HAL
open science

Limites d'échelle de marches aléatoires contraintes

Fabien Montégut

To cite this version:

Fabien Montégut. Limites d'échelle de marches aléatoires contraintes. Probabilités [math.PR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2020. Français. NNT : 2020TOU30163 . tel-03130981

HAL Id: tel-03130981

https://hal.science/tel-03130981v1

Submitted on 4 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *16 Décembre 2020* **par :**

Fabien Montégut

Limites d'échelle de marches aléatoires contraintes

JURY

Bernard Bercu	Université de Bordeaux	Examinateur
Serge Cohen	Université Toulouse 3	Directeur de thèse
Anne Estrade	Université Paris Descartes	Examinatrice
Florent Malrieu	Université de Tours	Rapporteur
Laurent Miclo	Université Toulouse 3	Examinateur
James Norris	University of Cambridge	Rapporteur
Kilian Raschel	Université de Tours	Rapporteur

École doctorale et spécialité :
MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées
Unité de Recherche :
Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)
Directeur de Thèse :
Serge Cohen
Rapporteurs :
Florent Malrieu, *James Norris* et *Killian Raschel*

Fun is giving respect to something that doesn't deserve it. Becoming infatuated with something for which infatuation seems impossible. Just by working it carefully, and deliberately over time, in the hopes that it might someday blush before you, and reveal its secrets.

Ian Bogost

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Serge Cohen. Ce fut un plaisir de travailler ensemble durant ces quatre années (et demie ?) de thèse ; ce serait trop long de lister toutes les qualités dont tu as fait preuve en tant qu'encadrant, mais je tiens surtout à saluer ta disponibilité sans faille, qui m'a permise d'avoir toujours de l'aide aux moments où j'en avais besoin ; ainsi que ta patience et ta pédagogie lors de nos nombreux échanges, même lorsque nos points de vues étaient diamétralement opposés. J'ai énormément appris à tes côtés, tant sur les limites d'échelle que sur le métier de chercheur. J'ai hâte de mettre cet apprentissage à profit, et d'explorer ce domaine que tu m'as fait découvrir.

I would like to address many thanks to James Norris who agreed to review this manuscript. Thank you for your attentive reading and your fruitful remarks on my work.

Je suis très reconnaissant à Killian Raschel et Florent Malrieu d'avoir accepté de me consacrer leur temps et leur attention pour rapporter cette thèse. L'enthousiasme avec lequel vous avez accepté cette tâche hautement importante me va droit au coeur.

Je remercie également Anne Estrade, Laurent Miclo et Bernard Bercu d'avoir accepté de faire partie du jury lors de ma soutenance.

Je ne pourrai jamais remercier assez tous les membres de l'IMT qui m'ont soutenu lors de ces dernières années, et qui contribuent à faire de ce laboratoire un lieu particulièrement propice à la réalisation d'une thèse. Néanmoins je souhaite remercier tout particulièrement les membres du pôle administratif, ces figures de l'ombre qui assurent un travail de titan (et auprès de qui je m'excuse platement de m'y prendre **toujours** au dernier moment).

Je remercie mes premiers co-bureaux Fanny, Sofiane et Magali, qui m'ont accueilli à bras ouverts dans le musée officiel des doctorants ESP et m'ont permis une intégration rapide au sein du laboratoire ; ainsi que tous les *oiseaux de passage* qui se sont succédés au sein de ce bureau, à savoir Benoît, Léo, Pierre, Max, Jessica ainsi qu'une famille de pigeons venue nicher sur le rebord de la fenêtre (et qui font de cette phrase un zeugma).

Bien entendu les doctorants des autres bureaux ne sont pas en reste, car quelques murs ne les ont pas empêché d'être présents à mes côtés toutes ces années. Je pense tout particulièrement à Anton, Ioana, Guillaume, Hugo le pique-assiette, Claire, Malika, Benoît, Sylvain, Antoine le président Aware, Pierre qui ne m'écoute plus, Laure, Valentin, Maylis, Kevin et ses poèmes allemands, Mickael le champion de Smash Bros, William qui connaît l'histoire du têtard, Trang, Eva, Baptiste qui m'a ramené en métro plus d'une fois, Joachim le rôlise néophyte, Anthony, Alexis ; mais également aux "jeunes" pour qui ce n'est pas encore fini : Camille la Cruella d'enfer, Elena mon hôte de circonstances, Jean-Marc le roi des noeuds, Florian l'autre moitié de FabFlo Productions, Laetitia qui veut que je retourne travailler, Clément le maître sushi, Pierre, Jens, Michèle *Oh my god !*, Paola, Corentin, Perla, Dominique, Dimitri, Julien William... Je vous souhaite à tous bon courage !

Si mon passage à l'INSA fut bref, il n'en fut pas moins agréable, en paarticulier grâce à Anouar qui m'a souvent dit que j'avais raison, mais aussi grâce à Sandrine, Laure que je cite une deuxième fois, Géraldine, Olivier, Loïc et Steiner qui a sûrement cru que j'allais l'oublier.

J'ai également eu la chance d'avoir le soutien de personnes extraordinaires pendant toutes ces années, que ce soit les anciens SPX Marie, Paulin, Nathanaël, Bruno, Raphaël, Guillaume, Hugo, Eliott, Cloé, Aurore, Audrey, Baptiste, Manon, Thibault ; les camarades de Master Laure, Marion, Aurore, Anthony, Marion, Marc-Antoine, Thann ; Les informaticiens du Xdi Jeu Rémi, PF, Julien, Estelle, Elise, Viktor ; les inconnus d'une soirée raclette Kim, Laurine, Hugo, Seb, Agathe, Lorena ; ou même des rencontres aléatoires Sookie, Léa, PH, Florian, Auriane.

Les derniers remerciements vont à ceux dont le soutien inconditionnel et indéfectible me suit depuis tant d'années : Edith, Jean-Paul, Laure, Olivier et Olivia. Merci à vous, vous êtes une famille formidable.

Les dernières lignes vont traditionnellement au conjoint, je les dédie donc à celle qui partage ma vie aujourd'hui : ma chère théière (comment ça, "ça ne compte pas" ? ? ?).

Introduction

Sujet :

Cette thèse a pour vocation d'étudier les asymptotiques de suites de chaînes de Markov, en se focalisant sur l'étude d'une fonctionnelle additive d'une marche aléatoire sur un graphe (ou un multi-graphe) fini, afin d'exploiter les théorèmes ergodiques usuels. Cette technique est fortement inspirée de [2] et nous permet de décrire des asymptotiques doubles où nous faisons grandir à la fois le temps et l'indice de la suite de chaînes de Markov. Dans les modèles spécifiques que nous étudions, l'indice de cette suite correspond à la dimension du graphe sous-jacent.

Motivation et contexte :

Notre principale source d'inspiration est le modèle introduit dans [2] où K prisonniers enchaînés les uns aux autres se déplacent aléatoirement en respectant une contrainte de proximité liée à leurs chaînes. Ce modèle est un cas particulier de *spider random walks*, décrits dans la littérature comme des systèmes de particules se déplaçant de manière indépendante dans la limite d'une contrainte liée à leurs positions (voir par exemple [9]), ici la distance séparant deux prisonniers consécutifs. Néanmoins si le modèle des prisonniers semble avoir des liens avec plusieurs autres modèles connus – le modèle à 6 sommets, le processus d'exclusion simple – et des applications physiques concrètes – par exemple en informatique quantique [4] – il ne semble pas pour autant avoir livré tous ses secrets.

Dans [2] les auteurs parviennent à décrire le comportement asymptotique du prisonnier situé à l'extrémité de la chaîne quand le temps n tend vers l'infini et que le nombre de prisonniers K reste fixe, montrant une convergence vers un mouvement brownien dont le coefficient de diffusivité est explicite. Des travaux ultérieurs ont pu étendre ce résultat, d'abord dans [7] où la distance séparant les prisonniers situés aux deux extrémités est supposée constante ; puis dans [13] où l'auteur considère des lignes de fracture dans une structure cristalline du tore discret (le modèle des prisonniers se comporte comme les sections de cette structure cristalline).

Malgré tout on peut naturellement se demander si le comportement du modèle des prisonniers est préservé si à la fois le temps n **et** le nombre de prisonniers K tendent vers l'infini, ou si au contraire cette double asymptotique met en lumière un comportement différent.

Chronologiquement notre première approche fut l'étude d'une version simplifiée de ce modèle, que l'on peut ramener à une fonctionnelle d'une marche aléatoire simple sur un hypercube de dimension K. Il s'avère que cette fonctionnelle est une chaîne de Markov homogène de dimension 1, ce qui nous a permis de décrire explicitement l'asymptotique de ce processus quand le temps et la dimension de l'hypercube tendent vers l'infini, le point le plus intéressant étant que cette asymptotique dépend du comportement relatif des deux paramètres de temps et d'espace.

Si les résultats issus de l'étude de notre *toy model* ne se transposent pas aussi facilement au modèle des prisonniers que nous le croyions, nous avons néanmoins pu montrer une extension du comportement à K fixe dans un contexte où K grandit lentement par rapport au temps n. Nous ajoutons également plusieurs avancées et pistes de réflexion qui pourraient amener à parachever ces résultats, ainsi que les différents algorithmes que nous avons utilisés pour simuler ce processus.

Dans une volonté de prendre du recul face aux modèles étudiés, nous avons tenté de mettre au point un modèle plus général dans lequel nous pourrions transposer l'approche développée pour le modèle des prisonniers. Si ce modèle général est actuellement hors de notre portée nous avons pu donner un résultat dans un cas particulier, ainsi qu'utiliser des techniques classiques pour fournir un résultat préliminaire dans cette direction.

En collaboration avec Bernard Bercu, nous avons considéré une problématique semblable qui consiste à étudier les asymptotiques de marches aléatoires sur le réseau tridimensionnel du graphite, grâce aux techniques et idées développées pour les autres modèles. Nous nous sommes beaucoup appuyés sur des simulations informatiques afin de tester certaines conjectures et vérifier nos résultats.

Structure de la thèse :

L'organisation de cette thèse sera donc la suivante :

Le Chapitre 1 est consacré au modèle des prisonniers. Nous commençons par décrire le modèle et nos objectifs, ainsi que les outils que nous utiliserons le plus, notamment la décomposition de Hodge. Nous montrons quelques résultats mineurs sur la structure des graphes G_K qui permettent de décrire le modèle des prisonniers comme une fonctionnelle additive ainsi que sur la décomposition de Hodge de cette fonctionnelle qui permet d'extraire une partie martingale de ce processus. Ensuite nous cherchons à étendre le résultat de [2] dans le contexte d'une double asymptotique, d'abord en cherchant à appliquer la Proposition 2.3.5 issue de l'étude du cadre général décrit dans le Chapitre 2, puis en considérant une décomposition spectrale de notre processus et en exploitant une majoration des valeurs propres des graphes G_K. Cette dernière approche nous permet de montrer le Théorème 1.4.1, qui étend l'asymptotique décrite dans [2] à un cadre où n tend vers l'infini plus vite que Ke^K. Enfin nous fournissons une fonctionnelle markovienne qui permet de plonger le comportement des marches aléatoires sur les graphes G_K dans un seul et même espace, à l'instar de notre approche dans le Chapitre 4, car nous pensons que cette description est prometteuse pour une étude ultérieure de ce modèle. Nous donnons également les algorithmes qui nous ont permis de simuler le modèle des prisonniers de différentes manières, dans un but d'illustration ou pour tester d'éventuelles conjectures.

Le Chapitre 2 développe une classe de modèles dans lesquels nous pouvons utiliser l'approche introduite dans [2] et étendue dans le Chapitre 1. Le Théorème 2.2.1 permet de décrire l'asymptotique de ces modèles dans un cas très particulier qui n'est pas trivial, mais qui malheureusement ne correspond pas aux exemples que nous étudions dans les Chapitres 1 et 4. Enfin nous considérons une technique classique se basant sur les excursions d'une marche aléatoire autour d'un état récurrent positif pour montrer une convergence des processus considérés vers un mouvement brownien. Nous aboutissons alors à la Proposition 2.3.5 qui est certes perfectible mais qui pourrait, avec davantage de temps et d'efforts, aboutir à un résultat pertinent.

Le Chapitre 3 décrit nos travaux sur les marches aléatoires dans le réseau cristallin du graphite, qui sont à l'heure actuelle en cours de rédaction pour publication. Nous commençons par considérer une structure cristalline où les couches de graphène sont empilées parallèlement les unes au-dessus des autres, en positionnant chaque sommet à la verticale d'un sommet des autres couches. Cette structure est certes peu présente dans la nature, mais nous semble être une étape intermédiaire intéressante entre le graphène plan étudié dans [6] et nos résultats dans la structure dite *graphite-2H*, où les couches de graphène sont décalées les unes par rapport aux autres. Nous fournissons également les simulations concernant les marches aléatoires dans le graphène et le graphite afin d'illustrer nos résultats.

Le Chapitre 4 est consacré à nos travaux (publiés dans [15]) sur le *toy model* que nous avons étudié dans le but de mieux comprendre le modèle des prisonniers. Il consiste à ôter aux graphes G_K du Chapitre 1 toutes les arêtes qui ne sont pas celles d'un hypercube de dimension K. En conservant la même fonctionnelle additive sur ces sous-graphes, nous remarquons que dans ce cas particulier la partie martingale donnée par la décomposition de Hodge est nulle, et notre fonctionnelle additive devient une chaîne de Markov homogène, à savoir la somme des coordonnées d'une marche aléatoire simple sur l'hypercube de dimension K. Si ce modèle est très semblable au modèle des urnes d'Ehrenfest, nous pouvons nous attendre à retrouver le résultat bien connu (voir par exemple [5]) d'une convergence vers un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dans le cas où $n = K$. Ainsi nous commençons par étendre ce résultat dans un régime intermédiaire où $\frac{n}{K}$ tend vers une constante dans le Théorème 4.3.1, avant de montrer le Théorème 4.4.1 qui décrit une convergence vers un bruit blanc gaussien dans le régime rapide (n grandit plus vite que K) et enfin une convergence vague vers un mouvement brownien stationnaire dans le régime lent détaillée dans le Théorème 4.5.1.

Table des matières

1 Modèle des prisonniers **9**
1.1 Modèle de chaîne de prisonniers . . . 9
1.1.1 Description du modèle . . . 9
1.1.2 Définitions et objectif . . . 10
1.1.3 Degré des sommets dans G_K . . . 12
1.1.4 Décomposition de Hodge . . . 13
1.2 Asymptotique de la forme de la chaîne de prisonniers . . . 15
1.2.1 Asymptotique de $f_K(Y_K(0))$ . . . 15
1.2.2 Centre de masse . . . 19
1.3 Kurtosis de B_K . . . 20
1.3.1 Espérance des produits de la forme $\epsilon\delta$ . . . 20
1.3.2 Expression des termes de (1.14) . . . 23
1.3.3 Synthèse . . . 24
1.4 Extension du résultat avec une croissance de K lente . . . 24
1.5 Fonctionnelle markovienne . . . 28
1.6 Simulations . . . 31
1.6.1 Méthode classique . . . 31
1.6.2 Méthode avec rejet . . . 34
1.6.3 Méthode avec listes d'incidence . . . 37

2 Généralisation du modèle des prisonniers **41**
2.1 Modèle général . . . 41
2.1.1 Définitions et notations . . . 41
2.1.2 Objectif . . . 43
2.2 Un cas particulier selon l'asymptotique du champ de vecteurs . . . 44
2.2.1 Exemples d'applications . . . 45
2.3 Approche via les excursions . . . 46
2.3.1 Excursions incomplètes . . . 47
2.3.2 Excursions complètes . . . 48
2.3.3 Résultats . . . 50

3 Graphite **52**
3.1 Motivation et rappels . . . 52
3.2 Réseau formé de couches de graphène parallèles . . . 53
3.2.1 Modèle et notations . . . 53
3.2.2 Loi des grands nombres . . . 54
3.2.3 Théorème central limite . . . 56
3.3 Graphite-2H, empilement de type ABAB . . . 58
3.3.1 Modèle et notations . . . 58
3.3.2 Multi-graphe et loi des grands nombres . . . 59
3.3.3 Décomposition de Hodge et TCL . . . 60
3.3.4 Limite d'échelle . . . 63
3.4 Simulations . . . 64
3.4.1 Graphène . . . 64
3.4.2 Graphite - Empilement AAAA . . . 65
3.4.3 Graphite - Empilement ABAB . . . 69

4 Hypercube **74**
4.1 Introduction 74
4.2 The model 74
4.3 Intermediate regime 75
4.4 Fast regime 77
4.5 Slow regime 81
4.A Appendix 1 : Proof of Lemma 4.4.1 85

Chapitre 1

Modèle des prisonniers

Dans ce Chapitre nous allons nous intéresser au modèle aléatoire de "prisonniers" introduit par [2], dans l'optique d'en décrire le comportement dans une double asymptotique.

1.1 Modèle de chaîne de prisonniers

1.1.1 Description du modèle

Soit $(Z_n^{(1)}, ..., Z_n^{(K+1)})$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^{K+1}$ conditionnée pour satisfaire la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1, K]\!] : \left|Z_n^{(i+1)} - Z_n^{(i)}\right| = 1. \tag{1.1}$$

Autrement dit, cette marche aléatoire est une chaîne de Markov $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'espace $\mathcal{S}_K$ des valeurs d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ arrêtée au temps K :

$$\mathcal{S}_K = \{(x^{(1)}, ..., x^{(K+1)}) \in \mathbb{Z}^{(K+1)} / \forall i \in [\![1, K]\!] : |x^{(i+1)} - x^{(i)}| = 1\}$$

telle que la loi de x_1 sachant x_0 est la loi uniforme sur :

$$Vois(x_0) = \left\{x \in \mathcal{S}_K / \forall i \in [\![1, K]\!] : (x^{(i)} - x_0^{(i)}) \in \{-1, 1\}\right\}. \tag{1.2}$$

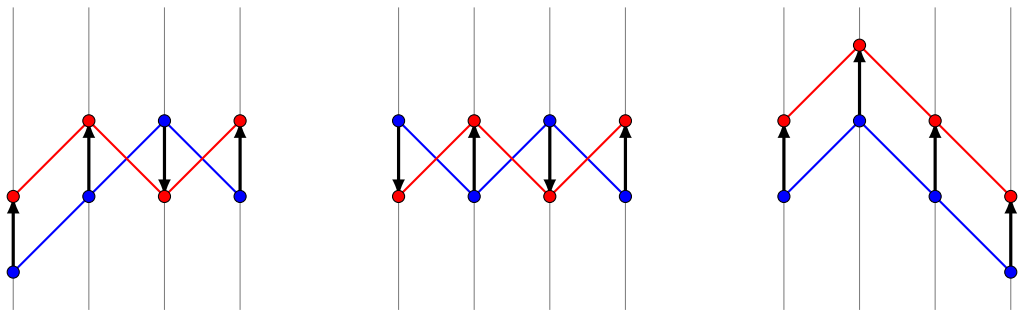


FIGURE 1.1 – Exemples de transitions possibles pour le modèle de "prisonniers" pour $K = 3$

Si ce modèle peut être vu comme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^{K+1}$ conditionnée pour satisfaire une contrainte de forme, nous allons privilégier une description équivalente du modèle (cette équivalence étant montrée en détail dans [2]).

Definition 1.1.1. *Soit $V_K \overset{def}{=} \{-1, 1\}^K$, nous allons définir deux ensembles d'arêtes $E_K^+, E_K^- \in V_K \times V_K$ respectivement dites "positives" et "négatives".*

Un couple $(a, b) \in V_K \times V_K$ avec $a \neq b$ appartient à E_K^+ si les coordonnées non nulles du vecteur $(b - a) \in \{-2, 0, 2\}^K$ sont de signes alternés avec le premier signe négatif, *et pour tout sommet $a \in V_K$ il y a une arête de a vers lui-même dans E_K^+ notée $(a, a)^+$.*

De la même manière, un couple $(a,b) \in V_K \times V_K$ avec $a \neq b$ appartient à E_K^- si les coordonnées non nulles du vecteur $(b-a) \in \{-2,0,2\}^K$ sont de signes alternés avec le premier signe positif, *et pour tout sommet $a \in V_K$ il existe une boucle de a vers lui-même dans E_K^- notée $(a,a)^-$.*

On définit alors pour tout $K \in \mathbb{N}$ le multi-graphe $G_K \overset{def}{=} (V_K, E_K)$, où $E_K \overset{def}{=} E_K^+ \cup E_K^-$.

Exemple. *La Figure 1.2 illustre pour K allant de 1 à 3 toutes les arêtes présentes dans E_K^+, à l'exception des boucles $(v,v)^+$ présentes à chaque sommet $v \in V_K$. Remarquons que d'après la Définition 1.1.1 alors $(a,b) \in E_K^+ \Leftrightarrow (b,a) \in E_K^-$, c'est pour cela que nous n'avons représenté que les arêtes dans E_K^+ pour alléger les illustrations.*

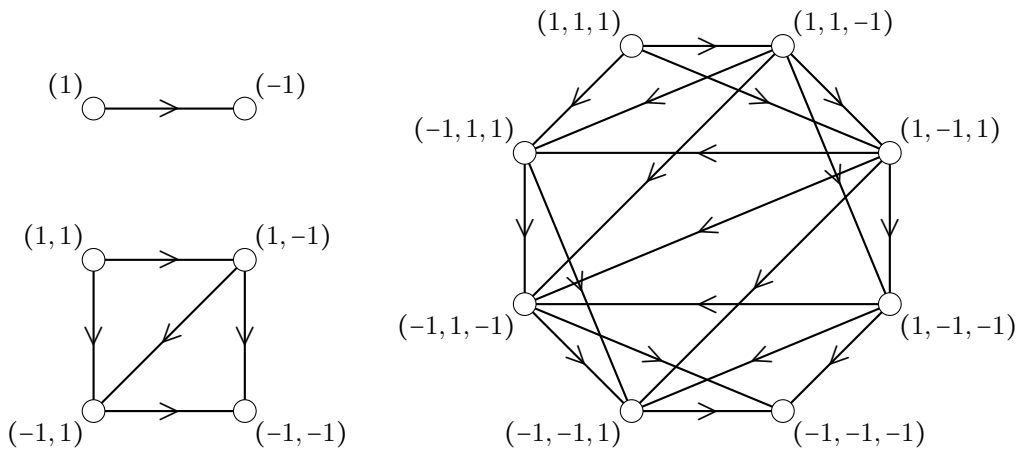


FIGURE 1.2 – (V_K, E_K^+) sans les boucles pour $K \in \{1,2,3\}$

L'idée derrière cette définition est d'étudier $(Z_n^{(1)}, ..., Z_n^{(K+1)})$ par l'intermédiaire de la première coordonnée $Z_n^{(1)}$ et de la forme de la "chaîne de prisonniers" $Y_K(n) \overset{def}{=} \left(Z_n^{(2)} - Z_n^{(1)}, \ldots, Z_n^{(K+1)} - Z_n^{(K)}\right)$, cette dernière étant toujours un élément de V_K (à cause de la contrainte (1.1)). La définition de E_K prend alors tout sens puisqu'elle permet de décrire toutes les transitions possibles qui satisfont à la fois les contraintes (1.1) et (1.2) (les boucles de la forme $(a,a)^\pm$ correspondent au cas où tous les prisonniers se déplacent dans la même direction). La distinction entre E_K^+ et E_K^- permet de discriminer ces transitions selon le déplacement du premier prisonnier. Ainsi en notant A_K la fonction sur E_K valant 1 sur E_K^+ et -1 sur E_K^-, autrement dit :

$$\forall \Delta \in E_K : A_K(\Delta) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \in E_K^+ \\ -1 & \text{si } \Delta \in E_K^- \end{cases} = \mathbb{1}_{E_K^+}(\Delta) - \mathbb{1}_{E_K^-}(\Delta)$$

alors la position du premier marcheur est donnée par $Z_n^{(1)} = Z_0^{(1)} + \sum_{i=1}^n A_K(\Delta_i)$ où les Δ_i désigneraient les changements de forme de la chaîne de prisonniers.

Cette description du modèle via les graphes G_K facilite grandement son étude, c'est pourquoi nous allons privilégier cette approche dans tout le reste du document. Notons que nous considérerons parfois les éléments de V_K comme des chaînes de caractères plutôt que des K-uplets afin d'alléger les preuves qui se basent sur les propriétés récursives des graphes G_K.

1.1.2 Définitions et objectif

On considère $(Y_K(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur G_K et pour tout $k \geq 1$ on note Δ_k l'arête parcourue entre $Y_K(k-1)$ et $Y_K(k)$ (afin de pouvoir identifier les arêtes parcourues quand il y en a plusieurs allant de $Y_K(k-1)$ à $Y_K(k)$).

On définit les processus $(Z_{n,K}(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{K+1}$ définis par :

$$Z_{n,K}^{(i)}(t) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} A_K(\Delta_k) + \sum_{j=1}^{i-1} Y_K^{(j)}(\lfloor nt \rfloor) \tag{1.3}$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, K+1$ et $t \geq 0$. La première somme désignant la position du premier marcheur (qui est une fonctionnelle additive des changements de formes) tandis que la seconde permet de retrouver les positions des autres prisonniers en ajoutant une partie des coordonnées de $Y_K(\lfloor nt \rfloor)$.

Nous nous intéresserons principalement au comportement de $\left(Z^{(1)}_{n,K}(t)\right)_{t\geq 0}$ quand n et K tendent vers l'infini. Notons que $Z^{(1)}_{n,K}(0) = 0$ p.s..

Dans [2] les auteurs montrent le résultat suivant :

Théorème 1.1.1 (Théorème 1 de [2]). *Pour tout $K \geq 1$ fixé :*

$$\left(\frac{Z^{(1)}_{n,K}(t)}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (\sigma_K \times B_t)_{t\geq 0}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard et $\sigma_K^2 \overset{def}{=} \frac{2}{K+2}$.

Nous cherchons à étendre ce résultat, mais dans un contexte où K irait lui aussi vers l'infini.

Nous supposerons que $Y_K(0)$ est distribué selon l'unique mesure stationnaire de la marche aléatoire de G_K que nous noterons μ_K. On peut facilement vérifier que μ_K est la mesure de probabilité sur V_K proportionelle au degré des sommets, ou de manière équivalente l'unique loi telle que Δ_1 suive la loi uniforme sur E_K. Néanmoins nous allons beaucoup faire appel à la description alternative suivante de cette loi μ_K :

Lemme 1.1.1 (Description séquentielle issue de [3]). *Soient ϵ une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher (i.e. $\mathbb{P}(\epsilon = -1) = \mathbb{P}(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$), $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ et $(\beta_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de Rademacher. Toutes ces variables sont prises mutuellement indépendantes, et on définit $\forall k \geq 1$:*

$$\gamma_k = \epsilon(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i}$$

avec la convention $\gamma_1 = \epsilon$.

On pose alors, pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= (1-\alpha_k)\beta_k + \alpha_k\gamma_k \\ b_k &= (1-\alpha_k)\beta_k - \alpha_k\gamma_k \end{aligned}$$

La loi du couple $((a_k)_{1\leq k\leq K}, (b_k)_{1\leq k\leq K})$ est la loi uniforme sur E_K, autrement dit si on note $(a,b)_K$ l'arête définie par :

$$(a,b)_K \overset{def}{=} \begin{cases} ((a_k)_{1\leq k\leq K}, (b_k)_{1\leq k\leq K}) & si\ (a_k)_{1\leq k\leq K} \neq (b_k)_{1\leq k\leq K} \\ ((a_k)_{1\leq k\leq K}, (a_k)_{1\leq k\leq K})^{\epsilon} & si\ (a_k)_{1\leq k\leq K} = (b_k)_{1\leq k\leq K} \end{cases}$$

alors $(a,b)_K \overset{\mathcal{L}}{=} \Delta_1$. En particulier $(a_k)_{1\leq k\leq K} \overset{\mathcal{L}}{=} Y_K(0)$.

Démonstration. Notons pour simplifier $a = (a_k)_{1\leq k\leq K}$ et $b = (b_k)_{1\leq k\leq K}$.

Commençons par montrer que $(a,b) \in E_K$. Si on considère le vecteur $\delta = (b-a)$ on remarque que $\delta_k = -2\alpha_k\gamma_k$, donc $\delta \in \{-2,0,2\}^K$ et ses coordonnées non nulles (pour lesquelles $\alpha_k = 1$) sont du signe de $-\gamma_k$, qui par construction change de signe à chaque fois que α_k vaut 1. Donc (a,b) appartient bien à E_K.

A présent montrons par récurrence sur $K \geq 1$ que $\forall (u,v) \in E_K$ on a $\mathbb{P}((a,b) = (u,v)) = \frac{1}{D_K}$ avec $D_K \overset{def}{=} |E_K| = 2 \times 3^K$.

