



**HAL**  
open science

# New limit theorems on extremes and dynamical systems

Ahmad Darwiche

► **To cite this version:**

Ahmad Darwiche. New limit theorems on extremes and dynamical systems. Dynamical Systems [math.DS]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2020. English. NNT: . tel-03143997v1

**HAL Id: tel-03143997**

**<https://hal.science/tel-03143997v1>**

Submitted on 17 Feb 2021 (v1), last revised 11 Mar 2021 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITE DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

École doctorale **ED Régionale SPI 72**

Unité de recherche **LMPA Joseph Liouville**

Thèse présentée par **Ahmad DARWICHE**

Soutenue le **8 décembre 2020**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'UNIVERSITE DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

Discipline **Mathématiques**

Spécialité **Probabilités-Systèmes dynamiques**

## De nouveaux théorèmes limites sur les extrêmes et les systèmes dynamiques.

**Thèse dirigée par** Nicolas CHENAVER co-encadrant  
Dominique SCHNEIDER directeur

### Composition du jury

|                            |   |  |
|----------------------------|---|--|
| <i>Rapporteurs</i>         | Jorge FREITAS<br>Benoit SAUSSOL               | Professeur à l'Université de Porto<br>Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale                                |
| <i>Examineurs</i>          | Ai-Hua FAN<br>Clément DOMBRY<br>Carole ROSIER | Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne<br>Professeur à l'Université de Franche-Comté<br>Professeur à l'ULCO |
| <i>Directeurs de thèse</i> | Nicolas CHENAVER<br>Dominique SCHNEIDER       | Maître de conférences à l'ULCO<br>Professeur à l'ULCO  |



L'UNIVERSITE DU LITTORAL CÔTE D'OPALE n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions devront être considérées comme propres à leurs auteurs.



**Mots clés :** valeurs extrêmes, théorèmes limites, suites stationnaires, marches aléatoires, processus ponctuels ; moyennes ergodiques pondérées, contractions de l'espace de hilbert, transformée de hilbert unilatérale pondérée, convergence presque partout, inégalités de moment.

**Keywords:** extreme values, limit theorems, stationary sequences, random walks, point processes; weighted ergodic averages, contractions of hilbert space, one-sided weighted ergodic hilbert transformation, almost everywhere convergence, moment inequalities.



Cette thèse a été préparée au

**LMPA Joseph Liouville**

Maison de la Recherche Blaise Pascal  
50, rue Ferdinand Buisson  
CS 80699  
62228 Calais Cedex  
France



☎ (33)(0)3 21 46 55 86  
📠 (33)(0)3 21 46 55 75  
✉ secretariat@lmpa.univ-littoral.fr  
Site <http://lmpa.univ-littoral.fr/>





*À mon directeur bien-aimé !*

*À mon encadrant bien-aimé !*

*Je dédie également ce travail à mes parents et ma femme Rawaa !*



**De nouveaux théorèmes limites sur les extrêmes et les systèmes dynamiques.****Résumé**

Dans cette thèse, nous établissons quelques théorèmes limites en théorie des valeurs extrêmes et en systèmes dynamiques. La thèse est composée de deux parties. Dans la première partie, nous nous intéressons au comportement du maximum d'une suite qui ne satisfait pas les hypothèses classiques de la théorie des valeurs extrêmes. La suite que nous considérons est générée par une marche aléatoire en milieu aléatoire. Nous établissons un résultat de convergence sur le processus ponctuel des excédents associé à la suite et calculons l'indice extrémal. Des propriétés de mélange de la suite sont également discutées.

Dans la deuxième partie, nous étudions la convergence presque sûre de différents types de moyennes ergodiques avec poids (aléatoires et/ou déterministes), en développant une nouvelle technique pour donner des vitesses de convergence. Cette technique est basée sur des travaux de Móricz concernant l'étude de sommes de variables aléatoires. Elle nous permet d'établir des résultats sur la vitesse de convergence dans la loi forte des grandes nombres. Nous déduisons ensuite des propriétés de convergence ponctuelle de la transformée de Hilbert unilatérale pondérée.

**Mots clés :** valeurs extrêmes, théorèmes limites, suites stationnaires, marches aléatoires, processus ponctuels ; moyennes ergodiques pondérées, contractions de l'espace de hilbert, transformée de hilbert unilatérale pondérée, convergence presque partout, inégalités de moment.

---

**Abstract**

In this PhD thesis, we establish some limit theorems in Extreme Value Theory and on dynamical systems. This thesis is divided into two parts. The first one deals with extremes of a sequence which does not satisfy the classical properties appearing in Extreme Value Theory. The sequence is generated by a random walk in random scenery. We establish a limit theorem on the point process of exceedances and we make explicit the extremal index. Some mixing properties are also discussed.

The second part of this thesis deals with almost sure convergence of various ergodic averages with weights (the weights can be random or deterministic) and is based on new techniques to provide rates of convergence. Our techniques are based on a work due to Móricz dealing with sums of random variables. The same technique allows us to establish results on the rates of convergence for the strong law of large numbers. Then we state several properties for the point convergence of weighted unilateral Hilbert transform.

**Keywords:** extreme values, limit theorems, stationary sequences, random walks, point processes; weighted ergodic averages, contractions of hilbert space, one-sided weighted ergodic hilbert transformation, almost everywhere convergence, moment inequalities.

---

**LMPA Joseph Liouville**

Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228  
Calais Cedex – France –



# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse, Dominique Schneider et Nicolas Chenavier, pour leur investissement qui s'est manifesté par des heures et des heures passées et au cours desquelles ils m'ont transmis beaucoup de connaissances. Leurs conseils, souvent complémentaires, ont largement contribué à me construire et à m'affirmer en tant que jeune chercheur.

Je remercie notamment Dominique de m'avoir toujours laissé repartir d'une réunion de travail avec l'information ou la petite astuce qui me manquait, sa capacité à comprendre immédiatement n'importe quel problème de mathématiques étant redoutable. Je tiens également à mentionner son soutien lors de la période de rédaction, sa bienveillance et ses encouragements quotidiens m'auront considérablement aidé à aller au bout de cet exercice difficile.

Je remercie aussi particulièrement Nicolas pour ses relectures minutieuses et systématiques de mes diverses productions, ainsi que pour son aide et ses précieuses suggestions. Toujours disponible pour me recevoir malgré ses nombreuses occupations, toujours prêt à répondre à mes questions et à discuter de différentes choses. Merci aussi pour sa grande maîtrise de la théorie des valeurs extrêmes. Et enfin, merci pour le soutien dans les moments difficiles.

Je suis très honoré que les professeurs Jorge Freitas (Université de Porto, Portugal) et Benoit Saussol (Université de Bretagne Occidentale) aient accepté de rapporter ma thèse. Mes remerciements vont également aux professeurs Ai-Hua Fan (Université de Picardie Jules Verne) et Clément Dombry (Université de Franche-Comté) qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je suis plus qu'heureux d'avoir eu une bourse de l'ULCO qui m'a permis de financer ma thèse. Je veux remercier aussi les directeurs successifs du LMPA, Shalom Eliahou et Carole Rosier qui ont créé une très bonne ambiance de travail.

Je veux remercier tous les membres de notre laboratoire, pour leur bienveillance et toutes les choses merveilleuses qui se passent grâce à eux. J'étais très heureux de passer mes journées à vos côtés. Merci à tous les doctorants pour les sourires et pour l'esprit de travail.

Un remerciement spécial va à mes parents et à ma femme, Rawaa, qui m'ont soutenu moralement dans les moments difficiles.



# Sommaire

|  |           |
|--|-----------|
| Résumé   | xi        |
| Remerciements  | xiii      |
| Sommaire   | xv        |
| Introduction (version française)   | 1         |
| Introduction (english version)   | 5         |
| <b>I Théorèmes limites pour des valeurs extrêmes</b>                     | <b>9</b>  |
| 1 Quelques outils de probabilités  | 11        |
| 2 Théorèmes limites pour des valeurs extrêmes en environnement aléatoire | 21        |
| 3 Processus ponctuel des excédents en environnement aléatoire            | 29        |
| <b>II Théorèmes limites dans les système dynamiques</b>                  | <b>41</b> |
| 4 Quelques outils de systèmes dynamiques                                 | 43        |
| 5 Théorèmes limites pour des moyennes ergodiques pondérées               | 55        |
| 6 Loi forte des grands nombres par rapport à $\phi$                      | 83        |
| Bibliographie  | 95        |
| Table des matières   | 103       |





# Introduction (version française)

Notre thèse est structurée en deux parties distinctes : la première porte sur les valeurs extrêmes et la seconde sur les systèmes dynamiques. Pour chacune de ces parties, nous commençons par un chapitre rassemblant les résultats connus, suivi d'un chapitre portant sur les résultats établis durant la thèse et d'un troisième portant sur un travail en cours.

**Valeurs extrêmes** La théorie des valeurs extrêmes est un domaine à l'interface des probabilités et de statistique dont le problème est de modéliser et de prévoir des événements rares. Les applications de cette théorie, ainsi que les avancées théoriques, sont de plus en plus nombreuses et touchent des domaines variés, comme la météorologie [69] pour les vagues de chaleur, l'hydrologie [63, 64] pour étudier par exemple la hauteur d'eau d'une rivière, le phénomène de crue et le niveau de la mer afin de savoir à quelle hauteur construire les digues, la démographie pour prévoir la loi de probabilité de l'âge maximum que l'être humain pourra atteindre, ou encore la finance.

Formellement, la théorie classique des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite de variables aléatoires réelles. Cette théorie a d'abord été développée pour des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées  $(X_i)_{i \geq 1}$ . Concrètement, il s'agit de déterminer un seuil  $(u_n)$  de telle sorte que  $\mathbb{P}(\max_{i \leq n} X_i \leq u_n)$  converge vers une limite non dégénérée. L'un des résultats les plus importants de cette théorie, connu sous le nom de théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko, garantit que, à renormalisation près, le maximum se situe dans le bassin d'attraction d'une des trois lois suivantes : Fréchet, Gumbel et Weibull.

De nombreux travaux ont été effectués pour étendre l'étude à des suites de variables aléatoires stationnaires qui ne sont pas nécessairement indépendantes, mais qui vérifient une condition d'indépendance asymptotique. En 1974, une des hypothèses les plus faibles a été introduite par Leadbetter [76]. Sous ces hypothèses, Leadbetter a établi un résultat sur les statistiques d'ordre de la suite, c'est-à-dire sur les  $r$  plus grandes valeurs, et démontré que le maximum converge vers l'une des trois lois mentionnées précédemment. Lorsque la suite de variables aléatoires ne satisfait pas la condition  $D'(u_n)$ , les excédents (c'est-à-dire les variables aléatoires dépassant un certain seuil) se rassemblent en des clusters. La notion sous-jacente est celle d'indice extrémal. Ce terme a été introduit par Leadbetter et al. [78] en 1983 et a conduit à de nombreuses recherches [21, 54, 79, 80]. Récemment,

une caractérisation explicite de l'indice extrémal a été fournie dans le contexte de la géométrie aléatoire par N. Chenavier et al. [17, 20].

La théorie des valeurs extrêmes n'est pas seulement un domaine des probabilités, elle est aussi une branche de la statistique. Une approche naturelle est d'estimer, par exemple, la queue de distribution d'une variable aléatoire, et par conséquent de déterminer le bassin d'attraction dans laquelle elle se situe. Un grand nombre d'estimateurs a été introduit dans ce contexte (par exemple l'estimateur de Hill, Asymptotic Equivalent, Fonctionnal Plug-in, estimateur de Weissman, etc). Parmi les méthodes classiques, nous citons la méthode POT (Peaks Over Threshold). Cette dernière se base sur l'observation des excédents, c'est-à-dire sur l'ensemble des valeurs dépassent un certain seuil. Cette approche est fondée sur la convergence vers une loi de Pareto Généralisée (GPD) et a été développée dans un travail de Pickands [91]. L'étude des extrêmes s'est ensuite étendue dans un cadre multivarié. En théorie spatiale des extrêmes, beaucoup de travail a été par exemple réalisé sur les processus max-stables, notamment avec les travaux de Schlather [94], Kabluchko [70] et Dombry [40]. La théorie des valeurs extrêmes apparaît naturellement dans des problèmes de géométrie aléatoire [15, 16, 19, 40, 90, 95]. Pour plus de résultats sur les valeurs extrêmes, nous faisons référence aux livres de de Haan et Ferreira [36], Leadbetter et al. [78], Resnick [92] et Embrechts et al. [46].

En 2009, Franke et Saigo [57] ont étudié le comportement du maximum d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées indexées par une marche aléatoire. Leur résultat principal porte sur la convergence du processus ponctuel des excédents. Ce dernier permet en particulier d'étudier les extrêmes. Dans cette thèse, nous avons généralisé leur résultat en considérant le même type de problème mais en ne supposant plus que l'environnement est constitué de variables aléatoires indépendantes. Pour obtenir cette généralisation, nous avons adapté une méthode due à Leadbetter de [77] et nous avons appliqué un résultat caractérisant la convergence de processus ponctuels dû à Kallenberg [72].

La théorie des valeurs extrêmes est l'objet de la première partie de cette thèse. Nous consacrerons trois chapitres. Le premier fera l'objet de quelques rappels sur les valeurs extrêmes. Le second portera sur nos résultats et a fait l'objet d'une publication dans le journal «Statistics & Probability Letters », voir (N. Chenavier et A. Darwiche [18]). Quant au troisième, nous présenterons quelques travaux en cours sur les extrêmes.

**Théorie ergodique** La théorie ergodique des systèmes dynamiques trouve ses origines dans des problèmes de mécanique statistique étudiés dans la deuxième moitié du 19<sup>ème</sup> siècle, par Boltzmann et Gibbs. Ces derniers affirment que, dans l'évolution d'un système de particules, presque toutes les trajectoires s'équirépartissent sur les surfaces d'énergie constante dans l'espace des phases. Cette théorie s'est considérablement développée et a interagi avec de nombreux domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, la géométrie, la topologie différentielle et la théorie des nombres.

L'objet de la théorie ergodique est l'étude des systèmes dynamiques du point de vue de la théorie de la mesure. Un système dynamique mesuré est un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  muni d'une transformation  $T$  qui préserve la mesure  $\mu$ . Le plus souvent la mesure  $\mu$  est une probabilité. En théorie ergodique, on s'intéresse à la description des propriétés statistiques des trajectoires des points sous l'itération de la transformation et on établit une classification des systèmes dynamiques mesurés.

En 1890, Poincaré a démontré un résultat affirmant que si l'on considère un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et un élément  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(A) > 0$ , alors pour presque tout élément  $x \in A$ ,  $x$  revient une infinité de fois dans  $A$  sous les itérations de  $T$ . Par la suite, au début des années 1930, les théorèmes de von Neumann et de Birkhoff ont été établis et ont significativement enrichi la théorie ergodique. Pour une fonction  $f$  de carré intégrable, von Neumann a montré que la suite  $(A_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k))$  converge en moyenne quadratique vers une fonction laissée invariante par  $T$ , tandis que Birkhoff a, de son côté, établi un théorème de convergence presque partout. Dans le cas où le système dynamique possède la propriété d'irréductibilité naturelle appelée ergodicité, la limite de la suite  $(A_n f)$  est la valeur moyenne de la fonction  $f$  pour la probabilité  $\mu$ . Les lois des grands nombres sont des cas particuliers de théorèmes ergodiques.

Dans les années 40, N. Wiener et A. Wintner [103] ont étendu le théorème de Birkhoff à des poids se situant dans le cercle unité. Bourgain [11] a démontré que le théorème de Birkhoff reste valable pour des sous-suites polynômiales. Le cas des nombres premiers, avait été résolu auparavant par Wierdl dans [104]. Au cours des dernières années, de nombreuses généralisations du théorème de Birkhoff ont été établies en particulier si la suite des entiers naturels représentant le nombre d'itération de  $T$  est remplacée par une suite  $(u_k)$  déterministe ou aléatoire, si les termes de la somme sont pondérés par une suite  $(w_k)$  déterministe ou aléatoire; voir par exemple [2, 25, 30, 35, 43, 45, 49, 81, 82, 100].

Notre objectif dans cette thèse est de généraliser des résultats qui ont été établis au cours des dix dernières années, en développant une nouvelle approche pour donner des vitesses de convergence ponctuelle pour des moyennes ergodiques pondérées (avec poids aléatoires et/ou déterministes). Cette approche utilise des travaux dus à Móricz concernant l'étude des sommes de variables aléatoires.

L'étude de la convergence ponctuelle des moyennes ergodiques fera l'objet de la deuxième partie de cette thèse. Nous consacrerons trois chapitres. Le premier fera l'objet de quelques rappels sur les systèmes dynamiques. Le second portera sur nos résultats et a fait l'objet d'un article soumis, voir (A. Darwiche et D. Schneider [33]). Quant au troisième, nous présenterons quelques travaux en cours sur la loi forte de grands nombres.



# Introduction (english version)

Our PhD thesis is divided into two : the first one deals with extreme values and the second one deals with dynamical systems. For each of these parts, we start with a chapter gathering the known results, followed by a chapter on this results established during the thesis and a third one on a work in progress.

**Extreme values** Extreme value theory is a field at the interface of probability and statistics whose the aim is to model and predict rare events. The applications of this theory, as well as theoretical advances, are increasingly numerous and affect various fields, such as meteorology [69] for heat waves, hydrology [63, 64] to study the height of a river's water level, flood phenomenon and sea level in particular to determine the height at which the dikes have to be built, demography to predict the law of probability of the maximum age that a human being can reach, or finance.

Formally, the extreme value theory aims to study the law of the maximum of a series of real random variables. This theory was first developed for sequences of independent and identically distributed random variables  $(X_i)_{i \geq 1}$ . The natural question is to determine a threshold  $(u_n)$  so that  $\mathbb{P}(\max_{i \leq n} X_i \leq u_n)$  converges towards a non-degenerated limit. One of the most important results of this theory, known as the Fisher-Tippett-Gnedenko theorem, ensures that, under suitable renormalization, the maximum is of one of the following three types : Fréchet, Gumbel and Weibull.

A lot of work has been done to extend the study to sequences of stationary random variables which are not necessarily independent, but which verify a condition of asymptotic independence. In 1974, one of the weakest hypotheses was introduced by Leadbetter [76]. Under these hypotheses, Leadbetter established a result on the order statistics, i.e. on the  $r$  largest values, and showed that the maximum converges to one of the three laws mentioned above. When the sequence of random variables does not satisfy the condition  $D'(u_n)$ , the exceedances (i.e. the random variables exceeding a certain threshold) can be divided into clusters. The underlying notion is the extremal index. This term was introduced by Leadbetter et al. [78] in 1983 and has led to various researches [21, 54, 79, 80]. Recently, an explicit characterization of the extremal index has been provided in the context of random geometry by N. Chenavier et al. [17, 20].

Extreme value theory is not only a field of probability, it is also a branch of statistics. A natural approach is to estimate, for example, the tail of the distribution of a random

variable, and therefore to determine the domain of attraction in which it lies. A large number of estimators has been introduced in this context (e.g. Hill's estimator, Asymptotic Equivalent, Functional Plug-in, Weissman's estimator, etc). Among the classical methods, we quote the POT (Peaks Over Threshold) method. The latter is based on the observation of exceedances, i.e. on the set of values exceeding a certain threshold (this approach is based on the convergence towards a Generalized Pareto Law (GPD) and developed by the work of Pickands [91]). The study of extremes has been extended into a multivariate framework. In spatial theory of extremes, a lot of work has been done for example on max-stable processes, notably with the work of Schlather [94], Kabluchko [70] and Dombry [40]. The theory of extreme values appears naturally in problems of random geometry [15, 16, 19, 40, 90, 95]. For more results on extreme values, we refer to the books by de Haan and Ferreira [36], Leadbetter et al. [78], Resnick [92] and Embrechts et al. [46].

In 2009, Franke and Saigo [57] studied the behavior of the maximum of a sequence of independent and identically distributed random variables indexed by a random walk. Their main result concerns the convergence of the point process of exceedances. The latter allows in particular to study the extremes. In this thesis, we have generalized their result by considering the same type of problem but no longer assuming that the environment is made up of independent random variables. To obtain this generalization, we have adapted the Leadbetter method of [77] and used a convergence theorem for point processes from [72].

Extreme value theory is the subject of the first part of this thesis. We will devote three chapters to it. The first will be the subject of some reminders on extreme values. The second one deals with our results and has been published in the journal «Statistics & Probability Letters », see (N. Chenavier and A. Darwiche [18]). In the third one, we will present some work in progress on extremes.

**Ergodic theory** The ergodic theory of dynamical systems has its origins in problems of statistical mechanics studied in the second half of the 19th century, by Boltzmann and Gibbs. The latter asserts that, in the evolution of a particle system, almost all trajectories are equidistributed on surfaces of constant energy in phase space. This theory has been developed considerably and has interacted with many areas of mathematics, including functional analysis, geometry, differential topology and number theory.

The object of ergodic theory is the study of dynamical systems from the point of view of measure theory. A measure dynamical system is a measure space  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  with a  $T$  transformation that preserves the measure  $\mu$ . Most of the time the measure  $\mu$  is a probability. In ergodic theory, we are interested in the description of the statistical properties of the trajectories of the points under the iteration of the transformation and we establish a classification of the dynamical systems.

In 1890, Poincaré demonstrated a result stating that if one considers a dynamical system  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  and an element  $A \in \mathcal{A}$  such that  $\mu(A) > 0$ , then for almost any element

$x \in A$ ,  $x$  returns an infinite number of times in  $A$  under iterations of  $T$ . Subsequently, in the early 1930s, von Neumann and Birkhoff's theorems were established and significantly enriched ergodic theory. For a  $f$  function which is square integrable, von Neumann showed that the  $(A_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k))$  function converges in square root mean to a function which is invariant by  $T$ , while Birkhoff has, on the other hand, established a convergence theorem almost everywhere. In the case where the dynamical system has the property of natural irreducibility called ergodicity, the limit of the sequence  $(A_n f)$  is the mean value of the function  $f$  for the probability  $\mu$ . The laws of large numbers are special cases of ergodic theorems.

In the 1940s, N. Wiener and A. Wintner [103] extended Birkhoff's theorem to weights in the unit circle. Bourgain [11] demonstrated that Birkhoff's theorem remains valid for polynomial subsequences. The case of prime numbers was previously solved by Wierdl in [104]. In the last few years, many generalizations of the Birkhoff result have been made for example if the sequence of natural integers is replaced by a deterministic or random sequence  $(u_k)$ , if the terms of the sum are weighted by a deterministic or random sequence  $(w_k)$ ; see for example [2, 25, 30, 35, 43, 45, 49, 81, 82, 100].

Our objective in this thesis is to generalize results that have been established over the last ten years, by developing a new approach to give rates of (point) convergence for weighted ergodic averages (random and/or deterministic weights). This approach is based on the work of Móriczon the study of sums of random variables.

The study of the point convergence of ergodic averages is the subject of the second part of this thesis. We will devote three chapters. The first one will be the subject of some reminders on dynamical systems. The second will deal with our results and has been the subject of a submitted paper, see (A. Darwiche and D. Schneider [33]). In the third one, we will present some work in progress on the strong law of large numbers.





**Première partie**

**Théorèmes limites pour des valeurs  
extrêmes**



# Chapitre 1

## Quelques outils de probabilités

Dans ce chapitre, on présente quelques outils de probabilités et quelques notions de valeurs extrêmes qui nous serviront dans les chapitres 2 et 3. La fin du présent chapitre est consacrée à une présentation formelle de notre sujet de thèse.

### 1.1 Processus ponctuels et processus ponctuel de Poisson

Le couple  $(E, \mathcal{E})$  désignera un espace mesurable où  $E$  est un espace topologique localement compact et  $\mathcal{E}$  est la tribu Borélienne sur  $E$  i.e. la plus petite tribu sur  $E$  contenant tous les ensembles ouverts. Soit  $\{x_i, i \geq 1\}$  un ensemble dénombrable de points de  $E$ . Une mesure ponctuelle définie sur  $E$  est une mesure  $m$  de la forme  $m = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{x_i}$  où  $\delta_x$  désigne la mesure de Dirac au point  $x$ . Désignons par  $M_p(E)$  l'espace de mesures ponctuelles sur  $E$  et par  $\mathcal{M}_p(E)$  la tribu de sous ensembles de  $M_p(E)$  comme étant la plus petite tribu contenant tous les ensembles de la forme  $\{m \in M_p(E) : m(F) \in B\}$  pour  $F \in \mathcal{E}$ ,  $B \in \mathcal{B}[0, \infty]$ . Alternativement,  $\mathcal{M}_p(E)$  est la plus petite tribu rendant les fonctions  $m \rightarrow m(F)$  (de  $M_p(E)$  dans  $[0, \infty]$ ) mesurables pour tout  $F \in \mathcal{E}$ .

**Processus ponctuel** Un processus ponctuel sur  $E$  est une fonction mesurable d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  dans  $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ . Autrement dit, un processus ponctuel est un élément aléatoire de  $M_p(E)$ .

**Convergence de processus ponctuels** On dit d'une suite de processus ponctuels  $(\Phi_n)$  converge vers un processus ponctuel  $\Phi$  si, pour toute fonction continue  $f$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  à support compact, on a

$$\mathbb{E}(\exp(-\Phi_n(f))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\exp(-\Phi(f))).$$

En d'autres termes, la fonction de Laplace de  $\Phi_n$  converge vers la fonction de Laplace de  $\Phi$ .

En 1975, Kallenberg [72] donne un critère plus explicite. Nous énonçons ci-dessous son théorème tel qu'il a été réécrit par Resnick (voir la Proposition 3.22 de [92]).

**Théorème 1.1.1 (Kallenberg)** *Supposons que  $\Phi$  est un processus ponctuel de  $E$  et  $\mathcal{I}$  une*

base d'ouverts relativement compacts telle que pour tout  $I \in \mathcal{I}$

$$\mathbb{P}(\Phi(\partial I) = 0) = 1.$$

Si  $(\Phi_n)$  est une suite de processus ponctuels sur  $E$  telle que pour tout  $I \in \mathcal{I}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Phi_n(I) = 0) = \mathbb{P}(\Phi(I) = 0)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\Phi_n(I)) = \mathbb{E}(\Phi(I)).$$

Alors  $\Phi_n$  converge vers  $\Phi$  dans  $M_p(E)$ .

On présente ci-dessous deux types de processus ponctuels que sont le processus ponctuel de Poisson et le processus de Cox.

**Processus ponctuel de Poisson** Le processus ponctuel de Poisson est un exemple fondamental de processus ponctuel. Un processus  $\Phi$  est appelé un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_\Phi$  avec  $\lambda_\Phi(B) = \mathbb{E}(\#\Phi \cap B)$ , où  $B$  est un Borélien de  $E$ , si

1. Pour tout Borélien  $B$  borné de  $\mathbb{R}^d$ , le nombre de points de  $\Phi$  tombant dans  $B$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_\Phi(B)$ . Autrement dit, pour tout  $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(\#\Phi \cap B = k) = \frac{e^{-\lambda_\Phi(B)} \lambda_\Phi(B)^k}{k!}.$$

2. Pour tous Boréliens deux à deux disjoints  $B_1, \dots, B_n$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 2$ , les variables aléatoires  $\#\Phi \cap B_1, \dots, \#\Phi \cap B_n$  sont indépendantes.

