en diverses configurations de tests rassemblant des tenseurs de diffusion analytiques représentatifs de la physique étudiée, ou des tenseurs réels, qui seront associés à des conditions aux limites réalistes. Ils seront présentés au fur et à mesure de ce chapitre et vont servir à la vérification numérique des schémas, à l'estimation de leur précision, leur ordre de convergence, leur représentativité physique (positivité, respect des principes du minimum et du maximum), ainsi qu'à l'estimation de leur coût computationnel. L'importance des "cas jouets" est d'autant plus capitale comme il n'existe pas d'état de référence des ceintures radiation avec lequel on pourrait réaliser un *benchmark* des schémas numériques, ni une méthodologie rigoureuse pour valider numériquement les différents codes de la littératures et estimer la "qualité" de leurs restitutions en situation réelle.

L'implémentation des tests numériques et le prototypage du nouveau coeur ont été effectués sous environnement Python et les performances de calcul sont présentées pour une machine dotée de 12 Go de RAM et un processeur de 2.6 GHz. On utilise le module *numpy* pour le calcul scientifique, le module *sympy* pour le calcul symbolique et on adopte un remplissage *sparse* des matrices de discrétisation, ce qui permet d'optimiser leurs opérations à travers les fonctions du module *scipy.sparse*. On utilise aussi le module de compilation *Numba* pour approcher les performances de calcul d'un langage compilé comme Fortran.

III.1 Notations adoptées dans les tests numériques

Tout au long des investigations numériques qui seront présentées dans ce chapitre, on adopte les notations suivantes :

- N_u , la taille du maillage (nombre de noeuds ou de cellules).
- f_{min}, f_{max} , les valeurs extrêmes de f sur le maillage du domaine Ω .
- N_{iter} , le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme de Picard pour résoudre un système d'équations non-linéaire.
- Ru , le ratio des cellules du maillage où l'approximation numérique de la solution est inférieure au minimum ou négative, qu'on appelle *undershoots*.
- Ro , le ratio des cellules du maillage où l'approximation numérique de la solution est supérieure au maximum, qu'on appelle *overshoots*.

On définit les normes discrètes suivantes :

$$\|f\|_{\infty}^D = \sup_{C \in T} |f_C| \quad (\text{III.1})$$

$$\|f\|_2^D = \sqrt{\sum_{C \in T} f_C^2 m(C)} \quad (\text{III.2})$$

sur lesquelles on se base pour définir les expressions suivantes d'erreurs en % :

$$Err_2 = 100 \times \frac{\|f - f_{ref}\|_2^D}{\|f_{ref}\|_2^D} \quad (\text{III.3})$$

$$Err_{\infty} = 100 \times \frac{\|f - f_{ref}\|_{\infty}^D}{\|f_{ref}\|_{\infty}^D} \quad (\text{III.4})$$

f_{ref} est une solution de référence. Selon les cas, elle peut être la solution exacte de l'EDP si elle est connue, la solution numérique de l'EDP sur un maillage très raffiné ou une solution analytique fixée à priori si on utilise la méthode de vérification *Method of Manufactured Solution* (MMS) de *Scholari & Mimita* [152]. Avec la méthode MMS, on choisit une solution analytique qu'on note f_{MMS} , consistante avec les conditions aux limites du problème puis on l'impose comme solution de l'EDP en construisant un terme source analytique à partir des expressions analytiques de f_{MMS} et des coefficients de diffusion.

III.2 La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte inhomogénéité

L'objectif de cette section consiste à évaluer l'apport de la méthode VF sur la gestion de la forte inhomogénéité observée dans la diffusion locale. En premier lieu, on va comparer sur des problèmes de diffusion stationnaires 1D, l'approximation numérique d'un schéma linéaire VF avec celle d'un schéma DF centré. On verra en particulier, l'impact que peut avoir la forme des coefficients de diffusion (analytiques réguliers, raides et réels) sur la précision des schémas et sur la prise en compte des conditions aux limites. On évaluera par la suite l'impact du raffinement du maillage sur la solution numérique des deux méthodes sur des grilles en angle d'attaque et en énergie de Salammbô. Enfin, cette première investigation sera conclue par l'étude numérique d'une résolution 2D transitoire en condition de physique réelle.

III.2.1 Étude comparative de la précision des méthodes DF et VF en situation de diffusion stationnaire 1D raide

On entame cette première étude par une comparaison des schémas *LIN 1* et DF centré, sur un problème de diffusion stationnaire 1D défini sur $\Omega =]0, 1[$, discrétisé sur un maillage uniforme, pour un coefficient de diffusion gaussien et des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes :

$$D_{xx} = 100 \exp(-20(x - 0.5)^2) \quad (\text{III.5})$$

Grâce à la méthode MMS, on fixe la fonction suivante comme solution de l'équation de diffusion :

$$f_{MMS} = \sin(\pi x)^2 \quad (\text{III.6})$$

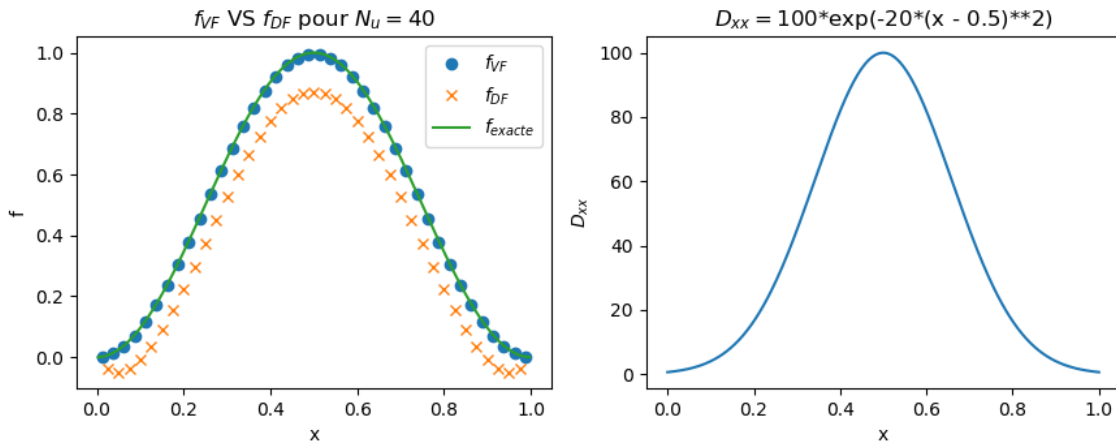


FIGURE III.1 – À gauche : Approximations VF *LIN 1* et DF de $f_{MMS} = \sin(\pi x)^2$ pour $N_u = 40$. À droite : Coefficient de diffusion $D_{xx} = 100 \exp(-20(x - 0.5)^2)$.

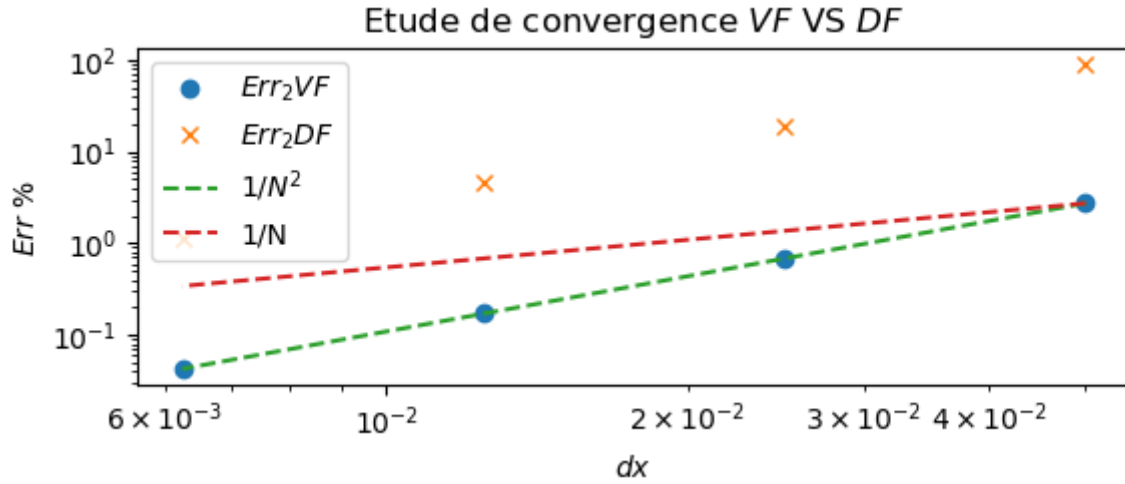


FIGURE III.2 – Étude de convergence des schémas VF *LIN 1* et DF pour $f_{MMS} = \sin(\pi x)^2$ et $D_{xx} = 100 \exp(-20(x - 0.5)^2)$.

Comme l'atteste la figure III.1, la solution numérique VF approche mieux la solution exacte que la solution numérique DF. Cette dernière sous-estime la solution exacte et fait même apparaître des valeurs négatives au voisinage des bords du domaine. L'étude de convergence rapportée dans la figure III.2 confirme le second ordre de convergence des deux schémas. Elle montre aussi que le schéma *LIN 1* est pratiquement 25 fois plus précis dans ce test que le schéma DF.

Tout en restant sur le même domaine Ω , avec les mêmes conditions aux limites, on teste maintenant le schéma *LIN 2* et le schéma DF dans le cas d'un coefficient de diffusion constant par morceaux. Ce choix contraignant permet de simuler une résonance très aiguë, non résolue par le maillage. On adopte pour ce nouveau test numérique, un coefficient de diffusion en créneau centré en 0.5 avec un saut de 1 à 10^7 , représentant le saut maximal que peut faire un coefficient de diffusion dans le cas réel (voir figure III.3). f_{ref} est la solution numérique évaluée sur un maillage très raffiné ($N_u = 2000$).

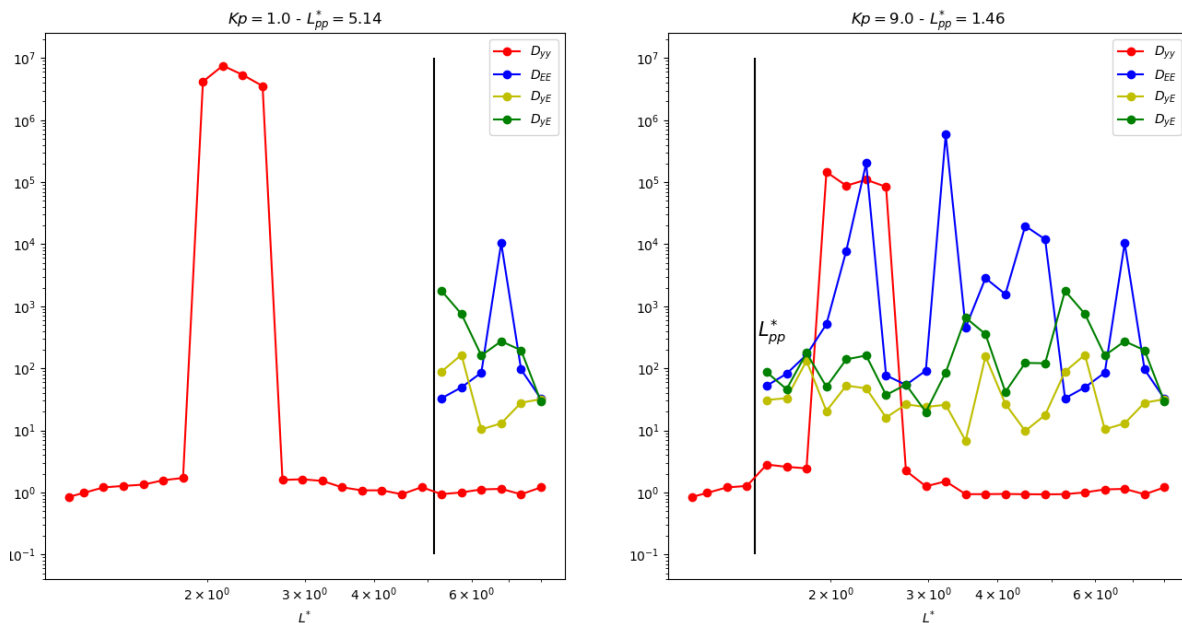


FIGURE III.3 – Évolution radiale des valeurs maximales des sauts de coefficients du tenseur de diffusion réel effectif adimensionné, dans leurs directions de diffusion respectives pour un étalement de la plasmasphère maximal (à gauche) et minimal (à droite).

La figure III.4 montre que le schéma DF n'arrive pas du tout à gérer la forte discontinuité de D_{xx} . Le schéma VF en revanche, reconstruit bien le plateau central dû au grand saut de D_{xx} . L'étude de convergence présentée dans la figure III.5 montre que le schéma VF conserve son second ordre avec une erreur numérique Err_2 inférieure à 0.1% pour $N_u = 40$, alors que la convergence du schéma DF est rétrogradé à l'ordre 1 avec une erreur numérique supérieure à 1% même pour $N_u = 160$.

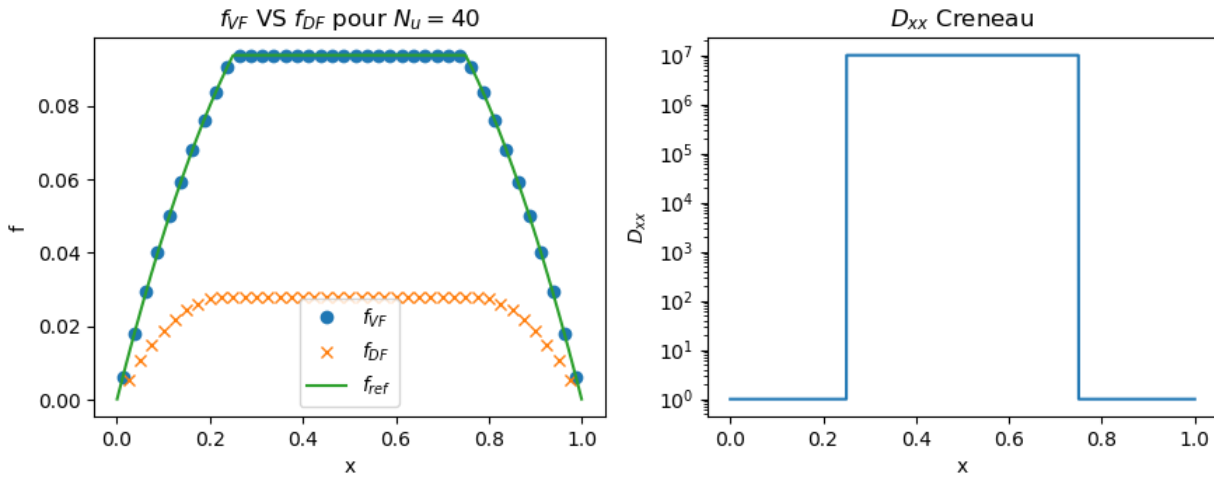


FIGURE III.4 – À gauche : Approximations VF $LIN\ 2$ et DF pour $N_u = 40$. f_{ref} est la solution numérique évaluée sur un maillage très raffiné ($N_u = 2000$). À droite : Coefficient de diffusion en forme de créneau.

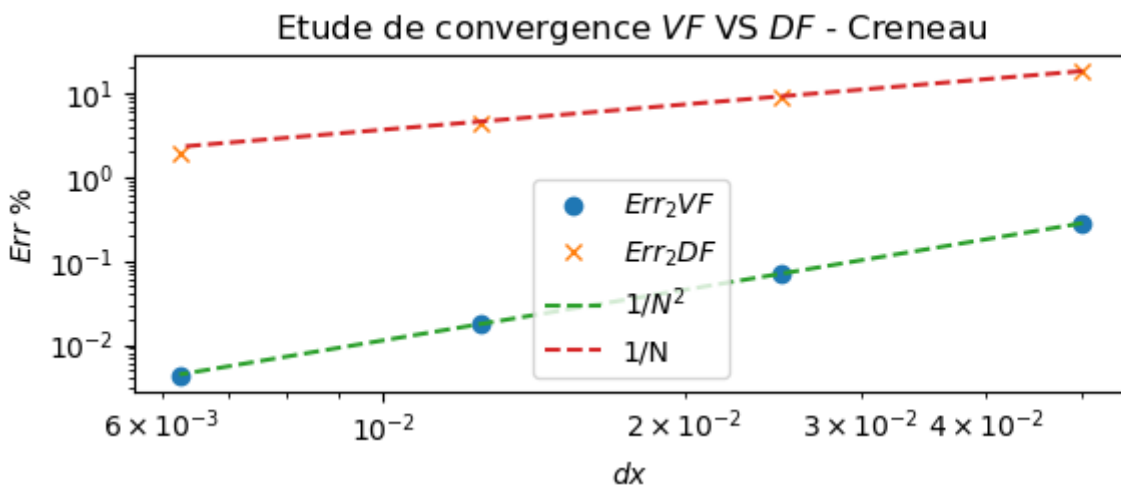


FIGURE III.5 – Étude de convergence des schémas VF $LIN\ 2$ et DF dans le cas du coefficient en forme de créneau. f_{ref} est la solution numérique évaluée sur un maillage très raffiné ($N_u = 2000$).

Avec cette première série de tests simples, on constate rapidement l'apport bénéfique de la méthode VF sur la précision de l'approximation numérique en situation de diffusion raide réaliste. Étant donné que l'inhomogénéité des coefficients est observable aussi au bord du domaine, on va étudier dans la partie suivante, le comportement de la méthode vis-à-vis de la gestion des conditions aux limites.

III.2.2 Étude comparative de la gestion des conditions aux limites réalistes par les méthodes DF et VF

Dans un premier temps, on reconstitue sur le domaine unitaire Ω , une configuration de diffusion 1D stationnaire similaire à celle observée dans la diffusion en angle d'attaque : une condition de Dirichlet homogène en $x = 0$ et une condition de Neumann homogène en $x = 1$ au voisinage de laquelle le coefficient de diffusion baisse fortement (gaussienne tronquée et renversée) :

$$D_{xx} = 1 + 10(1 - \exp(-30(x - 1.1)^2)) \quad (\text{III.7})$$

et on compare dans la figure III.6 les approximations numériques des schémas *LIN 2* et DF.

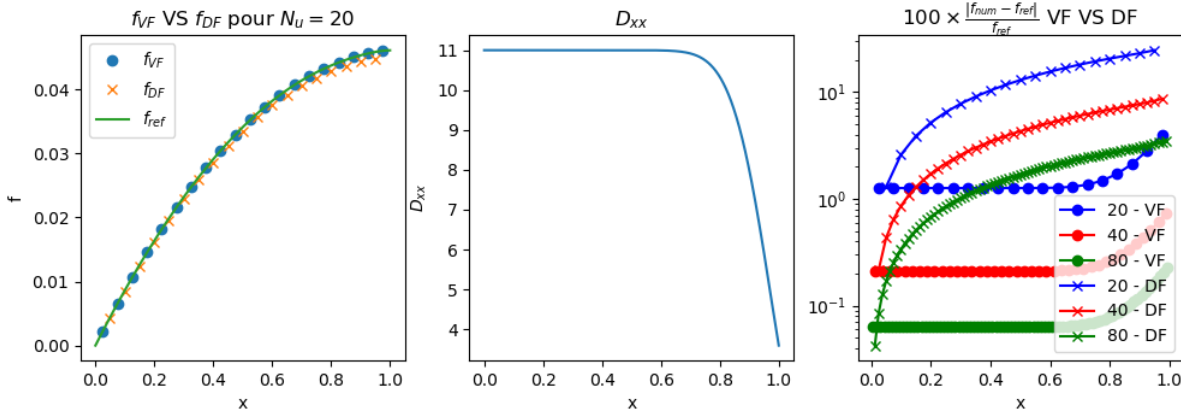


FIGURE III.6 – À gauche : Approximations VF *LIN 2* et DF pour $N_u = 20$. f_{ref} est la solution numérique évaluée sur un maillage très raffiné ($N_u = 2000$). Au centre : Coefficient de diffusion raide au bord. À droite : Erreur numérique relative pour différents raffinements du maillage dans le cas d'une condition aux limite de Neumann homogène en $x = 1$.

La partie gauche de la figure III.6 montre que le schéma DF sous-estime la solution proche du bord du domaine où s'applique la condition de Neumann. Cela se voit sur le profil d'erreur relative $Err = \frac{|f_{num} - f_{ref}|}{f_{ref}}$ en % représentée dans la partie de droite de la même figure, qui est maximale pour le schéma DF en $x = 1$. Cette erreur se propage ensuite à l'intérieur du domaine, accentuée par le gradient fort de D_{xx} . Le schéma VF de son côté présente une erreur relative moindre, qui s'atténue plus rapidement et finit par se caler au niveau d'erreur de la condition de Dirichlet.

On reconstitue maintenant une configuration de diffusion similaire à la diffusion en énergie en fixant deux conditions de Dirichlet : $\bar{f} = 1$ en $x = 0$ et $\bar{f} = 0$ en $x = 1$ avec un coefficient qui augmente rapidement au bord $x = 1$ (gaussienne tronquée) :

$$D_{xx} = 1 + 10 \exp(-30(x - 1.1)^2) \quad (\text{III.8})$$

Les résultats du test présentés dans la figure III.7 montrent une fois de plus que le maximum d'erreur de la méthode DF se situe au niveau du maximum du gradient de D_{xx} . En revanche, le schéma VF n'est pas très impacté par ce gradient fort du coefficient.

On peut donc, avec les tests précédents, valider l'intérêt de la méthode VF pour la résolution d'un problème de diffusion raide avec une évolution localisée au bord. Jusqu'à présent, on s'est limité dans les tests présentés à des "cas jouets" analytiques sur maillage uniforme. On va considérer dans la partie suivante, des tests numériques sur le maillage irrégulier de Salammbô avec des coefficients de diffusion 1D réels. On cherchera en particulier, à mesurer l'impact du type de raffinement du maillage sur la précision de la résolution.

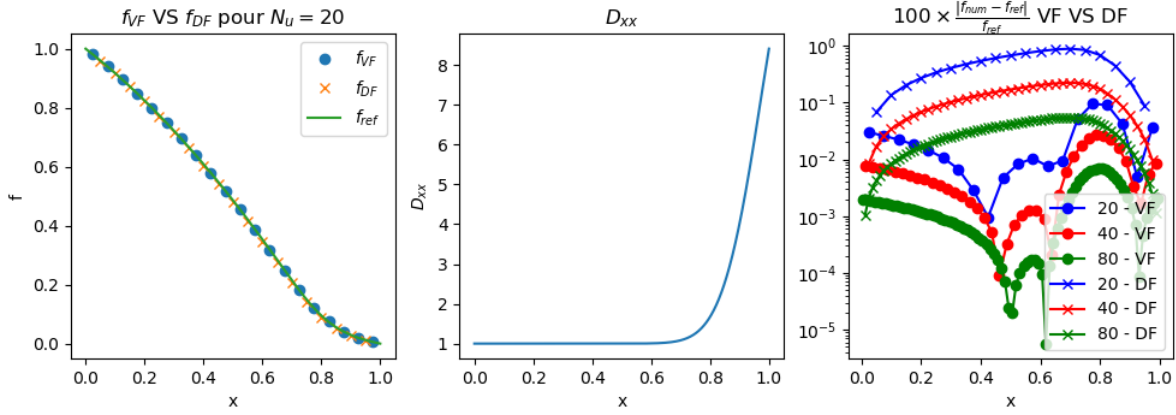


FIGURE III.7 – À gauche : Approximations VF $LIN\ 2$ et DF pour $N_u = 20$. f_{ref} est la solution numérique évaluée sur un maillage très raffiné ($N_u = 2000$). Au centre : coefficient de diffusion raide. À droite : Erreur numérique relative pour différents raffinements du maillage dans le cas d’une condition aux limites de Dirichlet homogène en $x = 1$.

III.2.3 Étude comparative de l’effet du raffinement du maillage sur les méthodes DF et VF

Pour les deux tests suivants, on va travailler avec les deux raffinements de grilles en angle d’attaque et en énergie de Salammbô, définis au plan $L^* = 4.49$ (voir figure I.26). Le domaine 1D Ω sera successivement assimilé au :

- Domaine de résolution en angle d’attaque, pris à $L^* = 4.49$ et $E = 0.0016\text{MeV}$ pour simuler une diffusion 1D en angle d’attaque.
- Domaine de résolution en énergie, pris à $L^* = 4.49$ et $y = 0.3391$ pour simuler une diffusion 1D en énergie.

Les coefficients de diffusion utilisés dans les deux tests sont représentés dans la figure III.8 et on impose aux bords du domaine Ω , les conditions aux limites réalistes adoptées dans la partie III.2.2. Pour chacune de ces deux configurations de diffusion, et grâce au deux raffinement de grille de Salammbô (grille réduite et complète), on réalise une étude de convergence des schémas $LIN\ 2$ et DF.

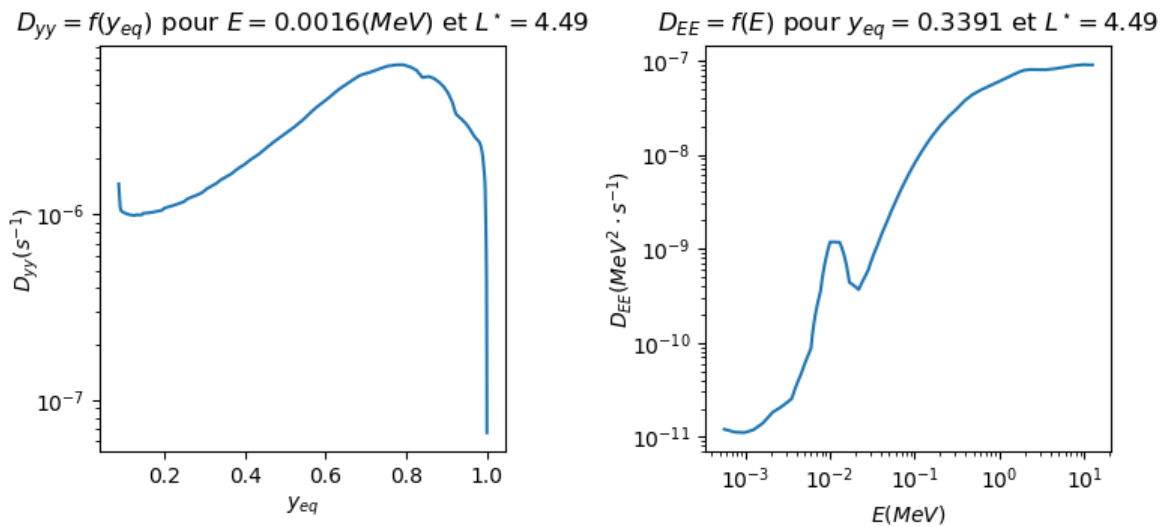


FIGURE III.8 – À gauche : Évolution en fonction de l’angle d’attaque du coefficient de diffusion D_{yy} utilisé dans le test relatif à la grille en angle d’attaque de Salammbô. À droite : Évolution en fonction de l’énergie du coefficient de diffusion D_{EE} utilisé dans le test relatif à la grille en énergie de Salammbô.

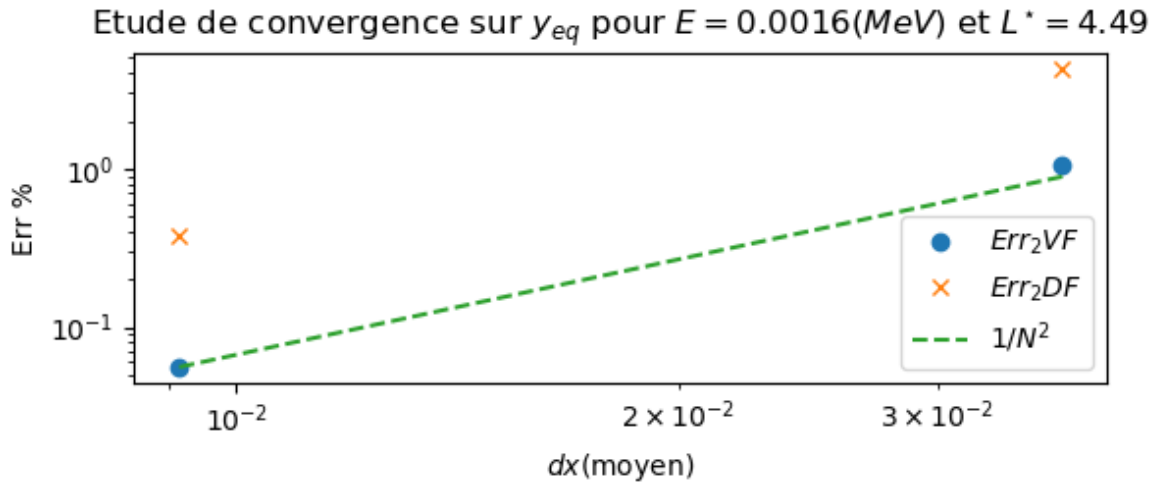


FIGURE III.9 – Étude de convergence des schémas VF *LIN 2* et DF dans le cas d’une diffusion 1D en angle d’attaque sur les deux raffinements de grille de Salammbô.

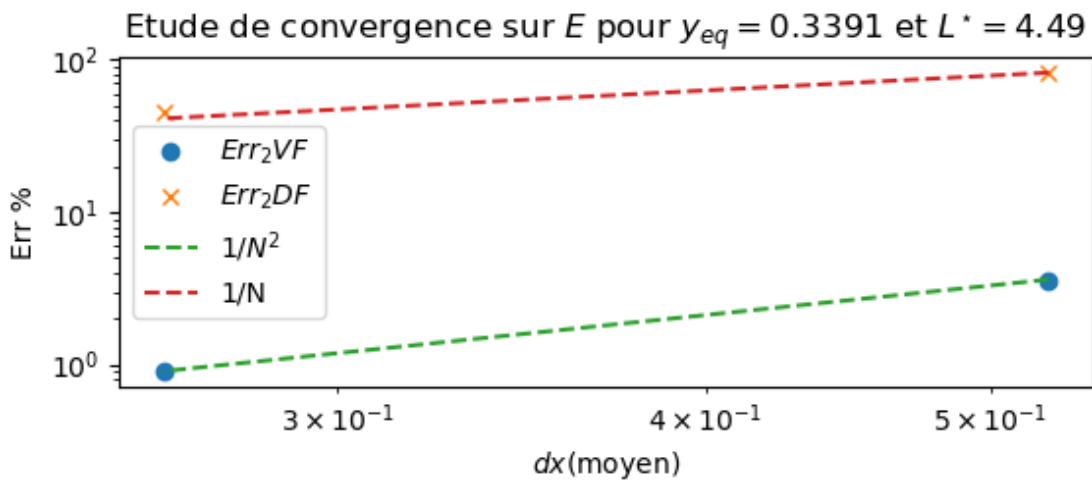


FIGURE III.10 – Étude de convergence des schémas VF *LIN 2* et DF dans le cas d’une diffusion 1D en énergie sur les deux raffinements de grille de Salammbô.

Les figures III.9 et III.10, montrent une conservation du second ordre de convergence spatiale par le schéma VF entre deux raffinements de grille de Salammbô. L’ordre du schéma DF tombe à l’ordre 1 pour la diffusion énergie. On pourra de ce fait mieux justifier le coût supplémentaire en temps de calcul d’un raffinement de grille.

On représente dans la figure III.11 les approximations VF et DF sur les deux raffinements de grille de Salammbô du problème de diffusion en énergie. On observe en particulier la rupture du profil de l’approximation DF au voisinage du pic de D_{EE} à $E = 10^{-2}$ MeV, ce qui, par analogie avec le test du coefficient de diffusion en créneau, explique la perte de l’ordre 2. On voit aussi que la solution du schéma DF perd sa positivité avec la grille réduite. Le schéma VF en revanche n’est pas du tout affecté par le saut du coefficient et approche bien la solution de référence avec les deux raffinements de grille.

Ainsi, on a montré grâce à ces nouveaux tests numériques, une excellente adaptation de la méthode VF au maillage irrégulier de Salammbô ainsi qu’au changement d’échelle de son raffinement. Ayant bien exploré les différentes facettes du problème diffusif 1D, on peut passer maintenant à l’étude de problèmes diffusifs 2D.

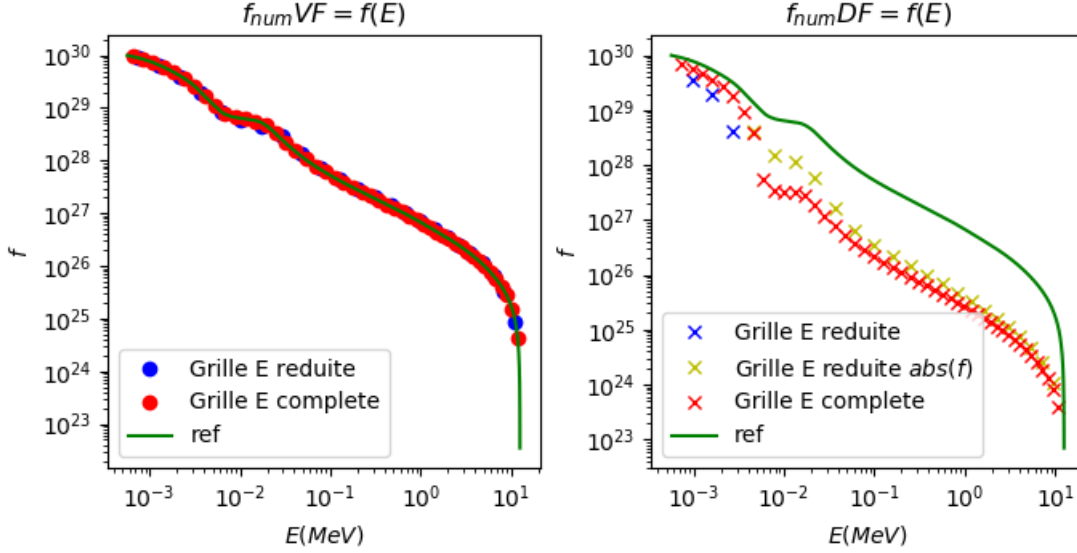


FIGURE III.11 – Approximations VF *LIN 2* (à gauche) et DF (à droite) pour une diffusion 1D en énergie avec la grille réduite et la grille complète de Salammbô. f_{ref} est la solution numérique évaluée un maillage très raffiné ($N_u = 6144$).

III.2.4 Étude comparative des méthodes DF et VF sur la précision numérique en situation de diffusion analytique 2D raide

On considère maintenant un domaine 2D $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ sur lequel on réalise l'étude de convergence des schémas VF *LIN 1*, *LIN 2* et du schéma DF, par la méthode MMS en utilisant le tenseur de diffusion analytique diagonal :

$$\begin{aligned} D_{xx} &= 1 + 10^3(1 - \exp(-(x-1)^2)) \\ D_{yy} &= 1 + 10^3 \exp(-100(y-1)^2) \\ D_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

On impose la solution analytique suivante :

$$f_{MMS} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (\text{III.10})$$

L'étude de convergence est pertinente avec ce tenseur car comme le montre la figure III.12, il simule différents aspects de l'évolution spatiale du tenseur réel : une chute brutale de la diffusion en angle d'attaque proche de l'équateur, et la hausse rapide du coefficient de diffusion en énergie à E_{max} .

La figure III.12 montre que *LIN 1* et *LIN 2* ont une erreur environ 100 fois plus petite que celle du schéma DF, avec un léger avantage pour le schéma *LIN 1*. Ce dernier schéma sera donc adopté dans le prototype du nouveau coeur numérique pour une résolution sans diffusion croisée, ou quand on résout l'équation de diffusion locale au niveau des plans L^* situés dans la plasmasphère (là où il n'y a qu'une diffusion en angle d'attaque).

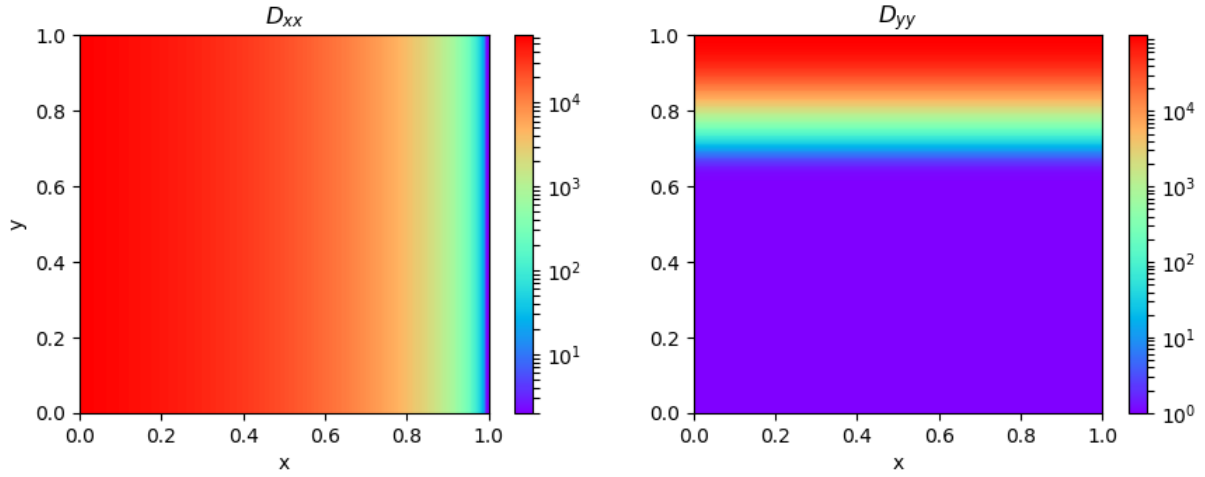


FIGURE III.12 – Tenseur de diffusion 2D analytique fortement inhomogène utilisé dans la comparaison des schéma VF *LIN 1*, *LIN 2* et le schéma DF.

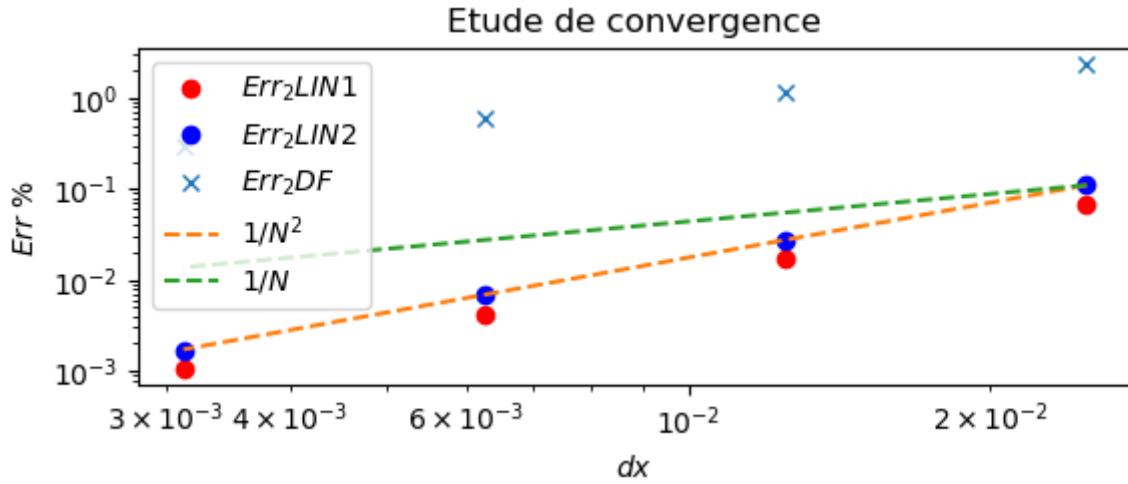


FIGURE III.13 – Étude de convergence des schémas VF *LIN 1*, *LIN 2* et du schéma DF centré pour le problème de diffusion 2D avec un tenseur analytique fortement inhomogène.

III.2.5 Application de la méthode VF à un problème de diffusion transitoire réelle

On finit cette étude relative au traitement de l'inhomogénéité en considérant une configuration de diffusion 2D transitoire réelle associée au tenseur diagonal pris à $L^* = 4.49$ (qu'on représente dans la figure III.14). On cherche à travers ce test, à comparer d'un point de vue numérique l'approximation du coeur actuel de Salammbô à celle du schéma *LIN 1* couplé à une intégration Euler implicite ($\Delta t = 100s$) sur une simulation de $90000s$ (\approx un jour, temps caractéristique d'un orage magnétique), en partant d'un état de ceinture rempli uniformément à $10^{30}[\text{MeV}^{-1} \text{s}^{-3}]$ et en imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(E_{min}) &= 0 \\
 f(E_{max}) &= 0 \\
 f(y_{min}) &= 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=1} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III.11}$$

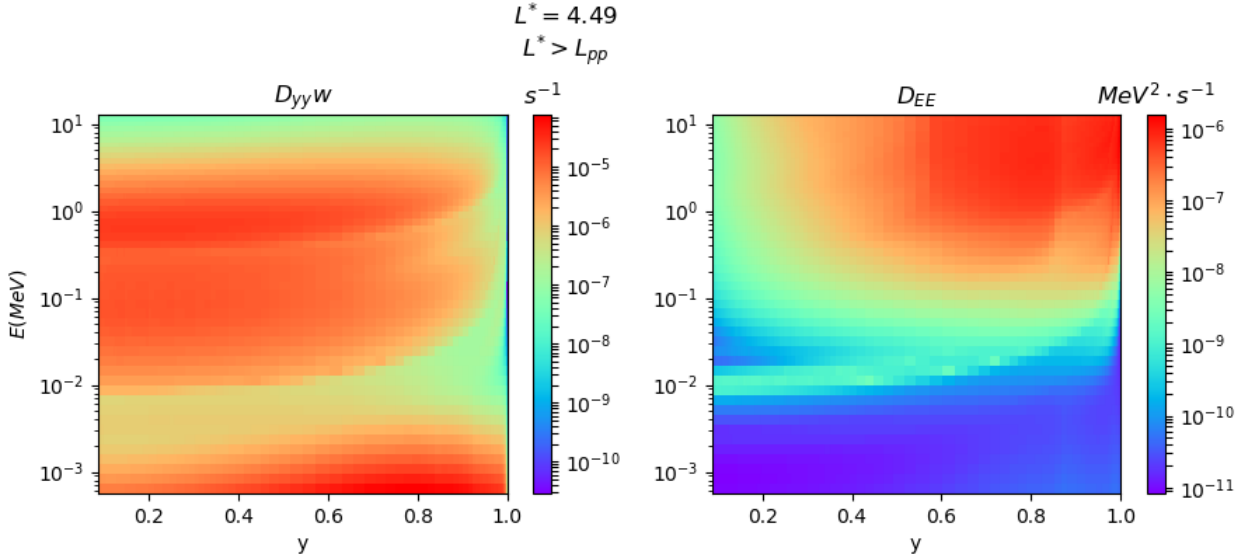


FIGURE III.14 – Tenseur de diffusion 2D réel diagonal pour le plan $L^* = 4.49$.

L'analyse de la simulation d'un point de vue physique n'a pas beaucoup d'intérêt (Kp constant, initialisation uniforme, diffusion radiale inexistante). En revanche, on peut tout de même voir que le profil de la solution VF à la fin de la simulation représenté dans la partie gauche de la figure III.15, est cohérent avec le profil des coefficients de diffusion. Les minimums locaux de la solution au voisinage de 1 MeV et 100 keV sont confondus avec les régions où D_{yy} est fort. Plus on s'approche de la limite basse en y et plus le gradient le long de y est intense.