- *Initialisation :* Pour $K = 1$ on a $D_1 = 6$ et on trouve facilement que $\mathbb{P}((a,b) = (1,-1)) = \mathbb{P}(\alpha_1 = 1 \cap \epsilon = 1) = \frac{1}{6}$, idem pour $(-1,1)$. Pour les boucles, on a $\mathbb{P}((a,b) = (1,1)^+) = \mathbb{P}(\alpha_1 = 0 \cap \beta_1 = 1) = \frac{1}{6}$. En réitérant ces calculs pour les autres sommets on obtient que $\mathbb{P}((a,b) = (u,v)) = \frac{1}{D_1}$ pour tout $(u,v) \in E_1$.
- *Hérédité :* On admet le résultat pour K, et on regarde le problème via la concaténation **à droite**. Ainsi on a :

$$\mathbb{P}((a,b) = (u'1, v'1)) = \mathbb{P}((a',b') = (u',v') \cap \alpha_{K+1} = 0 \cap \beta_{K+1} = 1) = \frac{1}{D_K} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{D_{K+1}}$$

  avec a' et b' les K premières coordonnées de a et de b. On obtient le même résultat en concaténant -1 aux deux vecteurs. En revanche si on change la $(K+1)$-ème coordonnée il n'y a qu'une seule

combinaison possible (qui dépend de (u', v')), mais la construction de γ_{K+1} permet d'avoir la bonne paire de valeurs. La probabilité que (a, b) change sa dernière coordonnée vaut $\mathbb{P}(\alpha_{K+1} = 1) = \frac{1}{3}$, et la probabilité que (a, b) soit une arête (u, v) dont la dernière coordonnée change vaut alors $\frac{1}{3} \times \frac{1}{D_K} = \frac{1}{D_{K+1}}$. On a donc bien $\mathbb{P}((a, b) = (u, v)) = D_{K+1}^{-1}$ pour tout $(u, v) \in E_K$.

□

1.1.3 Degré des sommets dans G_K

Dans cette section nous allons appréhender davantage la structure de G_K en étudiant le degré des sommets dans ce graphe. Nous voulons expliciter le degré de $v \in V_K$ à partir de son expression, mais pour cela il nous faut introduire les notations suivantes :

Definition 1.1.2. *Pour tout $v \in V_K$ on note :*

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \#\{a \in V_K / (v, a) \in E_K^+\} \\ \bar{\alpha}(v) &= \#\{a \in V_K / (v, a) \in E_K^-\} \end{aligned}$$

Ainsi $\alpha(v)$ désigne le degré de v dans $G_K^+ \overset{def}{=} (V_K, E_K^+)$, $\bar{\alpha}(v)$ celui dans $G_K^- \overset{def}{=} (V_K, E_K^-)$ et enfin dans G_K le degré de v est simplement $deg(v) = \alpha(v) + \bar{\alpha}(v)$.

Lemme 1.1.2. *Pour tout $K \geq 1$ et $v \in V_K$ on a :*

$$\begin{pmatrix} \alpha(v) \\ \overline{\alpha}(v) \end{pmatrix} = M(v^{(1)}) \times M(v^{(2)}) \times \ldots \times M(v^{(K)}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Montrons cette égalité à l'aide d'une récurrence sur $K \geq 1$.

- *Initialisation :* Pour $K = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha(1) \\ \bar{\alpha}(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha(-1) \\ \bar{\alpha}(-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  donc la propriété est vraie pour $K = 1$.

- *Hérédité :* On sait grâce à la construction récursive de G_{K+1} à partir de G_K que pour tout $v \in V_K$:

$$\alpha(1v) = \alpha(v) + \overline{\alpha}(v), \quad \overline{\alpha}(1v) = \overline{\alpha}(v), \quad \alpha(-1v) = \alpha(v) \text{ et } \overline{\alpha}(-1v) = \alpha(v) + \overline{\alpha}(v) \tag{1.4}$$

  où $1v \in V_{K+1}$ (respectivement $-1v \in V_{K+1}$) désigne la concaténation d'un 1 (resp. -1) devant le vecteur $v \in V_K$.
  D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha(1v) \\ \overline{\alpha}(1v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha(v) \\ \overline{\alpha}(v) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha(-1v) \\ \overline{\alpha}(-1v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha(v) \\ \overline{\alpha}(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  D'où $\begin{pmatrix} \alpha(\epsilon v) \\ \bar{\alpha}(\epsilon v) \end{pmatrix} = D(\epsilon) * \begin{pmatrix} \alpha(v) \\ \bar{\alpha}(v) \end{pmatrix}$ pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Par récurrence l'égalité est vraie pour tout $K \geq 1$. □

Nous pouvons alors utiliser cette expression du degré pour déterminer quels sommets ont respectivement le plus petit et le plus grand degré dans G_K.

Proposition 1.1.1. *Pour tout $K \geq 1$, si on note $1_K \overset{def}{=} (1, 1, 1, ..., 1, 1) \in V_K$ et $\Lambda_K = (1, -1, 1, -1, ...) \in V_K$ alors pour tout $v \in V_K$ on a :*

$$K + 2 = deg(1_K) \leq deg(v) \leq deg(\Lambda_K) = u_{K+3}$$

où $(u_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite de Fibonacci définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Démonstration. On commence par utiliser le Lemme 1.1.2 pour expliciter $deg(1_K)$ à savoir :

$$deg(1_K) = \alpha(1_K) + \overline{\alpha}(1_K) = (1,1) \times M(1)^K \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1) \times \begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = K + 2.$$

Pour $deg(\Lambda_K)$ il suffit de regrouper les matrices par 2 pour ne regarder que les puissances de $M(1) \times M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut montrer par une récurrence immédiate que pour tout $k \geq 1$ on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} u_{2k+1} & u_{2k} \\ u_{2k} & u_{2k-1} \end{pmatrix}$$

et donc si K est pair :

$$\begin{pmatrix} \alpha(\Lambda_K) \\ \overline{\alpha}(\Lambda_K) \end{pmatrix} = M(1) \times M(-1) \times M(1) \ldots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (M(1) \times M(-1))^{\frac{K}{2}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{K+1} & u_K \\ u_K & u_{K-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{K+2} \\ u_{K+1} \end{pmatrix}$$

et donc $deg(\Lambda_K) = u_{K+2} + u_{K+1} = u_{K+3}$. Dans le cas où K est impair on trouve de manière similaire :

$$\begin{pmatrix} \alpha(\Lambda_K) \\ \overline{\alpha}(\Lambda_K) \end{pmatrix} = (M(1)M(-1))^{\frac{K-1}{2}} \times M(1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_K & u_{K-1} \\ u_{K-1} & u_{K-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_K & u_{K+1} \\ u_{K-1} & u_K \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{K+2} \\ u_{K+1} \end{pmatrix}$$

ce qui amène au même résultat pour $deg(\Lambda_K)$.

A présent montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 sur $K \geq 1$ que 1_K et Λ_K sont les sommets ayant respectivement le plus petit et le plus grand degré dans G_K.

- *Initialisation :* Pour $K = 1$ on a $V_1 = \{-1, 1\}$ et on peut vérifier pour ces deux sommets que $deg(1) = deg(-1) = 3 = K + 2 = u_{K+3}$, donc les inégalités larges sont vraies.
  Pour $K = 2$ on peut lister les quatre sommets et voir que :
  $$K + 2 = 4 = deg(1,1) = deg(-1,-1) < deg(1,-1) = deg(-1,1) = 5 = u_{K+3}$$
  donc l'encadrement $K + 2 \leq deg(v) \leq u_{K+3}$ est vrai pour $K = 2$.
- *Hérédité :* Soit $v \in V_K$ (avec $K \geq 2$), notons $v' \in V_{K-1}$ le sommet tel que $v = (\pm 1 v')$ et de manière similaire $v'' \in V_{K-2}$ tel que $v' = (\pm 1 v'')$. D'après l'hypothèse de récurrence on a :
  $$K \leq deg(v'') \leq u_{K+1} \text{ et } K + 1 \leq deg(v') \leq u_{K+2}.$$
  En utilisant les relations (1.4) on peut écrire :
  $$deg(v) = \alpha(v) + \overline{\alpha}(v) = \alpha(v') + \beta(v') + \overline{\alpha}(v')$$
  où $\beta(v')$ désigne $\alpha(v')$ ou $\overline{\alpha}(v')$ selon la valeur de la première coordonnée de v. Il est évident que $\beta(v') \geq 1$ (car il y a au moins la boucle $(v', v')^{\pm}$ respectivement dans $E_K^{\pm}$) et donc
  $$deg(v) = deg(v') + \beta(v') \geq K + 1 + 1 = K + 2.$$
  Pour la majoration il faut remarquer que $\beta(v') \leq deg(v'')$, car $\beta(v')$ vaut soit $\alpha(v'')$, soit $\overline{\alpha}(v'')$ soit $\alpha(v'') + \overline{\alpha}(v'') = deg(v'')$. Ainsi :
  $$deg(v) = deg(v') + \beta(v') \leq deg(v') + deg(v'') \leq u_{K+2} + u_{K+1} = u_{K+3}.$$

Par récurrence l'encadrement est vrai pour tout $K \geq 1$. □

1.1.4 Décomposition de Hodge

Les auteurs de [2] introduisent la notion de **champ de vecteurs** sur G_K, qui sont les fonctions $S : E_K \to \mathbb{R}$ telles que $S(u,v) = -S(v,u)$ (et $S((a,a)^+) = -S((a,a)^-)$ pour les boucles) et montrent dans leur Proposition 2 que tout champ de vecteurs admet une unique décomposition de la forme $S = \nabla f + B$, où B est un champ de vecteurs de divergence nulle, i.e. :

$$\forall u \in V_K \ \ (\nabla \cdot B)(u) \overset{def}{=} \sum_{(u,v) \in E_K} B(u,v) = 0,$$

∇f est un champ de vecteurs défini à partir d'une fonction $f : V_K \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (u,v) \in E_K \ \nabla f((u,v)) \overset{def}{=} f(v) - f(u)$$

et ces deux champs de vecteurs sont orthogonaux pour le produit scalaire dans E_K défini par :

$$\langle S_1, S_2 \rangle_{E_K} \overset{def}{=} \frac{1}{D_K} \sum_{e \in E_K} S_1(e) S_2(e).$$

Plus précisément :

$$\langle B, \nabla f \rangle_{E_K} \overset{def}{=} \frac{1}{D_K} \sum_{e \in E_K} B(e) \nabla f(e) = 0.$$

Ainsi la fonction A_K qui nous intéresse étant un champ de vecteurs on peut la décomposer sous la forme $A_K = B_K + \nabla f_K$ comme décrit précédemment.

Le principal intérêt de cette décomposition est que lorsqu'on somme les valeurs de A_K le long de la trajectoire d'une marche aléatoire sur G_K, la fonction B_K sera un accroissement de martingale tandis que ∇f_K fournira une somme télescopique facile à borner (que l'on peut donc considérer négligeable quand $n \to \infty$ mais que K reste fixe). Les auteurs de [2] fournissent également une formule explicite pour f_K, à savoir :

$$\forall v \in V_K, \ f_K(v) = \sum_{i=1}^{K} F_K(i) \mathbb{1}_{v^{(i)}=-1} \text{ où } F_K(i) \overset{def}{=} \frac{3 + 2(K-i)}{K+2}. \tag{1.5}$$

Notons que si nous utiliserons peu le produit scalaire $\langle ., . \rangle_{E_K}$, il permet d'introduire une norme pour les champs de vecteurs qui est intéressante, en particulier :

$$\|B_K\|^2 \overset{def}{=} \langle B_K, B_K \rangle_{E_K} = \frac{2}{K+2} = \sigma_K^2.$$

Nous allons tâcher de majorer les deux fonctions B_K et ∇f_K afin de savoir si l'une d'entre elles peut être considérée négligeable dans les asymptotiques qui nous intéressent. Commençons par f_K étant donné que nous avons la formule explicite (1.5) à disposition.

Proposition 1.1.2. *Pour tout $K \in \mathbb{N}$ si on note $v_+ \overset{def}{=} (1, 1, \ldots, 1) \in V_K$ et $v_- \overset{def}{=} (-1, -1, \ldots, -1) \in V_K$ alors pour tout $v \in V_K$ on a :*

$$0 = f_K(v_+) \leq f_K(v) \leq f_K(v_-) = K.$$

Démonstration. L'encadrement repose sur les deux observations suivantes : $F_K(i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq K$ et surtout :

$$\sum_{i=1}^{K} F_K(i) = \sum_{i=1}^{K} \frac{3 + 2K - 2i}{K+2} = \frac{3K + 2K^2}{K+2} - \frac{K^2 + K}{K+2} = \frac{K^2 + 2K}{K+2} = K.$$

Ainsi on trouve facilement que :

$$0 = \sum_{i=1}^{K} 0 = \sum_{i=1}^{K} F_K(i) \mathbb{1}_{v_+^{(i)}=-1} \leq \sum_{i=1}^{K} F_K(i) \mathbb{1}_{v^{(i)}=-1} \leq \sum_{i=1}^{K} F_K(i) \mathbb{1}_{v_-^{(i)}=-1} = \sum_{i=1}^{K} F_K(i) = K.$$

□

A présent nous sommes à même de majorer le plus finement possible les fonction ∇f_K et B_K.

Proposition 1.1.3. *Pour tout $K \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\sup_{e \in E_K} |\nabla f_K(e)| = \frac{2K+1}{K+2} \ \textit{et} \ \sup_{e \in E_K} |B_K(e)| = 1.$$

Démonstration. Soit $e = (u, v) \in E_K$. On sait que :

$$\nabla f_K(e) = f_K(v) - f_K(u) = \sum_{i=1}^{K} F_K(i) \times \left(\mathbb{1}_{v^{(i)}=-1} - \mathbb{1}_{u^{(i)}=-1} \right).$$

Une simple disjonction de cas permet de voir que $(\mathbb{1}_{v^{(i)}=-1} - \mathbb{1}_{u^{(i)}=-1}) = \frac{u_i - v_i}{2}$. Notons N le cardinal de $\{1 \le i \le K : u_i \neq v_i\}$ et appelons $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_N \le K$ les éléments de cet ensemble. Puisque $(u, v) \in E_K$ alors les valeurs non nulles de $u_i - v_i$ ont des signes alternés et $A_K(e) = \frac{u_{i_1} - v_{i_1}}{2}$, donc pour tout $1 \le j \le N$ on a :

$$\frac{u_{i_j} - v_{i_j}}{2} = (-1)^{j-1} \times \frac{u_{i_1} - v_{i_1}}{2} = (-1)^{j-1} A_K(e).$$

On en déduit facilement que :

$$\nabla f_K(e) = A_K(e) \sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1}.$$

Or on sait que pour tout $1 \le i < j \le K$ on a :

$$2 > \frac{2K+1}{K+2} = F_K(1) \ge F_K(i) > F_K(j) \ge F_K(K) = \frac{3}{K+2} > 0.$$

Donc en regroupant les termes deux à deux on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1} = \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (F_K(i_{2k-1}) - F_K(i_{2k})) + F_K(i_N)\mathbb{1}_{\{N \text{ est impair}\}} \ge 0 \tag{1.6}$$

car tous les termes dans la somme sont positifs, et de la même manière :

$$\sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1} = F_K(i_1) + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (F_K(i_{2k+1}) - F_K(i_{2k})) - F_K(i_N)\mathbb{1}_{\{N \text{ est pair}\}} \le F_K(i_1) < 2. \tag{1.7}$$

Ainsi $|\nabla f_K(e)| \le F_K(1)$, cette borne supérieure est atteinte sur les arêtes qui ne changent que la première coordonnée, d'où $\sup_{e \in E_K} |\nabla f_K(e)| = F_K(1) = \frac{2K+1}{K+2}$.

Pour B_K rappelons que $B_K = A_K + \nabla f_K$ donc :

$$B_K(e) = A_K(e) - \sum_{i=1}^{n} F_K(i) \frac{u_i - v_i}{2} = A_K(e) \times \left(1 - \sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1}\right).$$

En combinant (1.7) et (1.6), on obtient $0 \le \sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1} < 2$ et grâce à cet encadrement on peut montrer que :

$$\left|B_K(e)\right| = \left|A_K(e) \times \left(1 - \sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1}\right)\right| = \left|1 - \sum_{j=1}^{N} F_K(i_j)(-1)^{j-1}\right| \le 1.$$

De plus $B_K((a,a)^+) = A_K((a,a)^+) = 1$ pour n'importe quel $a \in V_K$, donc cette borne est atteinte et donc $\sup_{e \in E_K} |B_K(e)| = 1$. □

1.2 Asymptotique de la forme de la chaîne de prisonniers

1.2.1 Asymptotique de $f_K(Y_K(0))$

La décomposition $A_K = B_K + \nabla f_K$ permet de décrire facilement la position du premier prisonnier comme une somme d'une martingale et d'une somme télescopique. Si cette dernière peut facilement être considérée négligeable quand on considère que K est fixe, l'étude dans le contexte où $K \to \infty$ réclame d'appréhender un peu mieux le comportement asymptotique de $f_K(Y_K(n))$, que l'on peut ramener à l'étude de $f_K(Y_K(0))$ par stationnarité de $(Y_K(n))_n$.

Commençons par remarquer que sous la mesure invariante μ_K chaque coordonnée $Y_K^{(i)}(0)$, lorsqu'elle est prise séparément, suit une loi de Rademacher. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_K(Y_K(0))] &= \sum_{i=1}^{K} \frac{3 + 2(K-i)}{K+2} \mathbb{P}\left(Y_K^{(i)}(0) = -1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{K} \frac{3 + 2(K-i)}{2(K+2)} = \frac{K}{2}.\end{aligned}$$

Comme f_K est définie à une constante additive près, on va introduire la fonction suivante pour $v \in V_K$:

$$\tilde{f}_K(v) \overset{def}{=} f_K(v) - \mathbb{E}[f_K(Y_K(0))] = f_K(v) - \frac{K}{2}$$

afin d'avoir une fonction d'espérance nulle pour la mesure invariante μ_K. Cela ne changera rien au processus qui nous intéresse puisque $\nabla \tilde{f}_K$ et ∇f_K coïncident sur tout E_K.

On cherche à comprendre le comportement de $\tilde{f}_K$ (et indirectement de f_K) quand K devient grand en étudiant la convergence éventuelle de $f_K(Y_K(0))$ quand $K \to \infty$, où $Y_K(0)$ suit la loi μ_K.

Pour cela on pose les deux fonctions suivantes sur $V_K = \{-1, 1\}^K$:

$$h_1(v) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{K} v_i \qquad \text{et} \qquad h_2(v) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{K} i v_i$$

et nous allons exprimer d'une autre manière la valeur de $\tilde{f}_K(v)$ à l'aide des fonctions h_1 et h_2 :

Proposition 1.2.1. *Pour tout $v \in V_K$, on a :*

$$\tilde{f}_K(v) = \left(-1 + \frac{1}{2(K+2)}\right) h_1(v) + \frac{1}{K+2} h_2(v).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_K(v) = f_K(v) - \frac{K}{2} &= \sum_{i=1}^{K} \frac{3+2(K-i)}{K+2} \mathbb{1}_{v_i=-1} - \sum_{i=1}^{K} \frac{3+2(K-i)}{2(K+2)} \\
&= \sum_{i=1}^{K} \frac{3+2(K-i)}{K+2} \left(\mathbb{1}_{v_i=-1} - \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{K} \frac{3+2(K-i)}{K+2} \times \frac{-v_i}{2} \\
&= \frac{-2K-3}{2(K+2)} \sum_{i=1}^{K} v_i + \frac{1}{2(K+2)} \sum_{i=1}^{K} i v_i \\
&= \left(-1 + \frac{1}{2(K+2)}\right) h_1(v) + \frac{1}{K+2} h_2(v).
\end{aligned}$$

□

Une fois que l'on a exprimé $\tilde{f}_K$ en fonction de h_1 et h_2, on obtient une expression plus malléable pour étudier le comportement asymptotique de $\tilde{f}_K(Y_K(0))$ quand $K \to \infty$.

Théorème 1.2.1.

$$\frac{\tilde{f}_K(Y_K(0))}{\sqrt{K}} \xrightarrow[K\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{9}\right).$$

Démonstration. On sait grâce à la Proposition 1.2.1 que :

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{f}_K(Y_K(0))}{\sqrt{K}} &= -\frac{h_1(Y_K(0))}{\sqrt{K}} + \frac{h_1(Y_K(0))}{2\sqrt{K}(K+2)} + \frac{h_2(Y_K(0))}{\sqrt{K}(K+2)} \\
&\overset{def}{=} \quad H_1(K) \quad + \quad H_1'(K) \quad + \quad H_2(K).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Étant donné que h_1 désigne la somme des coordonnées, on a $|h_1(Y_K(0))| \leq K$ p.s., donc :

$$H_1'(K) = \frac{h_1(Y_K(0))}{2\sqrt{K}(K+2)} \xrightarrow[K\to\infty]{p.s.} 0.$$

A présent nous devons expliciter le comportement des termes $H_1(K)$ et $H_2(K)$ dans (1.8), en remplaçant $Y_K(0)$ par les $(a_k)_{1\leq k\leq K}$ issus du Lemme 1.1.1. Pour $H_1(K)$ on trouve :

$$H_1(K) = -\frac{h_1((a_k)_{1\leq k\leq K})}{\sqrt{K}} = -\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} a_i = -\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \gamma_i - \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} (1-\alpha_i)\beta_i. \tag{1.9}$$

Par construction des γ_k, on trouve que $\sum_{i=1}^{K} \alpha_i \gamma_i \in \{-1, 0, 1\}$, donc une fois divisé par $\sqrt{K}$ cette somme va tendre vers 0 presque sûrement quand K tend vers l'infini.

De la même manière on trouve pour le terme $H_2(K)$:

$$H_2(K) = \frac{h_2((a_k)_{1\le k\le K})}{\sqrt{K}(K+2)} = \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)} \sum_{i=1}^{K} i a_i = \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)} \sum_{i=1}^{K} i\alpha_i\gamma_i + \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)} \sum_{i=1}^{K} i(1-\alpha_i)\beta_i. \tag{1.10}$$

Penchons-nous plus en détail sur le comportement de $\sum_{i=1}^{K} i\alpha_i\gamma_i$.

Lemme 1.2.1. *Avec les notations du Lemme 1.1.1, on a :*

$$\left| \sum_{i=1}^{K} i\alpha_i\gamma_i \right| \le K \qquad p.s.. \tag{1.11}$$

Démonstration. Notons N_K le cardinal (aléatoire) de $\{1 \le i \le K : \alpha_i = 1\}$ et s'il est non nul notons $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{N_K} \le K$ les éléments de cet ensemble. On peut alors écrire :

$$\sum_{i=1}^{K} i\alpha_i\gamma_i = \epsilon \sum_{k=1}^{N_K} i_k(-1)^{k-1}.$$

Supposons que $N_K = 2n$ avec n entier. On peut alors regrouper les termes deux à deux comme ceci :

$$\epsilon \sum_{k=1}^{N_K} i_k(-1)^{k-1} = -\epsilon \sum_{j=1}^{n} (i_{2j} - i_{2j-1}).$$

En exploitant le fait que les termes de la somme (qui sont positifs) sont tous présents dans la somme télescopique suivante :

$$i_1 + (i_2 - i_1) + (i_3 - i_2) + \cdots + (i_{2n} - i_{2n-1}) + (K - i_{2n}) = K$$

on en déduit que :

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} (i_{2j} - i_{2j-1}) \le K \text{ d'où } -K \le \sum_{k=1}^{2n} i_k(-1)^{k-1} \le 0 \tag{1.12}$$

et donc quelque soit la valeur de $\epsilon \in \{-1, 1, \}$, si N_K est pair alors :

$$-K \le \epsilon \sum_{k=1}^{2n} i_k(-1)^{k-1} \le K.$$

Reste à considérer le cas impair, i.e. $N_K = 2n + 1$ avec n entier. A ce moment-là, on voit que :

$$\epsilon \sum_{k=1}^{N_K} i_k(-1)^{k-1} = \epsilon \left(\sum_{k=1}^{2n} i_k(-1)^{k-1} + i_{N_K} \right)$$

et comme $1 \le i_{N_K} \le K$, en utilisant (1.12) on trouve que :

$$-K + 1 \le \left(\sum_{k=1}^{2n} i_k(-1)^{k-1} + i_{N_K} \right) \le K \text{ d'où } -K \le \epsilon \sum_{k=1}^{N_K} i_k(-1)^{k-1} \le K$$

quels que soient le signe de ϵ et les valeurs de N_K ou des $(i_k)_k$.

□

Si l'on revient à la décomposition (1.10), la majoration (1.11) nous indique que le premier terme tend presque sûrement vers 0 quand K tend vers l'infini.

Ainsi en faisant fi de tous les termes qui tendent vers 0, il nous reste à étudier le comportement asymptotique des deux termes restants dans $H_1(K)$ et $H_2(K)$, à savoir :

$$-\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{K} (1-\alpha_i)\beta_i + \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)} \sum_{i=1}^{K} i(1-\alpha_i)\beta_i.$$

Posons $\xi_k = (1-\alpha_k)\beta_k$ pour $k \geq 1$. On remarque alors que $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $\{-1, 0, 1\}$. On peut à présent réécrire les termes qui nous intéressent en fonction de ces nouvelles variables aléatoires :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}(1-\alpha_i)\beta_i + \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)}\sum_{i=1}^{K} i(1-\alpha_i)\beta_i &= \sum_{i=1}^{K}\left(-\frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{i}{\sqrt{K}(K+2)}\right)\xi_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}\frac{K+2-i}{K+2}(-\xi_i) \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{j=2}^{K+1}\frac{j}{K+2}\xi_j
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est une égalité en loi qui exploite le caractère i.i.d. de la suite $(\xi_k)_{k\geq 1}$. Si on pose $X_k \overset{def}{=} k\xi_k$ pour $k \geq 1$ on peut écrire :

$$-\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=1}^{K}(1-\alpha_i)\beta_i + \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)}\sum_{i=1}^{K} i(1-\alpha_i)\beta_i \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)}\sum_{j=2}^{K+1} X_j. \tag{1.13}$$

L'idée serait donc d'avoir un TCL pour les variables $(X_k)_{k\geq 1}$, qui ne sont certes pas de même loi mais sont indépendantes.

Lemme 1.2.2. *Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que X_k soit uniformément distribuée sur $\{-k, 0, k\}$. On a alors la convergence en loi suivante :*

$$\frac{1}{s_K}\sum_{i=1}^{K} X_i \xrightarrow[K\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où $s_K^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{9}$.

Démonstration. Il s'agit simplement du théorème de Lindeberg appliqué à la suite $(X_k)_{k\geq 1}$, étant donné que :

$$\sum_{i=1}^{K}\mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^{K}\frac{2}{3}i^2 = \frac{2}{3}\times\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} = s_K^2.$$

Il suffit donc de vérifier que les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ respectent la condition de Lindeberg, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{s_K^2}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 \mathbb{1}_{|X_i - \mathbb{E}[X_i]| > \varepsilon s_K}\right] \xrightarrow[K\to\infty]{} 0.$$

On pose donc $\varepsilon > 0$, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_K^2}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 \mathbb{1}_{|X_i - \mathbb{E}[X_i]| > \varepsilon s_K}\right] &= \frac{1}{s_K^2}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}\left[X_i^2 \mathbb{1}_{|X_i| > \varepsilon s_K}\right] \\
&= \frac{1}{s_K^2}\sum_{i=1}^{K}\frac{2}{3}i^2\mathbb{1}_{i > \varepsilon s_K}.
\end{aligned}$$

Or pour K grand s_K va être équivalent à $\frac{\sqrt{2}}{3}K^{\frac{3}{2}}$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un K_0 tel que pour tout $K \geq K_0$ on ait $\varepsilon s_K \geq K$. Donc $\sum_{i=1}^{K}\frac{2}{3}i^2\mathbb{1}_{i>\varepsilon s_K} = 0$ pour K assez grand, d'où $(X_k)_{k\geq 1}$ respecte la condition de Lindeberg. □

Grâce à ce résultat sur la suite $(X_k)_{k\geq 1}$, nous pouvons expliciter le comportement asymptotique de la somme dans (1.13) en la décomposant ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{K}(K+2)}\sum_{j=2}^{K+1} X_j = \frac{s_{K+1}}{\sqrt{K}(K+2)}\times\frac{1}{s_{K+1}}\sum_{i=1}^{K+1} X_i - \frac{1}{\sqrt{K}(K+2)}X_1.$$

Le dernier terme converge presque sûrement vers 0 (car $|X_1| \leq 1$ p.s.) et on a :

$$\frac{s_{K+1}}{\sqrt{K}(K+2)} \underset{K\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2K^3/9}}{K^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.2.2 à $\frac{1}{s_{K+1}}\sum_{i=1}^{K+1} X_i$ pour conclure. □

1.2.2 Centre de masse

Dans l'optique de comprendre comment la géométrie de la chaîne de prisonniers peut avoir un impact sur la trajectoire du premier marcheur dans le contexte où n et K tendent vers l'infini, on peut étudier le comportement du centre de masse de la chaîne de prisonniers, que l'on définit comme :

$$G_{n,K}(t) = \frac{1}{K+1}\sum_{i=1}^{K+1} Z_{n,K}^{(i)}(\lfloor nt \rfloor).$$

En particulier, comme on sait décrire le comportement de f_K quand K tend vers l'infini, on va s'intéresser à un régime très lent, où n sera petit devant K.