**Processus de Cox** Un processus de Cox est un processus de Poisson à densité aléatoire. Désignons par  $\Lambda_\Phi$  la densité aléatoire d'un processus de Poisson  $\Phi$ , alors

$$\mathbb{P}(\#\Phi \cap B = k) = \mathbb{E} \left( \frac{e^{-\Lambda_\Phi(B)} \Lambda_\Phi(B)^k}{k!} \right).$$

pour tout Borélien  $B$  borné de  $\mathbb{R}^d$ .

## 1.2 Théorie des valeurs extrêmes

Dans cette section, on donne un aperçu de la théorie probabiliste des valeurs extrêmes. On commence par rappeler quelques notions et outils issus de la théorie des valeurs extrêmes. Puis, on présente des résultats connus sur les valeurs extrêmes en se limitant à ceux qui nous seront utiles dans la thèse.

### 1.2.1 Notions sur les valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite des variables aléatoires réelles. Formellement, considérons  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables

aléatoires réelles i.i.d de fonction de répartition  $F$  définie par

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Pour étudier le comportement extrême des événements, on considère la variable aléatoire

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Comme les variables aléatoires sont i.i.d., alors la fonction de répartition de  $M_n$  est donnée par

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = F^n(x).$$

L'objectif est de trouver un seuil de telle sorte que la probabilité pour que le maximum soit inférieure à ce seuil converge vers une limite non dégénérée. Pour cela, on cherche un seuil sous la forme suivante

$$u_n(t) := a_n t + b_n$$

où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sont des suites telles que

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n(t)) = F^n(u_n(t)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} H(t),$$

où  $H$  est une fonction de répartition non dégénérée. Ici, la non-dégénérescence de  $H$  signifie qu'il n'existe pas  $y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $H(y_0) = 1$  et  $H(y) = 0$ , pour tout  $y < y_0$ .

Le premier résultat fondamental de la théorie des valeurs extrêmes est le théorème de Fisher-Tippett [55] dont la première preuve rigoureuse est due à Gnedenko [61]. Le théorème de Fisher et Tippett est un résultat de classification sur les extrêmes.

**Théorème 1.2.1 (Fisher-Tippett-Gnedenko)** *Supposons qu'il existe deux suites de normalisation  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  et une fonction non dégénérée  $H$  tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq t\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} H(t)$$

Alors  $H$  appartient à l'un des trois types suivants :

1. *Type Fréchet d'indice  $\beta > 0$  :*  $\Phi_\beta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t^{-\beta}}, & t > 0 \end{cases}$ .
2. *Type Gumbel :*  $\Lambda(t) = e^{-e^{-t}} \quad t \in \mathbb{R}$ .
3. *Type Weibull d'indice  $\delta > 0$  :*  $\Psi(t) = \begin{cases} e^{-(-t)^\delta}, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ .

Ce théorème donne un résultat très intéressant, quelle que soit la loi limite de la variable parente, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme, sous réserve que la limite existe.

Un autre résultat évident est l'équivalence

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\tau} \iff n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau \quad (1.1)$$

où  $\tau \geq 0$  est une constante fixée.

On propose trois exemples illustrant le théorème de Gnedenko.

**Exemple 1.** Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires i.i.d suivant la loi exponentielle de paramètre 1, de fonction de répartition commune  $F$  telle que

$$F(x) = 1 - \exp(-x), \quad x > 0.$$

Soient  $\tau > 0$  et  $u_n$  tel que  $n(1 - F(u_n)) = \tau$ , alors

$$u_n = \log(n) - \log(\tau).$$

Donc

$$\mathbb{P}(M_n - \log(n) \leq -\log(\tau)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\tau}.$$

Pour tout  $x > 0$ , on prend  $\tau = e^{-x}$ , alors

$$\mathbb{P}(M_n - \log(n) \leq x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-e^{-x}}.$$

Prenons  $a_n = 1$  et  $b_n = \log(n)$ . Le maximum normalisé par les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de la loi exponentielle converge vers la loi de Gumbel. On dit aussi que le maximum  $M_n$  se situe dans le domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

**Exemple 2.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  une suite de v.a i.i.d suivant la loi de Pareto, c'est-à-dire  $F(x) = 1 - kx^{-\alpha}$ , où  $k > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $x > k^{\frac{1}{\alpha}}$ . Pour  $\tau > 0$ , on choisit  $u_n$  tel que  $n(1 - F(u_n)) = \tau$ , cela implique que

$$u_n = \left( \frac{kn}{\tau} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left( (kn)^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \leq \tau^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\tau}.$$

En prenant  $\tau = x^{-\alpha}$ , pour tout  $x \geq 0$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left( (kn)^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \leq x \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-x^{-\alpha}}$$

c'est-à-dire que le maximum convenablement normalisé de la loi de Pareto converge vers la loi de Fréchet. Ainsi, la loi de Pareto appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

**Exemple 3.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  une suite de v.a i.i.d suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $(0, 1)$ . On a  $F(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Pour  $\tau > 0$ , on choisit  $u_n$  tel que  $n(1 - F(u_n)) = \tau$ , i.e  $u_n = 1 - \frac{\tau}{n}$ . Par conséquent

$$\mathbb{P}(n(M_n - 1) \leq -\tau) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\tau}.$$

Cela veut dire que

$$\mathbb{P}(n(M_n - 1) \leq y) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^y$$

où  $y = -\tau$ . Donc le maximum normalisé par les suites  $a_n = n$  et  $b_n = 1$  de la loi uniforme sur l'intervalle  $(0, 1)$  converge vers la loi de Weibull.

### 1.2.2 Valeurs extrêmes pour des suites non i.i.d

Plusieurs travaux ont été effectués pour généraliser l'étude du cas i.i.d à des suites à dépendance faible. On cite, par exemple, les travaux de Watson [99] sur la  $k$ -dépendance, Loynes [84] et Welsch [102] sur des suites satisfaisant une condition de mélange fort. L'une des conditions les plus faibles sur la dépendance de la suite est la condition  $D(u_n)$  de Leadbetter, introduite en 1974 dans [76]. On présente ci-dessous la condition  $D(u_n)$  et une seconde condition, notée  $D'(u_n)$ , dont il est également l'auteur et qui concerne une propriété locale de la suite. Désignons par  $F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n)$  la probabilité  $\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, X_{i_n} \leq x_{i_n})$  et plus brièvement  $F_{i_1, \dots, i_n}(u) = F_{i_1, \dots, i_n}(u, \dots, u)$  pour tout  $n, i_1, \dots, i_n$  et  $u$ . Avant d'énoncer ces conditions, commençons par rappeler la définition de la stationnarité. On dit qu'une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  est stationnaire si elle est invariante par translation en loi, c'est-à-dire, pour tout  $h \in \mathbb{N}$ ,  $F_{i_1+h, \dots, i_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Condition  $D(u_n)$ .** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$ , une suite de variables aléatoires stationnaires réelles et  $(u_i)_{i \geq 1}$  une suite déterministe réelle. On dit que la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  satisfait la condition  $D(u_n)$  si pour tout  $n, l$  et pour tout entier  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{p'}$  tels que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_{p'} \leq n$  avec  $j_1 - i_p \geq l$ , on a

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{p'}}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_{p'}}(u_n)| \leq \alpha_{n, l}$$

où  $\alpha_{n, l_n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  pour une certaine suite  $(l_n)_{n \geq 1}$  avec  $l_n = o(n)$ .

Cette condition de dépendance faible est peu restrictive car elle ne porte que sur des événements  $A$  du type

$$A = \bigcap_{r=1}^p \{X_{i_r} \leq u_n\}$$

et pas nécessairement sur les lois jointes. Informellement, cette condition signifie que des événements de type extrême tendent à être indépendants dès lors qu'ils sont éloignés. Une telle condition est en particulier satisfaite si la suite de variables aléatoires  $(X_i)$  satisfait une condition de mélange, c'est-à-dire une condition d'indépendance asymptotique.

Lorsque la suite ne satisfait que la condition  $D(u_n)$ , l'équivalence (1.1) n'est pas toujours vraie. Pour remédier à cela, Leadbetter introduit une seconde condition.

**Condition  $D'(u_n)$ .** Soit  $(u_i)_{i \geq 1}$  une suite de nombre réels et  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite stationnaire de variables aléatoires satisfaisant la condition  $D(u_n)$ . On dit que la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  satisfait la condition  $D'(u_n)$  s'il existe une suite d'entiers  $(k_n)$  telle que  $k_n \rightarrow \infty$ ,  $k_n \alpha_{n, l_n} \rightarrow 0$ ,  $k_n l_n = o(n)$  et telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n}{k_n} \rfloor} \mathbb{P}(X_1 > u_n, X_j > u_n) = 0.$$



Informellement, cette condition signifie que, avec grande probabilité, on ne peut pas avoir deux variables aléatoires  $X_i, X_j$  prenant simultanément de grandes valeurs et dont les indices  $i$  et  $j$  sont proches. En d'autres termes, les excédents, c'est-à-dire les variables aléatoires dépassant le seuil  $u_n$ , sont isolés. Une telle condition est en particulier satisfaite si la suite  $(X_i)$  est i.i.d.

**Théorème 1.2.2** [Leadbetter] *Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$ , une suite de variables aléatoires réelles satisfaisant les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$  et  $0 \leq \tau < \infty$ . Alors*

$$n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau.$$

si et seulement si

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\tau}$$

Dans le théorème précédent, la condition  $D'(u_n)$  joue un double rôle : avec  $D(u_n)$ , elle garantit l'existence d'une loi limite pour  $M_n$  et entraîne que la limite est la même que si les variables aléatoires étaient i.i.d. Lorsque  $D'(u_n)$  n'est pas satisfaite, Leadbetter [77] obtient le théorème suivant.

**Théorème 1.2.3 (Leadbetter)** *Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$ , une suite de variables aléatoires réelles et stationnaires et  $(u_n)$  une suite déterministe telle que  $n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau$  pour tout  $\tau > 0$ . Supposons que la condition  $D(u_n)$  est satisfaite. Alors sous réserve que la limite existe, il existe une constante  $0 \leq \theta \leq 1$  telle que*

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\theta\tau}.$$

**Indice extrémal** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$ , une suite de variables aléatoires réelles. Si  $n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau$  et  $\mathbb{P}(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\theta\tau}$  pour tout  $\tau > 0$ , on dit que la suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  a un *indice extrémal*  $\theta$ .

Si  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$  sont satisfaites il est clair d'après le Théorème 1.2.2, que l'indice extrémal est égal à 1. Si on n'a pas la condition  $D'(u_n)$  l'indice extrémal peut être interprété géométriquement. Revenons à la définition de  $D'(u_n)$ , cette condition garantit qu'on ne peut pas avoir deux excédents proche l'un de l'autre avec grande probabilité. Cela signifie que les excédents sont isolés. En revanche, lorsque la condition  $D'(u_n)$  n'est pas satisfaite, les excédents se répartissent en des clusters et l'indice extrémal représente alors l'inverse de la taille moyenne d'un cluster d'excédents. Plus précisément, Chernick (voir le Corollaire 1.3. [21]) a montré sous de bonnes conditions et sous réserve que l'indice extrémal existe, que

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 > u_n(\tau), X_2 \leq u_n(\tau), \dots, X_k \leq u_n(\tau))}{\mathbb{P}(X_1 > u_n(\tau))} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \theta$$

pour tout  $\tau > 0$ . De cette relation on peut interpréter l'indice extrémal comme le nombre moyen de clusters divisé par le nombre moyen d'excédents.

**Distribution asymptotique des plus grandes valeurs** Il est connu que les dépassements au-dessus d'un certain seuil des processus normaux stationnaires en temps continu ont tendance à se comporter de manière asymptotique comme un processus de Poisson (voir [8, 28]). Un résultat analogue est valable en temps discret sous de bonnes hypothèses (voir [76]). Plus précisément, étant donnée une suite de variable aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  telle que  $n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$ , on désigne par

$$U_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > u_n\}}$$

le nombre de variables aléatoires se situant au dessus du seuil  $u_n$ . Il est clair que

$$\mathbb{P}(U_n \leq r) = \mathbb{P}(M_n^{(r)} \leq u_n)$$

pour tout  $r \geq 1$ , où  $M_n^{(r)}$  est la  $r$ -ième plus grande valeur de la suite  $X_1, \dots, X_n$ . Le théorème suivant montre que grâce aux conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$ , la variable aléatoire  $U_n$  peut être approchée par une variable aléatoire de Poisson de moyenne  $\tau$ .

**Théorème 1.2.4 (Leadbetter)** Soient  $X_1, \dots, X_n$  une suite stationnaire de v.a satisfaisant les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$ . Alors

$$\mathbb{P}(M_n^{(r)} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{e^{-\tau} \tau^s}{s!}.$$

Ce résultat est une extension du Théorème 2 aux statistiques d'ordre.

**Processus ponctuel des excédents** Soit  $X_1, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires i.i.d. Notons  $\Phi_n$  le processus ponctuel des excédents dans  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ , c'est-à-dire

$$\Phi_n = \left\{ \left( \frac{j}{n}, \frac{X_j - b_n}{a_n} \right), 1 \leq j \leq n \right\}$$

où  $u_n(t) = a_n t + b_n$  satisfait  $n\mathbb{P}(X_1 > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau$ . On définit respectivement les extrémités de l'intervalle sur lequel  $\tau(\cdot)$  est définie,

$$*_x = \inf\{t \in \mathbb{R}, \tau(t) < \infty\} \quad \text{et} \quad x^* = \sup\{t \in \mathbb{R}, \tau(t) > 0\}$$

et on considère un processus ponctuel de Poisson  $\Phi$  dans  $\mathbb{R}^+ \times (*_x, x^*]$ , de mesure d'intensité  $\nu$  telle que

$$\nu((a, b] \times (s, t]) = \mathbb{E}[\#\Phi \cap (a, b] \times (s, t]) = (b - a) \times (\tau(t) - \tau(s))$$

pour tout  $0 \leq a \leq b \leq 1$  et tout segment  $(s, t]$  inclus dans  $(*_x, x^*]$ . D'après le Théorème 2.1.2. [37] le processus ponctuel des excédents  $\Phi_n$  converge vers le processus ponctuel de

Poisson  $\Phi$ ,

$$\Phi_n \xrightarrow{(loi)} \Phi.$$

Ce résultat a été généralisé pour des suites non i.i.d satisfaisant une condition moins restrictive que les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$  (voir Chap. 5 dans [78]).

### 1.3 Présentation des problèmes

#### Chapitre 2

Dans la deuxième section du présent chapitre, nous avons rappelé deux conditions classiques de théorie des valeurs extrêmes : la condition  $D(u_n)$  et la condition  $D'(u_n)$ , et nous avons vu que, lorsque ces dernières sont satisfaites, le maximum se comporte comme si les variables aléatoires étaient indépendantes. Dans cette thèse notamment dans le chapitre 2, nous étudions des extrêmes pour des suites de variables aléatoires qui ne satisfont pas les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$ .

Plus précisément, étant données une suite de variable aléatoire  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et une marche aléatoire  $\{S_n, n \geq 0\}$  sur  $\mathbb{Z}$ , on s'intéresse au comportement limite du maximum

$$\max\{\xi(S_j) : j \leq n\}$$

quand  $n$  tend vers l'infini. On parle alors d'extrêmes en milieu aléatoire. Récemment, Franke et Saigo ont étudié le comportement limite de ce maximum dans le cas où les variables aléatoires sont i.i.d. Notre résultat de [18] porte sur l'étude du comportement de ce maximum lorsque la suite  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  satisfait seulement les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$ . Plus précisément, si  $\{S_n, n \geq 0\}$  est transiente et  $n\mathbb{P}(\xi(0) > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau$  pour un certain  $\tau > 0$ , on démontre que

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \xi(S_n) \leq u_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\tau q},$$

avec  $q = \mathbb{P}(\forall k \in \mathbb{N}_+, S_k \neq 0)$ . En particulier, on obtient que l'indice extrêmél est égal à  $q$ . Notre résultat est issu d'un travail avec N. Chenavier paru dans "Statistics & Probability Letters".

#### Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à des travaux en cours. On considère le problème suivant. Dans [57], en étudiant le comportement limite de la transformée de Laplace, Franke et Saigo ont étudié la convergence faible du processus des excédents, lorsque l'environnement aléatoire est basée sur une suite  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  i.i.d.

Dans ce chapitre, nous étudions ce type de convergence des processus ponctuels lorsque la suite  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfait uniquement les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$ . Plus précisément, en utilisant le théorème de Kallenberg, on montre que si  $u_n = a_n x + b_n$  et

$\tau_k = \inf\{m \in \mathbb{N}_+, \#\{S_1, \dots, S_m\} \geq k\}$ , alors le processus ponctuel

$$N^{(n)} := \sum_k \delta_{\left(\frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_n}{a_n}\right)}$$

converge vers un processus ponctuel de Poisson avec une mesure d'intensité explicite.



## Chapitre 2

# Théorèmes limites pour des valeurs extrêmes en environnement aléatoire

Extremes for transient random walks in random sceneries under weak independence conditions

Nicolas Chenavier & Ahmad Darwiche

### 2.1 Introduction

In the 1940s, Extreme Value Theory has been developed in the context of independent and identically distributed (i.i.d) random variables by Gnedenko [61]. It is straightforward that if  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is a sequence of i.i.d random variables then the following property holds : for any sequence of real numbers  $(u_n)$ , and for  $\tau > 0$ ,

$$n\mathbb{P}(\xi(0) > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau \implies \mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \xi(k) \leq u_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\tau}.$$

The above property has been extended for sequences of dependent random variables satisfying the so-called conditions  $D(u_n)$  and  $D'(u_n)$  of Leadbetter [76, 77].

More recently, Franke and Saigo [56, 57] have investigated extremes for a sequence of dependent random variables which do not satisfy the conditions  $D(u_n)$  and  $D'(u_n)$ . More precisely, they consider the following problem. Let  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$  be a sequence of centered, integer-valued i.i.d random variables and let  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ . Assume that  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$  is in the domain of attraction of a stable law, i.e. for each  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}\left(n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n \leq x\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_\alpha(x),$$

where  $F_\alpha$  is the distribution function of a stable law with characteristic function given by

$$\varphi(\theta) = \exp(-|\theta|^\alpha(C_1 + iC_2\text{sgn}\theta)), \quad \alpha \in (0, 2].$$

The sequence  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$  is referred to as a random walk. When  $\alpha < 1$  (resp.  $\alpha > 1$ ), it is known that this random walk is transient (resp. recurrent) [73, 75]. Now, let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a family of  $\mathbb{R}$ -valued i.i.d random variables independent of the sequence  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ . In the sense of [57], the sequence  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}_+\}$  is called a random walk in a random scenery. Franke and Saigo derive limit theorems for the maximum of the first  $n$  terms of  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}_+\}$  as  $n$  goes to infinity. An adaptation of Theorem 1 in [57] shows that in the transient case, i.e.  $\alpha < 1$ , the following property holds : if  $n\mathbb{P}(\xi(0) > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau$  for some sequence  $(u_n)$  and for some  $\tau > 0$ , then

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \xi(S_k) \leq u_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\tau q}, \quad (2.1)$$

where  $q = \mathbb{P}(\forall k \in \mathbb{N}_+, S_k \neq 0)$ . Notice that  $q > 0$  because the random walk  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$  is transient. According to a result due to Le Gall and Rosen [75], the number  $q$  can be also expressed as

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{n} \quad \text{a.s.}, \quad (2.2)$$

where  $R_n = \#\{S_1, \dots, S_n\}$  is the range of the random walk.

In this paper, we extend (2.1) to sequences  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  which are not necessarily i.i.d. but which only satisfy conditions of type  $D(u_n)$  and  $D'(u_n)$ . More precisely, we consider the following problem. Let  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , where  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$  is a sequence satisfying the same properties as above, i.e. a sequence of centered, integer-valued i.i.d random variables in the domain of attraction of a  $\alpha$ -stable law, with  $\alpha < 1$ . Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a stationary sequence of random variables independent of  $\{X_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ . Assume that there exist a sequence  $(u_n)$  such that

$$n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau \quad (2.3)$$

for some  $\tau > 0$ , where  $\xi$  has the same distribution as  $\xi(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . In the following, the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is supposed to satisfy conditions of type  $D(u_n)$  and  $D'(u_n)$ . Roughly, the condition  $D(u_n)$  (see e.g. p29 in [85]) is a weak mixing property for the tails of the joint distributions. To introduce it, we write for each  $i_1 < \dots < i_p$  and for each  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{i_1, \dots, i_p}(u) = \mathbb{P}(\xi(i_1) \leq u, \dots, \xi(i_p) \leq u).$$

**Condition  $\mathbf{D}(u_n)$**  We say that  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the condition  $\mathbf{D}(u_n)$  if there exist a sequence  $(\alpha_{n,l})_{(n,l) \in \mathbb{N}^2}$  and a sequence  $(l_n)$  of positive integers such that  $\alpha_{n,l_n} \rightarrow 0$  as  $n$  goes to infinity,  $l_n = o(n)$ , and

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{p'}}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_{p'}}(u_n)| \leq \alpha_{n,l}$$

for any integers  $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_{p'}$  such that  $j_1 - i_p \geq l$ . Notice that the bound holds uniformly in  $p$  and  $p'$ .

The condition  $\mathbf{D}'(u_n)$  (see e.g. p29 in [85]) is a local type property and precludes the existence of clusters of exceedances. To introduce it, we consider a sequence  $(k_n)$  such that

$$k_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty, \quad \frac{n^2}{k_n} \alpha_{n,l_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad k_n l_n = o(n), \quad (2.4)$$

where  $(l_n)$  and  $(\alpha_{n,l})_{(n,l) \in \mathbb{N}^2}$  are the same as in condition  $\mathbf{D}(u_n)$ .

**Condition  $\mathbf{D}'(u_n)$**  We say that  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the condition  $\mathbf{D}'(u_n)$  if there exists a sequence of integers  $(k_n)$  satisfying (2.4) such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{j=1}^{\lfloor n/k_n \rfloor} \mathbb{P}(\xi(0) > u_n, \xi(j) > u_n) = 0.$$

In the classical literature, the sequences  $(\alpha_{n,l})_{(n,l) \in \mathbb{N}^2}$  and  $(k_n)$  only satisfy  $k_n \alpha_{n,l_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  (see e.g. (3.2.1) in [85]) whereas in (2.4) we have assumed that  $\frac{n^2}{k_n} \alpha_{n,l_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . In this sense, the condition  $\mathbf{D}'(u_n)$  as written above is slightly more restrictive than the usual condition  $\mathbf{D}(u_n)$ . We are now prepared to state our main theorem.

**Theorem 2.1.1** *Let  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$  be as above and let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a stationary sequence of random variables such that  $n\mathbb{P}(\xi(0) > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau$ , for some sequence  $(u_n)$  and  $\tau \geq 0$ . Assume that the conditions  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  hold. Then for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \xi(S_k) \leq u_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\tau q},$$

where  $q = \mathbb{P}(\forall k \in \mathbb{N}_+, S_k \neq 0)$ .

The above result extends (2.1) to sequences  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  which only satisfy the conditions  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$ . Notice that our theorem is only stated when  $\alpha < 1$ , but it remains true on the opposite. We did not deal with this case because, when the random walk is recurrent, the number  $q$  equals 0 and the limit is degenerate, i.e.  $\mathbb{P}(\max_{k \leq n} \xi(S_k) \leq u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ .

The main idea to derive Theorem 2.1.1 is to adapt [77] to our context. We think that our method combined with Kallenberg's theorem ensures that the point process of exceedances converges to a Poisson point process, in the same spirit as Theorem 3 in [57]. More precisely, if the threshold is of the form  $u_n = u_n(x) = a_n x + b_n$ , for some  $x \in \mathbb{R}$ , and if we let  $\tau_k = \inf\{m \in \mathbb{N}_+, \#\{S_1, \dots, S_m\} \geq k\}$ , then the point process

$$\Phi_n = \left\{ \left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{\lfloor qn \rfloor}}{a_{\lfloor qn \rfloor}} \right), k \geq 1 \right\}$$

converges to a Poisson point process with explicit intensity measure.



The rest of the paper is devoted to the proof of Theorem 2.1.1.

## 2.2 Proof of Theorem 2.1.1

The main idea is to adapt [77] to our context. To do it, let  $(k_n), (l_n)$  be as in (2.4). For  $n$  large enough, let  $r_n = \lfloor \frac{n}{k_n-1} \rfloor + 1$ . Given a realization  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$  of the random walk, we write  $\mathcal{S}_n = \{S_1, \dots, S_n\}$  and  $R_n = \#\mathcal{S}_n$ . To capture the fact that the random scenery  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the condition  $\mathbf{D}(u_n)$ , we construct blocks and stripes as follows. Let

$$K_n = \left\lfloor \frac{R_n}{r_n} \right\rfloor + 1. \quad (2.5)$$

There exists a unique  $K_n$ -tuple of subsets  $B_i \subset \mathcal{S}_n$ ,  $i \leq K_n$ , such that the following properties hold :  $\bigcup_{j \leq K_n} B_j = \mathcal{S}_n$ ,  $\#B_i = r_n$  and  $\max B_i < \min B_{i+1}$  for all  $i \leq K_n - 1$ . Notice that  $K_n \leq k_n$  and  $\#B_{K_n} = R_n - (K_n - 1) \cdot r_n$  almost surely (a.s.). The sets  $B_j$ ,  $j \leq K_n$ , are referred to as *blocks*. For each  $j \leq K_n$ , we also denote by  $L_j$  the family consisting of the  $l_n$  largest terms of  $B_j$  (e.g. if  $B_j = \{x_1, \dots, x_{r_n}\}$ , with  $x_1 < \dots < x_{r_n}$ ,  $j \leq K_n - 1$ , then  $L_j = \{x_{r_n-l_n+1}, \dots, x_{r_n}\}$ ). When  $j = K_n$ , we take the convention  $L_{K_n} = \emptyset$  if  $\#B_{K_n} < l_n$ . The set  $L_j$  is referred to as a *stripe*, and the union of the stripes is denoted  $\mathcal{L}_n = \bigcup_{j \leq K_n} L_j$ . In the rest of the paper, we write  $M_B = \max_{k \in B} \xi(k)$  for all subset  $B \subset \mathbb{Z}$ . To prove Theorem 2.1.1, we will use the following lemma.

