



**HAL**  
open science

# Tester la relativité générale avec des horloges dans l'espace, et explorer les possibilités de détection de matière noire avec des atomes froids dans l'espace et au sol

Etienne Savalle

## ► To cite this version:

Etienne Savalle. Tester la relativité générale avec des horloges dans l'espace, et explorer les possibilités de détection de matière noire avec des atomes froids dans l'espace et au sol. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris - SYRTE, 2020. Français. NNT : . tel-03151020

**HAL Id: tel-03151020**

**<https://hal.science/tel-03151020>**

Submitted on 24 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée au SYRTE, Observatoire de Paris

**Tester la relativité générale avec des horloges dans  
l'espace, et explorer les possibilités de détection de  
matière noire avec des atomes froids dans l'espace et au  
sol**

Soutenue par

**Etienne SAVALLE**

Le 16 Novembre 2020

École doctorale n°127

**Astronomie et astrophysique  
d'Île-de-France**

Spécialité

**Astronomie et Astrophysique**

Composition du jury :

**Eric Gourgoulhon**

Directeur de Recherche CNRS, LUTH *Président*

**Giorgio Santarelli**

Ingénieur de Recherche CNRS, Laboratoire Photonique, numérique et Nanosciences *Rapporteur*

**Benoit Famaey**

Directeur de Recherche CNRS, Observatoire astronomique de Strasbourg *Rapporteur*

**Anne Amy-Klein**

Professeure, Laboratoire de Physique des Lasers *Examineur*

**Christophe Salomon**

Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire Kastler-Brossel *Examineur*

**Isabelle Petitbon**

Responsable Physique Fondamentale, CNES *Invitée*

**Peter WOLF**

Directeur de Recherche CNRS, SYRTE *Directeur de thèse*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Relativité Restreinte . . . . .	6
1.1.1	Annus Mirabilis . . . . .	6
1.1.2	Vitesse de la lumière dans l'éther . . . . .	6
1.1.3	Transformation de Lorentz . . . . .	7
1.1.4	Postulats de la relativité restreinte . . . . .	8
1.1.5	Bestiaire des effets relativistes et confirmation expérimentale . . . . .	8
1.2	Relativité Générale . . . . .	9
1.2.1	Présentation . . . . .	9
1.2.2	Equation de champs d'Einstein . . . . .	10
1.2.3	Principe d'équivalence . . . . .	11
1.2.4	Confirmation expérimentale . . . . .	16
1.2.5	Limites . . . . .	17
1.3	Modèle Standard . . . . .	18
1.3.1	Historique . . . . .	18
1.3.2	Présentation . . . . .	18
1.3.3	Particules du modèle standard . . . . .	19
1.3.4	Lagrangien . . . . .	20
1.3.5	Confirmation expérimentale . . . . .	23
1.3.6	Limites . . . . .	23
1.4	Matière noire . . . . .	24
1.4.1	Présentation . . . . .	24
1.4.2	Autres indices . . . . .	24
1.4.3	Modélisation et recherche expérimentale de la matière noire . . . . .	25
1.5	Modèles alternatifs . . . . .	29
1.5.1	Garde-fous . . . . .	29
1.5.2	Théories alternatives . . . . .	30
1.6	Travail réalisé lors de la thèse . . . . .	33
1.6.1	La mission ACES-Pharao . . . . .	33
1.6.2	L'expérience DAMNED . . . . .	33
1.6.3	Le projet Airborne - lien optique en espace libre . . . . .	34
	Bibliographie Introduction . . . . .	34



<b>2</b>	<b>ACES-PHARAO</b>	<b>41</b>
2.1	Présentation de la mission . . . . .	43
2.1.1	Concept . . . . .	43
2.1.2	Objectifs scientifiques . . . . .	44
2.1.3	Centre d'analyse de données du SYRTE . . . . .	45
2.1.4	Contraintes sur le test du décalage vers le rouge gravitationnel . . . . .	45
2.1.5	Contraintes de la mission . . . . .	47
2.2	Logiciels . . . . .	51
2.2.1	Simulation des désynchronisations . . . . .	53
2.2.2	Traitement . . . . .	58
2.2.3	Analyse . . . . .	60
2.2.4	Limites . . . . .	62
2.3	Résultats . . . . .	63
2.3.1	Données simulées . . . . .	63
2.3.2	GLS vs LSMC . . . . .	63
2.3.3	Phase contre Fréquence . . . . .	64
2.3.4	Nombre de stations . . . . .	67
2.3.5	Durée de la mission . . . . .	68
2.3.6	Dégradation de l'orbitographie . . . . .	69
2.3.7	Lien GNSS . . . . .	71
2.4	Conclusion . . . . .	74
2.4.1	Résultats principaux . . . . .	74
2.4.2	Perspectives . . . . .	74
	Bibliographie ACES-PHARAO . . . . .	75
<b>3</b>	<b>L'expérience DAMNED</b>	<b>77</b>
3.1	Présentation de l'expérience DAMNED . . . . .	79
3.1.1	Tableau des valeurs numérique . . . . .	80
3.2	Champ scalaire ultra-léger de matière noire . . . . .	81
3.2.1	Champ scalaire oscillant - relativité générale . . . . .	81
3.2.2	Champ scalaire de matière noire . . . . .	85
3.2.3	Couplage matière noire/matière normale - modèle standard . . . . .	86
3.2.4	Oscillation des constantes fondamentales . . . . .	88
3.2.5	Champ scalaire stochastique . . . . .	89
3.2.6	Relaxation cosmologique et matière noire . . . . .	93
3.2.7	Résumé . . . . .	95
3.2.8	Limites existantes . . . . .	95
3.2.9	Mesure simultanée contre mesure différée . . . . .	97
3.3	L'expérience DAMNED . . . . .	99
3.3.1	Concept de l'expérience . . . . .	99
3.3.2	Evolution de l'expérience . . . . .	104
3.3.3	Transformée de Fourier discrète . . . . .	111
3.3.4	Modélisation du bruit de la cavité . . . . .	114

3.3.5	Effets systématiques . . . . .	116
3.3.6	Résumé . . . . .	122
3.4	Modélisation de l'effet de matière noire sur DAMNED . . . . .	123
3.4.1	Résonance de la cavité . . . . .	123
3.4.2	Finesse de la cavité . . . . .	130
3.4.3	Effet de la matière noire sur la délai optique . . . . .	136
3.4.4	Effet de la matière noire sur DAMNED . . . . .	138
3.5	Analyse des données . . . . .	140
3.5.1	Nombre de paramètres à ajuster . . . . .	140
3.5.2	Vraisemblance bayésienne . . . . .	142
3.5.3	Application dans le cas de DAMNED . . . . .	148
3.6	Résultats . . . . .	151
3.7	Conclusion et perspectives . . . . .	152
3.7.1	Etapas . . . . .	152
3.7.2	Perspectives . . . . .	153
	Bibliographie DAMNED . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Lien optique en espace libre</b>	<b>159</b>
4.1	Au delà d'ACES-PHARAO . . . . .	161
4.2	Projet Airborne : TOFU/LOVE/BabyDOLL... . . . .	163
4.2.1	Fonctionnement du lien . . . . .	163
4.2.2	Ma contribution . . . . .	165
4.3	Conclusion . . . . .	167
	Bibliographie Airborne . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
5.1	ACES-PHARAO . . . . .	172
5.2	DAMNED . . . . .	173
5.3	Et après ? . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>179</b>
6.1	Publications . . . . .	179
6.1.1	Articles . . . . .	179
6.1.2	Conférences . . . . .	179
6.2	Annexe ACES-PHARAO . . . . .	180
6.2.1	Matrice de covariance du bruit de marche aléatoire . . . . .	180
6.2.2	Matrice de covariance du bruit violet . . . . .	182
6.3	Annexe DAMNED . . . . .	184
6.3.1	Changement de variable de la distribution de vitesse . . . . .	184
6.3.2	Somme de phase aléatoire . . . . .	184
6.3.3	Somme de cosinus/sinus amorti . . . . .	186
6.3.4	Comparaison des cavités . . . . .	186
6.3.5	Oscillateur harmonique paramétrique ? . . . . .	187
6.4	CosmoSono : GW181124 . . . . .	189



# Chapitre 1

## Introduction

A travers une évolution historique et une amélioration perpétuelle, la communauté scientifique a manié l'art de la concision permettant de résumer les deux théories fondamentales de la physique à deux équations que chacun peut contempler lors d'une pause café.

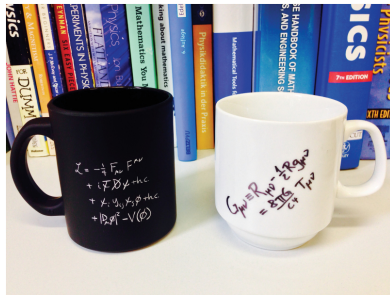


FIGURE 1.1 –  
Tasses représentant le lagrangien du modèle standard des particules et l'équation de champ de la relativité générale.  
Image : [1]

Ces deux équations fondamentales décrivent deux théories actuellement opposées. Dans un premier temps, le modèle standard permet d'expliquer l'ensemble des phénomènes à l'échelle des particules. Cette théorie quantique des champs décrit l'interaction forte via la chromodynamique quantique et l'interaction électrofaible (unification de l'interaction électromagnétique et l'interaction faible) via l'électrodynamique quantique. Bien qu'étant une théorie relativiste, le modèle standard ne permet pas de rendre compte de la gravitation. C'est pourquoi le modèle standard est opposé à l'autre pilier de la physique, la relativité générale. Cette théorie classique des champs, développée par A. Einstein et publiée pour la première fois en 1915, a permis le changement de paradigme menant à l'interprétation de l'interaction gravitationnelle comme une déformation de l'espace-temps.

Bien qu'incompatibles, de nombreux efforts sont menés afin d'unifier ces deux théories. Un des plus flagrants exemples de l'incohérence entre ces deux théories est l'insaisissable matière noire qui est nécessaire pour que la relativité générale soit cohérente avec les observations astronomiques, et qui ne trouve pas son origine dans le modèle standard, théorie de la matière.

Ce tapuscrit sera divisé en deux chapitres traitant de ces deux sujets, précédés d'une introduction générale nécessaire pour définir le contexte de mon travail de recherche.

## 1.1 Relativité Restreinte

### 1.1.1 Annus Mirabilis

Pilier de la physique, la théorie de la relativité a été formulée par le génial Albert Einstein en deux temps, d'abord en 1905 par la relativité restreinte puis en 1915 avec la relativité générale. Lors de l'année miracle de 1905, il publie quatre articles majeurs sur :

- L'effet photo-électrique [2] qui est expliqué par la dualité onde-corpuscule et qui s'avère être un des fondements de la mécanique quantique.
- Le mouvement brownien [3], qui est à l'origine du mouvement de grain de pollen à la surface de l'eau, prouve l'existence d'atomes.
- Il impose la constance de la vitesse de la lumière pour tout référentiel. Le temps et l'espace ne sont plus absolus mais relatifs à l'observateur. Ainsi naît la relativité restreinte [4].
- Comme suite à cette théorie, il publie [5] en fin d'année 1905, la célèbre formule  $E = mc^2$  permettant de lier l'énergie à la masse.

### 1.1.2 Vitesse de la lumière dans l'éther

Le développement de la relativité restreinte trouve son origine à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle avec la formulation de l'électromagnétisme par James Clerk Maxwell [6]. Cette théorie établit les équations qui lient le champ électrique au champ magnétique et qui régissent le mouvement de particules chargées. Maxwell suppose alors que la lumière est une onde électromagnétique dont la vitesse dépend du milieu qu'elle traverse. Dans le vide, la vitesse de la lumière est alors constante et indépendante de la vitesse du référentiel.

A cette époque, la communauté scientifique s'accorde sur la présence d'une substance qui remplirait l'espace d'un milieu nécessaire à la transmission des ondes électromagnétiques et à la propagation de la gravitation, appelée éther. La vitesse de la lumière dépend de sa direction par rapport à un vent d'éther, ce qui est en désaccord avec l'électromagnétisme. L'année de naissance d'Einstein, Maxwell propose donc une expérience permettant de mesurer l'effet d'un vent d'éther et qui a conduit à la création de l'interféromètre de Michelson et Morley. Celui-ci repose sur le principe suivant :

- 1 - Un faisceau lumineux est émis en direction d'une lame semi-séparatrice  $M_s$  (voir figure 1.2).
- 2a - Une partie du faisceau se propage perpendiculairement au vent d'éther, est réfléchi par le miroir  $M_2$  et est recombinaisonnée avec l'autre faisceau sur la lame séparatrice  $M_s$ .
- 2b - L'autre partie du faisceau se propage dans le sens du vent d'éther, est réfléchi par le miroir  $M_1$  et est recombinaisonnée sur la lame séparatrice.

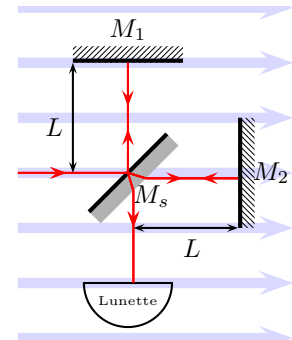


FIGURE 1.2 – Interféromètre de Michelson-Morley dans un vent d'éther.

3 - Le faisceau recombinaé est mesuré à la lunette.

Le premier faisceau (perpendiculaire au vent d'éther) a une vitesse effective<sup>1</sup>  $\sqrt{c^2 - v^2}$ , il passe donc un temps  $2L/c(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  dans l'interféromètre. Le second faisceau a donc une vitesse  $c + v$  dans le sens du vent et  $c - v$  dans le sens contraire et passe un temps  $2L/c(1 - v^2/c^2)^{-1}$ . L'objectif est de mesurer le retard  $\Delta t \simeq (L/c)(v/c)^2$  en observant le déphasage des deux faisceaux au travers de la lunette. L'expérience est réalisée en 1881 par Michelson puis en 1887 par Michelson et Morley sur une version permettant d'obtenir une meilleure résolution en allongeant la longueur des bras de l'interféromètre. Dans les deux cas, aucun retard n'est observé et le constat est indéniable : la vitesse de la Terre dans l'éther n'a aucun effet sur la vitesse de la lumière.

### 1.1.3 Transformation de Lorentz

En 1892, Gerald FitzGerald et Hendrik Lorentz tentent le tout pour le tout afin de défendre l'existence d'un vent d'éther. FitzGerald estime qu'une pression est exercée par le vent d'éther sur le corps qu'il traverse, induisant un effet de contraction sur l'objet. FitzGerald conclut donc que c'est bien la présence d'éther qui empêche toute détection par l'interféromètre de Michelson-Morley . En accord avec son hypothèse, le bras Est-Ouest de l'interféromètre a alors une longueur effective  $L\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , annulant tout décalage temporel !

Le concept d'éther sera définitivement abandonné au profit de la relativité restreinte qui se base sur les transformations de Lorentz. Celles-ci lient le temps à l'espace et définissent une nouvelle classe de phénomènes tels que la dilatation du temps ou la contraction des longueurs. Les transformations du temps  $t$  ou de la longueur  $x$  dans la direction du mouvement ont la forme suivante :

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1)$$

Lorsque l'on approche de la vitesse de la lumière, le coefficient de Lorentz  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  diverge et entraîne des distorsions de l'espace-temps.

Dans le livre "Monsieur Tompkins au pays des merveilles" [7], le protagoniste rêve d'un monde dans lequel la vitesse de la lumière peut être atteinte à vélo. Il fait l'expérience des effets des transformations de Lorentz : la largeur des bâtiments diminue à mesure qu'il accélère en raison de la contraction des longueurs. De la même manière, il observe que sa montre, initialement synchronisée à l'horloge de la mairie, n'affiche plus

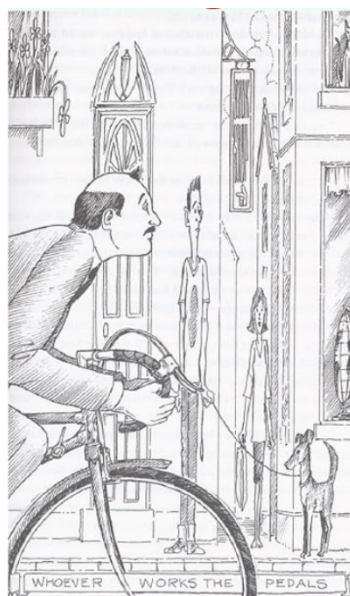


FIGURE 1.3 - Contraction des longueurs dans un univers où la vitesse de la lumière est celle d'un cycliste comme Monsieur Tompkins (par George Gamow [7])

1. La vitesse effective du faisceau correspond à la composition de la vitesse de la lumière  $c$  dans le direction du miroir (Nord) et du vent d'éther  $v$  (Est)

la même heure une fois descendu de sa bicyclette. Il a donc expérimenté la dilatation du temps. Malheureusement, la vitesse de la lumière étant bien plus grande que les vitesses accessibles à l'Humanité, nous ne ressentons pas ces effets dans la vie de tous les jours<sup>2</sup>.

#### 1.1.4 Postulats de la relativité restreinte

La relativité restreinte repose sur deux postulats fondamentaux qui ont permis à Einstein de concilier la mécanique de Newton, où il est possible de se déplacer à la vitesse de la lumière, à l'électromagnétisme de Maxwell, qui l'empêche.

**Principe de relativité** Le principe de relativité énonce que le mouvement uniforme d'un référentiel n'a pas d'effet sur les résultats d'une expérience réalisée dans ce référentiel. Il n'y a pas de différence entre la chute d'une pomme dans un train en mouvement et la chute du même fruit de son pommier. Ce concept constitue le principe de relativité classique :

*Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels.*

L'espace absolu immobile que constitue l'éther est abandonné au profit d'un espace relatif.

**Invariance de la vitesse de la lumière** La relativité restreinte repose également sur le postulat d'invariance de la vitesse de la lumière.

*La lumière se propage dans le vide avec une vitesse  $c$  qui est indépendante du mouvement de la source.*

#### 1.1.5 Bestiaire des effets relativistes et confirmation expérimentale

La relativité restreinte modifie notre vision du monde et laisse place à un bestiaire d'effets en apparence contre-intuitifs mais qui se confirment expérimentalement. La première confirmation expérimentale était déjà présente avant même la formulation de la théorie grâce à l'interféromètre de Michelson-Morley [8]. Pendant l'entre deux guerres, Kennedy et Thorndike [9] réalisent un interféromètre de Michelson-Morley ayant des bras inégaux et pour lequel les faisceaux ne sont plus perpendiculaires. Cette version permet de vérifier l'indépendance entre la vitesse de la lumière et la vitesse de l'interféromètre dans l'éther, là où celui de Michelson-Morley vérifiait l'indépendance vis à vis de l'orientation dans l'éther.

La dilatation du temps et de la contraction des longueurs ont déjà été abordées avec les transformations de Lorentz (1.1). Einstein dans son article de 1905 proposait une expérience permettant de mesurer la dilatation du temps. Malheureusement, sa méthode ne pouvait pas conduire à une détection expérimentale puisque l'effet recherché (dilatation du temps) ne se différenciait pas de l'effet classique (l'effet Doppler) qui est plus important. Ives et Stilwel en 1938 [10] modifieront la proposition d'Einstein et réussiront à mesurer l'effet de dilatation du temps tel qu'il est prévu par les transformations de

---

2. Après 3 ans de thèse à vélo, je n'aurai gagné qu'une nanoseconde.

Lorentz. Ce type d'expérience constitue alors le dernier type de test dit "classique" avec les expériences de Michelson-Morley [8] et Kennedy-Thorndike [9].

La contraction des longueurs et la dilatation du temps sont les effets de base qui permettent le bon fonctionnement des accélérateurs de particules. En effet, la plupart des particules créées artificiellement ont une durée de vie infinitésimale dans leur système de référence qui empêcherait toute interaction avec les détecteurs. Cependant dans le processus de formation, ces particules sont accélérées à des vitesses relativistes ( $\geq 0.9c$ ) contractant ainsi la longueur qui les sépare du détecteur tout en allongeant la durée de vie mesurée par l'expérimentateur. Les muons dont la durée de vie est de  $2\mu s$  en entrant dans l'atmosphère terrestre ne devrait parcourir que quelques centaines de mètres ( $\sim 2\mu s \times 0.9997c$ ) sans la relativité restreinte, empêchant ainsi toute détection au sol. Le facteur de Lorentz contracte en fait la distance perçue par les muons d'un facteur 40 (ou augmente d'un facteur 40 la durée de vie d'un muon pour un observateur au sol) ce qui leur permet d'atteindre la Terre et d'être détectés dans des proportions compatibles avec les prédictions de la relativité restreinte.

Avec l'avènement des accélérateurs de particules et des horloges embarquées à bord de satellites, la théorie a été testée "en long, en large et en travers" et ne montre toujours pas de faiblesses.

## 1.2 Relativité Générale

### 1.2.1 Présentation

Une décennie après son année prodigieuse, Albert Einstein se défait des limites de la relativité restreinte et étend le principe de relativité à tout repère quel que soit son mouvement.

*Les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels ou non-inertiels.*

La transition de la relativité restreinte à la relativité générale [11] marque le passage de l'espace-temps plat minkowskien à un espace-temps courbé par la distribution de masse-énergie. La théorie de Newton qui expliquait la gravité comme une force qui change la trajectoire d'un corps est remplacée par la théorie d'Einstein. Avec celle ci, un corps en chute libre suit une géodésique définie par la courbure de l'espace-temps. C'est le cas de la Terre qui ne fait que suivre la géodésique formée par la déformation créée par la masse du Soleil (figure 1.4). John Archibald Wheeler résume la relativité générale au fait que l'espace définit le mouvement de la matière tandis que la matière définit la courbure de l'espace<sup>3</sup>.

---

3. "Space tells matter how to move, matter tells space how to curve"



### 1.2.2 Equation de champs d'Einstein

Les dix équations de champ de la relativité générale se résument à une seule et même formule dont la variable est la métrique  $g_{\mu\nu}$  :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda \quad (1.2)$$

- la partie gauche représente l'espace-temps dans la théorie d'Albert Einstein. La courbure de cet espace-temps crée les effets que l'on perçoit comme étant la force gravitationnelle.
- la partie droite de l'équation représente l'énergie et la masse :

- le tenseur énergie impulsion  $T_{\mu\nu}$  décrit la répartition de l'énergie et de la masse dans l'espace temps. Il est à l'origine de la courbure de l'espace.
- la constante cosmologique  $\Lambda$  est un paramètre introduit dans les équations de champ pour tenir compte de l'expansion accélérée de l'univers. Cette constante modifie la dynamique de notre Univers et a un effet anti-gravitationnel. Son origine n'est actuellement pas comprise mais de nombreuses pistes existent, et notamment celle menant à l'introduction de l'énergie et de la matière noire (voir ci-après).

Malgré la concision de cette formule, le cheminement jusqu'aux solutions reste complexe et fastidieux en raison de la forte non linéarité des équations<sup>4</sup>. Il n'existe donc pas une seule et unique solution mais une multitude de solutions qui dépendent des hypothèses faites (voir l'encart 1.2.2).

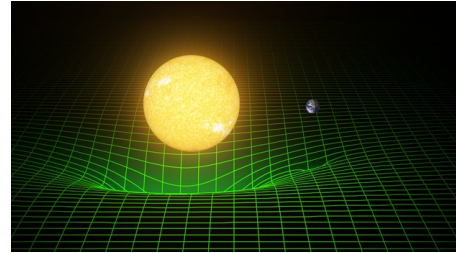


FIGURE 1.4 – Déformation de l'espace-temps proche de la Terre par la masse du Soleil

**Métrique** La métrique est l'outil de base de la relativité générale qui contient la géométrie de l'espace-temps nécessaire à la définition des coordonnées de temps et d'espace. Il permet de généraliser le produit scalaire de l'espace plat euclidien à l'espace-temps courbe de la relativité générale. En introduisant  $dx^\mu$  le déplacement infinitésimal d'un quadri-vecteur (trois composantes d'espace et une de temps), il est possible de définir  $ds$  l'intervalle d'espace-temps entre deux événements infinitésimement proches ainsi que le temps propre  $\tau$  :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 \quad (1.3)$$

L'égalité sous-entend la convention de sommation d'Einstein :  $c_\mu x^\mu = \sum_\mu c_\mu x^\mu$ . En fonction de la valeur de  $ds^2$ , le quadrivecteur  $x^\mu$  est de genre lumière si  $ds^2 = 0$ , de genre espace si  $ds^2 > 0$  et de genre temps si  $ds^2 < 0$ . La métrique contient toutes les informations relatives au déplacement des corps : le chemin le plus court dans un espace-temps courbe est appelé "géodésique".

4. Des outils de calculs analytiques permettent maintenant de faire en quelques lignes qui demandent habituellement aux étudiants de nombreuses pages, ratures et prises de tête [12].

La métrique de Minkowski représente l'espace-temps plat de la relativité restreinte. En choisissant la convention  $(-+++)$ , on a :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.4)$$

La métrique de Schwarzschild est l'un des exemples les plus simples de représentation de l'espace-temps courbe de la relativité générale. Elle représente la métrique à proximité d'une masse parfaitement sphérique et sans rotation, par exemple d'un trou noir de masse  $M$ . En adoptant une représentation sphérique, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.5)$$

A grande distance du trou-noir ( $r \rightarrow \infty$ ), la métrique de Schwarzschild s'approche par la métrique de Minkowski.

La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plat permet de décrire l'évolution de notre Univers à grande échelle en fonction de son rayon  $R(t)$  :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (1.6)$$

### 1.2.3 Principe d'équivalence

Avec la relativité générale, Albert Einstein généralise le principe d'universalité de la chute libre d'Isaac Newton [13] et étend le principe d'équivalence défini avant lui par Galilée[14]. Il est souvent présenté par l'expérience suivante : deux personnes sont enfermées dans deux cabines en tout point semblables d'où il est impossible d'observer l'extérieur. L'une est placée sur Terre dans le champ gravitationnel  $\vec{g}$  l'autre est attachée à une fusée dont l'accélération  $\vec{a}$  est égale à la pesanteur terrestre (figure 1.5). Les deux personnes lâchent alors une pomme et observent que ces trajectoires sont strictement identiques. Il est alors impossible pour les observateurs de déterminer dans quelle cabine ils se trouvent. La généralisation de cette idée à toutes les lois de la physique conduit au principe d'équivalence d'Einstein. En l'absence de repère visuel extérieur, il est impossible de différencier le champ de gravité d'une accélération de même norme et direction.

Le principe d'équivalence est divisé en trois sous-principes qui permettent de tester la relativité générale et toutes théories gravitationnelles alternatives.



FIGURE 1.5 – Expérience de pensée du principe d'équivalence

### Universalité de la chute libre

**Principe :** La trajectoire d'un corps est indépendante de la structure et de la composition d'un corps. Lors d'une expérience de chute libre la masse inertielle  $m_I$  qui subit l'accélération est exactement égale à la masse gravitationnelle  $m_g$ , soit  $m_I \vec{a} = m_g \vec{g} \Leftrightarrow m_I = m_g$ , pour tous les corps, indépendamment de leur composition.

La légende voudrait que ce principe ait été testé par Galilée qui aurait lâché deux objets de composition différente du sommet de la tour de Pise. La véracité de cette histoire reste à démontrer et le principe même d'un simple lâché d'objets conduit à de fortes incertitudes sur la mesure : lâché non simultané, friction de l'air et courte durée de la chute. Cela n'empêchera pas David Scott, le commandant de la mission Apollo 15, de faire une démonstration avec un marteau et une plume lors d'une mission lunaire.

Avec la même idée, mais à des échelles plus grande, la télémétrie laser permet de mesurer la distance Terre-Lune et renseigne sur la chute libre des deux corps dans le potentiel gravitationnel solaire. Il est alors possible de tester le principe d'équivalence [15, 16] en cherchant une différence qui pourrait être due à une différence de composition ou de masse des deux corps célestes.

Une approche plus raffinée consiste à utiliser un pendule pour mesurer le rapport  $m_g/m_I$  à partir de sa période d'oscillation. Newton lui-même a rapporté ses résultats dans ses "Principia" mais la méthode reste également limitée par les incertitudes de mesure sur la période et la longueur du pendule ainsi que par l'incertitude induite par la friction de l'air. La dernière amélioration conceptuelle pour une expérience terrestre vient du Baron Roland von Eötvös. Il propose une expérience de balance à torsion dans laquelle deux objets massifs de constitution différente sont placés de part et d'autre d'une tige. La différence de composition conduit en théorie à une force gravitationnelle différente qui entraîne une rotation du pendule. La sensibilité de ce type d'expérience n'a cessé de s'améliorer [17-19] jusqu'à établir une contrainte de  $2 \times 10^{-13}$  sur le paramètre d'Eötvös pour la balance de torsion de l'Université de Washington [20-24]. Le dernier test en date a été réalisé dans l'espace avec la mission MICROSCOPE. Cette expérience spatiale permet de réaliser une chute libre quasi-infinie des deux masses-tests présentes dans le satellite en chute libre vers la Terre. C'est à ce jour l'expérience contraignant avec la plus grande précision [25, 26] l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Elle améliore de deux ordres de grandeurs la contrainte fixée par les balances de torsion de l'université de Washington [23, 24].

### Invariance locale de Lorentz

**Principe :** Les résultats d'une expérience locale ne faisant pas intervenir la gravité sont indépendants de la direction et la norme de la vitesse du référentiel choisi.

Les différents tests de ce postulat trouvent leur origine dans la seconde version de l'expérience de Michelson-Morley dans la seconde version de l'interféromètre où l'ensemble de l'appareil de mesure est placé sur une table en rotation. Malgré la variation de la direction de l'expérience grâce à la rotation de la Terre autour du Soleil, aucune anisotropie n'a été observée dans la propagation de la lumière [27, 28].

### Invariance locale de position

**Principe** : Les résultats d'une expérience sont indépendants de l'instant et de la position où celle-ci a été réalisée. Pour vérifier ce principe, il existe deux types de tests :

**Variation des constantes fondamentales** Le principe d'équivalence nécessite que les constantes fondamentales de la physique [30] soient les mêmes partout et à tout instant. Un test repose donc sur la recherche de la variation spatiale ou temporelle de ces constantes. Une telle variation prouverait les limites de la relativité générale. Il y a deux types de méthodes pour caractériser ces variations : la première consiste à estimer le taux de dérive d'une constante actuelle tandis que la seconde compare la valeur de la constante actuelle avec sa valeur dans un passé lointain. Dans le premier cas, il suffit de comparer des horloges stables dont la transition atomique repose sur des combinaisons distinctes des constantes fondamentales. Le suivi à long terme de la différence de fréquence des horloges peut révéler une dérive temporelle qui sous-entend une dérive temporelle des constantes. Le second cas consiste à comparer les spectres émis par des corps issus de galaxies lointaines et de les comparer aux spectres terrestres. En cas de différence, cela impliquerait qu'une constante fondamentale du spectre lointain, qui correspond à une émission dans notre passé lointain, n'a pas la même valeur que celle que nous constatons actuellement.

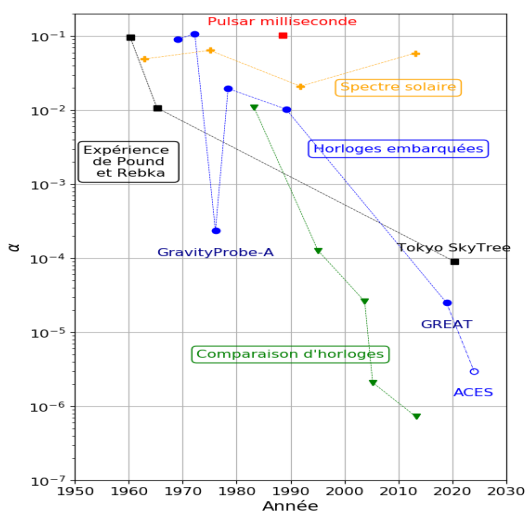


FIGURE 1.6 – Ensemble des contraintes existantes sur l'invariance locale de position [29]

**Décalage vers le rouge gravitationnel** L'effet de décalage vers le rouge gravitationnel était déjà prédit par Einstein dans sa publication de 1915. Deux horloges à des altitudes différentes dans un champ gravitationnel verront leur fréquence être décalée l'une par rapport à l'autre. Ce décalage d'horloge cache l'un des seuls effets de la relativité générale qui intervient dans notre vie quotidienne. Sans les corrections de la théorie d'Einstein, les horloges des satellites GNSS (qui dérivent d'environ  $30 \mu\text{s}$  par jour) devraient être corrigés ad-hoc et d'une manière mal-contrôlée, ou alors limiteraient la précision ( $30 \mu\text{s} \times c \sim 10 \text{ km}$ ) des différents systèmes de positionnement.

Il est possible de modéliser cet effet à l'aide d'une expérience de pensée. Imaginons un train ayant une accélération constante  $a$ . Plaçons une horloge en tête et une autre en queue du train à une distance  $L$  l'une de l'autre. L'horloge en queue de train va émettre à l'instant  $t_1$  un photon à une fréquence  $\nu_1$ . Ce photon va se propager en direction de la

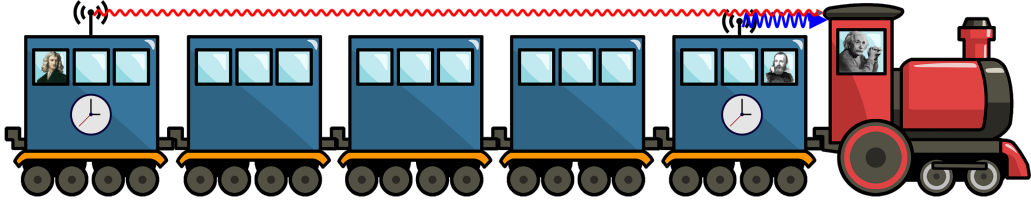


FIGURE 1.7 – Gedanken experiment

locomotive. Lorsqu'il atteint la seconde horloge, celle-ci émet à l'instant  $t_2$  un photon à la fréquence  $\nu_2$ . Le conducteur du train va alors collecter ces deux photons et calculer la différence relative de fréquence des horloges :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} \quad (1.7)$$

Le conducteur sait que la fréquence reçue  $\nu_r$  est modifiée par la vitesse de l'émetteur  $v_e$  (la vitesse de l'horloge à l'instant d'émission) et la vitesse du receptr  $v_r$  par rapport à la fréquence émise  $\nu_e$ . Cette modification est l'effet Doppler<sup>5</sup> :

$$\nu_r = \nu_e \frac{1 + v_r/c}{1 + v_e/c} \quad (1.8)$$

Dans le cas de notre train, la vitesse à l'émission des photons dépend de l'accélération  $a$  et de la vitesse initiale du train  $v_i = a \times t_i + v_0$ . Avec  $\nu_0$  la fréquence du photon émis par chaque horloge, la différence relative de fréquence vaut alors :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1 + v_r/c}{1 + v_2/c} - \frac{1 + v_r/c}{1 + v_1/c} \quad (1.9)$$

On fait l'hypothèse que la vitesse du train est faible devant la vitesse de la lumière  $c$  :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \simeq (1 + v_r/c - v_2/c) - (1 + v_r/c - v_1/c) = -\frac{v_2 - v_1}{c} = -a \frac{t_2 - t_1}{c} \quad (1.10)$$

Enfin, l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  correspond au temps nécessaire au premier photon pour parcourir la distance le séparant de la seconde horloge, soit  $L/c$ .

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -a \frac{L}{c^2} \quad (1.11)$$

On obtient donc un décalage relatif en fréquence qui dépend de l'accélération du train ainsi que de la distance entre les deux horloges. Cet effet est bien sur négligeable à

---

5. qui est responsable, par exemple, du changement de fréquence de l'aiguë vers le grave du bruit d'une ambulance s'approchant puis s'éloignant d'un piéton.

l'échelle humaine : un TGV pour atteindre sa vitesse de croisière ( $300 \text{ km.h}^{-1}$ ) nécessite 7 minutes, donnant lieu à une accélération de  $0.2 \text{ m/s}^2$ . Sur cette période d'accélération et pour des horloges à 200 m l'une de l'autre, la différence relative de fréquence intégrée sur la durée d'accélération donne lieu à un décalage temporel de 0.1 ps. Aucun être humain n'est capable de détecter un si court instant à l'inverse des horloges atomiques et optiques.

En imaginant qu'il est possible de renverser verticalement l'expérience de pensée dans le champ de gravitation de la Terre, il est possible de créer un décalage gravitationnel en tenant compte du principe d'équivalence. Celui-ci nous permet de remplacer  $a$  l'accélération horizontale du train par  $g$  le champ de pesanteur terrestre. La distance entre les horloges devient alors une différence de hauteur  $h$  qui est responsable d'un décalage gravitationnel :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -g \frac{h}{c^2} \quad (1.12)$$

En intégrant cette quantité en fonction du temps, on obtient la désynchronisation  $\Delta\tau$  (la différence de temps écoulé) entre les deux horloges sur une période donnée :

$$\Delta\tau = \int_0^t \frac{\Delta\nu}{\nu_0} dt' = -g \frac{h}{c^2} t \quad (1.13)$$

En imaginant que l'horloge de la tour Abraj al-Bait qui culmine à près de 500 mètres est accompagnée d'une même horloge à son pied, il aurait fallu construire le gratte-ciel et les horloges il y a 230 millions d'années (soit l'époque à laquelle le supercontinent Pangée venait de se former) pour observer aujourd'hui une désynchronisation d'une seconde.

Plus formellement, la fréquence d'une horloge mesurée par un observateur dans le référentiel du temps coordonné  $\{\nu, t\}$  peut être reliée à la fréquence de cette horloge dans son propre référentiel  $\{\nu_0, \tau\}$ . Pour une horloge au repos dans le champ de pesanteur d'un corps massif et dans le cas d'un champ faible, on a alors :

$$\nu = \frac{1}{dt} = \frac{1}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \nu_0 \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \simeq 1 - \frac{GM}{rc^2} = 1 - U(r)/c^2 \quad (1.14)$$

où  $U(r) = GM/r$  est le potentiel de pesanteur newtonien.

Deux horloges, dont les positions diffèrent, subissent un décalage gravitationnel dont la forme est la suivante :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta U}{c^2} \quad , \quad \Delta\tau = \int \frac{\Delta U(t)}{c^2} dt \quad (1.15)$$

où  $\Delta U$  est la différence de potentiel gravitationnel. Afin de tester l'invariance locale de position, des théories alternatives supposent que le temps propre d'une horloge dépend de sa position dans le champ de pesanteur changeant  $\tau \rightarrow \tau(U)$ . Dans ces conditions, le terme de décalage gravitationnel dépend d'une constante  $\alpha$  qui, si elle est non nulle, implique une violation du principe d'équivalence :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = (1 + \alpha) \frac{\Delta U}{c^2} \quad , \quad \Delta\tau = \int_0^t (1 + \alpha) \frac{\Delta U(t')}{c^2} dt' \quad (1.16)$$

Ce paramètre  $\alpha$  a été mesuré par différentes expériences (voir ci-après) et est l'objectif scientifique principal de la mission ACES-PHARAO (voir chapitre 2).

### 1.2.4 Confirmation expérimentale

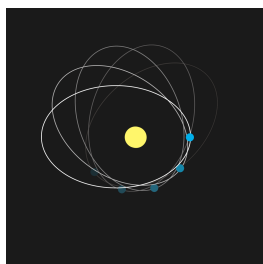
Les vérifications expérimentales de la relativité générale se décomposent en deux catégories :

- Les tests du principe d'équivalence sont fondamentaux puisqu'ils permettent de vérifier si la gravitation est bien une théorie métrique. Si un résultat non conforme est observé, toutes les théories métriques sont fausses et il est nécessaire de reformuler complètement la relativité générale.
- Les tests des équations d'Einstein sont moins fondamentaux. Si l'un des résultats est non-conforme, les équations d'Einstein ne représentent pas correctement le lien entre la masse-énergie et la géométrie. Cependant, la relativité générale reste une théorie métrique.

Les tests du principe d'équivalence et des équations d'Einstein sont nombreux :

- Dans un premier temps, les tests dits classiques :
  - Dès 1915, Albert Einstein utilise sa théorie pour exprimer la *précession du périhélie de Mercure* [31] qui était restée une énigme pour les astronomes depuis sa première observation en 1859 par Urbain le Verrier (figure 1.8a).
  - Dans le même article, Albert Einstein prédit également l'existence de *déflexion lumineuse* proche d'un astre massif. L'éclipse totale de 1919 a permis aux astronomes accompagnant Arthur Eddington de noter la position des étoiles proches du Soleil. La différence apparente de position, conséquence de l'effet gravitationnel, est une expérience cruciale ayant permis de tester la validité de la relativité générale.
  - La théorie prédit également le phénomène de *décalage gravitationnel des fréquences*. Bien que les résultats aient été contestés, Walter S. Adams en 1925 pensait avoir mesurer l'effet en observant les raies spectrales de Sirius B [32]. Le premier test concluant sera réalisé près de 30 ans plus tard par Daniel M. Popper avec le système triple Omicron Eridani B [33].
- Les tests modernes proviennent des travaux de Robert H. Dicke [34] et Leonard I. Schiff [35] qui cherchent à poser un cadre (voir 1.5.1) à l'ensemble des tests pouvant être réalisés afin de défier la relativité générale.
  - Irwin I. Shapiro décrit le *retard gravitationnel de la lumière* (ou effet Shapiro [36]) et observe le délai [37] mis par un signal radio pour faire l'aller-retour entre la Terre et une planète proche du Soleil (Vénus en 1966 puis Mercure en 1967).
  - A partir de 1959, l'expérience de Pound-Rebka [38] met en évidence l'effet de décalage gravitationnel de fréquence et pave la voie à des tests similaires à l'aide d'horloges atomiques ou optiques.
  - L'effet Lense-Thirring [39] prédit que la rotation d'un astre massif entraîne avec lui le tissu de l'espace-temps et entraîne la précession d'un objet en rotation autour de cet astre. Il a notamment été vérifié par la mission Gravity Probe B [40] en 2005.
- La dernière catégorie de tests concerne les champs gravitationnel fort.
  - Un amas suffisant d'étoiles ou de galaxies entraîne une déflexion lumineuse

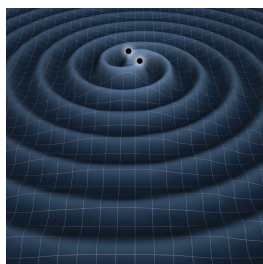
- suffisante pour faire apparaître un effet de lentille gravitationnelle (figure 1.8b).
- La détection des premières ondes gravitationnelles (figure 1.8c), un centenaire après la publication de la relativité générale [41], a ouvert une nouvelle fenêtre vers le cosmos, a déjà permis de nombreux tests de relativité générale en champ fort et promet un changement profond de notre compréhension de l'espace.
  - La récente reconstitution de la photo (figure 1.8d) d'un trou noir [42] confirme l'existence de ce type d'objet céleste.



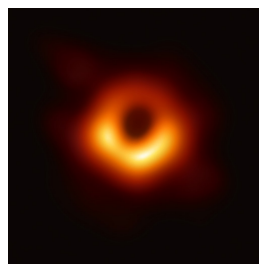
(a) Précession du périhélie de Mercure



(b) Lentille gravitationnelle



(c) Ondes gravitationnelles



(d) Trou noir

FIGURE 1.8 – Différentes manifestations de la relativité générale

### 1.2.5 Limites

Malgré la diversité et la pluralité des confirmations de la relativité générale, la théorie reste incompatible avec le modèle standard (voir section 1.3). Au-delà de ce désaccord, elle échoue à expliquer entièrement :

- l'accélération de l'expansion de l'Univers. Bien que cet effet puisse s'expliquer par l'introduction de la constante cosmologique, son origine reste inconnue. Certaines théories alternatives attribuent cette accélération à la pression négative exercée par la matière noire sur la matière normale [43, 44].
- la matière noire. Au problème de l'énergie noire s'ajoute celui de la matière noire, cette substance d'origine inconnue mais dont les effets gravitationnels sont indéniables. Dans la formulation actuelle de la relativité générale, il n'est pas possible de rendre compte des courbes de rotation des galaxies, de la formation des grandes structures... (voir section 1.4).



## 1.3 Modèle Standard

La question "Qu'est ce que la matière?" a d'abord intéressé les philosophes avant d'atteindre les physiciens. La réponse la plus précise à ce jour se trouve dans la théorie des interactions entre les particules fondamentales : le modèle standard.

### 1.3.1 Historique

Dès l'Antiquité, Leucippe et Démocrite posent les bases de la philosophie atomiste : la matière est faite de corpuscules indivisibles, de toutes formes, de grandeurs variables si tant est qu'ils restent imperceptibles [45]. L'atome est alors supposé immuable et insécable en 500 av. J-C. Cependant, la théorie ne parvient pas à convaincre et elle est abandonnée au profit d'une matière faite de quatre éléments fondamentaux (terre, air, eau et feu).

*Convention que la couleur, convention que le doux, convention de l'amer ;  
une réalité : les atomes et le vide.* DÉMOCRITE

Plus de deux millénaires plus tard, le chimiste John Dalton remet au goût du jour la théorie atomiste lors de son étude des gaz [46]. Il suppose que chaque élément chimique est composé d'un seul et unique type d'atome qui peut être combiné avec d'autres pour créer des structures moléculaires plus complexes. Le modèle atomique a ensuite été amélioré par Joseph J. Thomson, qui découvre l'électron[47] et par Ernest Rutherford, qui prouve que le noyau atomique est constitué de protons et neutrons [48]. Niels Bohr propose un modèle intégrant des niveaux discrets pour le rayon orbital de l'électron qui permettent de tenir comptes des raies d'émissions du spectre d'un élément. La fin du XXème siècle verra l'émergence du modèle standard qui intègre l'ensemble des développements de la théorie atomique et qui prédit l'existence d'un bestiaire de particules dont l'électron et les quarks sont les briques élémentaires de la matière. Tout cela a encouragé un fort investissement scientifique et financier dans la construction de Grand Collisionneur de Hadrons qui a permis la découverte de nombreuses particules et notamment le Boson de Higgs en 2012 [49].

### 1.3.2 Présentation

Le modèle standard régit la physique des particules à l'échelle subatomique. L'ensemble de la matière qui nous entoure est essentiellement constituée d'un tiers des éléments fondamentaux (figure 1.9). L'interaction forte, portée par le *gluon*, permet aux quarks *up* et *down* de former des protons et neutrons qui, associés à l'*électron*, forment des atomes. La force électromagnétique transfère son énergie par le biais du *photon* tandis que la masse des particules élémentaires est expliquée par le *boson de Higgs*. Les deux tiers des constituants fondamentaux manquants permettent d'expliquer le reste des phénomènes observés par les physiciens des particules.

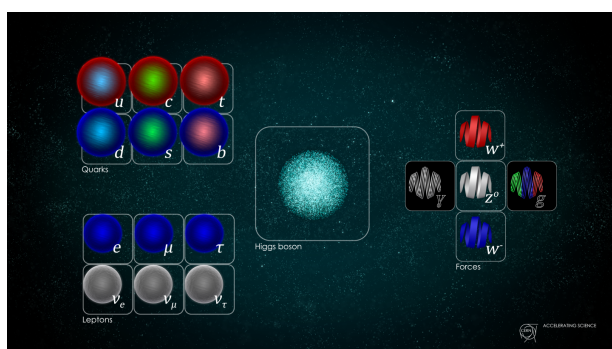


FIGURE 1.9 –  
Particules du  
modèle standard  
(Image : Daniel  
Dominguez  
/ CERN)

### 1.3.3 Particules du modèle standard

#### Particules élémentaires

Les particules élémentaires sont classées de la manière suivante :

- Les *fermions* (à gauche sur la figure 1.9) constituent la matière ordinaire et ont un spin demi-entier. Ils sont également divisés en deux sous-catégories :
  - Les quarks (up  $u$ , down  $d$ , charm  $c$ , strange  $s$ , top  $t$  et bottom  $b$ ) sont caractérisés par leur charge électrique fractionnaire ( $\pm 1/3$  et  $\pm 2/3$ ), leur "saveur" qui est associée à l'interaction faible et leur "couleur" qui est associée à l'interaction forte.
  - Les leptons (électron  $e$ , muon  $\mu$ , tau  $\tau$  et les neutrinos électronique  $\nu_e$ , muonique  $\nu_\mu$  et tauique  $\nu_\tau$ ) ne sont pas sensibles à l'interaction forte. À l'inverse des leptons chargés, les neutrinos n'interagissent pas avec les photons, rendant leur détection extrêmement difficile.

La masse élevée des fermions élémentaires de deuxième génération ( $c, s, \mu, \nu_\mu$ ) et troisième génération ( $t, b, \tau, \nu_\tau$ ) limitent fortement leur durée de vie. Cette courte vie favorise l'abondance des fermions de première génération ( $u, d, e, \nu_e$ ) dont la matière ordinaire est majoritairement constituée. Pour chacun de ces fermions, il existe un anti-fermion dont la charge est opposée.

- Les *bosons* (à droite sur la figure 1.9) constituent les particules porteuses des trois forces du modèle standard :
  - Le photon  $\gamma$  est le vecteur de l'électromagnétisme.
  - Les bosons  $W^+, Z, W^-$  portent l'interaction faible. La masse élevée de ces bosons limite la portée de cette interaction et la faiblesse de sa constante de couplage sont à l'origine de son nom.  $W, Z$  permettent, entre autre, de modifier la saveur des quarks et sont responsables de la radioactivité  $\beta$ .
  - Le gluon  $g$  est responsable de l'interaction forte. Il permet notamment de confiner les quarks entre eux et  $g$  est donc responsable de l'existence des protons et neutrons.
- Le boson de Higgs (au milieu sur la figure 1.9) est le quantum du champ scalaire de spin nul qui permet d'affecter une masse à l'ensemble des particules du modèle standard.

### Hadrons et autres particules non-élémentaires

À l'aide de ces briques élémentaires, il est possible de créer la famille des hadrons. Ce sont des particules composites régies par l'interaction forte. Le nombre de quarks nécessaire à la formation d'un hadron délimite au différents sous-groupes de hadrons : 2 quarks forment un méson, 3 un baryon, 4 un tétraquark, 5 un pentaquarks...

Parmi les baryons, le proton est particulièrement représenté dans notre Univers et sa combinaison avec le neutron permet de former les noyaux atomiques qui composent la matière. Ils sont composés de quarks ( $2u - 1d$  pour le proton et  $1u - 2d$  pour le neutron) et maintenus ensemble par des gluons  $g$ .

La communauté scientifique a été amenée à construire des accélérateurs de particules tous plus grand les uns que les autres (du générateur de Cockroft-Walson au Grand Collisionneur des Hadrons) pour créer et détecter des hadrons [50] dont les masses nécessitent des niveaux d'énergie ( $E = mc^2$ ) toujours plus élevés.

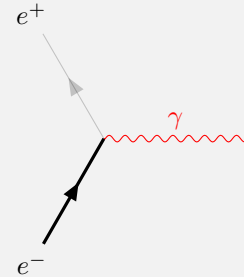
#### 1.3.4 Lagrangien

La formulation mathématique du modèle standard repose sur le lagrangien  $\mathcal{L}$  dont la complexité évidente nécessite plusieurs pages pour le représenter dans sa totalité [51]. Cependant, à des fins de vulgarisation, une version concise est régulièrement présentée (figure 1.1) et prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi + c.c. + \Psi_i y_{ij} \Psi_j \phi + c.c. + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi) \quad (1.17)$$

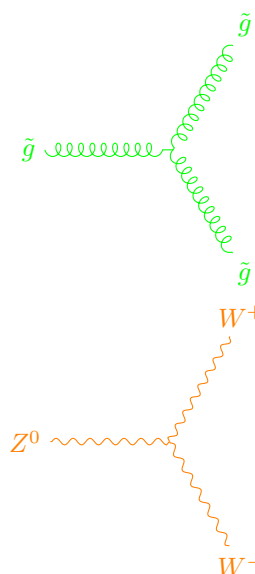
**Diagramme de Feynman** Afin d'expliciter phénoménologiquement chaque terme du lagrangien 1.17, il est nécessaire d'introduire l'outil de visualisation propre au modèle standard : le diagramme de Feynman. Il permet de représenter une interaction entre différentes particules de manière élégante au moyen de blocs élémentaires simples.

Un fermion/hadron est représenté par un trait plein tandis qu'un boson est représenté par un trait ondulé. Le temps évolue de gauche à droite, les particules initiales se trouvent donc à gauche, les particules finales à droite. L'utilisation d'une flèche dans le sens du temps représente une particule, là où une flèche dans le sens inverse représente une antiparticule. Les différentes particules sont reliées par des vertex qui modélisent l'ensemble des interactions possibles (électromagnétisme et interactions faible/forte). Dans l'exemple ci-contre, un électron  $e^-$  (trait noir et flèche dirigée vers la droite) et un positron  $e^+$  (anti-électron, trait gris et flèche dirigée vers la gauche) convergent sur un vertex où ils s'annihilent pour créer un photon  $\gamma$  (trait ondulé orange).



### $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ : interaction entre bosons

$F$  est la représentation mathématique du tenseur de champ de l'ensemble des vecteurs d'interactions, les bosons. Le produit scalaire  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  sur les coordonnées d'espace-temps  $\mu, \nu$  délimite le périmètre d'interaction des particules entre elles. L'absence de charge du photon l'empêche d'interagir avec un autre photon comme le prédit l'électromagnétisme. Le gluon qui a une charge de couleur peut interagir avec d'autres gluons tel qu'autorisé par la chromodynamique quantique. La figure ci-contre représente un gluon créant lui-même deux gluons. La seconde partie de cette figure présente le diagramme de Feynman d'un boson  $Z^0$  (de charge nulle) vecteur de l'interaction faible qui peut se désintégrer en deux bosons  $W^+$  et  $W^-$  en conservant la charge.



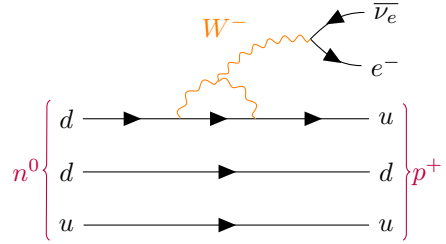
### $i\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi + c.c.$ : interaction avec les fermions

Ce terme décrit comment les bosons interagissent avec les fermions.  $\Psi$  et  $\bar{\Psi}$  sont des champs décrivant les quarks et les leptons tandis que  $\mathcal{D}$  est l'outil mathématique de dérivée covariante qui contient la formulation des interactions boson-fermion sans les interactions boson-boson présentées précédemment. Dans ce terme se cache l'ensemble des interactions fondamentales : électromagnétisme, interaction faible et interaction forte. Elles peuvent toutes être représentées de manière semblable à l'aide des vertex de base.

**Electromagnétisme** La permutation circulaire des particules de l'annihilation électron - positron présentée plus haut donne accès aux trois autres vertex élémentaires de l'électromagnétisme : création de paires (rotation horaire de 180° du diagramme), absorption d'un photon (rotation horaire de 120° et positron remplacé par un électron) et émission d'un photon (rotation horaire de 60° et positron remplacé par électron). Le photon est vecteur de cette interaction qui agit sur la charge électrique d'une particule.

**Interaction forte** Ces diagrammes s'appliquent également pour l'interaction forte en utilisant des quarks et des gluons à la place des photons. L'annihilation et la création de paires ainsi que l'absorption et l'émission ont les mêmes vertex que l'électromagnétisme. Les gluons sont le vecteur de cette interaction et agissent sur la couleur d'un quark, donnant le nom de "chromodynamique quantique" à l'étude des quarks. En assurant la neutralité de couleurs d'un ensemble de quarks/gluons, l'interaction forte permet de créer la famille des hadrons.

**Interaction faible** L'interaction faible permet notamment de transformer un lepton en un autre et elle est responsable de la radioactivité d'un noyau. La figure ci-contre présente le diagramme de la radioactivité  $\beta^-$  transformant un neutron  $n$  en un proton  $p$  : un quark  $d$  émet un boson  $W^-$  qui va se désintégrer en un électron et un anti-neutrino électronique.



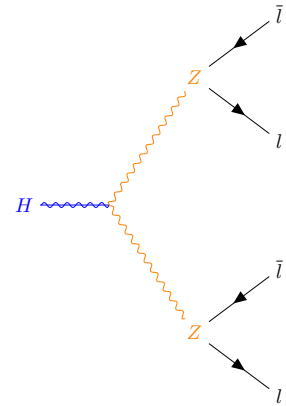
La combinaison de l'ensemble des vertex permet de développer des cascades d'interactions plus complexes qui révèlent la présence de nombreuses particules non-élémentaires et qui ont (pour la plupart) déjà été créées dans les accélérateurs de particules ou collectées en provenance de sources cosmologiques. Ce second terme du lagrangien cache donc toute la physique du quotidien et son contenu se vulgarise de manière relativement simple en utilisant les diagrammes de Feynman.

### $\Psi_i y_{ij} \Psi_j \phi + c.c.$ : masse des particules

Ce terme attribue une masse aux particules (représentés par le champ  $\Psi$  défini plus haut) lors de leur couplage avec le champ scalaire de Brout-Englert-Higgs (BEH) [52, 53]. Le paramètre  $y_{ij}$  est une constante de couplage déterminée expérimentalement et qui est différente pour chaque particule. Ce paramètre a des implications importantes puisqu'une valeur élevée correspond à une particule massive dont le couplage important avec le champ BEH facilite sa détection. Le terme *c.c.* (pour complexe conjugué) s'applique aux anti-particules qui acquièrent leur masse pour les mêmes raisons que les particules.

### $|D_\mu \phi|^2$ : masses des bosons de l'interaction faible

Ce terme attribue une masse aux bosons vecteurs de l'interaction faible à travers leur couplage avec le champ BEH. C'est grâce à ce terme (qui permet le vertex ci-contre) que la détection du boson de Higgs a été possible en 2011. Un boson de Higgs peut se désintégrer en une paire de bosons Z qui à leur tour se désintègrent en quatre leptons/anti-leptons qui ont été détectés par ATLAS au Collisionneur des Hadrons (LHC). Le photon est affecté par le champ BEH mais n'acquiert aucune masse lors de l'interaction. Le gluon n'interagit pas avec le champ BEH et n'a donc pas de masse.



### $-V(\phi)$ :

Le potentiel  $V$  régit l'évolution du champ  $\varphi$  et décrit les interactions des bosons de Higgs entre eux. Il autorise des brisures spontanées de symétrie.

### Au delà du diagramme de Feynman

Malgré leurs utilisations très pratiques, les diagrammes de Feynman ne sont qu'une manière simple de visualiser les différentes composantes du lagrangien et les interactions des particules du modèle standard. Pour réaliser une étude plus complète, il est nécessaire d'introduire la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Cette combinaison permet à terme de calculer les probabilités d'un diagramme de Feynman et cet outil est notamment utilisé au LHC pour estimer le rendement en particules d'une expérience.

#### 1.3.5 Confirmation expérimentale

Certaines particules fondamentales étaient déjà connues avant la complétion du modèle standard [54-56] dans les années 70. L'avènement des dernières générations de collisionneurs a permis de tester la théorie à haute énergie et a conduit à la détection d'une pléthore de particules non observées auparavant. La dernière découverte majeure du Grand Collisionneur de Hadrons a révélé l'existence du boson de Higgs [49].

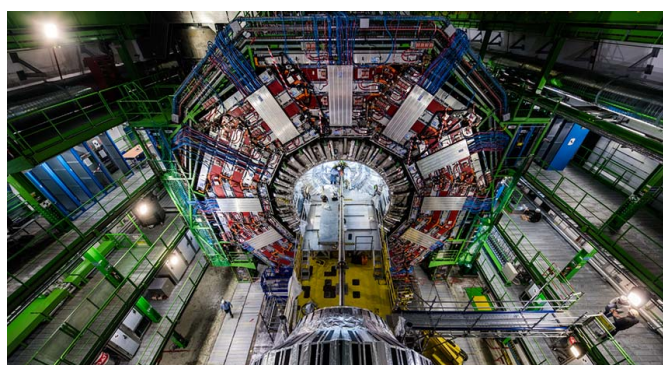


FIGURE 1.10 – Détecteur CMS du Grand Collisionneur de Hadrons (Image : Max Brice / CERN)

#### 1.3.6 Limites

Bien que couronnée de nombreux succès (plus de 50 prix Nobel), cette théorie présente plusieurs faiblesses dont une majeure dans son incompatibilité avec la gravitation. Le graviton, boson responsable de l'interaction gravitationnelle, n'a toujours pas été détecté. A cela s'ajoute l'incapacité d'expliquer l'asymétrie matière/anti-matière. Le modèle standard repose également sur un nombre important de constantes  $y_{ij}$  mesurées expérimentalement (entre autres, l'origine de la masse des particules). L'absence de prédiction théorique pour la valeur de ces paramètres  $y_{ij}$  est appelé le problème de hiérarchisation. De plus, la faible intensité de la force gravitationnelle comparée à la force électromagnétique empêche fortement l'observation d'effets des deux théories à une échelle commune. Tout comme la relativité générale, le modèle standard ne présage pas l'existence de particules pouvant être responsable de l'énergie noire ou de la matière noire.

## 1.4 Matière noire

### 1.4.1 Présentation

L'une des énigmes actuelles de la physique est la constitution (voire l'existence) de la matière noire. Fritz Zwicky en 1933, constate que la vitesse des étoiles dans l'amas de Coma (figure 1.11) est plus grande que la vitesse théorique. Il utilise l'équation du viriel [57] reliant la masse  $M$  de l'amas à la vitesse de dispersion  $v$  d'une galaxie et de sa distance  $R$  au centre de l'amas :

$$Mv^2 \propto G \frac{M^2}{R} \Rightarrow M \propto \frac{Rv^2}{G} \quad (1.18)$$

La population moyenne d'étoiles d'une galaxie s'élevant à  $\sim 10^9$ , l'amas de Coma qui est constitué de près de 800 galaxies devrait peser  $800 \times 10^9 M_\odot \sim 8 \times 10^{11} M_\odot$ . Or, en utilisant l'équation du viriel (1.18), on obtient  $M \sim 3 \times 10^{14} M_\odot$ . La masse lumineuse (estimée à partir du nombre de galaxie) représente moins d'un pourcent de la masse gravitationnelle (dérivée de la mesure de la vitesse). Fritz Zwicky nomme donc cette matière manquante et invisible : la "matière noire".

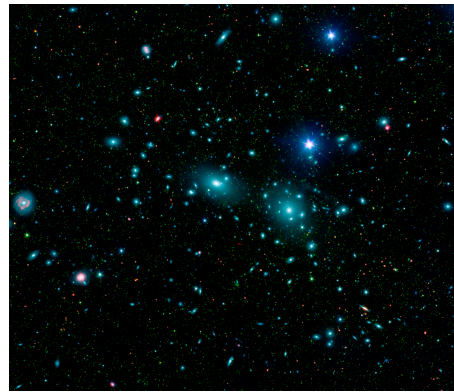


FIGURE 1.11 – En 1933, on estime que l'amas de Coma est constitué de  $\sim 800$  galaxies contenues dans un rayon d'un mégaparsec. Une galaxie en bordure de cet amas a une vitesse radiale mesurée de l'ordre de 1000 km/s.

### 1.4.2 Autres indices

Bien que la densité ait été surestimée par Fritz Zwicky en son temps, son article est la première référence à la matière noire et la proportion de cette matière a été affiné par d'autres observations :

- Dans les années 1970, avec l'amélioration des télescopes, il est possible de déduire les courbes de rotation des galaxies [58] : la vitesse des astres par rapport à leur distance au centre de la galaxie. Les courbes obtenues par la mesure des vitesses contredisent la vitesse modelisée en prenant en compte uniquement la masse visible de la galaxie. A nouveau, l'invocation de matière noire résoud le problème. Ces observations ont notamment permis de supposer que la matière noire est contenue dans un halo diffus englobant notre galaxie.
- L'observation de l'amas de la Balle [59] révèle la collision entre deux amas galactiques, où les pics de densité de gaz sont séparés des pics de convergence du lentillage gravitationnel. Ceci peut s'expliquer si le gaz a été ralenti dans la collision mais que la matière noire a continué sa trajectoire sans collisions. Cette observations pose par ailleurs des contraintes intéressantes sur l'auto-interaction éventuelle de la matière noire, puisque ce phénomène ne devrait pas ralentir la matière noire dans le cadre de la collision.



- Ces observations sont malheureusement entachées d'une grande incertitude et la preuve la plus convaincante de la présence de matière noire nous vient de l'analyse du fond diffus cosmologique [60]. Les anisotropies qu'il contient présentent des pics dans sa densité spectrale de puissance. Une fois de plus, la matière noire ainsi que l'énergie noire sont nécessaires pour rendre compte des observations.

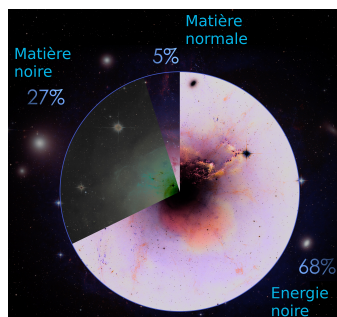


FIGURE 1.12 – Répartition de l'énergie et la matière dans notre Univers proche.

Les propriétés de cette matière sont mal connues. Suite à l'échec de nombreux détecteurs potentiel de matière noire [61-63], nous savons qu'elle interagit très peu avec la matière usuelle. Du fait de sa faible interaction, on peut estimer qu'elle est thermalisée et virialisée. Elle serait donc au repos dans l'Univers et formerait des halos autour des galaxies dans lesquelles elle est présente. La densité d'énergie locale est de l'ordre de  $0.4 \text{ GeV/cm}^3$  [64]. Enfin, la matière noire représente 27% du contenu masse-énergie de l'Univers et l'énergie noire comptabilise 68%. La matière usuelle ne représente que  $\sim 5\%$  dont 3.6% de gaz non lumineux, 0.1% de neutrinos et 0.4% de matière composant les étoiles et gaz lumineux qui peuplent la voute céleste.

### 1.4.3 Modélisation et recherche expérimentale de la matière noire

Afin d'élucider la question autour de la matière noire, il est nécessaire que théoriciens et expérimentateurs avancent main dans la main. Les recherches expérimentales doivent trouver leur contexte théorique afin d'éviter un vain investissement. Toute théorie se doit de respecter les règles fixées par la Nature à travers les caractéristiques extraites des traces de matière noire et des contraintes expérimentales (comme celles présentées dans ce tapuscrit). Il existe trois grandes classes de théories (dont le détail est visible dans [65]) ayant des échelles de masse de matière noire variant sur plus de 50 ordres de grandeur :

- L'échelle de masse cosmique : la matière noire serait composée de nombreux trous noirs primordiaux de masse solaire ou intermédiaire (dizaine à centaine de masse solaire) qui n'auraient pas été observés jusqu'ici. Cette hypothèse nécessite l'introduction d'un nombre considérable de trous noirs dans notre voisinage ou une des distributions spatiales et massiques différentes. Par conséquent, cette forte densité entraînerait un nombre plus important des effets dynamiques sur la trajectoire des corps célestes de la galaxie.
- L'échelle de masse des particules ( $> 10 \text{ eV}/c^2$ ) : la matière noire serait faite de particules interagissant peu avec la matière. A cette échelle de masse, la matière noire ne conduirait qu'à une faible occupation des niveaux d'énergie et permet de traiter les champs comme des particules fermioniques ou bosoniques. Pendant longtemps, les particules massives interagissant faiblement (voir ci-après) étaient considérées comme les meilleurs candidates à une découverte. De nombreux détecteurs ont été utilisés pour la recherche, notamment le LHC.



- L'échelle de masse des champs tenseur-scalaire ( $< 10 \text{ eV}/c^2$ ) : la matière noire serait un champ scalaire massif (bosoniques et semblable à un champ de Higgs) dont le couplage avec la matière normale entrainerait, notamment, des modifications spatio-temporelles des constantes de la physique. Ce sont ces variations qui sont recherchées dans le second projet présenté dans cette thèse

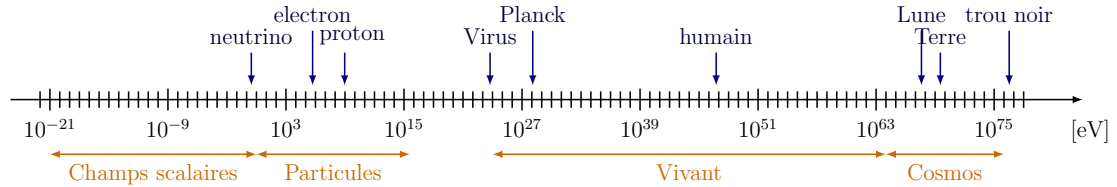


FIGURE 1.13 – Echelle de masse pour les candidats de matière noire[65]. L'intervalle de masse couvre près de 100 ordres de grandeur.

Comme on peut le voir dans la figure 1.13, le composant de la matière noire peut être extrêmement lourd avec plusieurs centaines de masses solaires comme absolument léger de l'ordre de  $10^{-22} \text{ eV}/c^2$ . L'espace des paramètres à couvrir est gigantesque et il est nécessaire de coordonner les efforts vers un objectif commun. L'absence de détection dans la gamme des accélérateurs de particules nécessite le développement et la multiplication d'expériences à petites et grandes échelles.

### Echelle des particules - La chasse aux WIMPs et le secteur sombre

Les WIMPs (particules massives ayant une interaction faible avec la matière normale) ont d'abord été les candidates favorites pour expliquer la matière noire. Ce statut a longtemps été soutenu par la communauté des physiciens des particules. De nombreuses théories alternatives au modèle standard reposent sur l'existence de cette particule qui permettrait de régler le problème de hiérarchisation. Idéalement, les WIMPs interagiraient via l'interaction faible du modèle standard et auraient été générées pendant le refroidissement de l'Univers à la suite du découplage.