Maintenant, si on regarde le ratio des solutions VF et DF représenté dans la partie droite de la figure III.15), on s'aperçoit qu'il est globalement proche de 1. Il peut descendre jusqu'à 0.957 au voisinage du creux de la fonction observée autour de 1 MeV. Par contre, il atteint une valeur maximale de 1.429 vers $E = 10^{-2} MeV$, à cause de la forte raideur de D_{yy} et D_{EE} au voisinage de cette énergie, ce qui va dégrader l'approximation du schéma DF.

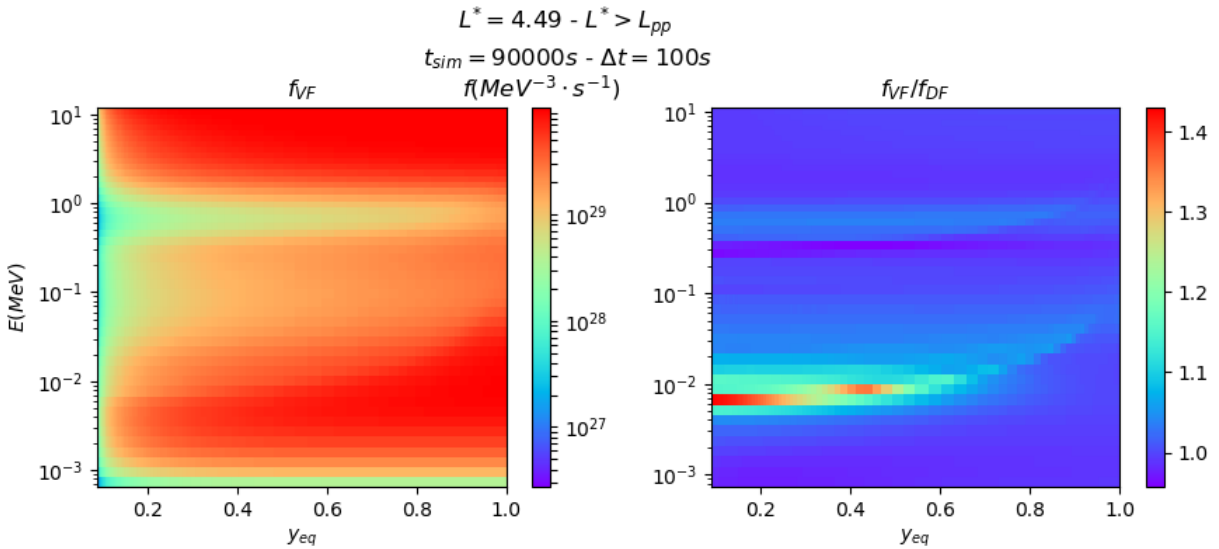


FIGURE III.15 – À gauche : Distribution 2D de la solution VF *LIN 1* du problème de diffusion 2D transitoire à $t_{simu} = 90000s$ pour le tenseur de diffusion réel pris à $L^* = 4.49$. À droite : Ratio de la solution numérique VF sur la solution numérique DF.

III.2.6 Conclusion

En conclusion, on a pu constater à travers les divers cas tests analytiques et réels présentés dans cette investigation, que le basculement vers la méthode volumes finis permettait une mise à niveau remarquable de la qualité de l'approximation numérique. En particulier, le schéma VF permet d'apporter des niveaux de précision meilleurs que ceux obtenus par le schéma DF tout en limitant l'impact numérique de l'évolution spatiale raide des coefficients. En plus, il permet de mieux ancrer l'effet d'un raffinement de maillage sur la précision numérique. Reste maintenant à tester son comportement face à la forte anisotropie du tenseur de diffusion réel, et voir si on peut remédier à la perte de la monotonie quand la diffusion croisée est retenue.

III.3 La méthode des volumes finis comme alternative pour le traitement de la forte anisotropie

Nous allons dans cette section, mettre à l'épreuve la méthode des volumes finis face à la forte anisotropie observée dans la diffusion locale. Comme mentionné précédemment, un fort ratio d'anisotropie est responsable de la perte de monotonie des schémas numériques. De plus, dans le cas d'un maillage cartésien, la contrainte d'anisotropie se réduit à la présence de la diffusion croisée dans la discrétisation. En particulier, quand la diffusion croisée est non nulle, les schémas VF linéaires qu'on a présentés, perdent leur structure M -matrice. Partant du caractère général des conditions de monotonie de *Nordbotten*, on va chercher à identifier les contraintes empêchant l'établissement de la propriété de la monotonie dans notre cadre diffusif particulier. Les conclusions de cette étude permettront l'élaboration d'un nouveau schéma VF non-linéaire nommé NLMONOT, dont la construction diffère de celle des schémas non-linéaires NLTPFA et NLMPPFA. Ensuite, on cherchera à évaluer les performances numériques des 3 schémas non-linéaires précédents sur une série de "cas jouets" relatifs à l'anisotropie. On veillera en particulier à mesurer le coût en temps de calcul introduit par la résolution non-linéaire, nécessaire pour conserver la représentativité physique de la solution numérique. Enfin, on terminera cette étude par l'exploration d'une éventuelle construction d'un schéma VF qui soit à la fois linéaire et monotone.

III.3.1 Analyse de la monotonie d'un schéma VF linéaire vues par les conditions de *Nordbotten* dans le cadre diffusif réel

III.3.1.1 Sélection du schéma VF linéaire à étudier

Nous avons décidé de réaliser l'analyse de monotonie sur le schéma VF linéaire le plus robuste parmi *LIN 1* et *LIN 2* quand la diffusion croisée est non nulle. Pour cela, on évalue pour chacun de ces deux schémas, en situation de diffusion transitoire réelle 2D (tenseur complet) et en parcourant tous les plans L^* , le temps de calcul maximal avant la perte de la positivité de la solution numérique.

La figure III.16 montre une forte disparité de t_{simu} en fonction des plans L^* . Cette dernière est fortement réduite au niveau des plans L^* où la diffusion croisée est la plus intense. La figure montre aussi que *LIN 2* est légèrement plus robuste que *LIN 1*. Cette meilleure performance provient de sa construction plus proche d'une structure M -matrice que le schéma *LIN 1*. La meilleure robustesse du schéma *LIN 2* est confirmée dans la figure III.17 qui rapporte le pourcentage de cellules du maillage vérifiant les conditions de *Nordbotten*, sur chaque plan L^* . Néanmoins, les deux schémas présentent des pourcentages très faibles (au maximum 3%), évoquant la forte contrainte imposée par la diffusion locale sur la monotonie.

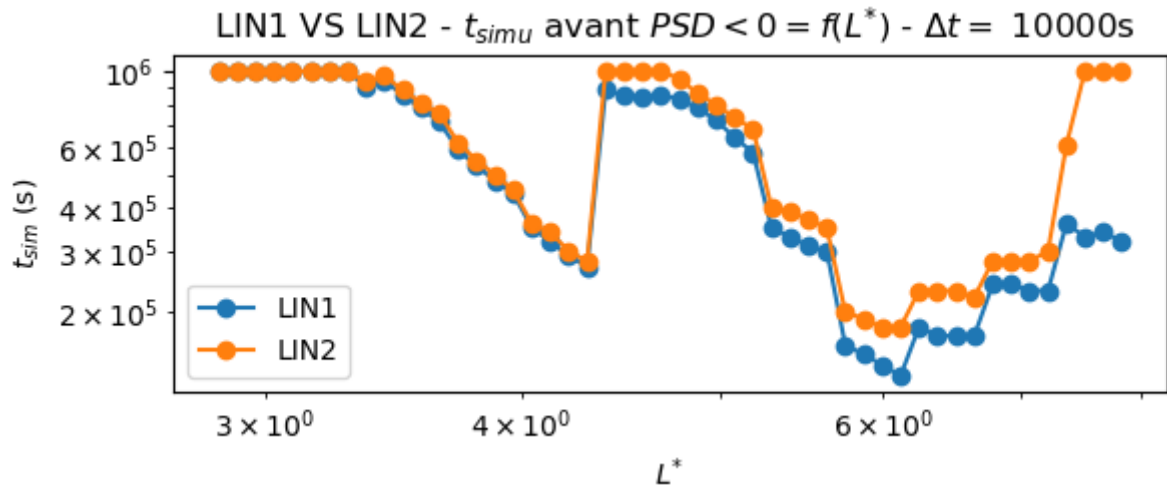


FIGURE III.16 – Temps de calcul maximal avant l'apparition des valeurs négatives de la solution numérique, pour les schémas VF *LIN1* et *LIN2*, sur chaque plan L^* , avec $\Delta t = 10000s$ (on fixe le temps de simulation maximal à 10^6s).

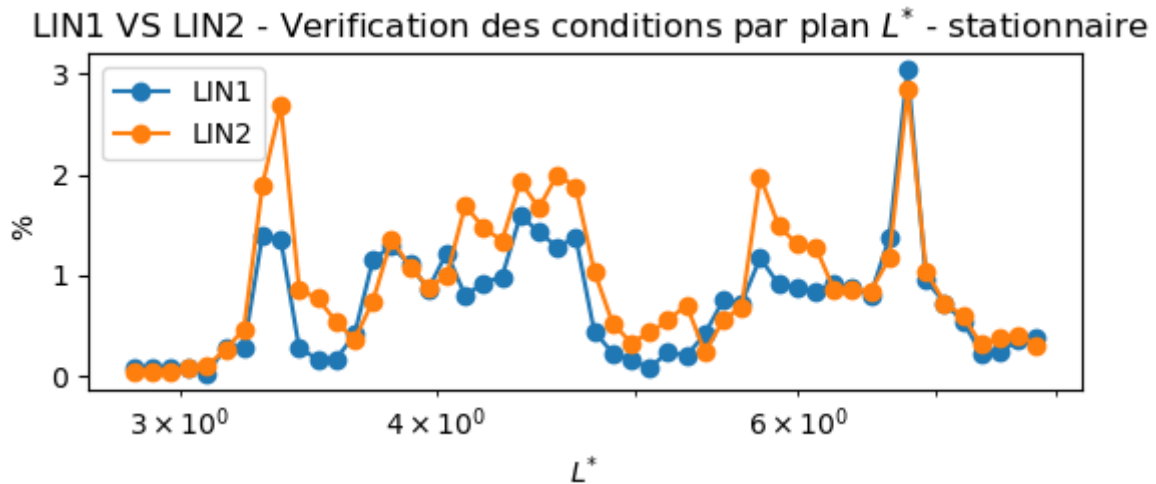


FIGURE III.17 – Pourcentages des cellules du maillage respectant toutes les conditions de *Nordbotten* pour les schémas VF, *LIN 1* et *LIN 2*, sur chaque plan L^* et dans le cas d'une diffusion réelle stationnaire.

III.3.1.2 Étude de sensibilité des conditions de *Nordbotten* vis-à-vis des paramètres de la résolution numérique et de la diffusion

La première étape de l'analyse consiste à isoler finement les principaux facteurs responsables du non-respect des conditions de *Nordbotten* par le schéma *LIN 2*. Pour cela, nous allons explorer l'effet des paramètres de la résolution numérique (raffinement spatial et temporel) ainsi que celui de l'intensité de la diffusion.

Mesure de l'effet du raffinement du maillage spatio-temporel : De la même manière que dans le test précédent, on estime le pourcentage de validation des conditions de *Nordbotten* par la matrice de discrétisation du schéma *LIN 2* (intégration Euler implicite) pour différents Δt . Les courbes de la figure III.18 montrent que le raffinement du pas de temps a un effet dégradant sur le pourcentage de validation des conditions. Cela confirme encore une fois, l'inefficacité de l'intégration temporelle comme paramètre permettant de remédier à la perte de la monotonie.

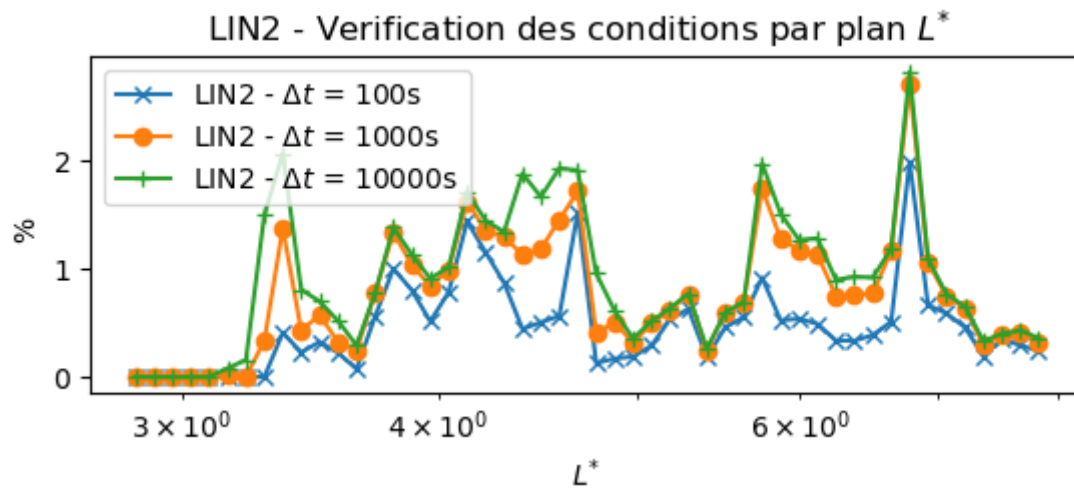


FIGURE III.18 – Pourcentages des cellules du maillage respectant toutes les conditions de *Nordbotten* [141] pour le schéma VF *LIN 2*, sur chaque plan L^* et dans le cas d’une diffusion transitoire.

On passe maintenant à un test relatif à l’effet de la résolution du maillage spatial. La figure III.19 montre qu’un maillage grossier améliore légèrement le respect des conditions par rapport à un maillage fin, tout en restant à des niveaux de pourcentages très faibles. Par conséquent, les deux tests précédents réfutent totalement le rôle du raffinement spatio-temporel dans le contrôle des artefacts numériques issus de la perte de la monotonie. Il faut donc chercher du côté du tenseur de diffusion.

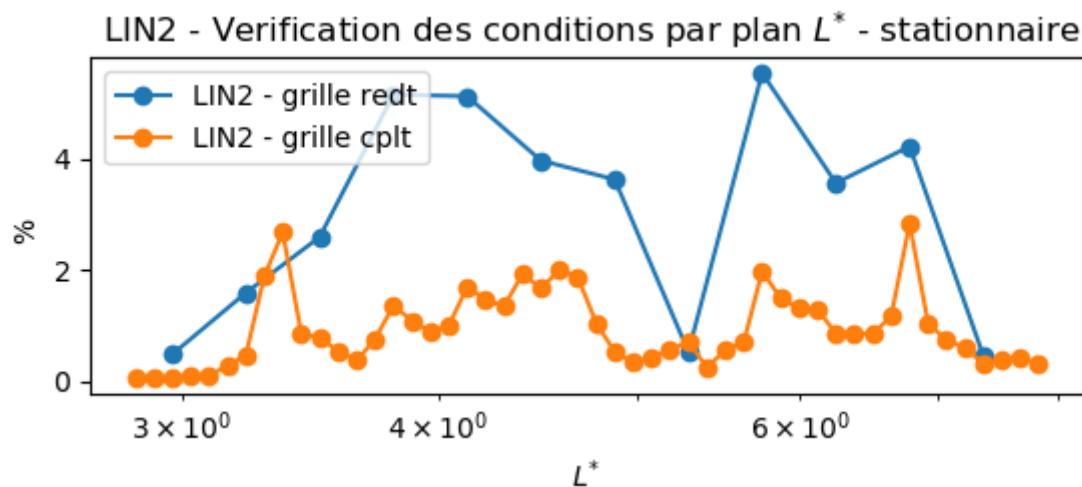


FIGURE III.19 – Pourcentages des cellules du maillage respectant toutes les conditions de *Nordbotten* [141] pour le schéma VF *LIN 2* pour chaque plan L^* dans le cas d’une diffusion stationnaire évaluée sur la grille réduite et la grille complète.

Mesure de l’effet du tenseur de diffusion : Dans un premier temps, on réduit l’intensité de D_{yE} d’un facteur 10 et 100 dans le tenseur réel, et on rapporte dans la figure III.20 les nouveaux pourcentages de validation des conditions.

Contrairement aux tests précédents, l’amélioration du pourcentage de validation des conditions est plus conséquente. Cependant, même avec une réduction d’un facteur 100 de D_{yE} , on est encore loin d’une validation de la monotonie totale sur tous les plans L^* .

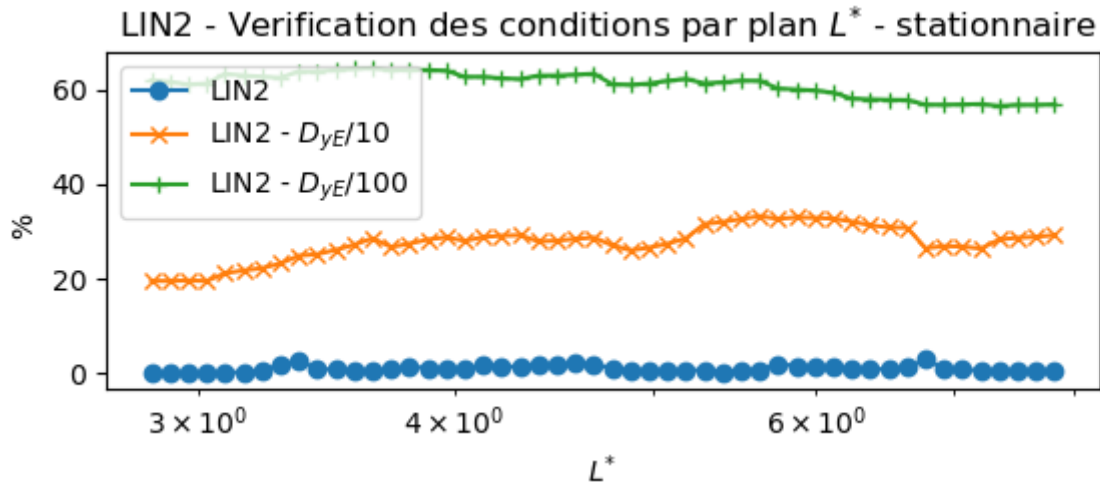


FIGURE III.20 – Pourcentages des cellules du maillage respectant toutes les conditions de *Nordbotten* [141] pour le schéma VF *LIN 2*, sur chaque plan L^* , dans le cas d’une diffusion stationnaire et selon l’intensité de D_{yE} .

Le même test de sensibilité est reproduit en modifiant l’intensité de D_{yy} et D_{EE} . La figure III.21 montre que si D_{yy} est amplifiée d’un facteur 10, aucun changement n’est observé par rapport à la situation diffusive normale. On explique cela par la domination de D_{yy} des coefficients D_{EE} et D_{yE} sur une grand pan du domaine de résolution (y, E). Ainsi, les cellules qui n’assurent pas la monotonie par les conditions de *Nordbotten* à cause de cette domination, ne verront pas leurs états basculer quand D_{yy} est amplifiée. En revanche, quand D_{EE} est renforcée, on remarque un apport notable sur la robustesse du schéma. Ainsi, grâce aux deux tests précédent, on peut conclure que la validation des conditions de *Nordbotten* par *LIN 2* dans le cas de la diffusion réelle, est principalement lié à la balance entre D_{yE} et D_{EE} par rapport à D_{yy} .

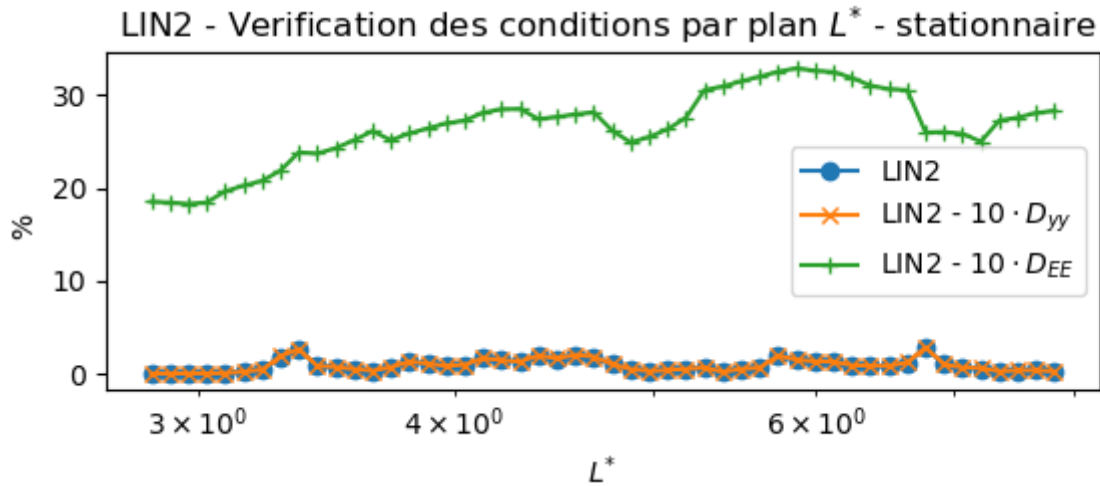


FIGURE III.21 – Pourcentages des cellules du maillage respectant toutes les conditions de *Nordbotten* pour le schéma VF *LIN 2*, sur chaque plan L^* , dans le cas d’une diffusion stationnaire et selon l’intensité de D_{yy} et D_{EE} .

Sensibilité individuelle des conditions : On s'est basé dans les tests précédents sur la vérification de toutes les conditions de *Nordbotten*. Mais on doit bien se douter de l'existence d'un contraste dans la validation individuelle des conditions. On trace donc dans la figure III.22 pour chacune des 10 conditions, le pourcentage des cellules du maillage la respectant individuellement.

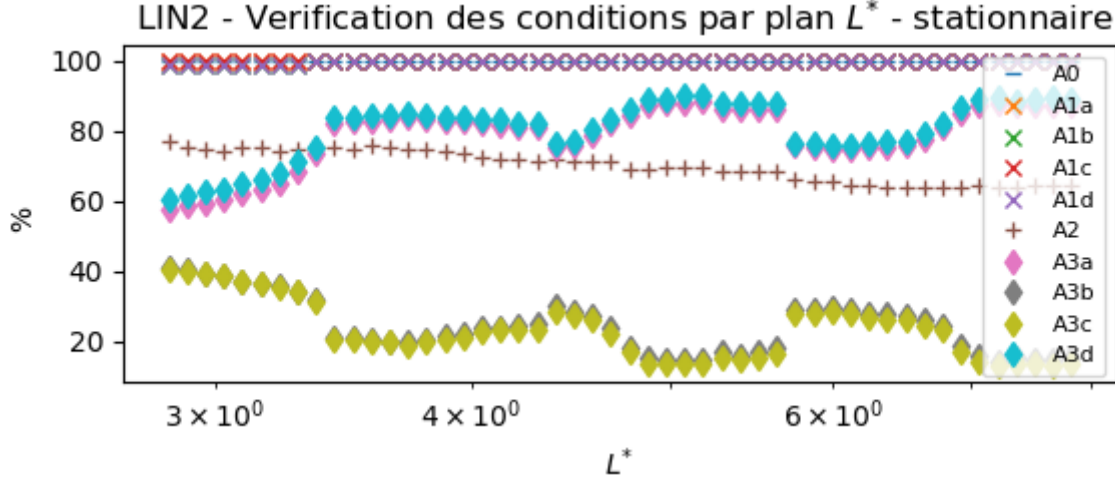


FIGURE III.22 – Pourcentages des cellules du maillage respectant individuellement chacune des conditions de *Nordbotten* [141] pour le schéma VF *LIN 2* pour chaque plan L^* dans le cas d'une diffusion stationnaire

Il se trouve que les conditions **A0**, **A1** sont valides pour l'écrasante majorité des cellules du maillage et sur tous les plans L^* . A moindre mesure, la condition **A2** est valide pour au moins 70% des cellules. En revanche, ce sont les conditions **A3** qui sont les moins respectées (en particulier **A3b** et **A3c**) et qui vont forcément imposer les faibles pourcentages de validation observées précédemment. De plus, on remarque une symétrie dans l'évolution de **A3b** avec **A3c** et **A3a** avec **A3d**.

$$m_2^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_3^{i,j-1} m_8^{i,j} < 0 \quad (\text{A3a})$$

$$m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3b})$$

$$m_2^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_9^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3c})$$

$$m_6^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_7^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3d})$$

Cartographie 2D de la validité des conditions : Afin d'affiner spatialement l'exploration des conditions de *Nordbotten*, on décide de se défaire de l'estimation du pourcentage de cellules validant les conditions sur chaque plan L^* et de s'intéresser à leur cartographie sur le domaine (y, E) . La figure III.23 présente la dispersion spatiale sur trois plans L^* des cellules validant toutes les conditions.

Catographie de validation des conditions pour 3 plans L^* – stationnaire

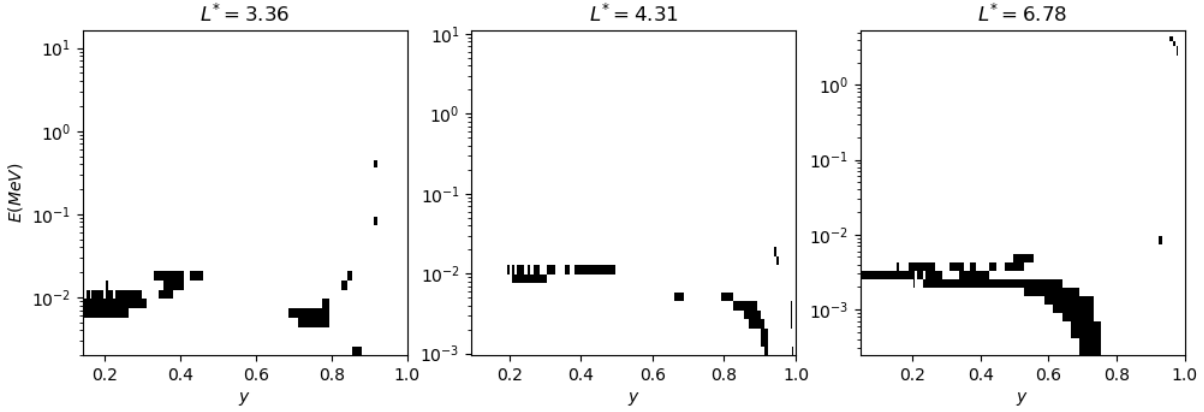


FIGURE III.23 – Cartographie sur le domaine 2D (y, E) des cellules respectant les conditions de *Nordbotten* (en noir) pour le schéma *LIN 2*, sur 3 plans L^* .

Il s'avère que les cellules qui valident toutes les conditions sont localisées à la frontière séparant les zones où $D_{yE} \geq 0$ ou $D_{yE} < 0$. A cet endroit, D_{yE} est proche de zéro et a un ordre de grandeur en valeur absolue plus faible que D_{EE} , ce qui va de pair avec l'étude de sensibilité effectuée précédemment sur D_{EE} et D_{yE} .

On s'intéresse ensuite à la validation singulière des conditions **A2**, **A3a**, **A3b**, **A3c** et **A3d**, qu'on représente dans la figure III.24. On retrouve en premier lieu la symétrie observée entre la condition **A3b** avec **A3c** et **A3a** avec **A3d**. Les conditions **A3a** et **A3d** sont vérifiées dans les zones où $D_{yE} \geq 0$, alors que **A3b** et **A3c** sont vérifiées dans les zones où $D_{yE} < 0$. En plus, la condition **A2** n'est pas vérifiée au voisinage du cône de perte où D_{yy} et D_{yE} sont maximales.

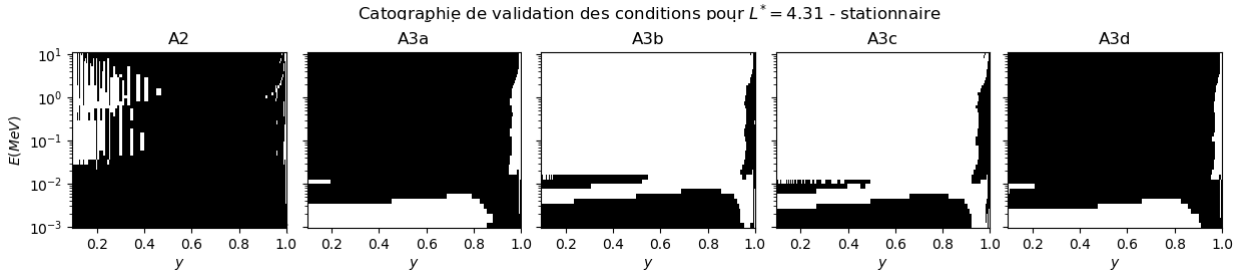


FIGURE III.24 – Cartographie sur le domaine 2D (y, E) des cellules respectant les conditions **A2**, **A3a**, **A3b**, **A3c** et **A3d** (en noirs) pour le schéma *LIN 2*, pour le plan $L^* = 4.31$.

En conclusion, nous avons cherché avec cette étude de sensibilité à identifier expérimentalement les paramètres numériques qui agissait le plus sur le degré de validation de l'ensemble des conditions de *Nordbotten*. Nous avons pu constater que l'effet du raffinement du maillage spatio-temporel était marginal, tandis que le ratio entre les coefficients de diffusion en énergie et de diffusion croisés était beaucoup plus impactant. De plus, nous avons pu isoler parmi l'ensemble des 10 conditions, celles qui étaient les plus restrictives et qui dépendait le plus du déséquilibre entre les intensités des coefficients de diffusion, à savoir les conditions **A3**. Nous allons donc chercher dans la partie suivante, à expliquer ces constatations expérimentales, en exprimant analytiquement ces conditions en fonction de la discrétisation du schéma *LIN 2*.

III.3.1.3 Mise en lien des conditions de *Nordbotten* avec les poids de discrétisation du schéma *LIN 2*

On rappelle la discrétisation du flux $F_C^{S_i}$ traversant la surface S_i d'une cellule rectangulaire, par le schéma *LIN 2* :

$$F_C^{S_i} = \gamma_1^{S_i}(f_C - f_M) + \gamma_2^{S_i}(f_C - f_{N_C}) + \gamma_3^{S_i}(f_{N_M} - f_M) \quad (\text{III.12})$$

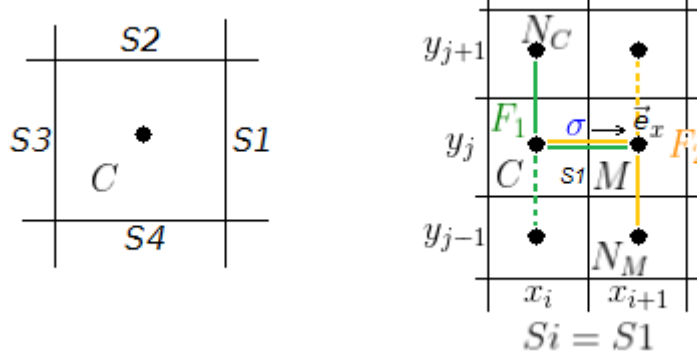


FIGURE III.25 – A gauche, numérotation adoptée des faces d'une cellule d'un maillage VF cartésien. A droite, exemple de notation des cellules quand $S_i = S_1$.

On numérote les faces des cellules rectangulaires du maillage cartésien selon la figure III.25. Par analogie à la diffusion réelle, S_1 et S_3 sont relatives à la direction d'angle d'attaque et S_2 et S_4 sont relative à la direction de l'énergie. Puis, on exprime les termes m_k du schéma *LIN 2* en fonction des paramètres de (III.12). On fige le stencil sur tout le maillage en considérant $D_{xy} \geq 0$, ce qui donne les termes m_k suivants :

$$\begin{cases} m_1 = (\gamma_1^{S_1} + \gamma_2^{S_1} + \gamma_1^{S_2} + \gamma_2^{S_2} + \gamma_1^{S_3} + \gamma_2^{S_3} + \gamma_1^{S_4} + \gamma_2^{S_4}) \\ m_2 = -(\gamma_1^{S_1} + \gamma_3^{S_1} + \gamma_2^{S_2}) \\ m_3 = 0 \\ m_4 = -(\gamma_1^{S_2} + \gamma_3^{S_2} + \gamma_2^{S_1}) \\ m_5 = \gamma_3^{S_2} + \gamma_3^{S_3} \\ m_6 = -(\gamma_1^{S_3} + \gamma_3^{S_3} + \gamma_2^{S_4}) \\ m_7 = 0 \\ m_8 = -(\gamma_1^{S_4} + \gamma_3^{S_4} + \gamma_2^{S_3}) \\ m_9 = \gamma_3^{S_1} + \gamma_3^{S_4} \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Comme le raffinement du maillage n'impacte que faiblement la validation des conditions de *Nordbotten* (voir III.19), on se met dans le cas d'un maillage uniforme. De plus, pour focaliser l'étude sur l'effet du déséquilibre entre les coefficients de diffusion, on suppose que le tenseur de diffusion complet est uniforme. Le traitement qui va suivre reste valable quand $D_{xy} < 0$ (voir annexe C). On pose donc $\Delta x = \Delta y = h$ et on pose $\lambda = \frac{D_{xy}}{D_{yy}} \geq 0$ et $\alpha = \frac{D_{xx}}{D_{yy}} > 0$. Par analogie avec la diffusion réelle, λ reflète le ratio entre la diffusion croisée et la diffusion en énergie, alors que α reflète le ratio entre la diffusion en angle d'attaque et la diffusion en énergie. Ainsi, les expressions des transmissibilités du schéma *LIN 2* s'écrivent :

$$\begin{cases} \gamma_1^{S_{2p+1}} = \frac{D_{xx}}{h} = \frac{D_{yy}}{h} \alpha \\ \gamma_1^{S_{2p}} = \frac{D_{yy}}{h} \\ \gamma_2^{S_i} = \gamma_3^{S_i} = \frac{D_{xy}}{2h} = \frac{D_{yy}}{2h} \lambda \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

En injectant ces nouvelles expressions dans celles des m_k , on obtient :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{D_{yy}}{h}(2 + 2\alpha + 2\lambda) \\ m_2 = -\frac{D_{yy}}{h}(\alpha + \lambda) \\ m_3 = 0 \\ m_4 = -\frac{D_{yy}}{h}(1 + \lambda) \\ m_5 = \frac{D_{yy}}{h}\lambda \\ m_6 = -\frac{D_{yy}}{h}(\alpha + \lambda) \\ m_7 = 0 \\ m_8 = -\frac{D_{yy}}{h}(1 + \lambda) \\ m_9 = \frac{D_{yy}}{h}\lambda \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Au premier abord, on voit que $\forall \alpha, \lambda$ $m_1 > 0, m_2 < 0$ et $m_6 < 0$. **A0, A1a** et **A1c** sont donc tout le temps vérifiées, ce qui rappelle leur fort pourcentage de validité observé dans la figure III.22. En second lieu, on voit qu'avec ce cas simple, $m_1 + m_2 + m_6 = 2\frac{D_{yy}}{h} > 0$ ce qui fait que la condition **A2** est tout le temps vérifiée. Comme $m_3 = m_7 = 0$ et comme $m_2 m_4 > 0$ et $m_6 m_8 > 0$ donc les conditions **A3a** et **A3d** sont elles aussi vérifiées. D'autre part, les conditions **A3b** et **A3c** sont symétriques et font découler la même inégalité suivante :

$$(\alpha + \lambda)(1 + \lambda) - 2\lambda(1 + \lambda + \alpha) > 0 \quad (\text{III.16})$$

On trace dans la figure III.26, le signe de l'expression $(\alpha + \lambda)(1 + \lambda) - 2\lambda(1 + \lambda + \alpha)$ en fonction de λ et α . On voit que la zone de validité de l'inégalité (III.16) est très restreinte et comme on le verra dans la partie suivante, cette restriction va poser un grand problème à la validation des conditions **A3b** et **A3c** en situation de diffusion réelle.

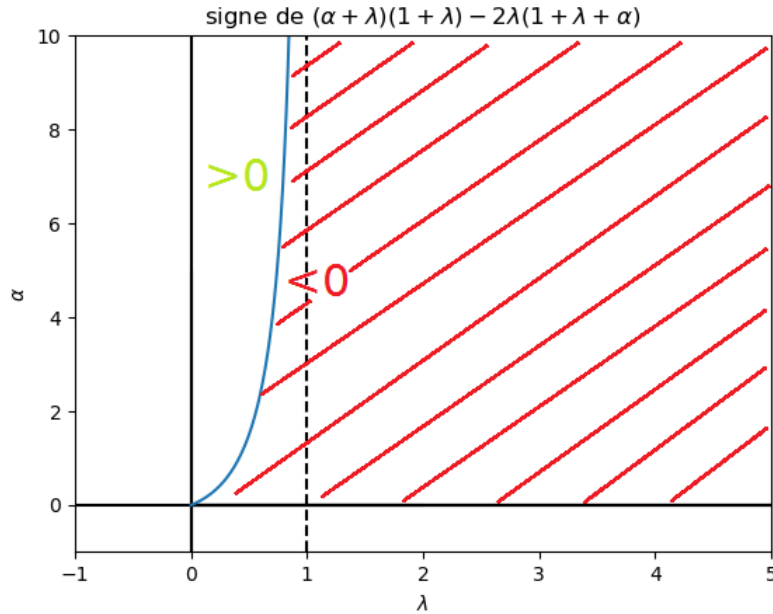


FIGURE III.26 – Signe de la quantité $[(\alpha + \lambda)(1 + \lambda) - 2\lambda(1 + \lambda + \alpha)]$ en fonction de λ et α .

III.3.1.4 Obstacles à la validation des conditions de *Nordbotten* en situation de diffusion réelle

Pour voir dans quelle zone de la courbe III.26 on se situe dans le cadre diffusif réel, on réalise sur trois plans L^* représentatifs, une cartographie des ordres de grandeur de λ et de $\frac{\lambda}{\alpha}$ qu'on rapporte dans la figure III.27.

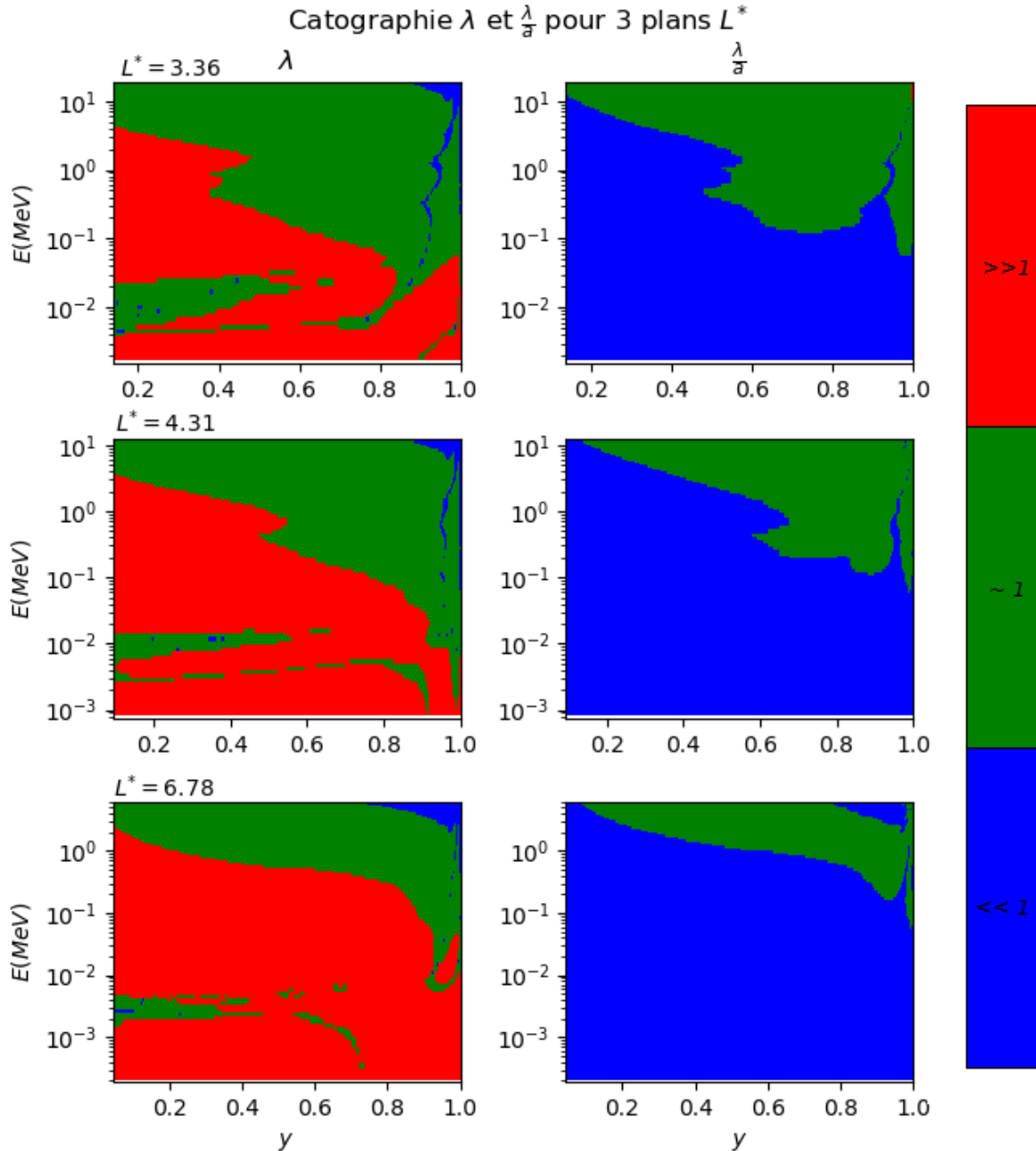


FIGURE III.27 – Cartographie de λ et $\frac{\lambda}{\alpha}$ sur 3 plans L^* .

Les cartographies de λ présentent une prédominance du cas $\lambda \gg 1$ à basse énergie (en rouge) et du cas $\lambda \sim 1$ à haute énergie (en vert). Quelques parcelles du cas $\lambda \sim 1$ subsistent à basse énergie, reflétant une diffusion croisée quasi-nulle à cause de son changement de signe. Les cartographies de $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{D_{xy}}{D_{xx}}$ attestent une prédominance du cas $\lambda \ll \alpha$ sur une grande partie du domaine. Le cas $\lambda \sim \alpha$ est restreint à haute énergie et à l'équateur, là où la diffusion en énergie est renforcée, et où la diffusion en angle d'attaque et la diffusion croisée sont fortement réduites.

A partir de ces cartographies, on isole les différents cas asymptotiques permettant de simplifier l'inégalité (III.16) et la résoudre :

- $\alpha \sim \lambda \ll 1$: (III.16) impose $(\alpha + \lambda) - 2\lambda = \alpha - \lambda > 0$, valide si $\lambda < \alpha$.
- $a \sim \lambda \sim 1$: (III.16) impose $-\lambda^2 + \lambda(-1 - \alpha) + \alpha > 0$. Pour $\alpha = 1$ l'équation du second degré sur λ donne une première solution négative $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} < 0$ à rejeter (comme $\lambda > 0$) et une autre solution $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1$. L'inégalité est donc valable pour $\lambda < \sqrt{2} - 1$.
- $\alpha \gg \lambda$ et $\lambda \sim 1$: (III.16) impose $\alpha(1 + \lambda) - 2\lambda\alpha = \alpha(1 - \lambda) > 0$, valide si $\lambda < 1$
- $\alpha \gg 1 \gg \lambda$: (III.16) impose $\alpha - 2\lambda(\alpha) = \alpha(1 - 2\lambda) > 0$ valide $\forall \lambda$.
- $\alpha \gg \lambda \gg 1$: (III.16) impose : $\alpha\lambda - 2\lambda\alpha = -\alpha\lambda > 0$ ce qui est impossible comme $\alpha, \lambda > 0$.