**Lemma 2.2.1** *With the above notation, we have for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,*

- (i)  $\mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n} \leq u_n) - \mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ;
- (ii)  $\mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ;
- (iii)  $\prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

The first and the third assertions mean that, asymptotically, the maximum is not affected if we remove the sites which belong to one of the stripes. Roughly, this comes from the fact that the size of the stripes is negligible compared to the size of the blocks. The second assertion is a consequence of the fact that the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the condition  $\mathbf{D}(u_n)$ . To derive Theorem 2.1.1, we will also use the following lemma.

**Lemma 2.2.2** *With the above notation, we have for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,*

$$\prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\tau q}.$$

**Proof of Lemma 2.2.1.** First we prove (i). To do it, for all  $n \in \mathbb{N}_+$ , we write

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{S}_n} \leq u_n\right) &\leq \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{L}_n} > u_n\right) \\
&\leq \#\mathcal{L}_n \mathbb{P}\left(\xi > u_n\right) \\
&\leq K_n l_n \mathbb{P}\left(\xi > u_n\right) \\
&\leq k_n l_n \mathbb{P}\left(\xi > u_n\right). \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Since  $k_n l_n = o(n)$  and  $n\mathbb{P}\left(\xi > u_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$ , we have  $k_n l_n \mathbb{P}\left(\xi > u_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . This together with (2.6) concludes the proof of (i).

Now we prove (ii). Noticing that  $\{M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\} = \bigcap_{j \leq K_n} \{M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\}$  and bounding  $\mathbb{P}\left(M_{B_{K_n} \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right)$  by 1, we have

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}\left(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right| \\
&\leq \left| \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \leq K_n} M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \leq K_n-1} M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \mathbb{P}\left(M_{B_{K_n} \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right| \\
&\quad + \left| \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \leq K_n-1} M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \prod_{j \leq K_n-1} \mathbb{P}\left(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right|.
\end{aligned}$$

It follows from the definition of  $\mathcal{L}_n$  that  $\inf_{j \leq K_n-1} d(B_{K_n} \setminus \mathcal{L}_n, B_j \setminus \mathcal{L}_n) \geq l_n$ , where  $d(A, B)$  denotes the distance between any pairs of sets  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Thanks to the condition  $\mathbf{D}(u_n)$ , this gives

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}\left(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right| \\
&\leq \alpha_{n, l_n} + \left| \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \leq K_n-1} M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \prod_{j \leq K_n-1} \mathbb{P}\left(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right|.
\end{aligned}$$

By induction, we have

$$\left| \mathbb{P}\left(M_{\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}\left(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n\right) \right| \leq (K_n - 1)\alpha_{n, l_n} \leq k_n \alpha_{n, l_n},$$

which converges to 0 as  $n$  goes to infinity. This concludes the proof of (ii).

It remains to prove (iii). To do it, notice that, for  $n$  large enough,  $\mathbb{P}\left(M_{B_j} \leq u_n\right) \neq 0$

because  $\mathbb{P}(M_{B_j} > u_n) \leq r_n \mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . This allows us to write for  $n$  large enough,

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \right| \\ &= \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \left( \prod_{j \leq K_n} \frac{\mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n)}{\mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)} - 1 \right), \\ &\leq \prod_{j \leq K_n} \frac{\mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n)}{\mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)} - 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Now, let  $j \leq K_n$  be fixed. Because  $\#\{B_j \cap \mathcal{L}_n\} \leq l_n$ , we can prove, in the same spirit as (2.6), that

$$\mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \leq l_n \mathbb{P}(\xi > u_n).$$

Adapting (2.6) again, we also have

$$\mathbb{P}(M_{B_j} > u_n) \leq r_n \mathbb{P}(\xi > u_n). \quad (2.8)$$

This implies that

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n)}{\mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)} &= 1 + \frac{\mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)}{1 - \mathbb{P}(M_{B_j} > u_n)} \\ &\leq 1 + \frac{l_n \mathbb{P}(\xi > u_n)}{1 - r_n \mathbb{P}(\xi > u_n)} \\ &= 1 + \frac{\tau l_n}{n} + o\left(\frac{l_n}{n}\right), \end{aligned}$$

where the last line comes from the fact that  $\mathbb{P}(\xi > u_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\tau}{n}$ . This together with (2.7) and the fact that  $K_n \leq k_n$  implies

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j \setminus \mathcal{L}_n} \leq u_n) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \right| \leq \left( 1 + \frac{\tau l_n}{n} + o\left(\frac{l_n}{n}\right) \right)^{k_n} - 1 \\ & \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\tau k_n l_n}{n}. \end{aligned}$$

The last term converges to 0 as  $n$  goes to infinity since  $k_n l_n = o(n)$ . This concludes the proof of (iii).  $\square$

**Proof of Lemma 2.2.2.** First, we provide a lower-bound for  $\prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)$ . To do

it, for all  $n \in \mathbb{N}_+$ , we write

$$\begin{aligned} \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) &= \exp \left( \sum_{j \leq K_n} \log(1 - \mathbb{P}(M_{B_j} > u_n)) \right) \\ &\geq \exp(K_n \log(1 - r_n \mathbb{P}(\xi > u_n))), \end{aligned}$$

where the last line comes from (2.8). To deal with the right-hand side, we notice that

$$\log(1 - r_n \mathbb{P}(\xi > u_n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -r_n \mathbb{P}(\xi > u_n)$$

since  $r_n \mathbb{P}(\xi > u_n)$  converges to 0. It follows from (2.2), (2.3) and (2.5) that, for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(K_n \log(1 - r_n \mathbb{P}(\xi > u_n))) = \exp(-\tau q).$$

Therefore a.s.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \geq \exp(-\tau q).$$

Now, we provide an upper-bound for  $\prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n)$ . To do it, we write

$$\begin{aligned} \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) &= \exp \left( \sum_{j \leq K_n} \log(1 - \mathbb{P}(M_{B_j} > u_n)) \right) \\ &\leq \exp \left( - \sum_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} > u_n) \right). \end{aligned}$$

This together with the Bonferroni inequalities (see e.g. p110 in [53]), implies that

$$\begin{aligned} \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \\ \leq \exp \left( -(K_n - 1)r_n \mathbb{P}(\xi > u_n) + \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) \right). \end{aligned}$$

Since  $K_n r_n \mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau q$  a.s., we have a.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \leq \exp \left( -\tau q + \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) \right).$$

Therefore, it is enough to prove that

$$\sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

To do it, we write the sum appearing in the above equation into two terms : the first one deals with the case when  $\beta - \alpha < r_n$ , and the second one deals with the opposite. For the first term, we use the fact that the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is stationary. This gives

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) \mathbf{1}_{\{\beta - \alpha < r_n\}} \\ \leq \sum_{j \leq K_n} \sum_{\beta \in B_j} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(0) > u_n, \xi(k) > u_n) \\ \leq k_n r_n \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(0) > u_n, \xi(k) > u_n) \end{aligned}$$

The last term converges to 0 as  $n$  goes to infinity according to the condition  $\mathbf{D}'(u_n)$  and the fact that  $k_n r_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$ . Now, we deal with the same series but this time by replacing  $\mathbf{1}_{\{\beta - \alpha < r_n\}}$  by  $\mathbf{1}_{\{\beta - \alpha \geq r_n\}}$ . We have

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) \mathbf{1}_{\{\beta - \alpha \geq r_n\}} \leq \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \\ + \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \left| \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) - \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \right| \mathbf{1}_{\{\beta - \alpha \geq r_n\}}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

We prove below that the two terms of the right-hand side converge to 0. For the first one, we have

$$\sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \leq k_n r_n^2 \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tau^2 \frac{r_n}{n}.$$

The last term converges to 0 according to (2.4). To deal with the second term of (2.9), we use the condition  $\mathbf{D}(u_n)$ . This gives

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \left| \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) - \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \right| \mathbf{1}_{\{\beta - \alpha \geq r_n\}} \\ \leq \sum_{j \leq K_n} \sum_{\alpha < \beta; \alpha, \beta \in B_j} \left| \mathbb{P}(\xi(\alpha) > u_n, \xi(\beta) > u_n) - \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 \right| \mathbf{1}_{\{\beta - \alpha \geq l_n\}} \\ \leq k_n r_n^2 \alpha_{n, l_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{k_n} \alpha_{n, l_n}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

which converges to 0 as  $n$  goes to infinity according to (2.4). This concludes the proof of Lemma 2.2.2.  $\square$

Theorem 2.1.1 follows directly from Lemmas 2.2.1 and 2.2.2.

## Chapitre 3

# Processus ponctuel des excédents en environnement aléatoire

This chapter contains a work in progress and will be submitted for publication.

### 3.1 Introduction

Let  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  be a sequence of centered, integer-valued i.i.d random variables and let  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Assume that, for any  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\alpha(x)$$

where  $F_\alpha$  is the distribution function of a stable law with characteristic function given by

$$\phi(\theta) = \exp(-|\theta|^\alpha(C_1 + iC_2 \operatorname{sgn} \theta)), \quad \alpha \in (0, 2].$$

When  $\alpha < 1$  (resp.  $\alpha > 1$ ), it is known that the random walk  $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$  is transient (resp. recurrent) [73, 75]. We denote by  $R_n := \#\{S_1, \dots, S_n\}$  the range of the random walk  $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$  and by  $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  the right-continuous  $\alpha$ -stable Lévy process with characteristic function given by  $\phi(t\theta)$ . In [73], it is showed that the processes  $S^{(n)}(t) := \frac{S_{[nt]}}{n^{1/\alpha}}$  converges in distribution to  $Y$  with respect to the Skorokhod topology.

Let us recall the following result due to LeGall and Rosen [75] on the asymptotic behavior of the range of  $S^{(n)}$ .

**Theorem 3.1.1 (LeGall and Rosen)** (i) *If  $\alpha < 1$ , then*

$$\frac{R_{[nt]}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} qt \quad \mathbb{P} - a.s. \tag{3.1}$$

with  $q := \mathbb{P}(S_k \neq 0, k \in \mathbb{N})$ .

(ii) If  $\alpha = 1$ , then

$$\frac{h(n)R_{[nt]}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t \quad \text{in } L^p(\mathbb{P}), \quad (3.2)$$

where  $h(n) := 1 + \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(S_k = 0)$ .

(iii) If  $1 < \alpha \leq 2$ , then for any  $L \in \mathbb{N}$  and any  $t_1 < \dots < t_L$ , we have

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \left( R_{[nt_1]}, \dots, R_{[nt_L]} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (m(Y(0, t_1)), \dots, m(Y(0, t_L))), \quad (3.3)$$

in distribution, where  $m$  is the Lebesgue measure on  $\mathbb{R}$ .

Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a family of  $\mathbb{R}$ -valued i.i.d random variables independent of the sequence  $\{X_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ . For any sequence of real numbers  $(u_n)$  and for  $\tau > 0$ , it is known that

$$n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau \iff \mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \xi(k) \leq u_n\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\tau},$$

with  $\xi = \xi(1)$ .

Now, assume that the threshold is of the form  $u_n(x) = a_n + b_n x$  ( $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $b_n > 0$  and  $x \in \mathbb{R}$ ) and write  $P_n(x, \infty) = \mathbb{P}(\xi > u_n(x))$ . In what follows, we consider a measure  $\nu$  defined on some topological space  $E$ , by

$$\nu(x, \infty) := \lim_{n \rightarrow \infty} nP_n(x, \infty). \quad (3.4)$$

As mentioned in p.13, the measure  $\nu$  is of the form :

$$\nu(x, \infty) = \begin{cases} x^{-\beta}, & \text{if } E = (0, \infty] \\ (-x)^{-\delta}, & \text{if } E = (-\infty, 0] \\ e^{-x}, & \text{if } E = (-\infty, \infty] \end{cases}$$

where  $\beta$  and  $\delta$  are as in p.13.

In [57], by using the Laplace functional, Franke and Saigo investigated the weak convergence of the point processes of exceedances, associated with  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$ , where  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is i.i.d. In this chapter we extend their results by only assuming that the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  conditions as we did in Chapter 2. Our main results is stated as follows.

**Theorem 3.1.2** For  $\alpha < 1$ , let  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be such that  $nP(\xi > u_n) \rightarrow \tau$ , as  $n \rightarrow \infty$ , for some  $\tau \geq 0$ . And let  $\tau_k = \inf\{m \in \mathbb{N}; \#\{S_1, \dots, S_m\} \geq k\}$  the stopping times. Assume that conditions  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  hold for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Then the point process

$$N^{(n)} := \sum_k \delta_{\left(\frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}}\right)}$$

converges weakly to the Poisson point process  $N$  with intensity measure  $m \times \nu$ .

In the following, let  $\mu$  be the measure defined by

$$\mu(dt, dx) = m_Y(dt) \times \nu(dx),$$

where  $m_Y(t) = m(Y(0, t))$  and let  $N_Y$  be the Poisson point process on  $\mathbb{R}^+ \times E$  with random intensity measure  $\mu$ . Since  $m_Y$  is a random measure, the random measure  $N_Y$  is a Cox point process. The following theorem deals with the recurrent case.

**Theorem 3.1.3** *For  $1 < \alpha \leq 2$ , the point processes*

$$N^{(n)} := \sum_k \delta \left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{\lfloor n^{1/\alpha} \rfloor}}{a_{\lfloor n^{1/\alpha} \rfloor}} \right)$$

on  $\mathbb{R}^+ \times E$  converges weakly to the point process  $N_Y$ .

## 3.2 Proof of Theorem 3.1.2

We only give a detailed proof of Theorem 3.1.2 since Theorem 3.1.3 can be proved in a similar way. First, we define

$$Q^{(n)}(t_1, t_2] := \text{card}\{m \in \mathbb{N}; nt_1 < m \leq nt_2, S_m \notin \{S_1, \dots, S_{m-1}\}\},$$

The process  $S^{(n)}$  visits a new site during the time  $(t_1, t_2]$  if and only if there exists an integer  $k$  such that  $\frac{\tau_k}{n} \in (t_1, t_2]$ . This implies that the total number of new sites visited by  $S^{(n)}$  during the time interval  $(t_1, t_2]$  is  $\sum_k \delta_{(t_1, t_2]} \left( \frac{\tau_k}{n} \right)$ . Therefore we have

$$Q^{(n)}(t_1, t_2] = \sum_k \delta_{(t_1, t_2]} \left( \frac{\tau_k}{n} \right) = R_{\lfloor nt_1 \rfloor} - R_{\lfloor nt_2 \rfloor}.$$

The next lemma states the independence of the sequence  $\{\xi(S_k), k \in \mathbb{N}\}$  and the sequence  $\{\tau_k, k \in \mathbb{N}\}$ .

**Lemma 3.2.1** *For all measurable sets  $B \subset \mathbb{N}$  and  $A \subset \mathbb{R}$ , we have*

$$\mathbb{P}(\tau_k \in B, \xi(S_{\tau_k}) \in A) = \mathbb{P}(\tau_k \in B) \mathbb{P}(\xi(k) \in A).$$



**Proof.** Since the random walk and the random scenery are independent, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_k \in B, \xi(S_{\tau_k}) \in A) &= \sum_{m \in B} \mathbb{P}(\tau_k = m, \xi(S_m) \in A) \\
&= \sum_{m \in B} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(\tau_k = m, S_m = z, \xi(z) \in A) \\
&= \sum_{m \in B} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(\tau_k = m, S_m = z) \mathbb{P}(\xi(z) \in A) \\
&= \mathbb{P}(\tau_k \in B) \mathbb{P}(\xi(k) \in A).
\end{aligned}$$

□

According to Kallenberg's Theorem, it suffices to show that for all open set  $I = [a, b) \times B$  in  $\mathbb{R}_+ \times E$ , we have

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( N^{(n)}(I) \right) = m \times \nu(I),$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( N^{(n)}(I) = 0 \right) = e^{-m \times \nu(I)},$

Firstly, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( N^{(n)}(I) \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_k \delta_{\left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \right)}(I) \right) \\
&= \sum_k \mathbb{P} \left( \left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \right) \in I \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Now, by Lemma 3.2.1, and because the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is stationary, we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \right) \in I \right) &= \mathbb{P} \left( \frac{\tau_k}{n} \in [a, b) \right) \mathbb{P} \left( \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \in B \right) \\
&= \mathbb{P} \left( \frac{\tau_k}{n} \in [a, b) \right) \mathbb{P} \left( \frac{\xi(1) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \in B \right) \\
&= \mathbb{P} \left( \frac{\tau_k}{n} \in [a, b) \right) P_{[qn]}(B).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Combining (3.5) and (3.6), and using the fact that  $\sum_k \delta_{\frac{\tau_k}{n}}((a, b]) = R_{[nb]} - R_{[na]}$ , we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( N^{(n)}(I) \right) &= \sum_k \mathbb{P} \left( \frac{\tau_k}{n} \in [a, b) \right) P_{[qn]}(B) \\
&= \mathbb{E} \left( \sum_k \delta_{\frac{\tau_k}{n}}[a, b) \right) P_{[qn]}(B) \\
&= \mathbb{E} \left( R_{[nb]} - R_{[na]} \right) P_{[qn]}(B).
\end{aligned}$$

Moreover, by (3.1) and according to the dominated convergence theorem, we know that  $\mathbb{E}(R_{[nb]} - R_{[na]}) \sim nq(b-a)$ . Thus we have

$$\mathbb{E}(R_{[nb]} - R_{[na]})P_{[qn]}(B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (b-a) \times \nu(B).$$

Secondly, we have

$$\mathbb{P} \left( \sum_k \delta \left( \frac{\tau_k}{n}, \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \right) (I) = 0 \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{k \geq 1: \frac{\tau_k}{n} \in [a,b]} \left\{ \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \notin B \right\} \right).$$

Since  $\#\{k; \frac{\tau_k}{n} \in [a,b]\} = R_{[nb]} - R_{[na]}$  and  $\frac{R_{[nb]} - R_{[na]}}{nq} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (b-a)$  a.s., we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcap_{k \geq 1: \frac{\tau_k}{n} \in [a,b]} \left\{ \frac{\xi(S_{\tau_k}) - b_{[qn]}}{a_{[qn]}} \notin B \right\} \right) = e^{-(b-a)\nu(B)},$$

as desired. The above equation relies on an adaptation of the proof of Theorem 2.1.1 in [18].

### 3.3 Weak mixing property for transient random walks in random scenery

Recall that the conditions  $D(u_n)$  and  $D'(u_n)$  ensure that the limiting distribution of a stationary sequence is the same as if the random variables are independent and identically distributed. In [18], we extended this result for transient random walks in random scenery. The following result is due to Franke and Saigo (see Proposition 2 in [57]).

**Theorem 3.3.1 (Franke and Saigo)** *Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a family of  $\mathbb{R}$ -valued i.i.d random variables which is independent of the sequence  $\{X_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ . Then for  $\alpha < 1$ , the sequence  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$  satisfies the  $D(u_n)$  condition with*

$$u_n := a_{[nq]}x + b_{[nq]},$$

where  $q = \mathbb{P}(S_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N})$ .

In the following theorem, we claim that the previous result remains true if we assume that the conditions  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  hold instead of assuming that  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is i.i.d.

**Theorem 3.3.2** *Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a stationary sequence of random variables such that  $n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$  for some sequence  $(u_n)$  and  $\tau > 0$ . For  $\alpha < 1$ , assume that the conditions  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  hold for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Then the sequence  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$  satisfies the  $D(u_n)$  condition.*

**Proof.** Let  $\epsilon$  be fixed. Assume that, for any  $n \in \mathbb{N}$ , there exists  $0 \leq i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q \leq 2n$  a family of integers, with  $j_1 - i_p > l_n$ , where  $l_n = o(n)$  and

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_q}(u_n)| > \epsilon. \quad (3.7)$$

We use below the following notations

1.  $R_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} = \#\{S_{i_1}, \dots, S_{i_p}, S_{j_1}, \dots, S_{j_q}\}$ ,
2.  $R_{i_1, \dots, i_p} = \#\{S_{i_1}, \dots, S_{i_p}\}$ ,
3.  $R_{j_1, \dots, j_q} = \#\{S_{j_1}, \dots, S_{j_q}\}$ ,
4.  $R_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \#\{S_{i_1}, \dots, S_{i_p}\} \cap \{S_{j_1}, \dots, S_{j_q}\} = R_{j_1, \dots, j_q} + R_{i_1, \dots, i_p} - R_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}$ .

By the choice of  $i_p$  (resp  $j_q$ ), we can assume without loss of generality that

$$\frac{i_p}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \quad (\text{resp } \frac{j_q}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v).$$

From (3.1) it follows that

$$\frac{R_{1, \dots, i_p}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} qu \quad \mathbb{P} - a.s \quad \text{and} \quad \frac{R_{i_p, i_p+1, \dots, j_q}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} q(v-u) \quad \mathbb{P} - a.s.$$

Since  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  conditions hold and since  $n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau$ , we obtain, by adapting the proof of Theorem 2.1.1, that

$$F_{i_1, \dots, i_p}(u_n) - \mathbb{E} \left( e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p}}{n} \tau} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} & |F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_q}(u_n)| \\ & \leq \left| F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u_n) - \mathbb{E} \left( e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \right) \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E} \left( e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \right) - \mathbb{E} \left( e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p} + R_{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \right) \right| \\ & \quad + \left| \mathbb{E} \left( e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p} + R_{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \right) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_q}(u_n) \right|. \end{aligned}$$

For each real number  $\epsilon > 0$ , there exists a natural number  $N$  such that, for every natural number  $n \geq N$ , the first and the third term of the right-hand side of the previous

inequality are strictly smaller than  $\epsilon$ . Moreover,

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} - e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p} + R_{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \\
&= e^{-\frac{R_{i_1, \dots, i_p} + R_{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} \left( e^{\frac{R_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} - 1 \right) \\
&\leq \left( e^{\frac{R_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}}{n} \tau} - 1 \right) \\
&\leq \left( e^{\frac{R_{1, \dots, i_p}^{i_p+1, \dots, j_q}}{n} \tau} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Moreover,

$$\frac{R_{1, \dots, i_p}^{i_p+1, \dots, j_q}}{n} = \frac{R_{1, \dots, i_p}}{n} + \frac{R_{i_p, i_p+1, \dots, j_q}}{n} - \frac{R_{1, \dots, j_q}}{n}$$

converges almost surely to  $qu + q(v-u) - qv = 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . This contradicts the inequality (3.7).  $\square$

### 3.4 Extremal index

The notion of extremal index appeared in the work of Loynes [84] but was formally introduced by Leadbetter in [77]. One can interpret the inverse of the extremal index as the mean number of exceedances in a cluster of exceedances.

**Definition 3.4.1** *Let  $\theta \in [0, 1]$ . We say that  $\theta$  is the extremal index for the sequence  $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$  if, for every  $\tau > 0$ ,*

1. *There exists a sequence  $u_n \uparrow \infty$  such that  $n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau$ ,*
2.  *$\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau\theta}$ .*

Let  $r_n = \left\lfloor \frac{n}{k_n} \right\rfloor$  where  $k_n$  is as in p.15 and let  $M_{i,j} := \max_{i \leq t \leq j} \xi_t$  for  $i \leq j$ . The following result is due to O'Brien and characterizes the extremal index (see Theorem 2.1. in [89]).

**Theorem 3.4.2 (O'Brien)** *Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a stationary sequence of random variables such that  $n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$ , for some  $\tau > 0$ . Assume that the condition  $D(u_n)$  holds for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Then*

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) - e^{-n\mathbb{P}(\xi_1 > u_n \geq M_{2, r_n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

In particular, if  $\mathbb{P}(M_{2,r_n} \leq u_n | \xi_1 > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$ , then the extremal index of the stationary sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  is equal to  $\theta$ . In the following theorem, we investigate the asymptotic behaviour of  $\mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n} \leq u_n)$ , where  $\mathcal{S}_n = \{S_1, \dots, S_n\}$ . Although the sequence  $\{\xi(S_k), k \in \mathbb{N}\}$  is not stationary, we also make explicit its extremal index. To do it, we will subdivide the set  $\mathcal{S}_n$  into  $K_n$  blocks in the same spirit as we did in Chapter 2. To simplify the notation, we assume without loss of generality that the last block has the same size as the others. In other words, we suppose that  $\frac{R_n}{K_n}$  is an integer.

**Theorem 3.4.3** *Let  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$  be as above and let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a stationary sequence of random variables such that  $n\mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$ , for some sequence  $(u_n)$ . Assume that the condition  $D(u_n)$  holds for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Then for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,*

$$\mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n} \leq u_n) - \exp\left(-\sum_{j \leq K_n} \sum_{i=1}^{r_n-1} \mathbb{P}\left(\xi(S_{((j-1)r_n+i)}) > u_n \geq M'_{((j-1)r_n+i+1, jr_n)}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

where  $M'_{(i,j)} := \begin{cases} \max_{i \leq t \leq j} \xi(S_t) & i \leq j \\ -\infty & i > j \end{cases}$  and where  $S_{(i)}$  is the  $i$ -th order statistic.

**Remark 3.4.4** 1. In the previous theorem we take the condition  $D(u_n)$  and not  $\mathbf{D}(u_n)$ .

2. If for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ ,

$$\mu'(u_n) := \frac{1}{n} \sum_{j \leq K_n} \sum_{i=1}^{r_n-1} \mathbb{P}\left(M'_{((j-1)r_n+i+1, jr_n)} \leq u_n | \xi(S_{((j-1)r_n+i)}) > u_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta,$$

then the extremal index of the sequence  $\{\xi(S_k), k \in \mathbb{N}\}$  is equal to  $\theta$ .

3. According to Theorem (2.1.1), if  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  hold for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ , then for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ , the limit of  $\mu'(u_n)$  exists and is equal to  $q$ .

**Proof.** Recall that  $\mathcal{S}_n = \{S_{(1)}, \dots, S_{(R_n)}\}$  with  $S_{(1)} < S_{(2)} < \dots < S_{(R_n)}$ . Let  $B_j = \{S_{(j-1)r_n+1}, \dots, S_{(jr_n)}\}$  so that  $\bigcup_{j \leq K_n} B_j = \mathcal{S}_n$ . Following the same lines as the proof of Theorem 2.1.1 and according to Lemma 2.2.1, we have for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,

$$\mathbb{P}(M_{\mathcal{S}_n} \leq u_n) - \prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}(M_{B_j} \leq u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Moreover,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(M_{B_j} \leq u_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{r_n-1} \mathbb{P}\left(\xi(S_{((j-1)r_n+i)}) > u_n \geq M'_{((j-1)r_n+i+1, jr_n)}\right).\end{aligned}$$

Since  $\sum_{i=1}^{r_n-1} \mathbb{P}\left(\xi(S_{((j-1)r_n+i)}) > u_n \geq M'_{((j-1)r_n+i+1, jr_n)}\right) \leq r_n \mathbb{P}(\xi > u_n)$  and since  $r_n \mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , we have

$$\begin{aligned}\left| \sum_{j \leq K_n} \log\left(1 - \mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right)\right) + \sum_{j \leq K_n} \mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right) \right| \\ \leq \sum_{j \leq K_n} \left| \log\left(1 - \mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right)\right) + \mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right) \right| \\ = \sum_{j \leq K_n} o\left(\mathbb{P}\left(M_{B_j} > u_n\right)\right) \leq k_n r_n \mathbb{P}(\xi > u_n) o(1).\end{aligned}$$

The last term converges to 0 as  $n$  goes to infinity since  $k_n r_n \sim n$  and since  $n \mathbb{P}(\xi > u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau$ . This implies that for almost all realization of  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ ,

$$\prod_{j \leq K_n} \mathbb{P}\left(M_{B_j} \leq u_n\right) - \exp\left(- \sum_{j \leq K_n} \sum_{i=1}^{r_n-1} \mathbb{P}\left(\xi(S_{((j-1)r_n+i)}) > u_n \geq M'_{((j-1)r_n+i+1, jr_n)}\right)\right)$$

converges to 0 as  $n$  goes to infinity. This concludes the proof of Theorem 3.4.3.  $\square$

In [21], the authors introduce a local mixing condition which allows to express the extremal index in terms of joint distribution.