Théorème 1.2.2. *Sous l'hypothèse $\frac{n^2}{K} \to 0$, pour tout $t \geq 0$ on a :*

$$\frac{3}{\sqrt{2K}} G_{n,K}(t) \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Démonstration. Commençons par écrire la position de chaque prisonnier $Z_{n,K}^{(i)}(\lfloor nt \rfloor)$ en fonction de $Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor)$ et $Y_K(\lfloor nt \rfloor)$ pour avoir :

$$G_{n,K}(t) = \frac{1}{K+1}\sum_{i=1}^{K+1}\left(Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor) + \sum_{j=1}^{i-1} Y_K^{(j)}(\lfloor nt \rfloor)\right) = Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor) + \frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K}(K-j+1)Y_K^{(j)}(\lfloor nt \rfloor).$$

Étant donné que $|Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor)| \leq \lfloor nt \rfloor$ p.s., on trouve facilement que pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{K}}|Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor)| \leq \frac{nt}{\sqrt{K}} \xrightarrow[n,K\to\infty]{} 0$$

puisqu'on suppose que $\frac{n^2}{K} \to \infty$.

Pour le second terme nous allons d'abord utiliser la stationnarité de $(Y_K(k))_k$ pour écrire $Y_K(\lfloor nt \rfloor) \overset{\mathcal{D}}{=} Y_K(0)$. Ensuite nous allons exploiter une symétrie par renversement des coordonnées : en effet pour tout $a \overset{def}{=} (a_1, a_2, \ldots, a_K) \in V_K$ si on définit le "miroir" de ce sommet comme $\overline{a} \overset{def}{=} (a_K, a_{K-1}, \ldots, a_1)$ alors on peut facilement mettre en bijection les arêtes issues de a et de $\overline{a}$ et ainsi montrer que $deg(a) = deg(\overline{a})$ (les valeurs de $\alpha(a)$ et $\overline{\alpha}(a)$ ne sont cependant pas préservées par cette bijection). Comme la mesure invariante sur V_K est proportionnelle au degré, alors $Y_K(0) \overset{\mathcal{D}}{=} \overline{Y_K(0)}$. Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{K}(K-j+1)Y_K^{(j)}(\lfloor nt \rfloor) \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{K}(K-j+1)Y_K^{(j)}(0) \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{K}(K-j+1)\overline{Y_K^{(j)}(0)} = \sum_{i=1}^{K} iY_K^{(i)}(0) = h_2(Y_K(0)).$$

Il suffit alors de refaire la même décomposition que dans la preuve du Théorème 1.2.1, i.e. :

$$\frac{3}{(K+1)\sqrt{2K}} h_2(Y_K(0)) = \frac{3}{(K+1)\sqrt{2K}}\left(\sum_{i=1}^{K} i\alpha_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{K} i(1-\alpha_i)\beta_i\right).$$

D'après le Lemme 1.2.1 le premier terme converge p.s. vers 0. On peut alors appliquer le Lemme 1.2.2 au second terme pour montrer que :

$$\frac{3}{(K+1)\sqrt{2K}} h_2(Y_K(0)) \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.2.1. *Notons que dans cette preuve le comportement relatif de n et de K n'intervient que dans la majoration de $Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor)$. On peut donc espérer affaiblir la condition $\frac{n^2}{K} \to 0$ si on parvient à montrer que*

$$\frac{Z_{n,K}^{(1)}(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{K}} \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

sous une nouvelle condition.

1.3 Kurtosis de B_K

On cherche à expliciter la valeur de $\|B_K^2\|_{E_K}^2 \overset{def}{=} \mathbb{E}_\mu[B_K^4]$ afin de vérifier si le modèle des prisonniers fait partie du cas particulier traité dans le Théorème 2.2.1. Plus précisément il nous faut déterminer la limite (si elle existe) de $\frac{\|B_K^2\|_{E_K}^2}{\|B_K\|_{E_K}^4}$.

Pour cela nous allons utiliser la description séquentielle du Lemme 1.1.1 et la relation $B_K = A_K - \nabla f_K$ pour écrire :

$$\mathbb{E}_\mu[B_K^4] = \mathbb{E}\Big[\big(A_K(\Delta_1) - \nabla \tilde{f}_K(\Delta_1)\big)^4\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\epsilon - \big(\tilde{f}_K(b) - \tilde{f}_K(a)\big)\Big)^4\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\epsilon + \sum_{i=1}^K F_K(i) \times \frac{b_i - a_i}{2}\Big)^4\Big].$$

Ainsi en remarquant que $\epsilon^2 = 1$ et en posant $\delta_i \overset{def}{=} \frac{b_i - a_i}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned} B_K((a,b))^4 = 1 \ &+ \ 4\sum_{i=1}^K F_K(i)\epsilon\delta_i + 6\sum_{i,j=1}^K F_K(i)F_K(j)\delta_i\delta_j \\ &+ \ 4\sum_{i,j,k=1}^K F_K(i)F_K(j)F_K(k)\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k \ + \ \sum_{i,j,k,l=1}^K F_K(i)F_K(j)F_K(k)F_K(l)\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l \\ &= 1 \ + \ \Sigma_1 \ + \ \Sigma_2 \ + \ \Sigma_3 \ + \ \Sigma_4. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Nous allons donc calculer $\mathbb{E}[\Sigma_i]$ pour $i = 1, \dots, 4$ et sommer les expressions obtenues pour avoir la valeur de $\|B_K^2\|^2$ en fonction de K.

1.3.1 Espérance des produits de la forme $\epsilon\delta$

Afin d'exprimer l'espérance des Σ_i il nous faut expliciter l'espérance des différents termes sous la forme $\epsilon\delta$ qui les composent, à l'aide des définitions et notations du Lemme 1.1.1.

Lemme 1.3.1. *Pour tout $1 \le i$ on a $\mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = \frac{-1}{3^i}$.*

Démonstration.

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = \mathbb{E}[\epsilon \times (-\alpha_i\gamma_i)] = \mathbb{P}(\alpha_i \times \epsilon\gamma_i = -1) - \mathbb{P}(\alpha_i \times \epsilon\gamma_i = 1).$$

Or comme $\epsilon\gamma_i = \epsilon^2 \times (-1)^{\sum_{h=1}^{i-1}\alpha_h}$ alors la valeur de $\epsilon\gamma_i$ dépend uniquement de la parité de $\sum_{h=1}^{i-1}\alpha_h$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = \mathbb{P}(\alpha_i = 1, \sum_{h=1}^{i-1}\alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = 1, \sum_{h=1}^{i-1}\alpha_h \text{ est pair}).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'indépendance des $(\alpha_h)_{h\in\mathbb{N}}$ et de remarquer que

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{h=1}^{i-1}\alpha_h \text{ est pair}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{3^{i-1}}\Big).$$

Finalement on obtient :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3^{i-1}}\Big) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{3^{i-1}}\Big) = \frac{-1}{3^i}.$$

□

Lemme 1.3.2. *Pour tous $1 \le i \le j$, l'un des cas suivants est vérifié :*

1. *si $i = j$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j] = \frac{1}{3}$,*
2. *si $i < j$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j] = \frac{-1}{3^{j-i+1}}$.*

Démonstration. Dans le cas où $i = j$, comme $\gamma_i \in \{-1, 1\}$ et $\alpha_i \in \{0, 1\}$ alors :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j] = \mathbb{E}[(-\alpha_i\gamma_i)^2] = \mathbb{P}(\alpha_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

En revanche si $i < j$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_i\delta_j] &= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \gamma_i = \gamma_j) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \gamma_i \neq \gamma_j) \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h \text{ est pair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \sum_{h=i}^{j-1} \alpha_h \text{ est impair}) \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = 1, \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h \text{ est pair}) \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{j-i-1}}\right) - \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{j-i-1}}\right) = \frac{-1}{3^{j-i+1}}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.3. *Pour tous $1 \leq i \leq j \leq k$, l'un des cas suivants est vérifié :*

1. *si $i = j = k$ alors $\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \frac{-1}{3^i}$,*
2. *si $i < j = k$ alors $\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \frac{-1}{3^{i+1}}$,*
3. *si $i = j < k$ alors $\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \frac{1}{3^k}$,*
4. *si $i < j < k$ alors $\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \frac{1}{3^{k-j+i+1}}$.*

Démonstration. Il faut prendre soin de distinguer les 4 cas possibles selon si les indices i, j et k sont distincts ou non.

Tout d'abord si $i = j = k$ alors $\delta_i\delta_j\delta_k = \delta_i^3 = \delta_i$ et donc d'après le Lemme 1.3.1 :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = \frac{-1}{3^i}.$$

A présent supposons que $i < j = k$. On aura $\delta_j\delta_k = \delta_j^2 = \alpha_j$. Comme α_j est indépendant de ϵ et δ_i on peut à nouveau se servir du Lemme 1.3.1 pour écrire :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \mathbb{E}[\varepsilon\delta_i\alpha_j] = \mathbb{E}[\varepsilon\delta_i] \times \mathbb{P}(\alpha_j = 1) = \frac{-1}{3^i} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{3^{i+1}}.$$

L'autre cas possible avec seulement 2 indices égaux est $i = j < k$. On peut à nouveau utiliser le fait que $\delta_i\delta_j = \delta_i^2 = \alpha_i$, mais cette fois-ci il n'y a pas l'indépendance avec δ_k (car la valeur de α_i influence celle de γ_k). Il va donc falloir faire intervenir la parité de la somme des α_h pour $h \leq k$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] &= \mathbb{E}[\epsilon\alpha_i\delta_k] = \mathbb{E}[-\epsilon\alpha_i\alpha_k\gamma_k] \\
&= \mathbb{P}(\alpha_k = \alpha_i = 1, \sum_{h=1}^{k-1} \alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_k = \alpha_i = 1, \sum_{h=1}^{k-1} \alpha_h \text{ est pair}) \\
&= \mathbb{P}(\alpha_k = \alpha_i = 1, \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{k-1} \alpha_h \text{ est pair}) - \mathbb{P}(\alpha_k = \alpha_i = 1, \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{k-1} \alpha_h \text{ est impair}) \\
&= \frac{1}{9} \times \frac{1}{3^{k-2}} = \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Le dernier cas restant à traiter est lorsque les indices sont deux à deux disjoints, auquel cas $i < j < k$ et on peut écrire :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1, \epsilon\gamma_i\gamma_j\gamma_k = -1) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1, \epsilon\gamma_i\gamma_j\gamma_k = 1).$$

Notons alors $A = \sum_{h=1}^{i-1} \alpha_h$, $B = \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h$ et $C = \sum_{h=j+1}^{k-1} \alpha_h$ pour alléger les calculs. Si on conditionne par l'évènement $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1$ alors :

$$\epsilon\gamma_i\gamma_j\gamma_k = \epsilon \times \epsilon(-1)^A \times \epsilon(-1)^{A+1+B} \times \epsilon(-1)^{A+1+B+1+C} = \epsilon^4(-1)^{3A+2B+C+3} = (-1)^{A+C+1}$$

et ainsi on peut conclure que :

$$\mathbb{P}\left(\epsilon\gamma_i\gamma_j\gamma_k = 1 | \alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1\right) = \mathbb{P}\left((-1)^{A+C+1} = 1\right) = \mathbb{P}\left(A + C \text{ est impair}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{i-1+k-j-1}}\right)$$

et de la même manière :

$$\mathbb{P}\left(\epsilon\gamma_i\gamma_j\gamma_k = -1|\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1\right) = \mathbb{P}\left((-1)^{A+C+1} = -1\right) = \mathbb{P}\left(A + C \text{ est pair}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{k-j+i-2}}\right).$$

On peut enfin exprimer l'espérance voulue :

$$\mathbb{E}[\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k] = \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1)\Big[\mathbb{P}(A + C \text{ est impair}) - \mathbb{P}(A + C \text{ est pair})\Big] = \frac{1}{3^3} \times \frac{-1}{3^{k-j+i-2}} = \frac{-1}{3^{k-j+i+1}}.$$

□

Lemme 1.3.4. *Pour tous $1 \leq i \leq j \leq k \leq l$, l'un des cas suivants est vérifié :*

1. *si $i = j = k = l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{1}{3}$,*
2. *si $i < j = k = l$ ou $i = j = k < l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{-1}{3^{l-i+1}}$,*
3. *si $i = j < k = l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{1}{9}$,*
4. *si $i < j < k = l$ ou $i = j < k < l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{-1}{3^{l-k+j-i+2}}$,*
5. *si $i < j = k < l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{1}{3^{l-i+1}}$,*
6. *si $i < j < k < l$ alors $\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{1}{3^{l-k+j-i+2}}$,*

Démonstration. Dans le cas où $i = j = k = l$, on a $\delta_i^4 = \delta_i^2$ et donc on retrouve un cas du Lemme 1.3.2, à savoir :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \mathbb{E}[\delta_i^4] = \mathbb{E}[\delta_i^2] = \mathbb{P}(\alpha_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

Supposons à présent que 3 des 4 indices sont égaux, c'est-à-dire $i = j = k < l$ ou $i < j = k = l$. A ce moment-là puisque $\delta_j^3 = \delta_j$, on peut directement appliquer le Lemme 1.3.2 pour avoir dans les deux cas :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \mathbb{E}[\delta_i\delta_l] = \frac{-1}{3^{l-i+1}}.$$

A présent si $i = j < k = l$ alors :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \mathbb{E}[\delta_i^2\delta_k^2] = \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_k = 1) = \frac{1}{9}.$$

Dans le cas où $i = j < k < l$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] &= \mathbb{E}[(\delta_i)^2\delta_k\delta_l] = \mathbb{E}[\alpha_i\delta_k\delta_l] \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_k = \alpha_l = 1, \sum_{h=k+1}^{l-1} \alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_k = \alpha_l = 1, \sum_{h=k+1}^{l-1} \alpha_h \text{ est pair}) \\
&= \frac{1}{27} \times \frac{-1}{3^{l-k-1}} = \frac{-1}{3^{l-k+2}}.
\end{aligned}$$

et de la même manière si $i < j < k = l$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] &= \mathbb{E}[\delta_i\delta_j\alpha_k] \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1, \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = 1, \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h \text{ est pair}) \\
&= \frac{1}{27} \times \frac{-1}{3^{j-i-1}} = \frac{-1}{3^{j-i+2}}.
\end{aligned}$$

et donc on peut regrouper ces deux cas sous la même formule, à savoir :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \frac{-1}{3^{l-k+j-i+2}}.$$

Considérons maintenant que $i < j = k < l$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] &= \mathbb{E}[\delta_i\alpha_j\delta_l] \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_l = 1, \sum_{h=i+1}^{l-1} \alpha_h \text{ est impair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_l = 1, \sum_{h=i+1}^{l-1} \alpha_h \text{ est pair}) \\
&= \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_l = 1, \sum_{\substack{h=i+1 \\ h\neq j}}^{l-1} \alpha_h \text{ est pair}) - \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_l = 1, \sum_{\substack{h=i+1 \\ h\neq j}}^{l-1} \alpha_h \text{ est impair}) \\
&= \frac{1}{27} \times \frac{1}{3^{l-i-2}} = \frac{1}{3^{l-i+1}}.
\end{aligned}$$

Enfin supposons que $i < j < k < l$. Notons $A \overset{def}{=} \sum_{h=1}^{i-1} \alpha_h$, $B \overset{def}{=} \sum_{h=i+1}^{j-1} \alpha_h$, $C \overset{def}{=} \sum_{h=j+1}^{k-1} \alpha_h$ et $D \overset{def}{=} \sum_{h=k+1}^{l-1} \alpha_h$ pour alléger les calculs. En admettant $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l &= \varepsilon(-1)^A \times \varepsilon(-1)^{A+1+B} \times \varepsilon(-1)^{A+1+B+1+C} \times \varepsilon(-1)^{A+1+B+1+C+1+D} \\ &= \varepsilon^4(-1)^{4A+3B+2C+D+6} = (-1)^{B+D}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l = 1 | \alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1\right) = \mathbb{P}\left(B + D \text{ est pair}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{l-k+j-i-2}}\right)$$

et mutatis mutandis :

$$\mathbb{P}\left(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l = -1 | \alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1\right) = \mathbb{P}\left(B + D \text{ est impair}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{l-k+j-i-2}}\right)$$

Donc finalement :

$$\mathbb{E}[\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l] = \mathbb{P}(\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1)\Big[\mathbb{P}(B + D \text{ est pair}) - \mathbb{P}(B + D \text{ est impair})\Big] = \frac{1}{81} \times \frac{1}{3^{l-k+j-i-2}} = \frac{1}{3^{l-k+j-i+2}}.$$

□

1.3.2 Expression des termes de (1.14)

A présent que toutes les espérances sont connues, il faut les regrouper pour calculer les espérances des Σ_i introduits dans l'expression (1.14), en effectuant les bonnes permutations d'indices et en s'aidant d'un solveur formel.

Tout d'abord :

$$\mathbb{E}[\Sigma_1] = \mathbb{E}\left[4\sum_{i=1}^{K} F_K(i)\epsilon\delta_i\right] = 4\sum_{i=1}^{K} F_K(i)\mathbb{E}[\epsilon\delta_i] = 4\sum_{i=1}^{K} F_K(i) \times \frac{-1}{3^i} = \frac{-4K}{K+2}.$$

Pour le second terme on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Sigma_2] &= \mathbb{E}\left[6\sum_{i,j=1}^{K} F_K(i)F_K(j)\delta_i\delta_j\right] = 6\sum_{i=1}^{K} F_K(i)^2\mathbb{E}[\delta_i^2] + 12\sum_{1\le i<j\le K} F_K(i)F_K(j)\mathbb{E}[\delta_i\delta_j] \\ &= 6\sum_{i=1}^{K} F_K(i)^2 \times \frac{1}{3} + 12\sum_{1\le i<j\le K} F_K(i)F_K(j) \times \frac{-1}{3^{j-i+1}} = \frac{6K^2 + 12K}{(K+2)^2}.\end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Sigma_3] &= \mathbb{E}\left[4\sum_{i,j,k=1}^{K} F_K(i)F_K(j)F_K(k)\epsilon\delta_i\delta_j\delta_k\right] = 4\sum_{i=1}^{K} F_K(i)^3 \times \frac{-1}{3^i} + 3\times 4\sum_{1\le i<j\le K} F_K(i)F_K(j)^2 \times \frac{-1}{3^{i+1}} \\ &+ 3\times 4\sum_{1\le i<k\le K} F_K(i)^2F_K(k) \times \frac{1}{3^k} + 6\times 4\sum_{1\le i<j<k\le K} F_K(i)F_K(j)F_K(k) \times \frac{1}{3^{k-j+i+1}} \\ &= \frac{-4K^3 - 24K^2 - 12\times(1-3^{-K})}{(K+2)^3}.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Sigma_4] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j,k,l=1}^{K} F_K(i)F_K(j)F_K(k)F_K(l)\delta_i\delta_j\delta_k\delta_l\right] = \sum_{i=1}^{K} F_K(i)^4 \times \frac{1}{3} + 4\sum_{1\le i<l\le K} F_K(i)^3F_K(l) \times \frac{-1}{3^{l-i+1}} \\ &+ 4\sum_{1\le i<l\le K} F_K(i)F_K(l)^3 \times \frac{-1}{3^{l-i+1}} + 6\sum_{1\le i<k\le K} F_K(i)^2F_K(k)^2 \times \frac{1}{9} + 12\sum_{1\le i<j<k\le K} F_K(i)F_K(j)F_K(k)^2 \times \frac{-1}{3^{j-i+2}} \\ &+ 12\sum_{1\le j<k<l\le K} F_K(j)^2F_K(k)F_K(l) \times \frac{-1}{3^{l-k+2}} + 12\sum_{1\le i<j<l\le K} F_K(i)F_K(j)^2F_K(l) \times \frac{1}{3^{l-i+1}} \\ &+ 24\sum_{1\le i<j<k<l\le K} F_K(i)F_K(j)F_K(k)F_K(l) \times \frac{1}{3^{l-k+j-i+2}} \\ &= \frac{K^4 + 12K^3 + 12K^2 - 10K + 24\times(1-3^{-K}) - 12K\times 3^{-K}}{(K+2)^4}.\end{aligned}$$

1.3.3 Synthèse

Il ne reste plus qu'à sommer les expressions obtenues pour obtenir le moment d'ordre 4 de B_K, à savoir :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu[B_K^4] &= 1 + \mathbb{E}[\Sigma_1] + \mathbb{E}[\Sigma_2] + \mathbb{E}[\Sigma_3] + \mathbb{E}[\Sigma_4] \\ &= 1 - \frac{4K}{K+2} + \frac{6K^2+12K}{(K+2)^2} + \frac{-4K^3-24K^2-12\times(1-3^{-K})}{(K+2)^3} \\ &+ \frac{K^4+12K^3+12K^2-10K+24\times(1-3^{-K})-12K\times 3^{-K}}{(K+2)^4} \\ &= \frac{12K^2+26K+16}{(K+2)^4}.\end{aligned}$$

On peut alors vérifier explicitement que la condition (2.5) n'est pas vérifiée car :

$$\frac{\mathbb{E}_\mu[B_K^4]}{\mathbb{E}_\mu[B_K^2]^2} = \frac{12K^2+26K+16}{(K+2)^4} \times \left(\frac{K+2}{2}\right)^2 = \frac{3K^2+\frac{13}{2}K+4}{(K+2)^2} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 3. \tag{1.15}$$

Remarque 1.3.1. *La fraction* $\beta_2(K) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{E}_\mu[B_K^4]}{\mathbb{E}_\mu[B_K^2]^2}$ *est en fait le kurtosis non normalisé de* $B_K(\Delta_1)$*. On remarque alors que* $\beta_2(K) < 3$ *pour tout* K*, indiquant que les* $B_K(\Delta_1)$ *sont des variables aléatoires platikurtiques, mais le fait que* $\beta_2(K) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 3$ *indique qu'elles sont asymptotiquement mésokurtiques, i.e. leurs densités de probabilités seront de moins en moins "aplaties" (jusqu'à ressembler à une loi normale dont le kurtosis non normalisé vaut* 3*).*

Même si ce résultat est intriguant et mérite un peu d'attention, il ne permet pas d'appliquer le Théorème 2.2.1 dans ce contexte.

1.4 Extension du résultat avec une croissance de K lente

Dans [2] les auteurs parvenaient à montrer que pour tout $K \geq 1$ **fixé** :

$$\left(\sqrt{\frac{1}{n}} Z_{n,K}^{(1)}(t)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} (\sigma_K B_t)_{t\in[0,1]}$$

où $\sigma_K = \sqrt{\frac{2}{K+2}}$ et $(B_t)_{t\in[0,1]}$ désigne un mouvement brownien standard. Étant donné que ce résultat est vrai pour tout K, on peut s'attendre à un résultat similaire quand n et K tendent tous deux vers l'infini, quitte à faire croître K très lentement par rapport à n.

Théorème 1.4.1. *Dans un régime ultra-rapide où* $\frac{n}{Ke^K} \to \infty$ *on a la convergence en loi suivante :*

$$\left(\sqrt{\frac{K+2}{2n}} Z_{n,K}^{(1)}(t)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} (B_t)_{t\in[0,1]}.$$

Notre approche sera d'exprimer chacun de nos processus comme la somme d'une martingale et d'une partie négligeable. Ensuite nous montrerons que la suite de martingales converge vers un mouvement brownien en exploitant une majoration du trou spectral des graphes G_K afin de montrer que les compensateurs des carrés de ces martingales convergent vers celui du mouvement brownien.

On considère sans perte de généralité que K est une fonction de n pour toute la suite du raisonnement (afin de ne garder qu'un seul indice de convergence).

Nous allons utiliser la décomposition de Hodge de notre processus pour écrire :

$$\sqrt{\frac{K+2}{2n}} Z_{n,K}^{(1)}(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{K+2}{2n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} B_K(\Delta_k)}_{\overset{def}{=} \quad M_n(t)} + \underbrace{\sqrt{\frac{K+2}{2n}} \left(f_K(Y_K(\lfloor nt \rfloor)) - f_K(Y_K(0))\right)}_{C_n(t)} \tag{1.16}$$

où $(M_n(t))_{t\in[0,1]}$ est une $(\mathcal{F}_t^n)$-martingale avec $\mathcal{F}_t^n \overset{def}{=} \sigma(\Delta_i : i \leq nt)$.

On pose alors

$$D_n(t) \overset{def}{=} \frac{K+2}{2n} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[B_K(\Delta_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}\left[\frac{B_K(\Delta_k)^2}{\|B_K\|^2} \middle| \mathcal{F}_{k-1}^n \right]$$

pour que $M_n^2 - D_n$ soit aussi une $(\mathcal{F}_t^n)$-martingale.

Proposition 1.4.1. *Si* $\frac{n}{Ke^K} \to \infty$ *alors :*

$$(M_n(t))_{t\in[0,1]} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (B_t)_{t\in[0,1]}$$

où $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *désigne un mouvement brownien standard.*

Démonstration. On va utiliser le Théorème 1.4 de [8] (p.339) sur les suites de martingales (en s'appuyant sur la Remarque 1.5 qui la suit mais sans utiliser les mêmes filtrations). Nous savons déjà que où $(M_n(t))_{t\in[0,1]}$ et $M_n^2 - D_n$ sont des $(\mathcal{F}_t^n)$-martingales, il ne reste donc qu'à vérifier les hypothèses techniques suivantes :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} \left| M_n(t) - \lim_{\varepsilon\to 0} M_n(t-\varepsilon) \right|^2 \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{H1}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} \left| D_n(t) - \lim_{\varepsilon\to 0} D_n(t-\varepsilon) \right| \right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{H2}$$

$$\text{et } \forall\ t \in [0,1]\ D_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} t. \tag{H3}$$

La fonction B_K étant bornée par 1 d'après la Proposition (1.1.3), les hypothèses (H1) et (H2) sont trivialement vérifiées si $\frac{K}{n}$ tend vers 0. Il ne manque donc que l'hypothèse (H3) à démontrer pour achever la preuve de cette proposition, et pour ce faire nous allons montrer que pour tout $t \in [0,1]$:

$$D_n(t) \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathbb{L}^2} t. \tag{1.17}$$

Commençons par remarquer que le cas $t = 0$ est trivial. On peut alors diviser par t pour se ramener à montrer que

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}\left[\frac{B_K(\Delta_k)^2}{\|B_K\|^2} \middle| \mathcal{F}_{k-1}^n \right] \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathbb{L}^2} 1.$$

Évidemment pour tout $t \in]0,1]$ on a $\frac{nt}{Ke^K} \to \infty$, nous allons donc prouver le résultat uniquement pour $t = 1$ (pour alléger les notations), mais le raisonnement s'applique pour tout $t \in]0,1]$. On peut alors utiliser la propriété de Markov pour remplacer le conditionnement par $\mathcal{F}_{k-1}^n$ par un conditionnement par Δ_{k-1}, puis exploiter le fait que les lois conditionnelles de Δ_k sachant Δ_{k-1} et sachant $Y_K(k-1)$ sont les mêmes. Enfin la stationnarité de la suite $(Y_K(i))_{i\geq 0}$ permet de se ramener au cas où $k = 1$. Autrement dit :

$$\mathbb{E}[B_K(\Delta_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n] = \mathbb{E}[B_K(\Delta_k)^2 | \Delta_{k-1}] = \mathbb{E}[B_K(\Delta_k)^2 | Y_K(k-1)] = \mathbb{E}[B_K(\Delta_1)^2 | Y_K(0)].$$

Il nous faut donc montrer que sous la condition $\frac{n}{Ke^K} \to \infty$ on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_K(Y_K(i)) \xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathbb{L}^2} 1 \tag{1.18}$$

où la fonction ϕ_K est définie sur V_K par

$$\phi_K(v) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{E}[B_K(\Delta_2)^2 | Y_K(0) = v]}{\|B_K\|^2}.$$

Nous noterons $\psi_K(v) = \phi_K(v) - \mathbb{E}[\phi_K] = \phi_K(v) - 1$ la version centrée de ϕ_K, et notre objectif est de montrer que

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_K(Y_K(i)) \right] \xrightarrow[n,K\to\infty]{} 0.$$

Notre approche sera d'abord d'exprimer la variance $\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_K(Y_K(i))\right]$ en fonction des covariances entre $\psi_K(Y_K(t))$ et $\psi_K(Y_K(t+i))$, puis de séparer ces termes en deux groupes : d'un côté quelques "petites" valeurs de i qui seront suffisamment peu nombreuses pour être négligeables devant n, et de l'autre les termes plus nombreux mais dont les valeurs de i seront suffisamment "grandes" pour que le trou spectral de la chaîne de Markov nous donne une majoration convenable.

