



HAL
open science

Identification, commande et analyse dans le domaine fréquentiel : application à des systèmes de grande dimension

Fabrice Demourant

► **To cite this version:**

Fabrice Demourant. Identification, commande et analyse dans le domaine fréquentiel : application à des systèmes de grande dimension. Automatique / Robotique. Université Toulouse III Paul Sabatier, 2020. tel-03155028

HAL Id: tel-03155028

<https://hal.science/tel-03155028v1>

Submitted on 1 Mar 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Identification, commande et analyse dans le
domaine fréquentiel :
application à des systèmes de grande dimension**

Fabrice Demourant

**Habilitation à Diriger des Recherches
Délivrée le JJ/MM/AAAA par l'Université Toulouse III Paul Sabatier**

Présentée et soutenue le 16 décembre 2020

Alireza KARIMI	Pr, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne	Rapporteur
Mohammed M'SAAD	Pr, ENSI de Caen	Rapporteur
Edouard LAROCHE	Pr, Université de Strasbourg	Rapporteur
Gérard SCORLETTI	Pr, Ecole Centrale Lyon	Examinateur
Valérie BUDINGER	Pr, ISAE-SUPAERO	Examinatrice
Patrick DANES	Pr, Université Paul Sabatier	Examinateur
Philippe CHEVREL	Pr, IMT Atlantique Ecole Mines-Telecom	Examinateur
Pierre APKARIAN	Directeur de Recherche, ONERA	Examinateur

ONERA
French aeronautics, space and defense research lab

Systems Control and Flight Dynamics Department
Toulouse

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Quelques éléments sur l'aspect structurant de la représentation fréquentielle	3
1.2	Dichotomie analytique et synthétique	5
1.3	Plan du manuscrit	6
2	Identification dans le domaine fréquentiel	8
2.1	Contexte	8
2.2	Approche des sous espaces fréquentiels	9
2.2.1	Principes de base des sous-espaces	9
2.2.2	Contraintes modales	11
2.2.3	Approche paramétrique	16
2.3	Applications aéronautiques	20
2.3.1	Mise en œuvre sur une soufflerie	20
2.3.2	Identification de paramètres physiques d'un modèle structuré	27
2.3.3	Le modèle latéral aérodynamique	29
2.4	Application sur les écoulements fluides	30
2.4.1	Contexte	30
2.4.2	La cavité ouverte : modèle résonateur	31
2.4.3	Application à l'écoulement d'un canal ouvert	37
2.5	Conclusion	41
3	Synthèse H_∞ multicritère	43
3.1	Contexte	43
3.2	Avion flexible de grande taille du type A380	45
3.2.1	Spécifications	47
3.2.2	Quelques résultats pour l'avion flexible de grande taille	49
3.3	Avion flexible de grande taille du type aile volante ou <i>BWB</i>	50
3.3.1	Structure de la boucle fermée	52
3.3.2	Principe de la synthèse convexe par paramétrisation de Youla	53
3.3.3	Quelques résultats sur le contrôle de la partie souple	55
3.4	Contrôle d'un écoulement : application à une cavité ouverte.	62
3.4.1	Stratégie de commande	62
3.4.2	Synthèse structurée H_∞	66

3.4.3	Résultats sur le contrôle d'un écoulement dans une cavité	67
3.5	Synthèse sans modèle	70
3.5.1	Quelques principes sur la falsification	72
3.5.2	Synthèse sans modèle basée sur un modèle de référence	74
3.5.3	Quelques résultats sur l'approche sans modèle	76
3.6	Conclusion	80
4	Analyse en robustesse	82
4.1	Contexte	82
4.2	Principe de l'approche IQC	83
4.3	Quelques exemples d'IQC	84
4.3.1	Non-linéarités statiques du type secteur	85
4.3.2	Incertitude dynamique	87
4.3.3	Incertitude réelle	88
4.4	Paramétrisation IQC	88
4.4.1	Non-linéarités statiques du type secteur	88
4.4.2	Incertitude complexe/dynamique	89
4.4.3	Incertitude réelle	89
4.4.4	Forme factorisée	89
4.5	Résolutions du problème	91
4.5.1	Approche état	91
4.5.2	Approche fréquentielle	92
4.6	Applications	96
4.6.1	Une application académique	96
4.6.2	Application aéronautique	98
4.7	Conclusion	113
5	Conclusion et perspectives	115
5.1	Conclusion	115
5.2	Quelques perspectives	116
5.2.1	Écoulement : modélisation et commande	116
5.2.2	Identification/modélisation linéaire et non-linéaire	119

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quelques éléments sur l’aspect structurant de la représentation fréquentielle

L’approche fréquentielle est la représentation essentiellement utilisée et mise en œuvre durant mon activité de recherche à l’ONERA DCSD puis DTIS. La représentation fréquentielle est une approche structurante et unificatrice dans le domaine de l’identification, de la commande et de l’analyse. Historiquement l’approche fréquentielle dans le domaine de la commande a joué un grand rôle. Pour rappel le critère de Nyquist, la représentation de Bode et le diagramme de Black-Nichols sont des méthodes graphiques, pratiques et pédagogiques qui permettent, à partir d’une représentation simple de la boucle ouverte, de répondre très clairement à la question de la stabilité. Mais au delà de la stabilité, au travers de ces critères, on perçoit les premières notions de robustesse avec la marge de gain, de phase, de module et de retard. Donc finalement, à partir d’une représentation graphique, il est possible de déduire des informations utiles et pertinentes sur la boucle fermée au niveau de la stabilité nominale mais aussi de la stabilité robuste. Ces notions basées sur des propriétés relativement anciennes restent actuelles.

Elles restent actuelles au travers de la commande dite robuste basée sur la norme H_∞ . Ces techniques de commande s’appuient, que ce soit dans la version historique [34] ou plus récente [3], sur des critères fréquents. Il s’agit de pondérer directement les transferts en boucle fermée afin d’obtenir un compensateur satisfaisant. Les notions mises en jeu se rapprochent finalement de l’automatique fréquentielle classique basée sur les critères de Bode ou de Nyquist. On peut d’ailleurs parler au sujet de ces méthodes comme de méthodes “néo-classiques”. Les pondérations que l’on choisit pour synthétiser le compensateur reprennent dans le domaine fréquentiel les spécifications du cahier des charges. Ces pondérations permettent d’assurer un certain niveau de performance pour du suivi de trajectoire ou de rejet de perturbation. Elle peuvent traiter aussi l’amortissement de modes d’une structure flexible. Ces contraintes fréquentielles permettent aussi de prendre en compte des critères de robustesse. Comme nous l’avons évoqué, au travers de la représentation fréquentielle, on peut garantir des marges suffisantes grâce aux diverses représentations citées ci-dessus et de leur extension au cas MIMO par la valeur singulière maximale d’un transfert. De façon plus générale, on peut tenir compte d’une incertitude dans le domaine fréquentiel, que l’on peut noter $\Delta(j\omega)$, et garantir

la stabilité de la boucle fermée vis à vis de ce $\Delta(j\omega)$. On parle alors de théorème du petit gain éventuellement pondéré.

Le même constat peut être fait avec des outils d'analyse modernes comme les IQC (Integral Quadratic Constraints). La formulation originelle des IQC, que nous présenterons dans ce document au chapitre III, est basée sur une représentation fréquentielle qui s'appuie sur un critère de positivité. L'approche IQC est une forme de représentation unifiée d'une large classe de théorèmes en stabilité et par cette formulation unificatrice, on retrouve un grand nombre de théorèmes comme celui de la passivité, du petit gain, de Nyquist, de Popov etc... Concrètement le critère en stabilité qui découle des IQC est du type $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega) < 0$. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce critère dans le cadre de cette introduction, le lecteur peut se référer au chapitre III pour les détails de l'approche IQC. Mais nous pouvons dire que si le critère $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega)$ associé à la boucle fermée que nous cherchons à analyser est défini négatif, alors on a la garantie que la boucle fermée est stable. Cette validation peut se faire en évaluant et en représentant $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega)$ en fonction de ω dans le plan complexe. On retrouve exactement la même idée que le critère de Nyquist. Donc au travers de cet outil relativement récent et moderne, on retrouve une méthodologie d'analyse bien connue. Ainsi, si on considère un système LTI interconnecté à une non-linéarité du type saturation, on peut construire le critère $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega)$ associé à la boucle fermée, et le représenter en fonction de ω . Si on constate qu'il est à gauche, et donc dans la partie négative du plan complexe, on garantit la stabilité de la boucle fermée. Si on choisit pour M le multiplicateur dit de Popov, le tracé de $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega)$ sera exactement le célèbre tracé de Popov qui est utilisé couramment pour la validation du critère qui porte le même nom, à savoir le critère de Popov. Rappelons simplement que ce critère est une sorte d'extension au cas de non-linéarités de type secteur du critère de Nyquist. Étant donné que l'on est en non-linéaire, on a un critère suffisant, et non nécessaire et suffisant comme dans le cas linéaire. Rajoutons, comme nous le verrons dans le chapitre III, que l'on retrouve par l'approche IQC les résultats bien connus de la μ -analyse qui s'expriment aussi dans le domaine fréquentiel.

On constate donc l'aspect très structurant et unificateur de la représentation fréquentielle dans le domaine de la commande robuste et de l'analyse. Il apparaît donc naturel, dans ce contexte, de s'intéresser aux techniques d'identification dans le domaine fréquentiel afin de *boucler la boucle*. Si par la modélisation fréquentielle on est capable de fournir un modèle de faible complexité pour la commande, mais tout en étant représentatif du comportement entrées/sorties du système, et en fournissant une erreur d'identification pouvant être utilisée pour de la commande et de l'analyse, alors on retrouve pleinement cette caractéristique unificatrice de l'approche fréquentielle. Mais nous reviendrons un peu plus loin sur la technique d'identification utilisée, pour évoquer dans la section suivante deux modes de représentation complémentaires et essentiels à la résolution de nos problèmes d'automatique.

Avant toute chose, il est important de noter le point suivant. L'approche fréquentielle est liée à la notion de linéarité du système que l'on souhaite traiter. C'est particulièrement le cas de l'identification dans le domaine fréquentiel, où à partir de données fréquentielles en $j\omega$, on construit une représentation d'état (A, B, C, D) comme nous le verrons dans le chapitre I. Mais l'approche fréquentielle ne se limite pas au domaine linéaire. Dans la mesure où on peut séparer la partie non-linéaire d'une partie LTI, en imposant des contraintes dans le domaine fréquentiel à la partie LTI, on

peut garantir des bonnes propriétés à l'interconnexion de la partie LTI avec la partie non-linéaire. On retrouve ces éléments dans la commande robuste (chapitre II) et l'analyse en boucle fermée (chapitre III). Notons que les critères en stabilité du cercle ou de Popov, par exemple, qui s'intéressent à l'interconnexion d'un modèle LTI à une non-linéarité statique du type secteur répondent exactement à cette problématique.

1.2 Dichotomie analytique et synthétique

J'ai évoqué la notion de représentation graphique, on peut parler tout simplement de dessin, terme qui aura une connotation un peu négative dans un contexte scientifique mais qui reprend bien une notion fondamentale qui transcende le domaine qui nous intéresse, qui est ici l'automatique. Cette dichotomie entre une représentation graphique, comme le critère de Nyquist, et un calcul basé sur des valeurs propres de la boucle fermée, correspond en science à la séparation entre approche synthétique et approche analytique. Pour illustrer cette dichotomie, nous allons utiliser 3 exemples, du plus simple, au cas le plus représentatif de notre domaine, l'analyse IQC. L'approche analytique et son pendant synthétique apparaissent très tôt dans la façon d'appréhender un problème mathématique.

Le 1^{er} exemple est le cas de la géométrie euclidienne dans le plan. On a donc une représentation par le dessin, de droite, de cercles, de triangles par exemple, et des propriétés axiomatiques. Par ces propriétés axiomatiques et la représentation dans le plan, il est possible de construire un raisonnement et prouver un résultat. Le pendant analytique est basé sur les équations comme celles du cercle, d'une droite etc... Donc on a du côté analytique, des équations, et de l'autre, des figures. Par les équations on aura une approche, qui est en général, plus effective que par le dessin. La représentation graphique aura l'avantage d'être plus facile à appréhender et finalement très pédagogique.

Le 2^{ème} exemple de cette dichotomie est plus directement lié au domaine de l'optimisation à savoir la convexité d'une fonction. Pour déterminer qu'une fonction est convexe, une façon très pratique est d'évaluer la dérivée seconde de cette dernière et de vérifier que cette dérivée seconde est positive en tout point. C'est l'approche analytique. La 2^{ème} manière, cette fois-ci synthétique, est de représenter la fonction et de constater que celle-ci est au-dessus de sa tangente et au dessous de sa corde. C'est une définition très classique, graphique, pour illustrer la convexité d'une fonction. La façon analytique est effective, on peut facilement calculer une dérivée seconde d'une fonction qui est connue. La façon synthétique est difficilement calculable : vérifier en tout point qu'une courbe est au-dessus de sa tangente et au dessous de sa corde est très compliqué, même si la définition synthétique de la convexité est largement utilisée. Mais la définition synthétique est plus générale, car on peut montrer, par exemple, que la fonction valeur absolue est convexe. La définition analytique, basée sur la dérivée seconde, n'est pas applicable dans ce cas, car la valeur absolue n'est pas différentiable au sens des fonctions. On constate donc au travers de cet exemple assez commun, l'intérêt des deux représentations analytique et synthétique. L'approche analytique est puissante car elle permet de mener des calculs efficacement, mais souvent plus contraignante. L'approche synthétique est plus facile à comprendre ou à appréhender. Elle est aussi moins restrictive, elle a moins besoin d'hypothèse pour être évaluée. Généralement, pour traiter d'un problème, on passera d'une

représentation à l'autre.

Le 3^{ème} exemple concerne la stabilité des systèmes en boucle fermée. L'approche analytique dans le cas linéaire serait l'évaluation des modes de la boucle fermée par un calcul aux valeurs propres. Dans le cas synthétique, comme nous l'avons évoqué, on pourra utiliser le critère de Nyquist. On retombe exactement dans les caractéristiques que nous avons évoquées. L'approche par valeurs propres est puissante et efficace mais nécessite un modèle rationnel et donc de dimension finie. Le critère de Nyquist peut s'affranchir de cette contrainte tout en étant très pédagogique. Plus généralement, par ce critère, on peut traiter de la stabilité d'une interconnexion de 2 systèmes pourvu qu'une représentation en $j\omega$ existe. Par contre, déterminer précisément ce critère sur le continuum de fréquences, représente une certaine difficulté. Par extension on peut évoquer le critère de stabilité issu des IQC, $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega) < 0$. Comme nous le constatons ce critère suppose juste l'existence d'une représentation en $j\omega$. Le pendant analytique s'obtient par l'application du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov. Ce lemme permet de résoudre efficacement le problème. Ceci étant, il suppose l'existence d'une représentation rationnelle de $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega)$. De plus, comme nous le verrons dans le chapitre III, un point que nous n'avons pas évoqué dans l'approche analytique, c'est la théorie et la pratique de la résolution analytique du problème. En théorie, dans un cadre rationnel, on résout efficacement $\phi(s)M\Phi(s) < 0$. En pratique, suivant la taille et la complexité du modèle, cela n'est pas possible en un temps raisonnable. Or la forme synthétique, d'une part, est moins contraignante, et d'autre part sa représentation graphique est souvent nettement plus aisée. Mais comme indiqué précédemment, elle reste moins efficace, car garantir le résultat sur le continuum de fréquences est difficile voire impossible sans méthode dédiée. D'une façon générale pour résoudre un problème il est nécessaire de passer d'une représentation à l'autre comme nous le verrons dans le chapitre III.

1.3 Plan du manuscrit

Plus concrètement en ce qui concerne le manuscrit il s'organise de la façon suivante :

— Dans le chapitre I je présenterai les concepts de base des sous-espaces fréquentiels que l'on retrouve dans la littérature [67, 70]. Dans la continuité j'introduirai l'identification fréquentielle par les sous-espaces sous contraintes modales. En effet l'identification fréquentielle peut conduire à des modèles identifiés instables dans le cas bruité [70]. L'objectif de la contrainte modale est d'imposer cette stabilité au travers d'une contrainte LMI. Il se trouve que dans le cas continu ou discret, le domaine de stabilité est une région convexe. Plus généralement il peut être intéressant d'introduire de la connaissance a priori dans le modèle à identifier au travers de contraintes modales représentées par des régions LMI du plan complexe.

On étendra aussi les sous-espaces fréquentiels au cas paramétrique. On montrera qu'il est possible de déterminer en une seule étape une paramétrisation polynomiale de modèles LTI permettant de représenter un système à des points de fonctionnement différents. Nous illustrerons ces différentes extensions par 3 applications :

- L'identification d'une voilure dans une soufflerie à partir de données expérimentales ;
- L'identification paramétrique d'un écoulement d'un cours d'eau dont la dynamique est

- décrite par les équations de Saint-Venant ;
- L'identification d'un écoulement fluide dans une cavité ouverte dont la dynamique est décrite par les équations de Navier-Stokes en 2D en incompressible.
- Dans le chapitre II, je me suis intéressé à la commande robuste H_∞ . Ce chapitre s'intéressera spécifiquement à 3 types d'approche mises en œuvre respectivement sur 3 applications différentes.
- La 1^{ère} approche présentée est l'approche historique [34] qui a été appliquée au contrôle d'un avion dit couple du type A380 ;
 - La 2^{ème} approche est une approche basée sur le paramètre de Youla [7] et développée dans le département au travers d'un outil par Gilles Ferreres. Elle a été utilisée pour le contrôle d'un avion civil de transport du type aile volante ;
 - La 3^{ème} approche est la synthèse H_∞ structurée développée aussi dans le département par Pierre Apkarian en collaboration avec Dominikus Nöll [3] et qui est maintenant implémentée dans MATLAB. Cette approche est illustrée dans le contexte du contrôle de l'écoulement dans une cavité ouverte précédemment identifiée dans le chapitre I.
- L'objectif de ce chapitre est de proposer des méthodologies claires et reproductibles avec des outils de synthèse du type H_∞ pour des problèmes de commande relativement complets. Notons que l'on parle de commande H_∞ robuste mais que ce soit pour la version par paramétrisation de Youla ou la version structurée, ces techniques sont multicritères et peuvent donc combiner des critères H_2 , modaux etc...
- Dans le chapitre III, je présenterai l'approche IQC [72] que j'ai déjà évoquée précédemment. L'objectif de chapitre est de proposer une résolution du critère synthétique $\phi(j\omega)M\Phi(j\omega) < 0$ sur le continuum de fréquence. Pour parvenir à une solution satisfaisante il est nécessaire d'introduire une dose d'analytique. L'idée est de travailler sur un maillage en fréquences et de développer un certificat qui permette de garantir la validité de la solution entre les points du maillage. C'est donc cette technique spécifique qui représente la dose d'analytique nécessaire pour résoudre complètement et efficacement le problème. Ce certificat s'appuie sur un résultat bien connu en μ -analyse et qui a déjà été utilisé dans le contexte de la borne supérieure du μ . En outre, on proposera une version non-rationnelle de l'approche. Le chapitre s'articulera autour de 3 sections.
- Une 1^{ère} section rappellera les notions générales ;
 - La 2^{ème} section présentera le certificat qui valide la solution entre les points du maillage fréquentiel ;
 - La 3^{ème} section présentera des applications, d'abord très académiques, puis plus complexes avec un avion d'affaire du type Dassault Falcon, un avion d'arme générique, et un avion civil de transport du type Airbus.

Chapitre 2

Identification dans le domaine fréquentiel

2.1 Contexte

La modélisation/identification par les sous-espaces est une technique d'identification du type boîte noire qui permet d'obtenir naturellement une représentation d'état MIMO à partir de données bruitées. Je me suis intéressé à la version fréquentielle qui est particulièrement intéressante pour deux raisons. Elle est relativement naturelle à mettre en œuvre avec peu de données fréquentielles pour les systèmes flexibles, et plus généralement des systèmes résonnants, i.e. présentant un certain nombre de modes faiblement amortis. On peut parler d'approche du type compresseur de données. En général pour les techniques temporelles, il est nécessaire de capturer la réponse impulsionnelle, ce qui peut être assez complexe pour des systèmes présentant des modes faiblement amortis (quelques pour cent voire moins). De plus en travaillant directement sur les données fréquentielles, on peut pondérer celles-ci directement et facilement par des filtres ou un choix de maillage approprié afin de prendre en compte des objectifs de commande et de critères de précision sur certaines parties du domaine fréquentiel. Ainsi cette erreur de modélisation dans le domaine fréquentiel peut-elle être ajustée facilement au cours de l'identification et prise en compte explicitement dans la synthèse et l'analyse [24]. Nous verrons dans les chapitres II et III l'utilisation de cette représentation fréquentielle pour la commande et l'analyse.

L'utilisation des sous-espaces fréquentiels a essentiellement été utilisée pour identifier/construire des modèles pour la synthèse. Il s'agit alors d'obtenir des modèles suffisamment précis pour reproduire fidèlement les dynamiques principales du système tout en ayant une complexité et donc un ordre relativement limité. Dans ce là, le modèle obtenu peut alors servir de modèle de synthèse. Nous verrons dans ce chapitre que la mise en œuvre des sous-espaces fréquentiels a été menée sur une large classe de systèmes et avec des données de nature différente. Finalement, le nombre de paramètres de réglage de la technique est réduit, ce qui rend l'approche polyvalente et relativement facile à utiliser.

Nous rappellerons donc le principe de l'approche qui a été introduite dans les années 90 [70, 67]. Puis nous présenterons les diverses extensions qui ont été développées dans le cadre des sous-espaces fréquentiels. Et enfin nous illustrerons la méthode sur 3 exemples différents : des données expérimentales issues d'une soufflerie, un modèle non-rationnel d'un écoulement d'un cours d'eau, et des données fréquentielles issues de l'intégration numérique des équations de Navier-Stokes d'un

écoulement fluide dans une cavité ouverte.

2.2 Approche des sous espaces fréquentiels

2.2.1 Principes de base des sous-espaces

- [4] F. Demourant. Interaction identification-commande robuste : méthodes et applications à l'avion souple. PhD thesis - ENSAE (France), 2002.
- [9] F. Demourant and G. Ferreres. A frequency domain identification-control approach for a flexible aircraft. In Proceedings of the International Conference on Control Applications, volume 1, pages 126-161, Sep. 2002.
- [26] C. Poussot-Vassal and F. Demourant. Dynamical medium (large) -scale model reduction and interpolation with application to aircraft systems. AerospaceLab Journal, (4) :pages 1-11, Nov. 2012.

Rappelons ici brièvement les résultats des sous-espaces qui peuvent être trouvés dans [70, 67]¹. Ces résultats ont pour seul but de montrer assez simplement le principe des sous-espaces fréquentiels. Considérons la représentation d'état discrète dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} e^{i\omega} \mathbf{X}(\omega) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(\omega) + \mathbf{B}\mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{Y}(\omega) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(\omega) + \mathbf{D}\mathbf{U}(\omega), \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{X}(\omega) \in \mathbb{C}^r$, $\mathbf{U}(\omega) \in \mathbb{C}^{n_u}$ et $\mathbf{Y}(\omega) \in \mathbb{C}^{n_y}$ sont les transformées de Fourier de l'état $\mathbf{x}(t)$, l'entrée $\mathbf{u}(t)$ et la sortie $\mathbf{y}(t)$. Notons $\mathbf{X}_m(\omega_i)$ l'état à la fréquence ω_i pour l'entrée $\mathbf{U}(\omega_i)$ avec 1 à la m -ème ligne et zero ailleurs ($i = 1, \dots, N$ and $m = 1, \dots, n_u$), alors (2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} e^{i\omega} X(\omega) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(\omega) + \mathbf{B}\mathbf{U}(\omega) \\ \mathbf{G}(\omega) &= \mathbf{C}\mathbf{X}^c(\omega) + \mathbf{D} \end{aligned}, \quad (2.2)$$

où $\mathbf{X}^c(\omega) = [\mathbf{X}_1(\omega), \dots, \mathbf{X}_{n_u}(\omega)] \in \mathbb{C}^{r \times n_u}$. De plus, si on considère un ensemble discret de fréquences $(\omega_i, \Phi_i)_{i=1}^N$ alors on a $\mathbf{G}(\omega_i) = \Phi_i$ et la relation suivante avec $r + q \leq N$ and $q \geq r$ [70] :

$$\mathbf{G} = \mathbf{O}\mathbf{X}^c + \mathbf{\Gamma}\mathbf{W} \quad (2.3)$$

où,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_N \\ e^{i\omega_1} \Phi_1 & \dots & e^{i\omega_N} \Phi_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(q-1)\omega_1} \Phi_1 & \dots & e^{i(q-1)\omega_N} \Phi_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_y q \times n_u N},$$

$$\mathbf{X}^c = [\mathbf{X}^c(i\omega_1) \quad \dots \quad \mathbf{X}^c(i\omega_N)] \in \mathbb{C}^{r \times n_u N}$$

1. Pour des raisons de clarté seul le cas sans bruit est présenté. Le lecteur est invité à se référer à [70, 67] pour le cas bruité.

et

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{q-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y q \times r} \quad (2.4)$$

est de rang plein r pour toute valeur de $q \geq r$ et,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} I_{n_u} & \dots & I_{n_u} \\ e^{i\omega_1} I_{n_u} & \dots & e^{i\omega_N} I_{n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i(q-1)\omega_1} I_{n_u} & \dots & e^{i(q-1)\omega_N} I_{n_u} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_u q \times n_u N},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{q-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{q-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y q \times n_u q}.$$

La relation (2.4) rappelle que la matrice d'observabilité étendue \mathbf{O} contient \mathbf{A} et \mathbf{C} . Une façon élégante d'extraire \mathbf{A} et \mathbf{C} et de supprimer le terme \mathbf{W} de l'équation (2.3) est de réaliser une projection orthogonale telle que $\mathbf{W}\mathbf{W}^\perp = 0$. En appliquant $\mathbf{W}^\perp = I - \mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1}\mathbf{W}$ à droite de l'équation (2.3)² on obtient finalement :

$$\mathbf{G}\mathbf{W}^\perp = \mathbf{O}\mathbf{X}\mathbf{W}^\perp.$$

Cette équation est fondamentale puisque l'on constate que la matrice d'observabilité étendue qui contient \mathbf{A} et \mathbf{C} dépend des données d'entrées/sorties contenues dans \mathbf{G} , \mathbf{X}^C et \mathbf{W} . Sans rentrer dans le détail de la résolution, par une décomposition SVD de \mathbf{O} on fait apparaître les dynamiques principales du système à partir desquelles on extrait \mathbf{A} et \mathbf{C} . Une fois ces deux matrices d'état obtenues, la fonction de transfert associée au modèle identifié devient affine en \mathbf{B} et \mathbf{D} , et par conséquent on obtient le problème d'optimisation convexe standard :

$$\{\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}}\} = \arg \min_{\substack{\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n_u} \\ \tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}}} \sum_{i=1}^N \|\Phi_i - \tilde{G}(\omega_i, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}})\|_F^2.$$

où $\tilde{G}(\omega_i, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \tilde{\mathbf{C}}(e^{i\omega_i} I_r - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}$. La notation avec un tilde signifie qu'il s'agit de la représentation d'état du modèle identifié. Pour être plus précis $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ où \mathbf{T} est une matrice de changement de base et \mathbf{A} est la matrice vraie. En effet il est montré que dans le cas non bruité, $\|\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}\|_\infty = 0$, si \mathbf{G} est stable et d'ordre r avec N nombre d'échantillons fréquentiels fini. De plus, cette approche est consistante dans le cas bruité, *i.e.* $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}\|_\infty = 0$ avec $q \geq r$, si \mathbf{G} est stable et d'ordre r avec un bruit de valeur moyenne nulle affectant les données et de moment d'ordre quatre borné [70].

2. Pour éviter de manipuler des matrices complexes, on considère la représentation réelle de $\mathbf{G} = [\mathbf{Re}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{Im}(\mathbf{G})]$, $\mathbf{W} = [\mathbf{Re}(\mathbf{W}) \quad \mathbf{Im}(\mathbf{W})]$ and $\mathbf{X} = [\mathbf{Re}(\mathbf{X}^c) \quad \mathbf{Im}(\mathbf{X}^c)]$.

Le cas continu s'obtient facilement à partir du cas discret par la transformée de Tustin. Soit on utilise la transformée proposée par MATLAB, soit, de façon équivalente, on calcule analytiquement la représentation d'état continue (A_c, B_c, C_c, D_c) à partir de la version discrète (A_d, B_d, C_d, D_d) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_c &= \frac{2}{T}(I - A_d)^{-1}(A^d - I) \\
 B_c &= \frac{2}{\sqrt{T}}(I + A^d)^{-1}B^d \\
 C_c &= \frac{2}{\sqrt{T}}C^d(I + A^d)^{-1} \\
 D_c &= D_d - C^d(I + A^d)^{-1}B^d
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.2 Contraintes modales

[11] F. Demourant and C. Poussot-Vassal. A new frequency domain subspace algorithm with restricted poles location through LMI regions and its application to a wind-tunnel test. *International Journal of Control*, 90(4) : 779-799, 2017.

Un des problèmes de l'identification dans le domaine fréquentiel est la possibilité d'obtenir des modèles identifiés instables alors que le système à identifier est stable du fait, entre autres, de la présence de bruit sur les mesures. Ceci apparaît clairement pour des données expérimentales [81] ou simulées [31]. Vouloir assurer la stabilité revient à introduire de la connaissance sous la forme d'une contrainte modale dans le modèle à identifier. Plus généralement, au-delà de la stabilité, on peut souhaiter contraindre les modes du modèle identifié dans des zones convexes du plan z ou p . Cette contrainte revient là aussi à introduire de la connaissance a priori dans le processus d'identification. L'implémentation de contraintes modales a fait l'objet de 2 publications [81] et [31]. Dans [81] il a été développé et appliqué les sous-espace fréquentiels par contraintes modales sur des données expérimentales de la soufflerie transsonique S3Ch au centre de l'ONERA de Meudon dans le cadre du 7^{eme} *Framework Program* pour le projet Clean Sky JTI (*Joint Technology Initiative*). Comme les données étaient bruitées, les méthodes classiques des sous-espaces fréquentiels conduisaient à identifier un modèle instable alors que le système était stable. Cela pose problème si on souhaite synthétiser une loi de commande sur le modèle identifié instable, et pour l'analyse, car il est intéressant de pouvoir comparer les réponses temporelles en boucle ouverte et boucle fermée. De plus la synthèse réalisée sur un système instable peut conduire à un écart significatif lorsque le contrôleur est implémenté sur le vrai système stable.

Finalement les résultats ont pu être validés expérimentalement, confirmant ainsi les résultats obtenus en simulation, et publiés dans [81]. Cet article a été classé 2^{eme} à l'EREA Best Paper Award 2018 et représente une première en Europe

<https://www.onera.fr/en/news/gust-effect-control-a-european-first-at-onera>.

Dans [31] je me suis focalisé plus spécifiquement sur la méthode d'identification par contraintes

$$\mathbf{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\mathbf{Re}(z) - c_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{Im}(z)}{b}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -c_0/a + z(1/2a - 1/2b) + \\ * & \bar{z}(1/2a - 1/2b) \\ & -r \end{pmatrix} < 0 \quad (2.8)$$

$$\alpha_1 < \mathbf{Re}(z) < \alpha_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z + \bar{z} - 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & z + \bar{z} + 2\alpha_1 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.9)$$

$$|\mathbf{Im}(z)| < \beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2\beta & z - \bar{z} \\ \bar{z} - z & -2\beta \end{pmatrix} < 0 \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{Re}(z) - c_0) \tan \theta < -|\mathbf{Im}(z)| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (-2c_0 + z + \bar{z}) \sin \theta & (z - \bar{z}) \cos \theta \\ (\bar{z} - z) \cos \theta & (-2c_0 + z + \bar{z}) \sin \theta \end{pmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

modales en la comparant à la version sans contrainte des sous-espaces sur des modèles issus de *CompLeib*. L'article a été publié dans le cadre d'un *special issue d'International Journal of Control* - Issue 4 : Identification and Control of Nonlinear Electro-Mechanical Systems

Le principal résultat de ce paragraphe est de proposer une solution pour contraindre les modes du système identifié dans des régions du plan complexe **LMI** z dans le contexte des sous-espaces fréquentiels. Ces régions **LMI**, donc convexes, peuvent être le demi-plan gauche pour imposer la stabilité d'un système continu. Comme l'intersection de régions convexes donne une région encore convexe, il est possible d'avoir des régions relativement complexes (figure 2.1).

Avant de donner le résultat principal quelques rappels sont faits sur les régions **LMI** qui ont été utilisées dans le contexte de la synthèse de contrôleurs robustes [12, 13].

Definition 1 (région LMI) *Un sous-ensemble \mathcal{D} du plan complexe est appelé région LMI s'il existe une matrice symétrique $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | f_{\mathcal{D}}(z) = \mathbf{P} + \mathbf{Q}z + \mathbf{Q}^T \bar{z} < 0\}. \quad (2.6)$$

Remarquons que la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}(z) = \mathbf{P} + \mathbf{Q}z + \mathbf{Q}^T \bar{z}$ est une fonction $n \times n$ Hermitienne. Les régions **LMI** sont symétriques par rapport à l'axe réel. Les valeurs propres du système dynamique $\dot{x}(t) = Ax(t)$ évoluent dans des régions **LMI** définies par \mathcal{D} si les pôles satisfont la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}$.

Les inégalités (2.7)-(2.11) fournissent un ensemble de fonctions caractéristiques de régions **LMI** comme le *demi-plan gauche complexe* (2.7), *l'ellipse de centre c_0 et demi-axes a et b* (2.8), *la bande verticale entre α_1 et α_2* (2.9), *la bande horizontale entre $\pm\beta$* (2.10), et *le secteur conique de sommet c_0 et d'angle θ* (2.11).

Remark 1 (Équivalence régions du plan p et z) *Les régions LMI définies dans le tableau ci-dessus sont valables que ce soit pour les systèmes continus ou discrets. Néanmoins ils n'ont pas du tout la même signification (figure 2.2). Pour les systèmes discrets la contraintes de stabilité est obtenue en imposant $|z| < 1$, i.e. que toutes les valeurs propres du système sont contenues strictement dans le cercle unité (en appliquant $a = b = 1$ et $c_0 = 0$ à la fonction caractéristique de l'ellipse (2.8)). La contrainte équivalente pour un système continu est obtenue en appliquant la transformation $z = e^{pT_e}$, où T_e la période d'échantillonnage. En l'occurrence ici on obtient le demi-plan gauche.*

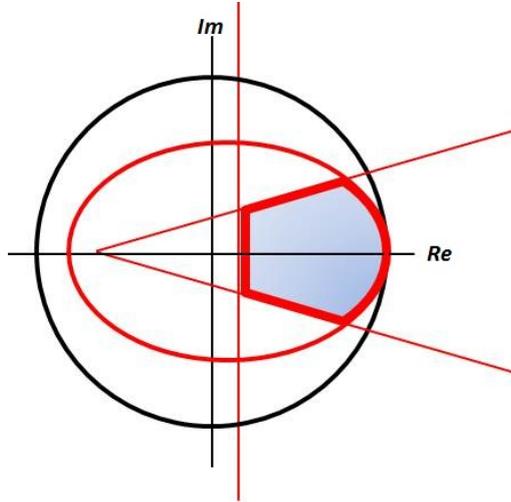


FIGURE 2.1 – Illustration de l'intersection de 3 régions convexes : une ellipse, un cône, et un demi-plan droit. La région finale reste convexe. Si le plan complexe est le plan z , le cercle délimite la région intérieure stable.

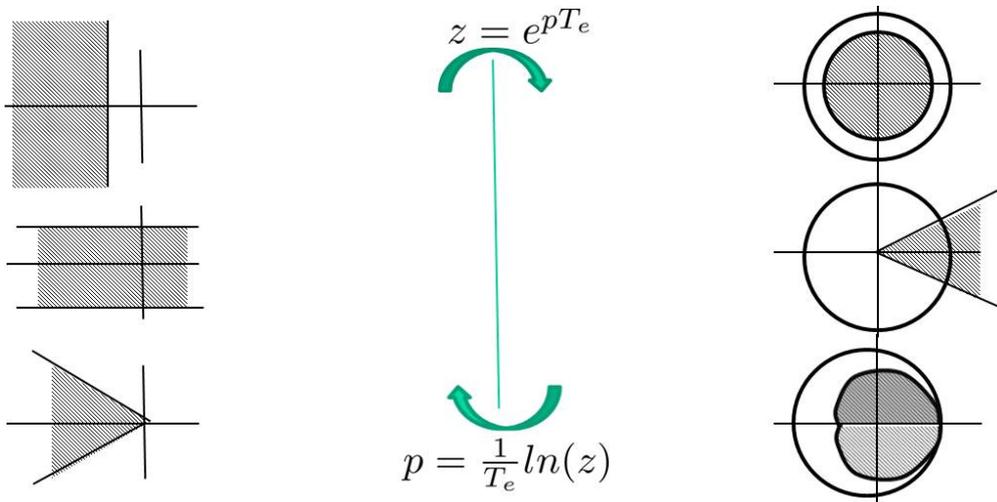


FIGURE 2.2 – Quelques transformations par $z = e^{pT_e}$ ou $p = \frac{1}{T_e} \ln(z)$ entre plans complexes où typiquement le plan complexe à gauche est le plan continu p et à droite le plan discret z . Le dernier exemple illustre la non conservation de la convexité entre le plan z et p .

Remark 2 (Non conservation de la convexité continu-discret) *Il est important de remarquer que la transformation $z = e^{pT_e}$ et son inverse ne conservent pas nécessairement la convexité. Par exemple le demi-plan droit dans le plan p correspond à une zone non-convexe dans le plan z . Et par extension une bande verticale dans p correspond à une couronne dans z , couronne qui est par définition non-convexe. Le cône de sommet $(0,0)$ orienté vers le demi-plan gauche dans p correspond à un cardioïde dans z (figure 2.2) .*

Remark 3 (Intersection d'ensembles convexes) *La propriété de convexité est conservée par l'opération d'intersection sur les ensembles convexes (figure 2.1). Par conséquent le sous-ensemble final est convexe. Soient deux régions **LMI** \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 décrites par la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}_1}$ et $f_{\mathcal{D}_2}$ respectivement, la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est simplement formulée comme $f_{\mathcal{D}} = \mathbf{diag}(f_{\mathcal{D}_1}, f_{\mathcal{D}_2})$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 1 :

Theorem 1 (Régions LMI [12, 13]) *Considérons un système dynamique décrit par l'équation (2.5), $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors \mathbf{A} a toutes ses valeurs propres dans la région **LMI** \mathcal{D} définie par la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}(z)$:*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | f_{\mathcal{D}}(z) = \mathbf{P} + \mathbf{Q}z + \mathbf{Q}^T \bar{z} < 0\} \quad (2.12)$$

si et seulement si il existe une matrice symétrique $\Psi = \Psi^T > 0$ telle que :

$$\mathbf{P} \otimes \Psi + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{A}\Psi + \mathbf{Q}^T \otimes (\mathbf{A}\Psi)^T < 0. \quad (2.13)$$

2.2.2.1 Sous-espaces fréquentiels sous contraintes de régions LMI.

Le théorème 1 déjà bien connu en commande va nous servir pour établir le résultat principal dans cette section, à savoir la possibilité d'imposer les modes dans des régions **LMI** d'un système identifié par les sous-espaces fréquentiels.

Proposition 1 (Sous-espaces avec contraintes LMI) *Soit $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ caractérisants la région **LMI** \mathcal{D} définie par :*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} | f_{\mathcal{D}}(z) = \mathbf{P} + \mathbf{Q}z + \mathbf{Q}^T \bar{z} < 0\}. \quad (2.14)$$

Les valeurs propres de $\tilde{\mathbf{A}} = \varphi^\dagger b \in \mathbb{R}^{r \times r}$ évolue dans \mathcal{D} si et seulement si le problème suivant :

$$\min_{\tilde{\mathbf{A}}, \Psi, \beta} \beta \quad (2.15)$$

sous contraintes de (2.16), (2.17), (2.18)

$$\mathbf{P} \otimes \Psi + \mathbf{Q} \otimes \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{Q}^T \otimes \tilde{\mathbf{A}}^T < 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} I_r & (\varphi \tilde{\mathbf{A}} - b\Psi) \\ (\varphi \tilde{\mathbf{A}} - b\Psi)^T & \beta I_r \end{pmatrix} > 0 \quad (2.17)$$

$$\Psi > 0 \quad (2.18)$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\Psi \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $\Psi = \Psi^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, a une solution.

La preuve est donnée dans [31].

Un algorithme est proposé pour identifier un modèle dynamique satisfaisant les contraintes **LMI** sur les valeurs propres :

Algorithm 1 Sous-espaces avec contraintes **LMI**

Require: Un ensemble de données fréquentielles $(\omega_i, \Phi_i)_{i=1}^N$ et \mathcal{D} une région **LMI**.

Ensure: Un modèle réduit $\tilde{\mathbf{G}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(sI_r - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}$ où $\Lambda(\tilde{\mathbf{A}}) \in \mathcal{D}$

1: Évaluation de $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\Psi$ par la résolution du problème d'optimisation **LMI** suivant :

$$\min_{\tilde{\mathbf{A}}, \Psi, \beta} \beta$$

sous contraintes de (2.16), (2.17), (2.18)

- 2: Calculer $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\Psi^{-1}$ et $\tilde{\mathbf{C}}$.
 3: Calculer $\tilde{\mathbf{B}}$ and $\tilde{\mathbf{D}}$ comme

$$\{\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}}\} = \arg \min_{\substack{\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n_u} \\ \tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}}} \sum_{i=1}^N \|\Phi_i - \tilde{\mathbf{G}}(\omega_i, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}})\|_F^2$$

où $\tilde{\mathbf{G}}(\omega_i, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{D}}) = \tilde{\mathbf{C}}(e^{j\omega_i}I_r - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}$.

- 4: Retrouver le modèle continu à partir de la transformée de Tustin.
-

Dans le cas bruité, pour conserver la consistance de l'algorithme, *i.e.* sa capacité à estimer un modèle non-biaisé en présence de bruit, il est possible d'insérer une matrice de pondération \mathbf{R} construite à partir de la variance relative du bruit à chaque fréquence. Cette matrice doit être connue a priori. Ici l'approche modale est une autre façon de traiter le bruit. En effet le bruit peut conduire à une estimation du système incohérente avec ses propriétés réelles : typiquement le bruit peut conduire à un système identifié instable ou à une sous-estimation des amortissements modaux [31]. La contrainte modale permet d'introduire a priori certaines propriétés, ou du moins une certaine connaissance du système qui va conduire à une estimée plus conforme à ce qui est attendu. Mais il est important de souligner les points suivants :

- La contrainte modale ne permet pas de retrouver la consistance de l'algorithme mais d'améliorer la qualité du modèle identifié. Rien ne permet de dire que le vrai système en présence de bruit à été identifié sans biais en imposant des contraintes modales ;
- Inversement les contraintes modales ne sont pas incompatibles avec la propriété de consistance des sous-espaces pourvu que cette contrainte soit pertinente *i.e.* conforme aux propriétés du système : par exemple ne pas imposer la stabilité à un modèle réellement instable ;
- L'intérêt de la contrainte modale est d'être a priori plus facilement appréhendable que la construction d'une matrice \mathbf{R} de covariance de bruit à chaque fréquence. Par exemple, on sait en général si le système est stable ou pas [81]. Dans le cas d'estimation de modèles aéroélastiques, la connaissance du système peut nous permettre d'imposer un amortissement minimal de 5% au cours d'essais de vibrations. En imposant ces contraintes et avec des données expérimentales bruitées, sans hypothèse sur le bruit, il est possible d'obtenir un

modèle identifié pertinent.

2.2.3 Approche paramétrique

[16] P. Kergus, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Identification of parametric models in the frequency domain through the subspace framework under LMI constraints. *International Journal of Control*, 93(8) :1879-1890, 2018.

L'idée est de construire une classe de modèles paramétrés par un paramètre appelé p . On obtient alors un continuum de modèles appelés p -LTI. Même si cela peut évoquer l'identification LPV on ne s'intéresse pas spécifiquement à ce problème. Le problème général est basé sur une collection, plus précisément un ensemble discret de modèles LTI paramétrés par une grandeur physique p et on cherche à obtenir un modèle paramétré en p qui interpole au mieux les modèles LTI. Typiquement dans le domaine de l'aéronautique, les modèles obtenus dépendent du point de vol (**Mach** et altitude) et du cas de masse. On obtient donc une collection de modèles LTI. De même concernant les écoulements, en général les modèles dépendent du **Mach** et du nombre de Reynolds. Il est alors intéressant de construire un modèle p -LTI qui permette de caractériser le continuum de modèles. Cela peut s'apparenter à de l'identification de modèles LPV [95, 68, 94] mais cela doit être manipulé avec précaution dans le contexte LPV car on ne définit pas la vitesse de variation de p . D'ailleurs dans les exemples que l'on utilise pour illustrer l'approche, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, p est un paramètre de conception ou de design et non pas un paramètre qui varie au cours d'une expérience. Si c'est un paramètre physique qui peut évoluer, idéalement on le figera. Si p correspond au **Mach** ou à la masse d'un appareil, il peut varier au cours du temps. Mais la vitesse de variation du paramètre doit rester négligeable par rapport aux dynamiques principales du système. En bref il est nécessaire que les modèles utilisés pour l'identification p -LTI soient des modèles linéaires dont on a gelé le paramètre p ou lentement variable en p . Il est possible de mener une synthèse LPV mais en gardant à l'esprit l'hypothèse de base, à savoir une variation lente du paramètre p par rapport à la dynamique principale du système.

La paramétrisation choisie dans le contexte des sous-espaces fréquentiels est une paramétrisation polynomiale de la représentation d'état. Une contrainte modale combinée à une paramétrisation affine permet de garantir pour n'importe quelle valeur de p la position des modes du système identifié. Cette approche a été publiée dans [57, 58] avec comme exemple un bief dont on fait varier la position d'un capteur situé en aval. On obtient donc une classe de modèles en fonction de la position du capteur. Il est alors possible à partir d'une formulation p -LTI de synthétiser une classe de contrôleurs en fonction de la position du capteur. Si on souhaite utiliser un compensateur unique la paramétrisation polynomiale de la représentation d'état se prête naturellement à une analyse en robustesse et performance.

2.2.3.1 Principes

Dans ce paragraphe, nous ne détaillerons pas le calcul et la procédure pour construire une représentation d'état estimée du type p -LTI. Le lecteur pourra se référer directement à [58]. Nous

rappellerons seulement les principaux éléments de la méthode. L'approche des sous-espaces pour identifier un modèle paramétré a été développée dans le domaine temporel dans [68] et [96]. Considérons un système paramétrique $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ avec n_u entrées et n_y sorties où $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ est un vecteur de paramètres qui caractérisent le point de fonctionnement ou de configuration. Soit un ensemble $\{\omega_i^{(j)}, \Phi_i^{(j)}\}$ ($i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N_p$), où $\Phi_i^{(j)} \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ représente la réponse fréquentielle de $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ obtenue à la pulsation $\omega_i^{(j)} \in \mathbb{R}_+$ et pour le point de fonctionnement/design $\mathbf{p}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_p}$. N est le nombre d'échantillons et N_p est le nombre de configurations choisies. Ainsi pouvons-nous écrire :

$$\Phi_i^{(j)} = \mathbf{G}(\mathbf{p}^{(j)}, i\omega_i^{(j)}). \quad (2.19)$$

Le problème est d'identifier un modèle linéaire $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ représenté par une réalisation d'état d'ordre n :

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) : \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{p})\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur d'entrée du système, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ le vecteur de sortie/mesure, $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\mathbf{C}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ et $\mathbf{D}(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ et où $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}(\mathbf{p})$, $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{D}(\mathbf{p})$ sont des matrices paramétrées sous une forme polynomiale, la forme la plus simple étant la forme affine. La méthode proposée ici est une extension de [70], [73] et [31]. La procédure repose sur la concaténation de tous les modèles LTI obtenus à chaque point de fonctionnement/conception $\mathbf{p}^{(j)}$. Comme indiqué précédemment l'approche des sous-espaces fréquentiels est basée sur l'extraction de \mathbf{A} et \mathbf{C} à partir d'une matrice d'observabilité étendue construite à partir de données d'entrées/sorties.

Considérons un point de fonctionnement/conception $\mathbf{p}^{(j)}$, nous avons un modèle $\mathbf{G}^{(j)}$ d'ordre n :

$$\mathbf{G}^{(j)} : \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}^{(j)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^{(j)}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}^{(j)}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^{(j)}\mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (2.21)$$

avec $\mathbf{A}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\mathbf{C}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ et $\mathbf{D}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. Ce modèle est local puisqu'il ne dépend pas du paramètre \mathbf{p} . Il représente la dynamique du système seulement pour la valeur figée de $\mathbf{p}^{(j)}$. La représentation d'état pour les différents modèles obtenus à $\mathbf{p}^{(j)}$ est obtenue à partir de la matrice d'observabilité étendue suivante, où $q \geq n$:

$$\mathcal{O}_q^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(j)} \\ \mathbf{C}^{(j)}\mathbf{A}^{(j)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{(j)}(\mathbf{A}^{(j)})^{q-1} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

En bref les matrices sont identifiées à partir des données fréquentielles $\{\omega_i^{(j)}, \Phi_i^{(j)}\}$ ($i = 1 \dots N$) obtenues pour chaque point de fonctionnement/configuration. Les matrices de données $\mathbf{G} = \frac{1}{N} [\mathbf{G}_1 \dots \mathbf{G}_N] \in \mathbb{C}^{q n_y \times n_u N}$ et $\mathbf{W} = \frac{1}{N} [\mathbf{W}_1 \dots \mathbf{W}_N] \in \mathbb{C}^{q n_u \times n_u N}$ sont calculées à partir (2.23). Ainsi pour tout $i = 1 \dots N$, avons-nous :

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \Phi_i^{(j)} \\ e^{i\omega_i^{(j)}} \Phi_i^{(j)} \\ e^{i2\omega_i^{(j)}} \Phi_i^{(j)} \\ \vdots \\ e^{i(q-1)\omega_i^{(j)}} \Phi_i^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ e^{i\omega_i^{(j)}} I_{n_u} \\ e^{i2\omega_i^{(j)}} I_{n_u} \\ \vdots \\ e^{i(q-1)\omega_i^{(j)}} I_{n_u} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Ces modèles sont donc obtenus pour un point de fonctionnement/conception particulier. Ce qui montre bien que si on souhaite utiliser cette approche paramétrique dans un contexte LPV il faut bien s'assurer que les modèles utilisés pour la paramétrisations aient du sens.