**Condition  $D^k(u_n)$ .** Let  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  be a sequence of random variables. In conjunction with the  $D(u_n)$  condition, for any positive integer  $k$  we say that the condition  $D^k(u_n)$  holds if there exist sequences of integers  $(k_n)$  and  $(l_n)$  such that

$$k_n \rightarrow \infty, \quad k_n \alpha_{n, l_n} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad k_n l_n = o(n) \quad (3.8)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}\left(\xi_1 > u_n \geq M_{2, k_n}, M_{k_n+1, r_n} > u_n\right) = 0, \quad (3.9)$$

where  $M_{i, j} = -\infty$  for  $i > j$ ,  $M_{i, j} := \max_{i \leq t \leq j} \xi_t$  for  $i \leq j$ , and  $r_n = \lfloor \frac{n}{k_n} \rfloor$ . As mentioned

in [21], (3.9) is implied by the condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_1 > u_n \geq M_{2,k}, \xi_j > u_n) = 0. \quad (3.10)$$

Observe that the last line is the condition  $D'(u_n)$  if  $k = 1$ . For each  $k$  and  $u$ , define  $\mu_k(u) = \mathbb{P}(\xi_1 > u \geq M_{2,k})$ .

Similarly to the condition  $D^k(u_n)$ , we introduce the  $D^\infty(u_n)$  condition as follows.

**Definition 3.4.5** *We say that the  $D^\infty(u_n)$  condition holds if there exist sequences of integers  $(k_n)$  and  $(l_n)$  satisfying (3.8) such that*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_1 > u_n \geq M_{2,k}, \xi_j > u_n) = 0. \quad (3.11)$$

The following result ensures that the sequence  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$  satisfies the above condition.

**Theorem 3.4.6** *For  $\alpha < 1$ , assume that the  $\mathbf{D}(u_n)$  and  $\mathbf{D}'(u_n)$  conditions hold for the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Then the sequence  $\{\xi(S_n), n \in \mathbb{N}\}$  satisfies the  $D^\infty(u_n)$  condition.*

**Proof.** For all integer  $k$ , we have

$$\begin{aligned} & n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n) \\ &= n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j = S_1) \mathbb{P}(S_j = S_1) \\ &+ n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \neq S_1) \mathbb{P}(S_j \neq S_1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

The first term of the right-hand side of the previous equation tends to zero when  $n \rightarrow \infty$  and  $k \rightarrow \infty$ . Indeed

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j = S_1) \mathbb{P}(S_j = S_1) \\ &= \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}) \mathbb{P}(S_j = S_1). \end{aligned}$$

Since,  $(S_n)$  is a transient random walk i.e  $(S_n)$  returns finitely in  $S_1$  a.s, this gives that  $\sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = S_1) < \infty$ . Therefore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n) \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(S_j = S_1) = 0.$$

Now, we prove that the second term of (3.12) goes to 0. We have

$$\begin{aligned}
& n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P} \left( \xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \neq S_1 \right) \mathbb{P}(S_j \neq S_1) \\
&= n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P} \left( \xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\} \right) \mathbb{P}(S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\}) \\
&+ n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P} \left( \xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \notin B(S_1, r_n) \right) \mathbb{P}(S_j \notin B(S_1, r_n))
\end{aligned} \tag{3.13}$$

We prove below that the last two terms converges to zero. For the first one, we write

$$\begin{aligned}
& n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P} \left( \xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\} \right) \mathbb{P}(S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\}) \\
&\leq n \sum_{j=2}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(0) > u_n, \xi(S_j - S_1) > u_n | S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\}).
\end{aligned}$$

The last quantity converges to 0 because the sequence  $\{\xi(k), k \in \mathbb{Z}\}$  satisfies the  $\mathbf{D}'(u_n)$  and because  $S_j \in B(S_1, r_n) \setminus \{S_1\}$  implies  $|S_j - S_1| \leq r_n$ . To deal with second term, we write

$$\begin{aligned}
& n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P} \left( \xi(S_1) > u_n \geq M'_{(2,k)}, \xi(S_j) > u_n | S_j \notin B(S_1, r_n) \right) \mathbb{P}(S_j \notin B(S_1, r_n)) \\
&\leq n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n, \xi(S_j) > u_n | S_j \notin B(S_1, r_n)).
\end{aligned}$$

Since  $S_j \notin B(S_1, r_n)$ , we have  $|S_j - S_1| > r_n$ . In the same spirit as (2.10), we obtain

$$n \sum_{j=k+1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi(S_1) > u_n, \xi(S_j) > u_n | S_j \notin B(S_1, r_n)) \leq nr_n \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 + nr_n \alpha_{n, r_n}.$$

Since  $r_n = o(n)$ , we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr_n \mathbb{P}(\xi > u_n)^2 = 0.$$

Moreover, by assumption we know that  $nr_n \alpha_{n, r_n} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . This concludes the proof Theorem 3.4.6.  $\square$





**Deuxième partie**

**Théorèmes limites dans les système  
dynamiques**



## Chapitre 4

# Quelques outils de systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, on présente les notions de base concernant les systèmes dynamiques mesurés et quelques théorèmes sur des moyennes ergodiques avec ou sans poids qui nous serviront dans les chapitres 5 et 6. La fin du présent chapitre est consacrée à une présentation formelle de notre sujet de thèse.

### 4.1 Quelques éléments de théorie ergodique

**Définition 4.1.1** *On appelle système dynamique un quadruplet  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  où  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace probabilisé et  $T$  une application mesurable de  $(X, \mathcal{A})$  dans lui-même qui préserve la mesure  $\mu$ , c'est-à-dire telle que*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

*On dira aussi que la mesure  $\mu$  est invariante par  $T$ .*

**Définition 4.1.2** *On considère maintenant un système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ . On dit que  $T$  est ergodique pour  $\mu$  ou bien que  $\mu$  est ergodique pour  $T$  si pour toute partie invariante par  $T$  est soit pleine soit négligeable. Plus précisément, si pour toute partie mesurable  $A$  de  $X$  telle que  $T^{-1}(A) = A$ , alors  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ .*

Le théorème de Birkhoff dans [9] est un résultat fondamental de la théorie ergodique qui établit la convergence pour  $\mu$ -presque tout  $x$  des moyennes ergodiques. Il en existe de nombreuses preuves.

**Théorème 4.1.3 (Birkhoff)** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de probabilité, soit  $T : X \rightarrow X$  une application mesurable qui préserve la mesure  $\mu$  et qui est ergodique pour  $\mu$ . Soit  $f$  une application  $L^1$  définie sur  $X$ . Alors, les sommes de Birkhoff associées à  $f$  convergent*

presque sûrement vers l'intégrale de  $f$  selon  $\mu$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^k x) = \int_X f d\mu \quad \mu - p.p.$$

De nombreuses généralisations de ce résultat ont été établies : si la suite des entiers naturels est remplacée par une suite  $(u_k)$  déterministe ou aléatoire, si les termes de la somme sont pondérés par une suite  $(w_k)$  déterministe ou aléatoire.

Dans les années 80, le résultat de Birkhoff a été étendue à des moyennes pour des sous-suites polynomiales plus générales par Bourgain [11], qui a prouvé le célèbre théorème suivant.

**Théorème 4.1.4 (Bourgain)** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique. Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers. Alors, pour tout  $f \in L^p(\mu)$ ,  $p > 1$ , la limite*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{P(k)} x)$$

*existe  $\mu$ - presque partout.*

Si on remplace la suite  $(P(k))$  par la suite des nombres premiers Wierdl [104] a montré que le théorème précédent est encore vrai. Enfin, si on remplace la suite  $(P(k))$  par une suite de temps de retour pour un système dynamique fixé alors Bourgain [12] a montré également que le théorème 4.1.4 est vrai pour  $f \in L^1(\mu)$ .

Dans [82] Lesigne a donné des théorèmes ergodiques le long d'une suite  $q$ -multiplicative (voir la section suivante pour la définition d'une suite  $q$ -multiplicative).

**Théorème 4.1.5 (Lesigne)** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé, soit  $T : X \rightarrow X$  une application mesurable qui préserve la mesure  $\mu$ . Soit  $u$  une suite  $q$ -multiplicative à valeurs dans une partie finie du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Pour toute valeur  $\lambda$  prise par la suite  $u$ , on note par  $(n_k)$  la sous-suite définie par*

$$\{k \in \mathbb{N}, u(k) = \lambda\} = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}.$$

*Alors pour tout  $f \in L^1(\mu)$ , la limite*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{n_k} x)$$

*existe  $\mu$ - presque partout.*

Un grand nombre de résultats portent sur des convergences ponctuelles de moyennes ergodiques le long de suites aléatoires, voir par exemple les travaux de Schneider et al [43, 59, 62].

## 4.2 Théorèmes ergodiques à poids déterministes

Dans cette section, on va s'intéresser à la convergence presque partout des moyennes ergodiques avec des poids déterministes. Plus précisément, sous de bonnes conditions sur les suites  $(u_k)$  et  $(w_k)$ , on va étudier la convergence presque partout des moyennes de type

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k f(T^{u_k} x)$$

où  $(u_k)$  est une suite d'entiers et  $(w_k)$  est une suite de nombres complexes. Diverses conditions ont été établies pour obtenir la convergence presque partout de ce type de moyennes. On cite par exemple les deux conditions qui s'appellent  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . Avant d'énoncer ces conditions, commençons par rappeler quelques définitions, notations et résultats.

**Suite  $q$ -multiplicative** Soient  $q \geq 2$  un entier et  $\mathbb{U} = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = 1\}$  le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On dit qu'une suite  $(u_k) \subset \mathbb{U}$  est  $q$ -multiplicative si

$$u_{aq^n+b} = u_{aq^n} u_b$$

pour tous entiers  $n \geq 1$ ,  $a \geq 0$  et  $0 \leq b \leq q^n$ . Une suite  $q$ -multiplicative est donc complètement déterminée par ses valeurs pour tous les entiers de la forme  $aq^n$ , où  $n \geq 0$  et  $0 \leq a \leq q-1$ . En effet, si  $k = \sum a_j q^j$  avec  $0 \leq a_j \leq q-1$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , alors

$$u_k = \prod w_{a_j q^j}.$$

**Suite de Thue-Morse** La suite de Thue-Morse est définie par  $t_n = (-1)^{S_2(n)}$  où  $S_2(n)$  est la somme des chiffres de  $n$  en base 2. Autrement dit,  $(t_n)$  est une suite de Thue-Morse si

$$t_0 = 1, \quad t_{2n} = t_n \quad \text{et} \quad t_{2n+1} = -t_n.$$

On remarque que la suite de Thue-Morse est 2-multiplicative.

**Suite de Bourgain** On dit qu'une suite  $(u_n)$  est  $r$ -Bourgain,  $1 \leq r < \infty$  s'il existe  $C > 0$  tel que pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$

$$\left\| \sup_{1 \leq N} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T^{u_k}(f) \right| \right\|_r \leq C \|f\|_r$$

pour tout  $f \in L^r(\mu)$ . Bourgain a montré que la suite  $u_n = p(n)$ , où  $p(x)$  est un polynôme à coefficients entiers, est une suite  $r$ -Bourgain,  $r > 1$ .

La condition de Bourgain représente une inégalité maximale forte qui signifie que l'ensemble de fonctions de  $L^r(\mu)$  pour lesquelles la moyenne ergodique converge  $\mu$ -presque partout est un fermé dans  $L^r(\mu)$ .

**Fonction de Möbius** On appelle la fonction Möbius la fonction  $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  définie par

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ a au moins un facteur répété,} \\ 1 & \text{si } k = 1, \\ (-1)^j & \text{si } k \text{ est le produit de } j \text{ facteurs premiers distincts.} \end{cases}$$

**Théorèmes ergodiques à poids bornés** L'étude de la convergence des moyennes ergodiques à poids se situant dans le cercle d'unité fera l'objet de ce paragraphe. Le théorème suivant est dû à Wiener et Wintner [103].

**Théorème 4.2.1 (Wiener-Wintner)** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de probabilité, soit  $T : X \rightarrow X$  une application mesurable qui préserve la mesure  $\mu$ . Alors pour toute fonction  $f \in L^1(\mu)$ , il existe  $X_f$  dans la tribu  $\mathcal{A}$  tel que :  $\mu(X_f) = 1$  et pour tout  $x \in X_f$ , pour tout  $\theta$  réel, la suite

$$\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i k \theta} f(T^k x) \right)$$

est convergente.

Le cas particulier  $\theta = 0$  est le théorème de Birkhoff. L'intérêt du théorème de Wiener-Wintner est que l'ensemble  $X_f$  peut être choisi indépendamment du réel  $\theta$ . Ensuite, Lesigne [81] a démontré le même résultat que le théorème précédent si la suite de poids  $(e^{2\pi i k \theta})$  est remplacée par  $(e^{2\pi i P(k)})$ , où  $P(k)$  est un polynôme à coefficients réels. Une autre extension pour le théorème de Wiener et Wintner a été accompli par Eisner et Krause [45] pour une suite de poids de la forme  $(e^{2\pi i H(k)})$ , où  $H$  est une fonction de Hardy (voir Section 2. dans [45]).

Revenons aux définitions des conditions  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  dont on a parlé au début de cette section.

**Condition  $\mathcal{H}_1(w_k, u_k, M, N)$**  On dit que les suites  $(w_k)$  et  $(u_k)$  satisfont la condition  $\mathcal{H}_1(w_k, u_k, M, N)$  s'il existe une constante  $C > 0$  et  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$  tel que pour tout  $0 \leq M < N$

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=M}^{N-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} \right| \leq C(N-M)^\alpha.$$

Dans le cas où  $M = 0$ ,  $\mathcal{H}_1(w_k, k, 0, N)$  est appelée la condition de Gelfond (voir [49]). On définit l'exposant de Gelfond  $\Delta$  comme le plus petit  $\alpha$  satisfaisant  $\mathcal{H}_1(w_k, k, 0, N)$ . Dans

le cas où  $(w_k)$  appartient au groupe des nombres complexes de module 1, il est clair que  $\Delta$  est inférieur ou égal à 1 et il est bien connu dans le cas où  $(u_k)$  est strictement croissante qu'il est supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$  (voir [71]). Gelfond [60] a démontré que  $\Delta = \frac{\log 3}{\log 4}$  pour la suite de Thue-Morse. Plus récemment, Fan et al [51] ont étudié l'exposant de Gelfond  $\Delta = \gamma(q, c)$  pour des suites de type Thue-Morse généralisées, définies par  $t_n^{(q,c)} = e^{2\pi i c S_q(n)}$ , où  $S_q(n)$  est la somme des chiffres de  $n$  en base  $q$  et  $c$  est un paramètre dans  $[0, 1)$ . La figure suivante représente le graph de la quantité  $\gamma(2, c)$  pour diverses valeurs de  $c$ ; le paramètre  $c$  correspondant à des mesures Sturmienne périodiques dont la période ne dépasse pas 13 (voir section 1. dans [51]).

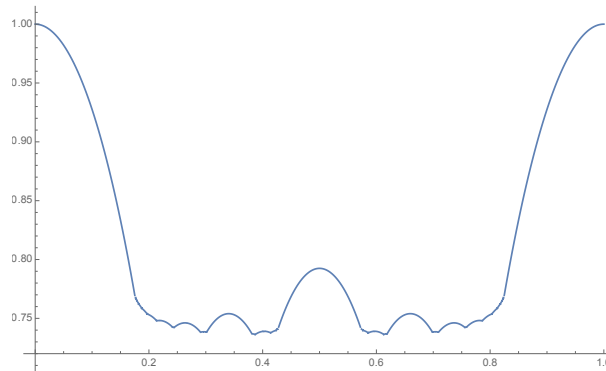


FIGURE 4.1 – Le graphique de  $\gamma(2, c)$ .

D'autres suites ayant l'exposant de Gelfond inférieure à 1 sont aussi étudiées par Fan et al dans [47].

Il est clair que la condition  $\mathcal{H}_1(w_k, u_k, M, N)$  implique la condition  $\mathcal{H}_1(w_k, u_k, 0, N)$  quelles que soient les suites  $(w_k)$  et  $(u_k)$ . Fan [49] a démontré que l'inverse reste valable lorsque  $u_k = k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et lorsque  $(w_k)$  est  $q$ -multiplicative.

**Theorem 4.2.2 (Fan)** *Soit  $(w_k)$  une suite  $q$ -multiplicative. Supposons qu'existe une constante  $C > 0$  et une constante  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$  telles que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{2i\pi\theta k} \right| \leq CN^\alpha.$$

Alors il existe une constante  $D > 0$  telle que

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=M}^{N-1} w_k e^{2i\pi\theta k} \right| \leq D(N-M)^\alpha.$$

pour tout  $0 \leq M < N$ .

**Condition  $\mathcal{H}_2(w_k, u_k)$**  On dit que les suites  $(w_k)$  et  $(u_k)$  satisfont la condition



$\mathcal{H}_2(w_k, u_k)$  s'il existe  $\beta > 0$  et une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} \right| \leq C \frac{N}{\log^\beta N}.$$

$\mathcal{H}_2(w_k, k)$  est appelée la condition de Davenport (voir [49]).

Rappelons le résultat suivant de Davenport [34] sur le comportement des sommes exponentielles correspondantes.

**Theorem 4.2.3 (Davenport)** *Soit  $\mu$  une fonction de Möbius. Alors pour tout  $\beta > 0$  il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N \mu(k) e^{2i\pi\theta k} \right| \leq C \frac{N}{\log^\beta N}.$$

**Théorèmes ergodiques avec les poids de Möbius** On présente brièvement quelques résultats lorsque les poids sont donnés par la fonction de Möbius. Une conjecture célèbre en théorie des nombres est la conjecture de Sarnak [93].

**Conjecture de Sarnak** Soit  $(X, T, d)$  une dynamique topologique d'entropie nulle. Alors pour tout  $x \in X$  et toute  $f \in C(X)$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) f(T^k(x)) = 0.$$

De plus, il est également noté dans [93] que l'approche de Bourgain permet de prouver que pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , pour tout  $f \in L^2(\mu)$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) f(T^k(x)) = 0$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

En utilisant l'estimation de Davenport mentionnée dans le Théorème 4.2.3, El Abdalaoui et al [1] apportent une extension de la conjecture de Sarnak à  $L^1(\mu)$ .

**Théorème 4.2.4 (El Abdalaoui et al)** *Soit  $T$  un automorphisme d'un espace probabilisé de Borel standard  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  et soit  $f \in L^1(\mu)$ . Alors  $\mu$ -presque partout, on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) f(T^k(x)) = 0.$$

Dans [31], selon l'estimation de Davenport, Cuny et Weber ont établi une généralisation de ce résultat. Plus précisément, ils ont donné le théorème suivant.

**Théorème 4.2.5 (Cuny-Weber)** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique. Pour tout  $H > 0$  et tout  $p > 1$  il existe une constante  $C_{H,p} > 0$  telle que pour tout  $f \in L^p(\mu)$*

$$\left\| \sup_{N \geq 1} \frac{\log^H N}{N} \left| \sum_{k=1}^N \mu(k) T^k(f) \right| \right\|_p \leq C_{H,p} \|f\|_p.$$

En particulier, pour tout  $H > 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\log^H N}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) f(T^k x) = 0,$$

$\mu$ -presque partout.

**Théorèmes ergodiques sous  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$**  Dans ce paragraphe, on présente des résultats de la convergence presque partout des moyennes ergodiques dont les poids satisfont la condition  $\mathcal{H}_1$  ou  $\mathcal{H}_2$ . Schneider et Durand [41] ont démontré le théorème suivant.

**Théorème 4.2.6 (Schneider-Durand)** *Soient  $(w_k)$  une suite de nombres complexes bornée et  $(u_k)$  une suite d'entiers strictement croissante. Supposons que les suites  $(w_k)$  et  $(u_k)$  satisfont la condition  $\mathcal{H}_1(w_k, u_k, 0, N)$ . Alors, pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et pour tout  $f \in L^2(\mu)$  on a*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(T^{u_k} x) = 0$$

$\mu$ -presque partout. De plus, pour tout  $\epsilon > 0$ , tout  $f \in L^{2+\epsilon}(\mu)$  et pour tout  $\beta > \frac{\alpha+2}{3}$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(T^{u_k} x) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

Ils ont aussi obtenu plus d'informations sur la vitesse de convergence. Plus précisément, soient  $(w_k)$  et  $(u_k)$  comme dans le théorème précédent satisfaisant en plus une condition un peu plus forte que la condition  $\mathcal{H}_2(w_k, u_k)$  (voir page 2 de [41]), alors ils obtiennent pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , tout  $f \in L^2(\mu)$  et pour tout  $\beta > \alpha$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

Fan [49], dans son étude du théorème ergodique de Birkhoff pondéré avec des poids oscillants, a prouvé le théorème suivant.

**Théorème 4.2.7 (Fan)** Soient  $(w_k)$  une suite de nombres complexes bornée et  $(u_k)$  une suite d'entiers strictement croissante. Supposons que

1.  $(u_n)$  est une suite  $r$ -Bourgain,  $1 \leq r < \infty$ ,
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{2\pi i u_k t} \right|^2 < \infty$ , (Condition DEL).

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique. Alors pour tout  $f \in L^r(\mu)$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

Ici, le mot DEL se réfère à Davenport-Erdős-LeVeque. On remarque que la Condition  $\mathcal{H}_2(w_k, u_k)$  avec  $\beta > \frac{1}{2}$ , implique la condition DEL. D'autre part, les suites  $u_n = n$  et  $u_n = p(n)$  sont  $1$ -Bourgain et  $r$ -Bourgain respectivement. Donc d'après le théorème précédent, pour tout  $f \in L^1(\mu)$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^k(f) = 0$$

$\mu$ -presque partout. Pour tout  $f \in L^r(\mu)$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{p(k)}(f) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

### 4.3 Théorèmes ergodique à poids aléatoires

Dans cette section, on présente brièvement des résultats de convergence pour des moyennes ergodiques pondérées par des variables aléatoires. Soit  $(X_k)$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ . Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique. Le problème de la convergence presque partout des moyennes  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) T^k(f)$  a reçu un intérêt significatif, partiellement commencé par le théorème des temps de retour de Bourgain (voir [12]). Assani [2] a obtenu le théorème ergodique pondéré suivant.

**Théorème 4.3.1 (Assani)** Soit  $(X_k)$  une suite de variables aléatoires symétriques i.i.d telle que  $\mathbb{E}(|X_1|^p) < \infty$ ,  $1 < p < \infty$ . Il existe un ensemble  $\Omega' \subset \Omega$  avec  $\mathbb{P}(\Omega') = 1$  tel que si  $\omega \in \Omega'$  alors pour tout système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , pour tout  $r$ ,  $1 < r \leq \infty$  et pour tout  $f \in L^r(\mu)$ , la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) f(T^k x) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

Dans le cas où  $f \in L^2(\mu)$ , Durand et Schneider [42] ont étendu ce résultat pour une suite  $u_k = O(2^{k^\beta})$ ,  $0 < \beta < 1$ . Dans [10] Boukhari et Weber ont obtenu des informations sur la vitesse de convergence. Plus précisément, ils ont prouvé que si  $(X_k)$  est une suite de variables aléatoires symétriques, i.i.d et de carré intégrable et si  $H > 2$ , alors il existe un ensemble  $\Omega' \subset \Omega$  avec  $\mathbb{P}(\Omega') = 1$  tel que pour tout  $\omega \in \Omega'$ , pour tout espace probabilisé  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , pour toute contraction  $T \in L^2(\mu)$  et pour tout  $f \in L^2(\mu)$  on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{N} \log^H N} \sum_{k=1}^N X_k(\omega) T^k(f) = 0$$

$\mu$ -presque partout.

#### 4.4 Convergence ponctuelle de la transformée d'Hilbert unilatérale pondérée.

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé. Dans cette section, on s'intéresse à la convergence presque partout de la transformée d'Hilbert unilatérale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k(f)}{k} \tag{4.1}$$

où  $T$  est une contraction de  $L^p(\mu)$  dans  $L^p(\mu)$  et  $f$  est une fonction dans  $L^p(\mu)$ . Izumi [68] a considéré le problème suivant. Soit  $\tau$  une application mesurable de  $X$  dans  $X$  qui préserve la mesure  $\mu$ . Sous quelle condition la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k(f)}{k}$  converge presque partout, pour tout  $f \in L^2(\mu)$  avec  $\mathbb{E}(f) = 0$ ? De nombreuses études ont été consacrées à la convergence presque partout de la transformée d'Hilbert unilatérale (voir par exemple [22, 26, 29, 65, 67]). Enfin, nous citons également un remarquable résultat de Cuny [29] : pour toute contraction positive  $T$  de  $L^p(\mu)$  ( $1 < p < \infty$ ) telle que la serie (4.1) converge dans  $L^p(\mu)$ , alors (4.1) converge presque partout.

Soient  $(w_k)$  une suite de nombres complexes. On appelle transformée d'Hilbert unilatérale pondérée la serie suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k T^k(f)}{k}. \tag{4.2}$$

Dans le cas où  $w_k = \lambda^k$  ( $|\lambda| = 1$ ), la convergence presque partout de (4.2) a été étudiée par Chevalier et al. [22]. Plus récemment Krause et al. [74] ont étendu ce résultat en remplaçant  $\lambda^k$  par  $\lambda^{H(k)}$  où  $H$  est une fonction admissible de Hardy (admissible Hardy field function) (voir Section 3 de [74]). En particulier, ils ont établi le théorème suivant.

**Théorème 4.4.1 (Krause et al)** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique. Supposons que*

$H$  est une fonction admissible de Hardy. Alors pour tout  $f \in L^r(\mu)$ ,  $1 \leq r < \infty$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i H(k)} T^k(f)}{k}$$

converge  $\mu$ -presque partout.

Ce type de recherche est également étroitement lié à l'étude de la convergence presque partout de séries ergodiques de la forme  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k T^k(f)$ , où  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique et  $f$  est une fonction de  $L^r(\mu)$ ,  $1 \leq r < \infty$  (voir [7, 48]).