Une partie de la communauté scientifique espère les détecter directement en les forçant par collision de particules ou indirectement par la collecte de particules issues de l'annihilation des WIMPs. Une détection directe repose sur la mesure de l'énergie de recul dispersée lors d'une collision entre deux particules. Malheureusement, la signature de la matière noire peut être confondue avec d'autres particules ce qui complique sa détection. Ce type de recherche se concentre essentiellement au LHC ou dans tout détecteur isolé de perturbation externe.

Dans le second cas, l'annihilation de la matière peut former des rayons gamma, des neutrinos, des paires particules-antiparticules et de l'antimatière...

- Une origine cosmique des rayons gamma nécessite l'utilisation de détecteurs terrestres (comme le futur réseau de télescope Cherenkov CTA [66] ou VERITAS [67]) et spatiaux (comme le module AMS [68] placé sur l'ISS).

- La matière noire constituée de WIMPs est censée s'annihiler par de nombreux canaux de désintégration (paire de particule/anti-particule  $\tau\bar{\tau}, t\bar{t}, b\bar{b}...$ ). Il est même possible d'induire une cascade de désintégration. La matière noire proche de la Terre pourrait avoir une direction privilégiée ce qui permettrait de la différencier des désintégrations issues de rayons cosmiques. L'amélioration du détecteur IceCube [69] et l'ajout du module PINGU [70] ont pour objectif d'augmenter la sensibilité à ces gerbes de particules.
- La recherche de neutrinos issus de la matière noire est plus délicate puisque la détection de neutrinos est délicate quel que soit leur origine. Les détecteurs sont enfouis dans des environnements isolés comme pour le plus grand observatoire de neutrinos au pôle Sud IceCube [69] ou le cylindre enfoui dans d'anciennes mines au Japon pour le Super-Kamiokande [71].

Longtemps les plus attrayantes, les WIMPs n'ont toujours pas été détectées et ces particules laissent peu à peu la place à d'autres théories. La communauté de la physique des particules se tourne désormais vers des théories comme celle du "secteur sombre" qui suppose que la structure de la matière noire est aussi complexe que celle du secteur visible. Il existerait un "modèle standard" de la matière noire avec ces particules élémentaires propres et de nouvelles interactions fondamentales.

### Echelle des champs scalaires - Le concurrent poids léger

Plusieurs concurrents au secteur sombre et aux WIMPs se trouvent actuellement dans la gamme de masse inférieure au  $keV/c^2$ . Dans ces conditions, la matière noire doit être bosonique puisque la pression de dégénérescence (qui est prédite par le principe d'exclusion de Pauli) empêche la formation d'amas de matière noire fermionique tels qu'on les observe à grandes échelles. De même, la longueur d'onde de Compton du champ bosonique impose une masse supérieure à  $10^{-22} eV/c^2$  au vue de la taille des galaxies naines dans laquelle on observe les effets de la matière noire.

**Axion** Dans cette gamme de masse, de nombreuses théories se disputent le titre d'outsider. L'un des candidats les plus solides est l'axion, particule beaucoup plus légère que les WIMPs et dont l'interaction avec la matière usuelle est faible. Afin d'avoir l'influence gravitationnelle observée, la densité de ces particules doit être très importante afin d'expliquer la structure à grande échelle de notre Univers.

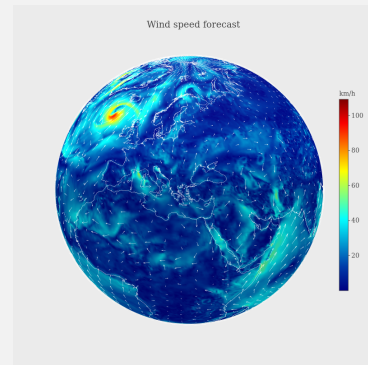
La forte espérance placée dans cette particule trouve son origine dans une des dernières énigmes du modèle standard. La chromodynamique quantique décrit l'interaction forte (voir section sur le modèle standard) et prédit une violation de la symétrie de charge et de parité (CP). Théoriquement, une particule ayant subi une inversion de charge et de parité (inversion d'espace et rotation de  $180^\circ$ ) ne devrait pas suivre les mêmes lois physiques qu'une particule non inversée. Cependant, les multiples expériences n'ont pas permis de révéler cette brisure de symétrie. L'introduction de l'axion dans le modèle standard permettrait de résoudre le problème CP et pourrait expliquer l'origine de la matière noire. En 1987, lors d'une supernova, une grande quantité d'axion aurait du être

créée et détectée sous Terre [72-74] mais l'absence de trace sur les détecteurs à diminué la région de masse dans laquelle il est probable de trouver l'axion. Depuis, cette particule n'a toujours pas été détectée [75].

**Champ scalaire ultra-léger** Il faut donc à nouveau changer de stratégie et dernièrement, la théorie des champs ultra faible a le vent en poupe.

**Champ scalaire ou vectoriel** Un champ scalaire ou vectoriel est une fonction mathématique qui associe à tout point de l'espace-temps une quantité physique (nombre, vecteur...). Particulièrement en physique, un champ est supposé être indépendant du référentiel choisi afin que deux observateurs mesurent la même quantité bien qu'ils soient à des endroits différents.

La figure ci-contre représente un champ scalaire et un champ vectoriel. Le champ scalaire correspond à la carte de couleur qui représente la vitesse du vent (nombre unique pour un point donnée) tandis que le champ vectoriel qui correspond à la direction du vent (vecteur pour un point donnée) est représenté à l'aide de flèche. Les champs scalaires ont une grande importance en physique de l'atmosphère (carte de température, pression...), dans le modèle standard (champ de Higgs), ou en relativité générale (champ gravitationnel).



Ces théories tenseur-scalaire représentent une base solide comme extension de la relativité générale dans un effort d'unification de cette théorie avec le modèle standard. Leur appellation provient de l'ajout d'un champ scalaire  $\varphi$  au champ tensoriel habituel  $g_{\mu\nu}$  de la relativité générale. L'introduction de ces champs scalaires est supposée expliquer l'origine de la matière noire et son interaction avec la matière usuelle. Ces champs sont recherchés par l'expérience DAMNED, le deuxième projet de ma thèse. La théorie et la phénoménologie seront présentées en détails dans la section 3.

## 1.5 Modèles alternatifs

Comme cela a été longuement abordé dans les sections précédentes, la relativité générale et le modèle standard sont deux théories au succès incroyable. Pour les deux, les vérifications expérimentales sont légion et leur "beauté" mathématique rassure les théoriciens. Séparément, elles n'ont pour l'instant pas de failles, mais elles diffèrent grandement :

- Le modèle standard se base sur une quantification des champs, là où la relativité générale évolue avec des champs classiques.
- Les deux théories reposent sur une interprétation différente des champs. Pour le modèle standard, l'espace-temps n'est que le creuset où se déroule l'ensemble des interactions. Il s'agit d'une simple variable indépendante des particules. Pour la relativité générale, l'espace-temps est l'élément fondamental et est responsable des interactions gravitationnelles entre les corps.
- Les échelles d'énergie des deux théories sont incompatibles. La faiblesse relative de l'interaction gravitationnelle à courte distance annihile toute perturbation pour un système quantique. La relative neutralité des corps célestes (absence de charge à grande échelle) limite fortement la combinaison de la gravitation à l'électromagnétisme du modèle standard. C'est pourquoi une grande partie de la recherche se concentre sur l'échelle intermédiaire où les deux effets cohabitent et peuvent être mesurés simultanément en espérant observer une déviation.

Au delà de cette comparaison, la question de la matière noire (abordée dans la section 1.4) et de l'énergie noire, renforce le sentiment qu'une théorie complète doit réconcilier la relativité générale et le modèle standard.

### 1.5.1 Garde-fous

Les candidats sont nombreux et la multiplication du nombre de théories nécessite de fixer des contraintes sur leur validité. C'est l'effort réalisé par Dicke et Schiff afin d'évaluer ou non la validité de théories alternatives à la relativité générale.

#### Cadre de Dicke

Dans l'espoir d'unifier la relativité générale au modèle standard, R.H. Dicke a œuvré pour que la gravité soit traitée dans un formalisme mathématique tel que :

- L'espace temps est une variété différentielle quadridimensionnelle, où chaque point est un événement.
- Les équations de la gravité sont indépendantes des coordonnées du référentiel choisi pour les exprimer.

De ce formalisme, il en déduit alors deux contraintes pour toute théorie qui veut traiter de la gravitation :

- La gravité doit y être associée à un champ tensoriel.
- Les équations qui gouvernent la gravité doivent être dérivables d'une intégrale d'action.

Ce cadre a ensuite été étendu et toute théorie doit :

- Être complète : Elle doit inclure l'ensemble des lois de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique qui peuvent être utilisées pour expliciter le comportement d'un corps dans un champ gravitationnel. Autrement dit, elle doit être capable de prédire les résultats déjà obtenus par les théories précédentes. En ce sens, la théorie cinématique relativiste [2] de Milne en 1968, qui avait pour objectif de régler certains problèmes cosmologiques, n'est pas une théorie complète puisqu'elle ne prévoit aucun terme de décalage vers le rouge gravitationnel.
- Être auto-cohérente : les prédictions d'une même expérience par deux méthodes différentes mais équivalentes doivent être les mêmes. Par exemple, la théorie de jauge de gravitation de Poincaré ne respecte pas ce critère puisqu'elle donne des résultats différents en fonction du caractère corpusculaire ou ondulatoire de la lumière.
- Avoir une limite relativiste : Les observations montrent que lorsque le champ gravitationnel est faible, les lois de la physique se rapportent aux lois de la relativité restreinte. Il est donc essentiel que la théorie soit relativiste quand les effets gravitationnels sont négligeables et les vitesses sont élevées. En considérant cela, la mécanique newtonienne n'est donc pas une théorie gravitationnelle suffisante.
- Avoir une limite newtonienne : Tout comme la relativité restreinte a pour limite la relativité galiléenne pour de petites vitesses, toute théorie qui se veut gravitationnelle doit avoir une limite newtonienne.

### Conjecture de Schiff

La conjecture de Schiff est basée sur l'idée que les trois versions du principe d'équivalence sont potentiellement reliées à un niveau théorique plus fondamental que la relativité générale. Schiff suppose en 1960 que la non-universalité de la chute libre induit inexorablement une violation des invariances locale de position et locale de Lorentz. En généralisant, la conjecture de Schiff suppose donc que la violation d'un des sous-principes sous-entend la violation des deux autres.

### 1.5.2 Théories alternatives

De nombreuses théories existent pour assurer la succession au modèle standard, à la relativité générale ou aux deux. Seules quelques-unes seront présentées ici.

#### Théories alternatives au modèle standard

**Théories de la Grande Unification** Ces théories supposent que le modèle standard est une approximation à basse énergie. A haute énergie, les trois interactions fondamentales fusionneraient en une seule et même interaction. Ce niveau d'énergie aurait pu être atteint lors d'une ère de grande unification lors de la formation de notre Univers et une trace serait en théorie détectable dans l'univers visible. Cette idée est supportée par le constat expérimental de l'unification des interactions électromagnétique et

faible en une force électrofaible. Si ce genre de théorie s'avérait exacte, des particules nouvelles existeraient à des énergies proches de l'énergie de Planck. Ces énergies ne seront jamais atteintes avec les accélérateurs de particules et les particules entrant dans l'atmosphère n'atteignent pas ces niveaux. Seuls des effets indirects comme la désintégration du proton ou la détection de monopole magnétique permettraient de confirmer ces théories. Quand bien même on parviendrait à détecter ces effets, ces théories ne permettent pas de régler le problème de hiérarchisation.

**Supersymétries** En physique des particules, la supersymétrie permettrait d'établir un lien entre les bosons (spin entier) et les fermions (spin demi-entier). Chaque particule bosonique/fermionique aurait alors une particule associée fermionique/bosonique nommée "superpartenaire" dont le spin diffère d'un demi-entier. La symétrie sous-entend également que les caractéristiques (masse, nombre quantique...) des particules et des superpartenaires sont censés être les mêmes et il est donc nécessaire de rompre la supersymétrie afin d'expliquer les découvertes expérimentales. Cette brisure de supersymétrie permettrait de régler le problème de hiérarchisation.

### Théories alternatives à la relativité générale

**Théorie à paramètres post-newtoniens** Ces théories se basent sur le traitement perturbatif des métriques de la relativité générale. Cette méthode permet d'obtenir des solutions approchées aux équations fortement non linéaires de la relativité générale.

La métrique est alors développée en puissance du potentiel gravitationnel  $(\Delta U/c^2)^n$  où  $n$  est l'ordre du développement. Cela revient à approximer une solution de la relativité générale  $g_{\mu\nu}$  à une métrique de Minkowski de l'espace temps plat  $\eta_{\mu\nu}$  à laquelle une métrique de perturbation est ajoutée  $h_{\mu\nu}$ .

Paramètre	Effet recherché	Limite
$\gamma - 1$	retard lumineux	$2 \times 10^{-5}$
	déflexion lumineuse	$2 \times 10^{-4}$
$\beta - 1$	avance du périhélie	$8 \times 10^{-5}$
	Effet Nordtvedt	$2 \times 10^{-4}$

TABLE 1.1 – Valeur des deux principaux termes du formalisme PPN et l'effet mesuré pour les estimer.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.19)$$

Nordvedt et Will [29] ont approfondi le formalisme pour limiter à 10 le nombre de paramètres intervenant dans la théorie. Ce nombre réduit facilite grandement la comparaison du formalisme PPN avec les autres théories alternatives. L'une des forces de ce formalisme est qu'il s'applique particulièrement bien pour tester la gravitation dans notre système solaire puisque le potentiel  $\Delta U$  est relativement faible. Le paramètre  $\gamma$  est estimé à partir de la déviation d'un rayon lumineux dont la trajectoire s'approche du Soleil ou en mesurant l'effet de retard Shapiro (voir section 1.2). Le paramètre  $\beta$  est mesuré à l'aide de la précession du périhélie ou avec l'effet de Nordtvedt qui dernier vérifie si la masse

gravitationnelle d'un corps est modifiée par son énergie auto-gravitationnelle différemment de sa masse inertielle. Cette différence est par exemple mesurée sur les données de télémétrie de la distance Terre-Lune.

### **Théories alternatives aux deux**

**Théorie du tout** La Théorie du tout est le Graal de la physique moderne puisqu'elle rassemble relativité générale et modèle standard. Cette idée se base essentiellement sur l'ajout de dimensions supplémentaires. Proposée par Theodor Kaluza, une cinquième dimension permettrait d'unifier la gravitation à l'électromagnétisme[76]. Oskar Klein suppose que cette dimension supplémentaire a une forme circulaire avec une taille typique de quelques milliers de longueur de Planck[77]. Les pistes suivant ces idées sont multiples :

- **Théories des cordes** Les théories des cordes reposent sur l'hypothèse que les particules élémentaires sont en fait constituées d'objets unidimensionnels pouvant, en fonction des configurations, se replier pour former des objets de dimensions supérieures. Le spin, la masse ou la charge d'une particule est alors expliquée par l'état vibratoire d'une corde.
- **Supergravité** Les théories de supergravité reposent sur la combinaison de la relativité générale avec la théorie de Supersymétrie (présentée précédemment). Elles peuvent exister dans notre espace-temps à 4 dimensions ou peuvent nécessiter des dimensions supplémentaires. Ces théories de supergravité étendue peuvent atteindre jusqu'à 12 dimensions!
- **Gravité quantique à boucles** Les théories de gravité quantique à boucles supposent que l'espace-temps de la relativité générale est quantifié et donc discret. L'espace-temps est donc une quantité physique et non une propriété géométrique. Cette théorie suppose que l'espace-temps est composé de boucles créant un réseau similaire aux réseaux moléculaires.
- **La théorie M** Cette théorie regroupe théories des cordes et supersymétries.

**Extension du modèle standard (SME)** Lors du développement des nombreuses théories alternatives (cordes, gravité quantique à boucles, branes...), Alan Kostelecký and Stuart Samuel réaliseront que la plupart d'entre elles prédisent une violation de l'invariance de Lorentz ou une brisure de la symétrie CP. Ils mettent alors au point une théorie effective qui a pour but de simplifier les recherches expérimentales. Ce modèle est bâti sur le SME minimal limité aux espaces temps plats et le SME étendu aux espaces-temps gravitationnels [78-80].

**Et moi dans tout ça ?** Ce résumé non exhaustif révèle un panel très important de théories dont les domaines d'application sont très larges. Seules les expériences permettent de faire le tri dans ce large nombre de théories. Les deux projets de ma thèse sont un effort dans cette direction : test du principe d'équivalence avec la mission ACES-PHARAO et recherche de l'oscillation des constantes fondamentales avec l'expérience DAMNED.

## 1.6 Travail réalisé lors de la thèse

Le premier objectif fixé lors de ma thèse était de préparer le dernier élément manquant au SYRTE pour réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel de la future mission ACES-PHARAO (chapitre 2). Pour des raisons techniques, le lancement de la mission a été retardé et le sujet de ma thèse a dû être ré-orienté vers une expérience de recherche de matière noire à l'Observatoire (chapitre 3). Dernièrement, j'ai été impliqué dans une expérience de lien optique en espace libre (chapitre 4).

### 1.6.1 La mission ACES-Pharao

Le premier projet de recherche consistait à préparer le logiciel qui permettrait d'analyser les données de la mission ACES-Pharao afin de réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel. Ce logiciel, qui sera utilisé lorsque la mission volera, est la dernière étape de traitement et d'analyse des données qui permettra de placer la contrainte sur le paramètre de violation du principe d'équivalence recherché dans cette mission. Il fait suite à un travail déjà engagé au SYRTE avec différents logiciels permettant de traiter les données brutes pour créer les données raffinées nécessaires au fonctionnement de mon programme. En l'absence de données réelles, j'ai été amené à créer un simulateur pour la mission qui intègre une orbitographie réelle de la Station Spatiale Internationale (ISS). Le logiciel génère des données pour les différentes stations sols participant à la mission et intègre le bruit de phase des horloges et le bruit de fréquence du lien. Les deux logiciels sont maintenant opérationnels et ont permis de confirmer la contrainte souhaitée sur le test du principe d'équivalence tout en réduisant certaines contraintes pour la mission dans le cadre de ce test.

### 1.6.2 L'expérience DAMNED

Un nouveau retard sur la mission ACES-Pharao m'a permis d'aborder le second projet de recherche de ma thèse. Celui-ci m'a permis de sortir de ma zone de confort et de mon bureau de théoricien pour découvrir le monde de la physique expérimentale. Notre équipe ("Théorie et Métrologie") a la chance de travailler dans un laboratoire de métrologie de pointe. Grâce à cela, nous avons accès à une expertise et des données d'horloges et de liens qui nous permettent de réaliser divers tests de physique fondamentale. Récemment, un intérêt pour la recherche de matière noire s'est développé dans l'équipe et a conduit à la création d'une expérience dédiée de recherche de matière noire avec les outils du laboratoire.

L'expérience, nommée DAMNED, consiste à comparer le signal d'une cavité ultra-stable à elle-même dans le passé à l'aide d'un retard optique induit par des bobines de fibre. La qualité des cavités tout comme l'expérience sur les transferts de signaux optiques de l'équipe "Lien Optique Ultra Stable" a permis de mettre en place une première version de l'expérience et d'obtenir des résultats prometteurs dès les premières semaines. Après de nombreux réglages/optimisations/erreurs de théoricien, l'expérience a atteint un niveau de maturité qui nous a permis de rechercher un signal de matière noire sur



l'équivalent de 3 semaines. La quantité de données générées par cette durée a soulevé de nombreux défis pour le stockage et le traitement. Une fois le problème du traitement résolu, l'analyse a nécessité l'utilisation d'une artillerie numérique pour extraire des contraintes sur le couplage de la matière noire à la matière usuelle. Notre analyse n'a malheureusement pas révélé de signal de matière noire (bien que certains signaux suspects soient apparus avant d'être écartés). Ce projet est de loin celui qui m'a le plus appris le métier de physicien puisque j'ai dû couvrir l'ensemble du spectre : de la théorie, à l'expérience en passant par le traitement de signal et l'analyse numérique.

Notre expérience a permis d'améliorer les contraintes existantes fixées par d'autres expériences.

### 1.6.3 Le projet Airborne - lien optique en espace libre

Grâce à l'expertise technique développée lors de l'acquisition des signaux pour l'expérience DAMNED, j'ai pu intégrer un projet prometteur de lien optique en espace libre. Cette collaboration entre l'Université d'Australie Occidentale, le CNES Toulouse et le SYRTE a pour objectif de comparer des horloges atomiques/optiques à l'aide d'un lien optique. Celui-ci se ferait en espace libre à l'aide de télescopes. Cette nouvelle technologie ouvrirait la porte aux comparaisons de moyenne portée et qui puissent être embarquées sur ballon-sonde, avion ou drone. Les applications de ce type de lien sont dans la continuité du travail que j'ai réalisé lors de ma thèse avec par exemple la mesure du champ gravitationnel terrestre via l'effet du décalage vers le rouge des horloges (géodésie chronométrique) et à terme à des tests de décalage vers le rouge gravitationnel avec les horloges optiques au sol et embarquées.

## Bibliographie Introduction

- [1] Julia WOITHE, Gfried J WIENER et Frederik F Van der VEKEN. "Let's have a coffee with the Standard Model of particle physics!" In : *Physics Education* 52.3 (2017), p. 034001. DOI : 10.1088/1361-6552/aa5b25 (cf. p. 5).
- [2] A. EINSTEIN. "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". In : *Annalen der Physik* 322.6 (1905), p. 132-148. DOI : 10.1002/andp.19053220607. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053220607> (cf. p. 6).
- [3] A. EINSTEIN. "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen". In : *Annalen der Physik* 322.8 (1905), p. 549-560. DOI : 10.1002/andp.19053220806. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053220806> (cf. p. 6).
- [4] A. EINSTEIN. "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". In : *Annalen der Physik* 322.10 (1905), p. 891-921. DOI : 10.1002/andp.19053221004. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053221004> (cf. p. 6).

- [5] A. EINSTEIN. “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?” In : *Annalen der Physik* 323.13 (1905), p. 639-641. DOI : 10.1002/andp.19053231314. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053231314> (cf. p. 6).
- [6] “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (déc. 1865), p. 459-512. DOI : 10.1098/rstl.1865.0008 (cf. p. 6).
- [7] George GAMOW et Roger PENROSE. *Mr Tompkins in Paperback*. Canto. Cambridge University Press, 1993. DOI : 10.1017/CB09781139644143 (cf. p. 7).
- [8] Albert A. MICHELSON et Edward Williams MORLEY. *On the relative motion of the earth and the luminiferous aether [microform] / by Albert A. Michelson and Edward W. Morley*. German. Taylor et Francis [London, 1887, p. [449]-463 : (cf. p. 8, 9).
- [9] Roy J. KENNEDY et Edward M. THORNDIKE. “Experimental Establishment of the Relativity of Time”. In : *Phys. Rev.* 42 (3 1932), p. 400-418. DOI : 10.1103/PhysRev.42.400 (cf. p. 8, 9).
- [10] Herbert E. IVES et G. R. STILWELL. “An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock”. In : *J. Opt. Soc. Am.* 28.7 (1938), p. 215-226. DOI : 10.1364/JOSA.28.000215 (cf. p. 8).
- [11] Albert EINSTEIN. “The Field Equations of Gravitation”. In : *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), p. 844-847 (cf. p. 9).
- [12] *SageMath Manifold extension - Black hole rendering*. [https://nbviewer.jupyter.org/github/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Notebooks/SM\\_black\\_hole\\_rendering.ipynb](https://nbviewer.jupyter.org/github/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Notebooks/SM_black_hole_rendering.ipynb) (cf. p. 10).
- [13] Isaac NEWTON. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. William Dawson & Sons Ltd., London, 1687 (cf. p. 11).
- [14] Shahan HACYAN. “Galileo and the equivalence principle : a faulty argument with the correct conclusion”. In : *European Journal of Physics* 36.6 (2015), p. 065044. DOI : 10.1088/0143-0807/36/6/065044 (cf. p. 11).
- [15] V. VISWANATHAN et al. “The new lunar ephemeris INPOP17a and its application to fundamental physics”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 476.2 (mai 2018), p. 1877-1888. DOI : 10.1093/mnras/sty096. arXiv : 1710.09167 [gr-qc] (cf. p. 12).
- [16] James G WILLIAMS, Slava G TURYSHEV et Dale H BOGGS. “Lunar laser ranging tests of the equivalence principle”. In : *Classical and Quantum Gravity* 29.18 (2012), p. 184004. DOI : 10.1088/0264-9381/29/18/184004 (cf. p. 12).
- [17] P.G ROLL, R KROTKOV et R.H DICKE. “The equivalence of inertial and passive gravitational mass”. In : *Annals of Physics* 26.3 (1964), p. 442 -517. DOI : [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(64\)90259-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(64)90259-3) (cf. p. 12).

- [18] V. B. BRAGINSKY et V. I. PANOV. “The equivalence of inertial and passive gravitational mass”. In : *General Relativity and Gravitation* 3.4 (1972), p. 403-404. DOI : 10.1007/BF00759178 (cf. p. 12).
- [19] Ephraim FISCHBACH et Carrick TALMADGE. “Six years of the fifth force”. In : *Nature* 356.6366 (1992), p. 207-215. DOI : 10.1038/356207a0 (cf. p. 12).
- [20] Y. SU et al. “New tests of the universality of free fall”. In : *Phys. Rev. D* 50 (6 1994), p. 3614-3636. DOI : 10.1103/PhysRevD.50.3614 (cf. p. 12).
- [21] S. BAESSLER et al. “Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy”. In : *Phys. Rev. Lett.* 83 (18 1999), p. 3585-3588. DOI : 10.1103/PhysRevLett.83.3585 (cf. p. 12).
- [22] E G ADELBERGER. “New tests of Einstein’s equivalence principle and Newton’s inverse-square law”. In : *Classical and Quantum Gravity* 18.13 (2001), p. 2397-2405. DOI : 10.1088/0264-9381/18/13/302 (cf. p. 12).
- [23] S. SCHLAMMINGER et al. “Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance”. In : *Phys. Rev. Lett* 100 (2008), p. 041101 (cf. p. 12).
- [24] T A WAGNER et al. “Torsion-balance tests of the weak equivalence principle”. In : *Classical and Quantum Gravity* 29.18 (2012), p. 184002. DOI : 10.1088/0264-9381/29/18/184002 (cf. p. 12).
- [25] Pierre TOUBOUL et al. “MICROSCOPE Mission : First Results of a Space Test of the Equivalence Principle”. In : *Phys. Rev. Lett.* 119 (23 2017), p. 231101. DOI : 10.1103/PhysRevLett.119.231101 (cf. p. 12).
- [26] H el ene Pihan-le BARS et al. “New Test of Lorentz Invariance Using the MICROSCOPE Space Mission”. In : *Phys. Rev. Lett.* 123 (23 2019), p. 231102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.123.231102 (cf. p. 12).
- [27] David MATTINGLY. “Modern tests of Lorentz invariance”. In : (2005). DOI : 10.12942/lrr-2005-5. eprint : arXiv:gr-qc/0502097 (cf. p. 12).
- [28] Stefano LIBERATI. “Tests of Lorentz invariance : a 2013 update”. In : (2013). DOI : 10.1088/0264-9381/30/13/133001. eprint : arXiv:1304.5795 (cf. p. 12).
- [29] Clifford M. WILL. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2<sup>e</sup>  ed. Cambridge University Press, 2018. DOI : 10.1017/9781316338612 (cf. p. 13, 31).
- [30] Jean-Philippe UZAN. “Varying Constants, Gravitation and Cosmology”. In : *Living Reviews in Relativity* 14.1 (2011), p. 2 (cf. p. 13).
- [31] Albert EINSTEIN. “Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity”. In : *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), p. 831-839 (cf. p. 16).
- [32] W. S. ADAMS. “The relativity displacement of the spectral lines in the companion of Sirius”. In : *The Observatory* 48 (nov. 1925), p. 337-342 (cf. p. 16).
- [33] Daniel M. POPPER. “Red Shift in the Spectrum of 40 Eridani B.” In : *APJ* 120 (sept. 1954), p. 316. DOI : 10.1086/145916 (cf. p. 16).

- [34] R. H. DICKE. “New Research on Old Gravitation”. In : *Science* 129.3349 (1959), p. 621-624. DOI : 10.1126/science.129.3349.621. eprint : <https://science.sciencemag.org/content/129/3349/621.full.pdf> (cf. p. 16).
- [35] L. I. SCHIFF. “On Experimental Tests of the General Theory of Relativity”. In : *American Journal of Physics* 28.4 (1960), p. 340-343. DOI : 10.1119/1.1935800. eprint : <https://doi.org/10.1119/1.1935800> (cf. p. 16).
- [36] Irwin I. SHAPIRO. “Fourth Test of General Relativity”. In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (26 1964), p. 789-791. DOI : 10.1103/PhysRevLett.13.789 (cf. p. 16).
- [37] Jeffrey G. SHAPIRO, Charles P. FOSTER et Tom POWELL. “Facial and bodily cues of genuineness, empathy and warmth”. In : *Journal of Clinical Psychology* 24.2 (1968), p. 233-236. DOI : 10.1002/1097-4679(196804)24:2<233::AID-JCLP2270240234>3.0.CO;2-L. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/1097-4679%28196804%2924%3A2%3C233%3A%3AAID-JCLP2270240234%3E3.0.CO%3B2-L> (cf. p. 16).
- [38] R. V. POUND et G. A. REBKA. “Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance”. In : *Phys. Rev. Lett.* 3 (9 1959), p. 439-441. DOI : 10.1103/PhysRevLett.3.439 (cf. p. 16).
- [39] J. LENSE et H. THIRRING. “Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie”. In : *Physikalische Zeitschrift* 19 (1918) (cf. p. 16).
- [40] C. W. F. EVERITT et al. “Gravity Probe B : Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity”. In : *Phys. Rev. Lett.* 106 (22 2011), p. 221101. DOI : 10.1103/PhysRevLett.106.221101 (cf. p. 16).
- [41] B. P. ABBOTT et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In : *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), p. 061102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv : 1602.03837 [gr-qc] (cf. p. 17).
- [42] The Event Horizon Telescope COLLABORATION. “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole”. In : *arXiv* (2019). DOI : 10.3847/2041-8213/ab0ec7. eprint : arXiv:1906.11238 (cf. p. 17).
- [43] G. HINSHAW et al. “First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Data Processing Methods and Systematic Errors Limits”. In : *arXiv* (2003). DOI : 10.1086/377222. eprint : arXiv:astro-ph/0302222 (cf. p. 17).
- [44] E. KOMATSU et al. “Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation”. In : *arXiv* (2010). DOI : 10.1088/0067-0049/192/2/18. eprint : arXiv:1001.4538 (cf. p. 17).
- [45] Pierre-Marie MOREL. In : t. 2<sup>e</sup> éd. Épiméthée. Paris cedex 14 : Presses Universitaires de France, 2011. Chap. Leucippe et Démocrite, p. 41-51 (cf. p. 18).

- [46] John DALTON. *A New System of Chemical Philosophy*. T. 1. Cambridge Library Collection - Physical Sciences. Cambridge University Press, 2010. DOI : 10.1017/CB09780511736391 (cf. p. 18).
- [47] Joseph John THOMSON. *The structure of the atom*. Academie Royale de Belgique, 1913 (cf. p. 18).
- [48] Professor E. Rutherford F.R.S. “LXXIX. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 21.125 (1911), p. 669-688. DOI : 10.1080/14786440508637080. eprint : <https://doi.org/10.1080/14786440508637080> (cf. p. 18).
- [49] The ATLAS COLLABORATION. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. In : *Physics Letters B* 716.1 (2012), p. 1-29. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020> (cf. p. 18, 23).
- [50] The ATLAS COLLABORATION. “The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider”. In : *Journal of Instrumentation* 3.08 (2008), S08003-S08003. DOI : 10.1088/1748-0221/3/08/s08003 (cf. p. 20).
- [51] W. N. COTTINGHAM et D. A. GREENWOOD. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, 2007. DOI : 10.1017/CB09780511791406 (cf. p. 20).
- [52] F. ENGLERT et R. BROUT. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (9 1964), p. 321-323. DOI : 10.1103/PhysRevLett.13.321 (cf. p. 22).
- [53] Peter W. HIGGS. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (16 1964), p. 508-509. DOI : 10.1103/PhysRevLett.13.508 (cf. p. 22).
- [54] Sheldon L. GLASHOW. “Partial-symmetries of weak interactions”. In : *Nuclear Physics* 22.4 (1961), p. 579-588. DOI : [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(61\)90469-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(61)90469-2) (cf. p. 23).
- [55] Steven WEINBERG. “A Model of Leptons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 19 (21 1967), p. 1264-1266. DOI : 10.1103/PhysRevLett.19.1264 (cf. p. 23).
- [56] Abdus SALAM. “Weak and Electromagnetic Interactions”. In : *Conf. Proc.* C680519 (1968), p. 367-377 (cf. p. 23).
- [57] R. CLAUSIUS. “Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz”. In : *Annalen der Physik* 217.9 (1870), p. 124-130. DOI : 10.1002/andp.18702170911. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.18702170911> (cf. p. 24).
- [58] V. C. RUBIN et W. K. FORD Jr. “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions”. In : *APJ* 159 (fév. 1970), p. 379. DOI : 10.1086/150317 (cf. p. 24).

- [59] Douglas CLOWE et al. “A direct empirical proof of the existence of dark matter”. In : *arXiv* (2006). DOI : 10.1086/508162. eprint : arXiv:astro-ph/0608407 (cf. p. 24).
- [60] Wayne HU et Scott DODELSON. “Cosmic Microwave Background Anisotropies”. In : *arXiv* (2001). DOI : 10.1146/annurev.astro.40.060401.093926. eprint : arXiv:astro-ph/0110414 (cf. p. 25).
- [61] D. S. AKERIB et al. “The Large Underground Xenon (LUX) Experiment”. In : *arXiv* (2012). DOI : 10.1016/j.nima.2012.11.135. eprint : arXiv:1211.3788 (cf. p. 25).
- [62] E. APRILE et T. DOKE. “Liquid Xenon Detectors for Particle Physics and Astrophysics”. In : *arXiv* (2009). DOI : 10.1103/RevModPhys.82.2053. eprint : arXiv:0910.4956 (cf. p. 25).
- [63] The XENON COLLABORATION. *Observation of Excess Electronic Recoil Events in XENON1T*. 2020. arXiv : 2006.09721 [hep-ex] (cf. p. 25).
- [64] Paul J. McMILLAN. “Mass models of the Milky Way”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 414.3 (juin 2011), p. 2446-2457. DOI : 10.1111/j.1365-2966.2011.18564.x. eprint : <http://oup.prod.sis.lan/mnras/article-pdf/414/3/2446/3525100/mnras0414-2446.pdf> (cf. p. 25).
- [65] Marco BATTAGLIERI et al. *US Cosmic Visions : New Ideas in Dark Matter 2017 : Community Report*. 2017. eprint : arXiv:1707.04591 (cf. p. 25, 26).
- [66] M. DORO et al. “Dark matter and fundamental physics with the Cherenkov Telescope Array”. In : *Astroparticle Physics* 43 (2013). Seeing the High-Energy Universe with the Cherenkov Telescope Array - The Science Explored with the CTA, p. 189-214. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2012.08.002> (cf. p. 26).
- [67] The VERITAS COLLABORATION. “Dark matter constraints from a joint analysis of dwarf Spheroidal galaxy observations with VERITAS”. In : *Phys. Rev. D* 95 (8 2017), p. 082001. DOI : 10.1103/PhysRevD.95.082001 (cf. p. 26).
- [68] R. BATTISTON. “The Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) : search for antimatter and dark matter on the International Space Station”. In : *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 65.1 (1998). The Irresistible Rise of the Standard Model, p. 19-26. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0920-5632\(97\)00970-5](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(97)00970-5) (cf. p. 26).
- [69] Sebastian BAUR. *Dark matter searches with the IceCube Upgrade*. 2019. eprint : arXiv:1908.08236 (cf. p. 27).
- [70] IceCube-Gen2 COLLABORATION et JUNO Collaboration MEMBERS. “Combined sensitivity to the neutrino mass ordering with JUNO, the IceCube Upgrade, and PINGU”. In : *Phys. Rev. D* 101 (3 2020), p. 032006. DOI : 10.1103/PhysRevD.101.032006 (cf. p. 27).
- [71] Katarzyna FRANKIEWICZ. *Searching for Dark Matter Annihilation into Neutrinos with Super-Kamiokande*. 2015. eprint : arXiv:1510.07999 (cf. p. 27).

- [72] M. KOSHIBA. “Observation of Neutrinos from Supernova 1987A by Kamiokande-II”. In : *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*. T. 26. European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings. Jan. 1987, p. 219 (cf. p. 28).
- [73] E. N. ALEKSEEV et al. “Properties of the Supernova 1987A Neutrino Signal Recorded by the Baksan Underground Scintillation Telescope”. In : *Soviet Astronomy Letters* 14 (fév. 1988), p. 41 (cf. p. 28).
- [74] IMB-3 COLLABORATION. “IMB-3 : a large water Cherenkov detector for nucleon decay and neutrino interactions”. In : *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 324.1 (1993), p. 363 -382. DOI : [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)90998-W](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90998-W) (cf. p. 28).
- [75] ADMX COLLABORATION. “Search for Invisible Axion Dark Matter with the Axion Dark Matter Experiment”. In : *Phys. Rev. Lett.* 120 (15 2018), p. 151301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.120.151301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.151301) (cf. p. 28).
- [76] TH. KALUZA. “On the Unification Problem in Physics”. In : *International Journal of Modern Physics D* 27.14 (2018), p. 1870001. DOI : [10.1142/s0218271818700017](https://doi.org/10.1142/s0218271818700017) (cf. p. 32).
- [77] Oskar KLEIN. “QUANTUM THEORY AND FIVE-DIMENSIONAL RELATIVITY THEORY”. In : *The Oskar Klein Memorial Lectures*, p. 69-82. DOI : [10.1142/9789814571616\\_0006](https://doi.org/10.1142/9789814571616_0006). eprint : [https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814571616\\_0006](https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814571616_0006) (cf. p. 32).
- [78] Don COLLADAY et V. Alan KOSTELECKÝ. “CPT violation and the standard model”. In : *Phys. Rev. D* 55.11 (juin 1997), p. 6760-6774. DOI : [10.1103/PhysRevD.55.6760](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.6760). arXiv : [hep-ph/9703464](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9703464) [hep-ph] (cf. p. 32).
- [79] D. COLLADAY et V. Alan KOSTELECKÝ. “Lorentz-violating extension of the standard model”. In : *Phys. Rev. D* 58.11, 116002 (déc. 1998), p. 116002. DOI : [10.1103/PhysRevD.58.116002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.116002). arXiv : [hep-ph/9809521](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9809521) [astro-ph] (cf. p. 32).
- [80] V. Alan KOSTELECKÝ. “Gravity, Lorentz violation, and the standard model”. In : *Phys. Rev. D* 69.10, 105009 (mai 2004), p. 105009. DOI : [10.1103/PhysRevD.69.105009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.105009). arXiv : [hep-th/0312310](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312310) [hep-th] (cf. p. 32).

## Chapitre 2

# ACES-PHARAO

Ce premier chapitre présente le travail que j'ai réalisé en préparation de la future mission ACES-Pharao qui aura pour principal objectif scientifique de tester le décalage vers le rouge gravitationnel.



FIGURE 2.1 – Vue d'artiste de la charge utile de la mission ACES-Pharao arrimée au module Colombus de la Station Spatiale Internationale



---

**Table des matières - ACES-PHARAO**

<b>2.1</b>	<b>Présentation de la mission</b>	<b>43</b>
2.1.1	Concept	43
2.1.2	Objectifs scientifiques	44
2.1.3	Centre d'analyse de données du SYRTE	45
2.1.4	Contraintes sur le test du décalage vers le rouge gravitationnel	45
2.1.5	Contraintes de la mission	47
<b>2.2</b>	<b>Logiciels</b>	<b>51</b>
2.2.1	Simulation des désynchronisations	53
2.2.2	Traitement	58
2.2.3	Analyse	60
2.2.4	Limites	62
<b>2.3</b>	<b>Résultats</b>	<b>63</b>
2.3.1	Données simulées	63
2.3.2	GLS vs LSMC	63
2.3.3	Phase contre Fréquence	64
2.3.4	Nombre de stations	67
2.3.5	Durée de la mission	68
2.3.6	Dégradation de l'orbitographie	69
2.3.7	Lien GNSS	71
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>
2.4.1	Résultats principaux	74
2.4.2	Perspectives	74
	<b>Bibliographie ACES-PHARAO</b>	<b>75</b>

---

## 2.1 Présentation de la mission

### 2.1.1 Concept

Après le lancement prévu mi-2021 sur la fusée Space-X 23<sup>1</sup>, l'ensemble d'horloges atomiques dans l'espace (ACES) [1] sera arrimé à la Station Spatiale Internationale (ISS) avec à son bord :

- Une première horloge : PHARAO (pour Projet d'Horloge Atomique par Refroidissement d'Atomes en Orbite) est un étalon primaire fonctionnant grâce à des atomes de Césium refroidis par laser. Cette horloge atteindra une exactitude relative de fréquence de  $10^{-16}$  et une stabilité dont l'écartype d'Allan est égal à  $10^{-13}/\sqrt{\tau}$  où  $\tau$  est le temps d'intégration.
- Une seconde horloge : un maser à hydrogène (SHM) qui permet d'assurer la stabilité à court terme et qui sert d'oscillateur local pour l'horloge PHARAO. La combinaison de ces deux horloges permet d'obtenir une stabilité à court terme grâce au SHM tandis que l'exactitude et la stabilité long terme sont assurées par PHARAO.
- Un module de comparaison de fréquence et de distribution (FCDP) et une unité de management embarqué (UGB) qui comparent les horloges et optimisent la boucle de rétro-action.
- Un lien micro-onde (MWL) qui permet de transmettre le signal de l'ensemble via un lien en fréquence et en temps. Celui-ci permettra de comparer PHARAO aux différentes horloges au sol qui participeront à la mission.
- Un récepteur double GPS/GALILEO fournira des informations pour affiner l'orbitographie de la charge utile (GNSS Antenna). L'utilisation de l'antenne comme lien avec les horloges au sol pourrait être considérée en cas d'avarie du lien MWL.
- Un lien optique basé sur la méthode de chronométrage laser (ELT) crée une redondance sur la transmission du signal de l'ensemble et sert pour les expériences de télémétrie nécessaire à la mesure de la position de la charge utile.

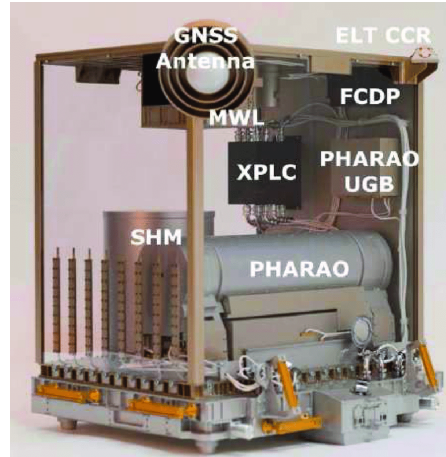


FIGURE 2.2 – Différents éléments de la charge utile ACES

Un réseau de laboratoires de métrologie équipés d'horloges atomiques/optiques constitue la partie terrestre du dispositif. Ces laboratoires seront équipés d'une station sol du lien MWL et/ou du lien ELT. On décompte actuellement quelques partenaires aux États-Unis et au Japon, la majorité en Europe et un partenariat avec un laboratoire australien est envisagé.

---

1. situation en Juin 2020

### 2.1.2 Objectifs scientifiques

Au delà de la prouesse technologique nécessaire à la création d'une horloge atomique qui résiste aux conditions de l'espace, la mission a de nombreux objectifs technologiques et scientifiques, de la physique expérimentale à la physique fondamentale.

#### Objectif technologique

Le principal objectif est de démontrer les performances que peut atteindre une horloge atomique dans l'environnement à faible gravité de l'espace. Ceci permettra à terme de :

- étudier le comportement d'une horloge atomique en micro-gravité,
- estimer les performances de transfert de temps du MWL une fois en orbite,
- établir une échelle de temps spatiale stable et exacte grâce aux performances atteintes par l'ensemble d'horloges,
- réaliser des comparaisons espace-sol entre PHARAO et les horloges présentes dans les laboratoires de métrologie, et des comparaisons sol-sol en utilisant PHARAO comme relai dans la comparaison triangulaire.

#### Objectif scientifique primaire : physique fondamentale

Les objectifs scientifiques sont reportés dans le tableau suivant :

Objectifs	Performances	Contexte scientifique
Tests de physique fondamentale		
Mesure du décalage vers le rouge gravitationnel	Mesure absolue du décalage vers le rouge gravitationnel avec une précision $< 50 \times 10^{-6}$ après 300 s et $2 \times 10^{-6}$ après 10 jours d'intégration.	Comparaison entre des horloges au sol et dans l'espace avec une précision de $10^{-16}$ conduira à une amélioration d'un facteur 10 par rapport aux dernières mesures.
Recherche de la dérive des constantes fondamentales	Variation temporelle de la constante de structure fine avec une précision de $\alpha^{-1} d\alpha/dt < 10^{-17} \text{ year}^{-1}$ jusque $3 \times 10^{-18} \text{ year}^{-1}$ pour une durée de mission de 3 ans	Les développements des horloges optiques permettront des comparaisons à un niveau de $10^{-17}$ . Les comparaisons croisées d'horloges utilisant différents éléments atomiques contraindront fortement la dérive $\alpha, m_e/\Lambda_{QCD}$ et $m_d/\Lambda_{QCD}$ .
Recherche de violations de la relativité restreinte	Test d'invariance de Lorentz du type Ives-Stillwell	Les résultats de la mission amélioreront les limites actuelles

#### Objectif scientifique secondaire : géophysique et systèmes de référence

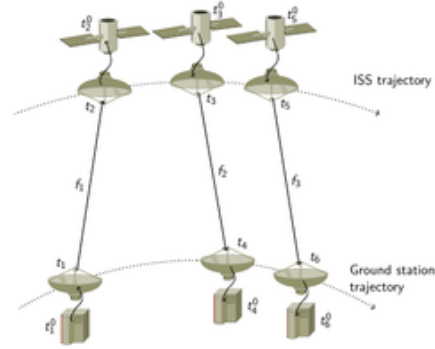
Une fois ACES dans l'espace, les retombées scientifiques seront multiples et toucheront différents domaines de la physique :

- géodesie et gravimétrie : mesure du potentiel gravitationnel avec une résolution verticale de  $\sim 10$  cm en comparant des horloges sol avec MWL/ELT et PHARAO comme relais,
- étude atmosphérique : étude de la ionosphère et troposphère en utilisant les liens MWL et ELT simultanément,
- positionnement GPS et VLBI : l'échelle de temps et l'étalon de fréquence fournis par ACES seront de meilleures qualités que ceux des GPS et pourraient améliorer les deux technologies [2].

### 2.1.3 Centre d'analyse de données du SYRTE

Le laboratoire SYRTE est fortement engagé dans la mission avec différents domaines d'expertises. Etant l'un des leaders de la métrologie mondiale, une collaboration a été développée avec le laboratoire Kastler-Brossel afin de créer l'horloge PHARAO.

L'équipe "Théorie et Métrologie" est impliquée depuis le début du projet dans la définition et l'étude des objectifs scientifiques, la spécification des équipements, et la préparation du traitement des données. Le travail de mes collègues a permis de créer un logiciel de simulation et de traitement des données brutes du lien micro-onde [3]. La méthode repose sur un transfert de temps à 3 signaux : un signal montant (station sol vers station spatiale) en bande Ku, un signal descendant à une fréquence voisine, et un autre signal descendant à fréquence plus faible (bande S) afin de déterminer et corriger les effets dispersifs dus à l'ionosphère. On applique en outre une méthode de comparaison 2-voies qui permet d'éliminer, au premier ordre, l'impact de notre méconnaissance de la distance entre les deux stations. Le logiciel dans sa version actuelle est capable de reproduire l'ensemble des effets physiques identifiés : bruits de mesure, effet relativiste du à la vitesse de l'ISS, délai atmosphérique et ambiguïté de cycles.



Le produit final de cette première couche de traitement permet de calculer les observables scientifiques de la mission. C'est cette quantité qui est ensuite utilisée comme entrée du programme que j'ai réalisé dans le cadre de ma thèse.

### 2.1.4 Contraintes sur le test du décalage vers le rouge gravitationnel

#### Paramétrisation du test du décalage vers le rouge gravitationnel

Afin de mesurer le décalage vers le rouge gravitationnel, il est nécessaire de formuler le temps propre  $\tau$  d'une horloge en mouvement dans le champ gravitationnel terrestre :

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \left( \frac{U(t, \vec{r})}{c^2} + \frac{\vec{v}(t)^2}{2c^2} \right) + \mathcal{O}(c^{-4}) \quad (2.1)$$

avec  $U$  le potentiel gravitationnel de la Terre exprimé dans un système de coordonnées géocentriques non tournant  $(t, \vec{r})$  et  $\vec{v}$  la vitesse de l'horloge dans ce référentiel. Ce développement est une approximation post-newtonienne valide dans le cadre de la mission ACES-PHARAO puisque  $U/c^2 \ll 1$  et  $v^2/c^2 \ll 1$ . Les termes d'ordre supérieur  $v^4/c^4 \sim 10^{-19}$  sont négligeables devant l'incertitude de PHARAO qui est limitée à  $10^{-16}$  par les effets systématiques.

On utilise la convention dite de "synchronisation coordonnée" en définissant la désynchronisation entre l'horloge spatiale (indice  $s$ ) et l'horloge terrestre (indice  $t$ ) :

$$\Delta\tau(t) = \tau_s(t) - \tau_t(t) \quad (2.2)$$

où  $t$  est le temps coordonné et  $\tau_x$  correspond au temps propre de l'horloge  $x$ . A l'aide de (2.1), on a :

$$\Delta\tau(t) = \int_{t_0}^t \left[ \left( \frac{d\tau}{dt} \right)_s - \left( \frac{d\tau}{dt} \right)_t \right] dt = \Delta\tau_0 - \int_{t_0}^t \left( \frac{\Delta U(t, \vec{r}_s, \vec{r}_t)}{c^2} + \frac{\Delta v^2(t, \vec{r}_s, \vec{r}_t)}{2c^2} \right) dt \quad (2.3)$$

où  $\Delta\tau_0$  est la désynchronisation initiale entre les deux horloges,  $\Delta U/c^2 = (U_s - U_t)/c^2$  est l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel et  $\Delta v^2/(2c^2) = (v_s^2 - v_t^2)/(2c^2)$  est l'effet Doppler du second ordre de la relativité restreinte.

Dans le cas d'une comparaison entre PHARAO et une horloge au sol, la différence d'altitude de  $\sim 400$  km crée un effet de décalage vers le rouge gravitationnel  $-\langle \Delta U/c^2 \rangle = 3.6 \times 10^{-11}$ . L'effet accélère donc le rythme de PHARAO par rapport à l'horloge sol. La vitesse de l'ISS  $\sim 27000$  km/h induit un effet Doppler de l'ordre de  $-3.3 \times 10^{-10}$ . L'effet est donc opposé et plus important, ce qui retarde l'horloge PHARAO de  $3\mu\text{s}$  par jour vis à vis d'une horloge sol.

La déviation à la relativité générale dans le cadre du décalage vers le rouge gravitationnel est paramétrisée en ajoutant un facteur multiplicatif  $(1+\alpha)$  [4, 5] tel que :

$$\Delta\tau(t) = \Delta\tau_0 - (1 + \alpha) \int_{t_0}^t \frac{\Delta U}{c^2} dt - \int_{t_0}^t \frac{\Delta v^2}{2c^2} dt \quad (2.4)$$

En relativité générale,  $\alpha$  est nécessairement nul pour respecter l'invariance locale de position. Une valeur non nulle du paramètre  $\alpha$  est prédite par des théories alternatives violant le principe d'équivalence et c'est ce que l'on espère mesurer avec ACES-PHARAO.

De nombreux tests de l'invariance locale de position ont déjà été réalisés par le passé, en commençant par l'expérience de Pound et Rebka, tests dit "classiques". Depuis, deux tests spatiaux et un test terrestre ont permis d'améliorer l'incertitude sur la valeur de  $\alpha$ . En 1976, la mission "Gravity Probe A" a permis d'envoyer un maser à hydrogène dans une fusée et de mesurer  $\alpha$  avec une précision de  $1.4 \times 10^{-4}$ . Depuis, deux expériences ont permis de placer des meilleurs contraintes :

- l'utilisation de deux horloges optiques portables sur la tour Tokyo Skytree (plus haute du Japon) a permis de reproduire l'expérience et Pound-Rebka [6] et d'obtenir une incertitude de  $9.5 \times 10^{-5}$  [7].
- la "GREAT" mission a atteint  $2.5 \times 10^{-5}$  [8] grâce aux orbites excentriques de deux satellites GALILEO dont l'injection orbitale ne s'était pas déroulée comme prévu.

La mission ACES-PHARAO a pour objectif d'améliorer d'un ordre de grandeur les contraintes de la mission "GREAT". En planifiant la mission, l'incertitude cumulée des différents effets systématiques devrait être de  $\sigma_{PHARAO}^{sys} = 10^{-16}$ . Dans ces conditions et en tenant compte de l'amplitude de l'effet gravitationnel  $\langle \Delta U/c^2 \rangle$ , l'incertitude attendue sur le paramètre de violation du principe d'équivalence est :

$$\sigma_{\alpha}^{sys} \simeq \frac{\sigma_{PHARAO}^{sys}}{\langle \frac{\Delta U}{c^2} \rangle} = 2 \sim 3 \times 10^{-6}. \quad (2.5)$$

---

2. avec la convention  $U > 0$

### 2.1.5 Contraintes de la mission

Afin de mesurer le décalage vers le rouge gravitationnel, il est nécessaire d'évaluer les contraintes techniques introduites par le mode de fonctionnement de la mission. Cela aura pour conséquence de modifier la désynchronisation entre les horloges et il est important d'intégrer ces effets dans le traitement et l'analyse.

#### Phase ou fréquence

Dans le cadre de la mission ACES-PHARAO, l'observable attendue correspond à la désynchronisation entre deux horloges. La différence relative de fréquence s'obtient en dérivant simplement la désynchronisation. Ces deux quantités sont envisagées pour mesurer le décalage vers le rouge gravitationnel. Dans la suite du document, le terme "en phase" se réfère à la désynchronisation, "en fréquence" à la différence relative de fréquence.

Cette section présente quantitativement les deux termes présents dans l'équation (2.3) et leur dépendance à l'orbitographie de l'ISS.

- En raison de la variation de l'altitude de l'ISS sur son orbite, on attend un terme constant  $\langle -\Delta U/c^2 \rangle$  et un terme oscillant  $-\delta U/c^2$  pour l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel :

$$-\frac{\Delta U}{c^2} \simeq \left\langle -\frac{\Delta U}{c^2} \right\rangle - \frac{\delta U}{c^2} \quad (2.6)$$

Dans un premier temps, on peut modéliser le potentiel gravitationnel terrestre à l'aide du potentiel newtonien  $U \sim GM_{\oplus}/r$  où  $G$  est la constante gravitationnelle et  $M_{\oplus}$  la masse terrestre. Pour calculer l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel, on obtient la différence d'altitude  $\Delta r$  entre l'ISS et la station sol à partir du fichier d'orbitographie de l'ISS et la position d'une station terrestre  $r_{sol}$  (supposé constant).

- Le terme constant est :

$$-\left\langle \frac{\Delta U}{c^2} \right\rangle \simeq -\left( \frac{GM}{r_{sol} + \langle \Delta r \rangle} - \frac{GM}{r_{sol}} \right) \quad (2.7)$$

- Le terme oscillant est :

$$-\left\langle \frac{\delta U}{c^2} \right\rangle \simeq -\frac{GM}{r_{sol} + \langle \Delta r \rangle} \frac{\delta r}{r_{sol} + \langle \Delta r \rangle} \quad (2.8)$$

- En raison de la variation de la vitesse de l'ISS sur son orbite, on attend un terme constant  $\langle -\Delta v^2/(2c^2) \rangle$  et un terme oscillant  $-\delta v^2/(2c^2)$  pour l'effet Doppler de second ordre. Pour calculer ces termes, on obtient la vitesse  $v_{ISS}$  à partir du fichier d'orbitographie de l'ISS et avec une station sol fixe  $v_{sol} \ll v_{ISS}$ . En supposant que la variation de vitesse  $\delta v_{ISS}$  est faible devant la vitesse moyenne  $\langle v_{ISS} \rangle$ , on a :

$$-\frac{\Delta v^2}{2c^2} \simeq -\frac{\langle v_{ISS} \rangle^2}{2c^2} - \frac{\langle v_{ISS} \rangle^2}{c^2} \frac{\delta v_{ISS}}{\langle v_{ISS} \rangle} \quad (2.9)$$

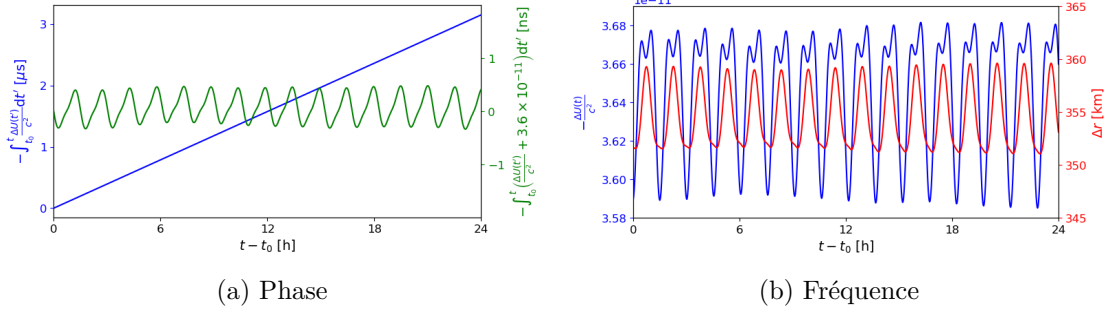


FIGURE 2.3 – Effet du décalage vers le rouge gravitationnel simulé pour la comparaison de PHARAO avec une horloge sol pendant une journée. L’effet en fréquence (2.3b en bleu) a un niveau moyen de  $3.6 \times 10^{-11}$  en raison de l’altitude de l’ISS et une modulation due au changement d’altitude  $\Delta r$  entre PHARAO et une horloge sol (en rouge). En phase (2.3a), l’effet présente une dérive de  $\sim 3.15 \mu\text{s}$  par jour (en bleu) et une oscillation périodique (en vert).

- L’effet de **Decalage vers le rouge gravitationnel** est représenté sur la figure 2.3 :
- en fréquence (figure 2.3b) : le tracé rouge représente la différence d’altitude entre l’ISS et une station sol lors d’une journée. La différence d’altitude moyenne  $\langle \Delta r \rangle$  est de 355 km avec une amplitude d’oscillation de l’ordre de 10 km. Dans ces conditions, le décalage vers le rouge gravitationnel a un terme constant de l’équation (2.7) de l’ordre de  $\sim 3.6 \times 10^{-11}$  et un terme oscillant de l’équation (2.8) de l’ordre de  $\sim 10^{-12}$  pour la mission (en accord avec le tracé bleu).
  - en phase (sur la figure 2.3a) : L’effet de décalage vers le rouge gravitationnel présente une dérive (en bleu) de l’ordre de  $\sim 3.2 \mu\text{s}$  par jour, conséquence de l’intégration du terme  $\langle \Delta U/c^2 \rangle$ . En supprimant cette dérive, on observe l’oscillation (en vert) due à la modulation de la distance ISS-sol.

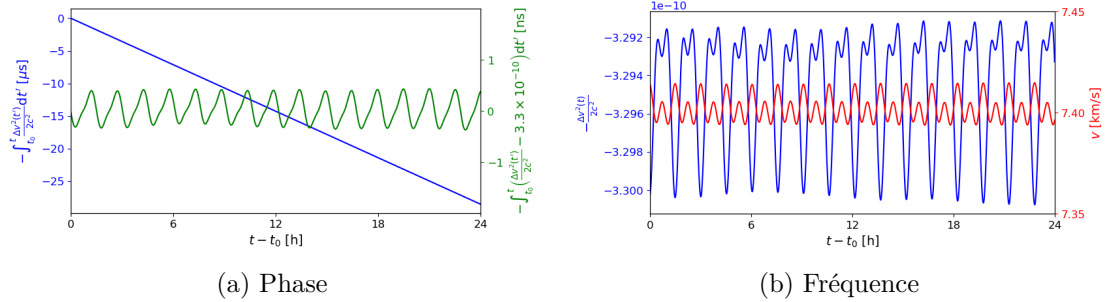


FIGURE 2.4 – Effet Doppler de second ordre simulé pour la comparaison de PHARAO avec une horloge sol pendant une journée. L’effet en fréquence (2.4b) a un niveau moyen de  $-3.295 \times 10^{-10}$  en raison de la vitesse de l’ISS et une modulation due au changement de cette vitesse sur l’orbite. En phase (2.4a), l’effet présente une dérive de  $\sim -28.5 \mu\text{s}$  par jour.

L'effet **Doppler du second ordre** est représenté sur la figure 2.4 :

- en fréquence (figure 2.4b) : le tracé rouge représente la vitesse de l'ISS sur son orbite lors d'une journée. La vitesse moyenne  $\langle \Delta v \rangle$  est de 7.4 km/s avec une amplitude d'oscillation de l'ordre de 20 m/s. Dans ces conditions, le terme constant de l'équation (2.8) de l'ordre de  $\sim -3.3 \times 10^{-10}$  et le terme oscillant de l'ordre de  $\sim 10^{-12}$  pour la mission (en accord avec le tracé bleu).
- en phase (figure 2.4a) : L'effet présente une dérive (en bleu) de l'ordre de  $\sim -28.5 \mu\text{s}/\text{j}$ , conséquence de l'intégration du terme  $\langle \Delta v^2 / (2c^2) \rangle$ . En supprimant cette dérive, on observe l'oscillation (en vert) due à la modulation de la vitesse de l'ISS sur son orbite.

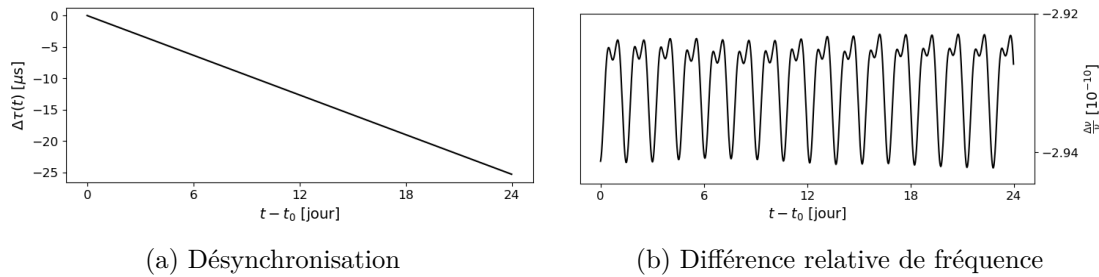


FIGURE 2.5 – Désynchronisation (2.5a) et différence relative de fréquence (2.5b) simulés pour la comparaison de PHARAO avec une horloge sol pendant une journée.

**Somme des effets** En composant les deux effets précédents, on peut donc modéliser la désynchronisation entre deux horloges telle que définie dans l'équation (2.3). L'effet Doppler est un ordre de grandeur plus important et de signe opposé à l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel. Dans les graphiques de la figure 2.5, c'est donc l'effet Doppler que l'on retrouve principalement dans la désynchronisation ( $-28.5 + 3.2 \sim -25.3 \mu\text{s}/\text{j}$ ) et dans la différence relative de fréquence ( $-3.3 \times 10^{-10} + 3.6 \times 10^{-11} \sim -2.9 \times 10^{-10}$ ).

## Bruits

La désynchronisation est évidemment impactée par l'ajout de bruits expérimentaux. Il existe plusieurs sources dans le cadre de la mission mais les deux principales proviennent de l'horloge PHARAO et du lien micro-onde. La caractéristique de ces bruits est représentée dans la variance d'Allan de la figure 2.6.

- Le bruit de PHARAO est un bruit blanc de fréquence. Tel que défini par les spécifications techniques de la mission, il est caractérisé par un écart-type d'Allan  $\sigma_y = 10^{-13} / \sqrt{\tau}$ .
- Le bruit du lien, dominant à court terme, est un bruit blanc de phase. Etant donné l'état actuel du lien, un niveau de bruit de 0.4 ps à 300 s est considéré afin de rester conservatif, ce qui correspond à un écart-type temporel d'Allan  $\sigma_x = 7 \times 10^{-12} \text{s} / \sqrt{\tau}$ .

Afin de simuler numériquement ces bruits, le bruit blanc de fréquence de PHARAO est simulé en fréquence avant d'être intégré en un bruit de marche aléatoire en phase.



Le bruit blanc de phase du lien est simulé en phase et dérivé pour obtenir le bruit en fréquence. Les données en fréquence sont donc la somme d'un bruit blanc provenant de PHARAO et d'un bruit violet provenant du lien. La variance d'Allan modifiée est représentée dans la figure 2.6a. Les données en phase sont donc la somme d'un bruit blanc issu du lien et un bruit de marche aléatoire issu de PHARAO. Sur la figure 2.6a, on observe une inflexion de la variance d'Allan modifiée autour de 300 s qui correspond à la durée d'un passage de l'ISS au dessus d'une station sol.

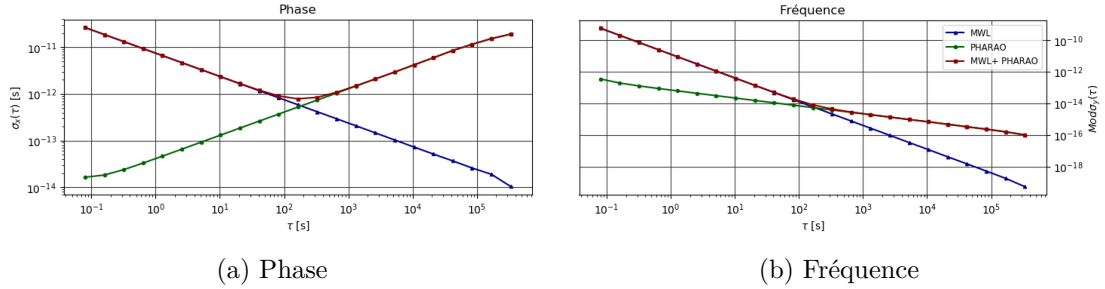


FIGURE 2.6 – Variance d'Allan temporelle (2.6a) et normale (2.6b) des bruits simulés.

La mission impliquera de nombreuses stations. En fonction de la configuration, cela pourra entrainer des comparaisons d'horloges en mode commun et il est donc nécessaire que le bruit de PHARAO soit généré de manière unique sur la totalité de la durée et à un pas de temps qui soit compatible avec l'ensemble des stations. Les contraintes du lien sont moindres puisque 4 canaux seront mis à disposition et le bruit sera considéré comme indépendant entre les différentes comparaisons.

### Discontinuité

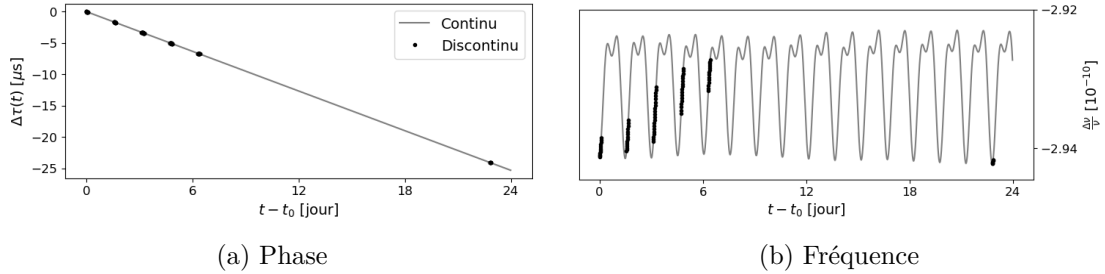


FIGURE 2.7 – Effet des discontinuités (en noir) sur les données (en gris).

L'altitude de l'ISS est maintenue entre 330 et 435km, avec une inclinaison de  $51.6^\circ$  par rapport au plan équatorial terrestre et une période de révolution d'environ 90 minutes. Par conséquent, la période de visibilité de l'ISS par une station sol est limitée à 6 ~ 7 passages d'une dizaine de minutes par jour séparés d'une heure et demi. Cela crée donc une importante discontinuité (voir figure 2.7) dans la comparaison des horloges : seul 3% des données sont disponibles par rapport au cas où la visibilité serait continue.

## 2.2 Logiciels

La première partie de mon travail de recherche a été de créer les logiciels de simulation et d'analyse pour réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel pour la mission ACES-PHARAO.

- 1 Le premier est utilisé pour simuler les données ACES-PHARAO en tenant compte de l'orbitographie de l'ISS et des bruits des horloges (PHARAO et stations au sol). Mon objectif était d'en faire un outil suffisamment réaliste pour pouvoir l'utiliser comme source du programme de d'analyse en attendant les "vraies" données.
- 2 Avant mon arrivée, un logiciel avait été développé pour convertir le temps propre de l'horloge PHARAO à bord en données qui seront transmises par le lien MWL.
- 3 Toujours avant mon arrivée, un logiciel avait été développé pour convertir les données du lien en désynchronisations entre horloges.
- 4 Enfin, j'ai principalement conçu le second logiciel servant à mesurer le décalage vers le rouge gravitationnel à partir des données simulées par (1), ou obtenus par (3) lorsque la mission aura débuté. Son objectif est de fournir la valeur et la contrainte sur le paramètre  $\alpha$  de violation de l'invariance locale de position.

Le logiciel (4) se place donc dans la continuité du travail engagé au SYRTE pour préparer la mission tandis que (1) était nécessaire afin de simuler les données en s'affranchissant des étapes intermédiaires fournies par (2) et (3).