Concaténonons tous les modèles LTI afin de résoudre directement le problème au lieu d'interpoler N_p modèles locaux comme cela peut être fait traditionnellement. Pour cela nous considérons toutes les matrices d'observabilités locales $\hat{\mathcal{O}}_q^{(j)}$ obtenues pour chaque $\mathbf{p}^{(j)}$. Celles-ci doivent s'exprimer dans la même base, ce qui n'est absolument pas garanti par l'approche classique des sous-espaces. Une représentation classique permettant l'utilisation d'une base unique pour tous les modèles LTI est la forme canonique d'observabilité. Cette représentation est unique car elle correspond à la fonction de transfert. Dans ce qui suit seul le cas SISO est présenté. Le cas MISO et SIMO est trivial par rapport au cas SISO. Le cas MIMO est similaire bien qu'un peu plus complexe mais détaillé dans [58]. La formulation MIMO d'une représentation d'état dans la base canonique d'observabilité est extraite de [94].

Dans le cas SISO, la forme canonique d'observabilité est définie par la structure suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}(\mathbf{p}) & \mathbf{B}(\mathbf{p}) \\ \hline \mathbf{C}(\mathbf{p}) & \mathbf{D}(\mathbf{p}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \dots & 0 & \beta_{n-1}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \beta_{n-2}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ -\alpha_0(\mathbf{p}) & -\alpha_1(\mathbf{p}) & \dots & -\alpha_{n-1}(\mathbf{p}) & \beta_0(\mathbf{p}) \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_n(\mathbf{p}) \end{array} \right], \quad (2.24)$$

où $\alpha(\mathbf{p})$ et $\beta(\mathbf{p})$ sont définis de façon unique puisqu'ils correspondent aux coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert. Il est possible de calculer une matrice de changement de base T_j pour chaque point $\mathbf{p}^{(j)}$ afin que tous les modèles LTI s'expriment dans la même base à savoir la base canonique d'observabilité. Comme indiqué dans [94], dans le cas SISO, la matrice de changement de base \mathbf{T}_j est simplement donnée par la matrice d'observabilité $\mathcal{O}_n^{(j)}$, i.e. les n lignes de la matrice d'observabilité étendue $\mathcal{O}_q^{(j)}$:

$$\mathbf{T}_j^{-1} = [I_n \ 0_{n \times (n_y q - n)}] \mathcal{O}_q^{(j)} = \mathcal{O}_n^{(j)}. \quad (2.25)$$

Remark 4 Remarquons que la matrice \mathbf{T}_j doit être inversible, la représentation d'état est donc observable ce qui est le cas dès lors que le choix de l'ordre n est fait de façon pertinente, i.e. tel que la SVD de la matrice d'observabilité ne contient pas de valeurs propres nulles ou très faibles. n représente ici l'ordre du système identifié.

Finalement il est possible à partir des données d'entrées/sorties obtenues pour tous les $j = 1 \dots N_p$ de construire une matrice de changement de base T_j . Les matrices $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ du modèle paramétrique satisfont alors au point $\mathbf{p}^{(j)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{p}^{(j)}) = \mathbf{T}_j \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{T}_j^{-1} \\ \mathbf{C}(\mathbf{p}^{(j)}) = \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{T}_j^{-1} \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

2.2.3.2 Contraintes modales sur le modèle p -LTI

Dans ce contexte il est possible d'imposer une contrainte modale sur les modèles identifiés LTI. Par extension de ce qui a été réalisé dans [73] et [31], les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ évoluent dans \mathcal{D} si et seulement si $X = X^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe tel que la LMI suivante soit vérifiée :

$$\forall \mathbf{p} \in \Delta, P \otimes X + Q \otimes (\mathbf{A}(\mathbf{p})X) + Q^T \otimes (\mathbf{A}(\mathbf{p})X)^T < 0, \quad (2.27)$$

où $\Delta = \{\mathbf{p} \mid \forall k = 1 \dots n_p, \mathbf{p}(k) \in [0, 1]^{n_p}\}$ est un ensemble convexe (nous supposons que les paramètres sont normalisés). La coquille convexe est définie par :

$$\Delta_0 = \{\mathbf{p} \mid \forall k = 1 \dots n_p, \mathbf{p}(k) \in \{0, 1\}\} \quad (2.28)$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ fixe, nous définissons la fonction $f_{\mathbf{x}} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}^T (P \otimes X + Q \otimes (\mathbf{A}(\mathbf{p})X) + Q^T \otimes (\mathbf{A}(\mathbf{p})X)^T) \mathbf{x}. \quad (2.29)$$

Si $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ est une fonction affine de \mathbf{p} , la fonction $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{p})$ est alors une fonction convexe de \mathbf{p} . Nous obtenons donc la propriété suivante [86] :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) < 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta \iff f_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}) < 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \Delta_0. \quad (2.30)$$

Cela signifie que pour assurer que les valeurs propres de $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ évoluent dans \mathcal{D} , il suffit que la LMI donnée par l'équation (2.27) pour $\mathbf{p} \in \Delta_0$, qui contient un nombre fini d'éléments, soit satisfaite. Dans le cas où on estime $\tilde{\mathbf{A}}$ et en notant $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p})X = \tilde{\mathbf{A}}_0 + \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{p}(k) \tilde{\mathbf{A}}_k$ avec $\tilde{\mathbf{A}}_k = \tilde{\mathbf{A}}_k X, k = 1 \dots n_p$ trouver les matrices $\tilde{\mathbf{A}}_k$ formant $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p})$ en assurant que les pôles du système évoluent dans \mathcal{D} est réalisé en résolvant un problème similaire à la proposition 1 dans le cas paramétré. L'écriture exacte de la proposition est détaillée dans [58].

Remark 5 *En pratique il n'est pas nécessaire que toutes les matrices de la représentation d'état varient. Si on ne souhaite pas que les matrices \mathbf{B} et \mathbf{D} dépendent de p , l'idée est de modifier légèrement le problème aux moindres carrés en posant $\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \mathbf{B}_0$ et/ou $\mathbf{D}(\mathbf{p}) = \mathbf{D}_0$.*

Remark 6 *L'extension de l'algorithme pour une paramétrisation polynomiale d'ordre 2 ou supérieur de la représentation d'état en fonction du paramètre p est directe. Néanmoins il est important de garder à l'esprit que l'on perd les propriétés de convexité qui permettent de garantir que les modes évoluent dans les régions LMI définies quel que soit la valeur du paramètre p , même si on peut toujours imposer une contrainte modale pour des valeurs spécifiques. Cela signifie que l'on obtient bien une paramétrisation polynomiale d'ordre supérieur ou égal à deux mais sans pouvoir garantir que les modes restent dans la région LMI définie sauf, bien sûr, aux points $\mathbf{p} \in \Delta_0$.*

Remark 7 Notons que la matrice \mathbf{R} qui contient les informations sur la covariance du bruit peut tout à fait être utilisée si l'information est accessible pour l'utilisateur. Dans ce cas, il n'est pas forcément nécessaire d'imposer une contrainte modale car la consistance de l'algorithme [70] permet d'identifier le système sans biais. Dans ce cas, a priori, la représentation d'état estimée tend vers la vraie et donc il ne devrait pas y avoir de modes non physiques instables observables.

2.3 Applications aéronautiques

2.3.1 Mise en œuvre sur une soufflerie

[27] C. Poussot-Vassal, F. Demourant, A. Lepage, and D. L. Bihan. Gust load alleviation : Identification, control, and wind-tunnel testing of a 2-D aeroelastic airfoil. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 25(5) :1736-1749, Sep. 2017.

La mise en œuvre des sous-espaces fréquentiels par contraintes modales a été réalisée à partir de données expérimentales d'une soufflerie. L'objectif est de valider l'atténuation de charge à la rafale par une boucle fermée représentée par l'interconnexion du système et d'un compensateur de réduction de charge. Les données expérimentales ont été obtenues et validées sur une installation de soufflerie ONERA pour différentes incidences α (ou angle d'attaque, le terme anglais étant *AoA*, *i.e.* *Angle of Attack*) et différents **Mach** à partir du régime subsonique au régime transsonique (figure 2.3). Ce résultat représente une première en Europe³.

L'objectif, *in fine*, est de fournir un modèle de synthèse pour le contrôle de charge. Le contrôleur une fois synthétisé est ensuite implémenté dans la soufflerie afin de vérifier que les performances obtenues en simulation sont préservées sur le vrai système de la soufflerie. Dans ce rapport, on ne s'intéresse qu'à la partie modélisation de l'aile dans la soufflerie.

Comme illustré sur la figure 2.4, la soufflerie est composée de deux parties. La première est dédiée à la génération d'une rafale de vent, elle est constituée de deux mini-voilures dont le mouvement de rotation autour de leur axe longitudinal génère une turbulence. La seconde partie est la voilure 2D dont on cherche à évaluer les charges par des capteurs du type accéléromètre. Cette voilure insérée dans la soufflerie correspond à un problème aéroélastique. Si on rajoute une loi de commande, le problème étudié est un problème aéro-servoélastique. La mise en place de cette soufflerie s'est faite au travers d'une collaboration entre l'ONERA et Aviation Design dans le contexte d'un projet européen *Clean Sky* dont l'une des thématiques est la réduction de consommation de carburant d'un avion par la réduction de charge.

Le modèle consiste en une voilure 2D montée entre les murs de la veine de la soufflerie permettant un mouvement à 2 degrés de liberté à la fois sur le tangage et l'axe vertical. Cette voilure est équipée d'une surface de contrôle sur tout le long du bord de fuite (zone verte sur la figure 2.5). Le système ne permet aucune torsion de la voilure. La bande passante de l'actionneur est de 100Hz. Nous nous intéressons plus précisément au problème de l'identification du modèle aéroélastique de la voilure 2D dans la veine de la soufflerie. L'aile est équipée de 20 accéléromètres le long de son envergure.

3. <http://www.cleansky.eu/content/news/active-gust-load-alleviation-aeroelastic-model> (project webpage).



FIGURE 2.3 – Installation de la soufflerie S3Ch au centre de l'ONERA de Meudon dans le cadre du 7^{eme} Framework Program pour le projet Clean Sky JTI (*Joint Technologie Initiative*).

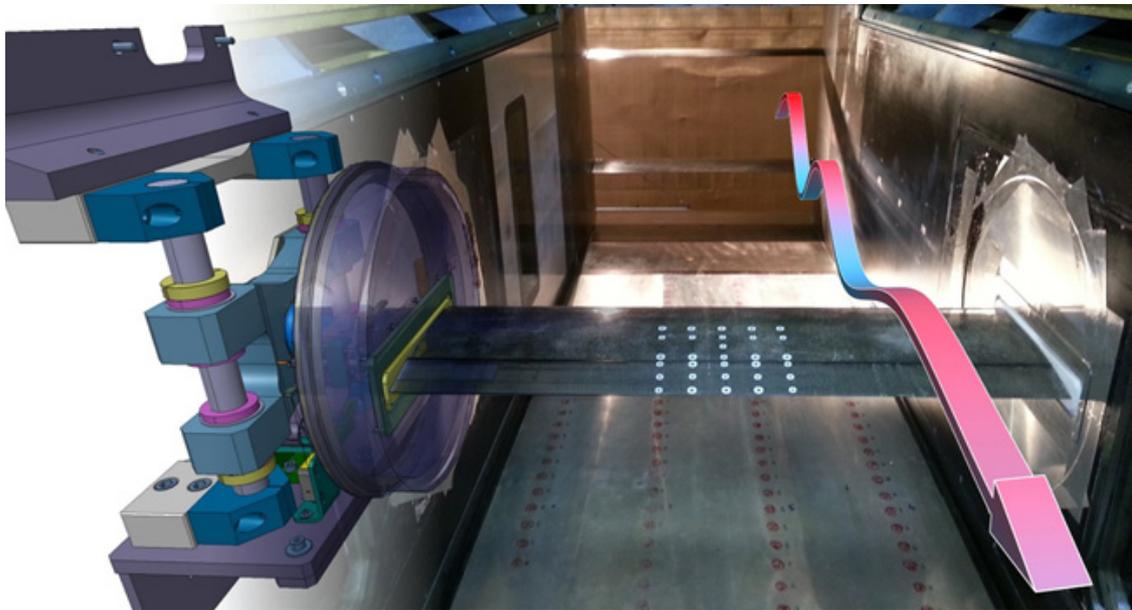


FIGURE 2.4 – Montage expérimental (vue interne de la soufflerie). On distingue au premier plan le système de contrôle de la voilure 2D et au dernier plan le générateur de rafale avec ses deux ailettes. La flèche indique le sens de l'écoulement de l'air de l'amont vers l'aval.

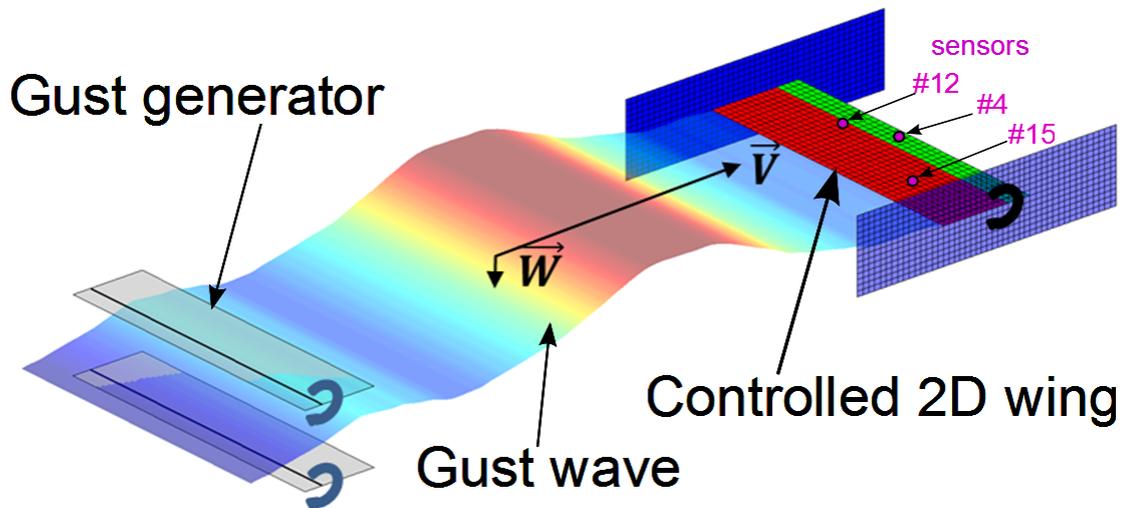


FIGURE 2.5 – Représentation schématique de la soufflerie : une turbulence représentée par une surface colorée qui ondule attaquant la voilure en 2D. Cette voilure est équipée d'une surface de contrôle le long du bord de fuite et de 20 capteurs dont 3 (#4, #12, #15) sont matérialisés par des points roses et sont utilisés pour le contrôle et l'évaluation de la réduction de charge. \vec{v} est le vecteur vitesse de l'écoulement dans le sens longitudinal de la soufflerie et \vec{w} est la perturbation verticale produite par le générateur de rafale.

Parmi ces 20 capteurs 3 sont matérialisés par des points roses (Figure 2.5). Par exemple la figure 2.6 illustre les réponses fréquentielles du système pour la sortie $\ddot{z}_{\#15}$ obtenue dans la soufflerie pour 4 configurations différentes de **Mach** et α , en réponse à une excitation à la fois à la rafale $w(t)$ et de la surface de contrôle $u(t)$.

Remark 8 (Données expérimentales en soufflerie) *Il est important de signaler qu'avant d'obtenir des données valides du système que l'on cherche à identifier il est nécessaire de procéder à des centaines d'expérience pour calibrer et ajuster le générateur de rafale, le profil de l'aile et les mesures.*

2.3.1.1 Quelques résultats

Une première illustration est donnée par la figure 2.7 pour la sortie accélération #15 et un modèle identifié d'ordre $r = 20$. Cette figure illustre le très bon comportement de l'approche par les sous-espaces fréquentiel puisque l'on constate une bonne correspondance entre les données fréquentielles expérimentales et la réponse en gain des modèles identifiés d'ordre réduit.

Néanmoins dans cette application sur certaines configurations, il arrivait que les modèles identifiés soient instables ce qui peut poser problème pour plusieurs raisons :

- L'interprétation physique du modèle identifié devient compliqué, car dans le cas qui nous intéresse, on est a priori capable d'associer les modes du système à des phénomènes physiques (figure 2.6). Par exemple le mode 2 nœuds voilures correspond à un mode dimensionnant de flexion pure. A moins d'avoir dépassé la vitesse dite de *flutter*, qui correspond au passage de certains modes du domaine stable au domaine instable, ce qui n'est pas le cas ici pour des

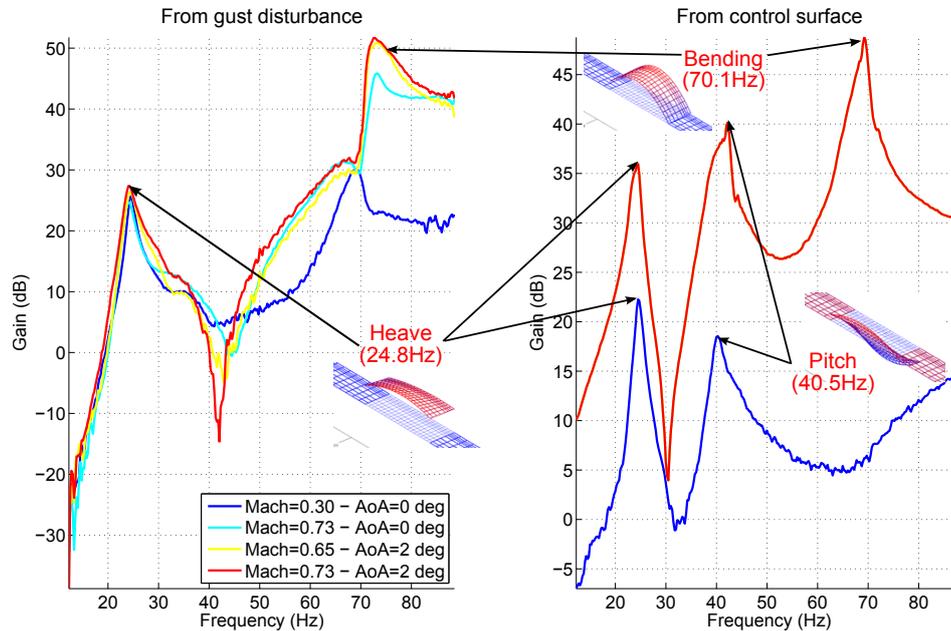


FIGURE 2.6 – Réponses en boucle ouverte de l'accélération verticale $\ddot{z}_{\#15}$ à la position $\#15$ obtenue expérimentalement pour une perturbation du type rafale (gauche) et une excitation de la surface de contrôle (droite).

raisons expérimentales évidentes, les modes sont stables. Plus généralement on a des modes de torsion, des modes de flexion/torsion qui peuvent être clairement discriminés dans les modèles. L'aéroélasticien sera capable d'identifier les principaux modes, mais si le modèle identifié n'est pas représentatif du vrai système en terme modal cela pose problème pour l'analyse des résultats ;

- La synthèse de compensateur sera affectée par la nature instable du modèle de synthèse alors que le vrai système lui est stable. En bref les résultats sur le vrai système risquent de s'écarter dramatiquement des résultats sur le modèle instable obtenus en simulation, créant ainsi une difficulté méthodologique certaine ;
- Pour ce type de problème, il est intéressant de comparer le gain en terme de charge entre le système sans loi et la boucle fermée dans le domaine temporel, ce qui permet de valider ou pas la loi de commande. En bref on doit vérifier que le modèle aéroélastique possède de meilleures propriétés que le modèle initial aéroélastique. La validation dans le domaine temporel est la validation essentielle pour le contrôle de charge à la rafale discrète. Cela devient impossible à réaliser sur le modèle de synthèse s'il est instable. On peut toujours le faire dans la soufflerie mais on retombe sur le point précédent.

Bref il est donc essentiel d'avoir un modèle identifié de synthèse qui ait des bonnes propriétés modales et entrées/sorties. Et la première d'entre-elles est la stabilité, si avérée sur le vrai système. Dans la figure 2.8, nous avons représenté la valeur singulière maximale issue des données expérimentales de la soufflerie et celle obtenue à partir des modèles identifiés par les sous-espaces avec et sans contrainte **LMI**. La contrainte **LMI** choisie va légèrement au delà de la contrainte en stabilité

puisque'elle correspond à une ellipse de demi-grand axe inférieur à 1. Cela permet d'éviter des modes qui seraient très proches de l'axe imaginaire, *i.e.* avec un amortissement très faible, qui n'auraient aucun sens physique. Nous constatons la pertinence de cette contrainte **LMI** par le fait que la réponse fréquentielle du modèle identifié avec et sans contrainte **LMI** est quasiment inchangée et finalement très proche des données expérimentales. La figure 2.9 donne la carte des pôles dans le cas discret et continu. On constate la contrainte du type ellipse dans le cas discret qui "contient" bien la contrainte de stabilité représentée par le cercle unité. On remarque pour le modèle identifié sans contrainte modale, 2 modes, ou plus exactement 2 paires de modes complexes conjugués en dehors de la zone de stabilité. Le passage dans le plan continu montre clairement l'influence de la contrainte puisque'on déplace des modes dans le demi-plan droit à une zone à amortissement contraint. Il est important de garder à l'esprit que la zone représentée par la courbe bleue dans le plan continu n'est pas convexe et est encore moins une ellipse. Elle est relativement complexe par la transformation $s = \frac{1}{T_e} \ln(z)$ mais elle est convexe sur la zone où se situent les modes du système à identifier.

Enfin la figure 2.10 illustre le gain obtenu à l'aide du compensateur puisque'en appliquant une série de rafales discrètes on constate bien la réduction de la charge à la rafale en passant à la boucle fermée. On note ici l'intérêt d'avoir un modèle identifié stable permettant une évaluation du gain avant la validation en soufflerie. Pour rappel le modèle de la rafale discrète est donné par :

$$w(t) = \frac{U_{ds}}{2} \times \left[1 - \cos \left(\frac{\pi V_{TAS}}{H} t \right) \right]. \quad (2.31)$$

où V_{TAS} est la vitesse air vraie de l'appareil, U_{ds} l'amplitude de la rafale qui varie de 11.8 à 19m/s et H la longueur caractéristique qui varie de 1.52 à 7.62m. Cette turbulence est identique à celle utilisée par les avionneurs pour valider les fonctions d'atténuation de charge. Il est compliqué de reproduire fidèlement ce type de turbulence sur une soufflerie, c'est pourquoi une simulation numérique avec un modèle de synthèse permet d'évaluer en première approche le gain attendu.

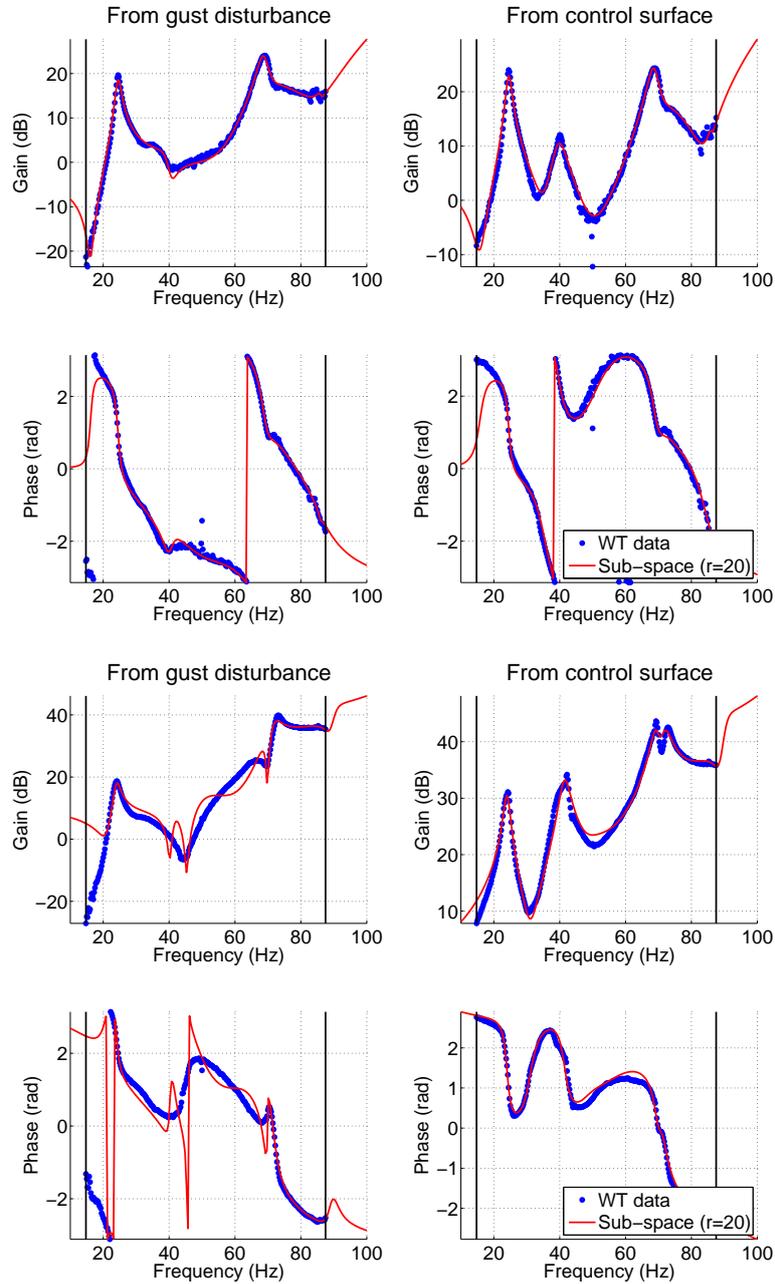


FIGURE 2.7 – Comparaison entre la réponse fréquentielle en gain et en phase de la sortie accélération verticale sur le capteur #15 obtenue dans la soufflerie (pointillés bleus) et les modèles obtenus via les sous-espaces d'ordre $r = 20$. Gauche : $\text{Mach}=0.73$ et $\alpha=0$ degré, rafale. Droite : $\text{Mach}=0.73$ et $\alpha=0$ degré, surface de contrôle. La ligne verticale représente la limite fréquentielle utilisée pour l'identification par les sous-espaces $(\omega_i, \Phi_i)_{i=1}^N$.

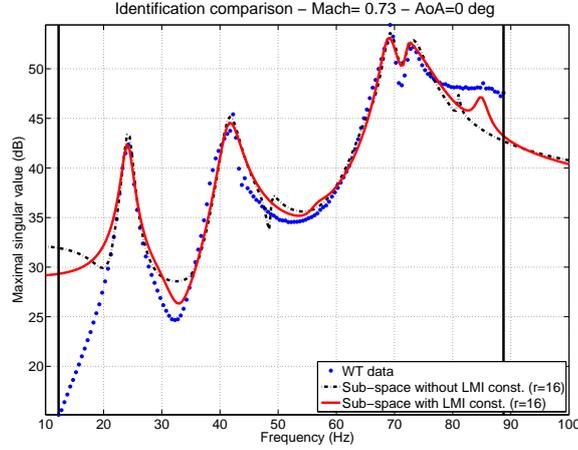


FIGURE 2.8 – Valeur singulière maximale de l’accélération verticale pour les capteurs #4, #12 et #15 obtenue à partir de données expérimentales de la soufflerie (points bleus), et des modèles obtenus pas une approche du type sous-espaces sans contraintes **LMI** (pointillés noirs) et avec contraintes **LMI** (ligne rouge), et $r = 16$. La ligne verticale représente la limite fréquentielle utilisée pour l’identification par les sous-espaces $(\omega_i, \Phi_i)_{i=1}^N$.

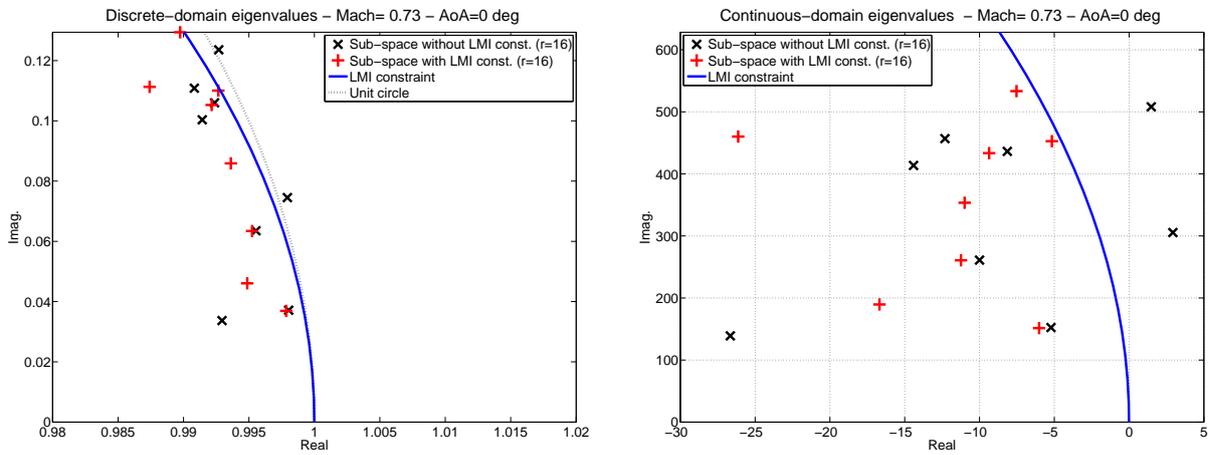


FIGURE 2.9 – Valeurs propres des modèles identifiés par une approche sous-espaces avec (+) et sans (x) contraintes **LMI** pour des modèles d’ordre $r = 16$. A gauche : valeurs propres du modèle discret, évaluation de (2.8) avec $a = 1$, $b = 0.92$ et $c_0 = 0$. A droite : valeurs propres du modèle continu. La ligne bleue représente la contrainte **LMI** équivalente dans le domaine continu par la transformation $p = \frac{1}{T_e} \ln(z)$.

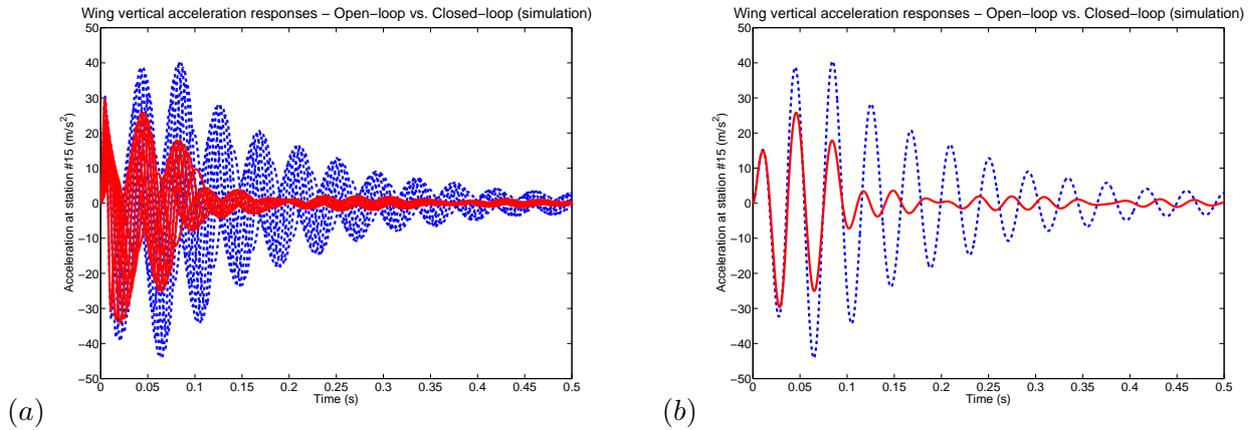


FIGURE 2.10 – Réponse temporelle en boucle ouverte (pointillés bleus) et en boucle fermée (courbes rouges) pour toutes les rafales obtenues avec $H \in [1.52 \ 7.62]$ m et $U_{ds} \in [11.8 \ 19]$ m/s à $\alpha=2$ degrés et $\mathbf{Mach}=0.73$ (a). Réponse temporelle en boucle ouverte (pointillés bleus) et en boucle fermée (courbe rouge) pour le cas dimensionnant obtenu avec $H = 3.81$ m et $U_{ds} = 17.4$ m/s à $\alpha=2$ degrés et $\mathbf{Mach}=0.73$) (b).

2.3.2 Identification de paramètres physiques d'un modèle structuré

- [5] F. Demourant and G. Ferreres. Frequency domain identification of an aircraft LFT model. In 2001 European Control Conference (ECC), pages 657-662, Sep. 2001.
- [6] F. Demourant and G. Ferreres. Identification structurée d'un modèle d'avion. Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME - Nancy), 2001.
- [7] F. Demourant and G. Ferreres. Structured identification of an aircraft model. Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Aug. 2001.
- [8] F. Demourant and G. Ferreres. Controller design for the identification of an LFT model, 2002. 15th IFAC World Congress.

2.3.2.1 Principes

Les travaux menés durant ma thèse ont également concerné l'identification de paramètres physiques d'un système en utilisant des données fréquentielles. Dans ce paragraphe, nous en ferons un bref résumé en donnant les éléments essentiels de l'approche. Le lecteur pourra se référer à la thèse [17] pour plus de détails. L'idée est de représenter les paramètres physiques d'un système sous une forme LFT où la valeur nominale des paramètres est utilisée pour construire le modèle nominal LTI. Les valeurs incertaines, ici les paramètres que l'on cherche à identifier, sont regroupées dans un bloc Δ . Il s'agit alors à partir des données d'entrées/sorties du système, de reconstruire les entrées/sorties fictives du bloc Δ , et une fois reconstruites, d'appliquer un algorithme d'identification. Une technique du type identification par appartenance à un ensemble a été mise en œuvre

[26, 20, 22, 21]. La reconstruction des entrées/sorties fictives du bloc Δ peut être réalisée en boucle ouverte ou en boucle fermée. Dans ce dernier cas, il est alors possible d'utiliser le compensateur pour désensibiliser le schéma d'identification aux bruits de mesure [23]. Dans le même ordre idée, il est possible de représenter un ensemble discret de modèles aéroélastiques par un modèle paramétré LFT [80, 91, 92] et de l'utiliser pour de la commande robuste [93].

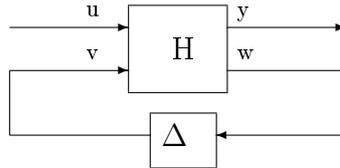


FIGURE 2.11 – Modèle LFT.

En effet, il s'agit de proposer un cadre unifié qui combine la commande robuste, l'analyse en robustesse, la validation de modèle, et l'identification [35], un pré-requis est alors d'utiliser une forme structurée standard commune. De plus, quasiment tous les modèles LTI qui dépendent de paramètres incertains peuvent être mis sous une forme LFT : le transfert $H(p)$ est fixé, u et y sont les entrées-sorties physiques, tandis que les incertitudes paramétriques qui sont regroupées à l'intérieur d'une perturbation de modèle Δ (i.e une matrice réelle dont la structure est fixée et les valeurs inconnues) apparaissent comme un retour interne fictif $v = \Delta w$ (figure 2.11).

Une méthode a déjà été présentée dans [64] pour la reconstruction des entrées-sorties fictives du bloc Δ . Mais celle-ci travaille dans le domaine temporel, ce qui implique des contraintes sur l'inversion de la matrice de transferts qui sont difficiles à respecter. Une méthode basée sur la reconstruction dans le domaine fréquentiel des entrées-sorties de Δ est proposée, méthode imposant moins de contraintes et donc plus facile à mettre en œuvre. Elle consiste simplement à inverser une réponse fréquentielle. Néanmoins, même si elle apparaît comme moins contraignante que l'inversion dans le domaine temporel, elle nécessite d'avoir $n_v \leq n_y$, i.e. un nombre de sorties du bloc Δ inférieur au nombre de sorties de H . En outre l'approche permet d'étudier la sensibilité du schéma d'identification face aux dynamiques négligées, bruits de mesure et autres perturbations agissant sur la boucle fermée. Cette méthode a été appliquée à l'identification d'un modèle aérodynamique latéral fortement structuré d'un avion rigide, issu de [38]. Le modèle est mis sous la forme LFT standard, où les paramètres incertains (les coefficients aérodynamiques) sont regroupés dans un bloc réel plein Δ . Les entrées et sorties v et w de la perturbation de modèle Δ sont déduites des entrées-sorties u et y , afin que Δ soit identifié [20, 22, 26].

Pour prendre en compte les bruits de mesure et les dynamiques négligées, deux techniques d'identification ont été utilisées. La première est la technique d'identification par appartenance à un ensemble (SMI ou *Set Membership Identification*)[100, 74]. Cette technique a pour but de fournir un ensemble de valeurs des paramètres qui sont compatibles avec la structure du modèle, les hypothèses faites sur le bruit de mesure et les dynamiques négligées, ainsi que les mesures des entrées-sorties du procédé. Dans ce cas précis on considère un bruit inconnu mais borné. La seconde solution utilisée est les moindres carrés robustes (RLS). Cette version robuste des moindres carrés (LS) prend en compte des incertitudes bornées sur A et b , tout en minimisant la norme 2 de $Ax - b$ où x contient les variables d'optimisation. Le lecteur pourra trouver les résultats obtenus avec les RLS dans [17],

nous présenterons dans ce mémoire que les résultats obtenus par SMI.

2.3.3 Le modèle latéral aérodynamique

Rappelons que le modèle latéral aérodynamique contient 4 variables d'état β, p, r, ϕ , que l'on appelle respectivement l'angle de dérapage, les vitesses de roulis et de lacet et l'angle de gîte. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont $u = [\delta_p, \delta_r]$ et $y = [n_y, p, r, \phi]$, avec n_y la sortie accélération latérale, et δ_p et δ_r les commandes ailerons et gouverne de direction. L'ordre du modèle complet (avion + actionneurs) est 9.

2.3.3.1 Le modèle LFT

Les incertitudes sont introduites sur les 15 coefficients qui caractérisent le modèle aérodynamique. Ces coefficients aérodynamiques sont $Y_\beta, Y_p, Y_r, Y_{\delta p}, Y_{\delta r}, L_\beta, L_p, L_r, L_{\delta p}, L_{\delta r}, N_\beta, N_p, N_r, N_{\delta p}$ et $N_{\delta r}$. Par exemple le coefficient Y_β se réécrit $Y_\beta = Y_\beta^0 + \Delta Y_\beta$, où Y_β^0 représente la valeur nominale du coefficient, tandis que ΔY_β représente l'incertitude.

On peut mettre le modèle incertain sous une forme LFT $F_l(H(p), \Delta)$, avec une perturbation de modèle diagonale $\Delta = \text{diag}(\delta_i)$ où δ_i (par exemple ΔY_β) est l'incertitude. Cependant la condition $n_v \leq n_y$ signifie que le nombre de paramètres qui peuvent être identifiés est alors très limité. Une façon d'identifier beaucoup plus de paramètres est d'utiliser un bloc réel plein, lorsque c'est possible. Ceci a pu être fait dans le cas de notre modèle. L'ensemble des incertitudes aérodynamiques peuvent donc être représentées par un bloc réel plein Δ .

2.3.3.2 Méthode SMI

TABLE 2.1 – Estimation des paramètres incertains par SMI.

	ΔY_β	ΔY_p	ΔY_r	$\Delta Y_{\delta p}$	$\Delta Y_{\delta r}$
δ_{min}	0.97	NA	0.83	0.76	0.94
δ_{est}	1.00	NA	1.00	1.00	1.01
δ_{max}	1.03	NA	1.17	1.24	1.04

	ΔL_β	ΔL_p	ΔL_r	$\Delta L_{\delta p}$	$\Delta L_{\delta r}$
δ_{min}	0.80	NA	0.70	0.87	0.64
δ_{est}	1.07	NA	0.95	1.08	0.93
δ_{max}	1.34	NA	1.20	1.29	1.21

Dans le cas idéal, i.e. dans le cas sans bruit ni perturbation, le bloc Δ est parfaitement estimé : les paramètres estimés sont strictement égaux aux vrais paramètres avec des intervalles de confiance de largeur nulle.

	ΔN_β	ΔN_p	ΔN_r	$\Delta N_{\delta p}$	$\Delta N_{\delta r}$
δ_{min}	0.96	0.68	0.73	0	0.98
δ_{est}	1.00	0.99	1.05	0	1.00
δ_{max}	1.04	1.30	1.38	0	1.02

Nous considérons une perturbation sur y représentée par une dynamique négligée dont on a évalué la norme H_∞ . Les résultats avec la SMI dans le domaine fréquentiel sont donnés par le tableau 2.1. δ_{min} et δ_{max} sont les bornes sur les intervalles de confiance des paramètres estimés, et $\delta_{est} = \frac{\delta_{min} + \delta_{max}}{2}$. NA signifie *Non Applicable*, i.e les intervalles de confiance sont trop larges ($>100\%$) pour être significatifs. De plus, remarquons que $\Delta N_{\delta p} = 0$. En effet, le coefficient aérodynamique $N_{\delta p}$ est connu et est égal à 0 et par conséquent $\Delta N_{\delta p}$ est égal à 0 aussi.

Généralement nous pouvons voir que les coefficients les plus observables, i.e ΔY_β , $\Delta Y_{\delta p}$, $\Delta Y_{\delta r}$, $\Delta L_{\delta p}$, $\Delta L_{\delta r}$, ΔN_β et $\Delta N_{\delta r}$ ont des intervalles de confiance réduits tandis que ΔY_p et ΔL_p qui sont faiblement observables n'ont pas d'intervalles de confiance suffisamment réduits pour être exploitables et donner une idée de la valeur des coefficients. Pour l'exemple qui nous intéresse on entend par faiblement observable, une contribution énergétique négligeable du coefficient aérodynamique sur les signaux de sortie de Δ .

2.4 Application sur les écoulements fluides

2.4.1 Contexte

Les écoulements fluides ont une importance considérable pour tout véhicule terrestre ou aéronautique. La traînée associée au mouvement est une source majeure de pollution. Le domaine du contrôle des fluides est donc d'une importance primordiale aujourd'hui et pour l'avenir. Bien que l'étude des équations de Navier-Stokes améliore notre connaissance des écoulements fluides, les technologies de contrôle appropriées ayant un impact industriel réel font toujours défaut. La raison en est que la dynamique des fluides est l'un des phénomènes dynamiques les plus complexes et les plus divers. Les difficultés sont liées en particulier à la dimension infinie de la dynamique et à la non-linéarité de modèle qui est décrite par les équations de Navier-Stokes. Ces dernières doivent être discrétisées dans les variables d'espace conduisant ainsi à des modèles de très grande taille, souvent plusieurs millions de degrés de liberté. Des modèles linéaires peuvent être obtenus par linéarisation autour d'un point d'équilibre (écoulement de base) ou par une approche de type moyennage temporel (champs moyens) [44]. Pour ce dernier cas, la modélisation par champs moyens permet de prendre en compte les caractéristiques dynamiques principales d'un écoulement par essence non-linéaire via une représentation linéaire. Ces modèles linéaires sont alors réduits pour obtenir, *in fine*, des modèles accessibles aux méthodes de commande, c'est à dire de dimension inférieure à une centaine d'états. Toute commande calculée sur des modèles simplifiés doit naturellement être validée sur simulateur non-linéaire pour évaluer la stabilité, la performance ou la présence éventuelle de cycles limites/attracteurs qui sont des oscillations non-observables à partir des modèles linéaires. Il faut également signaler des temps de simulation très longs en raison de la dimension des modèles de validation.

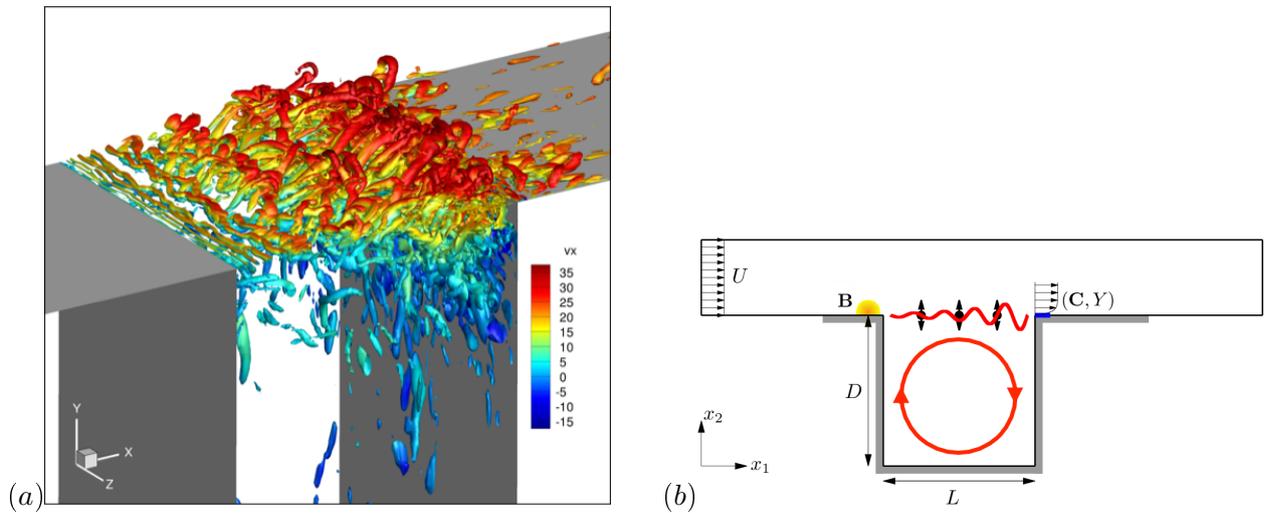


FIGURE 2.12 – Représentation d’un écoulement 2D avec la couche de cisaillement instationnaire au sommet de la cavité (instabilité de Kelvin-Helmoltz) et la recirculation du flux dans la cavité (a) et (b). Dans (b) B représente la position de l’actionneur et C la position du capteur. Le flux se déplace de la gauche vers la droite sans viscosité jusqu’à la partie grise qui commence juste avant l’actionneur et qui finit après le capteur.

On s’intéressera ici au cas de la cavité ouverte qui est représentative de systèmes réels que l’on peut retrouver dans l’aéronautique. Une cavité ouverte peut représenter l’écoulement autour des trappes ouvertes de trains d’atterrissage ou d’une soute d’un avion militaire. L’objectif est de pouvoir modéliser et contrôler afin de réduire significativement tous les phénomènes qui conduisent à augmenter la traînée et donc la consommation d’un appareil en vol. Un système efficace est un objectif de 1^{er} plan dans le contexte de l’aéronautique civile et militaire.

2.4.2 La cavité ouverte : modèle résonateur

[19] C. Leclercq, F. Demourant, C. Poussot-Vassal, and D. Sipp. Linear iterative method for closedloop control of quasiperiodic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 868 :26-25, 2019

L’objectif ici est d’obtenir un modèle linéaire satisfaisant, c’est à dire capable de présenter des caractéristiques proches de l’écoulement réel, et de mettre en œuvre une méthodologie de commande sur ces modèles afin d’obtenir des résultats satisfaisants sur le vrai système. Dans le cas précis des écoulements, on doit faire face à 2 problèmes distincts. Ces écoulements, pour ce qui nous concerne, sont gouvernés par les équations de Navier–Stokes. Ces équations sont des équation aux dérivés partielles (EDP) et non-linéaires au travers du terme appelé convectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ où ∇ est l’opérateur différentiel *nabla* et \mathbf{u} le champs de vitesse. Dans le cas général il n’existe pas de solutions analytiques. Ceci signifie concrètement qu’il est nécessaire de discrétiser dans le temps mais aussi dans l’espace pour modéliser/simuler le système. Or la dimension du modèle discrétisé dépend directe-

ment du maillage dans le domaine spatial. De plus la non-linéarité de l'écoulement conduit à des comportements du type équilibres dynamiques (cycles limites/attracteurs) qui ne sont pas reproductibles par un modèle linéaire. Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment obtenir un modèle linéaire de taille réduite et dans quelle mesure il est représentatif du comportement non-linéaire de l'écoulement. Cette approche est mise en œuvre sur une cavité ouverte qui est caractéristique des systèmes dits résonateurs. Ces systèmes résonateurs ont la particularité de présenter des modes de résonance instables, ce qui se traduit par une divergence sur le transitoire. Puis, progressivement, l'influence de la non-linéarité grandit et restabilise le système sous la forme d'un équilibre dynamique. C'est ce type de système que l'on va présenter à la fois pour la modélisation dans ce paragraphe et la commande dans la partie commande.

Dans [81, 31, 24] les systèmes à identifier ont plusieurs centaines d'état. Mais dans tous les cas les modèles obtenus par les sous-espaces fréquentiels permettent, avec un jeu de données relativement limité, d'obtenir des modèles *LTI* d'ordre limité (quelques dizaines d'états). Ces modèles *LTI* d'ordre réduit servent à la fois à la synthèse de compensateurs et à l'analyse en boucle fermée. Dans [65] et donc dans le paragraphe qui suit, la mise en œuvre des sous-espaces a été réalisée sur des réponses fréquentielles issues de modèles contenant 700000 états. Les modèles issus des champs moyens ont été identifiés afin d'obtenir des modèles réduits linéaires contenant de 15 à 30 états. Ces modèles ont permis de "capturer" les principales caractéristiques de l'écoulement tout en servant pour la commande.

2.4.2.1 Principes des modèles moyens

Considérons les équations de Navier-Stokes, dans le cas incompressible, décrivant le comportement du champ de pression p et de vitesse \mathbf{u} d'un écoulement :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.32)$$

Le nombre de Reynolds $Re := UL/\nu$ est basé sur la vitesse caractéristique U et la dimension caractéristique L du problème ainsi que de la viscosité cinématique ν du fluide. Les équations (2.32) sont bien sûr complétées par les conditions aux limites et la condition initiale. Par la suite, on décompose le champ inconnu $\mathbf{q} := (\mathbf{u}, p)^T$ en un champ stationnaire de référence $\mathbf{Q} := (\mathbf{U}, P)^T$ satisfaisant les conditions aux limites et en une perturbation $\mathbf{q}' := (\mathbf{u}', p')^T$ représentant la partie dynamique de l'écoulement avec des conditions aux limites nulles telles que $\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \mathbf{q}'$. La partie instationnaire ou dynamique \mathbf{q}' est décrite par l'équation :

$$\mathcal{B} \partial_t \mathbf{q}' = [\mathcal{A}_{\mathbf{Q}} + \Psi_{\mathbf{Q}}] \mathbf{q}' \quad (2.33)$$

où

$$\mathcal{B} \partial_t \mathbf{q}' := \begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}' := \begin{pmatrix} -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u}' - \nabla p' \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\Psi_{\mathbf{Q}} \mathbf{q}' := \begin{pmatrix} -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla P + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{U} - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

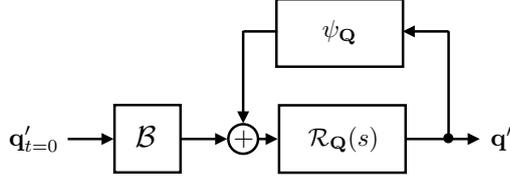


FIGURE 2.13 – Les équations de Navier-Stokes vues comme un système de Lur'e.