## 4.5 Quelques théorèmes sur la loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires dans  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  où  $p \geq 1$  et soit  $\phi : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction telle que  $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n)$  satisfait à la loi forte des grands nombres par rapport à  $\phi$  si :

$$\frac{1}{\phi(N)} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (4.3)$$

$\mu$ -presque sûrement. Dans ce paragraphe on s'intéresse à des suites vérifiant cette condition : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mathbb{E} |\sum_{i=m+1}^n X_i|^p \leq C\Psi(n-m)$  où  $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction positive.

Dans [58] Gál et Koksma ont démontré les résultats suivants (voir Théorème 3, 5 et 7 de [58]).

**Théorème 4.5.1 (Gál-Koksma)** *Supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n > m$*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^n X_i \right|^p \leq C\Psi(n-m)$$

où  $\frac{\Psi(N)}{N}$  est une fonction non-décroissante. Alors pour tout  $\epsilon > 0$  on a

$$\frac{1}{(\Psi(N) \log^{p+1+\epsilon}(N))^{1/p}} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

$\mu$ -presque sûrement.

**Théorème 4.5.2 (Gál-Koksma)** *Supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n > m$*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^n X_i \right|^p \leq C\Psi(n-m)$$

où  $\frac{\Psi(N)}{N^{1+\eta}}$  ( $\eta > 0$ ) est une fonction non-décroissante. Alors pour tout  $\epsilon > 0$  on a

$$\frac{1}{\left(\Psi(N) \log^{1+\epsilon}(N)\right)^{1/p}} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$$

$\mu$ -presque sûrement.

**Théorème 4.5.3 (Gál-Koksma)** *Supposons que*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^n X_i \right|^p \leq C n^{p-\sigma} (n-m)^\sigma \eta(n-m) \quad (\sigma > 1).$$

Si la fonction  $\eta(n) > 0$  et si  $\sum \frac{\eta(n)}{n} < \infty$ , alors

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$$

$\mu$ -presque sûrement.

Soit  $A(m, n) = \sum_{k=m+1}^n a_k$  où  $(a_k)$  est une suite de réels positifs. Weber [100, 101] a donné des résultats similaires au résultat de Gál et Koksma pour la série  $A(m, n)$ . Plus précisément, il a prouvé le théorème suivant (voir Théorème 8.4.1 [101]).

**Théorème 4.5.4 (Weber)** *Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles telle que pour tout  $n > m$ ,*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=m+1}^n X_i \right|^p \leq \Psi \left( \sum_{k=m+1}^n a_k \right).$$

Supposons que la série  $\sum_{k=m+1}^n a_k$  diverge et que pour un certain réel  $\eta \geq 0$ ,  $\frac{\Psi(x)}{x^{1+\eta}}$  est non-décroissante. Alors, pour tout  $\epsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(A(N)) \log^{p+1+\epsilon}(A(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - p.s. \quad (\eta = 0)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(A(N)) \log^{1+\epsilon}(A(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - p.s. \quad (\eta > 0).$$

En mettant  $a_k \equiv 1$  dans le résultat ci-dessus, on obtient immédiatement les Théorèmes 3 et 5 dans [58].

D'autres mathématiciens ont obtenu dans cette direction des résultats avec des conditions supplémentaires sur les fonctions  $d$  et  $\phi$  en utilisant des techniques différentes (voir [6, 23, 88]).

## 4.6 Présentation des problèmes

Dans cette partie, nous traitons quelques questions de vitesse de convergence presque sûre de moyennes ergodiques pondérées et de vitesse de convergence presque sûre dans la loi des grands nombres pour des variables aléatoires se situant dans  $L^p$ ,  $p \geq 1$ . Pour cela, nous développons une nouvelle approche en adaptant des résultats de Moricz. Notre approche nous permet d'établir de nouveaux résultats sur les vitesses de convergence. Elle est simple d'utilisation et permet de retrouver facilement les résultats mentionnés dans ce chapitre et même, parfois, de les améliorer.

### Chapitre 5

Dans ce chapitre, on considère le problème suivant. Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace de probabilité et  $T$  une contraction agissant sur  $L^2(\mu)$ . Dans notre article "Convergence of weighted ergodic averages" [33], nous donnons des conditions sur les suites  $(w_k)$ ,  $(u_k)$  et  $(A_k)$  de sorte que la limite des moyennes ergodiques pondérées

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A_N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - p.p.$$

pour toute  $f$  dans  $L^2(\mu)$ . Comme conséquence de nos principaux résultats, nous étudions également des propriétés de convergence ponctuelle de la transformée de Hilbert unilatérale pondérée

$$\sum_{k \geq 1} \frac{w_k}{A_k} T^{u_k}(f).$$

De plus, nous donnons plusieurs applications illustrant nos principaux résultats.

### Chapitre 6

Dans ce chapitre, on considère le problème suivant. Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé et  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dans  $L^p(\mu)$  où  $p \geq 1$ . Pour toute fonction non décroissante  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\phi(x) \uparrow \infty$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ , on dit que  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfait à la loi forte des grands nombres (LFGN) par rapport à  $\phi$  (ou  $\phi$ -SLLN) si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - p.p.$$

Nous donnons des conditions sur le  $p$ -ième moment des sommes partielles de  $(X_k)$  et la fonction  $\phi$  de sorte que la suite  $(X_k)$  satisfait à la  $\phi$ -LFGN.

## Chapitre 5

# Théorèmes limites pour des moyennes ergodiques pondérées

### Convergence of weighted ergodic averages

Ahmad Darwiche & Dominique Schneider

#### 5.1 Introduction

Let  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a probability space and let  $T : X \rightarrow X$  be a transformation preserving  $\mu$ , i.e.  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$  for any  $A \in \mathcal{A}$ . In what follows, we write  $(T^k f)(x) = f(T^k x)$  for any function  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in X$  and  $k \geq 1$ . The study of averages over iterations of  $T$  started in 1930s with the classical Birkhoff's Ergodic Theorem [9]. Wiener and Wintner [103] generalized this result by showing that, for any  $f \in L^1(\mu)$ ,  $\mu$ -almost everywhere ( $\mu$ -a.e.), for any  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi k\theta} T^k(f) \text{ exists.}$$

Lesigne [81] went on to prove the same property when the term  $e^{2i\pi k\theta}$  is replaced by any weight of the form  $w_k = e^{2i\pi P(k)}$ , where  $P$  is a polynomial. In this way, many results on the convergence of averages of the form

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \tag{5.1}$$

were established for various weights  $(w_k)$  and for various sequences of integers  $(u_k)$ . Bellow and Losert in [4] proved that, if we have  $(\Omega, \mathcal{B}, \nu, S)$  a dynamical system where  $S$  has countable Lebesgue spectrum, then for any  $g \in L^\infty(\Omega)$  there exists a set  $\Omega_g$  of probability one such that for any  $\omega \in \Omega_g$  : for any ergodic dynamical system  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , for any  $f \in L^\infty(\mu)$ ,



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(S^k \omega) T^k(f) \text{ exists } \mu - a.e.. \quad (5.2)$$

As a famous extension of the work of Bellow and Losert, we have the Bourgain's return times theorem in [13], which states that if we take  $(\Omega, \mathcal{B}, \nu, S)$  an ergodic dynamical system the previous result stays true, see also Assani [3] and Demeter, Lacey, Tao and Thiele [38]. For the Von Mangoldt weight in relation with the prime numbers see Eisner and Lin [97]. For more weighted ergodic theorems see Berend, Lin, Rosenblatt and Tempelman [5], Lin, Olsen and Tempelman [83]. For a different type of weighted ergodic theorems with arithmetic weights we refer to Cuny and Weber [31] and Buczolicz [14].

In this paper, we consider the question for the rate of convergence. More precisely, let  $(w_k)$ ,  $(u_k)$  and  $(A_k)$  be sequences of complex numbers, integers and real numbers, respectively. We provide suitable conditions over these sequences to ensure that the weighted ergodic average

$$\frac{1}{A_N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f),$$

converges to 0  $\mu$ -a.e., where  $T$  is a contraction on  $L^2(\mu)$  and where  $f \in L^2(\mu)$ . We also investigate the almost everywhere convergence of the so-called one-sided weighted ergodic Hilbert transforms, namely

$$\sum_{k \geq 1} \frac{w_k}{A_k} T^{u_k}(f).$$

Before stating our theorems, we first give some notation and conditions. For any  $M < N$ , we let

$$V_{M,N}(\theta) = \sum_{k=M}^{N-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k}.$$

When  $M = 0$ , we take the convention  $V_{0,N}(\theta) = V_N(\theta)$ . In what follows, we denote by  $C$  a generic positive constant which may differ from line to line. We will mainly consider the two following conditions, referred to as Condition (H1) and Condition (H2).

*Condition (H1)* : we say that the sequences  $(w_k)$  and  $(u_k)$  satisfy condition (H1) if there exists  $\delta \geq 0$ ,  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ , with  $\delta + \alpha < 1$ , such that for any  $M < N$ ,

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_{M,N}(\theta)| \leq CN^\delta (N - M)^\alpha \log^\beta N. \quad (5.3)$$

The rate of convergence with weights generated by independent random variables, has been an active area of research over the past few decades. In this regard, many researchers assumed a condition of type (H1), see for example Cohen and Lin [27], Weber [100] and Choi and Reinhold [24] see also Cuny and Weber [32] for other type of weights.

*Condition (H2)* : we say that the sequences  $(w_k)$  and  $(u_k)$  satisfy condition (H2) if there exist  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  and  $\beta \in \mathbb{R}$  such that, for any  $N$ ,

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_N(\theta)| \leq CN^\alpha \log^\beta N. \quad (5.4)$$

Notice that, if (H1) holds with  $\delta = 0$ , then (H2) also holds. Moreover, when  $(w_k)$  is a  $q$ -multiplicative sequence (see Section 4 in [49] for a definition), for some integer  $q \geq 2$ , it was proved that (5.3) holds with  $\beta = \delta = 0$  if and only if (5.4) holds with  $\beta = 0$  (see Theorem 4 in [49]). In [41, 50, 51] we find constructions of sequences satisfying the condition (H2).

In [41], Durand and Schneider proved that, if (5.4) holds with  $\beta = 0$ , then for any dynamical system  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , for any  $\epsilon > 0$ ,  $f \in L^{2+\epsilon}(\mu)$ ,  $\beta' > \frac{\alpha+2}{3}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{\beta'}} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (5.5)$$

The main results in this paper consist in obtaining the rate of convergence for weighted ergodic averages under Condition (H2). The following theorem deals with the case  $\alpha < 1$ .

**Theorem 5.1.1** *Let  $(w_k)$  be a bounded sequence of complex numbers and let  $(u_n) \subset \mathbb{N}$  be a sequence of integers such that Condition (H2) holds, with  $\alpha < 1$ . Then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , and for any  $f \in L^2(\mu)$ ,  $H > \frac{3}{2} + \beta$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.$$

and

$$\left\| \sup_{N > 1} \left| \frac{1}{N^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

In the above equation,  $\|\cdot\|_{2,\mu}$  stands for the standard norm in  $L^2(\mu)$ . Notice that our result generalizes [41] into two ways : first, in our theorem, the term appearing in the ratio is  $N^{\frac{\alpha+1}{2}}$ , whereas in (5.5) the term which is considered is  $N^{\beta'}$ , with  $\beta' > \frac{\alpha+2}{3}$ ; secondly we only assume that  $f \in L^2(\mu)$  whereas (5.5) holds only for functions  $f \in L^{2+\epsilon}(\mu)$ .

**Corollary 5.1.2** *Under the same assumption as in Theorem 5.1.1, for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , for any  $f \in L^2(\mu)$  and for any  $H > \frac{3}{2} + \beta$ , the series*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{w_k}{k^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H k} T^{u_k}(f)$$

exists  $\mu$ -a.e., and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

The following theorem deals with the case  $\alpha = 1$ .

**Theorem 5.1.3** *Let  $(w_k)$  be a bounded sequence of complex numbers and let  $(u_n) \subset \mathbb{N}$  be a sequence of integers. Suppose that, for some  $\beta > 0$ ,*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_N(\theta)| \leq C \frac{N}{\log^\beta N}. \quad (5.6)$$

1. *If  $\beta > 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and for any  $f \in L^2(\mu)$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.} \quad \text{and} \quad \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

2. *If  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , for any  $f \in L^2(\mu)$  such that there exists  $\tau > 4 + \frac{2}{2\beta-1}$  with  $\int_X |f|^{\frac{2}{2\beta-1}} \log^\tau(1+|f|) d\mu < \infty$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

Similar results were established in the particular case where the weight is a Möbius sequence  $(\mu(k))$ . Recall that such a sequence is defined as  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(k) = (-1)^j$  if  $k$  is a product of  $j$  distinct primes, and  $\mu(k) = 0$  otherwise.

By using the classical Davenport estimate [35] : for any  $\beta > 0$ , there exists a constant  $C_\beta$  such that

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N \mu(k) e^{2i\pi k\theta} \right| \leq C_\beta \frac{N}{\log^\beta N},$$

Abdalaoui *et al* [1] proved that, for any  $f \in L^1(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) T^k(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

In [31] Cuny and Weber obtained an estimation of the rate of convergence. More precisely, for any  $H > 0$ , any  $p > 1$  and for any  $f \in L^p(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log^H N}{N} \sum_{k=1}^N \mu(k) T^k(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.}$$

Eisner [44] showed that the previous result of Abdalaoui *et al* [1] remains true if we replace  $T^k(f)$  by  $T^{P(k)}(f)$ , where  $P$  is a polynomial. In 2017, Fan [49] extended these results to any Bourgain's sequence (see Section 2 in [49] for a more precise definition), and for any bounded sequence  $(w_k)$  satisfying Equation (5.6), with  $\beta > \frac{1}{2}$ . Our Theorem 5.1.3 deals with a more general problem since we consider a general sequence of integers  $(u_k)$ , and not necessarily Bourgain's sequences.

By adapting the proof of Theorem 5.1.3, we can show that if we have  $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_{M,N}(\theta)| \leq C \frac{N-M}{\log^\beta N}$  for any  $M < N$ , then the second assertion of Theorem 5.1.3 remains true for any function  $f \in L^2(\mu)$ , which do not necessarily satisfy the condition  $\int_X |f|^{\frac{2}{2\beta-1}} \log^\tau(1+|f|) d\mu < \infty$ .

**Corollary 5.1.4** *Assume that (5.6) holds.*

1. *If  $\beta > 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and for any  $f \in L^2(\mu)$ , we have*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) \quad \text{exists } \mu - a.e. \quad \text{and} \quad \left\| \sup_{N \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) \right\| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

2. *If  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , for any  $H > 1 - \beta$ , for any  $f \in L^2(\mu)$  such that there exists  $\tau > 4 + \frac{2}{2\beta-1}$  with  $\int_X |f|^{\frac{2}{2\beta-1}} \log^\tau(1+|f|) d\mu < \infty$ , we have*

$$\sum_{k > 1} \frac{w_k}{k \log^H k} T^{u_k}(f)$$

*exists  $\mu$ -a.e..*

More recently, Fan [49] investigated weighted ergodic averages under Condition (H1), with  $\delta = \beta = 0$ . He obtained that for any dynamical system  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , and for any  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\alpha \log^2 N \phi(\log N)} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

In the above equation, the function  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  is assumed to be increasing and to satisfy the following properties :  $\phi(x) \leq C\phi(2x)$  for any  $x \in \mathbb{R}_+$ , with  $C > 1$ , and  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\phi(n)} < \infty$ .

The following theorem deals with ergodic averages under Condition (H1) and improves Fan's result as follows.

**Theorem 5.1.5** *Assume that Condition (H1) holds. Let  $H$  be such that  $H > \frac{1}{2} + \beta$  if  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , or such that  $H > \frac{3}{2} + \beta$  if  $\alpha = \frac{1}{2}$ , where  $\alpha, \beta$  are as in Condition (H1). Then for*

any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , and for any  $f \in L^2(\mu)$ , we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.$$

and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

As a corollary, we obtain the following result dealing with the convergence of the one-sided weighted ergodic Hilbert transform  $\sum_{k>1} \frac{w_k}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} T^{u_k}(f)$ .

**Corollary 5.1.6** *Assume that Condition (H1) holds. Let  $H$  be such that  $H > 1 + \beta$  if  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , or such that  $H > \frac{3}{2} + \beta$  if  $\alpha = \frac{1}{2}$ , where  $\alpha, \beta$  are as in Condition (H1). Then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , and for any  $f \in L^2(\mu)$ , the following series*

$$\sum_{k>1} \frac{w_k}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} T^{u_k}(f)$$

exists  $\mu$ -a.e., and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

The type of questions that we deal with has already been investigated and many methods have been provided in this way (for example we can mention the result of Weber [100]). However, our methods are simpler and provide new examples. The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we recall some known results, which will be used in the proofs of our main theorems, including spectral theorem, Móricz's lemma and van der Corput's theorem. In Section 3, we prove Theorems 5.1.5, 5.1.1 and 5.1.3 (in ascending order of difficulty). In Section 4, we discuss convergences of ergodic weighted averages with respect to the harmonic density. In the last section, we provide several examples illustrating our main results.

## 5.2 Preliminaries

In this section, we recall some known results. The first one, referred to as the spectral lemma, reduces the problem of evaluating norms to Fourier analysis questions. Let  $T$  be a contraction in a Hilbert space  $\mathcal{H}$ , that is, a linear operator such that  $\|T(f)\| \leq \|f\|$  for each  $f \in \mathcal{H}$ , and put

$$P_n(f) = \langle T^n(f), f \rangle \quad \text{for } n \geq 0 \quad \text{and} \quad P_n(f) = \overline{P_{-n}(f)} \quad \text{for } n < 0.$$

The sequence  $(P_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  is non-negative definite. By Herglotz's theorem, there exists a finite positive measure  $\mu_f$  on  $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  (called the spectral measure of  $f$ ) such that for all  $n \geq 0$ , we have

$$\langle T^n(f), f \rangle = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \exp(2i\pi nt) \mu_f(dt).$$

The spectral lemma can be stated as follows.

**Lemma 5.2.1** (*Spectral lemma*). *Let  $T$  be a contraction in a Hilbert space  $\mathcal{H}$  and let  $f \in \mathcal{H}$ . Let  $P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$  be a complex polynomial of degree  $N \geq 0$ . Then we have*

$$\|P(T)f\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |P(\exp(2i\pi t))|^2 \mu_f(dt).$$

The second result we recall is due to Móricz. A direct consequence of Theorems 1 and 3 in [87] is the following lemma.

**Lemma 5.2.2** (*Móricz's lemma*). *Let  $(N_k)$  be an increasing sequence of integers and let  $(X_n)_{n \geq 1}$  be a sequence of random variables on a probability space  $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Assume that there exist  $\lambda \geq 1$  and a non-negative function  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$ , such that for any  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $m, n \in \llbracket N_j, N_{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$*

1.  $\mathbb{E}(|\sum_{k=m+1}^n X_k|^2) \leq C g^\lambda(m, n)$ ,
2.  $g(m, j) + g(j, n) \leq g(m, n)$  for all  $j \in \llbracket m, n \rrbracket$ .

Then, if  $\lambda > 1$

$$\mathbb{E} \left( \sup_{j=m+1}^n \left| \sum_{k=m+1}^j X_k \right|^2 \right) \leq C(\lambda) g^\lambda(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \llbracket N_j, N_{j+1} \rrbracket \text{ with } m < n,$$

where  $C(\lambda)$  is a constant only depending on  $\lambda$ .

If  $\lambda = 1$ ,

$$\mathbb{E} \left( \sup_{j=m+1}^n \left| \sum_{k=m+1}^j X_k \right|^2 \right) \leq C \log^2(2(n-m)) g(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \llbracket N_j, N_{j+1} \rrbracket \text{ with } m < n,$$

where  $C$  is an absolute constant.

The following lemmas are due to van der Corput (see Theorems 3 and 4 in [98]) and will be used in our examples.

**Lemma 5.2.3** *Let  $a$  and  $b$  be two integers, with  $a < b$ , and let  $f$  be a function on  $[a, b]$ . Assume that the second derivative is such that  $-f''(x) \geq \rho$  for any  $x \in [a, b]$ , and for some  $\rho > 0$ . Then*

$$\left| \sum_{k=a}^b e^{2i\pi f(k)} \right| \leq (|f'(b) - f'(a)| + 2) \left( \frac{4}{\sqrt{\rho}} + 3 \right).$$

**Lemma 5.2.4** *Let  $n \geq 2$  be an integer and put  $K = 2^n$ . Suppose that  $a \leq b \leq a + N$  and that  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  has continuous  $n$ th derivative that satisfies the inequality  $0 < \lambda \leq |f^{(n)}(x)| \leq h\lambda$  for any  $x \in [a, b]$ . Then*

$$\left| \sum_{k=a}^b e^{2i\pi f(k)} \right| \leq ChN \left( \lambda^{\frac{1}{K-2}} + N^{\frac{-2}{K}} + (N^n \lambda)^{\frac{-2}{K}} \right).$$

### 5.3 Convergence of ergodic weighted averages with natural density

Let  $f$  be a measurable function and denote by  $S_N(f)$  the weighted sums associated with  $f$ , i.e.

$$S_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f).$$

Let  $(A_N)_{N>0}$  be a sequence converging to infinity as  $N$  goes to infinity. In this section, we prove Theorems 5.1.5, 5.1.1, 5.1.3 and their corollaries. Our proofs can be divided in two types. The first one concerns Theorem 5.1.5, Theorem 5.1.1 and the first statement of Theorem 5.1.3 and uses Móricz's lemma as a crucial role. The second one concerns the second statement of Theorem 5.1.3 and uses another method.

The first type of proof operates in the following way. Let  $(N_k)$  be an increasing sequence of integers. Let  $N$  be a sufficiently large integer and let  $j \in \mathbb{N}^*$  be such that  $N_j < N \leq N_{j+1}$  and  $N_{j+1} < CN_j$ . The main idea is to prove that for any  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right| = 0 \quad \mu - a.e. \quad (5.7)$$

and that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{A_N} - \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right| = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (5.8)$$

Proving Equations (5.7) and (5.8) is sufficient since for any  $j \in \mathbb{N}$ , we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_N(f)}{A_N} \right| &\leq \left| \frac{S_N(f)}{A_N} - \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right| + \left| \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right| \\ &\leq \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{A_N} - \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right| + \left| \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

To deal with (5.8), we introduce for any  $k \geq 1$  the following random variable

$$X_k = \frac{S_{k-1}(f)}{A_{k-1}} - \frac{S_k(f)}{A_k}.$$

Notice that for any  $n, m \in \llbracket N_j, N_{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^2 = \left\| \frac{S_m(f)}{A_m} - \frac{S_n(f)}{A_n} \right\|_{2,\mu}^2 \leq \|f\|_{2,\mu}^2 \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta),$$

where the last inequality comes from Lemma 1, with

$$L(m, n, \theta) := \left| \frac{V_m(\theta)}{A_m} - \frac{V_n(\theta)}{A_n} \right|. \quad (5.10)$$

The main idea is to bound  $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta)$  by  $Cg^\lambda(m, n)$  for  $\lambda \geq 1$  and for some function  $g$  of the form

$$g(m, n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^L \frac{1}{x}} dx,$$

with  $L > 1$ . Indeed, if we do it, then according to Móricz's lemma we have

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=N_j+1}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{A_N} - \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right|^2 \right) \leq Cg^\lambda(N_j, N_{j+1}).$$

By taking the sum over  $j$ , and by applying Beppo Levi theorem, this proves (5.8).

In our computations, we also prove that for any  $0 < l < L - 1$ ,

$$\sum_{j \geq 1} j^l \sup_{N=N_j+1}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{A_N} - \frac{S_{N_j}(f)}{A_{N_j}} \right|^2 < \infty \quad \mu - a.e..$$

**Proof of Theorem 5.1.5.** Let  $N_j = 2^j$ . Notice that, for any  $m, n \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , we have  $m < n \leq 2m$ . First, we deal with (5.7) for  $A_N = N^{\alpha+\delta} \log^H N$ . It follows from Lemma 1 and from the assumption of Theorem 5.1.5, that

$$\left\| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right\|_{2,\mu}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{V_{N_j}(\theta)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right|^2 \mu_f(d\theta) \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \frac{1}{\log^{2H-2\beta} N_j}.$$

Since  $H > \frac{1}{2} + \beta$ , this implies

$$\sum_{j \geq 1} \left\| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right\|_{2,\mu}^2 < \infty.$$

Consequently

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} = 0 \quad \mu - a.e..$$



Now, we have to prove that the limit of the oscillation as defined in (5.8) is equal to 0  $\mu$ -a.e.. For any  $\theta \in \mathbb{R}$ , we write

$$\begin{aligned} L(m, n, \theta) &= \left| \frac{1}{n^{\alpha+\delta} \log^H n} \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} - \frac{1}{m^{\alpha+\delta} \log^H m} \sum_{k=0}^{m-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} \right| \\ &\leq \left( \frac{1}{m^{\alpha+\delta} \log^H m} - \frac{1}{n^{\alpha+\delta} \log^H n} \right) \left| \sum_{k=0}^{m-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} \right| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta} \log^H n} \left| \sum_{k=m}^{n-1} w_k e^{2i\pi\theta u_k} \right|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

According to Condition (H1), we have

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(m, n, \theta) &\leq C \left( \frac{1}{m^{\alpha+\delta}} - \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} \right) \frac{m^{\alpha+\delta} \log^\beta m}{\log^H m} + \frac{n^\delta (n-m)^\alpha \log^\beta n}{n^{\alpha+\delta} \log^H n} \\ &\leq C \frac{(n-m)^\alpha}{n^\alpha \log^{H-\beta} n}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Now we consider two cases.