### Système de référence et échelle de temps

Cette section présente succinctement les différents référentiels et échelles de temps, nécessaires pour exprimer les observables de la mission.

#### **ITRF : Système International de Référence Terrestre**

L'ITRF est une réalisation du système de référence terrestre international (ITRS). Les coordonnées ITRF correspondent aux coordonnées exprimées dans le référentiel tournant avec la croûte terrestre, son origine se trouvant au centre de la Terre. L'orientation de l'axe  $z$  de l'ITRF, qui est proche de l'axe de rotation de la Terre, varie par rapport au repère de référence céleste international (ICRF) par le biais de différents phénomènes.

- Précession-nutation : L'attraction gravitationnelle exercée par les corps du Système Solaire perturbe l'axe de rotation de la Terre. Ce phénomène est représenté sur la figure 2.8, en bleu le phénomène de précession de l'axe de rotation  $z$  (en vert) et en rouge le phénomène de nutation.
- Mouvement du pôle : La croûte terrestre n'étant pas directement liée à l'axe de rotation de la Terre, les différents courants terrestres (atmosphère, marée, magma) entraînent une perturbation de celui-ci.

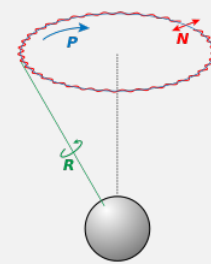


FIGURE 2.8 – Phénomène de précession (P) et de nutation (N)

Il définit un réseau de points situés à la surface de la Terre qui sert de référence pour évaluer les changements de la forme de la Terre : mouvement tectonique, affaissement des sols... Il est obtenu à l'aide des estimations des coordonnées et des vitesses d'un ensemble de stations terrestres observées par radio interférométrie à longue base (VLBI), télémétrie laser sur la Lune (LLR), mesure GNSS (GPS, Galileo...), télémétrie laser sur satellites (SLR) et mesures Doppler de positionnement satellitaire (DORIS).

**GCRS : Système Céleste Géocentrique** Le système de référence céleste géocentrique (GCRS) est un système de coordonnées standard (défini par l'IAU 2000) utilisé pour spécifier l'emplacement et les mouvements des objets proches de la Terre, tels que les satellites. Les coordonnées GCRS correspondent aux coordonnées données dans le référentiel non tournant, c'est à dire fixe avec des étoiles éloignées dont les variations des axes sont inférieures au dixième d'arc-seconde. Il permet, entre autre, d'assurer la navigation des satellites terrestres (GNSS : Galileo, GLONASS, GPS...) et les applications géophysiques qu'ils supportent.

**Changement de référentiel** La conversion de l'ITRF vers le GCRS est réalisée à l'aide de système de référence intermédiaire permettant de passer du référentiel fixe de la Terre à un référentiel terrestre tournant puis au référentiel spatial tournant avec la Terre. Le changement de référentiel de GCRS vers ITRF est réalisé par une matrice de transformation  $M$  telle que  $[A]_{ITRF} = M[A]_{GCRS} = WRQ[A]_{GCRS}$  avec  $M = WRQ$  où  $W$  est la matrice de transformation entre le référentiel ITRF et un référentiel où l'axe  $z$  est réellement l'axe de rotation de la Terre,  $R$  la matrice qui exprime cette angle dans un référentiel de passage et  $Q$  la matrice de transformation entre ce référentiel de passage et GCRS.

Le changement de référentiel inverse (ITRF vers GCRS) est celui qui nous intéresse et s'écrit  $[A]_{GCRS} = M^{-1}[A]_{ITRF} = Q^{-1}R^{-1}W^{-1}[A]_{ITRF}$ . Ces transformations sont assurées numériquement par un script Python développé par Frederic Meynadier et basé sur les routines SOFA/ERFA [9].

**Echelle de temps** A la suite du changement de référentiel ITRF vers GCRS, l'échelle de temps UTC (associée à ITRF) doit être convertie vers l'échelle de temps TCG (associée à GCRS). Il existe de nombreuses échelles de temps dépendant du référentiel choisi.

- Le Temps universel coordonné (UTC) est un standard international utilisé par l'ensemble des dispositifs civils.
  - Le Temps Universel 1 (UT1) est fondé sur la rotation de la Terre et est déterminé par l'observation de quasars.
  - Le Temps atomique international (TAI) est proche de l'échelle de temps coordonnée que donnerait une horloge sur le géoïde terrestre. Il est calculé par le BIPM en mettant en commun l'ensemble des horloges atomiques du globe.
  - Le Temps Coordonné Géocentrique (TCG) est le temps coordonné de GCRS.
- Les différentes échelles sont liées par :

- UTC et UT1 sont maintenues à moins de 0.9s l'une de l'autre en ajoutant quand il est nécessaire des secondes "intercalaires" :  $|t_{UTC} - t_{UT1}| < 0.9$ ,
  - UTC et TAI ont la même fréquence mais diffèrent d'un nombre entier  $n$  de secondes intercalaires (36 en 2016) :  $t_{UT1} = t_{TAI} - n$ ,
  - TAI et TCG diffèrent d'un facteur constant :  $\frac{dt_{TT}}{dt_{TCG}} = 1 - L_g$  avec  $L_g \sim 6.969 \times 10^{-10}$ , une constante définie pour une horloge au niveau de la mer.
- Il est donc possible de faire la conversion UTC-TCG en tenant compte des secondes intercalaires  $dt_{UTC}/dt_{TCG} = 1 - L_g$ .

### 2.2.1 Simulation des désynchronisations

Le premier logiciel (dont l'organigramme est représenté dans la figure 2.9) permet de générer les données de désynchronisations entre une horloge sol et PHARAO à partir de l'orbitographie de l'ISS ainsi que la position de la station sol.

Ce fichier d'orbitographie fournit la position et la vitesse de l'ISS exprimées dans l'ITRF sur l'échelle de temps UTC avec un pas de temps de 10 s. La position des stations est également définie dans l'ITRF et l'on peut donc artificiellement créer un fichier "d'orbitographie" de cette station en utilisant les instants définis dans le fichier d'orbitographie de l'ISS. Cette étape sert pour la suite du logiciel qui ne différencie pas une horloge au sol d'une horloge spatiale lors du calcul du temps propre dans GCRS.

L'étape suivante consiste à calculer le potentiel gravitationnel (voir ci-après pour le détail) des horloges et de convertir les positions/vitesses exprimées dans ITRF vers ces mêmes quantités exprimées dans GCRS. Cette étape est assurée par les bibliothèques Sofa/Erfa [9]. Le potentiel gravitationnel est calculé à partir des positions ITRF puisque cela permet de limiter à un unique calcul le potentiel des stations sols. A l'inverse du GCRS, la position dans ITRF ne change pas dans le temps pour une horloge sol. Pour calculer l'effet de relativité restreinte, les vitesses doivent être exprimées dans GCRS.

L'ensemble des étapes décrites sont traitées de la même manière que l'horloge soit PHARAO ou au sol. Il est alors possible de modéliser le temps propre  $\tau$  de chaque horloge à l'aide de l'effet relativiste (différence des vitesses au carré) et de l'effet gravitationnel (différence du potentiel). La différence relative de fréquence (la dérivée de l'équation 2.4) est calculée dans un premier temps puis intégrée pour obtenir la désynchronisation entre PHARAO et chaque horloge au sol.

Jusqu'ici, les données ne présentent pas de discontinuité, ce qui suppose (à tort) que l'ISS est visible de manière continue par une station sol. Pour réaliser le découpage, il faut tenir compte de l'angle d'élévation de l'ISS au dessus d'une station. En dessous de  $5^\circ$ , il n'est pas possible de comparer PHARAO avec une horloge au sol.

Pour atteindre la fréquence échantillonnage du lien MWL qui est à 80 ms (12.5 Hz), la fréquence des données doit être augmentée. Pour cela, il est nécessaire d'interpoler les données générées jusqu'ici.

La dernière étape consiste à ajouter le bruit de l'horloge PHARAO et le bruit du lien.

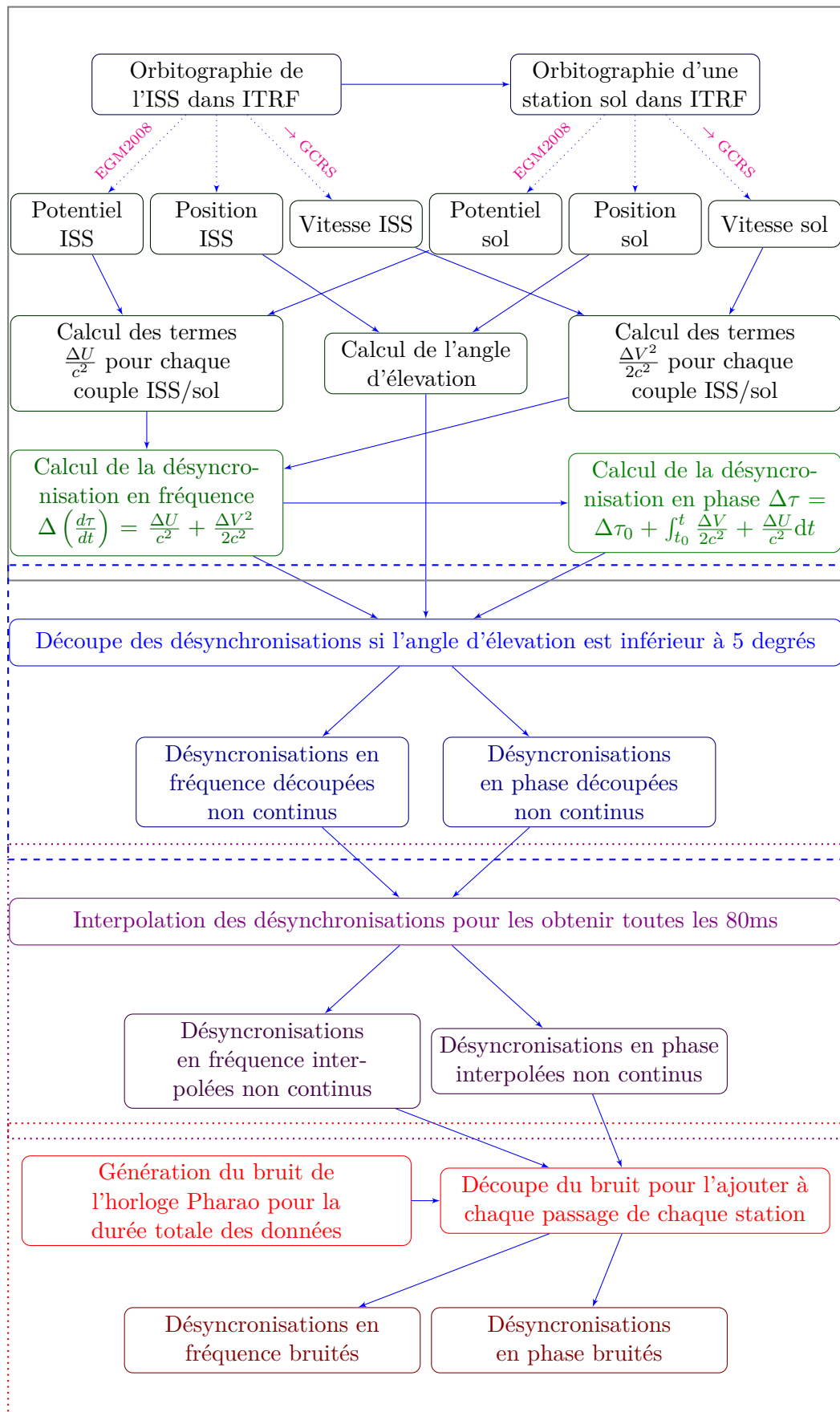


FIGURE 2.9 – Organigramme du logiciel de simulation

### Effet de relativité restreinte

Le fichier d'orbitographie de l'ISS est disponible au format SP3, qui fournit le temps dans l'échelle UTC mais également les positions et les vitesses exprimées dans l'ITRF. C'est également le cas des positions des horloges terrestres. Afin de modéliser la désynchronisation entre les horloges, les vitesses sont exprimées dans le GCRS. Les horloges au sol, immobiles dans l'ITRF, ont une vitesse non nulle dans le GCRS. La différence du carré des vitesses entre l'horloge sol et PHARAO permet de définir l'effet de relativité restreinte dans l'équation (2.3) pour un instant  $t_j$  :

$$-\frac{\Delta v^2(t, \vec{r}_e, \vec{r}_s)}{2c^2} = -\sum_{i=x,y,z} \frac{\left(v_{iGCRS}^{ISS}(t_j)\right)^2 - \left(v_{iGCRS}^{sol}(t_j)\right)^2}{2c^2} \quad (2.10)$$

La vitesse de l'ISS sur son orbite est de l'ordre de 7 km/s créant un effet de relativité restreinte de l'ordre de  $-3 \times 10^{-10}$ . L'horloge PHARAO (et tout astronaute à bord de l'ISS) "vieillit" moins vite qu'une horloge au sol si l'on ne considère que cet effet.

### Potentiel gravitationnel : EGM2008

Le modèle de géopotential choisi pour représenter le potentiel gravitationnel vu par les horloges est l'EGM2008 ("Earth Gravitational Model 2008" [10]). Il permet d'écrire le potentiel gravitationnel  $U$  de la Terre en tout point de l'ITRF à l'aide d'une décomposition en harmonique sphérique  $Y_{nm}$ . Chaque harmonique sphérique est associée à un coefficient  $C_{nm}$  qui introduit une altération du champ gravitationnel (représentée sur la figure 2.10).

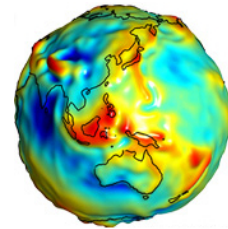


FIGURE 2.10 – Géopotential.

$$U(r, \phi, \lambda, N) = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n C_{nm} Y_{nm}(\phi, \lambda) \right) \quad (2.11)$$

avec  $G$  la constante gravitationnelle,  $M$  la masse de la Terre,  $r$  le rayon au point considéré,  $a$  un paramètre de normalisation de l'ordre du rayon de la Terre,  $\phi$  la longitude,  $\lambda$  la latitude et  $C_{nm}$  des coefficients obtenus expérimentalement.

Les harmoniques sphériques s'expriment via les polynômes de Legendre associés :

$$Y_{nm}(\phi, \lambda) = \underbrace{\frac{(-1)^m}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \phi)^n} \left( \left( (\cos \phi)^2 - 1 \right)^n \right)}_{P_{nm}(\cos \phi)} \begin{cases} \cos(m\lambda) & \text{si } m \geq 0 \\ \sin(|m|\lambda) & \text{si } m \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

La symétrie des polynômes de Legendre associés permet d'exprimer  $U$  tel que :

$$U(r, \phi, \lambda, N) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos \phi) \begin{bmatrix} C_{nm} \cos(m\lambda) \\ + S_{nm} \sin(m\lambda) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

avec  $C_{nm}$  (respectivement  $S_{nm}$ ) les coefficients pour la dépendance en cosinus (respectivement sinus) de la latitude  $\lambda$ .

On compte  $2n + 1$  coefficients pour une harmonique  $n$ . Ce qui donne  $\sum_{n=2}^{n_{max}} (2n + 1) = n_{max}(n_{max} + 2) - 3$  termes. Le nombre de coefficients croit de manière quadratique et atteint près de 5 millions de coefficients pour le modèle EGM2008 qui est développé à l'ordre 2190<sup>ème</sup>. Il est possible d'estimer la valeur des paramètres  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  en mettant en commun de très nombreuses expériences de différents types sur l'ensemble de la surface du globe et dans l'espace.

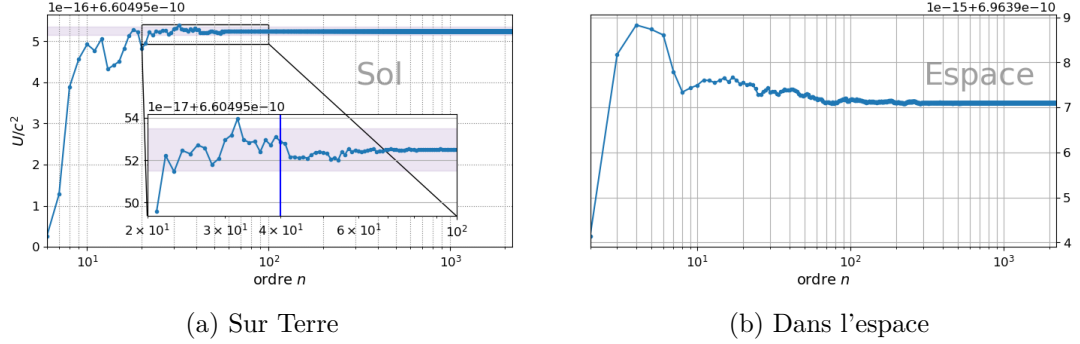


FIGURE 2.11 – Valeur du potentiel gravitationnel en fonction de l'ordre de développement.

Le grand nombre de paramètres implique un temps de calcul élevé lorsque l'ordre de développement est important. L'opération est réalisée à chaque point de l'orbitographie ( $\sim 8640$  par jour pour le fichier orbitographie de l'ISS). Afin de pouvoir modéliser le potentiel sur la durée de la mission, il est nécessaire de réduire le nombre de calcul du potentiel ou réduire l'ordre du potentiel.

Pour le calcul à la surface de la Terre, la totalité du développement est nécessaire pour reproduire fidèlement le potentiel d'une horloge au sol (figure 2.11a). Pour limiter le temps de calcul pour les stations sol, le potentiel est calculé seule fois à partir des positions des stations dans l'ITRF. Il est ensuite dupliqué sur la totalité de la mission. Pour PHARAO,  $(a/r) < 1$  puisque le potentiel est calculé à distance de la Terre, chaque terme de la somme va progressivement diminuer avec l'augmentation de l'ordre jusqu'au moment où les termes d'ordres élevés peuvent être négligés. Pour l'ISS à  $\sim 400$  km d'altitude, la valeur du potentiel se stabilise pour  $n > 200$  (2.11b). Le décalage vers le rouge gravitationnel à l'instant  $t_j$  est alors :

$$-\frac{\Delta U(t, \vec{r}_e, \vec{r}_s)}{c^2} = -\frac{U(\vec{r}_{ITRF}^{ISS}(t_j), 200) - U(\vec{r}_{ITRF}^{sol}(t_0), 2190)}{c^2} \quad (2.14)$$

Puisque la position d'une station au sol ne varie pas dans le temps dans ITRF, le potentiel est le même à tout instant, c'est pourquoi on a  $t_j = t_0$  dans le potentiel  $U(\vec{r}_{ITRF}^{sol}(t_0), 2190)$ .

Le décalage vers le rouge gravitationnel subi par les horloges est de l'ordre de  $+4 \times 10^{-11}$ . L'horloge PHARAO "vieillit" plus vite qu'une horloge au sol si l'on ne considère que l'effet gravitationnel. Etant donné que cet effet est un ordre de grandeur plus faible

que l'effet de relativité restreinte, la fréquence coordonnée de PHARAO est plus faible qu'une horloge sol.

### Intégration

Jusqu'ici les quantités calculées permettent de modéliser la différence relative de fréquence entre PHARAO et une horloge sol (somme des termes (2.10) et (2.14)). L'intégration de cette quantité permet d'obtenir la désynchronisation, qui est l'observable qui sera transmise lors de la mission.

### Découpage et interpolation

La période d'une heure et demi et l'inclinaison de l'orbite de l'ISS limitent à  $5 \sim 7$  passages par jour au dessus d'une station. De plus, le lien avec l'ISS ne peut être assuré que pour un angle d'élévation supérieur à  $5^\circ$ . Ce critère conditionne le découpage des données. L'angle d'élévation est calculé à partir de la position de l'ISS et de la station sol. Un masque de découpage crée des sets de données correspondant à des passages de 300 s pour chaque station.

Ensuite, une interpolation est réalisée pour passer du pas de temps du fichier d'orbithographie de l'ISS (10 s) au cycle de fonctionnement du lien MWL (80 ms). L'opération est réalisée après le découpage pour limiter la mémoire utilisée par le programme. L'ordre d'interpolation est paramétrable mais fixé actuellement une interpolation linéaire.

### Modélisation des bruits

Présentés précédemment, les bruits de la mission proviennent essentiellement de l'horloge PHARAO et du lien MWL. La subtilité pour l'implémentation du simulateur se trouve dans la manière de générer le bruit étant donné le découpage des données. Le bruit de l'horloge est un bruit continu qui est indépendant des passages de l'ISS au dessus d'une station. Il est donc simulé sur la totalité de la durée de la mission puis découpé. Le bruit du lien est un bruit qui est dépendant des passages de l'ISS au dessus d'une station. Il est donc simulé indépendamment sur chaque passage.

### Format des données simulées

Les données simulées modélisent donc la désynchronisation entre l'horloge PHARAO et une horloge au sol pour tout temps  $t_j$  de la mission :

$$\Delta\tau(t_j) = \Delta\tau_0 - (1 + \alpha) \int_{t_0}^{t_j} \frac{\Delta U}{c^2} dt - \int_{t_0}^{t_j} \frac{\Delta v^2}{2c^2} dt + \delta\tau^{(b)} \quad (2.15)$$

où  $\Delta\tau_0$  diffère pour chaque station sol mais reste le même pour chaque passage et  $\delta\tau^{(b)}$  correspond aux différents bruits.

Cette quantité est calculée pour toutes les horloges au sol et permet de fournir les données simulées de la mission. Il est également possible de simuler une violation du principe d'équivalence en imposant une valeur non nulle à  $\alpha$ .



### 2.2.2 Traitement

Le second logiciel servira au traitement et l'analyse des données de la mission. L'objectif est de fournir la matrice de modèle qui permettra à terme d'estimer la valeur du paramètre de violation de l'invariance locale de position  $\alpha$  et son incertitude  $\sigma_\alpha$ . Cette section correspond à la partie supérieure de l'organigramme Traitement/Analyse visible dans la figure 2.12.

#### Choix de l'observable

Afin d'estimer la valeur du paramètre, il a été choisi de réaliser une recherche nulle ("null-experiment"). Tous les effets théoriques connus sont retirés des données expérimentales  $\Delta\tau^e$  (et leur dérivée  $\Delta\nu^e/\nu$ ) pour créer l'observable  $Y_p$  (et sa dérivée  $Y_f$ ) :

$$Y_p(t_j) = \Delta\tau^e(t_j) + \int_{t_0}^{t_j} \frac{\Delta U}{c^2} dt + \int_{t_0}^{t_j} \frac{\Delta v^2}{2c^2} dt \quad Y_f(t_j) = \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)^e(t_j) + \frac{\Delta U(t_j)}{c^2} + \frac{\Delta v(t_j)^2}{2c^2} \quad (2.16)$$

En supposant que les effets de relativité générale et de relativité restreinte sont modélisés correctement, l'observable ne contient plus que le terme de violation du principe d'équivalence et le bruit en phase  $\delta\tau^{(b)}$  (et le bruit dérivé  $\delta\nu^{(b)}/\nu$ ) :

$$Y_p(t_j) \simeq \Delta\tau_0 - \alpha \int_{t_0}^{t_j} \frac{\Delta U}{c^2} dt + \delta\tau^{(b)} \quad Y_f(t_j) \simeq -\alpha \frac{\Delta U(t_j)}{c^2} + \left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)^{(b)} \quad (2.17)$$

#### Matrice de modèle

Etant donné la forme de l'observable  $Y$ , il est possible de définir le système linéaire qu'il suffit d'inverser pour obtenir  $\alpha$  :

$$Y_p = X_p \beta_p = \begin{pmatrix} -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Delta U}{c^2} dt & 1 \\ -\int_{t_0}^{t_2} \frac{\Delta U}{c^2} dt & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\int_{t_0}^{t_N} \frac{\Delta U}{c^2} dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \Delta\tau_0 \end{pmatrix} \quad Y_f = X_f \alpha = - \begin{pmatrix} \frac{\Delta U(t_1)}{c^2} \\ \frac{\Delta U(t_2)}{c^2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta U(t_N)}{c^2} \end{pmatrix} \alpha \quad (2.18)$$

La matrice  $X_p$  peut-être généralisée au cas impliquant l'ensemble des laboratoires. A des fins de concision, la notation ne tiendra compte que d'une station dans la suite du document.

#### Traitement $\simeq$ Simulation

Le cheminement suivi pour calculer les effets théoriques et pour ensuite créer la matrice de modèle se base sur les fonctions présentées dans la section Simulation. Comme pour la simulation, les fichiers en entrée sont l'orbitographie de l'ISS et la position des stations. La seule différence est l'utilisations des données simulées (ou expérimentales une fois la mission lancée). Le programme fournit finalement un fichier contenant les observables  $Y_p$  (ou  $Y_f$ ) et la matrice de modèle  $X_p$  (ou  $X_f$ ).

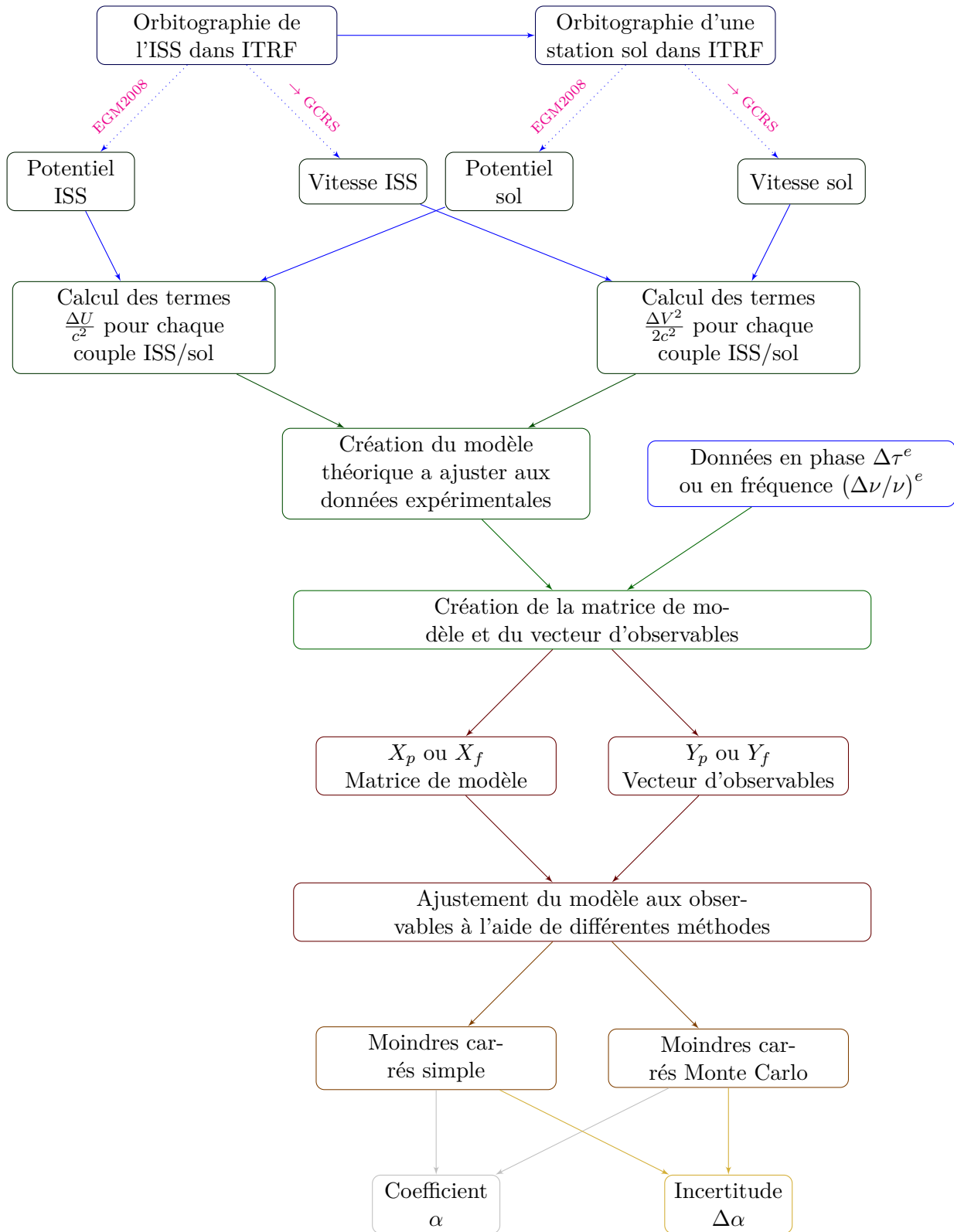


FIGURE 2.12 – Organigramme du logiciel de simulation

### 2.2.3 Analyse

La dernière partie du logiciel a pour objectif d'obtenir la valeur et l'incertitude du paramètre  $\alpha$ . Cette section correspond à la partie inférieure de l'organigramme ci-dessus.

#### Enjeu

Afin d'estimer le paramètre  $\alpha$  sans erreur, il est important de ne pas biaiser notre analyse tout en conservant une estimation réaliste de l'incertitude du paramètre. Un biais pourrait artificiellement donner une valeur non nulle qui serait alors interprétée comme une violation de l'invariance locale de position. Pour des raisons d'efficacité qui seront détaillées ci-après, nous avons concentré notre effort sur la méthode des moindres carrés parmi la pléthore de techniques d'analyse.

#### Moindres carrés ordinaire

Afin d'inverser le système linéaire de (2.18), on choisit dans un premier temps la méthode des moindres carrés ordinaire. Cette méthode est rapide, efficace et permet d'obtenir un résultat sans développer une artillerie statistique lourde. Il reste néanmoins limité à l'analyse de données pour laquelle le bruit est blanc. La méthode étant similaire pour l'étude en phase (indice  $p$ ) ou en fréquence (indice  $f$ ), on considère ici le cas général où :

- $X$  une matrice de dimension  $n \times k$  où  $k$  est le nombre de paramètres dont dépendent les  $n$  observables disponibles. Dans le cas de notre modèle en phase, il s'agit d'une matrice contenant le terme gravitationnel en phase dans la première colonne et 1 dans la seconde colonne. En fréquence, il s'agit d'un vecteur contenant le terme gravitationnel en fréquence.
- $y$  un vecteur de dimension  $n$  contenant les observables.
- $\epsilon$  le vecteur de bruits de dimension  $n$ . Supposé blanc pour une méthode des moindres carrés ordinaire, le bruit est d'espérance nulle  $E[\epsilon] = 0$  et a une matrice de variance diagonale  $E[\epsilon\epsilon^T] = \sigma^2 I$  avec  $I$  la matrice identité et  $\sigma$  l'écart-type du bruit blanc.
- $\beta$  un vecteur de dimension  $k$  contenant les paramètres libres. Pour la phase,  $\beta$  contient  $\alpha$  qui est le paramètre recherché et  $\Delta\tau_0$  la désynchronisation initiale entre les horloges. Pour la fréquence,  $\beta$  est simplement  $\alpha$ .

Dans ces conditions, le système s'écrit simplement :

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (2.19)$$

La méthode des moindres carrés permet d'obtenir l'estimateur  $\hat{\beta}$  qui contient la valeur optimale des paramètres recherchés. Cet estimateur permet de définir le vecteur de résidus  $e$  :

$$e = Y - X\hat{\beta} \quad (2.20)$$

La somme carré des résidus  $e^T e$  est donnée par :

$$e^T e = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) = Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y - Y^T X \hat{\beta} + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} \quad (2.21)$$

La minimisation de cette quantité est équivalente à la minimisation recherchée dans les méthodes de  $\chi^2$  [11] et permet d'obtenir l'estimateur  $\hat{\beta}$  :

$$\frac{\partial (e^T e)}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Leftrightarrow -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.22)$$

A l'estimateur, il est utile d'ajouter la matrice de variance-covariance qui permet d'estimer l'incertitude des paramètres. Pour cela on calcule :

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = E \left[ (\hat{\beta} - \beta) (\hat{\beta} - \beta)^T \right] = E \left[ (X^T X)^{-1} X^T \epsilon \epsilon^T X (X^T X)^{-1} \right] \quad (2.23)$$

En supposant que la matrice de modèle  $X$  n'a aucune composante stochastique et en rappelant  $E[\epsilon \epsilon^T] = \sigma^2 I$ , la méthode ordinaire se résume donc à :

$$\hat{\beta}^{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad \left( \sigma_{\hat{\beta}}^{LS} \right)^2 = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (2.24)$$

La méthode des moindres carrés ordinaire permet donc d'estimer directement la valeur moyenne des paramètres recherchés à l'aide de l'estimateur  $\hat{\beta}$  et leur incertitude à l'aide de  $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$ .

### Moindre carrés généralisés

La méthode des moindres carrés généralisés est une extension de la méthode ordinaire pour intégrer les bruits colorés. Dans notre cadre, le bruit est d'origine multiple et de différentes couleurs. La matrice de variance-covariance de la méthode ordinaire entraîne généralement une sous-estimation de l'incertitude sur les paramètres, que l'on cherche absolument à éviter pour la mission. Afin de pallier ce problème, la méthode généralisée nécessite l'ajout d'une matrice de covariance du bruit  $\Omega$ . Cela suppose la connaissance parfaite de l'ensemble des bruits intervenant dans le système. Dans ces conditions, l'estimateur et la matrice de variance-covariance de l'estimateur deviennent :

$$\hat{\beta}^{GLS} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} Y \quad \left( \sigma_{\hat{\beta}}^{GLS} \right)^2 = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} \quad (2.25)$$

L'estimateur est à nouveau non biaisé et la matrice de variance-covariance permet d'atteindre la limite de Cramer-Rao[12], meilleure estimation possible de l'incertitude d'un paramètre.

Cependant, cette méthode présente des limites de taille. Tout d'abord, il est nécessaire de connaître la structure du bruit en amont afin de modéliser la matrice  $\Omega$ . En supposant que cette matrice est connue, pour obtenir  $\hat{\beta}$  et  $\sigma_{\hat{\beta}}$ , il est nécessaire d'inverser  $\Omega$  qui est une matrice  $n \times n$  où  $n$  est le nombre de données. Dans le cadre de la mission ACES-PHARAO, on attend  $n \sim 10^7$  rendant toute inversion numérique impossible.

En ne considérant que le bruit dominant de la mission, il s'avère possible de calculer et d'inverser analytiquement cette matrice et ceci nous a permis de valider les différentes méthodes d'analyse (voir ci-après).

### Moindres carrés Monte Carlo

Afin de s'affranchir des limites de mémoire et pour tenir compte des bruits colorés, la méthode des moindres carrés Monte Carlo est une technique hybride qui permet de tirer le meilleur des deux méthodes présentées précédemment. En effet, la méthode ordinaire n'est pas optimale dans le cas du bruit non blanc de la mission et la méthode générale est trop gourmande en ressources numérique étant donné le nombre important de points. On peut cependant supposer que si l'on dispose d'un nombre important de sessions d'observations, la valeur d'un paramètre ajusté sur chaque réalisation de bruit doit suivre une distribution de probabilité centrée sur la "vraie" valeur de ce paramètre.

L'idée de cette méthode est de simuler numériquement un grand nombre de fois le bruit qui est attendu sur le système (soit à partir des spécifications, soit à partir du bruit constaté sur les données réelles) et d'appliquer la méthode des moindres carrés ordinaire sur chaque réalisation. En faisant cela, on sonde l'ensemble des valeurs possibles de l'estimateur  $\hat{\beta}$  en raison du bruit. Pour les différentes générations de bruit  $\epsilon_i$ , on obtient un ensemble d'estimation  $\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_N\}$ . La moyenne de cet ensemble donne la valeur moyenne effective  $\hat{\beta}_\epsilon^{LSMC}$  qui provient du bruit.

Le bruit de la mission est gaussien (et dérivé de bruit blanc) et corrélé (bruits colorés). Sa moyenne est alors nulle ( $E[\epsilon] = 0$ ) et l'estimateur est non biaisé ( $E[\beta^{LS} - \beta] = 0$ ). Dans ces conditions,  $\hat{\beta}_\epsilon^{LSMC} = 0$ . En prenant l'écart-type de la série d'estimation, on obtient l'écart-type  $\sigma_{\hat{\beta}}$  de l'estimateur en tenant compte du bruit coloré. On utilise enfin la méthode des moindres carrés ordinaire pour estimer la valeur réelle des paramètres  $\hat{\beta}^{LS}$  provenant des données expérimentales.

Mathématiquement on peut formuler la méthode de la manière suivante. Le bruit  $\epsilon$  est simulé un nombre  $N_{MC}$  de fois et le modèle  $X$  est ajusté dans chaque génération du bruit  $\epsilon_i$ . L'estimateur de la méthode ordinaire (2.24) au bruit. On obtient alors un vecteur contenant l'ensemble des estimateurs  $M_{\hat{\beta}}$  pour les différentes simulations de bruit. La moyenne de ce vecteur est nulle et permet de vérifier que l'estimateur OLS est non biaisé. Il est ensuite possible de définir la matrice de variance-covariance de l'ensemble tel que  $\sigma_{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j} = E[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j]$ . On obtient finalement :

$$\hat{\beta}^{LSMC} = \hat{\beta}^{LS} + \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \hat{\beta}_i = \hat{\beta}^{LS} \quad \sigma_{\hat{\beta}}^{LSMC} = 1/N_{MC} \left( M_{\hat{\beta}}^T M_{\hat{\beta}} \right)^{-1} \quad (2.26)$$

#### 2.2.4 Limites

Pour l'instant, le logiciel est limité à une analyse utilisant les méthodes de moindres carrés, mais il pourrait facilement être étendu à une analyse bayésienne puisque la matrice de modèle et le vecteur d'observables sont déjà disponibles. Cette méthode pourrait marginalement améliorer l'estimation du paramètre  $\alpha$  en tenant compte de l'information a-priori de certains paramètres ou des propriétés du bruit. Bien sur, l'analyse n'intègre pas les effets systématiques. Pour remédier à cela, il faudra attendre les données de la mission. Mis à part des ajustements sur le format, le logiciel est prêt pour estimer la valeur réelle et l'incertitude statistique du test de décalage vers le rouge gravitationnel dès lors que les données sont disponibles.

## 2.3 Résultats

### 2.3.1 Données simulées

Pour obtenir les résultats présentés ci-après, les données ont été simulées sur une durée de 12 jours pour la station de l'Observatoire de Paris. Le fichier d'orbitographie de l'ISS a été fourni par Oliver Montenbruck et correspond à une période de 12 jours ininterrompue au début de l'année 2006. L'ordre du développement du géopotential est 2190 pour les stations et 200 pour PHARAO. Le niveau de bruit simulé est celui présenté précédemment. Dans ces conditions, l'incertitude obtenue sur le paramètre  $\alpha$  est :

$$\sigma_\alpha = 2.9 \times 10^{-6} \quad (2.27)$$

Ce résultat est du même ordre que l'incertitude attendue due aux effets systématiques de PHARAO (2.5) en supposant ceux-ci à  $10^{-16}$  en fréquence relative. Cette incertitude statistique sert de référence par la suite pour expliquer l'ensemble des résultats intermédiaires nécessaires à son obtention.

### 2.3.2 GLS vs LSMC

Le premier objectif était de valider le choix fait quant à la méthode d'analyse. Comme présenté ci-dessus, le choix se porte sur deux méthodes de moindres carrés : généralisés (GLS) et Monte Carlo (LSMC).

La comparaison a porté sur les données en phase et en fréquence, pour une unique station (Paris). La limite de la mémoire RAM disponible au laboratoire nous contraint à approximer le GLS lorsque la durée des données dépassent une journée.

- GLS numérique exacte (NGLS) : pour un nombre de points correspondant à une journée, il est possible de simuler et d'inverser numériquement la matrice de covariance  $\Omega$ .
- GLS analytique approximé (AGLS) : pour une durée plus longue, il n'est plus possible de simuler  $\Omega$  et il est nécessaire d'utiliser une approche analytique. En ne considérant que le bruit de PHARAO qui est dominant à long terme et grâce à la discontinuité des données, il nous a été possible d'obtenir une formule analytique pour  $\Omega^{-1}$  couvrant la totalité des 12 jours (voir annexe 6.2).

Le tableau suivant présente les résultats obtenus en phase :

Durée	1 jour		12 jours	
	LSMC	NGLS	LSMC	AGLS
$\sigma_\alpha$	$1.0 \times 10^{-5}$	$9.6 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-6}$	$2.7 \times 10^{-6}$
$\sigma_{\Delta\tau_0}$ (s)	$7.2 \times 10^{-12}$	$8.4 \times 10^{-13}$	$3.4 \times 10^{-11}$	$2.8 \times 10^{-14}$
$\text{Cor}[\alpha, \Delta\tau_0]$	-0.05	-0.03	-0.19	$-5.8 \times 10^{-8}$

TABLE 2.1 – Comparaison des méthodes LSMC et NGLS pour une durée d'un jour et LSMC et AGLS pour 12 jours.

L'incertitude sur  $\alpha$  obtenue par LSMC est relativement proche de celle obtenue par GLS mais reste toujours supérieure étant donné que le GLS est le meilleur estimateur possible. La méthode GLS bien que théoriquement meilleure se base sur une forme numérique pour des durées courtes ou sur une forme analytique approximée pour des durées longues. Le choix de la méthode LSMC est justifié et reste une estimation conservatrice (différence relative inférieure à 10%) de l'incertitude du paramètre  $\alpha$ . Elle combine donc la rapidité de la méthode ordinaire ce qui permet de l'utiliser pour un volume important de données et l'efficacité de la méthode générale qui permet de prendre en compte des bruits colorés (ou non). L'estimation de la valeur de  $\alpha$  sera faite avec la méthode des moindres carrés ordinaire puisque son estimateur est non biaisé (voir section 2.2.3).

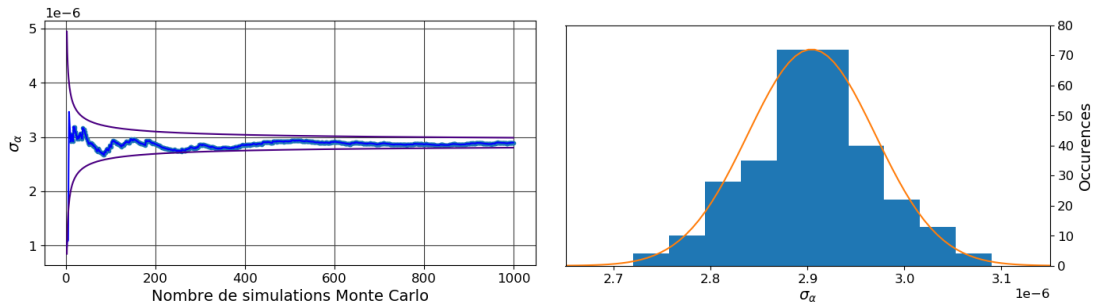


FIGURE 2.13 – Incertitude  $\sigma_\alpha$  en fonction du nombre  $N_{MC}$  de simulations Monte Carlo et histogramme de  $\sigma_\alpha$  pour 300 réalisations de 1000 simulations Monte Carlo.

Cependant, la méthode Monte Carlo reste une méthode statistique qui peut comporter une certaine incertitude intrinsèque. Afin de la caractériser, un nombre important de simulations a été réalisé afin de l'estimer. Comme on peut le constater dans la figure 2.13, l'incertitude introduite sur  $\sigma_\alpha$  par le LSMC pour 1000 simulations forme un histogramme gaussien dont la largeur est de  $\sigma_\sigma = 0.07 \times 10^{-6}$ . L'erreur relative introduite par le LSMC sur l'incertitude du paramètre  $\alpha$  est de l'ordre de 3%.

### 2.3.3 Phase contre Fréquence

Les données de la mission attendues sont des désynchronisations. Les données en phases sont alors affectées d'un bruit blanc provenant du lien et d'un bruit de marche aléatoire provenant de l'horloge. Ce dernier est limitant aux durées considérées pour réaliser le test du principe d'équivalence. En théorie, il serait donc intéressant de dériver les données en phase pour obtenir des données en fréquence dont le bruit dominant est blanc. Cette approche permettrait de se limiter à l'utilisation de la méthode des moindres carrés ordinaire. C'est dans cet optique qu'une comparaison entre les résultats des données en fréquence et en phase a été réalisé.

Pour cela, les données sont simulées pour une station sur 12 jours en utilisant le LSMC comme méthode d'analyse. Les premiers résultats obtenus (première ligne du tableau 2.2) laissent entendre que les données en phase conduisent à une incertitude près de deux ordres de grandeur meilleure que les données en fréquence.

Données	Paramètre	Fréquence	Phase
Réalistes	$\alpha$	$(0.3 \pm 4.9) \times 10^{-4}$	$(0.9 \pm 2.8) \times 10^{-6}$
	$\Delta\tau_0$ (s)		$-1.8 \times 10^{-7} \pm 3.3 \times 10^{-11}$
Continues	$\alpha$	$(2.9 \pm 3.1) \times 10^{-6}$	$(0.9 \pm 2.9) \times 10^{-6}$
	$\Delta\tau_0$ (s)		$-8.8 \times 10^{-9} \pm 3.7 \times 10^{-11}$
Premier et dernier passages	$\alpha$	$(-1.2 \pm 2.8) \times 10^{-3}$	$(1.5 \pm 2.6) \times 10^{-6}$
	$\Delta\tau_0$ (s)		$-1.8 \times 10^{-7} \pm 1.2 \times 10^{-12}$

TABLE 2.2 – Résultats du test du décalage vers le rouge gravitationnel pour une station sur une durée de 12 jours pour des données en phase et en fréquence. Trois cas de figure sont considérés : réaliste (données discontinues avec 68 passages de l’ISS au dessus de la station OPMT), continu (données continues pendant 12 jours), premier et dernier passages (séparé d’environ 12 jours). Ceci correspond à  $3 \times 10^5$ ,  $10^7$  et  $9 \times 10^3$  points.

En théorie, l’analyse par moindres carrés d’une quantité et ses dérivées (ou intégrales) est censée donner les mêmes résultats.

Pour expliquer cette différence, il est nécessaire de modifier la distribution des données. Pour cela, des données sont simulées sans discontinuité et les résultats sont présentés sur la ligne du milieu du tableau 2.2. Cette hypothèse, irréaliste, suppose que les horloges peuvent être comparées sans interruption sur la totalité des 12 jours. On peut observer que l’incertitude obtenue en phase ne change pas significativement par rapport au cas réaliste. Cependant, les données en fréquence donnent des résultats bien meilleurs et compatibles avec les données en phase. Ce changement indique une forte sensibilité des résultats à la discontinuité des données.

Pour confirmer cette suspicion, le dernier test repose sur l’utilisation du premier et du dernier passages de l’ISS au dessus de la station OPMT. Les deux passages sont séparés de 12 jours. La dernière ligne du tableau 2.2 montre que les résultats en fréquence se dégradent de plus d’un ordre de grandeur par rapport au cas réaliste tandis que les résultats en phase sont sensiblement les mêmes.

Ces différences s’expliquent essentiellement par la forme du modèle qui diffère entre les données en phase et en fréquence.

- Les données en phase correspondent à l’ajustement de l’intégrale de l’effet gravitationnel dans le bruit de l’horloge PHARAOnt directeur  $(Y(t_0 + T) - Y(t_0)) / (T + t_0 - t_0)$  est proportionnel à  $\alpha$ . Cette droite est ajustée dans le bruit de marche aléatoire (MA) de l’horloge (figure 2.14a) dont l’écart-type est proportionnel au temps écoulé  $\sigma_{MA} \propto \sigma\sqrt{T}$ . L’incertitude sur le paramètre  $\alpha$  est donc proportionnel à l’inverse de la racine du temps écoulé :

$$\sigma_\alpha \propto \frac{Y(t_0 + T) - Y(t_0)}{t_0 + T - t_0} \simeq \frac{\sigma_{MA}}{T} = \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \quad (2.28)$$

- Les données en fréquence correspondent à l’ajustement de l’effet gravitationnel dans le bruit de l’horloge. Le modèle (figure 2.14d) correspond au niveau moyen de l’effet gravitationnel  $\langle \Delta U / c^2 \rangle$  ajusté dans le bruit blanc de fréquence de l’horloge



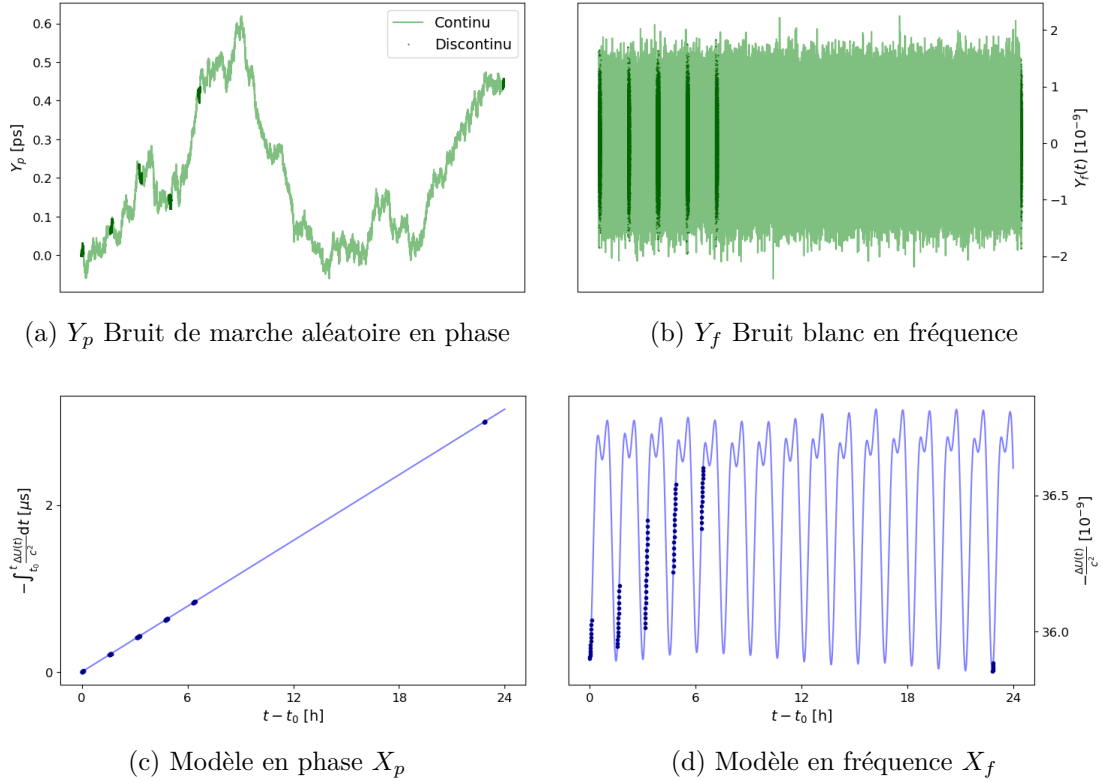


FIGURE 2.14 – L’observable (2.14a ou 2.14b) en absence de violation du principe d’équivalence ( $\alpha = 0$ ) correspond à un bruit. Le modèle (2.14c ou 2.14d) est ajusté sur les observables afin d’estimer la valeur de ce paramètre.

(figure 2.14b) dont l’écart-type est inversement proportionnel à la racine du nombre de points  $\propto \sigma/\sqrt{N}$ . L’incertitude sur le paramètre  $\alpha$  est donc proportionnel à l’inverse de la racine du nombre de points  $\sigma_\alpha \propto \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \propto \frac{\sigma}{f_v \sqrt{T}}$  où  $f_v$  est le taux de visibilité de l’ISS pour une station sol.

Bien que les deux formules soient en apparence équivalentes, l’estimation en phase ne dépend pas du taux de visibilité et est donc insensible à la discontinuité des données. L’estimation en fréquence est elle extrêmement sensible au nombre de points, donc à la discontinuité. Dans le cas de la mission,  $f_v \sim 3\%$ . Cette approche, bien qu’approximée, reproduit correctement les résultats obtenus numériquement :

- le cas réaliste et le cas "premier-dernier passages" désavantagent l’analyse en fréquence puisque le nombre de points diminuent par rapport au cas continu.
- Le cas continu ne favorise aucune analyse lorsque l’on ajuste un modèle sur une quantité ou la dérivée de ce modèle sur la dérivé de cette quantité.

Cette dégradation est en partie due à la perte d’information qu’entraîne la dérivation des désynchronisation. L’offset entre les passages est perdu et pénalise fortement l’analyse en fréquence. C’est pourquoi l’analyse en phase sera privilégiée.

### 2.3.4 Nombre de stations

Une des clés de la mission est la présence d'un nombre important d'horloges qui pourront être comparées à PHARAO. Comme nous avons pu le voir dans la partie précédente, l'incertitude obtenue pour une station est en accord avec les spécifications attendues pour la mission. La question est de savoir si ce résultat peut-être amélioré par l'ajout des stations présentées dans la table 2.3).

Label	Laboratoire	Localisation	$\lambda$ (°)	$\phi$ (°)	h (m)
OPMT	OBSPM	Paris, FR	48.8	2.3	124.2
PTBB	PTB	Braunschweig, DE	52.3	10.5	130.2
HERS	NPL	Hailsham, UK	50.9	0.3	76.5
NISU	NIST	Boulder, US	40.0	-105.3	1648.5
TABL	JPL	Wrightwood, US	34.4	-117.7	2228.0
MTKA	NICT	Mitaka, JP	35.7	139.6	109.0
IENG	INRIM	Torino, IT	45.0	7.6	316.6
GRAS	OCA	Caussols, FR	43.8	6.9	1319.3
TSKB	GSI	Tsukuba, JP	36.1	140.1	67.3
PERT	UWA	Perth, AU	-31.8	115.9	12.9

TABLE 2.3 – Latitude, longitude et altitude des stations

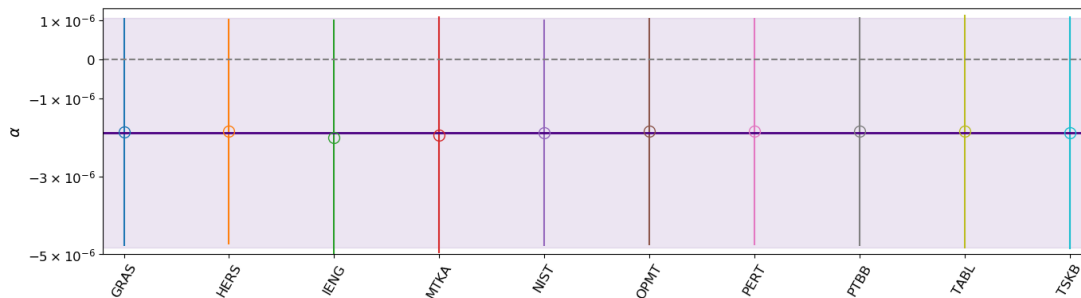


FIGURE 2.15 – Incertitudes sur le paramètre  $\alpha$  pour chaque station (barres d'erreur en couleur) et pour un ajustement global (violet). Le trait pointillé permet de vérifier que les valeurs sont compatibles avec zéro et donc non significatives.

Les résultats de l'analyse sont reportés dans la figure 2.15. L'ensemble des stations conduisent à la même incertitude sur le paramètre  $\alpha$  (barres d'erreur en couleur sur la figure). L'ajustement global (en violet) n'améliore pas l'estimation. Ce résultat s'explique par le même raisonnement que pour la différence phase/fréquence. La contrainte est d'autant plus faible que la durée entre le premier et le dernier passages est importante. L'ajout des stations n'allonge pas la durée de la mission mais ajoute des points entre les deux passages. L'utilisation de plusieurs stations n'a donc d'intérêt que lors d'une analyse en fréquence.

L'incertitude statistique sur le paramètre  $\alpha$  ne dépend donc pas du nombre de stations et le test du décalage vers le rouge gravitationnel pourrait donc être réalisé avec

une unique station. Cependant, pour les autres objectifs scientifiques, l'utilisation de l'ensemble du réseau permettra d'assurer une efficacité et une robustesse nécessaire. Pour le test du décalage vers le rouge, cela permettra d'identifier et de s'affranchir d'éventuels effets systématiques propres aux stations individuelles.

### 2.3.5 Durée de la mission

L'incertitude statistique obtenue avec le fichier d'orbitographie de 12 jours ( $2.9 \times 10^{-6}$ ) reste plus importante que l'objectif de la mission  $\sigma_\alpha^{sys} \sim 2 \times 10^{-6}$  (voir équation (2.5)). Comme on a pu le voir dans les sections précédentes, l'incertitude sur le paramètre  $\alpha$  diminue avec la durée de la mission. Il existe donc une durée pour laquelle il est possible d'atteindre l'incertitude "systématique"  $\sigma_\alpha^{sys}$ , voire d'obtenir une incertitude statistique inférieure  $\sigma_\alpha^{sys}$  afin de n'être limité que par les effets systématiques.

Pour estimer la meilleure incertitude statistique accessible, les données simulées sont tronquées en durée multiple d'une journée (d'un jour à 12 jours). La figure 2.16 représente l'incertitude pour chaque set de données en fonction de la durée entre le premier et le dernier point.

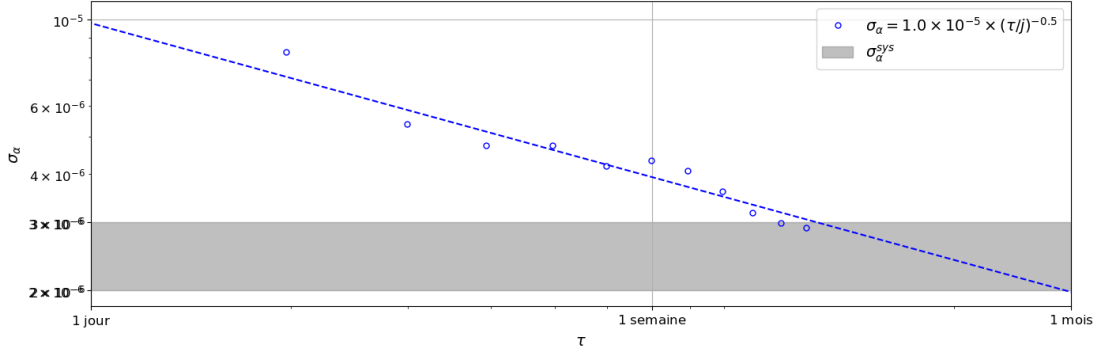


FIGURE 2.16 – Evolution de l'incertitude  $\sigma_\alpha$  sur le paramètre  $\alpha$  en fonction de la durée  $\tau$  des données. La zone grisée correspond à l'incertitude systématique attendue pour la mission.

L'ajustement d'une loi de puissance (en pointillé bleu) donne :

$$\sigma_\alpha = 1.0 \times 10^{-5} \times \left( \frac{\tau}{\text{jour}} \right)^{-0.51} \quad (2.29)$$

L'évolution de  $\sigma_\alpha$  comme l'inverse de la racine de la durée est en accord avec l'équation (2.28). En considérant une session de 25 jours, il est possible d'atteindre  $2 \times 10^{-6}$  ce qui correspond à la meilleure incertitude systématique attendue pour la mission.

En réalité, les données seront disponibles sur des durées ne dépassant pas 20 jours et seront réparties irrégulièrement sur les 18 mois à 3 ans de la mission. Pour atteindre la limite imposée par les effets systématiques de PHARAO, il sera nécessaire de combiner plusieurs sessions indépendantes afin d'atteindre une incertitude statistique de  $2 \times 10^{-6}$ .

### 2.3.6 Dégradation de l'orbitographie

Le décalage vers le rouge gravitationnel dépend de la position de l'ISS. Une imprécision sur l'orbitographie pourrait créer un effet systématique sur l'estimation du paramètre  $\alpha$  qui serait interprété comme une violation du principe d'équivalence.

L'effet dominant dans le calcul du potentiel (2.13) est inversement proportionnel au rayon de l'orbite ( $U \sim GM/r$ ). En considérant que l'incertitude sur  $\alpha$  évolue de la même manière, pour assurer une incertitude inférieure à  $2 \times 10^{-6}$ , l'erreur sur l'orbitographie doit être inférieure à  $\sim 1$  m pour une altitude de  $\sim 400$  km.

Cette question a été traitée analytiquement et numériquement dans [13] à partir de deux modèles d'orbitographie différents. L'erreur d'orbitographie qu'ils obtiennent est moins contraignante ( $\sim 10$  m) puisqu'une erreur sur le rayon de l'orbite induit une erreur sur l'effet Doppler qui est en partie compensée par l'erreur sur l'effet gravitationnel.

Dans une analyse sur le premier niveau de logiciel d'analyse de la mission [3], mes collègues ont évalué l'impact d'une erreur d'orbitographie sur le transfert de temps via le MWL. Ils ont montré qu'une erreur inférieure à 1 km n'impacterait pas le transfert de temps avec le MWL, ce qui confirme les estimations faites par [13].

Nous avons réalisé la même analyse numérique pour l'effet gravitationnel. Pour évaluer l'effet d'une erreur d'orbitographie, le fichier d'orbitographie est numériquement détérioré. Pour cela, deux fichiers d'orbitographie sont nécessaires : le premier (POD) a la meilleure précision atteignable actuellement tandis que le deuxième (OD) a une moins bonne précision (voir [3] pour plus de détails). La différence entre les positions des deux fichiers  $\vec{r}_{OD} - \vec{r}_{POD}$  est une estimation réaliste de l'erreur sur l'orbitographie. La différence de la norme des positions entre les deux est représentée sur la figure 2.17. L'écart-type est de l'ordre de  $\sim 30$  cm, compatible avec les exigences de la mission. Le fichier POD est utilisé afin de simuler les données qui sont ensuite analysées avec le fichier d'orbitographie dégradée d'un facteur  $k = \pm 10^n$  (avec  $n$  variant de 0 à 5 par pas de 1), tel que

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{POD} + k (\vec{r}_{OD} - \vec{r}_{POD}) \quad (2.30)$$

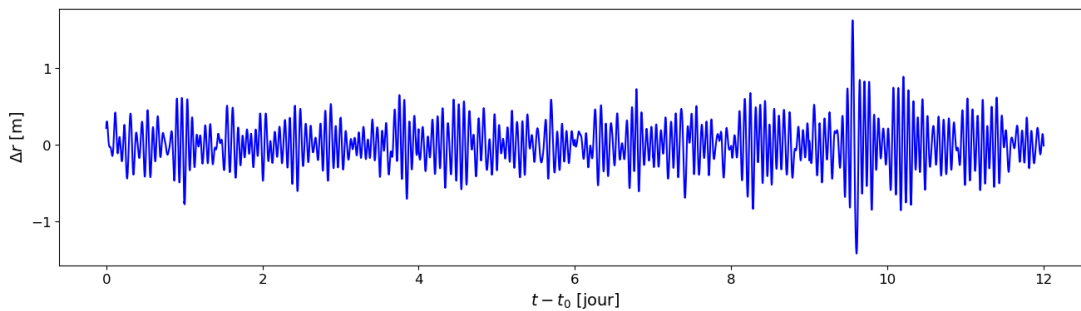


FIGURE 2.17 – Erreur réaliste sur le position de l'ISS  $\Delta r = r_{OD} - r_{POD}$  entre les fichiers d'orbitographie POD et OD.

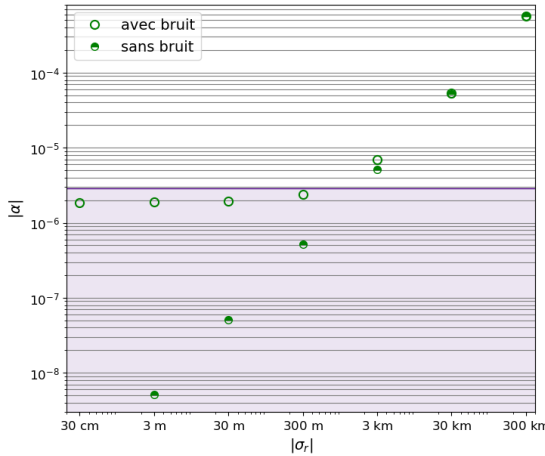


FIGURE 2.18 – Valeur absolue du paramètre  $\alpha$  estimé à partir des différentes orbitographies dégradées. Les simulations ont été réalisées avec (cercle vide) ou sans (cercle rempli) bruit. La ligne violette correspond à l’incertitude statistique qui délimite la limite pour laquelle les valeurs sont significatives ou non.

La simulation et l’analyse sont réalisées pour les données en phase de station OPMT. Etant donné que cet effet est systématique, le facteur de détérioration  $k$  de l’orbitographie n’a aucun effet sur l’incertitude statistique sur  $\alpha$  qui est considérée égale à  $2.9 \times 10^{-6}$  par la suite. Les valeurs du paramètre  $\alpha$  sont représentés dans la figure 2.18. On constate qu’une détérioration supérieure à  $k > 10^3$  induit un biais systématique conduisant à une valeur du paramètre  $\alpha$  plus importante que l’incertitude statistique. Cette analyse a également été réalisée en absence de bruit et l’on observe une augmentation linéaire du biais qui dépasse à nouveau l’incertitude pour  $k > 5 \times 10^2$ . Ce facteur correspond à un écart-type sur l’erreur de l’orbitographie de  $\sim 100$  m.

L’effet de l’erreur d’orbitographie peut être visualisée à l’aide de la variance d’Allan sur la figure 2.19. Le bruit de PHARAO est représenté par la ligne noire. L’effet pour les différents niveaux de dégradation sont représentés en couleur. Toute courbe dépassant le bruit de PHARAO introduit un effet systématique au temps  $\tau$  correspondant. Pour réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel, il est nécessaire d’intégrer sur durée  $\tau$  allant de 10-20 jours (ce qui est légèrement au delà de la fin de l’axe des abscisses de la figure). On observe alors que la courbe violette ( $k = 10^3$ ) se superpose au bruit de PHARAO, ce qui sous-entend qu’un biais est probable pour une erreur de l’ordre de 100 m sur la position de l’ISS. Cette représentation est en accord avec les résultats obtenus précédemment. La structure de la variance d’Allan présente une bosse à la demi-période orbitale ce qui implique que l’erreur d’orbitographie dépend de la fréquence orbitale comme on peut le voir sur la figure 2.17. En modélisant cette erreur comme un effet sinusoïdale d’amplitude  $\sqrt{2}\sigma_r$ , on obtient la courbe cyan. Les minimas sont aux multiples de la période orbitale et sont en accord avec les résultats obtenus à partir de simulations numériques. L’amplitude des maxima diminue comme l’inverse du temps  $\tau$  ce qui reproduit la décroissance des simulations numériques.

On en conclut donc que l’erreur maximale autorisée sur l’orbitographie doit être inférieure à  $\sim 100$  m afin d’assurer une incertitude sur le test du principe d’équivalence au niveau de  $2 \times 10^{-6}$ . Dans les conditions actuelles, l’erreur est seulement de  $\sim 30$  cm, ce qui n’introduira pas de biais.

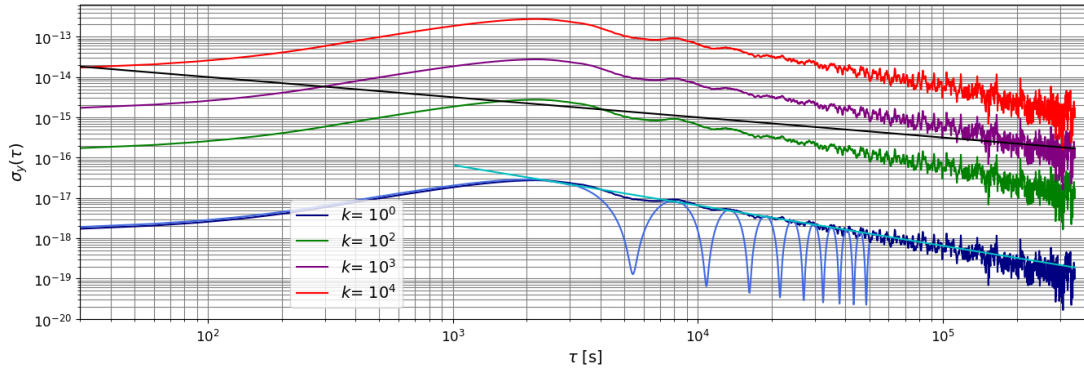


FIGURE 2.19 – Variance d’Allan du biais introduit sur l’effet gravitationnel  $-GM(1/r_k - 1/r_{\text{POD}})/c^2$  où  $r_k$  est la norme du vecteur position de l’ISS avec une orbitographie dégradée d’un facteur  $k$ . La ligne noire représente le niveau de bruit de PHARAO. Pour le cas  $k = 1$ , le tracé bleu représente la variance d’Allan obtenue pour une erreur d’orbitographie sinusoïdale à la période 5400s et une amplitude de  $\sqrt{2}\sigma_r \simeq 42$  cm. La ligne cyan évolue comme l’inverse du temps  $\tau$  et passe par les maxima de la ligne bleue.

Ce constat ne s’applique pas aux autres objectifs scientifiques. Si ceux-ci nécessitent que l’effet gravitationnel soit inférieur à la stabilité de PHARAO à tout temps d’intégration, le facteur  $k$  doit être égal à 80 ce qui correspond à une erreur de  $\sim 24$ m. Ce résultat est en accord avec l’ordre de grandeur obtenu dans [13].

### 2.3.7 Lien GNSS

Parmi les nombreux retards accumulés dans la mission, le lien MWL est actuellement la technologie qui empêche un lancement imminent. Dans l’éventualité où le lien ne marcherait pas, il pourrait être question de comparer les horloges à l’aide d’un lien assuré par les satellites GNSS visibles depuis l’ISS. L’avantage principal serait la possibilité de comparer PHARAO aux horloges au sol en quasi-continu grâce à la constellation GNSS. En effet, chaque station terrestre voit au moins quatre satellites GNSS à tout instant. Ceux-ci sont en communication avec l’ensemble de la constellation et permettent d’établir un lien avec PHARAO à l’aide de l’antenne GNSS. Malheureusement, l’emplacement du module ACES sur l’ISS est tel qu’il réduit la visibilité des satellites GNSS, créant des interruptions aléatoire du lien.