Les opérateurs différentiels $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ et $\Psi_{\mathbf{Q}}$ sont des opérateurs d'évolutions qui prennent en compte respectivement la partie linéaire et non-linéaire de l'écoulement. $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ est un opérateur LTI et $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est une non-linéarité statique. Il apparaît clairement de ces écritures que l'opérateur $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ dépend du champs stationnaire de référence \mathbf{U} . Cette décomposition du champs de vitesse et de pression en partie dynamique et statique est totalement arbitraire dans le sens où il n'existe pas une décomposition unique mais une infinité. La question du choix de cette décomposition est fondamentale pour obtenir un opérateur linéaire $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ capable de capturer la dynamique non-linéaire de l'écoulement. Ce choix est discuté dans le prochain paragraphe.

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.33) on obtient la relation :

$$\mathbf{q}'(s) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(s)[\Psi_{\mathbf{Q}}\mathbf{q}'(s) + \mathcal{B}\mathbf{q}'_{t=0}], \quad (2.37)$$

où s est la variable de Laplace, $\mathbf{q}'_{t=0}$ est la condition initiale sur la perturbation et

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(s) := (s\mathcal{B} - \mathcal{A}_{\mathbf{Q}})^{-1} \quad (2.38)$$

appelé l'opérateur *resolvent*, ou *resolvant* en français, autour du champ de référence \mathbf{Q} . L'interconnexion d'un opérateur LTI $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$ avec une non-linéarité statique $\Psi_{\mathbf{Q}}$, illustrée par la figure 2.13, est appelée système de Lur'e [62, 88, 71].

L'opérateur résolvant, ou encore appelée résolvante de $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$, est défini pour n'importe quel s qui n'est pas valeur propre de l'opérateur différentiel, *i.e.* solution de $(s\mathcal{B} - \mathcal{A}_{\mathbf{Q}})\mathbf{q}' = 0$ avec \mathbf{q}' non-nul. Il est intéressant de remarquer que la sortie \mathbf{q}' reste borné malgré le fait que $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ ait des valeurs propres instables. En effet la présence de la non-linéarité permet de contraindre l'écoulement et donc les signaux dans un domaine fini. Plus précisément, la non-linéarité a un effet stabilisant de l'écoulement au sens de la norme l_{∞} des signaux. Mais globalement le système non-linéaire n'est pas stable au sens BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) puisque l'écoulement, dans ce cas là, s'établira sur un équilibre dynamique.

2.4.2.2 Fonctions de transfert en boucle ouverte et boucle fermée de l'écoulement

Supposons que l'on introduise un actionneur, et en regroupant tous les termes indépendants de n , où n est l'entrée du système, dans l'entrée perturbation \mathbf{w} . Nous obtenons la relation entrées/sorties suivante en considérant la présence d'un actionneur représenté par la matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{q}' = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}\mathbf{B}n + \mathbf{w} \quad (2.39)$$

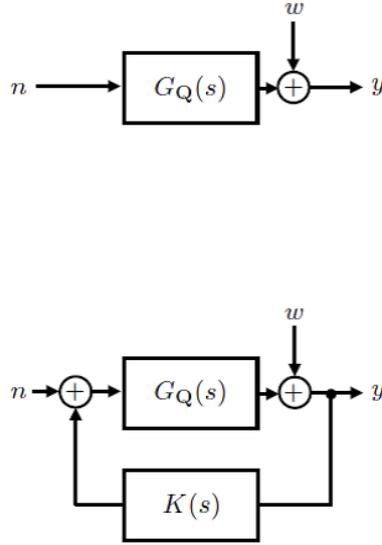


FIGURE 2.14 – Représentation avec une fonction de transfert $G_{\mathbf{Q}}$ de n à y et une entrée perturbation w en boucle ouverte (haut) et boucle fermée (bas).

Comme nous l’avons indiqué, l’interconnexion de la partie linéaire et de la partie non-linéaire dépend fortement du choix qui est fait du champ statique de référence \mathbf{Q} . Dans [71], il est proposé de prendre $\bar{\mathbf{q}}$ comme choix pour le champs de référence \mathbf{Q} dans (2.37). C’est ce qui a été choisi pour notre cas et donc $\mathbf{Q} := \bar{\mathbf{q}}$. Par ce choix il est montré que l’opérateur résolvant, qui est *LTI* par construction, est capable de “capturer” les dynamiques principales du système non-linéaire. La validation de ce type de modèle se fait en 2 étapes. La première consiste à comparer les modes de l’opérateur résolvant par rapport aux modes associés à l’écoulement de la cavité. Il est montré dans [5] que ces modes caractéristiques de l’écoulement, dits modes de Koopman, peuvent être estimés expérimentalement par une DFT (Discrete Fourier Transform) grâce à une mesure réalisée sur l’écoulement. Dans [65] on constate bien une très bonne correspondance entre les modes issus de la DFT et les modes calculés sur l’opérateur résolvant d’ordre plein, ici 700000. Puisque l’opérateur résolvant d’ordre plein est validé, il reste donc à construire un modèle réduit de cet opérateur à partir de sa réponse fréquentielle. Rajoutons maintenant un capteur pour mesurer un signal et non plus l’état, et nous obtenons finalement :

$$y = G_{\bar{\mathbf{q}}}n + w, \quad (2.40)$$

où

$$G_{\bar{\mathbf{q}}}(s) := \langle \mathbf{C}, \mathcal{R}_{\bar{\mathbf{q}}}(s)\mathbf{B} \rangle \quad (2.41)$$

est la fonction de transfert de n vers y et w représente l’ensemble des perturbations ramenées sur la mesure de l’écoulement [65] (figure 2.14).

De même, il est possible de construire la fonction de transfert en boucle fermée pour un champ moyen avec un compensateur K :

$$G_{\bar{q}}^K = \frac{G_{\bar{q}}}{1 - G_{\bar{q}}K}, \quad (2.42)$$

Nous verrons dans la section 3.4.1 que la stratégie de commande est basée sur approche itérative où les compensateurs sont implémentés successivement sous forme cascade. La raison essentielle est la validité des modèles basés sur les champs moyens qui est limitée au cas où les signaux sont stationnaires *i.e.* dont la valeur moyenne du champs de vitesse et de pression calculée par une intégration temporelle tend vers une constante qui est, a priori, la moyenne théorique obtenue par l'opérateur espérance.

Sur la notation de G il apparaît un indice et un exposant. L'indice correspond à un point de fonctionnement particulier de l'écoulement et l'exposant au numéro du compensateur inséré dans la boucle fermée. Nous illustrerons ce point là dans la partie commande, ici cela n'a pas d'importance particulière pour illustrer l'identification des modèles en boucle ouverte ou boucle fermée.

2.4.2.3 Résultats

Nous avons obtenu par la méthode des sous-espaces fréquentiels [67, 70], à partir de la réponse fréquentielle de G_0^0 , la représentation d'état $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}})$ d'ordre réduit qui servira de modèle de synthèse. L'ordre de $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}=\bar{q}}$ est de 700000. En théorie, puisque l'approche des sous-espaces fréquentiels est dite *correcte* [70], il est possible de retrouver exactement $\mathcal{R}_{\bar{q}}, \mathbf{C}, \mathbf{B}$ puisque la représentation par champs moyen est *LTI* et d'ordre fini. Mais ce n'est pas l'objectif ici puisque nous recherchons une représentation d'état \tilde{G}_0^0 approximant G_0^0 avec un ordre $O(10)$ pour modéliser les caractéristiques principales du système que l'on cherche à manipuler.

Le domaine fréquentiel considéré est $5 < \omega < 20$. Ce domaine contient les principaux pics de résonance mais pas ceux à $\omega < 5$ que nous avons choisi d'ignorer. La principale raison est la mécanique non-linéaire qui lie les différents pics entre eux. En effet en réduisant les pics entre $5 < \omega < 20$ on atténue aussi les pics à $\omega < 5$. Pour être plus précis le comportement de l'écoulement non-linéaire est basé sur 2 fréquences fondamentales (équilibre dynamique torique), toutes les autres fréquences sont des combinaisons de celles-ci. Le lecteur peut se référer à [65] pour plus de détails.

Le nombre de points dans le domaine fréquentiel est 263 uniformément répartis entre $[5, 25]$ rad/s. La période d'échantillonnage $T_s = 0.01s$ a été choisie de façon à avoir une réponse fréquentielle continue et discrète quasi-identique dans le domaine $[0, 50]$ rad/s. Comme indiqué précédemment le modèle identifié est discret et c'est par la transformée de Tustin que nous obtenons un modèle continu.

Un modèle réduit $\tilde{G}_0^0(s)$ d'ordre 16 est obtenu. Les résultats sont donnés par la figure 2.15. Nous remarquons la décroissance monotone de la phase avec quelques sauts qui correspondent aux modes instables de la cavité. De façon générale on constate une excellente correspondance entre les données fréquentielles générées par G_0^0 et la réponse en fréquence de $\tilde{G}_0^0(s)$. L'analyse modale dans le panel (c) confirme ce constat. La raison est la caractéristique intrinsèque de l'opérateur $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}}$ qui est par construction LTI. De plus, dans le cas du résonateur, un nombre limité de pôles intervient dans la réponse en fréquence. En bref, peu de modes observables interviennent dans la dynamique de l'écoulement. Finalement on obtient un modèle réduit de faible taille tout en ayant une réponse fréquentielle très proche du modèle complet d'ordre 700000.

Le même type d'approche est mise en œuvre sur le système en boucle fermée dans le cadre d'une

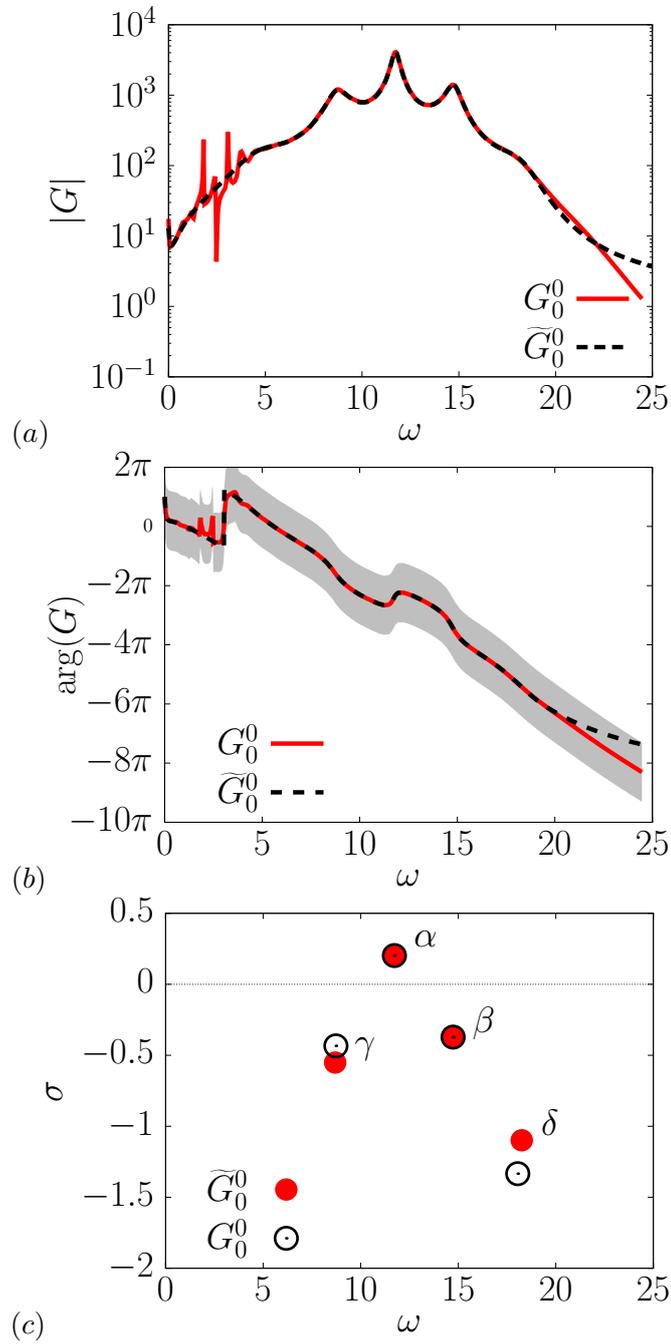


FIGURE 2.15 – Comparaison entre le modèle G_0^0 (ligne rouge) basé sur la résolvante, et le modèle réduit \tilde{G}_0^0 (ligne noire) obtenu par les sous-espaces : réponse fréquentielle en gain (a) et phase (b) (la partie grisée correspond à $|\arg(G) - \arg(G_0^0)| \leq \pi$); (c) représente les pôles du modèle basé sur la résolvante et ceux du modèle identifié.

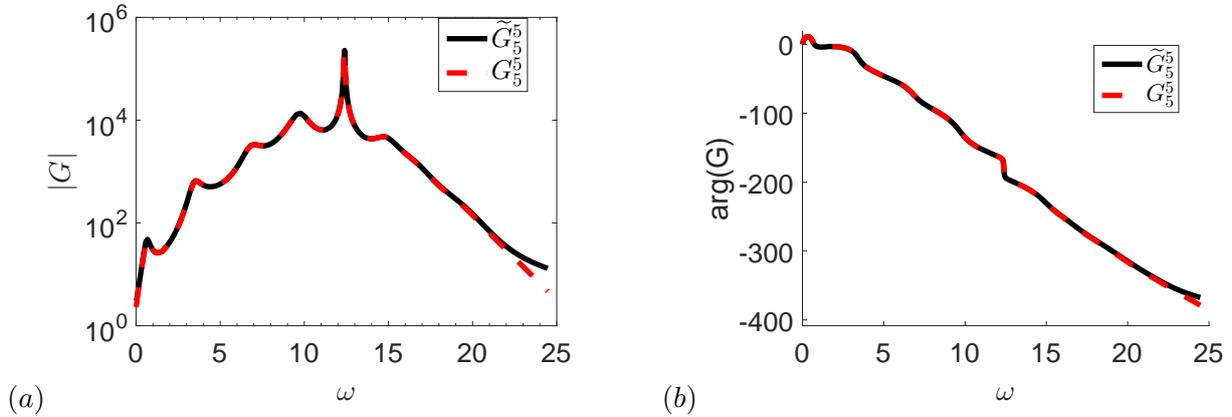


FIGURE 2.16 – Comparaison entre le modèle G_5^5 et le modèle réduit \tilde{G}_5^5 par les sous-espaces : réponse fréquentielle en gain (a) et phase (b)

stratégie de commande itérative. Ici on cherche à identifier le modèle G_5^5 qui correspond au cas de l'écoulement non forcé (en boucle ouverte), interconnecté au contrôleur $K_5 = K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4 + K'_5$, où chaque contrôleur intermédiaire représenté par ' est d'ordre 10. Nous verrons dans la partie commande que la 5^{eme} itération est l'itération finale qui permet de converger vers le point fixe stabilisé. Comme précédemment nous constatons que la réponse fréquentielle est parfaitement reproduite par le modèle réduit $\tilde{G}_5^5(s)$ d'ordre 28. Il faut garder à l'esprit que ce modèle n'est absolument pas égal à $\frac{\tilde{G}_0^0(s)}{1 - \tilde{G}_0^0(s)K_5(s)}$. En effet le point de fonctionnement de l'écoulement à chaque itération est modifié par l'insertion d'un nouveau compensateur. Comme nous avons affaire à un système profondément non-linéaire, le nouvel écoulement ne peut pas s'exprimer simplement par une réécriture de la fonction de transfert. Il est nécessaire de repartir de zéro au niveau de l'identification pour obtenir un modèle moyen en boucle fermée qui capture les dynamiques principales de l'écoulement non-linéaire modifié.

2.4.3 Application à l'écoulement d'un canal ouvert

[15] P. Kergus, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Identification of parametric models in the frequency domain through the subspace framework under LMI constraints. In 2018 European Control Conference (ECC), pages 2873-2878, June 2018.

Nous allons présenter maintenant une problématique issue d'EDF (Electricité De France) qui concerne la production d'électricité issue d'une centrale au fil de l'eau. Plus précisément, on va s'intéresser à la modélisation, ici $p - LTI$, du comportement d'un canal ouvert. La particularité de ce modèle est d'être non-linéaire et de dépendre du point de fonctionnement qui est ici la géométrie du canal. Le système a 2 entrées, l'écoulement entrant et sortant q_e et q_s , et une sortie, la hauteur du niveau h . La fonction de transfert non rationnelle est donnée par :

$$\mathbf{G}(x, s) = \mathbf{G}_e(x, s)q_e(s) + \mathbf{G}_s(x, s)q_s(s), \quad (2.43)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e(x, s) &= \frac{\lambda_1(s)e^{\lambda_2(s)L + \lambda_1(s)x} - \lambda_2(s)e^{\lambda_1(s)L + \lambda_2(s)x}}{B_0s(e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L})}, \\ \mathbf{G}_s(x, s) &= \frac{\lambda_1(s)e^{\lambda_1(s)x} - \lambda_2(s)e^{\lambda_2(s)x}}{B_0s(e^{\lambda_1(s)L} - e^{\lambda_2(s)L})}, \end{aligned}$$

où x est la position du point de mesure et L et la longueur du canal. B_0 , $\lambda_1(s)$ et $\lambda_2(s)$ sont des grandeurs qui dépendent de la configuration du canal et de l'écoulement nominal. Le comportement de l'écoulement est extrêmement lent, la dynamique comprend un retard et un pôle en limite de stabilité pour la partie basse fréquence et dynamique principale. Plus généralement, le système est représenté par une infinité de modes (dénombrables) puisque la fonction de transfert est irrationnelle. Du fait de cette complexité, l'obtention d'un modèle LTI d'ordre faible permettrait de simuler le comportement de l'écoulement, au moins pour ses dynamiques principales, et pourrait être utilisé comme modèle de synthèse. Dans ce paragraphe, nous proposons d'identifier un modèle paramétrique tel que défini dans la section 2.2.3 pour différentes positions x du capteur, permettant de simuler le système pour différents points de mesure, ou synthétiser un compensateur robuste pour les différentes valeurs de x .

Dans cette application les retards τ_e et τ_s pour les flux entrants et sortants q_e and q_s respectivement sont connus. Ils dépendent de la position de la mesure x et de la configuration du canal à travers les coefficients c_0 et V_0 :

$$\tau_e = \frac{x}{c_0 + V_0}, \quad \tau_s = \frac{L - x}{c_0 - V_0}. \quad (2.44)$$

Nous choisissons d'identifier le modèle sans retard $\tilde{\mathbf{G}}$ du système $\hat{\mathbf{G}} = [\hat{\mathbf{G}}_e \hat{\mathbf{G}}_s]$ définis par les équations suivantes :

$$\hat{\mathbf{G}}(x, s) = \hat{\mathbf{G}}_e(x, s) + \hat{\mathbf{G}}_s(x, s) = [\mathbf{G}_e \ \mathbf{G}_s] \begin{pmatrix} e^{i\tau_e(x)s} & 0 \\ 0 & e^{i\tau_s(x)s} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

La paramétrisation choisie est une paramétrisation affine. Elle a l'avantage d'être la plus simple des paramétrisations polynomiales et de garantir la position des pôles sur le continuum de modèles si des contraintes modales sont rajoutées. Bien sûr dans le cas où celle-ci s'avérerait insuffisante, il est toujours possible de complexifier la formule d'interpolation. En bref nous choisissons $n_p = 1$ pour la paramétrisation affine du modèle $p - LTI$. Rappelons que n_p correspond à l'ordre du polynome d'interpolation et N_p au nombre de modèles LTI utilisés pour l'interpolation.

2.4.3.1 Choix de l'ordre des modèles identifiés

Les échantillons $\{\omega_i^{(j)}, \Phi_i^{(j)}\}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N_p$ de la réponse fréquentielle de $\hat{\mathbf{G}}$ sont calculés directement à partir de la représentation irrationnelle (2.43) and (2.44). Dans ce contexte les données ne sont pas bruitées. Considérons dans un premier temps deux points de mesure différents $x^{(j)} \in \{100, 15400\} m$ ($N_p = 2$), $\forall j = 1 \dots N_p, \forall i = 1 \dots N$:

$$\Phi_i^{(j)} = \hat{\mathbf{G}}(x_j, \omega_i^{(j)}). \quad (2.46)$$

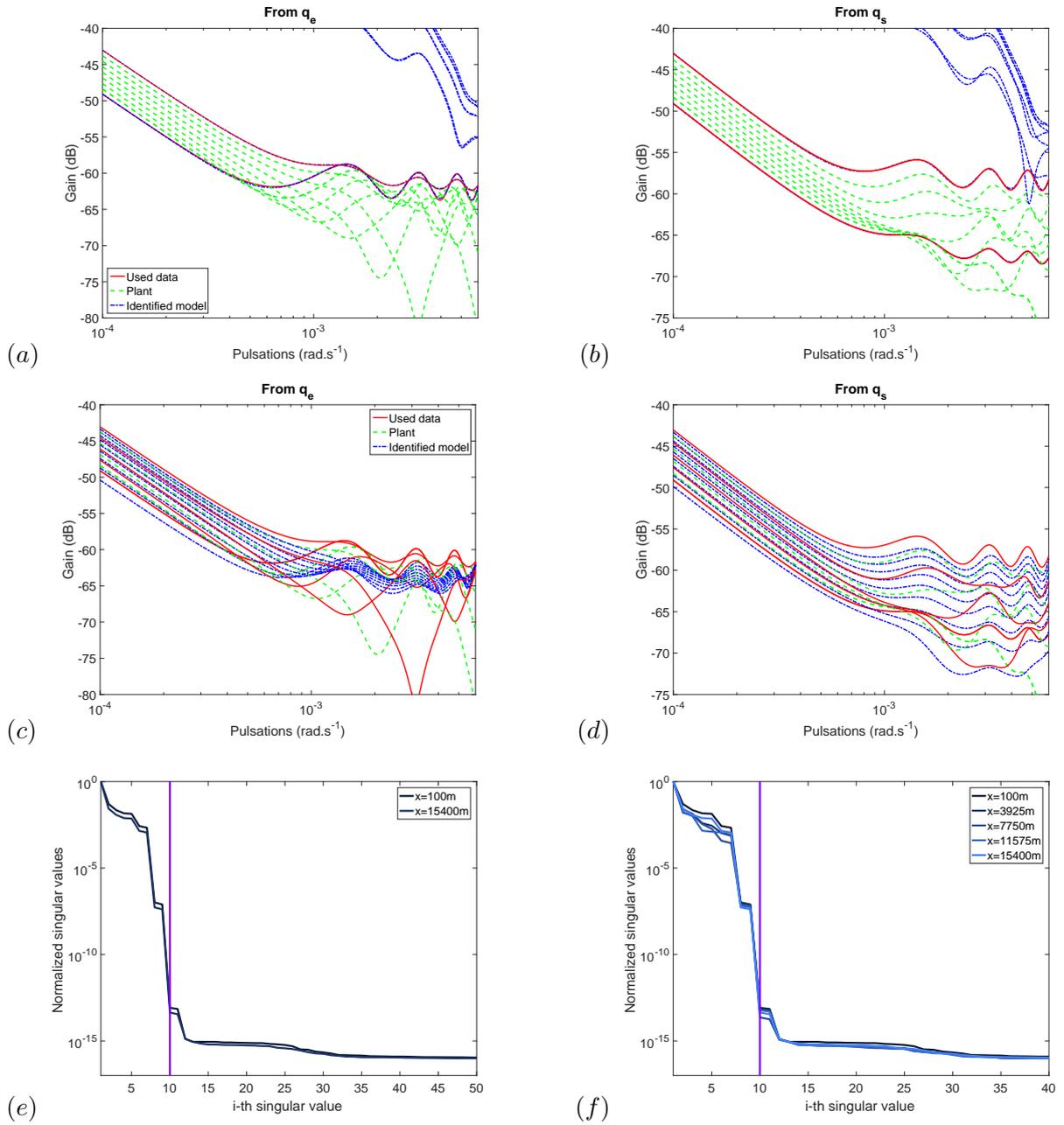


FIGURE 2.17 – Identification des modèles sans retard $\hat{\mathbf{G}}(x)$ pour $N_p = 2$ ((a) et (b)) et pour $N_p = 5$ ((c) et (d)). Le modèle d'ordre 10 $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ est représenté par les lignes bleues pour différentes valeurs de x . Les lignes verte en pointillés sont les transferts du système sans retard $\tilde{\mathbf{G}}$ estimés à partir de la fonction de transfert irrationnelle pour différents points $x \in \{100, 15400\} m$. Les courbes rouges représentent les réponses fréquentielles utilisées pour l'identification paramétrique. La décroissance des valeurs singulières normalisées de la matrice d'observabilité étendue utilisée par l'algorithme d'identification pour les points $x^{(j)}$ est donnée par (e) pour $N_p = 2$ et (f) pour $N_p = 5$ (La ligne verticale indique l'ordre choisi 10).

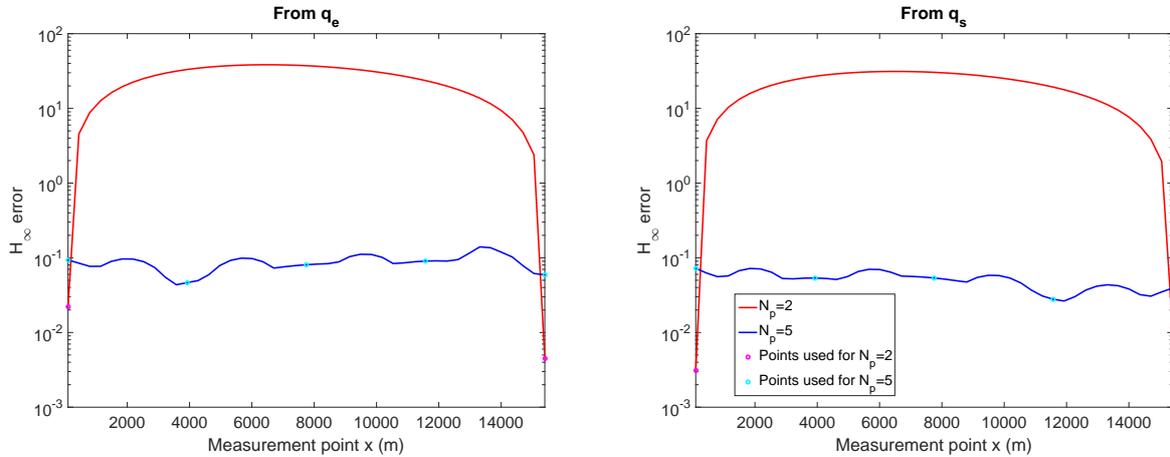


FIGURE 2.18 – Norme \mathcal{H}_∞ de l’erreur pour différents points de mesure entre le système $\tilde{\mathbf{G}}$ et les modèles identifiés en utilisant $N_p = 2$ ou $N_p = 5$ (respectivement en ligne rouge et bleue). Les points indiquent les points de mesure pour lesquels les données ont été utilisées par l’identification pour chaque valeur de N_p .

Le maillage en fréquence est identique : 500 pulsations uniformément réparties entre $10^{-4}rad.s^{-1}$ et $6.10^{-3}rad.s^{-1}$. Dans un premier temps, il est primordial de définir l’ordre des modèles identifiés. Pour cela, nous utilisons la SVD sur la matrice d’observabilité étendue. Dans le contexte paramétré, il est impératif que l’ordre de tous les modèles qui servent à la construction du modèle $p-LTI$ soit identique. Dans le cas contraire, cela n’aurait pas de sens de voir apparaître et disparaître une dynamique en cherchant à l’interpoler. Donc il faut s’assurer qu’une taille unique pour la matrice d’état \mathbf{A} convienne. C’est ce qui est représenté dans la figure 2.17(e). Elle montre clairement une chute à la 10^{eme} valeur singulière pour les deux modèles. Cet ordre est suffisant pour prendre en compte les dynamiques principales des deux systèmes.

Finalement, les résultats obtenus à l’issue de l’identification sont donnés par les figures 2.17 (a) et (b). Comme attendu les résultats sont quasi parfaits pour les 2 points de mesure. Malheureusement, comme cela apparaît sur la figure 2.18, les modèles interpolés entre ces deux points de mesure présentent des dynamiques qui ne correspondent pas du tout aux dynamiques du système. Dans la section suivante, on va montrer qu’il est possible de résoudre ce problème par un choix judicieux des points de mesure. Par contre on constate bien que l’interpolation affine et donc d’ordre 1 permet de passer exactement par les points utilisés par l’identification.

2.4.3.2 Influence du nombre de points de mesure

Finalement le résultat obtenu est assez conforme à ce que l’on peut obtenir d’un problème d’optimisation : l’algorithme se comporte bien aux contraintes choisies, mais en dehors de ces contraintes, naturellement, on peut obtenir des résultat décevants. De ce constat assez classique, on fait le choix d’augmenter le nombre de contraintes en augmentant le nombre de points de mesure. Nous considérons maintenant cinq points de mesure $x^{(j)} \in \{100, 3925, 7750, 11575, 15400\} m$ ($N_p = 5$). Les autres paramètres ne changent pas. Comme précédemment, il est nécessaire d’obtenir le même

ordre pour les cinq modèles. C'est ce que nous avons représenté sur la figure 2.17(f). Il apparaît clairement que l'ordre 10 reste tout à fait satisfaisant.

Nous obtenons dans le cas à cinq modèles ($N_p = 5$) les résultats des figures 2.17(c),(d) et 2.18. On constate clairement que l'on a amélioré très significativement les résultats sur l'ensemble des valeurs de la position du capteur. En utilisant une paramétrisation affine pour passer par 5 modèles, le problème ne peut pas être résolu de façon exacte pour tous les points et qu'il est surcontraint par rapport aux degrés de liberté (figure 2.18). Il aurait fallu avoir $n_p = 4$ *i.e.* un polynôme d'ordre 4 pour obtenir une interpolation exacte. Ici, cela n'a pas été nécessaire.

2.5 Conclusion

Nous avons pu montrer au travers de ces applications la polyvalence de l'approche, puisqu'on peut la mettre en œuvre sur une large classe de systèmes, pourvu qu'ils aient un comportement relativement linéaire, afin que la représentation d'état ait du sens, et que l'on ait à disposition des données fréquentielles. Comme nous l'avons montré ces données peuvent avoir des origines très diverses :

- Des données expérimentales issues d'une soufflerie dans lequel est insérée une aile munie d'une surface de contrôle ;
- Des données simulées obtenues par une intégration numérique des équations de Navier-Stokes. On ne parle plus ici spécifiquement de modèles comme nous avons l'habitude d'évoquer, *i.e.* des modèles sous forme de représentation d'état, mais de données directement issues de l'intégration numérique des équations de la physique, donc de dimension infinies et non-linéaires ;
- Des données simulées issues d'un modèle non-rationnel, *i.e.* de dimension infini, construit à partir des équations de Saint- Venant qui décrivent le comportement des écoulements d'un cours d'eau.

Malgré cette diversité dans la nature des données et des phénomènes physiques mis en jeu, l'approche par les sous-espace et ses diverses extensions LMI et paramétrées, est tout à fait apte à construire une représentation d'état linéaire pertinente. Par pertinent on sous-entend capable de reproduire le comportement entrées/sorties du système. De plus, les modèles obtenus sont généralement de faible complexité, *i.e.* d'ordre réduit. Il est alors possible, quand cela est nécessaire, de se servir de ces modèles, comme de modèles de synthèse (chapitre II).

Un autre point important, qui a été évoqué dans la description de la méthode, est la simplicité de la mise en œuvre. En effet, dans la version classique que l'on retrouve dans la littérature, il y a finalement peu de paramètres de réglages. Il est nécessaire de choisir le paramètre q de la matrice d'observabilité étendue suffisamment grand pour prendre compte les principales dynamiques du système. C'est le seul paramètre essentiel à ajuster de façon itérative, en fonction du modèle identifié obtenu. Bien sûr il est possible, voire nécessaire, d'ajuster le maillage fréquentiel en plus du paramètre q . Mais cet ajustement se fait de façon assez naturelle en fonction des objectifs de précision que l'on souhaite sur certaines bandes de fréquence.

Le dernier point concerne la représentation fréquentielle qui n'est pas forcément courante dans le domaine de l'identification, puisqu'en général, les algorithmes sont développés, au moins dans un 1^{er} temps, dans le domaine temporel. Il s'avère que je me suis intéressé initialement à l'identification

pour la commande. Or dans le domaine de la commande robuste et de son corollaire, l'analyse en robustesse, la description dans le domaine fréquentiel est largement utilisée. C'est même la représentation de base de toute la théorie du petit gain et de ses diverses extensions comme la μ -analyse. En jouant sur des pondérations ou une densité de maillage spécifique, on peut obtenir un haut niveau de précision du modèle identifié dans certaines bandes de fréquence, précision qui pourra être explicitement prise en compte par la commande (chapitre II) et l'analyse (chapitre III). De plus l'identification de systèmes présentant des modes de résonance se prête particulièrement bien à une description fréquentielle. En bref il est possible avec un faible jeu de données de représenter fidèlement les pics de résonance. L'approche temporelle s'appuie en général sur la réponse impulsionnelle qui peut être relativement difficile et longue à capturer pour des systèmes présentant ces résonances. L'approche fréquentielle apparaît dans ce contexte comme une approche qui compresse les données. Avec un nombre limité de données on obtient la dynamique principale que l'on cherche à identifier. Notons que l'on pourrait objecter que pour avoir une réponse fréquentielle de bonne qualité il est impératif de capturer la réponse impulsionnelle temporelle pour y appliquer une opération du type FFT/DFT, et qu'à ce titre l'approche fréquentielle n'est pas vraiment discriminante. On peut y répondre de deux façons. Tout d'abord l'identification dans le domaine temporel va alors nécessiter des matrices de très grande taille ce qui peut être rédhibitoire. L'application d'une FFT posera moins de problème même sur un signal contenant des milliers d'échantillons. Une fois dans le domaine fréquentiel, une centaine de points peut alors suffire et non pas des milliers. Enfin, il est relativement courant d'obtenir une réponse fréquentielle directement sans passer par le signal temporel. Par exemple, dans le cas des équations aéroélastiques qui décrivent le comportement d'une structure soumise à une excitation aérodynamique (voir chapitre III), on remplace l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ par $j\omega$ et on résout directement l'équation dans le domaine fréquentiel à moindre coût.

Chapitre 3

Synthèse H_∞ multicritère

3.1 Contexte

L'approche H_∞ est particulièrement séduisante car elle s'appuie sur une formulation fréquentielle des spécifications de commande et de robustesse en boucle fermée. Elle est totalement imbriquée dans le formalisme général de la forme $M - \Delta$ qui représente la structure de base de tout problème de commande robuste. Comme nous le verrons par la suite, la μ -analyse et l'approche IQC reprennent cette structuration du problème pour évaluer des critères de stabilité et de performance. Sans rentrer dans les détails de la forme $M - \Delta$ qui est maintenant bien connue de la communauté des automaticiens, rappelons simplement que le problème en stabilité ou performance se traduit de la façon suivante. $M(s)$ représente la partie linéaire et temps invariant de la boucle fermée. Cette partie linéaire est stable par hypothèse, car elle correspond à la boucle fermée linéaire et nominale. Δ représente toutes les variables qui potentiellement peuvent conduire à déstabiliser la boucle fermée et donc $M - \Delta$. Ce bloc Δ peut contenir des non-linéarités statiques, des paramètres incertains LTI, des paramètres LPV etc... Nous verrons dans le prochain paragraphe comment peut se traiter ce type de problème d'analyse. Mais, dans tous les cas, le principe consiste à contraindre le transfert $M(s)$ dans le cas de la commande, où à vérifier que ce transfert satisfait un ou plusieurs critères fréquentiels spécifiques, de façon à garantir des bonnes propriétés à la boucle fermée représentée par l'interconnexion $M - \Delta$. En bref tous les calculs sont faits sur $M(s)$ qui représente la partie "sympathique" et donc calculable de la boucle fermée. En terme de commande cela va se traduire, pour la synthèse H_∞ , par contraindre la norme H_∞ des transferts en boucle fermée représentatifs des spécifications du cahier des charges. La contrainte ou la minimisation de cette norme permet de garantir la stabilité au sens du théorème du petit gain éventuellement pondéré, de satisfaire à des problèmes de réjections de perturbations mesurées ou non mesurées, de procéder à du contrôle en phase/actif des modes de résonance et, dans une certaine mesure, de satisfaire des spécifications de performance. On constate qu'au travers d'une approche monocritère, on peut traiter un cahier des charges multiobjectif. Il s'agit ici de l'approche que l'on peut qualifier d'historique [34]. Plusieurs types de techniques de résolution peuvent être mises en œuvre pour résoudre un problème H_∞ . On s'intéressera dans ce chapitre aux techniques qui résolvent explicitement le problème H_∞ , car il est bien évident que par n'importe quelle technique de synthèse, du type fréquentielle classique, LQG où autres, on pourra chercher à satisfaire une contrainte fréquentielle du type H_∞ . Typiquement, quel

que soit la technique de synthèse on souhaite, par exemple, maintenir le norme H_∞ de la fonction de sensibilité S en deçà de 6 dB afin de satisfaire la marge de module. On traitera donc explicitement des techniques basées sur la norme H_∞ . L'une d'entre elles est l'approche bien connue présentée dans [34] et qui est implémentée sous MATLAB. C'est dans un 1^{er} temps cette approche qui a été utilisée pour résoudre le problème du contrôle d'un avion flexible du type A380. Comme beaucoup de problèmes de commande relativement complets, on a souvent des spécifications de nature différente à savoir H_∞, H_2, l_∞ etc... Dans le cas de l'approche classique, la difficulté est alors de traiter un problème multiobjectif par une technique monocritère du type H_∞ , ce qui peut représenter une difficulté méthodologique certaine.

Pour tenter de corriger ce problème une approche inspirée de [7], développée et implémentée par Gilles Ferreres (ingénieur de recherche sein du département) a été intensivement utilisée pour résoudre le problème relativement complexe du pilotage d'une aile volante, appelée dans la littérature *BWB* ou *Blended Wing Body*. Ce problème a été traité dans le cadre d'un projet européen ACFA2020 (*Active Control for Flexible 2020 Aircraft*). Nous verrons par la suite comment est mis en œuvre ce type d'approche et sur quels principes elle s'appuie. En résumé cette synthèse, dite synthèse convexe, mais préférons lui le nom de synthèse par paramétrisation de Youla, est comme son nom l'indique, basée sur le paramètre de Youla. Ce paramètre a la particularité très intéressante de transformer un problème en boucle fermée, et donc profondément non-linéaire et non-convexe en K qui est le compensateur que l'on cherche à synthétiser, en un problème du type boucle ouverte et donc convexe où l'inconnue est le paramètre de Youla Q . Plus précisément tout transfert de la boucle fermée T s'écrit $T(s) = T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s)$ où T_1, T_2 , et T_3 sont des transferts qui correspondent à la boucle fermée initiale stabilisante. Cette boucle fermée initiale peut tout à fait être la boucle ouverte si celle-ci est stable. En effet, on constate que les pôles de la boucle fermée retouchée par le paramètre de Youla $Q(s)$ correspondent aux pôles de la boucle fermée initiale, plus les pôles de $Q(s)$. D'où la nécessité d'avoir $T_{1,2,3}$ stables.

Une approche qui représente maintenant l'approche de référence sur la synthèse robuste est celle développée par Pierre Apkarian et Dominikus Noll et présentée dans [3] que l'on appelle plus communément la commande H_∞ structurée. A contrario de l'approche précédente, elle est basée sur de l'optimisation non-lisse et peut traiter de problèmes convexes ou pas. Comme son nom l'indique on peut finement structurer le compensateur en imposant son ordre très classiquement, mais plus généralement n'importe quelle structure. Outre cette propriété qui la rend très attractive du point de vue de l'implémentation, elle est naturellement multiobjectif comme l'approche basée sur le paramètre de Youla. On pourra donc combiner des critères H_∞, H_2 , modaux, de passivité, de robustesse etc... De plus elle ne fait pas de distinction entre les variables du compensateur et du système ce qui permet de synthétiser une loi de commande tout en optimisant certains paramètres de conception du système à contrôler si on le souhaite.

Contrairement au chapitre I ou au chapitre III, comme nous le verrons, aucun développement théorique, algorithmique ou numérique n'a été réalisé dans le cadre de mes recherches. Je rappellerai relativement brièvement le principe de chaque approche dans chacune des sections qui traite de l'application. Le but de ce chapitre est de montrer comment ces techniques ont été mises en œuvre pour traiter des problèmes de commande relativement complexes du domaine aéronautique. Le principe est de dégager des méthodologies claires qui puissent être comprises et éventuellement reproduites sur des cas similaires ou totalement différents.

Dans la suite on s'intéressera à 2 applications aéronautiques traitées par des techniques de commande H_∞ . La 1^{ère} est une synthèse H_∞ que l'on peut qualifier d'historique puisque basée sur les techniques de résolution proposées dans [34]. Elle a été combinée avec une identification basée sur les sous-espaces fréquentiels pour tenir compte de l'incertitude entre les données et le modèle de synthèse. Le lecteur pourra trouver les détails dans [25]. On ne présentera ici que la partie commande. Cette application est ancienne puisqu'elle a été réalisée durant ma thèse, elle ne correspond donc pas à une activité de recherche relativement récente. Néanmoins elle est intéressante pour plusieurs raisons. A ma connaissance c'est la 1^{ère} mise en œuvre de la synthèse H_∞ pondérée et multiblocs sur un problème d'avion flexible. Cette mise en œuvre pose les éléments de base à la fois de la synthèse H_∞ et du pilotage d'un avion civil. Ces éléments seront repris tout au long du chapitre pour le pilotage d'un avion du type *BWB*, et plus généralement, pour les mettre en perspective avec la paramétrisation de Youla et l'approche structurée.

La 2^{ème} application concerne le pilotage d'une aile volante long courrier pour le transport de passagers. On reprendra certains éléments présentés dans l'application de l'A380. Cette étude s'est faite dans le cadre d'un projet européen FP7 ACFA2020. Comme indiqué précédemment, une technique du type paramétrisation de Youla a été utilisée.

La 3^{ème} application n'est pas *stricto sensu* une application aéronautique mais une application sur les écoulements fluides autour d'une cavité ouverte, application sur laquelle a été développée une synthèse robuste structurée [3].

3.2 Avion flexible de grande taille du type A380

[13] F. Demourant. Interaction identification-commande robuste : méthodes et applications à l'avion souple. PhD thesis - ENSAE (France), 2002.

[14] F. Demourant and G. Ferreres. A frequency domain identification-control approach for a flexible aircraft. In Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on, volume 1, pages 126-131, vol.1, 2002.

Pour cette application une synthèse H_∞ est développée pour synthétiser un compensateur à 2

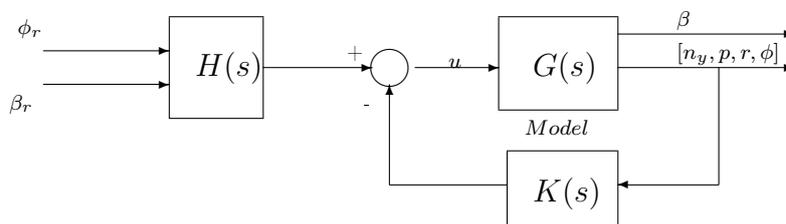


FIGURE 3.1 – Structure de la loi de commande.

degrés de liberté dans le même esprit que [43, 40, 41]. Au travers de cette approche on cherchera à satisfaire des spécifications fréquentielles et temporelles. L'objectif de cette structure à 2 degrés

de liberté est de satisfaire les critères de performance par le feedforward tout en garantissant la robustesse de la boucle fermée grâce à la partie feedback. La structure de la loi de commande est donnée par la figure 3.3. Sur ce schéma on voit apparaître clairement la précommande $H(s)$ et le feedback $K(s)$ ainsi que le système à contrôler, à savoir l'avion flexible, $G(s)$. L'avion a 2 entrées et 5 sorties dont seulement 4 sont retournées dans le compensateur :

- β, n_y, p, r , et ϕ représentent respectivement le dérapage latéral, l'accélération latérale, la vitesse de roulis, la vitesse de lacet et l'angle de gîte. β n'est en général pas retourné dans le compensateur car souvent les mesures du dérapage que ce soit dans le plan horizontal comme ici ou dans le plan vertical comme l'angle d'incidence α sont relativement mal mesurées, i.e. mesurées avec une certaine dose d'erreur, ce qui rend la mesure impropre à son utilisation dans le compensateur ;
- δ_r et δ_p représentent respectivement la gouverne de direction et les ailerons. On parle d'ailerons pour l'avion alors que δ_p est un scalaire car dans le modèle cette entrée est dupliquée et répartie de façon anti-symétrique pour créer le roulis de l'appareil. Rappelons simplement que la gouverne de direction correspond à la surface de contrôle verticale positionnée en queue de l'appareil et attachée à l'empennage dit vertical. Les ailerons sont les surfaces de contrôle positionnées à l'extrémité de la voilure et sur le bord de fuite. C'est leur braquage anti-symétrique qui va créer le moment de roulis et donc le roulis.

Le système $G(s)$ est lui-même décomposé en 3 parties : $F(s)$ la partie flexible ou souple, $A(s)$ les actionneurs et $R(s)$ la partie rigide. $G(s)$ s'exprime comme $G(s) = F(s) + R(s)A(s)$.

- $F(s)$ correspond à la partie aéroélastique qui contient l'ensemble des modes structuraux excités par l'aérodynamique. Ce modèle est basé sur les équations aéroélastiques du chapitre III. Ce sont ces modes flexibles qui sont contrôlés par la loi de commande pour améliorer le confort. C'est cette partie là qui a été identifiée par la technique des sous-espaces dans [25] ;
- $R(s)$ correspond à la partie dite rigide de l'avion. Ce terme est en partie inexact car il peut tout à fait contenir des modes mal amortis comme l'oscillation d'incidence ou la phugoïde. Une formulation plus appropriée est de dire que $R(s)$ correspond au modèle des qualités de vol. En effet c'est ce modèle qui décrit le comportement de l'avion issu des équations de la dynamique du vol. Par rigide on sous-entend qu'il n'y a pas de partie souple ou flexible issue des équations aéroélastiques. Mais pour autant il peut contenir des modes avec de très faibles amortissements.
- $A(s)$ correspond à la dynamique des actionneurs de la partie dite rigide.

Comme indiqué, $R(s)$ est relativement bien connu et décrit par les équations différentielles ordinaires de la mécanique du vol. La connaissance de la dynamique des actionneurs ne pose pas non plus de problème. Ce que l'on cherche à identifier ou recalculer c'est la partie aéroélastique dite souple appelée $F(s)$. Le modèle identifié de $F(s)$ est appelé $\tilde{F}(s)$.

La synthèse H_∞ basée sur [34] consiste à déterminer un compensateur $K(s)$ tel que :

$$K = \underset{\substack{\dim(\mathbf{K}) = n_k \\ \mathbf{K} \in \mathcal{H}_\infty^{4 \times 2}}}{\text{argmin}} \|W_o \mathbf{T}_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}}(\mathbf{G}, K) W_i\|_\infty \quad (3.1)$$

où W_o représente l'ensemble des pondérations en sortie, W_i l'ensemble des pondérations en entrée et $T_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}}$ une matrice de transferts qui correspond à l'ensemble des boucles fermées traitées par le

problème de synthèse entre le vecteur d'entrée w et le vecteur de sortie z . Il est important de noter plusieurs points. L'ordre n_k est imposé par l'ordre de $G(s)$ augmenté de l'ordre des pondérations $W_o(s)$ et $W_i(s)$. De plus, en général, et obligatoirement dans le cas des lois de pilotage d'un avion, $K(s)$ doit être stable, mais dans l'approche historique on n'a aucune garantie de l'avoir. Il est donc fondamental de le vérifier a posteriori. Enfin on cherche à minimiser la norme H_∞ d'un gros transfert MIMO et donc à déterminer un γ minimum tel que $\|W_o \mathbf{T}_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}} W_i\|_\infty \leq \gamma$, ce qui implique que tous les sous-transferts SISO de ce transfert MIMO satisfont la contrainte H_∞ en γ . Ceci étant, l'inverse n'est pas vraie, ce n'est pas parce que tous les transferts SISO satisfont la norme H_∞ représentée par γ que le transfert MIMO correspondant le satisfait. On a donc un certain conservatisme dans la construction du problème H_∞ .

Rappelons pour finir la signification physique des pondérations $W_o(s)$ et $W_i(s)$. Elles sont choisies propres, stables et inversement stables ce qui permet de construire la contrainte $(W_o(j\omega)W_i(j\omega))^{-1}$. Finalement le choix de ces pondérations se fait par le choix de la contrainte appelée aussi gabarit fréquentiel $(W_o(j\omega)W_i(j\omega))^{-1}$. Lorsqu'une solution est obtenue par minimisation du γ , le transfert en boucle fermée $T_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}}$ satisfait la contrainte fréquentielle $\|T_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}}\|_\infty < \gamma \|(W_o W_i)^{-1}\|_\infty$.

3.2.1 Spécifications

Nous allons présenter brièvement l'ensemble des spécifications du problème de commande. Rappelons que le temps de montée est le temps mis par la sortie pour atteindre 90% de la valeur désirée pour une entrée échelon. Nous avons donc les spécifications suivantes :

1. Le temps de montée de la sortie β doit être inférieur à 6s avec une erreur statique faible pour $\epsilon_\beta = \beta - \beta_r$;
2. Le temps de montée de la sortie ϕ doit être inférieur à 6s avec une erreur statique faible pour $\epsilon_\phi = \phi - \phi_r + \beta_r$.
3. La sortie ϕ doit être à minimum de phase ;
4. L'effort de commande doit être limité et compatible avec les contraintes sur les braquages des gouvernes ;
5. La dérivée du signal de commande doit être limité ;
6. La contribution des modes flexibles de $F(s)$ sur n_y doit être atténuée par un contrôle actif sur les modes ;
7. La stabilité robuste doit être garantie par rapport à l'erreur d'identification.