**Case  $\alpha > \frac{1}{2}$ .** Let  $\epsilon > 0$ . For any  $n, m \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , and for any  $\theta \in \mathbb{R}$ , we have

$$\begin{aligned} L^2(m, n, \theta) &= \left( L(m, n, \theta) L(m, n, \theta)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right)^{1+\epsilon} \\ &\leq C \left( \left( \frac{(n-m)^\alpha}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \right) \left( \frac{(n-m)^\alpha}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right)^{1+\epsilon} \\ &= C \left( \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \frac{mn(n-m)^{\alpha-1}}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \left( \frac{(n-m)^\alpha}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \right)^{1+\epsilon} \\ &= C \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{mn(n-m)^{\alpha-1}}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \left( \frac{(n-m)^\alpha}{n^\alpha \log^{H-\beta} n} \right)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} dx \right)^{1+\epsilon} \\ &\leq C \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{(n-m)^{\alpha \frac{2}{1+\epsilon} - 1}}{n^{\alpha \frac{2}{1+\epsilon} - 2} \log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} n} dx \right)^{1+\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Since  $\alpha > \frac{1}{2}$ , we have  $\alpha \frac{2}{1+\epsilon} - 1 > 0$ , by taking  $\epsilon$  small enough. In particular, we have  $(n-m)^{\alpha \frac{2}{1+\epsilon} - 1} \leq n^{\alpha \frac{2}{1+\epsilon} - 1}$ . Thus

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta) \leq C \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{n}{\log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} n} dx \right)^{1+\epsilon}. \quad (5.14)$$

For any  $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{m}$  and  $m < n \leq 2m$ , we notice that  $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ . Therefore

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta) \leq C \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} \frac{1}{x}} dx \right)^{1+\epsilon}. \quad (5.15)$$

Consequently, for any  $m, n$  belonging in  $\llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , we have

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^2 \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} \frac{1}{x}} dx \right)^{1+\epsilon}.$$

Applying Móricz's lemma with  $\lambda = 1 + \epsilon$  and

$$g_\epsilon(m, n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} \frac{1}{x}} dx,$$

we obtain

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=m+1}^n \left| \frac{S_m(f)}{m^{\alpha+\delta} \log^H m} - \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \right|^2 \right) \leq C(\epsilon) \|f\|_{2,\mu}^2 g_\epsilon^{1+\epsilon}(m, n).$$

Since the previous inequality is true for any  $m, n \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , we have

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=N_j+1}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} - \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \right|^2 \right) \leq C(\epsilon) \|f\|_{2,\mu}^2 g_\epsilon^{1+\epsilon}(N_j, N_{j+1}).$$

Notice that the function  $x \mapsto \frac{1}{x \log^{\frac{2(H-\beta)}{1+\epsilon}} \frac{1}{x}}$  is locally integrable in 0 because  $H > \frac{1}{2} + \beta$ .

Moreover there exists a constant  $C > 0$  such that  $g_\epsilon^{1+\epsilon}(N_j, N_{j+1}) \leq C g_\epsilon(N_j, N_{j+1})$ . Therefore

$$\sum_{j \geq 1} g_\epsilon^{1+\epsilon}(N_j, N_{j+1}) < \infty.$$

By Beppo Levi's theorem, we have

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{N=N_j+1}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} - \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right| = 0 \quad \mu - a.e..$$

Now, we prove the strong maximal inequality. To do it, we use (5.9), and we take the

supremum over  $j$ . This gives

$$\sup_{N>1} \left| \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right|^2 \leq 2 \sup_{j \geq 1} \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} - \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right|^2 + 2 \sup_{j \geq 1} \left| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right|^2.$$

Integrating over  $\mu$ , we get

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu}^2 \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j \geq 1} g_\epsilon^{1+\epsilon}(N_j, N_{j+1}) + C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\log^{2H-2\beta} N_j}.$$

**Case**  $\alpha = \frac{1}{2}$ . According to (5.12), for any  $m, n \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , we have

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta) \leq C \frac{n-m}{n \log^{2(H-\beta)} n}.$$

Similarly to (5.13), (5.14) and (5.15) with  $\alpha = \frac{1}{2}$  and  $\epsilon = 0$ , we obtain

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^2 \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x.$$

Applying Móricz's lemma with  $\lambda = 1$  and  $g(m, n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x$ , we obtain for any  $m, n \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$ , that

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=m+1}^n \left| \frac{S_m(f)}{m^{\alpha+\delta} \log^H m} - \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \right|^2 \right) \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \log^2(2(n-m)) g(m, n).$$

Since  $\frac{n}{2} \leq m$ , we have  $\log^2(2(n-m)) \leq \log^2 n$ . In the same spirit as (5.14) and (5.15), we can write

$$\log^2(2(n-m)) g(m, n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)-2} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x.$$

Since the function  $x \mapsto \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)-2} \frac{1}{x}}$  is locally integrable in 0 (because  $H > \frac{3}{2} + \beta$ ), it

follows from Beppo Levi's theorem that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{N=N_j+1}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N(f)}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} - \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\alpha+\delta} \log^H N_j} \right| = 0 \quad \mu - a.e..$$

Moreover

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{N>1} \left| \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu}^2 &\leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j \geq 1} \int_{\frac{1}{N_{j+1}}}^{\frac{1}{N_j}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)-2} \frac{1}{x}} dx \\ &\quad + C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\log^{2H-2\beta} N_j}. \end{aligned}$$

This concludes the proof of Theorem 5.1.5.  $\square$

**Proof of Corollary 5.1.6.** By Abel's summation formula, we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{w_k}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} T^{u_k}(f) &= \sum_{k=2}^{N-2} \left( \frac{1}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\delta} \log^H(k+1)} \right) \sum_{j=2}^k w_j T^{u_j}(f) \\ &\quad + \frac{1}{N^{\alpha+\delta} \log^H N} \sum_{k=2}^{N-1} w_k T^{u_k}(f). \end{aligned}$$

According to Theorem 5.1.5, the last term of the right-hand side converges to 0  $\mu$ -a.e.. Moreover, according to Lemma 1 and the fact that

$$\left| \frac{1}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\delta} \log^H(k+1)} \right| \leq C \frac{1}{k^{\alpha+\delta+1} \log^H k},$$

it follows from the assumption of Corollary 5.1.6, that

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k>1} \left( \frac{1}{k^{\alpha+\delta} \log^H k} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha+\delta} \log^H(k+1)} \right) \sum_{j=2}^k w_j T^{u_j}(f) \right\|_{2,\mu} \\ &\leq C \sum_{k>1} \frac{1}{k^{\alpha+\delta+1} \log^H k} \left\| \sum_{j=1}^k w_j T^{u_j}(f) \right\|_{2,\mu} \\ &\leq C \|f\|_{2,\mu} \sum_{k>1} \frac{1}{k \log^{H-\beta} k}. \end{aligned}$$

The last term is finite because  $H > 1 + \beta$ . According to Beppo Levi's theorem, this proves

that  $\sum_{k>1} \frac{w_k}{k^\alpha \log^H k} T^{u_k}(f)$  exists  $\mu$ -a.e.. Moreover,

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{N>1} \left\| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k^\alpha \log^H k} T^{u_k}(f) \right\| \right\|_{2,\mu} &\leq \left\| \sum_{k>1} \left( \frac{1}{k^\alpha \log^H k} - \frac{1}{(k+1)^\alpha \log^H(k+1)} \right) \left\| \sum_{j=2}^k w_j T^{u_j}(f) \right\| \right\|_{2,\mu} \\ &\quad + \left\| \sup_{N>1} \left\| \frac{1}{N^\alpha \log^H N} \sum_{k=2}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) \right\| \right\|_{2,\mu}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\left\| \sup_{N>1} \left\| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k^\alpha \log^H k} T^{u_k}(f) \right\| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

□

**Proof of Theorem 5.1.1.** Here  $A_N = N^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H N$ . Choosing  $N_j = 2^j$  and following the same lines as in the proof of Theorem 5.1.5, we obtain

$$\left\| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H N_j} \right\|_{2,\mu}^2 \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \frac{1}{2^{j(1-\alpha)} j^{2(H-\beta)}}.$$

Recall that  $L(m, n, \theta)$  is defined in (5.10). To bound  $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta)$ , we first notice that

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(m, n, \theta) &\leq \left( \frac{1}{m^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H m} - \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H n} \right) m^\alpha \log^\beta m + \frac{|V_{m,n}(\theta)|}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H n} \\ &\leq \left( \frac{1}{m^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H m} - \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H n} \right) m^\alpha \log^\beta m + \frac{n-m}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H n} \\ &\leq C \frac{n-m}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^{H-\beta} n} \\ &\leq C \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{n^2}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^{H-\beta} n} dx. \end{aligned}$$

Moreover

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} L(m, n, \theta) \leq C \frac{n^\alpha \log^\beta n}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H n}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} L^2(m, n, \theta) &\leq C \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{n^2}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^{H-\beta} n} \times \frac{n^\alpha}{n^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^{H-\beta} n} \mathbf{d}x \\ &= C \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{n}{\log^{2(H-\beta)} n} \mathbf{d}x. \end{aligned}$$

Consequently, for any  $m, n$  in  $\llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket$  with  $m < n$

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^2 \leq C \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x.$$

By Móricz's lemma applied to  $\lambda = 1$  and  $g(m, n) = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x$ , we obtain

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=m+1}^n \left| \frac{S_m(f)}{m^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H m} - \frac{S_N(f)}{N^{\frac{\alpha+1}{2}} \log^H N} \right|^2 \right) \leq C \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{2(H-\beta)-2} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x,$$

which converges if  $H > \frac{3}{2} + \beta$ . The end of the proof follows the same lines as the one of Theorem 5.1.5.  $\square$

**Proof of Corollary 5.1.2.** We proceed as in the proof of Corollary 5.1.6, by using Abel's summation formula and Theorem 5.1.1.  $\square$

**Proof of Theorem 5.1.3.** First assume that  $\beta > 1$ . We only give a sketch of proof. Taking  $N_j = 2^j$ , we can easily prove that

$$\left\| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j} \right\|_{2,\mu}^2 \leq C \frac{1}{\log^{2\beta} N_j},$$

and that

$$\mathbb{E} \left( \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_{N_j}(f)}{N_j} - \frac{S_N(f)}{N} \right|^2 \right) \leq C(\epsilon) \|f\|_{2,\mu}^2 \left( \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{1}{x \log^{\beta \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \frac{1}{x}} \mathbf{d}x \right)^{1+\epsilon}.$$

The end of the proof also follows the same lines as the one of Theorem 5.1.5.

Now assume that  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$  and let  $\rho > 1$ . For  $N$  large enough there exists an integer  $k$  such that  $\rho^{k^{1-\epsilon} \log k} < N < \rho^{(k+1)^{1-\epsilon} \log(k+1)}$ , where  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$  is chosen in such a way

that  $\beta = \frac{1}{2(1-\epsilon)}$ . Letting  $\rho(k) = \rho^{k^{1-\epsilon} \log k}$ , we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n T^{u_n}(f) \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor \rho(k) \rfloor - 1} w_n T^{u_n}(f) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(k+1) \rfloor - 1} w_n T^{u_n}(f) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=0}^{\lfloor \rho(k) \rfloor - 1} w_n T^{u_n}(f) \right| + \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(k+1) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f)|, \end{aligned}$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denote the integer part. We prove below that the two terms of the right-hand side converge to 0  $\mu$ -a.e. as  $k$  goes to infinity. To deal with the first one, we use the spectral lemma and our assumption. For any  $f \in L^2(\mu)$ , this gives

$$\left\| \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=0}^{\lfloor \rho(k) \rfloor - 1} w_n T^{u_n}(f) \right\|_{2,\mu}^2 \leq \frac{C \|f\|_{2,\mu}^2}{\log^{2\beta} \rho} \times \frac{1}{k^{(1-\epsilon)2\beta} \log^{2\beta} k}.$$

Since  $\beta = \frac{1}{2(1-\epsilon)}$ , the right-hand side is the term of a convergent series. This shows that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=0}^{\lfloor \rho(k) \rfloor - 1} w_n T^{u_n}(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

To deal with the second term, consider a sequence  $(a_k)$  converging to infinity (this sequence will be defined later) such that  $f = f_1 + f_2$ , where  $f_1 = f \mathbf{1}_{\{|f| \leq a_k\}}$  and  $f_2 = f \mathbf{1}_{\{|f| > a_k\}}$ . In particular, we have

$$T^{u_n}(f) = T^{u_n}(f_1) + T^{u_n}(f_2).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f_1)| &\leq \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f)| \mathbf{1}_{\{|T^{u_n}(f)| \leq a_k\}} \\ &\leq a_k \frac{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - \lfloor \rho(k) \rfloor}{\rho(k)} \\ &\leq C a_k \frac{\log k}{k^\epsilon}, \end{aligned}$$

where the last inequality comes from the mean value theorem. Now, choose  $a_k = \frac{k^\epsilon}{\log^\delta k}$  ( $\delta > 1$ ). The above computations show that  $\frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k+1) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f_1)|$  converges to 0 as

$k$  goes to infinity,  $\mu$ -a.e.. Moreover

$$\frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f_2)| \leq \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f)| \mathbf{1}_{\{|f| > a_k\}}.$$

By the Cauchy–Schwarz inequality and because the square function is convex, we obtain

$$\sum_{k \geq 1} \int_X \frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f_2)| \, d\mu \leq C \sqrt{\sum_{k \geq 1} \int_X \frac{|f|^2}{k \log^\delta k} \, d\mu} \times \sqrt{\sum_{k \geq 1} \frac{k \log^{2+\delta} k}{k^{2\epsilon}} \mu(|f| > a_k)}.$$

Since  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \log^\delta k}$  is a convergent series, we have

$$\sqrt{\sum_{k \geq 1} \int_X C \frac{|f|^2}{k \log^{1+\epsilon} k} \, d\mu} \leq C \|f\|_{2, \mu}.$$

To conclude the proof, it is enough to show that  $\sum_{k \geq 1} \frac{k \log^{2+\delta} k}{k^{2\epsilon}} \mu(|f| > a_k) < \infty$ . To do it, we write for some  $p > 0$ ,

$$\mu\left(|f| > \frac{k^\epsilon}{\log^\delta k}\right) \leq \mu\left(|f|^p \log^\tau(|f| + 1) > C_{\epsilon, \tau} \frac{k^{p\epsilon}}{\log^{p\delta} k} \log^\tau k\right),$$

where the last inequality comes from the fact that

$$|f| > \frac{k^\epsilon}{\log^\delta k} \iff \log^\tau(|f| + 1) > \left(\log k^\epsilon - \log \log^\delta k + \log\left(1 + \frac{\log^\delta k}{k^\epsilon}\right)\right)^\tau.$$

This gives that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{k \log^{2+\delta} k}{k^{2\epsilon}} \mu(|f| > a_k) \leq C \int_X |f|^p \log^\tau(1 + |f|) \, d\mu \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{(2\epsilon+p\epsilon-1)} \log^{(\tau-2-\delta-p\delta)} k}.$$

The last series converges when  $p\epsilon + 2\epsilon - 1 = 1$  and  $\tau - 2 - \delta - p\delta > 1$ , i.e. when  $p = \frac{2}{2\beta-1}$  and  $\tau > 4 + \frac{2}{2\beta-1}$ . Taking  $f \in L^2(\mu)$  so that  $\int_X |f|^p \log^\tau(1 + |f|) \, d\mu < \infty$ , we deduce that  $\frac{1}{\rho(k)} \sum_{n=\lfloor \rho(k) \rfloor}^{\lfloor \rho(1+k) \rfloor - 1} |T^{u_n}(f_2)|$  converges to 0 as  $k$  goes to infinity,  $\mu$ -a.e.. This concludes the proof of Theorem 5.1.3.  $\square$

**Proof of Corollary 5.1.4.** We proceed as in the proof of Corollary 5.1.6, by using Abel's summation formula and Theorem 5.1.3.  $\square$



## 5.4 Convergence of ergodic weighted averages with respect to the harmonic density

In this section, we will investigate the almost everywhere convergence of some averages with respect to the harmonic density. More precisely, let  $(w_k)$  be a sequence of complex numbers and let  $(u_k)$  be a sequence of integers. For any integers  $M, N$  such that  $M \leq N$ , denote by

$$V_{M,N}^*(\theta) = \sum_{k=M}^N \frac{w_k}{k} e^{2i\pi\theta u_k}.$$

If  $M = 1$ , we will simply write  $V_{M,N}^*(\theta) = V_N^*(\theta)$ . We also denote by

$$S_N^*(f) = \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f),$$

where  $f$  is a measurable function. The following result is related to Theorem 5.1.5, and is stated in the context of the harmonic density.

**Theorem 5.4.1** *Let  $(w_k)$  be a sequence of complex numbers and let  $(u_k)$  be a sequence of integers. Suppose that there exists  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$  such that for any  $M \leq N$*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_{M,N}^*(\theta)| \leq C (\log N - \log M)^\alpha. \quad (5.16)$$

*Then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for  $H > \frac{1}{2}$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^\alpha N \log^H \log N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N > 2} \left| \frac{1}{\log^\alpha N \log^H \log N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

**Proof of Theorem 5.4.1.** We proceed as in the proof of Theorem 5.1.5. First, we choose  $N_j = 2^{2^j}$ , then by using the spectral lemma and assumption (5.16), we obtain for  $H > \frac{1}{2}$

$$\sum_{j>1} \left\| \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} \right\|_{2,\mu}^2 \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j>1} \frac{1}{\log^{2H} \log N_j} \leq C \|f\|_{2,\mu}^2 \sum_{j>1} \frac{1}{j^{2H}} < \infty.$$

This implies that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (5.17)$$

Moreover, for any  $m, n$  in  $\llbracket N_j, N_{j+1} \rrbracket$ , with  $m < n$ , we have

$$\left| \frac{V_n^*(\theta)}{\log^\alpha n \log^H \log n} - \frac{V_m^*(\theta)}{\log^\alpha m \log^H \log m} \right| \leq C \frac{(\log n - \log m)^\alpha}{\log^\alpha n \log^H \log n}.$$

Now, let

$$X_k = \frac{S_k^*(f)}{\log^\alpha k \log^H \log k} - \frac{S_{k+1}^*(f)}{\log^\alpha(k+1) \log^H \log(k+1)}.$$

Following the same lines as in the proof of Theorem 5.1.5, we obtain for all  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=N_j}^{N_{j+1}-1} X_k \right|^2 \leq C \left( \int_{\frac{1}{N_{j+1}}}^{\frac{1}{N_j}} \frac{1}{x \log \frac{1}{x} \log^{H \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} + H} \log \frac{1}{x}} dx \right)^{1+\epsilon}.$$

This, together with Móricz's lemma with  $\lambda = 1 + \epsilon$ , implies

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N^*(f)}{\log^\alpha N \log^H \log N} - \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} \right|^2 \right) \\ \leq C \left( \int_{\frac{1}{N_{j+1}}}^{\frac{1}{N_j}} \frac{1}{x \log \frac{1}{x} \log^{H \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} + H} \log \frac{1}{x}} dx \right)^{1+\epsilon}. \end{aligned}$$

Using the Beppo Levi's theorem with  $H > \frac{1}{2}$ , we deduce that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N^*(f)}{\log^\alpha N \log^H \log N} - \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} \right| = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (5.18)$$

Theorem 4 follows from (5.17), (5.18) and from the following inequality

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_N^*(f)}{\log^\alpha N \log^H \log N} \right| &\leq \left| \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} \right| \\ &+ \sup_{N=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \left| \frac{S_N^*(f)}{\log^\alpha N \log^H \log N} - \frac{S_{N_j}^*(f)}{\log^\alpha N_j \log^H \log N_j} \right|. \end{aligned}$$

□

By adapting the proof of Theorem 4 and assuming that

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_{M,N}^*(\theta)| \leq C \left( \frac{\underbrace{\log \log \dots \log N}_{p\text{-iterates}} - \underbrace{\log \log \dots \log M}_{p\text{-iterates}}}{\log^\alpha N \log^H \log N} \right)^\alpha,$$

we obtain the same result as Theorem 4 with normalization  $\underbrace{\log^\alpha(\log \dots \log N)}_{p\text{-iterates}} \times \underbrace{\log^H(\log \dots \log N)}_{(p+1)\text{-iterates}}$

instead of  $\log^\alpha N \log^H \log N$ .

**Theorem 5.4.2** *Let  $(w_k)$  be a bounded sequence of complex numbers and let  $(u_n) \subset \mathbb{N}$  be a sequence of integers. Suppose that there exists  $0 \leq \alpha < 1$  such that*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_N^*(\theta)| \leq C \log^\alpha N.$$

*Then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for any  $H > \frac{1+\alpha}{2}$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^H N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N > 1} \left| \frac{1}{\log^H N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

The proof of the above theorem is omitted and relies on a simple adaptation of the proof of Theorem 5.1.5.

**Theorem 5.4.3** *Let  $(w_k)$  be a bounded sequence of complex numbers and let  $(u_n) \subset \mathbb{N}$  be a sequence of integers. Suppose that, for some  $\beta > 0$ ,*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |V_N^*(\theta)| \leq C \frac{\log N}{\log^\beta \log N}.$$

1. *If  $\beta > 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and any  $f \in L^2(\mu)$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e. \quad \text{and} \quad \left\| \sup_{N > 1} \left| \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

2. *If  $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ , then for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  such that there exists  $\tau > 4 + \frac{2}{2\beta-1}$  with  $\int_X |f|^{\frac{2}{2\beta-1}} \log^\tau(1+|f|) d\mu < \infty$ , we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k} T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

**Proof.** We follow the same lines as in the proof of Theorem 5.1.3, with

$$\rho^{\rho^{k^{1-\epsilon} \log k}} < N \leq \rho^{\rho^{(k+1)^{1-\epsilon} \log(k+1)}}.$$

□

**Remark 5.4.4** 1. Under the assumptions of Theorem 5.4.1, for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for  $H > 1$ , we have

$$\sum_{k>2} \frac{w_k}{k \log^\alpha k \log^H \log k} T^{u_k}(f) \quad \text{exists } \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N>2} \left| \sum_{k=3}^N \frac{w_k}{k \log^\alpha k \log^H \log k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

2. Under the assumptions of Theorem 5.4.2, for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for  $H > \frac{1+\alpha}{2}$ , we have

$$\sum_{k>1} \frac{w_k}{k \log^H k} T^{u_k}(f) \quad \text{exists } \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k \log^H k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

3. Under the assumptions of Theorem 5.4.3 when  $\beta > 1$ , for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and any  $f \in L^2(\mu)$ , we have

$$\sum_{k>1} \frac{w_k}{k \log k} T^{u_k}(f) \quad \text{exists } \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \sum_{k=2}^N \frac{w_k}{k \log k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

## 5.5 Examples

In this section, we present several examples illustrating our main results.

**Example 5.5.1** Let  $f \in L^2(\mu)$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  and  $\delta > d$ . In what follows, we let  $\|\delta\| = \min(\{\delta\}, 1 - \{\delta\})$ , where  $\{\delta\}$  denotes the fractional part of  $\delta$ . As a first example, under suitable conditions over  $K$  and  $H$  which will be given later, we obtain that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{e^{2i\pi k^\delta}}{k^{1-\|\delta\| \frac{1}{3(K-2)}} \log^H k} T^{k^d}(f) \tag{5.19}$$

exists  $\mu - a.e.$ . Before proving this, we notice that Krause, Lacey and Wierdl [74] in their study of the convergence of oscillatory ergodic Hilbert transforms showed that, for any

$f \in L^r(\mu)$ ,  $1 \leq r < \infty$ , the limit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{e^{2i\pi h(k)}}{k} T^k(f)$$

exists  $\mu$ -a.e., where  $h(k)$  is a Hardy field function. Recall that (see Section 3 in [74]) a function of the form  $k^\delta = e^{\delta \log k}$  is a Hardy field function. In that case, our result is more precise than [74].

Now, we prove that (5.19) exists  $\mu$ -a.e.. According to Corollary 5.1.2 it is sufficient to prove that

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| \leq CN^{1 - \|\delta\| \frac{2}{3(K-2)}}, \quad (5.20)$$

where  $K = 2^n$  with  $n - 1 < \delta < n$ .

In what follows, we consider the function  $g(x) = \theta x^d + x^\delta$ . For any  $x \in [N^{1-\epsilon}, N]$ , where  $\epsilon$  is a positive constant which will be defined later, we have

$$g^{(n)}(x) = \delta(\delta - 1) \dots (\delta - (n - 1)) x^{\delta - n}.$$

Consequently,

$$\frac{C(n, \delta)}{N^{n-\delta}} \leq f^{(n)}(x) \leq \frac{C(n, \delta)}{N^{(1-\epsilon)(n-\delta)}},$$

where  $C(n, \delta) = \delta(\delta - 1) \dots (\delta - (n - 1))$ . According to Lemma 4 with  $\lambda = \frac{C(n, \delta)}{N^{n-\delta}}$  and  $h = N^{\epsilon(n-\delta)}$ , we get

$$\left| \sum_{k=\lfloor N^{1-\epsilon} \rfloor}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| \leq CN \left( \frac{1}{N^{\frac{n-\delta}{K-2} - \epsilon(n-\delta)}} + \frac{1}{N^{\frac{2}{K} - \epsilon(n-\delta)}} + \frac{1}{N^{\frac{2\delta}{K} - \epsilon(n-\delta)}} \right).$$

Now, choosing  $\epsilon = \frac{1}{3(K-2)}$  and using the fact that  $\delta > 1$ , we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=\lfloor N^{1-\epsilon} \rfloor}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| &\leq CN \left( \frac{1}{N^{\|\delta\| \left(\frac{1}{K-2} - \epsilon\right)}} + \frac{1}{N^{\frac{2}{K} - \epsilon(n-\delta)}} \right) \\ &\leq CN \left( \frac{1}{N^{\|\delta\| \frac{2}{3(K-2)}}} + \frac{1}{N^{\frac{6-n+\delta}{3(K-2)}}} \right). \end{aligned}$$

Since  $\|\delta\| \leq \frac{1}{2}$  and  $\delta > n - 1$ , we obtain

$$\left| \sum_{k=\lfloor N^{1-\epsilon} \rfloor}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| \leq CN \left( \frac{1}{N^{\|\delta\| \frac{2}{3(K-2)}}} \right).$$

It follows that

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{\lfloor N^{1-\epsilon} \rfloor - 1} e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| + \left| \sum_{k=\lfloor N^{1-\epsilon} \rfloor}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k^d)} \right| \\ &\leq C \left( N^{1-\frac{1}{3(K-2)}} + N^{1-\|\delta\|\frac{2}{3(K-2)}} \right) \\ &\leq CN^{1-\|\delta\|\frac{2}{3(K-2)}}. \end{aligned}$$

This proves (5.20). Notice that (5.20) and Theorem 5.1.1 also imply that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1-\|\delta\|\frac{1}{3(K-2)}} \log^H N} \sum_{k=1}^N e^{2i\pi k^\delta} T^{k^d}(f) = 0 \quad \mu - a.e.,$$

for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for  $H > \frac{3}{2}$ .

**Example 5.5.2** In this example, we take  $u_k = k$  and  $w_k = e^{2i\pi k^\delta}$  for some  $1 > \delta > 0$ . First we prove the following inequality

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k)} \right| \leq CN^{1-\frac{\delta}{2}}. \quad (5.21)$$

To do it, the main idea is to apply the van der Corput theorem. Let  $a = \sqrt{N}$ ,  $b = N$  and  $f(x) = \theta x + x^\delta$ . In particular, we have

$$f'(x) = \theta + \delta x^{\delta-1} \quad \text{and} \quad f''(x) = \delta(\delta-1)x^{\delta-2}.$$

Moreover for any  $x \in [\sqrt{N}, N]$ , we have

$$-f''(x) \geq CN^{\delta-2} := \rho.$$

According to Lemma 3, this gives

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k)} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} e^{2i\pi(k^\delta + \theta k)} \right| + \left| \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor}^N e^{2i\pi(k^\delta + \theta k)} \right| \\ &\leq \sqrt{N} + \left( |\delta N^{\delta-1} - \delta N^{\frac{\delta-1}{2}}| + 2 \right) \left( \frac{C}{N^{\frac{\delta-2}{2}}} + 3 \right) \\ &\leq CN^{1-\frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

This proves Equation (5.21). Now, according to Theorem 5.1.1, for any contraction  $T$  on

$L^2(\mu)$ , any  $f \in L^2(\mu)$  and for  $H > \frac{1}{2}$ , we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1-\frac{\delta}{4}} \log^H N} \sum_{k=1}^N e^{2i\pi k^\delta} T^k(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

Moreover, by Corollary 5.1.2, the series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{e^{2i\pi k^\delta}}{k^{1-\frac{\delta}{4}+\epsilon}} T^k(f)$$

exists  $\mu$ -a.e., for some  $\epsilon > 0$ . Notice that our results also improve [74].