Bien qu'on ait pu identifier des conditions sur λ et sur α pour vérifier (III.16), on est bloqué par le cas asymptotique $a \gg \lambda \gg 1$ rendant l'inégalité impossible. Ce cas est d'autant plus contraignant car il est fréquemment observé dans les cartographies de λ et α de la figure III.27. Si on fait un lien avec la figure III.23, on s'aperçoit que les quelques cellules où les conditions sont vérifiées, coïncident avec les régions où $\alpha \gg \lambda \sim 1$, là où D_{yE} est proche de zéro.

On peut facilement extrapoler ce résultat, dans le cas plus général d'un maillage non uniforme et d'un tenseur inhomogène. Dans ce cas, le non respect des conditions **A3** dans le cas réel s'explique par la domination des termes $m_{2q}m_{2q'}$ par m_1m_{2p+1} . Par analogie au cas simple, m_1 va renfermer la somme de tous les termes qui s'apparentent à λ et α de la cellule étudiée et ses voisines. De plus m_{2p+1} contient un terme analogue à λ . Si $\lambda \gg 1$ (ce qui est très souvent le cas), le produit m_1m_{2p+1} est dominant devant $m_{2q}m_{2q'}$, car ce dernier ne contient que les termes de diffusion normale (D_{EE}) négligeables devant λ et α . Par conséquent, même avec des conditions de monotonie moins restrictives que celles d'une M -matrice, le cadre diffusif local est trop contraignant pour pouvoir obtenir cette propriété avec le schéma *LIN 2*.

On serait tenté de remédier à ce déséquilibre entre ces deux quantités par l'intégration temporelle. Mais comme on a pu le voir dans la figure III.18, l'intégration temporelle dégrade le pourcentage de vérification des conditions. Pour expliquer ce phénomène contre intuitif, on note m'_k les nouveaux termes construits à partir du schéma *LIN 2* associé à un schéma Euler implicite :

$$\begin{cases} m'_1 = 1 + \Delta t m_1 \\ m'_k = \Delta t m_k \text{ pour } 2 \leq k \leq 9 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Comme $\Delta t > 0$, les conditions **A0**, **A1** et **A2** restent valides si elles le sont dans le cas stationnaire. Pour les conditions **A3**, on considère le cas $D_{xy} \geq 0$ et on regarde de près **A3b** :

$$\begin{aligned} & m_6'^{i,j} m_4'^{i,j-1} - m_5'^{i,j-1} m_1'^{i,j} \\ &= m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} \Delta t^2 - m_5^{i,j-1} \Delta t (1 + \Delta t m_1^{i,j}) \\ &= (m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} m_1^{i,j}) \Delta t^2 - \Delta t m_5^{i,j-1} \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

On voit que la condition **A3b** du cas stationnaire est dégradée par $-\Delta t m_5^{i,j-1}$. Quand $\Delta t \rightarrow \infty$ alors (III.18) tend vers $(m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} m_1^{i,j}) \Delta t^2$. Cela explique donc le comportement observé dans la figure III.18. Quand Δt augmente, on ne fait qu'approcher l'expression de la condition dans le cas stationnaire.

III.3.2 Construction d'un nouveau schéma non-linéaire monotone sur la base des conditions de *Nordbotten*

Partant des observations précédentes sur les difficultés à établir la monotonie du schéma *LIN 2* dans notre application, nous proposons la construction d'un nouveau schéma VF non-linéaire monotone qu'on nomme NLMONOT. Il s'agit d'une adaptation non-linéaire du schéma *LIN 2*, préservant la monotonie grâce à la vérification des conditions de *Nordbotten*, contrairement aux schémas NLTPFA et NLMPFA dont la monotonie est obtenue par une structure *M*-matrice. Le schéma NLMONOT est totalement inédit dans la littérature des schémas volumes finis et nous allons présenter dans ce qui suit, sa logique de discrétisation.

A l'image du schéma NLMPFA, le schéma NLMONOT se base lui aussi sur une pondération des flux F_1 et F_2 pris au format "cell-centered" :

$$F_{C,\sigma} = \mu_1 F_1 - \mu_2 F_2 \quad (\text{III.19})$$

On rappelle les expressions génériques des flux F_1 et F_2 décentrés sur un maillage cartésien, quel que soit la direction de discrétisation (voir figure III.28 pour la direction de discrétisation selon \vec{e}_x)

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda^1 (f_C - f_M) + \underbrace{\nu_{C,N_C}^1 (f_C - f_{N_C})}_{G_1}) \\ F_2 &= -(\lambda^2 (f_M - f_C) + \underbrace{\nu_{M,N_M}^2 (f_M - f_{N_M})}_{G_2}) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

L'expression de $F_{C,\sigma}$ devient :

$$F_{C,\sigma} = (\mu_1 \lambda^1 + \mu_2 \lambda^2) (f_C - f_M) + \mu_1 \nu_{C,N}^1 (f_C - f_{N_C}) - \mu_2 \nu_{C,N}^2 (f_M - f_{N_M}) \quad (\text{III.21})$$

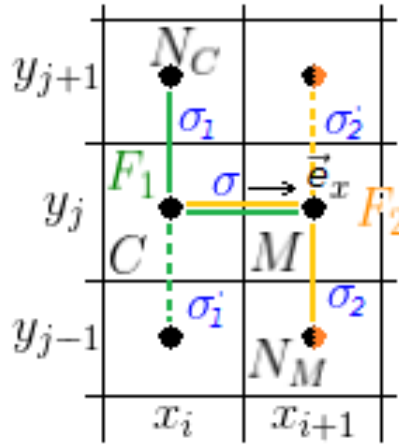


FIGURE III.28 – Construction du schéma NLMONOT sur un maillage cartésien et notation des cellules quand la direction de discrétisation est prise selon \vec{e}_x .

Nous avons déjà vu qu'avec le schéma NLMPFA, on faisait disparaître la portion de flux G_2 qui empêchait l'émergence d'une structure *M*-matrice. Avec le schéma NLMONOT on cherche plutôt à réduire sa contribution pour permettre la validation des conditions de *Nordbotten*, tout en conservant le stencil de *LIN 2*. C'est d'ailleurs cette portion de flux qui est responsable du renforcement des termes m_{2p+1} , observé dans l'analyse précédente. Pour pouvoir la contrôler, on introduit les coefficients $0 < c_1 < 1$ et $0 < c_2 < 1$ de sorte que :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= (\mu_1 \lambda^1 + \mu_2 \lambda^2) (f_C - f_M) \\ &+ c_1 \mu_1 \nu_{C,N}^1 (f_C - f_{N_C}) + (1 - c_1) \mu_1 \nu_{C,N}^1 (f_C - f_{N_C}) \\ &- c_2 \mu_2 \nu_{C,N}^2 (f_M - f_{N_M}) - (1 - c_2) \mu_2 \nu_{C,N}^2 (f_M - f_{N_M}) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

et on pose

$$\begin{cases} G'_1 = (1 - c_1)\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) \\ G'_2 = (1 - c_2)\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

L'expression du flux $F_{\sigma,C}$ devient :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) \\ &+ c_1\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \\ &+ \mu_1G'_1 - \mu_2G'_2 \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Le choix de μ_1 et μ_2 sert cette fois à éliminer la quantité $\mu_1G'_1 - \mu_2G'_2$ afin de ne laisser que les portions de flux contrôlables par c_1 et c_2 (voir annexe D) :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) \\ &+ c_1\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Reste maintenant à trouver un couple (c_1, c_2) qui permet à cette construction de valider les conditions de *Nordbotten*. Nous avons choisi d'associer un couple unique à chaque direction de discrétisation noté $(c_1^{S_i}, c_2^{S_i})_{i=1,2,3,4}$, qui sera utilisé pour toutes les cellules du maillage. Dans ce cas, la conservation du flux de part et d'autre de S_i impose :

$$\begin{aligned} c_1^{S_i} &= c_2^{S_{i+2}} \\ c_2^{S_i} &= c_1^{S_{i+2}} \quad \text{pour } i \in 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Avec ce choix, on divise par 2 le nombre de couples à déterminer. Moyennant d'autres simplifications et en suivant le développement présenté dans l'annexe D, on établit le résultat suivant :

Proposition 4. Il existe au moins une famille de couples $(c_1^{S_i}, c_2^{S_i})_{i=1,2,3,4}$ vérifiant (III.26) qui permet à la discrétisation III.25 de valider les conditions de *Nordbotten* de monotonie.

Démonstration. Voir annexe D.

Pour un maillage cartésien, le schéma NLMONOT s'écrit sur un stencil de 9 points, plus large que celui des schémas NLTPFA et NLMPFA à 5 points. Comme on l'a dit précédemment, c'est une adaptation non-linéaire du schéma *LIN 2*. C'est aussi une généralisation du schéma NLMPFA (NLMONOT=NLMMPFA quand $c_1 = c_2 = 0$). Grâce au caractère local des conditions de *Nordbotten*, il assure une propriété de monotonie plus forte que celle du schéma NLTPFA (obtenue par une structure M -matrice seulement), ce qui empêche l'apparition d'oscillations numériques internes et permet la préservation du principe du min-max. On privilégie l'utilisation de l'algorithme de Picard pour sa résolution non-linéaire, afin de conserver sa positivité à chaque itération. Nous allons voir plus tard dans la section III.3.3 que le schéma NLMONOT présente une précision du second ordre et que son coût computationnel est compétitif par rapport aux deux autres schémas non-linéaires (comme son stencil élargi le rapproche du schéma linéaire *LIN 2*). Notons aussi que sa construction peut être étendue sur des maillages quadrilatères, sur lesquels les conditions de *Nordbotten* restent valables [141].

III.3.3 Études des performances des schémas non-linéaires

L'obtention de la propriété de monotonie d'un schéma VF linéaire en présence de la diffusion croisée semble être compromise. Il faut donc songer à l'adoption d'une résolution non-linéaire de l'équation de diffusion locale. On va donc dans cette partie, mettre à l'épreuve les schémas non-linéaires NLTPFA, NLMPFA et le nouveau schéma NLMONOT sur des cas jouets numériques à forte anisotropie. On cherchera en particulier à évaluer leur précision, estimer le coût computationnel introduit par leur caractère non-linéaire et étudier la sensibilité de leurs paramètres de résolution non-linéaire. On finira sur une application de ces schémas dans un cadre diffusif réel en grille y, E et en grille K, V .

III.3.3.1 Le tenseur analytique avec une anisotropie paramétrée, comme base des cas jouets numériques

Les cas jouets numériques qu'on va présenter dans cette partie, se basent sur le tenseur de diffusion analytique suivant [151] :

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} rx^2 + y^2 & (r-1)xy \\ (r-1)xy & x^2 + ry^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Ce tenseur analytique a la particularité d'avoir comme valeurs propres 1 et r . Par conséquent, r permet de paramétrer son ratio d'anisotropie $\frac{1}{r}$. Bien que son évolution spatiale soit assez "régulière" (voir figure III.29), il présente une forte raideur au voisinage des bords $y = 0$ pour D_{xx} et $x = 0$ pour D_{yy} , qui n'est pas sans rappeler l'évolution raide du tenseur réel aux frontières du domaine de résolution.

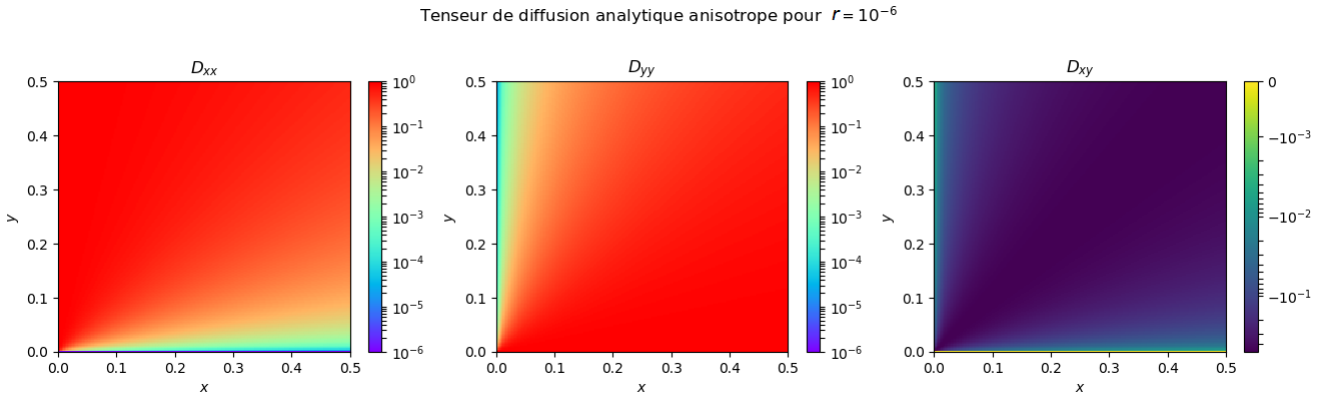


FIGURE III.29 – Distribution des coefficients de diffusion D_{xx}, D_{yy} et D_{xy} du tenseur de diffusion anisotrope (III.27) sur le domaine $\Omega =]0, 0.5[\times]0, 0.5[$ pour $r = 10^{-6}$.

Ce tenseur est d'autant plus pertinent qu'il permet une validation simple de l'ordre de convergence des schémas non-linéaires par la méthode *MMS*, tout en imposant une source positive quand $f_{MMS} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ sur le domaine $\Omega =]0, 0.5[\times]0, 0.5[$.

III.3.3.2 Étude de convergence des schémas non-linéaires NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT

On commence par étudier la convergence des 3 schémas, sur un problème de diffusion stationnaire avec $\Omega =]0, 0.5[\times]0, 0.5[$, mettant en jeu le tenseur (III.27) pour un ratio d'anisotropie de 10^6 , en fixant $f_{MMS} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ et des conditions aux limites de Dirichlet. L'algorithme de résolution non-linéaire est initialisé par une fonction unitaire sur tout le domaine et on fixe le critère de sortie de l'algorithme de résolution non-linéaire suivant :

$$\frac{\|f^{s+1} - f^s\|_{\infty}^D}{\|f^s\|_{\infty}^D} < \epsilon = 10^{-6} \quad (\text{III.28})$$

Comme attestée par la figure III.30, les trois schémas affichent une convergence spatiale d'ordre 2. Le schéma NLTPFA présente un niveau de précision au moins 2 fois meilleur que les deux autres schémas. Si on regarde maintenant le tableau III.1, on observe des niveaux de N_{iter} conséquents pour les trois schémas avec un léger avantage pour le schéma NLMONOT. On voit aussi que le raffinement du maillage alourdit le coût de la résolution, comme on part de la même information d'initialisation.

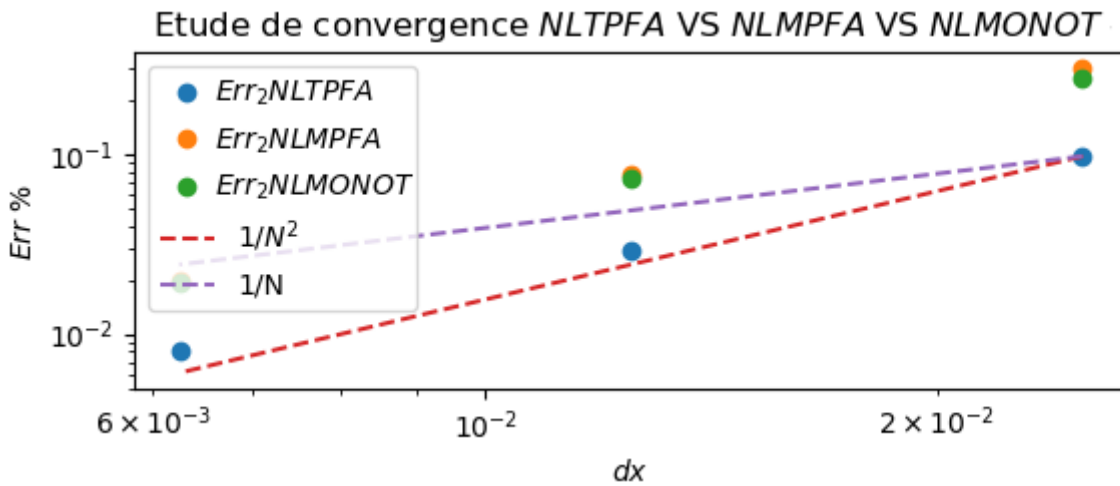


FIGURE III.30 – Étude de convergence des schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT dans le cadre du problème de diffusion stationnaire, avec le tenseur anisotrope analytique (III.27) pour un ratio d'anisotropie de 10^6 et $f_{MMS} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Schéma \ N_u	20 × 20	40 × 40	80 × 80
NLTPFA	63	112	185
NLMPFA	79	134	216
NLMONOT	66	101	140

TABLEAU III.1 – Nombre d'itérations non-linéaires des schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence.

Pour le test suivant, on réalise de nouveau une étude de convergence des 3 schémas, cette fois en fixant un ratio d'anisotropie plus faible, pris à 10^2 . Les résultats rapportés dans le tableau III.2 montrent que N_{iter} diminue légèrement pour les trois schémas. Par conséquent, N_{iter} et par extension le coût computationnel vont croître plus le ratio d'anisotropie est grand. Ainsi, si on adopte la formulation (K, V, L^*) de l'équation de diffusion, il faut s'attendre à un coût computationnel plus grand de la résolution de l'équation de diffusion locale qu'avec la formulation (E, y, L^*) (voir I.4.3.2).

Schéma	N_u	20×20	40×40	80×80
	NLTPFA		57	93
NLMPFA		71	110	152
NLMONOT		60	84	105

TABLEAU III.2 – Nombre d'itérations non-linéaires des schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence avec un de ratio d'anisotropie de 10^2 .

III.3.3.3 Étude du coût de la représentativité physique des schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT

On passe maintenant à une série de tests numériques se focalisant sur le respect des principes du minimum, du maximum ainsi que la positivité par les schémas non-linéaires étudiés et leur répercussion sur le coût computationnel. On impose cette fois un ratio d'anisotropie conservatif de 10^9 . On adopte pour ces tests des conditions aux limites réalistes et on associe pour chaque propriété physique testée un terme source adapté. Les résultats de ces tests pour les schémas NLTPFA et NLMPFA ont été présentés dans l'article de journal "*Nour Dahmen, François Rogier, Vincent Maget - On the modelling of highly anisotropic diffusion for electron radiation belt dynamic codes.*" [153] publié dans la revue *Computer Physics Communications*.

On commence par un premier test relatif à la positivité et réalisé sur le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On fixe des conditions aux limites réalistes (condition de flux nul en $x = 1$ et condition de Dirichlet homogène ailleurs) et on utilise le terme source suivant :

$$S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in [0.25, 0.75] \times [0.25, 0.75] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

En fixant cette forme de source en créneau, on s'assure de l'établissement d'une diffusion dans le domaine (comme on ne dispose d'aucun "apport" depuis les bords du domaine), tout en ayant une zone conséquente du domaine avec $S(x, y) = 0$, là où on risque de perdre la positivité (contrairement à la source S_{MMS} qui va avoir tendance à "cacher" cet artefact). Les résultats rapportés dans le tableau III.3 confirme le respect de la positivité par les trois schémas au prix d'un coût computationnel conséquent, avec encore une fois une compétitivité meilleure pour le schéma NLMONOT.

Schéma	N_u	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	f_{min}	$6.44 \cdot 10^{-10}$	$7.55 \cdot 10^{-15}$	$2.52 \cdot 10^{-23}$
	N_{iter}	81	141	222
NLMPFA	f_{min}	$2.82 \cdot 10^{-7}$	$9.15 \cdot 10^{-10}$	$2.71 \cdot 10^{-13}$
	N_{iter}	153	310	433
NLMONOT	f_{min}	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$3.60 \cdot 10^{-10}$	$8.85 \cdot 10^{-14}$
	N_{iter}	68	102	193
FD	f_{min}	-0.00083	-0.00064	-0.00041
	Ru	0.04	0.06	0.05

TABLEAU III.3 – Résultats du test numérique relatif à la positivité pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT.

On passe maintenant au deuxième test relatif au principe du minimum. On reste sur le même domaine de résolution avec le même terme source et on considère cette fois la condition aux limites de Dirichlet $\bar{f} = 1$ sur tout le bord $\partial\Omega$. Les résultats du test sont rapportés dans le tableau III.4. On s'aperçoit que le schéma NLTPFA ne parvient pas à préserver le minimum contrairement aux schémas NLMPFA et NLMONOT. Ce comportement est attendu car le caractère non-linéaire du schéma fait perdre l'équivalence entre la positivité et respect du principe minimum (voir II.3.2.2). Ainsi, la propriété de monotonie du schéma obtenue par sa construction M -matrice n'est plus suffisante pour assurer le respect du principe du minimum. Le schéma NLMPFA de son côté, préserve ce principe grâce à sa structure LMP et malgré la forte anisotropie introduite, sa valeur minimale respecte scrupuleusement la valeur minimale unitaire à l'erreur machine près (notée ι dans le tableau). Le schéma NLMONOT semble lui aussi respecter le principe du minimum (à l'erreur machine près) grâce au caractère local de sa monotonie (voir la section II.4). Notons tout de même que le respect du principe du minimum n'est pas utile dans le cadre physique réel. En effet, il y aura tout le temps des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord y_{min} relatif au cône de perte et sur le bord E_{max} (voir le tableau I.4 de la partie I.4), autrement dit $\min(\bar{f}) = 0$. Par conséquent, on exige seulement la propriété de positivité (assurée par la monotonie) pour la frontière basse de la solution numérique, ce qui laisse au schéma NLTPFA toutes ses chances pour être retenu dans notre application.

Schéma	N_u	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	f_{min}	0.9983	0.9984	0.9987
	N_{iter}	62	83	66
	Ru	0.1425	0.1431	0.1396
NLMPFA	f_{min}	$1.00 \pm \iota$	$1.00 \pm \iota$	$1.00 \pm \iota$
	N_{iter}	66	107	201
NLMONOT	f_{min}	$1.00 \pm \iota$	$1.0 \pm \iota$	$1.00 \pm \iota$
	N_{iter}	58	93	188
FD	f_{min}	0.9981	0.9983	0.9987
	Ru	0.090	0.127	0.128

TABLEAU III.4 – Résultats du test numérique relatif au respect du principe du minimum pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT.

Le troisième test relatif au respect du principe du Min/Max est conduit sur le domaine $\Omega =]0, 0.5[\times]0, 0.5[$ avec cette fois un terme source nul. On impose $\bar{f} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ aux bords $x = y = 0$ et $y = 0.5$ ainsi qu'une condition de flux nul à $x = 1$. Les résultats du test rapportés dans le tableau III.5 montrent une préservation des principes du Min/Max mais au prix d'un coût computationnel énorme (plus de 600 itérations pour le schéma NLMPFA). Les deux autres schémas sont plus compétitifs, avec un léger avantage pour le schéma NLMONOT. Notons que dans ce test, aucun *overshoot* n'a été observé avec le schéma NLTPFA, bien qu'il ne dispose pas d'argument sur le respect du principe du maximum.

Schéma	N_u	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	f_{min}	$2.22 \cdot 10^{-15}$	$4.67 \cdot 10^{-27}$	$3.60 \cdot 10^{-44}$
	f_{max}	0.9955	0.9988	0.9997
	N_{iter}	95	181	338
NLMPFA	f_{min}	$2.10 \cdot 10^{-9}$	$1.63 \cdot 10^{-13}$	$3.73 \cdot 10^{-18}$
	f_{max}	0.9950	0.9988	0.9995
	N_{iter}	126	250	606
NLMONOT	f_{min}	$7.30 \cdot 10^{-10}$	$4.94 \cdot 10^{-14}$	$6.80 \cdot 10^{-20}$
	f_{max}	0.9918	0.9982	0.9995
	N_{iter}	63	127	271
FD	f_{min}	-0.023	-0.021	-0.0187
	f_{max}	0.9872	0.9968	0.9992
	Ru	0.121	0.124	0.132

TABLEAU III.5 – Résultats du test numérique relatif au respect des principes du Min/Max pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT.

Bien qu'on ait considéré un ratio d'anisotropie conservatif, les ordres de grandeur de N_{iter} obtenus dans les trois tests précédents, annoncent un coût computationnel conséquent dans le cas diffusif réel. On va donc chercher dans la partie suivante, à optimiser la résolution non-linéaire vis-à-vis des paramètres de l'algorithme de Picard (voir II.3.2.2) qui sont :

- Le seuil de sortie de l'algorithme de résolution non-linéaire ϵ .
- La qualité de l'initialisation de l'algorithme de résolution f^0 .
- Le calcul du résidu $\|f^{s+1} - f^s\|$.

III.3.3.4 Étude de sensibilité de la résolution non-linéaire en fonction de ses paramètres

Effet du seuil de sortie de l'algorithme de résolution non-linéaire ϵ : On reprend l'étude de convergence des trois schémas en imposant cette fois $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-7}$. On observe dans la figure III.31 une légère réduction de l'ordre de convergence quand $\epsilon = 10^{-5}$, visible surtout pour le schéma NLTPFA. Certes, N_{iter} est réduit avec ce nouveau seuil, mais on perd de la précision. Pour $\epsilon = 10^{-7}$, la précision et l'ordre du schéma sont conservés, mais le coût est d'autant plus conséquent comme on peut le voir dans le tableau III.6). Comme on cherche à conserver un second ordre de convergence sur la grille raffinée (y, E) de Salammbô, fixer un seuil de $\epsilon = 10^{-6}$ sera suffisant pour notre application. En effet, l'étude de convergence réalisée avec ce seuil et dont les résultats sont présentés dans la figure III.30, rapporte la conservation du second ordre pour un raffinement de $80 \times 80 = 6400$ noeuds, du même ordre de grandeur que le raffinement du maillage fin de Salammbô 133×49 noeuds, et ceci pour les trois schémas.

Schéma	N_u		
	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	84	156	275
NLMPFA	101	183	318
NLMONOT	88	144	227

TABLEAU III.6 – Nombre d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence pour $\epsilon = 10^{-7}$.

Etude de convergence NLTPFA VS NLMPFA VS NLMONOT - en fct de ϵ

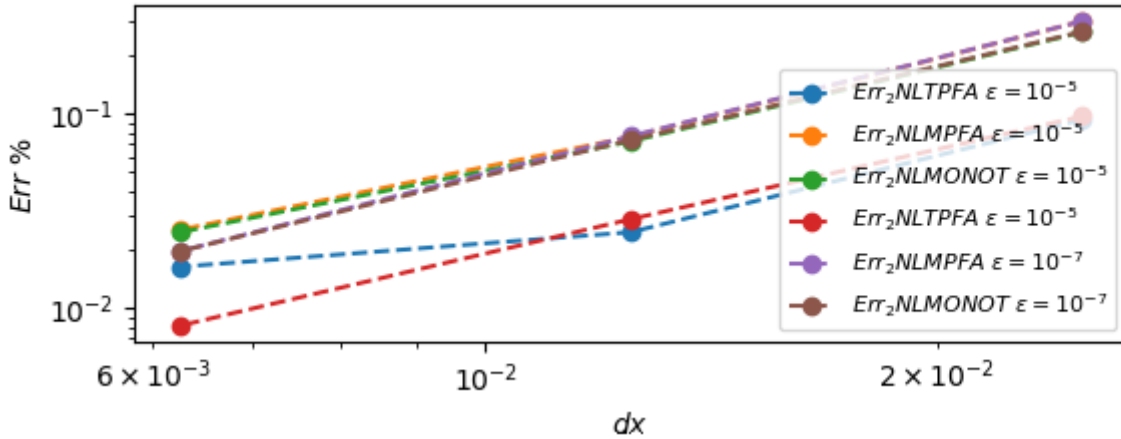


FIGURE III.31 – Étude de convergence des schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT pour $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-7}$.

Effet de l'initialisation de l'algorithme de Picard : Les études de convergence précédentes ont été effectuées avec une initialisation grossière de l'algorithme de Picard ($f = 1$). On peut cependant "aider le schéma" à converger plus rapidement en l'initialisant avec la solution d'un schéma linéaire. Cependant, une initialisation "brute" par la solution d'un schéma linéaire peut contenir des valeurs négatives comme elle provient d'une résolution par un schéma non monotone. Cela risque de poser des problèmes à l'algorithme de Picard qui ne peut assurer la positivité que si il est initialisé par une solution positive. Ainsi, la solution d'initialisation doit être filtrée des artefacts numériques afin ne pas déstabiliser la résolution non-linéaire.

Comme on peut le voir dans les tableaux III.7 et III.8, la réduction de N_{iter} est conséquente avec cette opération. De plus, on atteste une réduction de N_{iter} quand le maillage est raffiné de $N_u = 40 \times 40$ à $N_u = 80 \times 80$. Cela vient du fait que l'initialisation sur un maillage plus raffiné est plus précise et donc "plus proche" de la solution non-linéaire. Par conséquent, l'algorithme de Picard a besoin de moins d'itérations non-linéaires pour atteindre le seuil de sortie.

Schéma	N_u		
	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	34	38	23
NLMPFA	35	39	31
NLMONOT	37	25	19

TABLEAU III.7 – Nombre d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence dans le cas d'une initialisation avec le schéma *LIN 1*.

Schéma	N_u		
	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	21	14	10
NLMPFA	34	33	29
NLMONOT	42	42	26

TABLEAU III.8 – Nombre d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence dans le cas d'une initialisation avec le schéma *LIN 2*.

Pour voir autrement l'effet de l'initialisation sur la convergence de l'algorithme de Picard, on rapporte dans la figure III.32 l'évolution du résidu $\|f^{s+1} - f^s\|$ à chaque itération pour les trois schémas ($N_u = 80 \times 80$) et selon le type d'initialisation. L'initialisation avec le schéma linéaire fait débiter l'algorithme de Picard sur une norme proche du seuil de sortie ($\approx 10^{-4}$ pour les schémas NLTPFA et NLMONOT) et permet de gagner un nombre d'itération conséquent.

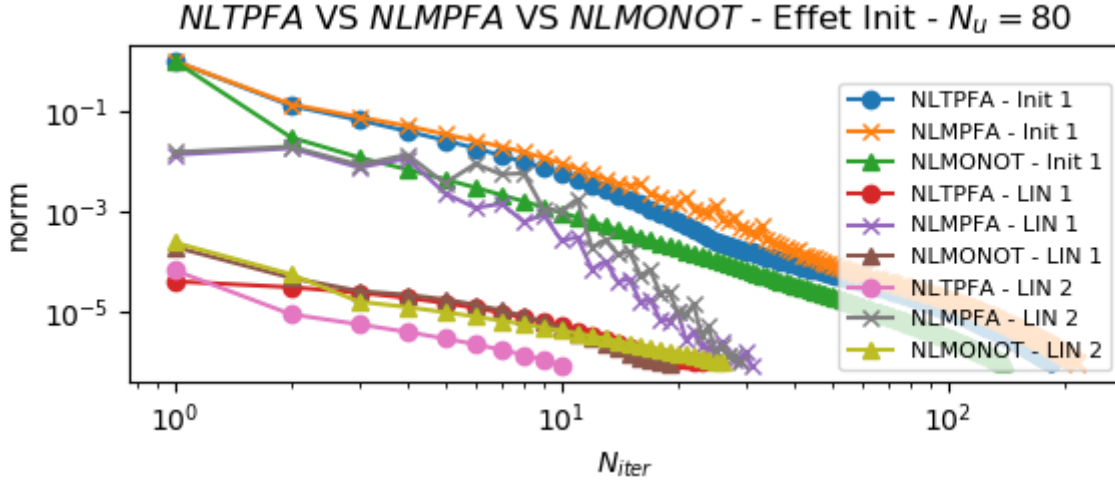


FIGURE III.32 – Courbes d'évolution des résidus de la résolution non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés pour l'étude de convergence et pour trois types d'initialisation.

D'autre part, cette courbe montre aussi l'occurrence d'un phénomène de relaxation du résidu du schéma NLMPFA avec une évolution en dents de scie et ceci indépendamment du type d'initialisation. La relaxation du résidu est un phénomène numérique récurrent dans les schémas non-linéaires mais faiblement exploré dans la littérature. Des observations numériques montrent qu'il peut être aggravé en présence de certaines contraintes mathématiques (comme la dégénérescence du tenseur de diffusion), ou numériques (comme une anisotropie très forte, des coefficients de diffusion très raides) ou pratiques (incertitude sur l'estimation des coefficients). Ce phénomène risque donc de se produire dans le cas réel, sur les plans L^* où l'interaction onde-particule est présente et conséquente.

Effet de l'estimation du résidu : Le phénomène de relaxation peut avoir un effet néfaste sur le coût de la convergence de la résolution non-linéaire. En effet, son estimation utilisée jusqu'à présent se base sur la norme ∞ qui suit l'évolution de la solution d'une façon ponctuelle. Cette estimation est cependant très sensible aux instabilités non-linéaires et on risque d'avoir une norme oscillante à cause d'un fort gradient localisé, bien que la solution soit stable partout ailleurs et que le système matriciel ait pratiquement convergé. Comme alternative moins restrictive, on adopte la norme suivante qui prend en compte l'évolution globale du système matriciel non-linéaire à résoudre $M(f)f = B(f)$:

$$\text{norme} = \frac{\|M(f^{k+1})f^{k+1} - B(f^{k+1})\|_2}{\|B(f^{k+1})\|_2} \quad (\text{III.30})$$

Ce changement de norme ne doit pas cependant dégrader la qualité de la solution de l'algorithme de résolution itératif. Pour cela, on vérifie d'abord la conservation du second ordre de convergence des trois schémas pour $\epsilon = 10^{-6}$ (voir figure III.33).

Etude de convergence *NLTPFA VS NLMPFA VS NLMONOT – norm2*

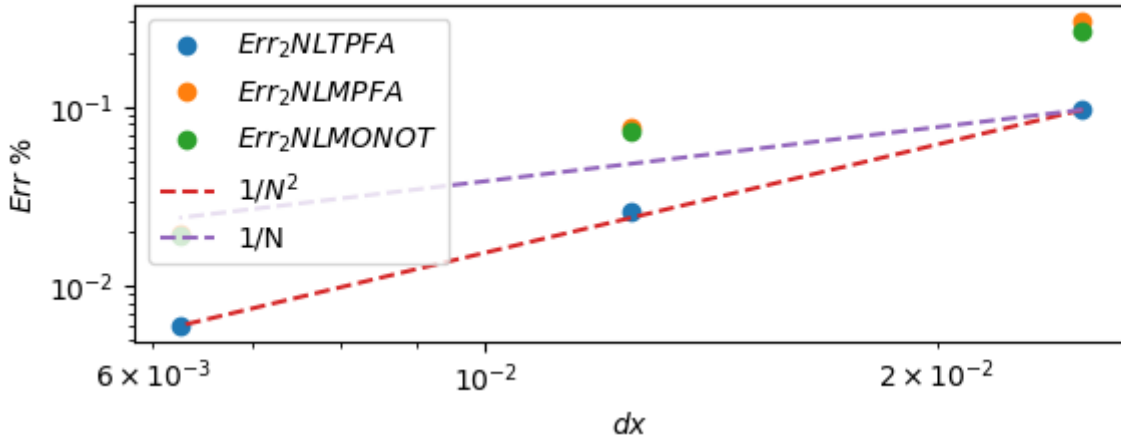


FIGURE III.33 – Étude de convergence des schémas NLTPFA et NLMPFA avec la nouvelle norme.

On présente ensuite dans les tableaux III.9 et III.10 les nouveaux N_{iter} et on rapporte l'évolution de la nouvelle norme dans la figure III.34.

Schéma \ N_u	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	26	17	8
NLMPFA	27	23	25
NLMONOT	27	16	10

TABLEAU III.9 – Nombre d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence dans le cas d'une initialisation avec le schéma *LIN 1* et en adoptant la nouvelle norme.

Schéma \ N_u	20×20	40×40	80×80
NLTPFA	15	8	4
NLMPFA	30	21	21
NLMONOT	34	18	6

TABLEAU III.10 – Nombre d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT rapportés de l'étude de convergence dans le cas d'une initialisation avec le schéma *LIN 2* et en adoptant la nouvelle norme.

Le gain computationnel est observé sur les trois schémas à des degrés différents. Il est beaucoup plus prononcé pour les schémas NLTPFA et NLMONOT sur le maillage le plus fin ($N_u = 80 \times 80$). Alors que pour le schéma NLMPFA, la nouvelle norme a permis d'atténuer le phénomène de relaxation sans le faire disparaître (voir tableau III.11).

Norme \ N_u	20×20	40×40	80×80
norme ∞	6	11	12
norme 2	4	8	12

TABLEAU III.11 – Nombre d'itérations non-linéaires du schéma NLMPFA ayant subi des relaxations dans l'étude de convergence selon le choix de la norme du résidu.

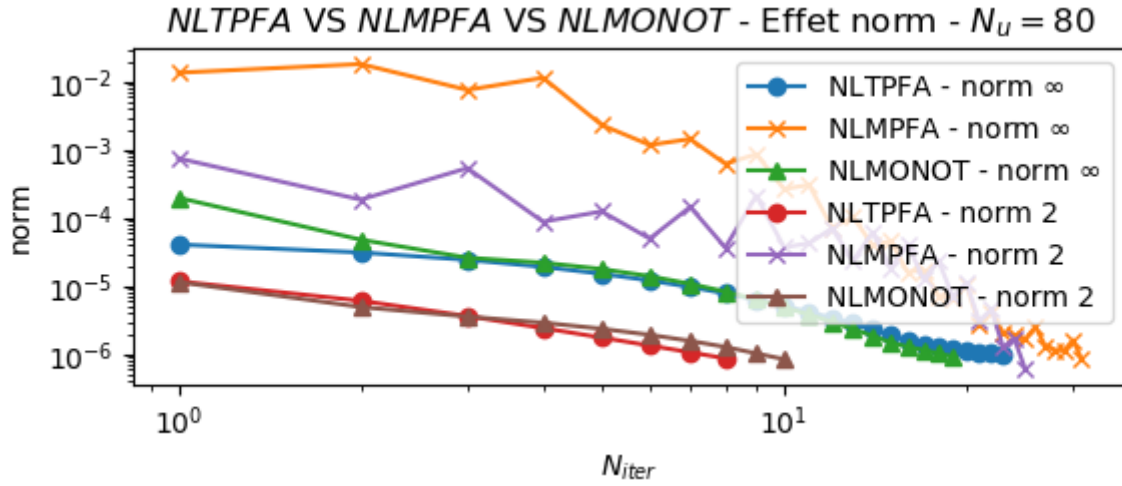


FIGURE III.34 – Courbes d'évolution de la norme d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA et NLMPFA rapportés de l'étude de convergence et en fonction de la norme ∞ et la norme 2.

III.3.4 Application des schémas non-linéaires sur un problème de diffusion 2D réelle transitoire

Les trois schémas non-linéaires sont maintenant testés sur une configuration de diffusion transitoire réelle similaire à celle adoptée dans III.2.5 pour un temps de simulation de 90000s. On associe les trois schémas à une intégration Euler implicite et on impose cette fois une condition de Dirichlet $\bar{f} = 10^{30} \text{MeV}^{-1} \text{s}^{-3}$ à basse énergie. On utilise le tenseur de diffusion sous sa forme complète comme la prise en compte de la diffusion croisée est maintenant permise. L'initialisation de l'algorithme de Picard s'opère avec le schéma *LIN 1* et le résidu de l'algorithme de résolution non-linéaire est estimé par la norme 2, avec un seuil fixé à $\epsilon = 10^{-6}$.

Schéma	Δt	100s	1000s	10000s
NLTPFA	PSD_{min}	$3.96 \cdot 10^{26}$	$4.05 \cdot 10^{26}$	$4.97 \cdot 10^{26}$
	PSD_{max}	$1.000000973 \cdot 10^{30}$	$1.000000148 \cdot 10^{30}$	$9.99 \cdot 10^{30}$
	$N_{iter,moy}$	1	1	2
NLMPFA	PSD_{min}	$3.95 \cdot 10^{26}$	$4.06 \cdot 10^{26}$	$4.96 \cdot 10^{26}$
	PSD_{max}	$9.99 \cdot 10^{26}$	$9.99 \cdot 10^{26}$	$9.99 \cdot 10^{26}$
	$N_{iter,moy}$	1.23	7.87	224.44
	$\%_{relax,moy}$	0	0.12	43.01
	$\%_{no-conv}$	0	0	50
NLMONOT	PSD_{min}	$4.12 \cdot 10^{26}$	$4.34 \cdot 10^{26}$	$5.18 \cdot 10^{26}$
	PSD_{max}	$9.99 \cdot 10^{29}$	$9.99 \cdot 10^{29}$	$9.99 \cdot 10^{29}$
	$N_{iter,moy}$	1	1.01	3.11

TABLEAU III.12 – Résultats des simulations transitoires au plan $L^* = 4.49$ avec $t_{simu} = 90000s$ pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT, avec la grille complète pour différents Δt .

Le tableau III.12 présente les résultats de ces simulations transitoires et on y rapporte pour chacun des trois schémas et pour 3 pas de temps différents : les valeurs maximales et minimales de la fonction de distribution f notée PSD , le nombre d'itérations non-linéaire moyenné sur tous les incréments temporels et le pourcentage des itérations non-linéaires "perdus" dans les relaxations.

Tout d'abord, on observe pour les trois schémas, la diminution de $N_{iter,moy}$ plus Δt est faible. Cela est prévisible vu qu'un Δt plus faible implique une évolution plus lente de la dynamique entre deux incréments temporels successifs, et la réduction du "chemin que doit parcourir" l'algorithme de Picard pour converger. On voit aussi qu'avec les schémas NLTPFA et NLMPFA, le coût de la résolution non-linéaire est pratiquement égale à une résolution linéaire ($N_{iter,moy} \sim 1$) pour les pas de temps de 100s et 1000s. En revanche, on observe avec le schéma NLMPFA un nombre d'itérations non-linéaire 7 fois plus grand avec $\Delta t = 1000s$. Pour $\Delta t = 10000s$, la résurgence des relaxations du résidu font grimer $N_{iter,moy}$ à 224.44 (plus de 40% des itérations non-linéaires "perdus" dans les relaxations). Pire, la convergence n'est pas atteinte avec ce schéma même après 300 itérations non-linéaires dans plus 50% des itérations temporelles, comme le montre la figure III.35.

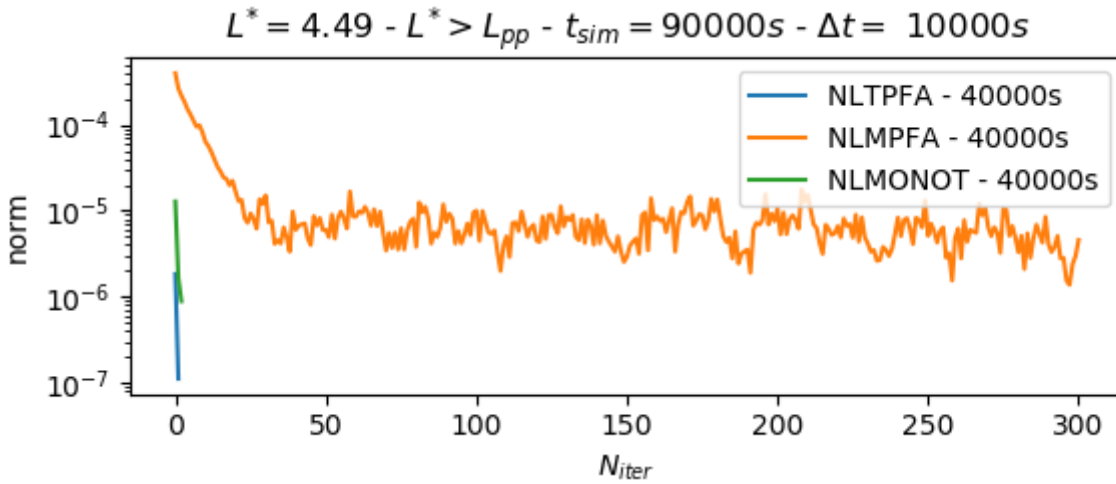


FIGURE III.35 – Courbes d'évolution de la norme d'itérations non-linéaires pour les schémas NLTPFA, NLMPFA et NLMONOT à $t_{simu} = 40000s$ et pour $\Delta t = 10000s$.