Le schéma de synthèse élaboré pour tenir compte de ces spécifications est donné par la figure 3.2

- La spécification 1 correspond à une spécification de performance sur β traitée par la pondération $W_2(s)$;
- Les spécifications 2 et 3 correspondent à une spécification de performance sur ϕ traitée par la pondération $W_1(s)$;
- Les spécifications 4 et 5 correspondent à des spécification sur l'effort de commande u et sont traitées par les pondérations W_{3a} et W_{3b} ;
- La spécification 6 correspond à une approche du type contrôle actif ou encore appelée contrôle en phase des modes flexibles de $\hat{F}(s)$. Cette politique active est réalisée par une contrainte H_∞ sur le transfert en boucle fermée représenté par $S_y(s)G(s)$ où $S_y(s)$ est la fonction de

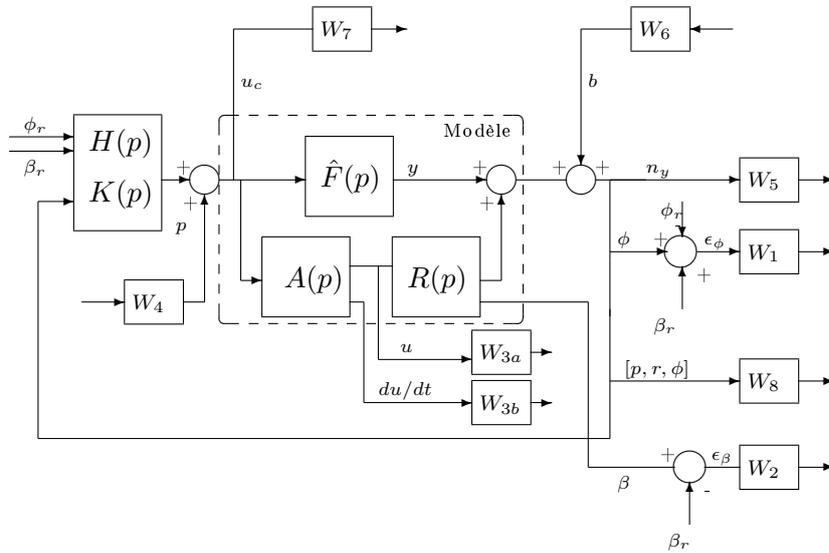


FIGURE 3.2 – Schéma de synthèse H_∞ .

sensibilité en sortie $S_y = (I + GK)^{-1}$. Notons simplement qu'en l'absence de compensateur $S_y = 1$, on retrouve donc en boucle ouverte les modes flexibles du modèle G . C'est donc par S_y que l'on cherche à atténuer les pics de $S_y G$. Du point de vue modal on déplace les modes flexibles dans le demi-plan gauche ce qui revient à augmenter leur amortissement. Les pondérations qui permettent de contrôler $S_y G$ sont $W_4(s)$ et $W_5(s)$

- La spécification 7 doit garantir que le compensateur synthétisé sur le modèle identifié $\hat{F}(s)$ sera stabilisant pour le modèle complet $F(s)$. L'incertitude est introduite sous une forme additive telle que $\Delta(j\omega) = F(j\omega) - \hat{F}(j\omega)$. Pour assurer la stabilité on cherchera à contraindre la norme H_∞ du transfert en boucle fermée vu par Δ à savoir $K(s)S_y(s)$.

Au delà de ces spécifications liées directement au problème, on contrôlera les marges de module en entrée et en sortie via $S_u = (I + KG)^{-1}$ et S_y et on s'assurera d'avoir un certain *roll-off* par KS_y . Le tableau 3.1 résume la méthodologie.

TABLE 3.1 – Choix des pondérations en fonction des spécifications.

Spécification numéro :	Pondérations
1	$W_2(s)$
2	$W_1(s)$
3	$W_{3a}(s)$
4	$W_{3b}(s)$
5	$W_4(s)$ est $W_5(s)$
6	$W_7(s)$ est $W_6(s)$

3.2.2 Quelques résultats pour l'avion flexible de grande taille

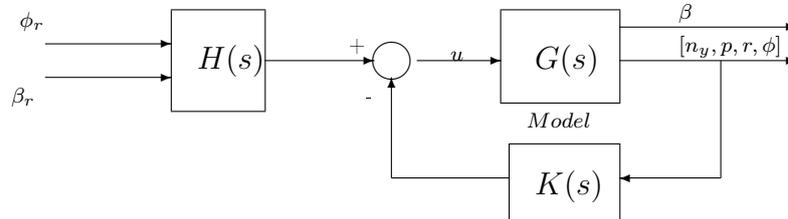


FIGURE 3.3 – Structure de la loi de commande.

Dans ce paragraphe, nous ne donnerons pas l'ensemble des résultats. Le lecteur pourra se référer à [25, 17] pour avoir l'ensemble des éléments. Il s'agit ici d'illustrer la méthodologies par quelques résultats principaux. Une simulation temporelle est réalisée sur le modèle complet contenant donc $F(s)$. Cette simulation correspond à un problème de poursuite sur ϕ . Pour préciser le contexte de la simulation, au lieu d'appliquer une consigne du type échelon sur ϕ_r , on applique une entrée du type rampe jusqu'à une valeur statique désirée. Ce type d'entrée correspond à une référence réaliste appliquée par le pilote. On s'attend à avoir une réponse en rampe mais légèrement décalée dans le temps de quelques secondes, et une fois ϕ_r stabilisé à une valeur constante, une erreur statique ϵ_ϕ quasi-nulle avec aucun dépassement. En ce qui concerne la consigne du type échelon sur β_r , on constate un temps de montée de quelques secondes et aucun dépassement. On avait spécifié $\phi = -\beta_r$, pour des soucis de clarté on a représenté $-\beta_r$, et nous constatons donc la convergence de ϕ vers $-\beta_r$. Dans tous les cas on n'observe aucun phénomène à non-minimum de phase grâce à la précommande. C'est ce que l'on constate sur la figure 3.4(a).

En ce qui concerne le confort passager qui correspond à une atténuation des pics de résonance sur la sortie n_y , on constate une forte atténuation de ces pics de plus de 50% comme le montre la figure 3.4(b). Ce gain est très significatif et permet a priori d'améliorer le confort en cabine. Mais il ne faut pas oublier que le modèle ici, bien que relativement complexe, reste assez sommaire. Comme nous le verrons par la suite, le confort est variable suivant ce que l'on considère comme perturbation. On a trois types de perturbations possibles. On a soit le confort à la rafale, ce qui correspond à une série de rafales appliquées à une entrée vent et pour lesquelles on évalue la réponse temporelle sur certaines sorties accélérations. Soit on a le confort à la turbulence, ce qui correspond à une excitation par un spectre de Von-Karman ou Dryden et on évalue la réponse en fréquence de certaines sorties accélérations. Et enfin on a le confort à la manœuvre, ce qui correspond à une excitation par des manœuvres pilotes spécifiques et on évalue la réponse temporelle sur certaines sorties accélérations. Ici on a utilisé une représentation assez sommaire avec une sortie au centre de gravité et une excitation du type bruit blanc appliquée sur le signal de commande u . Pour autant la physique mise en jeu reste pertinente car on souhaite amortir les modes flexibles de la structure aéroélastique, ce qui a été réalisé au travers de cette application.

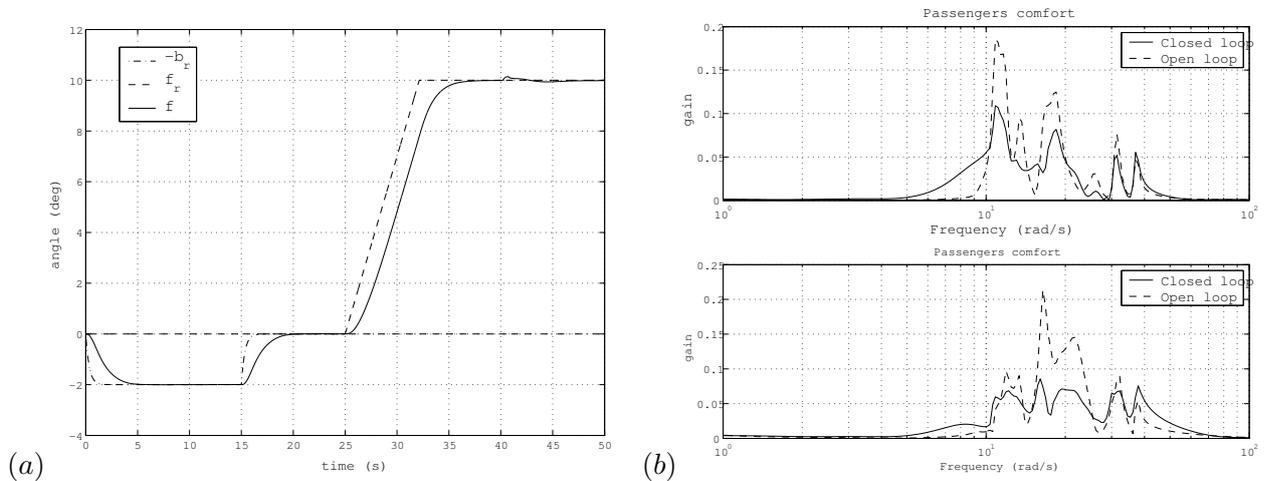


FIGURE 3.4 – La performance sur ϕ est donnée par la figure (a). Le confort passager représentée par la sortie n_y par la figure (b).

3.3 Avion flexible de grande taille du type aile volante ou *BWB*

[15] F. Demourant and G. Ferreres. An LPV multiobjective control law design based on youla parametrization for a flexible BWB aircraft. In Proceedings of the european conference of aerospace sciences, 2011.

[16] F. Demourant and G. Ferreres. A linear parameter-varying multiobjective control law design based on youla parametrization for a flexible blended wing body aircraft. In Array, editor, EUCASS Proceedings Series in Advances in AeroSpace Sciences, volume 6, pages 729-748, 2013.

[39] A. Schirrer, M. Kozek, F. Demourant, and G. Ferreres. Feedback Control Designs in Modeling and Control for a Blended Wing Body Aircraft. Advances in Industrial Control. Springer International Publishing, 2015.

Cette section présente une méthodologie de synthèse pour une loi de commande LPV et multiobjectif d'un avion civil de transport de grande taille du type aile volante, appelé encore dans la littérature *BWB*. La méthode permet de synthétiser directement une loi de commande séquentielle en fonction des paramètres de vol à l'aide d'une approche basée sur la paramétrisation de Youla. Cette paramétrisation dite convexe permet d'optimiser un ensemble de spécifications sur tout le domaine de vol et pour les différents cas de masse.

Pour le contrôle de ce type d'appareil on a un grand nombre de spécifications de différente nature. Ces spécifications concernent les qualités de vol, la réduction de charge dans le domaine temporel et fréquentiel, l'effort de commande, le confort et la robustesse [42, 93]. Pour satisfaire ces spécifications, comme nous l'avons évoqué, nous utilisons la paramétrisation de Youla appelée aussi synthèse

convexe [7]. Cette approche est très intéressante à plusieurs titres. Le paramètre de Youla permet de paramétrer l'ensemble des compensateurs stabilisants. La boucle fermée s'écrit de façon affine par rapport à ce paramètre nommé communément Q . Ainsi, toutes les spécifications qui correspondent à des contraintes sur la boucle fermée, du fait de l'affinité de Q dans ces relations, sont-elles convexes. La conséquence directe est d'obtenir une solution qui correspond forcément à l'extremum global. Le second point est de garantir un niveau de performance suffisant sur tout le domaine de vol et pour l'ensemble des cas de masse/fuel. Il est donc nécessaire de séquencer la loi en fonction de paramètres qui impactent le comportement de l'appareil. Pour réaliser cela, on utilise une structure du type retour d'état estimé. Cette structure présente un double avantage. Elle fait apparaître naturellement le paramètre de Youla sous la forme d'une interconnexion sur le compensateur. Et le second avantage est, par définition de la structure LQG, d'embarquer un observateur et donc le modèle de l'avion que l'on cherche à contrôler. Si le modèle contient déjà des paramètres qui varient, naturellement l'observateur qui reprend ce modèle sera séquencé et par conséquent le compensateur aussi. L'objectif est de montrer que ce type de configuration aérodynamique avec un fuselage intégré dans la voilure, où finalement il ne reste plus que la partie que l'on peut qualifier d'essentielle, à savoir les ailes pour porter l'appareil, est une configuration plus avantageuse que la configuration classique où les éléments de structure sont distincts. Pour évaluer la pertinence de ce concept on a plusieurs types de spécifications. Un premier ensemble de spécifications concerne les qualités de vol, i.e. le comportement de l'avion lorsqu'un pilote est au commande de celui-ci avec les lois de commande dans la boucle. Dans le cas où le feedback ne permet pas de satisfaire pleinement ces spécifications il sera toujours possible de synthétiser une précommande. Cette approche est tout à fait pertinente dès lors que la robustesse est assurée par le feedback. Un second type de spécifications concerne la réduction de charge sur certaines sorties critiques. Typiquement le principal objectif est de réduire la charge induite par le 1^{er} moment de flexion (WRMX pour *Wing Root bending Moment in X* puisque X correspond à l'axe longitudinal de l'avion) sous la contrainte d'une activité actionneurs compatible avec les saturations, tout en limitant la force verticale à l'emplanture de l'aile (WRFZ pour *Wing Root Force in Z* puisque Z est l'axe vertical sur lequel se mesure l'altitude). Une dernière spécification concerne l'amélioration du confort passager qui s'exprime au travers de sorties accélérations en cabine combinées à des filtres particuliers, appelés filtres "mal de mer" ou *seasickness*. Pour la synthèse sur la partie rigide, ou qualité de vol, une approche LQG a été utilisée. Si cette approche ne permet pas de satisfaire un cahier des charges complexe, elle est parfaitement adaptée à un problème du type qualité de vol. De plus, comme nous l'avons déjà indiqué, une structure de commande du type retour d'état estimé est tout à fait appropriée pour faire intervenir le paramètre de Youla. Du point de vue théorique il est toujours possible de transformer n'importe quel retour dynamique de sortie par un compensateur ayant une structure retour d'état estimé + paramètre de Youla [1], modulo quelques précautions sur l'ordre du compensateur et du système. Mais cette transformation n'est pas triviale numériquement, et dans un contexte LPV, elle peut conduire à des compensateurs qui ne sont plus interpolables entre eux. D'où l'intérêt ici de travailler directement et explicitement avec la forme retour d'état estimé via la commande LQG. Une fois que le compensateur LQG est synthétisé et satisfait en grande partie aux spécifications liées aux qualités de vol, le paramètre de Youla $Q(s)$ est rajouté au compensateur initial stabilisant et c'est par $Q(s)$ que l'on va chercher à satisfaire la totalité des spécifications sur la partie dite flexible. Une précommande sera rajoutée pour pleinement satisfaire aux contraintes temporelles liées aux spécifications imposées par les qualités de vol.

3.3.1 Structure de la boucle fermée

Le modèle longitudinal de l'avion est d'ordre 23. Ce modèle inclut les 4 états dits rigides de la mécanique du vol (oscillation d'incidence et phugoïde), 6 modes flexibles, i.e. 12 états flexibles et 7 états dits retards. Ce modèle est composé de 2 parties, la partie aéroélastique dite souple ou flexible et la partie dite rigide qui correspond à la mécanique du vol.

Les entrées/sorties de l'avion sont les suivantes :

- Les mesures utilisées par le compensateur sont Nz_{law} , q et Nz_{CG} . q et Nz_{CG} représentent respectivement la vitesse de tangage et la mesure de l'accélération verticale au niveau du centre de gravité. Ce sont ces deux mesures qui sont utilisées pour le contrôle de la partie rigide et donc pour assurer des qualités de vol satisfaisantes. $Nz_{law} = (Nz_{lw} + Nz_{rw})/2 - Nz_{CG}$ où Nz_{lw} et Nz_{rw} représentent respectivement l'accélération verticale sur l'aile gauche et droite. Ce type de mesure permet de filtrer très efficacement les modes symétriques de la structure aéroélastique. Dans cette structure les modes symétriques sont les dynamiques qui nous intéressent exclusivement dans le cas du contrôle longitudinal. Pour que cette dynamique soit contrôlée efficacement mais pas noyée dans la dynamique globale du modèle aéroélastique et de la mécanique du vol, on soustrait Nz_{CG} et on symétrise la mesure comme indiqué ci-dessus. De cette façon on ne mesure que les modes symétriques et flexibles de notre modèle. En les mesurant efficacement on réussit à les contrôler plus facilement.
- Les sorties utilisées par le compensateur sont les gouvernes de profondeur et les ailerons externes. Les gouvernes de profondeur sont situées sur le bord de fuite de l'empennage horizontal à la queue de l'appareil. Dans le cas de l'aile volante, l'empennage horizontal disparaît au profit de la voilure. Ces gouvernes de profondeur sont donc situées sur le bord de fuite de la voilure et plutôt centrées. Elles servent au contrôle de la dynamique du vol longitudinal. Les ailerons externes correspondent aux ailerons les plus à l'extrémité de la voilure. Ils sont braqués de façon symétrique pour le contrôle des modes aéroélastiques symétriques de la voilure. Le braquage anti-symétrique des ailerons sert au contrôle latéral de la dynamique du vol et éventuellement au contrôle des modes anti-symétriques. Par construction de la mesure, seuls les modes symétriques sont observables via les accéléromètres de la voilure. La dernière entrée du compensateur est Nz_{com} qui correspond à l'entrée pilote.

TABLE 3.2 – Caractéristiques des actionneurs

	Amortissements	Fréquences (rad/s)
Gouvernes de profondeur	0.707	2.71
Ailerons externes	0.707	7.77
	Position limite (deg)	Vitesse limite (deg/s)
Gouvernes de profondeur	[-30 +15]	[-30 +30]
Ailerons externes	[-25 +25]	[-40 +40]

Un actionneur du 2nd ordre est utilisé pour chaque entrée. Un filtre de Padé est rajouté pour tenir compte d'un retard de 60 ms sur la sortie Nz_{law} . Ces actionneurs ont une dynamique plutôt lente du fait de leur taille assez imposante sur ce type d'appareil. En bref ils ont une très bonne efficacité du fait de leur taille mais leur vitesse de braquage limitée représentera une contrainte pour le contrôle des charges dynamiques.

Globalement le système à contrôler est d'ordre 37 (23 pour l'avion + 4 pour les actionneurs + 10 pour les capteurs). En plus des sorties mesurées et utilisées par le compensateur il y a de nombreuses autres sorties qui seront utilisées pour la synthèse afin de satisfaire les spécifications sur l'effort de commande, les sorties charges du type WRMX et WRFZ et les sorties accélérations cabine pour améliorer le confort passager.

TABLE 3.3 – Vitesse air vraie V_{TAS} en m/s

	Mach 1	Mach 2	Mach 3
V 1	243.6	251.6	259.8
V 2	248.6	256.1	263.7
V 3	252.9	260.3	267.7

TABLE 3.4 – Altitude en m

	Mach 1	Mach 2	Mach 3
H 1	10871	11335	11777
H 2	9031	9513	9973
H 3	7793	8287	8761

Le domaine de vol est défini pour 3 valeurs de Mach et 3 pressions dynamiques. Les tableaux 3.3 et 3.4 fournissent les différents cas d'altitude et vitesse. De plus on doit considérer 9 cas de masse qui correspondent aux différents niveaux de remplissage des réservoirs : de 20% de remplissage à 100% par incrément de 10%. On obtient donc une combinaison de 81 modèles.

Pour évaluer les niveaux de charge, 2 types de perturbations non mesurées sont prises en compte. La première est une perturbation du type turbulence représentée par un filtre linéarisé de *Von Karman*. L'analyse faite avec ce type de turbulence est une analyse stochastique du type H_2 sur les sorties charges ou accélérations ou l_2 dans le cas temporel sur une fenêtre de temps suffisamment longue de plusieurs minutes. L'autre perturbation est la rafale discrète que nous avons déjà présentée dans le chapitre I. L'analyse est alors déterministe et basée sur le maximum de la sortie temporelle charge ou accélération et donc sur la norme l_∞ des signaux. Il apparaît dans notre cas que c'est la rafale discrète qui est dimensionnante. Rappelons simplement sa modélisation :

$$U = \frac{U_{ds}}{2} * \left[1 - \cos\left(\frac{\pi V_{TAS}}{H}\right) \right] \quad (3.2)$$

où V_{TAS} est la vitesse vraie de l'appareil, U_{ds} l'amplitude de la rafale qui varie de 11.9 m/s à 19 m/s et H l'échelle qui varie de 9 m/s à 152.4 m/s.

3.3.2 Principe de la synthèse convexe par paramétrisation de Youla

La mise en œuvre méthodologique est très similaire à la synthèse H_∞ historique basée sur [34] puisqu'elle basée sur la pondération des transferts en boucle fermée. Néanmoins elle présente aussi des différences significatives. Du fait de sa formulation, elle traite naturellement de spécifications H_∞ , l_∞ , H_2 . L'affinité du paramètre de Youla dans l'écriture des transferts en boucle fermée permet

la mise en oeuvre d'outils d'optimisation du type LP/QP pour traiter de l'aspect multiobjectif. De plus, comme nous allons le voir dans la suite de ce paragraphe, il est possible de pondérer chaque transfert en boucle fermée séparément ce qui allège et simplifie très fortement la synthèse. Néanmoins elle a quelques inconvénients. Il est nécessaire d'utiliser une base de filtres pour paramétrer $Q(s)$ et donc d'optimiser les zéros. Pour couvrir l'espace solution le plus largement possible il est alors important d'utiliser une taille de base suffisamment grande, ce qui conduit à augmenter très significativement l'ordre du compensateur. Il est toujours possible a posteriori de réduire l'ordre de ce dernier ou de réduire la taille de la base si on constate peu de changement dans les résultats avec une base plus réduite. Outre l'ordre, il est aussi nécessaire de choisir les pôles de la base. Généralement on choisit des pôles qui sont dans la bande passante de la boucle fermée. Mais il peut être nécessaire d'itérer par une approche essai-erreur pour affiner le nombre et la nature des pôles de la base de filtres. Finalement cette approche vise à résoudre essentiellement des problèmes de faisabilité du cahier des charges où l'ordre du compensateur a assez peu d'importance. Un autre point contraignant est la nécessité d'avoir un compensateur initial stabilisant ayant une structure du type LQG. Sur cette structure on greffe le paramètre de Youla Q qui devient le nouveau paramètre de synthèse.

Classiquement le transfert en boucle fermée que l'on cherche à contrôler entre le vecteur d'entrée w et le vecteur de sortie z est représenté par :

$$T_{w \rightarrow z} = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.3)$$

Si on considère une minimisation $\gamma_{i,j}$ pour la sortie j et l'entrée i sous contrainte H_∞ , pour un transfert SISO entre une entrée w_i et une sortie z_i , on a :

$$\|T_{w_i \rightarrow z_j}(j\omega)\|_\infty \leq \gamma_{i,j} \Leftrightarrow \|F_l(P, K)_{i,j}\|_\infty \leq \gamma_{i,j} \quad (3.4)$$

Le problème est alors de trouver une loi K qui satisfait à la contrainte (3.4) qui apparaît comme fortement non-linéaire en K . Donc une solution est alors de transformer cette relation du type LFT inférieure en une relation affine en Q telle que

$$F_l(P, K) = T_1 + T_2QT_3 \quad (3.5)$$

où Q devient le nouveau paramètre de synthèse et T_1 , T_2 et T_3 sont les transferts en boucle fermée obtenus avec le compensateur initial stabilisant. On constate que les pôles de la boucle fermée correspondent aux pôles de la boucle fermée initiale augmentés des pôles de Q et donc de la base choisie. Cette représentation est intéressante car elle paramétrise l'ensemble des compensateurs $K(s)$ stabilisants. En d'autres termes s'il existe un compensateur qui satisfait à nos contraintes, alors il est possible de trouver le paramètre Q associé. Néanmoins la paramétrisation a priori de Q réduit nécessairement l'espace de recherche. La structure de la boucle fermée avec un compensateur du type LQG et le paramètre Q est décrit par les relations

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \\ u &= -K\hat{x} + v \\ e &= y - C\hat{x} - Du \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $v = Q(s)e$. Donc Q prend en entrée l'erreur d'estimation et génère un signal v qui agit directement sur la commande u . Le dernier point concerne plus explicitement la paramétrisation de Q . Pour cela nous partons de la formulation suivante :

$$Q = \sum_{i=1}^n \theta_i Q_i \quad (3.7)$$

Comme nous l'avons évoqué précédemment Q_i sont des filtres dont les pôles sont fixés a priori et θ_i des variables d'optimisation. Nous obtenons alors, assez naturellement l'écriture en boucle fermée :

$$F_l(P, K) = T_1 + \sum_{i=1}^n \theta_i T_2 Q_i T_3 \quad (3.8)$$

En posant $F_{l_0} = T_1$ et $F_{l_i} = T_2 Q_i T_3$, nous obtenons :

$$F_l(P, K) = F_{l_0} + \sum_{i=1}^n F_{l_i} \theta_i = F_{l_0} + \mathbf{F}^T \Theta \quad (3.9)$$

où \mathbf{F} est un vecteur colonne composé des différents F_{l_i} pour $i = [1..n]$ et Θ le vecteur colonne qui contient l'ensemble des variables d'optimisation θ_i . On constate donc que les réponses fréquentielles ou temporelles en boucle fermée sont affines en Θ . Le problème peut être résolu efficacement par une approche du type plans sécants.

Enfin le dernier point concerne le choix de la base. Plus précisément, dans l'outil développé par Gilles Ferreres, la nature de la base est fixée, seuls les pôles de cette dernière sont choisis par l'utilisateur. Rappelons que les pôles de Q deviennent par constructions des pôles de la boucle fermée constituée du modèle et du compensateur final $K(Q)$. Théoriquement la base devrait être de taille infinie mais en pratique cela est impossible. L'utilisateur doit donc en choisir l'ordre et la dynamique. C'est donc une base orthonormale de Takenaka et Malmquist, ce qui conduit à la décomposition suivante de $Q_i(s)$:

$$Q_i(s) = \frac{\sqrt{2\Re(a_i)}}{s + a_i} \prod_{k=1}^{i-1} \frac{s - \bar{a}_k}{s + a_k}, \quad Q_0(s) = 1, \quad a_k \in C^+ \quad (3.10)$$

où les a_k sont choisis a priori pour couvrir la bande passante en boucle fermée.

3.3.3 Quelques résultats sur le contrôle de la partie souple

Nous nous intéresserons dans cette partie qu'au contrôle de la partie souple. Brièvement, pour le contrôle de la partie dite rigide qui correspond aux qualités de vol, une approche très classique du type LQG a été mise en œuvre afin d'obtenir un comportement satisfaisant sur les 81 modèles. Plus précisément un gain fixe a été synthétisé pour la partie estimation et retour d'état. Finalement seul l'observateur qui contient le modèle qui varie en fonction du cas de masse et du point de vol tient compte de l'aspect "LPV". Précisons que l'on n'a pas explicitement un modèle LPV dans le sens où on aurait un modèle paramétré en fonction de la masse, par exemple, d'où les guillemets utilisés. Ce modèle LPV, que l'on ne connaît pas, s'exprime pour nous comme une collection de modèles discrets qui couvre les différents cas. C'est ce qui va nous permettre d'évaluer les résultats sur les 81

modèles LTI en l'occurrence. Néanmoins il faut garder à l'esprit que l'on ne tient pas compte dans ce cas de la variation des 3 paramètres, à savoir l'altitude, la vitesse et la masse. *Stricto sensu* on ne peut rien garantir durant leur variation puisque finalement la synthèse et l'analyse sont réalisées lorsque ces 3 paramètres sont gelés. Pour autant, il est important de signaler que cette approche est très classique en aéronautique. La vitesse de variation de ces paramètres est finalement très faible et donc négligeable par rapport aux dynamiques principales du système qui sont de l'ordre de la seconde ou de la dizaine de secondes. Il est bien évident que pour la variation de masse par exemple, celle-ci ne peut pas varier, sur un avion civil de grande taille, significativement en quelques secondes. De même la variation d'altitude d'un avion de ce type est très faible sur une période de temps de la dizaine de secondes, y compris dans des circonstances exceptionnelles comme la dépressurisation accidentelle.

En bref le lecteur pourra se référer à [27, 32, 87] pour avoir plus de détails sur les résultats obtenus et la méthodologie développée sur la partie qualité de vol. En ce qui concerne les spécifications temporelles liées aux qualités de vol, pour pleinement les satisfaire, une précommande a été synthétisée. Comme dans le cas du pilotage d'un avion du type A380 de la section précédente, une structure à 2 degrés de liberté a été développée. Le compensateur assure la robustesse, le contrôle des charges et le placement modal, la précommande assure la performance.

Pour la partie aéroélastique, on peut résumer les spécifications aux 4 points suivants :

- Minimiser le niveau de charge sur la sortie WRMX pour les perturbations dimensionnantes ;
- Contraindre l'effort de commande pour satisfaire aux limitation des actionneurs ;
- Maintenir le niveau des efforts représentés par WRFZ lorsque la charge sur le WRMX est réduite ;
- Améliorer le confort passager en agissant sur les sorties accélérations cabine.

Le problème d'optimisation a été posé de la façon suivante :

- Minimisation de la norme H_2 associée au confort des passagers en cabine ;
- Contraintes l_∞ appliquées aux charges WRMX et WRFZ ;
- Contraintes l_∞ appliquées à l'activité des actionneurs.

Il existe bien sûr d'autres façons de poser le problème d'optimisation. On pourrait par exemple minimiser les charges et contraindre le confort et l'activité des actionneurs. Le choix que j'ai fait correspond à ma propre expérience de ce type de problème. En bref il est compliqué d'appliquer une contrainte sur le confort car il est difficile, a priori, de dire à partir de quel niveau cela devient confortable ou inconfortable. La notion de contrainte est associée à une certaine connaissance a priori. Par exemple la contrainte sur la saturation en amplitude des actionneurs est basée sur la connaissance de ces actionneurs. La contrainte que j'ai appliquée sur les charges est basée sur une connaissance a priori. La charge WRFZ ne doit pas augmenter en insérant le paramètre de Youla $Q(s)$ dans la boucle fermée et donc la contrainte à appliquer sur WRFZ correspond au niveau de charge avec $Q(s) = 0$. En ce qui concerne le niveau de charge WRMX, par expérience, une atténuation de 10% sur la charge totale représente une atténuation significative. Cela nécessite une approche itérative car on va appliquer au départ 10%, puis 20%, constater que le problème devient infaisable, réduire à 15% et ainsi de suite. En réduisant le niveau des charges, on réduit le poids de la structure et on augmente mécaniquement la charge utile, ici les passagers et le carburant. Si la norme H_2 du confort, qui est donc notre fonction coût que l'on cherche à minimiser, a été réduite à l'issue de la synthèse on peut dire que le confort a été amélioré tout en ayant réduit les charges.

3.3.3.1 Atténuation de charges

La première spécification est la spécifications la plus importante car c'est elle qui peut impliquer une réduction de masse de la structure la plus significative. La pièce qui est à la base de la voilure est une pièce essentielle qui reprend une bonne partie des efforts s'exerçant sur la voilure. La perturbation envisagée est soit une turbulence, soit une rafale discrète. Mais comme nous l'avions évoqué précédemment la rafale discrète est la perturbation dimensionnante, i.e. celle qui amène les niveaux de charges les plus élevés. Pour chaque cas de masse ou de vol on applique 10 rafales discrètes, ce qui correspond à 10 amplitudes U_{ds} et échelles H différentes. En outre lorsque le niveau de charge est réduit pour une rafale, un cas de masse et un point de vol, il faut s'assurer qu'il n'existe pas une autre rafale, un autre point de vol ou cas de masse qui conduise à une valeur supérieure. En bref il faut s'assurer que le niveau de charge obtenu à l'issue de la minimisation pour un cas spécifique et une rafale spécifique soit satisfait pour tout le domaine de vol, tous les cas de masse et toutes les rafales. Ce résultat doit être obtenu tout en satisfaisant les contraintes en terme de saturation sur le signal de commande et en limitant la force verticale à l'emplanture WRFZ.

Un point fondamental dans le calcul des charges est la notion de charge dynamique et de charge statique dite $1g$. La charge dynamique correspond à ce que nous connaissons bien, à savoir la sortie d'un modèle aéroélastique soumis à une perturbation, où le modèle aéroélastique peut être représenté par un système dynamique linéaire. La charge statique ou $1g$ représente la charge issue de la portance. Elle est spécifique à la dynamique longitudinale et parfaitement naturelle puisqu'elle correspond à la compensation du poids de l'appareil pour que celui-ci se déplace à altitude constante. La charge finale, qui est la charge que l'on doit réduire, est donc la somme de la charge dynamique et de la charge statique. Ainsi est-il fondamental de prendre en compte la charge statique, car minimiser par exemple la charge dynamique dans un cas où la charge statique est faible ne présente aucun intérêt. Comme dans le cadre de l'optimisation convexe par paramétrisation de Youla il n'est pas possible d'utiliser directement cette charge statique qui ne peut apparaître que par une simulation non-linéaire, il est alors impératif de la reformuler sous la forme d'une contrainte sur la partie dynamique mais qui sera variable en fonction de la valeur de la charge statique. Comme la contrainte est appliquée sur la charge statique plus la charge dynamique, la charge dynamique doit satisfaire la contrainte moins la charge statique. Et c'est cette contrainte recalculée sur la charge dynamique qui est utilisée dans la synthèse.

Pour toutes les figures, les contraintes sont représentées par une ligne rouge, la charge statique par une ligne verte et la charge dynamique ou totale par une courbe bleu. Pour tenir compte de la charge statique qui varie en fonction du cas de masse et point de vol, on applique une contrainte non pas identique pour les 81 cas mais différente pour prendre en compte cette charge statique. Par exemple pour une charge statique élevée, la contrainte dynamique sera plus forte et donc la ligne rouge qui représente cette contrainte sera d'autant plus faible en valeur absolue.

La figure 3.5 représente la charge WRMX dynamique et totale avec le compensateur initial stabilisant qui ne sert qu'aux qualités de vol. Le paramètre $Q(s) = 0$ et donc aucune synthèse convexe n'est réalisée. Ces courbes sont obtenues pour les 81 cas de masse et vol et pour la rafale discrète dimensionnante, i.e. celle qui conduit au plus haut niveaux de charge. Pour des raisons d'orientation d'axe, les valeurs dimensionnantes sont négatives. Donc il faut chercher à contraindre les valeurs négatives et donc à réduire la valeur absolue.

La figure 3.6 représente la charge WRMX dynamique et totale à l'issue de la synthèse du pa-

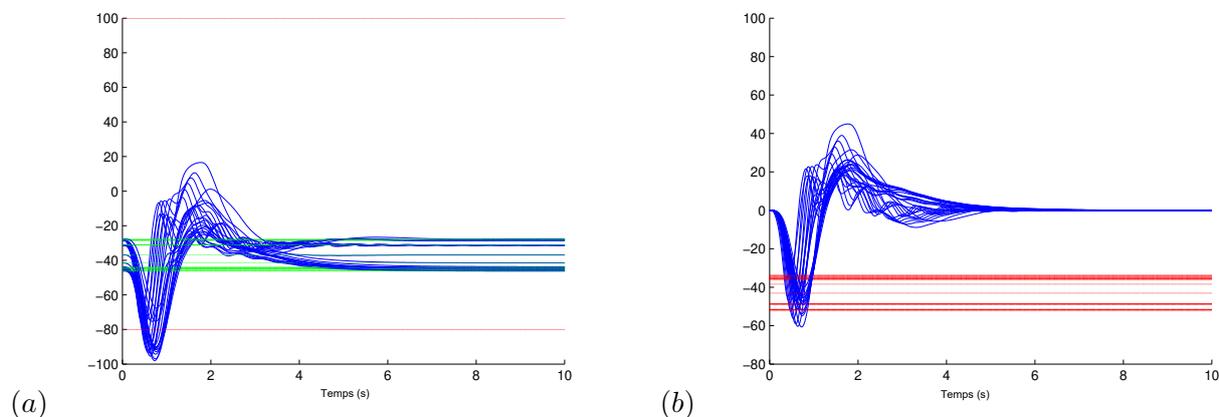


FIGURE 3.5 – Les figures (a) et (b) représentent la réponse temporelle de la charge WRMX avec la rafale dimensionnante sans le paramètre de Youla $Q(s)$. La figure (a) représente la charge totale où l'on a représenté la charge statique $1g$ par une ligne verte. La contrainte à satisfaire est représentée par la ligne rouge. La figure (b) représente le problème équivalent mais en ne représentant que la charge dynamique avec une contrainte (ligne rouge) qui tient compte de la charge statique. Cette représentation est moins lisible mais c'est celle-ci qui est explicitement utilisée par la synthèse.

ramètre de Youla $Q(s)$. La contrainte appliquée est satisfaite et permet une réduction de la charge totale de 15%. Cette réduction de charge est très satisfaisante, en général on souhaite une réduction de charge de 30% sur la partie dynamique ce qui se traduit approximativement par une réduction sur la charge totale de 10% à peu près.

La figure 3.7 représente la charge WRMX totale à l'issue de la synthèse du paramètre de Youla $Q(s)$ mais cette fois-ci avec toutes les rafales. On a donc 810 simulations temporelles au lieu des 81 précédentes. On vérifie que l'on a bien traité les rafales dimensionnantes puisqu'en considérant l'ensemble des rafales, le niveau des charges est en deçà de la contraintes fixée.

Nous ne présenterons par les résultats sur le WRFZ car ici ils ne présentent que peu d'intérêt. En effet la synthèse de $Q(s)$ qui permet de réduire le niveau de charge sur le WRMX ne conduit pas à une augmentation du WRFZ. Même si une contrainte sur le WRFZ a été mise en place durant la synthèse elle n'est pas active [27, 32, 87].

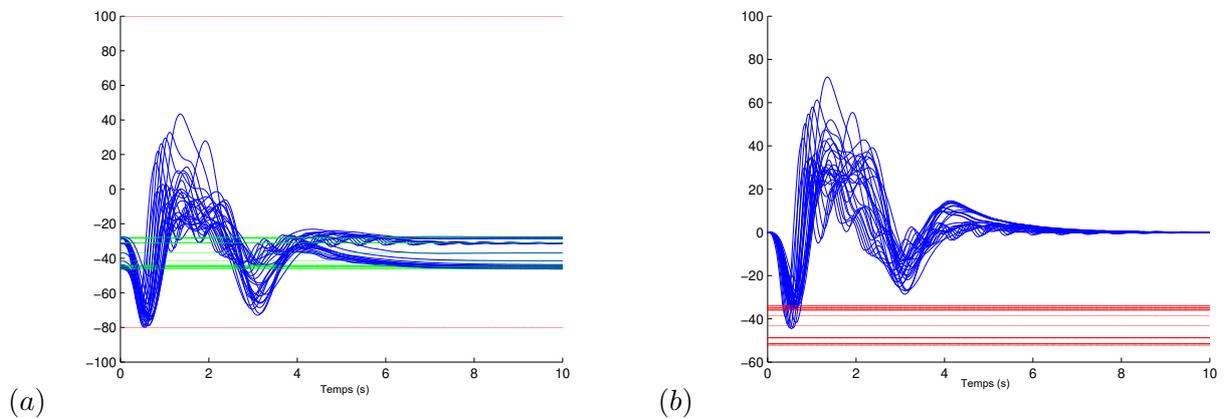


FIGURE 3.6 – Les figures (a) et (b) représentent la réponse temporelle de la charge WRMX avec la rafale dimensionnante à l'issue de la synthèse du paramètre de Youla $Q(s)$. La figure (a) représente la charge totale où l'on a représenté la charge statique $1g$ par une ligne verte. A l'issue de la synthèse, la contrainte est satisfaite et on constate qu'aucune charge totale ne la dépasse. La figure (b) représente le problème équivalent mais en ne représentant que la charge dynamique. Comme précédemment cette représentation est moins lisible car il est difficile de voir à quelle charge WRMX on associe une contrainte, mais c'est cette représentation qui représente le résultat final de l'optimisation. La réécriture par la charge totale nous redonne alors la figure (a).

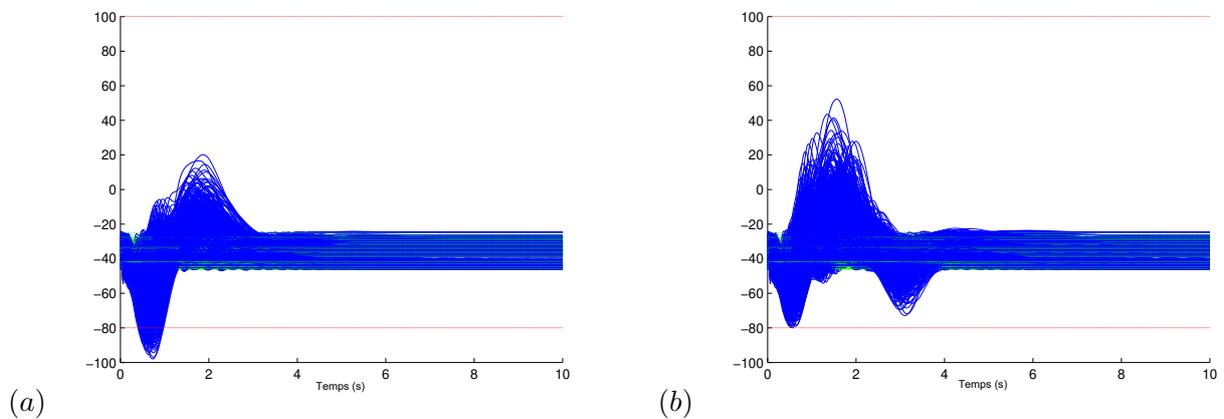


FIGURE 3.7 – Les figures (a) et (b) représentent la réponse temporelle de la charge WRMX totale pour l'ensemble des rafales. La figure (a) représente la charge totale avant l'optimisation du paramètre de Youla $Q(s) = 0$. La figure (b) représente la charge totale une fois le paramètre de Youla synthétisé. On constate que la charge totale WRMX satisfait la contraintes pour tout le domaine de vol, tous les cas de masse et toutes les rafales.

3.3.3.2 Effort de commande

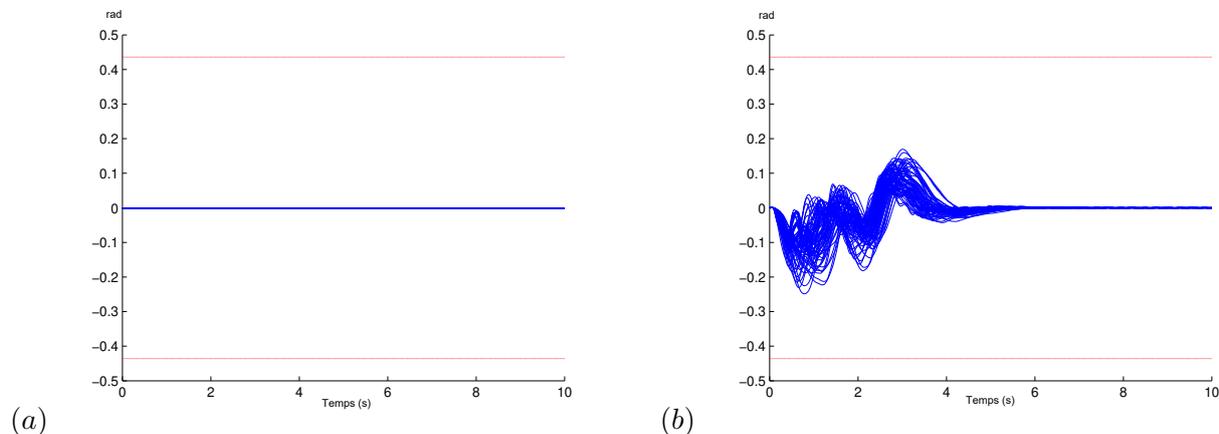


FIGURE 3.8 – Les figures (a) et (b) représentent le braquage des ailerons externes à l’excitation par une rafale. La figure (a) montre une activité nulle pour cette gouverne dans le cas où $Q(s) = 0$ puisque seul le compensateur associé aux qualités de vol est inséré dans la boucle fermée. La figure (b) fournit le résultat pour le même type d’excitation avec le paramètre $Q(s)$ dans la boucle fermée. Les lignes rouges représentent les contraintes liées à la saturation maximale des ailerons en radians. On constate que l’activité en amplitude est très en deçà des saturations. Cela s’explique par le fait que les gouvernes sur ce type d’appareil ont des grandes surfaces et donc un effet important à faible braquage. Néanmoins leur dynamique est plutôt lente.

Nous nous intéresserons dans cette section qu’aux ailerons externes qui sont mobilisés en longitudinal pour atténuer les charges sur la voilure. On peut se référer à [32, 87] pour avoir une vision plus complète de l’activité des actionneurs. En ce qui concerne l’effort de commande sur les ailerons externes on tient compte à la fois de la saturation en braquage et de la saturation en vitesse ce qui correspond aux classiques *rate limiter*. Dans la figure 3.8 on a représenté le braquage des ailerons externes avant la synthèse du paramètre de Youla et après la synthèse de ce dernier pour réduire les charges. Les ailerons n’étant pas utilisés pour le contrôle longitudinal du modèle dit rigide leur activité est donc nulle avant de synthétiser et insérer $Q(s)$ dans la boucle fermée (figure 3.8). En ce qui concerne la vitesse de braquage on constate clairement sur la figure 3.9 la nécessité de la contraindre. Cela n’a rien de surprenant car en général les rafales discrètes sollicitent significativement les actionneurs au niveau de leur vitesse de braquage. Et ce d’autant que l’actionneur sur cet appareil a plutôt une dynamique lente

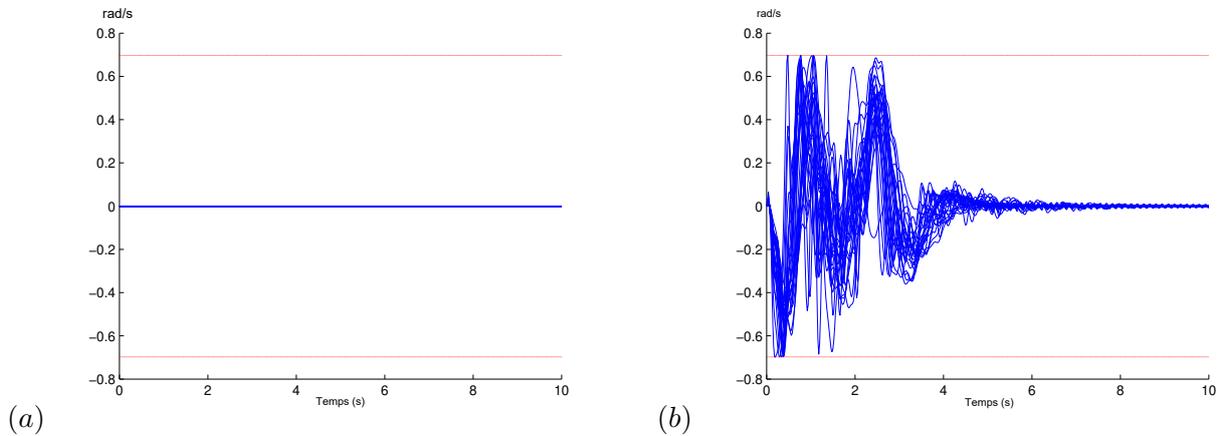


FIGURE 3.9 – Les figures (a) et (b) représentent la vitesse de braquage des ailerons externes à l'excitation par une rafale. La figure (a) montre une activité nulle pour cette gouverne dans le cas où $Q(s) = 0$ puisque seul le compensateur associé aux qualités de vol est inséré dans la boucle fermée. La figure (b) fournit le résultat pour le même type d'excitation avec le paramètre $Q(s)$ inséré dans la boucle fermée. Les lignes rouges représentent les contraintes liées à la saturation en vitesse maximale des ailerons en radians/s. On constate que l'activité est très forte et qu'à plusieurs reprises les contraintes sont actives, ce qui rend nécessaire de spécifier ces contraintes durant la synthèse comme nous l'avons fait.

3.3.3.3 Confort passager

La notion de confort cabine est une notion qui n'est pas souvent prise en compte même si elle est importante pour le confort du passager. En effet, en premier lieu, l'objectif est de réduire le niveau des charges. Ceci étant obtenu il faut s'assurer que cela ne se traduit pas par un inconfort au niveau de la cabine. Cet inconfort est représenté par la norme H_2 d'une sortie accélération cabine combinée à un filtre dit "mal de mer" qui est censé décrire la sensibilité du corps humain à certaines fréquences. L'excitation, dans le contexte d'une norme H_2 , est une turbulence décrite par le filtre linéarisé de Von Karman. La figure 3.10 représente le niveau de confort pour les 81 modèles.

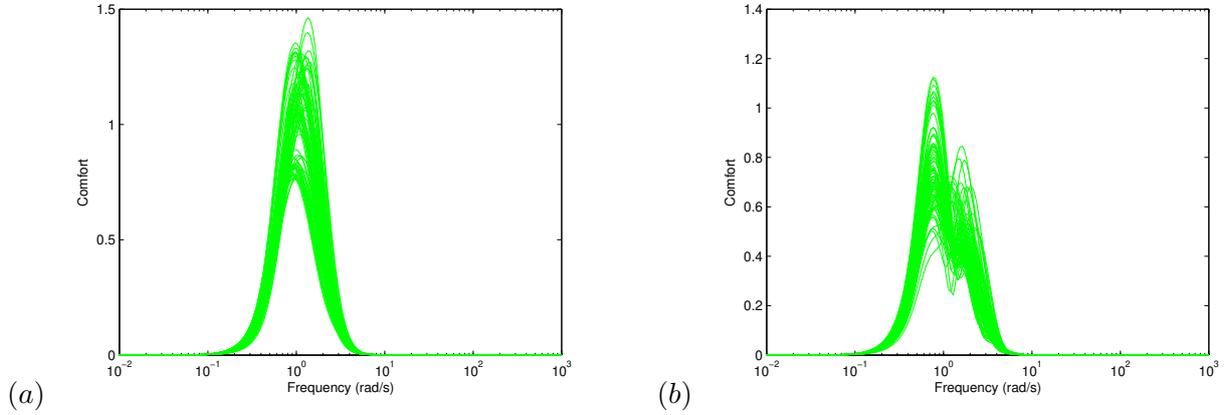


FIGURE 3.10 – Les figures (a) et (b) représentent le niveau de confort pour une excitation du type turbulence. La figure (a) montre le niveau de confort pour $Q(s) = 0$ puisque seul le compensateur associé aux qualités de vol est inséré dans la boucle fermée. La figure (b) fournit le résultat pour le même type d'excitation avec le paramètre $Q(s)$ inséré dans la boucle fermée. On constate une réduction de la norme H_∞ sur les 81 modèles. La réduction de la norme H_2 n'est pas forcément très explicite au niveau de la représentation fréquentielle puisque l'on voit apparaître un second pic. Néanmoins le résultat du problème de minimisation du confort conduit à une réduction de 20% de la norme H_2 sur l'ensemble des 81 modèles, ce qui se traduit par une amélioration du confort de 20%.

3.4 Contrôle d'un écoulement : application à une cavité ouverte.

[33] C. Leclercq, F. Demourant, C. Poussot-Vassal, and D. Sipp. Linear iterative method for closedloop control of quasiperiodic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 868 :26-65, 2019.