As a remark, if we take  $w_k = e^{2i\pi \log^\delta k}$  for some  $\delta > 2$ . Similarly to the proof of (5.21), a simple calculation yields

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N e^{2i\pi(\log^\delta k + \theta k)} \right| \leq C \frac{N}{\log^{\frac{\delta-1}{2}} N}.$$

Then we can apply Theorem 5.1.3 and Corollary 5.1.4.

**Example 5.5.3** To deal with this example, we first state the following inequality due to Hlawka (see Theorem 1 in [66] with  $a(t) = \frac{1}{t}$ ).

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N \frac{e^{2i\pi(h \log k + \theta k)}}{k} \right| \leq 30 \left( |h| + \frac{1}{|h|} \right),$$

with  $h \neq 0$ .

Now, according to Theorem 5.4.2 with  $\alpha = 0$ , for  $H > \frac{1}{2}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^H N} \sum_{k=1}^N \frac{e^{2i\pi h \log k}}{k} T^k(f) = 0 \quad \mu - a.e.$$

and

$$\left\| \sup_{N > 1} \left| \frac{1}{\log^H N} \sum_{k=1}^N \frac{e^{2i\pi h \log k}}{k} T^k(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu}.$$

Moreover, according to Remark 5.4.4 (assertion 2. with  $\alpha = 0$ ), for  $H > \frac{1}{2}$ , we also have

$$\sum_{k > 1} \frac{e^{2i\pi h \log k}}{k \log^H k} T^k(f) \quad \text{exists } \mu - a.e. \quad \text{and} \quad \left\| \sup_{N > 1} \left| \sum_{k=2}^N \frac{e^{2i\pi h \log k}}{k \log^H k} T^k(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{2,\mu},$$

respectively.

**Example 5.5.4** Here we deal with an example which was considered in [25, 100]. Let  $(X_k)$

be a sequence of i.i.d random variables defined on some probability space  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ , and let  $W_k(\omega) = e^{2i\pi X_k(\omega)}$ ,  $\omega \in \Omega$ . Without loss of generality, assume that  $\mathbb{E}(W_k) = 0$ . Let  $(u_k)$  be an increasing sequence of integers such that  $u_k = O\left(e^{\frac{k}{\log^{2\beta} k}}\right)$  for some  $\beta > 0$ .

According to Theorem 1.1 in [25] in the one-dimensional setting, there exists some random variable  $C(\omega)$  which is almost surely (a.s.) finite and independent of  $M, N$  and  $\theta$  such that, for almost every  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=M+1}^N W_k(\omega) e^{2i\pi\theta u_k} \right| &\leq C(\omega) \sqrt{\sum_{k=M+1}^N |W_k|^2} \times \sqrt{\log u_N} \\ &\leq C(\omega) \sqrt{N-M} \times \frac{\sqrt{N}}{\log^\beta N}. \end{aligned}$$

Theorem 5.1.3 applied to  $\beta > 1$  ensures that there exists a measurable set  $\Omega^* \subset \Omega$  of full measure, such that for any  $\omega \in \Omega^*$ , any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and any  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k(\omega) T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e. and} \quad \left\| \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k(\omega) T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C(\omega) \|f\|_{2,\mu}. \quad (5.22)$$

Moreover, by Corollary 5.1.4, we also obtain that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{W_k(\omega)}{k} T^{u_k}(f) \quad \text{exists} \quad \mu\text{-a.e.} \quad (5.23)$$

A weak version of (5.22) could be derived from a theorem due to Weber. Indeed, according to Theorem 4.2 in [100] with  $\phi(x) = \frac{x}{\log^{2\beta} x}$ , for any  $\tau > \frac{3}{2}$ , there exists a measurable set  $\Omega^* \subset \Omega$  of full measure, such that for any  $\omega \in \Omega^*$ , any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and any  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \log^{\tau-\beta} N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k(\omega) T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu\text{-a.e.},$$

and

$$\left\| \sup_{N > 1} \left| \frac{1}{N \log^{\tau-\beta} N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k(\omega) T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C(\omega) \|f\|_{2,\mu}.$$

However, (5.22) is more precise.

Remark that, Cohen and Cuny could also obtain (5.23) with a more restrictive condition. Indeed, (5.23) can be deduced from Theorem 1.2 in [25] provided that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\|W_k\|_2^2}{k^2} (\log^2 k) (\log u_k) < \infty.$$



However this condition needs that  $\sum_{k>1} \frac{1}{k \log^{2\beta-2} k} < \infty$  which holds when  $\beta > \frac{3}{2}$ . Our result is more general since we only assume that  $\beta > 1$ .

**Example 5.5.5** Let  $W_k(\omega) = e^{2i\pi X_k(\omega)}$ , where  $(X_k)$  is an i.i.d sequence of random variables on  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  and let  $u_k = O\left(e^{\frac{\log^2 k}{\log^{2\beta} \log k}}\right)$ . According to Theorem 1.1 in [25] in the one-dimensional setting, there exists some random variable  $C(\omega)$  which is  $\mathbb{P}$ -a.s. finite and independent of  $M, N$  and  $\theta$  such that, for almost every  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^N \frac{W_k(\omega)}{k} e^{2i\pi\theta u_k} \right| &\leq C(\omega) \sqrt{\sum_{k=1}^N \left| \frac{W_k}{k} \right|^2} \times \sqrt{\log u_N} \\ &\leq C(\omega) \frac{\log N}{\log^\beta \log N}. \end{aligned}$$

Applying Theorem 5.4.3 with  $\beta > 1$ , there exists a measurable set  $\Omega^* \subset \Omega$  of full measure with the following property : for any  $\omega \in \Omega^*$ , there exists  $C(\omega) < \infty$  such that for any contraction  $T$  on  $L^2(\mu)$  and any  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{W_k(\omega)}{k} T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.,$$

and

$$\left\| \sup_{N>1} \left| \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \frac{W_k(\omega)}{k} T^{u_k}(f) \right| \right\|_{2,\mu} \leq C(\omega) \|f\|_{2,\mu}.$$

The study of weighted means of the form

$$\frac{1}{A_N} \sum_{k=1}^N Z_k(\omega) T^k(f),$$

where  $(Z_k)$  is a sequence of random variables and where  $(A_k)$  is a sequence of integers, is classical. For example in [10], it is proved that this mean converges to 0  $\mu$ -a.e. when  $A_N = \sqrt{N} \log^\beta N$  ( $\beta > 2$ ) and when  $(Z_k)$  is an i.i.d sequence of symmetric and square integrable random variables. In [2], the same type of result was established when  $A_N = N$  and when  $(Z_k)$  is a sequence of i.i.d symmetric random variables such that  $\mathbb{E}(|Z_k|^p) < \infty$  for some  $1 < p < \infty$ .

**Example 5.5.6** Let  $(X_k)$  be a sequence of independent Bernoulli random variables on some probability space  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  such that  $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{\log k} = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0)$ . In this example, we consider the random set of integers  $\mathcal{N}(\omega) := \{k \geq 2 : X_k(\omega) = 1\}$ . This set is referred to as the Cramer's random model of primes. In particular, we have  $\mathcal{N}(\omega) = \{u_k(\omega), k \geq 1\}$ , where

$$u_1(\omega) = \inf\{i \geq 2 : X_i(\omega) = 1\} \quad \text{and} \quad u_{k+1}(\omega) = \inf\{i > u_k(\omega) : X_i(\omega) = 1\}.$$

In what follows we denote by

$$\Pi(N) = \#\mathcal{N} \cap [2, N] = \sum_{k=2}^N X_k.$$

The above random variable satisfies the following law of large numbers :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Pi(N) \log N}{N} = 1$  (see Proposition 6.2. in [52]). We deal with below the almost everywhere convergence of the following average

$$\frac{1}{N^\beta} \sum_{k=1}^N T^{u_k}(f) = \frac{1}{\Pi(u_N)^\beta} \sum_{k=2}^{u_N} X_k T^k(f) \quad \left( \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \right).$$

To do it, it is sufficient to deal with the almost everywhere convergence of

$$\frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N X_k T^k(f).$$

First we write

$$\frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N X_k T^k(f) = \frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N \left( X_k - \frac{1}{\log k} \right) T^k(f) + \frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N \frac{T^k(f)}{\log k}.$$

According to Theorem 1.1 in [25] in the one-dimensional setting, there exists some random variable  $C(\omega)$  which is  $\mathbb{P}$ -a.s. finite and independent of  $M, N$  and  $\theta$  such that, almost surely

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=M}^N \left( X_k - \frac{1}{\log k} \right) e^{2i\pi\theta k} \right| &\leq C(\omega) \sqrt{\sum_{k=M}^N \left| \left( X_k - \frac{1}{\log k} \right) \right|^2} \times \sqrt{\log N} \\ &\leq C(\omega) \sqrt{N - M} \times \sqrt{\log N}. \end{aligned}$$

Applying Theorem 5.1.5, for  $H > 2$ , we get  $\mathbb{P}$ -a.s.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N} \log^H N} \sum_{k=2}^N \left( X_k - \frac{1}{\log k} \right) T^k(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

Since  $\sup_{N > 1} \frac{\sqrt{N} \log^H N}{\Pi(N)^\beta}$  is bounded, we have  $\mathbb{P}$ -a.s.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N \left( X_k - \frac{1}{\log k} \right) T^k(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

Now, by Abel's summation formula,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Pi(N)^\beta} \sum_{k=2}^N \frac{T^k(f)}{\log k} \right| &\leq \frac{1}{\Pi(N)^\beta} \left( \sum_{k=2}^{N-1} \frac{\log(k+1) - \log k}{\log(k+1) \log k} \left| \sum_{j=2}^k T^j(f) \right| + \frac{1}{\log N} \left| \sum_{k=2}^N T^k(f) \right| \right) \\ &\leq \frac{\log^\beta N}{N^\beta} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k^{1-\beta} \log^2 k} \left| \frac{1}{k^\beta} \sum_{j=2}^k T^j(f) \right| + \frac{1}{\log^{1-\beta} N} \left| \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=2}^N T^k(f) \right|. \end{aligned} \quad (5.24)$$

In what follows, we only deal with the case where the function  $f$  is such that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=1}^N T^k(f) = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (5.25)$$

Examples of function  $f$  satisfying the above equation are given in [30, 39, 100].

According to the above assumption, the second term of (5.24) converges to 0  $\mu$ -a.e.. To deal with the first term of (5.24), recall that

$$\sum_{k \geq 1} b_k = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N b_k a_k}{\sum_{k=1}^N b_k} = 0$$

for any sequences  $(a_k)$ ,  $(b_k)$ . Applying this to  $a_k = \frac{1}{k^\beta} \sum_{j=2}^k T^j(f)$  and  $b_k = \frac{1}{k^{1-\beta} \log^2 k}$ , and using the fact that  $\frac{\log^\beta N}{N^\beta} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^{1-\beta} \log^2 k}$  is bounded, it follows that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log^\beta N}{N^\beta} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k^{1-\beta} \log^2 k} \left| \frac{1}{k^\beta} \sum_{j=2}^k T^j(f) \right| = 0 \quad \mu - a.e..$$

Consequently,  $\mathbb{P}$ -a.s.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=1}^N T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e..$$

As an open question, is it true that (5.25) implies that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^\beta} \sum_{k=1}^N T^{p_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e. \quad \left( \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \right),$$

where  $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k \geq 1}$  denotes the set of prime numbers?

**Acknowledgments** We would like to thank Nicolas Chenavier for his careful reading and for his suggestions.

## Chapitre 6

# Loi forte des grands nombres par rapport à $\phi$

This chapter contains a work in progress and will be submitted for publication.

### 6.1 Introduction

Let  $p \geq 1$  be a constant and let  $\{X_k, k \geq 1\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a sequence of random variables. For any nondecreasing function  $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  such that  $\phi(x) \uparrow \infty$  as  $x \rightarrow \infty$ , we say that  $\{X_k, k \geq 1\}$  satisfies the strong law of large numbers with respect to  $\phi$  (or  $\phi$ -SLLN) if

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

Many authors have provided conditions to ensure that the above limit holds, e.g. Kolmogorov et al. Weak conditions are due to Gál-Koksma [58] and are of the form,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p \leq d(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \quad \text{with } m < n. \quad (6.1)$$

for some function  $d: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

More recently, Weber [100, 101] has established strong law of large numbers by adapting a result of Talagrand. In this chapter, we also provide conditions to obtain rates of convergence for the strong law of large numbers. To do it, we develop a new approach by adapting results due to Móricz. Our approach allows us to obtain new results in several cases. Moreover, our proof is much simpler than the one of Weber.

The main results read as follows.

**Theorem 6.1.1** *Let  $p \geq 1$  be a constant and let  $\{X_k, k \geq 1\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a sequence*

of random variables. Suppose that

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p \leq d(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \quad \text{with } m < n.$$

If one of the two following assertions is satisfied

1.  $d(m, n)$  is a sub-additive function and  $\sum_j \frac{j^p d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} < \infty$ .
2. there exists a constant  $\alpha > 1$  such that  $d^{\frac{1}{\alpha}}(m, n)$  is sub-additive and  $\sum_j \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} < \infty$ .

Then,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e \quad \text{and} \quad \sup_{N \geq 1} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right| \in L^p(\mu).$$

As a consequence of this result we have the following corollary.

**Corollary 6.1.2** Let  $p \geq 1$  be a constant and let  $\{X_k, k \geq 1\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a sequence of random variables. Suppose that

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p \leq d(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \quad \text{with } m < n,$$

where  $d(0, 2x) \leq Cd(0, x)$  for some  $C > 0$ . If  $d(m, n)$  is sub-additive, then for  $\tau > p + 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(d(0, N) \log^\tau(N))^{1/p}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

If there exists a constant  $\alpha > 1$  such that  $d^{\frac{1}{\alpha}}(m, n)$  is sub-additive, then for  $\tau > 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(d(0, N) \log^\tau(N))^{1/p}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

The following corollary gives an example of function  $\phi$  such that the series  $\sum_{k \geq 1} \frac{X_k}{\phi(k)}$  converges.

**Corollary 6.1.3** Let  $p \geq 1$  be a constant and let  $\{X_k, k \geq 1\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a sequence of random variables. Suppose that

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p \leq (n - m)^\beta \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \quad \text{with } m < n.$$

If  $\beta = 1$  and  $\tau > p + 1$ , then

$$\sum_{k \geq 1} \frac{X_k}{(k \log^\tau(k))^{1/p}} \quad \text{exists } \mu - a.e.$$

If  $1 < \beta < p$  and  $\tau > p$ , then

$$\sum_{k \geq 1} \frac{X_k}{(k^\beta \log^\tau(k))^{1/p}} \quad \text{exists } \mu - a.e.$$

## 6.2 Applications

In this section, we will show how our theorem extends the results of Gál-Koksma [58] and Weber [100, 101]. Let  $\{X_k, k \geq 1\}$  be a sequence of random variables with probability space  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  and let  $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  be a non-decreasing function such that  $\Psi(2x) \leq C\Psi(x)$  for some  $C > 0$ . Assume that there exists a constant  $\eta \geq 0$  such that  $\frac{\Psi(x)}{x^{1+\eta}}$  is non-decreasing. In particular, there exists a constant  $\lambda \geq 1$  such that  $\Psi^{\frac{1}{\lambda}}(x) + \Psi^{\frac{1}{\lambda}}(y) \leq \Psi^{\frac{1}{\lambda}}(x+y)$  for all  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Assume that the condition (6.1) holds with :

$$d(m, n) = \Psi \left( \sum_{k=m+1}^n a_k \right),$$

where  $(a_k)$  is a sequence of positive reals.

Several theorems of Gál-Koksma and Weber can be seen as particular cases of our theorem.

Let  $A(n) = \sum_{k=1}^n a_k$  and let  $\chi(n)$  be a non-decreasing function. Assume that one of the two following assertions is satisfied :

1.  $\lambda = 1$  and  $\sum_j \frac{j^p}{\chi(A(2^j))} < \infty$ ,
2.  $\lambda > 1$  and  $\sum_j \frac{1}{\chi(A(2^j))} < \infty$ .

Then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Psi(A(N))\chi(A(N)))^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

In particular, if  $\lambda = 1$  and  $\sum_j \frac{j^p}{\log(A(2^j))} < \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(\Psi(A(N)) \log^{p+1+\epsilon}(A(N)))^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e. \quad (\text{Theorem 8.4.1 [101] with } \eta = 0).$$

If  $\lambda > 1$  and  $\sum_j \frac{1}{\log(A(2^j))} < \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(A(N)) \log^{1+\epsilon}(A(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e. \quad (\text{Theorem 8.4.1 [101] with } \eta > 0).$$

Weber's technique consists in applying a majorizing measure theorem of Talagrand to obtain uniform bounds for sums of random variables satisfying increment conditions of the type considered in Gál-Koksma Theorems.

**Case  $a_k = 1$ .** This case covers two theorems of [58]. Indeed, when  $a_k = 1$ , we have  $A(n)=n$ . Then it is clear that if  $\lambda = 1$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(N) \log^{p+1+\epsilon}(N)\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e. \quad (\text{Theorem 3 [58]}).$$

If  $\lambda > 1$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(N) \log^{1+\epsilon}(N)\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e. \quad (\text{Theorem 5 [58]}).$$

**Case  $a_k = \frac{1}{k}$ .** This case allows us to establish a result which we could also obtain by applying Theorem 8.4.1 in [101]. In this case we have  $A(n) \sim \log(n)$ . Consider now the following configurations :

1.  $\lambda = 1$  and  $\sum_j \frac{j^p}{\chi(j)} < \infty$ ,
2.  $\lambda > 1$  and  $\sum_j \frac{1}{\chi(j)} < \infty$ .

If one of the previous properties is satisfied, then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(\log(N)) \chi(\log(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

In particular, if  $\lambda = 1$  and  $\chi(n) = n^{1+p} \log^\beta(n)$  ( $\beta > 1$ ), then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(\log(N)) \log^{1+p}(N) \log^\beta(\log(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

If  $\lambda > 1$  and  $\chi(n) = n \log^\beta(n)$  ( $\beta > 1$ ), then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\Psi(\log(N)) \log(N) \log^\beta(\log(N))\right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

## 6.3 Proofs

Let us recall a result due to Móricz concerning the moment inequalities. A direct consequence of Theorems 1 and 3 in [87] is the following lemma.

**Lemma 6.3.1** (*Móricz's lemma*). *Let  $(X_n)_{n \geq 1}$  be a sequence of random variables on a probability space  $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Assume that there exist  $\lambda \geq 1$  and a non-negative function  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$ , such that for any  $m, n \in \mathbb{N}$  with  $m < n$*

1.  $\mathbb{E}(|\sum_{k=m+1}^n X_k|^p) \leq Cg^\lambda(m, n)$ ,
2.  $g(m, j) + g(j, n) \leq g(m, n)$  for all  $j \in \llbracket m, n \rrbracket$ .

Then, if  $\lambda > 1$

$$\mathbb{E} \left( \sup_{j=m+1}^n \left| \sum_{k=m+1}^j X_k \right|^p \right) \leq C(\lambda)g^\lambda(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \text{ with } m < n,$$

where  $C(\lambda)$  is a constant only depending on  $\lambda$ .

If  $\lambda = 1$ ,

$$\mathbb{E} \left( \sup_{j=m+1}^n \left| \sum_{k=m+1}^j X_k \right|^p \right) \leq C \log^p(2(n-m))g(m, n) \quad \text{for any } m, n \in \mathbb{N} \text{ with } m < n,$$

where  $C$  is an absolute constant.

**Proof of Theorem 6.1.1.** The main idea is to prove that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right| = 0 \quad \mu - a.e. \quad (6.2)$$

and that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{N=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} - \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right| = 0 \quad \mu - a.e.. \quad (6.3)$$

Proving Equations (6.2) and (6.3) is sufficient since for any  $j \in \mathbb{N}$ , we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right| &\leq \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} - \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right| + \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right| \\ &\leq \sup_{N=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} - \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right| + \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right|. \end{aligned} \quad (6.4)$$



To deal with (6.2) we write

$$\mathbb{E} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right|^p \leq \frac{d(0, 2^j)}{\phi^p(2^j)}.$$

It follows from the assumptions of the theorem that  $\sum_j \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} < \infty$ . Thus, according to Beppo Levi Theorem,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(2^j)} \sum_{k=1}^{2^j} X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

Now, we have to prove (6.3). Let  $Y_k = \frac{1}{\phi(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} X_i - \frac{1}{\phi(k)} \sum_{i=1}^k X_i$ , then we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n Y_k \right|^p &= \mathbb{E} \left| \frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\phi(m)} - \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\phi(n)} \right|^p \\ &\leq 2^{p-1} \left( \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^p \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^m X_k \right|^p + \frac{\mathbb{E} |\sum_{k=m+1}^n X_k|^p}{\phi^p(n)} \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left( \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^p d(0, n) + \frac{d(m, n)}{\phi^p(m)} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

**Case where  $d(m, n)$  is sub-additive.** Since  $\phi(n)$  is nondecreasing,  $d(0, n)$  is nondecreasing and since  $d(m, n)$  is sub-additive, then the function

$$g(m, n) := \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^p d(0, n) + \frac{d(m, n)}{\phi^p(n)}$$

is also sub-additive. By applying the Móricz's lemma ( $\lambda = 1$ ), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{m < N \leq n} \left| \frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\phi(m)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right|^p \\ \leq 2^{p-1} \log^p(2(n-m)) \left( \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^p d(0, n) + \frac{d(m, n)}{\phi^p(m)} \right). \end{aligned}$$

Moreover,

$$\mathbb{E} \sup_{2^j < N \leq 2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right|^p \leq 2^{2p} \log^p(2) \frac{j^p d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)}$$

Since  $\sum_j \frac{j^p d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} < \infty$ , it follows from Beppo Levi theorem that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{2^j < N \leq 2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right| = 0 \quad \mu - a.e.$$

This proves (6.3).

Now, we prove the strong maximal inequality. To do it, we use (6.4), and we take the supremum over  $j$ . This gives

$$\begin{aligned} \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k \right|^p &\leq 2^{p-1} \sup_{j \geq 1} \sup_{N=2^j+1}^{2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} - \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right|^p \\ &\quad + 2^{p-1} \sup_{j \geq 1} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} \right|^p. \end{aligned}$$

Integrating over  $\mu$ , we get

$$\left\| \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k \right| \right\|_{p, \mu}^p \leq 2^{3p-1} \log^p(2) \sum_{j \geq 1} \frac{j^p d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} + 2^{p-1} \sum_{j \geq 1} \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)}.$$

The last term is finite by assumption.

**Case where there exists a constant  $\alpha > 1$  such that  $d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(m, n)$  is sub-additive.** According to (6.5)

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n Y_k \right|^p \leq 2^{p-1} \left( \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^{\frac{p}{\alpha}} d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(0, n) + \frac{d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(m, n)}{\phi_\alpha^\frac{p}{\alpha}(m)} \right)^\alpha.$$

Let  $\lambda_{p, \alpha} := \begin{cases} 1, & p \leq \alpha \\ \frac{p}{\alpha}, & p \geq \alpha \end{cases}$ .

It is clear that the functions  $\left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^{\lambda_{p, \alpha}} d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(0, n)$  and  $\frac{d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(m, n)}{\phi_\alpha^\frac{p}{\alpha}(m)}$  are sub-additive.

Thus, the function

$$g(m, n) := \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^{\lambda_{p, \alpha}} d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(0, n) + \frac{d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(m, n)}{\phi_\alpha^\frac{p}{\alpha}(m)}$$

is also sub-additive. Applying the Móricz's lemma ( $\lambda = \alpha$ ), we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{m < N \leq n} \left| \frac{\sum_{k=1}^m X_k}{\phi(m)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right|^p \\ \leq 2^{p-1} \left( \left( \frac{1}{\phi(m)} - \frac{1}{\phi(n)} \right)^{\lambda_{p, \alpha}} d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(0, n) + \frac{d_\alpha^\frac{1}{\alpha}(m, n)}{\phi_\alpha^\frac{p}{\alpha}(m)} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{2^j < N \leq 2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right|^p \\ \leq 2^{p+\alpha-2} \left( \left( \frac{1}{\phi(2^j)} - \frac{1}{\phi(2^{j+1})} \right)^{\alpha\lambda_{p,\alpha}} d(0, 2^{j+1}) + \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} \right) \\ \leq 2^{p+\alpha-1} \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)}. \end{aligned}$$

Since  $\sum_j \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} < \infty$ , according to Beppo Levi theorem, this gives

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{2^j < N \leq 2^{j+1}} \left| \frac{\sum_{k=1}^{2^j} X_k}{\phi(2^j)} - \frac{\sum_{k=1}^N X_k}{\phi(N)} \right| = 0 \quad \mu - a.e.$$

This proves (6.3).

Now, we prove the strong maximal inequality. According to (6.4), taking the supremum over  $j$  and integrating over  $\mu$ , we get

$$\left\| \sup_{N \geq 1} \left| \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k \right| \right\|_{p,\mu}^p \leq 2^{2p+\alpha-1} \sum_{j \geq 1} \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)} + 2^{p-1} \sum_{j \geq 1} \frac{d(0, 2^{j+1})}{\phi^p(2^j)}.$$

The last term is finite by assumption. □

**Proof of Corollary 6.1.2.** It is a direct consequence of Theorem 6.1.1 with  $\phi(x) = (d(0, x) \log^\tau(x))^{1/p}$ . □

**Proof of Corollary 6.1.3.** Using the Abel's summation formula, we have

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{X_k}{(k^\beta \log^\tau(k))^{1/p}} = \\ \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{(k^\beta \log^\tau(k))^{1/p}} - \frac{1}{((k+1)^\beta \log^\tau(k+1))^{1/p}} \right) \sum_{j=1}^k X_j \\ + \frac{1}{(N^\beta \log^\tau(N))^{1/p}} \sum_{k=1}^N X_k. \end{aligned} \tag{6.6}$$

If  $\beta > 1$ , then there exists  $\alpha > 1$  such that the function  $(m-n)^{\beta/\alpha}$  is sub-additive.