Pour cela utilisons la stationnarité de $(Y_K(k))_{k\in\mathbb{N}}$ pour écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_K(Y_K(i))\right] &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi_K(Y_K(i))\right]\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\psi_K(Y_K(i))\psi_K(Y_K(j))]\\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}[\psi_K(Y_K(0))^2] + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\mathbb{E}[\psi_K(Y_K(0))\psi_K((Y_K(i))]\\ &= \frac{1}{n}\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))] + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\left\langle P_K^i\psi_K,\psi_K\right\rangle\end{aligned}$$

où P_K désigne l'opérateur de transition de la marche aléatoire sur G_K et $\langle f,g\rangle \overset{def}{=} \mathbb{E}[f(Y_K(0))g(Y_K(0))]$.

La matrice P_K est diagonalisable, avec $d = 2^K$ valeurs propres telles que $1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_d|$. On notera f_i des fonctions propres associées aux λ_i telles que $\langle f_i, f_j\rangle = \mathbb{1}_{i=j}$.

Avec ces notations, pour toute fonction $f : V_K \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[f] = \langle f, f_1\rangle = 0$ on a

$$\langle P_K^k f, f\rangle = \sum_{i,j=1}^{d}\left\langle P_K^k\left(\langle f,f_i\rangle f_i\right), \langle f,f_i\rangle f_i\right\rangle = \sum_{i=2}^{d}\left\langle\langle f,f_i\rangle\lambda_i^k f_i, \langle f,f_i\rangle f_i\right\rangle = \sum_{i=2}^{d}\lambda_i^k\langle f,f_i\rangle^2.$$

Or $\mathbb{V}[f] = \sum_{i=2}^{d}\langle f,f_i\rangle^2$ et $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \geq 2$, donc $|\langle P_K^k f, f\rangle| \leq \mathbb{V}[f]$ pour tout $k \geq 1$. De plus, comme $|\lambda_i| \leq |\lambda_2|$ pour tout $i > 2$, on peut également écrire $|\langle P_K^k f, f\rangle| \leq |\lambda_2^k|\mathbb{V}[f]$ pour tout $k \geq 1$.

L'idée de cette preuve est d'utiliser au mieux ces deux dernières inégalités en choisissant un entier N entre 1 et $n-1$ pour scinder efficacement le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi_K(Y_K(i))\right] &= \frac{1}{n}\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))] + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\left\langle P_K^i\psi_K,\psi_K\right\rangle\\ \leq \frac{\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))]}{n} &+ \left|\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{N}(n-i)\left\langle P_K^i\psi_K,\psi_K\right\rangle\right| + \left|\frac{2}{n^2}\sum_{i=N+1}^{n-1}(n-i)\left\langle P_K^i\psi_K,\psi_K\right\rangle\right|\\ \leq \frac{\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))]}{n} &+ \left|\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{N}(n-i)\right|\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))] + \left|\frac{2}{n^2}\sum_{i=N+1}^{n-1}(n-i)|\lambda_2|^N\right|\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))].\end{aligned}$$

On exprime ainsi la variance en un produit entre la variance de ψ_K et une somme de trois termes :

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi_K(Y_K(i))\right] \leq \mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))]\left(\frac{1}{n} + \left|\frac{2N}{n} - \frac{N(N+1)}{n^2}\right| + \left|\frac{(n-N)^2+N}{n^2}\right||\lambda_2|^N\right). \tag{1.19}$$

On va montrer que ce produit converge vers 0 en majorant $\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))]$ uniformément en K avant de justifier l'existence d'un entier $N = N(n,K)$ tel que les 3 termes dans la parenthèse tendent vers 0.

Lemme 1.4.1. *Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))] < M$ pour tout $K \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Jensen pour écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\psi_K(Y_K(0))] = \mathbb{V}[\phi_K(Y_K(0))] &= \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[B_K(\Delta_1)^2|Y_K(0)=v]^2}{\|B_K\|^4}\right] - 1\\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[B_K(\Delta_1)^4|Y_K(0)=v]\right]}{\|B_K\|^4} - 1 = \frac{\mathbb{E}[B_K(\Delta_1)^4]}{\mathbb{E}[B_K(\Delta_1)^2]^2} - 1 \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

où la convergence vers 2 est une conséquence directe de (1.15). □

A partir de là, il reste à exhiber un entier N tel que $\frac{N}{n}$ et $|\lambda_2|^N$ tendent tous deux vers 0.

Lemme 1.4.2. *Pour tout $K \geq 1$, la deuxième plus grande valeur propre λ_2 de P_K vérifie l'inégalité :*

$$|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{CK}e^{-C'K}$$

avec $C = \frac{\varphi^6}{10}$ et $C' = ln\left(\frac{2\varphi^2}{3}\right)$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ désigne le nombre d'or.

Démonstration. On va utiliser un résultat de [16], qui permet de minorer le trou spectral de l'opérateur de transition P d'une marche aléatoire sur un graphe. Il va donc falloir remplacer notre multi-graphe G_K par le graphe pondéré $\hat{G}_K$ obtenu en gluant ensemble les arêtes multiples. Plus précisément, $\hat{G}_K = (V_K, \hat{E}_K)$ où $\hat{E}_K$ est l'ensemble des arêtes (a,b) telles que $a, b \in V_K$ pondérées par $P(a,b) \overset{def}{=} \mathbb{P}(Y_K(1) = b | Y_K(0) = a)$. Notons que cette opération préserve le comportement de $(Y_K(n))_{n\in\mathbb{N}}$, le seul changement est l'incertitude sur la valeur de A_K lorsque l'on emprunte une boucle (ce qui n'a aucune influence sur les valeurs propres de P).

Il nous faut ensuite choisir un ensemble d'arêtes "adapté" $\mathcal{A} \subset V_K \times V_K$, i.e. tel que les trois propriétés suivantes sont respectées : $(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (y,x) \in \mathcal{A}$, le sous-graphe $(V_K, \mathcal{A})$ est connexe et

$$(x,y) \in \mathcal{A} \Rightarrow P(x,y) + P(y,x) > 0.$$

Si π désigne la probabilité invariante associée à P, on définit alors pour $e \in V_K \times V_K$:

$$Q(e) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(P(x,y)\pi(x) + P(y,x)\pi(y)\right).$$

En particulier, on calcule facilement que

$$Q(x,x) = \frac{2}{D_K} \ \forall x \in V_K \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{\mathbb{1}_{(x,y)\in E_K}}{D_K} \ \forall x \neq y$$

où $D_K = 2 \times 3^K$ est le nombre total d'arêtes dans E_K.

Enfin, on associe à chaque couple de sommets $(x,y) \in V_K \times V_K$ un chemin injectif dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une suite finie d'arêtes $\gamma(x,y) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telles que $e_i \in \mathcal{A}$ et $e_i \neq e_j$ pour tous $i \neq j$.

Une fois toutes ces notations et définitions mises en places on peut appliquer le Théorème 3.2.1 de [16]. Ce dernier indique que le trou spectral $(1 - |\lambda_2|)$ de l'opérateur P est minoré par $1/A$ où la constante A est définie par :

$$A \overset{def}{=} \max_{e\in\mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{Q(e)} \sum_{\substack{x,y\in V_K \\ e\in\gamma(x,y)}} |\gamma(x,y)|\pi(x)\pi(y) \right\} \tag{1.20}$$

où $|\gamma(x,y)|$ désigne la longueur du chemin $\gamma(x,y)$, à savoir le nombre d'arêtes qui le constituent.

Pour le choix du chemin injectif allant de $x = (x_1, \ldots, x_K)$ à $y = (y_1, \ldots, y_K)$, nous allons simplement lire les coordonnées "de gauche à droite" et emprunter l'arête qui change uniquement la i-ième coordonnée si $x_i \neq y_i$. Ce chemin existe toujours puisque toutes les arêtes qui ne changent qu'une coordonnée sont dans E_K, et par construction on a la majoration $|\gamma(x,y)| \leq K$ pour tous $x, y \in V_K$.

On sait grâce à la Proposition 1.1.1 que $\sup_{v\in V_K} \pi(v) = \frac{u_{K+3}}{D_K}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de Fibonacci. On trouve alors que pour tout $e \in V_K \times V_K$:

$$\frac{1}{Q(e)} \sum_{\substack{x,y\in V_K \\ e\in\gamma(x,y)}} |\gamma(x,y)|\pi(x)\pi(y) \leq D_K \Gamma(e) K \left(\frac{u_{K+3}}{D_K}\right)^2$$

où $\Gamma(e)$ désigne le nombre de chemins $\gamma(x,y)$ passant par e. Un simple raisonnement combinatoire permet de voir que $\Gamma(e) = 2^{K-1}$, d'où

$$A \leq K u_{K+3}^2 \times \frac{2^{K-1}}{2 \times 3^K}.$$

Puisque $u_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors à partir d'un certain rang :

$$A \leq K \times \frac{2\varphi^{2K+6}}{5} \frac{2^K}{4 \times 3^K} = \frac{\varphi^6}{10} \times K \left(\frac{2\varphi^2}{3}\right)^K.$$

Ainsi, le trou spectral $1 - |\lambda_2|$ est minoré par $1/A$, et donc :

$$|\lambda_2| \leq 1 - 1/A \leq 1 - \left(\frac{\varphi^6}{10} \times K \left(\frac{2\varphi^2}{3}\right)^K\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{CK} e^{-C'K}$$

avec $C = \frac{\varphi^6}{10}$ et $C' = \ln \frac{2\varphi^2}{3}$. □

Remarque 1.4.1. *Dans la preuve précédente, la majoration $|\gamma(x,y)| \leq K$ est optimale pour les sommets $x = (1,1,\dots,1)$ et $y = (-1,-1,\dots,-1)$. Même si on peut l'améliorer pour d'autres couples de sommets, le gain n'est pas suffisant pour affaiblir la condition $\frac{n}{Ke^K} \to \infty$.*

Puisque $|\lambda_2| \leq 1 - \frac{1}{CK}e^{-C'K}$, on en déduit que

$$\ln(|\lambda_2|) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{CKe^{C'K}}\right) = -\frac{1}{CKe^{C'K}} + O\left(\frac{1}{(CKe^{C'K})^2}\right).$$

Il suffit alors de poser

$$N = \sqrt{nCKe^{C'K}}$$

(ou l'entier le plus proche de cette valeur) pour avoir

$$\frac{N}{n} = \sqrt{\frac{CKe^{C'K}}{n}} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$|\lambda_2|^N \leq e^{\left(-\sqrt{\frac{n}{CKe^{C'K}}} + O\left(\frac{\sqrt{n}}{(CKe^{C'K})^{\frac{3}{2}}}\right)\right)} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc bel et bien exhibé un N qui assure que la parenthèse dans l'équation (1.19) tende bien vers 0 dans notre régime ultra rapide, donc la convergence (1.17) est montrée pour $t \in [0,1]$.

□

A présent que l'on a montré que M_n converge en loi vers un mouvement brownien nous devons nous intéresser au processus $C_n(t)$ défini dans (1.16). Remarquons que f_K est borné par K et donc il existe une constante Γ telle que pour tout n, K on a :

$$\sup_{t\in[0,1]} |C_n(t)| \leq \Gamma \times \frac{K^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$$

ce qui tend vers 0 sous l'hypothèse $\frac{n}{Ke^K} \to \infty$.

On en conclut grâce au Théorème de Slutsky que

$$(M_n(t) + C_n(t))_{t\in[0,1]} \underset{n,K\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} (B_t)_{t\in[0,1]}$$

ce qui clôt la preuve du Théorème 1.4.1.

Remarque 1.4.2. *Nous venons de montrer le résultat du Théorème 1.4.1 sous l'hypothèse $\frac{n}{CKe^{C'K}} \to +\infty$ avec les constantes C et C' du Lemme 1.4.2, mais pour l'énoncé du Théorème nous avons choisi de la changer pour la condition $\frac{n}{Ke^K} \to +\infty$. Cette condition est plus restrictive car la constante C' est plus petite que 1 mais aussi plus parlante quant au comportement relatif de n et de K. De plus beaucoup des majorations faites dans cette preuve ne sont pas optimales, donc il est possible que la convergence vers le mouvement brownien ait lieu dans des régimes plus lents que $\frac{n}{CKe^{C'K}} \to +\infty$.*

1.5 Fonctionnelle markovienne

On cherche à exhiber une fonctionnelle sur les sommets qui préserverait le caractère markovien de la marche aléatoire tout en la transportant dans un espace de dimension bornée (à l'instar du Chapitre 4 avec la somme des coordonnées sur l'hypercube, qui ramène l'étude de la marche aléatoire sur des graphes de dimension croissante à une chaîne de Markov dans $\mathbb{R}$).

Puisqu'on s'intéresse à la valeur de A_K qui vaut ± 1, un candidat naturel serait de considérer les arêtes sur lesquelles ces deux valeurs sont prises. Comme dans [2], pour tout $v \in V_K$ on notera $\alpha(v)$ (respectivement $\overline{\alpha}(v)$ le nombre d'arêtes de E_K^+ (resp. E_K^-) partant de v.

Rappelons la relation récursive (1.4), à savoir :

$$\alpha(1v) = \alpha(v) + \overline{\alpha}(v), \quad \overline{\alpha}(1v) = \overline{\alpha}(v), \quad \alpha(-1v) = \alpha(v) \text{ et } \overline{\alpha}(-1v) = \alpha(v) + \overline{\alpha}(v) \tag{1.4}$$

où $1v \in V_{K+1}$ (resp. $-1v \in V_{K+1}$) désigne la concaténation d'un 1 (resp. -1) devant le vecteur $v \in V_K$.

Ainsi on peut utiliser (1.4) pour obtenir $\alpha(v)$ et $\overline{\alpha}(v)$ en concaténant successivement les coordonnées de v à partir du sommet "vide" $v_0 \in V_0$, pour lequel $\alpha(v_0) = \overline{\alpha}(v_0) = 1$.

Il s'avère que les relations (1.4) sont les mêmes que celles qui permettent de construire l'arbre de Stern-Brocot, que nous allons détailler.

Il s'agit d'un arbre binaire complet infini enraciné, i.e. un arbre infini dont chaque noeud (y compris la racine) a exactement 2 noeuds fils, l'un à gauche et l'autre à droite. On peut alors identifier chaque noeud par sa hauteur (la distance qui le sépare de la racine) et sa position horizontale (le nombre de noeuds de même hauteur placés à sa gauche ou à sa droite).

On étiquette ensuite cet arbre de la manière suivante : on place sur chaque noeud la fraction $\frac{m+m'}{n+n'}$, où $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ sont les fractions placées à l'ancêtre le plus proche situé respectivement à gauche et à droite du noeud en question, avec la convention $\frac{m}{n} = \frac{0}{1}$ (resp. $\frac{m'}{n'} = \frac{1}{0}$) si le noeud n'a aucun ancêtre situé à sa gauche (resp. à sa droite). En particulier, la racine n'ayant aucun ancêtre ni à gauche ni à droite, elle correspond à la fraction $\frac{1}{1}$.

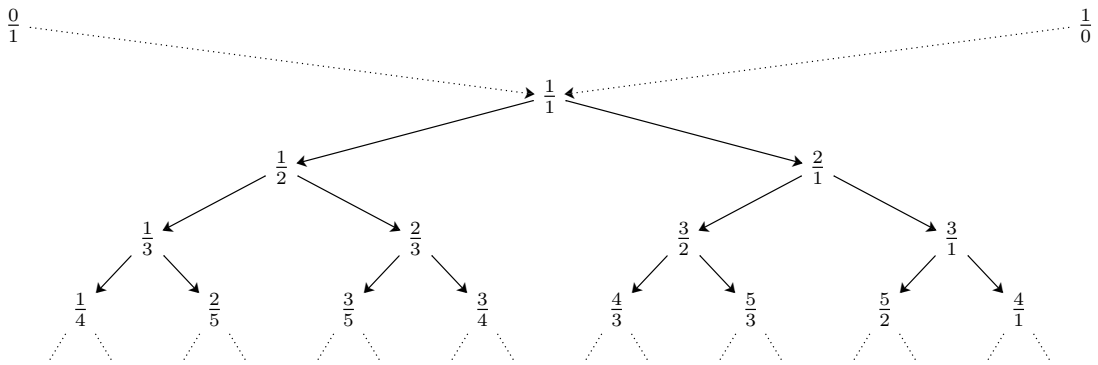


FIGURE 1.3 – Arbre de Stern-Brocot

Cet arbre possède plusieurs propriétés qui nous intéressent, tout d'abord :

Proposition 1.5.1. *Si la fraction $\frac{a}{b}$ est placée à gauche de $\frac{c}{d}$ dans l'arbre de Stern-Brocot, alors $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.*

Démonstration. On peut facilement remarquer que si $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ alors $\frac{m}{n} < \frac{m+m'}{n+n'} < \frac{m'}{n'}$. De ce fait par récurrence immédiate on peut comparer chaque fraction $\frac{u}{v}$ à tous ses descendants, i.e. :

$$\frac{u_L}{v_L} < \frac{u}{v} < \frac{u_R}{v_R}$$

pour tout $\frac{u_L}{v_L}$ (respectivement $\frac{u_R}{v_R}$) descendant du fils à gauche (resp. à droite) de $\frac{u}{v}$.

Il ne reste plus qu'à comparer nos deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ à leur plus proche ancêtre commun pour conclure. □

Revenons à notre marche aléatoire. Le lien entre (1.4) et la construction de l'arbre de Stern-Brocot nous permet de retrouver facilement les valeurs de $\alpha(v)$ et $\overline{\alpha}(v)$:

Proposition 1.5.2. *Pour tout $v \in V_K$, le nombre rationnel $\frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)}$ se lit dans l'arbre de Stern-Brocot en parcourant le chemin dicté par les coordonnées de v, en partant de la racine $\frac{1}{1}$ et en descendant vers la droite ou vers la gauche lorsque les coordonnées de v sont respectivement positives ou négatives.*

Exemple. *Si on considère $(1, 1, -1) \in V_3$ on a $\alpha(v) = 5$ et $\overline{\alpha}(v) = 2$, et la fraction $\frac{5}{2}$ est le noeud qu'on obtient en partant de $\frac{1}{1}$ et en descendant deux fois vers la droite puis une fois vers la gauche.*

On peut ainsi obtenir les coefficients $\alpha(v)$ et $\overline{\alpha}(v)$ via cet arbre. De plus on peut se servir de la structure de cet arbre pour décrire le comportement de A_K.

Proposition 1.5.3. *Si $(u, v) \in E_K$ avec $u \neq v$ alors $A_K(u, v) = -1$ ssi $\frac{\alpha(u)}{\overline{\alpha}(u)} < \frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)}$.*

Démonstration. Si $\frac{\alpha(u)}{\overline{\alpha}(u)} < \frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)}$ alors $\frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)}$ est placé à droite de $\frac{\alpha(u)}{\overline{\alpha}(u)}$ dans l'arbre de Stern-Brocot, car celui-ci préserve l'ordre. Ainsi la première coordonnée changée en passant de u à v est un -1 changé en $+1$ (parce que u est placé à gauche de v) d'où $A_K(u,v) = -1$. □

Cependant l'arbre de Stern-Brocot est principalement connu pour le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 (voir par exemple [11])**.** *Le rationnel* $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_m + \frac{1}{1}}}}}$ *apparaît dans l'arbre de Stern-Brocot à la hauteur* $H = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$*. En particulier, il est situé au noeud au bout du chemin partant de la racine* $\frac{1}{1}$ *et descendant* a_0 *fois vers la droite puis* a_1 *fois vers la gauche et ainsi de suite...*

Ce résultat garantit que chaque nombre rationnel apparaît une et une seule fois dans l'arbre de Stern-Brocot, ce qui nous permet de décrire notre marche aléatoire via une autre fonctionnelle.

Dans un soucis de simplicité nous utiliserons plutôt la notation suivante pour les fractions continues :

$$[n_0, n_1, \ldots, n_k] \overset{def}{=} n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{n_k}}} \quad \text{avec } n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \text{ et } n_k > 0.$$

L'inconvénient de cette notation est sa non-unicité. En effet, si $n_k \geqslant 2$ alors $[n_0, n_1, \ldots, n_k]$ et $[n_0, n_1, \ldots, n_k - 1, 1]$ représentent le même nombre rationnel (car $n_k = n_k - 1 + \frac{1}{1}$). Néanmoins, on remarque facilement que chaque élément de $\mathbb{Q}_+^*$ possède une unique écriture en fraction continue dont le dernier élément est 1.

Corollaire 1.5.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \bigcup_{K \in \mathbb{N}} V_K & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+^* \\ & v & \longmapsto & \frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)} \end{array}$$

est bijective de fonction réciproque

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1} : & \mathbb{Q}_+^* & \longrightarrow & \bigcup_{K \in \mathbb{N}} V_K \\ & a = [a_0, a_1, \ldots, a_m, 1] & \longmapsto & (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_0}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{a_1}, \underbrace{1, \ldots}_{a_2} \ldots) \end{array}$$

où $[a_0, a_1, \ldots, a_m, 1]$ *est le développement en fraction continue "aménagé" (i.e. le dernier coefficient vaut* 1*) de* $a \in \mathbb{Q}_+^*$ *et le nombre de* 1 *et de* -1 *consécutifs est* a_0*,* a_1*, et ainsi de suite jusqu'à* a_m *(le* 1 *final n'est pas pris en compte), pour ainsi avoir les* $a_0 + a_1 + \cdots + a_m = K$ *coordonnées.*

Ainsi nous pouvons considérer que notre marche aléatoire sur G_K est une chaîne de Markov dans $\mathbb{Q}_+^*$ grâce à la fonction Φ, le caractère markovien étant préservé par la bijection. Le problème de cette représentation est qu'il ne semble pas y avoir de manière évidente de dire si deux fractions sont "voisines" sans repasser par les chemins dans l'arbre de Stern-Brocot (on peut néanmoins dire si elles appartiennent au même V_K à partir de la somme de leurs coefficients dans la décomposition en fraction continue).

Remarque 1.5.1. *Ce lien entre le modèle de* [2] *et l'arbre de Stern-Brocot permet de retrouver certaines propriétés déjà connues de* G_K*, notamment son degré maximal ou le cardinal de* E_K*.*

Notons que comme $A_K(e) = \mathbb{1}_{e \in E_K^+} - \mathbb{1}_{e \in E_K^-}$ alors :

$$\mathbb{E}[A_K(\Delta_1) | Y_0 = v] = \frac{\alpha(v) - \overline{\alpha}(v)}{deg(v)} = \frac{\alpha(v) - \overline{\alpha}(v)}{\alpha(v) + \overline{\alpha}(v)} = \varphi\left(\frac{\alpha(v)}{\overline{\alpha}(v)}\right)$$

où la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow &]-1, 1[\\ & x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

est bijective. En particulier $\varphi \circ \Phi$ est une bijection de $\bigcup_{K \in \mathbb{N}} V_K$ dans $\mathbb{Q} \cap]-1, 1[$.

1.6 Simulations

Dans cette section nous allons considérer différentes méthodes pour simuler le comportement du modèle de chaîne de prisonniers décrit dans [2]. Les codes sont écrits en Python 3 et nécessitent les bibliothèques suivantes pour s'exécuter convenablement :

```
In [1]: #bibliothèques utilisées dans les codes suivants
        from numpy import *
        from matplotlib.pyplot import *
        import random as rdm
        import time
```

1.6.1 Méthode classique

On souhaite simuler le comportement du processus aléatoire décrit dans la Section 1.1, à partir de sa définition. La première étape est donc de simuler la chaîne de prisonniers au temps $n = 0$, i.e. sous la mesure invariante. Pour ce faire nous allons utiliser la description séquentielle (Lemme 1.1.1) pour générer deux listes de caractères valant ± 1 correspondant aux valeurs de $Y_K(0)$ et $Y_K(1)$, ainsi qu'une variable `epsilon` qui contient la valeur de $A_K(\Delta_0)$.

```
In [2]: #On va utiliser la description séquentielle pour générer une arête de G_K
        #distribuée sous la mesure invariante
        def description_sequentielle(K):
            epsilon=2*rdm.randint(0,1)-1 #On tire une Rademacher pour epsilon
            a=[]#On initialise les listes de coordonnées
            b=[]
            gamma=epsilon #On initialise la valeur de gamma
            for i in range(K): #Pour chaque coordonnée (i va de 0 à K-1)...
                alpha=rdm.random() #... on tire un nombre uniformément sur [0,1] qui
                #va déterminer la valeur de alpha_i
                if alpha>1.0/3.0: #Comme alpha_i est une Bernoulli de paramètre 1/3,
                    #on considère alpha_i=indicatrice(aléa<1/3).
                    #Si alpha_i=0, alors la coordonnée ne change pas de a à b et vaut beta
                    beta=2*rdm.randint(0,1)-1 #beta est une Rademacher
                    a.append(beta)
                    b.append(beta)
                else:
                    #Si alpha_i=1, alors la coordonnée change et vaut +/- gamma_i
                    a.append(gamma) #gamma_i pour a
                    gamma=-1*gamma #On met à jour gamma en changeant son signe
                    b.append(gamma) #gamma_(i+1)=-gamma_i pour b
            return [[a, b],epsilon]
        #On renvoie a et b qui sont les configurations des prisonniers aux temps n=0 et n=1,
        #ainsi que la valeur de epsilon i.e. A_K(a,b) (indispensable en cas de boucle).
```

Nous possédons maintenant une fonction qui donne les deux premières configurations de notre chaîne de prisonniers (ainsi que la valeur de $A_K(\Delta_0)$). Pour pouvoir itérer le processus, il suffit alors de lister les configurations valides avant d'en tirer une au hasard. Nous allons construire cette liste à partir des coordonnées de $a \in V_K$ en raisonnant par troncature : en effet si $\tilde{a}_k$ et $\tilde{b}_k$ désignent les sommets de V_k obtenus en prenant les k premières coordonnées de a et b respectivement (pour $k < K$), alors $(a, b) \in E_K \Rightarrow (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \in E_k$, et la réciproque demande une compatibilité de signes que nous pouvons vérifier.

On commence à partir d'une boucle sur l'unique sommet $v_0 \in V_0$ (en mettant 0 pour la valeur de A_K afin d'indiquer qu'il s'agit d'une boucle qui ne change aucune coordonnée), puis pour $k = 0, \ldots, K-1$ on énumère les voisins de $\tilde{a}_{k+1}$ à partir des voisins de $\tilde{a}_k$. Tout d'abord la boucle (marquée jusqu'ici par un 0) engendre deux voisins pour $\tilde{a}_{k+1}$: la nouvelle boucle $(\tilde{a}_{k+1}, \tilde{a}_{k+1})$ (toujours marquée par 0) et l'arête qui ne change que la dernière coordonnée de $\tilde{a}_{k+1}$ (en prenant soin de préciser la valeur de A_K fixée par ce changement). En revanche un autre voisin $\tilde{b}_k \neq \tilde{a}_k$ (qui possède un ou plusieurs changements de coordonnées) permettra de construire une ou deux arêtes dans V_{k+1} selon le signe de a_{k+1} : celle allant

de $\tilde{a}_{k+1}$ à $(\tilde{b}_k; a_{k+1})$ qui ne change pas la dernière coordonnée (ce qui est forcément une arête dans E_{k+1}) et éventuellement celle qui va jusqu'au sommet $\tilde{b}_{k+1} = (\tilde{b}_k; -a_{k+1})$ et qui change aussi la $(k+1)$-ème coordonnée (seulement dans le cas où a_{k+1} est du signe opposé au dernier changement de coordonnée dans $(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$). Une fois que cette récurrence arrive à l'étape K on s'arrête et on duplique la boucle pour avoir $(a,a)^+$ et $(a,a)^-$.

Pour savoir si $(\tilde{a}_{k+1}, \tilde{b}_{k+1}) \in E_{k+1}$, il faut que l'une des deux conditions suivantes soit remplie : soit l'arête $(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$ change un nombre pair de coordonnées, donc $\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i) = 0$ (car les signes des changements doivent alterner) et $a_{k+1} = \varepsilon = A_k(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$, soit ladite arête change un nombre impair de coordonnées, donc $\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i) = 2\varepsilon$ (car les signes des changements doivent alterner) et $a_{k+1} = -\varepsilon$.