3.4.1 Stratégie de commande

Dans ce chapitre nous allons présenter une synthèse H_∞ sur un écoulement profondément non-linéaire. La stratégie de contrôle est basée sur une structure de commande du type cascade implémentée itérativement. Comme il est possible de représenter les dynamiques principales de l'écoulement non-linéaire par une modélisation LTI basée sur les champs moyens, une synthèse LTI robuste dédiée, basée sur la synthèse H_∞ structurée [3, 4, 2], a été développée. L'objectif est d'amener l'écoulement à ce que l'on appelle l'écoulement de base qui correspond à un écoulement linéaire autour du point fixe stabilisé des équations de Navier-Stokes. Le problème est l'influence de la non-linéarité qui devient prépondérante lorsque l'écoulement est loin de l'écoulement de base et donc du point fixe. Tout d'abord il n'est pas facile de quantifier facilement la notion de distance entre un écoulement de base que l'on cherche à atteindre et l'écoulement effectif pleinement développé

en boucle ouverte. On peut généralement constater que l'influence des non-linéarités devient prépondérante au travers d'un comportement caractéristique d'un comportement non-linéaire, comme un équilibre dynamique basé sur une ou plusieurs fréquences fondamentales. Dans ce cas, il devient compliqué, voire impossible par un seul compensateur, d'amener cet écoulement vers le point fixe. Un premier compensateur est alors synthétisé, mais en dépit de bonnes performances de celui-ci lorsqu'il est implémenté, on constate qu'il n'est pas capable de supprimer les oscillations de l'écoulement et que le nouvel écoulement est attiré vers un nouvel équilibre dynamique. Cet autre équilibre dynamique est caractérisé par un modèle moyen différent et il devient alors possible de synthétiser un second compensateur sur ce nouveau modèle. On peut ainsi procéder de façon itérative jusqu'à converger vers l'écoulement de base du point fixe stabilisé par le compensateur. L'approche itérative est illustrée au travers d'un écoulement incompressible d'une cavité ouverte à $Re = 7500$, pour un écoulement initial quasi-périodique et donc profondément non-linéaire.

La seconde difficulté est de traduire en langage linéaire par des pondérations sur les fonctions de transfert en boucle fermée les objectifs de la boucle fermée non-linéaire. Pour traiter ce problème il est nécessaire d'interpréter dans le domaine fréquentiel les deux principales spécifications, à savoir la suppression des oscillations auto-entretenues dues aux non-linéarités et la convergence vers l'écoulement de base au point fixe.

La troisième difficulté est la convergence vers le point fixe. En effet, initialement, l'écoulement non forcé est dans un état d'équilibre dynamique. Dans le même temps il est montré que le point fixe des équations de Navier-Stokes est instable pour ce type d'écoulement. Si on souhaite converger vers le point fixe, celui-ci doit être stable et donc stabilisé par le compensateur puisqu'il ne l'est pas initialement. Donc il est impératif de stabiliser ce point fixe sans quoi aucune convergence vers ce dernier n'est possible. Donc il est attendu que par une atténuation des oscillations, le nouvel état d'équilibre se "rapproche" du point fixe instable. Et que par robustesse de la loi, l'équilibre dynamique étant à proximité du point fixe, le compensateur soit capable à la fois d'atténuer les oscillations mais aussi de stabiliser le point fixe. Si ce dernier est stable on a donc un bassin d'attraction qui se crée autour, l'écoulement évoluant à proximité de ce dernier, il entre alors dans ce bassin pour converger vers le point fixe stabilisé par le compensateur. On a atteint la dernière itération qui a permis de stabiliser notre écoulement. Il est fondamental de noter que si la stabilité du point fixe est nécessaire elle n'est pas suffisante. En effet il est possible de synthétiser un compensateur qui stabilise le point fixe mais qui ne permet absolument pas d'amener l'écoulement dans son bassin d'attraction. On a alors un nouvel équilibre dynamique qui se crée mais sans qu'il y ait convergence vers l'écoulement de base. Comme nous le verrons l'écoulement de base est atteint à l'issue de cinq itérations seulement.

Nous allons détailler cette approche itérative. Supposons que nous ayons obtenu à l'issue de la 1^{ère} itération un compensateur K_1 capable de réduire l'amplitude des oscillations de l'écoulement. Malheureusement il n'a pas été capable de le stabiliser complètement, il est donc nécessaire de synthétiser un compensateur K'_2 tel que le compensateur $K_2 = K_1 + K'_2$ soit capable d'amortir plus fortement les oscillations, voire de converger vers l'écoulement de base. On a donc dans le cas général une succession de lois de commande tel que :

$$K_m = \begin{cases} 0, & \text{if } m = 0, \\ K'_1 + K'_2 + \dots + K'_m, & \text{if } m > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

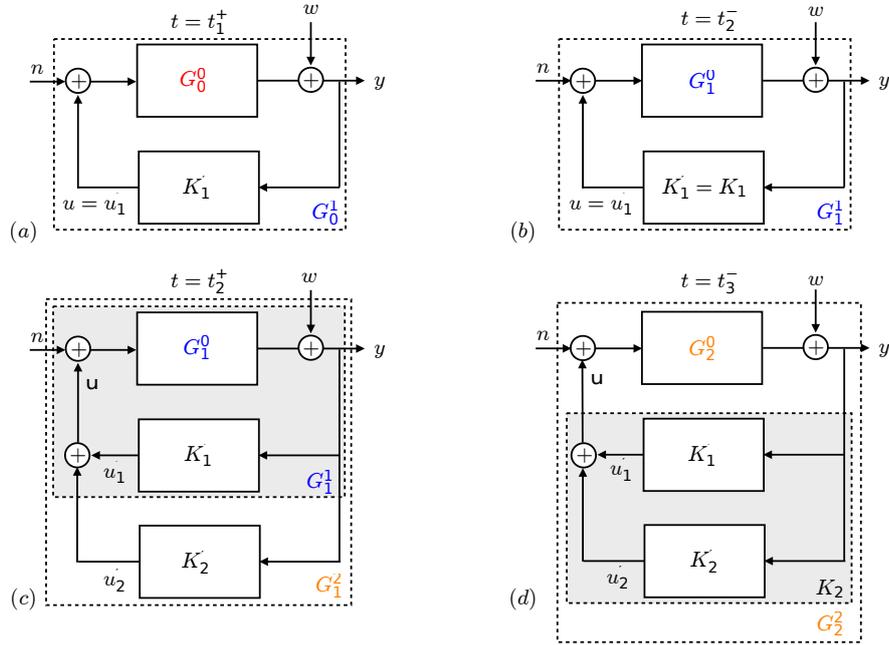


FIGURE 3.11 – Représentation itérative sous forme de schémas blocs de la procédure de synthèse (a) A l’instant $t = t_1^+$, K'_1 vient juste d’être inséré dans la boucle fermée. L’écoulement est encore décrit par le modèle G_0^0 ; (b) A $t = t_2^-$ le nouvel écoulement avec le compensateur $K_1 := K'_1$ a convergé vers le nouvel état moyen G_1^1 ; (c) A $t = t_2^+$, K'_2 vient juste d’être inséré dans la boucle fermée. L’écoulement est encore décrit par le modèle G_1^1 ; (d) A $t = t_3^-$ le nouvel écoulement avec le compensateur $K_2 := K'_1 + K'_2$ a convergé vers le nouvel état moyen G_2^2 .

L’objectif est alors de synthétiser une loi de commande K'_{m+1} telle que $K_{m+1} = K_m + K'_{m+1}$ conduise à des oscillations plus faibles voire nulles. L’idée clé est de considérer l’écoulement de base interconnecté à un compensateur, interconnexion qui correspond donc à une fonction de transfert que l’on peut écrire $G_{\bar{\mathbf{q}}_m}^{K_m}$. Pour alléger cette écriture, on notera :

$$G_i^j = G_{\bar{\mathbf{q}}_i}^{K_j}. \quad (3.12)$$

A chaque étape $m + 1$, le modèle à contrôler est par conséquent noté G_m^m . L’objectif est alors de synthétiser un compensateur K'_{m+1} telle que la boucle fermée objectif

$$G_m^{m+1} = \frac{G_m^m}{1 - G_m^m K'_{m+1}} \quad (3.13)$$

satisfasse aux spécifications, et donc plus concrètement, permettent de réduire voire de supprimer les oscillations sur la sortie y . Quand un compensateur K'_{m+1} est inséré, l’écoulement tend vers un nouvel équilibre, caractérisé par un nouveau état moyen $\bar{\mathbf{q}}_{m+1}$. Le nouveau compensateur est donc $K_{m+1} = K_m + K'_{m+1}$. Le système a donc évolué de G_m^m à G_{m+1}^{m+1} . Le processus de synthèse itérative se poursuit jusqu’à la convergence vers le point fixe stabilisé.

Cette approche peut ressembler à une synthèse auto-séquencée mais elle est à bien des égards très différente [62] et [47]. Tout d'abord dans le cas de la synthèse LPV ou auto-séquencée, on est censé connaître l'évolution du système en fonction d'un paramètre que l'on mesure. On a donc une forme paramétrée du modèle. Ce qui n'est absolument pas le cas ici puisqu'on ne connaît pas par avance vers quel modèle moyen l'écoulement va converger. Il est à chaque fois nécessaire d'attendre le nouvel équilibre dynamique pour pouvoir l'identifier. Autre différence de taille, il s'agit d'une approche que l'on peut qualifier de discrète ou pas à pas, ce qui n'est pas le cas de l'approche auto-séquencée classique. Et ceci pour la raison suivante. La notion de fonction de transfert entre n et y n'est pas appropriée pour décrire dans le cas général un comportement non-linéaire. La représentation linéaire que nous utilisons est basée sur les champs moyens et donc le modèle LTI moyen qui en découle. Or cette représentation par la moyenne des signaux n'a de sens que dans deux cas de figures suivants :

- Comme nous l'avons indiqué précédemment, la représentation par les champs moyens suppose la stationnarité de la moyenne temporelle. En bref cette moyenne ne doit plus évoluer au cours du temps. En théorie cela suppose $t \rightarrow \infty$. En pratique il faut que t soit suffisamment grand pour que la valeur moyenne des signaux évoluent très peu donc soit proche de la valeur théorique qui correspond à l'espérance mathématique. Dans ce cas, on peut calculer un modèle moyen qui, idéalement, capture les dynamiques principales de notre écoulement non-linéaire ;
- L'autre cas où le modèle moyen est valide est le cas hors équilibre au moment où on insère le compensateur K'_{m+1} . A ce moment là, et pendant quelques secondes où l'écoulement n'évolue pas, $\bar{\mathbf{q}}_m$ reste valide durant ce laps de temps relativement court. Mais entre le moment où l'écoulement commence à évoluer vers un nouvel état d'équilibre suite à l'ajout du compensateur et le moment où ce nouvel état est atteint il n'est pas possible d'utiliser une approche par les champs moyens pour caractériser ce transitoire. Donc on n'a pas à notre disposition par les champs moyens de paramétrisation du type LPV pour décrire le transitoire. On peut toujours utiliser une formulation LPV mais celle-ci n'a aucune chance de capturer la dynamique du transitoire de l'écoulement non-linéaire et n'aurait donc pas de sens physique.

Finalement chaque fonction transfert G_i^j peut se réécrire sous la forme suivante :

$$G_i^j = \frac{G_i^0}{1 - G_i^0(K'_1 + \dots + K'_j)} \quad (3.14)$$

G_i^0 représente l'écoulement moyen seul et donc non forcé et les compensateurs K'_1 à K'_j implémentées en cascade ou parallèle.

Maintenant que nous avons explicité la stratégie globale il est important de définir plus précisément ce que l'on cherche à faire à chaque itération. Nous avons deux spécifications essentielles :

- Pour atténuer les oscillations auto-entretenues l'idée est de procéder à du contrôle actif sur les modes résonnants. Par rapport aux paragraphes précédents seule la terminologie change. En effet, précédemment pour les modes structuraux de faible amortissement, on parlait de modes souples ou flexibles. Ici on appelle ces modes des modes résonnants, car ils correspondent à de pics d'amplification très étroits dans le domaine fréquentiel. Ces modes ont des niveaux d'amortissement très faibles et ils sont généralement placés proches de l'axe imaginaire.

Comme nous l'avons expliqué auparavant un contrôle actif permet à la fois de réduire ces pics et de les éloigner de l'axe imaginaire en augmentant leur amortissement, permettant ainsi une certaine robustesse de ces modes en boucle fermée. C'est ce que l'on appelle un contrôle actif ou en phase ;

- Il a été montré dans [65] que pour garantir que l'écoulement converge bien vers un le point fixe stabilisé il est nécessaire d'avoir $K(0) \approx 0$ ou idéalement $K(0) = 0$. Sans quoi on n'a pas de certitude sur l'unicité du point fixe et sur la convergence vers ce dernier.

3.4.2 Synthèse structurée H_∞

Nous allons présenter plus précisément la méthodologie qui permet de synthétiser le compensateur K'_1 tel que $u'_1 := K'_1 y$. Très classiquement on peut définir quatre fonctions de transfert en boucle fermée pour un système SISO, à savoir S , T , $K'_1 S$ et $G_0^0 S$ où S et T sont respectivement la fonction de sensibilité et la fonction de sensibilité complémentaire telle que $S - T = 1$. Pour chaque fonction de transfert, on y associe une pondération $W_S, W_T, W_{GS}, W_{K'S}$ qui est choisie en fonction des spécifications. L'approche proposée par la synthèse H_∞ structurée [3] permet de minimiser chaque transfert indépendamment tout en contraignant l'ordre du compensateur, ce qui permet de minimiser ρ sous les contraintes H_∞ suivantes :

$$\|W_S S\|_\infty \leq \rho, \quad (3.15)$$

$$\|W_T T\|_\infty \leq \rho, \quad (3.16)$$

$$\|W_{GS} \tilde{G}_0^0 S\|_\infty \leq \rho, \quad (3.17)$$

$$\|W_{K'S} K'_1 S\|_\infty \leq \rho, \quad (3.18)$$

Pour être tout à fait complet, une cinquième contrainte est rajoutée sur le compensateur afin de garantir sa stabilité. Le fait de pouvoir pondérer indépendamment chaque transfert en boucle fermée, garantir la stabilité du compensateur et contraindre l'ordre de ce dernier représentent des atouts méthodologiques forts par rapport à la synthèse H_∞ classiques [34] et par paramétrisation de Youla. Nous verrons par la suite que l'on rajoute une 2^{ème}, voire une 3^{ème} contrainte de structure. L'ordre choisi pour le compensateur est de 10, ce qui est a priori suffisant pour résoudre notre problème. Cette synthèse H_∞ structurée représente une nouveauté forte par rapport aux techniques classiquement utilisées pour le contrôle des écoulements. Généralement la technique implémentée est une technique LQG qui a l'intérêt d'être relativement simple pour assurer la stabilité de la boucle fermée mais qui peut s'avérer difficile du point de vue méthodologique dès que le cahier des charges se complexifie. La littérature est abondante pour ce type de méthodes. Plus spécifiquement, on retrouvera dans [45, 46, 102] des méthodologies du type sensibilité mixte qui ne sont pas forcément appropriées dès que l'on cherche à faire du contrôle actif sur des modes résonnants. On retrouve aussi des techniques du type *loop shaping* [14, 50, 15, 66] mais qui sont là aussi difficiles à utiliser dès lors que l'on a de nombreuses contraintes. La mise en œuvre d'une approche structurée 4 blocs représente une vraie nouveauté pour ce type de problème. Nous avons quatre pondérations $W_S, W_T, W_{GS}, W_{K'S}$ à déterminer pour traiter notre problème. Nous avons procédé de la façon suivante :

- Le transfert S est pondéré pour garantir une marge de module satisfaisante, i.e. proche de 6 dB. La pondération W_S est choisie statique. Cette spécification est classique mais essentielle

car une marge de module qui serait par exemple -10 dB serait préjudiciable et conduit généralement à une boucle fermée instable indépendamment de tout autre spécification ;

- Le transfert GS est pondéré pour assurer un contrôle actif des modes résonnants. Pour cela on a choisi une contrainte dynamique $1/W_{GS}$ du type cloche, ce qui permet à la fois de réduire significativement la norme H_∞ du transfert tout en contenant la norme H_2 ;
- Le transfert K'_1S est classiquement utilisé pour obtenir du *roll-off* pour tenir compte à la fois des bruits de mesure et des dynamiques négligées. Très clairement on n'a pas de spécification de ce type dans notre problème. Pour autant on a structuré le compensateur de façon à ce qu'il soit propre en imposant un terme direct nul. C'est notre 2^{ème} contrainte de structure. Donc naturellement K'_1S se comporte comme K'_1 en hautes fréquences et on a donc naturellement du *roll-off*. Pour éviter une commande irréaliste seule une très légère contrainte sous la forme d'un gabarit statique est rajoutée ;
- Le transfert T est par définition fixé par $1+S$. Néanmoins on peut combiner sur des bandes de fréquences différentes des contraintes sur S et T . Pour garantir $K(0) \approx 0$ on peut utiliser une contrainte dynamique au travers de $1/W_T(s)$ qui a alors un comportement du type dérivateur. Une autre possibilité serait d'utiliser des filtres dérivateurs en post/pré compensation de G_0^0 à la façon du *loop shaping*. Cette technique n'a pas été utilisée car elle est plus complexe du point de vue méthodologique. La dernière possibilité est offerte par l'approche structurée car elle permet d'imposer explicitement, et non implicitement au travers d'un gabarit, un dérivateur pur dans le compensateur K'_1 . Cette approche est la plus directe et la plus facile. Elle a été aussi utilisée et en terme de résultat elle garantit exactement $K(0) = 0$ en plus de sa simplicité. C'est la 3^{ème} contrainte de structure que l'on peut imposer.

3.4.3 Résultats sur le contrôle d'un écoulement dans une cavité

Les réponses temporelles ont été obtenues en résolvant les équations de Navier-Stokes à deux dimensions en incompressible par la mise en œuvre du logiciel à éléments finis FreeFem++ (www.freefem.org). Les variables de pression et du champs de vitesse sont discrétisées sur un maillage d'approximativement 200 000 éléments, conduisant à un total de 700 000 degrés de liberté. La simulation complète dure plusieurs jours.

Nous allons nous intéresser en terme de résultats aux réponses fréquentielles basées sur les modèles LTI moyens. La figure 3.12 montre clairement le résultat obtenu sur le modèle LTI basé sur les champs moyens interconnecté au compensateur. Elle illustre parfaitement la méthodologie utilisée à la 1^{ère} itération et qui sera utilisée pour toutes les autres itérations. La figure 3.13 illustre le comportement non-linéaire de l'écoulement. En effet en traits pointillés on a le résultat de la synthèse sur le modèle moyen qui correspond au comportement de la boucle fermée non-linéaire hors équilibre aux premiers instants de l'ajout du compensateur. Néanmoins ce compensateur va modifier l'écoulement et ce dernier va s'établir sur un nouvel équilibre dynamique caractérisé par le modèle moyen représenté en traits pleins.

Nous allons montrer maintenant les réponses temporelles en boucle ouverte et fermée de l'écoulement non-linéaire. La figure 3.14 montre le comportement de l'écoulement en insérant de façon itérative le compensateur. Cet ajout se fait nécessairement une fois la valeur moyenne des signaux stabilisée. C'est, comme nous l'avions indiqué, une condition nécessaire à la validité des modèles moyens. On constate à la dernière itération la convergence exponentielle de la sortie y vers le point fixe.

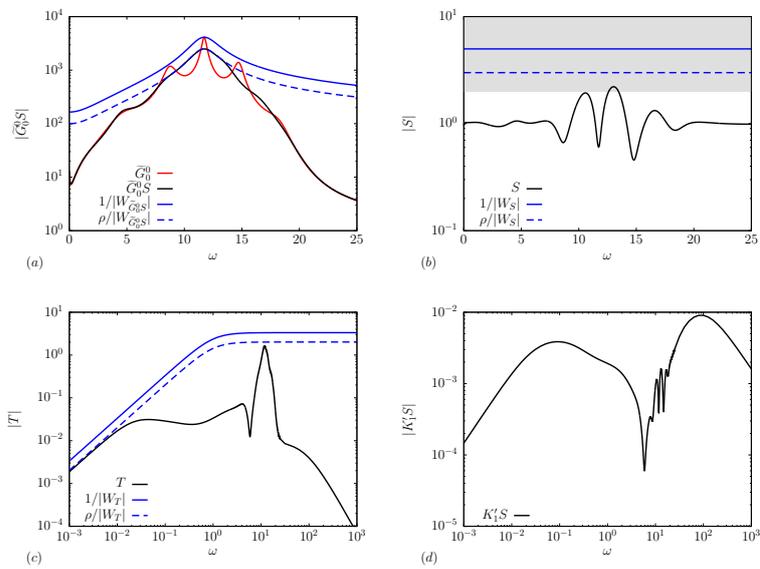


FIGURE 3.12 – Réponses fréquentielles des fonctions de transfert en boucle fermée avec le modèle de synthèse (courbes noires) : (a) $\tilde{G}_0^0 S$, (b) S , (c) T , (d) $K_1' S$. Les contraintes fréquentielles $\rho/|W_{GS}|$, $\rho/|W_S|$, $\rho/|W_T|$ sont représentées en bleue, ($\rho/|W_{K_1' S}|$ n'est pas représenté sur la figure (d) car c'est une contrainte faiblement active est située bien au delà du maximum de $|K_1' S|$), avec une ligne continue pour $\rho = 1$ et en pointillés pour $\rho = 0.6$, la solution obtenue à l'issue de la résolution du problème H_∞ . Sur la figure (b), la région grisée représente la contrainte à 6 dB sur la marge de module.

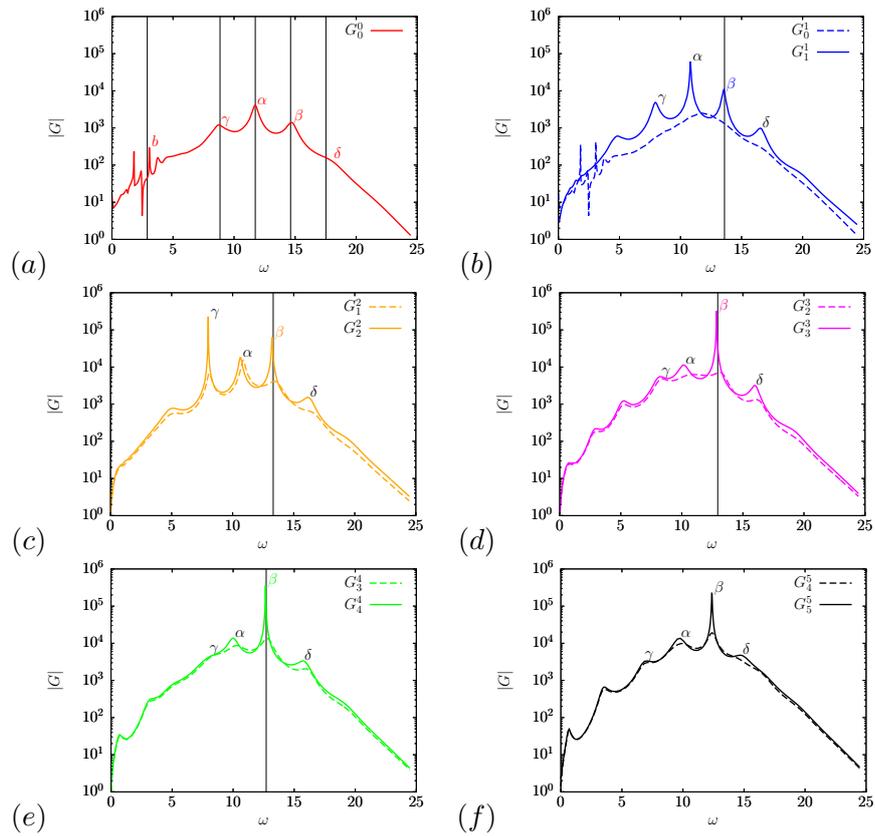


FIGURE 3.13 – Évolution de la réponse fréquentielle du modèle moyen de synthèse G durant la synthèse itérative. Les courbes en traits pleins représentent le résultat de la synthèse. Pour la figure (a) il s'agit simplement de la boucle ouverte soit G_0^0 . Pour toutes les autres figures, à l'itération m , le compensateur K_m conduit à la boucle fermée G_{m-1}^m . Une fois que le compensateur K_m est appliqué, cette nouvelle boucle fermée non-linéaire tend vers un nouvel équilibre dynamique qui peut être représenté par un nouveau modèle moyen LTI G_m^m . Ce modèle sert alors de modèle de synthèse pour l'itération $m + 1$. On remarque clairement le comportement non-linéaire de l'écoulement. A la dernière itération $m = 5$ malgré la présence de pics de résonance G_5^5 est stable ainsi que le point fixe des équations de Navier-Stokes. Les lignes verticales représentent les modes de Koopman obtenus par DFT sur la sortie y de l'écoulement non-linéaire [65].

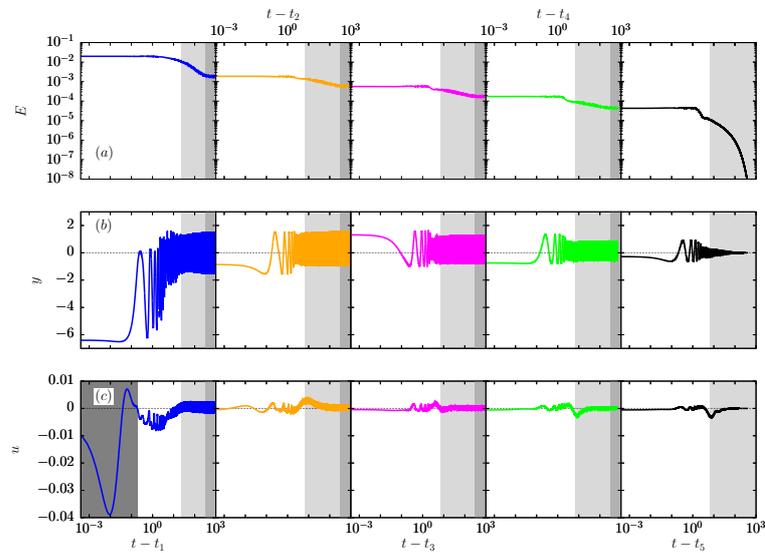


FIGURE 3.14 – Ces simulations temporelles montrent E , y et u pour chaque itération. On constate pour chacune nouvelle itération des oscillations sur y qui s’atténuent, une convergence progressive de l’énergie vers 0, et un signal de commande qui se réduit. A la dernière itération le modèle moyen et le point fixe sont stabilisés par le compensateur, l’ensemble des signaux convergent exponentiellement vers 0.

Ce dernier a été stabilisé à la 5^{eme} itération. C’est une condition nécessaire mais pas suffisante. Dans le cas présent l’écoulement était suffisamment proche de ce point fixe pour être dans le bassin d’attraction de ce dernier une fois stabilisé par le compensateur.

3.5 Synthèse sans modèle

[17] F. Demourant, G. Ferreres, and J. Biannic. Falsification of an aircraft autopilot. ACC 02, 2002.

[28] P. Kergus. Data-driven model reference control in the frequency-domain : From model reference selection to controller validation. PhD thesis, ISAE - Supaero, 2019.

[29] P. Kergus, S. Formentin, C. Poussot-Vassal, and F. Demourant. Data-driven control design in the loewner framework : Dealing with stability and noise. In Proceedings of the European Control Conference 2018, pages 1704-1709, 06 2018.

[30] P. Kergus, M. Olivi, C. Poussot-Vassal, and F. Demourant. From reference model selection to controller validation : Application to loewner data-driven control. IEEE Control Systems Letters, 3(4) :1008-1013, Oct 2019.

[31] P. Kergus, C. Poussot-Vassal, F. Demourant, and S. Formentin. Frequency-domain data-driven control design in the loewner framework. In Proceedings of IFAC 2017, volume 50, pages 2095-2010, 2017. 20th IFAC World Congress.

Nous évoquerons dans cette section la synthèse sans modèle que j'ai utilisée que de façon relativement limitée. La 1^{ère} approche a été développée par M.G. Safonov dans les années 90. Elle est appelée dans la littérature *falsification* en anglais. La traduction littérale en français serait falsification, ce qui signifie rendre faux. Pour être plus précis et explicite sur cette approche, le principe est d'évaluer un ensemble discret de compensateurs candidats (10,100,1000...) par une seule expérience, et à l'issue de cette expérience unique, on détermine le meilleur compensateur candidat. Pour réaliser cela on s'appuie sur la notion de référence fictive. Cet type d'approche peut être utilisé dans le cas *off line* ou *on line*. Nous verrons par la suite un peu plus précisément son fonctionnement. Nous l'illustrerons très brièvement par deux exemples. La 2^{ème} approche est basée sur la notion de modèle de référence. En bref à partir des données fréquentielles issues du modèle, on va chercher à construire la réponse fréquentielle idéale du compensateur pour satisfaire au mieux la réponse fréquentielle du modèle de référence. Cette réponse fréquentielle du compensateur est ensuite utilisée pour construire la représentation d'état associée. Cette technique a surtout été utilisée dans le cadre de mon activité de recherche pour illustrer les sous-espaces fréquentsiels et non pas comme un axe de recherche majeur pour moi. A ce titre je n'évoquerai que très brièvement l'approche au travers de quelques publications et de résultats.

Plus généralement l'approche sans modèle est extrêmement intéressante mais elle reste très complémentaire de l'approche basée modèle. En effet cette dernière s'appuie sur de solides outils mathématiques pour garantir avec un certain niveau de confiance de bonnes propriétés de la boucle fermée du système. Néanmoins la mise en œuvre de ces outils mathématiques nécessitent un travail important, une mise en forme spécifique et beaucoup de temps. Si cela est tout à fait envisageable pour des systèmes complexes, coûteux et critiques (avions, navires, satellites, lanceurs etc...), cela devient compliqué d'investir autant de temps et finalement d'argent pour des systèmes faiblement critiques. Ainsi on peut envisager plusieurs cas de figure qui rend la commande sans modèle tout à fait pertinente :

- Le cas des drones de petites dimensions est assez représentatif de cette classe de systèmes. Une approche très expérimentale peut s'avérer largement suffisante pour obtenir une loi de commande satisfaisante sans passer par un modèle recalé en soufflerie et mis sous forme LFT...Modèle mathématique, qui lui même, peut réclamer des semaines de travail. Effectivement on aura une solution qui n'offrira peut être pas toutes les garanties nécessaires. Mais si on ne s'intéresse qu'à un un petit drone la perte de celui-ci n'est pas critique du point de vue humain ou financier. Ainsi une approche basée données qui court-circuite la modélisation est-elle tout à fait pertinente.
- Les systèmes académiques qui seraient très compliqués à modéliser, comme par exemple des écoulements fluides comme nous l'avons vu. Une approche basée données peut s'avérer pertinente. Du fait de l'aspect académique, il n'y a pas de critère explicite de sécurité. L'approche basée données évite une longue et complexe étape de modélisation pour la commande, permettant ainsi d'obtenir des résultats à moindre coût. Ceci étant, dès lors que l'on va chercher à analyser des résultats, cela peut s'avérer difficile voire impossible puisque n'ayant pas de modèle à disposition.
- Une approche sans modèle peut s'avérer très intéressante aussi en tant qu'outil d'analyse ou de retouche de lois de commande basées modèle. On peut avoir une loi de commande

initiale stabilisante basée modèle que l'on va chercher à améliorer à partir de données issues du système qui lui, est par nature, non-linéaire, incertain et à temps variant.

3.5.1 Quelques principes sur la falsification

L'approche dite de falsification consiste à trouver une formulation mathématique qui nous permette de distinguer clairement les informations que l'on peut déduire des données expérimentales et celles déduites des hypothèses de modélisation/identification. En bref on cherche à faire la distinction entre les compensateurs invalidés à cause des hypothèses de modèle et ceux invalidés à partir des données issues du système. Généralement les approches classiques d'analyse de lois sont basées sur des entrées/sorties du modèle qui ne sont pas toutes réalisables par le vrai système. Ici il s'agit de montrer que les données expérimentales sont cohérentes avec les critères de performance et les lois de commande. En résumé ces techniques ne présentent pas le conservatisme inhérent des techniques classiques d'analyse en boucle fermée. A contrario, si l'approche n'est pas conservative, elle est en pratique optimiste car elle peut considérer comme valide une loi alors qu'elle ne l'est pas si les données expérimentales ne sont pas suffisamment riches. Par riche on sous-entend capables d'exciter toutes les dynamiques du système. Cette hypothèse est considérée comme satisfaite en théorie, mais il faut garder à l'esprit cette "limitation" lorsque l'on met en œuvre ces techniques sur de vrais systèmes.

Cette technique s'articule autour de trois grands principes :

1. On utilise un ensemble généralement discret et fini de compensateurs candidats obtenus typiquement à partir de la dispersion des coefficients d'un compensateur initial ;
2. A partir des données d'entrées/sorties du système on calcule pour chaque compensateur candidat ce que l'on appelle une référence fictive. En bref, si on insérait le compensateur candidat avec la référence fictive associée, on reproduirait exactement le comportement entrées/sorties de la boucle fermée ;
3. A partir des données d'entrées/sorties et de la référence fictive, on peut évaluer des critères de stabilité ou de performance basés sur la norme l_2 induite par exemple, mais d'autres choix sont possibles.

A partir de ces trois éléments nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Dans chacun des points précédents on n'utilise pas de modèle, on ne fait que récupérer les données d'entrées/sorties à partir desquelles on calcule une référence fictive pour chaque compensateur candidat ;
- Les données d'entrées/sorties peuvent être des données expérimentales ou des données simulées obtenues d'un simulateur qui peut être non-linéaire, instationnaire, etc...
- Les données d'entrées/sorties obtenues du système peuvent l'être en boucle ouverte ou en boucle fermée. Il n'y a aucune hypothèse de faite sur la nature du modèle et de l'expérience. Si c'est en boucle fermée, généralement on utilise le compensateur initial qui sert à la construction de l'ensemble des compensateurs admissibles, mais ce choix est juste méthodologique. Pour générer les données d'entrées/sorties en boucle fermée on peut aussi utiliser un compensateur qui ne fait pas partie de l'ensemble candidat défini précédemment.

L'approche non-adaptative est l'approche originelle développée dans les années 90. On entend par non-adaptative que le choix du compensateur ne se fait pas forcément en ligne et que le compensateur obtenu est un compensateur LTI.

Nous allons présenter en quelques théorèmes et définitions les principes mathématiques qui sous-tendent l'approche [84, 85, 9, 6]. Cette partie est simplifiée et résumée par rapport à ce que l'on retrouve dans la littérature. Il s'agit ici de présenter les notions qui permettent d'appréhender facilement et rapidement l'approche. Rappelons simplement que la falsification a pour but de discriminer les compensateurs à partir des données expérimentales afin de choisir celui ou ceux qui correspondent au mieux aux spécifications. L'approche décrite dans la littérature est basée sur une représentation ensembliste des signaux. Ici on n'évoquera pas ces notions là mais on présentera le principe de base à savoir la référence fictive, qui est essentielle à la falsification, et le critère qui permet de discriminer et ordonner les compensateurs entre eux en fonction des résultats obtenus.

L'approche consiste comme nous l'avions évoqué à évaluer un ensemble discret de compensateurs en fonction d'un critère du type l_2 .

- Nous supposons un ensemble discret de compensateurs candidats K_i où i est un entier tel que $i \in [1..N]$ où N est le cardinal de cet ensemble ;
- On réalise une expérience en boucle ouverte ou en boucle fermée avec un compensateur stabilisant de façon à récupérer les données d'entrées/sorties $u(t)$ et $y(t)$ du système au cours d'une expérience avec $t \in [0, t_{fin}]$ où t_{fin} est la fin de l'expérience ;
- Pour chaque compensateur K_i , en supposant une structure de loi de commande très classique du type $u = K(y - r)$, on calcule une référence fictive $r_i(t)$ de la façon suivante :

$$r_i = y - K_i^{-1}u \quad (3.19)$$

On récupère ainsi pour chaque compensateur K_i à la fin de l'expérience, i.e. lorsque $t = t_{fin}$, une référence fictive $r_i(t)$. A chaque compensateur K_i on associe un signal $r_i(t)$;

- Le critère est un critère du type

$$J_i(r_i, u, y, t) = \|w_1 * (y - r_i)\|_{L_2[0,t]}^2 + \|w_2 * u\|_{L_2[0,t]}^2 - \|r_i\|_{L_2[0,t]}^2. \quad (3.20)$$

Il est donc possible de l'évaluer à chaque instant et pour chaque référence fictive. On peut le tracer pour suivre son évolution et l'utiliser pour discriminer et ordonner les compensateurs entre eux pour en extraire le ou les meilleurs. w_1 et w_2 correspondent à des pondérations ou des pénalités sur les signaux, pondérations qui sont déterminées en fonction du cahier des charges, de façon très similaire à ce que l'on a dans la synthèse H_∞ .

On peut faire quelques remarques concernant les points présentés. Comme indiqué, la seule condition pour mettre en œuvre une expérience est que le système soit stable en boucle ouverte ou boucle fermée. Si un compensateur stabilisant est utilisé, il n'est pas nécessairement inclus dans l'ensemble des compensateurs candidats K_i . L'ensemble K_i est construit à partir d'un compensateur initial inversement stable, qui est censé être connu, par une discrétisation plus ou moins fine de certains paramètres du compensateur. Par exemple si on a un PID, à partir de la valeur nominale du gain proportionnel, intégral et dérivé, ces derniers sont discrétisés autour des valeurs nominales plus ou moins finement suivant le nombre de compensateurs candidats K_i que l'on cherche à évaluer. La référence fictive suppose l'inversibilité du compensateur est donc qu'il soit propre. Le PID est

une forme classique qui satisfait à cette contrainte. Plus généralement il suffit que l'inverse à gauche existe. Le critère qui est présenté n'est pas unique, on peut en trouver de nature différente dans la littérature [10] par exemple. Celui qui est présenté ici est le critère historique que l'on retrouve dans les premiers articles. De plus il s'interprète facilement et il correspond dans le cas linéaire aux transferts en boucle fermée S et KS . En bref le critère combine un terme de performance pondéré par w_1 et un terme associé à l'effort de commande pondéré par w_2 . Il peut servir à ordonner les compensateurs entre eux en fonction de la valeur de J au cours du temps mais aussi, de façon plus binaire, à les éliminer si J devient positif par exemple. En bref on l'utilise comme on le souhaite.

Cette approche est proposée *off-line*, i.e. on attend la fin de l'expérience, on récupère u et y , on calcule pour chaque K_i les signaux r_i qui servent ensuite à évaluer $J_i(t)$ pour chaque compensateur. Mais il existe depuis les années 2000 une version adaptative, appelée UAC (*Unfalsified Adaptive Control*) qui permet sur un ensemble discret de compensateurs de choisir le plus approprié en fonction de l'état du système. Ces algorithmes, on peut en compter 3 principaux, ϵ -hystérésis [90, 101], LICLA [49], et *Stability Overlay* [82, 83] sont basés sur l'approche de la falsification. Modulo certaines hypothèses dont évidemment l'existence d'un compensateur solution dans l'ensemble des compensateurs candidats K_i , les algorithmes adaptatifs convergent. Pour autant, certaines difficultés peuvent apparaître avant de converger vers la solution [16].

Pour résumer, l'approche dite de falsification est extrêmement intéressante à plus d'un titre. Elle s'adresse à des systèmes non-linéaires, LPV, à commutation, finalement peu importe, du moment que l'on peut générer une expérience à l'issue de laquelle on récupère u et y qui correspondent respectivement aux entrées et sorties du système. L'évaluation du critère est relativement simple et suffisamment générique pour s'appliquer à une large classe de problèmes. Bien évidemment il ne s'agit pas d'évaluer un cahier des charges très complexe comme celui d'un lanceur ou d'un avion du type *BWB*, mais comme nous l'avons énoncé, ce type d'approche ne s'adresse pas à ces problèmes là. Le choix en ligne ou hors ligne se fait en fonction de l'évaluation du critère en utilisant la notion de référence fictive. Finalement la seule contrainte est la structure du compensateur qui doit être linéaire et inversible à gauche pour évaluer la référence fictive. L'autre point est l'aspect un peu aléatoire de la construction de l'ensemble admissible par discrétisation de certains paramètres du compensateur. Il peut s'avérer que les choix qui sont faits ne soient pas pertinents et que cela nécessite une recherche plus approfondie.

3.5.2 Synthèse sans modèle basée sur un modèle de référence

L'autre approche basée sans modèle représente une sorte d'approche duale à l'identification de modèles puisque l'on va identifier un compensateur dans le domaine fréquentiel. Cette section sera relativement brève car elle ne représente qu'une application originale de l'approche des sous-espaces fréquentiels. Dans cette approche, appelée VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*), proposée par l'université de Milan [11] le principe est le suivant :

- On récupère les données d'entrées/sorties du système, $u(t)$ et $y(t)$. Une transformée du type DFT ou FFT est alors appliquée pour obtenir $U(j\omega)$ et $Y(j\omega)$.
- Un modèle de référence $M(s)$ est choisi. Typiquement un 1^{er} ordre ou un second ordre bien amorti représente un modèle de référence classique ;
- Le modèle de référence étant choisi, à partir de $U(j\omega)$ et $Y(j\omega)$, on peut déterminer une réponse idéale fréquentielle du compensateur telle que la boucle fermée, typiquement la fonction

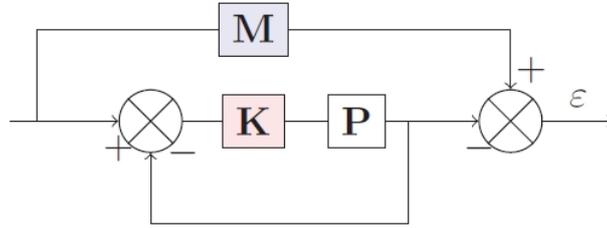


FIGURE 3.15 – Schéma de principe de la synthèse sans modèle basée sur un modèle de référence.

de sensibilité complémentaire $T(j\omega) = M(j\omega)$, $K^*(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Y(j\omega)} M(j\omega)(1 - M(j\omega))^{-1}$;

- Une fois la réponse idéale $K^*(j\omega)$ obtenue, il s'agit de construire la représentation d'état réalisable et stable, et donc la fonction de transfert $K(s)$, telle que $K^*(j\omega)$ soit aussi proche que possible de $K(j\omega)$, et idéalement identique. Dans le contexte de la VRFT, généralement les pôles sont choisis a priori et les zéros sont optimisés.

C'est ce qui a été représenté par figure 3.15 où l'on cherche à déterminer K tel que la boucle fermée représentée par T soit $T = M$. La contribution ici est d'utiliser l'approche des sous-espaces pour la construction de $K(s)$ à partir de $K^*(j\omega)$ au lieu d'utiliser un choix de pôles a priori, ce qui représente toujours une difficulté méthodologique majeure avec un risque d'être relativement loin de la solution optimale et de devoir utiliser une approche essai-erreur pour réduire ce risque. Une approche qui fournit directement et explicitement une représentation d'état et donc un $K(s)$, représente alors un avantage certain par rapport à une paramétrisation choisie a priori. Notons qu'il est possible aussi d'utiliser des techniques d'interpolation du type Loewner au lieu d'une technique issue de l'identification [61]. Mais elle semble moins efficace dans le cas bruité même s'il est possible de contourner en partie la difficulté comme dans [59] mais sans aucune garantie sur le débiaisage de l'estimée. De plus le cas MIMO se semble pas évident pour les approches du type Loewner.

La difficulté majeure de ce type d'approche, puisque la construction d'une représentation d'état du compensateur à partir de données fréquentielles est parfaitement traitée par des techniques issues de l'identification, est le choix du modèle de référence. Le choix de ce dernier est crucial. En effet comme indiqué dans [60], le modèle de référence doit contenir les zéros et les pôles instables du système à commander sans quoi le compensateur sera amené à être instable et à non-minimum de phase, ne garantissant pas la stabilité interne de la boucle fermée et sans garantir non plus la stabilité de la boucle fermée. Par extension, il est même nécessaire d'estimer les modes faiblement amortis du système pour les inclure dans le modèle de référence. En bref il est impératif d'inclure dans $M(s)$ beaucoup d'informations sur le système.

Soit ces informations sont connues, soit elles doivent être estimées. Dans le cas général elles ne sont pas connues, il est donc nécessaire de les estimer. Pour les estimer une technique appelée PISA¹ est utilisée. Cette technique est basée sur la construction d'une matrice d'observabilité étendue à partir de $U(j\omega)$ et $Y(j\omega)$, et à partir de celle-ci l'information sur les pôles instables et les zéros instables

1. PISA Toolbox (2018). INRIA Sophia-Antipolis, <https://project.inria.fr/pisa/>

(en utilisant l'inverse du système $U(j\omega)/Y(j\omega)$) est extraite. Néanmoins, en se référant à la section 2.2.1, on constate que cette approche est identique à celle proposée dans les sous-espaces et on pourrait tout aussi bien utiliser la première étape des sous-espaces pour extraire les pôles ou zéros instables par une SVD de la matrice d'observabilité étendue. En faisant cela on a fait la moitié, voire les trois-quarts de l'identification du système. Il ne reste plus qu'à trouver B et D par optimisation convexe sur une relation entrées/sorties affine en B et D . Dans ce contexte il devient compliqué de parler de technique basée données ou d'approche directe. Elle ne peut être que semi-directe car on est obligé d'estimer la partie instable du système et de son inverse comme si on estimait la matrice d'état $A_{instable}$ et $A_{instable}^{-1}$. L'obtention de C étant triviale il ne reste donc plus que B et D .

Outre ce fait, l'approche par modèle de référence telle qu'elle est présentée ici et dans [56], s'inscrit finalement dans un cas profondément linéaire pour le système à commander puisque l'on travaille par fonctions de transfert. Ce système doit être relativement simple car on doit estimer ses modes et zéros instables. Dans ce contexte, cette approche est finalement peu intéressante et pertinente par rapport à une approche basée modèle sur laquelle on appliquerait une identification par les sous-espaces par exemple. Le choix du modèle de référence est beaucoup trop contraignant pour en être pertinent. L'intérêt finalement des études qui ont été menées sur ce thème [56] est grand car même si la pertinence de ce type d'approche est assez limitée, cela a permis de clarifier et montrer ces limites.

Notons que dans le cas de systèmes non-linéaires, l'université de Milan propose une approche en deux étapes. Une première est basée sur l'estimation de la non-linéarité, estimée qui est inversée de façon robuste permettant ainsi de linéariser l'ensemble du système à contrôler. La boucle fermée constituée du système non-linéaire compensé par la non-linéarité devient linéaire et tout à fait appropriée pour une synthèse linéaire basée données comme la VRFT.

3.5.3 Quelques résultats sur l'approche sans modèle

3.5.3.1 Falsification

Dans cette section nous montrerons 2 résultats. Le 1^{er} concerne une application qui avait été réalisée sur un simulateur non-linéaire sous Matlab d'un auto-pilote d'un A330 en phase d'atterrissage. La 2^{ème} application concerne toujours la falsification mais appliquée dans un contexte adaptatif basé sur un algorithme appelé dans la littérature *LICLA* (*Linear Increasing Cost Level Algorithm*). Pour les deux applications nous serons brefs, les résultats ne sont présentés que pour illustrer le principe et non pour présenter l'ensemble des résultats. Dans le cas appliqué à l'auto-pilote d'un A330, il s'agissait d'évaluer la loi de commande linéaire à partir des données issues du simulateur non-linéaire [28]. On tient compte des diverses non-linéarités statiques du type secteur qui interviennent sur les actionneurs et capteurs et de l'effet de sol qui apparaît dès que l'appareil est proche de la piste. Il était aussi possible de tenir compte des différents cas de masse et de centrage mais nous n'entrons pas dans le détail.

L'ensemble des compensateurs candidats a pour taille 81. Pour cela, 4 coefficients considérés comme importants pour le compensateur, ont leur valeur modifiée de $\pm 50\%$ par rapport à leur valeur nominale, ce qui nous conduit à $3^4 = 81$ compensateurs candidats. On a pris en compte 6 critères notés J_1, \dots, J_6 qui correspondent à des transferts en boucle fermée représentatifs des spécifications. Ils sont dans leur forme générale tout à fait similaires au critère (3.20). Le tableau 3.5 illustre un

certain type de résultats que l'on peut obtenir pour 2 types de signaux d'excitations, 2 gabarits différents, et 6 critères. L'utilisation des critères est, dans ce cas là assez basique, puisque ils sont évalués à chaque instant et dès que l'un des 6 critères pour un compensateur parmi les 81 devient positif, le compensateur est dit falsifié et donc considéré comme non valide. A ce titre les figures 3.16 illustrent l'évolution d'un critère parmi les 6 en fonction de γ qui représente l'inverse du poids de la contrainte/spécification. Plus le γ est faible plus la contrainte devient difficile à satisfaire, plus le maximum du critère augmente, et dès qu'il devient positif, le compensateur est éliminé. Notons que l'approche est réalisée *off line*, l'objectif étant de retoucher le compensateur initial afin de mieux satisfaire aux contraintes imposées par la simulation non-linéaire.

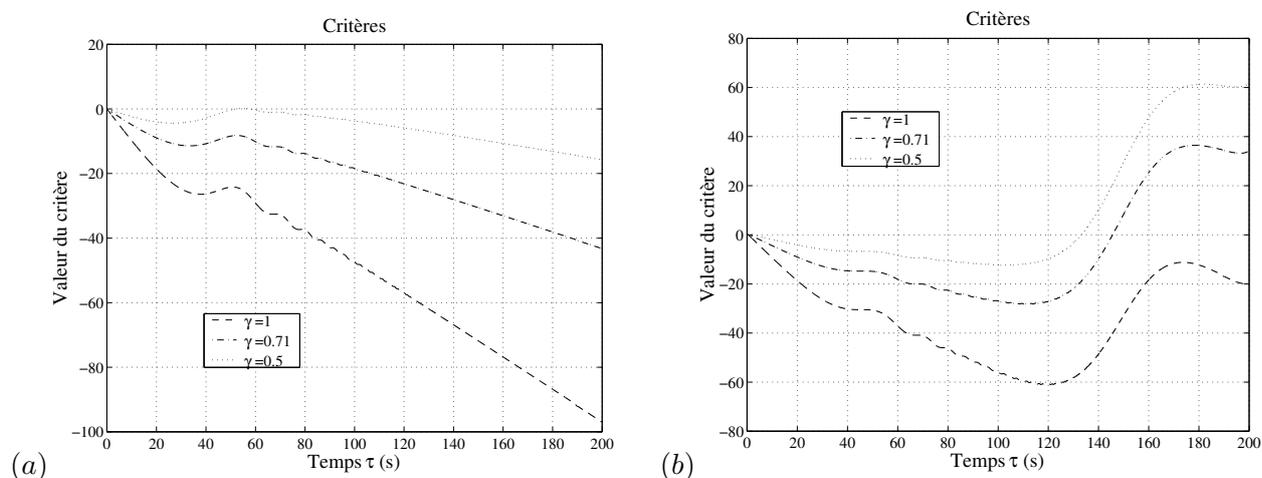


FIGURE 3.16 – Exemple d'évolution du critère en fonction du temps et du poids de la contrainte et donc de la spécification. Pour la figure (a) on constate qu'avec une forte contrainte le critère reste négatif, le compensateur associé à ce critère est donc validé. Pour la partie (b), à partir de $\gamma = 0.71$ le critère est positif. Donc en contraignant plus fortement le transfert en boucle fermé associé à ce critère, le compensateur qui correspond à ce critère est éliminé des compensateurs candidats.