Si on s'intéresse maintenant aux valeurs extrémales atteintes par la PSD pour les trois schémas, on voit que le schéma NLTPFA affiche une rupture du principe du maximum ($\max_{\partial\Omega_1}(\bar{f}) = \bar{f}(E_{min}) = 10^{30}$), un phénomène qu'on a pas observé dans les cas jouets numériques. Toutefois, ces *overshoots* n'ont pas une grande incidence sur la fonction de distribution, car comme le montre la figure III.36, ils impactent au maximum la 4ème décimale de la fonction de distribution. De plus, ils s'estompent au fil de l'avancement de la simulation (le ratio d'overshoots Ro atteint un maximum 5% puis diminue au fil de la simulation pour atteindre moins de 0.5% à t_{simu}). En revanche, NLMONOT respecte ici aussi le principe du maximum, ce qui porte à croire que le caractère local des conditions de monotonie de *Nordbotten* l'aide à préserver le principe du maximum.

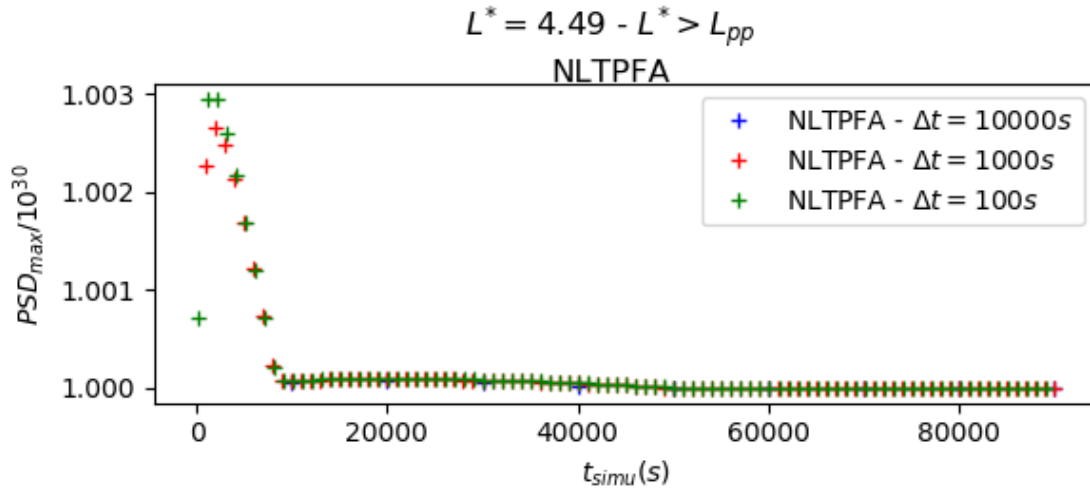


FIGURE III.36 – Évolution temporelle du ratio PSD maximale observée et la limite fixée par la physique, pour la simulation transitoire avec le schéma NLTPFA, pour différents Δt .

Nous avons vu dans la partie III.3.3.4 que l'estimation du résidu était meilleure avec la norme 2 et qu'elle serait adaptée à une évolution transitoire raide. Ce choix est confirmé dans le cas réel par les résultats de l'investigation numérique suivante. A la configuration de diffusion étudiée dans cette partie III.3.4 qui impose une condition aux limites de Dirichlet $f(E_{min}) = 10^{30}$, on considère une deuxième configuration qui impose une condition aux limites de Dirichlet $f(E_{min}) = 0$. Les deux configurations sont ensuite simulées avec le schéma NLMPFA, en calculant le résidu de l'algorithme de Picard par la norme ∞ d'un premier temps et par la norme ∞ dans un second temps. On rapporte dans la figure III.37 l'évolution du résidu de la dernière itération temporelle ($n = 90$) des 4 simulations décrites précédemment, en fonction du nombre d'itérations non-linéaire. On voit que les deux simulations dans lesquelles la norme 2 est utilisée ont pratiquement la même évolution de résidu, alors qu'avec la norme ∞ , les courbes du résidu sont différentes. Cela s'explique par le fait que les solutions numériques des deux configurations sont différentes (deux conditions aux limites différentes). Par conséquent, comme la norme ∞ est liée au profil de la fonction, le résidu réagit différemment entre les deux simulations. Cependant, les deux configurations ont la même matrice de discrétisation et leurs seconds membres sont dominés par le terme temporel (le vecteur de f à l'instant n). Ainsi, la norme 2, liée au système matriciel à résoudre, va pratiquement voir la même évolution, dans les deux configurations. Par conséquent, il serait judicieux de conserver le choix de la norme 2 pour le calcul du résidu, comme elle sera moins impactée par les inhomogénéités locales.

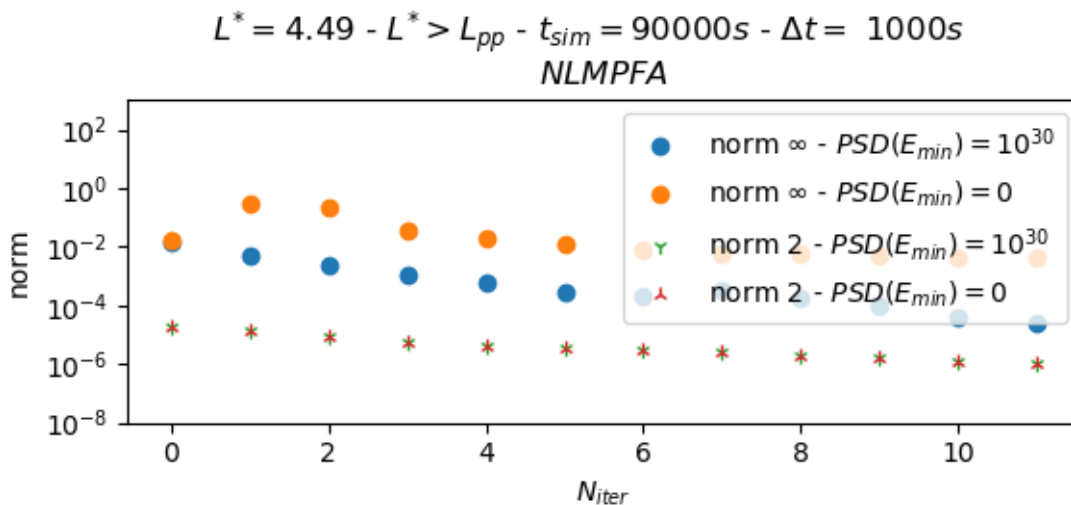


FIGURE III.37 – Impacts des conditions aux limites sur les normes de la résolution non-linéaires.

Comme les schémas NLTPFA et NLMONOT ont présenté de meilleurs résultats de convergence de la résolution non-linéaire, on décide d'étendre avec eux la simulation 2D sur tous les plans L^* à l'extérieur de la plasmasphère pour $Kp = 6$. On rapporte dans la figure III.38, les cartographies de N_{iter} à chaque itération temporelle, sur chaque plan L^* , pour trois différents Δt . On y observe que les niveaux de N_{iter} des deux schémas sont très raisonnables et ne changent pas radicalement sur un même plan L^* . De plus, le schéma NLTPFA présente des résultats légèrement plus compétitifs.

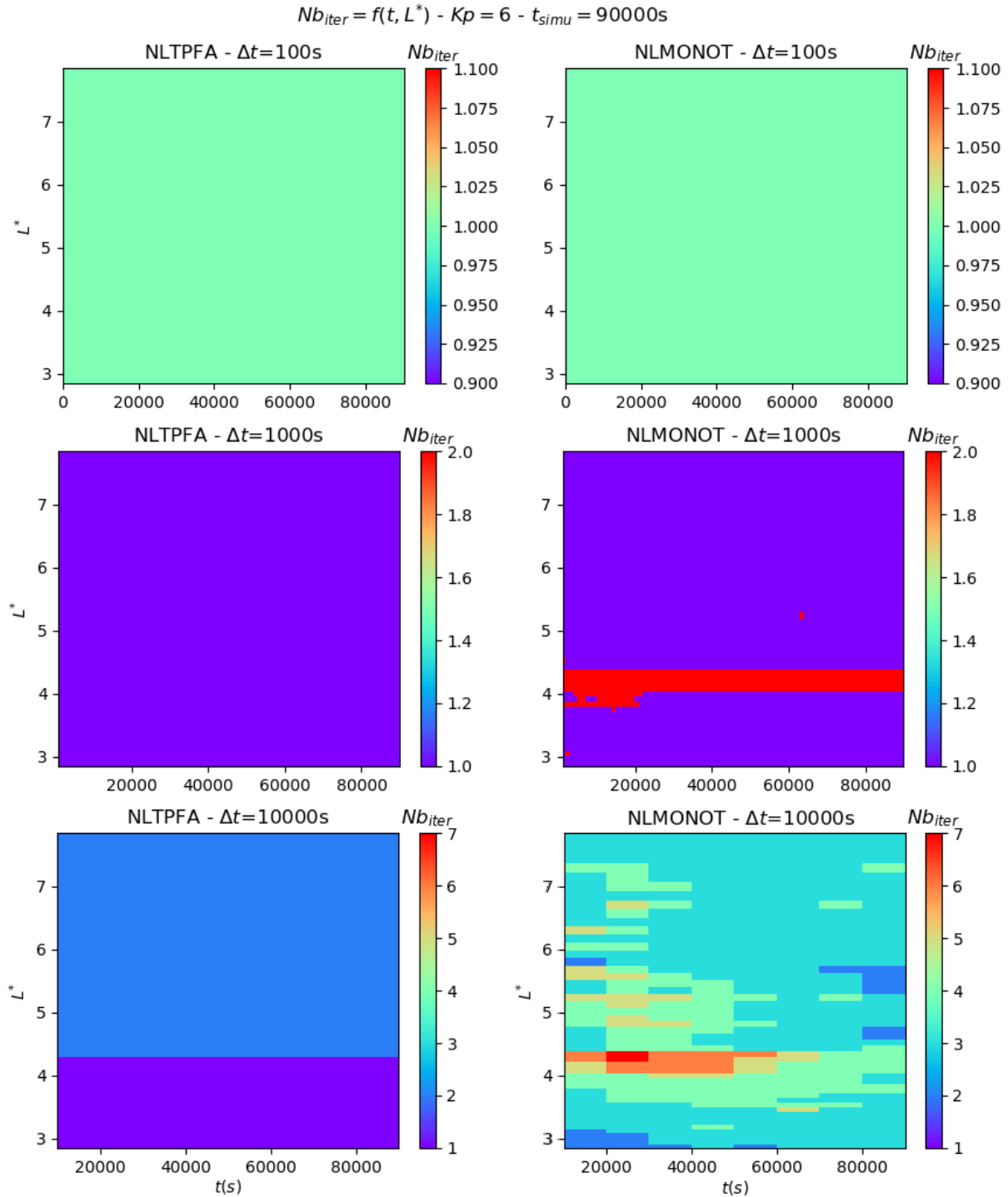


FIGURE III.38 – Cartographie de N_{iter} des simulations (en grille complète (y, E)) avec les schémas NLTPFA et NLMONOT, en fonction de t et de L^* pour $\Delta t = 100, 1000, 10000s$ avec $Kp = 6$ et $t_{simu} = 90000s$.

Le test précédent est reproduit sur le problème diffusif 2D formulé avec les coordonnées (V, K, L^*) et on rapporte dans la figure III.39 les cartographies de N_{iter} pour différents Δt .

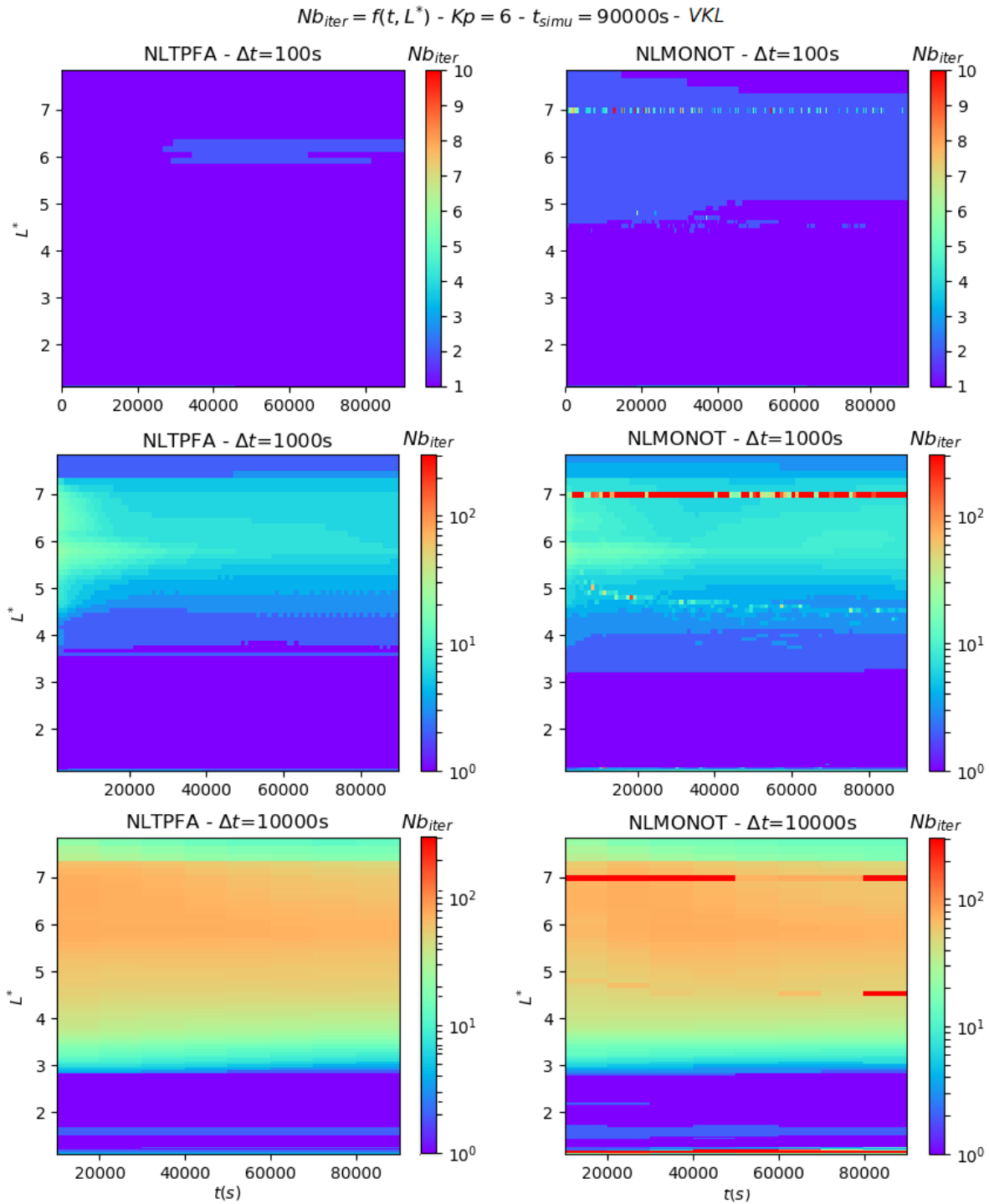


FIGURE III.39 – Cartographie de N_{iter} des simulations (en grille complète (K, V)) avec les schémas NLTPFA et NLMONOT, en fonction de t et de L^* pour $\Delta t = 100, 1000, 10000s$ avec $Kp = 6$ et $t_{simu} = 90000s$.

Comme on l'a vu précédemment, cette transformation introduit des niveaux d'anisotropie plus forts. On se trouve donc avec N_{iter} plus grands. En particulier, les grandes valeurs sont localisées principalement aux plans L^* à l'extérieur de la plasmasphère. Pour de faibles valeurs de L^* , le coût

de la résolution non-linéaire est beaucoup plus faible, mais reste plus coûteux qu'avec la formulation (y, E, L^*) (traitée avec un schéma linéaire). Le schéma NLTPFA reste légèrement plus compétitif que le schéma NLMONOT, mais ses *overshoots* sont beaucoup prononcés que dans le cas de la formulation (y, E, L^*) ($f_{max} \approx 1.1 \cdot 10^{30}$). On observe aussi l'émergence du phénomène de relaxation avec le schéma NLMONOT, voire même une non-convergence (après 300 itérations) y compris avec $\Delta t = 1000s$. Ces relaxations se produisent sur les plans L^* à l'extérieur de la plasmasphère, où l'incertitude sur l'estimation de l'interaction avec les ondes est conséquente. Cela peut avoir un impact sur le modèle diffusif, qui peut se répercuter sur la résolution non-linéaire.

III.3.5 Obtient-on la monotonie du schéma *LIN 2* si on généralise sa construction ?

Avant d'entériner définitivement la possibilité d'une résolution linéaire et monotone de la diffusion locale, on réalise l'analyse de la monotonie d'une forme généralisée du schéma *LIN 2*. On considère en particulier, un schéma VF dont l'expression inclut toutes les inconnues aux centres des cellules se trouvant au voisinage direct de l'interface, pondérées avec les facteurs $a_p^{S_i}$:

$$\begin{aligned} F_C^{S_i} &= \gamma_1^{S_i}(f_C - f_M) \\ &+ a_1^{S_i} \gamma_2^{S_i}(f_C - f_{N_C}) + a_2^{S_i} \gamma_2^{\prime S_i}(f_{N'(C)} - f_C) \\ &+ a_3^{S_i} \gamma_3^{S_i}(f_{N_M} - f_M) + a_4^{S_i} \gamma_3^{\prime S_i}(f_M - f_{N'(M)}) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

avec

$$\sum_{p=1}^4 a_p^{S_i} = 1 \quad (\text{III.32})$$

Bien que le choix de $a_p^{S_i}$ ait une influence sur la précision et l'ordre du schéma, on cherche avec cette étude à identifier s'il existe déjà une potentielle relaxation de la contrainte observée sur les conditions **A3**, à travers une condition à imposer sur les $a_p^{S_i}$.

On commence d'abord par estimer les termes m_k de la matrice de discrétisation du problème stationnaire :

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 &= \gamma_1^{S_1} + \gamma_1^{S_2} + \gamma_1^{S_3} + \gamma_1^{S_4} + a_1^{S_1} \gamma_2^{S_1} + a_1^{S_2} \gamma_2^{S_2} + a_1^{S_3} \gamma_2^{S_3} + a_1^{S_4} \gamma_2^{S_4} \\ &\quad - a_2^{S_1} \gamma_2^{\prime S_1} - a_2^{S_2} \gamma_2^{\prime S_2} - a_2^{S_3} \gamma_2^{\prime S_3} - a_2^{S_4} \gamma_2^{\prime S_4} \\ m_2 &= -\gamma_1^{S_1} - a_3^{S_1} \gamma_3^{S_1} + a_4^{S_1} \gamma_3^{\prime S_1} - a_1^{S_2} \gamma_2^{S_2} + a_2^{S_4} \gamma_2^{\prime S_4} \\ m_3 &= -a_4^{S_1} \gamma_3^{\prime S_1} - a_4^{S_2} \gamma_3^{\prime S_2} \\ m_4 &= -\gamma_1^{S_2} - a_3^{S_2} \gamma_3^{S_2} + a_4^{S_2} \gamma_3^{\prime S_2} - a_1^{S_1} \gamma_2^{S_1} + a_2^{S_3} \gamma_2^{\prime S_3} \\ m_5 &= a_3^{S_2} \gamma_3^{S_2} + a_3^{S_3} \gamma_3^{S_3} \\ m_6 &= -\gamma_1^{S_3} - a_3^{S_3} \gamma_3^{S_3} + a_4^{S_3} \gamma_3^{\prime S_3} - a_1^{S_4} \gamma_2^{S_4} + a_2^{S_2} \gamma_2^{\prime S_2} \\ m_7 &= -a_4^{S_3} \gamma_3^{\prime S_3} - a_4^{S_4} \gamma_3^{\prime S_4} \\ m_8 &= -\gamma_1^{S_4} - a_3^{S_4} \gamma_3^{S_4} + a_4^{S_4} \gamma_3^{\prime S_4} - a_1^{S_3} \gamma_2^{S_3} + a_2^{S_1} \gamma_2^{\prime S_1} \\ m_9 &= a_3^{S_1} \gamma_3^{S_1} + a_3^{S_4} \gamma_3^{S_4} \end{aligned} \right. \quad (\text{III.33})$$

La conservation des flux de part et d'autre de chaque interface impose $\forall i \in \{1, 2\}$:

$$F_C^{Si} = F_M^{Si+2} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} F_C^{Si} &= \gamma_1^{Si}(f_C - f_M) \\ &+ a_1^{Si} \gamma_2^{Si}(f_C - f_{N_C}) + a_2^{Si} \gamma_2'^{Si}(f_{N'(C)} - f_C) \\ &+ a_3^{Si} \gamma_3^{Si}(f_{N_M} - f_M) + a_4^{Si} \gamma_3'^{Si}(f_M - f_{N'(M)}) \\ &= F_M^{Si+2} = \gamma_1^{Si}(f_C - f_M) \\ &+ a_1^{Si} \gamma_2^{Si}(f_C - f_{N_C}) + a_2^{Si} \gamma_2'^{Si}(f_{N'(C)} - f_C) \\ &+ a_3^{Si} \gamma_3^{Si}(f_{N_M} - f_M) + a_4^{Si} \gamma_3'^{Si}(f_M - f_{N'(M)}) \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Par identification des transmissibilités, il faut imposer le égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_1^{Si} &= a_3^{Si+2} \\ a_2^{Si} &= a_4^{Si+2} \\ a_3^{Si} &= a_1^{Si+2} \\ a_4^{Si} &= a_2^{Si+2} \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Ces égalités permettent d'alléger le nombre de facteurs à fixer (on passe de 16 à 8). Dans ce qui suit, on choisi de travailler avec les coefficients a_p^{S1} et a_p^{S2} . On retourne au cas d'étude simplifié du tenseur homogène avec un maillage cartésien uniforme et on rapporte les nouvelles expressions des termes m_k :

$$\begin{cases} m_1 = 2\alpha + 2 + (a_1^{S1} + a_1^{S2} + a_3^{S1} + a_3^{S2} - a_2^{S1} - a_2^{S2} - a_4^{S1} - a_4^{S2})\lambda \\ m_2 = -\alpha + (-a_3^{S1} + a_4^{S1} - a_1^{S2} + a_4^{S2})\lambda \\ m_3 = -(a_4^{S1} + a_4^{S2})\lambda \\ m_4 = -1 + (-a_3^{S2} + a_4^{S2} - a_1^{S1} + a_4^{S1})\lambda \\ m_5 = (a_3^{S2} + a_1^{S1})\lambda \\ m_6 = -\alpha + (-a_1^{S1} + a_2^{S1} - a_3^{S2} + a_2^{S2})\lambda \\ m_7 = -(a_2^{S1} + a_2^{S2})\lambda \\ m_8 = -1 + (-a_1^{S2} + a_2^{S2} - a_3^{S1} + a_2^{S1})\lambda \\ m_9 = (a_3^{S1} + a_1^{S2})\lambda \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

On considère maintenant le cas asymptotique impossible à vérifier $\alpha \gg \lambda \gg 1$. Pour assurer les conditions **A3**, on peut soit jouer sur le signe des m_{2p+1} , soit réduire leurs intensités.

Si on choisit de travailler sur le signe des termes du coin, on impose $m_3, m_5, m_7, m_9 < 0$, et on fait apparaître les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
m_2 &= -\alpha - m_3 - m_9 \\
m_4 &= -1 - m_5 - m_3 \\
m_6 &= -\alpha - m_5 - m_7 \\
m_8 &= -1 - m_7 - m_8
\end{aligned} \tag{III.38}$$

Il faut en même temps vérifier les conditions **A1** et **A2** ($m_{2p} < 0$). Donc il faut que $|m_{2p+1}| \ll 1$ (provenant de m_4 et m_8). Ainsi, on obtient les conditions suivantes sur les facteurs de pondération :

$$\begin{aligned}
0 &\leq a_4^{S1} + a_4^{S2} \ll 1 \\
-1 &\ll a_3^{S2} + a_1^{S1} \leq 0 \\
0 &\leq a_2^{S1} + a_2^{S2} \ll 1 \\
-1 &\ll a_2^{S1} + a_2^{S2} \leq 0
\end{aligned} \tag{III.39}$$

Ces inégalités sont impossibles à vérifier étant donné que :

$$a_4^{S1} + a_4^{S2} + a_3^{S2} + a_1^{S1} + a_2^{S1} + a_2^{S2} + a_2^{S1} + a_2^{S2} = 2 \tag{III.40}$$

Si on choisit maintenant d'assurer **A3** en réduisant l'intensité des m_{2p+1} indépendamment de leur signe, on doit imposer :

$$\sum_{p=1}^4 |m_{2p+1}| \ll 1 \tag{III.41}$$

Ce qui mène vers une contradiction :

$$\underbrace{|a_4^{S1} + a_4^{S2} + a_3^{S2} + a_1^{S1} + a_2^{S1} + a_2^{S2} + a_3^{S1} + a_1^{S2}|}_{=2} \leq |a_4^{S1} + a_4^{S2}| + |a_3^{S2} + a_1^{S1}| + |a_2^{S1} + a_2^{S2}| + |a_3^{S1} + a_1^{S2}| \ll 1 \tag{III.42}$$

En réalité, la difficulté d'identifier une combinaison adéquate au cas asymptotique, provient du "vase communicant" créé par la propriété de conservation. Si on décide de réduire fortement le facteur associé à m_{2p+1} pour faire respecter **A3**, alors ce choix s'impose aussi sur le poids m_{2p} du flux traversant la même surface mais vu dans le sens opposé, ce qui va nuire au respect des conditions **A0** et **A1**.

Pour confirmer ces résultats, on réalise une étude paramétrique dans laquelle on balaye un grand nombre de combinaisons de a_1^{S1} et a_1^{S2} possibles, et on calcule pour chaque combinaison, le ratio de termes négatifs de l'inverse de la matrice de discrétisation. Cette étude dépasse le cadre des conditions de *Nordbotten* vu qu'on regarde la monotonie de la matrice de discrétisation du point de vue de son inverse. On rapporte dans la figure III.40 les résultats des études paramétriques pour $\alpha = 10^5 \gg \lambda = 10^2 \gg 1$, avec un raffinement grossier $N_x = N_y = 10$ et pour 4 hypothèses sur les facteurs a_1^{S1} et a_1^{S2} :

$$\begin{cases}
\text{Cas 1 : } a_1^{S1} = a_2^{S1} \text{ et } a_1^{S2} = a_2^{S2} \\
\text{Cas 2 : } a_1^{S1} = a_3^{S1} \text{ et } a_1^{S2} = a_3^{S2} \\
\text{Cas 3 : } a_1^{S1} = a_2^{S1} \text{ et } a_1^{S2} = a_3^{S2} \\
\text{Cas 4 : } a_1^{S1} = a_3^{S1} \text{ et } a_1^{S2} = a_2^{S2}
\end{cases} \tag{III.43}$$

Etude paramétrique sur la monotonie

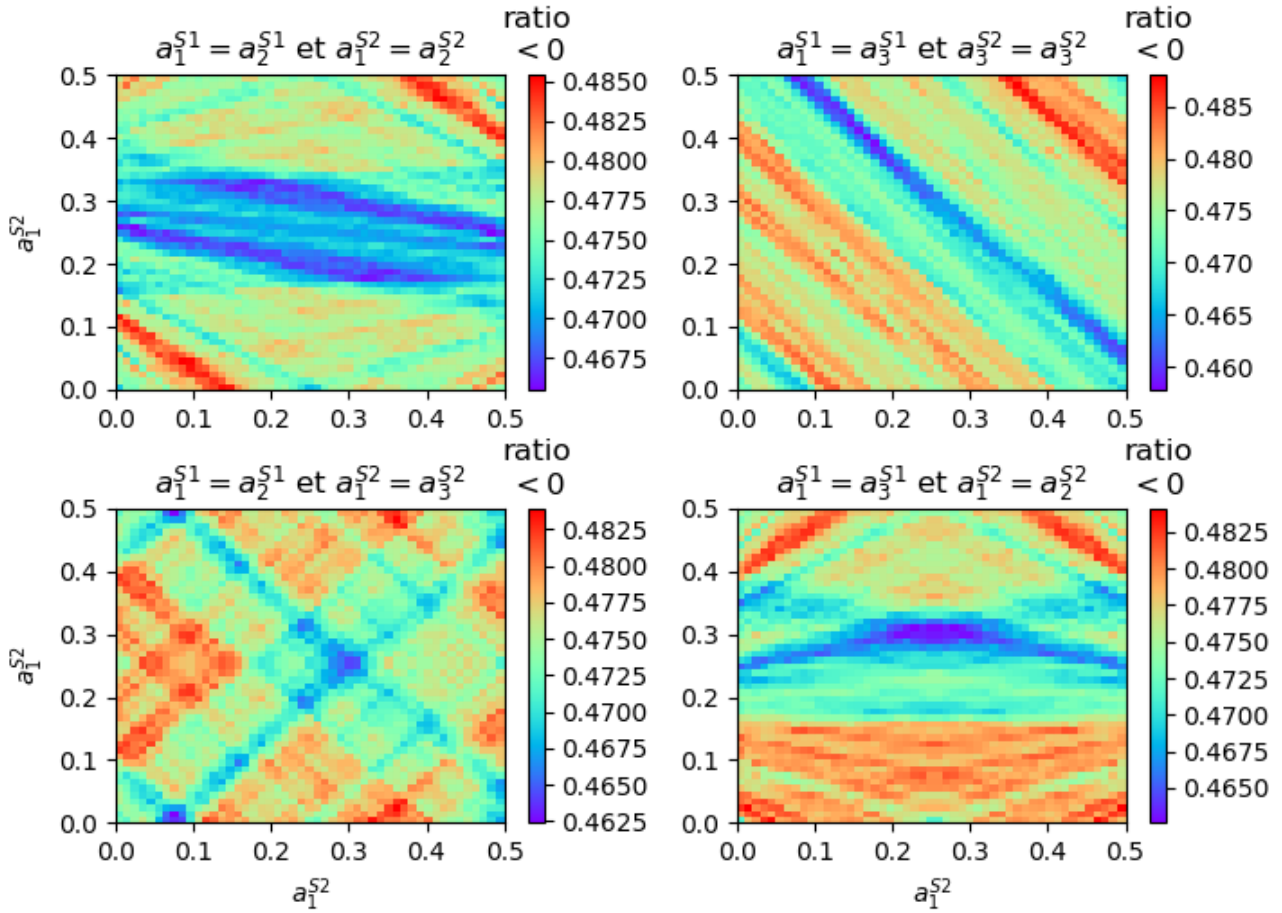


FIGURE III.40 – Étude paramétrique sur le ratio de valeurs négatives de l'inverse de la matrice de discrétisation en fonction de a_1^{S1} et a_1^{S2} , pour 4 hypothèses sur le lien entre les facteurs de pondération.

On voit qu'on atteint au mieux un ratio de valeurs négatives de 0.45 dans les 4 cas et il n'y a pas de tendance de baisse du ratio qui se dessine, bien qu'on ait balayé un nombre de cas non négligeables. La même étude est réalisée pour d'autres choix de α et λ respectant le cadre asymptotique $\alpha \gg \lambda \gg 1$ avec des balayages de a_1^{S1} et a_1^{S2} plus fins (le raffinement utilisé ici est de 0.04) et des maillages plus fins. Dans chacune de ces études, on se retrouve avec les mêmes profils de ratio, très éloignés de 0. Par conséquent, la piste d'une résolution linéaire monotone pour la diffusion locale est abandonnée définitivement, au profit d'une résolution non-linéaire.

III.3.6 Conclusion

Plusieurs conclusions sont à tirer de l'investigation relative à l'anisotropie. Tout d'abord, on a pu constater la forte contrainte imposée par la diffusion locale sur la monotonie des schémas VF linéaires. Même en considérant des conditions générales moins restrictives, nous avons constaté que le déséquilibre inhérent entre les directions de diffusion était le principale responsable de la non validation de ces conditions sur la grille de résolution du nouveau coeur. Ce déséquilibre est tellement fort qu'il ne laisse aucune marge pour un quelconque contrôle de la monotonie par le raffinement du maillage. De plus, quand le stencil du schéma linéaire *LIN 2* a été généralisé sur toutes les cellules voisines disponibles, aucune tendance ne s'est profilée quant à une éventuelle monotonie de ce schéma généralisé. Ce résultat clôt la piste d'une résolution de notre problème de diffusion particulier, avec un schéma linéaire monotone sur une grille cartésienne. Par conséquent, les schémas VF non-linéaires représentent la seule alternative possible permettant d'assurer la robustesse de la résolution en présence

de la diffusion croisée. Au duo de schémas non-linéaires de la littérature à savoir NLTPFA, NLMPFA, nous proposons un nouveau schéma non-linéaire inédit NLMONOT, qui puise de son respect des conditions de Nordbotten, une propriété de monotonie locale protégeant sa solution des oscillations internes.

Le passage vers une résolution par un schéma non-linéaire introduit évidemment un temps de calcul supplémentaire, relatif à la résolution itérative. De plus, comme la résolution non-linéaire fait tomber l'équivalence entre les propriétés de positivité et le respect du principe du min/max, on se retrouve avec différentes constructions de schémas, chacune associée à une propriété de robustesse particulière. Comme les premiers tests numériques ont montré un coût computationnel conséquent, nous avons cherché à optimiser les paramètres de l'algorithme de Picard utilisé dans la résolution itérative, à savoir la qualité de l'initialisation de l'algorithme, son seuil de convergence et la logique d'estimation du résidu. Nous préconisons en particulier :

- Une initialisation de la résolution par la solution d'un schéma linéaire (*LIN 1*) filtrée des artefacts.
- Le choix d'un seuil de sortie des itérations qui conserve une précision à l'ordre 2 sur la grille fine de Salammbô.
- Le calcul du résidu sur la base de la convergence du système matriciel et non sur la solution du système très sensible aux inhomogénéités locales.

Ces études ont en particulier mis en lumière le phénomène de relaxation du résidu qui pouvait retarder voir empêcher la convergence de l'algorithme de Picard. Ce phénomène a été observé fréquemment avec le schéma NLMPFA, rarement avec le schéma NLMONOT et aucune fois avec le schéma NLTPFA. Nous avons donc décidé de sélectionner ces deux derniers schémas pour notre application physique, sachant qu'ils présentent à eux deux des nombres d'itérations non-linéaires moyens très proches. Dans les faits, c'est le schéma NLTPFA qui est plus rapide, comme le montre le tableau III.13 qui rapporte le coût unitaire des opérations sur la matrice de discrétisation des deux schémas en situation de diffusion réelle. Cette différence d'environ 30% dans les temps de calcul s'explique par la différence de stencil des deux schémas. En effet, le schéma NLMONOT avec son stencil élargi à 9 points (5 points pour le schéma NLTPFA) nécessitera plus de temps de construction de sa matrice de discrétisation (9 diagonales à remplir au lieu de 5) et donc plus de temps pour réaliser la résolution *sparse* (avec la fonction *spsolve* du module *scipy* de python). Quant au choix à faire entre les deux schémas pour le nouveau coeur, nous

Schéma	NLTPFA	NLMONOT
Construction de la matrice de discrétisation	$5.29 \cdot 10^{-3}$	$6.85 \cdot 10^{-3}$
Résolution du système matriciel	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$6.75 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU III.13 – Temps de calcul unitaire en secondes des différentes opérations matricielles invoquées lors de la résolution des schémas VF non-linéaire NLTPFA et NLMONOT à $L^* = 4.49$ sur la grille fine de Salammbô.

optons pour la liberté de sélection par l'utilisateur entre NLTPFA et NLMONOT, selon la précision voulue, le temps de simulation et la propriété de robustesse qu'il cherche à conserver à minima dans la solution et on préconise :

- Le schéma NLTPFA pour une résolution rapide, assurant à minima la positivité ainsi qu'une bonne précision, au risque de rompre le principe du maximum par des oscillations internes. Ce choix est pertinent par exemple pour des temps de simulation longs, ou encore pour estimer finement des processus localisés sur la grille complète de Salammbô.
- Le schéma NLMONOT pour une résolution moins rapide qui assure à la fois la positivité et l'absence d'oscillations internes, mais qui est moins précise. Ce choix est pertinent par exemple pour des temps de simulation courts, ou encore pour bien identifier l'origine des pics de la fonction de distribution à l'intérieur du domaine.

III.4 Mise en oeuvre d'un schéma numérique dédié à la diffusion radiale

Du fait de l'impossibilité d'une résolution VF du problème diffusif 3D formulé sur la grille DF (y, E, L^*) de Salammbô, nous avons évoqué dans la partie II.5 le passage obligatoire par une méthode de *splitting* temporel qui sépare les deux niveaux de diffusion locale et radiale. Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi d'adopter la technique de *splitting* de Lie[154] qui sera associée à une intégration Euler implicite. La résolution temporelle 3D du nouveau coeur s'effectuera donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta t \mathcal{L}_{loc} \tilde{f} + \tilde{f} &= f^n \\ -\Delta t \mathcal{L}_{L^*} f^{n+1} + f^{n+1} &= \tilde{f} \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

avec \mathcal{L}_{loc} et \mathcal{L}_{L^*} les opérateurs de diffusion respectivement locale et radiale.

Maintenant, en ce qui concerne la contrainte imposée par le maillage (y, E, L^*) sur la discrétisation de la diffusion radiale conservant μ et J , nous avons décidé d'implémenter un schéma numérique dédié à la diffusion radiale, inspiré de la méthode VF et qui suit la logique de discrétisation actuelle dans Salammbô DF. On va donc dans cette section, rappeler cette logique de discrétisation, présenter le nouveau schéma radial dédié et conclure par une application de ce schéma dans un cas de diffusion transitoire réelle.

III.4.1 Logique de discrétisation de la diffusion radiale dans le coeur numérique actuel de Salammbô

Soit un noeud de la grille DF (y, E, L^*) d'indices i, j, k , pour lequel on rappelle la portion de discrétisation dans l'équation I.26 relative à la diffusion radiale :

$$f_{i,j,k}^{n+1} = (1 - H_0) f_{i,j,k}^n + H_1 f_a^n + H_2 f_c^n \quad (\text{III.45})$$

f_c^n, f_a^n sont les valeurs de la fonction de distribution à l'instant n respectivement au noeud radial $k+1$ et $k-1$, conservant μ et J de ce noeud (à l'angle d'attaque $y_{i,k}$, à l'énergie $E_{j,k}$ et à la distance radiale L_k^*) et H_0, H_1 et H_2 les poids de discrétisation de la dérivation radiale (voir équation I.26).

Si on pose les noeuds fictifs (y_c, E_c, L_{k+1}^*) et (y_a, E_a, L_{k-1}^*) associés respectivement à f_c et f_a , alors :

- La construction de la grille y de Salammbô impose $y_c = y_a = y_i$. La diffusion radiale du noeud i, j, k s'opère dans le plan des noeuds du même indice i .
- La construction de la grille E de Salammbô fait que E_c et E_a sont respectivement bornées par $E_{j+1,k+1}$ et $E_{j,k+1}$ et $E_{j,k-1}$ et $E_{j-1,k-1}$, comme le montre la figure III.41.

Par la suite, f_c^n et f_a^n sont respectivement interpolés à partir de $f_{i,j,k+1}^n, f_{i,j+1,k+1}^n$ et $f_{i,j,k-1}^n, f_{i,j-1,k-1}^n$ (voir figure III.41).

Avec cette méthode, la diffusion radiale dans Salammbô est opérée sur une grille unique (y, E, L^*) , qui permet d'éviter les interpolations coûteuses en précision et en temps de calcul, dans le cas d'une stratégie de double grille (grille (y, E, L^*) pour la diffusion locale et grille (μ, J, L^*) pour la diffusion radiale).

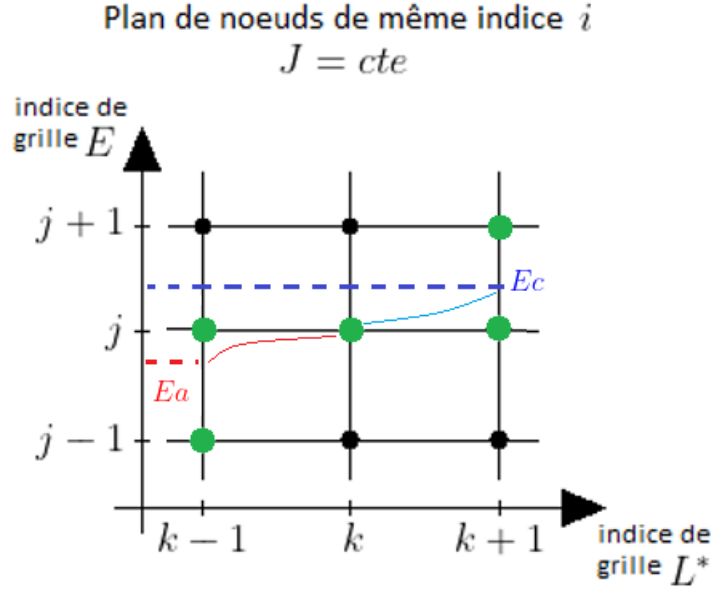


FIGURE III.41 – Traitement de la diffusion radiale dans le coeur actuel de Salammbô.