Moreover, the series

$$\sum_{j \geq 1} \frac{2^{j\beta}}{2^{j\beta} \log^\tau(2^j)},$$

is finite if and only if  $\tau > 1$ . Applying Theorem 6.1.1 with  $d(m, n) = (m - n)^\beta$  and  $\phi(n) = n^\beta \log^\tau(n)$ , we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N^\beta \log^\tau(N))^{1/p}} \sum_{k=1}^N X_k = 0.$$

This implies that the last term of the right-hand side of (6.6) converges to 0  $\mu$ -a.e. Moreover,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{(k^\beta \log^\tau(k))^{1/p}} - \frac{1}{((k+1)^\beta \log^\tau(k+1))^{1/p}} \right) \left\| \sum_{j=1}^k X_j \right\| \right\|_{p, \mu} \\ & \leq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^{\beta/p+1} \log^{\tau/p}(k)} \left\| \sum_{j=1}^k X_j \right\|_{p, \mu} \\ & \leq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k^{\beta/p}}{k^{\beta/p+1} \log^{\tau/p}(k)} \end{aligned}$$

By assumption we have  $\tau > p$ . Thus the last term is finite as desired. This concludes the proof for  $\beta > 1$ . The case  $\beta = 1$  can be proved by following the same steps that we implemented and by using Theorem 6.1.1 with  $d(m, n) = (n - m)$  and  $\phi(n) = (n \log^\tau(n))^{1/p}$ .  $\square$

## 6.4 Examples

### Sequences of quasi-stationary random variables.

Let  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  be a non-negative function. Let  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  be a real or complex-valued sequence. We say that  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  is  $f$ -quasi-stationary if for any  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X_k) = 0, \quad \mathbb{E}(X_k^2) < \infty \quad \text{and} \quad \mathbb{E}(X_m X_{m+k}) \leq f(k). \quad (6.7)$$

**Theorem 6.4.1** *Let  $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$  be a  $f$ -quasi-stationary sequence and let  $\phi$  be a non-decreasing function. Suppose that*

$$\sum_{j \geq 1} \frac{j^2 2^{j+1} \sum_{k=1}^{2^{j+1}} f(k)}{\phi^2(2^j)} < \infty.$$

Then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N X_k = 0 \quad \mu - a.e.$$

This type of quantities has been considered by several authors, see for example [86, 96].

**Proof.** By (6.7) it follows easily that for any  $m < n$

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^2 \leq C \sum_{k=m+1}^n f(k)(n-m-k) \leq Cn \sum_{k=m+1}^n f(k).$$

Theorem 6.4.1 is a direct consequence of Theorem 6.1.1 with  $d(m, n) = n \sum_{k=m+1}^n f(k)$ .  
□

### Firmly contraction

Let  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a probability space. A lot of works has been done to investigate ergodic averages of the form

$$\frac{1}{N^\beta} \sum_{k=1}^N T^{u_k}(f), \quad (6.8)$$

for some  $0 < \beta < 1$  (rate of convergence), where  $(u_k)$  is a sequence of integers,  $T$  is a contraction on  $L^2(\mu)$  or transformation derived from the dynamical system  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  and  $f \in L^2(\mu)$ . The goal of this section is to give an example of contraction  $T$  from which and under certain conditions we will have the  $\mu$ -almost everywhere convergence of (6.8).

A firmly contraction  $T$  is a contraction of the form  $T = \frac{I+T_0}{2}$ , where  $T_0$  is a contraction on  $L^2(\mu)$  and  $I$  is the identity contraction on  $L^2(\mu)$  i.e.  $I(f) = f$ , for all  $f \in L^2(\mu)$ . Let  $(X_k)$  be a sequence of independent Bernoulli random variables on some probability space  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  such that  $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = 0) = \frac{1}{2}$ . We can write  $T$  as follows :

$$T = \frac{I + T_0}{2} = \mathbb{E}T_0^{X_1} \quad \text{and} \quad T^{u_k} = \mathbb{E}T_0^{X_1 + \dots + X_{u_k}}. \quad (6.9)$$

**Theorem 6.4.2** *Let  $(u_k)$  be a sequence of integers and  $\phi$  be a nondecreasing function. Let  $T$  be a contraction defined as in (6.9). Suppose that  $\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{t^{4(1-\beta)}} \mu_{T_0, f}(dt) < \infty$  where  $\mu_{T_0, f}$  is the spectral measure of  $T_0$  in  $f$  and that one of the following assertions is satisfied*

1.  $\beta > \frac{1}{2}$  and  $\sum_{j \geq 1} \frac{2^j(2^\beta)}{\phi^2(2^j)} < \infty$ ,
2.  $\beta = \frac{1}{2}$  and  $\sum_{j \geq 1} \frac{j^2 2^j}{\phi^2(2^j)} < \infty$ .

Then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k=1}^N T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.$$

A coboundary with respect to  $T_0$  is a function of the form  $g - g \circ T_0$ , where  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  is a measurable function.

**Theorem 6.4.3** *Let  $(u_k)$  be a sequence of integers and let  $T$  be a contraction defined as in (6.9). If  $\tau > \frac{3}{2}$ , then for any  $f$  coboundary with respect to  $T_0$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log^\tau(n)} \sum_{k=1}^N T^{u_k}(f) = 0 \quad \mu - a.e.$$

**Proof of Theorems 6.4.2 and 6.4.3.** We give a detailed proof of Theorem 6.4.2; however, a proof of Theorem 6.4.3 can be obtained from this by choosing  $\phi(n) = \sqrt{n} \log^\tau(n)$  and by using the following property :

$$f = g - g \circ T_0, \quad g \in L^2(\mu) \iff \int \frac{1}{|t|^2} \mu_{T_0, f}(dt) < \infty.$$

By the spectral lemma, we have

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m+1}^n T^{u_k}(f) \right\|_{2, \mu}^2 &= \left\| \sum_{m+1}^n \mathbb{E} T_0^{X_1 + \dots + X_{u_k}}(f) \right\|_{2, \mu}^2 \\ &\leq \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1 + \dots + X_{u_k})t} \right|^2 \mu_{T_0, f}(dt). \end{aligned}$$

Since  $(X_k)$  is i.i.d, we have

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1 + \dots + X_{u_k})t} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| \mathbb{E} e^{2i\pi X_1 t} \right|^{u_k} \leq \frac{1}{1 - \left| \mathbb{E} e^{2i\pi X_1 t} \right|}.$$

We have  $1 - \left| \mathbb{E} e^{2i\pi X_1 t} \right| \geq Ct^2$  for some constant  $C > 0$ . Then

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1 + \dots + X_{u_k})t} \right| \leq C \frac{1}{t^2}.$$

It is clear that  $\left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1+\dots+X_{u_k})t} \right| \leq n - m$ . This gives that

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1+\dots+X_{u_k})t} \right|^2 &\leq \left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1+\dots+X_{u_k})t} \right|^{2\beta} \left| \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi(X_1+\dots+X_{u_k})t} \right|^{2(1-\beta)} \\ &\leq C \frac{1}{t^{4(1-\beta)}} (n - m)^{2\beta}. \end{aligned}$$

Since  $\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{t^{4(1-\beta)}} \mu_{T_0, f}(\mathrm{d}t) < \infty$ , we have

$$\left\| \sum_{m+1}^n T^{u_k}(f) \right\|_{2, \mu}^2 \leq C(n - m)^{2\beta}.$$

According to Theorem 6.1.1, we deduce the proof.  $\square$

# Bibliographie

- [1] E. H. E. Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk, and T. de la Rue. The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 37 :2899–2944, 2017.
- [2] I. Assani. A weighted pointwise ergodic theorem. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 34(1) :139 – 150, 1998.
- [3] I. Assani. *Wiener Wintner Ergodic Theorems*. World Scientific, 2003.
- [4] A. Bellow and V. Losert. The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 288(1) :307–345, 1985.
- [5] D. Berend, M. Lin, J. Rosenblatt, and A. Tempelman. Modulated and subsequential ergodic theorems in hilbert and banach spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 22(6) :1653, 2002.
- [6] I. Berkes, W. Müller, and M. Weber. On the law of large numbers and arithmetic functions. *Indagationes Mathematicae*, 23(3) :547 – 555, 2012.
- [7] I. Berkes and M. Weber. *On the convergence of  $\sum c_k f(n_k x)$* , volume 201. American Mathematical Soc., 2009.
- [8] S. M. Berman. Asymptotic independence of the numbers of high and low level crossings of stationary gaussian processes. *Ann. Math. Statist.*, 42(3) :927–945, 06 1971.
- [9] G. D. Birkhoff. Proof of the Ergodic Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12) :656–660, 1931.
- [10] F. Bouhkari and M. Weber. Almost sure convergence of weighted series of contractions. *Illinois J. Math.*, 46(1) :1–21, 01 2002.
- [11] J. Bourgain. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 69 :5–41, 1989.
- [12] J. Bourgain, H. Furstenberg, and Y. Katznelson. Return times of dynamical systems. *Publications Mathématiques de L'Institut des Hautes Scientifiques*, 69 :42–45, 1989.
- [13] J. Bourgain, H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D. S. Ornstein. Appendix on return-time sequences. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 69 :42–45, 1989.
- [14] Z. Buczolich. Ergodic averages with prime divisor weights in  $l^1$ . *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(4) :889–897, 2019.



- [15] P. Calka and N. Chenavier. Extreme values for characteristic radii of a poisson-voronoi tessellation. *Extremes*, 17 :359–385, 2013.
- [16] N. Chenavier. A general study of extremes of stationary tessellations with examples. *Stochastic Processes and their Applications*, 124(9) :2917 – 2953, 2014.
- [17] N. Chenavier. The extremal index for a random tessellation. volume 9389, pages 171–178, 01 2015.
- [18] N. Chenavier and A. Darwiche. Extremes for transient random walks in random sceneries under weak independence conditions. *Statistics & Probability Letters*, 158, 2020.
- [19] N. Chenavier and R. Hemsley. Extremes for the inradius in the poisson line tessellation. *Adv. in Appl. Probab.*, 48(2) :544–573, 06 2016.
- [20] N. Chenavier and C. Y. Robert. Cluster size distributions of extreme values for the poisson–voronoi tessellation. *Ann. Appl. Probab.*, 28(6) :3291–3323, 12 2018.
- [21] M. R. Chernick, T. Hsing, and W. P. McCormick. Calculating the extremal index for a class of stationary sequences. *Advances in Applied Probability*, 23(4) :835–850, 1991.
- [22] N. Chevallier, G. Cohen, and J.-P. Conze. On the convergence of the rotated one-sided ergodic Hilbert transform. *Positivity*, 15(2) :253–270, 2011.
- [23] S. Chobanyan, S. Levental, H. Salehi, et al. Strong law of large numbers under a general moment condition. *Electronic Communications in Probability*, 10 :218–222, 2005.
- [24] J. Choi and K. Reinhold. Randomly perturbed ergodic averages. *arXiv preprint arXiv :1806.02816*, 2018.
- [25] G. Cohen and C. Cuny. On random almost periodic trigonometric polynomials and applications to ergodic theory. *The Annals of Probability*, 34(1) :39–79, Jan 2006.
- [26] G. Cohen, C. Cuny, and M. Lin. The one-sided ergodic hilbert transform in banach spaces. *Studia Mathematica*, 196 :251–263, 2010.
- [27] G. Cohen and M. Lin. Almost sure convergence of weighted sums of independent random variables. *Contemp. Math*, 485 :13–43, 2009.
- [28] H. Cramér. On the intersections between the trajectories of a normal stationary stochastic process and a high level. *Ark. Mat.*, 6(4-5) :337–349, 08 1966.
- [29] C. Cuny. On the a.s. convergence of the one-sided ergodic hilbert transform. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29(6) :1781–1788, 2009.
- [30] C. Cuny and M. Lin. Pointwise ergodic theorems with rate and application to the CLT for Markov chains. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 45(3) :710–733, 08 2009.
- [31] C. Cuny and M. Weber. Ergodic theorems with arithmetical weights. *Israël Journal of Mathematics*, 217(1) :139–180, 2017.

- [32] C. Cuny and M. Weber. On Nörlund summation and Ergodic Theory, with applications to power series of Hilbert contractions. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 66(1) :69–85, 2018.
- [33] A. Darwiche and D. Schneider. Convergence of weighted ergodic averages, 2020.
- [34] H. Davenport. On some infinite series involving arithmetical functions. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 8 :8–13, 1937.
- [35] H. Davenport. On some infinite series involving arithmetical functions (ii). *The Quarterly Journal of Mathematics*, 8 :313–320, 1937.
- [36] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme value theory. An introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2006.
- [37] L. De Haan and A. Ferreira. *Extreme value theory : an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [38] C. Demeter, M. T. Lacey, T. Tao, C. Thiele, et al. Breaking the duality in the return times theorem. *Duke Mathematical Journal*, 143(2) :281–355, 2008.
- [39] Y. Derriennic and M. Lin. The central limit theorem for Markov chains started at a point. *Probability Theory and Related Fields*, 125 :73–76, 01 2003.
- [40] C. Dombry and Z. Kabluchko. Random tessellations associated with max-stable random fields. *Bernoulli*, 24(1) :30–52, 02 2018.
- [41] F. Durand and D. Schneider. Ergodic averages with deterministic weights. *Annales de l’Institut Fourier*, 52(2) :561–583, 2002.
- [42] S. Durand and D. Schneider. Théorèmes ergodiques aléatoires et suites de poids aléatoires régularisants. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(5) :375 – 378, 2002.
- [43] S. Durand and D. Schneider. Random ergodic theorems and regularizing random weights. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(4) :1059–1092, 2003.
- [44] T. Eisner. A polynomial version of Sarnak’s conjecture. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(7) :569 – 572, 2015.
- [45] T. Eisner and B. Krause. (uniform) convergence of twisted ergodic averages. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(7) :2172–2202, 2016.
- [46] P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling extremal events : for insurance and finance*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [47] A. Fan and J. Konieczny. On uniformity of  $q$ -multiplicative sequences. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 51(3) :466–488, 2019.
- [48] A.-H. Fan. Almost everywhere convergence of ergodic series. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(2) :490–511, 2017.
- [49] A.-H. Fan. Weighted Birkhoff Ergodic Theorem with oscillating weights. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 05 2017.
- [50] A.-H. Fan and J. Konieczny. On uniformity of  $q$ -multiplicative sequences. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 51(3) :466–488, 2019.

- [51] A.-H. Fan, J. Schmeling, and W. Shen.  $l^\infty$ -estimation of generalized Thue-Morse trigonometric polynomials and ergodic maximization, 2019.
- [52] A.-H. Fan and D. Schneider. Recurrence properties of sequences of integers. *Science China Mathematics*, 53 :641–656, 03 2010.
- [53] W. Feller. An introduction to probability theory and its applications : Volume 1. 1968.
- [54] H. Ferreira. The upcrossings index and the extremal index. *Journal of Applied Probability*, 43(4) :927–937, 2006.
- [55] R. A. Fisher and L. H. C. Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(2) :180–190, 1928.
- [56] B. Franke and T. Saigo. The extremes of a random scenery as seen by a random walk in a random environment. *Statist. Probab. Lett.*, 79(8) :1025–1030, 2009.
- [57] B. Franke and T. Saigo. The extremes of random walks in random sceneries. *Advances in Applied Probability*, 41(2) :452–468, 2009.
- [58] I. Gál and J. Koksma. Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. *Indag. Math. 12 p.*, 53(15) :192–207, 1950.
- [59] C. Gamet and D. Schneider. Théorèmes ergodiques multidimensionnels et suites aléatoires universellement représentatives en moyenne. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, 33(2) :269–282, 1997.
- [60] A. O. Gelfond. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. *Acta Arithmetica*, 13 :259–265, 1968.
- [61] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme d'une série aléatoire. *Ann Math*, 44(3) :423–453, 1943.
- [62] N. Guillotin-Plantard and D. Schneider. Limit theorems for sampled dynamical systems. *Stochastics and Dynamics*, 03(04) :477–497, 2003.
- [63] A. Guillou and P. Willems. Application de la théorie des valeurs extrêmes en hydrologie. *Revue de Statistique Appliquée*, pages 5–31, 2006.
- [64] E. Gumbel and E. U. N. B. of Standards. *Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications*. Applied mathematics series. United States Departament of Commerce. National Burreau of Standards, 1954.
- [65] C. Guy and L. Michael. The one-sided ergodic hilbert transform of normal contractions. *Alpay D., Vinnikov V. (eds) Characteristic Functions, Scattering Functions and Transfer Functions. Operator Theory : Advances and Applications*, 197 :77–98, 2009.
- [66] E. Hlawka. Gleichverteilung und das Konvergenzverhalten von Potenzreihen am Rande des Konvergenzkreises. *Manuscripta Math.*, 44(1-3) :231–263, 1983.
- [67] A. Idris and L. Michael. On the one-sided ergodic hilbert transform. *Contemporary Mathematics*, 430 :21–39, 2007.

- [68] S.-i. Izumi. A non-homogeneous ergodic theorem. *Proceedings of the Imperial Academy*, 15(7) :189–192, 1939.
- [69] A. F. Jenkinson. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81(348) :158–171, 1955.
- [70] Z. Kabluchko. Spectral representations of sum- and max-stable processes. *Extremes*, 12 :401–424, 2009.
- [71] J.-P. Kahane. Some random series of functions. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 1985.
- [72] O. Kallenberg. Random measures. *Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der Akademie der Wissenschaften der DDR*, 1972.
- [73] H. Kesten and F. Spitzer. A limit theorem related to a new class of self-similar processes. *Wahrscheinlichkeitsth*, 50 :5–25, 1979.
- [74] B. Krause, M. Lacey, and M. Wierdl. On convergence of oscillatory ergodic Hilbert transforms. *Indiana University Mathematics Journal*, 68 :641–662, 01 2019.
- [75] J.-F. Le Gall and J. Rosen. The range of stable random walks. *Ann Proba*, 19(2) :650–705, 1991.
- [76] M. R. Leadbetter. On extreme values in stationary sequences. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 28 :289–303, 1973/74.
- [77] M. R. Leadbetter. Extremes and local dependence in stationary sequences. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 65(2) :291–306, 1983.
- [78] M. R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzén. *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [79] M. R. Leadbetter and S. Nandagopalan. On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions. In J. Hüsler and R.-D. Reiss, editors, *Extreme Value Theory*, pages 69–80, New York, NY, 1989. Springer New York.
- [80] M. R. Leadbetter and H. Rootzén. On extreme values in stationary random fields. In *Stochastic processes and related topics*, Trends Math., pages 275–285. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
- [81] E. Lesigne. Un théorème de disjonction de systèmes dynamiques et une généralisation du théorème ergodique de Wiener-Wintner. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(3) :513–521, 1990.
- [82] E. Lesigne, C. Mauduit, and B. Mossé. Le théorème ergodique le long d’une suite  $q$ -multiplicative. *Compositio Mathematica*, 93(1) :49–79, 1994.
- [83] M. Lin, J. Olsen, and A. Tempelman. On modulated ergodic theorems for Dunford-Schwartz operators. *Illinois Journal of Mathematics*, 43(3) :542–567, 1999.
- [84] R. M. Loynes. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, 36(3) :993–999, 06 1965.

- [85] V. Lucarini, D. Faranda, A. de Freitas, J. de Freitas, M. Holland, T. Kuna, M. Nicol, M. Todd, and S. Vaienti. *Extremes and Recurrence in Dynamical Systems*. Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2016.
- [86] F. Móricz. The strong laws of large numbers for quasi-stationary sequences. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 38 :223–236, 1977.
- [87] F. Móricz. Moment inequalities and the strong laws of large numbers. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 35(4) :299–314, Dec 1976.
- [88] E. Nane, Y. Xiao, and A. Zeleke. Strong laws of large numbers for arrays of random variables and stable random fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 484(1) :123737, 2020.
- [89] G. L. O’Brien. Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.*, 15(1) :281–291, 1987.
- [90] M. Penrose et al. *Random geometric graphs*, volume 5. Oxford university press, 2003.
- [91] J. Pickands. Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.*, 3(1) :119–131, 01 1975.
- [92] S. I. Resnick. *Extreme values, regular variation and point processes*, volume 4 of *Applied Probability. A Series of the Applied Probability Trust*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [93] P. Sarnak. Three lectures on the mobius function randomness and dynamics.
- [94] M. Schlather. Models for stationary max-stable random fields. *Extremes*, 5 :33–44, 2002.
- [95] M. Schulte and C. Thäle. *Poisson Point Process Convergence and Extreme Values in Stochastic Geometry*. Bocconi & Springer Series. Springer, 2016.
- [96] R. J. Serfling. On the strong law of large numbers and related results for quasi-stationary sequences. *Theory of Probability & Its Applications*, 25(1) :187–191, 1980.
- [97] E. Tanja and M. Lin. On modulated ergodic theorems. *J. Nonlinear Var. Anal*, 2 :131–154, 2018.
- [98] J. van der Corput. Neue zahlentheoretische Abschätzungen. *Math. Z.*, 29(1) :397–426, 1929.
- [99] G. S. Watson. Extreme values in samples from  $m$ -dependent stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, 25(4) :798–800, 12 1954.
- [100] M. Weber. Uniform Bounds under Increment Conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358 :911–936, 02 2006.
- [101] M. Weber. *Dynamical systems and processes*, volume 14. European Mathematical Society, 2009.

- 
- [102] R. E. Welsch. A weak convergence theorem for order statistics from strong-mixing processes. *Ann. Math. Statist.*, 42(5) :1637–1646, 10 1971.
- [103] N. Wiener and A. Wintner. Harmonic analysis and ergodic theory. *Amer. J. Math.*, 63 :415–426, 1941.
- [104] M. Wierdl. Pointwise ergodic theorem along the prime numbers. *Israel Journal of Mathematics*, 64 :315–336, 1988.



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Résumé  | xi        |
| Remerciements   | xiii      |
| Sommaire  | xv        |
| Introduction (version française)  | 1         |
| Introduction (english version)  | 5         |
| <b>I Théorèmes limites pour des valeurs extrêmes</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>1 Quelques outils de probabilités</b>  | <b>11</b> |
| 1.1 Processus ponctuels et processus ponctuel de Poisson . . . . .              | 11        |
| 1.2 Théorie des valeurs extrêmes . . . . .                                      | 12        |
| 1.2.1 Notions sur les valeurs extrêmes . . . . .                                | 12        |
| 1.2.2 Valeurs extrêmes pour des suites non i.i.d . . . . .                      | 15        |
| 1.3 Présentation des problèmes . . . . .  | 18        |
| <b>2 Théorèmes limites pour des valeurs extrêmes en environnement aléatoire</b> | <b>21</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .  | 21        |
| 2.2 Proof of Theorem 2.1.1 . . . . .  | 24        |
| <b>3 Processus ponctuel des excédents en environnement aléatoire</b>            | <b>29</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .  | 29        |
| 3.2 Proof of Theorem 3.1.2 . . . . .  | 31        |
| 3.3 Weak mixing property for transient random walks in random scenery . .       | 33        |
| 3.4 Extremal index . . . . .  | 35        |
| <b>II Théorèmes limites dans les système dynamiques</b>                         | <b>41</b> |



|  |            |
|--|------------|
| <b>4 Quelques outils de systèmes dynamiques</b>  | <b>43</b>  |
| 4.1 Quelques éléments de théorie ergodique . . . . .   | 43         |
| 4.2 Théorèmes ergodiques à poids déterministes . . . . .                                       | 45         |
| 4.3 Théorèmes ergodique à poids aléatoires . . . . .   | 50         |
| 4.4 Convergence ponctuelle de la transformée d’Hilbert unilatérale pondérée.                   | 51         |
| 4.5 Quelques théorèmes sur la loi forte des grands nombres . . . . .                           | 52         |
| 4.6 Présentation des problèmes . . . . .   | 54         |
| <b>5 Théorèmes limites pour des moyennes ergodiques pondérées</b>                              | <b>55</b>  |
| 5.1 Introduction . . . . .   | 55         |
| 5.2 Preliminaries . . . . .  | 60         |
| 5.3 Convergence of ergodic weighted averages with natural density . . . . .                    | 62         |
| 5.4 Convergence of ergodic weighted averages with respect to the harmonic<br>density . . . . . | 72         |
| 5.5 Examples . . . . .   | 75         |
| <b>6 Loi forte des grands nombres par rapport à <math>\phi</math></b>                          | <b>83</b>  |
| 6.1 Introduction . . . . .   | 83         |
| 6.2 Applications . . . . .   | 85         |
| 6.3 Proofs . . . . .   | 87         |
| 6.4 Examples . . . . .   | 91         |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>95</b>  |
| <b>Table des matières</b>  | <b>103</b> |



## De nouveaux théorèmes limites sur les extrêmes et les systèmes dynamiques.

### Résumé

Dans cette thèse, nous établissons quelques théorèmes limites en théorie des valeurs extrêmes et en systèmes dynamiques. La thèse est composée de deux parties. Dans la première partie, nous nous intéressons au comportement du maximum d'une suite qui ne satisfait pas les hypothèses classiques de la théorie des valeurs extrêmes. La suite que nous considérons est générée par une marche aléatoire en milieu aléatoire. Nous établissons un résultat de convergence sur le processus ponctuel des excédents associé à la suite et calculons l'indice extrémal. Des propriétés de mélange de la suite sont également discutées.

Dans la deuxième partie, nous étudions la convergence presque sûre de différents types de moyennes ergodiques avec poids (aléatoires et/ou déterministes), en développant une nouvelle technique pour donner des vitesses de convergence. Cette technique est basée sur des travaux de Móricz concernant l'étude de sommes de variables aléatoires. Elle nous permet d'établir des résultats sur la vitesse de convergence dans la loi forte des grandes nombres. Nous déduisons ensuite des propriétés de convergence ponctuelle de la transformée de Hilbert unilatérale pondérée.

**Mots clés :** valeurs extrêmes, théorèmes limites, suites stationnaires, marches aléatoires, processus ponctuels ; moyennes ergodiques pondérées, contractions de l'espace de hilbert, transformée de hilbert unilatérale pondérée, convergence presque partout, inégalités de moment.

---

### Abstract

In this PhD thesis, we establish some limit theorems in Extreme Value Theory and on dynamical systems. This thesis is divided into two parts. The first one deals with extremes of a sequence which does not satisfy the classical properties appearing in Extreme Value Theory. The sequence is generated by a random walk in random scenery. We establish a limit theorem on the point process of exceedances and we make explicit the extremal index. Some mixing properties are also discussed.

The second part of this thesis deals with almost sure convergence of various ergodic averages with weights (the weights can be random or deterministic) and is based on new techniques to provide rates of convergence. Our techniques are based on a work due to Móricz dealing with sums of random variables. The same technique allows us to establish results on the rates of convergence for the strong law of large numbers. Then we state several properties for the point convergence of weighted unilateral Hilbert transform.

**Keywords:** extreme values, limit theorems, stationary sequences, random walks, point processes; weighted ergodic averages, contractions of hilbert space, one-sided weighted ergodic hilbert transformation, almost everywhere convergence, moment inequalities.

---

**LMPA Joseph Liouville**

Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62228  
Calais Cedex – France –