Dans le cas adaptatif, cette fois-ci le choix du compensateur se fait en ligne en fonction des mesures réalisées. Pour illustrer l'approche adaptative, ici c'est l'algorithme *LICLA* qui est utilisé, le simulateur non-linéaire sous Matlab représente un drone pour lequel intervient une panne aileron (figure 3.17). Cette panne bloque l'aileron à une position fixe. La loi nominale n'est plus satisfaisante. L'idée est de basculer automatiquement à une loi dite de sauvegarde. Pour cela, les 2 lois de pilote automatique sont embarquées et c'est l'algorithme *LICLA* qui, en fonction des mesures, décide de basculer sur la loi de sauvegarde. On parle aussi de reconfiguration de loi. Tout cela est réalisé exclusivement à partir de données sans embarquer de modèle. En effet il est compliqué d'embarquer un tel modèle, du fait de la qualité des modèles mais surtout de la capacité très limitée des calculateurs embarqués dans ce type d'appareil.

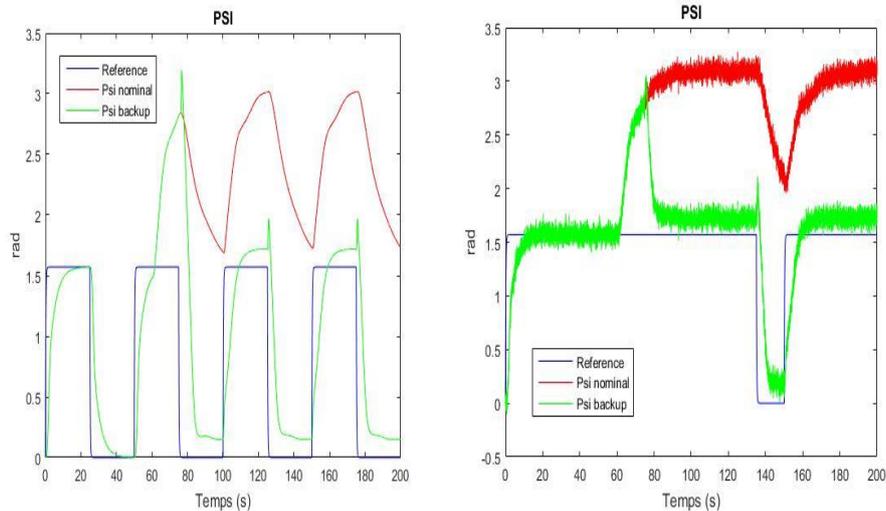


FIGURE 3.17 – Exemple d’approche adaptative de la falsification. Le pilote automatique doit suivre une consigne en cap appelée Ψ . A 60s intervient la panne aileron. La loi nominale ne parvient plus à poursuivre la consigne. L’algorithme LICLA compare les 2 critères associés à chacun des compensateurs et à 75s décide de basculer sur le compensateur de sauvegarde qui permet de retrouver une situation certes dégradée mais suffisante pour maintenir un cap approximatif. Le cas (a) représente la simulation sans bruit, le cas (b) avec.

3.5.3.2 Synthèse sans modèle basée sur un modèle de référence

Le cas considéré est relativement classique en automatique puisqu’il correspond au benchmark des poulies (figure 3.18(a)). Ce cas est SISO, mal amorti et à non-minimum de phase du fait de 4 zéros instables. On peut montrer que si on utilise un modèle de référence basique du type 2^{nd} ordre bien amorti, on trouvera un compensateur qui sera instable et ne garantira donc pas la stabilité interne. En bref ce compensateur permet d’avoir une fonction de sensibilité complémentaire T parfaite mais possédant des propriétés pas acceptables. Il est donc nécessaire d’estimer les zéros instables afin de les inclure dans le modèle de référence [56, 60]. Il est alors possible d’obtenir un compensateur stable qui ne compense pas les zéros instables du système. On obtient alors la simulation temporelle figure 3.18(a). On constate une dégradation du comportement de la boucle fermée mais cela est nécessaire pour éviter une compensation pôles-zéros et une absence totale de robustesse. Comme indiqué précédemment le résultat est tout à fait satisfaisant mais il a un coup qui est l’estimation

Gabarit sur $S_{pours_{2..}}$	$1/W_{32,2}$ ("lent")		$1/W'_{32,2}$ ("rapide")	
Type de signal consigne V_c	échelon	sinusoïde "descendante"	échelon	sinusoïde "descendante"
Nombre de compensateurs falsifiés	36	27	58	64
Par : J_1	0	0	0	0
J_2	36	27	0	0
J_3	0	0	0	0
J_4	0	0	0	0
J_5	0	0	0	0
J_6	0	0	58	64
Nombre de compensateurs falsifiés exclusivement avec ce signal	9	0	4	10
Nombre total de compensateurs falsifiés sur les 2 simulations	36		68	

TABLE 3.5 – Exemple de simulation que l'on peut mener où l'on part de 81 compensateurs, 6 critères et 2 gabarits et on applique deux signaux d'excitation différents pour couvrir le domaine fréquentiel. Au final, parmi les 81 compensateurs, 36 sont éliminés pour le gabarit le plus lent et 68 pour le plus rapide.

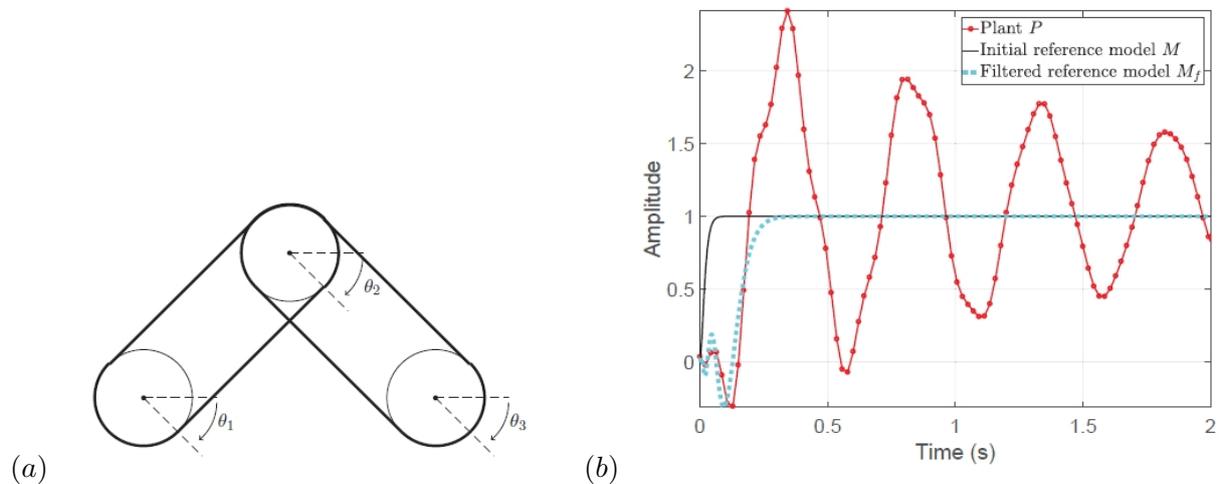


FIGURE 3.18 – La figure (a) représente le système flexible des poulies qui a été traité. La figure (b) fournit la réponse temporelle du système (rouge), du compensateur instable obtenu à partir d'un modèle de référence du type 2^{nd} ordre bien amorti (noir) et du compensateur stable avec un modèle de référence filtre qui contient les zéros instables du système (cyan).

des instabilités du système, ce qui s'avère être relativement proche de l'identification de modèle. Notons que des cas plus complexes ont été traités mais en se basant toujours sur une estimation des

pôles et zéros instables d'un modèle LTI [56].

3.6 Conclusion

Au travers des différents exemples utilisés nous avons pu mettre en œuvre 3 techniques, et finalement 3 méthodologies différentes de synthèse H_∞ . Par synthèse H_∞ on sous-entend synthèse qui traite explicitement de la minimisation de la norme H_∞ au travers des critères H_∞ . Nous avons donc mis en œuvre l'approche dite classique ou historique basée sur [34] pour la synthèse d'une loi de pilotage d'un avion souple du type A380. On s'est intéressé à la fois aux qualités de vol, au confort et au contrôle de charge pour la partie aéroserveoélastique, et à la robustesse pour assurer la stabilité face aux incertitudes liées à l'erreur d'identification. Cette approche historique apparaît comme efficace car même mono-critère, elle est capable de fournir une loi de commande qui satisfait à un cahier des charges multiobjectifs. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué, elle a quelques limites. Tout d'abord on traite que de la norme H_∞ d'un gros transfert MIMO qui correspond à l'ensemble des entrées/sorties de la boucle fermée que l'on doit considérer. Outre le fait que cela induit un certain conservatisme, du point de vue méthodologique cela peut conduire à quelques difficultés, car on va pondérer involontairement des transferts croisés qui ne nous intéressent pas forcément. De plus on a qu'un seul critère du type H_∞ pour traiter d'une multitude de spécifications, modales, temporelles, H_2 etc... Même si on a pu montrer qu'on obtenait un résultat satisfaisant, cela nécessite un certain nombre d'itérations et d'ajustements des pondérations avant d'avoir un résultat qui convienne. Et enfin l'ordre de compensateur est plein, i.e. qu'il correspond à l'ordre du modèle de synthèse augmenté de la dynamique des pondérations. Plus généralement il nous est impossible d'imposer explicitement une structure, quelle qu'elle soit, sur le compensateur.

La 2^{ème} approche H_∞ basée sur la paramétrisation de Youla, appelée dans la littérature [7] synthèse convexe, a été utilisée dans le cadre d'un projet européen pour le contrôle d'une avion civil de grande taille du type aile volante ou *BWB*. Le principal attrait de cette approche est d'être clairement multicritère puisque l'on peut traiter de critères du type H_∞ , H_2 , l_∞ , tout en ayant la possibilité de combiner contraintes et minimisations. De plus elle permet de traiter indépendamment chaque transfert ce qui allège significativement l'ajustement des pondérations. Elle a permis d'obtenir des résultats très intéressants sur un problème complet et complexe qui combinait un grand nombre de spécifications tant au niveau des qualités de vol que du contrôle des charges. Même si on parle de synthèse H_∞ elle traite simultanément un grand nombre de critères de nature différente. Néanmoins la synthèse par paramétrisation de Youla impose quelques contraintes. Elle nécessite une structure de lois de commande qui fasse apparaître le paramètre de Youla. La structure classique est une structure du type retour d'état estimé. Elle nécessite aussi un 1^{er} compensateur stabilisant pouvant se mettre sous la forme d'un retour d'état estimé. Généralement le compensateur initial est obtenu par une approche du type LQG. On ne peut pas modifier les pôles de la boucle fermée initiale par propriété du paramètre de Youla, ils sont fixés par la synthèse initiale. L'approche nécessite une paramétrisation a priori et explicite du paramètre de Youla, la technique se charge d'optimiser alors les zéros. L'ordre du compensateur obtenu peut se révéler élevé. Avec ce type de méthodologie on s'intéressera plutôt à un problème de faisabilité que d'implémentation. On pourra montrer par exemple qu'à partir d'un certain ordre, ou de façon équivalente, d'une certaine taille du paramètre de Youla, on n'améliore plus le compromis obtenu par la boucle fermée.

La 3^{eme} approche est une version récente de la synthèse H_∞ , dite structurée [4]. Elle permet de combiner finalement les avantages de l'approche classique de la synthèse H_∞ tout en étant suffisamment riche pour intégrer un grand nombre de critères différents. On retrouve les critères classiques du type H_2 , mais aussi des critères de passivité, temporels, modaux pour le compensateur et la boucle fermée. Elle traite très naturellement de la synthèse multimodèle et intègre des spécifications dites de *co-design* qui permettent de synthétiser à la fois la loi de commande et d'optimiser certaines variables de conception du modèle. Elle est dite structurée car on peut imposer n'importe quelle structure au compensateur que l'on cherche à synthétiser. Dans le cas de l'application de l'écoulement dans une cavité ouverte, on a mis en œuvre qu'un nombre limité de ces propriétés, en l'occurrence on a utilisé essentiellement des contraintes de structure pour s'assurer du bon comportement de la boucle fermée non-linéaire. Ce type de synthèse représente une certaine rupture, puisque l'approche proposée est clairement non-convexe ce qui tranche significativement avec l'approche par paramétrisation de Youla et la synthèse H_∞ classique. Néanmoins, sur les problèmes traités, il n'y a pas en pratique de difficultés liées à des minima locaux, ce qui conduirait à une méthodologie compliquée à mettre en œuvre et qui dépendrait fortement d'un point d'initialisation. Même si la solution dépend du point d'initialisation choisi par l'algorithme, le comportement global est transparent et s'apparente aux techniques précédemment citées sans difficulté majeure liée à l'aspect local de la solution.

En ce qui concerne la synthèse sans modèle, elle offre une vraie alternative pertinente dans un certain nombre de contextes, que nous avons d'ailleurs évoqués. Le cas de la reconfiguration d'une loi de commande d'un drone à partir de données entrées/sorties représente une bonne illustration d'une approche basée données plutôt que modèle. L'obtention d'un modèle pour ce type de drone représente un investissement en temps trop lourd et la capacité de calcul embarquée est trop limitée pour intégrer des techniques de reconfiguration basées modèle. L'évaluation d'un critère construit sur la norme 2 d'un signal comme critère de reconfiguration apparaît comme une solution très adaptée. L'approche basée sur la réponse fréquentielle d'un modèle de référence est très séduisante. Néanmoins elle est relativement compliquée à mettre en œuvre dans le cas général puisqu'il est nécessaire d'intégrer dans le modèle de référence un grand nombre d'informations sur le système comme les pôles et les zéros instables. Une façon pratique de simplifier le choix de ce modèle de référence est de partir d'un compensateur initial stabilisant, qui peut être nul dans le cas d'un système stable en boucle ouverte. Il ne resterait alors qu'à estimer les zéros instables s'il y en a. De plus, intrinsèquement ce type d'approche basée sur la notion de fonction de transfert s'intéresse essentiellement aux systèmes assez fortement linéaires. Dans un cas non-linéaire il faut prévoir une première boucle qui linéarise le système. Indépendamment des points soulevés ci-dessus, la technique des sous-espaces fréquents pour construire la représentation d'état du compensateur, à partir d'un modèle de référence de la boucle fermée, améliore significativement la méthodologie.

Chapitre 4

Analyse en robustesse

4.1 Contexte

Pour analyser une large classe de problèmes en stabilité, typiquement des problèmes non-linéaires, temps-variants, incertains, l'approche IQC représente une technique intéressante. Cette approche qui est apparue sous une forme moderne dans les années 90 [72], peut être vue comme la fusion de deux techniques d'analyse en robustesse : l'approche du petit gain et son extension la μ -analyse [36] et les approches basées sur la positivité/passivité qui étudient l'interconnexion d'un opérateur LTI avec une non-linéarité (problème de Lur'e). Finalement par l'approche IQC on est capable d'analyser des problèmes de nature très différente, à savoir la stabilité et la performance robuste de l'interconnexion $M(s) - \Delta$ d'un opérateur LTI $M(s)$ avec un modèle structuré d'incertitude Δ contenant des non-linéarités, des paramètres incertains, des paramètres à temps variant, des dynamiques négligées, des retards etc...

Le principe de mise en œuvre consiste à remplacer chaque bloc de Δ par une description IQC des entrées/sorties, i.e. que les entrées/sorties de chaque bloc (par exemple une non-linéarité du type secteur) sont supposées satisfaire un ensemble d'IQC [72, 52]. Plus la description par une IQC est fine, moins le résultat est conservatif. Ce type d'approche est intéressante pour deux raisons. Elle inclut au sein d'un même formalisme un large ensemble de théorèmes en stabilité linéaires et non-linéaires. Finalement l'approche IQC peut être vue comme une approche unificatrice. De plus, cette approche unifiée est basée sur une description entrées/sorties à la fois par la représentation IQC des blocs Δ mais aussi par le théorème en stabilité qui en découle comme on le verra par la suite.

Comme nous l'avons présenté en introduction on s'intéresse ici à une représentation synthétique basée sur l'évaluation d'un critère de stabilité du type $\Phi(\omega)M\Phi(\omega) < 0$, où $\Phi(\omega)$ représente la partie dynamique et linéaire de la boucle fermée et M les variables de décision qui correspondent au problème à analyser. Cette condition est finalement relativement facile à vérifier pour un certain nombre de fréquences. Dans le cas particulier où cette condition représente le critère de Popov, il suffit de tracer en ω le diagramme de Popov pour vérifier graphiquement si la condition est vérifiée. Ce problème est à ce titre tout à fait comparable à déterminer graphiquement si une fonction est convexe ou pas comme nous l'avons illustré en introduction du document. L'équivalent analytique est obtenu par application du lemme de KYP qui permet de transformer ce critère synthétique en un critère analytique et donc calculable. Ce critère est basé sur un calcul de valeurs propres et

donc sur de l'algèbre linéaire. Cet équivalent analytique peut poser problème dans le cas de systèmes de grande dimension mais nous verrons ce point ultérieurement. Mais surtout il est contraint à une représentation rationnelle de notre condition de stabilité. Cette représentation rationnelle n'est absolument pas nécessaire dans le critère synthétique $\Phi(\omega)M\Phi(\omega) < 0$. L'approche analytique est certes calculable mais plus contraignante. Ici la représentation graphique de $\Phi(\omega)M\Phi(\omega)$ est moins contraignante et permet de répondre plus facilement à la question de la stabilité. Mais comme nous l'avons évoqué, l'approche synthétique n'est pas exempte de défaut car dans le cas général, même si elle suppose moins d'hypothèse, elle est difficilement calculable. Pour avoir un outil numérique qui s'appuie sur une représentation synthétique/graphique il est nécessaire de vérifier la condition $\Phi(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ en chaque $\omega \in R$. Ce qui est impossible à faire numériquement, sauf à travailler sur un maillage et à supposer que celui-ci est suffisamment représentatif du continuum de fréquences. La question est de savoir comment ajouter une "dose" d'analytique dans ce critère synthétique de façon à le rendre plus intéressant, i.e. toujours simple dans son principe, à savoir une représentation fréquentielle/graphique, tout en proposant une résolution numérique/mathématique propre et complète. C'est l'objet de ce chapitre où on va montrer qu'en utilisant certains résultats bien connus en μ -analyse, il est possible de proposer une approche basée synthétique mais avec un certificat garantissant la validité du résultat sur un continuum de fréquence, rendant ainsi la condition à satisfaire $\Phi(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ calculable à un coût que l'on peut qualifier d'acceptable pour nos applications.

4.2 Principe de l'approche IQC

Une IQC décrit une relation entre les signaux d'entrées/sorties d'un opérateur. C'est donc un moyen de caractériser un opérateur. Ces contraintes peuvent être définies dans le domaine temporel ou fréquentiel puisque ces formulations sont équivalentes. Néanmoins l'approche fréquentielle est plus souvent utilisée, ce qui conduit à obtenir des conditions de stabilité plus faciles à manipuler. La définition d'une IQC ci-après est donnée dans le domaine fréquentiel.

Definition 2 Deux signaux respectivement de dimension m et p , de carrés sommables sur $[0, \infty[$ i.e. :

$$v \in L_2^m[0, \infty[, \quad w \in L_2^p[0, \infty[$$

satisfont l'IQC définie par Π si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad (4.1)$$

où $\hat{v}(j\omega)$ et $\hat{w}(j\omega)$ correspondent respectivement à la transformée de Fourier de v et w tel que $w = \Delta v$.

A priori l'opérateur Π , appelé multiplicateur, défini de jR dans $C^{(m+p) \times (m+p)}$ peut être n'importe quelle fonction hermitienne. Dans la majorité des cas, il suffit d'utiliser un opérateur rationnel borné sur l'axe imaginaire ou H_2 .

Le système linéaire $G(s)$ est supposé RH_∞ , le problème consiste donc à analyser la boucle fermée représentée par la figure 4.1 où Δ est un opérateur causal et borné qui peut être non-linéaire et instationnaire. Supposons que les entrées/sorties de Δ satisfont l'IQC définie par Π . Le résultat suivant est extrait de [72].

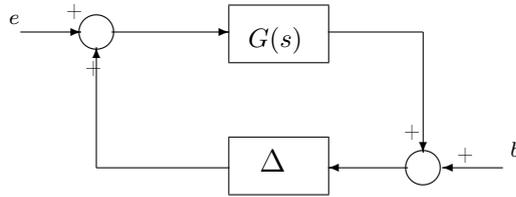


FIGURE 4.1 – Interconnexion pour l’analyse en stabilité.

Theorem 2 *Supposons que :*

- l’interconnexion de G stable et $\tau\Delta$ est bien posée pour tout $\tau \in [0, 1]$,
- $\tau\Delta$ satisfait l’IQC définie par Π , $\forall \tau \in [0, 1]$,
- il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I \quad (4.2)$$

alors la boucle fermée représentée par la figure (4.1) est stable.

Il est important de remarquer que si $\tau\Delta$ satisfait plusieurs IQC Π_1, \dots, Π_n , alors une condition suffisante pour la stabilité est qu’il existe $x_1, \dots, x_n \geq 0$ tel que l’inégalité (4.2) est satisfaite pour $\Pi = x_1\Pi_1 + \dots + x_n\Pi_n$.

La proposition suivante est très utile pour considérer le cas à plusieurs multiplicateurs [52, 53]

Proposition 2 *Supposons une structure bloc-diagonale $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ où chaque Δ_i satisfait l’IQC définie par Π_i . Alors Δ satisfait l’IQC définie par $\Pi = \text{daug}(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ où l’opérateur daug est défini comme suit. Si*

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Pi_{i1} & \Pi_{i2} \\ \Pi_{i2}^* & \Pi_{i3} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

alors

$$\text{daug}(\Pi_1, \Pi_2) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Pi_{11} & 0 & \Pi_{12} & 0 \\ 0 & \Pi_{21} & 0 & \Pi_{22} \\ \hline \Pi_{12}^* & 0 & \Pi_{13} & 0 \\ 0 & \Pi_{22}^* & 0 & \Pi_{23} \end{array} \right] \quad (4.4)$$

4.3 Quelques exemples d’IQC

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté le principe des IQC et le critère en stabilité qui en découle. Dans ce paragraphe nous illustrerons de manière simple la notion de multiplicateurs à quelques cas particuliers et bien connus de la communauté de la commande robuste.

4.3.1 Non-linéarités statiques du type secteur

Considérons une non-linéarité sans effet mémoire, statique, continue par morceau en t . Elle est du type secteur si elle satisfait la condition de secteur.

Definition 3 Une non-linéarité sans effet mémoire $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite satisfaire une condition du type secteur si

$$(w - \underline{k}v)^T(w - \bar{k}v) \leq 0 \quad (4.5)$$

où \underline{k} et \bar{k} sont des gains qui représentent les limites du secteur et v et $w = \psi(v)$ les entrées/sorties de la non-linéarité.

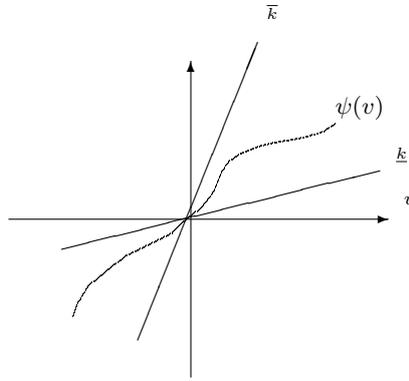


FIGURE 4.2 – Non-linéarités du type secteur global.

Cette définition est illustrée par la figure 4.2 dans le cas SISO. L'équation (4.5) peut être formulée de la façon suivante :

$$\forall t > 0, \quad \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2\underline{k}\bar{k} & \underline{k} + \bar{k} \\ \underline{k} + \bar{k} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.6)$$

Comme l'intégrale de cette fonction est positive, alors du fait de l'équivalence temps fréquence (théorème de Parseval) on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2\underline{k}\bar{k} & \underline{k} + \bar{k} \\ \underline{k} + \bar{k} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad (4.7)$$

En bref $\Pi_{sector} = \begin{bmatrix} -2\underline{k}\bar{k} & \underline{k} + \bar{k} \\ \underline{k} + \bar{k} & -2 \end{bmatrix}$. La stabilité de la boucle fermée qui correspond à l'interconnexion de $G(s)$ avec une non-linéarité du type secteur (\underline{k}, \bar{k}) par un feedback positif est garantie si

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -2\underline{k}\bar{k} & \underline{k} + \bar{k} \\ \underline{k} + \bar{k} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.8)$$

Nous retrouvons à partir de l'inégalité (4.8) le critère du cercle. Il suffit de prendre $\underline{k} = 0$, $\bar{k} = k$ et G en $-G$ (puisque le critère du cercle est formulé avec un retour négatif) et on obtient la relation bien connue $Re(G) \geq -\frac{1}{\bar{k}}$ pour un secteur $(0, k)$.

4.3.1.1 Critère de Popov

Le critère de Popov est largement utilisé pour ce type d'analyse non-linéaire. Rappelons que dans le cas SISO le critère de Popov s'écrit :

$$Re((1 + j\lambda\omega)G(j\omega)) > -\frac{1}{\bar{k}} \quad (4.9)$$

Si nous utilisons la représentation de Popov, le tracé de $Re[G(j\omega)]$ versus $\omega Im[G(j\omega)]$, la stabilité de la boucle fermée est garantie si le tracé de Popov de $G(j\omega)$ évolue à droite d'une ligne qui intercepte le point $-1/\bar{k} + 0j$ avec une pente $1/\lambda$.

En bref considérons une non-linéarité avec un secteur $(0, k)$, s'il existe λ telle que l'équation (4.9) est satisfaite alors la boucle fermée qui correspond à l'interconnexion de G avec la non-linéarité est stable.

Le multiplicateur qui satisfait à l'IQC associée au critère de Popov est [72, 51] :

$$\Pi_{Popov} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & j\omega \\ -j\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Le multiplicateur, pour une non-linéarité statique est

$$\Pi = x\Pi_{sector} + \Pi_{Popov} :$$

$$\Pi = x\Pi_{sector} + \Pi_{Popov} = \begin{bmatrix} -2x\underline{k}\bar{k} & x\bar{k} + x\underline{k} + j\lambda\omega \\ x\bar{k} + x\underline{k} - j\lambda\omega & -2x \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Plus on est capable d'associer de multiplicateurs à un bloc Δ , plus le multiplicateur décrira finement Δ , mais l'approche est conservative. Comme précédemment il suffit de prendre $\bar{k} = k$, $\underline{k} = 0$ et $G = -G$ pour retrouver le critère de Popov de l'équation (4.9) dans le cas SISO.

Remark 9 *Pour comparer le critère de Popov avec l'approche IQC il est important de garder à l'esprit que dans le contexte des IQC le feedback est positif tandis que le critère du cercle/Popov s'exprime dans sa définition originelle avec un feedback négatif. Il est alors nécessaire de multiplier la partie linéaire G par -1 pour passer de l'écriture IQC au critère du cercle/Popov.*

Remark 10 *Le cas où l'on considère un secteur $(0, 1)$ n'est pas du tout restrictif puisque n'importe quel secteur (\underline{k}, \bar{k}) peut être ramené à un secteur $(0, 1)$ par le théorème de transformation de boucle [62].*

Remark 11 *Pour un secteur $(0, +\infty)$ il n'est pas judicieux de remplacer k par une valeur très élevée comme $1e6$, $1e9$ en espérant être représentatif du cas $+\infty$ pour des raisons évidentes de*

conditionnement numérique du multiplicateur. Pour traiter de ce cas, considérons un modèle LTI $G(s)$ interconnecté par un feedback négatif à une non-linéarité statique de secteur $(0, +\infty)$. Le cas SISO montre que le tracé de Popov/Nyquist doit évoluer à droite du point $(-1/k) = 0$ dans notre cas. Pour retrouver un secteur normalisé $(0, 1)$ il suffit de remplacer la partie linéaire $G(s)$ par $\tilde{G}(s) = G(s) - 1$, ce qui équivaut à déplacer le Nyquist de G vers le point -1 . Pour préserver l'équivalence des boucles fermées cette transformation de la partie linéaire doit être compensée par une transformation "équivalente" sur la partie non-linéaire. Celle-ci correspond à un rebouclage de la non-linéarité sur elle-même par un feedback négatif dû fait du feedback négatif de la boucle fermée. Cette transformation conduit à un gain $\tilde{k} = \frac{k}{1+k}$. On constate donc que lorsque $k = \infty$ alors $\tilde{k} = 1$ ce qui nous permet de revenir à un secteur $(0, 1)$. Ce type de transformation reste valide dans le cas MIMO, puisqu'il suffit de l'appliquer pour chaque canal dans le cas où l'opérateur non-linéaire est diagonal.

4.3.1.2 Prise en compte de la dérivée de la non-linéarités du type secteur

Un multiplicateur plus général a été développé dans [75]. L'avantage de ce multiplicateur est de prendre en compte les caractéristiques des pentes de la non-linéarité statique et donc de réduire le conservatisme du multiplicateur de Popov. Le multiplicateur pour une non-linéarité statique φ de secteur $(0, k)$ et de pente $(0, \beta)$ est :

$$\Pi_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & kx + j\omega\lambda + \omega^2\beta\gamma \\ kx - j\omega\lambda + \omega^2\beta\gamma & -2x - 2\omega^2\gamma \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec $x, \gamma \geq 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\gamma = 0$ on retrouve le multiplicateur de Popov.

4.3.2 Incertitude dynamique

Considérons une incertitude dynamique LTI $\Delta(s)$ telle que $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$. L'IQC qui correspond à l'incertitude dynamique est

$$\Pi_\Delta = \begin{bmatrix} X(j\omega) & 0 \\ 0 & -X(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

avec $X(j\omega) = x(j\omega)I = X(j\omega)^* = x^*(j\omega)I > 0$. Il est intéressant de remarquer l'équivalence de cette formulation avec la borne supérieure du μ dans le cas d'incertitudes dynamiques. Plus précisément pour assurer la stabilité de la forme $M - \Delta$, il suffit de trouver $D = D^* > 0$ où D commute avec Δ tel que [33] :

$$\begin{aligned} & \|DMD^{-1}\| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\lambda_{\max}(DMD^{-1})^*(DMD^{-1})} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & (DMD^{-1})^*DMD^{-1} \leq I \\ \Leftrightarrow & MD^*DM \leq D^*D \\ \Leftrightarrow & M^*XM \leq X \end{aligned}$$

avec $X = D^*D$ et $G = M$, on retrouve l'inégalité (4.2) avec Π_Δ .

4.3.3 Incertitude réelle

Supposons que $\Delta = \delta I$ où δ représente une incertitude réelle répétée de valeur absolue ≤ 1 . Le multiplicateur qui correspond à une incertitude réelle est :

$$\Pi_\delta = \begin{bmatrix} X(j\omega) & Y(j\omega) \\ Y^*(j\omega) & -X(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

avec $X(j\omega) = X(j\omega)^* > 0$ et $Y(j\omega) = -Y(j\omega)^*$. Si Π_δ est utilisé dans l'inégalité (4.2), on retrouve la borne supérieure du μ mixte avec $G = M$, $X = D$ et $Y = -jG_s$ [36] (remarquons que $Y^* = -Y \Leftrightarrow G_s = G_s^*$) ce qui est en accord avec la borne supérieure du μ mixte. Notons que G_s est appelé G dans la définition du μ et correspond au *scaling* qui prend en compte la nature réelle de δ .

4.4 Paramétrisation IQC

Dans la section précédente nous avons présenté brièvement quelques IQC associées aux problèmes les plus "classiques". On retrouve au travers des IQC, la formulation classique des théorèmes en stabilité du type cercle et Popov ainsi que la borne supérieure du μ dans le cas d'incertitudes réelles et complexes. Mais cette liste est loin d'être exhaustive, elle a été présentée pour illustrer l'approche par rapport à ce qui est bien connu en automatique. Mais on peut trouver dans la littérature [48, 69, 63, 78] des IQC associées aux modèles polytopiques, aux modèles LTV/LPV, aux modèles non-linéaires représentés par les multiplicateurs de Zames et Falb etc...

Dans cette section on affine ce qui a été présenté précédemment en décrivant la paramétrisation nécessaire à implémenter pour résoudre le problème d'optimisation LMI associé. A partir de cette paramétrisation, un multiplicateur global est construit et réécrit sous une forme dite factorisée, i.e. dans laquelle les parties dynamiques et fixes sont séparées des parties statiques qui correspondent aux variables d'optimisation. Notons que toute cette partie n'a de sens que pour une formulation rationnelle des multiplicateurs. Dans le cas d'une représentation non-rationnelle de ces derniers, les éléments que nous avons présentés jusqu'ici sont suffisants pour appliquer directement l'algorithme décrit dans la section 4.5.2. Nous appelons ici représentation non-rationnelle le cas de multiplicateurs qui ne sont pas définis par une représentation de type fonction de transfert explicite.

4.4.1 Non-linéarités statiques du type secteur

L'IQC associée à une non-linéarité statique du type secteur $(0, k)$ est la suivante :

$$\Pi_{sector} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & -2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\Pi_{Popov} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & j\omega \\ -j\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda \in R \quad (4.16)$$

Finalement on obtient le multiplicateur

$$\Pi_\varphi = x\Pi_{sector} + \Pi_{Popov} = \begin{bmatrix} 0 & xk + j\omega\lambda \\ xk - j\omega\lambda & -2x \end{bmatrix}, \quad x \geq 0, \quad \lambda \in R \quad (4.17)$$

On constate dans cette dernière formulation que les variables de décision x et λ apparaissent de façon affine dans le multiplicateur. Si on utilise la condition sur la dérivée de la non-linéarité $(0, \beta)$ on obtient le multiplicateur suivant :

$$\Pi_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & kx + j\omega\lambda + \omega^2\beta\gamma \\ kx - j\omega\lambda + \omega^2\beta\gamma & -2x - 2\omega^2\gamma \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.4.2 Incertitude complexe/dynamique

Comme indiqué précédemment le multiplicateur associé est :

$$\Pi_\Delta = \begin{bmatrix} X(j\omega) & 0 \\ 0 & -X(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

La résolution de $X(j\omega)$ est basée sur la paramétrisation suivante :

$$X(j\omega) = \tilde{R}(j\omega)^* U \tilde{R}(j\omega) = R(j\omega)^* R(j\omega) \quad (4.20)$$

avec $\Delta(j\omega) \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $U = U^T$, $\tilde{R}(j\omega) = \text{blkdiag}(F, F, \dots, F)$ où F est répété n fois, avec $F = [1; \text{filter}_1; \dots; \text{filter}_r]$. Typiquement ces filtres sont des filtres passe-bas du 1^{er} ordre. U est donc la matrice de décision.

4.4.3 Incertitude réelle

Dans ce cas le multiplicateur est :

$$\Pi_\delta = \begin{bmatrix} X(j\omega) & Y(j\omega) \\ Y^*(j\omega) & -X(j\omega) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

On utilise la paramétrisation suivante pour $X(j\omega)$ and $Y(j\omega)$:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \tilde{R}(j\omega)^* U \tilde{R}(j\omega) = R(j\omega)^* R(j\omega) \\ Y(j\omega) &= V \tilde{S}(j\omega) - \tilde{S}(j\omega)^* V^T = S - S^* \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec $\Delta = \delta I_n$, $\tilde{R}(j\omega) = \tilde{S}(j\omega) = [I_n; \text{filter}_1 \times I_n; \text{filter}_2 \times I_n; \dots; \text{filter}_r \times I_n]$, $U = U^T$. Remarquons que cette paramétrisation est cohérente avec $X(j\omega) = X(j\omega)^*$ et $Y(j\omega) = -Y(j\omega)^*$. Nous constatons que les matrices de décisions U et V apparaissent de façon affine.

4.4.4 Forme factorisée

La paramétrisation étant donnée précédemment, il s'agit de factoriser le problème afin de mettre en œuvre l'optimisation LMI. Le principe de la factorisation est de séparer la partie connue dynamique ou statique de la partie statique à optimiser.

4.4.4.1 Non-linéarité statique

Dans le cas du multiplicateur Π_φ du critère de Popov on a :

$$\Pi_{Popov} = \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$x\Pi_{secteur} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

où finalement :

$$\Pi_\varphi = \Psi_\varphi^* M(x, \lambda) \Psi_\varphi = \Psi_\varphi^* \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix} \Psi_\varphi \quad (4.25)$$

$$\text{et } \Psi_\varphi = \begin{bmatrix} \Psi_{Popov} \\ \Psi_{secteur} \end{bmatrix}, \Psi_{Popov} = \begin{bmatrix} j\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Psi_{secteur} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } M(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

On constate clairement que l'on a regroupé la partie connue dans Ψ_φ et toutes les variables de décision dans $M(x, \lambda)$. Dans le cas où on prend en compte le pente de la non-linéarité, nous aurions eu une écriture similaire.

4.4.4.2 Incertitude réelles et complexes LTI

Dans le cas où l'on considère le multiplicateur Π_δ :

$$\begin{aligned} \Pi_\delta &= \begin{bmatrix} X(j\omega) & Y(j\omega) \\ Y(j\omega)^* & -X(j\omega) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \Pi_\delta &= \begin{bmatrix} R(j\omega) & 0 \\ 0 & R(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(j\omega) & 0 \\ 0 & R(j\omega) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & S(j\omega) \\ -S(j\omega) & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \\ V^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & S(j\omega) \\ -S(j\omega) & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \Pi_\delta &= \Psi_\delta(j\omega)^* \text{diag} \left(\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \\ V^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \Psi_\delta(j\omega) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \Psi_\delta(j\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_U(j\omega) \\ \Psi_V(j\omega) \end{bmatrix}, \Psi_U(j\omega) = \begin{bmatrix} R(j\omega) & 0 \\ 0 & R(j\omega) \end{bmatrix} \text{ est } \Psi_V(j\omega) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & S(j\omega) \\ -S(j\omega) & 0 \end{bmatrix}.$$

4.4.4.3 Cas incertain et non-linéaire

En combinant les deux formes factorisées précédemment obtenues on a le multiplicateur :

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Psi^*(j\omega) M(\lambda, x, U, V) \Psi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

avec

$$M(\lambda, x, U, V) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \\ V^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.27)$$

est $\Psi(j\omega) = \begin{bmatrix} \Psi_\varphi^a & 0 & \Psi_\varphi^b & 0 \\ 0 & \Psi_\delta^a & 0 & \Psi_\delta^b \end{bmatrix}$ où $\Psi_{\varphi,\delta} = [\Psi_{\varphi,\delta}^a \quad \Psi_{\varphi,\delta}^b]$ est structuré pour être cohérent avec avec M . On n'a pas fourni explicitement le cas d'une incertitude réelle et complexe mais seulement réelle. S'il y avait eu une incertitude complexe en plus, on aurait un U différent pour chaque cas, U_δ et U_Δ par exemple. Dans le cas d'une incertitude seulement complexe alors $V = 0$. La forme finale factorisée est :

$$\begin{aligned} & \Lambda(j\omega)^* \Psi(j\omega)^* M(\lambda, x, U, V) \Psi(j\omega) \Lambda(j\omega) \\ & = \Phi(j\omega)^* M(\lambda, x, U, V) \Phi(j\omega) \end{aligned}$$

avec $\Lambda = \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}$ et $\Phi(j\omega) = \Lambda(j\omega)^* \Psi(j\omega)$.

4.5 Résolutions du problème

4.5.1 Approche état

L'approche classique pour résoudre le problème de faisabilité LMI (4.2) est basée sur le lemme de Kalman-Yakubovitch-Popov qui est présenté ci-dessous.

Lemma 1 *Considérons M une matrice symétrique, A, B, C, D une représentation d'état de Φ tel que $\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ et $\forall \omega \in \mathbb{R} \det(j\omega I - A) \neq 0$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes : (i) la contrainte quadratique*

$$\forall \omega \quad \Phi(j\omega)^* M \Phi(j\omega) < 0 \quad (4.28)$$

est satisfaite

(ii) il existe $P = P^T > 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} < 0$$

Le point important est que la seconde proposition peut être facilement résolue car il s'agit d'un problème de faisabilité LMI. Nous constatons que cette inégalité ne dépend pas de la fréquence mais qu'une nouvelle matrice d'optimisation P est apparue. En d'autres termes un ensemble infini de contraintes fréquentielles a été remplacé par une seule inégalité matricielle avec une nouvelle matrice d'optimisation P . Pour résoudre le problème de faisabilité représenté par le critère en stabilité (4.2) dans le théorème 2 il suffit d'utiliser une forme factorisée :

$$\sum_{i=1} x_i \Pi(j\omega) = \Psi(j\omega)^* M \Psi(j\omega) \quad (4.29)$$

où M est une matrice symétrique et structurée en fonction du problème considéré. Cette matrice contient toutes les variables de décision. Avec

$$\Phi(j\omega) = \Psi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = C(j\omega I - A)^{-1} B + D \quad (4.30)$$

le lemme précédent permet de transformer l'ensemble infini d'inégalités (4.2) en une seule LMI contenant les matrices d'optimisation P et M

4.5.2 Approche fréquentielle

- [2] F. Demourant. New algorithmic approach based on integral quadratic constraints for stability analysis of high order models. In Control Conference (ECC), 2013 European, pages 359-364, July 2013.
- [27] P. Vuillemin, F. Demourant, J.-M. Biannic, and C. Poussot-Vassal. Stability analysis of a set of uncertain large-scale dynamical models with saturations : Application to an aircraft system. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 25(2) :661-668, March 2017.

4.5.2.1 Principes

Comme indiqué précédemment le critère en stabilité est basé sur des inégalités dépendantes de la fréquence. Dans ces conditions l'approche la plus classique pour traiter ce problème est d'utiliser le lemme de KYP. Rappelons que ce lemme est à la source du lemme borné réel et du lemme positif réel qui ont la particularité de transformer une contrainte fréquentielle, et donc un ensemble infini de contraintes, en une contrainte LMI. Ces lemmes sont donc particulièrement utiles et précieux dans le domaine de l'automatique. Ils permettent de transformer un critère synthétique en un critère analytique et donc calculable. Néanmoins cette transformation n'est pas gratuite, elle a un coût qui s'appelle matrice de Lyapunov, appelée P . Or le nombre de variables de décisions scalaires dans P augmente quadratiquement comme n , où n représente l'ordre de la représentation d'état de M . Comme l'ordre de M correspond à l'ordre de la boucle fermée à analyser augmentée de la dynamique des multiplicateurs, même si l'ordre du système à analyser est limité au départ, l'ordre de M peut fortement augmenter en introduisant des multiplicateurs dynamiques.

Différentes approches basées sur la matrice Hamiltonienne [55, 76, 77] sont proposées pour minimiser ce problème. D'autres références proposent de nouveaux multiplicateurs ou des nouvelles méthodologies pour améliorer les résultats [48, 78, 69, 63]. Ici une approche alternative est mise en œuvre. Elle est finalement relativement attractive du fait de sa simplicité conceptuelle. De plus l'approche proposée utilise le solveur LMI de Matlab qui est très commun et accessible dès que l'on utilise Matlab. En bref l'implémentation qui est proposée est totalement contenue dans l'environnement Matlab.

La technique utilisée dans le cadre des IQC est extraite de ce qui a été fait et implémenté dans le contexte de la μ -analyse. Du point de vue algorithmique lorsque une solution est obtenue, dans notre cas lorsque le critère de stabilité est satisfait, elle est sur un ensemble discret et fini de fréquences. Pour valider le critère sur un continuum de fréquences, le critère de stabilité est mis sous la forme d'une LFT pour faire apparaître la fréquence ω comme un paramètre incertain réel dans le bloc Δ_ω de la LFT. Le domaine de validité continu est calculé autour des points du maillage fréquentiel à l'aide d'une approche algébrique extraite de [89] et adaptée à notre problème [39, 18]. Si le domaine de validité est $[0, +\infty[$ la solution est valide sur tout le domaine fréquentiel. Sinon, des fréquences pour lesquelles le critère en stabilité n'est pas satisfait sont rajoutées itérativement comme contraintes dans le problème de faisabilité LMI, ce qui revient à enrichir le maillage initial. Une nouvelle solution est recherchée, si celle-ci est obtenue, un domaine de validité est calculé autour des fréquences rajoutées et ainsi de suite. S'il existe une fréquence pour laquelle le critère de stabilité ne peut être satisfait alors le problème est considéré comme infaisable, modulo le choix qui a été fait des multiplicateurs. En bref le problème de stabilité est reformulé comme un problème de faisabilité LMI où les contraintes fréquentielles sont ajoutées itérativement. Finalement le nombre de variables de décisions est complètement indépendant de l'ordre de la boucle fermée ce qui rend attractif ce genre d'approche pour des systèmes de grande dimension [18].

4.5.2.2 Quelques éléments techniques

Comme indiqué dans la précédente section l'idée de base est de construire une LFT qui contient la fréquence ω comme paramètre réel incertain. Le problème consiste à trouver une matrice complexe S pour une fréquence strictement positive ω_0 tel que

$$\Xi(j(\omega_0 + \delta\omega)) = F_l(S(\omega_0), \delta\omega I_m) \quad \forall \delta\omega \geq -\omega_0$$

où $\Xi(s)$ est un système dynamique, $(A_\Xi, B_\Xi, C_\Xi, D_\Xi)$ une représentation d'état de $\Xi(s)$ et m l'ordre de $\Xi(s)$. De plus on peut montrer que :

$$\Xi(j(\omega_0 + \delta\omega)) = F_l(\Xi_0, \frac{I_m}{\omega_0 + \delta\omega}) \quad \forall \omega \geq -\omega_0$$

avec

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} D_\Xi & \frac{C_\Xi}{\sqrt{j}} \\ \frac{B_\Xi}{\sqrt{j}} & -jA_\Xi \end{pmatrix}$$

De plus on remarque que :

$$\frac{I_m}{\omega_0 + \delta\omega} = F_l(T, \delta\omega I_m)$$

avec :

$$T = \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ -I_m & -I_m \end{pmatrix}$$

En bref nous obtenons une LFT d'une LFT :

$$\begin{aligned} \Xi(j(\omega_0 + \delta\omega)) &= F_l(\Xi_0, F_l(T, \delta\omega I_m)) \quad \forall \omega \geq -\omega_0 \\ &= F_l(S(\omega_0), \delta\omega I_m) \end{aligned}$$

où $S(j\omega_0)$ peut être écrit comme suit :

$$S(\omega_0) = \begin{pmatrix} D_\Xi & \frac{C_\Xi}{\sqrt{j}} \\ \frac{B_\Xi}{\sqrt{j}} & -jA_\Xi \end{pmatrix} * \left(\frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & -I \end{pmatrix} \right)$$

où $*$ est le produit étoile de Redheffer. Rappelons que le produit étoile de Redheffer correspond à l'interconnexion de deux LFT. Ce type de résultat est largement utilisé en μ -analyse.

La proposition suivante va nous permettre d'évaluer le domaine de validité de la solution obtenue autour d'une fréquence ω_0

Proposition 3 *si $\bar{\sigma}(\Xi(\omega_0)) < 1$ alors $\bar{\sigma}(F_l(S(\omega_0), \delta\omega I_m)) < 1$ reste vraie pour $\omega_0 + \delta\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ où $\underline{\omega}$ and $\bar{\omega}$ sont calculés comme suit :*

$$S(\omega_0) = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} I & S_{11} \\ S_{11}^* & I \end{bmatrix}$$

avec :

$$H = \begin{bmatrix} S_{22} & 0 \\ 0 & S_{22}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & S_{21} \\ S_{12}^* & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} S_{12} & 0 \\ 0 & S_{21}^* \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Soit η_n la valeur propre réelle négative de H de plus grande amplitude, alors :

$$\underline{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{\eta_n} \quad (4.32)$$

Soit η_p la valeur propre positive de plus grande amplitude, alors :

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{1}{\eta_p} \quad (4.33)$$

Cette proposition est une application d'un lemme technique de [89] qui permet d'évaluer la stabilité d'une LFT par rapport à un continuum de valeurs incertaines. Ici on applique l'approche au cas où le paramètre incertain est représenté par $\delta\omega$. En bref, considérons une matrice de transfert Ξ telle que sa valeur singulière maximale en ω_0 est inférieure à 1, $\bar{\sigma}(\Xi(\omega_0)) < 1$. Alors le domaine

fréquentiel autour de ω_0 pour lequel $\bar{\sigma}$ de Ξ est inférieur à 1 est délimité par $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$. Pour être complet on notera que le critère en stabilité (4.2) est basé sur une contrainte de positivité. Or dans tout ce qui a été présenté précédemment, la condition de validité sur un continuum de fréquence autour de ω_0 est basée sur une contrainte du type H_∞ ou petit gain. Une façon classique et efficace de passer de l'un à l'autre est d'utiliser la transformée de Cayley [8] :

$$\bar{\sigma}(\Xi) \leq 1 \Leftrightarrow Z + Z^* \geq 0 \quad (4.34)$$

avec $\Xi = (I - Z)(I + Z)^{-1}$.

En d'autres termes si Z représente le critère en stabilité, ici une condition de positivité en prenant l'opposé de l'inégalité (4.2), une inégalité du type petit gain est obtenue de façon totalement équivalente par cette transformation. Cette dernière requiert que $(I + Z)$ est inversible. Dans le contexte des IQC $Z = Z^*$.

Remark 12 *Il est important de remarquer que $\Delta_\omega = \omega I_n$, où n est l'ordre de $\Phi(s)$, n'a absolument aucun lien avec le bloc Δ de la boucle fermée, où Δ contient toutes les incertitudes, non-linéarités etc... du problème d'analyse. Le bloc Δ n'est pas utilisé explicitement par l'approche IQC, puisqu'il est remplacé par un multiplicateur Π qui "décrit" plus ou moins précisément le comportement entrées/sorties du bloc Δ à l'aide d'une contrainte quadratique.*

4.5.2.3 Présentation de l'algorithme

1. Une solution est recherchée sur un maillage dans le domaine fréquentiel (au pire une seule fréquence peut être utilisée au départ) pour satisfaire le critère en stabilité $\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0$;
2. Si aucune solution n'est trouvée alors l'algorithme s'arrête. Sinon aller à l'étape 3
3. Un domaine fréquentiel continu autour des points du maillage où le critère de stabilité est satisfait est calculé par l'approche présenté précédemment. Si ce domaine est $[0 + \infty[$ la solution est valide sur tout le domaine fréquentiel et la stabilité est prouvée. L'algorithme s'arrête. Sinon aller à l'étape 4 ;
4. Des fréquences critiques sur lesquelles le critère en stabilité n'est pas satisfait sont ajoutées au maillage fréquentiel. L'algorithme revient à l'étape 1.

Comme indiqué précédemment la résolution du problème est basée sur un problème de faisabilité LMI. Par conséquent on utilise la fonction Matlab `feasp.m` pour résoudre ce problème d'optimisation.