L’amélioration de la méthode de positionnement ponctuel précis (PPP) [14] permet de résoudre une partie de l’ambiguïté de phase avec la méthode de positionnement ponctuel précis intégré (IPPP) [15], améliorant grandement le niveau de bruit de ce type de lien mais il reste supérieur à celui du MWL. Malgré tout, si le niveau de bruit du lien GNSS reste plus faible que celui de PHARAO à long terme, il pourrait être considéré comme remplaçant d’un MWL défaillant.

Grâce au logiciel développé lors de ma thèse, la faisabilité du test de décalage vers le rouge gravitationnel peut être évaluée dans le cas d’une comparaison d’horloge assurée

par lien GNSS avec la méthode IPPP.

**Lien continu** Pour simuler la performance nécessaire pour réaliser le test, on suppose que le bruit du lien GNSS est un bruit flicker (bruit rose) de phase d'écart-type d'Allan modifié  $3 \times 10^{-11}/\tau$  [15]. Les données sont simulées en supposant que les satellites GNSS permettent d'assurer une comparaison en continu à l'aide de liens inter-satellites. Pour une durée de 12 jours, l'incertitude obtenue pour le lien GNSS atteint  $2.9 \times 10^{-6}$  et est égale à celle obtenue par MWL. Etant dominant à long terme, le bruit de PHARAO est le facteur limitant et ceci explique l'équivalence entre les deux liens. Grâce à la continuité de la comparaison des horloges, le lien GNSS permet d'ailleurs d'obtenir une incertitude en fréquence équivalente à celle en phase (voir section 2.3.3).

**Lien interrompu et durée minimale de mission** Dans ces conditions idéales, il serait donc possible de réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel au même niveau qu'avec le MWL. Cependant, la visibilité de l'antenne GNSS est limitée par l'encombrement de l'ISS dans l'environnement du module ACES et cela entraîne des interruptions aléatoires dans la comparaison. Ces interruptions sont pour l'instant mal caractérisées et on suppose que le lien est affecté à raison de 2 interruptions par jour pour une durée moyenne de 5 minutes. Pour évaluer l'impact de ces discontinuités du lien, les données sont simulées avec (cas "discontinu") ou sans (cas "continu") interruptions.

Afin d'estimer la durée de la mission nécessaire pour atteindre l'incertitude attendue, on reproduit l'approche faite dans la section 2.3.5. Le fichier d'orbitographie n'est plus issu d'un réel suivi de l'ISS mais d'une simulation qui permet d'atteindre une durée de 20 jours. En analysant les données sur des durées variant de 1 à 20 jours, on obtient les résultats de la figure 2.20.

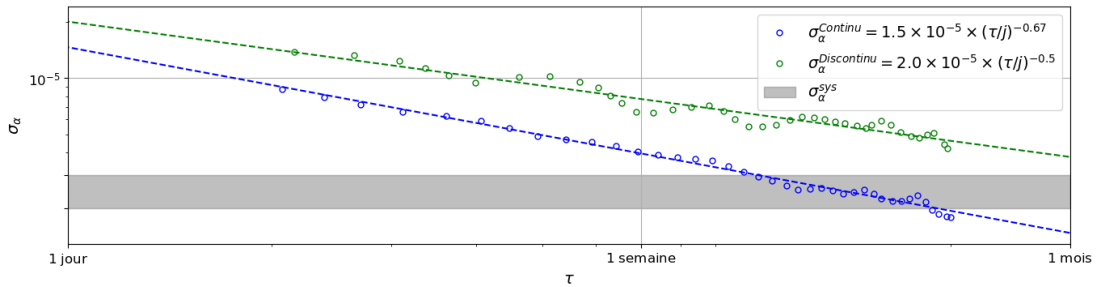


FIGURE 2.20 – Incertitude en fonction de la durée de la mission lorsque le lien est assuré par une constellation de satellites GNSS. Le cas idéal (en bleu) correspond à un lien ininterrompu sur la durée de la mission. Le second cas (en vert) correspond au lien qui subit des interruptions aléatoires à raison de 2 par jours pour une durée approximative de 5 minutes. La zone grisée correspond à l'incertitude systématique attendue  $\sigma_{\alpha}^{sys}$ .

On observe (en vert sur la figure 2.20) que l'interruption des données dégrade l'estimation du paramètre par rapport au cas continu (en bleu). Il faudrait alors une session de 30 jours pour compenser l'effet des interruptions aléatoires affectant le lien GNSS.

En supposant que les interruptions ne sont pas plus importantes ou plus longues, l'utilisation du lien GNSS pour comparer les horloges et réaliser le test est très loin

d'être idéale bien que réalisable. Ce résultat reste sujet aux hypothèses faites ci-dessus. Les performances de l'IPPP sont caractérisées avec des récepteurs immobiles au sol et avec une bonne visibilité des constellations GNSS. Il reste encore à démontrer que ce niveau de performance est atteignable par le récepteur GNSS à bord d'ACES sur l'ISS.



## 2.4 Conclusion

En supposant que les effets systématiques de l’horloge PHARAO ne dépassent pas  $10^{-16}$  sur la différence relative de fréquence, la mission permettra de tester l’invariance locale de position en mesurant le décalage vers le rouge gravitationnel avec une incertitude systématique de  $\sim 2 - 3 \times 10^{-6}$ . Le travail de recherche que j’ai réalisé lors de ma thèse a permis de confirmer que l’incertitude statistique atteindra ce niveau en utilisant plusieurs sessions de mesure indépendantes de plusieurs jours. Ce résultat a pu être obtenu suite à la création de logiciels de simulation, de traitement et d’analyse. Ils seront utilisés lorsque les données de la mission ACES-PHARAO seront disponibles.

### 2.4.1 Résultats principaux

L’implémentation du logiciel nous a également permis de tester la robustesse de la mission face aux fortes discontinuités des données, aux différentes sources de bruit et aux erreurs d’orbitographie :

- Le faible taux de données ( $\sim 3\%$ ) rapporté à la durée de la mission empêche l’analyse des données en fréquence mais ne contraint pas l’analyse des données en phases qui sont les observables attendues pour la mission,
- En supposant que le bruit de PHARAO est toujours dominant après 12 jours (taille limite du fichier d’orbitographie utilisé actuellement), l’incertitude décroît avec la durée de la session. Quelques sessions expérimentales d’une durée de 10 à 20 jours seront suffisantes pour obtenir une incertitude de  $2 \times 10^{-6}$ .
- Le type de bruit permet également de n’utiliser qu’une unique station pour obtenir l’incertitude statistique. Afin d’assurer la robustesse de la mission, l’ensemble des stations sera utilisé afin de créer de la redondance, d’éviter des avaries techniques et de mieux contrôler d’éventuels effets systématiques propres à chaque stations.
- Le test ne sera pas biaisé par une erreur orbitale sur la position de l’ISS tant que celle-ci est inférieure à  $\sim 100\text{m}$ . Cette erreur se moyenne sur le long terme et n’affecte pas la mesure du décalage vers le rouge gravitationnel qui utilise la totalité des données. Une erreur de cette amplitude pourrait cependant avoir une répercussion sur les autres produits scientifiques de la mission.
- Le lien MWL qui fait pour l’instant défaut au lancement de la mission pourrait être remplacé par un lien entre ACES et les satellites des constellations GNSS.

### 2.4.2 Perspectives

Outre les résultats qui s’appliquent au cadre de la mission ACES-PHARAO, le logiciel créé dans le cadre de cette thèse est modulaire et pourrait être utilisé pour d’autres missions spatiales comparant des horloges en orbite. Les méthodes statistiques utilisées dans la section analyse du programme sont agnostiques aux modèles et observables fournies. Le logiciel peut donc être utilisé par ailleurs.

Modulo quelques changements de dernière minute, le logiciel est donc prêt et attend des données pour réaliser le test du décalage gravitationnel de la relativité générale au niveau défini dans le cadre de la mission.

## Bibliographie ACES-PHARAO

- [1] Philippe LAURENT et al. “The ACES/PHARAO space mission”. In : *Comptes Rendus Physique* 16.5 (2015). The measurement of time / La mesure du temps, p. 540-552. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2015.05.002> (cf. p. 43).
- [2] T HOBIGER et al. “Combining GPS and VLBI for inter-continental frequency transfer”. In : *Metrologia* 52.2 (2015), p. 251-261. DOI : [10.1088/0026-1394/52/2/251](https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/2/251) (cf. p. 44).
- [3] F MEYNADIER et al. “Atomic clock ensemble in space (ACES) data analysis”. In : *Classical and Quantum Gravity* 35.3 (2018), p. 035018. DOI : [10.1088/1361-6382/aaa279](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aaa279) (cf. p. 45, 69).
- [4] Clifford M. WILL. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, 2018. DOI : [10.1017/9781316338612](https://doi.org/10.1017/9781316338612) (cf. p. 46).
- [5] Peter WOLF et Luc BLANCHET. “Analysis of Sun/Moon gravitational redshift tests with the STE-QUEST space mission”. In : *Classical and Quantum Gravity* 33.3 (2016), p. 035012. DOI : [10.1088/0264-9381/33/3/035012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/3/035012) (cf. p. 46).
- [6] R. V. POUND et G. A. REBKA. “Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance”. In : *Phys. Rev. Lett.* 3 (9 1959), p. 439-441. DOI : [10.1103/PhysRevLett.3.439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.439) (cf. p. 46).
- [7] Masao TAKAMOTO et al. “Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks”. In : *Nature Photonics* 14.7 (2020), p. 411-415. DOI : [10.1038/s41566-020-0619-8](https://doi.org/10.1038/s41566-020-0619-8) (cf. p. 46).
- [8] P. DELVA et al. “Gravitational Redshift Test Using Eccentric Galileo Satellites”. In : *Phys. Rev. Lett.* 121 (23 2018), p. 231101. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.231101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.231101) (cf. p. 46).
- [9] Sergio Pascual ERIK TOLLERUD Marten van Kerkwijk. *ERFA*. <https://github.com/liberfa/erfa>. 2019 (cf. p. 52, 53).
- [10] Nikolaos K. PAVLIS et al. “The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)”. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 117.B4 (2012). DOI : [10.1029/2011JB008916](https://doi.org/10.1029/2011JB008916). eprint : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2011JB008916> (cf. p. 55).
- [11] William H. PRESS et al. *Numerical Recipes in C (2nd Ed.) : The Art of Scientific Computing*. USA : Cambridge University Press, 1992 (cf. p. 61).
- [12] Silvère BONNABEL et Axel BARRAU. “An intrinsic Cramér-Rao bound on SO (3) for (dynamic) attitude filtering”. In : *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2015, p. 2158-2163 (cf. p. 61).
- [13] Loïc DUCHAYNE. “Transfert de temps de haute performance : le lien micro-onde de la mission ACES”. Thèse de doctorat dirigée par Dimarcq, Noël et Wolf, Peter Astronomie et astrophysique Observatoire de Paris 2008. Thèse de doct. 2008, 1 vol.(XII-300 p.) (Cf. p. 69, 71).

- [14] S. BISNATH et Y. GAO. “Current State of Precise Point Positioning and Future Prospects and Limitations”. In : *Observing our Changing Earth*. Sous la dir. de Michael G. SIDERIS. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009, p. 615-623 (cf. p. 71).
- [15] Gérard PETIT et al. “10-16frequency transfer by GPS PPP with integer ambiguity resolution”. In : *Metrologia* 52.2 (2015), p. 301-309. DOI : 10.1088/0026-1394/52/2/301 (cf. p. 71, 72).

## Chapitre 3

# L'expérience DAMNED

Ce second chapitre présente le travail que j'ai réalisé pour rechercher de la matière noire à l'Observatoire de Paris avec l'expérience DAMNED.

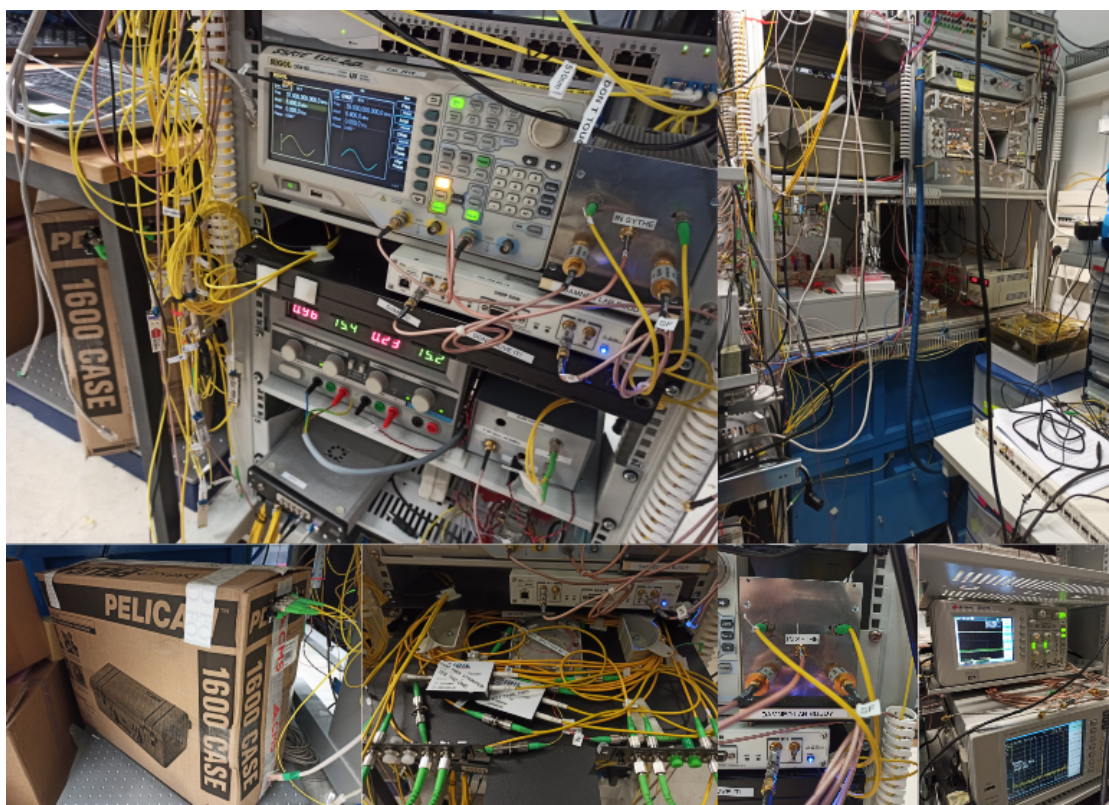


FIGURE 3.1 – Vue générale des différents éléments composant l'expérience DAMNED.

---

**Table des matières - DAMNED**


---

<b>3.1</b>	<b>Présentation de l'expérience DAMNED . . . . .</b>	<b>79</b>
3.1.1	Tableau des valeurs numérique . . . . .	80
<b>3.2</b>	<b>Champ scalaire ultra-léger de matière noire . . . . .</b>	<b>81</b>
3.2.1	Champ scalaire oscillant - relativité générale . . . . .	81
3.2.2	Champ scalaire de matière noire . . . . .	85
3.2.3	Couplage matière noire/matière normale - modèle standard . . . . .	86
3.2.4	Oscillation des constantes fondamentales . . . . .	88
3.2.5	Champ scalaire stochastique . . . . .	89
3.2.6	Relaxation cosmologique et matière noire . . . . .	93
3.2.7	Résumé . . . . .	95
3.2.8	Limites existantes . . . . .	95
3.2.9	Mesure simultanée contre mesure différée . . . . .	97
<b>3.3</b>	<b>L'expérience DAMNED . . . . .</b>	<b>99</b>
3.3.1	Concept de l'expérience . . . . .	99
3.3.2	Evolution de l'expérience . . . . .	104
3.3.3	Transformée de Fourier discrète . . . . .	111
3.3.4	Modélisation du bruit de la cavité . . . . .	114
3.3.5	Effets systématiques . . . . .	116
3.3.6	Résumé . . . . .	122
<b>3.4</b>	<b>Modélisation de l'effet de matière noire sur DAMNED . . . . .</b>	<b>123</b>
3.4.1	Résonance de la cavité . . . . .	123
3.4.2	Finesse de la cavité . . . . .	130
3.4.3	Effet de la matière noire sur la délai optique . . . . .	136
3.4.4	Effet de la matière noire sur DAMNED . . . . .	138
<b>3.5</b>	<b>Analyse des données . . . . .</b>	<b>140</b>
3.5.1	Nombre de paramètres à ajuster . . . . .	140
3.5.2	Vraisemblance bayésienne . . . . .	142
3.5.3	Application dans le cas de DAMNED . . . . .	148
<b>3.6</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>151</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion et perspectives . . . . .</b>	<b>152</b>
3.7.1	Etapas . . . . .	152
3.7.2	Perspectives . . . . .	153
	<b>Bibliographie DAMNED . . . . .</b>	<b>154</b>

---

## 3.1 Présentation de l'expérience DAMNED

La question de l'origine et la composition de la matière noire est l'une des grandes énigmes de la physique actuelle (voir la section 1.4 de l'introduction). De nombreuses théories existent à différentes échelles de masse et un effort international est nécessaire pour espérer trouver une signature de cette matière.

**Contexte** L'équipe Théorie du laboratoire SYRTE a joué son rôle en comparant des horloges atomiques sur plusieurs années [1]. Les théories de champs scalaire ultra-léger (section 3.2) prédisent en effet la variation de la différence de fréquence de ces horloges en raison de l'oscillation des constantes fondamentales de la physique. Cette variation spatio-temporelle est recherchée activement par la communauté scientifique avec de nombreux dispositifs.

L'étude des horloges atomiques du SYRTE [1] est à l'origine de l'intérêt porté à la matière noire par notre équipe. Naturellement, ce contexte a conduit à l'élaboration d'une expérience dédiée à la recherche de matière noire. L'objectif d'une telle expérience était de profiter du savoir-faire propre au laboratoire et d'utiliser les ressources technologiques disponibles à l'Observatoire de Paris pour rechercher un signal de matière noire dans un domaine non étudié précédemment.

**DAMNED** Le second projet de recherche de ma thèse correspond à l'ensemble des étapes qui ont permis de créer l'expérience DAMNED (pour "Dark Matter from Non-Equal Delays"), de la modéliser et d'analyser ses données pour obtenir des contraintes sur un modèle de matière noire. Cette expérience repose essentiellement sur l'expertise du laboratoire concernant des cavités ultrastables et des liens fibrés. Le concept permet de réaliser une mesure différée (3.2) qui permet de créer de nouvelles sensibilités au couplage de la matière normale avec la matière noire.

Rapidement, avec la mise en place de l'expérience et son optimisation continue (section 3.3), les attentes apportées à cette approche ont permis d'atteindre un niveau de sensibilité suffisant pour espérer détecter un signal de matière noire. Après deux sessions d'acquisition de longue durée et l'analyse minutieuse des effets systématiques, aucun signal de matière noire n'a vraisemblablement pu être détecté.

Après avoir caractérisé la sensibilité de l'expérience, il a fallu modéliser l'effet de la matière noire sur les différents éléments du dispositif 3.4. Cette étape a révélé de nombreuses ramifications théoriques qui ont renforcé le couplage du champ scalaire avec l'expérience.

Le développement d'une méthode numérique d'inférence Bayésienne a été possible par l'utilisation astucieuse des propriétés du signal de matière noire recherché 3.5.

Grâce à ce logiciel dédié, de nouvelles contraintes sur le modèle de matière noire ont pu être fixées et ainsi améliorer les résultats d'autres expériences 3.6.

### 3.1.1 Tableau des valeurs numérique

Pour faciliter la lecture, les quantités numériques utilisées pour caractériser l'effet de la matière noire sur l'expérience DAMNED sont reportées dans le tableau 3.1.

Quantité	Symbole	Valeur	Unité
Constante fondamentale			
Constante gravitationnelle	$G$	$6.674 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}$
Vitesse de la lumière	$c$	299792458	$\text{m}/\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34}$	$\text{m}^2 \text{ kg} / \text{s}$
Théorie			
Densité de matière noire locale	$\rho_{DM}$	0.4	$\text{GeV}/\text{cm}^3$
Vitesse du Soleil dans la galaxie	$v_{\odot}$	230	$\text{km}/\text{s}$
Vitesse de dispersion du halo	$\sigma_v$	150	$\text{km}/\text{s}$
Constante de Hubble	$H$	$2 \times 10^{-18}$	$\text{s}^{-1}$
Expérience			
Longueur d'onde du laser	$\lambda$	1.5	$\mu\text{m}$
Fréquence du laser	$f_0$	194	$\text{THz}$
Longueur de la cavité	$l_0$	10	$\text{cm}$
Fréquence d'échantillonnage	$f_s$	500	$\text{kHz}$
Nombre total de points acquis	$N$	$2^{39}$	
Durée d'une session d'acquisition	$T_{exp}$	1099511	$\text{s}$
Nombre de points par bloc	$n_m$	$2^{27}$	
Résolution spectrale après découpage	$\Delta f$	3.7	$\text{mHz}$
Longueur de la fibre optique 1	$L_0$	52.64	$\text{km}$
Longueur de la fibre optique 2	$L_0$	56.09	$\text{km}$
Modélisation			
Cavité			
Module d'Young du verre ULE	$E_{ULE}$	67.6	$\text{GPa}$
Densité du verre ULE	$\rho_{ULE}$	2210	$\text{kg}/\text{m}^3$
Fréquence de résonance	$f_r$	27.653	$\text{kHz}$
Facteur de qualité	$Q_1$	$6.1 \times 10^4$	
Finesse	$\mathcal{F}$	$8 \times 10^5$	
Temps aller retour d'un photon	$\tau_0$	334	$\text{ps}$
Coefficient de réflexion des miroirs	$r$	$1 - 2 \times 10^{-6}$	
Fibre			
Coefficient de dispersion	$\omega_0/n_0 \partial n/\partial \omega$	$10^{-2}$	
Module d'Young du verre ULE	$E_{ULE}$	20	$\text{GPa}$
Densité du verre ULE	$\rho_{ULE}$	2500	$\text{kg}/\text{m}^3$
Fréquence de résonance (50 km)	$f_r$	30	$\text{mHz}$

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif des valeurs numériques de l'expérience DAMNED.

## 3.2 Champ scalaire ultra-léger de matière noire

Avant de présenter l'expérience DAMNED en détails, il est nécessaire de la placer dans le contexte théorique qui a servi à rechercher un signal de matière noire. Celui-ci se caractérise par l'oscillation des constantes fondamentales issu du couplage de la matière noire avec la matière usuelle. Ces oscillations sont créées par un champ scalaire ultra-léger. Ce champ agit à la fois sur la relativité générale et sur le modèle standard et introduit le couplage recherché par l'expérience. Cette section présente le cheminement théorique reliant l'action fondamentale des théories de champ scalaire aux oscillations des constantes que l'on retrouve dans le modèle de matière noire qui a été étudié dans le cadre de ma thèse.

Les théories de champ scalaire se basent sur une action permettant de lier relativité générale, modèle standard et un champ scalaire  $\varphi$  :

$$S = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{c} \int \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left( R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) d^4x \quad \text{RELATIVITÉ GÉNÉRALE} \\ & + \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}^{SM}(g_{\mu\nu}, \Psi) - \mathcal{L}_\varphi^{SM}(g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi) \right) \quad \text{MODÈLE STANDARD} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

- La première ligne de cette équation correspond à l'action de la relativité générale (représentée ici par le scalaire de Ricci  $R$ ) à laquelle sont ajoutées l'énergie cinétique et l'énergie potentielle associées au champ scalaire  $\varphi$ . Comme détaillé ci-après, ce terme est à l'origine de l'oscillation du champ scalaire.
- La seconde ligne correspond à l'action du modèle standard (représenté par le lagrangien  $\mathcal{L}^{SM}$ ) à laquelle est ajouté le lagrangien de couplage du champ scalaire. Comme détaillé ci-après, ce terme est à l'origine du couplage du champ aux constantes fondamentales et par conséquent de la matière usuelle avec la matière noire.

Le reste des termes présents dans chaque action sera défini dans les sections correspondantes.

### 3.2.1 Champ scalaire oscillant - relativité générale

En relativité générale, l'action se limite à l'intégrale du scalaire de Ricci  $R$  sur les quatre coordonnées d'espace-temps  $x$  régies par la métrique  $g_{\mu\nu}$  :

$$S^{RG} = \frac{1}{c} \int \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} R d^4x \quad (3.2)$$

où  $g = \det(g_{\mu\nu})$  et  $\kappa = 8\pi G/c^4$ .

Les théories de champ scalaire ajoutent l'énergie cinétique et potentielle d'un champ scalaire  $\varphi$  à ce scalaire de Ricci  $R$  et modifient ainsi les équations de la relativité générale. En utilisant le principe de moindre action et en résolvant les équations de Klein-Gordon issues de l'action, il est possible de démontrer que le champ scalaire  $\varphi$  oscille dans le temps.



### Lagrangien d'un champ scalaire

En mécanique classique, le lagrangien s'exprime communément comme la somme de l'énergie cinétique ( $1/2m\dot{q}^2$ ) qui dépend de la vitesse  $\dot{q}$  et de l'énergie potentielle ( $V(q)$ ) d'un système qui dépend de la position  $q$ . En théorie classique des champs, le lagrangien est semblable pour le champ scalaire  $\varphi$ . Il fait apparaître l'opérateur  $\nabla$  de dérivation spatiale et le potentiel  $V(\varphi)$  du champ :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) \quad (3.3)$$

On peut exprimer  $\mathcal{L}$  dans la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  à l'aide des opérateurs de dérivations  $\partial_\mu$  :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - V(\varphi) \quad (3.4)$$

En intégrant cette quantité sur les coordonnées d'espace-temps d'une métrique  $g$  quelconque, on retrouve la définition de l'action associée au lagrangien du champ scalaire qui apparaît dans l'équation (3.1) :

$$S_\varphi = -\frac{1}{c} \int \underbrace{\sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa} \left( 2g^{\mu\nu} (\partial_\mu\varphi) (\partial_\nu\varphi) + V(\varphi) \right)}_{\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)} d^4x \quad (3.5)$$

### Evolution du champ scalaire

Cette section a pour but de démontrer l'oscillation du champ scalaire comme conséquence du couplage de la relativité générale avec ce même champ. L'action de la relativité générale  $S^{RG}$  est à l'origine des équations de champ d'Einstein (1.2). En ajoutant l'action du champ scalaire, l'action effective de la relativité générale  $S_{eff}^{RG}$  est :

$$S_{eff}^{RG} = S^{RG} + S_\varphi^{RG} = \frac{1}{c} \int \underbrace{\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left( R - 2g^{\mu\nu} (\partial_\mu\varphi) (\partial_\nu\varphi) - V(\varphi) \right)}_{\mathcal{L}_{eff}^{RG}(\varphi, \partial_\mu\varphi)} d^4x \quad (3.6)$$

où l'on définit le lagrangien effectif de la relativité générale  $\mathcal{L}_{eff}^{RG}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$  qui interviendra par la suite.

### Principe de moindre action

Afin de résoudre une équation faisant intervenir une action, on utilise le principe de moindre action qui impose la minimiser l'action. Une variation  $\Delta S$  de celle ci par rapport à une quantité choisie (ici  $\varphi$ ) se doit d'être nulle. Dans le cas général

où le lagrangien  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$  dépend de  $\varphi$  et  $\partial_\mu\varphi$ , on a la variation de l'action  $\delta S$  :

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \partial_\mu \varphi \right) d^4 x = 0 \quad (3.7)$$

En intégrant par partie ( $\int uv' = [uv] - \int u'v$ ) le second terme ( $u = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi)$  et  $v' = \delta \partial_\mu \varphi$ ), on obtient :

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right) d^4 x + \sum_{\mu=0}^3 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right]_{x_0^\mu}^{x_N^\mu} \quad (3.8)$$

Afin d'assurer la conservation de l'énergie, l'intégrale d'action doit être convergente. Pour cela, il est nécessaire que  $\delta \varphi$  s'annule à l'infini. Par conséquent, le dernier terme de l'équation (3.8) s'annule. En appliquant le principe de moindre action, on retrouve l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (3.9)$$

### Equation de Klein Gordon

L'évolution du champ scalaire est obtenue en appliquant le principe de moindre action dans l'espace-temps homogène et isotrope à grande échelle de notre Univers que l'on représente à l'aide de la métrique Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) définie comme :

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -c^2, a(t)^2, a(t)^2, a(t)^2 \right) \quad (3.10)$$

En utilisant la définition de  $\mathcal{L}_{eff}^{RG}$  dans (3.6) et avec  $\sqrt{-g} = a(t)^3$  on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}^{RG}}{\partial \varphi} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} = -a(t)^3 \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}^{RG}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = -\sqrt{-g} 4 g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi = -2a(t)^3 g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \end{cases} \quad (3.11)$$

Le principe de moindre action est appliqué grâce à l'équation d'Euler-Lagrange (3.9) et donne alors :

$$-a(t)^3 \frac{\partial V}{\partial \varphi} + 2 \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \left( a(t)^3 g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right) = 0 \quad (3.12)$$

On néglige ici la variation spatiale du champ scalaire ( $\partial_{x,y,z}\varphi = 0$ ) à laquelle l'expérience DAMNED n'est pas sensible en raison de sa faible envergure :

$$-a(t)^3 \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2c^2 \partial_t \left( a(t)^3 \partial_t \varphi \right) = 2c^2 \left( 3a(t) \dot{a}(t)^2 \dot{\varphi} + a(t)^3 \ddot{\varphi} \right) \quad (3.13)$$

En introduisant la constante de Hubble  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ , l'équation de Klein-Gordon s'écrit :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.14)$$

### Oscillation temporelle du champ scalaire

Le potentiel  $V(\varphi)$  peut avoir différentes formes. On choisit de le représenter comme un polynôme afin de présenter un minimum qui permet de définir une masse  $m_\varphi$  associée au champ. On considère par la suite un potentiel quadratique de la forme :

$$V(\varphi) = 2 \frac{m_\varphi^2 c^4}{\hbar^2} \varphi^2 \quad (3.15)$$

L'équation de Klein-Gordon s'écrit alors :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = 0 \quad (3.16)$$

où l'on définit  $\omega_\varphi = m_\varphi c^2 / \hbar$  la pulsation du champ scalaire.

Cette équation s'apparente à celle d'un oscillateur harmonique amorti. Le rapport entre  $H$  et  $\omega_\varphi$  définit deux cas différents :

- $H \gg \omega_\varphi$  : le champ scalaire est sur-amorti ce qui conduit à un champ constant.
- $H \ll \omega_\varphi$  : le champ scalaire est sous-amorti ce qui conduit à un champ oscillant.

Dans le cas de l'expérience DAMNED afin d'avoir une chance de détecter ce champ, seul le cas oscillant nous intéresse. Le cas constant modifierait simplement la valeur des constantes fondamentales. Par construction, l'expérience y serait insensible.

La condition  $H \ll \omega_\varphi^2$  permet de définir l'échelle de masse pour laquelle la recherche d'oscillation du champ scalaire est envisageable :

$$\omega_\varphi \gg H \Leftrightarrow m_\varphi \gg \frac{\hbar H}{c^2} = 10^{-33} \text{ eV}/c^2 \quad (3.17)$$

Une condition supplémentaire fait intervenir la durée de l'expérience qui se doit d'être très inférieure à  $1/H \sim 10^{18}$  s (contrainte suffisamment élevée pour réaliser une expérience sur la durée d'une thèse).

Dans ces conditions, la solution à l'équation différentielle est un champ scalaire qui oscille en fonction du temps :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_\varphi t + \delta) \quad (3.18)$$

où  $\omega_\varphi = m_\varphi c^2/\hbar$  est la pulsation du champ,  $\delta$  est une phase arbitraire et  $\varphi_0$  est son amplitude qui dépend de l'intensité du couplage qui est présenté par la suite.

**Oscillation spatiale du champ scalaire** Plus généralement, le champ scalaire peut également varier en fonction de la position. Pour cela, il est nécessaire de tenir compte de l'évolution du champ scalaire en réponse au couplage avec la matière normale (qui apparaît dans la seconde ligne de l'équation 3.1). Pour l'expérience DAMNED, ce terme est négligeable mais ses effets sont détaillés dans [2, 3].

### 3.2.2 Champ scalaire de matière noire

Généralement, l'amplitude du champ scalaire  $\varphi_0$  dépend du couplage entre la matière normale et le champ scalaire. Dans notre cas, cette amplitude est simplement reliée à la densité de matière noire locale qui serait à l'origine de ce champ.

#### Tenseur énergie impulsion

Le champ scalaire, de part son oscillation, possède une densité d'énergie que l'on peut représenter par un tenseur-énergie impulsion  $T^{\mu\nu}$  qui apparaît dans les équations de champs d'Einstein 1.2. Par définition, ce tenseur est relié au lagrangien du champ scalaire (3.5) :

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = - \frac{\delta(\sqrt{-g}) \left( 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left( 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) \right)}{\delta g_{\mu\nu} \kappa \sqrt{-g}} \quad (3.19)$$

En utilisant la formule de Jacobi  $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ , on a :

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (3.20)$$

Le tenseur énergie-impulsion s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= - \frac{\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left( 2g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + V(\varphi) \right) - 2\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\delta g_{\mu\nu} \kappa \sqrt{-g}} \\ &= \frac{g^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - \frac{1}{4} V(\varphi) \right) + \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi}{\kappa} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En abaissant les indices et en sélectionnant l'élément  $T_{00}$ , on obtient la densité d'énergie  $\rho_\varphi$  du champ scalaire :

$$\rho_\varphi = \frac{T_{00}}{c^2} = \frac{1}{\kappa c^2} \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + \frac{1}{4} V(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{\kappa c^2} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\nabla \varphi)^2}{a^2} + \frac{1}{4} V(\varphi) \right) \quad (3.22)$$

### Densité de matière noire locale

Dans le cas d'un champ scalaire oscillant dans le temps, le terme  $\nabla\varphi$  qui dépend uniquement de la position est nul. En utilisant la définition du potentiel (3.15), la densité moyenne d'énergie du champ scalaire s'écrit :

$$\langle\rho_\varphi\rangle = \left\langle\frac{1}{2\kappa c^2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2\kappa c^2}\omega_\varphi^2\varphi^2\right\rangle = \frac{1}{\kappa c^2}\langle\omega_\varphi^2\varphi^2\rangle = \frac{1}{\kappa c^2}\omega_\varphi^2\varphi_0^2 \quad (3.23)$$

En supposant que le champ scalaire tire son énergie de toute matière noire locale, on a :

$$\langle\rho_\varphi\rangle = \rho_{DM} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\sqrt{\kappa c^2\rho_{DM}}}{\omega_\varphi} = \frac{\sqrt{8\pi G\rho_{DM}}}{\omega_\varphi c} \quad (3.24)$$

L'amplitude du champ scalaire est d'autant plus importante que la densité de matière noire locale est importante. De même, elle est d'autant plus importante que la pulsation  $\omega_\varphi$  du champ scalaire est faible.

### 3.2.3 Couplage matière noire/matière normale - modèle standard

Pour l'instant, les équations (3.18) et (3.24) définissent un champ scalaire oscillant indépendamment de la matière. Celui-ci modifie la métrique de l'espace-temps courbe de la relativité générale mais cette courbure ne peut être mesurée localement en raison de la faible étendue spatiale des expériences terrestres comme DAMNED. Pour espérer détecter une signature expérimentale, il est nécessaire de modéliser le couplage non-universel du champ scalaire aux champs du modèle standard .

Présenté dans l'équation (1.17) de l'introduction 1.3, le lagrangien  $\mathcal{L}^{SM}$  contient l'ensemble des interactions du modèle standard. Afin de tenir compte du couplage entre matière normale et matière noire, on ajoute le lagrangien intégrant le couplage du champ scalaire  $\mathcal{L}_\varphi^{SM}$  :

$$S_{eff}^{SM} = S^{SM} + S_\varphi^{SM} = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}^{SM} (g_{\mu\nu}, \Psi) - \mathcal{L}_\varphi^{SM} (g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi) \right) \quad (3.25)$$

Cependant, les champs scalaires étudiés lors de ma thèse se limitent à des niveaux d'énergies inférieurs à  $\sim keV$  (voir figure 1.13). A cette échelle d'énergie, le lagrangien  $\mathcal{L}^{SM}$  se simplifie fortement pour n'intégrer que les interactions faisant intervenir l'électron et les quarks  $u$  et  $d$  :

$$\mathcal{L}^{SM} = -\frac{e^2 c}{16\pi\hbar\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \sum_{i=e,u,d} \left( i\bar{\Psi}_i \not{D}(A, g_3 A^A) \Psi_i - m_i \bar{\Psi}_i \Psi_i \right) \quad (3.26)$$

Les deux premiers termes représentent l'interaction entre bosons (voir 1.3) associée au champ de jauge  $A$ . La somme représente les interactions faibles et fortes de l'électron et les quarks  $u$  et  $d$ .

Le lagrangien associé au champ scalaire  $\mathcal{L}_\varphi^{SM}$  a une forme similaire et fait intervenir les paramètres de couplage que l'on souhaite mesurer expérimentalement :

$$\mathcal{L}_\varphi^{SM} = \varphi \left( d_e \frac{e^2 c}{16\pi\hbar\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{d_g \beta_3}{2g_3} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \sum_{i=e,u,d} (d_{m_i} + \gamma_{m_i} d_g) m_i \bar{\Psi}_i \Psi_i \right) \quad (3.27)$$

D'autres types de couplage existent (à commencer par le couplage quadratique développé dans [3]), mais seul le couplage linéaire de l'équation (3.27) a été étudié dans ma thèse.

La relative faible énergie considérée ici limite à cinq le nombre de constantes fondamentales qui ont une influence dans le modèle. A chaque constante est associé un paramètre représentant le couplage entre la matière normale et la matière noire.

- $d_e$  agit sur la constante de structure fine  $\alpha$ ,
- $d_{m_e}$  agit sur la masse de l'électron  $m_e$ ,
- $d_{m_u}$  agit sur la masse du quark "up"  $u$ ,
- $d_{m_d}$  agit sur la masse du quark "down"  $d$ ,
- $d_g$  agit sur l'échelle d'énergie de la chromodynamique quantique  $\Lambda_3$ .

La somme des deux lagrangiens permet donc d'obtenir un lagrangien effectif intégrant le couplage du champ scalaire aux champs du modèle standard.

L'une des conséquences de ce couplage est la modification des cinq constantes fondamentales définies plus haut. En se concentrant uniquement sur la constante de structure fine, on peut se limiter au terme électromagnétique du lagrangien effectif :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{EM} &= \mathcal{L}^{EM} + \mathcal{L}_\varphi^{EM} = -\frac{e^2 c}{16\pi\hbar\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \varphi d_e \frac{e^2 c}{16\pi\hbar\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\simeq -\frac{e^2 c}{16\pi\hbar\alpha (1 + d_e \varphi)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La dernière ligne est obtenue en faisant un développement limité qui suppose que  $d_e \kappa \varphi \ll 1$ . La constante de structure fine dépend du champ scalaire  $\varphi$  et de la constante de couplage  $d_e$  :

$$\alpha(\varphi) = \alpha (1 + d_e \varphi) \quad (3.29)$$

Ce constat est également vrai pour les quatre autres constantes fondamentales [2], si bien que l'on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \alpha (1 + d_e \varphi) \\ m_i(\varphi) &= m_i (1 + d_{m_i} \varphi) \\ \Lambda_3(\varphi) &= \Lambda_3 (1 + d_g \varphi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

ce qui correspond donc à une variation des constantes fondamentales en raison de l'oscillation de  $\varphi$  définie par l'équation (3.18).

### 3.2.4 Oscillation des constantes fondamentales

#### Oscillation de la constante de structure fine

En combinant les équations (3.29), (3.18) et (3.24), on obtient une oscillation des constantes fondamentales en réponse au couplage du champ scalaire oscillant formé par la matière noire. La constante de structure fine (et les autres constantes fondamentales) oscille donc à la fréquence du champ scalaire :

$$\alpha(t) = \alpha \left( 1 + d_e \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}}}{\omega_\varphi c} \cos(\omega_\varphi t + \delta) \right) \quad (3.31)$$

La combinaison de la constante de structure fine  $\alpha$  à la masse de l'électron  $m_e$  permet de créer le rayon de Bohr  $a_0 = \hbar/(\alpha m_e c)$  qui représente la taille caractéristique d'un atome. Avec l'oscillation du champ scalaire, cette unité de longueur varie dans le temps. Tout objet fait d'atomes a donc un longueur  $L = N a_0$  qui oscille dans le temps :

$$\begin{aligned} L(t) &= N \frac{\hbar}{\alpha(t) m_e(t) c} = N \frac{\hbar}{\alpha m_e c} \frac{1}{(1 + \kappa d_e \varphi(t)) (1 + \kappa d_{m_e} \varphi(t))} \\ &= N a_0 \frac{1}{\left( 1 + \kappa (d_e + d_{m_e}) \varphi(t) + \kappa^2 d_e d_{m_e} \varphi(t)^2 \right)} \\ &\simeq L_0 \left( 1 - (d_e + d_{m_e}) \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}}}{\omega_\varphi c} \cos(\omega_\varphi t + \delta) \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

où l'on néglige les termes d'ordre 2 du champ scalaire.

Ce résultat sous-entend que la longueur  $L$  d'un objet quelconque varie dans le temps en raison du couplage de la matière noire avec la matière usuelle. L'intensité du couplage représentée par le terme  $(d_e + d_{m_e}) \sqrt{8\pi G \rho_{DM}}/(\omega_\varphi c)$  est très faible. C'est cet effet qui est recherché ici et c'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser des expériences extrêmement sensibles pour espérer le mesurer.

#### Mais oscillation par rapport à quoi ?

Etant donné que le champ scalaire est à l'origine d'une oscillation de la longueur d'un objet composé d'atomes, il est impossible de mesurer cette variation avec un outil (une règle par exemple) dont la longueur oscillerait également. Pour espérer mesurer une variation de longueur, il est donc nécessaire d'utiliser un outil dont la longueur n'est pas affectée par le champ scalaire.

En dérivant le lagrangien associé au champ scalaire  $\mathcal{L}_\varphi^{SM}$  défini par l'équation (3.27), il est possible de retrouver les équations de Maxwell. Dans celles-ci, la vitesse de phase de la lumière reste inchangée malgré l'oscillation du champ scalaire. Par conséquent, il est possible d'utiliser un signal lumineux comme outil de mesure de l'oscillation de la matière. Dans la suite de ce tapuscrit, toute variation de longueur du dispositif expérimental (en réponse à l'excitation du champ scalaire) est mesurée à l'aide du faisceau lumineux qui le traverse.

### 3.2.5 Champ scalaire stochastique

Les modèles de formation de galaxie suppose que la matière noire est en état stable, auto-gravitante et de distribution sphérique d'après le théorème du Viriel. Lors de sa formation, le halo de matière noire a acquis une vitesse de dispersion caractéristique  $\sigma_v \simeq 10^{-3}c$  avec une vitesse maximale correspondant à la vitesse de libération de la Voie Lactée. En raison de la vitesse du système solaire dans la galaxie ( $v_\odot \simeq 10^{-3}c$ ), une expérience terrestre va traverser ce halo et le signal de matière noire va varier. Le signal est élargi en fréquence par l'apport d'énergie de la matière noire et acquiert de cette manière une composante stochastique. La modification de l'équation (3.18) pour aboutir à ce champ stochastique est l'objectif de cette sous-section.

#### Distribution de vitesse du halo

On suppose que la matière noire galactique a une distribution de vitesse  $f_{DM}$  gaussienne [4, 5] qui dépend de la vitesse du Soleil  $v_\odot$  dans le référentiel du halo galactique et de la vitesse de dispersion  $\sigma_v$ . Cette distribution s'écrit :

$$f_{DM}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_v)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-v_\odot)^2}{2\sigma_v^2}} \quad (3.33)$$

En intégrant cette formule, on obtient la distribution de vitesse en fonction de la norme de la vitesse  $v$  :

$$f_{DM}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{v_\odot \sigma_v} e^{-\frac{v^2+v_\odot^2}{2\sigma_v^2}} \sinh\left(\frac{vv_\odot}{\sigma_v^2}\right) \quad (3.34)$$

Cette fonction est représentée la figure 3.2a où l'on choisit  $v_\odot = 230$  km/s et  $\sigma_v = 150$  km/s [4].

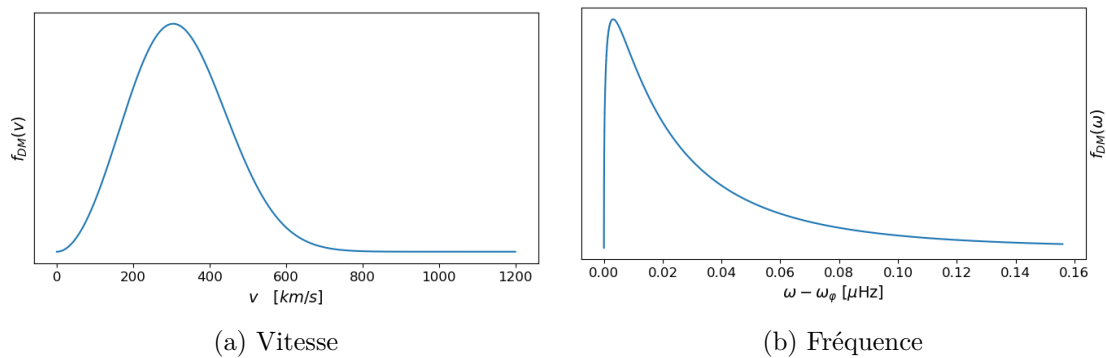


FIGURE 3.2 – Distribution des vitesses du halo de matière noire. En fréquence (3.2b), on observe un élargissement de la fréquence en raison de l'apport d'énergie du halo de matière noire.



### Elargissement du signal de matière noire

La distribution de vitesse définie par l'équation (3.34) introduit une énergie cinétique  $1/2m_\varphi v^2$  supplémentaire à l'énergie du champ scalaire  $m_\varphi c^2$ . Cet excès d'énergie produit un décalage de la fréquence  $f_\varphi$  du signal de matière noire :

$$f(v) = f_\varphi \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (3.35)$$

La distribution du halo de matière noire s'exprime en fonction de  $f$  comme (voir annexe 6.3 :

$$f_{DM}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{f_\varphi} \frac{c^2}{v_\odot \sigma_v} e^{-\frac{2c^2(f/f_\varphi - 1) + v_\odot^2}{2\sigma_v}} \sinh \left( \frac{cv_\odot}{\sigma_v^2} \sqrt{2(f/f_\varphi - 1)} \right) \quad (3.36)$$

Cette distribution implique que le signal de matière noire n'oscille pas à une unique fréquence. Le champ scalaire stochastique est donc la somme de l'ensemble des champs scalaires oscillant à la pulsation définie par l'équation (3.35) où la vitesse  $v$  peut prendre l'ensemble des valeurs permises par la distribution (3.34). Cette distribution en fréquence est visible 3.2b.

### Somme de champs scalaire

Il n'existe donc plus un unique champ scalaire déterministe défini dans l'équation (3.18) qui concentre la totalité de l'énergie fournie par la matière noire. Dans le cas du décalage de la fréquence d'oscillation du champ déterministe, l'énergie de la matière est répartie sur un ensemble de champs scalaire dont la fréquence est définie par l'équation (3.35).

Avec cette approche, on considère que la densité de matière noire locale est à l'origine d'un nombre  $N^\varphi$  de champs scalaires  $\varphi_i(t)$  oscillant à une fréquence dépendant de la vitesse  $v_i$  avec une phase  $\delta_i$  aléatoire distribuée uniformément entre 0 et  $2\pi$ . A partir des équations (3.18) et (3.24), on peut exprimer chacun des  $N^\varphi$  champs  $\varphi_i(t)$  par :

$$\varphi_i(t) = \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}/N^\varphi}}{\omega_\varphi c} \cos \left( \omega_\varphi \left( 1 + \frac{v_i^2}{2c^2} \right) t + \delta_i \right) = \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}/N^\varphi}}{\omega_\varphi c} \cos \left( \omega_{\varphi i} t + \delta_i \right) \quad (3.37)$$

où  $\omega_{\varphi i} = \omega_\varphi \left( 1 + 1/2 v_i^2/c^2 \right)$  est la pulsation du champ  $\varphi_i$

Le champ scalaire  $\varphi^s(t)$  formé par la totalité de la densité de matière noire locale correspond à la somme des  $N^\varphi$  champs :

$$\varphi^s(t) = \sum_i^{N^\varphi} \varphi_i(t) = \sum_i^{N^\varphi} \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}/N^\varphi}}{\omega_\varphi c} \cos \left( \omega_{\varphi i} t + \delta_i \right) \quad (3.38)$$

Pour chaque champ  $\varphi_i$ , l'oscillation est définie par à une pulsation  $\omega_{\varphi i}$  unique qui correspond à une vitesse  $v_i$  unique. Cependant la résolution spectrale d'une expérience

est toujours limitée, deux pulsations trop proches sont alors indiscernables. On peut définir une pulsation  $\omega_{\varphi j}$  commune pour un ensemble de  $N_j^\varphi$  champs pour lesquels la pulsation  $\omega_{\varphi i}$  est comprise dans un intervalle de pulsation dépendant de la résolution spectrale  $\Delta\omega$  :

$$\omega_{\varphi j} - \Delta\omega < \omega_{\varphi i} < \omega_{\varphi j} + \Delta\omega \quad (3.39)$$

La somme des  $N_j^\varphi$  champs dont la pulsation est comprise dans l'intervalle (3.39) donne un champ scalaire moyen  $\varphi_j$  oscillant à la pulsation  $\omega_{\varphi j}$  :

$$\varphi_j(t) = \sum_{i=1}^{N_j^\varphi} \varphi_i(t) \Big|_{\omega_{\varphi j} - \Delta\omega < \omega_{\varphi i} < \omega_{\varphi j} + \Delta\omega} = \frac{\sqrt{8\pi G\rho_{DM}/N^\varphi}}{\omega_\varphi c} \sum_{i=1}^{N_j^\varphi} \cos(\omega_{\varphi j}t + \delta_i) \quad (3.40)$$

où seule la phase aléatoire diffère dans les termes de la somme. Comme dérivé dans l'annexe 6.3, la somme de cosinus oscillant à la même fréquence mais dont les phases sont aléatoires suit une distribution de Rayleigh. A l'aide de l'équation 6.16 de l'annexe, on peut exprimer  $\varphi_j$  comme :

$$\varphi_j(t) = \alpha_j \frac{\sqrt{8\pi G\rho_{DM}}}{\omega_\varphi c} \sqrt{\frac{N_j^\varphi}{N^\varphi}} \cos(\omega_{\varphi j}t + \delta_j) \quad (3.41)$$

où  $\delta_j$  est une unique phase aléatoire suivant une loi uniforme entre 0 et  $2\pi$ . On définit  $\alpha_j$  comme la variable aléatoire suivant la loi de Rayleigh :

$$\mathbb{P}[\alpha] = \alpha_j e^{-\alpha_j^2/2} \quad (3.42)$$

Par définition,  $N_j^\varphi$  correspond à la fraction des  $N^\varphi$  champs pour lesquels la pulsation est comprise dans l'intervalle (3.39). Cette fraction est représentée par la distribution  $f_{DM}$  tel que  $N_j^\varphi = N^\varphi f_{DM}(f_{\varphi j})\Delta f$ . On a alors pour l'ensemble des vitesses (et donc des pulsations) autorisées par la distribution  $f_{DM}$  :

$$\varphi^s(t) = \frac{\sqrt{8\pi G\rho_{DM}}}{\omega_\varphi c} \sum_j \alpha_j \sqrt{f_{DM}(f_{\varphi j})\Delta\omega} \cos(2\pi f_{\varphi j}t + \delta_j) \quad (3.43)$$

Le champ scalaire effectif est donc stochastique puisque son amplitude est une variable aléatoire définie par la distribution de Rayleigh et de la distribution de vitesse du halo de matière noire. L'élargissement asymétrique que définit la distribution en fréquence (visible sur la figure 3.2b) est une signature particulière de la matière noire due à la nature stochastique du signal. Cette forme singulière trouvera une utilité dans la suite du projet puisqu'elle permettra de faire la différence entre un signal de matière noire et de simples effets systématiques de l'expérience.

### Temps de cohérence

La distribution des fréquences de l'équation (3.43) introduit une échelle de temps caractéristique  $\tau_c$  pendant laquelle les champs s'additionnent de manière cohérente. La

largeur typique du signal dans le domaine fréquentiel peut être estimée à partir de la largeur de la distribution de vitesse exprimée en fréquence définie dans l'équation (3.43) :

$$\delta f_\varphi = \frac{1}{2} f_\varphi \left( \frac{(v_\odot + \sigma_v)^2}{2c^2} - \frac{(v_\odot - \sigma_v)^2}{2c^2} \right) = f_\varphi \frac{v_\odot \sigma_v}{c^2} \quad (3.44)$$

L'inverse de cette quantité définit le temps de cohérence  $\tau_c$  :

$$\tau_c = \frac{1}{\delta f_\varphi} = \frac{1}{f_\varphi} \frac{c^2}{v_\odot \sigma_v} \simeq 2 \times 10^6 P_m \quad (3.45)$$

où  $P_m = f_\varphi^{-1}$  est la période caractéristique d'oscillation du champ. Ce temps de cohérence permet de différencier deux types d'expériences cherchant une oscillation du champ scalaire :

- Durée courte  $T_{exp} \ll \tau_c$  : l'expérience peut rechercher un signal monofréquence mais de par le caractère stochastique de l'amplitude, cette dernière risque d'être très faible voire nulle.
- Durée longue  $T_{exp} \gg \tau_c$  : l'expérience peut rechercher un signal dont la fréquence est étendue mais l'amplitude varie suffisamment sur la durée de l'expérience pour être visible.

### Simulation du champ scalaire

La forme stochastique du champ scalaire de matière noire est simulée en noir dans la figure 3.3. La ligne bleue correspond au cas où le champ scalaire est déterministe  $\varphi^d$  et dont l'amplitude est donnée par l'équation (3.18). Une expérience d'une durée trop courte peut se trouver dans une zone rouge qui correspond à une faible amplitude du champ scalaire. Statistiquement, cette variation de l'amplitude diminue d'un facteur  $\sim 10$  la sensibilité d'une telle expérience [4, 6].

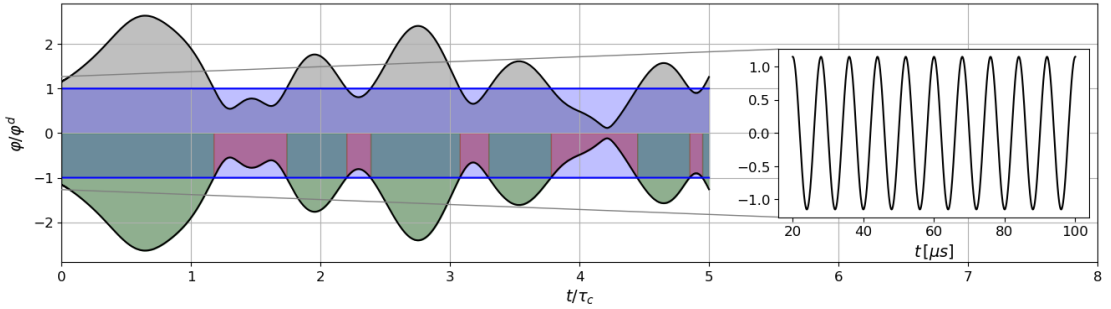


FIGURE 3.3 – Simulation de la variation de l'amplitude du champ scalaire stochastique  $\varphi^s$  de l'équation (3.43) par rapport au champ scalaire déterministe  $\varphi^d$  de l'équation (3.18) pour des durées d'expériences plus longues que le temps de cohérence. La partie zoomée montre l'oscillation à la fréquence  $\omega_\varphi$  du champ scalaire.

### 3.2.6 Relaxation cosmologique et matière noire

La dernière composante théorique étudiée lors de ma thèse est un modèle qui prédit une densité de matière noire très importante à proximité de la Terre. Dans ce cadre, la sensibilité de l'expérience DAMNED serait considérablement améliorée suite à l'augmentation de l'amplitude du champ scalaire.

Récemment, le phénomène de relaxation cosmologique de l'échelle électrofaible a été mis en avant [7, 8] pour expliquer l'évolution de notre Univers. Cette théorie prometteuse est une piste de recherche active qui permettrait de résoudre l'une des dernières questions du modèle standard (sommairement abordées dans le chapitre d'introduction 1.3). Elle pourrait résoudre le problème de hiérarchisation (l'absence de loi définissant la masse des particules élémentaires) à l'aide du relaxion, un champ scalaire lié à la masse du boson de Higgs.

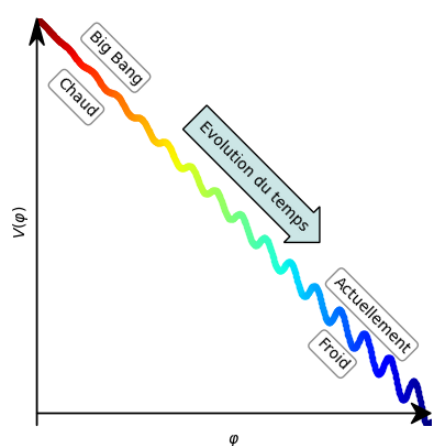


FIGURE 3.4 – Potentiel de relaxation  $V$  en fonction du champ scalaire  $\varphi$ . Grâce à la température, le champ scalaire (à la manière d'une bille) va descendre dans le potentiel et trouver des minima dans lesquels il va pouvoir osciller. A mesure que le temps passe, la température diminue et limite l'énergie disponible au champ pour passer d'un minima à un autre. Actuellement, l'énergie serait trop faible pour changer et le champ oscillerait dans l'un des minima du potentiel.

#### Champ scalaire d'axions : relaxion

Cette théorie suppose l'existence d'un champ scalaire d'axions nommé "relaxion" qui se couple à la masse du boson de Higgs. Ces axions seraient des bosons légers dont le taux d'occupation des niveaux d'énergies est potentiellement très élevé s'ils trouvent leur origine dans la matière noire.

Ces particules formées après le Big Bang profiteraient de la température de l'Univers pour en tirer de l'énergie. Celle-ci va permettre à l'axion d'évoluer dans le potentiel (figure 3.4) et passer par les différents minima. Durant la période de l'inflation cosmologique, le relaxion scanne le potentiel pour atteindre un minima local. Chaque barrière de potentiel peut-être surpassée tant que la température de l'Univers fournit assez d'énergie au relaxion qui cascade donc le long du potentiel. Après un certain temps, la température n'est plus suffisante pour sortir du minima local mais l'énergie restante permet au champ d'osciller au fond du puit de potentiel. La masse du boson de Higgs est directement liée à ce champ scalaire et serait maintenant fixe suite à la relaxation du champ scalaire.

### Etoile et halo d'axions

Le fort taux d'occupation des niveaux d'énergies conduit à la formation d'un condensat de Bose-Einstein. Ce condensat peut créer, par un processus de relaxation gravitationnel, des objets compacts maintenus par auto-gravitation, appelés "étoile d'axions" [9]. Un tel objet évolue indépendamment du fond de matière noire de la galaxie et a une densité propre qui n'est pas nécessairement la même que celle de la galaxie. Ces objets pourraient être nombreux et traverser régulièrement la Terre augmentant ponctuellement la densité locale de matière noire détectable par une expérience.

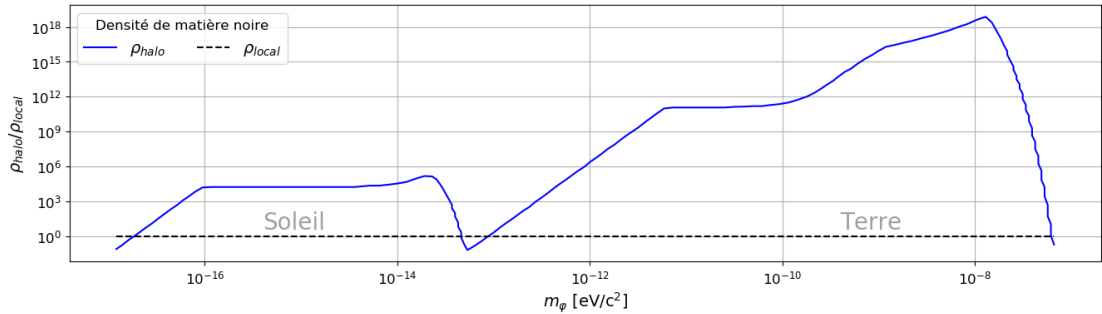


FIGURE 3.5 – Surdensité de matière noire des halos de relaxation de la Terre et du Soleil. Ces courbes sont extraites de [10] où les auteurs supposent que la masse du halo de relaxation est contrainte par la masse maximale qui aurait du être détectée par des expériences gravitationnelles comme la télémétrie laser de la lune [11] pour le halo terrestre et les éphémérides planétaires [12] pour le halo solaire.

En intégrant les baryons dans les simulations de formation de notre Univers [13-15], des scénarios admettent l'existence d'un halo de matière noire de haute densité agrégré autour d'une source gravitationnelle de matière normale. Le champ de matière noire pourrait être maintenu par la gravité du corps externe et non son auto-gravité et former un "halo de relaxation". Dans le Système Solaire, il pourrait donc exister un tel halo issu de la matière noire autour du Soleil et de la Terre. La densité dans ces halos pourrait être 20 ordres de grandeur plus importante que la densité de matière noire du halo galactique [10].

### 3.2.7 Résumé

Le champ scalaire ultra-léger qui nous intéresse :

- oscille à une fréquence proportionnelle à sa masse  $m_\varphi$  :  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta)$
- induit une oscillation des constantes fondamentales :  $X(t) = X (1 + d_X \varphi(t))$
- a une amplitude proportionnelle à la racine carrée de la densité de matière noire locale :
  - qui est constante ( $\rho_{local} = 0.4 \text{ GeV/cm}^3$ ) dans les modèles galactiques de matière noire :  $\rho_{DM} = \rho_{local}$
  - qui dépend de la masse  $m_\varphi$  du champ pour un halo de relaxion centré sur la Terre ou le Soleil :  $\rho_{DM}(m_\varphi) = \rho_{halo}(m_\varphi)$
- est stochastique puisqu'il est la somme des champs scalaires oscillant à une fréquence élargie par l'énergie cinétique fournie par le halo de matière noire :  $\varphi^s = \varphi_0 \sum_j \alpha_j \sqrt{f_{DM}(v_j) \Delta v} \cos(\omega_{\varphi_j} t + \delta_j)$ .

Le couplage, de la matière noire à la matière normale par le biais du champ scalaire, est caractérisé par les 5 paramètres  $d_e, d_{m_e}, d_{m_u}, d_{m_d}$  et  $d_g$ .

### 3.2.8 Limites existantes

En supposant que l'on souhaite observer l'oscillation localement, on s'attend à une oscillation temporelle des constantes fondamentales. La variation des constantes fondamentales a déjà été étudiée en détail et un résumé de l'ensemble des efforts dans le cadre des champs scalaires ultra-légers est reporté dans [3]. La figure 3.6 (issue de [3]) présente les contraintes déjà existantes sur les constantes de couplages.

On observe que ces constantes ne sont pas obtenues indépendamment (à l'exception de  $d_e$ ) et qu'une expérience n'est pas sensible à l'ensemble des constantes simultanément.

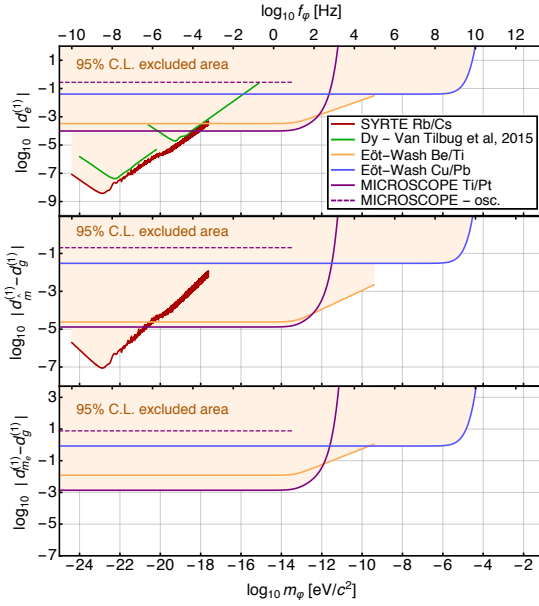


FIGURE 3.6 – Contraintes sur différentes combinaisons des paramètres de couplage du champ scalaire au modèle standard [3]. Les balances de torsions du groupe EötWash [16, 17] testent le principe d'équivalence avec une importante sensibilité qui permet de placer des contraintes fortes sur une large gamme de fréquence. La mission spatiale MICROSCOPE [19, 20] profite d'une sensibilité plus importante grâce à l'environnement à faible gravité de l'espace, ce qui lui permet de placer de meilleurs contraintes mais sur un intervalle de fréquence plus réduit. Enfin, la comparaison d'horloges atomiques [1] profite d'excellente stabilité et exactitude qui placent les meilleures limites à basse fréquence.

### Test du principe d'équivalence

Les tests du principe d'équivalence du groupe EotWash fixent les contraintes avec la plus large bande (couvrant les masses de  $10^{-25}$  à  $10^{-4} eV/c^2$ ). La balance d'Eötvös (du nom de son inventeur) du groupe de l'université de Washington [16, 17] est actuellement la plus sensible et a permis de fixer des contraintes fortes (en bleu et orange sur la figure). Des masses test sont approchées d'une source gravitationnelle (la Terre, ou bien une source d'uranium) pour étudier son effet. La différence de composition des masses test suppose que l'effet de la source ne sera pas le même en raison des paramètres de couplage au champ scalaire. Pour obtenir l'effet du champ scalaire sur le dispositif, il faut à nouveau résoudre les équations de Klein-Gordon mais en conservant la partie spatiale de l'équation. Comme cela a été décrit dans [3], le champ scalaire introduit deux effets sur la quantité mesurée par une balance de Eot-Wash :

- une accélération différentielle entre les deux masses-test avec l'oscillation des constantes fondamentales.
- une force gravitationnelle de type Yukawa (cinquième force [18]) qui trouve sa source dans la masse de la Terre et dont la portée est proportionnelle à la masse du champ  $\varphi$ .

C'est le second effet qui est responsable des contraintes fixées par ces expériences dans la figure 3.6. L'avantage considérable provient de l'effet de la source qui a une portée ( $\lambda_\varphi \propto \omega_\varphi^{-1}$ ) importante qui permet de fixer des contraintes sur un intervalle de fréquence très large. A mesure que la fréquence augmente, la portée diminue et les masses-test ne sont plus sensibles à l'effet de la source pour les fréquences supérieures à  $10^{10}$  Hz.

### La mission MICROSCOPE

La mission MICROSCOPE [19, 20] place des contraintes sur les mêmes combinaisons de paramètres. La mission spatiale financée et dirigée par le CNES a permis de tester le principe d'équivalence faible (universalité de la chute libre) avec une précision inégalée en 2017. Deux masses concentriques faites de matériaux différents (Platine et Titane) se trouvent en chute libre continue dans un satellite dédié. L'effet du champ scalaire sur la mission MICROSCOPE est similaire à celui de l'expérience du groupe de Washington. La sensibilité de cette expérience permet de fixer des contraintes sur une large gamme de fréquence améliorant les résultats obtenus d'un ordre de grandeur par rapport aux expériences de balance à torsion du groupe à EotWash. Les contraintes à basse fréquence profitent de l'environnement en micro-gravité du satellite en orbite et permettent d'obtenir une plus grande sensibilité au champ scalaire. Cependant, la distance du satellite à la Terre (environ 700 km) entraîne une coupure à fréquence plus basse ( $\sim 1$  kHz).

### Comparaison d'horloges atomiques

Les dernières contraintes sont issues de comparaisons d'horloges atomiques dans notre laboratoire au SYRTE. Le fonctionnement des horloges atomiques repose sur une transition atomique qui dépend des constantes fondamentales. La comparaison de deux horloges utilisant des atomes différents (donc deux transitions différentes) permet de rechercher l'oscillation d'une constante fondamentale. L'utilisation de 6 ans de données a permis de couvrir un intervalle de fréquence allant jusqu'à  $10^{-25} eV/c^2$ , améliorant les contraintes de plusieurs ordres de grandeur. Cette approche a également été réalisée avec des horloges optiques, améliorant légèrement les contraintes. N'étant pas sensibles à une variation de la masse de l'électron, ces expériences ne placent aucune contrainte sur la dernière combinaison de constantes.

#### 3.2.9 Mesure simultanée contre mesure différée

La corrélation des paramètres (par exemple  $d_{m_e}$  et  $d_g$ ) provient du type de mesures réalisées. Les expériences faisant intervenir des horloges [1, 21-24] comparent deux horloges de constitutions différentes et mesurent un effet absolu. Ce principe de mesure locale est également utilisé dans les expériences faisant intervenir des masses-test. Pour décorréler les paramètres, il est nécessaire d'approcher le problème différemment.

#### Fréquence d'une horloge atomique et d'une cavité optique

De manière générale, la fréquence  $\nu_A$  d'une horloge fonctionne sur une transition atomique "A" ayant une fréquence  $\nu_A$  telle que :

$$\nu_A = C_A \frac{\alpha^2 m_e c^2}{\hbar} F_A(\alpha) \quad (3.46)$$

où  $C_A$  est une constante numérique propre à "A" et  $F_A$  est une fonction adimensionnée qui dépend de la transition atomique de l'horloge. La fréquence  $\nu_C$  d'une cavité "C"



optique dépendra des autres constantes également :

$$\nu_A = C_C \frac{\alpha m_e c^2}{\hbar} F_C(\alpha, m_e, m_q, \Lambda_3) \quad (3.47)$$

où  $C_C$  est une constante numérique propre à la cavité et  $F_C$  est une fonction adimensionnée qui dépend du matériel utilisé.