Par exhaustion des cas possibles on remarque que l'on peut réduire ces deux conditions en une seule, à savoir $\sum_{i=1}^{k}(a_i - b_i) + a_{k+1} = \varepsilon$, condition que nous utilisons dans le progamme suivant pour voir si l'arête $(\tilde{a}_{k+1}, \tilde{b}_{k+1})$ est bien dans E_{k+1}.

```
In [3]: #Liste des sommets voisins de a dans G_K
        def liste_voisins(a):
            K=len(a) #On commence par récupérer la valeur de K à partir de la taille de a
            liste=[[0]] #L'initialisation est la boucle (on note epsilon=0 pour garder en tête
            # les deux boucles en même temps) autour du sommet vide (K=0, aucune coordonnées)
            for i in range(K): #Procédons coordonnée par coordonnée (avec i allant de 0 à K-1)
                for j in range(len(liste)): #On parcourt tous les "voisins" dans la liste
                    if liste[j][0]==0: #Le premier indice est epsilon
                        #Le cas epsilon=0 correspond aux boucles,
                        #on va donc créer la nouvelle liste "temp" à partir des deux
                        #voisins ne changeant pas les premières coordonnées
                        temp=[liste[j]+[a[i]]]+[[a[i]]+liste[j][1:]+[-a[i]]]
                        #On ajoute donc la dernière coordonnée à la boucle, ainsi qu'un voisin
                        #où le premier changement est la (i+1)-ème coordonnée
                    else: #Si on n'a pas 0 en début de ligne, c'est qu'une ou plusieurs
                        #coordonnées ont déjà changé dans ce début de voisin
                        #On ajoute le voisin ne changeant pas la coordonnée considérée
                        temp.append(liste[j]+[a[i]])
                        if sum(a[:i+1])-sum(liste[j][1:])==liste[j][0]:
                            #Si on peut changer la (i+1)-ème coordonnée en alternant les signes
                            #alors on ajoute le voisin obtenu en changeant ladite coordonnée
                            temp.append(liste[j]+[-a[i]])
                liste=temp #On met à jour la liste des "voisins" qui ont une coordonnée de plus
            #On n'oublie pas de doubler la boucle (a,a) en affectant les signes adéquats
            final = [[1]+liste[0][1:]] + [[-1]+liste[0][1:]] + liste[1:]
            return final
```

Nous pouvons à présent simuler notre processus aléatoire : il suffit d'appeler `description_sequentielle` pour intialiser le processus, puis on appelle `liste_voisins` pour avoir la liste des transitions possibles, on en tire une au hasard uniformément puis on réitère jusqu'à arriver au temps n.

La liste Y gardera en mémoire tous les sommets de V_K parcourus, tandis que X listera les valeurs de $\sum_{i=0}^{k} A_K(\Delta_i)$, i.e. la position du premier marcheur au cours du temps.

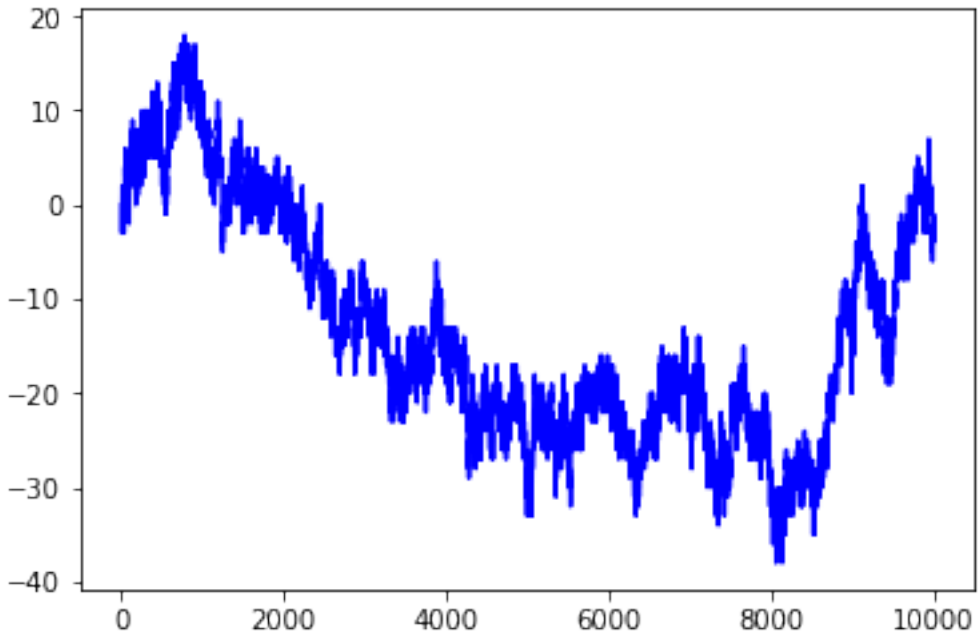
```
In [4]: #Simulation des n premières étapes de la marche aléatoire sur G_K
        #et de la fonctionnelle additive correspondante
        def marche_prisonniers_classique(n,K):
            start=description_sequentielle(K)
            #On tire les deux premiers sommets à l'aide de la description séquentielle
            Y=start[0] #Y sera la liste des sommets de V_K parcourus
            X=[0]+[start[1]] #X sera la trajectoire du premier marcheur du temps 0 au temps n
            for i in range(n-1): #On avance le temps jusqu'à n (i va de 0 à n-2)
                candidats=liste_voisins(Y[i+1]) #On liste tous les voisins du sommet actuel
                alpha=int(rdm.random()*len(candidats)) #On en tire un au hasard
                Y.append(candidats[alpha][1:]) #On ajoute le sommet à la liste Y
                X.append(X[i+1]+candidats[alpha][0])
```

```
            #On ajoute à la liste X sa dernière valeur incrémentée du signe de l'arête
        return [X,Y]
```

Nous pouvons à présent simuler la trajectoire du premier marcheur, tout en affichant le temps d'exécution afin de comparer les différentes méthodes mises en place. Nous allons aussi nous servir de ces codes pour illustrer le comportement de cette "chaîne de prisonniers" en affichant la forme prise par cette chaîne lors des 5 premières étapes.

```
In [5]: t1=time.perf_counter() #On retient la date du début de la simulation
        M=marche_prisonniers_classique(10000,10) #On simule le processus via la méthode classique
        plot(M[0],'blue') #On trace la trajectoire du premier marcheur au cours du temps
        t2=time.perf_counter() #On récupère la date de fin de la simulation
        print(t2-t1) #La différence des deux dates nous donne le temps d'éxécution
```

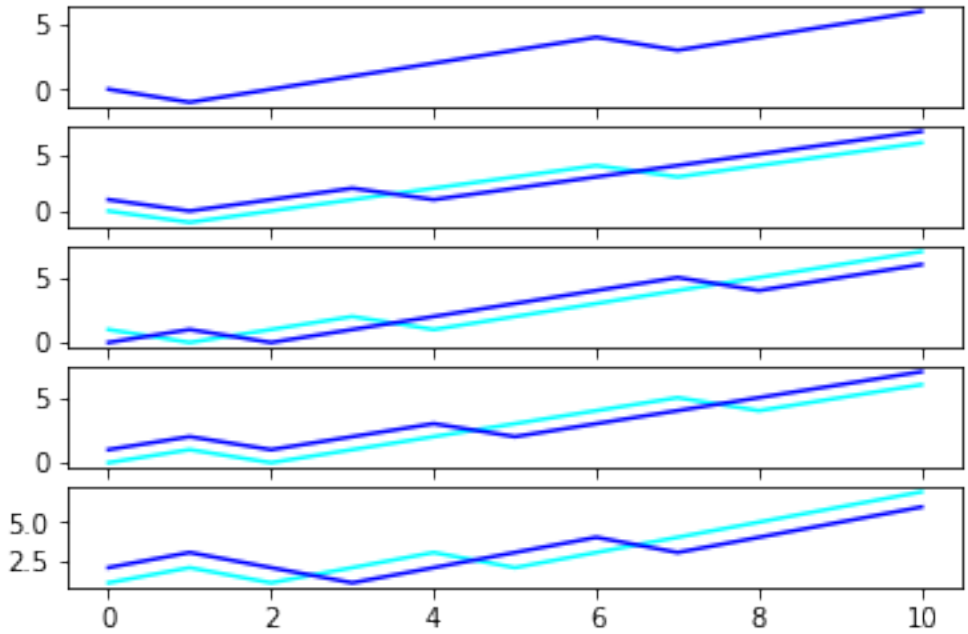
```
36.18676690000029
```




```
In [6]: M=marche_prisonniers_classique(5,10) #On simule notre processus
        #Puis on reconstruit les positions de tous les marcheurs à partir de la position
        #du 1er marcheur X et la forme de la chaîne de prisonniers Y
        C0 = cumsum([M[0][0]]+M[1][0])
        C1 = cumsum([M[0][1]]+M[1][1])
        C2 = cumsum([M[0][2]]+M[1][2])
        C3 = cumsum([M[0][3]]+M[1][3])
        C4 = cumsum([M[0][4]]+M[1][4])
        #On affiche à chaque fois la forme actuelle et la forme précédente
        subplot(511)
        plot(C0,'blue')
        subplot(512)
        plot(C0,'cyan')
        plot(C1,'blue')
        subplot(513)
        plot(C1,'cyan')
        plot(C2,'blue')
        subplot(514)
```

```
plot(C2,'cyan')
plot(C3,'blue')
subplot(515)
plot(C3,'cyan')
plot(C4,'blue')
```

```
Out[6]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x192763bbba8>]
```



1.6.2 Méthode avec rejet

Le problème de la méthode précédente est que la liste des sommets voisins doit être refaite à chaque étape, et est longue à générer alors qu'on n'utilise qu'un seul élément dans cette liste. Quand K devient très grand, il devient plus intéressant de ne pas lister les configurations accessibles, mais d'en tirer une au hasard dans V_K jusqu'à en obtenir une valide. Pour cela il nous faut une fonction qui teste s'il y a une arête de E_K entre deux éléments de V_K donnés. Il suffit de parcourir les deux sommets coordonnée par coordonnée, de la dernière à la première, tout en gardant en mémoire le signe du dernier changement ayant eu lieu. Si tous les changements alternent leurs signes, on peut alors renvoyer 1 pour indiquer qu'une arête reliant ces deux sommets existe dans E_K, ainsi que la valeur de A_K correspondant au dernier changement lu (sauf dans le cas où les deux sommets sont égaux, où l'on renvoie 0 pour indiquer que A_K peut valoir ± 1).

```
In [7]: #Fonction booléenne indiquant si deux sommets (supposés venant du même graphe G_K)
        #sont voisins, et donnant le signe de l'arête (a,b) le cas échéant
        def sont_voisins(a,b):
            signe=0 #Cette variable stockera le dernier changement de coordonnée repéré
            for i in range(len(a)-1,-1,-1): #On lit les coordonnées de droite à gauche
                #afin que le dernier changement de coordonnée identifié nous donne
                #le signe de l'arête, donc i va de K-1 à 0
                diff=b[i]-a[i] #On calcule la différence des coordonnées
                if diff!=0: #Si les coordonnées sont différentes...
                    if diff-signe==0: #... on compare avec le précédent changement
                        #(0 si aucun changement n'a encore eu lieu)
                        return [0,0] #Si deux changements consécutifs de coordonnées ont
                    #le même signe, alors il n'y a pas d'arête entre a et b
```

```
                else: #Sinon on met à jour le dernier changement de coordonnée
                    signe=diff
        return [1, -signe/2] #Le facteur -1/2 permet de récupérer la valeur de A_K
    #Attention ! cette fonction renvoie un "signe" égal à 0 si a=b
```

On peut ainsi coder une fonction de tirage qui va choisir des sommets au hasard dans V_K jusqu'à tomber sur un voisin de $a \in V_K$, puis renvoyer ce sommet ainsi que la valeur de A_K le long de l'arête correspondante (obtenue lors de la vérification). Il faut faire attention à doubler les chances de tirer le sommet où l'on se trouve actuellement lors du tirage car il y a deux boucles, $(a,a)^+$ et $(a,a,)^-$. Nous allons donc tirer un sommet au hasard dans V_K (en prenant garde de compter deux fois le sommet actuel, afin que la probabilité de tomber sur une boucle soit le double de celle de tomber sur une autre arête valide). Il suffit alors de tester s'il y a une arête permettant d'atteindre ce sommet et de mettre fin au tirage le cas échéant (sinon on recommence du début).

```
In [8]: #Cette fonction va tirer un sommet au hasard dans V_K
        #et réessayer jusqu'à tomber sur un voisin de v
        def tirage(a):
            boucle=1 #Paramètre de boucle, vaudra 1 jusqu'à ce que le sommet tiré soit valide
            K=len(a) #On récupère la valeur de K à partir de la taille de a
            while boucle==1:#Début de la boucle principale
                alpha=rdm.randint(0,2**K) #On tire un entier aléatoire
                #compris entre 0 et 2^K INCLUS
                if alpha==2**K: #Si on tombe sur 2^K ...
                    candidat=a #... on considère qu'on a tiré l'arête (v,v)^+
                    signe=1
                    boucle=0 #On arrête la boucle principale
                else:
                    candidat=[] #On va écrire le candidat potentiel sous forme de coordonnées
                    for i in range(K): #i va de 0 à K-1
                        candidat.append((-1)**(alpha//2**(K-i-1))) #On ajoute une coordonnée
                        #+1 ou -1 en fonction de l'écriture de alpha en binaire
                        alpha= alpha-(alpha//2**(K-i-1))*2**(K-i-1) #On réduit alpha pour ne
                        #garder que les chiffres les plus à droite dans son écriture en binaire
                    test=sont_voisins(a,candidat) #On teste le candidat pour savoir s'il est
                    #bien un voisin du sommet a
                    if test[0]==1: #Si c'est le cas...
                        boucle=0 #...on arrête la boucle principale
                        if test[1]==0: #Si on est tombé sur a (i.e. le signe vaut 0)...
                            signe=-1 #...on considère qu'on est sur (a,a)^-
                        else: #Sinon l'arête correspondante est simplement (a,candidat)
                            signe=test[1]
                #Si on a pas trouvé un voisin de a, le paramètre "boucle" vaut encore 1
                #donc on recommence du début de la boucle
            return [signe,candidat]
```

Il ne reste qu'à simuler notre processus : on utilise encore `description_sequentielle` pour initialiser le processus, puis on appelle simplement la fonction `tirage` pour itérer le processus à chaque étape.

A nouveau la liste Y gardera en mémoire tous les sommets de V_K parcourus, tandis que X listera les valeurs de $\sum_{i=0}^{k} A_K(\Delta_i)$, i.e. la position du premier marcheur au cours du temps.

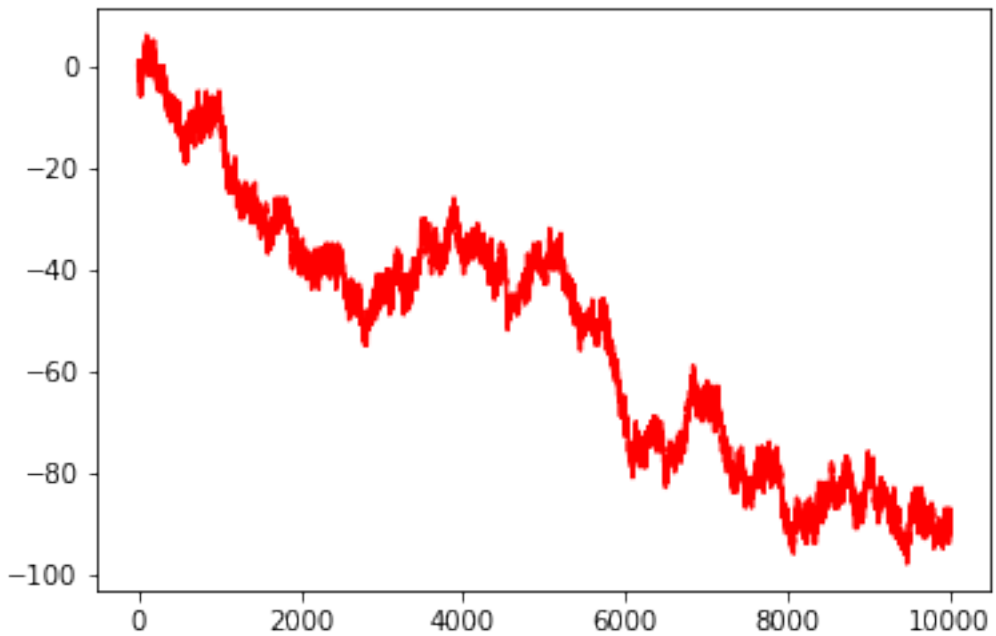
```
In [9]: #Simulation des n premières étapes de la marche aléatoire sur G_K
        #et de la fonctionnelle additive correspondante
        def marche_prisonniers_rejet(n,K):
            start=description_sequentielle(K) #On tire les deux premiers sommets à l'aide
            #de la description séquentielle
            Y=start[0] #Y sera la liste des sommets de V_K parcourus
            X=[0]+[start[1]] #X sera la somme des A_K(Y_i,Y_(i+1))
            for i in range(n-1): #i va de 0 à n-2
                voisin=tirage(Y[i+1]) #On tire le sommet suivant à l'aide de la fonction tirage
```

```
            Y.append(voisin[1]) #On ajoute le sommet à la liste Y
            X.append(X[i+1]+voisin[0]) #On ajoute à la liste X sa dernière valeur
            #incrémentée du signe de l'arête
        return [X,Y]
```

Cette méthode devient plus avantageuse que la première pour n grand, car en moyenne il est plus rapide de tomber sur un sommet voisin en tirant au hasard plutôt que de construire à chaque étape la liste des transitions valides. On peut effectivement voir ci-après que le temps d'éxécution est plus faible que pour la première méthode avec les mêmes paramètres ($n = 10000$ et $K = 10$).

```
In [10]: t1=time.perf_counter()#On retient la date du début de la simulation
         M=marche_prisonniers_rejet(10000,10) #On simule notre processus via la méthode avec rejet
         plot(M[0],'red') #On trace la trajectoire du premier marcheur au cours du temps
         t2=time.perf_counter() #On récupère la date de fin de la simulation
         print(t2-t1) #La différence des deux dates nous donne le temps d'éxécution
```

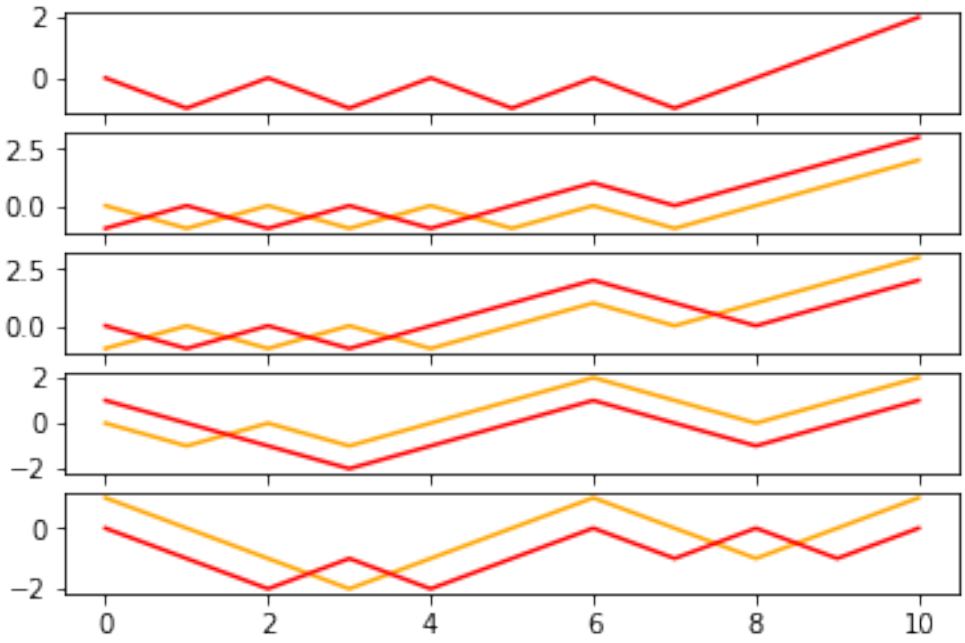
```
2.00253739999971
```




```
In [11]: M=marche_prisonniers_rejet(5,10) #On simule notre processus
         #Puis on reconstruit les positions de tous les marcheurs à partir de la position
         #du 1er marcheur X et la forme de la chaîne de prisonniers Y
         C0 = cumsum([M[0][0]]+M[1][0])
         C1 = cumsum([M[0][1]]+M[1][1])
         C2 = cumsum([M[0][2]]+M[1][2])
         C3 = cumsum([M[0][3]]+M[1][3])
         C4 = cumsum([M[0][4]]+M[1][4])
         #On affiche à chaque fois la forme actuelle et la forme précédente
         subplot(511)
         plot(C0,'red')
         subplot(512)
         plot(C0,'orange')
         plot(C1,'red')
         subplot(513)
         plot(C1,'orange')
```

```
plot(C2,'red')
subplot(514)
plot(C2,'orange')
plot(C3,'red')
subplot(515)
plot(C3,'orange')
plot(C4,'red')
```

```
Out[11]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1927645e080>]
```



1.6.3 Méthode avec listes d'incidence

Puisqu'il s'agit d'une marche aléatoire sur un multi-graphe, la seule information dont nous avons besoin pour simuler le comportement de $(Y_K(n))_{n\geq 0}$ est la m atrice d'incidence de G_K. D'une certaine manière cela revient à notre première méthode de simulation, mais en listant a priori toutes les listes de voisinage de manière à ne pas avoir besoin de les déterminer à nouveau à chaque étape.

Il s'avère que la fonctionnelle A_K admet une propriété qui va nous être très utile : si $(u,v) \in E_K$ avec $u \neq v$ alors $A_K(u,v) = 1$ (respectivement -1) ssi u est placé après (resp. avant) v pour l'ordre lexicographique ($u \underset{lex}{\prec} v$ ssi $\exists i = 1,\ldots,K$ tel que $u_i < v_i$ et $u_j = v_j$ pour $j < i$). Ainsi si on liste les sommets dans cet ordre on peut toujours très facilement déterminer la valeur de A_K. Nous allons donc générer la matrice $M_K = (M_{i,j})_{i,j\in[\![1,2^K]\!]}$ où $M_{i,j}$ vaut 1 si les i-ème et j-ème sommets sont reliés par au moins une arête dans E_K, et 0 sinon.

On pourrait croire que générer une telle matrice serait coûteux en temps d'éxécution, mais on peut exploiter la définition récursive des graphes G_K pour obtenir cette matrice. En effet si on considère les relations (1.4) on constate que M_{K+1} peut se décomposer en 4 blocs de taille $2^K \times 2^K$, ceux en haut à gauche et en bas à droite sont une copie conforme de M_K, tandis que celui en haut à droite (resp. en bas à gauche) est la partie triangulaire inférieure (resp. supérieure) de M_K. Une fois cette matrice M calculée recursivement dans `generation_matrice` il ne reste plus qu'à lister les voisins de chaque sommet j en ne conservant que les indices i des colonnes telles que $M_{ij} = 1$.

```
In [12]: def generation_matrice(K): #On génère la matrice d'incidence de manière récursive
             if K==0:
                 return array([[1]]) #On démarre avec la matrice (1)
             else:
```

```
        X=generation_matrice(K-1)
        #On récupère la matrice du rang précédent
        TopLeft=X #Le bloc en haut à gauche est X
        TopRight=tril(X) #Le bloc en haut à droite ne conserve que le triangle inférieur
        BottomLeft=triu(X) #Le bloc en bas à gauche ne conserve que le triangle supérieur
        BottomRight=array(X) #Le bloc en bas à droite est une copie de X

        #Il ne reste plus qu'à assembler les 4 blocs
        return block([[TopLeft,TopRight],[BottomLeft,BottomRight]])

#On enleve les zeros de la matrice pour ne garder que les listes de sommets voisins
def liste_incidence(K): #On génère les listes de voisins
    matrice=generation_matrice(K) #On commence par construire la matrice d'incidence
    liste=[] #On initialise la liste des voisins de chaque sommet
    for i in range(2**K): #Pour chaque sommet i entre 0 et 2^K-1...
        liste.append(where(matrice[i,:]==1)[0].tolist())
        #... on ajoute une liste contenant tous les indices j
        #tels que matrice[i][j] vaut 1
    return liste
```

Il nous faut à présent initialiser le processus au temps $n = 0$, i.e. tirer un sommet sous la mesure invariante. On recode donc la fonction `description_sequentielle`, mais cette fois-ci en utilisant le nouveau format utilisé pour représenter les éléments de V_K, à savoir un entier entre 0 et $2^K - 1$ (dont l'écriture en base 2 correspond aux coordonnées du sommet dans V_K). Notons qu'il faut changer la plage de valeurs des variables `epsilon` et `beta` afin de s'adpter à cette nouvelle description du modèle.

```
In [13]: def initialisation(K):
             #On va utiliser la description séquentielle pour générer une arête de G_K
             #distribuée sous la mesure invariante,
             #mais cette fois-ci sous forme d'entiers et non sous forme de suites de +1/-1
             epsilon=rdm.randint(0,1) #On tire une Bernoulli pour epsilon
             a=0 #Les arêtes seront codées sous forme d'un entier et non d'une liste
             b=0
             gamma=epsilon #On initialise le gamma
             for i in range(K): #Pour chaque coordonnée (i va de 0 à K-1)
                 alpha=rdm.random() #On tire un aléa (uniforme sur [0,1])
                 #pour déterminer la valeur de alpha_i
                 if alpha>1.0/3.0: #Comme alpha_i est une Bernoulli de paramètre 1/3,
                     #on considère alpha_i=indicatrice(aléa<1/3)
                     #Si alpha_i=0, donc la coordonnée ne change pas de a à b
                     #et on ajoute beta*2^(K-i-1)
                     beta=rdm.randint(0,1)
                     a=a+beta*2**(K-i-1)
                     b=b+beta*2**(K-i-1)
                 else:
                     #Si alpha_i=1, donc la coordonnée change de gamma à -gamma
                     a=a+gamma*2**(K-i-1) #+gamma_i pour a
                     gamma=1-gamma #On update gamma en changeant son signe
                     b=b+gamma*2**(K-i-1) #+gamma_(i+1)=-gamma_i pour b
             return [[a, b],2*epsilon-1]
         #On renvoie a et b qui sont les conifgurations des prisonniers aux temps n=0 et n=1,
         #ainsi que la valeur de 2*epsilon-1 i.e. A_K(a,b) (indispensable en cas de boucle).
```

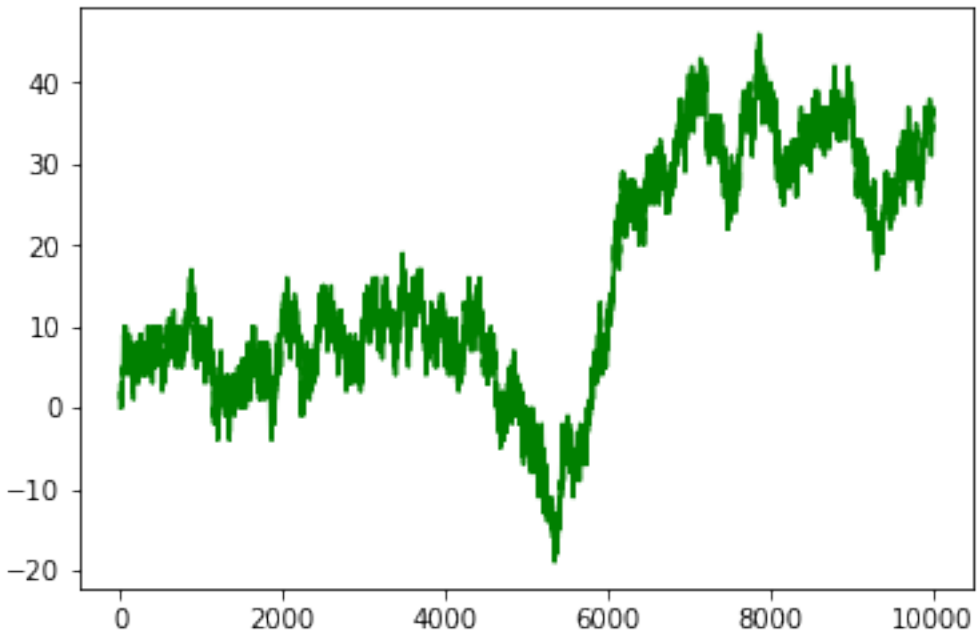
A présent nous pouvons simuler le processus : on commence par générer les listes des voisins de chaque sommet $v \in V_K$ afin de pouvoir tirer un voisin au hasard, à l'instar de la méthode classique. On initialise la marche aléatoire à l'aide de la fonction `initialisation`, puis on stockera les sommets parcourus dans Y (sous forme d'entiers cette fois-ci) et la trajectoire du premier marcheur dans X. A chaque itération, on génère un entier m aléatoire entre 1 et $deg(v)$ et on va chercher dans la matrice le m-ième voisin w de v ; il ne reste plus qu'à regarder si $w \underset{lex}{<} v$ ou non pour déterminer la valeur de A_K.

```
In [14]: #Simulation des n premières étapes de la marche aléatoire sur G_K
         #et de la fonctionnelle additive correspondante
         def marche_prisonniers_incidence(n,K):
             voisins=liste_incidence(K)#On récupère les listes d'incidence
             start=initialisation(K) #On tire les deux premiers sommets sous la mesure invariante
             Y=start[0] #Y sera la liste des sommets de V_K parcourus
             X=[0]+[start[1]] #X sera la somme des A_K(Y_i,Y_(i+1))
             sommet=Y[1] #On garde en mémoire le sommet où l'on se trouve actuellement...
             marcheur=X[1] #... ainsi que la position actuelle du premier marcheur
             for i in range(n-1): #i va de 0 à n-2
                 N=len(voisins[sommet]) #On récupère le nombre de voisins du sommet actuel
                 alea=rdm.random()*(N+1) #On génère un nombre uniformément sur [0, deg(v)]
                 if alea>N: #S'il est dans l'intervalle ]N,N+1] on considère que l'on a tiré
                     #la boucle (v,v)+, donc le marcheur monte et le sommet reste inchangé
                     marcheur=marcheur+1
                 else: #Sinon on va chercher le voisin tiré dans la liste
                     arrivee=voisins[sommet][int(alea)]
                     if arrivee<sommet: #Si le sommet d'arrivé est classé après celui de départ
                         marcheur=marcheur+1 #alors l'arête est dans E_k^+ et le marcheur monte
                     else: #Sinon elle est dans E_K^- (en incluant la boucle qui est (v,v)-)
                         marcheur=marcheur-1 #donc le marcheur descend
                     sommet=arrivee #On met à jour le sommet
                 Y.append(sommet) #On ajoute le sommet actuel à la liste Y
                 X.append(marcheur) #On ajoute la position actuelle à la liste X
             return [X,Y]
```