Notons que l'équation (III.45) peut être reformulée avec seulement les inconnues des noeuds du maillage, en exprimant f_c et f_a par une combinaison convexe des inconnus évaluées aux noeuds voisins :

$$\begin{aligned} f_c^n &= \alpha f_{i,j,k+1}^n + (1 - \alpha^n) f_{i,j+1,k+1} \\ f_a &= \beta f_{i,j,k-1}^n + (1 - \beta^n) f_{i,j-1,k-1}^n \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \frac{f_{i,j+1,k+1}^n - f_c^n}{f_{i,j+1,k+1}^n - f_{i,j,k+1}^n} \\ \beta^n &= \frac{f_{i,j-1,k-1}^n - f_a^n}{f_{i,j-1,k-1}^n - f_{i,j,k-1}^n} \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Ce qui donne la forme suivante de la discrétisation :

$$f_{i,j,k}^{n+1} = (1 - E_0) f_{i,j,k}^n + \beta E_1 f_{i,j,k-1}^n + (1 - \beta) f_{i,j-1,k-1}^n + \alpha E_2 f_{i,j,k+1}^n + (1 - \alpha) E_2 f_{i,j+1,k+1}^n \quad (\text{III.48})$$

III.4.2 Construction et propriétés numériques du nouveau schéma radial

On considère maintenant une cellule du nouveau maillage VF (y, E, L^*) d'indices i, j, k . On reprend la discrétisation par le schéma *LIN 1* du flux sortant d'une cellule d'indice k vers la cellule d'indice $k+1$:

$$F_{k \rightarrow k+1} = D^{k+1/2} \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (\text{III.49})$$

et on fait suivre la direction réelle de diffusion radiale dans la discrétisation en choisissant $f_{k+1} = f_c$ qu'on approche par (III.46). Cela donne l'expression suivante :

$$F_{j,k \rightarrow j,k+1} = \alpha^{j,k \rightarrow j,k+1} D_{L^* L^*}^{k+1/2} \frac{f_{j,k} - f_{j,k+1}}{L^*(k+1) - L^*(k)} + (1 - \alpha^{j,k \rightarrow j,k+1}) D_{L^* L^*}^{i+1/2} \frac{f_{j,k} - f_{j+1,k+1}}{L^*(k+1) - L^*(k)} \quad (\text{III.50})$$

On définit de la même manière le flux dirigé vers les L^* décroissants par :

$$F_{j,k \rightarrow j,k+1} = \alpha^{j,k \rightarrow j,k+1} D_{L^* L^*}^{k+1/2} \frac{f_{j,k} - f_{j,k+1}}{L^*(k+1) - L^*(k)} + (1 - \alpha^{j,k \rightarrow j,k+1}) D_{L^* L^*}^{i+1/2} \frac{f_{j,k} - f_{j+1,k+1}}{L^*(k+1) - L^*(k)} \quad (\text{III.51})$$

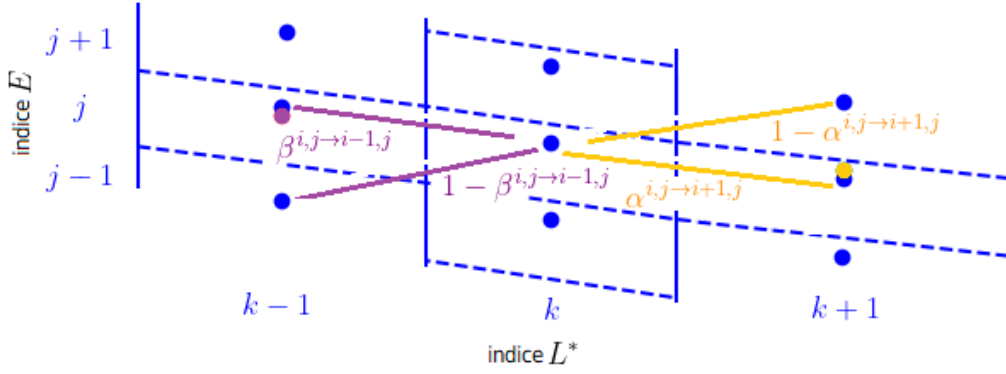


FIGURE III.42 – Schéma explicatif de la nouvelle discrétisation de la diffusion radiale.

Avec ce nouveau schéma à 5 points "pseudo-2D" (voir figure III.42), on apporte à la discrétisation radiale :

- une meilleure gestion de l'inhomogénéité en contournant l'estimation du gradient de coefficient de diffusion radiale (comme on l'a exposé dans la section I.4.2.3).
- une discrétisation monotone par une structure M -matrice (Z -matrice à diagonale dominante).

Cependant, la propriété de conservation des flux est perdue car le stencil non-symétrique du schéma entre $k - 1$ et $k + 1$ fait que $F_{j,k \rightarrow j,k+1} \neq F_{j,k+1 \rightarrow j,k}$.

De plus, en associant ce nouveau schéma radial à une intégration temporelle implicite (Euler implicite par exemple), les facteurs de pondération α, β seront évalués à l'instant $n + 1$ car ils vont contenir les inconnues de l'équation à l'instant $n + 1$. Cela impose donc une non-linéarité au nouveau schéma radial, qui risque d'alourdir le temps de calcul.

III.4.3 Application du nouveau schéma sur un problème de diffusion radiale transitoire réelle

On simule avec ce nouveau schéma, 90000s de diffusion radiale transitoire avec un coefficient de diffusion réel pris à $Kp = 2$ (voir figure III.43), en partant d'un état vide et en imposant une condition de Dirichlet homogène à L_{min}^* et une condition aux limites de Dirichlet $\bar{f}(L^* = 8) = 10^{30}$ à L_{max}^* .

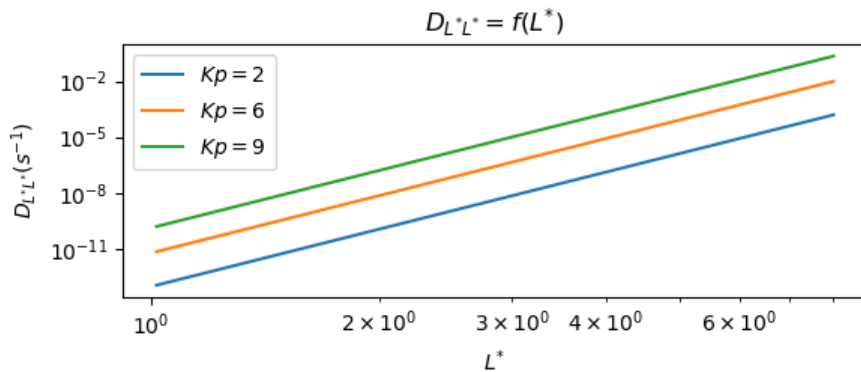


FIGURE III.43 – Evolution du coefficient de diffusion radiale $D_{L^*L^*}$ en fonction de L^* , pour différents Kp .

La partie gauche de la figure III.44 montre l'établissement d'un front de propagation de la fonction de distribution, partir des premiers instants du calcul, remplissant l'intérieur du domaine de calcul par la condition aux limites à L_{max} . Plus on avance dans la simulation et plus un plateau de la fonction de distribution s'installe pour L^* grand à μ et J constants. Au bout d'un jour de simulation (temps

caractéristique de la diffusion radiale), l'évolution transitoire de la fonction de distribution s'estompe, ce qui signale l'établissement d'un régime stationnaire.

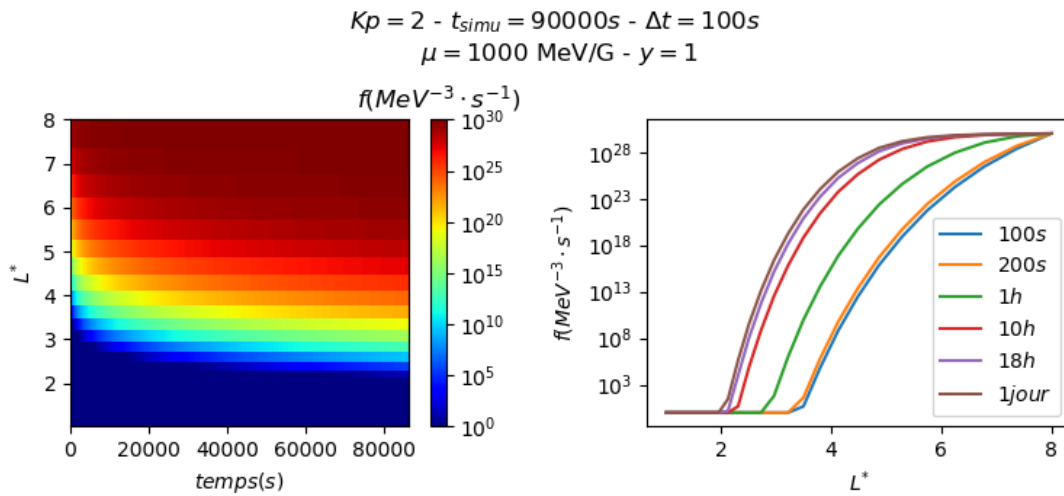


FIGURE III.44 – Résultat de la simulation avec le schéma de diffusion radiale à $Kp = 2$ et avec $\bar{f} = 10^{30}$ à $L^* = 8$. A gauche, la fonction de distribution en fonction de L^* pour les électrons à l'équateur à $\mu = 1000 \text{ MeV/G}$, à droite la fonction de distribution à différents instants de la simulation.

III.5 Récapitulatifs des améliorations apportées par le nouveau coeur numérique à la résolution de l'équation de diffusion

La figure III.45 récapitule les principales innovations apportées par la nouvelle stratégie de discrétisation par rapport au coeur actuel. Ainsi, d'une discrétisation DF explicite sensible à la forte inhomogénéité, conditionnellement stable, et ne pouvant assurer la positivité en présence de la diffusion croisée, on bascule vers une discrétisation de meilleure précision, inconditionnellement stable, conservative sur l'échelle de la diffusion locale, monotone et permettant une prise en compte robuste de D_{yE} .

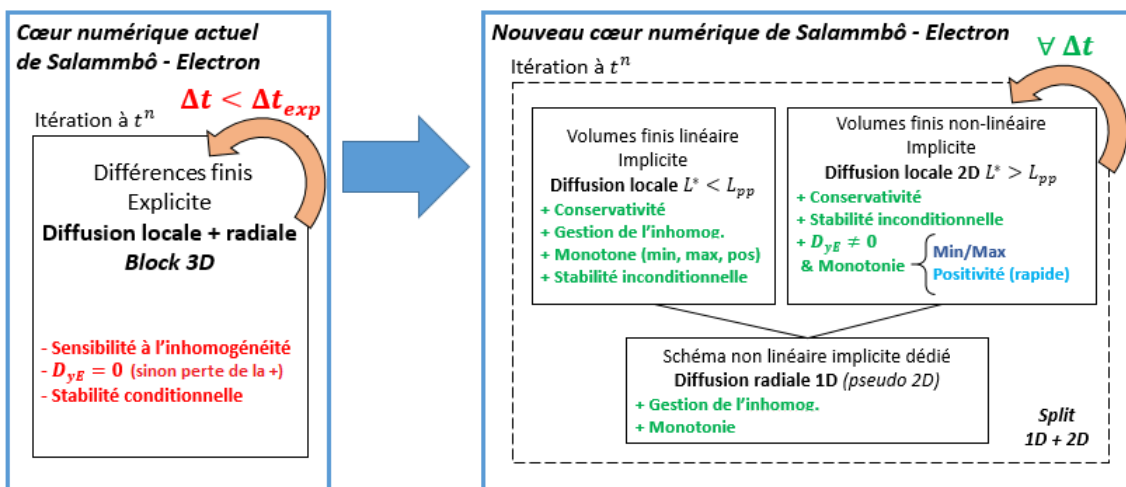


FIGURE III.45 – Récapitulatif des améliorations apportées par le nouveau coeur numérique à la résolution de Salammbô-Électron, par rapport au coeur actuel.

Chapitre IV

Apport du nouveau coeur numérique de Salammbô-Électron dans les simulations physiques

IV.1 Respect de la dynamique radiale seule : mesure de l'effet transitoire . . .	129
IV.2 Respect de l'équilibre entre la diffusion locale et radiale : mesure de l'effet du raffinement de grille spatiale	133
IV.3 Simulation de la période étudiée en présence de la diffusion croisée	139
IV.3.1 Caractérisation du rôle de la diffusion croisée dans un cas physique simple . . .	139
IV.3.2 Observation du rôle de la diffusion croisée dans l'orage magnétique de Septembre 2017	144
IV.4 Comparaison de la restitution de l'ancien et du nouveau coeur avec les mesures de la sonde RBSP-B	148

Maintenant que la discrétisation du nouveau coeur a été bien établie puis validée numériquement, nous allons dans ce chapitre la mettre à l'épreuve dans une simulation d'orage géomagnétique réel. En premier lieu, nous allons vérifier sa restitution avec la physique mise en jeu et avec les résultats de l'ancien coeur considéré comme référence. Nous évaluerons en particulier l'apport du nouveau coeur dans le choix du pas d'intégration temporelle et du raffinement du maillage spatial. En deuxième lieu, on présentera son principal apport dans la représentation de la physique des ceintures de radiation avec l'introduction des termes de diffusion croisée dans la simulation.

Pour cela, on a choisi de simuler une période comprise entre le 29 Août 2017 et le 21 Septembre 2017 qui englobe les événements géomagnétiques caractéristiques suivants et qu'on peut observer dans la figure IV.1 :

- Une phase d'activité calme entre le 29 Août et le 7 Septembre.
- Un orage géomagnétique qui se produit le 8 Septembre, ayant comme origine une CME[155].
- Une CIR étalée dans le temps à partir du 13 Septembre [156][157].

Ainsi, on peut tester sur la période simulée différentes configurations de dynamiques caractéristiques des ceintures de radiations. Les résultats obtenus par les simulations de l'ancien et du nouveau coeur seront comparés entre elles mais également avec les mesures des satellites *Van Allen Probes*, en vol à cette période dont on rapporte les mesures de flux à 100 keV et à 1 MeV dans les 2 rectangles supérieurs de la figure IV.1.

Les simulations sont initialisées avec un état vide qui permet à la fois de :

- Vérifier la dynamique de remplissage graduelle de la ceinture externe pendant la première phase calme.
- Valider le lien entre le remplissage brusque de la ceinture interne et les fortes injections de particules lors de la phase principale de l'orage magnétique.
- Tester la robustesse du code en partant d'un état vide plus sensible à la rupture de la positivité qu'un état pré-rempli.

L'injection des électrons du feuillet neutre est modélisée par la condition aux limites à $L^* = 8$ basée sur les mesures des satellites POES adoptant un spectre en énergie décroissant et une dépendance à l'indice Kp .

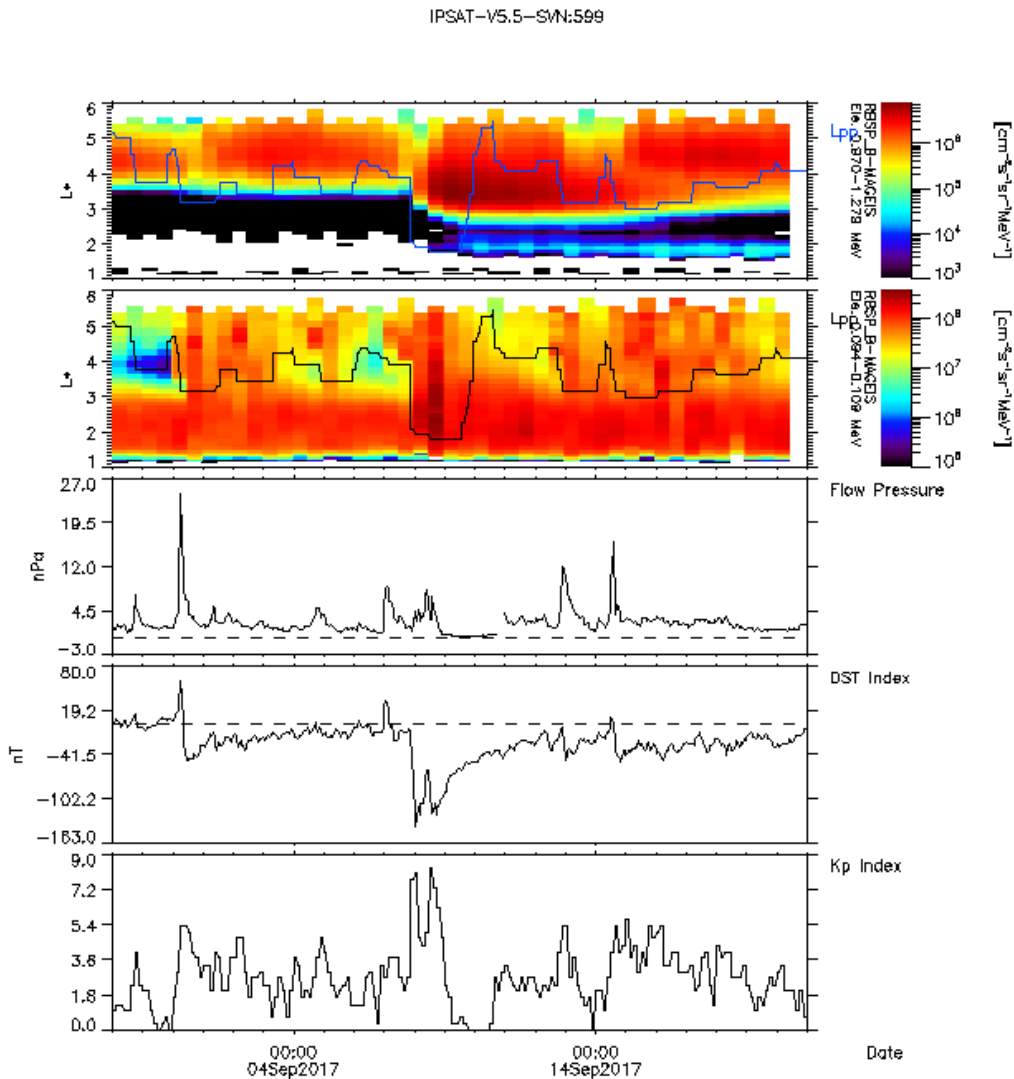


FIGURE IV.1 – Du haut vers le bas, flux différentiels omnidirectionnels des électrons d'énergie comprises entre 0.970-1.279 MeV et 0.094-0.109 MeV mesurés par la sonde RBSP-B (*Van Allen Probes*) en fonction de L^* et du temps, auxquels on superpose la position modélisée de la plasmopause, évolution temporelle de la pression du vent solaire, évolution temporelle de l'indice Dst et de l'indice Kp .

IV.1 Respect de la dynamique radiale seule : mesure de l'effet transitoire

La diffusion radiale est le principal moteur de la dynamique des ceintures de radiation. Il faut donc s'assurer de sa bonne restitution par le nouveau coeur en analysant les effets transitoires des changements de régime qu'elle induit. On entame donc cette étude par une première simulation sur la grille réduite, en ne prenant en compte que la diffusion radiale. Comme le nouveau coeur est inconditionnellement stable, on va chercher à évaluer cet apport en fixant le pas de temps de sa simulation à $1800s$. Avec ce choix de Δt , le gain apporté par le nouveau schéma sur le temps de calcul est conséquent, comme on réduit d'un facteur 10 le temps de calcul de l'ancien coeur dont le pas de temps est limité à $0.1s$. Avec cette meilleure performance, on réduit fortement le temps de calcul des simulations de très longue durée, comme à l'échelle du cycle solaire.

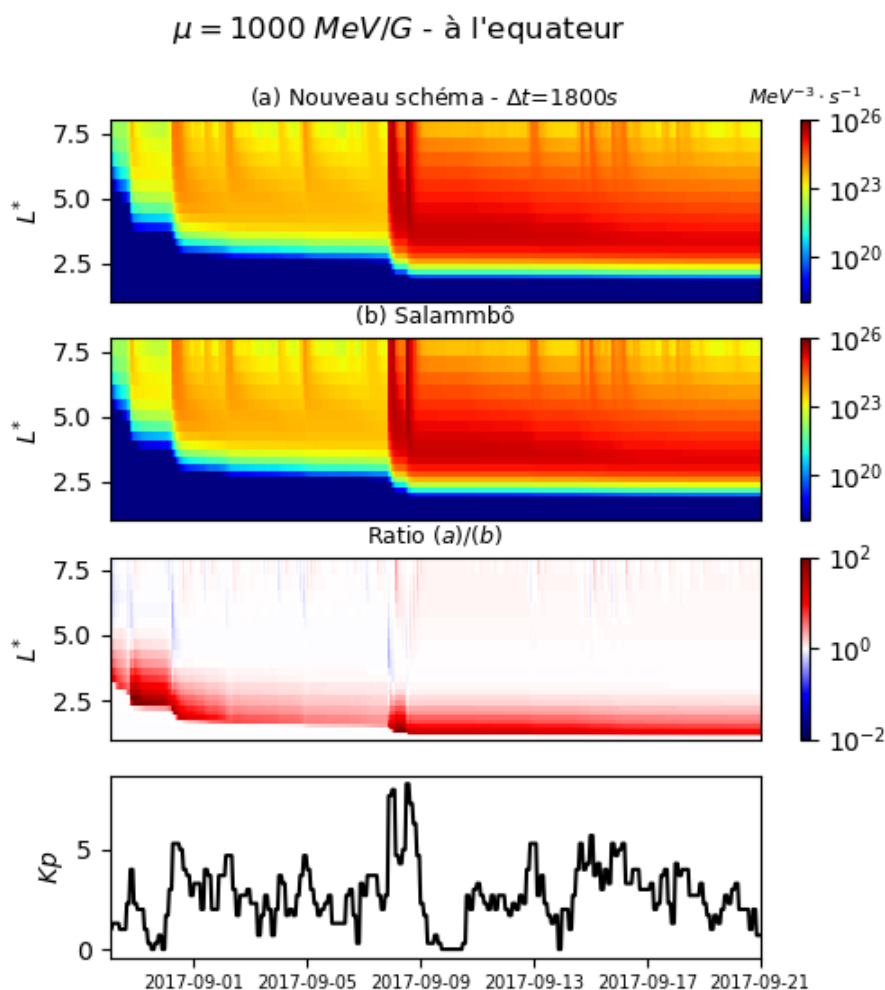


FIGURE IV.2 – Du haut vers le bas, fonction de distribution des électrons équatoriaux à $\mu = 1000$ MeV/G (diffusion radiale seulement) par le nouveau coeur pour $\Delta t = 1800s$, par l'ancien coeur, ratio des deux fonctions de distribution et variations temporelles de Kp .

La figure IV.2 compare les résultats des deux simulations pour les électrons équatoriaux à $\mu = 1000$ MeV/G. Nous avons choisi cette représentation afin d'isoler l'effet de la diffusion radiale qui se fait à μ et J constants. On voit que les résultats sont comparables. En particulier, la simulation du nouveau coeur reproduit les injections de particules survenant avec la hausse de Kp (comme celle qui se produit autour du 8 Septembre) et qui imposent une distribution plate de la fonction de distribution à grand

L^* . La dépendance de la diffusion radiale est elle aussi bien retranscrite, comme on peut le voir à travers la profondeur de pénétration des particules à l'intérieur des ceintures, qui suit les variations brusques de Kp .

Le ratio entre l'estimation du nouveau coeur et celle de l'ancien coeur représenté dans le 3ème rectangle à partir du haut de la figure IV.2 est majoritairement proche de 1, surtout à grand L^* , où la fonction de distribution est plate. Par contre, on voit qu'aux premiers instants d'une hausse brusque de Kp , le ratio peut descendre en-dessous de 1. Cela est dû à la sauvegarde horaire décalée de 0.1s de l'ancien coeur par rapport à celle du nouveau. Bien que ce décalage en temps soit petit, son effet est plus prononcé lors des épisodes de fortes injections de particules. En revanche, le ratio atteint un ordre de grandeur de 100 à mesure que l'on s'approche de l'atmosphère. Cela est dû principalement au choix du pas de temps introduisant une grande erreur temporelle par rapport à la simulation de l'ancien coeur, très raffinée en temps. A moindre mesure, cet écart est causé par les différences d'approximations entre les schémas VF et DF qui s'accroissent lorsque le gradient radial est important.

On reproduit la simulation du nouveau coeur avec cette fois un pas de temps de 100s et on rapporte les résultats de la comparaison pour la même population d'électrons étudiée, dans la figure IV.3.

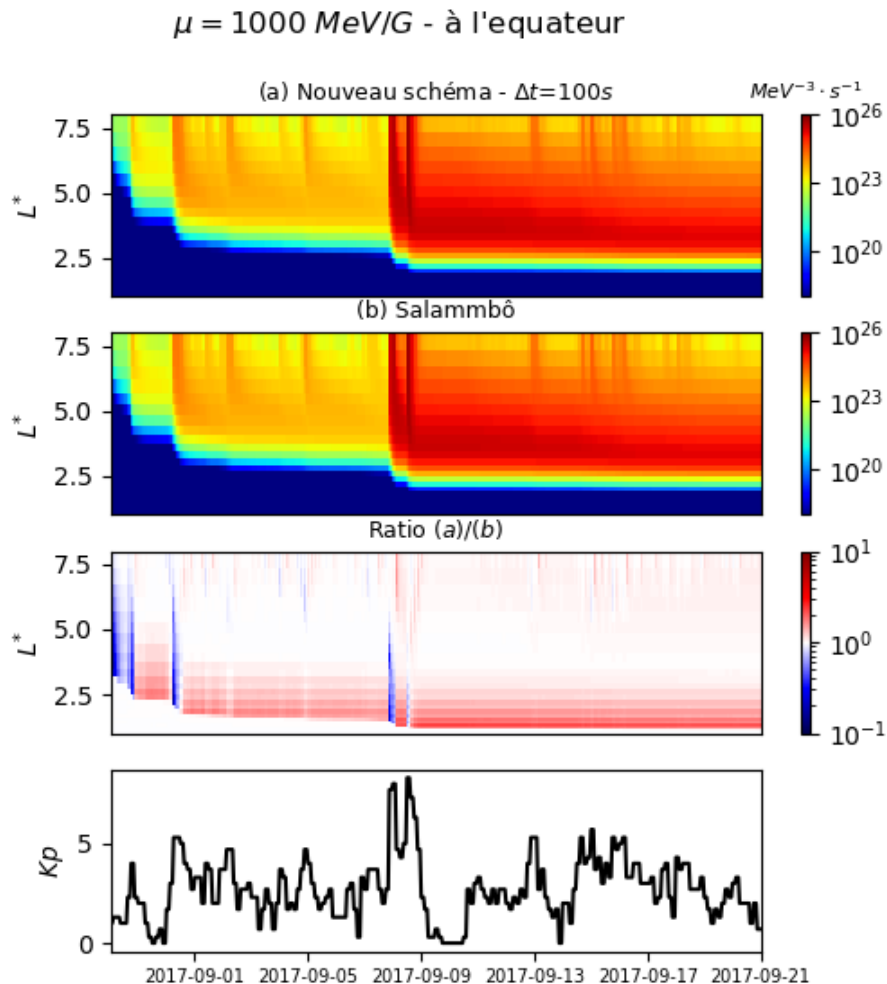


FIGURE IV.3 – Du haut vers le bas, fonction de distribution des électrons équatoriaux à $\mu = 1000 \text{ MeV/G}$ (diffusion radiale seulement) estimée par le nouveau coeur pour $\Delta t = 100s$, par l'ancien coeur, ratio des deux fonctions de distribution et variations temporelles de Kp .

On voit que le ratio maximal est fortement réduit, tout en restant confiné à bas L^* . Sa valeur moyenne est proche de 1 et atteint une valeur maximale de l'ordre de 2. Notons qu'avec ce choix de pas de temps, la résolution reste compétitive et assure un gain d'un facteur 3 sur le temps de calcul par rapport à l'ancien coeur. Les artefacts aux transitions de Kp sont toujours dues au décalage du temps de sauvegarde entre les deux simulations. Avec ces deux simulations, on a montré une grande sensibilité de la restitution du nouveau coeur par rapport au pas de temps. Ce dernier devra donc être bien choisi dans un compromis entre la précision et le coût en temps de calcul. Pour cela, on réalise une étude paramétrique de son effet sur le ratio radial moyen et on rapporte les résultats dans la figure IV.4.

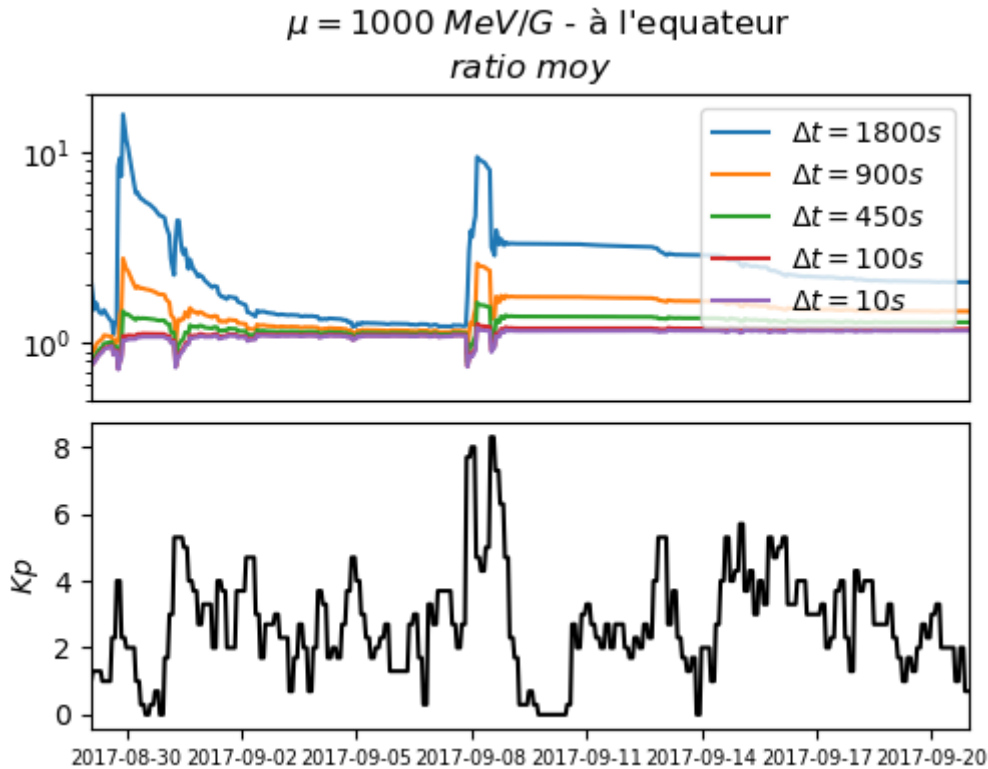


FIGURE IV.4 – Du haut vers le bas, évolution temporelle du ratio moyenné sur L^* pour différents Δt (diffusion radiale seulement) et variations temporelles de Kp .

On voit dans la figure IV.4 que le ratio moyen tend vers 1 lorsque le pas de temps est réduit. A partir de 450s, les courbes deviennent très resserrées et le ratio moyen évalué sur le temps de la simulation est très proche de 1. Entre 100s et 10s, on ne distingue plus de différences entre les courbes, ce qui signifie qu'à ce niveau de raffinement temporel, le ratio moyen est exclusivement piloté par l'erreur de discrétisation spatiale. On note aussi une forte dépendance du ratio moyen à l'intensité des variations de Kp , qui s'accroît plus Δt est grand. Ce comportement est lié à l'établissement de phénomènes fortement transitoires à ces instants et qui nécessite un raffinement temporel fin pour les capturer. En période calme en revanche (entre le 30 Août et 7 Septembre par exemple), le ratio s'estompe quand on avance dans le temps et devient rapidement proche de 1. On peut donc envisager l'adoption d'une intégration temporelle adaptative qui se raffine en période de forte activité géomagnétique et qui se relaxe ensuite. Dans le cas d'une simulation de très longue durée (échelle du cycle solaire par exemple), le choix d'un pas de temps de l'ordre de 1800s reste cohérent car bien qu'on introduit une incertitude pendant les transitoires rapides des orages magnétiques, on voit bien que la relaxation s'effectue suffisamment rapidement pour assurer un état final précis en sortie d'orage, cohérente avec l'échelle de restitution attendue pour de telles simulations.

Comme autre piste à envisager pour accélérer le temps de calcul des simulations de très longue durée, on peut envisager la linéarisation du schéma de diffusion radiale. En effet, le nombre d'itérations non-linéaires moyen de la simulation radiale pour différents Δt , rapporté dans le tableau IV.1 est de l'ordre de 2 au maximum et donc très faible. Par conséquent, au lieu d'estimer implicitement les facteurs de pondération α et β à l'instant $n + 1$, on les estime explicitement à l'instant n . Cela permet de diviser par 3 le temps de calcul de la simulation avec un pas de temps de 1800s, sans perte notable sur la précision de l'estimation, comme le montre la figure IV.5.

$\Delta t(s)$	Temps de calcul (s)	$N_{iter,moy}$
1800	305.9	2.25
900	662.2	2.05
450	962.8	1.86
100	3661.1	1.20
10	33002	1

TABLEAU IV.1 – Temps de calcul et nombre d'itérations moyen de la simulation radiale pour différents Δt .

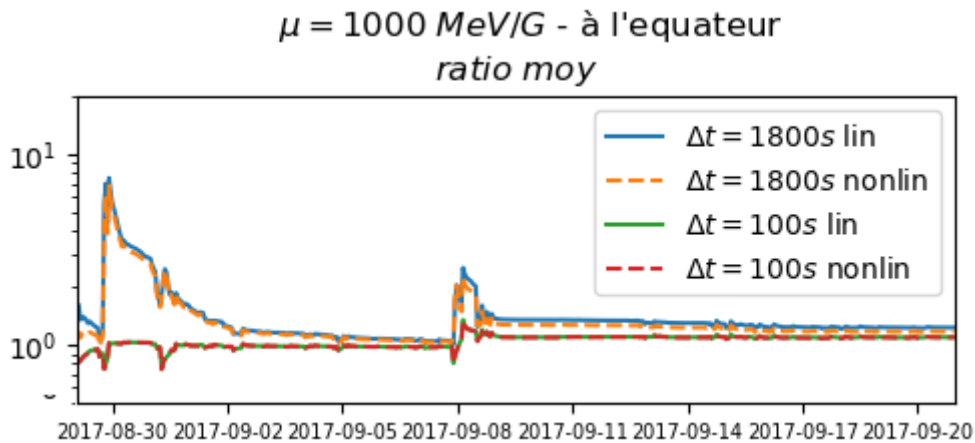


FIGURE IV.5 – Évolution temporelle du ratio moyenné sur L^* pour $\Delta t = 1800s$ et $\Delta t = 100s$ dans le cas d'une résolution linéaire ou non-linéaire avec le nouveau coeur (diffusion radiale seulement).

IV.2 Respect de l'équilibre entre la diffusion locale et radiale : mesure de l'effet du raffinement de grille spatiale

A la configuration de simulation radiale précédente, on rajoute maintenant les processus de diffusion associés aux interactions onde-particule, aux collisions ainsi qu'à la friction en énergie. En se basant sur cette simulation, on va d'abord comparer la restitution des deux coeurs vis-à-vis de cette représentation physique plus complexe. Pour rester cohérent avec le problème physique modélisé dans l'ancien coeur, les termes de diffusion croisée ne sont pas pris en compte pour l'instant. On évaluera ensuite l'apport du nouveau coeur dans le choix du raffinement spatial. Ce dernier lève en effet le verrou de l'ancien coeur sur le choix des grilles spatiales plus raffinées. De plus, il assure sur l'échelle locale, une convergence spatiale du second ordre et une formulation conservative.

On retient pour cette nouvelle simulation le pas de temps de 100s et le raffinement spatial réduit. L'ajout de la diffusion locale rallonge évidemment le temps de calcul du nouveau coeur, mais ce dernier reste légèrement plus compétitif que l'ancien avec un gain sur le temps de calcul d'environ 16%.

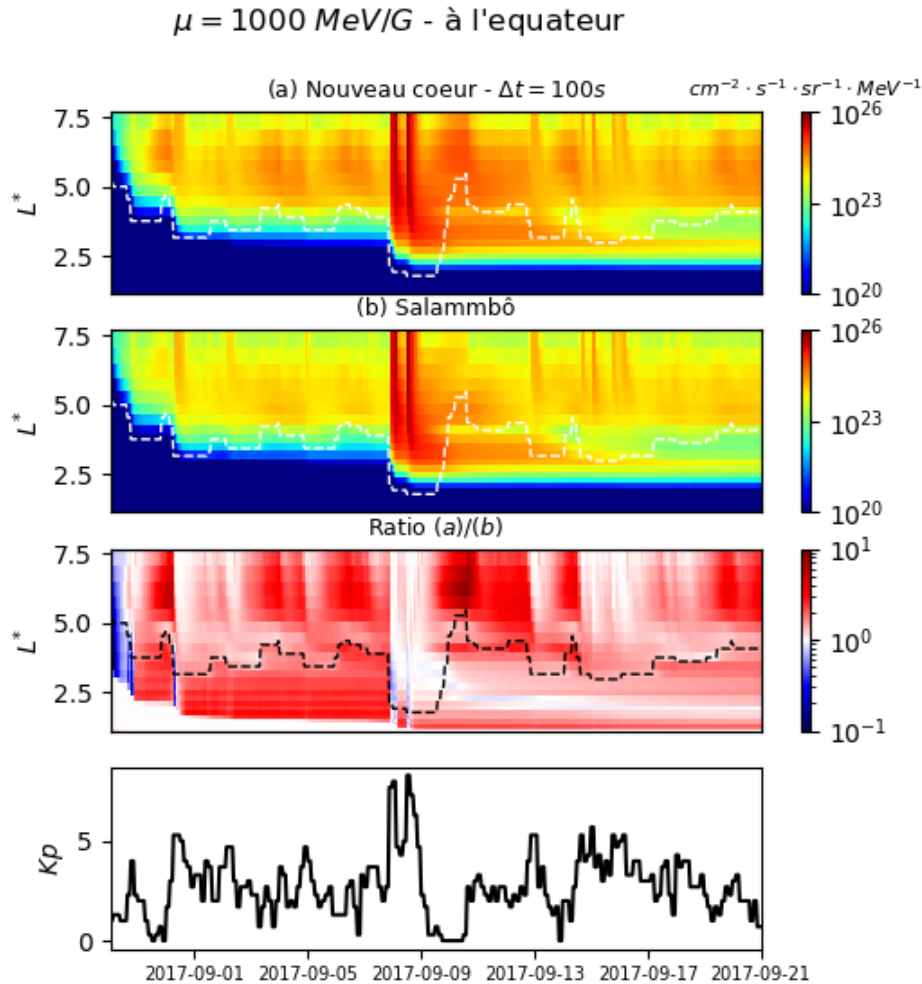


FIGURE IV.6 – Du haut vers le bas, fonction de distribution des électrons équatoriaux à $\mu = 1000$ MeV/G estimée par le nouveau coeur pour $\Delta t = 100s$, par l'ancien coeur, ratio des deux fonctions de distribution et variations temporelles de Kp .

A l'image des résultats obtenus pour la diffusion radiale, l'estimation de la fonction de distribution par le nouveau coeur, présentée dans la figure IV.6 pour les électrons équatoriaux à $\mu = 1000$ MeV/G est cohérente avec les résultats de l'ancien coeur. On retrouve la dépendance de la dynamique vis-à-vis de la position modélisée de la plasmopause représentée en traits discontinus, qui démarque à la fois les régions d'apport et de perte dans les ceintures ainsi que le type d'ondes avec lesquelles vont interagir les particules piégées : ondes de type *Chorus* au-dessus et ondes de type *Hiss* et *Whistler* en-dessous.

Ce marquage entre ces deux régimes est plus prononcé pendant la période calme, car la diffusion locale a le temps de se développer quand la diffusion radiale est modérée. Plus particulièrement, la diffusion en énergie à l'extérieur de la plasmasphère peut s'établir et on commence à ressentir ses effets à travers des accélérations locales. Ce phénomène est observé en milieu de la journée du 31 Août pendant laquelle la distribution radiale, représentée dans la partie gauche de la figure IV.7, montre la formation d'un pic local vers $L^* = 6$.

Lors de la phase principale de l'orage magnétique du 8 Septembre, la prépondérance de la diffusion radiale sur tous les autres processus est bien retranscrite. Comme on peut le voir dans la partie centrale de la figure IV.7, on se trouve avec une distribution en L^* au cours du 8 Septembre, pratiquement identique à celle de la simulation avec la diffusion radiale seulement.

Enfin, au début de la phase de retour à l'équilibre qui suit l'orage magnétique, on peut observer dans la partie droite de la figure IV.7 le pilotage des pertes par la diffusion en angle d'attaque en fin de journée du 9 Septembre. En particulier, on observe clairement le rôle des ondes *Hiss* dans la création de la région du *slot* avec l'établissement d'un minimum local de la PSD entre $L^* = 3$ et $L^* = 4$, bien visible à partir du 17 Septembre sur la figure IV.6. Notons que comme la simulation est initialisée par un état vide, la ceinture interne électron n'est apparue qu'une fois que le remplissage par diffusion radiale ait atteint les L^* les plus bas.

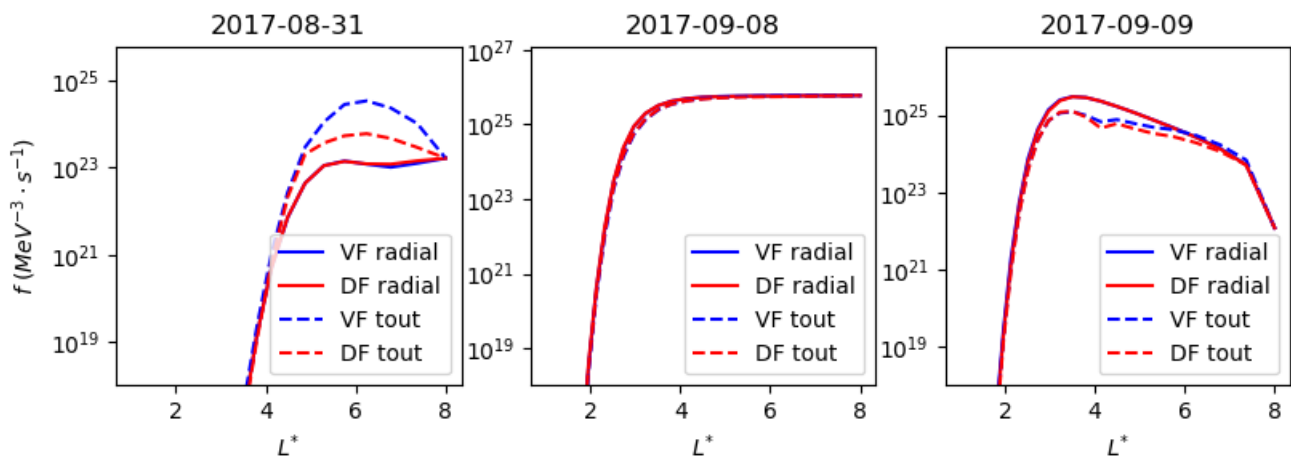


FIGURE IV.7 – Évolution radiale de la fonction de distribution des électrons équatoriaux à $\mu = 1000$ MeV/G en période calme (à gauche), pendant la phase principale d'un orage magnétique (au centre) et pendant la phase de retour à l'équilibre d'un orage magnétique (à droite), selon le coeur utilisé et la configuration physique simulée.

Si on s'intéresse maintenant aux différences observées entre les résultats des deux coeurs, on voit que le ratio est majoritairement supérieur à 1, sauf au début de la simulation et pendant les phases de variations brusques de Kp . En moyenne il est de l'ordre de 1.6 et peut monter jusqu'à environ 9. Ainsi, aux différences observées sur la diffusion radiale, on rajoute des différences plus fortes relatives à l'estimation des interactions locales. Cet effet est plus marqué avec la diffusion en énergie comme on peut le voir dans la distribution radiale des deux coeurs sur la partie gauche de la figure IV.7.

On cherche tout d'abord à s'assurer que le pas de temps n'est pas le principal responsable de ces différences. La simulation du nouveau coeur est donc reproduite avec un pas de temps de 10s. Comme on peut le voir dans la figure IV.8, l'apport du raffinement temporel est très minime. Les disparités observées entre les deux restitutions sont donc largement d'origine spatiale. Ainsi un pas de temps en deçà de 100s risque d'alourdir fortement le calcul sans apporter une meilleure estimation des phénomènes transitoires introduits par la diffusion locale.