Dans le cas de l'horloge, la dépendance en  $\alpha^2 m_e$  provient de la constante de Rydberg  $R_\infty = m_e \alpha^2 c / (2\hbar)$  qui permet d'exprimer les niveaux d'énergie du système. Pour la cavité, la dépendance  $\alpha m_e$  se trouve dans la longueur de la cavité qui est proportionnelle au rayon de Bohr. Les fonctions  $F_A$  et  $F_C$  ont une dépendance d'ordre supérieur aux constantes fondamentales et que l'on néglige ici.

### Mesure locale simultanée

Les méthodes usuelles de recherche de matière noire reposent sur la comparaison simultanée de deux horloges fonctionnant sur des transitions atomiques différentes ou de type différent. En prenant l'exemple d'une comparaison d'une horloge atomique avec une cavité, on a :

$$\frac{\delta(\nu_A/\nu_C)}{(\nu_A/\nu_C)_0} = \frac{\delta\alpha}{\alpha} = \kappa d_e \varphi(t) \quad (3.48)$$

Ce type d'expérience n'est sensible qu'à des combinaisons adimensionnées de constantes fondamentales tel que  $\alpha$  ou  $m_e/\Lambda_3$ .

### Mesure non-locale et/ou différée

Prenons maintenant une expérience comparant deux horloges du même type mais séparées spatialement ou temporellement. On suppose que les constantes fondamentales ne sont pas les mêmes pour l'horloge en fonction de sa position ou de l'instant choisi pour réaliser l'expérience. Soit une horloge "A<sub>1</sub>" où la constante fondamentale à une valeur nominale  $X_0$  et une horloge "A<sub>2</sub>" où la constante fondamentale vaut  $X_0 + \delta X$ . Dans ces conditions, la comparaison donne accès à :

$$\frac{\delta(\nu_{A_1}/\nu_{A_2})}{(\nu_{A_1}/\nu_{A_2})_0} = 2 \frac{\delta\alpha}{\alpha} + \frac{\delta m_e}{m_e} = \kappa (2d_e + d_{m_e}) \varphi(t) \quad (3.49)$$

Dans le cas où les constantes fondamentales ne sont pas les mêmes en fonction de la position ou de l'instant choisi pour mesurer l'horloge, l'expérience est sensible à des quantités dimensionnées et leurs paramètres de couplage.

Par conséquent, les mesures non-locales et/ou différées donnent accès à de nouvelles combinaisons. Dans le cas présenté, la constante de couplage de la masse de l'électron apparait indépendamment des autres constantes. Ce n'est pas le cas pour une mesure locale et simultanée où seul  $m_e/\Lambda_3$  est mesurable, ce qui correspond à la combinaison non indépendante  $d_e - d_g$ .

### 3.3 L'expérience DAMNED

C'est dans ce contexte théorique que l'idée à l'origine de l'expérience DAMNED a germé[25]. Elle doit résoudre à sa manière le problème des paramètres de couplage corrélés. L'objectif de l'expérience est multiple :

- Développer une expérience avec le matériel et l'expertise de l'Observatoire,
- Être sensible à une nouvelle combinaison de constantes fondamentales pour décorréler les paramètres de couplage,
- Être capable de détecter la matière noire, ou dans le cas échéant placer de meilleures contraintes que l'état de l'art.
- Explorer des régions de masse du champ scalaire inaccessibles aux horloges qui ont une fréquence d'échantillonnage maximale de l'ordre du Hertz et ne peuvent donc pas détecter des oscillations beaucoup plus rapides.

#### 3.3.1 Concept de l'expérience

L'expérience DAMNED se base sur une mesure différée. L'objectif est de comparer une horloge à elle-même dans le temps au moyen d'un délai que l'on peut choisir. Le schéma de principe de l'expérience est représenté dans la figure 3.7.

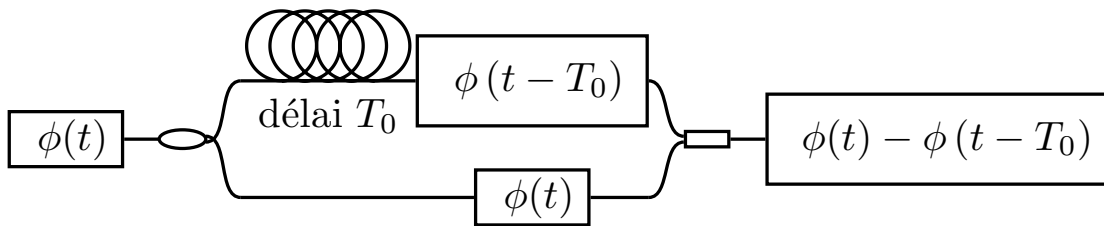


FIGURE 3.7 – Schéma de principe d'une expérience de mesure différée : la phase d'un signal est comparée avec elle-même en utilisant l'un des bras dans lequel le signal est retardé.

Le signal (caractérisé par sa phase  $\phi(t)$ ) issu d'une source stable est séparé et parcourt deux trajets optiques de longueurs différentes. Une partie du signal est retardée d'un délai  $\tau_0$ , l'autre partie reste inchangée. Par interférométrie, on obtient la différence  $\Delta\Phi(t) = \phi(t) - \phi(t - T_0)$  des deux signaux ce qui permet de mesurer toute oscillation de la source. Dans le cas d'une oscillation de la source  $\phi(t) \propto \cos(\omega t)$ , la différence de phase  $\Delta\Phi(t)$  oscille également et c'est ce que l'on souhaite mesurer.

### Effet de la matière noire sur la source

Supposons que le signal de la source  $\omega(t)$  est affecté par la matière noire. Le signal est alors la superposition du signal non affecté  $\omega_0$ , de l'effet de couplage avec la matière noire  $\delta_\omega^c \cos(\varphi t) + \delta_\omega^s \sin(\varphi t)$  et le bruit inhérent à la source  $\Delta\omega(t)$  :

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 + \left( \delta_\omega^c \cos(\omega_\varphi t) + \delta_\omega^s \sin(\omega_\varphi t) \right) + \Delta\omega(t) \\ &= \omega_0 \left( 1 + \epsilon_\omega^c \cos(\omega_\varphi t) + \epsilon_\omega^s \sin(\omega_\varphi t) + \frac{\Delta\omega(t)}{\omega_0} \right)\end{aligned}\quad (3.50)$$

où  $\epsilon_\omega^{(c,s)} = \delta_\omega^{(c,s)}/\omega_0$  dépendent des paramètres de couplage et de la source.

### Effet de la matière noire sur le délai

Le même raisonnement s'applique sur le délai optique  $T^i(t)$ . Le délai non perturbé  $T_0$  est affecté par la matière noire  $\delta_T^c \cos(\omega_\varphi t) + \delta_T^s \sin(\omega_\varphi t)$  et par le bruit  $\Delta T^i(t)$  :

$$\begin{aligned}T^i(t) &= T_0 + \left( \delta_T^c \cos(\omega_\varphi t) + \delta_T^s \sin(\omega_\varphi t) \right) + \Delta T^i(t) \\ &= T_0 \left( 1 + \epsilon_T^c \cos(\omega_\varphi t) + \epsilon_T^s \sin(\omega_\varphi t) + \frac{\Delta T^i(t)}{T_0} \right)\end{aligned}\quad (3.51)$$

où  $\epsilon_T^{(c,s)} = \delta_T^{(c,s)}/T_0$  dépendent des paramètres de couplage et du matériau utilisé pour réaliser le délai.

Le signal est affecté par ce délai et il est donc nécessaire d'intégrer son effet lors de la propagation pour obtenir le délai mesuré  $T(t)$  entre l'émission à un temps  $t - T_0$  et la réception à un temps  $t$  :

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t T^i(t') dt' \\ &= \int_{t-T_0}^t \left( 1 + \epsilon_T^c \cos(\omega_\varphi t') + \epsilon_T^s \sin(\omega_\varphi t') + \frac{\Delta T^i(t')}{T_0} \right) dt' \\ &= \left[ t' + \frac{\epsilon_T^c}{\omega_\varphi} \sin(\omega_\varphi t') - \frac{\epsilon_T^s}{\omega_\varphi} \cos(\omega_\varphi t') \right]_{t-T_0}^t + \int_{t-T_0}^t \frac{\Delta T^i(t')}{T_0} dt' \\ &= T_0 + \left( \delta_T^c \cos\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) + \delta_T^s \sin\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) \right) \text{sinc}\left(\omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) + \Delta T(t)\end{aligned}\quad (3.52)$$

où  $\Delta T(t) = \int_{t-T_0}^t \Delta T^i(t')/T_0 dt'$  est le bruit instantané intégré pour obtenir le bruit lors de la propagation du signal.

### Effet de la matière noire sur l'interféromètre

Afin de mesurer les oscillations induites par la matière noire, le signal de la source  $\omega(t)$  est comparé avec lui même après un temps  $T(t)$ . La phase  $\phi(t)$  du signal lors de sa propagation est :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_{t_0}^t \omega(t') dt' = \int_{t_0}^t \left( \omega_0 + \delta_\omega^c \cos(\omega_\varphi t') + \delta_\omega^s \sin(\omega_\varphi t') + \Delta\omega(t') \right) dt' \\
&= \omega_0 \left[ t' + \frac{\epsilon_\omega^c}{\omega_\varphi} \sin(\omega_\varphi t') - \frac{\epsilon_\omega^s}{\omega_\varphi} \cos(\omega_\varphi t') \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \Delta\omega(t') dt' \\
&= \omega_0 (t - t_0) + \frac{\delta_\omega^c}{\omega_\varphi} \left( \sin(\omega_\varphi t) - \sin(\omega_\varphi t_0) \right) \\
&\quad + \frac{\delta_\omega^s}{\omega_\varphi} \left( \cos(\omega_\varphi t_0) - \cos(\omega_\varphi t) \right) + \int_{t_0}^t \Delta\omega(t') dt'
\end{aligned} \tag{3.53}$$

La différence de temps  $t - t_0$  correspond au temps de propagation et peut être remplacée par  $T(t)$ . En utilisant (3.52), on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \omega_0 T_0 + \omega_0 \left( \delta_T^c \cos\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) + \delta_T^s \sin\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) \right) \text{sinc}\left(\omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) \\
&\quad + 2 \left( \frac{\delta_\omega^c}{\omega_\varphi} \cos\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T(t)}{2}\right) + \frac{\delta_\omega^s}{\omega_\varphi} \sin\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T(t)}{2}\right) \right) \text{sinc}\left(\omega_\varphi \frac{T(t)}{2}\right) \\
&\quad + \int_{t-T(t)}^t \Delta\omega(t') dt' + \int_{t-T_0}^t \omega_0 \frac{\Delta T^i(t')}{T_0} dt'
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Les termes  $\delta T$  et  $\Delta T$  sont faibles devant  $T_0$  donc on peut négliger les termes d'ordres supérieurs apparaissant dans le cosinus, sinus et dans les bornes des intégrales.

L'interféromètre permet de mesurer la différence de phase  $\Delta\phi$  entre les deux branches. La phase de la branche non retardée est insensible à la matière noire en raison de sa faible longueur. On a donc :

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(t) &= \phi(t)|_{T_0} - \phi(t)|_{T_0=0} = \omega_0 T_0 \left( 1 + \int_{t-T_0}^t \left( \frac{\Delta T^i(t')}{T_0} + \frac{\Delta\omega(t')}{\omega_0} \right) \frac{dt'}{T_0} \right. \\
&\quad \left. + \text{sinc}\left(\omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) \left( \epsilon_{\Delta\phi}^c \cos\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) + \epsilon_{\Delta\phi}^s \sin\left(\omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2}\right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

où  $\epsilon_{\Delta\phi}^{(c,s)} = \epsilon_T^{(c,s)} + \epsilon_\omega^{(c,s)}$ .

La formule (3.55) permet de modéliser l'effet de la matière noire pour une expérience dont le schéma est représenté dans la figure 3.7. Les termes  $\epsilon_\omega^{(c,s)}$  (issu de la cavité) et

$\epsilon_T^{(c,s)}$  (issu de la fibre) sont responsables de la modulation du signal interférométrique. Si l'on se limite à la variation de fréquence  $\omega_0$  en sortie de la cavité et à la variation de la longueur  $L_0$  de la fibre optique, aucun signal n'est attendu si les variations sont créées par l'oscillation du rayon de Bohr abordée dans l'équation (3.32). Pour stabiliser la fréquence du laser sur la cavité, la fréquence  $\omega_0$  est conditionnée par l'inverse de la longueur  $l_0$  de l'écarteur en verre qui compose la cavité, de telle sorte que :

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0} = \frac{2\pi c}{l_0} \quad (3.56)$$

La variation relative de fréquence est donc de signe opposé à la variation relative de longueur :

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\delta l}{l_0} \Leftrightarrow \epsilon_\omega = -\epsilon_l \quad (3.57)$$

Dans ces conditions, la variation relative de la phase  $\Delta\phi$  en sortie de l'interféromètre s'annule

$$\epsilon_{\Delta\phi} = \epsilon_\omega + \epsilon_L = -\epsilon_l + \epsilon_L = 0 \quad (3.58)$$

Afin de surpasser cette limitation, une analyse détaillée des différentes quantités impliquées dans l'expérience DAMNED est présentée dans la section 3.4 et permet de conserver une sensibilité au champ scalaire. Le terme  $\epsilon_{\Delta\phi}$  sera développé par la suite uniquement pour l'expérience DAMNED mais peut être dérivé pour toute expérience semblable.

### Densité spectrale de puissance (PSD)

Soit  $\phi(t)$  un signal tel que

$$\phi(t) = C_\omega \cos(\omega t + \delta_\omega) + S_\omega \sin(\omega t + \delta_\omega) \quad (3.59)$$

où  $C_\omega, S_\omega$  et  $\delta_\omega$  dépendent de la fréquence  $\omega$ . La fonction d'autocorrélation de  $\Delta\phi$  est définie [26] comme :

$$R_{[\phi]}(\tau) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \phi(u + \tau) \times \phi(u) du = \frac{1}{2} (C_\omega^2 + S_\omega^2) \cos(\omega\tau) \quad (3.60)$$

La densité spectrale de puissance bilatérale ("two-sided") est définie comme :

$$S_{[\phi]}^{TS}(f) = \int_{-\frac{T_{exp}}{2}}^{\frac{T_{exp}}{2}} R_{[\phi]} e^{-2\pi i f \tau} d\tau \simeq (C_\omega^2 + S_\omega^2) T_{exp} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi f}{2} T_{exp}\right) \quad (3.61)$$

La densité spectrale de puissance bilatérale est une fonction symétrique et paire. Seules les fréquences positives nous intéressent pour un signal physique. On peut définir la densité spectrale de puissance unilatérale (qui sera utilisée dans la suite du tapuscrit) :

$$S_{[\phi]}(f) = 2S_{[\phi]}^{TS}(f) = 2(C_\omega^2 + S_\omega^2) T_{exp} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi f}{2} T_{exp}\right) \quad (3.62)$$

### Effet de la matière noire sur la densité spectrale de puissance

En utilisant la définition de la PSD (voir encart) pour le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre, on obtient pour une durée  $T_{exp}$  :

$$S_{[\Delta\phi]}(\omega) = 2(\omega_0 T_0)^2 (\epsilon_{\Delta\phi}^c{}^2 + \epsilon_{\Delta\phi}^s{}^2) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega_\varphi T_0}{2}\right) T_{exp} \operatorname{sinc}\left((\omega - \omega_\varphi) \frac{T_{exp}}{2}\right) \quad (3.63)$$

Pour des expériences dont la durée est suffisamment longue, on peut approximer le sinus cardinal par un dirac (figure 3.8) :

$$S_{[\Delta\phi]}(\omega_\varphi) \simeq 2 \left(2 \frac{\omega_0}{\omega_\varphi}\right)^2 (\epsilon_{\Delta\phi}^c{}^2 + \epsilon_{\Delta\phi}^s{}^2) \sin^2\left(\frac{\omega_\varphi T_0}{2}\right) T_{exp} \quad (3.64)$$

Afin d'augmenter la sensibilité d'une telle expérience, le niveau de la PSD est augmenté :

- quadratiquement par l'augmentation de la fréquence de la source laser  $\omega_0$ .
- quadratiquement par la diminution de  $\omega$ .
- quadratiquement par l'augmentation du délai  $T_0$  pour  $\omega T_0/2 \ll 1$ .
- linéairement avec l'augmentation de la durée de l'expérience  $T_{exp}$ .

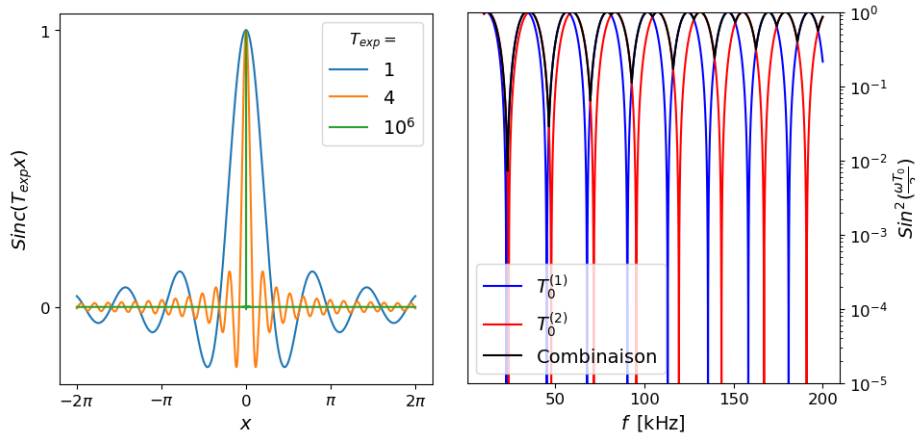


FIGURE 3.8 – a) L'augmentation de la durée de l'expérience  $T_{exp}$  transforme le sinus cardinal en un dirac. b) Bien qu'individuellement les fonctions de transfert de l'interféromètre présentent de nombreuses zones sans sensibilités, la combinaison de deux mesures avec des délais différents permet de recouvrir une partie de ces zones rendant l'expérience sensible sur la majorité de l'intervalle.

Il est également important de noter que la fonction de transfert de l'interféromètre à bras inégaux fait apparaître des fréquences pour lesquelles le système sera insensible (lorsque le terme  $\sin(\omega_\varphi T_0/2)$  dans l'équation (3.64) est nul). Une solution assez simple consiste à réaliser l'expérience deux fois avec des délais  $T_0$  différents afin de réduire les zones d'insensibilités (figure 3.8). Si un niveau de détail supplémentaire est nécessaire, il suffit d'ajouter des mesures avec d'autres délais.

### 3.3.2 Evolution de l'expérience

La mise en place de l'expérience DAMNED (pour "DARk Matter from Non-Equal Delay") a nécessité plusieurs versions avant d'aboutir à la forme actuelle qui a permis d'obtenir les résultats présentés dans ce tapuscrit.

#### Version simple

La première version de l'expérience a posé les bases du dispositif dans son état actuel. Il s'agissait de transcrire le schéma conceptuel de la figure 3.7 en un dispositif optique. L'expérience représentée dans la figure 3.9 est composée de gauche à droite de :

- Un laser Koheras Adjustik qui fourni un signal optique à la longueur d'onde de  $1.5 \mu\text{m}$  [27].
- Une cavité ultrastable de 10 cm formée par deux miroirs espacés par un cylindre creux de verre ULE [28]. Elle permet de stabiliser le faisceau laser.
- Le signal est réparti inéquitablement à l'aide de séparateurs optiques sur
  - une première branche qui contient 5 bobines de  $\sim 25 \text{ km}$  et qui sert de branche de détection pour le couplage à la matière noire. Les modules de multiplexage (OADM) étaient utilisées dans les premières versions de l'expérience afin de partager les bobines de fibre optique utilisées par les collègues du laboratoire.
  - une seconde branche contenant un modulateur acousto-optique (AOM) qui permet de décaler en fréquence de 37 MHz le signal issu de la cavité pour réaliser une détection hétérodyne.
- Une diode optique qui permet de convertir le signal optique en signal électrique.
- Un compteur BI200 [29] permettant l'acquisition et dont l'horloge interne est synchronisée sur la référence 10 MHz du laboratoire.

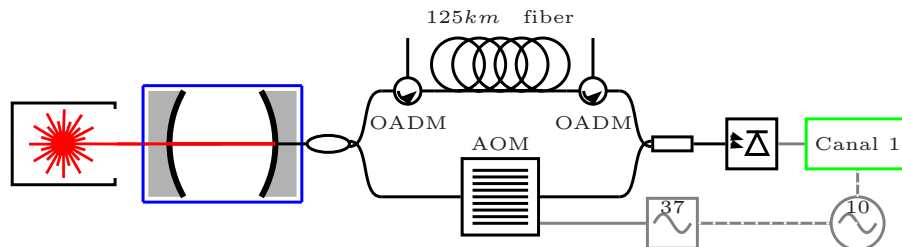


FIGURE 3.9 – Démonstrateur pour l'expérience DAMNED

Cette première version m'a servi à prendre mes marques dans le monde nouveau des expérimentateurs. L'ensemble du dispositif a donc servi de démonstrateur et à mon apprentissage de la recherche expérimentale. Même si ces premiers paramètres n'ont pas été conservés, il était question de choisir la fréquence optimale pour l'AOM, la durée et la fréquence des acquisitions, de choisir le format des données, de prendre en main le compteur BI, de réaliser la délicate tâche de l'entretien des connecteurs des fibres optiques...

### Version double

Cette seconde version est la version non optimisée de l'expérience mais qui s'approche de l'état actuel du dispositif. Elle a permis de démontrer les performances atteignables par le dispositif. L'objectif est de doubler l'expérience avec des longueurs de fibre différentes :

- Interféromètre "Signal" : La première partie de l'expérience (en haut sur la figure 3.10) est sensible à la matière noire puisque le couplage de la matière noire est mesurable grâce au délai introduit par la fibre optique.
- Interféromètre "Référence" : La seconde partie (en bas) n'est pas sensible à la matière noire puisque la fibre est trop courte. Cette partie permet cependant de caractériser le bruit et les effets systématiques de l'expérience.

Les signaux issus des deux interféromètres sont acquis en parallèle et permettent de décorréler les effets systématiques d'un potentiel signal de matière noire.

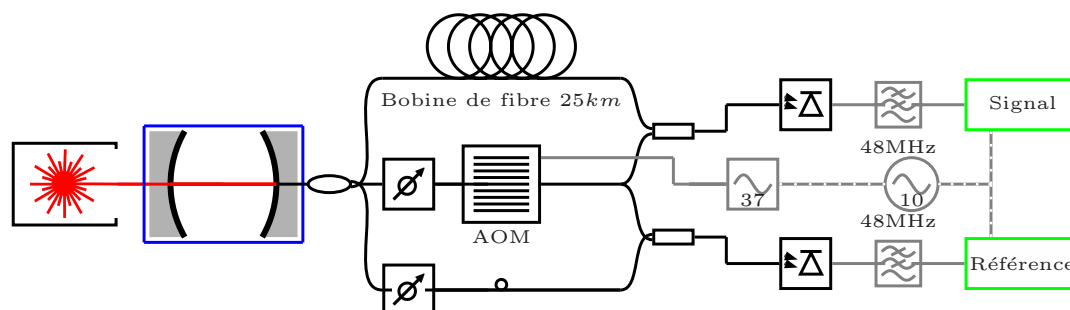


FIGURE 3.10 – Version à deux interféromètres de l'expérience DAMNED

Au-delà de l'ajout d'une troisième branche, dans cette version :

- Les OADM qui permettaient de partager la fibre sont abandonnés et l'expérience a maintenant ses bobines de fibre dédiées. Dans cette version, une seule bobine de 25 km a été utilisée.
- Des atténuateurs optiques variables sont ajoutés dans les branches courtes afin d'ajuster le niveau de puissance de chaque bras. Ceci permet d'assurer une détection hétérodyne et de contrôler le bruit de grenaille sur les photodiodes.
- Des filtres passe-bas sont ajoutés afin d'exclure les harmoniques d'ordre élevé dans le signal électronique.
- Le compteur BI est abandonné au profit d'un compteur GT9000 [30] qui permet d'acquérir les deux signaux en parallèle, à une fréquence plus élevée et avec un bruit de digitalisation moindre.

### Premiers résultats

A l'aide du dispositif décrit précédemment, la différence de fréquence de l'interféromètre "Signal"  $\nu_S$  et celle de l'interféromètre "Référence"  $\nu_R$  sont enregistrés en parallèle. Dans chaque cas, la fréquence moyenne du signal correspond à la fréquence



de l'AOM ( $\langle \nu_S \rangle = \langle \nu_R \rangle = \nu_{AOM} \simeq 37$  MHz). La différence relative de fréquence  $y(t) = (\nu(t) - \nu_{AOM})/\nu_{AOM}$  permet de calculer la densité spectrale de puissance  $S_{[y]}$ . En utilisant le lien entre la densité spectrale de puissance d'une quantité en fréquence et en phase, on obtient la densité spectrale de la différence de phase  $\Delta\phi$  de chaque interféromètre :

$$S_{[\Delta\phi]}(f) = \left( \frac{\nu_{AOM}}{f} \right)^2 S_{[y]}(f) \quad (3.65)$$

Les résultats de cette version de l'expérience sont représentés dans la figure 3.11. La PSD affichée est la moyenne de 12 acquisitions de 4.32 ms comprenant  $10^4$  mesures de fréquence avec un intervalle de temps de 432 ns. En raison de la faible mémoire vive du compteur, les acquisitions sont séparés d'environ 5 secondes. Malgré tout, les 12 jeux de données correspondent à une durée effective de mesure d'environ une minute, ce qui permet de supposer que les conditions expérimentales sont les mêmes pour les différentes acquisitions. La ligne verte (respectivement bleue) représente la moyenne des 12 PSDs de l'interféromètre "Signal" (resp. "Référence").

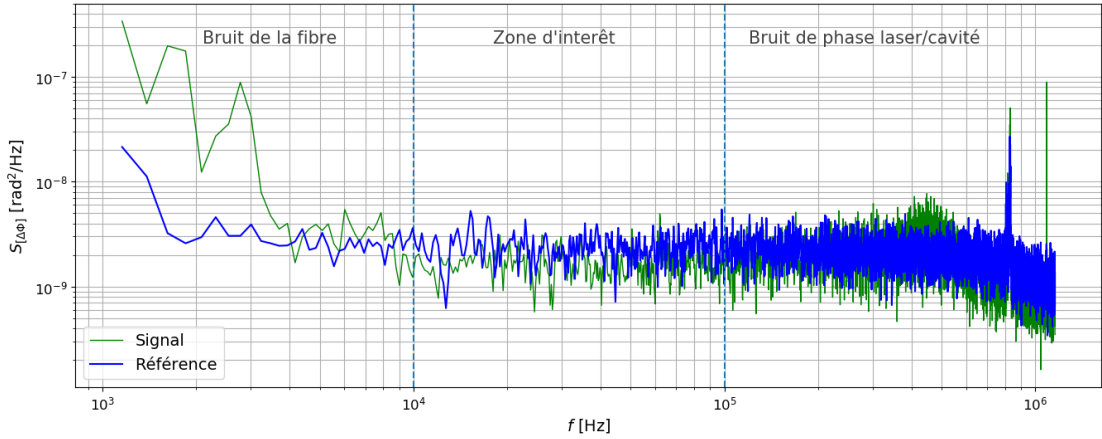


FIGURE 3.11 – Moyenne de 12 PSDs quasi-consécutives des données issues de l'interféromètre "Signal" en vert et "Référence" en bleu. Trois zones de bruits sont délimitées : bruit de la fibre en dessous de 10 kHz, bruit de la cavité au dessus de 100 kHz et bruit de la photodiode entre les deux.

La PSD délimite trois intervalles de fréquence différents :

- En dessous de 10 kHz, la PSD est limitée par le bruit thermique et acoustique des fibres. Ce bruit est absent dans la version "Référence" puisque la fibre est plus courte.
- Au dessus de 100 kHz, la PSD est limitée par la stabilité de l'ensemble laser/cavité. Le pic autour de 400 kHz provient de la méthode d'asservissement du laser sur la cavité. au-delà, le bruit correspond au mode libre du laser.
- Entre 10 et 100 kHz, la PSD est principalement limitée par le bruit de mesure. Cela correspond au bruit de grenaille du laser sur la photodiode. La portion plate de la

PSD correspondant à un bruit blanc est représentative d'un tel effet. En modulant linéairement la puissance du laser en entrée de la cavité (de  $40 \mu\text{W}$  à  $1000 \mu\text{W}$ ), la puissance sur les photodiodes varie linéairement (de  $1 \mu\text{W}$  à  $35 \mu\text{W}$ ). Sur cette gamme de puissance, on observe expérimentalement une dépendance linéaire du niveau de bruit avec la puissance du laser qui confirme la présence d'un bruit de grenaille. Le bruit étant compris et maîtrisable, la zone de recherche de la matière noire se trouve donc entre 10 et 100 kHz.

La zone d'intérêt pourrait être étendue :

- en dessous de  $\sim 10$  kHz en plaçant les bobines de fibre dans un environnement contrôlé en température et en vibration, voire dans une enceinte à vide. Dans l'état actuel de l'expérience, les bobines sont placées dans un carton rembourré placé sur une table antivibratoire passive,
- au dessus de  $\sim 100$  kHz en modifiant les paramètres de la boucle d'asservissement du laser sur la cavité.

### Limite du bruit de la cavité

Comme décrit brièvement précédemment, le bruit dans la zone d'intérêt est un bruit blanc de phase qui est dû au bruit de grenaille de la photodiode. En théorie, ce bruit peut être diminué autant que nécessaire en augmentant la puissance du faisceau incident à l'aide d'un amplificateur optique. Pour un certain niveau de puissance, le bruit de grenaille n'est plus limitant et laisse apparaître les autres sources de bruit de l'expérience. Dans notre cas, le bruit qui devient dominant provient de la stabilité de la cavité à haute fréquence.

La cavité "bleue" a été choisie puisqu'elle a les meilleures performances dans la zone d'intérêt par rapport aux deux autres cavités disponibles à l'Observatoire. Leurs performances avaient été évaluées par l'équipe "LOUS" en 2017 et sont représentées dans la figure 3 de [31]. La cavité "bleue" présentait un plateau de bruit au dessus de 1 kHz avec un niveau de PSD de l'ordre de  $\sim 10^{-9}$  rad<sup>2</sup>/Hz.

Ce bruit, intrinsèque à la cavité, va donc se propager dans l'interféromètre et induire un bruit interférométrique dont la signature est particulière. Considérons  $\phi_c(t)$  le bruit de la cavité à tout instant et dont les caractéristiques de la PSD  $S_{[\phi_c]}$  sont connues. Une composante spectrale du bruit ou du signal de la cavité peut s'exprimer sous la forme :

$$\phi_c(t) = C_\omega \cos(\omega t) + S_\omega \sin(\omega t) \quad (3.66)$$

où  $C_\omega$  et  $S_\omega$  sont des variables arbitraires. L'interféromètre défini plus haut mesure la différence entre le bruit aux instants  $t$  et  $t - T$ . Le bruit de la cavité vu à travers notre interféromètre  $\Delta\phi_c(t)$  s'écrit :

$$\Delta\phi(t) = \phi_c(t) - \phi_c(t - T) \quad (3.67)$$

La fonction d'autocorrélation de cette quantité dépend de celle de la cavité  $R_{[\phi_c]}(\tau)$  qui est définie par l'équation (3.60) :

$$R_{[\Delta\phi]}(\tau) = \left( C_{\Delta\phi}^2 + S_\omega^2 \right) \cos(\omega_m \tau) (1 - \cos(\omega T)) = 4 \sin^2 \left( \frac{\omega T}{2} \right) R_{[\phi_c]}(\tau) \quad (3.68)$$

Grâce à cette fonction, on peut définir la PSD en fonction de la PSD du bruit de la cavité  $S_{[\phi_c]}(\tau)$  :

$$S_{[\Delta\phi]}(\omega) = 2 \int R_{[\Delta\phi]} e^{i\omega\tau} d\tau \simeq 4 \sin^2 \left( \frac{\omega T}{2} \right) S_{[\phi_c]}(\omega) \quad (3.69)$$

Cette fonction de transfert est nulle pour tout  $\omega = n \times \pi/T$  pour laquelle l'interféromètre est insensible au signal de la cavité.

Grâce à cette fonction de transfert d'un interféromètre à bras inégaux, il est possible de prédire l'effet du bruit de la cavité (dérivé de la figure 4 de [31]) pour une fibre de 25 km. En augmentant sensiblement la puissance du laser, il est possible d'observer expérimentalement cette effet dans la PSD d'une mesure de DAMNED.

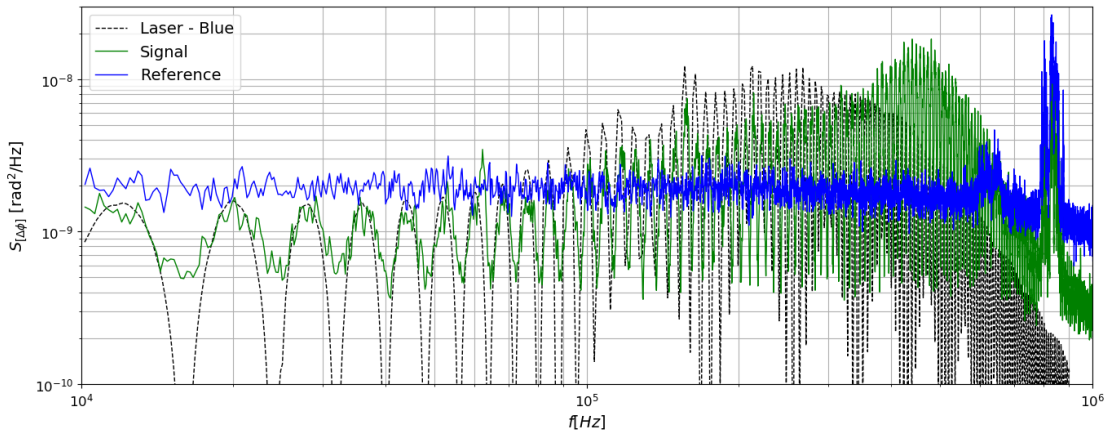


FIGURE 3.12 – En noir : Bruit de la cavité calculé à l'aide de l'équation (3.69) où le niveau de bruit de la cavité est issu de [31]. En vert (resp. bleu), le bruit de la cavité mesuré par l'interféromètre à bras inégaux dans la configuration "Signal" (resp. "Référence").

On observe une très forte corrélation entre la courbe noire qui représente le bruit de la cavité calculé à partir de [31] et (3.69) et la courbe verte qui correspond à la mesure du signal issu de la cavité par DAMNED avec une longueur de fibre de 25 km. La fonction de transfert pour cette longueur doit présenter des extinctions à tous les multiples de 8 kHz, c'est cette fréquence que l'on observe dans la figure 3.12. Le niveau de bruit est en accord parfait entre les deux méthodes. Ce résultat confirme donc la présence d'un bruit plancher ( $\sim 10^{-9}$  rad<sup>2</sup>/Hz) qui s'avère être très proche du bruit de grenaille de la photodiode ( $2 \times 10^{-9}$  rad<sup>2</sup>/Hz). On remarquera également que la position du pic d'asservissement de la cavité a été déplacé à plus haute fréquence depuis 2017.

Malheureusement, ce niveau de bruit n'aura pas pu être conservé pour la dernière version de l'expérience. Lors de l'une des périodes de canicule de l'été 2018, les systèmes de climatisation du laboratoire Foucault n'ont pas permis de maintenir une température basse dans la salle. L'une des conséquences pour DAMNED est la dégradation d'un facteur 10 du niveau de bruit de la cavité dans la zone d'intérêt.

### Version actuelle

La dernière version de l'expérience est l'aboutissement du processus d'optimisation du dispositif. L'objectif de cette version était d'être utilisable pendant un période d'acquisition plus conséquente. Il est plus simple de mesurer l'amplitude d'un signal lorsqu'une acquisition est de longue durée puisque la plus faible amplitude détectable évolue comme  $\sqrt{S_{[\Delta\phi]}/T_{exp}}$ . En passant de quelques millisecondes à plusieurs jours, la sensibilité au signal de matière noire est donc augmentée d'un facteur  $10^3$ .

Une expérience de cette durée entraîne trois complications majeures :

- Le signal de la cavité doit être stable sur la durée d'acquisition. Une simple interruption du signal nécessite le redémarrage de la séance d'acquisition.
- Des données en continu avec un taux d'échantillonnage élevé ( $\sim 500$  kHz) nécessite un dispositif dédié capable de digitaliser le signal analogique et de l'enregistrer sur un disque dur suffisamment rapidement pour ne pas entraîner de temps mort.
- L'acquisition de quelques jours de données ( $\sim 2 \times 10^6$  s) à une fréquence d'échantillonnage élevée crée une quantité faramineuse de données (plusieurs teraoctets) à enregistrer pour être analysée par la suite.

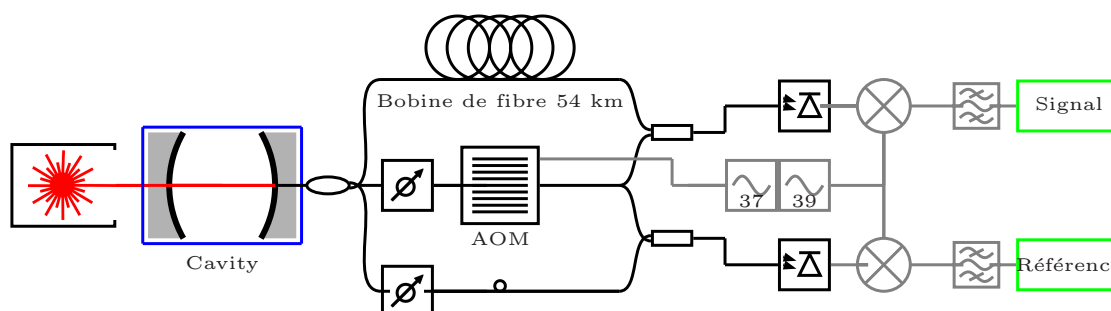


FIGURE 3.13 – Version actuelle de l'expérience DAMNED

Afin de résoudre ces problèmes, il a fallu modifier la partie électronique responsable de l'acquisition :

- Le signal de l'interféromètre est mélangé avec un signal à 39 MHz puis il passe dans un filtre passe-bas de 5 MHz. Le signal a digitaliser oscille à 2 MHz.
- Un Ettus X310 [32] équipé de deux cartes LFRX de digitalisation bas-bruit est utilisé pour acquérir les données avec une fréquence d'échantillonnage maximal de l'ordre de  $\sim 200$  MHz.
  - L'interface avec l'Ettus se fait par le biais d'un ordinateur portable auquel est relié un disque dur externe de plusieurs teraoctets.
  - Le signal est mélangé numériquement avec un signal de référence de 2 MHz (généralisé à partir d'une source RF stable et exacte à 10 MHz disponible dans l'ensemble du laboratoire).
  - Le signal démodulé donne accès aux composantes en phase et en quadrature de phase (communément appelées "I/Q") qui, une fois recombinaisonnées, donnent accès à la phase et l'amplitude du signal acquis.

- La phase du signal est finalement enregistrée sur le disque dur externe pour un traitement ultérieur.
- La phase extraite par démodulation I/Q est contenue entre 0 et  $2\pi$  et il est nécessaire de la dérouler pour assurer la continuité de phase du signal.

Pour les différentes étapes de l'acquisition, un développement logiciel a été nécessaire pour assurer le suivi et la continuité de l'acquisition et pour préparer le traitement numérique des données qui sera abordé dans la partie suivante. Cette version de l'expérience a permis d'obtenir les contraintes (présentées dans les sections suivantes) sur le couplage de la matière noire avec le dispositif expérimental.

### Campagne de mesure

Afin de profiter des pleines capacités de l'expérience, une campagne de mesure a été réalisé en deux acquisitions :

- **Durée de la mesure** : La douzaine de jours (1099551 s) de l'acquisition a été un compromis entre sensibilité de l'expérience et espace disque. Une durée  $T_0$  trop courte aurait fortement contraint les capacités de détection de l'expérience comme on peut le voir dans l'équation (3.64). Une durée trop longue aurait nécessité l'utilisation de disque durs volumineux ainsi qu'un traitement et une analyse particulièrement longues par la suite.
- **Deux longueurs de fibre** : Afin de limiter les zones d'insensibilités créées par la fonction de transfert décrite dans l'équation (3.69), il a été choisi de réaliser deux acquisitions consécutives avec deux longueurs de fibre différentes. La longueur optique ( $T_0$ ) est mesurée par deux méthodes complémentaires :
  - En ajustant la fonction de transfert sur la PSD du signal (comme pour la figure 3.12 par exemple), on obtient une estimation numérique du délai optique  $T_0$ .
  - On peut mesurer expérimentalement le retard  $T_0$  accumulé par un paquet d'onde transmis à travers la fibre.

Les deux méthodes donnent des résultats similaires à une dizaine de mètres près : 56.09 km pour la première acquisition et 52.61 km pour la seconde. Avec ces deux longueurs, on obtient une zone de sensibilité qui est représentée dans la figure 3.8.

- **Quantité de données** : Lors des deux sessions expérimentales, des données (mesure de phase) ont été collectées pendant  $T_{exp} \simeq 12$  jours avec une fréquence d'échantillonnage de  $f_s = 500kHz$ . Chaque valeur est enregistrée sous la forme d'un nombre réel "floatant" de  $N_b = 32$  bits. Le nombre total de bits pour une branche d'acquisition est donc  $N = T_{exp} f_s N_b = 2^{39} 32 = 2^{44} \sim 17.6$  Tb, soit près de 2 To. Avec les deux interféromètres ("Signal" et "Référence") et les deux longueurs de fibre, on atteint donc près de 8 To de données à traiter et analyser !

### 3.3.3 Transformée de Fourier discrète

Afin de réaliser l'analyse (voir section 3.5), la transformée de Fourier discrète (DFT) des données expérimentales  $d(t)$  doit être calculée. La transformée de Fourier  $\tilde{d}(f)$  est calculée numériquement en discrétisant le temps  $t = n/f_s$  et la fréquence  $f = f_s/N$  :

$$\tilde{d}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)e^{-2\pi i f t} dt \longrightarrow \tilde{d}_k = \sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{-2\pi i \frac{k}{N} n} \quad (3.70)$$

Le calcul de cette quantité est habituellement réalisé très rapidement sur un ordinateur de bureau mais le nombre de points  $N$  est ici trop important pour utiliser ces méthodes simples. Afin de souligner l'importance d'une approche réfléchie de la question, cette section présente les différents subtilités des méthodes numériques de transformée de Fourier.

#### Complexité

**DFT** Pour calculer la DFT, il est nécessaire de calculer pour chaque fréquence  $k/N$  et à chaque instant  $n$  le terme exponentiel sous la forme d'un sinus et d'un cosinus :

$$\tilde{d}_k = \sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{-2\pi i \frac{k}{N} j} = \sum_{n=0}^{N-1} d_j \left( \cos \left( 2\pi \frac{k}{N} j \right) - i \sin \left( 2\pi \frac{k}{N} j \right) \right) \quad (3.71)$$

Pour chaque fréquence (terme de la somme), il faut multiplier chaque valeur du signal  $s_j$  par les termes cosinus et sinus. Pour additionner les termes, nous devons garder la partie réelle et la partie imaginaire séparées. La somme compte  $N$  nombres et nécessite  $N - 1$  additions. Par conséquent, chaque fréquence nécessite  $2N + 2(N - 1) = 4N - 2$  étapes de calcul de base. Pour les  $N$  fréquences disponibles, on a donc  $N(4N - 2)$  opérations. Une DFT est une méthode numérique  $\mathcal{O}(N^2)$  pour un signal réel.

**FFT** La méthode pour diminuer la complexité de la transformée de Fourier a d'abord été trouvée par Gauss en 1805. James W. Cooley et John W. Tukey [33] démontreront plus d'un siècle plus tard la méthode de transformée de Fourier rapide (FFT) sur laquelle se base les méthodes numériques actuelles. On considère que le signal est constitué de  $N = 2^M$  points<sup>1</sup>. Pour cela, on décompose la somme sur les nombres pairs  $2j$  et impairs  $2j + 1$  :

$$\tilde{d}_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} d_{2j} e^{-2\pi i \frac{k}{N/2} j} + e^{-2\pi i \frac{k}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} d_{2j+1} e^{-2\pi i \frac{k}{N/2} j} \quad (3.72)$$

Le calcul de la DFT se fait donc à l'aide de DFTs plus courtes sur les valeurs paires et impaires. L'astuce consiste à utiliser des symétries dans chacun de ces termes. Puisque  $0 \leq k < N$  et  $0 \leq j < M = N/2$ , il suffit d'effectuer la moitié des calculs pour chaque sous-problème. Le calcul  $\mathcal{O}(N^2)$  est devenu  $\mathcal{O}(M^2)$ ,  $M$  étant la moitié de la taille de  $N$ .

1. Si ce n'est pas le cas, il suffit d'ajouter des zéros artificiels pour atteindre une puissance de 2.

Afin d'obtenir la FFT, chaque terme est à nouveau divisé en deux (tant que  $M$  est pair). Dans la limite asymptotique, cette approche récursive s'échelonne comme  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Cette diminution est très importante dans le cas de DAMNED où  $N = 2^{39}$  réduisant ainsi le coût de calcul d'un facteur  $\sim 10^{10}$ .

### Mémoire

Au-delà du temps de calcul, il est nécessaire de contenir la mémoire utilisée par l'algorithme de DFT. Il nécessite en effet les  $N$  valeurs du signal et crée une transformée de Fourier sur  $N$  fréquences. L'algorithme nécessite le stockage d'au moins  $2N$  éléments pour réaliser l'opération. La mémoire  $M$  nécessaire au stockage dépend du nombre de bits  $N_b$  sur lequel est écrit chaque élément :

$$M \geq 2NN_b \quad (3.73)$$

La mémoire RAM requise par la transformée est de 64 ou 128 bits pour un signal complexe et 32 ou 64 bits pour un signal réel. Etant donné la quantité de données disponibles ( $\sim 4$  Tb), il est impossible de réaliser la DFT de manière brute. Un seul set de données issu d'une branche de DAMNED nécessite 4 Tb de mémoire vive pour le seul algorithme de FFT. Evidemment, ces ressources ne sont pas disponibles au SYRTE et le choix s'est porté sur un ordinateur de bureau avec 16Gb de RAM. Pour calculer la FFT, cette limite sous-entend que le nombre  $n_m$  maximum de points est :

$$n_m = \left\lfloor \frac{M^{max}}{2N_b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{16 \times 10^9}{2 \times 32} \right\rfloor = 2^{28} \ll N^{tot} = 2^{39} \quad (3.74)$$

### Transformée de Fourier par morceau

Afin de pouvoir réaliser la DFT, il est nécessaire de découper les données en morceau de longueur  $n_m$ . Cette limite sur le nombre de point conduit à une résolution spectrale  $\Delta f = f_s/n_m$  moins bonne que lorsque la DFT est réalisée avec l'ensemble des  $N$  données ( $f_s/N$ ). La DFT calculée devient :

$$\tilde{d}_k = \sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{-2\pi i \frac{k}{N} j} \longrightarrow \tilde{d}_k = \sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{-2\pi i \frac{k}{n_m} j} \quad (3.75)$$

La somme contient toujours  $N$  termes qu'il faut stocker en mémoire. Pour remédier à cela, les données sont découpées en  $n$  morceaux de longueur  $n_m$  (tel que  $N = nn_m$ ) :

$$\tilde{d}_k = \sum_{j=0}^{n_m \times n - 1} d_j e^{-2\pi i \frac{k}{n_m} j} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n_m-1} d_{m \times n_m + j} e^{-2\pi i \frac{k}{n_m} j} = \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{d}_k^{(m)} \quad (3.76)$$

où  $\tilde{d}_k^{(m)}$  correspond à la transformée de Fourier du  $n^{\text{ème}}$  bloc de données. Avec ce découpage et la méthode de FFT, on perd en résolution spectrale mais le calcul est réalisable avec la mémoire RAM d'un ordinateur de bureau dans un temps raisonnable ( $\sim 12$  heures pour 12 jours de données d'un des deux interféromètres).

### Application pratique

Afin d'optimiser la mémoire et le temps de calcul pour la transformation des données, j'ai dû étalonner les différentes méthodes numériques existantes disponibles en Python3. Les résultats sont reportés dans la figure 3.14.

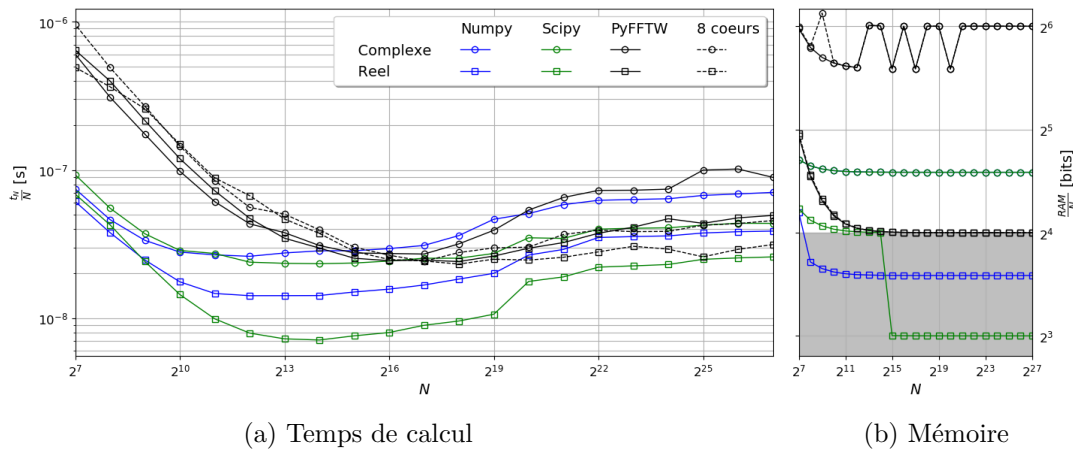


FIGURE 3.14 – Performance des différents méthodes de DFT en fonction du nombre de points de données. Les bibliothèques Scipy et Numpy sont les plus rapides grâce à la diminution du nombre de digits sur lequel est réalisé la DFT. Puisque cette précision est cruciale, la bibliothèque pyFFTW est choisie avec l'option de parallélisation sur 8 coeurs.

Les méthodes de FFT comparées reposent sur les bibliothèques NUMPY, SCIPY et PYFFTW (interface entre la bibliothèque C FFTW et le langage Python). Afin de digitaliser les données expérimentales avec une précision suffisante, il est nécessaire d'avoir chaque nombre écrit sur 4 octets (ou 32 bits). Les méthodes "Scipy-R" et "Numpy-R" atteignent une vitesse plus élevée de calcul en diminuant la précision des valeurs utilisées lors de l'opération. Ces deux méthodes perdent donc en résolution numérique et ne sont pas viables. C'est pourquoi le choix s'est porté sur la méthode PYFFTW avec 8 coeurs de calcul. Les FFTs des  $n$  blocs de  $n_m$  données sont calculées séquentiellement et sommées à chaque étape pour obtenir la transformée de Fourier sur la totalité de l'expérience. Afin de ne pas surcharger la mémoire de l'ordinateur, le nombre de points par morceau est fixé à  $n_m = 2^{27}$ . La résolution spectrale correspondante est  $\Delta f = f_s/n_m$ . Pour DAMNED, cette résolution est de  $\sim 3.7$  mHz, ce qui correspond à une durée de 268 s pour chaque bloc de données.

Conséquence amusante, avec ces choix, le logiciel de calcul est actuellement limité par la vitesse de lecture sur un disque dur externe<sup>2</sup>. Dans ces conditions, la création de la transformée de Fourier de l'ensemble des données nécessite un temps de calcul de l'ordre d'une douzaine d'heures pour chaque jeu de données.

2. la valeur mesurée "expérimentalement" est d'ailleurs en très bon accord avec le cahier des charges du constructeur



### 3.3.4 Modélisation du bruit de la cavité

En utilisant le logiciel décrit précédemment, il est possible d'obtenir la transformée de Fourier de l'ensemble des données et d'en déduire la PSD :

$$S_{[d]}(f) = 2 \frac{|\tilde{d}(f)|^2}{N} f_s \longrightarrow D_k = 2 \frac{\left| \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{d}_k^{(m)} \right|^2}{n \cdot n_m} f_s \quad (3.77)$$

La version numérique de cette formule permet d'obtenir la PSD  $S_{\Delta\phi}$  de la différence de phase  $\Delta\phi$  mesurée par DAMNED. Les résultats d'une acquisition de  $\sim 12$  jours sont représentés dans la figure 3.15.

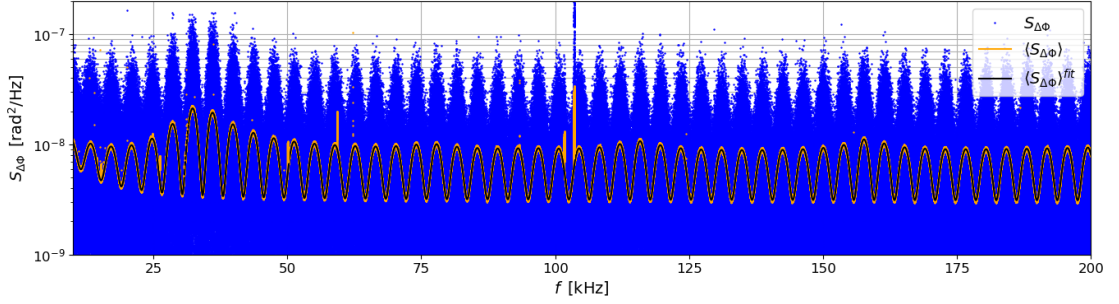


FIGURE 3.15 – PSD pour l'interféromètre "Signal" pour une acquisition de  $\sim 12$  jours. Les points bleus représentent la PSD de l'ensemble des données. La ligne orange correspond à la moyenne des PSD calculées sur chaque bloc de données. La ligne noire correspond à l'ajustement de la courbe orange afin de modéliser l'effet du bruit de la combinaison laser/cavité sur l'expérience DAMNED.

On retrouve dans le tracé bleu la fonction de transfert de l'interféromètre qui fait apparaître des zones de sensibilités très faibles. Visuellement, aucun signal ne semble ressortir de ces données. Afin de caractériser le niveau de bruit moyen, la PSD  $S_{\Delta\phi}^{(m)}$  de chaque morceau (parmi les  $n$ ) est calculée et sommée afin d'obtenir une PSD moyenne permettant de décrire le système à intervalle régulier ( $T_{exp}/n \sim 300$  s).

$$\langle S_{\Delta\phi} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n S_{\Delta\phi}^{(m)} \quad (3.78)$$

On obtient le bruit stationnaire de l'expérience (en orange) qui présente la trace claire de la fonction de transfert de DAMNED. Le niveau moyen de la PSD de l'ensemble des données a augmenté d'un ordre de grandeur par rapport à la première version de l'expérience (figure 3.12). Le niveau précédent n'a jamais été retrouvé et il est fort probable que la cavité "bleue" ait subi une dégradation de son alignement optique. Malgré tout, on observe la présence de pics à  $\sim 25, 50, 59, 101$  et  $103$  kHz. En principe, ces pics sont considérés comme des signaux puisque leur étendue spectrale est faible et leur amplitude est élevée. L'origine de ces pics sera abordée plus tard mais leur présence nécessite une attention particulière.

### $\langle S \rangle^{fit}$ Modélisation de la PSD du bruit de la cavité

Afin de faire ressortir ces pics clairement, il est nécessaire de modéliser le bruit de la cavité. Pour cela, on utilise la formule (3.69) pour relier le bruit de la cavité  $\phi_c$  vu à travers DAMNED. Pour retrouver la PSD du bruit de la cavité, il est nécessaire de modéliser numériquement la fonction de transfert expérimentale de l'expérience. La méthode numérique utilisée fonctionne selon les étapes suivantes :

- La fonction  $y(f, A, T) = A \sin^2(\pi f T)$  est ajustée sur la PSD pour obtenir une estimation du délai  $T$ .
- A l'aide de l'ajustement d'un polynôme du second ordre, les maximas (rond bleu) et minimas (rond rouge) de la fonction de transfert sont trouvés.
- Une interpolation linéaire permet d'obtenir l'enveloppe supérieure  $S_{max}(f)$  (en tiret bleu) et l'enveloppe inférieure  $S_{min}(f)$  (en tiret rouge) de la fonction de transfert.

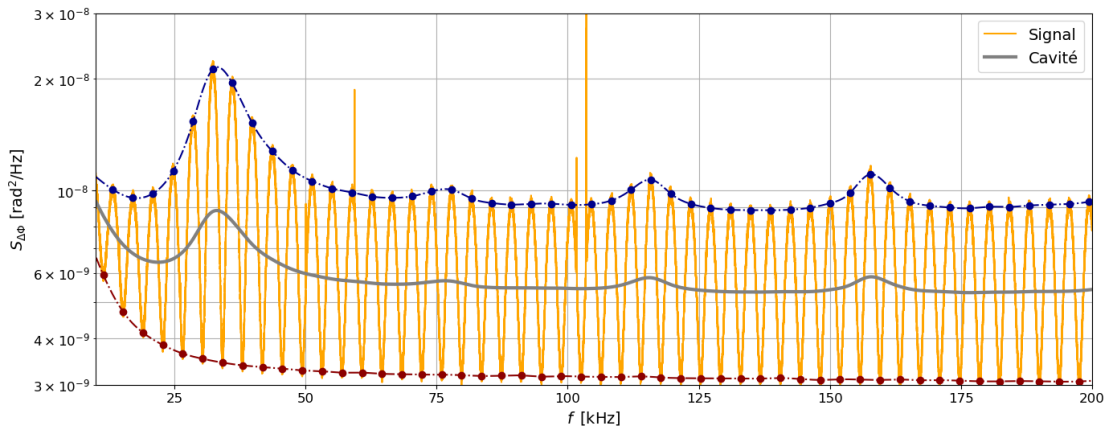


FIGURE 3.16 – PSD du bruit de la cavité (en gris) ajustée à partir de la PSD moyenne des données (en orange) obtenue en retrouvant la position des minimas (en rouge) et maximas (en bleu) de la fonction de transfert du bruit de la cavité.

Le bruit de DAMNED est donc caractérisé par l'équation :

$$\langle S_{\Delta\phi} \rangle^{fit}(f) \equiv S_{max}(f) \sin^2(\pi f T) + S_{min}(f) \quad (3.79)$$

Afin de s'assurer de la bonne réussite de l'ajustement numérique, on calcule les résidus  $S/S^{fit}$  de la PSD expérimentale  $S$  par la PSD modélisée  $S_{fit}$ . Si cette modélisation est bonne, ces résidus ne doivent contenir que le bruit résiduel de l'expérience DAMNED et la forme singulière de la fonction de transfert doit avoir disparu. A l'exception de pics fins (voir ci-après), il ne reste qu'un bruit dans les résidus de la figure 3.18. Cette absence de signal dans les résidus confirme donc le bon ajustement du bruit de l'expérience.

### 3.3.5 Effets systématiques

Les pics visibles dans la figure 3.15 sont représentatifs de signaux non identifiés. Afin de ne pas confondre des effets systématiques avec un signal issu de la matière noire, il est nécessaire de caractériser ces différents pics présents dans la PSD.

#### Seuil Lomb-Scargle

Selon [34], on peut définir un seuil pour déterminer si un pic est une simple fluctuation statistique créée par du bruit. Ce seuil est défini en fonction du nombre de fréquence  $N_f$  sur laquelle est définie la PSD et de la probabilité  $p_0$  choisie comme degré de confiance :

$$\mathcal{P}(S_{\Delta\phi}(f) < S_{th}(f)) = (1 - p_0)^{1/N_f} \quad (3.80)$$

La puissance d'un bruit étant distribuée de manière exponentielle, on obtient :

$$\mathcal{P}(S_{\Delta\phi}(f) < S_{th}(f)) = 1 - e^{-\frac{S_{th}(f)}{S_{\Delta\phi}(f)}} \quad (3.81)$$

On obtient alors le seuil de détection des signaux pour la PSD du bruit de la cavité :

$$S_{th}(f) = -S_{\Delta\phi} \ln \left( 1 - (1 - p_0)^{1/N_f} \right) \quad (3.82)$$

Une première étape consiste à définir un niveau de détection à l'aide du seuil de Lomb-Scargle (voir encart et [34]). Tout pic dépassant ce niveau peut être un signal. La ligne grise de la figure 3.17 correspond au niveau de seuil de Lomb-Scargle pour une certitude de 95%. Les points cerclés en rouge (resp. orange) correspondent aux pics de la PSD des données de l'interféromètre "Signal" (resp. Référence) qui dépassent ce seuil.

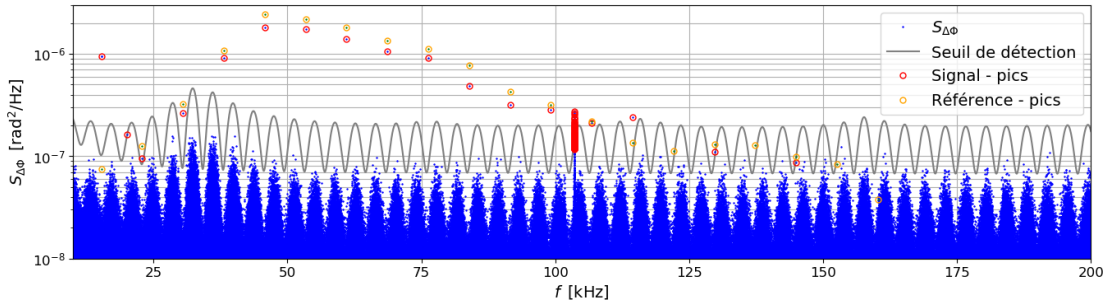


FIGURE 3.17 – Seuil de détection Lomb-Scargle (en gris) pour la PSD (en bleu). Les pics cerclés en rouge (resp. jaune) représentent les signaux issus de l'interféromètre "Signal" (resp. "Référence") et dont l'amplitude dépasse le seuil. On observe des signaux communs aux deux interféromètres et un pic uniquement présent dans "Signal" autour de 103 kHz.

### Etude des résidus de la PSD moyenne

Une deuxième approche consiste à étudier les résidus de l'ajustement de la PSD moyenne. La figure 3.18 représente la PSD moyenne normalisée par l'équation (3.79) pour les deux séries d'acquisitions avec des fibres de 52 km (en bleu) et 56 km (en vert). La bande bleue (resp. verte) correspond à l'intervalle à  $2\sigma$  centré sur la moyenne de la PSD où  $\sigma$  est l'écart-type du rapport  $S/S_{fit}$  obtenue pour l'acquisition avec 52 km (resp. 56 km) de fibre. De ces intervalles de confiance ressortent plusieurs pics communs au deux sessions d'acquisition.

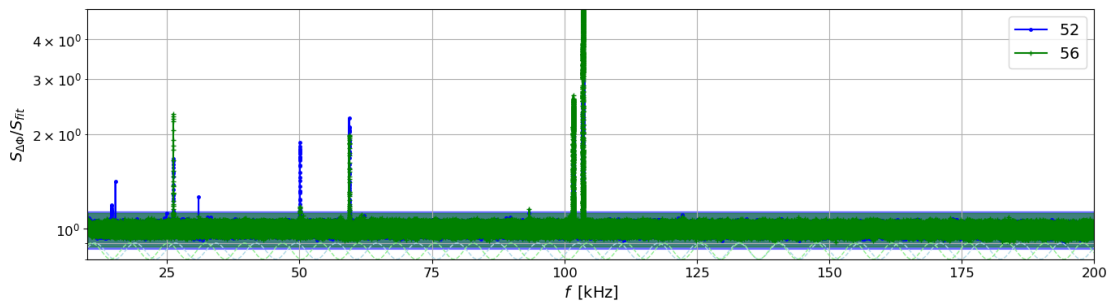


FIGURE 3.18 – PSD normalisée des données de l'interféromètre "Signal" des deux acquisitions : avec 52 km de fibre en bleu et 56 en vert. Des pics à  $\sim 25, 50, 59, 101$  et  $103$  kHz sont présents avec les deux longueurs de fibre. Les résidus, à l'exception des pics, ne présentent aucune structure.

Avec ces deux approches, plusieurs "signaux" sont identifiés mais leur origine reste inconnue. Les données issues de l'interféromètre "Référence" se révèlent cruciales pour classifier une partie de ces signaux comme des effets systématiques. On définit trois classes de pics : communs aux deux interféromètres, et caractéristique à l'un ou l'autre.

### Pics communs à "Signal" et "Référence"

Tous les pics communs à l'interféromètre "Signal" et l'interféromètre "Référence" sont nécessairement issus d'une source qui ne peut être due à l'oscillation des constantes fondamentales puisque l'interféromètre "Référence" est insensible à celles-ci par construction. Dans la figure 3.17, il s'agit de l'ensemble des pics dont la fréquence est un multiple entier de 7629 Hz. Ces pics ont une largeur correspondant à la résolution spectrale de la transformée de Fourier ( $\sim 3$  mHz) et n'évoluent pas temporellement au cours de l'expérience. Ce signal est vraisemblablement issu du système d'acquisition (Ettus) qui permet de digitaliser le signal analogique. Il sera donc nécessaire d'exclure ces pics lors de l'analyse.

### Pics de "Référence"

Tout pic présent dans "Référence" et non dans "Signal" n'a pas d'incidence sur la recherche de matière noire et n'est pas considéré par la suite.

### Pics de "Signal"

La présence de pics uniquement dans l'interféromètre "Signal" est d'autant plus intéressante. En effet, ces pics peuvent être dus à l'oscillation du champ scalaire et sont potentiellement des traces de la matière noire. Avec le seuil de détection défini plus haut, seul un signal à 103 kHz est visible dans la figure 3.17. En utilisant la seconde approche, on retrouve également ce pic accompagné de quatre autres à 26, 50, 59 et 101 kHz. Le club des cinq ne définit pas un spectre d'harmonique (aucun multiple commun) et ne semble pas avoir une origine commune. Les pics restants sont ceux qui étaient communs à "Signal" et "Référence" (voir ci-dessus).

En se concentrant sur les pics visibles dans la figure 3.18, on obtient les distributions spectrales de chaque pic représentées dans la figure 3.19. Visuellement, on peut déjà séparer le club des cinq en un duo et un trio :

- Les pics à 26, 50 et 59 kHz ont une forme proche d'une gaussienne et une étendue spectrale équivalente ( $\sim 4$  Hz). A noter que le pic à 50 kHz est très peu visible pour la fibre de 56 km puisque la fréquence est proche de l'un des minima de la fonction de transfert.
- Les pics à 101 et 103 kHz ont une forme plus complexe et une étendue spectrale plus importante ( $\sim 100$  Hz).

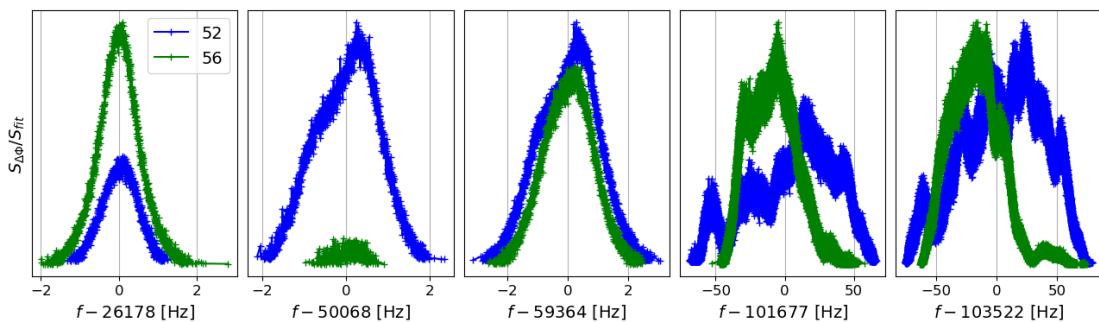


FIGURE 3.19 – Agrandissement des cinq pics présents dans la figure 3.18. Visuellement, on peut définir deux catégories de pics. Les trois premiers ont une forme gaussienne et une largeur de quelques Hertz. Les deux derniers ont une forme plus complexe et une largeur d'une centaine de Hertz.

La forme de ces pics est le résultat du moyennage réalisé pour obtenir la PSD. Si la fréquence centrale du signal a dérivé lors de l'expérience, le moyennage a nécessairement déformé le pic. Pour remédier à ce problème, lors du calcul de la PSD par bloc, les intervalles de fréquence visibles dans la figure 3.19 ont été étudiés plus attentivement. Pour ce faire, pour chaque bloc de données, la zone du pic est extraite puis ajustée par une fonction gaussienne  $y(f, A, f_c, \sigma_f) = A \exp(-(f - f_c)^2 / \sigma_f^2)$ . Cette opération est répétée toutes les  $\sim 300$  s de données et permet d'obtenir l'évolution de la position  $f_c$ , l'amplitude  $A$  et la largeur  $\sigma_f$  de chacun des pics tout au long de l'acquisition.

### Trio

Comme on peut le voir dans la figure 3.20, l'évolution de la fréquence centrale  $f_c$  du pic normalisée par rapport à la fréquence centrale moyenne  $\langle f_c \rangle$  est strictement la même pour les trois premiers pics.