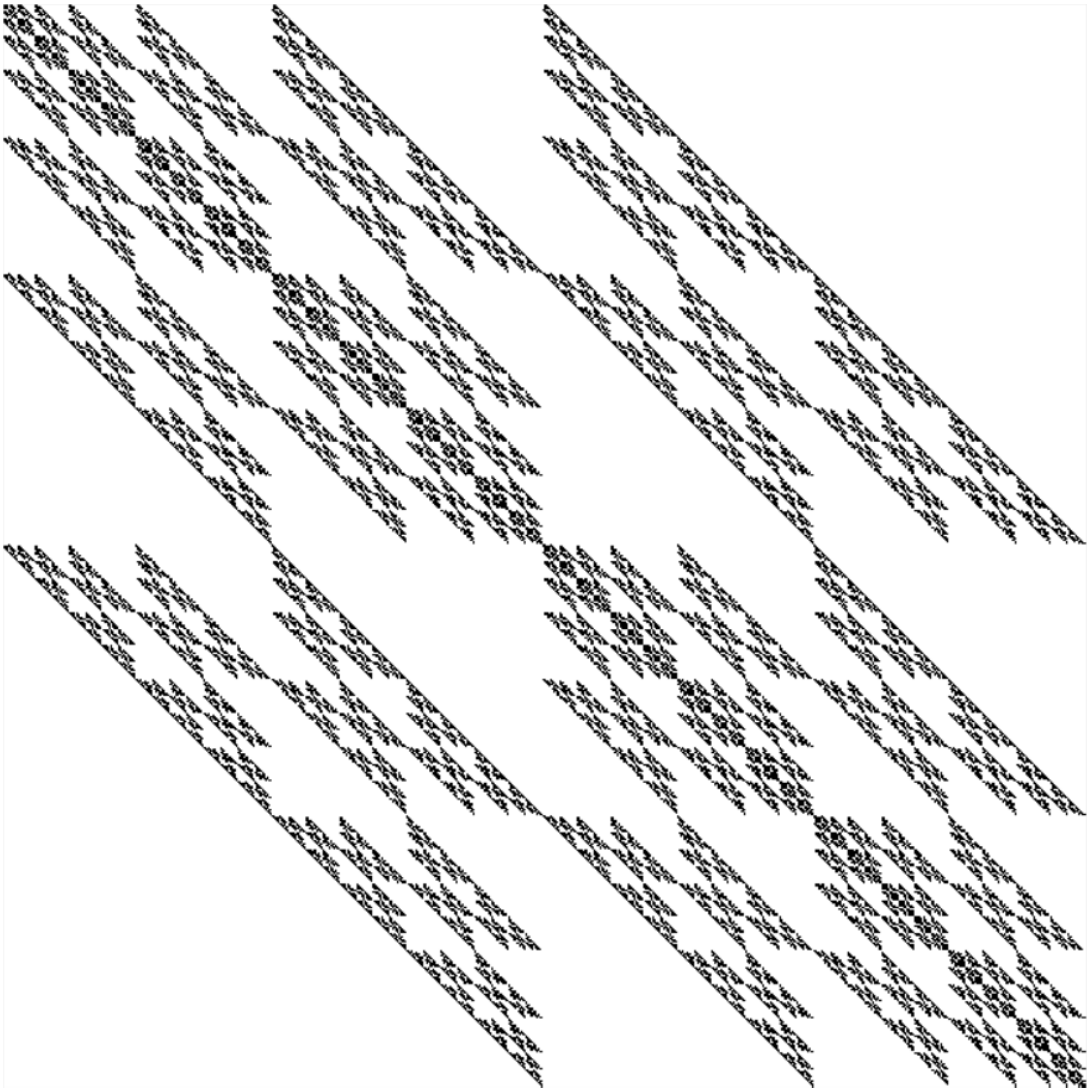
Si cette troisième méthode est trés rapide, surtout pour n grand, elle présente un défaut qui compense son efficacité : la matrice d'incidence étant de taille $2^K \times 2^K$, elle réclame beaucoup de mémoire quand K devient grand (c'est la raison pour laquelle nous comparons ces 3 méthodes avec $K = 10$ seulement).

```
In [15]: t1=time.perf_counter()#On retient la date du début de la simulation
         M=marche_prisonniers_incidence(10000,10) #On simule notre processus via cette méthode
         plot(M[0],'green') #On trace la trajectoire du premier marcheur au cours du temps
         t2=time.perf_counter() #On récupère la date de fin de la simulation
         print(t2-t1) #La différence des deux dates nous donne le temps d'éxécution
```

```
0.045161000000007334
```



On peut également afficher la matrice d'incidence pour $K = 10$, en remplaçant les 0 par des cases blanches et les 1 par des cases noires dans un souci de visualisation.



Chapitre 2

Généralisation du modèle des prisonniers

Dans ce chapitre nous allons tâcher de résoudre les mêmes problématiques que pour le modèle des prisonniers, mais en essayant de travailler dans un contexte aussi global que possible. L'objectif serait alors de mettre en évidence un modèle plus général dans lequel une approche similaire serait possible, dans le but de mettre en lumière les hypothèses minimales dont nous avons besoin.

2.1 Modèle général

2.1.1 Définitions et notations

Commençons d'abord par définir les objets qui constitueront ce modèle général.

Definition 2.1.1. *Un **multi-graphe orienté à boucles** G est la donnée d'un ensemble fini de sommets V et d'un ensemble fini d'arêtes E tels que toute arête $e \in E$ est associée à un sommet d'origine $\overleftarrow{e} \in V$ et à un sommet d'arrivée $\overrightarrow{e} \in V$.*

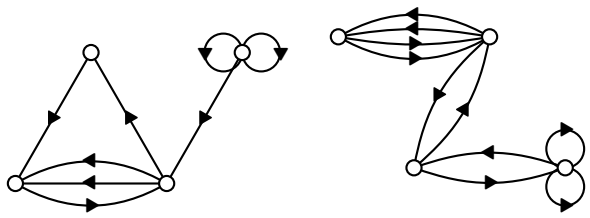


FIGURE 2.1 – Exemples de multi-graphes orientés à boucles

Remarque 2.1.1. *Il n'est nullement supposé dans la définition précédente que $\overleftarrow{e} \neq \overrightarrow{e}$ ou que $e_1 \neq e_2 \Longrightarrow (\overleftarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \neq (\overleftarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})$. Ainsi il peut y avoir plusieurs arêtes joignant une même paire de sommets et même plusieurs boucles (i.e. des arêtes telles que $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{e}$).*

Il nous faut à présent introduire deux propriétés essentielles que nous allons exiger à nos multi-graphes pour notre étude.

Definition 2.1.2. *Un multi-graphe orienté à boucles $G = (V, E)$ est dit **connexe** si pour tous $u, v \in V$ il existe une suite finie d'arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ telles que :*

$$\overleftarrow{e_1} = u, \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1, \ \overrightarrow{e_i} = \overleftarrow{e_{i+1}} \qquad et \qquad \overrightarrow{e_n} = v.$$

Definition 2.1.3. *Nous dirons qu'un multi-graphe orienté à boucles $G = (V, E)$ est **symétrique par transposition** s'il existe une application $T : E \to E$ telle que $\forall e \in E$:*

$$T(e) \neq e, \qquad T \circ T(e) = e, \qquad \overleftarrow{T(e)} = \overrightarrow{e} \quad et \quad \overrightarrow{T(e)} = \overleftarrow{e}.$$

Autrement dit les arêtes de ce multi-graphe peuvent être rassemblées par paires de telle sorte que le sommet d'origine de l'une est le sommet d'arrivée de l'autre et inversement. On notera alors $G = (V, E, T)$ pour préciser la transposition si elle n'est pas univoque. Pour alléger l'écriture nous noterons $\overline{e} \overset{def}{=} T(e)$ l'arête transposée de e.

Remarque 2.1.2. *En particulier pour être symétrique par transposition un multi-graphe a besoin d'avoir un nombre pair de boucles autour de chaque sommet, puisque chaque boucle doit être associée à une boucle différente située autour du même sommet.*

Le deuxième multi-graphe de la Figure 2.1 ainsi que les multi-graphes du Chapitre 1 sont des exemples de multi-graphes symétriques par transposition.

A partir de maintenant nous considérerons que $(G_K)_{K\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de multi-graphes orientés à boucles connexes symétriques par transposition.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$ nous considérerons la marche aléatoire simple $(\Delta_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ sur G_K qui est la chaîne de Markov à valeurs dans E_K telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(\Delta_{n+1,K}|\Delta_{n,K}) = Unf\left(\left\{e \in E_K : \overleftarrow{e} = \overrightarrow{\Delta_{n,K}}\right\}\right)$$

où Unf désigne la loi uniforme. Nous noterons $Y_{n,K} \overset{def}{=} \overrightarrow{\Delta_{n,K}}$ par similarité avec les autres cadres d'études.

Remarque 2.1.3. *On peut remarquer que $\mathcal{L}(\Delta_{n+1,K}|\Delta_{n,K}) = \mathcal{L}(\Delta_{n+1,K}|Y_{n,K})$. Nous utiliserons beaucoup cette identité dans les espérances conditionnelles que nous écrirons.*

Proposition 2.1.1. *Les chaînes de Markov $(\Delta_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent chacune une unique probabilité stationnaire, respectivement π_K et μ_K définies par :*

$$\forall e \in E_K,\ \pi_K(e) = \frac{1}{D_K} \qquad et \qquad \forall v \in V_K,\ \mu_K(v) = \frac{deg(v)}{D_K}$$

où $D_K \overset{def}{=} |E_K|$ et $deg(v) \overset{def}{=} \#\{e \in E_K : \overleftarrow{e} = v\}$.

Démonstration. Les deux chaînes de Markov $(\Delta_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ ont un espace d'états fini (respectivement E_K et V_K) et sont irréductibles car G_K est supposé connexe et symétrique par transposition.

On peut facilement vérifier que la probabilité uniforme π_K est invariante pour la chaîne $(\Delta_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$. L'expression de μ_K découle directement de celle de π_K par la définition des $Y_{n,K}$. □

A présent nous allons étendre la notion de champ de vecteurs issue de [2] dans le contexte de nos multi-graphes, ainsi que les outils et notations requis pour les étudier.

Definition 2.1.4. *Un champ de vecteurs sur G_K est une fonction $S : E_K \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall e \in E_K\ S(\overline{e}) = -S(e).$$

On peut alors introduire le produit scalaire de deux champs de vecteurs S_1 et S_2 sur G_K, défini par :

$$\langle S_1, S_2\rangle \overset{def}{=} \frac{1}{D_K}\sum_{e\in E_K} S_1(e)S_2(e).$$

On peut également construire les opérateurs gradient et divergence. Si $f : V_K \to \mathbb{R}$ désigne une fonction sur les sommets et $S : E_K \to \mathbb{R}$ est un champ de vecteurs sur G_K alors le gradient de f et la divergence de S sont définis respectivement par :

$$\nabla f : \begin{array}{l} E_K \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \mapsto f(\overrightarrow{e}) - f(\overleftarrow{e}) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \nabla\cdot S : \begin{array}{l} V_K \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \sum\limits_{e\in E_K} S(e)\mathbb{1}_{\overleftarrow{e}=v} \end{array}.$$

2.1.2 Objectif

Pour tout $K \in \mathbb{N}$ soit $A_K : E_K \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ de vecteurs sur G_K. On s'intéresse aux processus aléatoires définis par :

$$Z_{n,K}(t) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} A_K(\Delta_{i,K}) \ \forall K \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1].$$

En particulier nous cherchons des conditions suffisantes sur G_K et A_K pour pouvoir décrire le comportement asymptotique de $(Z_{n,K}(t))_{t\in[0,1]}$ quand n et K tendent tous deux vers l'infini. Nous supposerons que $\Delta_{0,K}$ est distribué selon la mesure stationnaire μ_K. Nous noterons $\mathbb{E}_v[.] \overset{def}{=} \mathbb{E}[.|Y_{0,K} = v]$ lorsque $v \in V_K$ et $\mathbb{E}_\mu[F] \overset{def}{=} \mathbb{E}[F(X)]$ où X suit la loi μ par confort d'écriture. Lorsqu'elle ne comporte aucun indice l'espérance est faite dans le cadre stationnaire.

A l'instar de notre approche décrite dans le Chapitre 1 pour le modèle des prisonniers, nous allons exploiter une décomposition de Hodge des champs de vecteurs A_K afin de pouvoir facilement décomposer nos processus $Z_{n,K}$ en une partie martingale et une somme télescopique.

Il s'avère que l'on peut simplement adapter la preuve de la décomposition de Hodge utilisée dans [2] dans ce contexte plus général.

Proposition 2.1.2 (Décomposition de Hodge)**.** *Tout champ de vecteurs A sur G_K se décompose de manière unique en :*

$$A = B + \nabla f$$

où B est un champ de vecteurs de divergence nulle sur G_K et f est une fonction de V_K dans $\mathbb{R}$.

De plus cette décomposition est orthogonale, i.e. $\langle B, \nabla f\rangle_{E_K} = 0$.

Démonstration. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des champs de vecteurs sur G_K, $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces champs de vecteurs ayant une divergence nulle sur tout V_K et $\mathcal{E}$ l'ensemble des champs de vecteurs gradient sur G_K. On peut facilement remarquer que $\forall B \in \mathcal{B}, \forall(\nabla f) \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\langle B, \nabla f\rangle_{E_K} &= \frac{1}{D_K}\sum_{e\in E_K} B(e)\nabla f(e) = \frac{1}{D_K}\sum_{e\in E_K} B(e)\Big(f(\overrightarrow{e}) - f(\overleftarrow{e})\Big) \\
&= \frac{1}{D_K}\sum_{e\in E_K} B(e)f(\overrightarrow{e}) + \frac{-1}{D_K}\sum_{e\in E_K} B(e)f(\overleftarrow{e}) = \frac{1}{D_K}\sum_{e\in E_K} -B(\overline{e})f(\overleftarrow{\overline{e}}) + \frac{-1}{D_K}\sum_{v\in V_K} f(v)\sum_{\substack{e\in E_K \\ \overleftarrow{e}=v}} B(e) \\
&= \frac{-1}{D_K}\sum_{\overline{e}\in E_K} B(\overline{e})f(\overleftarrow{\overline{e}}) + \frac{1}{D_K}\sum_{v\in V_K} f(v)\big(\nabla\cdot B\big)(v) = \frac{-2}{D_K}\sum_{v\in V_K} f(v)\big(\nabla\cdot B\big)(v) = 0
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{B} \perp \mathcal{E}$.

Pour montrer que $\mathcal{B} \oplus \mathcal{E} = \mathcal{V}$ il nous suffit alors de raisonner selon leurs dimensions. Or pour définir un champ de vecteurs gradient ∇f il suffit de donner une valeur de f à chaque sommet de V_K à une constante additive près. Ainsi :

$$dim(\mathcal{E}) = card(V_K) - 1.$$

De plus pour qu'un champ de vecteurs B soit de divergence nulle, il doit respecter $card(V_K)$ équations linéaires (une à chaque sommet). Cependant la symétrie des champs de vecteurs par transposition impose que :

$$\sum_{v\in V_K} (\nabla\cdot A)(v) = \sum_{e\in E_K} A(e) = 0$$

pour tout champ de vecteurs A, et donc seules $card(V_K) - 1$ équations sont linéairement indépendantes. Ainsi :

$$codim(\mathcal{B}) = card(V_K) - 1$$

et donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$ sont en somme directe, d'où l'existence et l'unicité de la décomposition. □

Nous allons donc utiliser la décomposition de Hodge de nos processus pour écrire :

$$\begin{aligned}
Z_{n,K}(t) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} B_K(\Delta_{i,K})}_{\overset{def}{=}\ M_{n,K}(t)} + \underbrace{\big(f_K(Y_{\lfloor nt \rfloor,K}) - f_K(Y_{0,K})\big)}_{F_{n,K}(t)} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

où $(M_{n,K}(t))_{t\in[0,1]}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale avec $\mathcal{F}_t \overset{def}{=} \sigma(\Delta_{i,K} : i \leq nt)$ (nous ne noterons pas que $\mathcal{F}_t$ dépend de n et K pour alléger les notations).

Notre objectif principal sera donc de déterminer sous quelles conditions nous sommes en mesure de montrer une convergence de la forme suivante :

$$\left(\frac{M_{n,K}(t)}{c_{n,K}}\right)_{t\in[0,1]} \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (B_t)_{t\in[0,1]} \tag{2.2}$$

où $(B_t)_t$ désigne un mouvement Brownien standard et les $c_{n,K}$ sont des constantes de renormalisation à déterminer.

Pour ce faire nous allons utiliser le Théorème 1.4 de [8] (p.339) sur les suites de martingales. Posons

$$D_{n,K}(t) \overset{def}{=} \frac{1}{c_{n,K}^2} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}\left[B_K(\Delta_{i,K})^2 | Y_{i-1,K}\right]$$

de sorte que les processus $M_{n,K}^2 - D_{n,K}$ soient des $(\mathcal{F}_t)$-martingales pour tous n et K (rappelons que la loi de $\Delta_{i,K}$ ne dépend de $\Delta_{i-1,K}$ que par l'intermédiaire de $Y_{i-1,K}$).

Pour appliquer ce Théorème il est nécessaire de vérifier 3 hypothèses, parmi lesquelles :

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{M_{n,K}(t)}{c_{n,K}} - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{M_{n,K}(t-\epsilon)}{c_{n,K}}\right|^2\right] \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\left|D_{n,K}(t) - \lim_{\epsilon\to 0} D_{n,K}(t-\epsilon)\right|\right] \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si on définit $\sigma_K^2 \overset{def}{=} \|B_K\|^2 = \langle B_K, B_K\rangle$, alors poser $c_{n,K} \overset{def}{=} \sqrt{n} \times \sigma_K$ assure que ces deux convergences sont vérifiées puisque $n \to \infty$. Il ne reste donc que la dernière hypothèse, qui sera le principal objectif de cette étude :

$$\forall t \in [0,1],\ D_{n,K}(t) \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} t. \tag{2.3}$$

Posons pour tout $v \in V_K$:

$$\varphi_K(v) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{E}\left[B_K(\Delta_{1,K})^2 | Y_{0,K} = v\right]}{\sigma_K^2} \text{ et } \psi_K(v) \overset{def}{=} \varphi_K(v) - 1,$$

l'intérêt de ces deux fonctions étant de pouvoir écrire

$$D_{n,K}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varphi_K(Y_{i-1,K})$$

et la fonction ψ est la version centrée de φ, au sens où $\mathbb{E}_{\mu_K}[\psi] = 0$.

La convergence (2.3) devient alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varphi_K(Y_{i-1,K}) \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} t$$

qui est trivial quand $t = 0$, et vérifier cette hypothèse dans le cas où $t \in]0,1]$ peut se ramener à la convergence suivante, qui sera l'objectif majeur de ce chapitre :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi_K(Y_{i-1,K}) \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0. \tag{2.4}$$

2.2 Un cas particulier selon l'asymptotique du champ de vecteurs

Dans cette partie nous allons utiliser l'inégalité triangulaire pour donner une condition suffisante pour que (2.4) soit satisfaite, en exhibant un contexte dans lequel :

$$\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi_K(Y_{i-1,K})\right] \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela, nous allons nous concentrer sur l'écart-type pour pouvoir utiliser une inégalité triangulaire et obtenir une majoration de cette variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right]^{\frac{1}{2}} &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}\frac{\mathbb{E}\left[B_K(\Delta_{i,K})^2|Y_{i-1,K}\right]}{\sigma_K^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n\sigma_K^2}\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[B_K(\Delta_{i,K})^2|Y_{i-1,K}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{n\sigma_K^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[\mathbb{E}\left[B_K(\Delta_{i,K})|Y_{i-1,K}\right]\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n\sigma_K^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\left[B_K(\Delta_{i,K})^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{n}{n\sigma_K^2}\mathbb{V}\left[B_K(\Delta_{1,K})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\mathbb{V}[B_K(\Delta_{1,K})^2]}{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]} = \left(\frac{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^4]-\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]^2}{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^4]}{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi on peut conclure avec le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Si les champs de vecteurs B_K respectent la condition :*

$$\frac{\|B_K^2\|_{E_K}^2}{\|B_K\|_{E_K}^4} \overset{def}{=} \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^4]}{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]^2} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{2.5}$$

alors la convergence (2.2) est vérifiée quand $n, K \to \infty$.

Remarque 2.2.1. *Le résultat que nous venons d'énoncer est étonnant car il ne dépend que de l'asymptotique de la loi du champ de vecteurs sous la mesure invariante. En particulier la condition (2.5) ne dépend pas de l'asymptotique relative de n et K.*

En sachant que $\frac{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^4]}{\mathbb{E}_{\mu_K}[B_K^2]^2}$ est le kurtosis de $B_K(\Delta_1)$, et que le kurtosis est relié à l'aplatissement d'une densité de probabilité, on remarque alors que la condition (2.5) revient à exiger que la densité de $B_K(Y_{0,K})$ devienne la plus plate possible quand $K \to \infty$, (puisque par définition le kurtosis est toujours supérieur ou égal à 1).

2.2.1 Exemples d'applications

On peut se demander si la condition (2.5) est triviale ou à l'inverse jamais vérifiée. Pour cette raison nous allons regarder quelques exemples qui entrent dans ce cadre général et pour lesquels cette condition est relativement simple à étudier.

Considérons $V_K = \{-1,1\}^{2K}$ et notons pour $u \in V_K$

$$u'(i) \overset{def}{=} (u_1, \ldots, u_{i-1}, -u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{2K}).$$

On prendra comme arêtes celles de l'hypercube de dimension $2K$, i.e.

$$E_K \overset{def}{=} \{(u, u'(i)) : u \in V_K, i \in [\![2K]\!]\}.$$

On définit alors sur chaque $G_K = (V_K, E_K)$ le champ de vecteurs suivant :

$$B_{1,K} : \begin{array}{ccc} E_K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, u'(i)) & \longmapsto & \left(\prod_{j=1}^{2K} u_j\right) \times (\mathbb{1}_{i\leq K} - \mathbb{1}_{i>K}) \end{array}.$$

On peut aisément vérifier que $B_{1,K}$ est un champ de vecteurs de divergence nulle pour tout $K \geq 1$. Intéressons-nous maintenant à la condition (2.5) : puisque $B_{1,K}(e) \in \{-1,1\}$ pour tout $e \in E_K$ on a

$$\frac{\|B_{1,K}^2\|_{E_K}^2}{\|B_{1,K}\|_{E_K}^4} = \frac{1}{1} = 1$$

ce qui nous donne un exemple de champ de vecteurs satisfaisant (2.5).

Remarque 2.2.2. *On peut montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} B_{1,K}(\Delta_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est en réalité une définition compliquée de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.*

D'un autre côté le modèle des prisonniers est un contre-exemple à cette condition (2.5) puisque nous avons montré la convergence (1.15) qui la contredit. Nous allons néanmoins détailler un autre contre-exemple mais en prenant cette fois-ci comme graphes G_K les hypercubes de dimension $2K$, afin d'illustrer le fait que cette méthode dépend fortement du choix du champ de vecteurs (mais dépend peu de la géométrie du graphe).

Définissons sur les mêmes graphes que $B_{1,K}$ les champs de vecteurs suivants :

$$B_{2,K} : \quad \begin{array}{rcl} E_K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, u'(i)) & \longmapsto & \begin{cases} F_a((u_1,u_2),(u'(i)_1,u'(i)_2)) & \text{si } i \leq 2 \text{ et } u_j = 1 \ \forall j > 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où F_a désigne le champ de vecteurs sur G_1 décrit pour $a \in \mathbb{R}^*$ dans la Figure 2.2

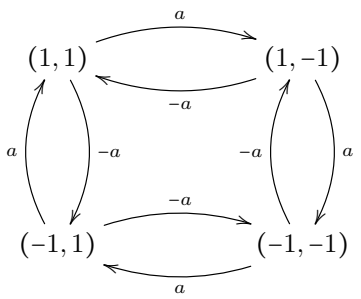


FIGURE 2.2 – Champ de vecteurs F_a servant à définir $B_{2,K}$

Ainsi pour $B_{2,K}$ on remarque qu'il n'y a que 8 arêtes telles que $B_{2,K}(e) \neq 0$, et en particulier pour ces arêtes $B_{2,K}(e) \pm a$, d'où on trouve :

$$\frac{\|B_{2,K}^2\|_{E_K}^2}{\|B_{2,K}\|_{E_K}^4} = \frac{\frac{1}{|E_K|}\sum_{e\in E_K} B_{2,K}(e)^4}{\left(\frac{1}{|E_K|}\sum_{e\in E_K} B_{2,K}(e)^2\right)^2} = \frac{|E_K| 8a^4}{(8a^2)^2} = \frac{|E_K|}{8} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

indépendamment du choix de $a \in \mathbb{R}^*$.

La condition (2.5) n'est donc ni impossible ni triviale.

2.3 Approche via les excursions

Pour montrer cette "loi des grands nombres diagonale", nous allons nous inspirer du schéma de preuve de certains théorèmes ergodiques dans les chaînes de Markov discrètes : en marquant un élément (arbitraire) $\alpha \in V_K$ on peut découper la somme dans (2.4) entre les temps de retour en α qui sont indépendants. Les multi-graphes G_K étant finis et fortement connexes, tous les éléments $v \in V_K$ sont récurrents positifs pour la chaîne de Markov $(Y_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ et sont donc un choix valide pour α (puisque les excursions seront presque sûrement finies).

Définissons les temps d'arrêt $\tau_{k,K} \overset{def}{=} \inf\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{Y_{i,K}=\alpha} = k\}$ (avec la convention $\tau_{0,K} = -1$) qui sont les temps de passage successifs de la suite $(Y_{i,K})_{i\in\mathbb{N}}$ par le sommet α. Notons également

$$L_{n,K} \overset{def}{=} \max\{k \in \mathbb{N} : \tau_{k+1,K} \leq n\}$$

le nombre d'excursions partant et revenant de α réalisées par la marche aléatoire $(Y_{i,K})_{i\in\mathbb{N}}$ au temps n. Pour alléger les notations on notera $\tau* \overset{def}{=} \tau_{L_{n,K}+1,K}$ le dernier temps de passage par α avant n.

A présent plutôt que de considérer notre fonctionnelle additive sur toute la trajectoire de la marche aléatoire, nous allons segmenter la somme en excursions entre les temps d'arrêt successifs $\tau_{j,K}$. Pour toute fonction $g : V_K \to \mathbb{R}$ on pose pour $j \in \mathbb{N}$:

$$s_{j,K}(g) \overset{def}{=} \sum_{i=\tau_{j,K}+1}^{\tau_{j+1,K}} g(Y_{i,K}).$$

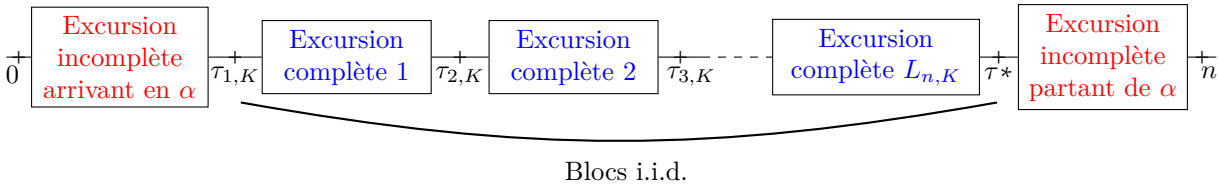


FIGURE 2.3 – Décomposition de la trajectoire de la marche aléatoire en blocs d'excursions

L'intérêt de cette approche est que les sommes sur les excursions "complètes" (qui partent de α et reviennent en α) sont i.i.d. via la propriété de Markov forte.

Nous allons donc scinder notre somme en 3 termes comme indiqué sur la Figure 2.3 :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K}) = \frac{s_{0,K}(\psi_K)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K) + \frac{1}{n}\sum_{i=\tau*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K}) \tag{2.6}$$

où le premier et le dernier terme sont des sommes sur des excursions incomplètes situées aux extrémités de notre échelle de temps, tandis que le terme central est une somme de variables i.i.d. (à savoir les sommes par blocs le long des excursions complètes).

2.3.1 Excursions incomplètes

Dans cette partie nous allons contrôler les termes correspondant à la première et la dernière excursion, qui sont incomplètes et n'ont donc pas la même loi que les excursions complètes.