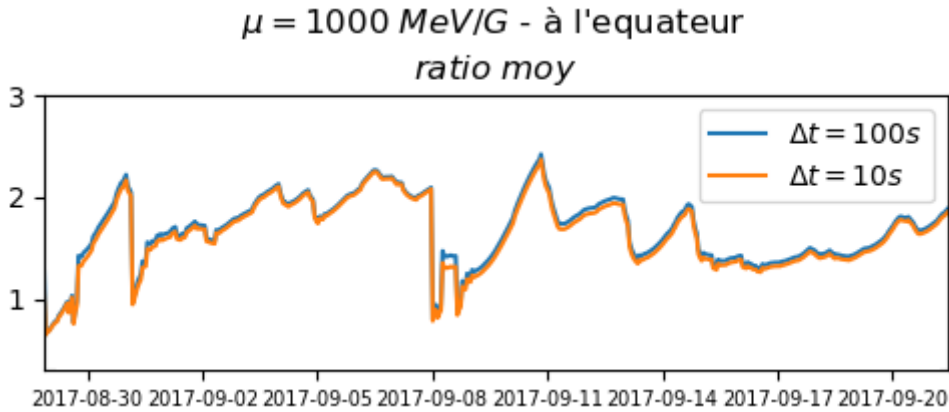


FIGURE IV.8 – Évolution temporelle du ratio moyenné sur L^* en fonction du temps de simulation pour des pas de temps de 10s et 100s.

En réalité, l'origine de cette disparité est multiple. Tout d'abord, les deux coeurs résolvent deux formulations physiques légèrement différentes de la diffusion locale car les coefficients utilisés dans la résolution du nouveau coeur sont interpolés aux interfaces, alors qu'ils sont pré-calculés avec l'ancien. A cela s'ajoute l'effet de la conservativité du nouveau schéma à l'échelle locale, qui empêche "la perte d'information" et qui explique les ratios plus grands que 1 par rapport à l'ancien coeur non-conservatif (ce qui rappelle les résultats obtenus dans le test d'application de la section I.4.2.3). Notons que pendant les périodes de forte activité magnétique, le ratio est très proche de 1 à grand L^* du fait de l'atténuation de la diffusion locale et des différences numériques dont elle est à l'origine.

Enfin, pour analyser l'influence du raffinement spatial sur la qualité de la résolution, la simulation de la période étudiée est reproduite avec le nouveau coeur sur la grille complète, 32 fois plus fine. Ce choix de grille devient pertinent avec le nouveau coeur comme sa simulation est 5 fois plus rapide qu'avec l'ancien (dont le pas de temps est réduit à $10^{-2}s$ par la condition de stabilité). On rapporte dans les figures IV.9 et IV.10, les cartographies radiales des flux omnidirectionnels différentiels à 100 keV et à 1 MeV estimés par le nouveau coeur, qu'on compare à celles de l'ancien coeur évalués sur la grille réduite. Le ratio entre les deux estimations est évalué sur la grille réduite.

Flux omnidirectionnel différentiel $E = 100 \text{ keV}$

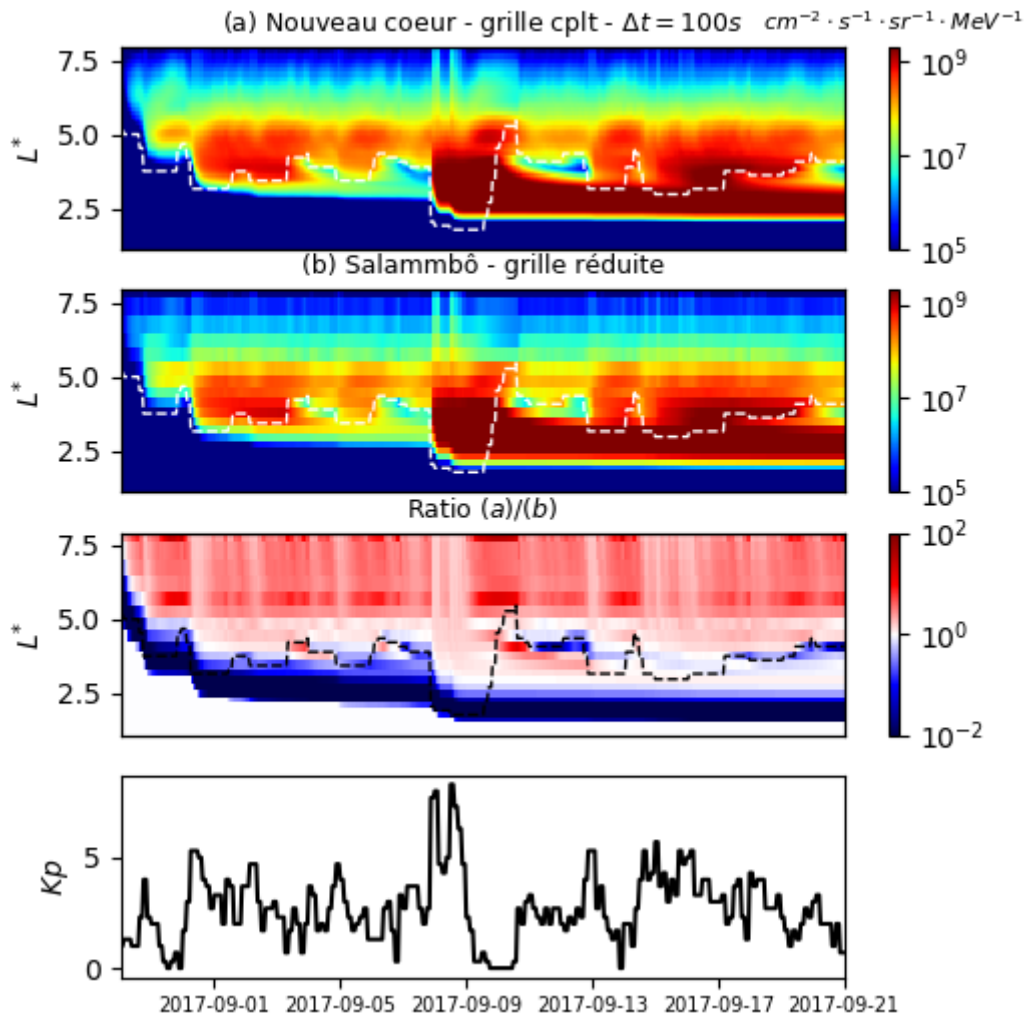


FIGURE IV.9 – Du haut vers le bas, flux omnidirectionnel différentiel des électrons de 100 keV estimé par le nouveau coeur numérique en grille complète pour $\Delta t = 100s$, par l'ancien coeur en grille réduite, ratio du premier flux sur le second et variations temporelles de Kp .

Flux omnidirectionnel différentiel $E = 1 \text{ MeV}$

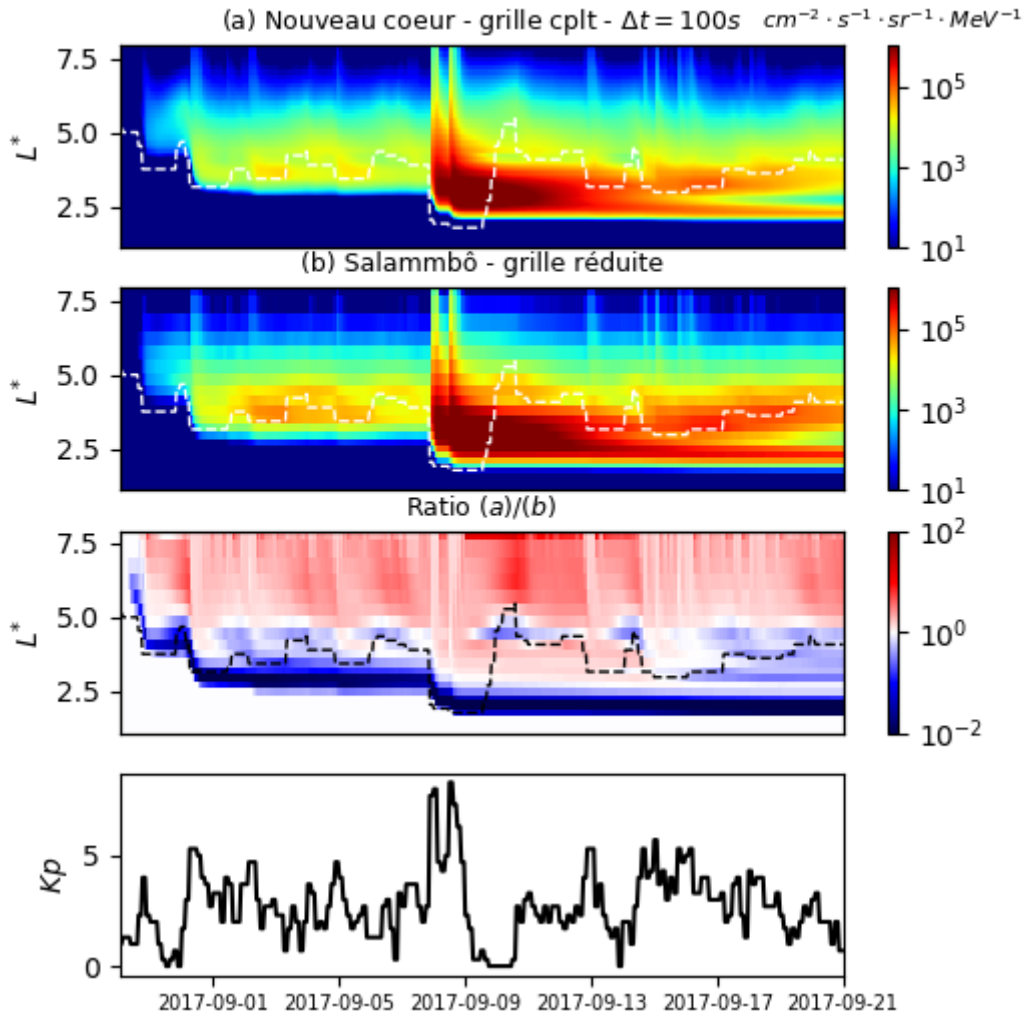


FIGURE IV.10 – Du haut vers le bas, flux omnidirectionnel différentiel des électrons de 1 MeV estimé par l’ancien coeur en grille réduite, le nouveau coeur numérique en grille complète pour $\Delta t = 100s$, ratio du premier flux sur le second et variations temporelles de Kp .

Les cartographies de flux du nouveau coeur sont cohérentes avec celles de l’ancien coeur et avec la physique mise en jeu. Proche de la frontière haute des ceintures de radiations, les flux des électrons de 1 MeV sont très réduits, comme l’intensité du champ magnétique faible ne permet pas de piéger les électrons de haute énergie. Cette population d’électron croit plus on descend en L^* grâce au transport radial à μ constant qui accélère les électrons de plus faible énergie. Ainsi, lors de l’évènement de forte activité du 8 Septembre, les électrons équatoriaux de 100 keV entre $L^* = 6$ et $L^* = 7$ sont retrouvés à une énergie de 1 MeV entre $L^* = 2.5$ et $L^* = 4$. En période d’activité calme et entre le 11 Septembre et le 17 Septembre, on voit que l’effet de démarcation par la position de la plasmopause est plus prononcé pour les électrons de 100 keV. Pour comprendre l’origine de ce phénomène, on représente dans la figure IV.11 l’évolution du coefficient de diffusion en angle d’attaque \hat{D}_{yy} moyenné sur y à 100 keV et 1 MeV pour une position de la plasmopause prise à $L^* = 4.5$. Si on se situe légèrement au-dessus de cette limite, c’est à dire entre $L^* = 4.5$ et $L^* = 5$, on voit que les niveaux de la diffusion en angle d’attaque sont très proches pour les deux énergies. En revanche, dans la plasmasphère entre $L^* = 3.5$ et $L^* = 4$, la diffusion en angle d’attaque à 100 keV présente un pic plus étalé et plus fort. Du coup, comme la position de la plasmopause oscille entre 3.5 et 5 avant l’orage du 8 Septembre, le

vidage dans le cône de perte sera plus prononcé à 100 keV en-dessous de la plasmopause. Pendant la phase principale de l'orage, on voit qu'on reproduit bien l'absence d'effet de la plasmasphère sur la dynamique, comme l'étendue de cette dernière a été fortement réduite. De plus, le temps caractéristique (quelques jours) pour observer le retour de son effet lors de la phase de retour à l'équilibre est correctement reproduit.

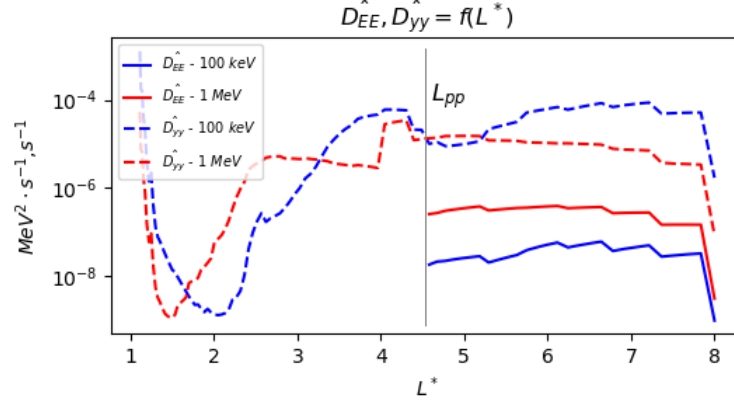


FIGURE IV.11 – Évolution radiale des coefficients de diffusion en énergie et en angle d'attaque, moyennés sur l'angle d'attaque, à 100 keV et à 1 MeV.

Si l'on compare maintenant les résultats des coeurs entre eux, on voit que le nouveau reproduit avec une plus grande finesse les structures transitoires de la dynamique. Comme on peut l'observer pour les électrons de 100 keV (voir figure IV.9), les injections des particules à grand L^* sont bien mieux résolues et les évolutions locales au voisinage de la plasmopause sont plus marquées. Le raffinement spatial permet une meilleure distinction de la formation de la ceinture basse des électrons à 1 MeV (voir figure IV.10).

Si on s'intéresse maintenant au ratio de flux estimés par les deux coeurs et pour les deux énergies, représentés dans le 3ème rectangle à partir du haut de la figure IV.10, on voit qu'il présente une forte dépendance par rapport à la position de la plasmopause. Au-dessus de la plasmopause, il est majoritairement supérieur à 1 et il matérialise l'effet numérique de la nouvelle approximation de la diffusion en énergie. Notons que les variations temporelles du ratio à grand L^* sont plus prononcées à 1 MeV qu'à 100 keV, comme le spectre en énergie des injections est beaucoup plus raide à cette énergie, ce qui le rend plus sensible aux variations de Kp et introduit plus de différences entre les résultats des deux coeurs. A bas L^* , le ratio est majoritairement inférieur à 1, sauf pendant la période qui suit l'orage du 8 Septembre et qui s'étend entre le 10 Septembre et le 14 Septembre. Si on se situe à l'extérieur de cette période, les niveaux inférieurs de la simulation du nouveau coeur à bas L^* provient essentiellement de l'effet du raffinement de la grille radiale et en angle d'attaque dans un endroit où le régime de perte prévaut. Ainsi, les gradients sur y et sur L^* respectivement proches du cône de perte et de l'atmosphère sont plus forts et le vidage est plus accentués. La physique est ainsi mieux prise en compte par le nouveau coeur. D'autre part, la petite bande de ratio supérieure à 1 en-dessous de la plasmopause et située entre le 10 Septembre et le 14 Septembre est causée par la propagation du ratio supérieur à 1 qu'on trouve à grand L^* vers les couches basses lors de l'orage du 8 Septembre. Cet effet transitoire s'estompe lentement dès que l'activité géomagnétique redevient calme, ce qui laisse le temps au ratio de repasser en-dessous de 1.

Avec ces résultats de comparaison, on peut donc confirmer la cohérence de la représentation du nouveau coeur avec celle de l'ancien et justifier le changement de l'algorithme de résolution comme il autorise une plus grande liberté de choix sur le maillage spatio-temporel pour un temps de calcul beaucoup plus abordable. Enfin, avec ses arguments numériques de précision et de conservativité, il restitue mieux les effets de la physique modélisée.

IV.3 Simulation de la période étudiée en présence de la diffusion croisée

La prise en compte de la diffusion croisée dans le nouveau coeur numérique représente l'aboutissement majeur du nouveau coeur numérique et de ce travail de thèse. Par conséquent, nous allons, dans cette section, évaluer qualitativement son rôle dans l'équilibre des processus physiques. Avant d'analyser son impact dans la simulation de Septembre 2017, nous allons en premier lieu essayer de quantifier son rôle dans la dynamique sur un cas physique plus simple.

IV.3.1 Caractérisation du rôle de la diffusion croisée dans un cas physique simple

On simule avec le coeur numérique 2D, la diffusion locale à l'extérieur de la plasmasphère à $L^* = 4.58$, avec le tenseur de diffusion complet, pendant 90000s et avec un pas de temps de 100s. Le jeu de coefficients de diffusion utilisé est représenté dans la figure IV.12 et il est figé au cours de la simulation. La fonction de distribution est initialisée par un remplissage radial à $Kp = 4$ pendant 1 jour ce qui impose un gradient en énergie. Grâce à cette initialisation, on part d'un état de remplissage représentatif de la réalité pendant une période d'activité calme. La diffusion radiale est ensuite désactivée pour ne pas entacher l'interprétation. Le temps de simulation de 90000s permet d'atteindre alors un état presque stationnaire piloté par la diffusion croisée.

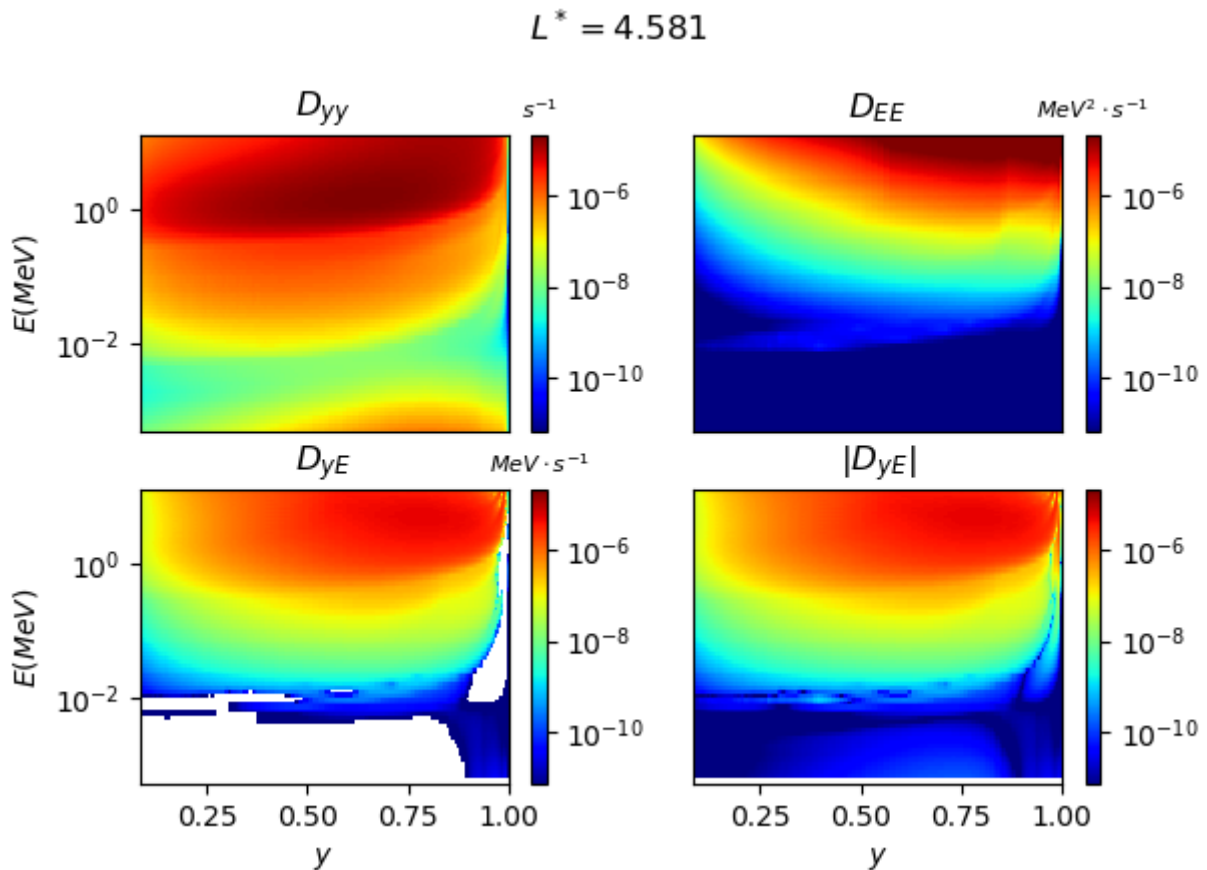


FIGURE IV.12 – Coefficients de diffusion locale au plan $L^* = 4.58$ à l'extérieur de la plasmasphère.

On représente dans la figure IV.13 la distribution 2D des électrons au bout de 90000s pour la simulation avec diffusion croisée et sans diffusion croisée et on représente dans la figure IV.14 les coupes des deux simulations à deux énergies différentes (100 keV et à 1 MeV) et à deux angles d'attaques différents (proche de l'atmosphère à $y = 0.15$ et proche de l'équateur à $y = 0.99$). On s'intéresse tout d'abord aux coupes de la figure IV.14 et à celle de la partie gauche. Dans le cas de la simulation sans diffusion croisée, la fonction de distribution est plate sur une large bande en y qui s'étend de l'équateur jusqu'à des angles d'attaque faibles, puis le gradient en y s'accroît rapidement au voisinage de l'atmosphère. Dans la partie droite, on observe un plateau de la fonction de distribution à faible énergie moins étendue et l'apparition graduelle d'un gradient sur E quand l'énergie augmente. Dans le cas de la simulation avec diffusion croisée, on voit que la distribution plate en angle d'attaque est légèrement inclinée à partir de l'équateur, ce qui fait qu'elle se trouve en-dessous de la fonction de distribution simulée sans la diffusion croisée, sauf au voisinage de l'équateur. La distribution en énergie en revanche est moins impactée par l'ajout de la diffusion croisée. Sur les deux coupes en angle d'attaque de la partie droite de la figure IV.14, on voit que les distributions à très basse énergie et très haute énergie des deux simulations sont pratiquement les mêmes. Par contre, un changement se produit entre 10 keV et 1 MeV. Pour $y = 0.15$ la fonction de distribution avec diffusion croisée passe en-dessous de celle sans diffusion croisée, alors que pour $y = 1$ le phénomène inverse se produit légèrement.

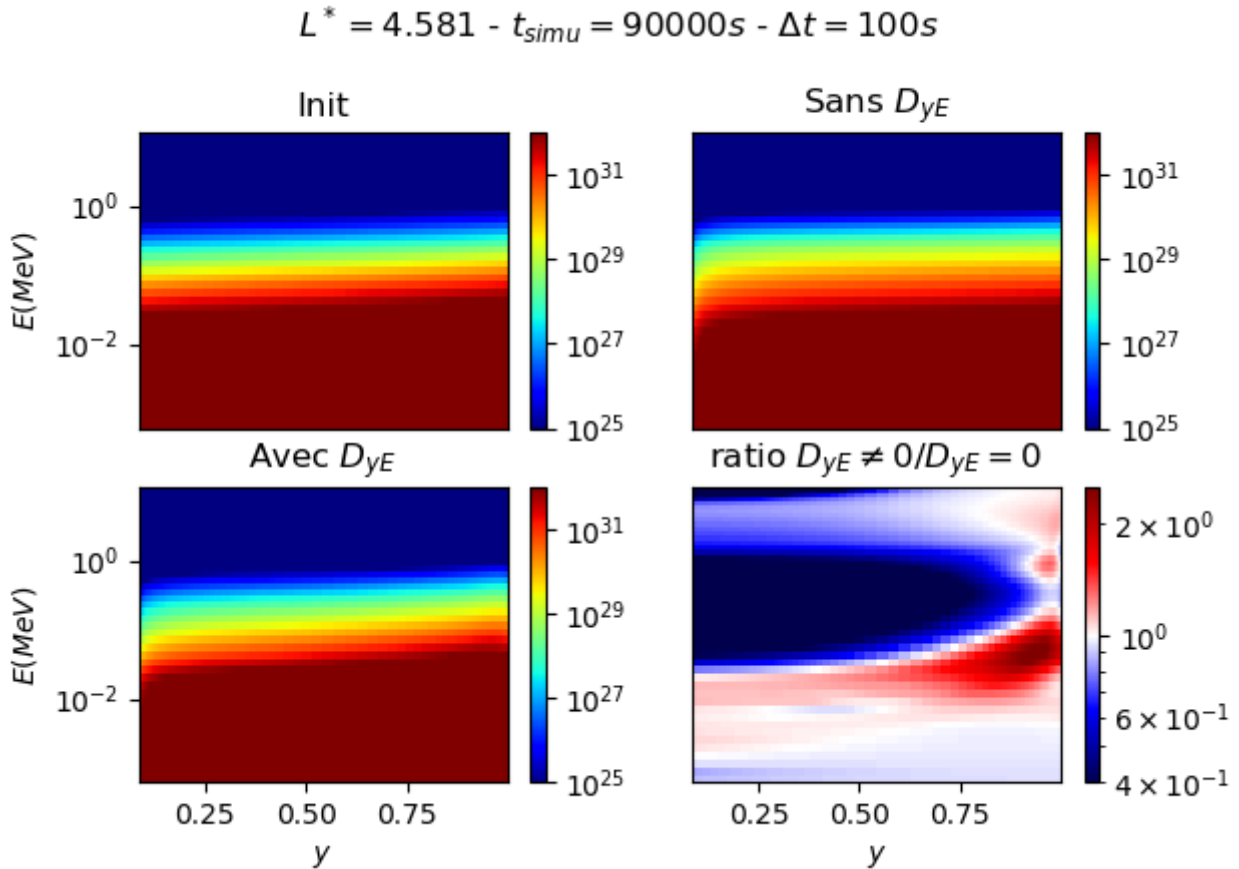


FIGURE IV.13 – De gauche à droite et du haut en bas, Fonctions de distribution des électrons dans le plan $L^* = 4.58$ à l'instant initial, à 90000s sans diffusion croisée, à 90000s avec diffusion croisée, et ratio entre les deux fonctions de distributions finales.

$$L^* = 4.581$$

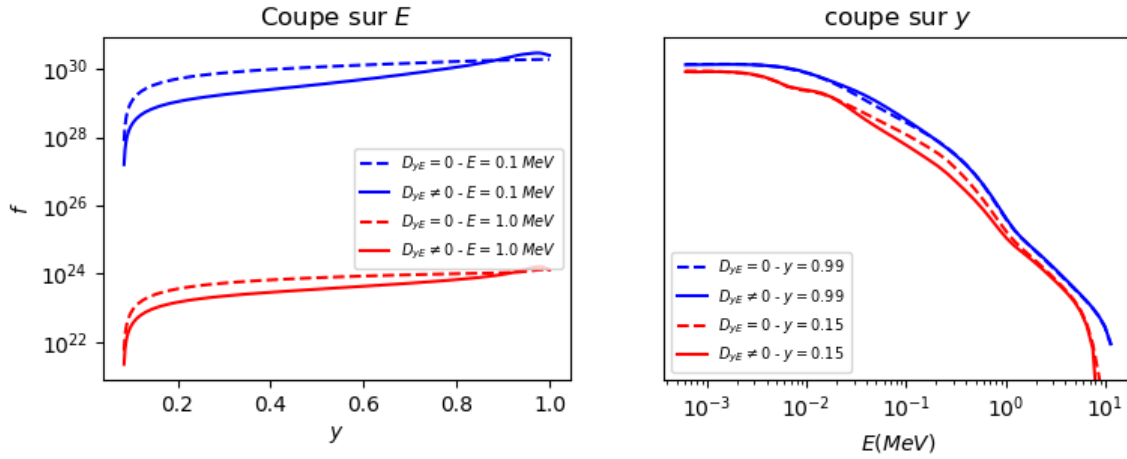


FIGURE IV.14 – Coupes à 100 keV et 1 MeV (à gauche), à $y = 0.15$ et $y = 1$ (à droite) de la fonction de distribution à 90000s, évaluée sans diffusion croisée (en trait discontinu) et avec la diffusion croisée (en trait plein).

Maintenant si l'on regarde le ratio 2D des deux fonctions de distribution représenté dans la figure IV.13, on voit que ce dernier présente un profil complexe, mais qui peut être divisé en 3 régions principales selon la valeur du ratio :

- Une première région avec des ratios très inférieurs à 1, qui s'étend du cône de perte jusqu'à $y = 0.8$ en angle d'attaque et de 10 keV jusqu'à E_{max} en énergie.
- Une deuxième région, avec des ratios légèrement supérieurs à 1, proche du cône de perte pour des énergies inférieures à 10 keV.
- Une troisième région de ratio supérieur à 1 proche de l'équateur, morcelée le long de E , avec un pic de ratio entre 10 keV et 100 keV.

On constate rapidement que la valeur du ratio par rapport à 1 dans ces régions suit approximativement le signe de la diffusion croisée. En plus de cela, les différences entre les deux simulations s'accroissent au voisinage des bords du domaine et atteignent des valeurs extrêmes là où le déséquilibre entre la diffusion croisée et les diffusions normales est très prononcé.

A partir de ces observations, nous proposons une explication qualitative de l'effet de la diffusion, schématisée dans la figure IV.16 qui regroupe une représentation spatiale simplifiée des 3 régions à laquelle on ajoute le signe de D_{yE} , l'intensité relative des coefficients de diffusion entre eux (déduite de la figure IV.15) et l'effet des conditions aux limites sur les gradients.

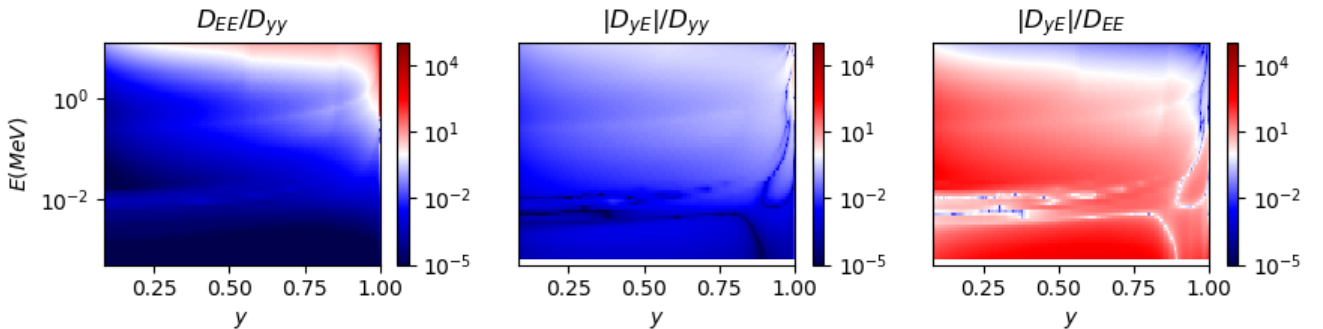


FIGURE IV.15 – Ratio entre les coefficients de diffusions D_{yy} , D_{yE} et D_{EE} .

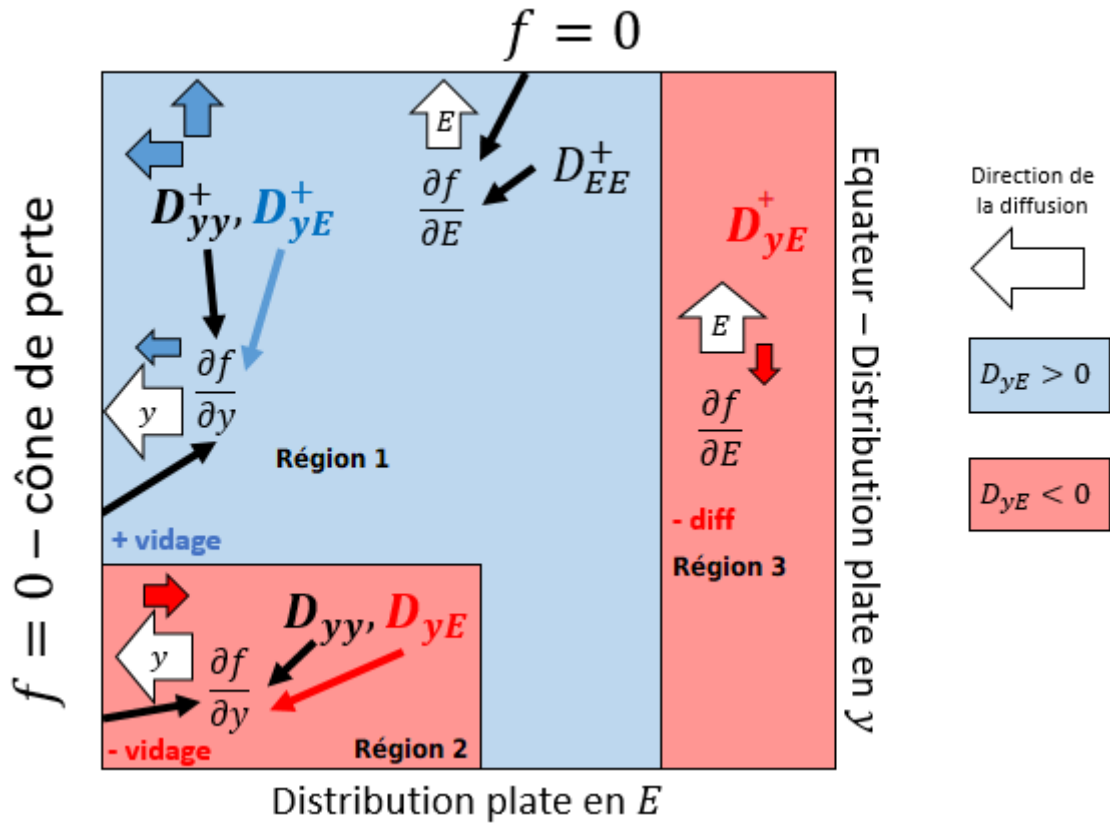


FIGURE IV.16 – Schéma explicatif du rôle de la diffusion croisée dans la diffusion locale.

On s'intéresse tout d'abord à la région 1 et on se positionne au voisinage du cône de perte. Sans diffusion croisée, la condition $f = 0$ impose un gradient $\frac{\partial f}{\partial y}$ accentué par le fort niveau de D_{yy} . L'ajout de la diffusion croisée apporte un terme $D_{yE} \frac{\partial f}{\partial y}$ provenant de la diffusion selon la direction E , qui avec un $D_{yE} > 0$ dans cette région, va renforcer le vidage vers le cône de perte. Dans la région 2, comme $D_{yE} < 0$, le terme $D_{yE} \frac{\partial f}{\partial y}$ va au contraire tendre à atténuer le vidage vers le cône de perte. Mais comme $|D_{yE}|$ est dominé par D_{yy} (voir partie centrale de la figure IV.15), alors son effet est limité et la diffusion vers le cône de perte s'en trouve peu ralentie. Dans la région 3, le gradient en angle d'attaque est très faible et n'apporte aucune contribution. C'est le gradient en énergie $\frac{\partial f}{\partial E}$ imposé par la condition à E_{max} qui va dans ce cas induire l'effet de la diffusion croisée. Entre 10 keV et 100 keV, le coefficient de diffusion croisée est négatif, mais comme on peut le voir dans la figure IV.15, il domine D_{EE} . Du coup, le terme $D_{yE} \frac{\partial f}{\partial E}$ provenant de la diffusion le long de y , atténue fortement la diffusion le long de E et produit un effet d'accumulation qui explique le ratio supérieur à 2. A forte énergie, D_{EE} se renforce par rapport à D_{yE} , la diffusion en y est donc moins impactée et le ratio est légèrement supérieur à 1. Le morcellement de la région 3 est cependant difficile à expliquer avec cette représentation simple, mais il est très probablement lié aux transitions brusques du signe de D_{yE} dans cette région et aux effets de couplages induit par la diffusion croisée (voir figure IV.17). Notons que cette représentation permet aussi d'expliquer des régions secondaires comme le coin supérieur gauche du domaine de résolution (proche du cône de perte et à très haute énergie), où se combine l'effet des gradients $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial E}$ avec un $D_{yE} > 0$.

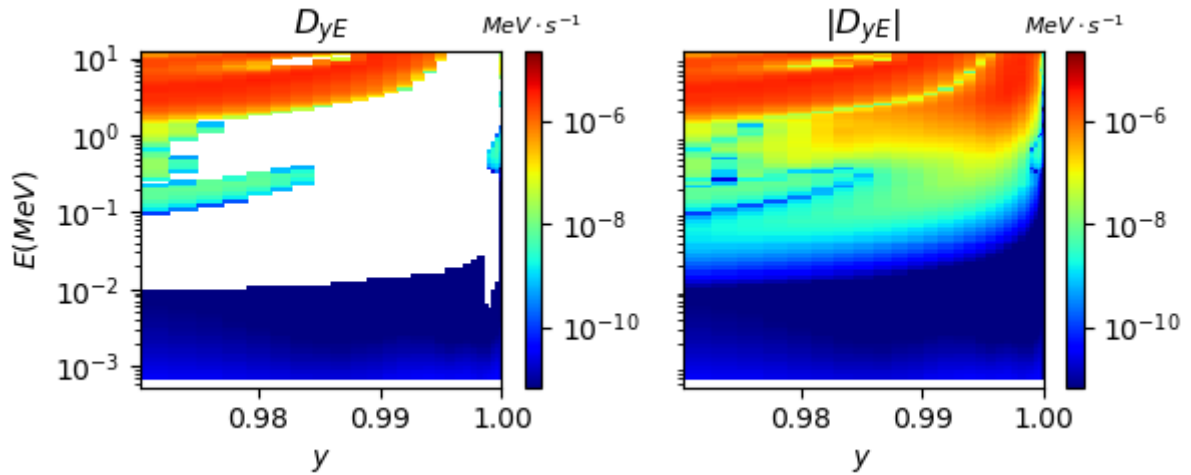


FIGURE IV.17 – Évolution spatiale du coefficient de diffusion croisée et de sa valeur absolue, au voisinage de l'équateur.

Plus généralement, l'explicitation du rôle de la diffusion croisée dans l'équilibre des processus est une tâche très complexe et sa caractérisation par la communauté des ceintures de radiation est restée limitée à des études comparatives de simulation avec et sans ce terme. On note tout de même l'analyse qualitative de *Albert J.M* de l'effet de la diffusion croisée par le biais des fonctions de Green (fonction de base de l'équation de diffusion) et qui met en évidence une forte dépendance de l'effet de la diffusion croisée avec l'évolution de la fonction de distribution aux bords, ce qui concorde avec l'explication que nous proposons ici [111]. Les études comparatives s'accordent sur le rôle de D_{yE} dans l'intensification du vidage vers le cône de perte qu'on vient d'observer [158][159][112][121]. En revanche, ces simulations n'ont pas signalé un rétro effet de la diffusion croisée à très basse énergie quand elle est négative. Cela s'explique par le fait que dans ces études, les simulations sont réalisées sur un domaine limité à $E_{min} = 100$ keV ce qui coupe cet effet. D'une manière générale, ce phénomène est à considérer avec précaution car l'incertitude des coefficients à basse énergie est très grande et peut être plus grande que l'incertitude de la prise en compte ou non de la diffusion croisée [112].

IV.3.2 Observation du rôle de la diffusion croisée dans l'orage magnétique de Septembre 2017

La simulation de Septembre 2017 est réalisée cette fois avec le tenseur de diffusion complet, sur la grille complète pour un pas de temps de 100s. Dans ce cas, la résolution de la diffusion locale devient non-linéaire et elle augmente le temps de calcul d'un facteur 3 par rapport à une simulation sans diffusion croisée. Néanmoins, même avec la résolution non linéaire, le nouveau coeur est environ 2 fois plus rapide que l'ancien coeur en utilisant la grille complète, qui plus est, ne prend pas en compte la diffusion croisée.

Tout d'abord, on représente dans les figures IV.18 et IV.19 les cartographies des flux omnidirectionnels différentiels de 1 MeV et 100 keV estimés par la nouvelle simulation, qu'on compare à celles obtenues par la simulation sans diffusion croisée.

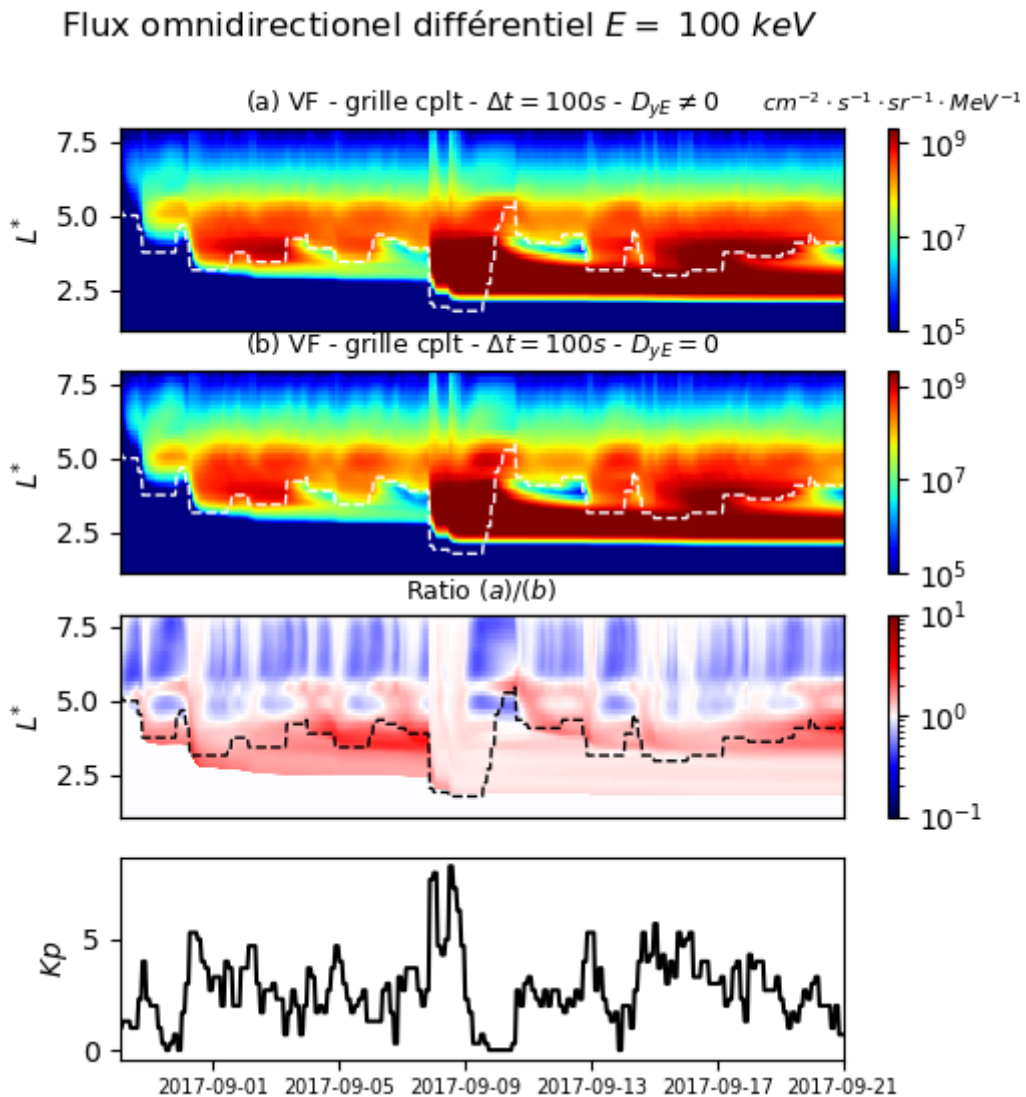


FIGURE IV.18 – Du haut vers le bas, flux omnidirectionnel différentiel des électrons de 100 keV estimé par le nouveau coeur avec diffusion croisée et sans diffusion croisée, ratio du premier flux sur le second, et variations temporelles de Kp .