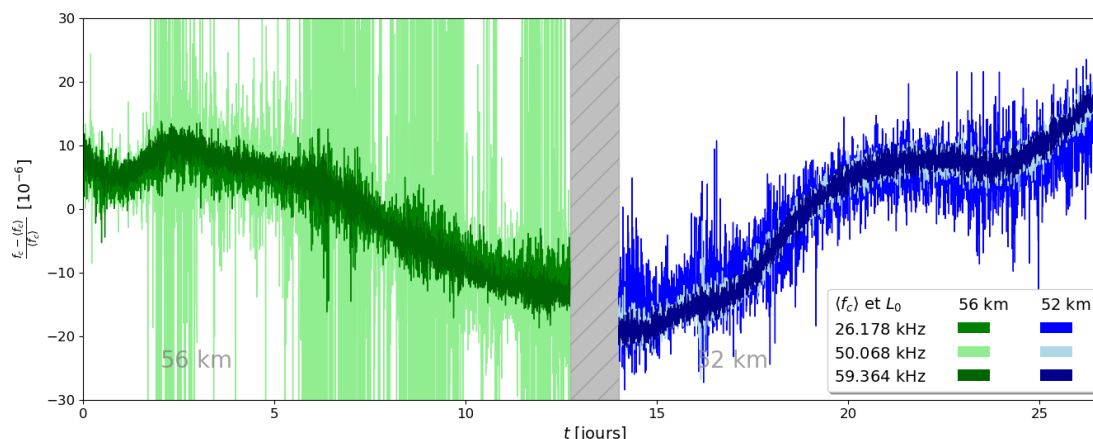


FIGURE 3.20 – Evolution relative de la fréquence centrale des pics du trio durant les deux sessions d'acquisitions. La dérive relative est la même pour les trois pics et l'amplitude est faible. Un des pics avec la fibre de 56 km est mal caractérisé puisqu'un des minima de la fonction de transfert est proche de sa fréquence  $\sim 50$  kHz.

La dérive relative est de l'ordre de  $\sim 10^{-5}$  sur la durée de l'expérience. On notera la mauvaise détermination de la fréquence centrale pour la fréquence autour de 50 kHz pour la fibre de  $\sim 56$  km pour laquelle la fonction de transfert présente une zone d'insensibilité.

Au vue de la corrélation, il est raisonnable de considérer que les trois pics ont une origine commune. L'origine de ces pics reste à déterminer. Malgré des discussions avec mes collègues expérimentateurs, la zone d'intérêt de DAMNED reste une zone peu étudiée au laboratoire puisqu'il s'agit de phénomènes à très haute fréquence, loin des fréquences d'intérêt pour les autres expériences du laboratoire. La présence de ces signaux dans l'interféromètre "Signal" sous-entend qu'ils proviennent soit d'un couplage avec la fibre longue soit avec la source optique.

- Dans le cas d'un couplage avec la fibre, des données ont été acquises avec une cavité et différentes longueurs de fibre afin de vérifier la présence des pics pour chaque longueur. Pour toutes les longueurs de fibre permettant de réaliser la mesure, les pics étaient présents et d'amplitude équivalente (modulo les variations du bruit expérimental). Puisque les pics sont présents pour toutes les longueurs, la source de ces trois pics ne trouve vraisemblablement pas son origine dans un couplage avec la fibre longue.
- Dans le cas d'un couplage avec la cavité, des données ont été acquises avec trois cavités ultrastables du laboratoire ([31]) de manière consécutive afin d'espérer mesurer le même signal en parallèle. Si la matière noire est à l'origine des pics, la

longueur de cohérence du champ scalaire est suffisante pour que le signal soit le même dans toutes les cavités qui se trouvent toutes dans un rayon de 10 m. Si les pics sont présents pour chaque cavité, bingo! Malheureusement, le bruit plancher des cavités ne permet pas de mesurer tous les pics (voir annexe 6.3.4) puisqu'il est plus élevé à haute fréquence pour les deux autres cavités.

- Le pic à 26 kHz est présent dans deux des trois cavités et absent de la troisième malgré un niveau de bruit suffisamment bas pour y être sensible. Même si les deux cavités ont été construites à la même période avec des technologies similaires, la position du pic diffère d'une dizaine de Hertz.
- Le pic à 50kHz est présent dans deux des trois cavités et absent de la troisième dont le niveau de bruit est trop élevé. La position du pic des deux cavités diffère d'une centaine de Hertz.

— Le pic à 59kHz est uniquement présent dans la cavité utilisée par DAMNED. Même si des pics sont communs entre deux cavités, la différence de position n'est pas compatible avec le niveau de dérivé observé (0.04 Hz/jour d'après 3.20) étant donné que les acquisitions ne sont séparées que de quelques minutes. La source des trois pics ne trouve vraisemblablement pas son origine dans un couplage de la matière noire avec les cavités du laboratoire.

**Effet systématique ou Matière noire ?** Ce trio de pics ne peut vraisemblablement trouver son origine dans le champ scalaire de matière noire :

- Les positions des trois pics évoluent ensemble lors deux des sessions d'acquisitions comme on peut le voir dans la dérive relative de la fréquence centrale (figure 3.20) qui est équivalente pour chaque pic. Ce type de dérive n'est pas attendu dans le modèle de matière étudiée mais pourrait provenir de la variation thermique d'un composant présent quelque part dans le dispositif expérimental.
- La position de ces pics varie d'une cavité à l'autre ce qui n'est pas non plus attendu dans le modèle de matière noire étudié. Cependant, ces différences plaident pour une origine spécifique à chaque cavité.

Malheureusement, l'origine exacte est inconnue mais un couplage de la matière noire est exclu dans les modèles étudiés ici.

## Duo

Comme on peut le voir dans la figure 3.21, l'évolution de la fréquence centrale  $f_c$  du pic est également corrélée pour les deux derniers pics.

La dérive relative est de l'ordre de  $\sim 10^{-3}$  sur la durée de l'expérience. Au vue de la corrélation, il est raisonnable de considérer que les deux pics ont une origine commune.

Les variations plus rapides de la position du pic ont une période journalière et bi-journalière comme on peut le voir dans la figure 3.21b. Malheureusement cet effet ne peut être attribué à la matière noire[35], puisque le relevé de la température dans la pièce où se trouve DAMNED révèle une forte corrélation entre température et position des pics (figure 3.22).

**Effet systématique ou Matière noire ?** Grâce aux discussions avec mes collègues expérimentateurs, l'origine de ce pic a pu être identifiée. La faible dérive, la présence de

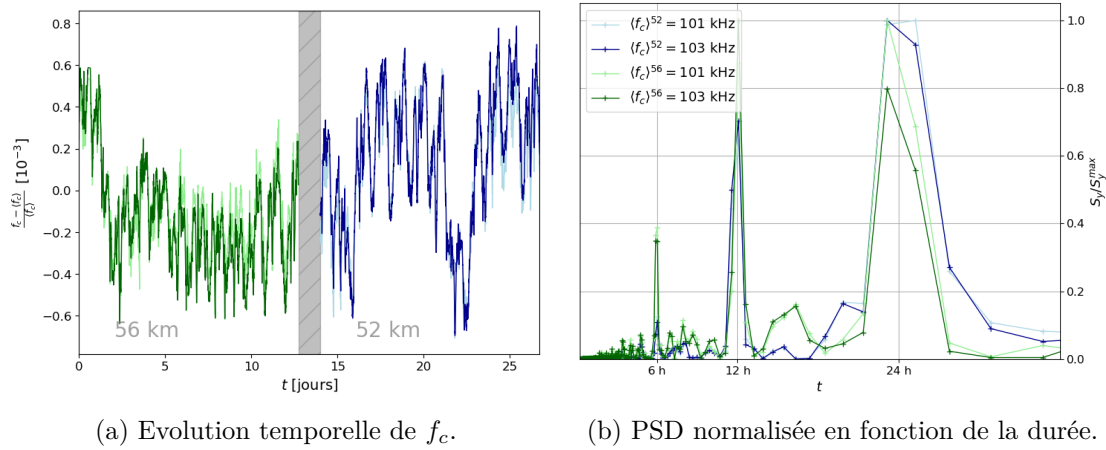


FIGURE 3.21 – Caractéristique de l'évolution relative de la fréquence centrale  $f_c$  des pics du duo. On observe (3.21a) une claire corrélation entre les deux pics. L'oscillation observée a une période journalière (3.21a) et une harmonique bi-journalière.

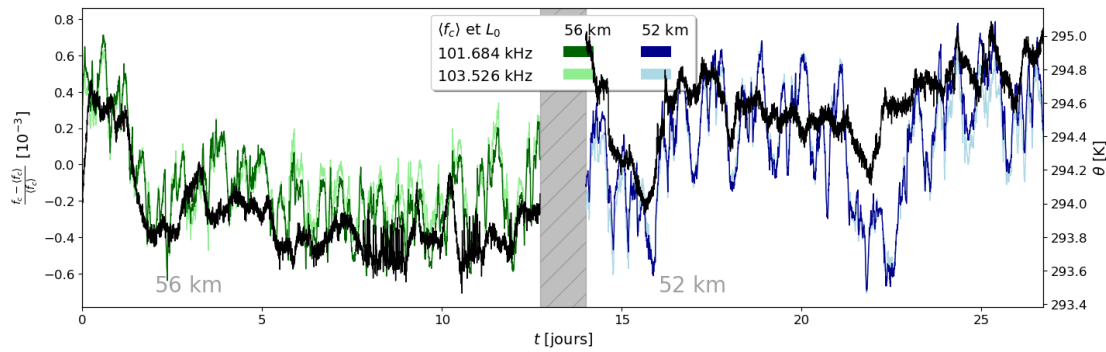


FIGURE 3.22 – L'évolution relative de la fréquence centrale des pics du duo (en bleu et vert) est corrélée à la température (en noir) mesurée dans le laboratoire.

deux pics évoluant ensemble et leur dépendance à la température indiquent que l'effet provient vraisemblablement du module piézo-électrique qui permet de contrôler la dérive de fréquence lente du laser. Les dimensions de ces modules changent par dilatation avec la modulation de la température environnante.

Lors de l'acquisition des données avec la cavité blanche qui se trouve dans la même pièce que la cavité bleue, il a été possible de détecter ce duo à des fréquences différentes ( $\sim 80$  et  $\sim 97$  kHz). La différence de position entre les deux cavités permet à nouveau d'exclure un signal de matière noire qui devrait se trouver strictement à la même fréquence lors d'une acquisition parallèle. Les boucles d'asservissement des deux cavités n'utilisent pas exactement le même module piézo-électrique ce qui explique la différence de position.



### Intervalles de fréquence exclus

Etant donné qu'il n'est pas possible de faire disparaître ces différents effets systématiques, il est nécessaire d'exclure les intervalles de fréquence (reportés dans le tableau 3.2) correspondant aux positions des différents pics puisque la présence d'effets systématiques masquerait le signal de matière noire.

Source	$\langle f \rangle$ /Hz	$r_f$	$\sigma_f$ /Hz	$[f_{min}/\text{Hz},$	$f_{max}/\text{Hz}]$
Inconnue	26178	$10^{-4}$	1	[26172.382,	26183.618]
	50069	$10^{-4}$	1	[50060.993,	50077.007]
	59364	$10^{-4}$	1	[59355.064,	59372.936]
Piezo	101684	$10^{-3}$	3	[101573.316,	101794.684]
	103525	$10^{-3}$	3	[103412.975,	103638.025]
Ettus	Multiple de 7629.395 $\sim$ Hz, $\sigma_f = 3 \sim$ mHz				

TABLE 3.2 – Zones d'exclusion dues aux effets systématiques. Tous les pics dérivent d'un facteur  $r_f$  par rapport à une fréquence moyenne  $\langle f \rangle$ . Avec la largeur  $\sigma_f$  de ce pic, une zone d'exclusion est définie par  $[\langle f \rangle \times (1 - r_f) - 3\sigma_f, \langle f \rangle \times (1 + r_f) + 3\sigma_f]$ .

### 3.3.6 Résumé

Le développement de l'expérience par étape successive a permis d'atteindre un niveau de maturité suffisant pour faire l'acquisition de données pendant deux sessions consécutives avec deux longueurs de fibres (52 et 56 km) d'une douzaine de jours. L'acquisition se faisant à une fréquence d'échantillonnage très élevée (500 kHz), la quantité de données créées est relativement importante et empêche l'utilisation de méthodes simples pour le traitement des données. Il a fallu faire une concession sur la résolution spectrale de l'expérience afin de calculer la densité spectrale de puissance des données.

Le niveau de la PSD moyenne est de l'ordre de  $10^{-8}$  rad<sup>2</sup>/Hz sur l'intervalle de [10, 200] kHz. Ce niveau est un ordre de grandeur plus élevé que les performances optimales de la cavité. Si le niveau originel de la cavité est retrouvé, l'expérience devrait gagner un ordre de grandeur en sensibilité.

L'étude des données a révélé la présence de nombreux effets systématiques dans le dispositif. L'acquisition des deux interféromètres en parallèle s'est avérée judicieuse puisqu'elle a permis de caractériser le bruit du dispositif et exclure certains des effets systématiques. Au vue des caractéristiques des effets systématiques restant, il est impossible qu'ils soient dus au couplage de la matière noire avec le dispositif. Il est nécessaire de définir des zones d'exclusion, cependant leur étendue est faible devant l'intervalle d'intérêt pour DAMNED.

Malheureusement, aucun signal de matière noire n'a pu être détecté avec cette expérience mais le niveau de sensibilité atteint reste intéressant pour placer des contraintes sur les constantes de couplage des modèles de matière noire. Pour obtenir les contraintes présentées dans la section 3.6, un traitement de données astucieux basé sur la statistique bayésienne a été nécessaire pour tenir compte de la nature stochastique du signal recherché (abordée dans la section 3.5).

### 3.4 Modélisation de l'effet de matière noire sur DAMNED

Afin de placer des contraintes sur les modèles de matière noire, il est nécessaire de modéliser l'effet de celle-ci sur l'expérience DAMNED. Cette section présente les différents effets de l'oscillation des constantes fondamentales sur l'expérience qui permettent d'obtenir l'expression de la modulation de la fréquence de la source  $\epsilon_\omega$  et du délai fibré  $\epsilon_T$  qui apparaissent dans le déphasage mesuré par l'interféromètre (3.55).

#### 3.4.1 Résonance de la cavité

La longueur  $l_0$  de la cavité oscille suite au couplage de la matière noire avec le verre ULE de l'écarteur sur lequel sont collés les miroirs. L'oscillation agit donc sur la longueur de l'écarteur et entraîne un déplacement des molécules de silices du verre ULE. La fréquence d'excitation appliquée par la matière noire sur le verre peut conduire pour certaines valeurs à un effet de résonance mécanique qui va augmenter l'amplitude du mouvement d'oscillation. Pour la cavité utilisée dans DAMNED, la fréquence de résonance mécanique est obtenue à partir des caractéristiques mécaniques du verre ULE :

$$f_r = \frac{v_{ULE}}{2l_0} = \sqrt{\frac{E_{ULE}}{\rho_{ULE}}} \frac{1}{2l_0} \simeq 28\text{kHz} \quad (3.83)$$

où  $v_{ULE}$  est la vitesse d'une onde dans le verre ULE. Celle ci peut être calculée à partir du module d'Young  $E_{ULE} = 67.6$  GPa et de la densité  $\rho_{ULE} = 2.21$  g/cm<sup>3</sup>.

#### Oscillateurs harmoniques couplés

L'intervalle de fréquence de sensibilité de DAMNED couvre plusieurs harmoniques de cette résonance et il est nécessaire d'étudier en détails ce phénomène. Pour cela, l'écarteur est modélisé comme une chaîne d'oscillateurs couplés (figure ci-dessous) [36]. Chaque oscillateur de masse  $m$  est connecté à son voisin par un ressort de raideur  $\kappa$  et un piston ayant un coefficient de friction  $\gamma$ .  $\kappa$  représente donc l'élasticité de l'écarteur et  $\gamma$  sa viscosité. Les oscillateurs en tête et queue de la chaîne sont libres de mouvement. Avec l'oscillation des constantes fondamentales, l'ensemble des quantités introduites varie dans le temps et notamment la distance  $\Delta l$  entre chaque oscillateur. La longueur de la cavité varie par rapport à la distance entre les deux miroirs parcourue par la lumière, qui n'est pas affectée par le champ scalaire (voir la discussion de la section 3.2.4).

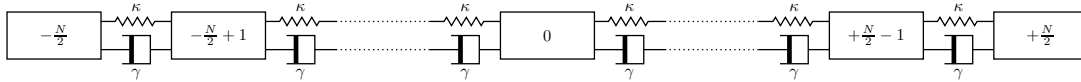


FIGURE 3.23 – Modélisation de la cavité comme une chaîne de  $N$  oscillateurs harmoniques couplés. Chaque oscillateur subit une force de rappel (constante de raideur  $\kappa$ ) et une force de friction (coefficient de friction  $\gamma$ ).

L'équation du mouvement du  $j^{\text{ème}}$  oscillateur est obtenue en tenant compte de la force du ressort  $F^\kappa$  et de la force de friction  $F^\gamma$  entre les  $(j-1)^{\text{ème}}$  et  $(j+1)^{\text{ème}}$  oscillateurs.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= F_{j-1 \rightarrow j}^\kappa - F_{j+1 \rightarrow j}^\kappa + F_{j-1 \rightarrow j}^\gamma - F_{j+1 \rightarrow j}^\gamma \\ &= \kappa \left( -(x_j - x_j^{eq}) + (x_{j+1} - x_{j+1}^{eq}) \right) - \kappa \left( -(x_{j-1} - x_{j-1}^{eq}) + (x_j - x_j^{eq}) \right) \\ &\quad + \gamma \left( -(\dot{x}_j - \dot{x}_j^{eq}) + (\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_{j+1}^{eq}) \right) - \gamma \left( -(\dot{x}_{j-1} - \dot{x}_{j-1}^{eq}) + (\dot{x}_j - \dot{x}_j^{eq}) \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

où  $x_j(t) - x_j^{eq}(t)$  représente le déplacement de l'oscillateur par rapport à sa position d'équilibre  $x_j^{eq}(t)$ . Cette dernière oscille dans le temps dans le cas d'un couplage avec la matière noire.

En définissant  $d_j(t) = x_j(t) - x_j^{eq}(t)$ , l'équation s'écrit :

$$m\ddot{d}_j = \kappa \left( d_{j-1} - 2d_j + d_{j+1} \right) + \gamma \left( \dot{d}_{j-1} - 2\dot{d}_j + \dot{d}_{j+1} \right) - m\ddot{x}_j^{eq} \quad (3.85)$$

Cette équation définit donc le déplacement  $d_j$  du  $j^{\text{ème}}$  oscillateur par rapport à sa position d'équilibre. Cette dernière change avec l'oscillation du rayon de Bohr (3.32) :

$$x_j^{eq} = j\Delta l \left( 1 - \epsilon_l \cos(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.86)$$

Pour le premier oscillateur ( $-N/2$ ), l'équation devient :

$$m\ddot{d}_{-N/2} = \kappa(-d_{N/2} + d_{N/2+1}) + \gamma(-\dot{d}_{-N/2} + \dot{d}_{-N/2+1}) - m\ddot{x}_{-N/2}^{eq}. \quad (3.87)$$

Pour le dernier oscillateur ( $N/2$ ), l'équation devient :

$$m\ddot{d}_{N/2} = \kappa(-d_{N/2} + d_{N/2-1}) + \gamma(-\dot{d}_{N/2} + \dot{d}_{N/2-1}) - m\ddot{x}_{N/2}^{eq}. \quad (3.88)$$

### Formulation matricielle

Ces équations du mouvement peuvent être exprimées sous forme matricielle telles que :

$$m\ddot{\mathbf{D}} + \kappa \mathbf{T} \mathbf{D} + \gamma \mathbf{T} \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{F} \quad (3.89)$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale contenant 2 sur la diagonale centrale et -1 sur les diagonales (-1,1), et  $\mathbf{F}$  est la matrice contenant les "forces" qui s'appliquent sur chaque oscillateur. Dans notre cas, ces forces proviennent de l'oscillation de la position d'équilibre des oscillateurs :  $f_j = -m\ddot{x}_j^{eq} = -mj\Delta l \epsilon_l \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t)$ .

### Oscillateur harmonique paramétrique ?

Comme on peut le voir dans l'équation (3.89), la cavité est caractérisée par la variation de longueur  $l$  de l'écarteur en verre ULE. Or, la constante de raideur  $\kappa$  et le coefficient de friction  $\gamma$  dépendent elles mêmes de constantes fondamentales qui oscillent. L'équation différentielle couplée, amortie et forcée gagne une nouvelle caractéristique : elle est maintenant paramétrique.

L'analyse numérique (présentée dans l'annexe 6.3) de la contribution de chacun de ces paramètres ( $l, \kappa$  et  $\gamma$ ) sur la solution de l'équation différentielle permet de négliger les paramètres  $(\kappa, \gamma)$  et de ne tenir compte que de la modulation de longueur de la cavité.

### Solution homogène

Afin de trouver une solution à l'équation (3.89), il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle homogène dans un premier temps. Pour cela, on écrit l'équation dans sa forme complexe avec  $\mathbf{D} \equiv \text{RE}[\mathbf{Z}]$  :

$$m\ddot{\mathbf{Z}} + \gamma \mathbf{T} \dot{\mathbf{Z}} + \kappa \mathbf{T} \mathbf{Z} = 0 \quad (3.90)$$

Les solutions de ce type d'équation ont la forme générale suivante :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} e^{-i\omega t} \quad (3.91)$$

où  $\mathbf{A}$  est un vecteur contenant les amplitudes de l'oscillation de chaque oscillateur et  $\omega$  est la fréquence propre du système.

En réintroduisant cette fonction dans (3.90), on trouve la condition suivante sur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{M} \mathbf{A} = 0 \quad (3.92)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice tridiagonale telle que :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2(\kappa - i\gamma\omega) - m\omega^2 & -(\kappa - i\gamma\omega) & & & 0 \\ -(\kappa - i\gamma\omega) & 2(\kappa - i\gamma\omega) - m\omega^2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -(\kappa - i\gamma\omega) & 2(\kappa - i\gamma\omega) - m\omega^2 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

En considérant une infinité d'oscillateurs ( $N \rightarrow \infty$ ), il existe une symétrie de translation qui permet de changer la position d'un oscillateur d'un pas  $\pm \Delta l$  sans changer le système. Cette symétrie permet d'établir un lien entre les amplitudes d'oscillations des différents oscillateurs.

Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  des solutions du système définies à une constante complexe  $\beta$  prêt [36] :

$$A'_j = \beta A_j = A_{j+1} \quad (3.94)$$

En définissant arbitrairement un des  $A_j$  tel que  $A_0 = 1$ , on a :

$$A_j^{(\beta)} = \beta^j \quad (3.95)$$

Pour chaque  $j$ , il existe alors une solution unique. En utilisant la symétrie de translation, on obtient :

$$\beta = e^{ik\Delta l} \quad (3.96)$$

L'équation (3.92) s'écrit alors :

$$2(\kappa - i\gamma\omega) - m\omega^2 - 2(\kappa - i\gamma\omega) \cos(k\Delta l) = 0 \quad (3.97)$$

La simplification de cette équation révèle la relation de dispersion du système :

$$\omega^2 = 4 \frac{(\kappa - i\gamma\omega)}{m} \sin^2\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) \quad (3.98)$$

Afin de revenir au cas non infini, des conditions de bord sont imposées sur les oscillateurs  $-N/2$  et  $N/2$ . Pour cela, le déplacement du premier (resp. dernier) oscillateur est le même que le second (resp. l'avant-dernier) afin d'annuler la force du ressort.

$$\begin{aligned} d_{-N/2-1} &= d_{-N/2} \\ d_{N/2+1} &= d_{N/2} \end{aligned} \quad (3.99)$$

### Modèle continu

Le modèle discret est limité dans sa représentation de la cavité, il est nécessaire de trouver une solution dans le cas où elle est modélisée comme un solide continu. Pour cela, on redéfinit les constantes de raideur  $\kappa \rightarrow \kappa_l \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \kappa \Delta l / l_0$  et de friction  $\gamma \rightarrow \gamma_l \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \gamma \Delta l / l_0$  et la densité massique  $m/l \rightarrow \rho_l \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} m / \Delta l$  vers le cas continu ( $\Delta l \rightarrow 0$ ) telles que :

$$\omega^2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( \frac{(\kappa - i\gamma\omega)\Delta l}{m/\Delta l} k^2 \right) = k^2 \frac{(\kappa_l - i\gamma_l\omega)l_0}{\rho_l} \quad (3.100)$$

Le vecteur de déplacement  $\mathbf{D}(t)$  et sa version complexe  $\mathbf{Z}(t)$  sont redéfinis pour le cas continu et dépendent maintenant de la position  $x$  :  $\mathbf{D}(t) \rightarrow D(t, x)$  et  $\mathbf{Z}(t) \rightarrow \psi(t, x)$  où  $D(t, x) = \text{RE}[\psi(t, x)]$ .

Le cas continu est alors défini par :

— L'équation d'onde :

$$\ddot{D}(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\kappa_L l_0}{\rho_L} D(t, x) + \frac{\gamma_L l_0}{\rho_L} \dot{D}(t, x) \right) = -x \epsilon_l \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t). \quad (3.101)$$

— Les solutions homogènes où  $B$  est un complexe :

$$\psi^{(k)}(t, x) = B e^{ikx} e^{-i\omega t}, \quad (3.102)$$

— Les conditions de bord :

$$\frac{\partial D(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=-l_0/2, l_0/2} = 0. \quad (3.103)$$

### Solution du cas continu sans force et sans amortissement

Dans un premier temps, on résout l'équation du cas continu en absence de force extérieure ( $F(x) = 0$ ) et d'amortissement ( $\gamma = 0$ ). En tenant compte des conditions de bord et de la périodicité du système, la solution générale  $D(t, x)$  est la somme des solutions  $D^{(n)}$  aux différentes fréquences de résonance :

$$D(t, x) = \sum_n D^{(n)}(t, x) \quad (3.104)$$

où  $D^{(n)}$  est une solution qui oscille à la fréquence  $\omega^{(n)} = 2\pi n \times f_r$  et dont forme est imposée par les conditions au bord de l'équation (3.95) :

$$D^{(n)}(t, x) = \sqrt{\frac{2}{l_0}} \cos\left(\frac{n\pi}{l_0} \left(x + \frac{l_0}{2}\right)\right) \left(C^{(n)} \cos(\omega^{(n)}t) + S^{(n)} \sin(\omega^{(n)}t)\right) \quad (3.105)$$

où  $C^{(n)}$  et  $S^{(n)}$  sont des réels et  $\omega^{(n)}$  est obtenu d'après la relation de dispersion (3.100) avec  $k^{(n)} = n\pi/l_0$ .

$$\omega^{(n)} = \pm \sqrt{\frac{\kappa_L l_0}{\rho_L}} k^{(n)} = \pm 2\pi n f_r \quad (3.106)$$

où  $f_r$  est la fréquence de résonance définie dans (3.83).

Les modes spatiaux  $u_n(x)$  permettent de simplifier l'expression de (3.105) et on peut montrer qu'ils sont orthogonaux :

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_0}} \cos\left(\frac{n\pi}{l_0} \left(x + \frac{l_0}{2}\right)\right) \quad \int_{-l_0/2}^{l_0/2} u^{(n)} u^{(m)} = \delta_{nm} \quad (3.107)$$

### Solution du cas continu sans amortissement

Dans le cas où la force d'entraînement est présente, la solution à long terme oscille à la même fréquence que la source :

$$D(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} u^{(n)}(x) \cos(\omega_{\varphi} t) \quad (3.108)$$

où  $B^{(n)}$  est une constante et  $u^{(n)}(x)$  un mode spatial. Avec l'équation d'onde (3.101), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} u^{(n)}(x) - \frac{\kappa_L l_0}{\omega_{\varphi}^2 \rho_L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l_0}\right)^2 B^{(n)} u^{(n)}(x) = x \epsilon_l. \quad (3.109)$$

Avec la définition des fréquences de résonances ( $2\pi f_n = \omega_n$ ) de l'équation (3.106),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{\varphi}^2 - \omega_n^2}{\omega_{\varphi}^2} B^{(n)} u^{(n)}(x) = x \epsilon_l. \quad (3.110)$$

En utilisant l'orthogonalité des modes spatiaux de la cavité, on a

$$B^{(n)} = \epsilon_l \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_\varphi^2 - \omega_{(n)}^2} \int_{-l_0/2}^{l_0/2} x u^{(n)}(x) dx = -\frac{1}{2} \frac{(2l_0)^{3/2} (1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2} \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_\varphi^2 - \omega_{(n)}^2} \quad (3.111)$$

On remarque que  $B^{(n)} = 0$  pour les modes pairs. Seuls les modes impairs sont excités par la force symétrique introduite par la matière noire.

La solution du cas continu non amorti a donc la forme :

$$D(t, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\epsilon_l l_0}{(2n-1)^2 \pi^2} \frac{\omega_\varphi^2}{(\omega_\varphi^2 - \omega_{(2n-1)}^2)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{l_0} \left(x + \frac{l_0}{2}\right)\right) \cos(\omega_\varphi t). \quad (3.112)$$

Le déplacement  $D$  de la cavité est donc la somme de l'ensemble des déplacements  $D^{(n)}$  aux harmoniques impaires de la fréquence de résonance. Le terme  $\omega_\varphi^2/(\omega_\varphi^2 - \omega_{(2n-1)}^2)$  sous-entend qu'à résonance, le déplacement diverge en absence d'amortissement.

### Solution générale

On considère maintenant le terme d'amortissement et l'on suppose que la solution a la forme suivante :

$$D(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} D^{(n)}(t) u^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos(\omega_\varphi t) + S_n \sin(\omega_\varphi t) \right) u^{(n)}(x) \quad (3.113)$$

En utilisant cette définition et en intégrant sur les modes spatiaux, on obtient l'équation complète pour les modes impairs :

$$\ddot{D}^{(n)}(t) + \frac{l_0}{\rho_l} \left( \frac{n\pi}{l_0} \right)^2 \left( \kappa_l D^{(n)}(t) + \gamma_l \dot{D}^{(n)}(t) \right) = \epsilon_l \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t) \frac{(2l_0)^{3/2}}{n^2 \pi^2} \quad (3.114)$$

En définissant  $\omega_n = nv_s \pi / l_0$ ,  $Q_n \equiv \frac{\kappa_l}{\gamma_l \omega_n}$  et  $b^{(n)} = \frac{\sqrt{8l_0}}{n^2 \pi^2}$ , on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique forcé et amorti :

$$\ddot{D}^{(n)}(t) + \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{D}^{(n)}(t) + \omega_n^2 D^{(n)}(t) = b^{(n)} \epsilon_l l_0 \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t) \quad (3.115)$$

La solution de cette équation est obtenue en passant dans l'espace de Fourier avec  $\tilde{D} = \mathcal{F}[D]$  :

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 \tilde{D} + i\omega \frac{\omega_n}{Q_n} \tilde{D} + \omega_n^2 \tilde{D} &= b^{(n)} \epsilon_l l_0 \omega_\varphi^2 \mathcal{F}[\cos(\omega_\varphi t)] \\ \Leftrightarrow \tilde{D} &= b^{(n)} \epsilon_l l_0 \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_n}{Q_n}} \mathcal{F}[\cos(\omega_\varphi t)] \end{aligned} \quad (3.116)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse et en prenant la partie réelle de l'équation, on obtient :

$$C_n = b^{(n)} \epsilon_l l_0 \frac{Q_n^2 \omega_\varphi^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)}{Q_n^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)^2 + \omega_n^2 \omega_\varphi^2} \quad S_n = b^{(n)} \epsilon_l l_0 \frac{Q_0 \omega_n \omega_\varphi^3}{Q_0^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)^2 + \omega_n^2 \omega_\varphi^2}. \quad (3.117)$$

### Oscillation de la longueur de la cavité

Finalement, en utilisant l'ensemble des résultats obtenus, il est possible d'exprimer la longueur de la cavité  $l$  à tout temps  $t$  :

$$l(t) = l_0 \left( 1 - \epsilon_l (1 + \alpha) \cos(\omega_\varphi t) - \epsilon_l \beta \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.118)$$

avec :

$$\alpha = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \frac{Q_n^2 \omega_\varphi^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)}{Q_n^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)^2 + \omega_n^2 \omega_\varphi^2} \quad \beta = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \frac{Q_n \omega_n \omega_\varphi^3}{Q_n^2 (\omega_n^2 - \omega_\varphi^2)^2 + \omega_n^2 \omega_\varphi^2}, \quad (3.119)$$

Comme on peut le voir dans la figure 3.24, les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  ont des comportements différents en fonction de la fréquence  $\omega$  :

- $\omega_\varphi \ll \omega_1$ ,  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ , la cavité ne résonne pas et oscille simplement en raison de la variation du rayon de Bohr :  $l(t) = l_0(1 - \epsilon_l \cos(\omega_\varphi t))$ .
- $\omega_\varphi \gg \omega_1$ ,  $\beta \rightarrow 0$  et  $\alpha \rightarrow -1$ , la cavité ne peut plus suivre le forçage et a donc une longueur constante  $l_0$  :  $l(t) = l_0$ .
- $\omega_\varphi = \omega_n$ ,  $\beta = \frac{8}{\pi^2 n^2} Q_n$ , la cavité est résonante :  $l(t) = l_0(1 - \epsilon_l 8/(\pi^2 n^2) Q_1 \sin(\omega_\varphi t))$ . L'amplitude de la modulation diminue fortement avec l'ordre  $n$ . Pour des fréquences très élevées, l'amortissement empêche toute résonance. La décroissance du facteur de qualité retranscrit l'augmentation de l'amortissement avec la fréquence.

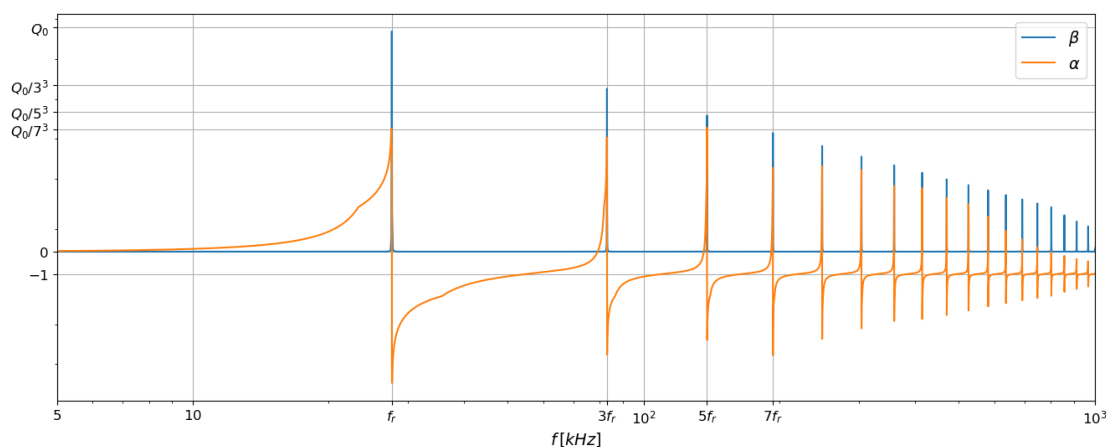


FIGURE 3.24 – Paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle d'intérêt de DAMNED. A résonance, le paramètre  $\beta$  atteint son maximum  $Q_1 = 6.1 \times 10^4$  et permet à DAMNED de gagner un facteur  $Q_n$  en sensibilité. Hors résonance, c'est majoritairement le paramètre  $1 + \alpha$  qui domine. A basse fréquence ( $\omega_\varphi \ll \omega_1$ ), puisque les deux coefficients tendent vers 0, la cavité ne résonne pas et oscille simplement avec la variation de la longueur de l'écarteur. A haute fréquence ( $\omega_\varphi \gg \omega_1$ ), mécaniquement, la cavité ne peut plus suivre le forçage extérieur créé par le champ scalaire.



### 3.4.2 Finesse de la cavité

Le second effet à prendre en compte pour DAMNED provient de la haute finesse  $\mathcal{F}$  de la cavité. Celle ci allonge considérablement le temps qu'un photon de la source laser passe entre les deux miroirs ( $l_0/c \rightarrow \mathcal{F}l_0/c$ ). Avec la variation périodique de la longueur de la cavité, le chemin optique suivi par le photon dans la cavité dépend de la fréquence d'oscillation. En modélisant la cavité Fabry-Pérot, il est possible de calculer le décalage en phase accumulé par le photon après les différentes réflexions sur les miroirs en mouvement. Cette phase est ensuite mesurée par interférométrie avec DAMNED.

#### Comparaison avec les détecteurs d'ondes gravitationnelles

DAMNED est un interféromètre à bras inégaux qui se base sur une technologie similaire (toute proportion gardée) à celle utilisée pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles comme VIRGO. Dans les deux cas, la longueur  $l_0$  qui sépare les miroirs composant la cavité Fabry-Pérot du détecteur est modifiée par une perturbation sinusoidale (issue du champ scalaire pour DAMNED et issue d'une coalescence d'objets massifs pour VIRGO) d'amplitude  $\delta l$  et de fréquence  $\omega$  :  $l(t) = l_0 + \delta l \cos(\omega t)$ . La finesse de la cavité va considérablement allonger le trajet du photon puisqu'il va effectuer  $\sim \mathcal{F}$  allers-retours avant de sortir. En absence de force extérieure sur les miroirs, le trajet serait alors  $\mathcal{F}l_0$ . Avec l'onde, il faut additionner l'ensemble des  $\mathcal{F}$  réflexions à des instants  $t_i$  sur des miroirs en mouvement. La longueur totale parcourue est  $l_{tot} = \sum_i^{\mathcal{F}} (l_0 + \delta l \cos(\omega t_i))$ . Or, en première approximation, le photon est réfléchi par un miroir après un temps  $\tau_0 = 2l_0/c$  correspondant au temps qu'il lui faut pour parcourir l'aller-retour entre les deux miroirs. L'instant  $t_i$  est donc un multiple de  $\tau_0$  tel que  $t_i = t_0 + i\tau_0$  où  $t_0$  est l'instant auquel le photon est entré dans la cavité. On peut donc écrire la longueur totale parcourue sous la forme  $l_{tot} = \mathcal{F}l_0 + \sum_i^{\mathcal{F}} \delta l \cos(\omega t_0 + \omega i \tau_0)$ . On a une somme de cosinus dont la phase augmente linéairement avec le temps.

En fonction de la valeur de  $\omega\tau_0$ , on obtient deux phénomènes complètement distincts :

- $\mathcal{F}\omega\tau_0 \ll 1$  : après  $\mathcal{F}$  allers-retours, la position des miroirs a très peu changé. Le photon voit donc les miroirs (quasiment) au même endroit et son trajet est différent de la distance qu'il aurait parcouru dans la cavité en l'absence de perturbation :  $l_{tot} \simeq \mathcal{F}(l_0 + \delta l \cos(\omega t_0))$
- $\mathcal{F}\omega\tau_0 \gg 1$  : après  $\mathcal{F}$  allers-retours, la position des miroirs a énormément changé. Le photon voit donc les miroirs à des positions différents à chaque aller-retour. Les cosinus sont moyennés par les allers-retours et la distance parcourue par le photon est équivalente qu'il y ait ou non une perturbation :  $l_{tot} \simeq \mathcal{F}l_0$

Le premier cas correspond à celui des cavité LIGO/VIRGO ( $\omega \sim 1$  Hz,  $\mathcal{F} = 10^3$ ,  $\tau_0 \sim 10^{-5}$  s,  $\Rightarrow \mathcal{F}\omega\tau_0 \simeq 10^{-2}$ ) qui profite donc de la "vitesse" du photon face à la "lenteur" de la perturbation qui permet de sommer de manière constructive et d'amplifier la sensibilité du détecteur d'ondes gravitationnelles. DAMNED se trouve dans un cas intermédiaire ( $\omega \sim 100$  kHz,  $\mathcal{F} = 10^6$ ,  $\tau_0 \sim 10^{-10}$  s,  $\Rightarrow \mathcal{F}\omega\tau_0 \simeq 10$ ) où l'on ne somme pas de manière constructive. L'objectif de cette section est de calculer qualitativement l'effet de la finesse sur le signal en sortie de la cavité.

### Délai d'une cavité oscillante

Afin d'obtenir la phase du signal en sortie de cavité, il faut retracer le chemin parcouru par un photon depuis son entrée dans la cavité. On considère ici un système de référence centré sur le premier miroir de telle sorte que seul le second miroir est en mouvement  $\delta l(t)$ . Le faisceau du laser illumine le miroir d'entrée  $M_A$  de la cavité.

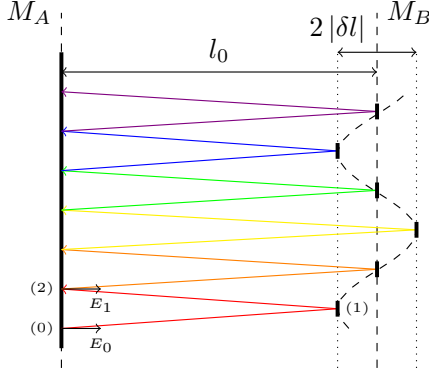


FIGURE 3.25 – Trajet d'un photon dans la cavité Fabry-Pérot. La position du miroir de sortie oscille avec le temps et allonge ou raccourcit le trajet optique du photon. En suivant le chemin du photon (traits colorés), on peut remonter au décalage en phase qu'il subit à cause du mouvement du miroir (en pointillé). La ligne en tiret correspond à la position du miroir en l'absence du forçage de la matière noire. Les lignes pointillées représentent le déplacement maximal que peut subir la cavité.

Soit  $c\tau_{\leftrightarrow}$  la distance parcourue par le photon en un aller-retour entre les miroirs. En supposant que le photon atteint le miroir  $M_A$  à un temps  $(t_2)$  comme représenté dans la partie basse de la figure 3.25 :

- 2 Le photon atteint le miroir  $M_A$  au temps  $t_2$ .
- 1  $\rightarrow$  2 Le photon a parcouru la longueur de la cavité  $l_0 = c\tau_0$ ,
  - 1 Le miroir  $M_B$  au moment où le photon l'atteint est déplacé de  $|\delta l(t_1)|$  par rapport à sa position d'équilibre.
- 0  $\rightarrow$  1 Le photon a parcouru la longueur de la cavité  $l_0$ 
  - 0 Le photon a été réfléchi par le miroir  $M_A$  au temps  $t_0 = t_2 - \tau_{\leftrightarrow}$

La distance parcourue pour le cas représenté dans la figure 3.25 est alors :

$$c\tau_{\leftrightarrow} = l_0 - |\delta l(t_1)| + l_0 - |\delta l(t_1)| \quad (3.120)$$

Pour retranscrire les différentes positions du miroir, on reformule  $\tau_{\leftrightarrow}$  tel que :

$$c\tau_{\leftrightarrow}(t) = 2l_0 + 2\delta l(t - \tau_{\leftrightarrow}/2) \quad (3.121)$$

où  $\delta l$  peut prendre des valeurs négatives (resp. positives) lorsque la cavité se contracte (resp. s'allonge).

Dans le cas de DAMNED, le photon parcourt la longueur initiale de la cavité en un temps  $\tau_0 = l_0/c \sim 0.3ns$ . L'oscillation de la cavité qui nous intéresse a une période caractéristique de l'ordre de  $\sim 10 \mu s \gg \tau_0$ . La position des miroirs ne change pas significativement lors du trajet du photon et il n'y a donc pas d'effet non linéaire dans le calcul du temps aller-retour dans la cavité :

$$c\tau_{\leftrightarrow}(t) = 2l_0 + 2\delta l(t - \tau_0) \quad (3.122)$$

### Champ électrique d'une cavité oscillante

La cavité est illuminée par un faisceau laser oscillant à la fréquence  $\omega_0$ . Soit  $\mathcal{E}$  le champ électrique entrant dans la cavité tel que :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} \quad (3.123)$$

où  $\mathcal{E}_0$  est l'amplitude du champ à l'entrée de la cavité.

Le premier miroir ( $M_A$ ) a un coefficient de transmission  $t$  de sorte que le champ à l'entrée de la cavité est :

$$E_0(t) = t\mathcal{E}(t) = t\mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} \quad (3.124)$$

Pour le premier aller-retour du photon, il se propage vers le miroir  $M_B$  où il est réfléchi. Le champ  $E_1^r$  après réflexion sur le miroir  $M_A$  s'écrit :

$$E_1^r(t) = r^2 E_0(t - \tau_{\leftrightarrow}) = t\mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 \left( \frac{2l_0}{c} + \frac{2\delta l(t - \tau_0)}{c} \right)} = tr^2 e^{i2\omega_0 \tau_0} e^{2i k_0 \delta l(t - \tau_0)} E_0(t) \quad (3.125)$$

où  $\omega_0 = k_0 c$  et  $\tau_0 = l_0/c$ .

Pour le second aller-retour, le champ  $E_2$  après réflexion sur le miroir  $M_A$  s'écrit :

$$\begin{aligned} E_2^r(t) &= r^2 E_1^r(t - \tau_{\leftrightarrow}) = tr^4 e^{i2\omega_0 \tau_0} e^{2i k_0 \delta l(t - \tau_0 - \tau_{\leftrightarrow})} \mathcal{E}(t - \tau_{\leftrightarrow}) \\ &= tr^4 e^{i2\omega_0 \tau_0} e^{i k_0 \delta l(t - \tau_0 - \tau_{\leftrightarrow})} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0(t - \tau_{\leftrightarrow})} \\ &= tr^4 e^{i2\omega_0 \tau_0} e^{i k_0 \delta l(t - \tau_0 - \tau_{\leftrightarrow})} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i2\omega_0 \tau_0} e^{2i k_0 \delta l(t - \tau_0)} \\ &= tr^4 e^{i4\omega_0 \tau_0} e^{2i k_0 (\delta l(t - \tau_0) + \delta l(t - \tau_0 - \tau_{\leftrightarrow}))} \mathcal{E}(t) \end{aligned} \quad (3.126)$$

En simplifiant  $\tau_{\leftrightarrow}$  par  $2\tau_0$  dans la fonction  $\delta l$  comme pour l'équation (3.122), on obtient :

$$E_2^r(t) = tr^4 e^{i4\omega_0 \tau_0} e^{2i k_0 [\delta l(t - \tau_0) + \delta l(t - 3\tau_0)]} \mathcal{E}(t) \quad (3.127)$$

On peut faire disparaître le terme  $e^{i\omega_0 \tau_0}$  puisque la fréquence du laser est stabilisée sur la longueur de la cavité afin de maintenir  $\omega_0 \tau_0 = 2\pi$  à tout instant.

En généralisant cette expression, on obtient pour le  $n^{\text{ème}}$  aller retour, le champ  $E_n^r(t)$  après réflexion sur le miroir  $M_A$  :

$$E_n^r(t) = t r^{2n} e^{2i k_0 \sum_{j=1}^n \delta l(t - (2j-1)\tau_0)} \mathcal{E}(t) \quad (3.128)$$

Pour chaque champ réfléchi, un champ  $E_n^t$  est transmise à travers le miroir  $M_A$  :

$$E_n^t(t) = t^2 r^{2n-1} e^{2i k_0 \sum_{j=1}^n \delta l(t - (2j-1)\tau_0)} \mathcal{E}(t) \quad (3.129)$$

où  $\delta l^j = \delta l(t - (2j-1)\tau_0)$ .

En sommant le nombre infini de champs  $E_n^t(t)$ , on obtient le champ résultant transmis par le miroir  $M_A$  qui est donc le champ  $E_c$  à la sortie de la cavité :

$$E_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^t(t) = t^2 \mathcal{E}(t) \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} e^{2i k_0 \sum_{j=1}^n \delta l^{(j)}} \quad (3.130)$$

On peut développer le terme exponentiel puisque le déplacement du miroir est faible ( $k_0 \delta l \ll 1$ ) :

$$\begin{aligned} E_c(t) &\simeq t^2 \mathcal{E}(t) \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \left( 1 - 2i k_0 \sum_{j=1}^n \delta l^{(j)} \right) \\ &= t^2 \mathcal{E}(t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} - 2i k_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(1)} - 2i k_0 \sum_{n=2}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(2)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.131)$$

En reformulant cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= t^2 \mathcal{E}(t) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} - 2i k_0 r^2 \delta l^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2(n-1)} - 2i k_0 r^4 \delta l^{(2)} \sum_{n=2}^{\infty} r^{2(n-2)} + \dots \right) \\ &= t^2 \mathcal{E}(t) \left( 1 - 2i k_0 \delta l^{(1)} r^2 - 2i k_0 \delta l^{(2)} r^4 + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \\ &= t^2 \mathcal{E}(t) \left( 1 - 2i k_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(n)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n-1} \end{aligned} \quad (3.132)$$

En sachant que  $r < 1$ , la somme des  $r^{2n}$  se simplifie pour donner :

$$E_c(t) = r^{-1} \mathcal{E}(t) \frac{t^2}{1-r^2} \left( 1 - 2i k_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(n)} \right) \quad (3.133)$$

En utilisant la relation entre le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion ( $t^2 = 1 - r^2$ ) et avec  $1/r \sim 1$ , on obtient finalement :

$$E_c(t) = \mathcal{E}(t) \left( 1 - 2i k_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(n)} \right) \quad (3.134)$$

### Phase d'une cavité oscillante

En inversant le développement limité réalisé précédemment, on peut exprimer la phase du champ électromagnétique en sortie de la cavité :

$$E_c(t) \simeq \mathcal{E}(t) e^{-ik_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(n)}} = E_0 e^{-i(\omega_0 t + \Delta\phi(t))} \quad (3.135)$$

où la phase  $\Delta\phi(t)$  est donc :

$$\Delta\phi(t) = 2k_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \delta l^{(n)} \quad (3.136)$$

En utilisant l'oscillation de la cavité définie à l'équation (3.118), on a :

$$\begin{aligned} \delta l^{(n)} &= \delta l(t - (2n - 1)\tau_0) = l(t - 2n\tau_0 + \tau_0) - l_0 \\ &= - (1 + \alpha)\epsilon_l l_0 \left( \cos(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \cos(2n\omega_\varphi\tau_0) + \sin(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \sin(2n\omega_\varphi\tau_0) \right) \\ &\quad - \beta\epsilon_l l_0 \left( \sin(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \cos(2n\omega_\varphi\tau_0) - \cos(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \sin(2n\omega_\varphi\tau_0) \right) \end{aligned} \quad (3.137)$$

La phase  $\Delta\phi$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta\phi(t) &= -2k_0\epsilon_l l_0 \left( (1 + \alpha) \cos(\omega_\varphi(t + \tau_0)) + \beta \sin(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \right) \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \cos(2n\omega_\varphi\tau_0) \\ &\quad - 2k_0\epsilon_l l_0 \left( (1 + \alpha) \sin(\omega_\varphi(t + \tau_0)) - \beta \cos(\omega_\varphi(t + \tau_0)) \right) \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \sin(2n\omega_\varphi\tau_0) \end{aligned} \quad (3.138)$$

Les expressions des séries infinies (développées en annexe 6.3.3) se simplifient et permettent d'écrire  $\Delta\phi$  comme :

$$\begin{aligned} \Delta\phi(t) &= -\frac{2k_0\epsilon_l l_0 r^2}{1 - 2r^2 \cos(2\omega_\varphi\tau_0) + r^4} \left( (1 + \alpha) \left( \cos(\omega_\varphi t - \omega_\varphi\tau_0) - r^2 \cos(\omega_\varphi t + \omega_\varphi\tau_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left( \sin(\omega_\varphi t - \omega_\varphi\tau_0) - r^2 \sin(\omega_\varphi t + \omega_\varphi\tau_0) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

En développant les cosinus/sinus et en factorisant, on obtient :

$$\Delta\phi(t) = -\epsilon_l k_0 l_0 \left( (\mathcal{D}_c(1 + \alpha) - \mathcal{D}_s\beta) \cos(\omega_\varphi t) + (\mathcal{D}_s(1 + \alpha) + \mathcal{D}_c\beta) \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.140)$$

avec  $\mathcal{D}_c$  et  $\mathcal{D}_s$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c &= \frac{2r^2(1 - r^2) \cos(\omega_\varphi\tau_0)}{1 - 2r^2 \cos(2\omega_\varphi\tau_0) + r^4} \\ \mathcal{D}_s &= \frac{2r^2(1 + r^2) \sin(\omega_\varphi\tau_0)}{1 - 2r^2 \cos(2\omega_\varphi\tau_0) + r^4} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Ce résultat est en accord avec ceux obtenus dans [37, 38] par une approche différente.

### Fréquence d'une cavité oscillante

On peut maintenant calculer le décalage en fréquence  $\delta\omega$  en sortie de cavité lorsque une oscillation est créée par la matière noire. Elle correspond à la dérivée de la phase  $\Delta\phi$  obtenue précédemment.

$$\frac{\delta\omega(t)}{\omega_0} = \frac{\Delta\dot{\phi}_c(t)}{\omega_0} = -\epsilon_l \left( (\mathcal{D}'_s(1+\alpha) + \mathcal{D}'_c\beta) \cos(\omega_\varphi t) + (-\mathcal{D}'_c(1+\alpha) + \mathcal{D}'_s\beta) \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.142)$$

avec les paramètres  $\mathcal{D}'_c$  et  $\mathcal{D}'_s$  définis<sup>3</sup> par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_c &= \omega_\varphi \tau_0 \mathcal{D}_c = \omega_\varphi \tau_0 \frac{2r^2(1-r^2) \cos(\omega_\varphi \tau_0)}{1 - 2r^2 \cos(2\omega_\varphi \tau_0) + r^4} \\ \mathcal{D}'_s &= \omega_\varphi \tau_0 \mathcal{D}_s = \omega_\varphi \tau_0 \frac{2r^2(1+r^2) \sin(\omega_\varphi \tau_0)}{1 - 2r^2 \cos(2\omega_\varphi \tau_0) + r^4} \end{aligned} \quad (3.143)$$

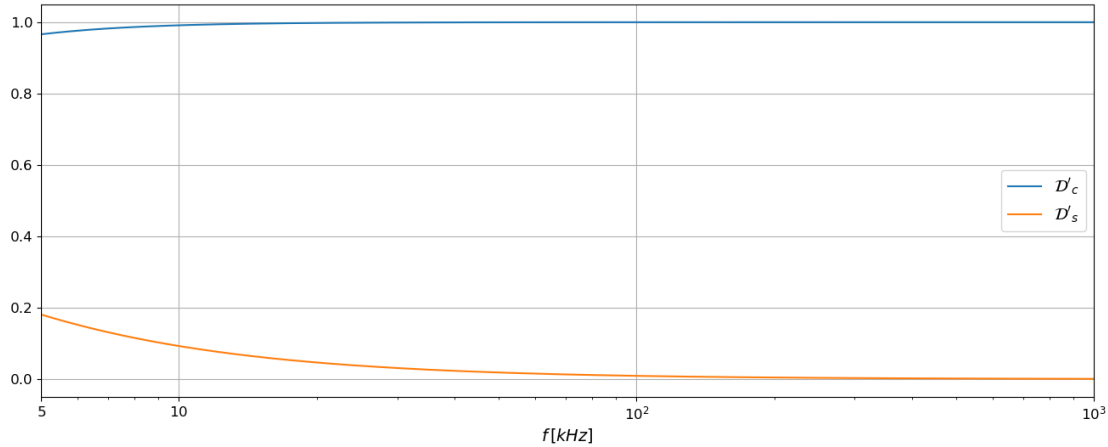


FIGURE 3.26 – Paramètres  $\mathcal{D}'_c$  et  $\mathcal{D}'_s$  dans l'intervalle d'intérêt et avec la cavité utilisée par DAMNED où  $\tau_0 = 0.3$  ns et  $r \simeq 1 - 2 \times 10^{-6}$ .

Ces deux fonctions sont représentées dans la figure 3.26. Sur l'intervalle de sensibilité de DAMNED, la fonction  $\mathcal{D}'_c \sim 1$  et on peut négliger le terme  $\mathcal{D}'_s$  :

$$\frac{\delta\omega(t)}{\omega_0} \simeq -\epsilon_l \left( (1+\alpha) \cos(\omega_\varphi t) + \beta \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.144)$$

A résonance, l'amplitude de l'oscillation des constantes fondamentales est donc augmentée par le facteur de qualité de la cavité  $Q_n$ .

3. Le lien pour retrouver les résultats de l'annexe de [39] se fait avec  $\mathcal{D}'_c \equiv 0$  et  $\mathcal{D}'_s \equiv \mathcal{E}_c$

### 3.4.3 Effet de la matière noire sur la délai optique

L'utilisation d'une fibre optique permet d'imposer un délai  $T_0$  qui dépend de sa longueur  $L_0$  et de son indice de refraction  $n_0$ .

$$T_0 = \frac{n_0 L_0}{c} \quad (3.145)$$

L'oscillation des constantes induit une variation de la longueur  $\delta L$  entre les atomes qui composent la fibre. Cette variation de longueur va également modifier la structure du cristal de silice ( $\text{SiO}_2$ ) qui induit une variation de l'indice de refraction  $\delta n$ .

$$\frac{\delta T(t)}{T_0} = \frac{\delta L(t)}{L_0} + \frac{\delta n(t)}{n_0} \quad (3.146)$$

#### Variation de longueur optique

Le premier terme de l'équation (3.146) correspond à la variation de longueur de la fibre optique en réponse au champ scalaire. En réexprimant l'équation (3.142) en terme de longueur, on obtient son expression pour une fibre optique de longueur  $L_0$  :

$$\frac{\delta L(t)}{L_0} = \epsilon_L \left( \left( \mathcal{D}'_s(1 + \alpha) + \mathcal{D}'_c\beta \right) \cos(\omega_\varphi t) + \left( -\mathcal{D}'_c(1 + \alpha) + \mathcal{D}'_s\beta \right) \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.147)$$

Afin de mesurer l'effet du à la finesse, il faudrait que des réflexions parasites soient présentes dans la fibre et qu'elles soient à l'origine de la création d'une cavité Fabry-Pérot. En raison de la très faible finesse des fibres utilisées et de l'absence expérimentale de réflexions parasites, l'effet créé par la finesse peut être négligé en annulant les coefficients  $\mathcal{D}'_c$  et  $\mathcal{D}'_s$ . La variation de longueur de la fibre se limite à :

$$\frac{\delta L(t)}{L_0} = \epsilon_L \left( (1 + \alpha) \cos(\omega_\varphi t) + \beta \sin(\omega_\varphi t) \right) \quad (3.148)$$

Les fibres optiques utilisées pour l'expérience ont un facteur de qualité très faible ( $Q \rightarrow 0$ ). Les paramètres de résonance  $\alpha$  et  $\beta$  définis dans l'équation (3.119) s'annulent. La fibre oscille donc simplement avec la variation du rayon de Bohr définie dans l'équation (3.32) :

$$\frac{\delta L(t)}{L_0} = \epsilon_L \cos(\omega_\varphi t) \quad (3.149)$$

#### Variation d'indice

L'indice de refraction du cristal dépend de la constante de structure fine  $\alpha_{EM}$  et le rapport de la masse de l'électron sur la masse du neutron  $m_e/m_N$ . Afin de retrouver la dépendance aux oscillations du champ scalaire, on modélise le mouvement d'une molécule dans le cristal sous la forme d'un oscillateur harmonique dans le modèle de Lorentz [40]. La molécule subit une force de la part des molécules voisines que l'on assimile à celle d'un ressort de coefficient d'amortissement  $\gamma$  et de fréquence de résonance  $\Omega$ . Une onde

électromagnétique  $E(t)$  due au photon incident crée un terme de forçage par interaction dipolaire avec le cristal. Le mouvement  $r$  de la molécule autour de sa position d'équilibre peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dr(t)}{dt} + \Omega^2r(t) = -\frac{e}{M_i}E(t) \quad (3.150)$$

où  $e$  est la charge électrique et  $M_i$  la masse de la molécule.

La solution dans l'espace de Fourier est semblable au résultat obtenu pour la résonance de la cavité :

$$r(\omega) = -\frac{e}{M_i}\frac{E(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \quad (3.151)$$

Pour retrouver la dépendance à l'indice de réfraction, il est nécessaire de faire le lien entre  $r$  et la susceptibilité  $\chi$ . Cette susceptibilité apparait dans l'expression de la polarisation  $P = \epsilon_0\chi(\omega)E(\omega)$ . La polarisation  $P$  s'exprime comme le mouvement d'ensemble des  $N_i$  molécules dans le cristal  $P = -e\sum_i N_i r_i(\omega)$  si bien que :

$$\chi = \frac{e^2}{\epsilon_0}\sum_i \frac{N_i}{M_i\Omega_i^2}\frac{1}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2i\gamma\omega/\Omega_i^2} \quad (3.152)$$

$\Omega_i$  correspond à un mode de vibration d'un électron dans le cristal. Ce quantum d'énergie de vibration dans un solide est une quasi-particule nommée phonon. Sa fréquence est proportionnelle à l'énergie de Rydberg  $E_r$  d'un atome :

$$\Omega_i \simeq \omega_i\alpha_{EM}^2\sqrt{m_e/m_p} \quad (3.153)$$

où  $\omega_i$  est indépendant de  $\alpha_{EM}$  et  $m_e/m_N$ .

Enfin, la densité  $N_i$  de molécules  $i$  dépend du rayon de Bohr de l'atome qui va changer la distance entre les molécules du cristal :

$$N_i \propto a_0^{-3} = \left(\frac{\alpha_{EM}m_e c^2}{\hbar}\right)^3 \quad (3.154)$$

Le lien entre l'indice de refraction et la susceptibilité d'un cristal est défini par l'équation de Lorenz-Lorentz [41] :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\chi}{3} \simeq \sum_i \frac{F_i}{1 - (m_p/m_e)\alpha_{EM}^{-4}(\omega/\omega_i)^2} \quad (3.155)$$

où l'on néglige l'amortissement et où  $F_i$  est une constante indépendante de  $\alpha_{EM}$ ,  $m_e/m_N$  et  $\omega$ .

En développant partiellement cette équation, on obtient la dépendance de l'indice de refraction à  $\alpha_{EM}$ ,  $m_e/m_N$  et  $\omega$  :

$$\omega\frac{\partial n}{\partial\omega} = -\frac{\alpha_{EM}}{2}\frac{\partial n}{\partial\alpha_{EM}} = -2\frac{m_e}{m_p}\frac{\partial n}{\partial(m_e/m_N)} \quad (3.156)$$



Le terme  $\delta n/n_0$  dépend donc des variations d' $\alpha$  et du rapport  $m_e/m_N$  :

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial \omega} \delta \omega + \frac{\partial n}{\partial \alpha_{EM}} \delta \alpha_{EM} + \frac{\partial n}{\partial (m_e/m_N)} \delta (m_e/m_N) \quad (3.157)$$

Soit, à l'aide des équations précédentes :

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \left( \frac{\delta \omega}{\omega_0} - 2 \frac{\delta \alpha_{EM}}{\alpha_{EM}} - \frac{1}{2} \frac{\delta (m_e/m_N)}{(m_e/m_N)} - \frac{\delta m_e}{m_e} \right) \quad (3.158)$$

où  $\omega_0/n_0 \partial n/\partial \omega$  est le coefficient de dispersion de la fibre (qui est de l'ordre de  $\sim 10^{-2}$  pour les fibres utilisées dans DAMNED). En faisant le changement de variable pour obtenir une dépendance aux constantes de couplage  $\delta(m_e/m_p)/(m_e/m_p) = \delta(m_e/\Lambda_3) - 0.048\delta(m_q/\Lambda_3)/(m_q/\Lambda_3)$  [42] :

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \left( \frac{\delta \omega}{\omega_0} - 2 \frac{\delta \alpha}{\alpha} - \frac{\delta m_e}{m_e} - \frac{1}{2} \frac{\delta m_e/\Lambda_3}{m_e/\Lambda_3} - 0.024 \frac{\delta m_q/\Lambda_3}{m_q/\Lambda_3} \right) \quad (3.159)$$

La variation du délai de la fibre s'exprime alors comme :

$$\epsilon_T = \frac{\delta T(t)}{T_0} = \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \left( \frac{\delta \omega(t)}{\omega_0} - \epsilon_n \cos(\omega_\varphi t) \right) - \epsilon_L \cos(\omega_\varphi t) \quad (3.160)$$

#### 3.4.4 Effet de la matière noire sur DAMNED

L'observable mesurée est la phase  $\Delta\phi$  de l'interféromètre 3.55 et c'est la partie oscillante  $\delta\phi$  due à la matière noire que l'on recherche :

$$\delta\phi(t) = \omega_0 T_0 \operatorname{sinc} \left( \omega_\varphi \frac{T_0}{2} \right) \left( \epsilon_{\Delta\phi}^c \cos \left( \omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2} \right) + \epsilon_{\Delta\phi}^s \sin \left( \omega_\varphi t - \omega_\varphi \frac{T_0}{2} \right) \right) \quad (3.161)$$

En combinant les effets de la modélisation de l'expérience, on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Delta\phi}^c &= \epsilon_L \left( \mathcal{D}'_c (1 + \alpha) - \mathcal{D}'_s \beta - 1 \right) \left( 1 + \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) - \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \epsilon_n \simeq \epsilon_L \alpha - \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \epsilon_n \\ \epsilon_{\Delta\phi}^s &= \epsilon_L \left( \mathcal{D}'_s (1 + \alpha) + \mathcal{D}'_c \beta \right) \left( 1 + \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \simeq \epsilon_L \beta \end{aligned} \quad (3.162)$$

où les approximations sont obtenues en tenant compte des valeurs numériques et expérimentales de DAMNED (voir tableau 3.1). Enfin, le lien entre les constantes de couplage et  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_L$  est donné par :

$$\epsilon_n = \varphi_0 \left( 2d_e + d_{m_e} + (d_{m_e} - d_g)/2 - 0.024(d_{m_q} - d_g) \right) \quad \epsilon_L = \varphi_0 (d_e + d_{m_e}) \quad (3.163)$$

### Simplification

Les paramètres de (3.162) apparaissent dans la PSD du déphasage 3.64 mesurée par DAMNED. En supposant que la dilatation des longueurs et la modification de l'indice de réfraction sont du même ordre  $\epsilon_L \sim \epsilon_n$ , on peut représenter la sensibilité  $\sqrt{\epsilon_{\Delta\phi}^c{}^2 + \epsilon_{\Delta\phi}^s{}^2}$  de l'expérience au paramètre de couplage tel que définie dans l'équation (3.162). On observe que la sensibilité provient du paramètre  $\alpha$  (en bleu) sur la majorité de l'intervalle d'intérêt de DAMNED. Cependant, à résonance, le paramètre  $\alpha$  s'annule et  $\beta$  (en orange) atteint le facteur de qualité de la cavité  $Q_1$  (ou un sous multiple pour les harmoniques). L'effet de l'indice de la fibre (en vert) est quasi-inexistant.

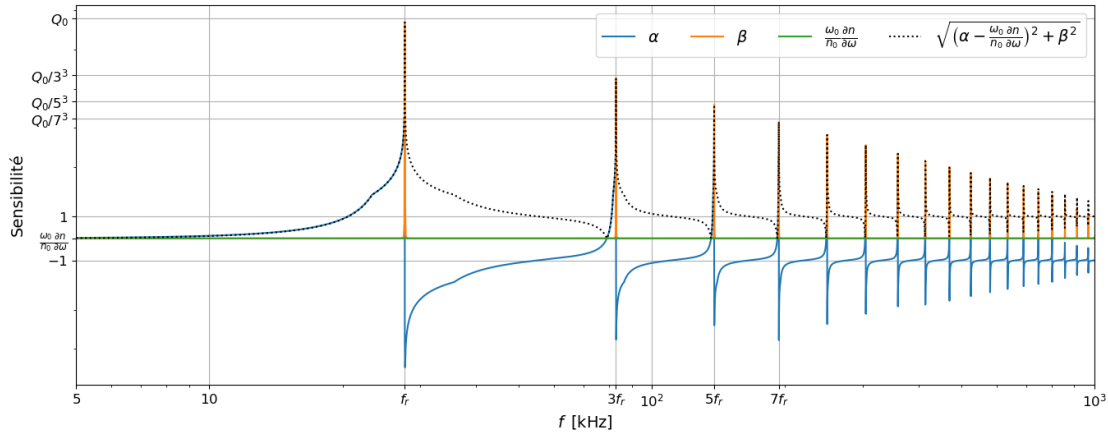


FIGURE 3.27 – Sensibilité de l'expérience DAMNED aux paramètres de couplage. L'oscillation et la résonance de la cavité modélisées par les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont en bleu et en orange. L'effet de l'indice de la fibre est en vert.

### Au-delà de la zone d'intérêt de DAMNED

Actuellement la zone d'intérêt de DAMNED est limitée expérimentalement et s'étend de 10 à 200 kHz. En extrapolant la sensibilité définie par l'équation (3.161), on pourrait prédire le comportement de l'expérience au-delà de l'intervalle. Comme on peut en partie le voir dans la figure 3.27 :

- à basse fréquence ( $< 10$  kHz), les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont nuls et seul l'effet de l'indice de la fibre persiste. L'oscillation de la fréquence  $\delta\omega$  de la cavité compenserait l'oscillation de longueur  $\delta L$  de la fibre.
- à haute fréquence ( $> 200$  kHz), le paramètre  $\alpha$  est égal à  $-1$ ,  $\beta$  s'annule. Le forçage du champ scalaire est trop rapide pour avoir un effet sur l'écarteur en verre de la cavité. La sensibilité de l'expérience se limiterait donc à la variation du délai optique introduit par la fibre à haute fréquence.

Cependant, cette extrapolation théorique ne tient compte ni du bruit thermique des fibres à basse fréquence, ni de l'absence de caractérisation de la réponse du laser à l'oscillation du champ scalaire à haute fréquence. Il n'est donc pas possible de placer des contraintes au-delà de l'intervalle d'intérêt de l'expérience.

### 3.5 Analyse des données

L'effet de la matière noire sur l'expérience DAMNED étant modélisé, il est maintenant temps de s'attaquer à l'analyse des données. Comme abordé dans la section 3.2 théorique de ce chapitre, le champ scalaire de matière noire a une composante stochastique ce qui complique fortement son analyse. En simplifiant le problème analytiquement, il a été possible de créer un logiciel d'analyse spécifique à l'expérience et qui permet d'obtenir les contraintes sur les paramètres de couplage.