Pour contrôler la dernière excursion, qui est encore inachevée au temps n, nous allons raisonner en complétant l'excursion.

Proposition 2.3.1. *Si l'hypothèse suivante est vérifiée :*

$$\frac{\mathbb{E}_{\pi_K}\left[|\psi_K|\right]}{n\mu_K(\alpha)} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{H1}$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=\tau*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \varepsilon\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Nous allons d'abord nous ramener à sommer $|\psi_K|$ puis compléter l'excursion en ajoutant les termes suivants jusqu'à revenir à α :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=\tau*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=\tau*+1}^{n}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=\tau_{L_{n,K},K}+1}^{\tau_{L_{n,K}+1,K}}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > \varepsilon\right).$$

A partir de là on peut utiliser le caractère i.i.d. des excursions et l'inégalité de Markov pour avoir :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=\tau_{L_{n,K},K}+1}^{\tau_{L_{n,K}+1,K}}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}s_{1,K}(|\psi_K|) > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[s_{1,K}(|\psi_K|)]}{n\varepsilon}.$$

Pour déterminer cette dernière espérance, remarquons que l'application $f \mapsto \mathbb{E}[s_{1,K}(f)]$ est une forme linéaire positive, et donc il existe une mesure ν sur V_K telle que $\mathbb{E}[s_{1,K}(f)] = \int f d\nu$. Or par construction cette mesure ν est stationnaire pour l'opérateur de transition de la marche aléatoire sur G_K et donc elle est proportionelle à μ_K. Pour déterminer la constante de proportionnalité il nous suffit de considérer :

$$\mathbb{E}_\alpha[\tau_{1,K}] = \mathbb{E}[s_{1,K}(1)] = \int 1 d\nu = \nu(V_K).$$

Mais on peut remarquer que :

$$1 = \mathbb{E}[s_{1,K}(\mathbb{1}_\alpha)] = \nu(\alpha) = \mathbb{E}_\alpha[\tau_{1,K}] \times \mu_K(\alpha)$$

et ainsi $\mathbb{E}_\alpha[\tau_{1,K}] = \frac{1}{\mu_K(\alpha)}$. On peut alors conclure que pour toute fonction f sur V_K on a

$$\mathbb{E}[s_{1,K}(f)] = \mathbb{E}_\alpha[\tau_{1,K}] \times \mathbb{E}_{\mu_K}[f] = \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}[f]}{\mu_K(\alpha)}.$$

On trouve finalement :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=\tau*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}_{\mu_K}\left[|\psi_K|\right]}{n\varepsilon\mu_K(\alpha)}$$

qui converge vers 0 quand (H1) est respectée. □

La somme jusqu'au premier temps d'atteinte de α ne démarre pas nécessairement de α puisque $Y_{0,K}$ suit la loi μ_K. Néanmoins on peut effectuer le même raisonnement que pour la dernière excursion, en exploitant la réversibilité de la suite $(Y_{n,K})_n$.

Proposition 2.3.2. *Si l'hypothèse (H1) est vérifiée alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}s_{0,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. A l'instar de la Proposition 2.3.1 on commence par remplacer ψ_K par $|\psi_K|$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}s_{0,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\tau_{1,K}}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\tau_{1,K}}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > n\varepsilon\right)$$

cependant pour compléter cette excursion il va falloir ajouter des termes au début afin d'avoir une excursion qui démarre en α et non sous la mesure invariante. Pour cela nous allons utiliser le fait que le processus $(Y_{n,K})_{n\in\mathbb{N}}$ est réversible. Ainsi on peut considérer (quitte à enrichir l'espace de probabilité) que ce processus n'est qu'une troncature d'un processus aléatoire $(Y_{n,K})_{n\in\mathbb{Z}}$ indéxé par $\mathbb{Z}$ pour lequel on peut définir $\tau_- \overset{def}{=} \sup\{n < 0 : Y_{n,K} = \alpha\}$ afin d'obtenir une excursion complète entre τ_- et $\tau_{1,K}$. De cette manière :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\tau_{1,K}}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > n\varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=\tau_-+1}^{\tau_{1,K}}|\psi_K(Y_{i-1,K})| > n\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(s_{1,K}(|\psi_K|) > n\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[s_{1,K}(|\psi_K|)]}{n\varepsilon}.$$

Comme on a vu dans la Proposition 2.3.1, ce dernier terme tend vers 0 quand (H1) est vérifiée. □

Ainsi nous avons exhibé la condition (H1) comme condition suffisante pour que la fonctionnelle additive sur les deux excursions incomplètes converge vers 0.

2.3.2 Excursions complètes

Il faut maintenant s'intéresser aux sommes sur les excursions entre les temps de passages par α successifs qui sont des éléments i.i.d.. Pour cela nous allons travailler en 2 étapes : tout d'abord faire une loi faible des grands nombres sur la somme **d'un nombre moyen d'excursions**, avant de comparer cette somme avec celle sur **le nombre réel d'excursions** $L_{n,K}$ réalisées par notre marche aléatoire.

Nous allons donc définir le nombre moyen d'excursions $m_{n,K}$, à savoir :

$$m_{n,K} \overset{def}{=} \frac{n}{\mathbb{E}_\alpha[\tau_{1,K}]} = n\mu_K(\alpha).$$

Remarque 2.3.1. *On peut facilement remarquer que*

$$\mathbb{E}[L_{n,K}+1] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{Y_{i,K}=\alpha}\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(Y_{i,K} = \alpha\right) = n\mu_K(\alpha) = m_{n,K}$$

puisque μ_K est la mesure stationnaire.

De plus notons $\gamma_K^2 \overset{def}{=} \mathbb{E}[s_{1,K}(\psi_K)^2]$ la variance de notre fonctionnelle additive sur une excursion complète.

Proposition 2.3.3. *Sous l'hypothèse :*

$$\frac{m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{H2}$$

on a la convergence suivante pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Puisque les excursions sont i.i.d. on peut tout simplement écrire via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left[\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{1,K}(\psi_K)\right]}{(n\varepsilon)^2} \leq \frac{m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2}.$$

□

Remarque 2.3.2. *Les fonctions ψ_K étant centrées, on peut exprimer γ_K^2 en fonction de $\|\psi_K\|^2$ pour remplacer l'hypothèse (H2) par :*

$$\frac{\|\psi_K\|^2}{n} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A présent il faut s'assurer que les sommes sur le nombre moyen et le nombre réel d'excursions restent suffisamment proches pour que la Proposition 2.3.3 nous aide à décrire le comportement de notre fonctionnelle additive le long des excursions complètes.

Proposition 2.3.4. *Si l'hypothèse (H2) est vérifiée et que :*

$$m_{n,K} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathbb{E}[L_{n,K}^2]}{m_{n,K}^2} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{H3}$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. La différence entre les deux sommes proviennent de l'écart entre le nombre réel d'excursions et son espérance. Afin de noter plus simplement cet écart d'excursions (quel qu'il soit) posons :

$$D_{n,K} \overset{def}{=} \begin{cases} \{i : L_{n,K} < i \leq \lfloor m_{n,K}\rfloor\} & \text{if } L_{n,K} \leq m_{n,K} \\ \{i : \lfloor m_{n,K}\rfloor < i \leq L_{n,K}\} & \text{if } L_{n,K} > m_{n,K} \end{cases}.$$

De cette manière on peut réécrire la probabilité qui nous intéresse comme :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j\in D_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right).$$

On sait grâce à l'hypothèse (H3) et la Remarque 2.3.1 que :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{L_{n,K}}{m_{n,K}} - 1\right)^2\right] = \frac{\mathbb{E}[L_{n,K}^2]}{m_{n,K}^2} - 2\left(1 - \frac{1}{m_{n,K}}\right) + 1 \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi pour tout $\delta > 0$, si on note $\underline{m} \overset{def}{=} \lfloor (1-\delta)m_{n,K}\rfloor$ et $\overline{m} \overset{def}{=} \lceil (1+\delta)m_{n,K}\rceil$ alors :

$$\mathbb{P}(\underline{m} \leq L_{n,K} \leq \overline{m}) \geq 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{L_{n,K}}{m_{n,K}} - 1\right| > \delta\right) \geq 1 - \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left[\left|\frac{L_{n,K}}{m_{n,K}} - 1\right|\right] \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc $\mathbb{P}(\underline{m} \leq L_{n,K} \leq \overline{m}) \geq 1 - \delta$ à partir d'un certain rang.

On peut alors utiliser l'inégalité de Kolmogorov sur l'évènement $\underline{m} \leq L_{n,K} \leq \overline{m}$ pour arriver à la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j\in D_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) &\leq \delta + \mathbb{P}\left(\max_{\underline{m}\leq k\leq \lfloor m_{n,K}\rfloor}\left|\sum_{j=k}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > n\varepsilon\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\max_{\lfloor m_{n,K}\rfloor < k\leq \overline{m}}\left|\sum_{j=\lfloor m_{n,K}\rfloor+1}^{k} s_{j,K}(\psi_K)\right| > n\varepsilon\right) \\
&\leq \delta + 2\times\frac{(\overline{m}-\underline{m}+1)\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2} \leq \delta + 2\times\frac{(2\delta m_{n,K}+3)\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2} \\
&= \delta\left(1+\frac{4m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2}\right) + 6\frac{\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2} = \delta\left(1+\frac{4m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2}\right) + \frac{6\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Or sous l'hypothèse (H2) on sait que $\frac{m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2}$ est borné par une constante $\Gamma > 0$, et donc :

$$\delta\left(1+\frac{4m_{n,K}\gamma_K^2}{n^2\varepsilon^2}\right) \leq \delta\left(1+\frac{4\Gamma}{\varepsilon^2}\right)$$

qui est arbitrairement petit selon le choix de δ.

De plus (H2) et (H3) garantissent que $\frac{\gamma_K^2}{n^2} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j\in D_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \varepsilon\right) \leq \delta\left(1+\frac{4\Gamma}{\varepsilon^2}\right) + \frac{6}{\varepsilon^2}\times\frac{\gamma_K^2}{n^2} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

2.3.3 Résultats

En combinant les précédents résultats on peut formuler une condition suffisante pour que la convergence (2.2) sur l'asymptotique des processus $M_{n,K}$ soit vérifiée.

Proposition 2.3.5. *Soit $(G_K)_{K\in\mathbb{N}}$ une suite de multi-graphes orientés à boucles connexes symétriques par transposition. Supposons que l'on peut choisir pour tout K un sommet $\alpha \in V_K$ tels que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées. Alors :*

$$\left(\frac{M_{n,K}(t)}{\sqrt{n\sigma_K^2}}\right)_{t\in[0,1]} \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (B_t)_{t\in[0,1]}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. En reprenant la décomposition (2.6) on peut écrire :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{s_{0,K}(\psi_K)}{n}\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=\tau^*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K})\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

D'après les Propositions 2.3.1 et 2.3.2 on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{s_{0,K}(\psi_K)}{n} > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=\tau^*+1}^{n}\psi_K(Y_{i-1,K}) > \frac{\varepsilon}{3}\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

quand (H1) est vérifiée, tandis que d'après les Propositions 2.3.3 et 2.3.4 :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \frac{\varepsilon}{6}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L_{n,K}} s_{j,K}(\psi_K) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lfloor m_{n,K}\rfloor} s_{j,K}(\psi_K)\right| > \frac{\varepsilon}{6}\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sous réserve que (H2) et (H3) soient respectées. Ainsi la convergence (2.3) est montrée et donc toutes les hypothèses du Théorème 1.4 de [8] sont vérifiées pour $c_{n,K} = \sqrt{n}\times\sigma_K$. □

On peut alors en déduire un résultat partiel sur les processus $Z_{n,K}$ dans le cas où la somme télescopique $F_{n,K}$ est négligeable devant $M_{n,K}$.

Corollaire 2.3.1. *Si en plus des hypothèses de la Proposition 2.3.5 il existe* $\Gamma_K > 0$ *tel que :*

$$\forall u, v \in V_K \ |f(u) - f(v)| < \Gamma_K \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma_K}{\sqrt{n\sigma_K^2}} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{H4}$$

alors :

$$\left(\frac{Z_{n,K}(t)}{\sqrt{n\sigma_K^2}}\right)_{t\in[0,1]} \underset{n,K\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (B_t)_{t\in[0,1]}.$$

Démonstration. Tout simplement on aura $|F_{n,K}(t)| < \Gamma_K$ presque sûrement et donc :

$$\frac{F_{n,K}(t)}{\sqrt{n}\sigma_K} \underset{n,K\to\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} 0.$$

□

Si nous sommes conscients que les hypothèses de la Proposition 2.3.5 sont difficilement vérifiables et qu'il reste des choses à faire pour rendre ces résultats pertinents, nous voulions esquisser ce cas particulier comme une première approche pour ce contexte général qui nous semble intéressant et qu'il faudrait approfondir davantage.

Chapitre 3

Graphite

Ce Chapitre est dédié à nos travaux en cours sur l'asymptotique de marches aléatoires dans les réseaux cristallins du graphite. Si ce modèle n'entre pas dans le cadre général introduit au Chapitre 2, nous pouvons tout de même y appliquer les techniques et approches des précédents Chapitres pour décrire le comportement asymptotique de ces marches aléatoires.

3.1 Motivation et rappels

Dans [6] sont démontrés des résultats de convergence pour une marche aléatoire sur le graphène, qui est un réseau hexagonal à deux dimensions. En fonction des probabilités de transition (que les auteurs supposent invariantes par certaines translations), ils mettent en évidence une loi des grands nombres, un théorème central limite et un phénomène de grandes et moyennes déviations grâce à un calcul explicite de la fonction génératrice de la marche aléatoire.

Ils exploitent pour cela le caractère biparti du réseau hexagonal : les différents sommets du réseau peuvent être séparés en deux catégories, les "blancs" et les "noirs", de sorte que deux sommets de même couleur ont toujours la même géométrie locale (et les mêmes probabilités de transition) et les voisins d'un sommet sont toujours d'une couleur différente de la sienne. Ainsi, si on suppose qu'au temps 0 le marcheur est sur un sommet blanc, il sera toujours sur un sommet noir aux temps impairs et un sommet blanc aux temps pairs ; de plus, la loi du saut effectué par le marcheur ne dépend que de la couleur du sommet où il se trouve, et donc de la parité du temps.

Nous reprendrons certaines notations de [6], notamment pour les probabilités de transition. Ainsi si on note $S_n \overset{def}{=} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de la marche aléatoire au cours du temps, les probabilités de transition de la chaîne sont définies par

$$q_{i,j} \overset{def}{=} \mathbb{P}\left(\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a\cos\left(\frac{2}{3}j\pi + i\pi\right) \\ y + a\sin\left(\frac{2}{3}j\pi + i\pi\right) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

où $i = 0, 1$ désigne la couleur du sommet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$ distingue les trois arêtes accessibles, comme précisé sur la figure 3.1. La constante $a > 0$ est la longueur des arêtes du réseau.

On cherche à montrer des convergences similaire dans le cas du graphite, qui est une structure cristalline tri-dimensionnelle formée de couches de graphène empilées les unes au-dessus des autres. Nous considérerons deux empilements distincts : tout d'abord le cas simple où on translate chaque couche de graphène verticalement pour obtenir la suivante, puis la structure dite "graphite-2H" qui est plus complexe mais correspond davantage à la structure réelle du graphite.

Malheureusement la fonction génératrice trouvée dans [6] ne fonctionne que pour le réseau du graphène, et l'alternance entre 2 "couleurs" qui leur a permis d'expliciter cette fonction génératrice ne tient plus dans les deux réseaux qui nous intéressent (l'alternance n'est pas systématique dans l'empilement simple et et le graphite-2H présente 4 "couleurs" de sommets avec des géométries locales distinctes). Nous utiliserons donc une approche différente, en isolant à chaque fois une martingale dans notre marche aléatoire.

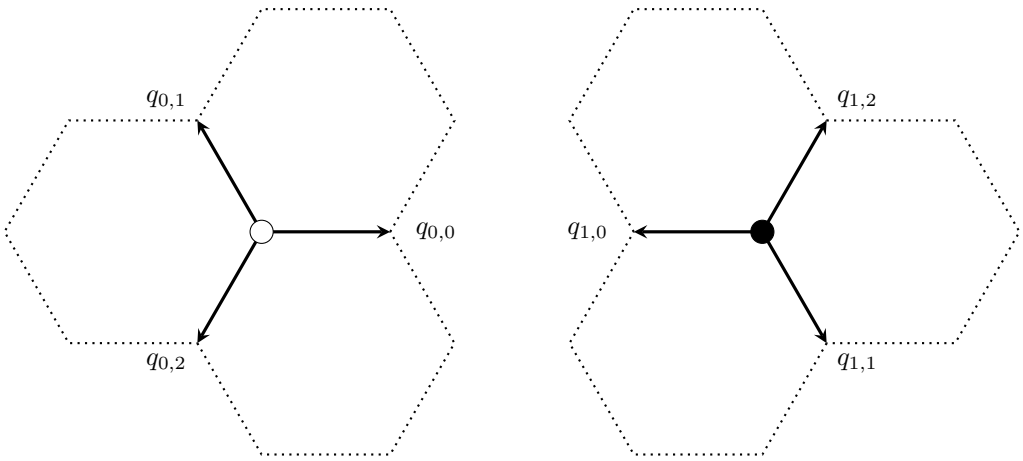


FIGURE 3.1 – Probabilités de transition dans le graphène selon le type de sommet

3.2 Réseau formé de couches de graphène parallèles

3.2.1 Modèle et notations

On s'intéresse au graphite formé de couches parallèles de graphène comme indiqué sur la Figure 3.2. Chaque sommet (blanc ou noir) possède alors une transition vers les deux sommets situés respectivement au-dessus et en-dessous de lui, que la marche peut emprunter avec une même probabilité $p < \frac{1}{2}$. Les autres transitions décrites dans le modèle du graphène sont conservées, mais leurs probabilités de transition respectives sont multipliées par $(1-2p)$.

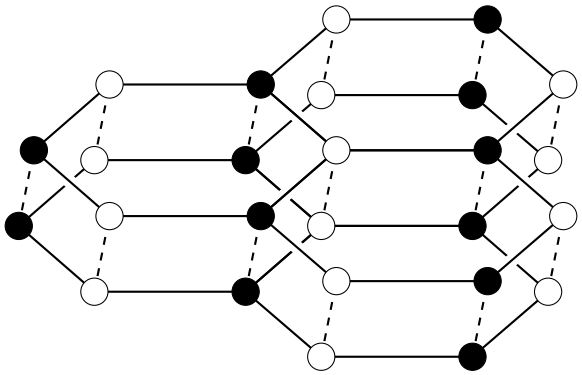


FIGURE 3.2 – Graphite — empilement de type AAAA

L'espace d'états peut alors être décrit par l'union des deux ensembles discrets suivants

$$\mathcal{V}_i \overset{def}{=} \left\{ \left(a \times \left(i + \frac{3}{2} l \right), a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l + \sqrt{3} m \right), h \times n \right) : l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}, \ i = 0, 1$$

où a désigne la longueur des arêtes dans chaque couche horizontale de graphène et h la distance entre les couches. Ces deux ensembles regroupent les sommets ayant la même géométrie locale, qui est détaillée dans la Figure 3.3.

On posera $\tilde{q}_{i,j} = (1-2p) q_{i,j}$ les nouvelles probabilités des transitions horizontales (le facteur $(1-2p)$ étant dû aux deux nouvelles transitions verticales de probabilité p). La Figure 3.3 reflète bien la symétrie entre les configurations autour des sommets blancs et noirs : chacune pouvant s'obtenir par rotation de l'autre de 180° autour d'un axe vertical.

On considère donc la marche aléatoire sur le graphite S_n commençant à l'origine (qui est dans $\mathcal{V}_0$), et on note les pas de notre marche aléatoire $\xi_k \overset{def}{=} S_k - S_{k-1}$ de sorte que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$.

Afin de mettre en avant l'influence du comportement du graphène dans ce modèle de graphite, nous

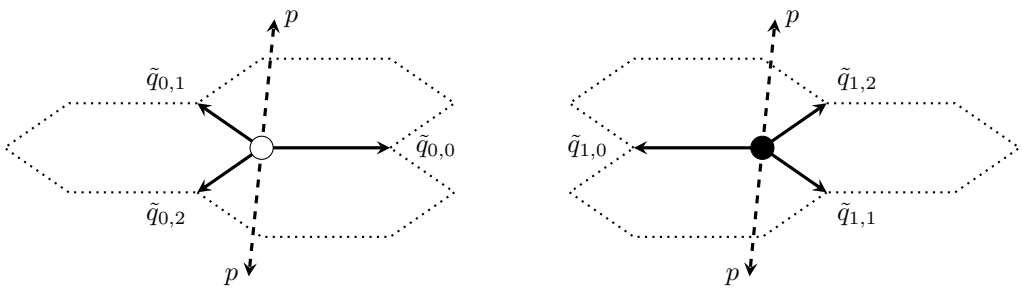


FIGURE 3.3 – Probabilités de transition dans le cas de l'empilement AAAA

allons reprendre et étendre les notations de [6] en posant :

$$\mu \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_H^2 \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & 0 \\ \sigma_{1,2} & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_H \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \theta_3 & \theta_5 & 0 \\ \theta_5 & \theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

3.2.2 Loi des grands nombres

On souhaite énoncer une loi des grands nombres pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour ce faire, nous allons noter $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle $\sigma\big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$, et décomposer S_n de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] = M_n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]$$

où $M_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}])$ est une martingale (par construction).

Proposition 3.2.1. *Si on pose* $\epsilon_n \overset{def}{=} \begin{cases} +1 \ \textit{si} \ S_n \in \mathcal{V}_0 \\ -1 \ \textit{si} \ S_n \in \mathcal{V}_1 \end{cases}$ *, alors*

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = (1-2p)(\mu + \epsilon_n \theta). \tag{3.2}$$

De plus

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}\xi_{n+1}^T|\mathcal{F}_n] = (1-2p)(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2 + \epsilon_n(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T). \tag{3.3}$$

Démonstration. La relation (3.2) s'obtient en remarquant que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\xi_{n+1}|S_n \in \mathcal{V}_0]\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|S_n \in \mathcal{V}_1]\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_1} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2p)(\mu_1+\theta_1) \\ (1-2p)(\mu_2+\theta_2) \\ ph - ph \end{pmatrix} \mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} + \begin{pmatrix} (1-2p)(\mu_1-\theta_1) \\ (1-2p)(\mu_2-\theta_2) \\ ph - ph \end{pmatrix} \mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_1} \\
&= (1-2p)(\mu+\theta)\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} + (1-2p)(\mu-\theta)\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_1}.
\end{aligned}$$

Si on introduit $\sigma_V^2 \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$ pour décrire les sauts verticaux, on peut utiliser le raisonnement précédent pour obtenir (3.3), i.e.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_{n+1}\xi_{n+1}^T|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\xi_{n+1}\xi_{n+1}^T|S_n \in \mathcal{V}_0]\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} + \mathbb{E}[\xi_{n+1}\xi_{n+1}^T|S_n \in \mathcal{V}_0]\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} \\
&= \Big((1-2p)(\sigma_H^2 + \theta_H + (\mu+\theta)(\mu+\theta)^T) + 2p\sigma_V^2\Big)\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_0} \\
&\quad + \Big((1-2p)(\sigma_H^2 - \theta_H + (\mu-\theta)(\mu-\theta)^T) + 2p\sigma_V^2\Big)\mathbb{1}_{S_n\in\mathcal{V}_1} \\
&= (1-2p)(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2 + \epsilon_n(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T).
\end{aligned}$$

□

Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n}(1-2p)(\mu+\epsilon_k\theta) = (1-2p)\mu n + \theta\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k.$$

Il nous faut à présent expliciter la valeur de $\langle M\rangle_n$, i.e.

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{E}[\xi_k\xi_k^T|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]\mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]^T\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((1-2p)(\sigma_H^2+\mu\mu^T+\theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2 + \epsilon_{k-1}(\theta_H+\mu\theta^T+\theta\mu^T)\\
&\qquad - (1-2p)^2(\mu+\epsilon_{k-1}\theta)(\mu+\epsilon_{k-1}\theta)^T\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((1-2p)\sigma_H^2 + (1-2p)(1-(1-2p))(\mu\mu^T+\theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2\\
&\qquad + \epsilon_{k-1}(\theta_H + (1-(1-2p)^2)(\mu\theta^T+\theta\mu^T))\Big)\\
&= n\left[(1-2p)\sigma_H^2 + 2p(1-2p)(\mu\mu^T+\theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2\right]\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n}\epsilon_{k-1}\left[\theta_H - 2p(2-2p)(\mu\theta^T+\theta\mu^T)\right].
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin et déterminer la limite de $n^{-1}\langle M\rangle_n$, nous aurons besoin de montrer une loi des grands nombres pour $R_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n}\epsilon_{k-1}$.

Proposition 3.2.2.

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}] = (4p-1)\epsilon_{k-1}$ et $\epsilon_0 = 1$ p.s., on peut décomposer R_{n+1} comme

$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\epsilon_{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\epsilon_k = 1 + \sum_{k=1}^{n}(\epsilon_k - \mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}]) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}]\\
&= 1 + N_n + \sum_{k=1}^{n}(4p-1)\epsilon_{k-1} = 1 + N_n + (4p-1)R_n
\end{aligned}$$

où $N_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n}(\epsilon_k - \mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}])$ est une martingale. En particulier, on remarque que

$$\langle N\rangle_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{E}[\epsilon_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}]^2\right) = n - \sum_{k=1}^{n}(4p-1)^2\epsilon_{k-1}^2 = n\left(1-(4p-1)^2\right) = 8p(1-2p)n.$$

On en déduit facilement que

$$\frac{\langle N\rangle_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 8p(1-2p) \qquad \text{et donc} \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0. \tag{3.4}$$

Comme $R_{n+1} = R_n + \epsilon_n$ on peut écrire

$$R_n = R_{n+1} - \epsilon_n = 1 + N_n + (4p-1)R_n - \epsilon_n$$

d'où

$$\frac{R_n}{n} = \frac{1+N_n-\epsilon_n}{n(2-4p)} = \frac{1}{2-4p}\left(\frac{1}{n} + \frac{N_n}{n} - \frac{\epsilon_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0.$$

□

Grâce à la Proposition 3.2.2 on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle M\rangle_n}{n} &= \left[(1-2p)\sigma_H^2 + 2p(1-2p)(\mu\mu^T+\theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2\right] + \frac{R_n}{n}\left[\theta_H - 2p(2-2p)(\mu\theta^T+\theta\mu^T)\right]\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} L \overset{def}{=} (1-2p)\sigma_H^2 + 2p(1-2p)(\mu\mu^T+\theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

d'où $n^{-1}M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$. On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème 3.2.1.

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} (1-2p)\mu.$$

Démonstration. On sait que

$$S_n = M_n + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}].$$

En combinant le fait que $n^{-1}M_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$ avec la relation (3.2), on trouve

$$\frac{S_n}{n} = \frac{M_n}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-2p)(\mu+\epsilon_{k-1}\theta) = \frac{M_n}{n} + \frac{n}{n}(1-2p)\mu + \frac{R_n}{n}(1-2p)\theta \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} (1-2p)\mu.$$

□

Vu que les transitions verticales sont symétriques et équiprobables, il est cohérent de retrouver le résultat du graphène, au facteur $(1-2p)$ près qui correspond à la proportion de sauts ne changeant pas de couche.

3.2.3 Théorème central limite

Si comprendre le comportement asymptotique de $n^{-1}M_n$ et $n^{-1}R_n$ nous permettait de montrer facilement le Théorème 3.2.1, il n'en sera pas de même avec le TCL puisque la manière dont ces deux grandeurs sont corrélées aura un rôle à jouer dans le comportement asymptotique de $n^{-1/2}S_n$.