Cet algorithme est un cas spécifique des *outer approximation algorithms* [79, 76]. En effet comme le critère de stabilité est évalué sur un ensemble discret de fréquences, le domaine de stabilité associé est optimiste en ce sens qu'il contient le vrai domaine de stabilité. Par vrai on sous-entend celui qui est obtenu à partir du continuum de fréquences dans le contexte des IQC. Les fréquences apparaissant comme des contraintes, plus on considère de fréquences, a fortiori un continuum, plus le problème

est contraint, et donc plus le domaine de stabilité se réduit. En ce sens le domaine de stabilité basé sur un ensemble discret et fini de fréquences est une approximation extérieure du vrai domaine de stabilité obtenu pour toutes les fréquences. L'algorithme associé est donc appelé *outer approximation algorithms*. Par cette approche itérative l'étape de validation est réalisée simultanément à l'étape d'optimisation LMI. Le choix du maillage initial n'a pas d'influence sur la faisabilité du problème. Il est tout à fait possible de choisir à la première itération juste une fréquence. Mais pour limiter le nombre d'itérations, et par conséquent le temps de calcul, sans aucune connaissance a priori, il est recommandé de prendre quelques fréquences à peu près réparties sur le domaine fréquentiel. Il est toujours possible lorsqu'une solution est obtenue d'ajuster ce maillage initial afin de réduire le nombre d'itérations.

Concernant le rajout des fréquences critiques elle se fait de la façon suivante. Trois fréquences sont choisies : deux fréquences appelées ω_a et ω_b correspondent aux fréquences pour lesquelles le critère de stabilité intercepte l'axe x des fréquences. La dernière et 3^{eme} fréquence correspond à un point intermédiaire situé entre les 2. Ce point est choisi comme suit : 10 réponses fréquentielles uniformément réparties entre ω_a et ω_b de la matrice de transfert qui correspond au critère en stabilité sont évaluées, et la fréquence pour laquelle le gain est le plus élevé est choisie comme 3^{eme} fréquence critique. Cette solution ne permet pas de détecter la norme H_∞ dans l'intervalle $[\omega_a, \omega_b]$. Mais cela est généralement suffisant pour obtenir une solution qui satisfait la condition de faible gain à l'itération suivante. L'évaluation algébrique de la norme H_∞ à bande limitée, typiquement les techniques basées sur la matrice Hamiltonienne, est possible. Mais cette possibilité est discutable pour une représentation à plusieurs centaines d'états et plusieurs dizaines d'entrées/sorties en terme de robustesse numérique et de temps de calcul, pour un gain qui semble très hypothétique. Un dernier point est le cas où le domaine fréquentiel est $[\omega_a, +\infty[$: seulement deux points fréquentiels sont ajoutés (ω_a et $10 \times \omega_a$). Notons que cet algorithme s'adapte indépendamment au cas rationnel ou non-rationnel des multiplicateurs. Évidemment dans le détail de la programmation il y a des différences significatives mais du point de vue global et algorithmique on peut décider de fixer les modes des multiplicateurs en utilisant une forme factorisée, comme décrit précédemment, ou travailler directement en ω pour ces derniers.

4.6 Applications

Pour illustrer l'approche fréquentielle, un outil spécifique a été développé dans le cadre d'un projet interne appelé SMAC (Systems Modeling, Analysis and Control). L'outil développé pour résoudre le problème IQC dans le cadre fréquentiel est présenté dans <https://w3.onera.fr/smac/iqc>. Dans ce document nous ne présenterons pas l'outil informatique développé mais juste les résultats tirés de sa mise en œuvre. Il existe à l'adresse indiquée ci-dessus un guide utilisateur qui détaille la façon de rentrer les informations et le type de résultat que l'on peut obtenir.

4.6.1 Une application académique

Dans cette section nous utiliserons un modèle académique extrait de [75] appelé 'Ex I', qui correspond au modèle LTI

$$\frac{s^2 - 0.2s - 0.1}{s^3 + 2s^2 + 1} \quad (4.35)$$

interconnecté à une non-linéarité statique Φ dans le secteur $(0, k)$. On utilise un maillage fréquentiel initial $\mathbf{wopt}=[1 \ 5 \ 10 \ 20 \ 100]$ rad/s. Pour traiter le problème de stabilité on applique une recherche dichotomique. En effet l'approche IQC répond simplement oui ou non à la question de la stabilité (avec un certain conservatisme) pour un secteur fixé k . En ce sens le problème est convexe, car la recherche du plus grand secteur qui conduit à ne plus satisfaire le critère en stabilité rendrait le problème bilinéaire et nécessiterait un algorithme de résolution totalement différent. Donc à chaque valeur de k on évalue la stabilité par le critère de Popov 4.3(a). Finalement on obtient $k = 1.7636$ en 6 itérations et 0.5 s. Le maillage final contient 20 fréquences. La valeur singulière maximale de $\Xi(s)$ (4.34) obtenue à chaque itération est donnée par la figure 4.3.

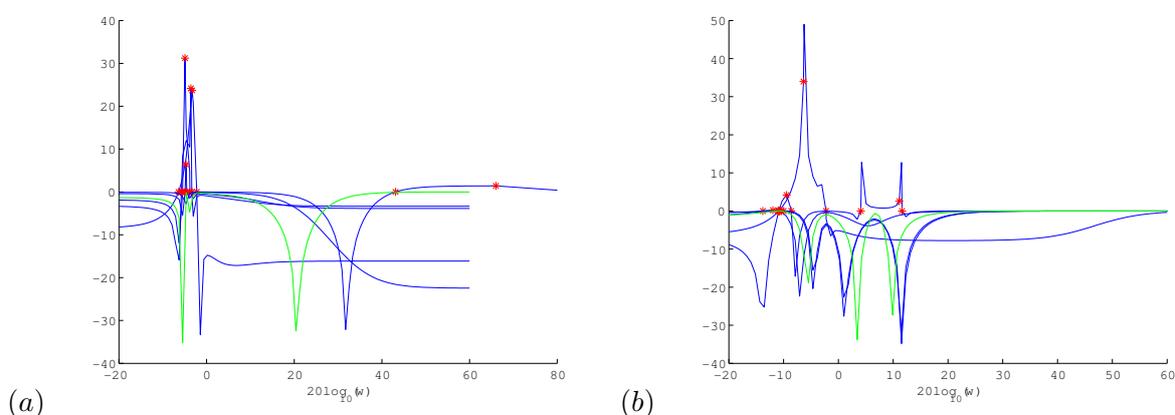


FIGURE 4.3 – Application de l'approche fréquentielle à l'analyse en stabilité du système $G = \frac{s^2-0.2s-0.1}{s^3+2s^2+1}$ interconnecté à la non-linéarité Φ de secteur $(0, k)$ pour $k = 1.7636$. Les courbes bleues représentent le critère de stabilité pour les 5 premières itérations. La courbe verte indique que le critère de stabilité est satisfait à la 6^{eme} itération. Les étoiles rouges représentent les fréquences qui sont ajoutées à chaque itération. Le nombre final de fréquences est donné par le nombre d'étoiles rouges (15 pour la figure (a) et 18 pour la figure (b)) + le nombre initial de fréquences (5) soit 20 fréquences dans le cas (a) et 23 pour le cas (b).

Nous avons procédé de la même façon pour déterminer la taille du secteur dans le cas où on prend en compte la pente de la non-linéarité. Le maillage initial est conservé à savoir $\mathbf{wopt}=[1 \ 5 \ 10 \ 20 \ 100]$ rad/s. De même la taille du secteur est déterminée par une approche dichotomique. Finalement si $(0, k)$ représente le secteur et la pente de la non-linéarité, on obtient au bout de 6 itérations $k = 4.5894$. De la même façon on a représenté le résultat par la figure 4.3(b).

4.6.2 Application aéronautique

4.6.2.1 Avion d'arme

[3] F. Demourant. Stability analysis by a new Algorithmic approach based on Integral Quadratic Constraints : application to an aircraft benchmark. AerospaceLab Journal, (13) :pages 111, Nov. 2017.



FIGURE 4.4 – Avion d'arme caractéristique.

L'objectif est d'analyser la stabilité d'une loi de commande sur un modèle générique d'un avion d'arme (figure 4.4). Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un projet européen NICE (*Nonlinear Innovative Control designs and Evaluations* financé par l'EDA (*European Defence Agency*). Ce projet européen avait pour objectif de développer des techniques d'analyse du type IQC et Lyapunov sur deux types de benchmark. Le 1^{er} est un modèle d'avion d'arme générique fourni par DASSAULT, et le 2^{eme} est un modèle de missile fourni par MBDA. Ici nous présenterons l'activité qui a été menée sur le benchmark de l'avion d'arme et la mise en œuvre de l'approche fréquentielle des IQC [19]. Le domaine de vol couvert est le suivant :

- Altitude comprise entre 0 et 40000 pieds
- Mach compris entre 0 et 0.9
- Vitesse supérieure à 150 kts

Le modèle complet de l'avion a été décomposé en 2 parties. La 1^{ere} correspond à la dynamique longitudinale et la 2^{eme} à la dynamique latérale. Nous ne présenterons que le modèle longitudinal. Pour ce modèle nous avons le problème d'analyse suivant :

- 1 non-linéarité statique du type zone morte qui correspond à un *rate-limiter* sur une surface de contrôle, ici la gouverne de profondeur. On ne rentrera pas dans les détails de la transformation mais il est commode et courant de remplacer un *rate limiter* par une partie dynamique et une saturation, puis cette saturation est elle-même remplacée par une zone morte qui intervient de façon additive. Au final la zone morte "voit" la boucle fermée constituée du modèle et du contrôleur.
- 2 paramètres LTV : le Mach et la vitesse V_{CAS} appelée *Calibrated Air Speed* qui varient dans les domaines spécifiés au dessus. Cette vitesse de variation est bornée par la variable appelée

d par la suite.

- 5 paramètres incertains qui couvrent les variations de la masse et du centre de gravité. Ces paramètres sont considérés comme LTI et incertains car leur vitesse de variation est très faible par rapport aux dynamiques principales associées à la dynamique du vol.

Pour obtenir un modèle LFT représentatif avec un bloc Δ de taille limitée, le modèle longitudinal a été séparé en 1 modèle basse vitesse et 1 modèle haute vitesse. Le modèle basse vitesse correspond à l'enveloppe de vol :

- V_{CAS} compris entre 175 kts et 275 kts
- Mach compris entre 0.32 et 0.7

Le cas haute vitesse correspond au domaine de vol complémentaire dans les limites fournies ci-dessus. Seuls les résultats sur le cas basse vitesse seront présentés pour illustrer l'approche. Un des objectifs est de mettre en avant les outils d'analyse et de montrer qu'une loi dite *anti-windup* fournit de meilleurs résultats face à la non-linéarité qu'une loi dite *baseline*. L'analyse basée IQC démontrera le gain amené par la loi *anti-windup*.

L'analyse sera faite comme suit. Pour des valeurs spécifiques de vitesse de variation des paramètres LTV d , la taille du secteur $(0, k)$ est déterminée par une approche dichotomique telle que la stabilité de la boucle fermée soit garantie. Comme nous l'avons indiqué les incertitudes LTI correspondent à des paramètres incertains sur le modèle. Ces incertitudes LTI du bloc Δ varient de façon à couvrir les effets de variation de masse et de position du centre de gravité. Cette "substitution" par des paramètres réels incertains mais non physiques permet de limiter la taille du bloc Δ qui aurait été nettement plus grande si on avait considéré explicitement la masse et le centre de gravité du fait de leur forte répétition. Il vaut mieux un grand nombre de paramètres incertains réels faiblement répétés qu'un nombre limité fortement répété.

Un autre point important est le suivant. La taille du secteur est déterminée par k . Mais cette valeur peut être interprétée comme une amplitude sur le signal d'entrée u de la non-linéarité. En normalisant, pour un *rate limiter* de 80 deg/s, $u = 1$ correspond à 80 deg/s et plus généralement à un signal $u * 80$ deg/s. Par exemple si $k = 0.5$, cette valeur correspond à une entrée normalisée $u = \frac{1}{1-k} = 2$. Cela signifie que pour toute entrée normalisée $u \leq 2$, soit 180 deg/s, la stabilité de la boucle fermée est garantie. La stabilité est dans ce cas là locale. Si $k = 1$ alors $u = +\infty$, la stabilité devient globale. La taille du block Δ est la suivante pour les 2 types de compensateur :

- compensateur *baseline* : la taille du bloc Δ est 16 avec une non-linéarité statique, la V_{CAS} et le Mach répétés respectivement 2 et 8 fois et les 5 paramètres incertains répétés 1 fois chacun ;
- compensateur *anti-windup* : la taille du bloc Δ est 21 avec une non-linéarité statique, la V_{CAS} et le mach répétés respectivement 3 et 11 fois, 4 paramètres incertains répétés 1 fois chacun et le 5^{eme} répété 2 fois.

Enfin pour terminer cette présentation du modèle, dans ce document il n'a pas été présenté les multiplicateurs associés aux paramètres LTV. Le lecteur pourra se référer à [54] pour les détails. Les équations sont un peu plus lourdes et leur présentation n'aurait pas aidé à la compréhension de la mécanique mise œuvre pour les IQC. En effet dès lors que la construction du multiplicateur global et du problème d'optimisation associé sont comprises, l'utilisation du multiplicateur associé aux paramètres LTV est similaire.

4.6.2.1.1 Analyse avec une non-linéarité Dans cette section l'analyse est faite juste sur une non-linéarité de secteur $(0, k)$.

- Ce cas représente le meilleur résultat qu'il est possible d'atteindre dans le contexte des IQC, puisque la taille maximale du secteur recherchée par dichotomie qui garantit la stabilité va décroître en prenant en compte les paramètres LTV et incertains ;
- Ce cas permet d'illustrer facilement l'amélioration de la stabilité amenée par le contrôleur *anti-windup*.
- Ce cas peut facilement être interprété à l'aide d'une représentation entrées/sorties comme la représentation de Popov et Nyquist, représentation typiquement synthétique.

Rappelons que le tracé de Popov est donné par $Re[G(j\omega)]$ versus $\omega Im[G(j\omega)]$. La stabilité de la boucle fermée est garantie si $G(j\omega)$ évolue à droite d'une droite qui intercepte l'axe réel au point $-1 + 0j$ avec une pente $1/\lambda$ [62].

De ces représentations, on constate les éléments suivants :

- La taille du secteur est cohérente avec le tracé de Nyquist et de Popov, puisque la valeur obtenue pour le secteur conduit les courbes à passer à proximité du point -1. Précisons qu'il impératif de ne pas passer par -1 pour satisfaire le critère de Popov mais que cette condition n'est pas suffisante ;
- La solution obtenue pour les valeurs maximales de k par l'approche IQC est cohérente avec l'interprétation graphique puisque le tracé de Popov évolue à droite d'une ligne rouge dont la pente est $1/\lambda$;
- Pour confirmer la solution, les valeurs propres du critère de stabilité ou les valeurs singulières du critère obtenues par la transformée de Cayley sont respectivement négatives et inférieures à $0dB$.

La limite du secteur est $k = 0.81 \Leftrightarrow u = 5.26$. La limite du secteur avec la loi *anti-windup* est $k = 0.97 \Leftrightarrow u = 33.3$. On constate donc bien le gain amené par la loi *anti-windup* puisque nous obtenons dans ce dernier cas une stabilité quasi-absolue.

Contrôleur *baseline*

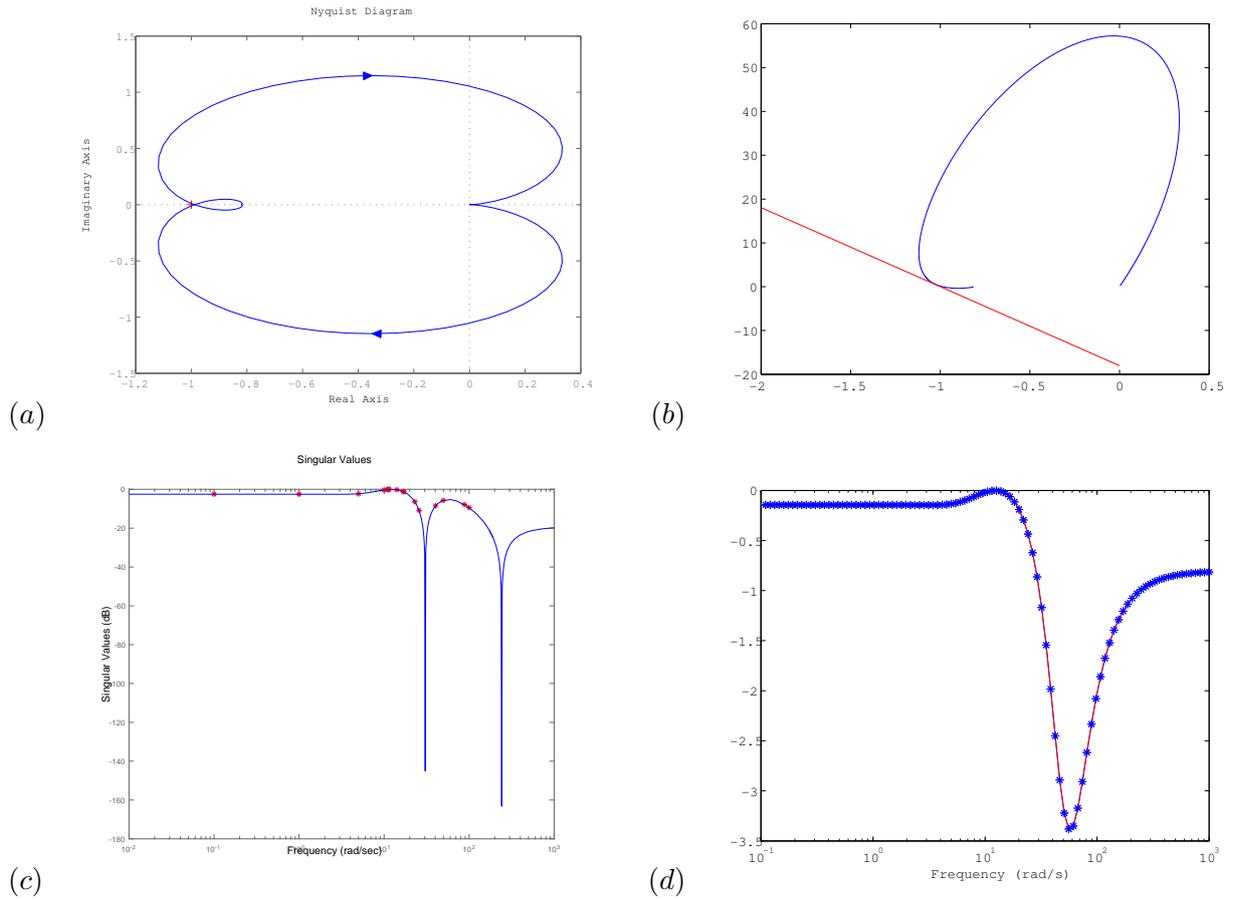


FIGURE 4.5 – Pour la boucle fermée avec le contrôleur *baseline* nous avons les 4 figures (a), (b), (c) et (d) avec $k = 0.81 \Leftrightarrow u = 5.26$. La figure (a) représente le tracé de Nyquist et la figure (b) le tracé de Popov. La figure (b) montre clairement que le tracé de Popov passe à droite d'une ligne (droite rouge) qui intercepte le point -1. La figure (c) représente les valeurs propres du critère de stabilité après la transformée de Cayley. Dans ce cas le critère doit avoir une norme H_∞ inférieure à 1 ou 0 dB s'il est satisfait. De façon équivalente le critère de stabilité de la figure (d) $\Phi^*(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ montre que les valeurs propres sont réelles et négatives.

Contrôleur *anti-windup*

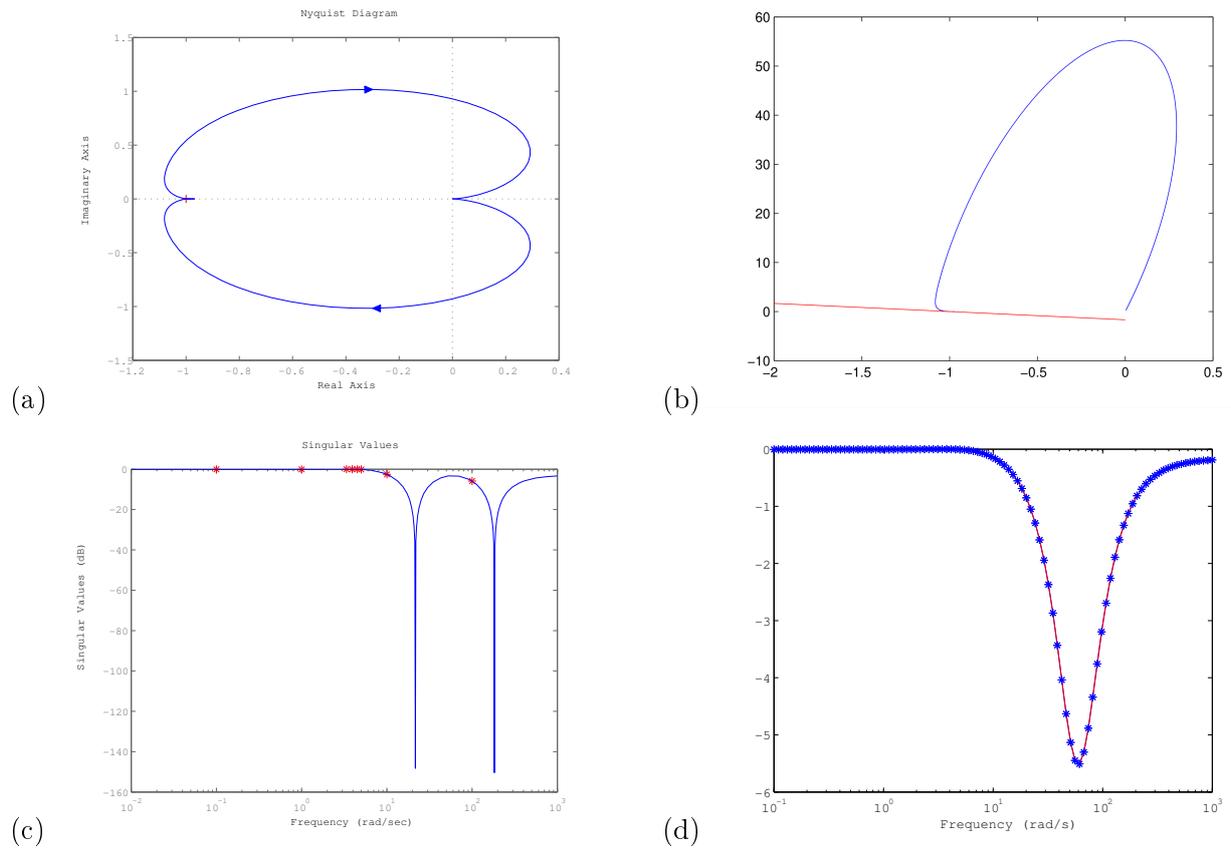


FIGURE 4.6 – Pour la boucle fermée avec le contrôleur *anti-windup* nous avons les 4 figures (a), (b), (c) et (d) avec $k = 0.97 \Leftrightarrow u = 33.3$. La figure (a) représente le tracé de Nyquist et la figure (b) le tracé de Popov. La figure (b) montre clairement que le tracé de Popov passe à droite d’une ligne (droite rouge) qui intercepte le point -1. La figure (c) représente les valeurs propres du critère de stabilité après la transformée de Cayley. Dans ce cas le critère doit avoir une norme H_∞ inférieure à 1 ou 0 dB s’il est satisfait. De façon équivalente le critère de stabilité de la figure (d) $\Phi^*(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ montre que les valeurs propres sont réelles et négatives.

4.6.2.1.2 Analyse avec 1 rate limiter, le Mach en paramètre LTV et 5 incertitudes réelles LTI Ce cas est intéressant car il combine 3 types de problèmes : une non-linéarité statique, un paramètre LTV, et des incertitudes LTI réelles. C'est un cas typique de ce que l'on peut traiter par une approche IQC. De plus le bloc Δ n'est pas très grand ce qui limite le temps de calcul et permet de réaliser plusieurs simulations. Le paramètre LTV est le nombre de Mach. Les incertitudes réelles couvrent les variations de masse et du centre de gravité . Le bloc Δ a respectivement pour le cas *baseline* et *anti-windup* 7 et 9 entrées/sorties. Le taux de variation du paramètres TV est $d = |\dot{\delta}(t)| = 0.2$.

Loi de commande *baseline*

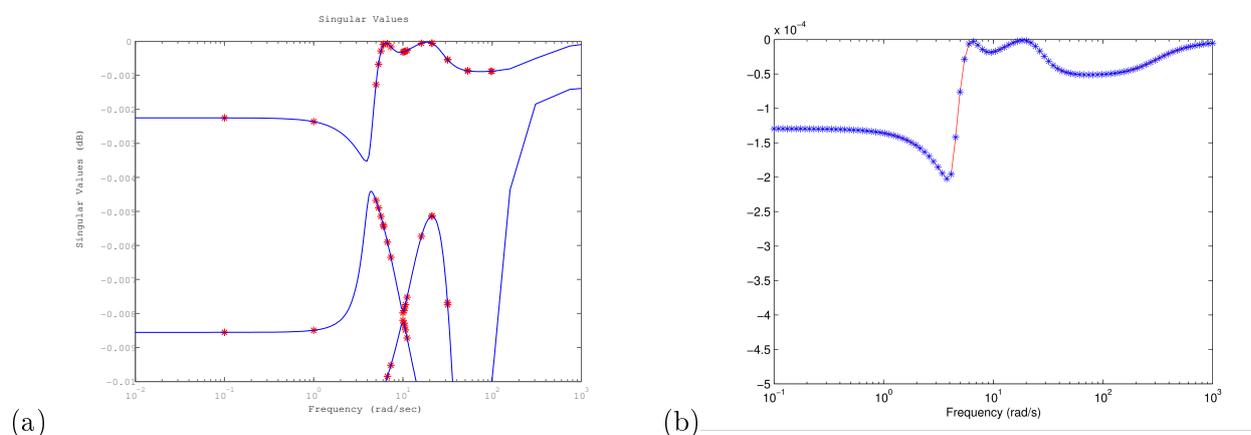


FIGURE 4.7 – Pour la boucle fermée avec le contrôleur *baseline* et $d = 0.2$ nous avons les 2 figures (a) et (b). La figure (a) représente les valeurs propres du critère de stabilité après la transformée de Cayley. Dans ce cas le critère doit avoir une norme H_∞ inférieure à 1 ou 0 dB s'il est satisfait. De façon équivalente le critère de stabilité de la figure (b) $\Phi^*(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ montre que les valeurs propres sont réelles et négatives.

	LTI	d=0	d=0.1	d=0.2	d=0.5	d=0.8	d=10	d=100	d=1000
k	0.78	0.77	0.74	0.72	0.71	0.69	0.64	0.61	0.60
u	4.54	4.35	3.84	3.57	3.44	3.23	2.78	2.56	2.50

TABLE 4.1 – Domaine de stabilité de la loi *baseline* en fonction de d

	LTI	d=0	d=0.1	d=0.2	d=0.5	d=0.8	d=10	d=100	d=1000
k	0.89	0.89	0.86	0.85	0.85	0.84	0.81	0.80	0.74
u	9.09	9.09	7.14	6.67	6.67	6.25	5.26	5.00	3.85

TABLE 4.2 – Domaine de stabilité de la loi *anti-windup* en fonction de d

A partir des résultats présentés des tableaux 4.1 et 4.2 nous pouvons faire les remarques suivantes :

Loi de commande *anti-windup*

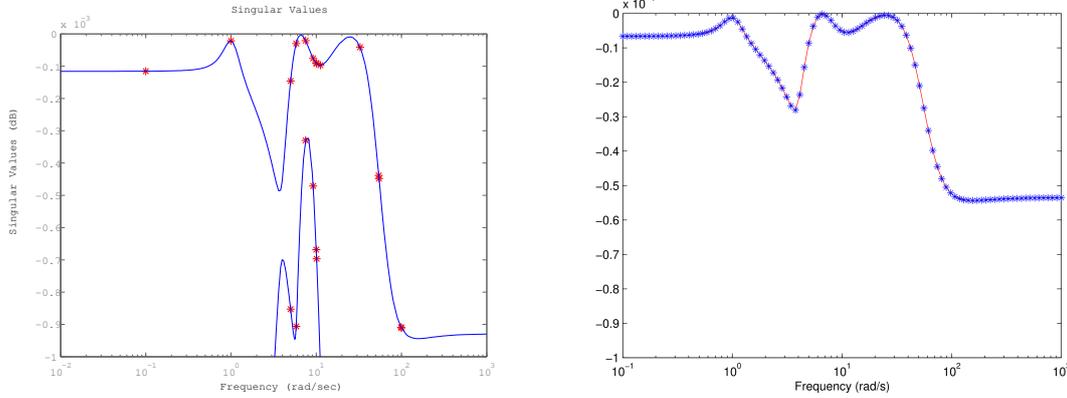


FIGURE 4.8 – Pour la boucle fermée avec le contrôleur *anti-windup* et $d = 0.2$ nous avons les 2 figures (a) et (b). La figure (a) représente les valeurs propres du critère de stabilité après la transformée de Cayley. Dans ce cas le critère doit avoir une norme H_∞ inférieure à 1 ou 0 dB s’il est satisfait. De façon équivalente le critère de stabilité de la figure (b) $\Phi^*(\omega)M\Phi(\omega) < 0$ montre que les valeurs propres sont réelles et négatives.

- Le cas analysé correspond au cas $d=0.2$. Nous remarquons que le domaine de stabilité obtenu avec la loi *anti-windup* est $k = 0.85$ au lieu de $k = 0.72$ pour le cas *baseline*. En d’autres termes la loi *anti-windup* améliore la stabilité face à la non-linéarité et cette amélioration est montrée par l’analyse IQC ;
- Pour le cas LTV on constate que la taille du secteur décroît avec l’augmentation de la vitesse de variation du paramètre LTV ce qui est cohérent avec ce que l’on pouvait attendre en terme de résultat ;
- Le cas LTV avec $d = 0$ est équivalent au cas où le paramètre LTV est un paramètres réel incertain. Il est intéressant de constater que l’on retrouve le même résultat qu’en le spécifiant explicitement.

4.6.2.1.3 Analyse avec un rate-limiter, deux paramètres LTV et cinq incertitudes réelles Ce système représente le cas final qui combine l’ensemble des paramètres de notre problème d’analyse. Le bloc Δ a 16 entrées/sorties pour la loi *baseline* et 21 pour la loi *anti-windup*.

- Contrôleur *baseline* :
 - Avec $d = 0$ le secteur obtenu est $k = 0.45 \Leftrightarrow u = 1.82$
 - Avec $d = 0.2$ le secteur obtenu est $k = 0.31 \Leftrightarrow u = 1.45$
- Contrôleur *Anti-windup* :
 - Avec $d = 0$ le secteur obtenu est $k = 0.15 \Leftrightarrow u = 1.18$
 - Avec $d = 0.2$ le secteur obtenu est $k = 0.07 \Leftrightarrow u = 1.08$

Dans ce cas le nombre de variables d’optimisation est 309 avec quelques dizaines de contraintes.

	$V_c=+1$	$V_c=+0.5$	$V_c=0$	$V_c=-0.5$	$V_c=-1$
k	0.81	0.83	0.85	0.80	0.77
u	5.26	5.88	6.67	5.00	4.35

TABLE 4.3 – Domaine de stabilité de la loi *anti-windup* en fonction de V_c

Le temps de calcul varie de quelques minutes à 10 minutes. Ces résultats ne permettent pas de montrer que la loi anti-windup améliore la robustesse face à la non-linéarité dans le cas le plus général. Deux principales raisons peuvent être mises en avant :

- La structure du bloc Δ est plus complexe avec la loi *anti-windup* qu’avec la loi baseline. La taille/complexité du bloc Δ peut conduire plus naturellement à un résultat conservatif ;
- La loi de commande anti-windup a malheureusement réduit le domaine de stabilité quand toutes les incertitudes et tous les paramètres LTV sont pris en compte. En effet la synthèse *anti-windup* est réalisée pour améliorer le domaine de stabilité face à une non-linéarité statique seule, et rien ne permet de garantir a priori le résultat dans un cas plus général comme ici.

Bien sûr ces deux explications ne sont pas exclusives l’une de l’autre. Pour compléter les différents résultats précédents une analyse a été réalisée avec le contrôleur *anti-windup*, en fixant la V_c à une valeur spécifique, normalisée entre 0 et 1, et en laissant le nombre de Mach comme paramètre LTV.

Les résultats du tableau 4.3 montrent que le domaine de stabilité est plutôt préservé pour les différentes valeurs de V_c et restent globalement plus grands qu’avec le contrôleur *baseline* (c.f. tableau 4.1) pour toutes les valeurs de d y compris pour $d = 0$ dans le cas de la loi *baseline*.

4.6.2.1.4 Analyse avec 1 rate limiter, 1 paramètre LTV avec la V_{CAS} et 5 incertitudes réelles Cette analyse permet par comparaison avec le cas LTV pour le nombre de Mach, d’évaluer quel paramètre LTV conduit à la réduction du domaine de stabilité la plus importante.

- Contrôleur *baseline* : le domaine de stabilité obtenu avec $d = 0.2$ est $k = 0.68 \Leftrightarrow u = 3.13$
- Contrôleur *Anti-windup* : le domaine de stabilité obtenu avec $d = 0.2$ est $k = 0.73 \Leftrightarrow u = 3.70$

Ce résultat montre que les domaines de stabilité représentés par k pour les 2 types de compensateurs sont relativement similaires bien que légèrement meilleurs avec la loi *anti-windup*. Il semblerait donc que ce soit la prise en compte du paramètre LTV V_c qui réduise le gain en stabilité amené par la loi *anti-windup*.

4.6.2.2 Avion de transport civile de grande taille

- [4] F. Demourant, T. V. Hoang, and A. Pavie. Analysis of the aeroelastic stability with freeplay in a control surface by integral quadratic constraints approach. Paris, France, 2011.
- [5] F. Demourant and A. Pavie. Frequency domain analysis of the aeroelastic stability with a control surface freeplay. Stockholm, Sweden, 2007.

L'objectif de cette section est d'analyser la stabilité d'une gouverne reliée par une zone morte à la structure aéroélastique d'un avion civil de grande taille (figure 4.9). Pour réaliser cette analyse la partie linéaire du modèle aéroélastique est séparée du modèle linéaire de la gouverne libre par une non-linéarité statique du type zone morte. En bref, l'interconnexion entre la partie linéaire représentée par le modèle aéroélastique et la gouverne libre et la non-linéarité représentée par la zone morte est réalisée sous la forme d'un feedback, comme illustré par la figure 4.1. C'est sur ce feedback qu'une approche du type IQC est mise en œuvre pour analyser la stabilité de l'ensemble.

Sans rentrer dans le détail de la modélisation aéroélastique, nous allons brièvement rappeler quelques éléments de base. Comme indiqué ci-dessus le principe est de séparer le modèle de structure linéaire de l'avion de la non-linéarité [37, 30, 29]. L'équation aéroélastique correspond à la partie linéaire, i.e. l'avion dans sa configuration nominale auquel on ajoute 2 gouvernes libres (2 gouvernes de profondeur dans notre exemple) qui sont connectées à la structure de l'avion par leur charnière mais sans raideur en rotation. Ainsi la partie linéaire qui comprend le modèle de structure et les gouvernes libres est-elle reliée à la zone morte via un déplacement relatif en entrée de la non-linéarité et une force en sortie de celle-ci.



FIGURE 4.9 – Avion civil de transport.

En ce qui concerne la partie aéroélastique on a l'équation de base suivante :

$$[\mu_0]\ddot{q} + [\beta_0]\dot{q} + [\gamma_0]q = \bar{q}[GAF]q \quad (4.36)$$

avec μ_0 , β_0 et γ_0 la masse généralisée et les matrices d'amortissement et de raideur respectivement, q les coordonnées généralisées, $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$ la pression dynamique et GAF les *Generalized Aerodynamic Forces*. La base modale doit inclure tous les modes de structure de l'avion complet en incluant les modes de rotation des surfaces de contrôle. Les GAF sont évaluées pour différentes

valeurs de fréquences réduites $k = 2\pi f/V_{TAS}$, où V_{TAS} est la *True Air Speed*.

Une interpolation spécifique dite de Roger est utilisée pour obtenir finalement les $GAF(M, s)$ où M est le Mach et s la variable de Laplace. L'équation (4.36) peut être écrite en s de la façon suivante :

$$s^2[\mu_0]q + s[\beta_0]q + [\gamma_0]q = \bar{q}[GAF]q \quad (4.37)$$

$$-\omega^2[\mu_0]q + j\omega[\beta_0]q + [\gamma_0]q = \bar{q}[GAF]q \quad (4.38)$$

Le passage en fréquentiel se fait en posant $s = j\omega$. Finalement on peut définir une fonction de transfert $G(s)$ qui correspond à la partie linéaire dont les entrées (forces) et les sorties (déplacements) sont connectées à la non-linéarité.

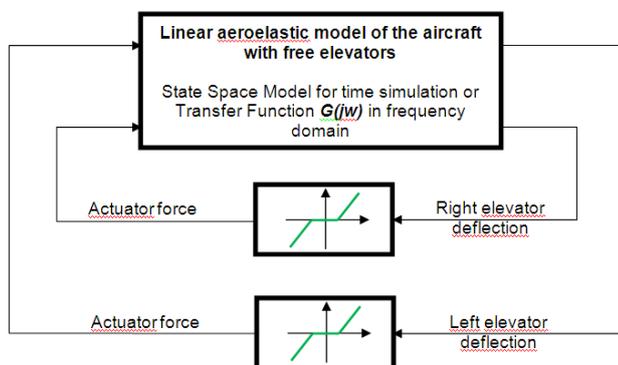


FIGURE 4.10 – Représentation du problème non-linéaire de la gouverne libre.

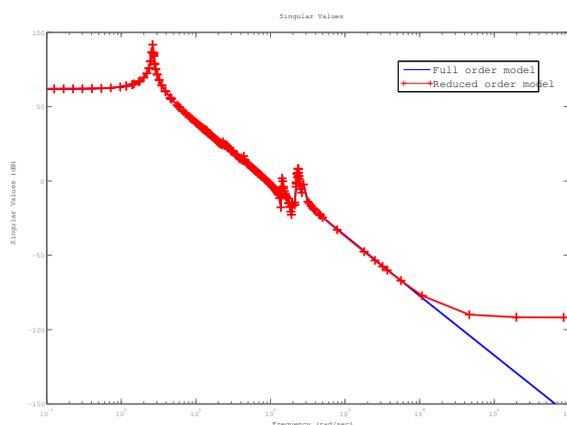


FIGURE 4.11 – Valeurs singulières maximales du modèle réduit et complet.

4.6.2.2.1 Approche rationnelle Pour limiter l'effort de calcul durant l'étape de validation sur le continuum de fréquences, il est intéressant de réduire l'ordre de $G(s)$. En bref le problème d'optimisation est indépendant de l'ordre de $G(s)$ mais l'étape de validation est basée sur un calcul de valeurs propres de H dont la taille dépend de l'ordre de $G(s)$. Pour assurer la stabilité sur le modèle complet $G(s)$ interconnecté à la non-linéarité, une erreur de réduction entre le modèle réduit et le modèle complet est calculée et prise en compte comme une incertitude dynamique LTI dans $\Delta(s)$. Finalement G_r qui correspond au modèle réduit de G , est interconnecté au bloc $\Phi = \text{diag}(\varphi, \Delta)$. Par conséquent G_r a 4 entrées/sorties, 2 qui correspondent aux non-linéarités statiques et 2 à la dynamique négligée. La résolution a été réalisée sous Matlab (R2007a). Pour la partie matériel un processeur classique et maintenant ancien *CoreTM2Duo* @3 GHz avec 4 GB de mémoire a été utilisé.

Pour réduire l'ordre du modèle, une approche basée sur la réduction équilibrée a été utilisée. Plus précisément, une réalisation équilibrée est obtenue, et à partir de celle-ci, les grammians d'observabilité/commandabilité sont calculés. Ils sont alors ordonnés et ne sont retenus que les modes qui ont les grammians les plus élevés. Les autres modes sont considérés comme négligeables et donc éliminés. Initialement l'ordre du modèle complet $G(s)$ est 550. Après réduction le modèle réduit G_r est d'ordre 152. On constate une forte réduction tout en ayant une erreur de réduction très faible entre les modèles (c.f. figure 4.11).

Finalement le résultat est obtenu en quelques dizaines de secondes seulement puisque le nombre de variables de décision est très limité en dépit de l'ordre de G_r . Plus précisément $X(j\omega) = x(j\omega)I_2$ avec $x(j\omega) = \tilde{r}(j\omega)^* u \tilde{r}(j\omega)$, $\tilde{r}(j\omega) = [1 \quad 1/(s+1)]^T$, et $u = u^T$ une matrice symétrique 2×2 , par conséquent M contient 7 (4 du multiplicateurs de Popov et 3 de u) variables de décision. Avec une approche basée état il est nécessaire d'ajouter une matrice de décision P qui contient $(n^2 + n)/2$ variables de décision où n correspond à l'ordre du système augmenté, i.e. 160 (152 pour $G_r(s)$ + 8 pour $\Psi(s)$, où $\Psi(s)$ contient les pôles de $\tilde{r}(s)$ plus la dynamique du multiplicateur de Popov). En bref le nombre de variables de décision est alors égal à 12887, i.e. 12880 de P + 7 de M . Il est clair que même avec des ordinateurs relativement récents ce type de calcul pourra prendre quelques dizaines d'heures pour aboutir ou pas. Dans le cas précis qui nous intéresse on constate que l'approche fréquentielle apparaît comme très supérieure à l'approche basée état. Bien sûr il est possible de trouver dans la littérature des approches états qui soient plus efficaces que ce qui a été présenté et implémenté ici, comme une résolution primale/duale mais il semble difficile pour cette taille de modèles de tomber à une dizaine de secondes de temps de calcul.

Le maillage initial est $\omega_0 = 0, 0.1, 1, 5, 10, 100, 1e4 \text{ rad/s}$. Le résultat a été obtenu en 20 s et 5 itérations.

Pour illustrer la solution le tracé, des valeurs propres de $\Phi^* M \Phi$ est donné par la figure 4.12. On remarque que ces valeurs propres sont réelles et négatives puisque $\Phi^* M \Phi$ est hermitien est défini négatif dans le cas où une solution est obtenue, ce qui est le cas ici. Nous pouvons donc conclure que nous garantissons la stabilité absolue et donc globale de la boucle fermée non-linéaire qui correspond à l'interconnexion d'un modèle d'ordre plein avec deux non-linéarités statiques de secteur $(0, 1)$. Ce type d'approche permet d'éviter efficacement de nombreuses simulations temporelles.

4.6.2.2.2 Approche non-rationnelle L'approche non-rationnelle correspond au cas de multiplicateurs n'admettant pas de réalisation par une fonction de transfert. Comme indiqué précé-

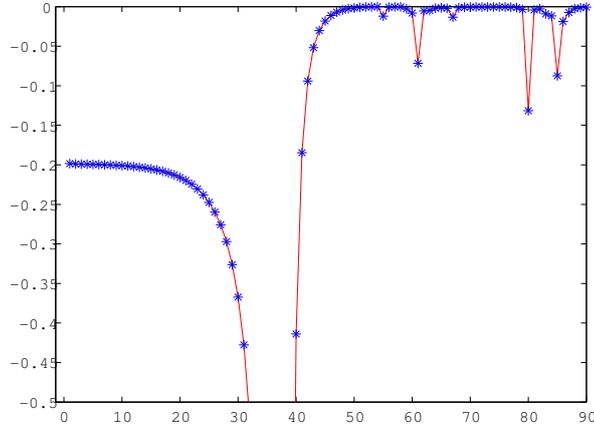


FIGURE 4.12 – Valeurs propres de $\Phi^* M \Phi < 0$

n_G	76		152		195		287	
Method	KYP	Freq	KYP	Freq	KYP	Freq	KYP	Freq
n_{iter}	1	8	1	3	1	1	1	1
n_f	N/A	27	N/A	14	N/A	6	N/A	6
n_{opt}	3579	33	12889	20	20715	12	43669	12
$t_{calculation}(s)$	≈ 6000	≈ 50	****	≈ 70	****	≈ 30	****	≈ 100

TABLE 4.4 – Comparaison approche basée état et approche fréquentielle non-rationnelle.

demment l'ordre du modèle complet est 550. Pour évaluer la performance de l'approche dans le cas non-rationnel on a considéré différents modèles d'ordre réduit : 76, 152, 195, 287. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.4. Pour les quatre modèles réduits, deux types d'analyse sont faites. Une première colonne *KYP* représente le résultat obtenu avec une approche du type état et donc analytique. La deuxième colonne *Freq* correspond aux résultats obtenus par l'approche présentée dans ce document mais dans un contexte non-rationnel. Pour chaque approche on donne l'ordre de G_r (n_{G_r}), le temps de calcul ($t_{calculation}$), le nombre de variables d'optimisation (n_{opt}), le nombre de fréquences (n_f) utilisées pour la résolution du problème et enfin le nombre d'itérations (n_{iter}).

1. Pour l'approche fréquentielle, pour chaque non-linéarité, on a 3 variables de décision associées au multiplicateur de Park, et donc au global 6 variables de décision dans M . Comme $\Delta(j\omega)$ est une matrice 2×2 complexe qui correspond à une erreur de réduction, $X(j\omega)$ est un scalaire répété deux fois pour chaque fréquence. Finalement on a $n_f + 6$ variables de décision pour notre problème d'optimisation LMI. Nous remarquons que le nombre de variables de décision est complètement indépendant de n_{G_r} mais dépend du nombre de fréquences, à contrario de l'approche rationnelle. Le choix du maillage initial est $\omega_i = 0, 5, 10, 100, 1e4, 1e6 \text{ rad/s}$.
2. Pour l'approche état, si n est la taille de la matrice symétrique P , le nombre de variables

de décision est $\frac{n^2+n}{2}$. Ici n est égal à l'ordre de $G_r(s)$ plus $\Psi(s)$ où $\Psi(s)$ contient les pôles des multiplicateurs. Pour cette application, juste un filtre d'ordre 1 a été utilisé pour $\tilde{R}(s)$. Dû fait de la structure 4×4 de $diag(\varphi, \Delta)$, $\Psi(s)$ est d'ordre 8. En outre $X(j\omega) = x(j\omega)I_2$ avec $x(j\omega) = \tilde{r}(j\omega)^* u \tilde{r}(j\omega)$, $\tilde{r}(j\omega) = [1 \quad 1/(s + s_0)]^T$ où s_0 est un pôle choisi a priori et $u = u^T$ une matrice symétrique 2×2 , par conséquent M contient 9 variables de décision (6 du multiplicateur de Park + 3 de u). Finalement le nombre de variables de décision dans le cas de l'approche état est $\frac{(n_{G_r}+8)^2+n_{G_r}+8}{2} + 9$. Ainsi pour $n_{G_r} = 152$, $n = 152 + 8 = 160$, avons-nous 12889 variables de décisions. Le nombre d'itérations est toujours 1 dans ce cas là. Quand la durée de calcul est trop longue, plusieurs heures, on indique '****'. Évidemment dans la ligne n_f , on écrit N/A .

A partir de ces résultats on peut mettre en évidence les points suivants pour l'approche analytique et donc état :

- Les résultats montrent que l'approche basée sur le lemme de *KYP* est inadaptée pour traiter de l'analyse de systèmes d'ordre supérieur à 50. Cela doit être pondéré par le fait qu'il s'agit de résultats obtenus en 2007 et donc du matériel informatique de cette époque. De plus aucune optimisation ou technique spécifique n'a été mise en œuvre pour tenter d'améliorer les résultats par l'approche état. Néanmoins l'écart en terme de temps de calcul est considérable ;
- Pour le cas $n_{G_r} = 76$ aucune solution n'a été obtenue par l'approche analytique. Le problème a été considéré comme infaisable avec un temps de calcul qui oscillait entre 3000 et 6000 s puisque différents filtres ont été utilisés pour tenter de lever cette infaisabilité. Finalement l'approche essai-erreur pour trouver une paramétrisation adaptée qui rendrait le problème faisable devient très longue à mettre en œuvre dans ce cas là. Une approche fréquentielle basée sur une représentation rationnelle des multiplicateurs a été testée pour tenter de trouver une paramétrisation adéquate mais sans succès. Néanmoins les résultats obtenus par l'approche fréquentielle et rationnelle telle que présentée précédemment sont obtenus en quelques secondes et non plus quelques heures. On peut supposer qu'une paramétrisation plus complexe des multiplicateurs permettrait peut être de trouver une solution au problème de faisabilité, mais dans le cas non-rationnel ce type de problématique ne se pose pas, ce qui la rend très attractive de ce point de vue. Finalement pour obtenir une solution il a donc fallu diviser le gain de G_r par 2 et donc remplacer G_r par $G_r * 0.5$. A ce moment là une solution a été obtenue avec le temps de résolution indiqué dans le tableau 4.4.

En ce qui concerne l'approche fréquentielle non-rationnelle nous pouvons mettre en avant les points suivants :

- Le temps de calcul est faiblement dépendant de n_{G_r} . Comme indiqué précédemment dans la section 4.5.2, l'évaluation des valeurs propres de H dépend de n_{G_r} . En fait une partie non négligeable du temps de calcul vient de la validation sur le continuum de fréquences de la solution obtenue. Par conséquent on remarque que pour $n_{G_r} = 195$ et $n_{G_r} = 287$ un temps de calcul plus important pour $n_{G_r} = 287$, alors que le nombre de contraintes et le nombre de variables de décision sont identiques. Ce résultat confirme l'idée qu'il est plus intéressant de travailler sur un modèle réduit très proche du modèle complet en quantifiant l'erreur entre les deux sous la forme d'une dynamique négligée très réduite plutôt que le modèle complet originel. De plus on constate que le temps de calcul augmente avec le nombre d'itérations et donc de contraintes. Ceci est particulièrement vrai pour les cas $n_{G_r} = 76, 152, 195$.

- Le nombre d'itérations dépend de la "difficulté" à trouver une solution au problème de faisabilité LMI. Si pour $n_{G_r} = 195,287$ une solution est obtenue en 1 itération c'est parce que la contrainte de stabilité robuste imposée par Δ est faiblement active. En bref l'erreur de réduction est si faible qu'elle joue un rôle marginal dans la résolution du problème. Ce n'est évidemment pas le cas pour $n_{G_r} = 76$ où l'erreur de réduction est plus importante. Il suffit pour ce même modèle de réduire la taille de Δ pour relaxer cette contrainte et finalement obtenir une solution en 3s seulement ;
- La solution $X(j\omega)$ est une matrice 2×2 diagonale positive, réelle est continue par morceaux. Par exemple avec $n_{G_r} = 152$, à l'itération 3, $n_f = 14$ et pour $\omega_4 = 100 \text{ rad/s}$ la solution $X_4(j\omega)$ est constante, réelle, positive et valide sur le domaine fréquentiel $\Omega_4 = [0, 393] \text{ rad/s}$. De même pour $X_7(j\omega)$ et $X_{14}(j\omega)$ sont valides sur $\Omega_7 = [107, 1.98e5]$ et $\Omega_{14} = [1375, +\infty[\text{ rad/s}$ respectivement, et donc le critère de stabilité est satisfait pour tout le domaine fréquentiel puisque $\bigcup_{i=4,7,14} \Omega_i = [0, +\infty[$.