#### 3.5.1 Nombre de paramètres à ajuster

Comme présenté dans la section théorique de ce chapitre, le signal de matière noire recherché (3.43) s'exprime comme la somme d'un ensemble d'oscillations dont les fréquences dépendent de la distribution de vitesse. En supposant que l'on veut estimer le paramètre  $\gamma$  qui représente la combinaison linéaire des paramètres de couplage du champ scalaire, le signal à ajuster est :

$$s(t, \gamma, \{\alpha_j\}, \{\delta_j\}) = \gamma \varphi^s(t, \{\alpha_j\}, \{\delta_j\}) = \gamma \sum_j \alpha_j A_j \cos(\omega_{\varphi j} t + \delta_j) \quad (3.164)$$

où

$$A_j = \frac{\sqrt{8\pi G \rho_{DM}}}{\omega_{\varphi} c} \sqrt{f_{DM}(f_j) \Delta f} \quad \omega_{\varphi j} = 2\pi f_j = \omega_{\varphi} \left(1 + \frac{v_j^2}{2c^2}\right) \quad (3.165)$$

avec  $f_{DM}(f_j)$  la distribution de vitesse en fonction de la fréquence du signal.

Les paramètres  $\alpha_j$  et  $\delta_j$  sont des variables aléatoires dont les densités de probabilité sont :

$$P[\alpha_j] = \alpha_j e^{-\alpha_j^2/2} \quad P[\delta_j] = \frac{1}{2\pi} \quad \text{pour } 0 \leq \delta_j \leq 2\pi \quad (3.166)$$

#### Echantillonnage $N_j$

La distribution en vitesse (présentée dans l'équation (3.34) de la section 3.2 de ce chapitre et visible dans la figure 3.28a) est convertie afin de dépendre de la fréquence (représentée dans la figure 3.28b) :

$$f_{DM}(f) = \frac{1}{f_{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{v \sigma_v} e^{-\frac{2c^2(f/f_{\varphi}-1)+v_{\odot}^2}{2\sigma_v^2}} \sinh\left(\frac{cv_{\odot}}{\sigma_v^2} \sqrt{2(f/f_{\varphi}-1)}\right) \quad (3.167)$$

Afin d'échantillonner la distribution, il est nécessaire de choisir un pas de fréquence  $\Delta f$  suffisamment fin pour être représentatif mais également suffisamment large pour limiter le besoin en mémoire/processeur de la méthode d'analyse. Afin d'estimer la largeur typique de la distribution en fréquence, on considère que la distribution en vitesse a un maximum en  $v_{max}$  ( $\sim \pi/4v_{\odot} \simeq 180$  km/s) et une largeur typique  $\delta v$  ( $\simeq 150$  km/s). La largeur correspondante en fréquence est alors :

$$\delta f = \frac{f_{\varphi}}{2} \left( \frac{(v_{max} + \delta v)^2}{2c^2} - \frac{(v_{max} - \delta v)^2}{2c^2} \right) = f_{\varphi} \frac{v_{max} \delta v}{c^2} \simeq 3 \times 10^{-7} f_{\varphi} \quad (3.168)$$

$\delta f$  caractérise la largeur typique de la distribution. Pour étudier le signal, on choisit un intervalle de fréquence défini par la borne :

- minimum  $f_\varphi$  qui correspond à la fréquence de coupure dans l'équation (3.167).
- maximum  $f_\varphi + a\delta f$  où  $a$  est arbitrairement fixé égal à 6 afin de couvrir une portion importante de la distribution (figure 3.28b).

Cette intervalle définit la largeur du spectre sur laquelle le signal sera recherché.

L'expérience fournit des données dont la résolution spectrale  $\Delta f$  est limitée (à  $\sim 3$  mHz pour DAMNED). Cette quantité permet de discrétiser l'intervalle et de définir un nombre  $N_j$  de fréquences nécessaires pour représenter la distribution :

$$N_j(f_\varphi) = a \frac{\delta f}{\Delta f} \quad (3.169)$$

Ce nombre  $N_j$  est qualitativement représenté avec un hachurage dans la figure 3.28 où l'on observe donc la discrétisation de la distribution de vitesse.

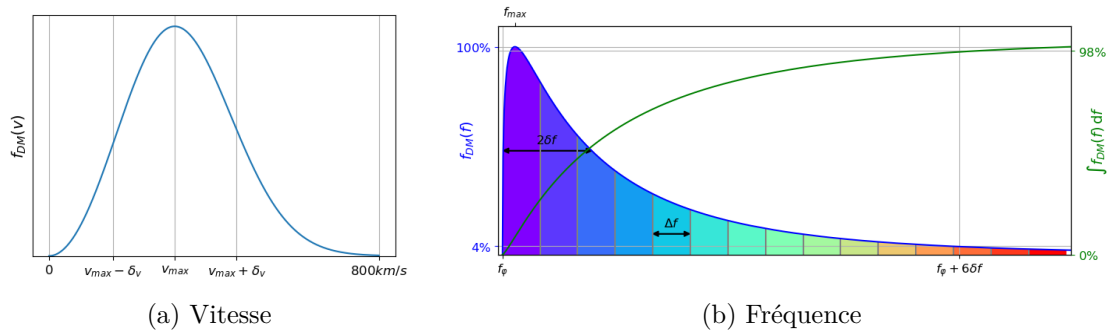


FIGURE 3.28 – Distribution des vitesses du halo de matière noire. La distribution en fréquence (en bleue) est discrétisée par la résolution spectrale  $\Delta f$  de l'expérience. La fréquence maximale  $6\delta f$  est choisie pour limiter le temps de calcul et obtenir une discrétisation suffisante de la distribution. Le nombre de fréquence  $N_j$  est égal à 12 dans cette figure mais varie d'une demi-douzaine à une centaine pour la zone d'intérêt de DAMNED. L'intégrale de cette distribution (en vert) confirme que 98% des valeurs sont échantillonnées.

Afin d'extraire le signal des données, il faut ajuster les  $N_j$  amplitudes  $\alpha_j$ , les  $N_j$  phases aléatoires  $\phi_j$  et le paramètre qui nous intéresse  $\gamma$ . La somme des champs se limite donc à

$$s(t, \gamma, \{\alpha_j\}, \{\phi_j\}) = \gamma \sum_{j=1}^{N_j} \alpha_j A_j \cos(\omega_{\varphi_j} t + \delta_j) \quad (3.170)$$

Pour un nombre  $N_j$  très élevé, on s'attend donc à reproduire très finement cette distribution au prix d'un lourd calcul numérique. Un faible  $N_j$  ne permettrait pas de retrouver la forme de la distribution mais permettrait de réduire considérablement le temps de calcul. Pour notre expérience, le nombre  $N_j$  varie d'une demi-douzaine à une centaine entre 10 et 200 kHz.

### 3.5.2 Vraisemblance bayésienne

Il existe de nombreuses méthodes d'analyses pour ajuster un signal comportant une caractéristique stochastique. Parmi les méthodes applicables, trois ont été considérées dans un premier temps : une approche bayésienne dans le domaine temporel, une approche Monte-Carlo dans le domaine temporel et une approche bayésienne dans le domaine fréquentiel. Les deux premières approches reposent sur l'analyse d'une série temporelle correspondant à l'ensemble des données disponibles. Etant donné que les différentes acquisitions totalisent plus de 4 To en format binaire, il est vite apparu évident que le temps de calcul pour réaliser l'opération serait bien trop important. De plus, le nombre important de paramètres ( $2N_j + 1$ ) à ajuster aurait considérablement allongé ce temps de calcul. L'approche bayésienne dans le domaine fréquentiel a été retenue puisqu'elle permet de réduire l'analyse au seul paramètre  $\gamma$ , à l'aide d'une astucieuse marginalisation analytique. Cette méthode est présentée dans la suite de cette section.

#### Théorème de Bayes

Cet encart a pour objectif de présenter de manière succincte le fonctionnement d'une inférence bayésienne. L'approche repose sur le théorème de Bayes en statistique :

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)} \quad (3.171)$$

Il exprime la probabilité de "A sachant B" en fonction de la probabilité de "B sachant A" et de la probabilité de "A".

#### Inférence bayésienne

Dans le cas d'un ensemble de données  $\mathbf{d}$  qui dépendent de paramètres  $\mathbf{p}$ , le théorème s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}|\mathbf{d}) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}) \times \Pi(\mathbf{p})}{\mathcal{E}(\mathbf{d})} \quad (3.172)$$

- La densité de probabilité a posteriori  $\mathcal{P}(\mathbf{p}|\mathbf{d})$  représente la densité de probabilité que les paramètres  $\mathbf{p}$  soient compatible avec les données. Autrement dit, si  $\mathcal{P}(\mathbf{p}|\mathbf{d}) \sim 0$ , les paramètres choisis ne représentent absolument pas les mesures. C'est donc cette quantité que l'on recherche pour obtenir la valeur la plus probable des paramètres et leurs incertitudes.
- La vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p})$  représente l'accord entre les données et un jeu de paramètres choisis. Cette quantité est évaluée par des méthodes numériques afin d'obtenir le jeu de paramètres qui maximise cette quantité. Dans ce cas, les paramètres représentent le mieux les données disponibles.
- L'a-priori  $\Pi(\mathbf{p})$  correspond à la connaissance "a-priori"/déjà disponible sur les paramètres choisis pour la simulation.
- L'évidence  $\mathcal{E}(\mathbf{d})$  est une constante de normalisation.

**Méthode du  $\chi^2$** 

Toute la subtilité de cette méthode se trouve dans l'obtention du maxima de la vraisemblance. Elle est définie comme dans les méthodes de  $\chi^2$  [43]. Dans le cas le plus simple, on modélise le signal par  $s(t_l, \mathbf{p})$  et les données  $\mathbf{d}$  ont un bruit blanc de variance  $\sigma^2$ . La vraisemblance dans ce cas s'écrit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = e^{-\chi^2/2} = e^{-\frac{1}{2} \sum_l \frac{(d_l - s(t_l, \mathbf{p}))^2}{\sigma^2}} \quad (3.173)$$

Afin d'obtenir le maxima de la vraisemblance, il faut donc trouver le minima du  $\chi^2$ . Pour cela, de nombreuses méthodes existent et leur domaine d'application dépend fortement des problèmes à résoudre.

**Marginalisation**

Généralement, la vraisemblance dépend de plusieurs paramètres. Dans certains cas, il peut être intéressant d'exprimer la vraisemblance indépendamment de certains. Pour cela, on intègre la vraisemblance sur les paramètres à marginalisés (ici  $p_2$ ) en tenant compte de leur densité de probabilité propre (ici  $\Pi(p_2)$ ) pour obtenir la vraisemblance marginalisée qui dépendra des paramètres non marginalisés (ici  $p_1$ ) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}|p_1) = \int \mathcal{L}(\mathbf{d}|p_1, p_2) \Pi(p_2) dp_2 \quad (3.174)$$

**Vraisemblance et  $\chi^2$** 

On définit  $\mathbf{d}$  le vecteur contenant les mesures expérimentales et  $\mathbf{s}(\mathbf{p})$  le vecteur contenant le signal théorique avec  $\mathbf{p}$  les paramètres que l'on souhaite ajuster. La fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$  permet d'estimer le niveau d'accord entre le modèle avec les mesures :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{s})^\dagger \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{s})\right) \quad (3.175)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice de covariance du bruit des données.

On suppose que le signal est échantillonné avec un pas de temps  $\Delta t = 1/f_s$  correspondant à l'inverse de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de l'instrument de mesure. Cette discrétisation permet de définir la quantité  $x$  à l'instant  $l\Delta t$  avec  $x_l = x(l\Delta t)$  qui apparaît dans la transformée de Fourier discrète  $\tilde{x}_k$  pour une fréquence discrète  $f_k = kf_s/N$  où  $N$  est le nombre de données :

$$\tilde{x}_k = \sum_l^N x_l e^{-2\pi i f_k l \Delta t} = \sum_l^N x_l e^{-2\pi i \frac{k l}{N}} = \sum_l^N x_l U_{kj} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{U} \mathbf{x} \quad (3.176)$$

L'introduction de la matrice  $\mathbf{U}$  de rotation (dont les éléments sont  $U_{kj} = \exp(-2\pi i k l / N)$ ) permet d'exprimer la transformée de Fourier  $\tilde{\mathbf{x}}$  de la quantité  $\mathbf{x}$ .

On peut définir la transformée de Fourier des données  $\tilde{\mathbf{d}}$  et celle du signal  $\tilde{\mathbf{s}}$  :

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{U}\mathbf{d} \quad \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{U}\mathbf{s} \quad (3.177)$$

En utilisant les propriétés d'unicité ( $\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U} = I$  avec  $I$  la matrice d'identité) et de symétrie ( $\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^\dagger$ ) de la matrice  $\mathbf{U}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{s})^\dagger \cdot \mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{U} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{s})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\mathbf{s}})^\dagger \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{U}^\dagger \cdot (\tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\mathbf{s}})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\mathbf{s}})^\dagger \cdot \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\mathbf{s}})\right) \end{aligned} \quad (3.178)$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{U}^\dagger$  correspond à la transformée de Fourier de la matrice de covariance  $\mathbf{C}$ . En faisant l'hypothèse que le bruit est stationnaire (voir section 3.3), cette matrice est diagonale et ses éléments dépendent de la densité spectrale de puissance du bruit  $S$  [44] :

$$\tilde{C}_{ij} = 2N f_s \delta_{ij} S_j \quad (3.179)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $S_j = S(f_j)$  correspond à la version discrète de la densité spectrale de puissance.

La matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$  étant diagonale, on peut calculer le produit matriciel en sommant sur les indices :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{|\tilde{d}_k - \tilde{s}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}}\right) \quad (3.180)$$

La maximisation de la fonction de vraisemblance s'apparente alors à une méthode de minimisation du  $\chi^2$  dont on retrouve la forme dans le terme exponentiel :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \chi_k^2 = \sum_{k=1}^N \frac{|\tilde{d}_k - \tilde{s}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} \quad (3.181)$$

### Transformée de Fourier du signal

La transformée de Fourier du signal  $s$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_k &= \gamma \sum_{j=1}^{N_j} A_j \alpha_j \sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} \cos(\omega_j t_l + \delta_j) \\ &= \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^{N_j} A_j \alpha_j \sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} \left( e^{i(2\pi \frac{f_s^j}{N} l \Delta t + \delta_j)} + e^{-i(2\pi \frac{f_s^j}{N} l \Delta t + \delta_j)} \right) \end{aligned} \quad (3.182)$$

En rappelant que  $f_s = 1/\Delta t$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{s}_k &= \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^{N_j} A_j \alpha_j \sum_{l=1}^N \left( e^{-2\pi i \frac{(k-j)l}{N} - i\delta_j} + e^{-2\pi i \frac{(k+j)l}{N} + i\delta_j} \right) \\ &= \frac{\gamma}{2} \sum_{j=1}^{N_j} A_j \alpha_j \left( e^{-i\delta_j} \sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{k-j}{N} l} + e^{i\delta_j} \sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{k+j}{N} l} \right)\end{aligned}\quad (3.183)$$

En développant la somme sur l'indice  $l$ , on a :

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{k\pm j}{N} l} &= \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{k\pm j}{N} N}}{1 - e^{-2\pi i \frac{k\pm j}{N}}} = \frac{e^{-\pi i k\pm j} e^{\pi i (k\pm j)} - e^{-\pi i (k\pm j)}}{e^{-\pi i \frac{k\pm j}{N}} e^{\pi i \frac{k\pm j}{N}} - e^{-\pi i \frac{k\pm j}{N}}} \\ &= e^{-\pi i \frac{k\pm j}{N} (N-1)} \frac{\sin(\pi(k\pm j))}{\sin\left(\pi \frac{k\pm j}{N}\right)}\end{aligned}\quad (3.184)$$

Pour de grandes valeurs de  $N$ , ces termes sont négligeables à l'exception du terme pour lequel  $k \pm j = 0$ . On peut donc l'approximer par un symbole de Kronecker :

$$\sum_{l=1}^N e^{-2\pi i \frac{k\pm j}{N} l} \simeq N \delta_{\mp kj} \quad (3.185)$$

Soit,

$$\tilde{s}_k = \frac{\gamma}{2} N \sum_{j=1}^{N_j} A_j \alpha_j \left( e^{-i\delta_j} \delta_{kj} + e^{i\delta_j} \delta_{-kj} \right) = \frac{\gamma}{2} N A_k \alpha_k e^{i\delta_k} \quad (3.186)$$

En définissant les éléments de la transformée de Fourier des données comme  $\tilde{d}_k = |\tilde{d}_k| e^{i\theta_k}$ , on peut exprimer entièrement le terme  $\chi_k^2$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_k^2 &= \frac{|\tilde{d}_k - \tilde{s}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} = \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} + \frac{|\tilde{s}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} - \frac{2}{\tilde{C}_{kk}} \mathcal{R}e \left[ \overline{\tilde{d}_k} \tilde{s}_k \right] \\ &= \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} + \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2 \alpha_k^2}{4\tilde{C}_{kk}} - \frac{N\gamma A_k \alpha_k |\tilde{d}_k|}{\tilde{C}_{kk}} \cos(\delta_k + \theta_k)\end{aligned}\quad (3.187)$$

La vraisemblance s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = C_0 \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} + \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2 \alpha_k^2}{4\tilde{C}_{kk}} - \frac{N\gamma A_k \alpha_k |\tilde{d}_k|}{\tilde{C}_{kk}} \cos(\delta_k + \theta_k) \right) \right) \quad (3.188)$$

où  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\mathbf{C})}}$  est une constante indépendante des paramètres  $\gamma$ ,  $\alpha_k$ ,  $\delta_k$  du signal.



### Marginalisation des phases

La fonction de vraisemblance dépend toujours de  $2N_j + 1$  paramètres ( $N_j$   $\alpha_j$ ,  $N_j$   $\delta_j$  et  $\gamma$ ). L'objectif est de réduire ce nombre au maximum afin de simplifier le calcul numérique. Dans le cas de ce modèle, l'astuce consiste à marginaliser la vraisemblance analytiquement sur les paramètres qui ne nous intéressent pas ( $\alpha_j$  et  $\delta_j$ ). En débutant par les phases aléatoires  $\delta_k$  qui suivent une distribution uniforme entre 0 et  $2\pi$ , la vraisemblance  $\mathcal{L}$  se marginalise de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}, \{\delta_j\}) \frac{d\delta_1}{2\pi} \frac{d\delta_2}{2\pi} \dots \frac{d\delta_N}{2\pi} \quad (3.189)$$

Les phases étant indépendantes, on peut faire le produit des intégrales individuelles :

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) = \prod_{k=1}^N \mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) = \prod_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}, \delta_k) \frac{d\delta_k}{2\pi} \quad (3.190)$$

où

$$\mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}, \delta_k) = C_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2 \alpha_k^2}{4\tilde{C}_{kk}}} e^{\frac{N\gamma A_k \alpha_k |\tilde{d}_k|}{2\tilde{C}_{kk}}} \cos(\delta_k + \theta_k) \quad (3.191)$$

L'intégrale a une solution analytique faisant apparaître une fonction de Bessel d'ordre 0 :

$$\mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) = C_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2 \alpha_k^2}{4\tilde{C}_{kk}}} I_0 \left( \frac{N\gamma A_k \alpha_k |\tilde{d}_k|}{2\tilde{C}_{kk}} \right) \quad (3.192)$$

On obtient donc une vraisemblance indépendante des phases  $\delta_j$ . Le nombre de degrés de liberté du système diminue de  $2N_j + 1$  à  $N_j + 1$ .

### Marginalisation des amplitudes

La seconde étape nécessite de marginaliser sur les paramètres  $\alpha_j$ . On s'intéresse maintenant à la densité de probabilité à posteriori  $\mathcal{P}(\mathbf{p}|\tilde{\mathbf{d}}) = \prod_k^N \mathcal{P}_k(\mathbf{p}|\tilde{\mathbf{d}})$ . En rappelant la distribution a-priori  $\Pi(\alpha_j) = \alpha_j \exp(-\alpha_j/2)$ , on peut marginaliser la densité de probabilité a posteriori  $\mathcal{P}_k(\mathbf{p}|\tilde{\mathbf{d}})$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(\gamma|\tilde{\mathbf{d}}) &= \int \frac{\mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) \cdot \Pi(\{\alpha_j\})}{\mathcal{E}(\mathbf{d})} d\{\alpha_j\} = C'_0 \int_0^\infty \alpha_k e^{-\alpha_k^2/2} \mathcal{L}_k(\tilde{\mathbf{d}}|\gamma, \{\alpha_j\}) d\alpha_k \\ &= C'_0 \int_0^\infty \alpha_k e^{-\alpha_k^2/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk}} - \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2 \alpha_k^2}{4\tilde{C}_{kk}}} I_0 \left( \frac{N\gamma A_k \alpha_k |\tilde{d}_k|}{2\tilde{C}_{kk}} \right) d\alpha_k \\ &= C'_0 e^{-\frac{|\tilde{d}_k|^2}{2\tilde{C}_{kk}}} \int_0^\infty \alpha_k e^{-\frac{1}{2} \alpha_k^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2 N^2 A_k^2}{4\tilde{C}_{kk}} \right)} I_0 \left( \alpha_k \frac{N\gamma A_k |\tilde{d}_k|}{2\tilde{C}_{kk}} \right) d\alpha_k \end{aligned} \quad (3.193)$$

où  $C'_0 = C_0/\mathcal{E}(\{\mathbf{d}\})$  avec  $\mathcal{E}(\{\mathbf{d}\})$  l'évidence bayésienne qui n'a pas d'intérêt pour la suite du calcul.

A nouveau, les mathématiques volent à notre secours et une formule analytique existe pour l'intégrale :

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} I_0(bx) dx = \frac{e^{b^2/4a}}{2a} \quad (3.194)$$

On obtient donc :

$$\mathcal{P}_k(\gamma|\mathbf{d}) = \frac{e^{-\frac{|\tilde{d}_k|^2}{2\tilde{C}_{kk}}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^N (2\pi\tilde{C}_{kk})}} \frac{e^{-\frac{|\tilde{d}_k|^2}{\tilde{C}_{kk} + \gamma^2 N^2 A_k^2/2}}}{1 + \gamma^2 \frac{N^2 A_k^2}{2\tilde{C}_{kk}}} \quad (3.195)$$

En utilisant l'équation (3.179), on obtient la densité de probabilité :

$$\mathcal{P}(\gamma|\mathbf{d}) = \prod_{k=1}^N \frac{e^{-\frac{|\tilde{d}_k|^2}{4Nf_s S_k}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^N (4\pi Nf_s S_k)}} \frac{e^{-\frac{|\tilde{d}_k|^2}{2Nf_s S_k}}}{1 + \gamma^2 \frac{NA_k^2}{4f_s S_k}} \quad (3.196)$$

Pour simplifier la notation, on utilise le logarithme de la vraisemblance :

$$-\ln \mathcal{P}(\gamma|\mathbf{d}) = \sum_{k=1}^N \frac{\frac{|\tilde{d}_k|^2}{2Nf_s S_k}}{1 + \gamma^2 \frac{NA_k^2}{4f_s S_k}} + \ln \left( 1 + \gamma^2 \frac{NA_k^2}{4f_s S_k} \right) \quad (3.197)$$

où la constante de normalisation a été abandonnée puisqu'elles n'intervient pas pour l'estimation du paramètre  $\gamma$ .

Les deux étapes de marginalisation ont permis de ramener le problème de  $2N_j + 1$  variables à un unique paramètre,  $\gamma$  la combinaison linéaire des paramètres de couplage. Ces marginalisations successives transforment donc un problème complexe en un problème solvable numériquement. Au vue de la quantité de données et du nombre de paramètres à ajuster initialement, sans cette simplification du problème, il n'aurait pas été possible d'estimer les paramètres de couplage du champ scalaire.

### Estimation de la valeur et de l'incertitude de $\gamma$

La valeur du paramètre  $\gamma$  correspond à la position du maximum de la probabilité  $\mathcal{P}(\gamma)$ . Afin d'estimer l'incertitude sur  $\gamma$  avec une certitude de 95%, on intègre la probabilité entre 0 et  $\sigma_\gamma$  tel que :

$$\int_0^{\sigma_\gamma} \mathcal{P}(\gamma) d\gamma = 0.95 \quad (3.198)$$

ce qui fournit la borne de confiance à 95%  $\sigma_\gamma$ .

### 3.5.3 Application dans le cas de DAMNED

La vraisemblance obtenue s'applique dans le cas d'un signal dont la forme est définie par l'équation (3.170). Dans le cas de l'expérience DAMNED, certaines modifications sont nécessaires pour intégrer les contraintes expérimentales ou numériques.

#### Lien avec l'expérience

Le calcul de la vraisemblance précédent suppose que l'on mesure directement le champ scalaire. Dans le cas de DAMNED, l'observable mesurée est la phase  $\Delta\phi$  de l'interféromètre (3.55) dont on cherche la partie oscillante  $\delta\omega$  due à la matière noire (3.161). Afin d'extraire les paramètres de couplage, on utilise la méthode du "max reach" qui consiste à considérer que tous les paramètres sont nuls à l'exception d'un paramètre pour lequel la contrainte est estimée. Dans le cas de DAMNED, ce sont les paramètres  $d_e$  et  $d_{m_e}$  qui sont évalués indépendamment.

$$\Delta\phi(t) = \omega_0 T_0 + d_e \sum_j \alpha_j A_j^{d_e} \cos(\omega_j t + \delta_j) + d_{m_e} \sum_j \alpha_j A_j^{d_{m_e}} \cos(\omega_j t + \delta_j) \quad (3.199)$$

En utilisant cette approche et les équations (3.161,3.162,3.163), on peut reformuler les coefficients  $A_j$  afin de relier l'observable expérimentale aux paramètres de couplage  $d_e$  et  $d_{m_e}$ .

$$A_j^{d_i} = A_j \omega_0 T_0 \operatorname{sinc} \left( \omega_\varphi \frac{T_0}{2} \right) \sqrt{M_i^2(\omega_j) + L^2(\omega_j)} \quad (3.200)$$

avec

$$\begin{aligned} M_i &= \left( \mathcal{D}'_c(1 + \alpha) - \mathcal{D}'_s\beta \right) \left( 1 + \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) - 1 - r_{d_i} \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \\ L &= \left( \mathcal{D}'_s(1 + \alpha) + \mathcal{D}'_c\beta \right) \left( 1 + \frac{\omega_0}{n_0} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \quad (3.201)$$

où  $r_{d_e} = 3$  et  $r_{d_{m_e}} = 2$ .

Pour obtenir la valeur et l'incertitude sur les paramètres de couplage  $d_i$ , il suffit donc de remplacer  $A_k$  par  $A_k^{d_i}$  et  $\gamma$  par  $d_i$  dans la probabilité a posteriori (3.196).

#### Vraisemblance pour une résolution spectrale limitée

Pour respecter la taille de la mémoire disponible, il a été nécessaire de découper les données en bloc pour obtenir la transformée de Fourier  $\tilde{d}$ . En supposant que le nombre de données  $N = nn_m$  est divisé en  $n_m$  blocs de données de longueur  $n$ , la transformée de Fourier s'écrit :

$$\tilde{d}_k = \sum_{i=1}^{n_m} \tilde{d}_k^{(i)} \quad (3.202)$$

où  $\tilde{d}_k^{(i)}$  est la transformée de Fourier du  $i^{\text{ème}}$  bloc de données.

La probabilité à posteriori s'écrit finalement :

$$-\ln \mathcal{P}(d_i | \mathbf{d}) = \sum_{k=1}^n \frac{\left| \sum_{j=1}^{nm} \tilde{d}_k^{(j)} \right|^2}{2nm f_s S_k} + \ln \left( 1 + \gamma^2 \frac{nm A_k^{d_i^2}}{4f_s S_k} \right) \quad (3.203)$$

où  $\gamma$  est le paramètre recherché,  $A_k$  est la fonction qui permet de caractériser la sensibilité de l'expérience au champ scalaire,  $d_k$  est la valeur de la transformée de Fourier des données mesurées et  $S_k$  est la densité spectrale de puissance du bruit du dispositif. Ces trois dernières quantités sont estimées à la fréquence  $f_k$ .

### Combinaison des deux séances d'acquisition

Deux séances d'acquisition de DAMNED ont été réalisées avec des fibres de différentes longueurs afin de minimiser les zones d'insensibilité de la fonction de transfert de l'interféromètre. Les données des sessions ont été acquises de manière indépendante et il est donc possible d'obtenir la valeur du paramètre  $\gamma$  en utilisant le produit des probabilités de chaque jeu de données.

Soient  $\mathcal{P}^{52}(\gamma)$  et  $\mathcal{P}^{56}(\gamma)$  les probabilités du paramètre  $\gamma$  lorsque la fibre mesure 52 et 56 km. La valeur du paramètre  $\gamma$  correspond à la position du maximum de la probabilité  $\mathcal{P}^{52}(\gamma) \times \mathcal{P}^{56}(\gamma)$ . L'incertitude est obtenue en intégrant numériquement les densités de probabilité afin d'atteindre un niveau de certitude de 95% :

$$\int_0^{\sigma_\gamma} \mathcal{P}^{52}(\gamma) \times \mathcal{P}^{56}(\gamma) d\gamma = 0.95 \quad (3.204)$$

### Vraisemblance pour le halo de relaxation

En plus du modèle commun du halo de matière noire galactique, un second modèle a été étudié. Avec celui-ci, il est supposé que la matière noire est gravitationnellement attirée par la Terre et forme un halo de relaxation terrestre [7, 9, 10]. Dans ce cas, le temps de cohérence du champ est beaucoup plus important que dans le cas galactique. D'après [10], celui évolue comme :

$$\tau_c = 10^3 \left( \frac{10^{-9} \text{eV}/c^2}{m_\varphi} \right)^3 \text{ s} \quad (3.205)$$

Pour DAMNED ( $4 \times 10^{-11} < m_\varphi < 9 \times 10^{-10}$ ), on attend donc un temps de cohérence qui varie d'une demi-heure à une demi année, ce qui change fondamentalement l'approche qu'il faut suivre pour traiter les données expérimentales. La plus longue durée de données consécutives correspond seulement à quelques minutes (268 s) donc on ne peut plus supposer que le signal a une étendue spectrale suffisante pour être visible. Le signal recherché expérimentalement est un dirac. Autrement dit, le nombre de fréquence  $N_j$  est unitaire là où il était multiple dans le cas du halo galactique.

Pour remédier à ce problème et réaliser une analyse des données avec le modèle du relaxation, on considère que chaque morceau de donnée correspond à une acquisition indépendante du signal de matière noire. Cette indépendance permet d'utiliser le produit des vraisemblances de chaque acquisition pour calculer la probabilité a posteriori de l'ensemble de l'acquisition. Pour  $n_m$  acquisitions, on a donc :

$$\mathcal{P}(\gamma|\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \dots, \mathbf{d}^{(n_m)}) = \Pi(\gamma) \prod_{i=1}^{n_m} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{d}^{(i)}|\gamma)}{\mathcal{P}(\mathbf{d}^{(i)})} \quad (3.206)$$

où  $\Pi(\gamma)$  est l'a-priori sur le paramètre  $\gamma$ ,  $\mathcal{L}(\mathbf{d}^{(i)}|\gamma)$  est la vraisemblance des données du  $i^{\text{ème}}$  bloc marginalisée et  $\mathcal{P}(\mathbf{d}^{(i)})$  est une constante de normalisation.

Lorsque la durée du bloc de données est plus court que la longueur de cohérence, le signal n'est modélisé que par une unique fréquence de telle sorte que la distribution de vitesse exprimée en fréquence est un dirac  $f_{DM}(\omega) = \delta(\omega - \omega_\varphi)$ . Le signal recherché s'écrit alors :

$$s(t, \gamma, \alpha_j, \delta_j) = \gamma \frac{\varphi_0}{\omega_\varphi} \alpha_j \cos(\omega_\varphi t + \delta_j) \quad (3.207)$$

En utilisant le même raisonnement que dans le cas galactique, la vraisemblance pour un set de données s'écrit :

$$-\ln \mathcal{P}(\gamma_j|\mathbf{d}^i) = \frac{\left| \tilde{d}_k^{(j)} \right|^2}{2Nf_s S_k} + \ln \left( 1 + \gamma_j^2 \frac{N A_k^2}{4f_s S_k} \right) \quad (3.208)$$

La vraisemblance générale s'écrit donc :

$$-\ln \mathcal{P}(\gamma|\mathbf{d}) = \frac{\sum_{j=1}^{n_m} \left| \tilde{d}_k^{(j)} \right|^2}{2Nf_s S_k} + n_m \ln \left( 1 + \gamma_j^2 \frac{N A_k^2}{4f_s S_k} \right) \quad (3.209)$$

Fondamentalement, la formule reste la même. La seule différence est donc le calcul de la moyenne des  $n_m$  DFT  $\sum_{j=1}^{n_m} |\tilde{d}_k^{(j)}|^2$ . Ce qui est similaire à une moyenne de l'ensemble des blocs que l'on considère indépendant. On espère donc que le bruit moyen de la PSD diminue avec le nombre d'acquisitions. En marginalisant sur le paramètre  $\alpha$ , le caractère stochastique du champ scalaire est intégré dans la vraisemblance.

### Implémentation numérique

Afin de réaliser les calculs nécessaires à l'obtention des contraintes sur les paramètres de couplage, l'approche bayésienne a été codée trois fois de manière quasi-indépendante

- Lucie Cros (stagiaire de M1) a codé (sous la supervision d'Aurélien Hees et la mienne) une version Python où le calcul est réalisé en série,
- J'ai codé une version Python parallélisée,
- Aurélien Hees a codé la version Fortran parallélisée qui a été utilisée pour obtenir les contraintes finales.

La version Python étant trop lente, l'utilisation d'un code Fortran [45] est nécessaire pour traiter l'importante quantité de données.

### 3.6 Résultats

Dans la figure 3.29, les contraintes présentent des pics "profonds" aux fréquences ( $n = 1, 3, 5, 7$ ) de résonances de la cavité. Les pics où les contraintes sont moins bonnes correspondent aux fréquences où la sensibilité (essentiellement  $\alpha$ , voir figure 3.27) de la cavité n'est pas parfaite. Les "oscillations" de faible amplitude à haute fréquence correspondent aux zones où la combinaison des acquisitions avec deux longueurs de fibre ne compensent pas entièrement le terme  $\sin(\omega_\varphi T_0/2)$  de la fonction de transfert définie dans l'équation (3.95).

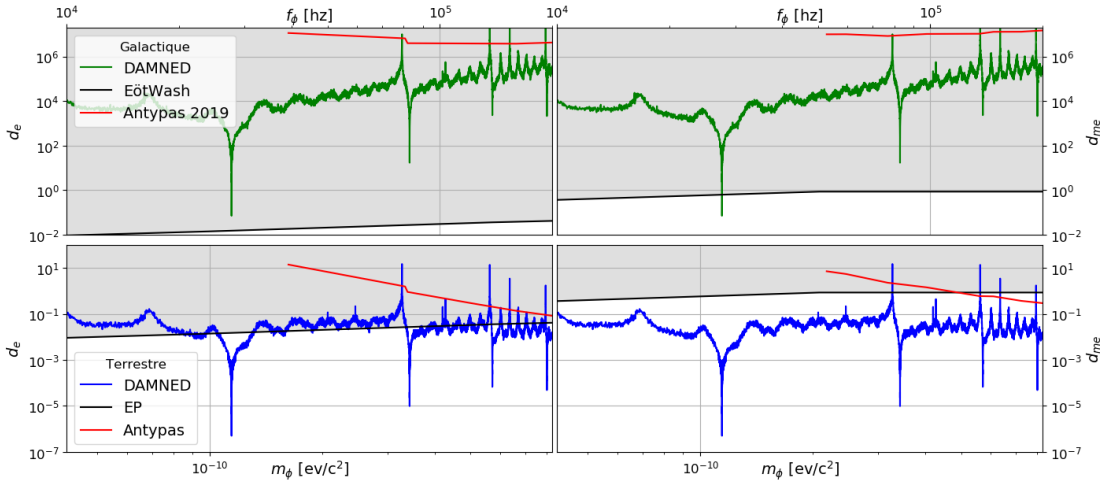


FIGURE 3.29 – Contraintes fixées par l'expérience DAMNED sur les paramètres  $d_e$  et  $d_{m_e}$  pour un modèle galactique et un modèle terrestre de matière noire. Le trait noir correspond aux tests du principe d'équivalence Eot-Wash qui impose les contraintes à l'état de l'art. Le trait rouge correspond à une expérience plus récente [46] basée sur des méthodes de spectroscopie atomique.

Dans le cas du modèle de matière noire galactique (graphiques du dessus), les contraintes fixées par DAMNED améliorent celles des expériences de balance de torsion [3, 16, 17] d'un ordre de grandeur sur une bande de fréquence très réduite.

Dans le cas du halo de relaxation [10] (graphiques du dessous), DAMNED place de nouvelles contraintes sur la quasi-totalité de l'intervalle de fréquence avec une amélioration atteignant par endroit 5 ordres de grandeurs pour  $d_e$  et 6 pour  $d_{m_e}$ . La raison sous-jacente à la différence de sensibilité dans les deux modèles vient du fait que les expériences comme DAMNED ou [46] dépendent de la densité locale de DM alors que les expériences de balance de torsion recherchent une cinquième force entre la Terre et les masses-tests. Cette nouvelle force ne nécessite pas que le champ scalaire soit dû à la matière noire et la force est donc indépendante de la densité de matière noire locale.

Dans tous les cas, DAMNED améliore les résultats d'une expérience plus récente [46] qui recherche le même type de couplage que le notre. Nos contraintes sont en moyenne 2 ordres de grandeurs plus fortes que cette expérience.

### 3.7 Conclusion et perspectives

Ce travail de recherche a été un excellent défi intellectuel et un vrai plaisir. J'ai eu la sensation d'avoir travaillé sur des domaines de la physique très différents. Les épreuves ont été nombreuses et m'ont permis de sortir de ma zone de confort de jeune théoricien/numéricien.

Le projet s'est construit dans le contexte du travail réalisé par l'équipe en 2016 avec l'analyse des données de comparaison d'horloges à la recherche d'une variation des constantes fondamentales. Le matériel de pointe disponible au laboratoire ne manque pas et de nombreuses recherches sont envisageables. J'ai eu la chance d'être là au moment de l'émergence de l'idée de DAMNED et de pousser l'expérience jusque dans ses retranchements.

De nombreuses expériences se reposent sur une mesure différée se développent actuellement. DAMNED fait partie de ces premières expériences pour lesquelles les résultats sont capables de faire aussi bien voire mieux que des expériences plus matures.

Dans le cadre de modèle "classique" de matière noire, DAMNED atteint un niveau de sensibilité qui lui permet de s'approcher des contraintes fixées par les balances de torsion du groupe Eot-Wash qui profite d'une grande sensibilité permise par les nombreuses années de développement expérimental.

#### 3.7.1 Etapes

Le projet DAMNED s'est décomposé en étapes assez variées.

Dans un premier temps, il était question de démontrer le fonctionnement du prototype de l'expérience. La mise en place m'a permis de collaborer avec les expérimentateurs qui m'ont donné une quantité d'astuces, de conseils et de coups de main sans lesquels DAMNED n'aurait pas pu porter ses fruits aussi rapidement. Cette étape, bien que délicate dans un premier temps, m'a révélé le niveau de technicité du travail expérimental et m'a également permis de développer des compétences nouvelles qui sont un avantage certain pour l'analyse de données qui est mon domaine de prédilection.

Une fois les premiers résultats expérimentaux obtenus, il a fallu modéliser, en détail, l'effet de la matière noire sur le dispositif afin de s'assurer que l'effort ne serait pas vain.

- Le premier effet assez évident était celui de la dilatation de la fibre par l'oscillation du rayon de Bohr. Cet effet était déjà étudié dans la littérature [47] mais son amplitude était trop faible pour permettre de placer des contraintes compétitives.
- Le second effet est venu d'un commentaire lors de la présentation de DAMNED à des collègues. Celui ci nous a conduit sur la piste des effets résonants dans la cavité. La modélisation numérique et l'étude analytique a permis de prouver l'importance de ce phénomène dans l'optique de fixer des contraintes compétitives.
- L'effet de la finesse sur le trajet d'un photon dans la cavité a été le dernier. Cet effet est bénéfique pour les détecteurs d'ondes gravitationnels [37, 38, 48] puisque la vitesse du photon lui permet d'accumuler plusieurs fois la distance supplémentaire parcourue en raison du mouvement des miroirs. Il accumule une phase de plus en plus grande à chaque réflexion sur un miroir de la cavité ce qui amplifie la sensibilité

aux ondes gravitationnelles. Malheureusement, la perturbation du champ scalaire est beaucoup plus rapide et le photon dans la cavité de DAMNED ne pourra pas profiter de cet effet. Après avoir refait et adapté le calcul analytique développé pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles, on peut conclure que la sensibilité de DAMNED n'est ni améliorée ni détériorée.

De ces trois effets, il a été possible de définir le lien entre l'oscillation des constantes due à la matière noire et la densité spectrale de puissance calculée à partir du déphasage mesurée entre les deux branches des interféromètres.

Après avoir combiné les observations expérimentales et la modélisation théorique, il a été nécessaire d'augmenter la durée de l'expérience afin d'obtenir des contraintes compétitives. Cette étape a nécessité une refonte du système d'acquisition afin de pouvoir acquérir le signal pendant  $\sim 25$  jours à une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz.

Le stockage, la gestion et le traitement de cette quantité de données a été un vrai défi technique. J'ai pu découvrir de nombreuses méthodes de traitement de données et ai du choisir celle dont le temps de calcul était compatible avec la durée de ma thèse.

La modélisation du bruit de la cavité a révélé la présence de pics dans les données expérimentales. La recherche de leur origine a été stimulante et technique. Cela m'a permis d'approfondir mes nouvelles connaissances expérimentales et a exclu la matière noire comme origine des effets systématiques.

Finalement, afin d'estimer la valeur des paramètres de couplage, il a fallu développer un logiciel d'analyse dédié. Tout ceci a permis de fixer des contraintes compétitives.

### 3.7.2 Perspectives

La relative nouveauté de l'expérience sous-entend qu'il existe de nombreuses améliorations possibles. Dans un premier temps, il est possible d'améliorer l'expérience en elle-même :

- La dégradation du niveau de bruit de la cavité devrait être résolu dans un futur proche lorsque la cavité "bleue" sera ouverte et réalignée. Cela devrait donc permettre de récupérer le niveau de bruit obtenu dans les premières versions de l'expérience. L'amélioration des contraintes pourrait gagner un facteur  $\sim \sqrt{10}$ .
- Le développement d'une nouvelle cavité ( $\sim 40$  cm) à l'Observatoire devrait permettre d'augmenter encore la valeur des contraintes.
- Dans la version actuelle de l'expérience, les fibres optiques utilisées pour introduire le délai se trouvent dans un carton rembourré de mousse. L'utilisation de fibre stabilisée en température et isolée des vibrations permettrait d'étendre aux basses fréquences ( $< 10$  kHz) la zone d'intérêt de l'expérience.
- Enfin, une modélisation de l'effet de la matière noire sur la fréquence du laser libre (indépendant de la cavité) permettrait d'obtenir des contraintes à haute fréquence ( $> 200$  kHz).

La présence de nombreuses cavités à l'Observatoire pourrait permettre de faire une recherche simultanée de signaux transients de matière noire.

Les données de l'expérience DAMNED seront reprises lors d'une thèse future qui aura pour objectif de les analyser dans des modèles théoriques différents.



## Bibliographie DAMNED

- [1] A. HEES et al. “Searching for an Oscillating Massive Scalar Field as a Dark Matter Candidate Using Atomic Hyperfine Frequency Comparisons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 117.6 (2016), p. 061301. DOI : 10.1103/PhysRevLett.117.061301 (cf. p. 79, 96, 97).
- [2] Thibault DAMOUR et John F. DONOGHUE. “Equivalence principle violations and couplings of a light dilaton”. In : *Phys. Rev. D* 82.8 (2010), p. 084033. DOI : 10.1103/PhysRevD.82.084033 (cf. p. 85, 87).
- [3] A. HEES et al. “Violation of the equivalence principle from light scalar dark matter”. In : *Phys. Rev. D* 98.6 (2018), p. 064051. DOI : 10.1103/PhysRevD.98.064051 (cf. p. 85, 87, 95, 96, 151).
- [4] Joshua W. FOSTER, Nicholas L. RODD et Benjamin R. SAFDI. “Revealing the dark matter halo with axion direct detection”. In : *Phys. Rev. D* 97 (12 2018), p. 123006. DOI : 10.1103/PhysRevD.97.123006 (cf. p. 89, 92).
- [5] A. DEREVIANKO. “Detecting dark-matter waves with a network of precision-measurement tools”. In : *Phys. Rev. A* 97.4 (2018), p. 042506. DOI : 10.1103/PhysRevA.97.042506 (cf. p. 89).
- [6] Gary P. CENTERS et al. *Stochastic fluctuations of bosonic dark matter*. 2019. arXiv : 1905.13650 [astro-ph.CO] (cf. p. 92).
- [7] Eric BRAATEN et Hong ZHANG. “Axion Stars”. In : (2018). arXiv : 1810.11473 (cf. p. 93, 149).
- [8] Peter W. GRAHAM, David E. KAPLAN et Surjeet RAJENDRAN. “Cosmological Relaxation of the Electroweak Scale”. In : *Phys. Rev. Lett.* 115 (22 2015), p. 221801. DOI : 10.1103/PhysRevLett.115.221801 (cf. p. 93).
- [9] Eric BRAATEN et Hong ZHANG. “Colloquium : The physics of axion stars”. In : *Rev. Mod. Phys.* 91 (4 2019), p. 041002. DOI : 10.1103/RevModPhys.91.041002 (cf. p. 94, 149).
- [10] Abhishek BANERJEE et al. “Relaxion stars and their detection via atomic physics”. In : *Communications Physics* 3.1 (2020), p. 1. DOI : 10.1038/s42005-019-0260-3 (cf. p. 94, 149, 151).
- [11] James G WILLIAMS, Slava G TURYSHEV et Dale H BOGGS. “Lunar laser ranging tests of the equivalence principle”. In : *Classical and Quantum Gravity* 29.18 (2012), p. 184004. DOI : 10.1088/0264-9381/29/18/184004 (cf. p. 94).
- [12] V. VISWANATHAN et al. “The new lunar ephemeris INPOP17a and its application to fundamental physics”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 476.2 (mai 2018), p. 1877-1888. DOI : 10.1093/mnras/sty096. arXiv : 1710.09167 [gr-qc] (cf. p. 94).

- [13] Edward W. KOLB et Igor I. TKACHEV. “Axion miniclusters and Bose stars”. In : *Physical Review Letters* 71.19 (1993), 3051–3054. DOI : 10.1103/physrevlett.71.3051 (cf. p. 94).
- [14] D. G. LEVKOV, A. G. PANIN et I. I. TKACHEV. “Gravitational Bose-Einstein Condensation in the Kinetic Regime”. In : *Phys. Rev. Lett.* 121 (15 2018), p. 151301. DOI : 10.1103/PhysRevLett.121.151301 (cf. p. 94).
- [15] Alejandro VAQUERO, Javier REDONDO et Julia STADLER. “Early seeds of axion miniclusters”. In : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.04 (2019), 012–012. DOI : 10.1088/1475-7516/2019/04/012 (cf. p. 94).
- [16] S. SCHLAMMINGER et al. “Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance”. In : *Phys. Rev. Lett* 100 (2008), p. 041101 (cf. p. 96, 151).
- [17] T A WAGNER et al. “Torsion-balance tests of the weak equivalence principle”. In : *Classical and Quantum Gravity* 29.18 (2012), p. 184002. DOI : 10.1088/0264-9381/29/18/184002 (cf. p. 96, 151).
- [18] Allan FRANKLIN et Ephraim FISCHBACH. “The Fifth Force : A Personal History, by Ephraim Fischbach”. In : *The Rise and Fall of the Fifth Force : Discovery, Pursuit, and Justification in Modern Physics*. Cham : Springer International Publishing, 2016, p. 145-239. DOI : 10.1007/978-3-319-28412-5\_6 (cf. p. 96).
- [19] Pierre TOUBOUL et al. “MICROSCOPE Mission : First Results of a Space Test of the Equivalence Principle”. In : *Phys. Rev. Lett.* 119 (23 2017), p. 231101. DOI : 10.1103/PhysRevLett.119.231101 (cf. p. 96, 97).
- [20] H el ene Pihan-le BARS et al. “New Test of Lorentz Invariance Using the MICROSCOPE Space Mission”. In : *Phys. Rev. Lett.* 123 (23 2019), p. 231102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.123.231102 (cf. p. 96, 97).
- [21] K. VAN TILBURG et al. “Search for Ultralight Scalar Dark Matter with Atomic Spectroscopy”. In : *Phys. Rev. Lett.* 115.1 (2015), p. 011802. DOI : 10.1103/PhysRevLett.115.011802 (cf. p. 97).
- [22] P. WCISŁO et al. “Experimental constraint on dark matter detection with optical atomic clocks”. In : *Nat. Astron.* 1 (2016), p. 0009. DOI : 10.1038/s41550-016-0009 (cf. p. 97).
- [23] B. M. ROBERTS et al. “Search for domain wall dark matter with atomic clocks on board global positioning system satellites”. In : *Nat. Commun.* 8.1 (2017), p. 1195. DOI : 10.1038/s41467-017-01440-4 (cf. p. 97).
- [24] P. WCISŁO et al. “New bounds on dark matter coupling from a global network of optical atomic clocks”. In : *Science Advances* 4.12 (2018), eaau4869 (cf. p. 97).
- [25] *Le design originel se trouve peut-être encore sur la serviette de papier de l’inventeur... Signature de Peter Wolf comprise pour tout prix futur.* (Cf. p. 99).
- [26] *Selon la Bible du SYRTE transcrit par le saint Pierre Uhrich.* (Cf. p. 102).

- [27] *Koheras Adjustik*. <https://www.nktphotonics.com/lasers-fibers/product/koheras-adjustik-low-noise-single-frequency-lasers/> (cf. p. 104).
- [28] J. MILLO et al. “Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities”. In : *Phys. Rev. A* 79 (5 2009), p. 053829. DOI : 10.1103/PhysRevA.79.053829 (cf. p. 104).
- [29] Carmel INSTRUMENTS. *BI200 Time interval analyzers*. <https://www.carmelinst.com/products/counters-time-interval-analyzers/bi200-bi201-time-interval-analyzers> (cf. p. 104).
- [30] GUIDETECH. *GT9000*. <http://www.guidetech.com/gt9000/> (cf. p. 105).
- [31] Xiaopeng XIE et al. “Phase noise characterization of sub-hertz linewidth lasers via digital cross correlation”. In : *Opt. Lett.* 42.7 (2017), p. 1217-1220. DOI : 10.1364/OL.42.001217 (cf. p. 107, 108, 119).
- [32] *Ettus X310*. <https://www.ettus.com/all-products/x310-kit/> (cf. p. 109).
- [33] James W. COOLEY et John W. TUKEY. “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”. In : *Mathematics of Computation* 19 (1965), p. 297-301 (cf. p. 111).
- [34] J. D. SCARGLE. “Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data.” In : *APJ* 263 (déc. 1982), p. 835-853. DOI : 10.1086/160554 (cf. p. 116).
- [35] *Un théoricien un peu pressé pourrait conclure que l'effet gravitationnelle de la matière noire sur le dispositif s'apparente à des effets de marée... noire!* (Cf. p. 120).
- [36] Y.-J. LEE. “Lecture 6 : Moderately Large Deflection Theory of Beams”. In : *Part 1 : Mechanical Vibrations and Waves*. MIT OpenCourseWare. Cambridge MA, 2016 (cf. p. 123, 125).
- [37] B. CANUEL et al. “Exploring gravity with the MIGA large scale atom interferometer”. In : *Scientific Reports* 8 (2018), p. 14064. DOI : 10.1038/s41598-018-32165-z. arXiv : 1703.02490 [physics.atom-ph] (cf. p. 134, 152).
- [38] VIRGO-COLLABORATION. *The VIRGO Physics Book, Vol. II, OPTICS and related TOPICS*. The Virgo collaboration, 2010 (cf. p. 134, 152).
- [39] Etienne SAVALLE et al. *Searching for DArk Matter with a Non-Equal Delay interferometer : The DAMNED experiment*. 2020. arXiv : 2006.07055 [gr-qc] (cf. p. 135).
- [40] David C HUTCHINGS. *Applied Nonlinear Optics* (cf. p. 136).
- [41] Helge KRAGH. “The Lorenz-Lorentz Formula : Origin and Early History”. In : *Substantia* 2.2 (2018), p. 7-18. DOI : 10.13128/Substantia-56 (cf. p. 137).
- [42] Etienne SAVALLE et al. *Novel approaches to dark-matter detection using space-time separated clocks*. 2019. arXiv : 1902.07192 [gr-qc] (cf. p. 138).
- [43] William H. PRESS et al. *Numerical Recipes in C (2nd Ed.) : The Art of Scientific Computing*. USA : Cambridge University Press, 1992 (cf. p. 143).

- [44] A. DEREVIANKO. “Detecting dark-matter waves with a network of precision-measurement tools”. In : *Phys. Rev. A* 97.4 (2018), p. 042506. DOI : 10.1103/PhysRevA.97.042506 (cf. p. 144).
- [45] Professeur RIGÉLIEN. *Greatest Programming Language*. Youtube. 2015. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=0-hmzurm4SE> (cf. p. 150).
- [46] D. ANTYPAS et al. “Scalar Dark Matter in the Radio-Frequency Band : Atomic-Spectroscopy Search Results”. In : *Phys. Rev. Lett.* 123 (14 2019), p. 141102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.123.141102 (cf. p. 151).
- [47] C. BRAXMAIER et al. “Proposed test of the time independence of the fundamental constants alpha and me/mp using monolithic resonators”. In : *Phys. Rev. D* 64.4 (2001), p. 042001. DOI : 10.1103/PhysRevD.64.042001 (cf. p. 152).
- [48] B. P. ABBOTT et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In : *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), p. 061102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv : 1602.03837 [gr-qc] (cf. p. 152).



## Chapitre 4

# Lien optique en espace libre

Ce court quatrième chapitre présente le travail que j'ai réalisé sur le projet de lien optique en espace libre qui est une collaboration entre l'Université d'Australie Occidentale, le CNES Toulouse et le SYRTE.

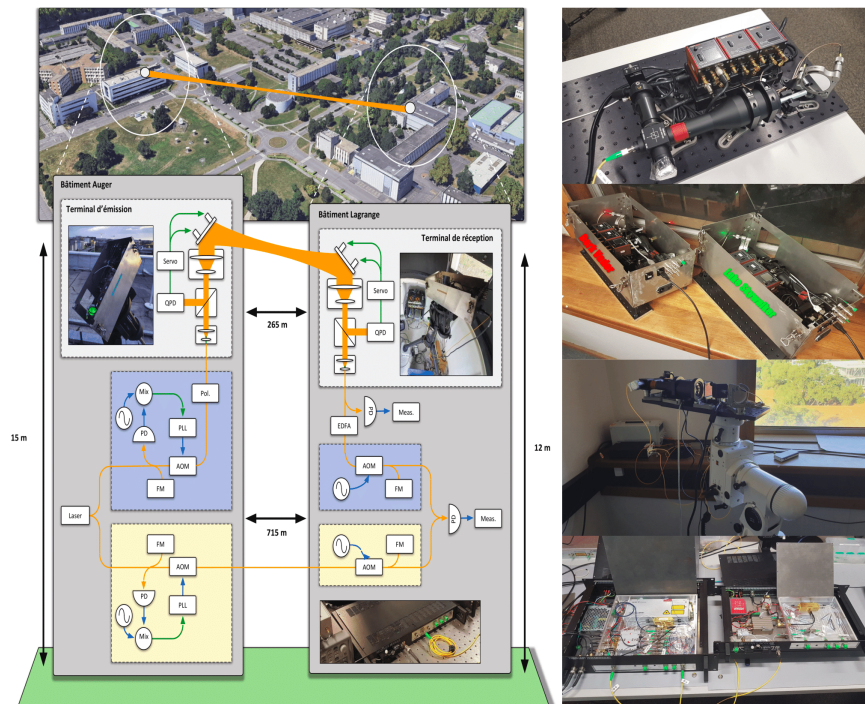


FIGURE 4.1 – Schéma du lien optique en espace libre opéré au CNES en février 2020 et photos des différents éléments : Télescope dont l'orientation du miroir est contrôlée activement, télescopes "Vador" et "Skywalker", monture équatoriale servant au réglage de l'alignement entre les terminaux, et boîtiers optiques permettant de réaliser la comparaison entre les deux sites.

**Table des matières - Airborne**

---

<b>4.1</b>	<b>Au delà d'ACES-PHARAO . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>4.2</b>	<b>Projet Airborne : TOFU/LOVE/BabyDOLL... . . . .</b>	<b>163</b>
4.2.1	Fonctionnement du lien . . . . .	163
4.2.2	Ma contribution . . . . .	165
<b>4.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie Airborne . . . . .</b>	<b>168</b>

---

## 4.1 Au delà d'ACES-PHARAO

Depuis la définition des objectifs scientifiques de la mission ACES, les horloges optiques n'ont cessé de démontrer leur excellent niveau de performance [1, 2] et améliorent largement l'incertitude relative de fréquence atteinte par les horloges micro-ondes comme PHARAO. Cette nouvelle sensibilité promet de révolutionner les mesures de haute précision dans les sciences fondamentales et appliquées [2-8]. Jusqu'ici, les comparaisons d'horloges étaient essentiellement faites par lien satellitaire ou fibré. Les liens satellitaires permettent des comparaisons intercontinentales mais leur stabilité et leur exactitude limitent l'utilisation d'horloges micro-ondes pour des temps d'intégration conséquents (de l'ordre de la journée). A l'inverse, les liens fibrés permettent de comparer toutes les horloges après un temps d'intégration très court (quelques secondes) mais leur déploiement les limite à des comparaisons intra-continetales.

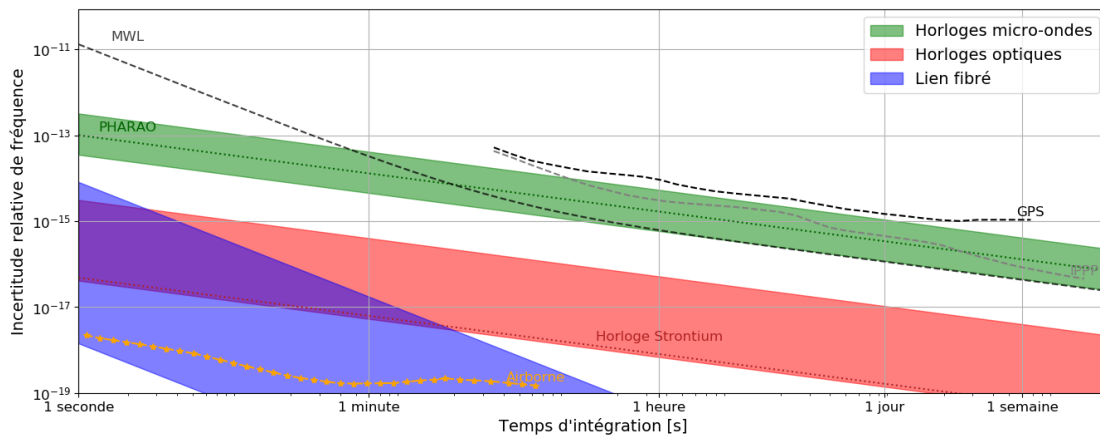


FIGURE 4.2 – Incertitude relative de fréquence (MDEV) pour différentes technologies : liens fibrés [5] (en bleu), horloges optiques [1, 9] (en rouge), horloges micro-ondes [1, 10] (en vert). Les liens satellitaires (trait discontinu) comme le GPS et l'IPPP[11] ne permettent pas de comparer les horloges optiques à l'inverse des liens fibrés. Le projet Airborne (en orange), un lien optique en espace libre[12], fait partie des nouveaux liens qui devraient permettre de comparer toutes les horloges pour des distances courtes et intermédiaires sans besoin d'installer une fibre à chaque fois.

La figure 4.2 est un aperçu des performances des différentes méthodes utilisées pour comparer des horloges atomiques entre elles.

- Les liens satellitaires permettent des comparaisons de très longue portée avec une incertitude relative de fréquence de l'ordre de  $10^{-12}/\sqrt{\tau}$  (où  $\tau$  est la durée d'intégration) pour les satellites GNSS, avec une légère amélioration pour la méthode IPPP[11] abordée dans le cadre de la mission ACES-PHARAO au chapitre 2.
- Les liens fibrés (en bleu sur la figure 4.2) permettent des comparaisons de moyenne portée avec une incertitude relative de fréquence de  $\sim 10^{-16}/\sqrt{\tau^3}$ .
- Les horloges micro-ondes (en vert sur la figure 4.2) ont une stabilité de l'ordre de



$10^{-13}/\sqrt{\tau}$  suffisamment élevée pour être comparé à l'aide de lien satellitaire après un temps d'intégration conséquent (de l'ordre de la journée).

- Pour les horloges optiques (en rouge) qui ont une stabilité de l'ordre  $10^{-16}/\sqrt{\tau}$ , il n'est plus possible d'utiliser un lien satellitaire. La comparaison est assurée par des fibres optiques dont le niveau est suffisant pour comparer les meilleurs horloges actuelles après quelques secondes d'intégration.

Malheureusement, la portée des liens fibrés est limitée technologiquement. Même s'il existe un réseau fibré mondial assurant le fonctionnement d'Internet, celui ci ne permet pas d'atteindre un bruit suffisamment faible pour permettre la comparaison d'horloges. Le développement de réseaux métrologiques dédiés est en cours en Europe, aux Etats-Unis et au Japon mais l'océan reste la dernière barrière à franchir avant de pouvoir comparer des horloges optiques en tout point du globe. De même, le déploiement de fibre sur des distances courtes, pour réaliser des comparaisons avec une horloge mobile, est trop coûteux pour être rentable scientifiquement. Ce type de lien risque donc d'atteindre ces limites à moyen terme.

La comparaison d'horloges optiques, là où des liens fibrés ne fonctionneraient pas, reste nécessaire pour de nombreuses avancées scientifiques : test de relativité générale [13, 14], recherche de matière noire [15], géodésie chronométrique [16-19], et définition de système de positionnement satellitaire [20]. De même, les comparaisons entre horloges optiques terrestres mobiles [3, 21, 22], permettraient d'effectuer des mesures gravimétriques locales pour la recherche en géophysique et le suivi de l'environnement.

Le déploiement de fibre optique est délicat voire impossible en fonction du terrain et la seule solution viable serait l'utilisation d'un lien en espace libre. Idéalement, il devrait atteindre le niveau de performance des fibres optiques tout en se détachant de la contrainte sur l'implantation et la longueur des fibres. Tout comme pour ces liaisons fibrées, le transfert en espace libre doit présenter un niveau de bruit plus faible que celui des horloges optiques pour un temps d'intégration raisonnable (quelques heures) pour espérer les comparer. Un tel lien doit traverser l'atmosphère et ses turbulences qui vont induire un bruit de phase beaucoup plus important qu'une longueur de fibre comparable [23-26]. Ces turbulences sont également responsables d'une modification de la focalisation et/ou de l'amplitude du signal optique, ce qui entraîne des interruptions aléatoires du lien. Afin de résoudre ce problème d'interruption, deux approches sont possibles :

- L'information peut être transmise sous forme d'un train d'impulsions d'ondes (à l'aide de peigne de fréquence optiques [27]). Se faisant, il est alors possible de reconstituer l'information qui pourrait être perdue lors d'extinctions du signal.
- Les fluctuations spatiales du faisceau créée par la turbulence atmosphérique est compensée à l'aide de techniques d'optique adaptative [28, 29].

Suite au travail précurseur de [25], de nombreux travaux ont débuté et récemment un effort particulier est développé pour réduire le volume de ces dispositifs. L'avantage majeur est la mobilité d'un tel dispositif qui permettrait de le déplacer facilement sur un terrain abrupte, tout en restant robuste, léger et ayant une faible consommation. Un tel projet faciliterait son déploiement dans des satellites et autres engins spatiaux, des terminaux relais aéroportés ou des segments terrestres mobiles.

## 4.2 Projet Airborne : TOFU/LOVE/BabyDOLL...

Ce dernier chapitre présente mon implication dans la collaboration entre l'Université d'Australie Occidentale, le CNES Toulouse et le laboratoire SYRTE. L'objectif de ce partenariat est de développer un lien optique en espace libre transportable [12] (que l'on nommera ici "Airborne" ). J'ai rejoint le projet lors d'une campagne de mesure où le prototype australien a permis de réaliser un lien en espace libre de  $\sim 265$  m entre un terminal optique fixe et un terminal mobile (voir 4.1).

### 4.2.1 Fonctionnement du lien

Le lien optique en espace libre utilisé au CNES avait pour objectif de comparer le signal transmis par les airs à celui transmis sous terre via une fibre optique. En faisant cela, il est possible de mesurer les performances du lien optique à l'aide du battement entre les deux liens. Le dispositif présenté dans la figure 4.3 se base donc sur la comparaison de deux liens différents fonctionnant en parallèle : un lien fibré (partie basse de la figure) et un lien en espace libre (partie haute de la figure).

#### Lien fibré

Le signal d'un laser de fréquence  $f_0 = 193$  THz est divisé par un séparateur optique :

- Une partie du signal est réfléchi par un miroir de Faraday (FM) en direction de la photodiode (PD).
- L'autre partie est décalée en fréquence  $f_e^f$  à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AOM) du module d'émission avant d'être transmis dans une fibre de 715 m.

Après l'aller dans la fibre, l'AOM du module réception décale à nouveau le signal d'une fréquence  $f_r$ .

- Une partie du signal (oscillant  $f_0 + f_e^f + f_r$ ) est transmise en direction de la photodiode de mesure
- L'autre partie est réfléchi par un miroir de Faraday (FM). Le signal fait donc un aller-retour dans la fibre. Il subit deux décalages par les deux AOM et oscille donc à  $f_0 + 2f_e^f + 2f_r$ .

Le signal faisant un aller-retour est recombinaé avec celui issu du séparateur à la sortie du laser. Le battement optique entre les deux est converti par la photodiode et est ensuite mélangé au signal RF dont la fréquence est  $\langle 2f_e + 2f_r \rangle$ . Le mélange des deux correspond à un signal d'erreur qui permet de caractériser le bruit sur le lien fibré (température, élongation...). Cette erreur est corrigée par la boucle d'asservissement ainsi définie et permet de compenser le lien fibré optique. Le temps caractéristique de cette boucle de rétro-action est optimisé afin de diminuer les variations lentes de la fibre.

Cette première branche du dispositif expérimental est le lien de référence. En remplaçant le lien aérien (décrit ci-après) par une seconde fibre parallèle à la première, il est possible de caractériser le bruit plancher et les effets systématiques du système (c'est l'équivalent du bras court ou "Référence" pour l'expérience DAMNED) tout en limitant le bruit de phase créé par la fibre optique.



### 4.2.2 Ma contribution

#### Ettus le retour

C'est grâce à l'expertise nouvellement développée avec le système d'acquisition de DAMNED que j'ai pu contribuer à ce projet. Mon objectif était de faire l'acquisition du battement entre le signal aérien et fibré afin de caractériser le lien en espace libre. Pour cela, le signal de la photodiode à 1 MHz est démodulé et digitalisé. L'avantage du système d'acquisition choisi est qu'il permet d'enregistrer le signal brut (sous forme d'une démodulation I/Q) pour en extraire la phase et l'amplitude.

#### Stabilité de la phase

Le battement entre le lien libre et le lien fibré a été enregistré sur deux sessions de  $\sim 45$  minutes en présence de la stabilisation tangage/roulis ou en son absence. Afin de calculer la densité spectrale de puissance (PSD) et la déviation d'Allan de ces données, une tendance est retirée aux deux acquisitions afin de compenser l'offset entre la fréquence du signal et celle de l'Ettus.

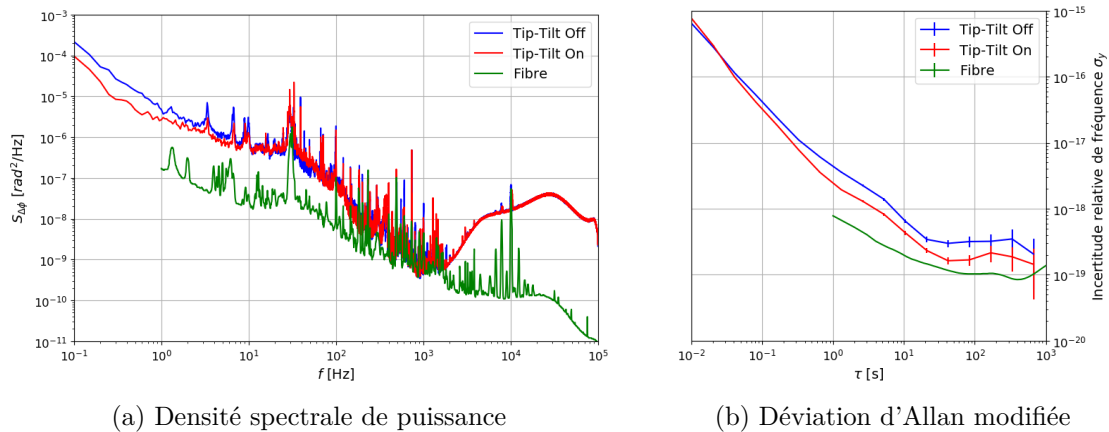


FIGURE 4.4 – PSD (4.4a) et déviation d'Allan (4.4b) du signal optique mesuré à l'aide du terminal de réception pour trois types de lien : en espace libre avec la correction de l'orientation des miroirs (en rouge), sans correction (en bleu) et le bruit du dispositif caractérisé en utilisant deux fibres optiques en parallèle [12].