Flux omnidirectionnel différentiel $E = 1 \text{ MeV}$

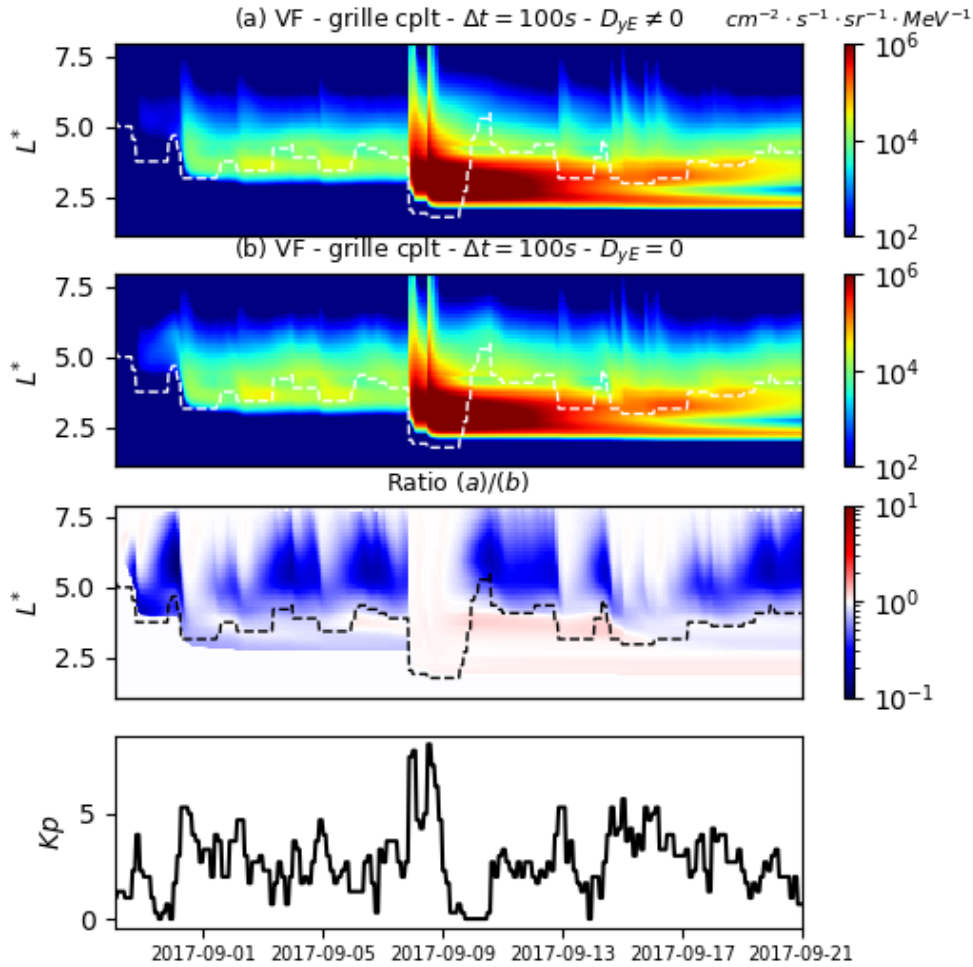


FIGURE IV.19 – Du haut vers le bas, flux omnidirectionnel différentiel des électrons de 1 MeV estimé par le nouveau coeur avec diffusion croisée et sans diffusion croisée, ratio des deux fonctions de distribution et variations temporelles de Kp .

Pour les électrons de 1 MeV, on voit dans la figure IV.19 que l'estimation du flux quand la diffusion croisée est retenue, est globalement réduite au-dessus de la plasmopause, par un facteur 10 au maximum. En revanche, l'effet de la diffusion croisée sur les électrons de 100 keV est plus complexe. Au-dessus de $L^* \approx 5.5$, le flux est réduit d'un facteur 2 en moyenne. Mais dès qu'on s'approche de la position de la plasmopause, il peut se renforcer par certains moments, comme c'est le cas pendant la période d'activité calme, ou pendant la phase de retour à l'équilibre, autour du 12 Septembre ($L^* \approx 4$). Dans la plasmasphère, les variations temporelles du ratio sont beaucoup plus homogènes et on observe la persistance d'un ratio supérieur à 1 pour les électrons de 100 keV.

Pour mieux voir l'origine du comportement du flux à ces deux énergies, nous allons nous intéresser aux populations d'électrons suivantes :

- La population (A) des électrons équatoriaux à $\mu = 500 \text{ MeV/G}$.
- La population (B) des électrons équatoriaux à $\mu = 30 \text{ MeV/G}$.
- La population (C) des électrons à J fixé qui les place proche du cône de perte ($y \in [0.081, 0.152]$) à $\mu = 5 \text{ MeV/G}$.
- La population (D) des électrons à J fixé qui les placent proche du cône de perte ($y \in [0.081, 0.152]$) à $\mu = 0.3 \text{ MeV/G}$.

A $L^* = 4.28$, ces populations représentent les électrons aux énergies de 1 MeV à l'équateur (A), 1 MeV proche du cône de perte (C), 100 keV à l'équateur (B) et 100 keV proche du cône de perte (D). Ils permettent de décrire les deux extrémités du spectre en angle d'attaque de la fonction de distribution proportionnelle au flux unidirectionnel, qui sera ensuite intégré pour obtenir le flux omnidirectionnel représenté dans les figures IV.19 et IV.18. On représente dans la figure IV.20 les ratios des fonctions de distribution simulés avec et sans diffusion croisée pour ces 4 populations à $L^* = 4.28$.

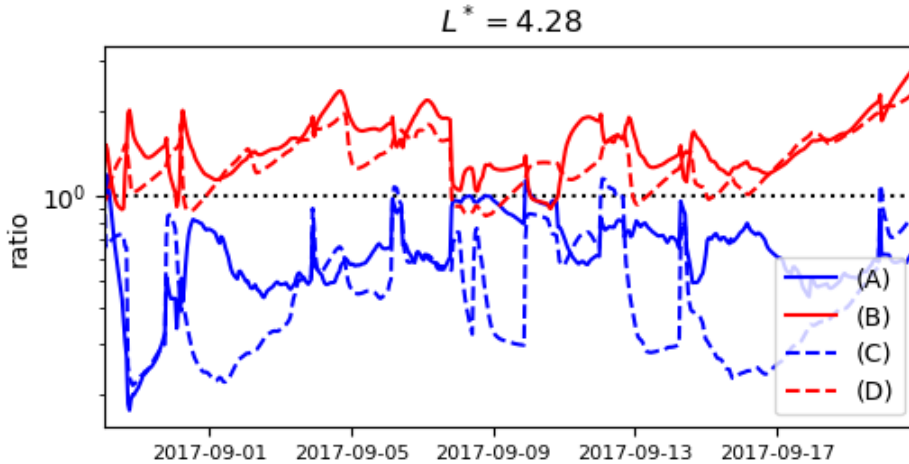


FIGURE IV.20 – Variations temporelles du ratio à $L^* = 4.28$ des fonctions de distributions avec et sans diffusion croisée pour les populations (A),(B),(C) et (D).

Le ratio des populations (A) et (C) est majoritairement inférieur à 1. Par analogie avec l'explication proposée dans la section IV.3.1, ces deux populations sont situées dans la région 1 où les pertes sont intensifiées par la diffusion croisée. Le spectre en angle d'attaque de la fonction de distribution à 1 MeV est donc abaissé et le flux omnidirectionnel s'en trouve réduit. Pour les population (B) et (D), on voit que leur ratio est majoritairement supérieur à 1, ce qui place la population (B) dans la région 3 et la population (D) dans la région 2. Le spectre en angle d'attaque de la fonction de distribution à 100 keV est rehaussé à certains moments et le flux omnidirectionnel peut devenir plus fort. Comme dans notre simulation la diffusion radiale est prise en compte, elle joue un rôle important également dans la distribution de ces différences le long de L^* . On représente donc dans la figure IV.21 l'évolution radiale des ratios des fonctions de distribution pour ces 4 populations à leurs μ et J respectifs.

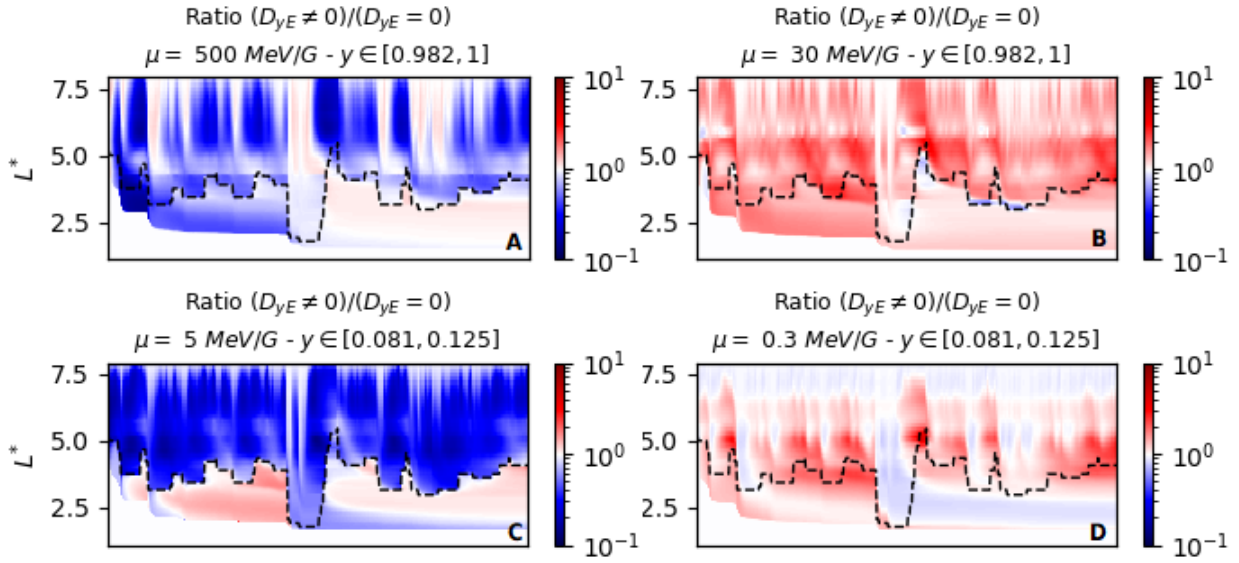


FIGURE IV.21 – Ratios des fonctions de distribution simulées avec et sans diffusion croisée pour les 4 populations d'électrons suivis.

On s'aperçoit que le comportement du ratio observé à $L^* = 4.28$ est étendu aux plans de L^* plus grands pour les 4 populations. En particulier, un ratio inférieur à 1 s'étend sur tous les plans L^* au-dessus de la plasmopause pour les populations (A) et (C). Ainsi, à la baisse du niveau de flux des électrons de 1 MeV à $L^* = 4.28$ on combine par transport radial, l'effet réducteur de la diffusion croisée sur les plans L^* plus grands. Ce transport radial peut impacter les plans L^* dans la plasmasphère, ce qui explique "la contamination" de cette zone par les ratios en-dessous de 1, bien que la diffusion croisée n'y est pas présente. Pour les électrons de 100 keV, c'est le phénomène opposé qui se produit. On voit que pour les populations (B) et (D), les plans au-dessus de $L^* = 4.28$, présentent des ratios supérieurs à 1. Ainsi, à la hausse du flux des électrons de 100 keV à $L^* = 4.28$, on combine par transport radial, l'effet amplificateur de la diffusion croisée sur les plans L^* plus grands, et on se trouve avec des flux renforcés à $L^* = 4.28$ et cela même en-dessous de la plasmopause. Avec cet exemple, on montre donc l'établissement d'un couplage entre la diffusion radiale et la diffusion croisée, qui transporte les effets de cette dernière y compris aux endroits où elle n'entre plus en jeu.

IV.4 Comparaison de la restitution de l'ancien et du nouveau coeur avec les mesures de la sonde RBSP-B

La restitution du nouveau coeur est maintenant comparée à l'observation in-situ de la période simulée et on confronte dans la figure IV.22, les flux omnidirectionnels différentiels estimés par la simulation avec diffusion croisée pour les électrons de 100 keV et 1 MeV aux flux mesurés par l'instrument *MAGEIS*, embarqué sur la sonde B des *Van Allen Probes*.

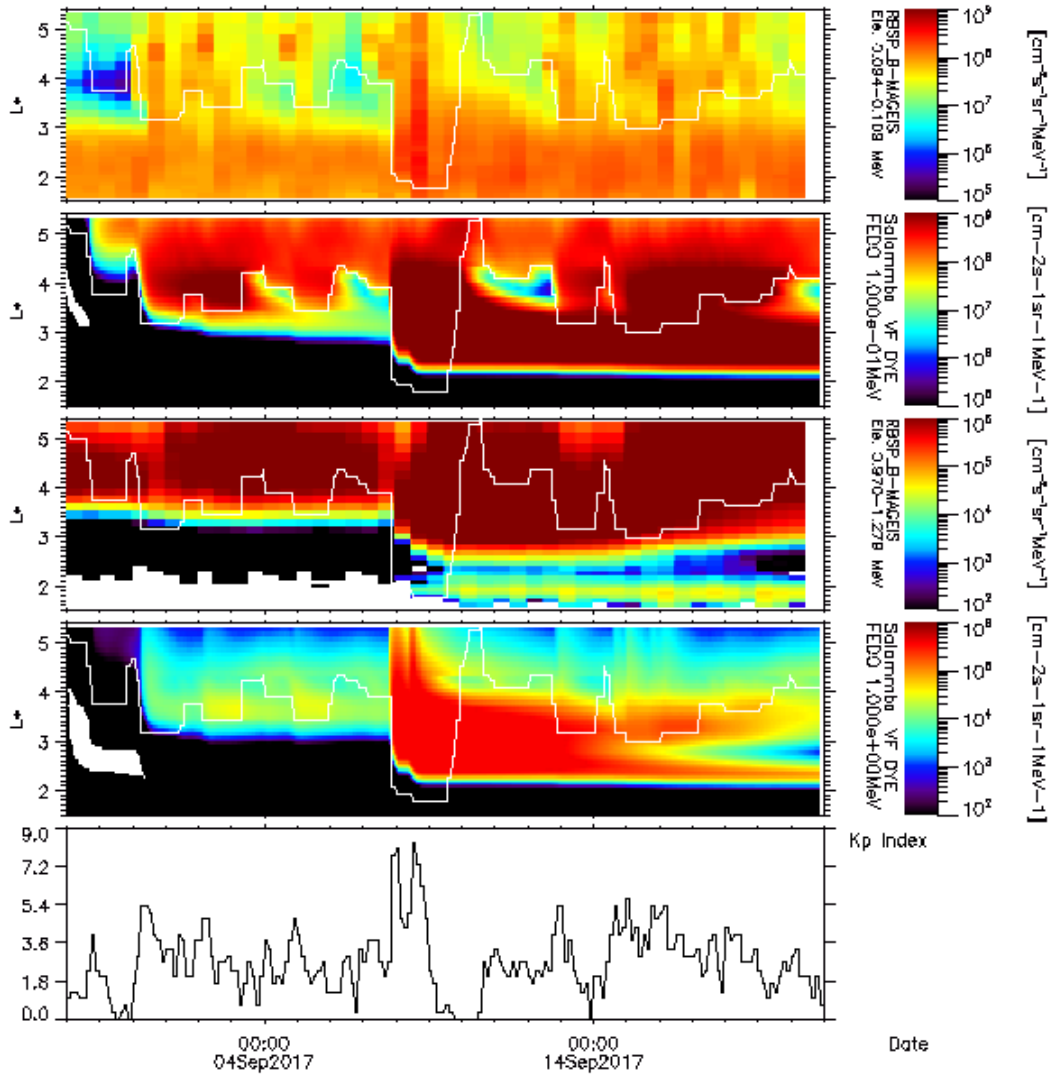


FIGURE IV.22 – Du haut vers le bas, flux omnidirectionnels des électrons d'énergie comprise entre 0.094 et 0.109 MeV mesurés par la sonde RBSP-B (*Van Allen Probes*), flux différentiels omnidirectionnels des électrons de 100 keV estimé par le nouveau coeur avec diffusion croisée, flux omnidirectionnels des électrons d'énergie comprises entre 0.970 MeV et 1.278 MeV mesurés par la sonde RBSP-B, flux différentiels omnidirectionnels des électrons de 1 MeV estimé par le nouveau coeur avec diffusion croisée et variations temporelles de Kp .

On voit que la dynamique des mesures est globalement reproduite par le nouveau coeur. La mécanique des injections de particules et sa dépendance en fonction de l'activité géomagnétique est relativement respectée. On reproduit aussi les dynamiques locales liées à l'évolution de la plasmopause, qui comme on l'a observé précédemment, sont très visibles pour les électrons de 100 keV (entre le 4 et le 7 Septembre en période d'activité calme, et entre le 10 Septembre et le 12 Septembre lors de la phase de retour à l'équilibre). Bien que la région du *slot* soit déjà présente depuis le 8 Septembre dans les

mesures de 1 MeV, sa vitesse d'élargissement radiale dans la simulation à partir du 17 Septembre, est pratiquement la même que celle observée dans les mesures.

Toutefois on constate aussi des différences d'au moins un ordre de grandeur entre les niveaux de flux des mesures et ceux de la simulation. En effet, la simulation surestime les flux à grands L^* des électrons de 100 keV et les sous-estime dans la même région pour les électrons de 1 MeV. Ces différences ne sont pas d'origine numériques et elles s'expliquent plutôt par :

- L'absence de certains phénomènes physiques dans la simulation comme les *dropout* ou l'interaction avec les ondes EMIC.
- La forte incertitude sur la condition aux limites à $L^* = 8$ qui va fortement dégrader les ordres de grandeurs des flux, comme c'est la seule source de particule dans la simulation. Par retour d'expérience, on sait que cette condition basée sur des mesures en orbite basse LEO n'est pas complètement représentatives des niveaux absolus dans l'équateur magnétique. Comme la distribution est plate proche en fonction de L de cette condition, quelque soit le coeur on aura le même résultat, donc ce sont les incertitudes issues de la modélisation de la condition qui vont plus impacter le résultat que l'erreur numérique.
- L'incertitude importante sur l'estimation des processus d'interaction (avec les ondes, avec la plasmasphère, avec les variations du champ magnétique...) qui se répercute sur la précision des coefficients de diffusion en général et en particulier aux énergies représentées (100 keV et 1 MeV). En effet, on sait que le code est biaisé pour des énergies en dessous de 300 keV ([160]) et pour les hautes énergies (\sim MeV).

Pour affranchir le rôle de la résolution numérique des différences observées par rapport aux mesures in-situ, on réalise de nouvelles simulations (avec l'ancien et le nouveau coeur numérique) d'un autre orage magnétique qui s'est produit pendant la Saint-Patrick en 2015, issu lui aussi d'une CME.

Comme on peut le voir dans la figure IV.23, la cartographie des électrons de 500 keV (une énergie qui rentre dans l'intervalle de confiance sur les coefficients de diffusion [160]) montre une très bonne adéquation entre les mesures et les simulations. En effet, la première phase calme de l'orage, entre le 1er et le 17 Mars est bien retranscrite avec la présence des deux pics de flux autour du 3 et du 9 Mars, issues des accélérations locales. On voit aussi que le nouveau coeur est plus proche de la réalité que l'ancien coeur qui sous estime les niveaux de flux. Cette bonne performance se poursuit dans la reconstitution de la phase principale de l'orage qui se produit entre le 17 et le 20 Mars et pendant la phase de retour à l'équilibre pendant lesquels on observe des niveaux de flux plus intenses et plus proches des mesures du coté du nouveau coeur et une bien meilleure reconstruction de la région du slot qui se profile à la fin de la simulation.

Comme ces derniers résultats confirment le rôle indéniable du nouveau coeur dans une meilleure modélisation numérique de la physique observée, il devient claire que l'étape suivante à envisager consistera à améliorer l'estimation des coefficients de diffusion. En effet, grâce aux nouvelles propriétés de robustesse et de précision apportées par le nouveau coeur numérique, on sera capable de mesurer beaucoup mieux les répercussions des modèles physique utilisés, sur la dynamique globale physique, sans se soucier de leurs effets néfastes sur la résolution numérique.

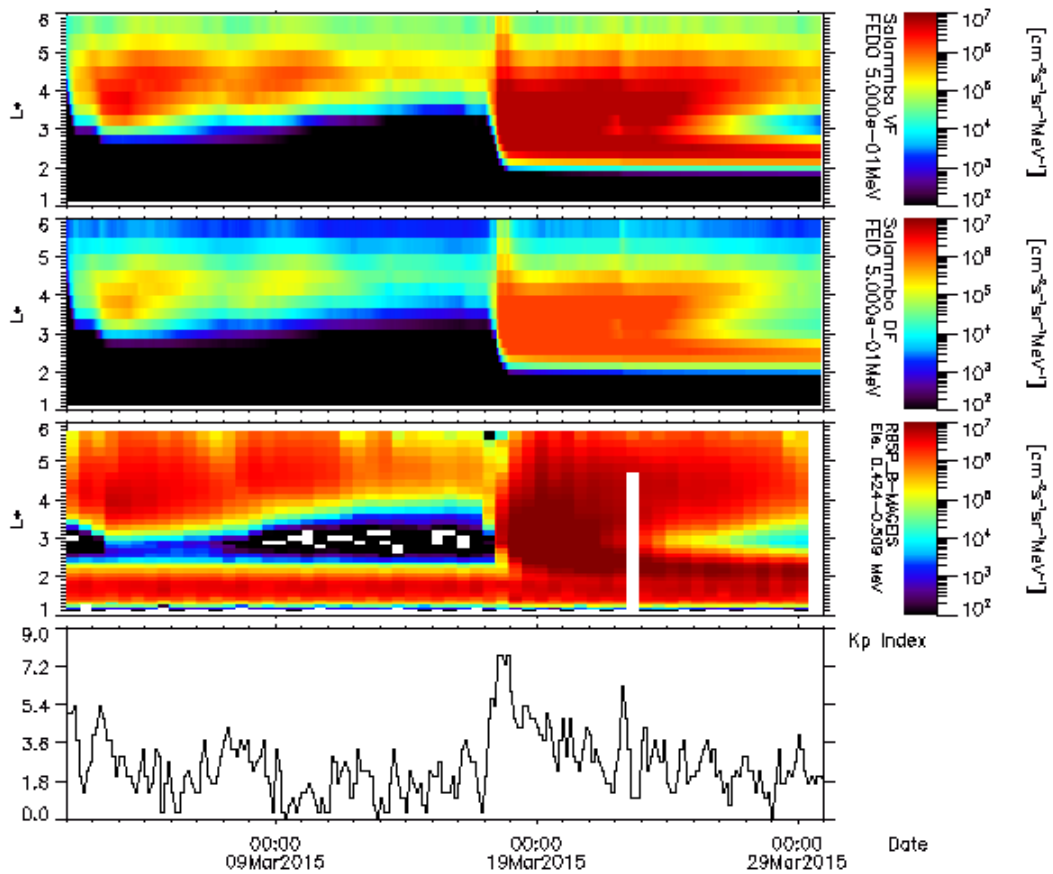


FIGURE IV.23 – Du bas vers le haut, variations temporelles de Kp , flux omnidirectionnels des électrons d'énergie comprise entre 0.424 et 0.509 MeV mesurés par la sonde RBSP-B (*Van Allen Probes*), flux différentiels omnidirectionnels des électrons de 500 keV estimé par l'ancien coeur et flux différentiels omnidirectionnels des électrons de 500 keV estimé par le nouveau coeur.

Conclusion et perspectives

Cette étude s'est intéressée à la résolution numérique de l'équation de diffusion décrivant la dynamique des ceintures de radiation. Ces structures physiques présentent une dynamique complexe faisant intervenir des processus multi-physiques et multi-échelles, fortement couplés à la dynamique du vent solaire. Le code Salammbô a subi des améliorations conséquentes du point de vue de la modélisation des processus physiques, mais très peu du point de vue de la résolution numérique. Ce travail de thèse a donc permis de progresser sur les aspects numériques grâce à l'introduction de nouveaux schémas numériques, lui permettant de simuler des configurations physiques plus complexes. De plus, cette thèse a permis de préparer le code Salammbô à son utilisation « opérationnelle » dans le cadre de la Météorologie de l'Espace.

Après avoir rappelé le cadre physique complexe étudié, j'ai établi le modèle d'équation de diffusion 3D qui est résolu par le code et qui reflète une dynamique à deux échelles : une diffusion locale fortement couplée en énergie et en angle d'attaque et une diffusion radiale globale. J'ai ensuite présenté les principales contraintes induites par la physique quant à la résolution par un schéma différences finies-Euler explicite. Parmi elles, la forte inhomogénéité des coefficients de diffusion réduit la précision numérique et limite le domaine de stabilité. De plus l'absence de la conservation de la positivité de la solution numérique empêche l'introduction des termes de diffusion croisée, indispensables pour avoir une représentation physique rigoureuse. La communauté scientifique modélisant la dynamique des ceintures de radiation n'a jusqu'à maintenant pas exploré pleinement les contraintes numériques associées à cette dynamique si particulière. Les solutions apportées par les codes physiques actuels ne résolvent en effet que partiellement ces contraintes. J'ai ainsi entrepris un travail de refonte complet du cœur numérique de Salammbô afin de lever convenablement chacun de ses verrous, étayés d'arguments méthodologiques et numériques souvent absents des études menées par cette communauté.

J'ai choisi de construire le socle de la nouvelle résolution numérique sur un schéma volumes finis et un schéma temporel Euler implicite. Le passage vers une discrétisation implicite était naturellement la piste à suivre pour assurer une stabilité inconditionnelle et obtenir une plus grande flexibilité dans le choix du raffinement de maillage spatio-temporel. En revanche, l'adoption d'une discrétisation volumes finis représentait une rupture conséquente par rapport au choix habituel d'une discrétisation différences finies. J'ai justifié ce changement par l'adéquation de cette méthode avec la résolution des lois de conservation. En se basant sur un équilibre de flux numérique, elle pouvait assurer une meilleure gestion de l'inhomogénéité spatiale des coefficients et apportait la propriété de conservation qui assurerait la préservation de « l'information » durant la résolution. Afin d'adresser proprement la problématique de la prise en compte de la diffusion croisée, je suis revenu sur les principes mathématiques du maximum, du minimum et de la positivité qui pilotent l'évolution de la solution à l'intérieur du domaine. J'ai souligné la nécessité de consolider le nouveau schéma numérique par la propriété de monotonie qui s'obtenait souvent par une construction M-Matrice et qui pouvait s'obtenir aussi par le jeu de conditions de Nordbotten, plus général, que j'ai exposé puis adapté à notre problème.

Après avoir présenté et sélectionné des variantes centrées linéaires et non-linéaires de schémas volumes finis, j'ai cherché à évaluer leurs performances numériques. Du fait de la difficulté de construire une solution de référence permettant la validation des schémas pour notre application, j'ai mis en place

un certain nombre de tests numériques appelés « cas jouets » représentatifs de la physique étudiée et de ses contraintes numériques. Suite à une étude comparative des méthodes différences finies et volumes finis sur certains de ces « cas jouets » j'ai pu mesurer la meilleure gestion par la méthode volumes finis de la forte inhomogénéité spatiale des coefficients de diffusion à l'intérieur du domaine étudié, ainsi que sur ses bords, aux niveaux des conditions aux limites. J'ai pu vérifier la conservation par la méthode volumes finis, du second ordre de convergence entre les différentes tailles de grilles de Salammbô.

Suite à cela, je me suis attaqué à la gestion de la forte anisotropie qui était responsable de la perte de la monotonie des schémas linéaires volumes finis. En réalité, l'effet contraignant de cette dernière se résume à la présence de la diffusion croisée sur un maillage cartésien. Disposant des conditions de monotonie de Nordbotten plus générales, j'ai analysé les origines de la perte de la monotonie sur un schéma linéaire volumes finis et j'ai isolé le rôle principal du déséquilibre entre la diffusion croisée et la diffusion en énergie, qui ne pouvait être contrôlée ainsi. M'appuyant par conséquent sur les schémas non-linéaires, j'ai tout d'abord proposé une nouvelle construction d'un schéma qui se basait sur une structure vérifiant les conditions de Nordbotten et qui assurait de ce fait une propriété de monotonie locale plus forte. J'ai ensuite étudié minutieusement la précision et le coût introduit par les schémas non-linéaires sélectionnés. Puis, j'ai exploré la sensibilité de cette résolution vis-à-vis des paramètres de l'algorithme de Picard, à savoir la qualité de l'initialisation, le type d'estimateur de convergence et son critère de sortie. En particulier, j'ai constaté avec ces schémas la perte de l'équivalence entre les principes de positivité et du minimum-maximum. Cela m'a permis d'aboutir à un compromis entre le coût du calcul et les principes mathématiques qu'il fallait préserver a minima. J'ai observé aussi l'émergence du phénomène numérique de relaxation qui dégradait le temps de calcul et qui se limitait aux plans L^* où l'interaction avec les ondes électromagnétiques était la plus forte. Enfin, j'ai présenté une nouvelle approche pour discrétiser la diffusion radiale. La structure de ce nouveau schéma radial est monotone et grâce à sa formulation par des flux numériques similaires à la méthode volumes finis, elle est moins sensible à la forte inhomogénéité spatiale de cette dernière.

Après avoir vérifié numériquement et implémenté le nouveau cœur, je l'ai confronté à un cas réel de dynamique puis comparé aux mesures satellites réelles. Plus précisément, j'ai simulé une période de 23 jours en Septembre 2017, caractéristique des différentes dynamiques typiques observées dans les ceintures de radiations électrons. En plus d'avoir validé la restitution physique du nouveau cœur vis-à-vis de la mécanique radiale de remplissage et le rôle de la diffusion locale dans les pertes et les énergisations, j'ai constaté l'importante réduction du temps de calcul apportée par le nouveau cœur et j'ai mesuré l'impact de la flexibilité associée sur le choix du maillage spatial et temporel. Grâce à ce nouveau cœur numérique, on peut maintenant accéder à des temps de simulation plus grands pour évaluer des effets dynamiques de très longue durée (échelle du cycle solaire). On peut aussi affiner notre représentation spatiale des processus physiques tout en étant sûr de sa cohérence. J'ai ensuite voulu quantifier l'effet de la diffusion croisée dans le bilan des processus physiques modélisés. Pour cela, j'ai commencé par isoler son rôle dans une configuration physique simple que j'ai ensuite lié à l'effet des conditions aux limites, au signe de la diffusion croisée et à son intensité relative par rapport aux autres directions de diffusion locale. Enfin, j'ai comparé ce nouveau code de simulation, intégrant la diffusion croisée aux mesures satellites. J'ai pu constater qu'elle pouvait à la fois affaiblir les flux d'électrons de forte énergie ($> \text{MeV}$) et renforcer les flux de particules d'énergie moins intense ($\leq 100 \text{ keV}$). De plus, j'ai observé l'installation d'un couplage avec la diffusion radiale qui pouvait transporter les effets de la diffusion croisée dans des régions comme la plasmasphère où elle n'est pas présente.

Plusieurs points restent à aborder dans l'avenir pour poursuivre ces efforts. Un re-calcul des coefficients de diffusion sur la grille volumes finis doit être réalisé afin d'éliminer les erreurs d'interpolation entre les grilles. Il serait intéressant d'explorer des géométries complexes et adaptatives du maillage du nouveau cœur pour capturer à moindre coût les inhomogénéités spatiales. Dans ce cas, on sera amené à repenser la logique de discrétisation radiale en l'exprimant dans un nouvel espace de diffusion 2D

dégénérée pour laquelle on appliquerait des méthodes numériques adaptées. De plus, on pourrait envisager l'association du schéma de diffusion monotone à des limiteurs pour une discrétisation du terme advectif dans l'équation de Fokker-Planck. Il faudra aussi étudier de plus près le schéma NLMONOT et ses applications sur des maillages plus génériques.

Grâce à ce travail de thèse, une nouvelle brique est ajoutée au développement continu du code Salammbô. Cet apport n'est pas des moindres, puisque'il concerne sa résolution numérique et sera donc profitable aux versions Jovienne et Cronienne de Salammbô (électrons aussi bien que protons). Avec ses nouvelles propriétés de précision et de robustesse, la prise en compte de nouveaux processus diffusifs ne posera dorénavant aucune contrainte numérique. En particulier, les « cas jouets » mis en place nous permettront de tester et analyser les effets de l'ajout de nouvelles composantes physiques le cas échéant. Une grande avancée a aussi été réalisée dans la modélisation numérique des ceintures de radiation. En effet, en plus de proposer à la communauté une nouvelle discrétisation spatiale plus adaptée, on apporte avec les tests numériques sur les « cas jouets », une procédure plus exigeante de vérification numérique des codes physiques. Nous proposons aussi à la communauté des Mathématiques Appliquées, un nouveau schéma volumes finis compétitif et robuste ainsi qu'un nouveau domaine d'application conservatif pour réaliser des benchmarking de schémas numériques, alternatif à l'ingénierie des réservoirs et des écoulements multiphasiques.

Annexe A

Construction du schéma NLMPFA sur une grille cartésienne

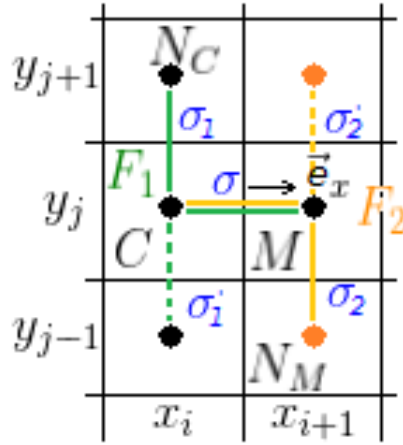


FIGURE A.1 – Construction du schéma NLMPFA sur un maillage cartésien et notation des cellules quand la direction de discrétisation prise est selon \vec{e}_x .

On considère deux cellules voisines C et M d'un maillage cartésien, partageant une interface σ . On établit les expressions génériques des flux F_1 et F_2 décentrés, quel que soit la direction de discrétisation (voir figure A.1 pour la direction de discrétisation selon \vec{e}_x) :

$$\begin{cases} F_1 = \lambda^1(f_C - f_M) + \underbrace{\nu_{C,N_C}^1(f_C - f_{N_C})}_{G_1} \\ F_2 = \lambda^2(f_M - f_C) + \underbrace{\nu_{M,N_M}^2(f_M - f_{N_M})}_{G_2} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On a déjà remarqué avec le schéma *LIN 2* que F_1 s'écrivait avec les bons poids de discrétisation pour construire une M -matrice alors que F_2 était dégradée par G_2 . Grâce à la non-linéarité du schéma NLMPFA, on corrige cette dégradation en ajustant avec les facteurs de pondération μ_1 et μ_2 le stencil de $F_{C,\sigma}$ sur celui de F_1 . Ce choix particulier de μ_1 et μ_2 dépend du signe de la quantité $F_1 F_2$:

— si $F_1 F_2 \leq 0$ alors $|F_1| F_2 = -F_1 |F_2|$, on choisit donc :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{|F_2|}{|F_1| + |F_2|} \\ \mu_2 = \frac{|F_1|}{|F_1| + |F_2|} \end{cases} \text{ si } |F_1| + |F_2| \neq 0 \text{ sinon } \mu_1 = \mu_2 = 0.5 \quad (\text{A.2})$$

ainsi $F_{C,\sigma} = 2\mu_1 F_1$.

— sinon $F_1 F_2 > 0$ alors $|F_1| F_2 = F_1 |F_2|$, on choisit donc :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{|G_2|}{|G_1|+|G_2|} \\ \mu_2 = \frac{|G_1|}{|G_1|+|G_2|} \end{cases} \quad \text{si } |G_1| + |G_2| \neq 0 \quad \text{sinon } \mu_1 = \mu_2 = 0.5 \quad (\text{A.3})$$

et on identifie deux cas de figure selon le signe de $G_1 G_2$:

— si $G_1 G_2 > 0$ alors $|F_1| F_2 = F_1 |F_2|$, ainsi $F_{C,\sigma} = (\mu_1 \lambda^1 + \mu_2 \lambda^2)(f_C - f_M)$

— si $G_1 G_2 \leq 0$ alors $|F_1| F_2 = -F_1 |F_2|$, ainsi $F_{C,\sigma} = (\mu_1 \lambda^1 + \mu_2 \lambda^2)(f_C - f_M) + 2\mu_1 G_1$

Ainsi, on est sûr dans tous les cas d'avoir une discrétisation qui ne contient que des poids avec le bon signe pour avoir la structure LMP et on ne perd pas l'information de la portion de flux G_2 , qui sera comptabilisée implicitement dans μ_1 et μ_2 .

Annexe B

Conditions de Nordbotten : conditions nécessaires et suffisantes de monotonie ?

On sait déjà que les conditions de Nordbotten sont suffisantes. Or *Keilegavlen et al.* affirme dans[142] que les conditions **A0**,**A1**,**A2** et **A3** sont aussi nécessaires, ce qui rend les conditions de Nordbotten les plus générales pour obtenir la monotonie. Pour démontrer ce résultat, on utilise le caractère local des conditions en considérant différentes configurations de sous-domaine.

Soit un sous-domaine du maillage, constitué d'une seule cellule, sur laquelle on écrit le schéma numérique localement conservatif suivant :

$$m_1^{i,j} f_{i,j} = Q_{i,j} \quad (\text{B.1})$$

On voit bien que pour $Q_{i,j} \geq 0$, la condition **A0** est indispensable pour avoir la positivité de la solution. Maintenant, si on passe à un sous-domaine constitué de deux cellules disposées horizontalement et on impose $Q_{i,j} = 0$ alors :

$$f_{i,j} = -\frac{m_2^{i,j}}{m_1^{i,j}} \quad (\text{B.2})$$

Si **A0** est valide, alors **A1a** est nécessaire pour assurer la positivité de $f_{i,j}$. Les autres conditions **A1** sont obtenues par analogie, en changeant la disposition du maillage à deux cellules. On passe maintenant à un maillage à 3 cellules disposées en L comme sur la figure B.1. On impose $Q_{i,j} = Q_{i,j+1} = 0$ et

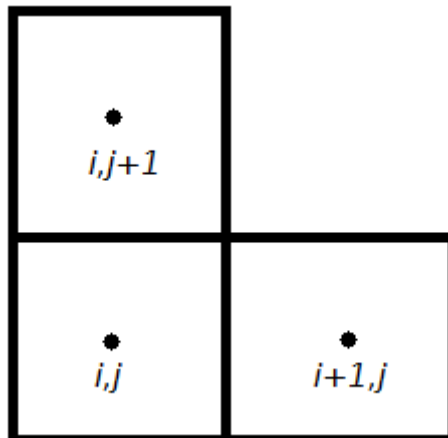


FIGURE B.1 – Disposition en L du maillage à 3 cellules.

$f_{i+1,j} = 1$ et on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} m_1^{i,j} f_{i,j} + m_4^{i,j} f_{i,j+1} + m_2^{i,j} &= 0 \\ m_1^{i,j+1} f_{i,j+1} + m_8^{i,j+1} f_{i,j} + m_9^{i,j+1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m_1^{i,j} & m_4^{i,j} \\ m_8^{i,j+1} & m_1^{i,j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,j} \\ f_{i,j+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_2^{i,j} \\ m_9^{i,j+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

La résolution du système donne :

$$\begin{pmatrix} f_{i,j} \\ f_{i,j+1} \end{pmatrix} = - \frac{1}{m_1^{i,j} m_1^{i,j+1} - m_4^{i,j} m_8^{i,j+1}} \begin{pmatrix} m_1^{i,j} & m_4^{i,j} \\ m_8^{i,j+1} & m_1^{i,j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2^{i,j} \\ m_9^{i,j+1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ainsi $f_{i,j=1} = \frac{m_2^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_1^{i,j} m_9^{i,j+1}}{m_1^{i,j} m_1^{i,j+1} - m_4^{i,j} m_8^{i,j+1}}$. On voit bien que pour avoir la positivité de $f_{i,j+1}$ il faut assurer **A0**, **A1** et **A3c** (de même pour **A3a**, **A3b** et **A3d** en changeant la disposition des cellules).

Annexe C

Termes m_k du schéma *LIN 2* quand $D_{xy} < 0$

Dans le cas $D_{xy} < 0$, les expressions des termes m_k du schéma *LIN 2* sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = (\gamma_1^{S1} + \gamma_2^{S1} + \gamma_1^{S2} + \gamma_2^{S2} + \gamma_1^{S3} + \gamma_2^{S3} + \gamma_1^{S4} + \gamma_2^{S4}) \\ m_2 = -(\gamma_1^{S1} + \gamma_3^{S1} + \gamma_2^{S4}) \\ m_3 = \gamma_3^{S1} + \gamma_3^{S2} \\ m_4 = -(\gamma_1^{S2} + \gamma_3^{S2} + \gamma_2^{S3}) \\ m_5 = 0 \\ m_6 = -(\gamma_1^{S3} + \gamma_3^{S3} + \gamma_2^{S2}) \\ m_7 = \gamma_3^{S3} + \gamma_3^{S4} \\ m_8 = -(\gamma_1^{S4} + \gamma_3^{S4} + \gamma_2^{S1}) \\ m_9 = 0 \end{array} \right. \quad (C.1)$$

En considérant un tenseur de diffusion homogène et un maillage cartésien uniforme ($\Delta x = \Delta y = h$) avec cette fois $\lambda = \frac{|D_{xy}|}{D_{yy}}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{D_{yy}}{h}(2 + 2\alpha + 2\lambda) \\ m_2 = -\frac{D_{yy}}{h}(\alpha + \lambda) \\ m_3 = \frac{D_{yy}}{h}\lambda \\ m_4 = -\frac{D_{yy}}{h}(1 + \lambda) \\ m_5 = 0 \\ m_6 = -\frac{D_{yy}}{h}(\alpha + \lambda) \\ m_7 = \frac{D_{yy}}{h}\lambda \\ m_8 = -\frac{D_{yy}}{h}(1 + \lambda) \\ m_9 = 0 \end{array} \right. \quad (C.2)$$

Les expressions des m_{2p} sont identiques à celles obtenues quand $D_{xy} \geq 0$. Celles de m_{2p+1} sont interverties entre elles à cause du changement de stencil.

Cette fois comme $m_5 = m_9 = 0$ et $m_4 m_6 > 0$ et $m_2 m_8 > 0$, alors c'est **A3b** et **A3c** qui sont vérifiées et on fait découler l'inégalité (III.16) à partir de **A3a** et **A3d**. Le traitement asymptotique sur cette inégalité réalisé pour $D_{xy} \geq 0$ reste valable pour $D_{xy} < 0$.

Annexe D

Construction du schéma NLMONOT sur une grille cartésienne et identification des (c_1, c_2)

D.1 Construction du schéma NLMONOT

On commence par rappeler la discrétisation du schéma NLMONOT dans un cas générique sur maillage cartésien :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) \\ &+ c_1\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \\ &+ \mu_1G'_1 - \mu_2G'_2 \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec

$$\begin{cases} G'_1 = (1 - c_1)\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) \\ G'_2 = (1 - c_2)\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Le choix de μ_1 et μ_2 sert ici à éliminer la quantité $\mu_1G'_1 - \mu_2G'_2$ afin de ne laisser que les portions de flux contrôlable par c_1 et c_2 :

$$\begin{aligned} F_{C,\sigma} &= (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) \\ &+ c_1\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N_C}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N_M}) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

On suppose donc que $|G'_1 + G'_2| \neq 0$ et on impose $\mu_1 = \frac{|G'_2|}{|G'_1 + G'_2|}$ et $\mu_2 = \frac{|G'_1|}{|G'_1 + G'_2|}$.