Remarque 5 : Les variables de décision x, λ et γ sont constantes et indépendantes de la fréquence. Par conséquent $X_i(j\omega)$ ne sont pas des variables d'optimisation indépendantes de i (et donc de la fréquence) puisqu'elles sont liées par x, λ et γ . Il est donc nécessaire de les recalculer à chaque itération, ce qui conduit à augmenter le nombre de variables d'optimisation. Sans x, λ et γ , les solutions obtenues pour $X_i(j\omega)$ aux précédentes itérations peuvent être conservées pour l'actuelle et les itérations suivantes, ce qui permet d'avoir un nombre de variables d'optimisations fixes à chaque itération.

4.6.2.3 Avion d'affaire

[26] P. Vuillemin, F. Demourant, J. Biannic, and C. Poussot-Vassal. Global stability validation of an uncertain large-scale aircraft model. In 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA), pages 152-157, Oct 2014.

[28] P. Vuillemin, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Stability Analysis of a Set of Uncertain Large-Scale Dynamical Models with Saturations. AerospaceLab Journal, (13) :pages 1-11, Nov. 2017.



FIGURE 4.13 – Avion d'affaire.

Pour ce dernier cas le lecteur pourra se référer à [97, 99, 98] pour les détails. Les modèles utilisés

sont caractéristiques d'un avion d'affaire générique (figure 4.13).

En bref le bloc Δ est composé de 3 sous-blocs différents :

- 1 non-linéarité statique normalisée dans le secteur $(0, 1)$ qui représente une saturation sur le braquage des surface de contrôle ;
- 1 incertitude dynamique LTI Δ_r qui représente l'erreur entre le modèle réduit et le modèle complet ;
- 1 paramètre incertain LTI réel δ_M répété 4 fois et qui représente le Mach normalisé entre $[-1, 1]$;
- 1 paramètre incertain LTI réel δ_{err} répété 2 fois et qui représente l'erreur d'interpolation entre le modèle LFT et les données du modèle réduit.

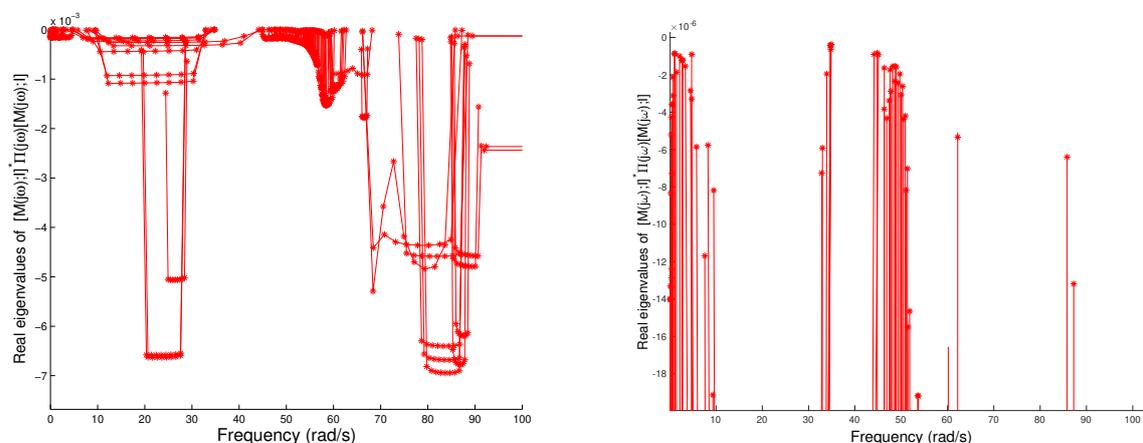


FIGURE 4.14 – Valeurs propre $[M(j\omega); I]^* \Pi(j\omega) [M(j\omega); I]$ entre 0 et 100 rad/s.

On a donc $\Delta = \mathbf{diag}(\varphi, \Delta(s), \delta_M I_4, \delta_{err} I_2)$ où φ représente la saturation. Le maillage fréquentiel est $\omega_i = \{1, 5, 10, 20, 100\}$ rad/s avec $i = 1, \dots, 5$. Pour limiter le nombre de variables de décision et donc le temps de calcul, $X_M(j\omega)$ et $Y_M(j\omega)$, qui représentent les matrices d'optimisation du multiplicateur associé au paramètre incertain du Mach, sont choisis diagonaux, ce qui conduit à 17 variables de décision pour chaque fréquence. Il est toujours possible d'utiliser une forme plus générale si aucune solution n'était obtenue. On a en plus 3 variables de décision x, λ, γ qui viennent du multiplicateur de Park et qui correspondent à la non-linéarité statique φ . Une solution a été obtenue en 8 itérations et 104 fréquences. Le nombre total de variables de décisions est $17 \times 104 + 3 = 1771$. On peut faire les remarques suivantes :

- La solution $X(j\omega)$ est une matrice 6×6 positive, complexe et continue par morceaux. Par exemple, à l'itération 8, pour $\omega_3 = 10$ rad/s, la solution $\Pi_3(j\omega)$ est valide sur le domaine fréquentiel $\Omega_3 = [9.72, 32.82]$ rad/s. Finalement après 8 itérations $\Omega_{valid} = \bigcup_{i=1, \dots, 104} \Omega_i = [0 + \infty[$, par conséquent la solution est valide sur tout le domaine fréquentiel. Pour illustrer le résultat, les valeurs propres de l'équation (4.2) entre 0 et 100 rad/s ont été représentées sur la figure 4.14 ;
- Dans le cas présent il n'est pas nécessaire de mettre en œuvre une approche essai-erreur pour déterminer une paramétrisation des multiplicateurs, ce qui permet d'alléger la méthodologie.

De plus si aucune solution n'est obtenue on sait que le problème est infaisable. Dans le cas d'une paramétrisation rationnelle on ne peut jamais vraiment conclure sur la faisabilité du problème en stabilité, car on peut toujours imaginer qu'il existerait une paramétrisation par forcément très complexe mais qui permettrait de trouver une solution ;

- Il est important de noter que cette représentation non-rationnelle n'est pas exempte de défaut. Comme indiqué précédemment elle s'affranchit d'une quelconque paramétrisation des multiplicateurs, ce qui permet de rechercher une solution dans un espace solution beaucoup plus vaste que celui contraint par la paramétrisation. A ce titre, on s'attend et on constate un moindre conservatisme de la solution que dans le cas rationnel. Néanmoins cette approche non-rationnelle, même si elle est séduisante sur le papier, présente un défaut assez lourd qui est le nombre de variables de décision qui augmente avec le nombre total de fréquences, et donc le nombre de contraintes du problème d'optimisation. Comme nous l'avons évoqué, cela provient des variables de décision issues du multiplicateur associé à la non-linéarité statique pour les cas que nous avons traités. Mais elles peuvent tout aussi bien provenir du multiplicateur associé au cas polytopique et temps variant. Le seul cas où nous ne sommes pas confrontés à ce problème est le cas où nous avons à traiter du problème en stabilité et performance d'une boucle fermée face à des incertitudes LTI. En bref lorsqu'on est dans le domaine de la μ -analyse. Le "grand" problème en stabilité se traite, de façon équivalente, pas une série de "petits" problèmes associés à un nombre limité de fréquences, puisque les résultats obtenus à chaque fréquence sont indépendants entre eux. De plus, on peut mettre en œuvre, dans ce cas là, du calcul massivement parallélisable. En bref, ce type d'approche non-rationnelle est particulièrement efficace pour un problème dont la taille du bloc Δ est limitée mais dont l'ordre de la boucle fermée est élevé. Le cas du modèle aéroélastique de l'avion civil est tout à fait adapté.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'analyse des systèmes en boucle fermée par une approche du type IQC. L'intérêt de cette approche est de proposer intrinsèquement un critère de stabilité qui s'exprime sous la forme d'une contrainte de positivité dans le domaine fréquentiel. Nous avons pu montrer que suivant les multiplicateurs que nous utilisons on pouvait retrouver un grand nombre de théorèmes bien connus en analyse linéaire ou non-linéaire comme le critère de Nyquist, de Popov, du cercle etc.

Classiquement, si le critère s'exprime dans le domaine fréquentiel en $j\omega$, la résolution se fait en général par l'application du lemme de KYP qui permet de transformer un problème d'optimisation contenant initialement un nombre infini de contraintes en un problème d'optimisation avec une seule contrainte algébrique. On est donc passé d'une représentation synthétique bien connue et relativement pédagogique, et qui reprend finalement tous les critères historiques en les généralisant, à une représentation analytique plus abstraite mais calculable. Néanmoins cette transformation, bien que très efficace, conduit, comme nous l'avons vu, à augmenter le nombre de variables de décision quadratiquement avec l'ordre de la boucle fermée à analyser. On peut alors atteindre plusieurs milliers de variables de décision pour une boucle fermée contenant une centaine d'états. Donc, même si en théorie la transformation par le lemme de KYP autorise une résolution efficace, en pratique elle est

limitée par l'ordre de la boucle fermée. Pour éviter cette difficulté, on s'est intéressé au critère synthétique et au développement d'une technique dédiée qui permet de le rendre calculable, y compris pour des systèmes de grande dimension. Cette technique dédiée, basée sur la représentation d'une pulsation ω sous une forme LFT, représente ce que l'on peut qualifier de dose analytique nécessaire au calcul du critère en stabilité synthétique.

Globalement, on peut dire qu'il n'y a pas d'approche unique pour traiter de l'ensemble des problèmes d'analyse. Revenons simplement aux différents exemples qui ont servi à l'illustration des différentes approches mises en œuvre. Le cas de l'avion de combat a été parfaitement traité par l'approche fréquentielle, mais ce cas aurait été tout aussi bien traité par la représentation analytique du critère. Néanmoins il était important de montrer que l'approche fréquentielle est efficace et pertinente même pour une boucle fermée composée d'une dizaine d'états.

Le cas caractéristique qui permet d'illustrer l'approche synthétique ou fréquentielle est le cas de la gouverne libre interconnectée à la structure de l'avion par une non-linéarité du type zone morte. Il est typique car le modèle de la boucle fermée contient plusieurs centaines d'états et le nombre de variables de décision est relativement limité du fait de la simplicité du bloc Δ . On a constaté tout l'intérêt de l'approche fréquentielle pour traiter ce type de problème. Dans ce cas précis une approche rationnelle et non-rationnelle ont pu être mises en œuvre très efficacement.

Le cas de l'avion d'affaire représente un cas intermédiaire avec une boucle fermée contenant quelques dizaines d'états. L'approche temporelle peut s'avérer longue alors que l'approche fréquentielle permet d'aboutir plus rapidement à une solution. Néanmoins il est important de garder à l'esprit que, même si l'approche fréquentielle permet de limiter le nombre de variables de décision par rapport à l'approche état, on ne gère pas le nombre d'itérations, ce qui peut conduire à significativement augmenter le temps de résolution, et cette difficulté va dépendre du problème à analyser. De plus on a pu montrer que l'approche non-rationnelle pouvait offrir un intérêt méthodologique clair en évitant de construire une paramétrisation a priori des multiplicateurs et réduisant *de facto* le conservatisme inhérent à cette paramétrisation. Néanmoins, dans le cas général, le nombre de variables de décision augmente fortement avec le nombre de fréquences nécessaires à la résolution du problème. Ce qui peut redevenir fortement préjudiciable à l'obtention d'une solution en un temps raisonnable.

En bref l'approche état est justifiable pour le cas où l'ordre de la boucle fermée est de quelques dizaines d'états au maximum, même si l'approche fréquentielle fonctionne tout à fait correctement comme nous avons pu le montrer. Le cas opposé, avec une boucle fermée contenant plusieurs centaines d'états, montre clairement l'avantage de l'approche fréquentielle, qu'elle soit rationnelle ou non-rationnelle. Dans le cas non-rationnel il ne faut pas que le nombre de fréquences ne soit trop important, ou plus globalement, que le nombre de variables d'optimisation soit limité à quelques dizaines. Entre ces deux cas tout va dépendre de la difficulté du problème, difficulté qui peut conduire à un nombre important d'itérations, et de la structure du bloc Δ qui conditionne le nombre de variables de décision.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Dans ce manuscrit j'ai exposé les différents thèmes de recherche que j'ai menés pendant, et après ma thèse durant mon activité d'ingénieur de recherche à l'ONERA dans le département DTIS. Ils regroupent les 3 grands thèmes de l'automatique : l'identification, la commande et l'analyse en boucle fermée. Pour ces différents thèmes je me suis intéressé essentiellement à la représentation fréquentielle. Cette représentation fréquentielle apparaît comme une représentation unificatrice, structurante et synthétique, comme nous l'avons présenté en introduction. Elle permet avec peu de données, de représenter des dynamiques complexes, de prendre en compte des incertitudes, de traiter de problème de commande et d'analyse en boucle fermée.

Pour l'identification, l'approche fréquentielle est assez naturelle dans le cas de structures flexibles ou, plus généralement, de systèmes présentant des modes résonnants. De plus on peut agir directement et explicitement sur le niveau de précision du modèle identifié dans certaines bandes de fréquences. Ces bandes de fréquences peuvent correspondre par exemples aux bandes de fréquences où les gains sont les plus élevés dans l'esprit du théorème du petit gain. Dans ce manuscrit j'ai exposé 2 extensions possibles des techniques du type sous-espaces fréquentiels. La 1^{ère} permet de contraindre les pôles du modèle identifié dans des régions du plan complexe. C'est une façon pratique et directe d'introduire de la connaissance dans le processus d'identification du type boîte noire. Par exemple il est connu que l'identification fréquentielle à partir de données bruitées peut conduire à des modèles identifiés instables. Une façon efficace est d'imposer la stabilité en contraignant les modes à être dans le demi-plan gauche du plan complexe s . Plus généralement l'approche fonctionne dès lors que la région imposée est convexe. La 2^{ème} extension permet de paramétrer le modèle identifié en fonction, soit d'un paramètre de conception, soit d'un paramètre variant lentement dans le temps. Ceci est particulièrement utile pour synthétiser un compensateur en fonction de ce paramètre.

La synthèse H_∞ est le 2^{ème} grand thème étudié. Nous avons pu montrer au travers des diverses applications, la versatilité des méthodes utilisées, méthodes qui permettent de traiter des problèmes de commande relativement complexes. De plus, l'approche fréquentielle proposée par ce type de synthèse s'adapte très bien avec l'erreur fréquentielle que l'on peut obtenir par l'identification ou la

modélisation fréquentielle menée précédemment. Notons que parmi les trois méthodes basées sur la minimisation de la norme H_∞ et présentées dans ce rapport, deux sont naturellement multicritère : on peut y combiner des critères du type H_2 , temporels, de passivité etc...L'intérêt de ces techniques de synthèse, outre le fait de se baser originellement sur la norme H_∞ qui est un critère fondamental en terme de robustesse et performance, est de pondérer explicitement les transferts en boucle fermée. L'idée de partir directement des pondérations sur les transferts en boucle fermée permet d'avoir une méthodologie de synthèse plus directe et moins itérative. Les différents paramètres d'ajustement de la synthèse, ici les pondérations fréquentielles, ont un sens très clair du point de vue de la boucle fermée. C'est ce qui rend particulièrement attractif ce type d'approche.

Le 3^{ème} domaine concerne l'analyse en boucle fermée. Le point de départ de l'approche IQC a été de pouvoir analyser un système de grande dimension (plusieurs centaines d'états) interconnecté à des non-linéarités statiques du type secteur. Il est apparu que l'approche basée sur une représentation entrées/sorties en fréquence du critère en stabilité issu des IQC, critère que l'on peut qualifier de synthétique, permettait aisément de garantir la stabilité par une simple représentation graphique. L'objectif a été d'étendre cette notion graphique en exploitant la représentation fréquentielle du critère en stabilité pour traiter des cas plus complexes. La difficulté dans une approche synthétique est d'avoir une méthode de résolution efficace. Historiquement l'approche analytique, par le lemme de KYP, permet une résolution efficace mais elle est inapplicable pour des systèmes de grande dimension que l'on souhaite pouvoir traiter. L'objectif a été de développer un certificat analytique que l'on applique au critère synthétique et qui valide la solution sur un continuum de fréquences de façon à pouvoir traiter une large classe de problèmes en stabilité par une représentation fréquentielle.

5.2 Quelques perspectives

5.2.1 Écoulement : modélisation et commande

5.2.1.1 Stratégie à long terme

La modélisation linéaire et non-linéaire, la synthèse robuste et l'analyse en boucle fermée tiendront un rôle majeur dans la poursuite de mes recherches. En ce qui concerne les écoulements la difficulté du contrôle est double. La 1^{ère} est due à la dimension infinie de ces systèmes. Pour pouvoir représenter les écoulements, il est nécessaire de discrétiser l'espace, où chaque point dans l'espace représente une variable d'état. Suivant la précision que l'on souhaite et le phénomène que l'on considère, la discrétisation peut amener plusieurs millions d'états. La question fondamentale est de savoir dans quelle mesure il est possible de réduire ces modèles tout en préservant ses propriétés physiques afin de rendre ces modèles manipulables pour de la commande et de l'analyse. Il existe déjà dans la littérature un grand nombre de méthodes du type ERA, (N)ARMAX, POD, Galerkin etc...J'ai déjà utilisé les sous-espaces fréquentiels sur ce type de système. L'idée est d'améliorer et d'étendre l'approche paramétrique précédemment présentée au cas des écoulements. En effet cette paramétrisation est sensible à la forme choisie et aux modèles utilisés. Il serait intéressant, dans ce contexte, de développer une approche itérative garantissant un bon comportement entre les modèles interpolés. La 2^{ème} difficulté est l'aspect non-linéaire des équations de Navier-Stokes. Le poids de la non-linéarité est donné par le nombre de Reynolds qui pondère le terme linéaire dit diffusif (re-

présenté par le Laplacien) et le terme non-linéaire dit convectif (terme bilinéaire). Plus le nombre de Reynolds est élevé plus l'écoulement sera non-linéaire. Ce terme non-linéaire est conservatif, statique et connecté aux variables d'état sous la forme d'un feedback. La problématique en terme de commande est de prendre en compte cette non-linéarité afin de la traiter durant le processus de synthèse. Plusieurs axes peuvent être envisagés et développés.

- Le 1^{er} axe est d'agir directement sur l'opérateur resolvant de l'écoulement au travers de sa norme H_∞ . Cette approche nécessite alors d'avoir un écoulement de faible dimension. On pourra aussi se baser sur l'abscisse numérique, le rayon spectral et la constante de Kreiss pour chercher à obtenir un comportement désiré de l'écoulement non-linéaire.
- La 2^{eme} possibilité est d'utiliser une approche du type *harmonic balance* qui consiste à remplacer la non-linéarité statique par une ou deux harmoniques associées à un gain qui dépend du point de fonctionnement. Cette représentation d'une non-linéarité statique est bien connue en automatique (appelée *Describing Function*) et permettrait de généraliser la notion de fonction de transfert. Il serait alors possible par une approche robuste et/ou auto-séquentielle de traiter ce type de problème ;
- Une 3^{eme} approche serait de représenter la non-linéarité de l'écoulement sous une forme entrées/sorties. Néanmoins la principale difficulté est d'être capable de le faire et surtout de préserver la représentativité du système par cette modélisation. Si l'approche est valide on a alors tout un champ de techniques du type petit gain/passivité qui permettrait de désensibiliser la boucle fermée à ce type de non-linéarité ;
- Un 4^{eme} axe serait de s'affranchir d'un modèle réduit en synthétisant directement un compensateur à partir d'une réponse en fréquence. On a déjà évoqué 2 approches basées données qui permettent de synthétiser ou ajuster un compensateur en fonction de données simulées ou expérimentales. L'une est basée sur un modèle de référence en fréquence et l'autre sur un critère purement temporel évalué à partir d'une norme l_2 induite. Ici on reprendrait les principes de la commande robuste basée sur une représentation fréquentielle. Pour avoir une approche autant que possible directe, i.e. sans évaluer ou identifier des propriétés particulières d'un système, on se limiterait par exemple, aux systèmes stables en boucle ouverte ou boucle fermée et dans un 1^{er} temps SISO.

5.2.1.2 Stratégie à court terme

A plus court terme, i.e. dans le cadre des 2 thèses que je coencadre actuellement, on peut envisager une stratégie générale et générique pour les 2 types de d'écoulement. Comme nous l'avons évoqué dans ce manuscrit il y a deux grandes classes de problème pour décrire l'écoulement d'un fluide. Il y a les écoulements dits résonateurs dont un exemple typique est celui présenté dans ce manuscrit, à savoir la cavité. Cet écoulement est dit instable. Rappelons simplement le sens du terme instable en ce qui concerne un écoulement résonateur. Si on considère l'opérateur linéarisé et discrétisé de Naviers-Stokes autour de l'écoulement de base alors un certain nombre des valeurs propres de cet opérateur sont à partie réelle positive et donc instables. Pour autant l'écoulement n'est pas divergent au sens d'une divergence exponentielle ou polynomiale car le terme non-linéaire appelé convectif tend à restabiliser l'écoulement vers un équilibre dynamique. Historiquement, dans le contrôle des écoulements du type résonateur, l'approche par feedback a été privilégiée pour une raison évidente de stabilité. Nous avons déjà évoqué le contrôle itératif qui a été mis en œuvre pour

passer d'un équilibre dynamique à un équilibre statique au point fixe stabilisé. Une perspective serait de pouvoir traiter ce type d'écoulement par une approche que l'on pourrait qualifier de *one-shot*. En effet par cette approche itérative on cherche à se rapprocher de l'écoulement de base pour finalement le stabiliser et converger vers ce point fixe. Or les techniques modernes de synthèse permettent de stabiliser simultanément plusieurs modèles. Il devient alors possible de stabiliser en une seule étape à la fois l'écoulement de base et l'écoulement effectif représenté par le modèle moyen. Comme nous l'avons indiqué cette stabilité simultanée n'est pas suffisante pour garantir une convergence vers l'écoulement de base stabilisé. Il est donc essentiel d'en comprendre les raisons et surtout l'influence de la non-linéarité sur le comportement de l'écoulement loin de l'écoulement de base.

L'autre stratégie à développer concerne le contrôle des écoulements amplificateurs. Ce type d'écoulement est illustré très classiquement par une marche descendante. Celle-ci, comme son nom l'indique, correspond à une marche avec un écoulement qui se propage dans le sens où la marche "descend". Cet écoulement, physiquement, est constitué d'une couche de cisaillement et d'une bulle de recirculation au niveau de la marche et sous la couche de cisaillement. Il existe bien d'autres écoulements amplificateurs comme la plaque hypersonique pour laquelle je coencadre un doctorant, Pierre Ni-bourel, avec le département de mécanique des fluides DAAA de l'ONERA. Tous les écoulements amplificateurs ont la particularité d'être stable. Par stable, si on reprend la notion d'opérateur linéarisé et discrétisé des équations de Navier-Stokes, celui-ci a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Ainsi historiquement, pour assurer de la performance, il suffisait de synthétiser une précommande. Pour autant la synthèse d'une loi de commande n'est pas réservée exclusivement aux systèmes instables même si dans ce cas là une structure feedback est obligatoire si on cherche la stabilité, comme pour le cas des écoulements résonateurs du type cavité. Il est intéressant de mener des études sur la synthèse d'un compensateur dans le cas d'un écoulement du type amplificateur, compensateur qui serait combiné à une précommande pour la partie performance. L'objectif de ce compensateur serait d'être robuste par rapport à la non-linéarité dès lors que l'on s'écarte de l'écoulement de base. On pourrait aussi chercher à faire de la synthèse multimodèle ou à paramètre variant dans le cas d'un écoulement hypersonique. En effet ce dernier débute à Mach 4.5 mais peut évoluer à des vitesses supérieures comme Mach 5 ou Mach 5.5. Dans ce cas, par une approche LPV, on chercherait à garantir de la robustesse et de la performance sur toute une plage de fonctionnement.

5.2.1.3 Approches basées données

J'ai déjà évoqué ce point dans le 4^{ème} item de la stratégie à long terme. Je vais développer un peu plus précisément ce que cet axe peut recouvrir. Comme évoqué dans le paragraphe précédent, les phénomènes non-linéaires liés au terme dit convectif de l'équation de Navier-Stokes jouent un rôle prépondérant dans les caractéristiques de l'écoulement. Or obtenir un modèle non-linéaire réduit représentatif de l'écoulement avec un temps de simulation limité à quelques minutes ou dizaines de minutes semble être une approche actuellement assez hypothétique. Donc une solution est d'utiliser directement les données d'entrées/sorties d'un simulateur d'écoulement et à partir de ces données, retoucher ou synthétiser une loi de commande. La simulation de l'écoulement peut durer plusieurs jours ou mois si nécessaire, car une fois les données obtenues, elles peuvent être stockées pour être utilisées pour de la commande sans modèle. Si on cherche effectivement à synthétiser à partir des données un compensateur pour le contrôle d'un écoulement non-linéaire l'approche du type falsifi-

cation déjà décrite dans ce rapport représente à la fois une approche simple et parfaitement adaptée au problème. En effet elle suppose que l'on a des données dans le domaine temporel et potentiellement un compensateur initial qui peut être nul. Il s'agit à partir d'un compensateur initial de disperser quelques coefficients de ce dernier pour obtenir un ensemble admissible de compensateurs. Pour chaque compensateur on y associe une référence fictive (voir section 3.5.1) et pour chaque référence fictive, et donc compensateur, on évalue un critère typiquement énergétique qui permettra de discriminer et d'ordonner les compensateurs entre eux. Le ou les compensateurs qui minimisent le critère énergétique par exemple pourront alors être choisis pour être implémentés et testés en boucle fermée. Sur le principe l'approche ne requiert que peu d'hypothèses sur le système puisqu'on utilise directement les données temporelles expérimentales ou simulées. Le compensateur est par contre inversible pour pouvoir construire la référence fictive associée. Cette recherche du ou des meilleurs compensateurs dans un ensemble admissible pourra être menée aussi de façon itérative. En effet rien n'empêche à partir d'un compensateur minimisant un critère énergétique de reconstruire un nouvel ensemble admissible pour réévaluer l'obtention d'un compensateur satisfaisant mieux les spécifications. A priori les temps de calcul ne seraient pas prohibitifs car ils ne se basent que sur le calcul d'une référence fictive et d'un critère qui serait a priori quadratique.

Une autre approche basée sur la réponse fréquentielle du modèle complet pourrait être mise en œuvre. Dans le cas d'une représentation non-rationnelle d'un système, par exemple des systèmes présentant des retards très importants comme dans le cas de la plaque hypersonique où le retard peut représenter 3 à 4 fois la durée de la réponse impulsionnelle, une approche directe qui permettrait de synthétiser un compensateur à partir de données fréquentielles représenterait une alternative intéressante par rapport aux techniques basées modèles. Évidemment l'approche proposée dans ce document basé sur un modèle de référence pourrait s'inscrire dans cette thématique, mais les contraintes liées à l'obtention des modes et surtout des zéros instables rend l'approche nettement moins directe que ce qu'elle pouvait laisser supposer. Un système amplificateur peut comporter des dizaines de zéros instables par exemple, l'estimation précise de chacun devient alors aussi compliquée que l'identification d'une représentation d'état classique pour la synthèse d'un compensateur. Ici il s'agira, par l'utilisation et le développement d'outils numériques, de rechercher un compensateur répondant aux spécifications à partir d'une réponse fréquentielle. Pour éviter des contraintes trop fortes on supposera que le système est stable où que l'on a un compensateur initial stabilisant.

5.2.2 Identification/modélisation linéaire et non-linéaire

Un autre domaine de recherche concerne la modélisation du type boîte noire par les sous-espaces fréquentiels. J'ai mené des travaux sur la contrainte modale et l'aspect paramétrique des sous-espaces avec plusieurs publications revues. Néanmoins il serait intéressant d'étendre ces approches à des aspects non-linéaires et à l'identification dans le domaine continu. Le principe est de structurer le problème non-linéaire d'une façon particulière. Plus précisément on sépare la partie linéaire de la partie non-linéaire et statique. Cette séparation peut être représentée par un modèle linéaire pris en sandwich entre deux non-linéarités statiques (modélisation du type *Wiener et Hammerstein*). La non-linéarité statique peut aussi être interconnectée sous la forme d'un feedback à la partie linéaire. Ces représentations sont particulièrement intéressantes car elles s'inscrivent parfaitement dans le paradigme de la commande robuste et de l'analyse en boucle fermée. L'objectif est d'intégrer les

éléments que j'ai développés pour les sous-espaces fréquentiels linéaires dans des techniques d'identification non-linéaires basées sur la modélisation du type *Wiener et Hammerstein*. Par exemple on pourrait chercher à garantir la stabilité du modèle identifié linéaire, comme une voilure d'avion soumise à une excitation au sol, excitation produite par un actionneur non-linéaire. On identifierait à la fois la structure mécanique de l'avion et les caractéristiques non-linéaires de l'actionneur par exemple, ce qui permettrait un gain en précision, car l'objectif est de caractériser précisément les modes structuraux de la voilure. Cette expérience est bien connue en aéronautique puisqu'elle correspond à ce que l'on appelle les GVT (*Ground Vibration Test*). Il existe dans la communauté un benchmark sur un avion d'arme F-16 américain (Schoukens, Maarten & Noël, J.P.. (2017). *F-16 aircraft benchmark based on ground vibration test data*). Je précise en outre qu'il existe des versions fréquentielles pour l'identification des modèles du type *Wiener et Hammerstein*. L'approche fréquentielle n'est pas incompatible avec ce type d'approche. De même que pouvoir paramétrer la partie linéaire, voire non-linéaire, permettrait d'enrichir significativement la modélisation non-linéaire du système. Il est intéressant de constater qu'il serait possible de combiner cette thématique avec le 3^{ème} point sur le contrôle des écoulements. En effet lorsque l'on constate un comportement du type cycle limite sur un écoulement résonateur dû fait de la non-linéarité sur l'état, on peut se poser légitimement la question de savoir s'il est possible de modéliser ce système par une représentation du type *Wiener et Hammerstein*. La partie linéaire pourrait être estimée par les modes de Koopman qui sont obtenus par une simple DFT sur la sortie.

Bibliographie

- [1] D. Alazard and P. Apkarian. Observer-based structures of arbitrary compensators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(2) :101–118, 1999.
- [2] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr. Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 856–861, 2014.
- [3] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth H_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, Jan 2006.
- [4] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design. *Automatica*, 43(4) :724 – 731, 2007.
- [5] H. Arbabi and I. Mezić. Study of dynamics in post-transient flows using koopman mode decomposition. *Phys. Rev. Fluids*, 2 :124402, Dec 2017.
- [6] P. B. Brugarolas and M. G. Safonov. Learning about dynamical systems via unfalsification of hypotheses. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(11) :933–943, 2004.
- [7] S. Boyd and C. Barrat. *Linear controller design : limits of performance*. Prentice Hall, 1990.
- [8] S. Boyd and Q. Yang. Structured lyapunov functions for system stability problems. *International Journal of Control*, 49(6) :819–829, 1989.
- [9] T. Brozenec and M. Safonov. Controller identification. In *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, volume 3, pages 2093–2097 vol.3, 1997.
- [10] P. Brugarolas, V. Fromion, and M. Safonov. Robust switching missile autopilot. In *American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, volume 6, pages 3665–3669 vol.6, 1998.
- [11] M. Campi, A. Lecchini, and S. Savaresi. Virtual reference feedback tuning : a direct method for the design of feedback controllers. *Automatica*, 38 :1337–1346, 2002.
- [12] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(3) :358–367, Mar 1996.
- [13] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in lmi regions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 44(12) :2257–2270, Dec 1999.
- [14] J. A. Dahan, A. S. Morgans, and S. Lardeau. Feedback control for form-drag reduction on a bluff body with a blunt trailing edge. *J. Fluid Mech.*, 704 :360–387, 2012.
- [15] L. Dalla Longa, A. S. Morgans, and J. A. Dahan. Reducing the pressure drag of a d-shaped bluff body using linear feedback control. *Theo. Comput. Fluid Dyn.*, pages 1–11, 2017.

- [16] A. Dehghani, B. D. O. Anderson, and A. Lanzon. Unfalsified adaptive control : A new controller implementation and some remarks. In *Control Conference (ECC), 2007 European*, pages 709–716, July 2007.
- [17] F. Demourant. *Interaction identification-commande robuste : méthodes et applications à l'avion souple*. PhD thesis - ENSAE (France), 2002.
- [18] F. Demourant. New algorithmic approach based on integral quadratic constraints for stability analysis of high order models. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 359–364, July 2013.
- [19] F. Demourant. Stability analysis by a new Algorithmic approach based on Integral Quadratic Constraints : application to an aircraft benchmark. *AerospaceLab Journal*, (13) :pages 1–11, Nov. 2017.
- [20] F. Demourant and G. Ferreres. Frequency domain identification of an aircraft LFT model. In *2001 European Control Conference (ECC)*, pages 657–662, Sep. 2001.
- [21] F. Demourant and G. Ferreres. Identification structurée d'un modèle d'avion. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME - Nancy)*, 2001.
- [22] F. Demourant and G. Ferreres. Structured identification of an aircraft model. Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Aug. 2001.
- [23] F. Demourant and G. Ferreres. Controller design for the identification of an LFT model, 2002. 15th IFAC World Congress.
- [24] F. Demourant and G. Ferreres. A frequency domain identification-control approach for a flexible aircraft. In *Proceedings of the International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 126–131 vol.1, Sep. 2002.
- [25] F. Demourant and G. Ferreres. A frequency domain identification-control approach for a flexible aircraft. In *Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on*, volume 1, pages 126–131 vol.1, 2002.
- [26] F. Demourant and G. Ferreres. Identification en boucle fermée d'un modèle LFT. *Journal Européen des Systèmes Automatisés : identification des systèmes*, 36, 2002.
- [27] F. Demourant and G. Ferreres. An lpv multiobjective control law design based on youla parametrization for a flexible bwb aircraft. 2011.
- [28] F. Demourant, G. Ferreres, and J. Biannic. Falsification of an aircraft autopilot, 2002.
- [29] F. Demourant, T. V. Hoang, and A. Pavie. Analysis of the aeroelastic stability with freeplay in a control surface by integral quadratic constraints approach. Paris, France, 2011.
- [30] F. Demourant and A. Pavie. Frequency domain analysis of the aeroelastic stability with a control surface freeplay. Stockholm, Sweden, 2007.
- [31] F. Demourant and C. Poussot-Vassal. A new frequency domain subspace algorithm with restricted poles location through LMI regions and its application to a wind-tunnel test. *International Journal of Control*, 90(4) :779–799, 2017.
- [32] Demourant, F. and Ferreres, G. A linear parameter-varying multiobjective control law design based on youla parametrization for a flexible blended wing body aircraft, 2013.

- [33] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 129(6) :242–250, november 1982.
- [34] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8) :831–845, 1989.
- [35] J. Doyle, M. Newlin, F. Paganini, and J. Tierno. Unifying robustness analysis and system ID. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 3667–3672, 1994.
- [36] M. Fan, A. Tits, and J. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1) :25–38, 1991.
- [37] D. Fath and M. Humbert. An improved formulation for aeroservoelasticity studies. *Proceedings of the IFASD*, pages 233–239, 1999.
- [38] G. Ferreres. *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications*. Kluwer Academics/Plenum Press, 1999.
- [39] G. Ferreres and J.-M. Biannic. A μ analysis technique without frequency gridding. In *American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, volume 4, pages 2294–2298 vol.4, Jun 1998.
- [40] G. Ferreres and V. Fromion. H_∞ control for a flexible transmission system. *European Journal of Control*, 5(2-4) :185–192, 1999.
- [41] G. Ferreres, V. Fromion, G. Duc, and M. M’Saad. Application of real / mixed μ computational techniques to a H_∞ missile autopilot. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(8) :743–769, October 1996.
- [42] G. Ferreres and G. Puyou. Flight control law design for a flexible aircraft : limits of performance. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29(4) :870–878, 2006.
- [43] S. Font. *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation H_∞ et approche symbolique de la forme standard*. Thèse Université de Paris-Sud / Supelec (France), 1995.
- [44] D. A. Hammond and L. G. Redekopp. Global dynamics of symmetric and asymmetric wakes. *J. Fluid Mech.*, 331 :231, 1997.
- [45] L. Henning and R. King. Robust multivariable closed-loop control of a turbulent backward-facing step flow. *J. Aircraft*, 44 :201–208, 2007.
- [46] L. Henning, M. Pastoor, R. King, B. R. Noack, and G. Tadmor. Feedback control applied to the bluff body wake. In *Active flow control (ed. R. King)*, pages 369–390. Springer, 2007.
- [47] M. Högberg, T. R. Bewley, and D. S. Henningson. Relaminarization of $Re_\tau = 100$ turbulence using gain scheduling and linear state-feedback control. *Phys. Fluids*, 15 :3572–3575, 2003.
- [48] T. Iwasaki, S. Hara, and A. L. Fradkov. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges. *Systems & Control Letters*, 54(7) :681–691, 2005.
- [49] H. Jin and M. Safonov. Unfalsified adaptive control : Controller switching algorithms for nonmonotone cost functions. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(8) :692–704, 2012.
- [50] B. L. Jones, P. H. Heins, E. C. Kerrigan, J. F. Morrison, and A. S. Sharma. Modelling for robust feedback control of fluid flows. *J. Fluid Mech.*, 769 :687–722, 2015.

- [51] U. Jonsson. Stability analysis with popov multipliers and integral quadratic constraints. *Systems and Control Letters*, 31 :85–92, 1997.
- [52] U. Jonsson. Lecture notes on integral quadratic constraints. 2001.
- [53] U. Jonsson and A. Rantzer. A unifying format for multiplier optimization. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, volume 5, pages 3859–3860 vol.5, Jun 1995.
- [54] U. Jonsson and A. Rantzer. Systems with uncertain parameters - time variations with bounded derivatives. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6 :969–982, 1996.
- [55] C.-Y. Kao, A. Megretski, and U. Jonsson. Specialized fast algorithms for iqc feasibility and optimization problems. *Automatica*, 40(2) :239 – 252, 2004.
- [56] P. Kergus. *Data-driven model reference control in the frequency-domain : From model reference selection to controller validation*. PhD thesis, ISAE - Supaero, 2019.
- [57] P. Kergus, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Identification of parametric models in the frequency domain through the subspace framework under LMI constraints. In *2018 European Control Conference (ECC)*, pages 2873–2878, June 2018.
- [58] P. Kergus, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Identification of parametric models in the frequency domain through the subspace framework under LMI constraints. *International Journal of Control*, 0(0) :1–12, 2018.
- [59] P. Kergus, S. Formentin, C. Poussot-Vassal, and F. Demourant. Data-driven control design in the loewner framework : Dealing with stability and noise. In *Proceedings of the European Control Conference 2018*, pages 1704–1709, 06 2018.
- [60] P. Kergus, M. Olivi, C. Poussot-Vassal, and F. Demourant. From reference model selection to controller validation : Application to loewner data-driven control. *IEEE Control Systems Letters*, 3(4) :1008–1013, Oct 2019.
- [61] P. Kergus, C. Poussot-Vassal, F. Demourant, and S. Formentin. Frequency domain data-driven control design in the loewner framework. volume 50, pages 2095 – 2100, 2017. 20th IFAC World Congress.
- [62] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [63] H. Koroglu and C. W. Scherer. Robust performance analysis for structured linear time-varying perturbations with bounded rates-of-variation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2) :197–211, Feb 2007.
- [64] J. M. Krause and P. P. Khargonekar. Parameter identification in the presence of non-parametric dynamic uncertainty. *Automatica*, 26(1) :113 – 123, 1990.
- [65] C. Leclercq, F. Demourant, C. Poussot-Vassal, and D. Sipp. Linear iterative method for closed-loop control of quasiperiodic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 868 :26–65, 2019.
- [66] J. Li and A. S. Morgans. Feedback control of combustion instabilities from within limit cycle oscillations using \mathcal{H}_∞ -infinity loop-shaping and the ν -gap metric. *Proc. Roy. Soc. A*, 472, 2016.
- [67] K. Liu, R. Jacques, and D. Miller. Frequency domain structural system identification by observability range space extraction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118(2) :211–220, Jun 1996.

- [68] M. Lovera and G. Mercere. Identification for gain-scheduling : a balanced subspace approach. In *IEEE American Control Conference*, 2007.
- [69] R. Mancera and M. Safonov. Stability multipliers for mimo monotone nonlinearities. In *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 3, pages 1861 – 1866, june 2003.
- [70] T. McKelvey, H. Akcay, and L. Ljung. Subspace-based multivariable system identification from frequency response data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7) :960–979, July 1996.
- [71] B. J. McKeon and A. S. Sharma. A critical-layer framework for turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 658 :336–382, 2010.
- [72] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(6) :819–830, Jun 1997.
- [73] D. Miller and R. De Callafon. Subspace identification with eigenvalue constraints. *Automatica*, 2013.
- [74] J. Norton. Special issue on bounded-error estimation, part ii. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(1) :1–132, 1995.
- [75] P. Park. Stability criteria of sector- and slope-restricted lur’e systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(2) :308 –313, Feb. 2002.
- [76] P. Parrilo. On the numerical solution of lmis derived from the kyp lemma. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2334 –2338, 1999.
- [77] P. Parrilo. Outer approximation algorithms for kyp-based lmis. In *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, volume 4, pages 3025 –3028, 2001.
- [78] H. Pfifer and P. Seiler. Robustness analysis with parameter-varying integral quadratic constraints. In *2015 American Control Conference (ACC)*, pages 138–143, July 2015.
- [79] E. Polak. *Optimization Algorithms and Consistent Approximations*. Springer-Verlag New York, 1997.
- [80] C. Poussot-Vassal and F. Demourant. Dynamical medium (large) -scale model reduction and interpolation with application to aircraft systems. *AerospaceLab Journal*, (4) :pages 1–11, Nov. 2012.
- [81] C. Poussot-Vassal, F. Demourant, A. Lepage, and D. L. Bihan. Gust load alleviation : Identification, control, and wind-tunnel testing of a 2-D aeroelastic airfoil. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(5) :1736–1749, Sep. 2017.
- [82] P. Rosa, J. S. Shamma, C. Silvestre, and M. Athans. Stability overlay for adaptive control laws applied to linear time-invariant systems. In *2009 American Control Conference*, pages 1934–1939, June 2009.
- [83] P. Rosa, J. S. Shamma, C. Silvestre, and M. Athans. Stability overlay for adaptive control laws. *Automatica*, 47(5) :1007 – 1014, 2011.
- [84] M. G. Safonov and T.-C. Tsao. The unfalsified control concept and learning. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 3, pages 2819–2824 vol.3, Dec 1994.

- [85] M. G. Safonov and T.-C. Tsao. The unfalsified control concept and learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6) :843–847, Jun 1997.
- [86] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 2000.
- [87] A. Schirrer, M. Kozek, F. Demourant, and G. Ferreres. *Modeling and Control for a Blended Wing Body Aircraft - A case Study*, chapter Feedback Control Designs, pages 147–226. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [88] A. S. Sharma. Model reduction of turbulent fluid flows using the supply rate. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 19 :1267–1278, 2009.
- [89] A. Sideris and R. Sanchez Pena. Robustness margin calculation with dynamic and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*,, 35(8) :970 –974, aug 1990.
- [90] M. Stefanovic, R. Wang, and M. Safonov. Stability and convergence in adaptive systems. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 2, pages 1923–1928 vol.2, 2004.
- [91] J. Torralba, F. Demourant, G. Puyou, and G. Ferreres. A method for flexible aircraft LFT modelling. In *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD 2009)*, Seattle, WA, USA, 2009.
- [92] J. Torralba, F. Demourant, G. Puyou, and G. Ferreres. Modelling a flexible aircraft as a continuum using linear fractional transformation. In *2009 European Control Conference (ECC)*, pages 3933–3938, Aug 2009.
- [93] J. Torralba, G. Puyou, and F. Demourant. Self-scheduling multiobjective control law design for a flexible aircraft. In *Proceedings of the AIAA GNC conference*, 10-13 Aug 2009.
- [94] R. Tóth. *Modelling and identification of linear parameter-varying systems*. Springer, 2010.
- [95] J. van Wingerden and M. Verhaegen. Subspace identification of multivariable lpv systems : a novel approach. In *2008 IEEE International Conference on Computer-Aided Control Systems*, pages 840–845, 2008.
- [96] V. Verdult. *Non-linear system identification : a state-space approach*. Twente University Press, 2002.
- [97] P. Vuillemin, F. Demourant, J. Biannic, and C. Poussot-Vassal. Global stability validation of an uncertain large-scale aircraft model. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 152–157, Oct 2014.
- [98] P. Vuillemin, F. Demourant, J.-M. Biannic, and C. Poussot-Vassal. Stability analysis of a set of uncertain large-scale dynamical models with saturations : Application to an aircraft system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(2) :661–668, March 2017.
- [99] P. Vuillemin, F. Demourant, and C. Poussot-Vassal. Stability Analysis of a Set of Uncertain Large-Scale Dynamical Models with Saturations. *AerospaceLab Journal*, (13) :pages 1–11, Nov. 2017.
- [100] E. Walter and H. Piet-Lahanier. Estimation of parameter bounds from bounded-error data : a survey. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32(5) :449 – 468, 1990.

- [101] R. Wang and M. Safonov. Stability of unfalsified adaptive control using multiple controllers. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pages 3162–3167 vol. 5, June 2005.
- [102] D. Williams, W. Kerstens, J. Pfeiffer, R. King, and T. Colonius. Unsteady lift suppression with a robust closed loop controller. In *Active Flow Control II*, pages 19–30. Springer, 2010.

Identification, commande et analyse dans le domaine fréquentiel : application à des systèmes de grande dimension

L'approche fréquentielle est la représentation essentiellement utilisée et mise en oeuvre durant mon activité de recherche à l'ONERA DCSD puis DTIS. Elle est une approche structurante et unificatrice dans le domaine de l'identification, de la commande et de l'analyse.

L'approche fréquentielle a été mise en oeuvre dans le cadre de l'identification au travers d'une technique basée sur les sous-espaces. Cette représentation en fréquence présente un triple avantage. Celle-ci permet de gérer facilement le compromis précision/complexité du modèle identifié en fonction de la finesse du maillage et du domaine fréquentiel considéré. De plus l'erreur d'identification est alors facilement appréhendable pour de la commande et de l'analyse en boucle fermée. Enfin la représentation fréquentielle agit comme un compresseur de données, elle permet avec un jeu de données limité de représenter des systèmes résonnants/flexibles qui nécessitent généralement un grand nombre de données temporelles pour pouvoir être identifiés. In fine on obtient un modèle identifié associé à une erreur d'identification qui peut être facilement exploitée par la commande ou l'analyse. Deux extensions seront présentées. La 1ère est basée sur une contrainte des modes du modèle identifié dans des régions LMI du plan complexe et la 2ème propose une paramétrisation des modèles identifiés en fonction d'un ou plusieurs paramètres de conception.

La partie synthèse de lois s'appuie essentiellement sur des critères fréquentsiels du type H_2/H_∞ , que ce soit pour la version historique, par paramétrisation de Youla ou structurée. Il s'agit de pondérer directement les transferts en boucle fermée afin d'obtenir un compensateur satisfaisant. Les notions mises en jeux se rapprochent de l'automatique fréquentielle classique, on peut d'ailleurs parler au sujet de ces méthodes de méthodes "néo-classiques". Cette mise en forme du problème de commande où l'on contraint explicitement la boucle fermée et éventuellement la structure du compensateur simplifie significativement la méthodologie, réduit fortement les itérations entre l'analyse et la commande et permet de prendre en compte efficacement, par exemple, des critères de robustesse comme l'erreur d'identification fréquentielle obtenue lors de l'identification.

Enfin la partie analyse repose sur une approche du type IQC où la formulation originelle apparaît comme un critère synthétique en fonction de la fréquence. Cette représentation permet finalement de boucler la boucle, où de la modélisation à l'analyse en passant par la commande, la représentation en fréquence est la représentation unique utilisée à toutes les étapes. Mais l'évaluation du critère de stabilité synthétique, donc en fréquence, est peu effective car elle ne peut garantir le résultat sur le continuum de fréquences. Le pendant analytique du critère obtenu par le lemme de KYP rend calculable et donc effective l'évaluation du critère. Malheureusement l'approche analytique obtenue devient plus restrictive et surtout inexploitable pour la grande dimension. Pour pallier ce problème, un certificat a été développé pour garantir le résultat entre les points du maillage lorsque le critère de stabilité en fréquence est utilisé. Ce certificat permet de garantir la solution sur tout le continuum en fréquence permettant ainsi de traiter de modèles de grande dimension.

Les différentes approches sont illustrées au travers de nombreuses applications qui concernent la modélisation et le contrôle d'avions civils de grande taille, l'analyse en boucle fermée d'avions d'arme, en passant par la modélisation et le contrôle des écoulements.

Mots-clés : DOMAINE FRÉQUENTIEL ; APPLICATION SYSTEME ;BLACK-NICHOLS

Frequency domain identification, control and analysis: application to high dimensional systems

The frequency domain approach is the main representation used and implemented during my research activity at ONERA DCSD then DTIS. This approach represents a structuring and unifying approach in the identification, control and analysis domain.

The frequency domain approach has been implemented in the identification context through a sub-space based technique. This one allows to tune easily the trade-off complexity/accuracy of the identified model according to the gridding and the frequency domain considered. In fine an identified model associated to a frequency domain error is obtained, error that can be easily treated by the control and the analysis.

The law synthesis part is essentially based on frequency domain H_2/H_∞ criteria . It consists in weighting directly closed loop transfers in order to obtain a satisfying controller. This approach, where closed loop transfers and eventually the controller structure are constraint, widely simplifies the methodology, strongly limits iterations between control and analysis steps and allows to take into account, for example, robustness criteria as the modelling error obtained during the identification step.

Finally the analysis part is based on IQC approach where the original formulation appears as a synthetic criterion as a function of the frequency. This representation allows closing the loop, where from modelling to analysis, by going through control, the frequency domain representation is the only representation used for all steps.

The different approaches are illustrated by numerous applications, which concern large dimensional civil aircraft modeling and control, closed loop analysis of combat aircraft, by going through fluid flow modelling and control.

Keywords : IDENTIFICATION ; SUB-SPACE ; ROBUST CONTRO ; CLOSED LOOP ANALYSIS ; INTEGRAL QUADRATIC CONSTRAINTS (IQC) ; FREQUENCY DOMAIN REPRESENTATION ; LARGE DIMENSIONAL SYSTEMS