La figure 4.4a représente la PSD calculée à partir de la phase du signal optique mesurée pour trois configurations : lien en espace libre avec (resp. sans) la correction tangage/roulis des miroirs en rouge (resp. bleu) et en remplaçant le lien en espace libre par un lien fibré (en vert) afin de caractériser le bruit de fond et les effets systématiques du dispositif expérimental.

Le niveau de la PSD atteint  $3 \times 10^{-6}$  rad<sup>2</sup>/Hz à 1 s pour le lien en espace libre, près d'un ordre de grandeur plus grand que le lien fibré. Trois zones se distinguent pour le lien en espace libre :

- Pour des fréquences inférieures à  $\sim 10$  Hz, les deux versions du lien mesurent le bruit de phase résiduel (non-compensé) créé par l'atmosphère qui séparent les deux terminaux. On observe également une légère différence lorsque la correction de l'orientation des miroirs du télescope est activée, ce qui permet de diminuer le bruit d'un facteur  $\sim 3$ .
- Pour des fréquences comprises entre  $\sim 10$  Hz à 2 kHz, la correction n'a plus d'effet sur la turbulence atmosphérique et les deux versions du lien mesurent sensiblement la même chose.
- Pour des fréquences supérieures à 2 kHz, les deux versions mesurent le bruit de phase du laser à l'aide de la différence de longueurs des liens (265 m pour le lien fibré, 715 pour le lien en espace libre). Comme c'était le cas pour l'interféromètre "Référence" de DAMNED, lorsque les deux branches de l'interféromètre sont de mêmes longueurs, le bruit du laser n'est pas mesuré (en vert sur la figure).

Il est possible de calculer la déviation d'Allan qui est utilisée pour comparer les différents types de lien (voir figure 4.2). Elle permet de caractériser l'incertitude relative de fréquence d'une mesure et de comparer les performances à long terme. Comme on peut le voir dans la figure 4.4b, l'activation du système permet d'obtenir une incertitude relative de fréquence de  $2 \times 10^{-18}$  après une seconde d'intégration et qui atteint un minima de  $2 \times 10^{-19}$  après quelques dizaines de secondes. Ce niveau est suffisant pour comparer les meilleurs horloges optiques entre elles et démontre les capacités d'un lien en espace libre.

### Stabilité de l'amplitude

Même si la stabilité de phase n'est améliorée que d'un facteur 3, l'intérêt du système de contrôle tangage/roulis permet de stabiliser l'amplitude et assurer la continuité du lien optique.

La figure 4.5a représente la série temporelle de la puissance, normalisée par la puissance moyenne. L'activation de la correction tangage-roulis (en vert) permet de corriger les variations importantes d'amplitude en absence du dispositif (en bleu). Sans la stabilisation, la puissance varie de plus de 50 % et présente des extinctions irrégulières. Avec la stabilisation, il n'y a plus d'extinction et la variation relative de la puissance ne dépasse pas 20 %.

La PSD de la série temporelle avec la stabilisation (en vert) a un niveau constant inférieur à celui sans stabilisation. La stabilisation est efficace pour des fréquences inférieures à environ 6 – 7 Hz, fréquence caractéristique correspondant à la boucle de rétroaction du système de correction de l'orientation des miroirs. C'est cette fréquence que l'on retrouve dans les PSD en phase de la figure 4.4a.

Enfin, l'histogramme (figure 4.5c) confirme l'importance du système de stabilisation qui permet de maintenir un niveau de puissance quasi-constant (en vert) sur la photodiode et d'assurer la continuité du lien en supprimant les interruptions du signal qui peuvent se produire en absence de stabilisation (en bleu).

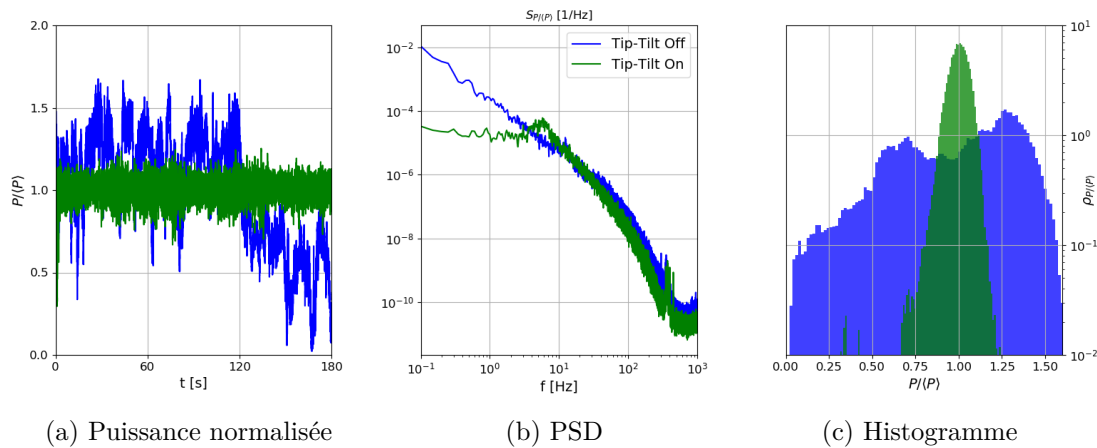


FIGURE 4.5 – Série temporelle (4.5a), PSD (4.5b) et histogramme (4.5c) de la puissance normalisée mesurée pour le lien en espace libre avec (en vert) ou sans (en bleu) la correction de l’orientation des miroirs.[12]

### 4.3 Conclusion

La stabilité mesurée par le dispositif [12] permet de prédire que les comparaisons d’horloges optiques ne seront pas limitées par les performances du lien optique en espace libre. Cette stabilité de  $\sim 2 \times 10^{-19}$  après une quarantaine de secondes d’intégration est donc un ordre de grandeur plus faible que la stabilité de  $\sim 2 \times 10^{-18}$  atteinte par les dernières avancées en horloge optique [30]. Les comparaisons de ces horloges seraient donc possibles après un temps d’intégration très court (de l’ordre de la seconde).

Ce projet est en développement et de nombreuses améliorations sont déjà prévues.

- A commencer par l’automatisation de l’alignement des télescopes à l’aide de méthodes de reconnaissance d’images et l’asservissement des différents composants tangage-roulis.
- Afin de s’assurer du bon fonctionnement de l’ensemble, il sera important d’augmenter la distance entre les terminaux.
- Les conditions météorologiques au CNES étaient semblables d’un jour sur l’autre et il sera donc intéressant de tester le dispositif avec des vitesses de vents différentes.
- Le transfert d’une référence optique stable aura une grande importance pour les mesures de géodésie chronométrique et l’étude des terrains. C’est pourquoi, des comparaisons seront réalisées à l’aide de dispositifs aériens (drone, ballon sonde...) et démontreront à nouveau les capacités d’une telle technique.

Le projet m’a permis de consolider mes compétences expérimentales nouvellement développées et d’appliquer sur un autre projet les techniques d’acquisitions et d’analyse qui étaient nécessaires dans l’expérience DAMNED.

## Bibliographie Airborne

- [1] Andrew D. LUDLOW et al. “Optical atomic clocks”. In : *Rev. Mod. Phys.* 87 (2015), p. 637-701. DOI : 10.1103/RevModPhys.87.637 (cf. p. 161).
- [2] Fritz RIEHLE. “Optical clock networks”. In : *Nature Photonics* 11.1 (2017), p. 25. DOI : 10.1038/nphoton.2016.235 (cf. p. 161).
- [3] Jacopo GROTTI et al. “Geodesy and metrology with a transportable optical clock”. In : *Nature Physics* 14.5 (2018), p. 437-441 (cf. p. 161, 162).
- [4] P DELVA et al. “Test of special relativity using a fiber network of optical clocks”. In : *Physical review letters* 118.22 (2017), p. 221102 (cf. p. 161).
- [5] Christian LISDAT et al. “A clock network for geodesy and fundamental science”. In : *Nature communications* 7 (2016), p. 12443. DOI : 10.1038/ncomms12443 (cf. p. 161).
- [6] Tetsushi TAKANO et al. “Geopotential measurements with synchronously linked optical lattice clocks”. In : *Nature Photonics* 10.10 (2016), p. 662 (cf. p. 161).
- [7] Atsushi YAMAGUCHI et al. “Direct comparison of distant optical lattice clocks at the 10-16 uncertainty”. In : *Applied physics express* 4.8 (2011), p. 082203 (cf. p. 161).
- [8] Till ROSENBAND et al. “Frequency ratio of Al<sup>+</sup> and Hg<sup>+</sup> single-ion optical clocks ; metrology at the 17th decimal place”. In : *Science* 319.5871 (2008), p. 1808-1812 (cf. p. 161).
- [9] Fritz RIEHLE. “Optical clock networks”. In : *Nature Photonics* 11.1 (2017), p. 25-31. DOI : 10.1038/nphoton.2016.235 (cf. p. 161).
- [10] Philippe LAURENT et al. “The ACES/PHARAO space mission”. In : *Comptes Rendus Physique* 16.5 (2015). The measurement of time / La mesure du temps, p. 540 -552. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2015.05.002> (cf. p. 161).
- [11] Gérard PETIT et al. “10-16frequency transfer by GPS PPP with integer ambiguity resolution”. In : *Metrologia* 52.2 (2015), p. 301-309. DOI : 10.1088/0026-1394/52/2/301 (cf. p. 161).
- [12] Benjamin P. DIX-MATTHEWS et al. *Point-to-Point Stabilised Optical Frequency Transfer with Active Optics*. 2020. arXiv : 2007.04985 [physics.ins-det] (cf. p. 161, 163, 164, 165, 167).
- [13] Brett ALTSCHUL et al. “Quantum tests of the Einstein Equivalence Principle with the STE-QUEST space mission”. In : *Advances in Space Research* 55.1 (2015), p. 501-524 (cf. p. 162).
- [14] Masao TAKAMOTO et al. “Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks”. In : *Nature Photonics* 14.7 (2020), p. 411-415. DOI : 10.1038/s41566-020-0619-8 (cf. p. 162).
- [15] Andrei DEREVIANKO et Maxim POSPELOV. “Hunting for topological dark matter with atomic clocks”. In : *Nature Physics* 10.12 (2014), p. 933-936 (cf. p. 162).

- [16] WF MCGREW et al. “Atomic clock performance enabling geodesy below the centimetre level”. In : *Nature* 564.7734 (2018), p. 87-90 (cf. p. 162).
- [17] Jakob FLURY. “Relativistic geodesy”. In : *Journal of Physics : Conference Series*. T. 723. 1. IOP Publishing. 2016, p. 012051 (cf. p. 162).
- [18] N HUNTEMANN et al. “Improved limit on a temporal variation of  $m_p/m_e$  from comparisons of Yb<sup>+</sup> and Cs atomic clocks”. In : *Physical review letters* 113.21 (2014), p. 210802 (cf. p. 162).
- [19] Ruxandra BONDADESCU et al. “Geophysical applicability of atomic clocks : direct continental geoid mapping”. In : *Geophysical Journal International* 191.1 (2012), p. 78-82 (cf. p. 162).
- [20] W LEWANDOWSKI et EF ARIAS. “GNSS times and UTC”. In : *Metrologia* 48.4 (2011), S219 (cf. p. 162).
- [21] S HANNIG et al. “Towards a transportable aluminium ion quantum logic optical clock”. In : *Review of Scientific Instruments* 90.5 (2019), p. 053204 (cf. p. 162).
- [22] SB KOLLER et al. “Transportable optical lattice clock with  $7 \times 10^{-17}$  uncertainty”. In : *Physical review letters* 118.7 (2017), p. 073601 (cf. p. 162).
- [23] D. R. GOZZARD et al. “Stabilized Free-Space Optical Frequency Transfer”. In : *Phys. Rev. Applied* 10 (2 2018), p. 024046. DOI : 10.1103/PhysRevApplied.10.024046 (cf. p. 162).
- [24] Clélia ROBERT, Jean-Marc CONAN et Peter WOLF. “Impact of turbulence on high-precision ground-satellite frequency transfer with two-way coherent optical links”. In : *Phys. Rev. A* 93 (3 2016), p. 033860. DOI : 10.1103/PhysRevA.93.033860 (cf. p. 162).
- [25] Khelifa DJERROUD et al. “Coherent optical link through the turbulent atmosphere”. In : *Opt. Lett.* 35.9 (2010), p. 1479-1481. DOI : 10.1364/OL.35.001479 (cf. p. 162).
- [26] Laura C SINCLAIR et al. “Optical phase noise from atmospheric fluctuations and its impact on optical time-frequency transfer”. In : *Physical Review A* 89.2 (2014), p. 023805. DOI : 10.1103/PhysRevA.89.023805 (cf. p. 162).
- [27] Fabrizio R GIORGETTA et al. “Optical two-way time and frequency transfer over free space”. In : *Nature Photonics* 7.6 (2013), p. 434. DOI : 10.1038/nphoton.2013.69 (cf. p. 162).
- [28] Laura C SINCLAIR et al. “Synchronization of clocks through 12 km of strongly turbulent air over a city”. In : *Applied physics letters* 109.15 (2016), p. 151104 (cf. p. 162).
- [29] Hyun Jay KANG et al. “Free-space transfer of comb-rooted optical frequencies over an 18 km open-air link”. In : *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1-8. DOI : 10.1038/s41467-019-12443-8 (cf. p. 162).



- [30] Tobias BOTHWELL et al. “JILA SrI optical lattice clock with uncertainty of”. In : *Metrologia* 56.6 (2019), p. 065004 (cf. p. 167).

## Chapitre 5

# Conclusion

La relativité générale et le modèle standard sont deux théories dont les prédictions n'ont jusqu'ici jamais failli à décrire le fonctionnement du monde qui nous entoure. La première explique la gravitation comme une déformation de l'espace-temps : la matière déforme l'espace-temps et l'évolution de ces corps sur l'espace-temps déformé entraîne le mouvement gravitationnel des corps. La seconde révèle le fonctionnement du monde aux échelles microscopiques : les particules élémentaires, nombreuses et variées, interagissent grâce à l'électromagnétisme et son effet sur les charges, grâce à l'interaction faible à l'origine de la radioactivité et grâce à l'interaction forte responsable de la cohésion du noyau atomique.

Allant de la détection du boson de Higgs qui est lié à la masse de l'ensemble des particules à la détection d'ondes gravitationnelles près d'un siècle après leur découverte théorique, les succès de ces deux théories sont donc nombreux. Cependant, la faiblesse de l'attraction gravitationnelle n'a pas d'effet à l'échelle du modèle standard. En raison de la portée infime de l'interaction faible et de l'interaction forte et l'équilibre des charges dans notre Univers, aucun effet du modèle standard n'est visible à l'échelle de la relativité générale. Le modèle standard ne traite pas de la gravitation, qui est le seul effet physique développé dans la relativité générale.

Lord Kelvin à la fin du  $XIX^{\text{ème}}$  siècle avait annoncé que la Physique était enfin entièrement comprise et que seuls deux "petits nuages" flottaient encore au dessus des scientifiques. Au  $XX^{\text{ème}}$ , ces deux nuages se révéleront être à l'origine de la relativité générale et le modèle standard. Cette leçon historique nous impose la prudence face aux deux nuages du  $XX^{\text{ème}}$  que sont la matière noire et l'énergie noire. La première constituerait la masse manquante nécessaire pour rendre compte des courbes de rotation galactique. La seconde serait à l'origine de l'expansion accélérée de notre Univers que l'on observe en mesurant la vitesse d'éloignement des galaxies. Très peu de caractéristiques sont connues pour ces deux quantités et aucune n'est prédit par la relativité générale ou le modèle standard. C'est pourquoi, la communauté scientifique évolue à tâtons vers le Graal scientifique que serait une théorie du Tout, unifiant les quatre interactions dans une seule et unique théorie. Une telle théorie permettrait de concilier la relativité générale et le modèle standard tout en expliquant l'origine de la matière noire et l'énergie

noire.

Seulement, l'unification n'est pas évidente et les efforts soutenus des théoriciens ont conduit à la création d'un nombre de modèles théoriques très (voire trop) important. Afin de séparer le bon grain de l'ivraie, il faut se tourner vers les expérimentateurs qui sondent la Nature à l'aide de dispositifs toujours plus sensibles et diversifiés. Une à une, ces nombreuses expériences ont confirmé les résultats de la relativité générale et du modèle standard et écarté les théories non viables.

## 5.1 ACES-PHARAO

C'est donc au croisement de l'abstraction théorique avec la rigueur expérimentale que se trouve mon travail de thèse. L'objectif premier était de développer les outils nécessaires à la vérification d'une des prédictions de la relativité générale par le biais de la mission ACES-PHARAO. Le principe d'équivalence d'Einstein, concept fondamental de la relativité générale, prétend que les lois de la physique sont identiques dans tout référentiel. Il se décompose en trois sous-principes qui énoncent :

- qu'il est alors impossible de distinguer un référentiel en chute libre d'un référentiel uniformément accéléré. C'est l'universalité de la chute libre.
- qu'il est localement impossible de distinguer deux référentiels dont la direction et la norme de la vitesse diffèrent. C'est l'invariance locale de Lorentz.
- qu'il est impossible de distinguer deux référentiels dont la coordonnée d'espace-temps diffère. C'est l'invariance locale de position.

Afin de trouver un terrain d'entente entre relativité générale et modèle standard, de nombreuses théories alternatives introduisent une violation du principe d'équivalence. Celle-ci est donc recherchée activement à travers de nombreuses expériences testant les différents sous-principes. L'objectif est donc de trouver une erreur dans la formulation de la relativité générale qui prouverait l'existence d'une théorie plus générale et enfin complète. Dans le cas de l'invariance locale de position, il est possible de rechercher cette erreur de deux manières :

- La variation des constantes fondamentales. Si la Physique n'est pas la même en tout point de l'espace-temps, il est possible que les constantes fondamentales dépendent de la position ou l'instant où elles sont évaluées.
- Le décalage vers le rouge gravitationnel. Deux horloges à des altitudes différentes dans un champ gravitationnel verront leur fréquence décalée l'une par rapport à l'autre. Si la Physique n'est pas la même en tout point de l'espace-temps, ce décalage pourrait dépendre de la position des horloges dans le champ gravitationnel.

C'est cette dépendance spatiale qui est recherchée par la mission ACES-PHARAO. Une horloge à atomes froids, un maser à hydrogène et un lien micro-onde dédié seront placés à bord de la Station Spatiale Internationale. Cet ensemble devra atteindre une exactitude relative de fréquence de  $10^{-16}$  et une stabilité de  $10^{-13}/\sqrt{\tau}$ . Grâce aux performances des horloges et du lien, il sera possible de comparer l'ensemble à un réseau de laboratoires équipés des meilleures horloges actuelles. Ce faisant, l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel pourra être mesuré avec une précision jusqu'ici inégalée.

Le laboratoire SYRTE est particulièrement impliqué dans cette mission spatiale puisqu'il a fourni l'horloge PHARAO et se prépare en tant que centre d'analyse de données. Divers outils ont été développés afin de transformer les données brutes de la mission en désynchronisation entre l'horloge PHARAO et les horloges au sol.

Mon premier projet de thèse consistait à réaliser le logiciel de traitement et d'analyse des désynchronisations dans l'objectif d'en extraire la valeur du paramètre de violation du principe d'équivalence. En raison d'un retard de la mission, les données n'étaient pas disponibles lors de mon projet et il a donc été nécessaire de simuler ses données de manière réaliste. Pour se faire, l'utilisation d'un fichier d'orbitographie de l'ISS couvrant une douzaine de jours a permis d'extraire la position et la vitesse de la Station Spatiale Internationale. A l'aide des équations de la relativité générale, il est possible de modéliser les effets s'appliquant sur une horloge embarquée : dilatation du temps de relativité restreinte due à la vitesse de l'horloge dans le référentiel géocentrique et décalage vers le rouge gravitationnel due à la position de l'horloge dans le champ de pesanteur terrestre. A l'aide des positions des laboratoires, les données peuvent être simulées en tenant compte des fenêtres de visibilité limitée en raison de la périodicité et l'inclinaison de l'orbite de la Station Spatiale Internationale. Enfin, une touche supplémentaire de réalisme est obtenue en tenant compte des bruits affectant l'horloge PHARAO et le lien micro-onde.

La méthode d'analyse qui a été choisie pour réaliser le test du décalage vers le rouge gravitationnel consiste à retirer aux désynchronisations expérimentales les désynchronisations modélisées à partir de la relativité générale et de la configuration de la mission. Les résidus doivent alors correspondre à la superposition du bruit de l'horloge PHARAO et du bruit du lien micro-onde et d'un potentiel signal de violation de l'invariance locale de position. L'incertitude sur le paramètre de violation est attendue au niveau de  $2 - 3 \times 10^{-6}$  pour la mission ACES-PHARAO. Cette limite améliorerait d'un ordre de grandeur la meilleure estimation du paramètre de violation. A l'aide du logiciel de simulation et du logiciel d'analyse, j'ai pu confirmer que ce niveau serait atteint avec quelques sessions d'acquisition couvrant 10 – 20 jours. Pour parvenir à la confirmation des attentes de la mission, il a été nécessaire de valider la méthode d'analyse numérique choisie, de choisir l'observable pertinente pour obtenir l'incertitude, de caractériser l'effet systématique d'une erreur sur la précision de l'orbitographie ou encore d'évaluer la contribution du réseau de laboratoire à l'estimation du paramètre de violation... Le logiciel est prêt pour analyser les données de la mission ACES-PHARAO dès qu'elles seront disponibles.

## 5.2 DAMNED

Par la force des choses, j'ai été amené à changer mon fusil d'épaule et quitter l'environnement confortable du bureau de théoricien pour rejoindre la salle de manipulation exigüe de l'expérimentateur. Le retard dans la mission ACES-PHARAO m'a donné l'opportunité de débiter le second projet de ma thèse. L'objectif était de développer une expérience de recherche de matière noire à l'Observatoire de Paris. Cette substance, pour l'instant inconnue, est très mal caractérisée. De nombreuses théories ont échoué à prédire

son existence et les candidates s'épuisent peu à peu dans l'espoir de trouver la théorie pouvant rendre compte de cette masse supplémentaire qui nous entoure.

Le faible niveau de connaissance de la matière noire nécessite une recherche à très large spectre (couvrant 80 ordres de grandeur sur une échelle de masse) touchant différents domaines de la physique. A l'échelle cosmologique, on suppose que la matière noire serait créée par de nombreux trous noirs non découverts ou de trous noirs primordiaux. A l'échelle des particules, la matière noire serait constituée d'une ou plusieurs particules élémentaires dont l'interaction avec la matière usuelle est très faible. Enfin à l'échelle des champs scalaires, la matière noire serait la manifestation de champ scalaire ultra-léger qui pourrait osciller dans le temps et l'espace.

Cette dernière catégorie de théorie a l'avantage d'être vérifiable à l'échelle humaine et dans les laboratoires disposant des derniers bijoux de la métrologie. C'est pourquoi il a été décidé de créer une expérience recherchant l'effet de couplage de ces champs scalaires sur le dispositif expérimental. En cas de couplage non-universel entre la matière normale et un champ scalaire, les constantes fondamentales de la physique oscillent dans le temps et l'espace. Si ces champs trouvent leur source dans la matière noire, on peut espérer détecter indirectement cette matière qui nous échappe. L'oscillation de deux constantes fondamentales entraînent, entre autre, une oscillation du rayon d'un atome. Par conséquent, tous les matériaux pourraient voir leur longueur osciller (par rapport aux longueurs définis par un signal lumineux) suite à un couplage avec la matière noire. Cette variation est évidemment infime et on ne peut raisonnablement pas attendre de la détecter qu'à l'aide de dispositifs métrologiques suffisamment sensibles.

L'expérience DAMNED (acronyme de "DARK Matter from Non-Equal Delay") est constituée de deux interféromètres à bras inégaux. Chaque interféromètre permet de comparer une cavité ultrastable avec elle-même dans le passé à l'aide d'un délai créé par une fibre optique. L'utilité du double interféromètre réside dans l'absence de sensibilité à la matière noire pour l'interféromètre dont le délai optique est court, permettant ainsi de caractériser les effets systématiques et bruits de l'expérience. L'interféromètre dont le délai optique est long permet de rechercher les oscillations de longueur de la cavité et de la fibre qui seraient dues à la matière noire. Avec l'aide de collègues expérimentateurs, la mise en place rapide et l'optimisation continue du dispositif ont permis d'atteindre un niveau de sensibilité suffisant pour espérer détecter le champ scalaire oscillant. Grâce à la mise en place d'une chaîne de détection dédiée, l'acquisition du signal de la cavité a pu durer plusieurs semaines, augmentant la sensibilité de l'expérience. Après avoir modélisé le bruit de l'expérience et étudié en détails différents effets systématiques, aucun signal observé n'a pu être attribué à la matière noire.

Cette absence de détection permet malgré tout de fixer des contraintes sur les paramètres de couplage du champ scalaire. Pour cela, il est nécessaire de connaître en détail l'effet de celui-ci sur l'ensemble du dispositif. Dans le cas de DAMNED, les effets principaux proviennent de la variation de longueur de la fibre et de celle de la cavité qui entraîne une modulation de la fréquence optique utilisée par l'interféromètre.

- Le couplage de la matière noire avec la fibre a une expression relativement simple puisqu'il entraîne une oscillation de la longueur de la fibre et de son indice de

réfraction. Par conséquent, le délai créé par la fibre oscille également.

- Le signal optique est composé de photons ayant parcouru une grande distance en raison de la finesse de la cavité. À l'inverse des détecteurs d'ondes gravitationnelles qui fonctionnent sur un principe similaire, la sensibilité de DAMNED n'est ni améliorée ni détériorée par cet effet.
- Enfin l'effet dominant se trouve dans l'oscillation de la longueur de la cavité qui entraîne une oscillation de la fréquence du signal optique. L'excitation créée par la matière s'avère être proche de la résonance mécanique de la cavité. Par conséquent, la sensibilité de l'expérience bénéficie d'une magnification.

La particularité du signal de matière noire a nécessité le développement d'une méthode d'analyse sophistiquée et spécifique. Ceci a enfin permis de fixer des contraintes sur une nouvelle combinaison des paramètres de couplage. Si la matière noire provient du halo galactique, les contraintes de DAMNED améliorent celles d'autres expériences sur une bande de fréquence très réduite. Si elle provient du halo de relaxation de la Terre, l'amélioration se fait sur l'ensemble de l'intervalle de fréquence expérimental et atteint 5 ordres de grandeurs sur l'estimation individuelle des paramètres de couplage.

### 5.3 Et après ?

Lors de ma dernière année de thèse, j'ai également participé à l'évaluation des performances d'un lien optique en espace libre. Ce projet est le résultat d'une collaboration entre l'Université d'Australie Occidentale, le CNES Toulouse et le laboratoire SYRTE. Cette technologie a de bonnes chances de permettre de comparer des horloges optiques sur des distances intermédiaires. Ce projet se place dans la continuité du travail que j'ai réalisé pour la mission ACES-PHARAO à l'aide des connaissances développées avec l'expérience DAMNED. C'est également une belle transition vers la recherche post-doctorale, financée par le CNES, que je réaliserai pour préparer la mission spatiale LISA détecteur d'ondes gravitationnelles spatiales.

- L'un des objectifs sera d'estimer les répercussions d'erreurs de calibration et d'effets systématiques sur l'évaluation des paramètres des ondes gravitationnelles. Afin d'y parvenir, je profiterai des compétences que j'ai développées avec la mission spatiale ACES-PHARAO et de mon expertise nouvellement acquise concernant les effets systématiques avec l'expérience DAMNED.
- Les autres objectifs reposent sur l'utilisation de méthodes de modélisation, d'analyse théorique et de traitement numérique afin d'estimer si les performances promises par LISA sont réalisables. J'ai eu la chance de développer l'ensemble de ces compétences lors de ma thèse.

J'ai donc pu développer de nombreuses compétences sur un panel relativement large qui me permettent de poursuivre dans le monde de la recherche académique et de participer à la mission spatiale LISA qui est l'un des plus grands projets de physique fondamentale qui occupera la communauté scientifique dans les prochaines années.



# Remerciements

La réalisation de ce tapuscrit a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma gratitude.

- Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Peter Wolf, pour son mentorat durant mes différents stages à l'Observatoire et durant ma thèse. J'ai eu la chance d'apprendre énormément durant ces années dans un cadre de travail idéal pour mon développement de jeune chercheur. Grâce à ta pédagogie à toute épreuve, j'ai eu la chance d'acquérir une partie de ton impressionnant panel de compétences. Merci pour ta bienveillance!
- Je remercie tous les membres de l'équipe Théorie qui m'ont accompagné :
  - Merci Pacôme pour tes nombreux conseils (scientifiques, universitaires et révolutionnaires),
  - Merci Christine pour ton apport à la création et au débogage du code pour la mission ACES-PHARAO.
  - Merci Frédéric pour tes conseils sur les bonnes habitudes à prendre pour coder et tous les raccourcis bien pratique ("*screen -r forever!*"),
  - Merci Aurélien pour tes gros coups de pouce sur les questions théoriques et statistiques,
  - Merci Marc de m'avoir encouragé à aller voir du côté de ton ancienne équipe,
  - Merci Marie-Christine d'avoir participé à mon ~~endotr.~~ recrutement en master qui m'a irrémédiablement amené au SYRTE,
  - Merci Christophe pour ton soutien et ton altruisme qui m'ont permis de trouver le ton juste et d'affirmer ma place dans l'équipe.
- Je remercie spécialement tous ceux sans qui l'expérience DAMNED n'aurait pas été possible :
  - Merci Paul-Eric pour ta tolérance et ta patience face aux gaffes d'un jeune théoricien qui découvre les joies d'une salle de manip',
  - Merci Etienne pour le temps que tu as consacré à ma formation expérimentale et pour toutes les astuces qui m'ont sacrément facilité la vie,
  - Merci Florian, pour tous tes traits d'humour et tes idées d'itinéraire cycliste,
  - Merci Pascal, Michel et José pour toutes les réparations informatiques ou électroniques rapides qui m'ont permis de ne pas perdre plus d'une minute.
- Je remercie également tous ceux que j'ai pu croiser durant mes années au SYRTE,
  - Merci à Pascal et Gwenaël d'avoir suivi le bon déroulement de ma thèse,



- Merci également à Marine, Ouali, Johannes, Julien, Hélène, Hector, Rodolphe, Yann, Bess, Matthieu, Svyatoslav, Rémi, Stéphane, Arnaud, Laurène, Sébastien, Pierre, Michel, Laurent, Eva, Dan, Ben, ... avec qui j'ai eu plaisir à discuter de physique, mais également de tout et de rien.
- Je souhaite chaleureusement remercier, Eric Gourgoulhon, Giorgio Santarelli, Benoit Famaey, Anne Amy-Klein, Christophe Salomon, Isabelle Petitbon, d'avoir lu mon tapuscrit, d'avoir assisté à ma soutenance et de m'avoir permis de décrocher mon titre de docteur,
- Je tiens à témoigner toute ma gratitude à mes amis :
  - Dédicace à Martin, avec qui chaque présentation ennuyeuse lors d'une conférence se transformait en débriefing de la dernière course cycliste,
  - Widmung an Sina, meine Mitbewohnerin während der Moriond-Kolonie, die sich die Mühe machte, dieses Manuskript auf Französisch zu lesen !
  - Dédicaces aux "tontons" pour tous les délires, les kebabs du CROUS Censier le vendredi, les séances de TP... sans quoi les années de licence et de master n'auraient été qu'une longue leçon de mécanique quantique.
- Ma reconnaissance va à ma famille qui m'a permis d'en arriver jusque là. Merci à mes parents, mes frères et ma soeur qui ont attaché un soin important à mon épanouissement intellectuel et personnel. Merci également à ma famille étendue qui a toujours prêté une oreille à mon sujet de thèse et m'a permis de prendre du recul face aux différentes questions.
- Enfin, mon éternelle gratitude t'est dédiée, Anaïs. Tu m'as accompagnée tout au long de cette aventure, et tu partageras les suivantes. Le nouveau chapitre, au long cours, est déjà engagé avec la naissance de notre Charlie...

# Chapitre 6

## Annexes

### 6.1 Publications

#### 6.1.1 Articles

- [1] E. SAVALLE et al. “Gravitational redshift test with the future ACES mission”. In : *Classical and Quantum Gravity* 36.24 (2019), p. 245004. DOI : 10.1088/1361-6382/ab4f25.
- [2] L. CACCIAPUOTI et al. “Testing gravity with cold-atom clocks in space”. In : *The European Physical Journal D* 74.8 (2020), p. 164. DOI : 10.1140/epjd/e2020-10167-7.
- [3] A. HEES et al. “Violation of the equivalence principle from light scalar dark matter”. In : *Phys. Rev. D* 98.6 (2018), p. 064051. DOI : 10.1103/PhysRevD.98.064051.
- [4] E. SAVALLE et al. “Novel approaches to dark-matter detection using space-time separated clocks”. In : *arXiv* (2019). eprint : arXiv:1902.07192.
- [5] E. SAVALLE et al. “Searching for DARK Matter with a Non-Equal Delay interferometer : The DAMNED experiment”. In : *arXiv - soumis à PRL* (2020). eprint : 2006.07055 (gr-qc).
- [6] B. P. DIX-MATTHEWS et al. “Point-to-Point Stabilised Optical Frequency Transfer with Active Optics”. In : *arXiv - soumis à Nature Communication* (2020). eprint : 2007.04985 (physics.ins-det).

#### 6.1.2 Conférences

- ACES-Pharao
  - Poster à l’**EFTF 2018** (Proceedings page 218, finaliste du concours étudiant) et l’**IFCS 2018** (Proceedings TBD, finaliste du concours étudiant)
  - Présentation orale à **Moriond 2019** (Proceedings pages 163 to 168), aux **JS GRAM 2018** et **GPHYS 2018**
- Matière noire
  - Poster à **Moriond 2019** (Proceedings pages 241 to 243),
  - Présentation orale à l’**IFCS-EFTF 2019** (Proceedings 283) et **ISGES summer school 2019**

## 6.2 Annexe ACES-PHARAO

Afin de comparer la méthodes de moindres carrés généralisés (GLS) et la méthode de moindres carrés Monte Carlo (LSMC), il faut calculer l'inverse de la matrice du bruit de marche aléatoire en présence de trous dans les données. Même si une approche numérique est simple, le nombre de points ( $n = 10^6$ ) nous empêche de calculer cette matrice (le stockage et l'inversion d'une matrice de  $n \times n = 10^{12}$ ). La particularité de la matrice de covariance du bruit de marche aléatoire permet d'approcher le problème analytiquement.

### 6.2.1 Matrice de covariance du bruit de marche aléatoire

#### Inverse de la matrice sans interruption

Dans un premier temps, considérons le cas sans trous dans les données. On considère  $n$  points de données espacées régulièrement ( $\Delta t$ ) et l'on définit la matrice  $\Omega$  de covariance ( $n, n$ ) et son inverse  $\Omega^{-1}$ . Un élément  $(i, j)$  de cette matrice est défini par :

$$\Omega_{i,j} = \sigma^2 \Delta t^2 \text{MIN}(i, j)$$

$$\left(\Omega^{-1}\right)_{i,j} = \frac{1}{\sigma^2 \Delta t^2} \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = n \\ -1 & \text{if } i = j \pm 1 \\ 2 & \text{if } i = j \neq n \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type standard du bruit blanc intégré pour obtenir le bruit de marche aléatoire.

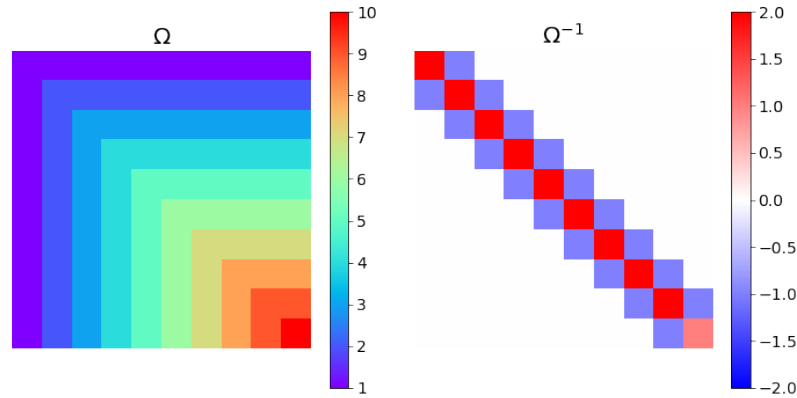


FIGURE 6.1 – Exemple de  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  pour une matrice de rang 10

Comme on peut le voir (figure 6.1), la matrice  $\Omega^{-1}$  est tridiagonale. Le nombre d'éléments non-nuls dans cette matrice se limite donc  $3 \times n = 3 \times 10^6$ . Cette diminution drastique ( $n \times n \simeq 10^{12} \rightarrow 3 \times n = 3 \times 10^6$ ) permet donc de prédire analytiquement et de stocker cette matrice.

### Inverse de la matrice avec interruption

Afin d'intégrer les trous dans les données, il est nécessaire d'appliquer une matrice  $M$  de masque  $(m, n)$  où  $m$  est le nombre de données restantes. La matrice  $M$  supprime les lignes et les colonnes de la matrice originelle où les données sont absentes. La matrice  $M\Omega M^T$  est donc la matrice de covariance de bruit en présence de trous :

$$M\Omega M^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \dots & \dots & q_1 \\ q_1 & q_2 & \dots & \dots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & q_{m-1} \\ q_1 & q_2 & \dots & q_{m-1} & q_m \end{pmatrix} \quad \text{with } q_i \in \mathbb{Z}. \quad (6.2)$$

A nouveau, la structure de la matrice est conservée (figure 6.2) et il est donc possible de trouver une formule analytique.

En utilisant le relation de récurrence pour inverser la matrice tridiagonale, chaque élément  $(i, j)$  de la matrice inverse est donné par :

$$\left( (M\Omega M^T)^{-1} \right)_{i,j} = \begin{cases} \Delta_{m-1} & \text{if } i = j = m \\ \frac{1}{q_1} + \Delta_1 & \text{if } i = j = 1 \\ \Delta_{i-1} + \Delta_i & \text{if } i = j \neq m, 1 \\ -\Delta_i & \text{if } i = j - 1 \\ -\Delta_j & \text{if } i = j + 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \text{with } \Delta_i = \frac{1}{q_{i+1} - q_i}. \quad (6.3)$$

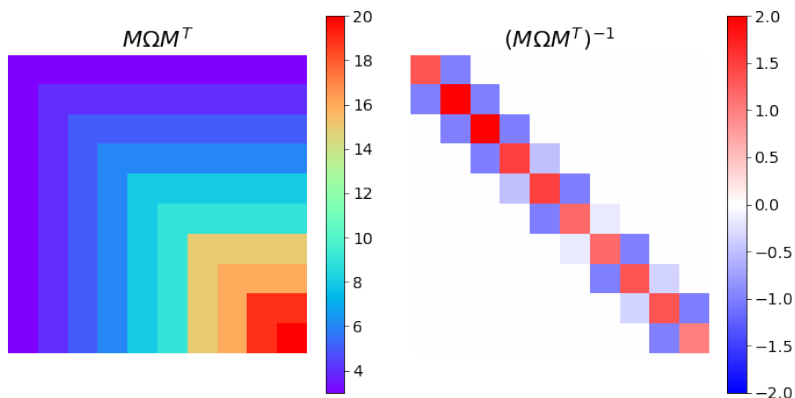


FIGURE 6.2 –  $M\Omega M^T$  et  $(M\Omega M^T)^{-1}$  avec des trous aléatoires.

A nouveau, cette matrice est tridiagonale et peut être stockée dans un ordinateur de bureau et son expression permet de réaliser le GLS.

### 6.2.2 Matrice de covariance du bruit violet

Un autre résultat s'applique à la dérivée du bruit blanc, nommé couramment bruit violet.

#### Inverse de la matrice sans interruption

A nouveau, considérons le cas sans trous dans les données. La démonstration repose sur le lien entre la matrice de covariance du bruit violet et celle du bruit blanc. Soit  $Y$  une variable aléatoire affectée par du bruit blanc et  $X$  sa dérivée  $X = \frac{dY}{dt}$ , affectée par du bruit violet. Un élément  $(i, j)$  de la matrice de covariance  $\Omega$  est :

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j} &= \text{Cov} [x_i, x_j] = \text{Cov} \left[ \frac{dy_i}{dt}, \frac{dy_j}{dt} \right] \simeq \text{Cov} \left[ \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}, \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t^2} \text{Cov} [y_i - y_{i-1}, y_j - y_{j-1}].\end{aligned}\quad (6.4)$$

En utilisant la propriété de bilinéarité de la covariance et la covariance du bruit blanc  $\text{Cov} [y_i, y_j] = \sigma^2 \delta_{i,j}$  où  $\delta$  est le delta de Kronecker. En utilisant la tridiagonalité de  $\Omega$ , on obtient  $\Omega^{-1}$  :

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j} &= \frac{\sigma^2}{\Delta t^2} [2\delta_{i,j} - \delta_{(i+1),j} - \delta_{(i-1),j}] \\ (\Omega^{-1})_{i,j} &= \frac{\Delta t^2}{\sigma^2} \begin{cases} \frac{i(n+1-j)}{n+1} & i \leq j \\ \frac{j(n+1-i)}{n+1} & i > j \end{cases}\end{aligned}\quad (6.5)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type standard du bruit.

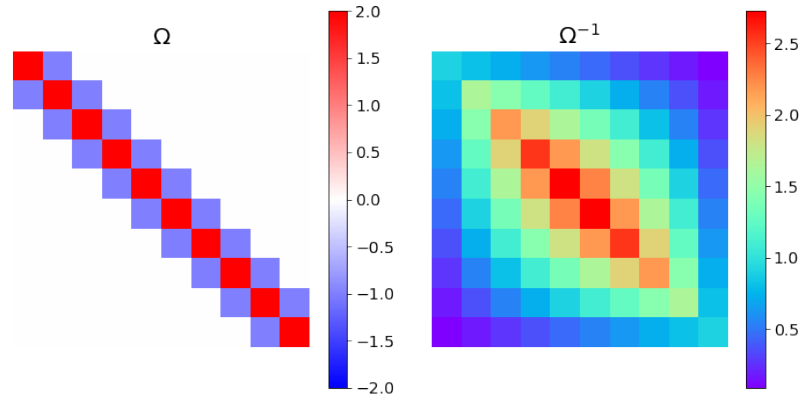


FIGURE 6.3 – Exemple de  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  pour une matrice de rang 10.

#### Matrice avec interruption

A l'aide de la même matrice de masque, la matrice de covariance de bruit violet devient bloc-diagonal où les sous-matrices sont des versions plus petites d'une matrice

de covariance du bruit violet.

Soit une matrice  $(n, n)$  de covariance  $\Omega$  et  $M$  la matrice de masque.  $M$  crée des sous-matrices de rang  $m_1, m_2, \dots, m_p$  où  $m_i$  est la longueur des données ininterrompues du  $i^{\text{ème}}$  bloc parmi les  $p$  nombres de trous. L'effet de  $M$  sur  $\Omega$  est :

$$M\Omega M^T = \begin{pmatrix} \Omega_{m_1} & & & 0 \\ & \Omega_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Omega_{m_p} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

### Inverse de la matrice avec interruption

L'inverse de la matrice de covariance masquée est également bloc diagonale et l'inverse s'applique simplement sur les sous-matrices.

$$(M\Omega M^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega_{m_p}^{-1} & & & 0 \\ & \Omega_{m_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Omega_{m_1}^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

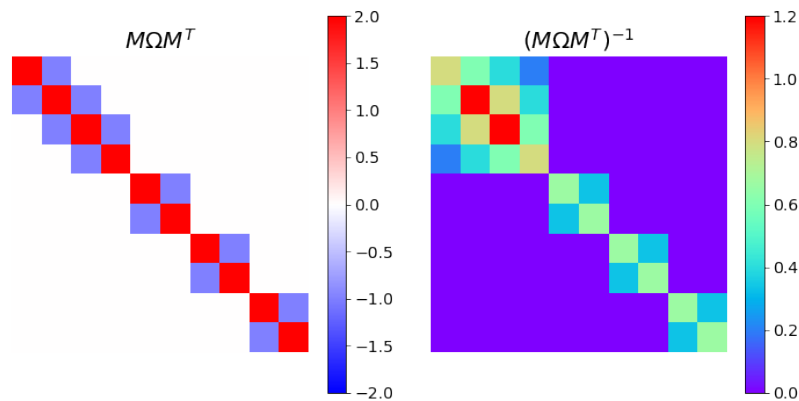


FIGURE 6.4 –  $M\Omega M^T$  et  $(M\Omega M^T)^{-1}$  avec des trous aléatoires.

La matrice de covariance inverse du bruit violet est éparses et sa taille dépend du nombre de trous. On passe donc de  $n \times n$  à  $\sum_i m_i^2$  éléments. Dans le cas de la mission ACES-PHARAO, la matrice de covariance inverse est éparses au vue de la forte discontinuité. A nouveau, cela a permis de stocker la matrice et de réaliser la méthode GLS.

## 6.3 Annexe DAMNED

### 6.3.1 Changement de variable de la distribution de vitesse

Afin d'exprimer la distribution de vitesse de l'équation (3.34) en fonction de la fréquence du champ scalaire, on utilise

$$f_{DM}(v)dv = f_{DM}(f)df, \quad (6.8)$$

où

$$f_{DM}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{v_{\odot} \sigma_v} e^{-\frac{v^2+v_{\odot}^2}{2\sigma_v}} \sinh\left(\frac{vv_{\odot}}{\sigma_v^2}\right), \quad f(v) = f_{\varphi} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right). \quad (6.9)$$

En inversant  $f$  et  $v$  dans l'équation précédente, on obtient :

$$v = c \sqrt{2 \left(\frac{f}{f_{\varphi}} - 1\right)}, \quad \frac{dv}{df} = \frac{1}{f_{\varphi}} \frac{c^2}{2v} \quad (6.10)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_{DM}(f) &= f_{DM}(v) \frac{dv}{df} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{v_{\odot} \sigma_v} e^{-\frac{v^2+v_{\odot}^2}{2\sigma_v}} \sinh\left(\frac{vv_{\odot}}{\sigma_v^2}\right) \frac{1}{f_{\varphi}} \frac{c^2}{2v} \\ &= \frac{1}{f_{\varphi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{v_{\odot} \sigma_v} e^{-\frac{2c^2(f/f_{\varphi}-1)+v_{\odot}^2}{2\sigma_v}} \sinh\left(\frac{cv_{\odot}}{\sigma_v^2} \sqrt{2 \left(\frac{f}{f_{\varphi}} - 1\right)}\right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

### 6.3.2 Somme de phase aléatoire

Afin de calculer la somme des champs scalaires oscillant à la même fréquence et avec des phases aléatoires différentes de l'équation (3.41), il est nécessaire de calculer la somme de cosinus dont la phase est aléatoire. Pour cela, on utilise la formulation exponentielle de la somme :

$$\sum_{k=1}^N \cos(\omega_{\varphi j} t + \delta_k) = \text{RE} \left[ \sum_{k=1}^N e^{i\omega_{\varphi j} t} e^{i\delta_k} \right] = \text{RE} \left[ e^{i\omega_{\varphi j} t} \sum_{k=1}^N e^{i\delta_k} \right] \quad (6.12)$$

#### Marche aléatoire

On remarque que la somme est l'équivalent à une marche aléatoire dans le plan complexe dont le pas est donné par  $e^{i\delta_k}$  où  $\delta_k$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 2\pi)$ . Afin de caractériser l'étendue de la marche aléatoire, on calcule la valeur de la somme  $S_N$  après  $N$  pas :

$$S_N = e^{i\omega_{\varphi j} t} \sum_{k=1}^N e^{i\delta_k} = e^{i\omega_{\varphi j} t} \left( \sum_{k=1}^N \cos(\delta_k) + i \sin(\delta_k) \right) \quad (6.13)$$

On souhaite écrire  $S_N$  sous la forme  $|S_N| e^{i\omega_{\varphi j} t} e^{i\delta_j}$  afin de pouvoir exprimer l'équation 6.12 comme un unique cosinus oscillant à la fréquence  $\omega_{\varphi j}$  et avec une unique phase aléatoire  $\delta_j$ . Avec cette définition, l'amplitude  $|S_N|$  de la somme s'écrit

$$\begin{aligned}
|S_N|^2 &= \left( \sum_{k=1}^N \cos(\delta_k) \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N \sin(\delta_k) \right)^2 \\
&= \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \cos(\delta_k) \cos(\delta_l) \right) + \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sin(\delta_k) \sin(\delta_l) \right) \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \cos(\delta_k - \delta_l) \\
&= N + 2 \sum_{k < l}^N \cos(\delta_k - \delta_l)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

L'espérance de la fonction cosinus étant nulle, l'espérance de l'amplitude  $|S_N|^2$  est égale à  $N$ . L'amplitude de la somme des cosinus est donc bien une marche aléatoire bi-dimensionnelle.

### Distribution de Rayleigh

En définissant deux variables aléatoires de position  $(X, Y)$  qui représente un pas  $e^{i\delta_k}$  dans l'espace bidimensionnel, il apparait évident que la distribution de ces positions est symétrique autour de l'origine. La variable aléatoire  $X = \cos(\delta)$  a les propriétés suivantes pour un angle  $\delta$  uniformément réparti entre 0 et  $2\pi$  :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\delta) d\delta = 0 \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\delta)^2 d\delta = \frac{1}{2} \tag{6.15}$$

Après  $N$  pas, la variance vaut donc  $N/2$  pour  $X$  et la moyenne reste nulle. Ce résultat reste vrai pour  $Y$  et on a donc deux variables aléatoires dont la moyenne est nulle et la variance vaut  $N/2$ .

La distance à l'origine de la marche aléatoire est alors représentée par la variable aléatoire  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Puisque  $X \sim \mathcal{N}(0, N/2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, N/2)$ ,  $R$  suit une distribution de Rayleigh.

On obtient finalement :

$$\sum_{k=1}^N \cos(\omega_{\varphi j} t + \delta_k) = \text{RE} \left[ e^{i\omega_{\varphi j} t} \sum_{k=1}^N e^{i\delta_k} \right] = \alpha_j \cos(\omega_{\varphi j} t + \delta_k) \tag{6.16}$$

où  $\alpha_j$  est une variable aléatoire qui suit la distribution de Rayleigh définie par :

$$\text{P} [\alpha_j] = \frac{2\alpha_j}{N} e^{-\alpha_j^2/N} \tag{6.17}$$



### 6.3.3 Somme de cosinus/sinus amorti

Le calcul de la somme de cosinus/sinus amorti est :

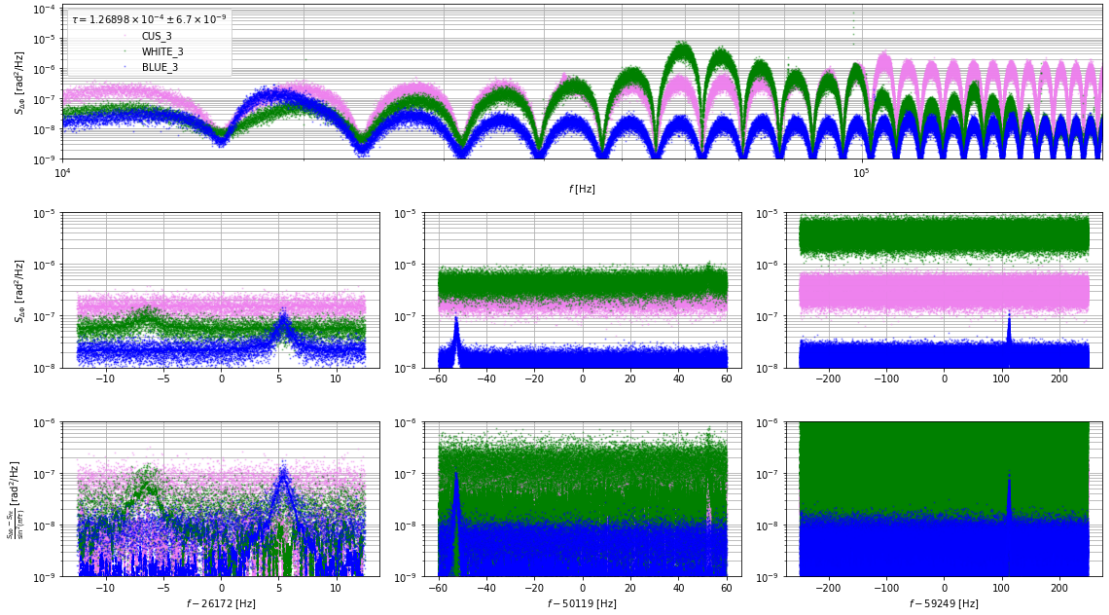
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{i2nx} &= \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{2ix})^n = \frac{1}{1 - r^2 e^{2ix}} = \frac{1 - r^2 e^{-2ix}}{(1 - r^2 e^{2ix})(1 - r^2 e^{-2ix})} \\ &= \frac{1 - r^2 \cos(2x) + ir^2 \sin(2x)}{1 - r^2 e^{2ix} - r^2 e^{-2ix} + r^4} = \frac{1 - r^2 \cos(2x) + ir^2 \sin(2x)}{1 - 2r^2 \cos(2x) + r^4} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Soit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos(2nx) &= \frac{1 - r^2 \cos(2x)}{1 - 2r^2 \cos(2x) + r^4} \\ \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin(2nx) &= \frac{r^2 \sin(2x)}{1 - 2r^2 \cos(2x) + r^4} \end{aligned} \quad (6.19)$$

### 6.3.4 Comparaison des cavités

Afin de rechercher les effets systématiques des cavités, le signal de l'expérience DAM-NED a été mesuré successivement en alternant les cavités. Les PSDs sont représentées dans la figure ci-dessous. On observe que le niveau de la cavité "blanche" ou "CUS" est



plus élevé que celui de la cavité "bleue" comme attendu. En zoomant sur les pics dont l'origine est inconnue ( $\sim 26$ ,  $\sim 50$  et  $\sim 59$  kHz), on observe la présence d'un signal pour la cavité blanche et la cavité bleue mais à des fréquences différentes. Cette différence et l'absence de pic sur la cavité CUS impliquent que le signal ne provient pas d'un couplage au champ scalaire, qui est le même pour l'ensemble des cavités.

### 6.3.5 Oscillateur harmonique paramétrique ?

L'équation différentielle (3.115) d'un oscillateur harmonique forcé et amorti utilisé pour décrire le comportement de la cavité suppose que seul la longueur  $l$  de la cavité varie en raison de la présence de matière noire. En réalité, l'ensemble des quantités qui décrivent cette cavité sont sensés osciller sous l'effet du champ scalaire. Cette annexe a pour objectif de démontrer que l'équation (3.115) utilisée dans la partie principale du tapuscrit est une approximation suffisante.

On suppose que le facteur de qualité  $Q_n$  et la fréquence de résonance  $\omega_r$  oscillent :

$$Q_n \rightarrow Q_n \left(1 + \epsilon_Q \cos(\omega_\varphi t)\right) \quad \omega_r \rightarrow \omega_r \left(1 + \epsilon_{\omega_r} \cos(\omega_\varphi t)\right) \quad (6.20)$$

L'équation différentielle paramétrique s'écrit donc :

$$\ddot{D}(t) + \frac{\omega_r \left(1 + \epsilon_{\omega_r} \cos(\omega_\varphi t)\right)}{Q \left(1 + \epsilon_Q \cos(\omega_\varphi t)\right)} \dot{D}(t) + \omega_r^2 \left(1 + \epsilon_{\omega_r} \cos(\omega_\varphi t)\right)^2 D(t) = \epsilon_l l_0 \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t) \quad (6.21)$$

On suppose que tous les paramètres  $\epsilon_x$  sont très inférieurs à 1 :

$$\ddot{D}(t) + \frac{\omega_r}{Q} \left(1 + (\epsilon_{\omega_r} - \epsilon_Q) \cos(\omega_\varphi t)\right) \dot{D}(t) + \omega_r^2 \left(1 + 2\epsilon_{\omega_r} \cos(\omega_\varphi t)\right) D(t) = \epsilon_l l_0 \omega_\varphi^2 \cos(\omega_\varphi t) \quad (6.22)$$

Il n'existe pas de solution analytique à cette équation différentielle en raison de la non-linéarité introduite par les termes  $\epsilon_{\omega_r} - \epsilon_Q$  et  $2\epsilon_{\omega_r}$ .

#### Equation différentielle adimensionnée

Pour DAMNED, la fréquence du champ scalaire  $\omega_\varphi$  est comprise entre 10 et 200 kHz. Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle, il faut un pas de temps  $\Delta t$  suffisamment faible pour échantillonner l'ensemble de la phase du cosinus :  $\Delta t \ll 2\pi/\omega_\varphi \simeq 100 \rightarrow 5 \mu s$ . Cette résolution va entraîner un temps de calcul trop important pour étudier la solution de l'équation différentielle à long terme. Afin de résoudre ce problème, on redimensionne l'ensemble des quantités numériques afin d'avoir des quantités quasi-unitaires :

$$\begin{aligned} \omega'_\varphi &= \omega_\varphi/10^4 = [1, 20] \text{ Hz} \\ \omega'_r &= \omega_r/10^4 = 2.7 \text{ Hz} \\ Q' &= Q/10^4 = 6 \end{aligned} \quad (6.23)$$

On définit également  $u = \omega_\varphi t$  et  $x(u) = D(t)/(\epsilon_l l_0)$  pour obtenir l'équation différentielle adimensionnée :

$$\ddot{x}(u) + \frac{\omega'_r}{Q'} \left(1 + (\epsilon_{\omega_r} - \epsilon_Q) \cos(u)\right) \dot{x}(u) + \omega_r'^2 \left(1 + 2\epsilon_{\omega_r} \cos(u)\right) x(u) = \omega_\varphi'^2 \cos(u) \quad (6.24)$$

### Conditions initiales

Les conditions initiales de l'équation différentielle ne peuvent être inférées physiquement puisque le déplacement  $D(t_0)$  et la vitesse de déplacement  $\dot{D}(t_0)$  de la cavité sont inconnus. Cependant, cette incertitude n'a pas d'effets sur la solution à l'équation à long terme ( $u > 40$ ) comme on peut le voir dans la figure 6.5 où les différentes solutions sont obtenues avec des conditions initiales choisies aléatoirement. La simulation est réalisée avec  $\epsilon_\omega = \epsilon_Q = 10^{-2}$ . Ce choix est fait afin de vérifier la condition  $\epsilon \ll 1$ .

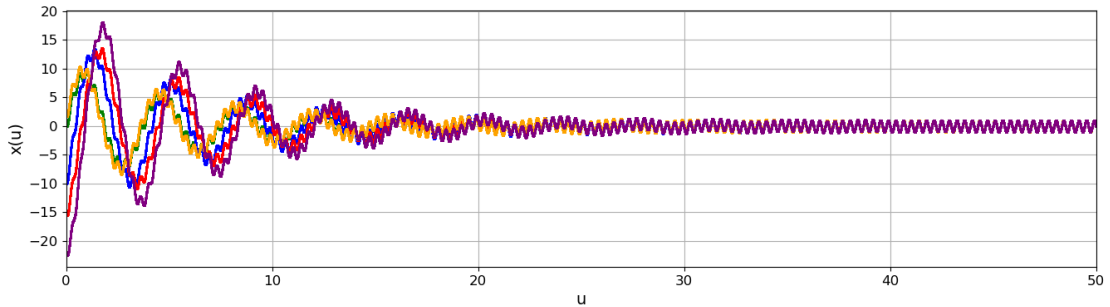


FIGURE 6.5 – Solution de l'équation (6.24) en fonction des conditions initiales.

### Valeur des coefficients $\epsilon$

Afin d'évaluer l'effet de l'oscillation des paramètres  $(Q, \omega_r, l_0)$  de la cavité, les coefficients  $\epsilon$  sont successivement fixés à 0 pour calculer numériquement la solution à l'équation différentielle. La figure 6.6 représente la solution complète (en bleu) pour laquelle l'ensemble des coefficients  $\epsilon$  sont non nuls. Les solutions sont également calculées en annulant l'oscillation des différents paramètres ( $\epsilon_x = 0$  pour supprimer l'oscillation du paramètre  $X$ ). Comme on peut le voir dans la figure 6.6, les résidus sont 4 ordres

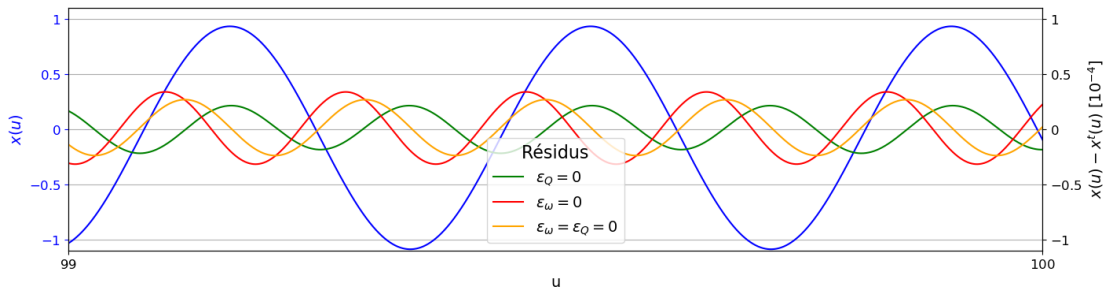


FIGURE 6.6 – Solution de l'équation (6.24) en fonction de la valeur des coefficients  $\epsilon$ .

de grandeur plus faibles que la solution analytique. On peut raisonnablement considérer que l'oscillation du facteur de qualité  $Q$  et l'oscillation de la fréquence de résonance  $\omega_r$  peuvent être négligées.

## 6.4 CosmoSono : GW181124

### Présentation

**Cosmosono** GW181124 est une expérience menée par Raphaël Dallaporta, en collaboration avec les chercheurs EGO-Virgo et la complicité de Peter Wolf. Revenu de sa première visite de Virgo : avec la question une action humaine peut-elle interagir avec un instrument aussi sensible ? Les réponses sont venues de l'interaction avec les chercheurs EGO-Virgo : Irene Fiori, Valerio Boschi, Federico Pasletti, Antonino Chiummo.

Avant le Run *O3*, a été enregistré la performance musicale, écrite et joué par Kryštof Mařatka (flûte archaïque) accompagné de Karine Lethiec (alto du XVIII<sup>ème</sup> siècle), dans le hall d'expérimentation central de VIRGO (figure 6.7).

Les ondes musicales ont excité les miroirs de l'interféromètre actif tout le long de la performance, une vidéo présente cette expérience.



FIGURE 6.7 – Karine Lethiec jouant de l'alto sur la partition écrite par Kryštof Mařatka dans le hall d'expérimentation centrale de VIRGO.

## Concept

Au moment de la performance, un faisceau mal aligné errait dans le banc interférométrique de VIRGO et était réfléchi par l'un des panneaux vitrés. Le faisceau réfléchi était alors ré-injecté dans le bras interférométrique de VIRGO. Un mouvement important du panneau sur lequel était réfléchi le faisceau parasite se retrouvait alors dans le déphasage mesuré par l'interféromètre. L'idée était donc de faire vibrer ce panneau à l'aide d'ondes sonores afin de les détecter dans les données de VIRGO. Depuis, la source du couplage acoustique a été identifiée et la réflexion parasite a été supprimé avant le lancement du Run *O3*.

Artiste associé de l'Ensemble Calliopée, Raphaël Dallaporta s'était entouré de Kryštof Mařatka et Karine Lethiec pour réaliser la performance musicale. Les ondes sonores émises par les deux musiciens ont été enregistrées à l'aide d'un microphone et la déformation des bras de l'interféromètre VIRGO a été mesurée en parallèle. Au delà de la performance musicale, l'objectif était donc de trouver une corrélation entre les deux séries temporelles et de vérifier l'effet de l'intervention humaine sur le détecteur d'ondes gravitationnelles.

## Représentation de l'onde "gravitationnelle"

### Séries temporelles

Les deux séries temporelles sont représentées dans la figure 6.8. On remarque à l'oeil une corrélation entre la déformation mesurée par VIRGO et le signal sonore enregistré lorsque ce dernier a une amplitude importante (qui correspond aux *fortissimos* de l'*alto*).

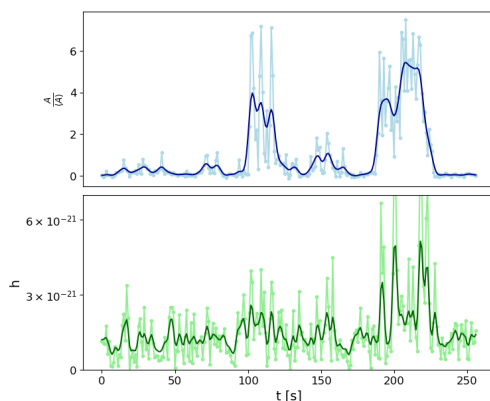


FIGURE 6.8 – Amplitude normalisée  $A/\langle A \rangle$  du son enregistré par le microphone (en bleu) et déformation mesurée par VIRGO (en vert). Pour chaque série temporelle, un filtre est utilisé pour minimiser l'effet du bruit.



FIGURE 6.9 – Représentation 3D



### Modèle 3D

Même si cette représentation graphique est bien connue des physiciens et autres scientifiques, elle reste difficilement interprétable pour les profanes et n'ont que peu d'intérêt esthétique. C'est pourquoi, Raphaël et Peter ont choisi de représenter ces données sous la forme d'une sculpture, s'affranchissant de l'univers froid du graphique 2D. Sur le modèle 3D représenté dans la figure 6.9,

- le temps s'écoule de bas en haut,
- le diamètre de la sculpture (et des disques qui la composent) est proportionnel à la déformation mesurée par VIRGO,
- la déviation par rapport à l'axe de révolution de la sculpture est proportionnel à l'amplitude du son mesuré par le microphone,
- afin d'obtenir un rendu plus artistique, une spirale est ajoutée.

Afin de vérifier la faisabilité d'une telle structure, j'ai fourni l'expertise relative à l'impression par dépôt de fil fondu. Pour obtenir un objet, un script Python a permis de faire l'interface entre les données et le logiciel de modélisation 3D OpenScad. Une fois la sculpture modélisée (figure 6.9), j'ai pu créer la pièce à l'aide de mon imprimante 3D personnelle. La méthode d'impression repose sur l'ajout de filament plastique par couche successive. En raison des fortes variations de diamètre de la pièce, il a été nécessaire d'utiliser des supports/échafaudages qui permettent d'assurer la bonne réalisation de l'impression. Le retrait de ces supports reste laborieux (figure 6.10a) mais permettent d'obtenir un objet (figure 6.10c) semblable à la modélisation 3D (figure 6.9).



(a) Retrait des supports      (b) Etape intermédiaire      (c) Pièce finale

FIGURE 6.10 – Différentes étapes du processus de création de la sculpture.

Le choix de représentation a convaincu les différents protagonistes impliqués dans le projet et l'impression 3D semble être une approche différente permettant de visualiser de la musique. La pièce 3D est également un bon prototype qui servira de base pour créer une version à taille humaine de la sculpture de l'onde GW181124.







## RÉSUMÉ

---

Cette thèse présente deux projets de recherche qui se placent dans le contexte des deux grandes théories de la physique moderne : la relativité générale et le modèle standard.

- Le premier projet a pour objectif de mesurer le décalage vers le rouge gravitationnel entre l'horloge PHARAO de l'ensemble ACES-PHARAO (qui sera arrimé à l'ISS) et les meilleures horloges des différents laboratoires de métrologie. En tant que centre de traitement et d'analyse des données, le laboratoire SYRTE prépare activement le futur lancement de la mission en développant différents logiciels dédiés. Ce manuscrit présente le dernier étage de traitement qui a permis de valider les attentes de la mission et qui permettra d'extraire le paramètre de violation de la théorie d'Albert Einstein.
- Le second projet est une expérience de recherche de matière noire située à l'Observatoire de Paris. Selon la théorie des champs scalaires ultra-léger, la matière noire entourant la Terre serait à l'origine d'une variation des constantes fondamentales. Celle-ci entraîne une oscillation temporelle de la longueur de la cavité ultrastable et de la fibre optique composant l'interféromètre de Mach-Zehnder de l'expérience. La mise en place, le développement et l'optimisation du dispositif optique ont permis d'atteindre un niveau de sensibilité suffisamment faible pour placer des contraintes compétitives sur les modèles de matière noire mais n'a malheureusement pas révélé de trace de cette matière inconnue dans la zone de sensibilité de l'expérience.

## MOTS CLÉS

---

Relativité générale, mission spatiale, ACES-PHARAO, décalage vers le rouge gravitationnel, horloge atomique, modèle standard, matière noire, oscillation des constantes fondamentales, interférométrie optique, physique fondamentale

## ABSTRACT

---

This thesis presents two research projects that are placed in the context of the two main theories of modern physics: general relativity and the standard model.

- The first project aims at measuring the gravitational redshift between the PHARAO clock of the ACES-PHARAO payload (which will be docked on the ISS) and the best clocks of the different metrology laboratories. As a data processing and analysis center, the SYRTE laboratory is actively preparing the future launch of the mission by developing various dedicated software. This manuscript presents the last stage of processing which allowed to validate the expectations of the mission and which will allow to extract the violation parameter of Albert Einstein's theory.
- The second project is a dark matter research experiment located at Paris Observatory. According to the ultra-light scalar field theory, the dark matter surrounding the Earth would be at the origin of a variation of the fundamental constants of Nature. This causes a temporal oscillation of the length of the ultrastable cavity and of the optical fiber composing the Mach-Zehnder interferometer of the experiment. The development and optimization of the optical device allowed to reach a level of sensitivity low enough to place competitive constraints on the dark matter models but unfortunately did not reveal any trace of this unknown matter in the sensitivity zone of the experiment.

## KEYWORDS

---

General relativity, space mission, ACES-PHARAO, gravitational redshift, atomic clock, standard model, dark matter, oscillation of fundamental constants, optical interferometry, fundamental physics