Selon le signe de $G'_1G'_2$ on se trouve avec deux cas de figure :

— $G'_1G'_2 \geq 0 \Rightarrow \mu_1G'_1 - \mu_2G'_2 = 0$ et le flux non linéaire s'écrit

$$F_{C,\sigma} = (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) + c_1\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N(C)}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N(M)}) \quad (\text{D.4})$$

— $G'_1G'_2 < 0 \Rightarrow \mu_1G'_1 - \mu_2G'_2 = 2\mu_1G'_1$ et le flux non linéaire s'écrit :

$$F_{C,\sigma} = (\mu_1\lambda^1 + \mu_2\lambda^2)(f_C - f_M) + (2 - c_1)\mu_1\nu_{C,N}^1(f_C - f_{N(C)}) - c_2\mu_2\nu_{C,N}^2(f_M - f_{N(M)}) \quad (\text{D.5})$$

Si $|G'_1 + G'_2| = 0$, il suffit de prendre $G'_1 = G'_2 = \frac{1}{2}$.

D.2 Identification d'un couple (c_1, c_2)

On évalue les termes m_k de la discrétisation NLMONOT, en suivant la même numérotation des faces présentée dans la figure III.25. Pour simplifier le calcul ici, on fixe le stencil en fixant $D_{xy} \geq 0$.

On commence par étudier le cas $G'_1 G'_2 \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \mu_1^{S1} \lambda_1^{S1} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1} + c_1^{S1} \mu_1^{S1} \nu_1^{S1} + \mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S2} \lambda_2^{S2} + c_1^{S2} \mu_1^{S2} \nu_1^{S2} \\ \quad + \mu_1^{S3} \lambda_1^{S3} + \mu_2^{S3} \lambda_2^{S3} + c_1^{S3} \mu_1^{S3} \nu_1^{S3} + \mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4} + c_1^{S4} \mu_1^{S4} \nu_1^{S4} \\ m_2 = -(\mu_1^{S1} \lambda_1^{S1} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1} + c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1} + c_1^{S2} \mu_1^{S2} \nu_1^{S2}) \\ m_3 = 0 \\ m_4 = -(\mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S2} \lambda_2^{S2} + c_2^{S2} \mu_2^{S2} \nu_2^{S2} + c_1^{S1} \mu_1^{S1} \nu_1^{S1}) \\ m_5 = c_2^{S2} \mu_2^{S2} \nu_2^{S2} + c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3} \\ m_6 = -(\mu_1^{S3} \lambda_1^{S3} + \mu_2^{S3} \lambda_2^{S3} + c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3} + c_1^{S4} \mu_1^{S4} \nu_1^{S4}) \\ m_7 = 0 \\ m_8 = -(\mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4} + c_2^{S4} \mu_2^{S4} \nu_2^{S4} + c_1^{S3} \mu_1^{S3} \nu_1^{S3}) \\ m_9 = c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1} + c_2^{S4} \mu_2^{S4} \nu_2^{S4} \end{array} \right. \quad (D.6)$$

Pour $G'_1 G'_2 < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \mu_1^{S1} \lambda_1^{S1} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1} + (2 - c_1^{S1}) \mu_1^{S1} \nu_1^{S1} + \mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S2} \lambda_2^{S2} + (2 - c_1^{S2}) \mu_1^{S2} \nu_1^{S2} \\ \quad + \mu_1^{S3} \lambda_1^{S3} + \mu_2^{S3} \lambda_2^{S3} + (2 - c_1^{S3}) \mu_1^{S3} \nu_1^{S3} + \mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4} + (2 - c_1^{S4}) \mu_1^{S4} \nu_1^{S4} \\ m_2 = -(\mu_1^{S1} \lambda_1^{S1} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1} + c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1} + (2 - c_1^{S2}) \mu_1^{S2} \nu_1^{S2}) \\ m_3 = 0 \\ m_4 = -(\mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S2} \lambda_2^{S2} + c_2^{S2} \mu_2^{S2} \nu_2^{S2} + (2 - c_1^{S1}) \mu_1^{S1} \nu_1^{S1}) \\ m_5 = c_2^{S2} \mu_2^{S2} \nu_2^{S2} + c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3} \\ m_6 = -(\mu_1^{S3} \lambda_1^{S3} + \mu_2^{S3} \lambda_2^{S3} + c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3} + (2 - c_1^{S4}) \mu_1^{S4} \nu_1^{S4}) \\ m_7 = 0 \\ m_8 = -(\mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4} + c_2^{S4} \mu_2^{S4} \nu_2^{S4} + (2 - c_1^{S3}) \mu_1^{S3} \nu_1^{S3}) \\ m_9 = c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1} + c_2^{S4} \mu_2^{S4} \nu_2^{S4} \end{array} \right. \quad (D.7)$$

La condition **A2** impose :

$$m_1^{i,j} + m_2^{i,j} + m_6^{i,j} > 0 \quad (D.8)$$

ce qui donne avec les poids de la discrétisation dans la cellule (i, j) quand $G'_1 G'_2 \geq 0$

$$\underbrace{(\mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1}) + (\mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4}) + (2 - c_1^{S1}) \mu_1^{S1} \nu_1^{S1} + (2 - c_1^{S3}) \mu_1^{S3} \nu_1^{S3}}_A - \underbrace{(c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1}) + (c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3})}_B > 0 \quad (D.9)$$

et quand $G'_1 G'_2 < 0$

$$\underbrace{(\mu_1^{S2} \lambda_1^{S2} + \mu_2^{S1} \lambda_2^{S1}) + (\mu_1^{S4} \lambda_1^{S4} + \mu_2^{S4} \lambda_2^{S4}) + c_1^{S1} \mu_1^{S1} \nu_1^{S1} + c_1^{S3} \mu_1^{S3} \nu_1^{S3}}_A - \underbrace{(c_2^{S1} \mu_2^{S1} \nu_2^{S1}) + (c_2^{S3} \mu_2^{S3} \nu_2^{S3})}_B > 0 \quad (D.10)$$

On se met dans le pire cas des deux inégalités précédentes, en minorant la quantité A et en majorant la quantité B, sachant que $\mu_1, \mu_2 \leq 1$:

$$\begin{aligned} A &\geq \min_{i,j}(\lambda_1^{S1}, \lambda_2^{S1}) + \min_{i,j}(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4}) \\ B &\leq (c_2^{S1} \nu_2^{S1}) + (c_2^{S3} \nu_2^{S3}) \leq (c_2^{S1} + c_2^{S3}) \max(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S3}) \end{aligned} \quad (D.11)$$

et on obtient une première condition sur c_2^{S1} et c_2^{S3} (et sur c_1^{S3} et c_1^{S1} en utilisant (III.26)) :

$$c_2^{S1} + c_2^{S3} < \frac{\min(\lambda_1^{S1}, \lambda_2^{S1}) + \min(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4})}{\max(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S3})} \quad (\text{D.12})$$

On s'intéresse maintenant aux conditions **A3** :

$$m_2^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_3^{i,j-1} m_8^{i,j} < 0 \quad (\text{A3a})$$

$$m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} - m_5^{i,j-1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3b})$$

$$m_2^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_9^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3c})$$

$$m_6^{i,j} m_8^{i,j+1} - m_7^{i,j+1} m_1^{i,j} > 0 \quad (\text{A3d})$$

Comme $m_3 = m_7 = 0$, on se limite à la vérification des conditions **A3b** et **A3c**. De la même manière que pour la condition **A2**, on se met dans le pire cas des inégalités **A3** en minorant les produits $m_{2p}m_{2q}$ et en majorant les produits m_1m_{2s+1} :

$$\begin{aligned} m_6^{i,j} m_4^{i,j-1} &\geq \min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j-1}(\lambda_1^{S2}, \lambda_2^{S2}) \\ m_2^{i,j} m_8^{i,j+1} &\geq \min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j+1}(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4}) \\ m_1 &\leq \underbrace{\max_{i,j}(\lambda_1^{S1}, \lambda_2^{S1}) + \max_{i,j}(\lambda_1^{S2}, \lambda_2^{S2}) + \max_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) + \max_{i,j}(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4}) + 2 \max_{i,j}(\nu_1^{S1} + \nu_1^{S2} + \nu_1^{S3} + \nu_1^{S4})}_{A'} \\ m_5^{i,j-1} &\leq (c_2^{S2} + c_2^{S3}) \max_{i,j-1}(\nu_2^{S2}, \nu_2^{S3}) \\ m_9^{i,j+1} &\leq (c_2^{S1} + c_2^{S4}) \max_{i,j+1}(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S4}) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

ce qui donne deux nouvelles conditions sur $c_2^{S1}, c_2^{S2}, c_2^{S3}$ et c_2^{S4} :

$$\begin{aligned} c_2^{S2} + c_2^{S3} &< \frac{\min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j-1}(\lambda_1^{S2}, \lambda_2^{S2})}{\max_{i,j-1}(\nu_2^{S2}, \nu_2^{S3}) A'} \\ c_2^{S1} + c_2^{S4} &< \frac{\min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j+1}(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4})}{\max_{i,j+1}(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S4}) A'} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

A partir de ces inégalités, on peut envisager différentes combinaisons de c_1^{Si}, c_2^{Si} . Le choix peut être local (relatif aux contraintes de monotonie de la cellule et ses voisines), ou bien global (le même choix sur tout le maillage). Pour des considérations de simplicité, on impose dans cet exemple, les relations suivantes entre c_1 et c_2 pour boucler la résolution des inégalités :

$$c_1^{S1} = c_1^{S2} \quad (\text{D.15})$$

ce qui donne, à partir des inégalités précédentes, le jeu de conditions suivant à vérifier par c_1^{S2}, c_2^{S2} :

$$\begin{aligned} c_2^{S1} + c_2^{S3} = c_2^{S2} + c_1^{S1} = c_2^{S2} + c_1^{S2} &< \frac{\min(\lambda_1^{S1}, \lambda_2^{S1}) + \min(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4})}{\max(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S3})} \\ c_2^{S2} + c_2^{S3} = c_2^{S2} + c_1^{S1} = c_2^{S2} + c_1^{S2} &< \frac{\min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j-1}(\lambda_1^{S2}, \lambda_2^{S2})}{\max_{i,j-1}(\nu_2^{S2}, \nu_2^{S3}) A'} \\ c_2^{S1} + c_2^{S4} = c_2^{S2} + c_1^{S2} &< \frac{\min_{i,j}(\lambda_1^{S3}, \lambda_2^{S3}) \min_{i,j+1}(\lambda_1^{S4}, \lambda_2^{S4})}{\max_{i,j+1}(\nu_2^{S1}, \nu_2^{S4}) A'} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Bibliographie

- [1] Paul Demorest. Dynamo theory and earth's magnetic field. 2001.
- [2] Vincent Maget. *Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données appliquées à la restitution de la dynamique des ceintures de radiation terrestres*. PhD thesis, 2007. Thèse de doctorat dirigée par Bourdarie, Sébastien Sciences et techniques spatiales Toulouse, ISAE 2007.
- [3] Damien Herrera. *Prise en compte du temps local dans la modélisation des ceintures de radiation terrestres*. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Maget, Vincent et Bourdarie, Sébastien Astrophysique, sciences de l'espace, planétologie Toulouse, ISAE 2017.
- [4] Erwan Thébault, Christopher C Finlay, Ciarán D Beggan, Patrick Alken, Julien Aubert, Olivier Barrois, Francois Bertrand, Tatiana Bondar, Axel Boness, Laura Brocco, et al. International geomagnetic reference field : the 12th generation. *Earth, Planets and Space*, 67(1) :79, 2015.
- [5] James A Van Allen and Louis A Frank. Radiation around the earth to a radial distance of 107,400 km. *Nature*, 183(4659) :430–434, 1959.
- [6] James J Harford. Korolev's triple play : Sputniks 1, 2, and 3. In *Reconsidering Sputnik*, pages 90–111. Routledge, 2013.
- [7] Daniel N. Baker and Mikhail I. Panasyuk. Discovering earth's radiation belts. *Physics Today*, 70(12) :46–51, 2017.
- [8] TR Zharaspayev, SV Koldashov, and VV Mikhailov. Maximum proton trapping energy in the earth radiation belt. *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 46(11) :348–350, 2019.
- [9] Sébastien Bourdarie. *Modélisation de la dynamique des ceintures de radiations à l'échelle de l'orage magnétique*. PhD thesis, École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1996.
- [10] Margaret G Kivelson, Margaret Galland Kivelson, and Christopher T Russell. *Introduction to space physics*. Cambridge university press, 1995.
- [11] MS Gussenhoven, EG Mullen, MD Violet, C Hein, J Bass, and D Madden. Crres high energy proton flux maps. *IEEE transactions on Nuclear Science*, 40(6) :1450–1457, 1993.
- [12] EG Mullen, MS Gussenhoven, K Ray, and M Violet. A double-peaked inner radiation belt : cause and effect as seen on crres. *IEEE transactions on nuclear science*, 38(6) :1713–1718, 1991.
- [13] S. G. Claudepierre, T. P. O'Brien, J. F. Fennell, J. B. Blake, J. H. Clemmons, M. D. Looper, J. E. Mazur, J. L. Roeder, D. L. Turner, G. D. Reeves, and H. E. Spence. The hidden dynamics of relativistic electrons (0.7–1.5 mev) in the inner zone and slot region. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 122(3) :3127–3144, 2017.
- [14] A. Sicard-Piet, S. Bourdarie, D. Boscher, R. Friedel, and T. Cayton. *Solar Cycle Electron Radiation Environment at GNSS Like Altitude*.
- [15] R. B. Horne, S. A. Glauert, N. P. Meredith, D. Boscher, V. Maget, D. Heynderickx, and D. Pitchford. Space weather impacts on satellites and forecasting the earth's electron radiation belts with spacecast. *Space Weather*, 11(4) :169–186, 2013.
- [16] Angélica Sicard. *Modélisation des ceintures de radiation d'électrons et d'ions de Jupiter*. PhD thesis, École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 2004.

- [17] Lise Lorenzato. *Modélisation des ceintures de radiations de Saturne*. PhD thesis, 2012.
- [18] Juan G Roederer and Hui Zhang. *Dynamics of magnetically trapped particles*. Springer, 2016.
- [19] Solène Lejosne. *Modélisation du phénomène de diffusion radiale au sein des ceintures de radiation terrestres par technique de changement d'échelle*. PhD thesis, 2013.
- [20] Michael Schulz. The magnetosphere. *Geomagnetism*, 4 :87–293, 1991.
- [21] D Boscher, S Bourdarie, P O'Brien, and T Guild. Onera-desp library v4. 2. *Toulouse, France*, 2008, 2004.
- [22] Theodore G Northrop. *The adiabatic motion of charged particles*. Number 21. Interscience Publishers, 1963.
- [23] Carl E McIlwain. Magnetic coordinates. *Space Science Reviews*, 5(5) :585–598, 1966.
- [24] Eckart Marsch. Kinetic physics of the solar corona and solar wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 3(1) :1, 2006.
- [25] Steven K Morley, Reiner HW Friedel, Emma L Spanswick, Geoffrey D Reeves, John T Steinberg, Josef Koller, Thomas Cayton, and Evan Noveroske. Dropouts of the outer electron radiation belt in response to solar wind stream interfaces : Global positioning system observations. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2123) :3329–3350, 2010.
- [26] Pierre Lantos. *Le Soleil en face : le soleil et les relations Soleil-Terre*. Elsevier Masson, 1997.
- [27] Joseph E Borovsky and Michael H Denton. Differences between cme-driven storms and cir-driven storms. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111(A7), 2006.
- [28] KF Tapping. The 10.7 cm solar radio flux (f10. 7). *Space Weather*, 11(7) :394–406, 2013.
- [29] Kristóf Petrovay. Solar cycle prediction. *Living Reviews in Solar Physics*, 17(1) :1–93, 2020.
- [30] Sidney Chapman and Vincent CA Ferraro. A new theory of magnetic storms. *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, 36(2) :77–97, 1931.
- [31] SG Claudepierre, M Wiltberger, SR Elkington, W Lotko, and MK Hudson. Magnetospheric cavity modes driven by solar wind dynamic pressure fluctuations. *Geophysical Research Letters*, 36(13), 2009.
- [32] SG Claudepierre, SR Elkington, and Michael Wiltberger. Solar wind driving of magnetospheric ulf waves : Pulsations driven by velocity shear at the magnetopause. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 113(A5), 2008.
- [33] JA Sauvaud. Earth magnetosphere. *Space environment : Prevention and Risks related to Spacecraft Charging*, page 81, 2002.
- [34] Norman F Ness. The earth's magnetic tail. *Journal of Geophysical Research*, 70(13) :2989–3005, 1965.
- [35] Gilbert Pietryk. *Panorama de la physique*. Humensis, 2015.
- [36] Richard Mansergh Thorne. Radiation belt dynamics : The importance of wave-particle interactions. *Geophysical Research Letters*, 37(22), 2010.
- [37] AK Singh, RP Singh, and Devendraa Siingh. State studies of earth's plasmasphere : A review. *Planetary and Space Science*, 59(9) :810–834, 2011.
- [38] J Goldstein and BR Sandel. The global pattern of evolution of plasmaspheric drainage plumes. *GEOPHYSICAL MONOGRAPH-AMERICAN GEOPHYSICAL UNION*, 159 :1, 2005.
- [39] B.A. Larsen, D.M. Klumpar, and C. Gurgiolo. Correlation between plasmopause position and solar wind parameters. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 69(3) :334 – 340, 2007. Global Aspects of Magnetosphere-Ionosphere Coupling.
- [40] Giuliana Verbanac, Viviane Pierrard, Mario Bandić, Fabien Darrouzet, J-L Rauch, and Pierrette Décréau. The relationship between plasmopause, solar wind and geomagnetic activity between 2007 and 2011. In *Annales Geophysicae*, volume 33, pages 1271–1283. Copernicus GmbH, 2015.

- [41] DL Carpenter and RR Anderson. An isee/whistler model of equatorial electron density in the magnetosphere. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 97(A2) :1097–1108, 1992.
- [42] NA Tsyganenko and Toshifumi Mukai. Tail plasma sheet models derived from geotail particle data. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 108(A3), 2003.
- [43] Ioannis A Daglis, Richard M Thorne, Wolfgang Baumjohann, and Stefano Orsini. The terrestrial ring current : Origin, formation, and decay. *Reviews of Geophysics*, 37(4) :407–438, 1999.
- [44] Joseph E Borovsky and Juan Alejandro Valdivia. The earth’s magnetosphere : A systems science overview and assessment. *Surveys in geophysics*, 39(5) :817–859, 2018.
- [45] Frederick W. Menk. *Magnetospheric ULF Waves : A Review*, pages 223–256. Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
- [46] ARW Hughes. Vlf waves in the magnetosphere. *Astrophysics and Space Science*, 230(1-2) :431–438, 1995.
- [47] I Kimura. Whistler mode propagation in the earth and planetary magnetospheres and ray tracing techniques. In *Space Plasma Simulations*, pages 449–466. Springer, 1985.
- [48] Danny Summers. Quasi-linear diffusion coefficients for field-aligned electromagnetic waves with applications to the magnetosphere. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 110(A8), 2005.
- [49] Wen Li, J Bortnik, RM Thorne, CM Cully, Lin Chen, V Angelopoulos, Y Nishimura, JB Tao, JW Bonnell, and Olivier LeContel. Characteristics of the poynting flux and wave normal vectors of whistler-mode waves observed on themis. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 118(4) :1461–1471, 2013.
- [50] Jinxing Li, Jacob Bortnik, Xin An, Wen Li, Vassilis Angelopoulos, Richard M Thorne, Christopher T Russell, Binbin Ni, Xiaochen Shen, William S Kurth, et al. Origin of two-band chorus in the radiation belt of earth. *Nature communications*, 10(1) :1–9, 2019.
- [51] Richard M Thorne, Edward J Smith, Rande K Burton, and Robert E Holzer. Plasmaspheric hiss. *Journal of Geophysical Research*, 78(10) :1581–1596, 1973.
- [52] Nigel P Meredith, Richard B Horne, Mark A Clilverd, David Horsfall, Richard M Thorne, and Roger R Anderson. Origins of plasmaspheric hiss. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111(A9), 2006.
- [53] Jacob Bortnik, Richard M Thorne, and Nigel P Meredith. The unexpected origin of plasmaspheric hiss from discrete chorus emissions. *Nature*, 452(7183) :62–66, 2008.
- [54] Nigel P Meredith, Richard B Horne, Richard M Thorne, Danny Summers, and Roger R Anderson. Substorm dependence of plasmaspheric hiss. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 109(A6), 2004.
- [55] Richard M Thorne, Richard B Horne, Vania K Jordanova, Jacob Bortnik, and Sarah Glauert. Interaction of emic waves with thermal plasma and radiation belt particles. *GEOPHYSICAL MONOGRAPH-AMERICAN GEOPHYSICAL UNION*, 169 :213, 2006.
- [56] MJ Engebretson, JL Posch, JR Wygant, CA Kletzing, MR Lessard, C-L Huang, HE Spence, CW Smith, HJ Singer, Y Omura, et al. Van allen probes, noaa, goes, and ground observations of an intense emic wave event extending over 12 h in magnetic local time. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 120(7) :5465–5488, 2015.
- [57] MingYue Guo, QingHua Zhou, FuLiang Xiao, Si Liu, YiHua He, and Chang Yang. Upward propagation of lightning-generated whistler waves into the radiation belts. *Science China Technological Sciences*, 63(2) :243–248, 2020.
- [58] Remi Benacquista, Sandrine Rochel, and Guy Rolland. Understanding the variability of magnetic storms caused by icmes. In *Annales Geophysicae*, volume 35, page 147. Copernicus GmbH, 2017.
- [59] Athina Varotsou. *Utilisation de modèles physiques pour comprendre la dynamique des ceintures de radiation d’électrons de la Terre*. PhD thesis, Toulouse, ENSAE, 2005.

- [60] D. Herrera, V. F. Maget, and A. Sicard-Piet. Characterizing magnetopause shadowing effects in the outer electron radiation belt during geomagnetic storms. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 121(10) :9517–9530, 2016.
- [61] C-G Fälthammar. On the transport of trapped particles in the outer magnetosphere. *Journal of Geophysical Research*, 71(5) :1487–1491, 1966.
- [62] Solène Lejosne and Peter Kollmann. Radiation belt radial diffusion at earth and beyond. *Space Science Reviews*, 216(1) :1–78, 2020.
- [63] AY Ukhorskiy, K Takahashi, BJ Anderson, and H Korth. Impact of toroidal ulf waves on the outer radiation belt electrons. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 110(A10), 2005.
- [64] YY Shprits, RM Thorne, R Friedel, GD Reeves, J Fennell, DN Baker, and SG Kanekal. Outward radial diffusion driven by losses at magnetopause. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111(A11), 2006.
- [65] HS Fu, JB Cao, B Yang, and HY Lu. Electron loss and acceleration during storm time : The contribution of wave-particle interaction, radial diffusion, and transport processes. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 116(A10), 2011.
- [66] DH Brautigam and JM Albert. Radial diffusion analysis of outer radiation belt electrons during the october 9, 1990, magnetic storm. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 105(A1) :291–309, 2000.
- [67] Louis G Ozeke, Ian R Mann, Kyle R Murphy, I Jonathan Rae, and David K Milling. Analytic expressions for ulf wave radiation belt radial diffusion coefficients. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 119(3) :1587–1605, 2014.
- [68] AB Barker, X Li, and RS Selesnick. Modeling the radiation belt electrons with radial diffusion driven by the solar wind. *Space Weather*, 3(10) :1–11, 2005.
- [69] M Schulz and J Lanzerotti. *Particle Diffusion in the Radiation Belts*. Springer, 1974.
- [70] Thomas A Farley and Martin Walt. Source and loss processes of protons of the inner radiation belt. *Journal of Geophysical Research*, 76(34) :8223–8240, 1971.
- [71] Craig J Rodger, Mark A Clilverd, Neil R Thomson, Rory J Gamble, Annika Seppälä, Esa Turunen, Nigel P Meredith, Michel Parrot, Jean-André Sauvaud, and Jean-Jacques Berthelier. Radiation belt electron precipitation into the atmosphere : Recovery from a geomagnetic storm. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 112(A11), 2007.
- [72] Lawrence R Lyons, Richard Mansergh Thorne, and Charles F Kennel. Pitch-angle diffusion of radiation belt electrons within the plasmasphere. *Journal of Geophysical Research*, 77(19) :3455–3474, 1972.
- [73] Lawrence R Lyons and Richard Mansergh Thorne. Equilibrium structure of radiation belt electrons. *Journal of Geophysical Research*, 78(13) :2142–2149, 1973.
- [74] Bob Abel and Richard M Thorne. Electron scattering loss in earth’s inner magnetosphere : 1. dominant physical processes. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 103(A2) :2385–2396, 1998.
- [75] Tobias Kersten, Richard B Horne, Sarah A Glauert, Nigel P Meredith, Brian J Fraser, and Russell S Grew. Electron losses from the radiation belts caused by emic waves. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 119(11) :8820–8837, 2014.
- [76] R Mi Thorne and CF Kennel. Relativistic electron precipitation during magnetic storm main phase. *Journal of Geophysical Research*, 76(19) :4446–4453, 1971.
- [77] Yuri Y Shprits, Richard M Thorne, Richard B Horne, and Danny Summers. Bounce-averaged diffusion coefficients for field-aligned chorus waves. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 111(A10), 2006.
- [78] RS Selesnick and JB Blake. On the source location of radiation belt relativistic electrons. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 105(A2) :2607–2624, 2000.

- [79] Janet C Green and MG Kivelson. Relativistic electrons in the outer radiation belt : Differentiating between acceleration mechanisms. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 109(A3), 2004.
- [80] Yoshizumi Miyoshi, Akira Morioka, Hiroaki Misawa, Takahiro Obara, Tsugunobu Nagai, and Yoshiya Kasahara. Rebuilding process of the outer radiation belt during the 3 november 1993 magnetic storm : Noaa and exos-d observations. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 108(A1) :SMP-3, 2003.
- [81] YY Shprits and RM Thorne. Time dependent radial diffusion modeling of relativistic electrons with realistic loss rates. *Geophysical research letters*, 31(8), 2004.
- [82] Athena Varotsou, Daniel Boscher, Sebastien Bourdarie, Richard B Horne, Sarah A Glauert, and Nigel P Meredith. Simulation of the outer radiation belt electrons near geosynchronous orbit including both radial diffusion and resonant interaction with whistler-mode chorus waves. *Geophysical research letters*, 32(19), 2005.
- [83] Richard B Horne, Richard M Thorne, Sarah A Glauert, Jay M Albert, Nigel P Meredith, and Roger R Anderson. Timescale for radiation belt electron acceleration by whistler mode chorus waves. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 110(A3), 2005.
- [84] DL Turner, SK Morley, Y Miyoshi, B Ni, and C-L Huang. Outer radiation belt flux dropouts : Current understanding and unresolved questions. *Dynamics of the Earth's radiation belts and inner magnetosphere*, 199 :195–212, 2012.
- [85] N Iucci, AE Levitin, AV Belov, EA Eroshenko, NG Ptitsyna, G Villaresi, GV Chizhenkov, LI Dorman, LI Gromova, M Parisi, et al. Space weather conditions and spacecraft anomalies in different orbits. *Space Weather*, 3(1), 2005.
- [86] Guillaume Bernoux and Vincent Maget. Characterizing extreme geomagnetic storms using extreme value analysis : a discussion on the representativeness of short datasets. *Space Weather*, page e2020SW002450, 2020.
- [87] HC Koons and JF Fennell. Space weather effects on communications satellites. *URSI Radio Science Bulletin*, 2006(316) :27–41, 2006.
- [88] Arthur R Frederickson. Upsets related to spacecraft charging. *IEEE Transactions on Nuclear science*, 43(2) :426–441, 1996.
- [89] Gordon L Wrenn. Conclusive evidence for internal dielectric charging anomalies on geosynchronous communications spacecraft. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 32(3) :514–520, 1995.
- [90] Robin Gubby and John Evans. Space environment effects and satellite design. *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 64(16) :1723–1733, 2002.
- [91] GL Wrenn, DJ Rodgers, and KA Ryden. A solar cycle of spacecraft anomalies due to internal charging. In *Annales Geophysicae*, volume 20, pages 953–956. Copernicus GmbH, 2002.
- [92] AK Singh, Devendraa Siingh, and RP Singh. Space weather : physics, effects and predictability. *Surveys in geophysics*, 31(6) :581–638, 2010.
- [93] Jean Lilensten. *Space weather : research towards applications in Europe*, volume 344. Springer Science & Business Media, 2007.
- [94] JI Vette. Ae/ap trapped particle flux maps (1966 ? 1980). *Planetary and Space Science*, 40(4) :566–568, 1992.
- [95] Carolyn E Jordan. Nasa radiation belt models ap-8 and ae-8. Technical report, RADEX INC BEDFORD MA, 1989.
- [96] Angélica Sicard, Daniel Boscher, Sébastien Bourdarie, Didier Lazaro, Denis Standarovski, and Robert Ecoffet. Green : the new global radiation earth environment model (beta version). 2018.
- [97] A Sicard-Piet, S Bourdarie, D Boscher, RHW Friedel, M Thomsen, T Goka, H Matsumoto, and H Koshiishi. A new international geostationary electron model : Ige-2006, from 1 kev to 5.2 mev. *Space Weather*, 6(7), 2008.

- [98] RHW Friedel, S Bourdarie, and TE Cayton. Intercalibration of magnetospheric energetic electron data. *Space Weather*, 3(9), 2005.
- [99] Shing F Fung. Survey of current situation in radiation belt modeling. *Advances in Space Research*, 34(6) :1441–1450, 2004.
- [100] NV Kuznetsov, NI Nikolaeva, and MI Panasyuk. Trapped proton fluxes observed by leo satellites in 23d solar cycle. 2008.
- [101] EJ Daly, J Lemaire, D Heynderickx, and DJ Rodgers. Problems with models of the radiation belts. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 43(2) :403–415, 1996.
- [102] Thierry Beutier. *Modélisation tridimensionnelle pour l'étude de la dynamique des ceintures de radiation*. PhD thesis, École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1993.
- [103] Daniel Santos Costa. *Modélisation des ceintures de radiation d'électrons de Jupiter internes à Io*. PhD thesis, Toulouse, ENSAE, 2001.
- [104] Angelica Sicard-Piet, Sebastien Bourdarie, and Daniel Boscher. Wapi : A new model for the wave particle interaction. *cosp*, 37 :2890, 2008.
- [105] Ira B Bernstein and Folker Engelmann. Quasi-linear theory of plasma waves. *The Physics of Fluids*, 9(5) :937–952, 1966.
- [106] A. Sicard-Piet, D. Boscher, R. B. Horne, N. P. Meredith, and V. Maget. Effect of plasma density on diffusion rates due to wave particle interactions with chorus and plasmaspheric hiss : extreme event analysis. *Annales Geophysicae*, 32(8) :1059–1071, 2014.
- [107] S Bourdarie, RHW Friedel, J Fennell, S Kanekal, and TE Cayton. Radiation belt representation of the energetic electron environment : Model and data synthesis using the salammbô radiation belt transport code and los alamos geosynchronous and gps energetic particle data. *Space Weather*, 3(4) :1–10, 2005.
- [108] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(2) :267–293, 1956.
- [109] Eric Goncalves. *Discrétisation des EDP*. ISAE-ENSMA, 2014.
- [110] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische annalen*, 100(1) :32–74, 1928.
- [111] Jay M Albert. The coupling of quasi-linear pitch angle and energy diffusion. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 71(16) :1664–1668, 2009.
- [112] DA Subbotin and YY Shprits. Three-dimensional modeling of the radiation belts using the versatile electron radiation belt (verb) code. *Space Weather*, 7(10) :1–15, 2009.
- [113] Sarah A Glauert, Richard B Horne, and Nigel P Meredith. Three-dimensional electron radiation belt simulations using the bas radiation belt model with new diffusion models for chorus, plasmaspheric hiss, and lightning-generated whistlers. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 119(1) :268–289, 2014.
- [114] V Maget, S Bourdarie, D Boscher, and RHW Friedel. Data assimilation of lanl satellite data into the salammbô electron code over a complete solar cycle by direct insertion. *Space Weather*, 5(10), 2007.
- [115] Athina Varotsou, Daniel Boscher, Sebastien Bourdarie, Richard B Horne, Nigel P Meredith, Sarah A Glauert, and Reiner H Friedel. Three-dimensional test simulations of the outer radiation belt electron dynamics including electron-chorus resonant interactions. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 113(A12), 2008.
- [116] JM Albert and SL Young. Multidimensional quasi-linear diffusion of radiation belt electrons. *Geophysical research letters*, 32(14), 2005.
- [117] Su Zhen-Peng, Zheng Hui-Nan, and Xiong Ming. Dynamic evolution of outer radiation belt electrons due to whistler-mode chorus. *Chinese Physics Letters*, 26(3) :039401, 2009.

- [118] M-C Fok, A Gloer, Q Zheng, Richard B Horne, Nigel P Meredith, JM Albert, and T Nagai. Recent developments in the radiation belt environment model. *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics*, 73(11-12) :1435–1443, 2011.
- [119] Jay M Albert, Michael J Starks, Richard B Horne, Nigel P Meredith, and Sarah A Glauert. Quasi-linear simulations of inner radiation belt electron pitch angle and energy distributions. *Geophysical Research Letters*, 43(6) :2381–2388, 2016.
- [120] Dmitriy Subbotin, Yuri Shprits, and Binbin Ni. Three-dimensional verb radiation belt simulations including mixed diffusion. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 115(A3), 2010.
- [121] Zhenpeng Su, Fuliang Xiao, Huinan Zheng, and Shui Wang. Steerb : A three-dimensional code for storm-time evolution of electron radiation belt. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 115(A9), 2010.
- [122] E Camporeale, GL Delzanno, S Zaharia, and J Koller. On the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt : 1. implicit and semi-implicit schemes. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 118(6) :3463–3475, 2013.
- [123] Ian JD Craig and Alfred D Sneyd. An alternating-direction implicit scheme for parabolic equations with mixed derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 16(4) :341–350, 1988.
- [124] KJ In’t Hout and BD Welfert. Unconditional stability of second-order adi schemes applied to multi-dimensional diffusion equations with mixed derivative terms. *Applied numerical mathematics*, 59(3-4) :677–692, 2009.
- [125] NA Aseev, YY Shprits, AY Drozdov, and AC Kellerman. Numerical applications of the advective-diffusive codes for the inner magnetosphere. *Space Weather*, 14(11) :993–1010, 2016.
- [126] E Camporeale, GL Delzanno, S Zaharia, and J Koller. On the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt : 2. procedure based on the diagonalization of the diffusion tensor. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 118(6) :3476–3484, 2013.
- [127] E Camporeale, GL Delzanno, S Zaharia, and J Koller. Reply to comment by jm albert on “on the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt. part i : Implicit and semi-implicit schemes” and “on the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt. part ii : Procedure based on the diagonalization of the diffusion tensor”. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 118(12) :7765–7767, 2013.
- [128] JM Albert. Comment on “on the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt. part i : Implicit and semi-implicit schemes” and “on the numerical simulation of particle dynamics in the radiation belt. part ii : Procedure based on the diagonalization of the diffusion tensor” by e. camporeale et al. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 118(12) :7762–7764, 2013.
- [129] DA Subbotin and YY Shprits. Three-dimensional radiation belt simulations in terms of adiabatic invariants using a single numerical grid. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 117(A5), 2012.
- [130] Bourdarie S. et Maget V. Assimilation filtrée appliquée aux ceintures de radiation. Technical report, ONERA, 2012.
- [131] Bourdarie S. et Rogier F et Boscher D. Assimilation filtrée appliquée aux ceintures de radiation. Technical report, ONERA, 2013.
- [132] Maget V. et Bourdarie S. et Rogier F. Assimilation de données pour les ceintures de radiation. Technical report, ONERA, 2014.
- [133] Maget V. et Rogier F. Assimilation de données pour les ceintures de radiation. Technical report, ONERA, 2015.
- [134] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [135] Csirik Mihály. Discrete maximum principles. Master’s thesis, Eötvös Loránd University, 2013.

- [136] J. Droniou. Finite volume schemes for diffusion equations : introduction to and review of modern methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(8) :1575 – 1619, 2014.
- [137] Abraham Berman and Robert J. Plemmons. Chapter 6 - M -matrices. In Abraham Berman and Robert J. Plemmons, editors, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, pages 132 – 164. Academic Press, 1979.
- [138] Fadl Moukalled, L Mangani, Marwan Darwish, et al. *The finite volume method in computational fluid dynamics*, volume 6. Springer, 2016.
- [139] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7 :713–1018, 2000.
- [140] Daniele Antonio Di Pietro and Jérôme Droniou. A third Strang lemma for schemes in fully discrete formulation. *Calcolo*, 55(3), September 2018. 39 pages.
- [141] J. Nordbotten, I. Aavatsmark, and G. Eigestad. Monotonicity of control volume methods. *Numerische Mathematik*, 106 :255–288, 04 2007.
- [142] Eirik Keilegavlen, Jan M. Nordbotten, and Ivar Aavatsmark. Sufficient criteria are necessary for monotone control volume methods. *Applied Mathematics Letters*, 22(8) :1178 – 1180, 2009.
- [143] Clément Cancès, Mathieu Cathala, and Christophe Le Potier. Monotone corrections for generic cell-centered finite volume approximations of anisotropic diffusion equations. *Numerische Mathematik*, 125(3) :387–417, 2013.
- [144] M. Schneider, D. Gläser, B. Flemisch, and R. Helmig. Comparison of finite-volume schemes for diffusion problems. *Oil Gas Sci. Technol. - Rev. IFP Energies nouvelles*, 73 :82, 2018.
- [145] I. Aavatsmark. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Computational Geosciences*, 6(3) :405–432, Sep 2002.
- [146] R. Herbin and F. Hubert. Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. In ISTE, editor, *Finite volumes for complex applications V*, pages 659–692, France, June 2008. Wiley.
- [147] Konstantin Lipnikov, Mikhail Shashkov, Daniil Svyatskiy, and Yuri Vassilevski. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, 227 :492–512, 11 2007.
- [148] Martin Schneider, Léo Agélas, Guillaume Enchéry, and Bernd Flemisch. Convergence of nonlinear finite volume schemes for heterogeneous anisotropic diffusion on general meshes. *Journal of Computational Physics*, 351 :80 – 107, 2017.
- [149] Christophe Le Potier. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(12) :787 – 792, 2005.
- [150] Guangwei Yuan and Zhiqiang Sheng. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(12) :6288 – 6312, 2008.
- [151] Zhiqiang Sheng and Guangwei Yuan. The finite volume scheme preserving extremum principle for diffusion equations on polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, 230(7) :2588 – 2604, 2011.
- [152] K. Salari and P. Knupp. Code verification by the method of manufactured solutions. 6 2000.
- [153] Nour Dahmen, François Rogier, and Vincent Maget. On the modelling of highly anisotropic diffusion for electron radiation belt dynamic codes. *Computer Physics Communications*, 254 :107342, 2020.
- [154] Helge Holden, Kenneth H Karlsen, and Knut-Andreas Lie. *Splitting methods for partial differential equations with rough solutions : Analysis and MATLAB programs*, volume 11. European Mathematical Society, 2010.

- [155] Chin-Chun Wu, Kan Liou, Ronald P Lepping, and Lynn Hutting. The 04–10 september 2017 sun–earth connection events : Solar flares, coronal mass ejections/magnetic clouds, and geomagnetic storms. *Solar Physics*, 294(8) :110, 2019.
- [156] JG Luhmann, ML Mays, Yan Li, CO Lee, H Bain, D Odstrcil, RA Mewaldt, CMS Cohen, D Larson, and Gordon Petrie. Shock connectivity and the late cycle 24 solar energetic particle events in july and september 2017. *Space Weather*, 16(5) :557–568, 2018.
- [157] RJ Redmon, DB Seaton, Robert Steenburgh, Jing He, and JV Rodriguez. September 2017’s geoeffective space weather and impacts to caribbean radio communications during hurricane response. *Space Weather*, 16(9) :1190–1201, 2018.
- [158] Fuliang Xiao, Zhenpeng Su, Huinan Zheng, and Shui Wang. Three-dimensional simulations of outer radiation belt electron dynamics including cross-diffusion terms. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 115(A5), 2010.
- [159] Xin Tao, Jay M Albert, and Anthony A Chan. Numerical modeling of multidimensional diffusion in the radiation belts using layer methods. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 114(A2), 2009.
- [160] S. A. Bourdarie and V. F. Maget. Electron radiation belt data assimilation with an ensemble kalman filter relying on the salammbô code. *Annales Geophysicae*, 30(6) :929–943, 2012.

Développement d'un nouveau coeur numérique pour le code de calcul Salammbô de modélisation des ceintures de radiation terrestres

Les ceintures de radiation terrestres constituent un environnement radiatif naturel très dynamique, hostile à la plupart des satellites artificiels, et dont la modélisation physique demeure aujourd'hui encore imparfaite. Cette dynamique est généralement décrite par des codes numériques résolvant une équation de diffusion. Du fait des forts gradients dans l'espace de la fonction de distribution et de l'intense dynamique des ceintures de radiation, les méthodes numériques employées doivent être très robustes. Le code Salammbô 3D développé et perfectionné depuis de nombreuses années au sein du département Environnement Spatial de l'ONERA a acquis aujourd'hui une maturité reconnue internationalement. Il constitue aussi bien le modèle physique sur lequel s'appuie le développement des futurs modèles de spécification d'environnement, qu'un laboratoire virtuel d'observation et d'analyse des mécanismes physiques gouvernant la dynamique des ceintures de radiations. Salammbô 3D repose sur un schéma numérique de type explicite, différences finies. Ce schéma possède le principal avantage d'être simple à mettre en place de par sa formulation. Cependant, sa stabilité est limitée par la condition CFL. De plus, des termes de diffusion croisés rendent ce schéma instable.

L'objectif de cette thèse est donc de développer et valider un nouveau coeur numérique au code Salammbô 3D en version implicite. Le but recherché est triple : (1) rendre le code plus robuste aux forts gradients spatiaux des différents termes de diffusion, (2) accélérer le code tout en conservant, voire améliorant sa précision, (3) prendre en compte les termes de diffusion croisés ignorés dans le cas d'un schéma explicite. Enfin, dans une dernière partie, il serait intéressant d'affiner le code implicite mis en place pour qu'il puisse répondre à deux problématiques physiques actuelles : (1) optimiser la résolution spatiale du modèle au niveau des orbites basses pour mieux reproduire l'environnement des satellites en LEO, et (2) estimer les précipitations de particules des ceintures de radiation dans l'atmosphère (intérêt supplémentaire des volumes finis).

Mots-clés : METEOROLOGIE ESPACE;MODELISATION NUMERIQUE ;VOLUME FINI ;SCHEMA MONOTONE;DIFFUSION ANISOTROPE

Implementation of a dedicated numerical scheme for the modelling of the Van Allen radiation belts

The purpose of the thesis is to improve the numerical scheme of the Salammbô model developed at ONERA for years. The idea is to implement for the first time an implicit finite volume method in the field of radiation belts modelling.

This work will tackle many challenges as instabilities induced by strong spatial and temporal gradients, and the inclusion of not used physics-based processes due to their inadequation with previous numerical scheme. Comparisons will be conducted between the results obtained and in-situ data.

Keywords : RADIATION BELTS ; SPACE WEATHER ; NUMERICAL MODELING ; FINITE VOLUME METHOD ; MONOTONE SCHEME ; ANISOTROPIC DIFFUSION