Ainsi, il nous faut regarder de plus près le comportement de la martingale $\mathcal{M}_n \overset{def}{=} \begin{pmatrix} M_n \\ N_n \end{pmatrix}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$. Si on note $\Delta\mathcal{M}_k \overset{def}{=} \mathcal{M}_k - \mathcal{M}_{k-1}$, on remarque que

$$\langle\mathcal{M}\rangle_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta\mathcal{M}_k\Delta\mathcal{M}_k^T|\mathcal{F}_{k-1}] = \left(\begin{array}{c|c} \langle M\rangle_n & C_n \\ \hline C_n^T & \langle N\rangle_n \end{array}\right)$$

où le terme croisé C_n s'écrit comme

$$C_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta M_k\Delta N_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n}\Big(\mathbb{E}[\xi_k\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]\mathbb{E}[\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}]\Big).$$

Proposition 3.2.3.

$$\frac{C_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} -4p(1-2p)\theta.$$

Démonstration. On peut expliciter la valeur de $\mathbb{E}[\xi_k\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}]$ en distinguant les transitions verticales (où $\epsilon_k = \epsilon_{k-1}$) et horizontales :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi_k\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}\left[\xi_k\left(\mathbb{1}_{\epsilon_k=\epsilon_{k-1}} - \mathbb{1}_{\epsilon_k\neq\epsilon_{k-1}}\right)\epsilon_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\ &= \Big(\mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\epsilon_k=\epsilon_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\epsilon_k\neq\epsilon_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}]\Big)\epsilon_{k-1}.\end{aligned}$$

Le premier terme valant **0** par un argument de symétrie, on peut facilement se convaincre que

$$\mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\epsilon_k=\epsilon_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\epsilon_k\neq\epsilon_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\xi_k\mathbb{1}_{\epsilon_k\neq\epsilon_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}]$$

d'où

$$\mathbb{E}[\xi_k\epsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}] = -\mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]\epsilon_{k-1}.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}C_n &= \sum_{k=1}^{n}\Big(-\mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}]\epsilon_{k-1} - \mathbb{E}[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}](4p-1)\epsilon_{k-1}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(1-2p)(\mu+\epsilon_{k-1}\theta)\big(-1-(4p-1)\big)\epsilon_{k-1} \\ &= -4p(1-2p)\sum_{k=1}^{n}\left(\epsilon_{k-1}\mu + \epsilon_{k-1}^2\theta\right) \\ &= -4p(1-2p)(R_n\mu + n\theta).\end{aligned}$$

On conclut grâce à la Proposition 3.2.2. □

Ainsi en combinant (3.4) et (3.5) avec la Proposition précédente, on trouve

$$\frac{\langle \mathcal{M} \rangle_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \Lambda \overset{def}{=} \left(\begin{array}{c|c} L & -4p(1-2p)\theta \\ \hline -4p(1-2p)\theta^T & 8p(1-2p) \end{array}\right).$$

On en déduit aisément le résultat suivant pour $\mathcal{M}_n$:

Proposition 3.2.4.

$$\frac{\mathcal{M}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_4(\mathbf{0}, \Lambda)$$

ou de manière équivalente

$$\forall\ w \in \mathbb{R}^4, \qquad w^T \frac{\mathcal{M}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w^T \Lambda w).$$

On a alors tous les outils nécessaires pour démontrer notre TCL pour S_n :

Théorème 3.2.2.

$$\frac{S_n - n(1-2p)\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \Gamma)$$

avec

$$\Gamma \overset{def}{=} (1-2p)\sigma_H^2 + 2p\sigma_V^2 + 2p(1-2p)\mu\mu^T. \tag{3.6}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^3, \qquad v^T n^{-\frac{1}{2}} \left(S_n - (1-2p)\mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v^T \Gamma v)$$

où la matrice Γ est celle définie dans (3.6). Pour cela on va utiliser la décomposition utilisée dans le Théorème 3.2.1, à savoir

$$S_n - n(1-2p)\mu = M_n + (1-2p)\theta R_n = M_n + \frac{\theta}{2} N_n + \frac{\theta}{2}(1-\epsilon_n).$$

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Posons $w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ avec $w_4 \overset{def}{=} \frac{v^T\theta}{2}$ afin d'avoir

$$w^T \mathcal{M}_n = v^T M_n + w_4 N_n = v^T M_n + \frac{v^T\theta}{2} N_n = v^T \Big(S_n - n(1-2p)\mu - \frac{\theta}{2}(1-\epsilon_n)\Big).$$

On peut alors utiliser la Proposition 3.2.4 pour obtenir

$$\frac{1}{\sqrt{n}} v^T \Big(S_n - n(1-2p)\mu - \frac{\theta}{2}(1-\epsilon_n)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w^T \Lambda w).$$

Puisque $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ alors $n^{-\frac{1}{2}} v^T \frac{\theta}{2}(1-\epsilon_n)$ converge presque sûrement vers 0, d'où

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^3, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} v^T \left(S_n - n(1-2p)\mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, w^T \Lambda w).$$

Il suffit alors d'exprimer $w^T \Lambda w$ en fonction de v, en séparant les 3 premières coordonnées (qui sont celles de v) de w_4 :

$$\begin{aligned}
w^T \Lambda w &= v^T L v + v^T \Big(-4p(1-2p)\theta\Big) w_4 + w_4 \Big(-4p(1-2p)\theta^T\Big) v + w_4 \Big(8p(1-2p)\Big) w_4 \\
&= v^T L v - 4p(1-2p)\left(v^T \theta w_4 + w_4 \theta^T v\right) + 8p(1-2p) w_4^2 \\
&= v^T L v - 4p(1-2p)\left(v^T \theta \frac{v^T\theta}{2} + \frac{v^T\theta}{2} \theta^T v\right) + 8p(1-2p)\left(\frac{v^T\theta}{2}\right)^2 \\
&= v^T L v + 8p(1-2p)\left(-\frac{(v^T\theta)^2}{2} + \frac{(v^T\theta)^2}{4}\right) \\
&= v^T L v - 2p(1-2p)\left(v^T \theta\theta^T v\right) = v^T \Big(L - 2p(1-2p)\theta\theta^T\Big) v.
\end{aligned}$$

On obtient la valeur de Γ en remplaçant L par sa valeur, à savoir

$$\begin{aligned} L - 2p(1-2p)\theta\theta^T &= (1-2p)\sigma_H^2 + 2p(1-2p)(\mu\mu^T + \theta\theta^T) + 2p\sigma_V^2 - 2p(1-2p)\theta\theta^T \\ &= (1-2p)\sigma_H^2 + 2p\sigma_V^2 + 2p(1-2p)\mu\mu^T \overset{def}{=} \Gamma. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.1. *Une autre approche pertinente pour étudier ce modèle est de considérer la marche aléatoire sur le graphène* $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ *décrite dans [6], ainsi qu'une marche aléatoire simple* Z_n *sur* $\mathbb{Z}$*, puis d'introduire une suite* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i.i.d. telle que* $\mathbb{P}(M_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(M_1 = 1) = 2p$.

Ainsi on peut définir la chaîne de Markov suivante

$$\tilde{S}_n \overset{def}{=} \begin{pmatrix} X_{N_n} \\ Y_{N_n} \\ Z_{n-N_n} \end{pmatrix} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{avec} \quad N_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i$$

et exploiter la relation $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\mathcal{L}}{=} (\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *afin de retrouver les différents résultats énoncés dans cette section.*

3.3 Graphite-2H, empilement de type ABAB

3.3.1 Modèle et notations

Considérons à présent le graphite formé de couches parallèles mais légèrement translatées (empilement ABAB décrit dans la Figure 3.4) pour coller au comportement physique du graphite. Ainsi, sur chaque couche de graphène l'un des deux types de sommets (blanc ou noir) permet des sauts verticaux pour passer à la couche la plus proche (au-dessus ou en-dessous) en changeant la couleur du sommet et donc la répartition géométrique des voisins ; autrement dit les sommets blancs des couches "A" sont reliés aux sommets noirs des couches "B").

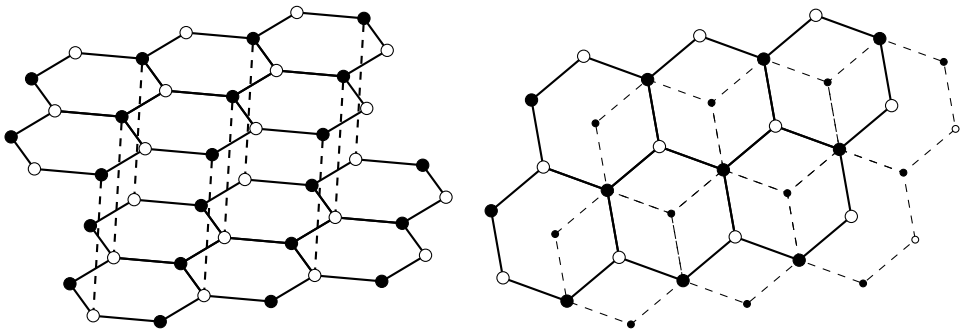


FIGURE 3.4 – Graphite — Empilement de type ABAB (vu de côté et du dessus)

L'espace d'états peut alors être décrit par l'union des quatre ensembles discrets suivants

$$\mathcal{V}_{i,j} \overset{def}{=} \left\{ \left(a \times \left((-1)^{i+1} \mathbb{1}_{j=1} + \frac{3}{2} l \right), a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l + \sqrt{3} m \right), h \times \left(2n + \mathbb{1}_{i \neq j} \right) \right) : l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}, \ i, j = 0, 1$$

où a désigne la longueur des arêtes dans chaque couche horizontale de graphène et h la distance entre deux couches successives. Les indices i et j indiquent respectivement la couleur des sommets et la possibilité de changer de couche, plus précisément $i = 0$ pour les sommets blancs et 1 pour les sommets noirs, tandis que $j = 0$ pour les sommets permettant le changement de couche et 1 pour ceux n'ayant que des voisins dans la même couche de graphène.

On notera $p_{i,j,k}$ les probabilités des transitions autour des éléments de $\mathcal{V}_{i,j}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ quand $j = 0$ et $k \in \{0, 1, 2\}$ quand $j = 1$. Nous supposerons que les probabilités des transitions verticales ne dépendent que de leur direction, i.e. $p_{0,0,k} = p_{1,0,k}$ pour $k = 3, 4$. Pour éliminer les cas triviaux, nous supposerons que $p \overset{def}{=} p_{0,0,3} + p_{0,0,4}$ est dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Sans perte de généralité, nous supposerons que $S_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{V}_{0,0}$.

Afin de refléter l'influence du comportement du graphène dans ce modèle, nous supposerons que pour $i = 0, 1$ et $k = 0, 1, 2$ on a $p_{i,1,k} = q_{i,k}$ et $p_{i,0,k} = (1-p)q_{i,k}$. Autrement dit, les probabilités des transitions horizontales ne dépendent que de leur direction, au facteur multiplicatif $(1-p)$ près pour les sommets proposant des transitions verticales (qui ont une probabilité p d'être empruntées par notre marche aléatoire).

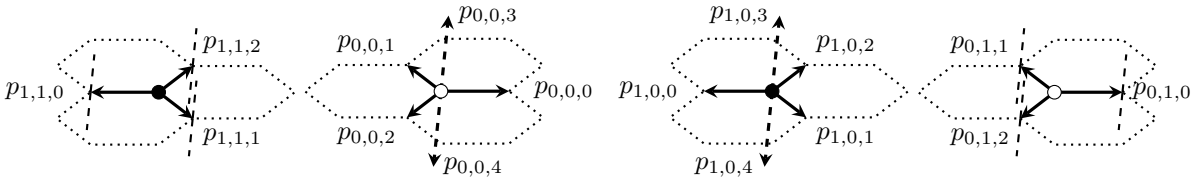


FIGURE 3.5 – Probabilités de transitions dans le cas de l'empilement de type ABAB

Nous reprendrons les notations (3.1) de la section précédente (basées sur les probabilités des transitions horizontales), et par mimétisme nous poserons les nouvelles notations suivantes :

$$\mu_V \overset{def}{=} \frac{p_{0,0,3} - p_{0,0,4}}{p} h, \qquad \nu \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_V \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma_V^2 \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 - \mu_V^2 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Multi-graphe et loi des grands nombres

Le raisonnement utilisé dans la section précédente, à savoir isoler la martingale canonique et gérer le comportement asymptotique du terme restant, ne fonctionne pas dans ce modèle, car le processus prévisible dépend lui-même de la martingale canonique, et on se retrouve avec une boucle sans fin. Notre approche sera donc d'extraire une autre martingale dans notre processus, pour laquelle le processus prévisible associé sera facilement négligeable.

Pour cela nous allons considérer le multi-graphe pondéré $G = (V, E)$, dont les sommets seront les quatre types de sommets dans le graphite (i.e. les $\mathcal{V}_{i,j}$ pour $i, j = 0, 1$) et les arêtes seront les différents sauts possibles selon le type de sommet considéré, pondérés par leurs probabilités respectives (décrites dans la Figure 3.5).

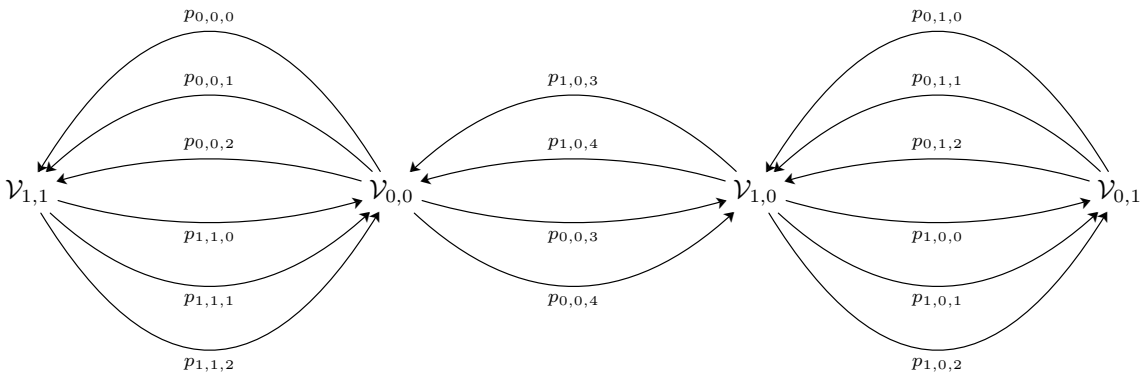


FIGURE 3.6 – Multi-graphe G

On considère une marche aléatoire $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur G, et on notera $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ la suite des arêtes parcourues par $(V_n)_n$ (en particulier Δ_k va de V_{k-1} à V_k pour $k \geq 1$). Nous noterons $F : E \to \mathbb{R}^3$ la fonction qui à chaque arête du multi-graphe associe le saut tridimensionnel correspondant, afin d'avoir l'égalité en loi :

$$(\xi_k)_{k\geq 1} \overset{\mathcal{D}}{=} \big(F(\Delta_k)\big)_{k\geq 1},$$

ce qui nous permet de voir S_n comme une fonctionnelle additive d'une chaîne de Markov homogène. On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.1. *Si on pose* $\lambda \overset{def}{=} \frac{p}{2-p}$ *la proportion moyenne de sauts verticaux, alors*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} m \overset{def}{=} (1-\lambda)\mu + \lambda\nu.$$

Démonstration. La première étape est d'expliciter les mesures invariantes π_V et π_E associées respectivement à $(V_n)_n$ et $(\Delta_n)_n$. Pour ce faire on construit un graphe orienté en gluant ensemble les arêtes de G qui joignent un même couple de sommets et en attribuant comme poids à cette unique nouvelle arête la somme des probabilités de toutes les arêtes de G qui l'ont engendrée, ce qui donne le graphe pondéré suivant :

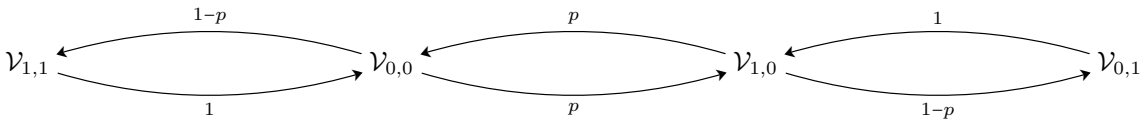


FIGURE 3.7 – Graphe glué associé à G

La mesure π_V est alors la probabilité invariante pour l'opérateur de transition d'une marche aléatoire sur ce graphe glué. Après quelques calculs on trouve

$$\pi_V(\mathcal{V}_{i,j}) = \frac{1-jp}{2-p} = \frac{1}{2-p} - j\lambda.$$

Pour les arêtes on a

$$\pi_E(e) = \pi_V(v)\mathbb{P}(\Delta_1 = e | V_0 = v)$$

pour toute arête $e \in E$ issue d'un sommet $v \in V$.

On peut alors utiliser le théorème ergodique pour montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(\Delta_k) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}_{\pi_E}[F].$$

Un raisonnement rapide permet de voir que $\mathbb{E}_{\pi_E}[F] = (1-\lambda)\mu + \lambda\nu$ d'où le résultat. □

3.3.3 Décomposition de Hodge et TCL

Pour mettre en évidence un TCL nous allons chercher une décomposition de Hodge de F, i.e. une décomposition de la forme $F(e) = m + B(e) + \nabla f(e)$, où $B : E \to \mathbb{R}^3$ serait toujours un accroissement de martingale et $\nabla f(x,y) \overset{def}{=} f(y) - f(x)$ pour une certaine fonction $f : V \to \mathbb{R}^3$. De cette manière, on aurait

$$\sum_{k=1}^{n} F(\Delta_k) = nm + \sum_{k=1}^{n} B(\Delta_k) + f(V_n) - f(V_0) \tag{3.7}$$

où $M_n \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} B(\Delta_k)$ est une martingale et $(f(V_n) - f(V_0))$ est borné.

Le fait que B soit un accroissement de martingale se traduit dans notre modèle par la relation $\mathbb{E}[B(\Delta_1)|V_0 = v] = 0$ pour tout $v \in V$. Ainsi en calculant $\mathbb{E}[F(\Delta_1)|V_0 = v]$ pour chaque $v \in V$, on trouve que f doit résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \mu - \theta = m + \Big(f(\mathcal{V}_{0,0}) - f(\mathcal{V}_{1,1})\Big) \\ (1-p)(\mu+\theta) + p\nu = m + (1-p)\Big(f(\mathcal{V}_{1,1}) - f(\mathcal{V}_{0,0})\Big) + p\Big(f(\mathcal{V}_{1,0}) - f(\mathcal{V}_{0,0})\Big) \\ (1-p)(\mu-\theta) + p\nu = m + (1-p)\Big(f(\mathcal{V}_{0,1}) - f(\mathcal{V}_{1,0})\Big) + p\Big(f(\mathcal{V}_{0,0}) - f(\mathcal{V}_{1,0})\Big) \\ \mu + \theta = m + \Big(f(\mathcal{V}_{1,0}) - f(\mathcal{V}_{0,1})\Big) \end{cases} \tag{3.8}$$

dont l'une des solutions est

$$f : \mathcal{V}_{i,j} \mapsto j \times \big(m - \mu - (-1)^i\theta\big).$$

Remarque 3.3.1. *Toutes les autres solutions de (3.8) sont de la forme $g(v) = f(v) + x$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\nabla g : E \to \mathbb{R}^3$ est donc unique (puisque non affectée par le choix de x), et notre choix de f comme solution du système n'a aucune conséquence sur les prochains calculs et résultats.*

Nous avons donc deux fonctions B et ∇f qui remplissent les conditions recherchées pour avoir (3.7). Il nous faut maintenant décrire le comportement de $(M_n)_n$. Afin de simplifier les prochaines expressions, posons $\gamma \overset{def}{=} \nu - \mu$. On a alors $m = \mu + \lambda\gamma$ et on peut réécrire f comme

$$f(\mathcal{V}_{1,1}) = \lambda\gamma + \theta,\ f(\mathcal{V}_{0,0}) = f(\mathcal{V}_{1,0}) = 0 \text{ et } f(\mathcal{V}_{0,1}) = \lambda\gamma - \theta.$$

Théorème 3.3.2.

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \Gamma)$$

où $\mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \Gamma)$ désigne la loi normale centrée de dimension 3 et de matrice de variance Γ, avec

$$\Gamma \overset{def}{=} (1-\lambda)\sigma_H^2 + \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\gamma\gamma^T + \lambda\sigma_V^2.$$

Démonstration. On sait que $(\xi_k)_{k\geq 1} \overset{\mathcal{L}}{=} (F(\Delta_k))_{k\geq 1}$. En exploitant cette relation ainsi que l'équation (3.7), on trouve

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{M_n}{\sqrt{n}} + \frac{f(V_n) - f(V_0)}{\sqrt{n}}. \tag{3.9}$$

Puisque $\big(f(V_n) - f(V_0)\big)$ est borné, le deuxième terme tend vers 0 presque sûrement.

En ce qui concerne la martingale $(M_n)_n$, on remarque que

$$\frac{\langle M\rangle_n}{n} \overset{def}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[B(\Delta_k)B(\Delta_k)^T|\mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}_{\pi_E}[BB^T]$$

où la convergence se montre facilement par ergodicité.

Comme nous n'avons pas de formulation explicite pour B, nous allons exploiter la relation $B(e) = F(e) - m - \nabla f(e)$ pour déterminer la valeur de $\mathbb{E}_{\pi_E}[BB^T]$. Comme $\mathbb{E}[F] = m$ et $\mathbb{E}[\nabla f] = 0$ on trouve alors :

$$\mathbb{E}_{\pi_E}[BB^T] = \mathbb{E}_{\pi_E}[FF^T] - mm^T - \mathbb{E}_{\pi_E}[F\nabla f^T + \nabla f F^T] + \mathbb{E}_{\pi_E}[\nabla f \nabla f^T].$$

Proposition 3.3.1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\pi_E}[FF^T] &= (1-\lambda)\big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T\big) + \lambda\big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\big),\\
mm^T &= (1-\lambda)^2\mu\mu^T + \lambda(1-\lambda)\big(\mu\nu^T + \nu\mu^T\big) + \lambda^2\nu\nu^T,\\
\mathbb{E}_{\pi_E}[F\nabla f^T] &= \mathbb{E}_{\pi_E}[\nabla f F^T] = (1-\lambda)\theta\theta^T,\\
\text{et } \mathbb{E}_{\pi_E}[\nabla f \nabla f^T] &= \lambda^2(1-\lambda)\big(\mu\mu^T + \nu\nu^T - (\mu\nu^T + \nu\mu^T)\big) + (1-\lambda)\theta\theta^T.
\end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 3.3.1. Pour alléger les calculs, nous omettrons de préciser que les espérances sont faites par rapport à π_E. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[FF^T] &= \mathbb{E}\big[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T\big(\mathbb{1}_{V_0=\mathcal{V}_{1,1}} + \mathbb{1}_{V_0=\mathcal{V}_{0,0}} + \mathbb{1}_{V_0=\mathcal{V}_{1,0}} + \mathbb{1}_{V_0=\mathcal{V}_{0,1}}\big)\big]\\
&= \mathbb{P}(V_0 = \mathcal{V}_{1,1})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{1,1}] + \mathbb{P}(V_0 = \mathcal{V}_{0,0})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{0,0}]\\
&\quad + \mathbb{P}(V_0 = \mathcal{V}_{1,0})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{1,0}] + \mathbb{P}(V_0 = \mathcal{V}_{0,1})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{,1}].
\end{aligned}$$

A partir de là, on exploite le fait que les sommets de type $\mathcal{V}_{i,1}$ se comportent exactement comme le graphène, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{i,1}] &= \mathbb{V}[F(\Delta_1)|V_0 = \mathcal{V}_{i,1}] + \mathbb{E}[F(\Delta_1)|V_0 = \mathcal{V}_{i,1}]\mathbb{E}[F(\Delta_1)|V_0 = \mathcal{V}_{i,1}]^T\\
&= \quad \sigma_H^2 + (-1)^i\theta_H \quad + \quad (\mu + (-1)^i\theta)(\mu + (-1)^i\theta)^T\\
&= \sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T + (-1)^i\Big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\Big).
\end{aligned}$$

A l'inverse pour les sommets de type $\mathcal{V}_{i,0}$, il faut distinguer les transitions horizontales (qui reprennent le comportement du graphène) des changements de couche (qui introduisent un terme supplémentaire) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{i,0}] &= \mathbb{P}(V_1 = \mathcal{V}_{1-i,1}|V_0 = \mathcal{V}_{i,0})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{i,0}, V_1 = \mathcal{V}_{1-i,1}]\\
&\quad + \mathbb{P}(V_1 = \mathcal{V}_{1-i,0}|V_0 = \mathcal{V}_{i,0})\mathbb{E}[F(\Delta_1)F(\Delta_1)^T|V_0 = \mathcal{V}_{i,0}, V_1 = \mathcal{V}_{1-i,0}]\\
&= (1-p)\Big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T + (-1)^i\big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\big)\Big) + p\Big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\Big).
\end{aligned}$$

En combinant tout ça on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[FF^T] &= \frac{1-p}{2(2-p)}\Big[\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T - \Big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\Big)\Big] \\
&+ \frac{1}{2(2-p)}\Big[(1-p)\Big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T + \big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\big)\Big) + p\Big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\Big)\Big] \\
&+ \frac{1}{2(2-p)}\Big[(1-p)\Big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T - \big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\big)\Big) + p\Big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\Big)\Big] \\
&+ \frac{1-p}{2(2-p)}\Big[\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T + \Big(\theta_H + \mu\theta^T + \theta\mu^T\Big)\Big] \\
&= \frac{4(1-p)}{2(2-p)}\Big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T\Big) + \frac{2p}{2(2-p)}\Big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\Big) \\
&= (1-\lambda)\Big(\sigma_H^2 + \mu\mu^T + \theta\theta^T\Big) + \lambda\Big(\sigma_V^2 + \nu\nu^T\Big).
\end{aligned}$$

Pour la deuxième expression il suffit de rappeler que $m = (1-\lambda)\mu + \lambda\nu$ et de développer le produit.

Puisque la valeur de ∇f ne dépend que des sommets de départ et d'arrivée, on peut simplifier les calculs en groupant les arêtes joignant les mêmes sommets. De plus, comme $f(\mathcal{V}_{i,0}) = 0$ pour $i = 0,1$ les arêtes reliant ces deux sommets n'auront pas d'impact dans le calcul des deux dernières espérances. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F\nabla f^T] &= \sum_{u,v\in V} \mathbb{P}(V_0 = u, V_1 = v)\mathbb{E}[F(\Delta_1)\nabla f(\Delta_1)^T | V_0 = u, V_1 = v] \\
&= \sum_{u,v\in V} \pi_V(u)\mathbb{P}(V_1 = v | V_0 = u)\mathbb{E}[F(\Delta_1) | V_0 = u, V_1 = v]\big(f(v) - f(u)\big)^T \\
&= \frac{1-p}{2(2-p)}\mathbb{E}[F(\Delta_1) | V_0 = \mathcal{V}_{1,1}, V_1 = \mathcal{V}_{0,0}]\big(0 - (\lambda\gamma + \theta)\big)^T \\
&+ \frac{1}{2(2-p)}(1-p)\mathbb{E}[F(\Delta_1) | V_0 = \mathcal{V}_{0,0}, V_1 = \mathcal{V}_{1,1}]\big((\lambda\gamma + \theta) - 0\big)^T \\
&+ \frac{1}{2(2-p)}(1-p)\mathbb{E}[F(\Delta_1) | V_0 = \mathcal{V}_{1,0}, V_1 = \mathcal{V}_{0,1}]\big((\lambda\gamma - \theta) - 0\big)^T \\
&+ \frac{1-p}{2(2-p)}\mathbb{E}[F(\Delta_1) | V_0 = \mathcal{V}_{0,1}, V_1 = \mathcal{V}_{1,0}]\big(0 - (\lambda\gamma - \theta)\big)^T \\
&= \frac{1-p}{2(2-p)}\Big((\mu-\theta)(-\lambda\gamma - \theta)^T + (\mu+\theta)(\lambda\gamma + \theta)^T + (\mu-\theta)(\lambda\gamma - \theta)^T + (\mu+\theta)(-\lambda\gamma + \theta)^T\Big) \\
&= \frac{1-p}{2(2-p)}4\theta\theta^T = (1-\lambda)\theta\theta^T.
\end{aligned}$$

Par symétrie on trouve que $\mathbb{E}[\nabla f F^T] = \mathbb{E}[F\nabla f^T]^T = \Big((1-\lambda)\theta\theta^T\Big)^T = (1-\lambda)\theta\theta^T$.

Il ne reste plus que la dernière espérance, qui ne dépend que de ∇f et que nous calculerons de la même manière que la précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\nabla f\nabla f^T] &= \sum_{u,v\in V} \mathbb{P}(V_0 = u, V_1 = v)\big(f(v) - f(u)\big)\big(f(v) - f(u)\big)^T \\
&= \frac{1-p}{2(2-p)}\big(-f(\mathcal{V}_{1,1})\big)\big(-f(\mathcal{V}_{1,1})\big)^T + \frac{1}{2(2-p)}(1-p)f(\mathcal{V}_{1,1})f(\mathcal{V}_{1,1})^T \\
&+ \frac{1}{2(2-p)}(1-p)f(\mathcal{V}_{0,1})f(\mathcal{V}_{0,1})^T + \frac{1-p}{2(2-p)}\big(-f(\mathcal{V}_{0,1})\big)\big(-f(\mathcal{V}_{0,1})\big)^T \\
&= \frac{1-p}{(2-p)}\Big((\lambda\gamma + \theta)(\lambda\gamma + \theta)^T + (\lambda\gamma - \theta)(\lambda\gamma - \theta)^T\Big) \\
&= \frac{1-p}{(2-p)}2(\lambda^2\gamma\gamma^T + \theta\theta^T) = \lambda^2(1-\lambda)\gamma\gamma^T + (1-\lambda)\theta\theta^T.
\end{aligned}$$

Il suffit de remplacer γ par $(\nu - \mu)$ pour obtenir le résultat énoncé. □

Revenons à la preuve du Théorème 3.3.2. Grâce à la proposition précédente, un simple calcul donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\pi_E}[BB^T] &= (1-\lambda)\sigma_H^2 + \big((1-\lambda)-(1-\lambda)^2+\lambda^2(1-\lambda)\big)\,\mu\mu^T + \big((1-\lambda)-2(1-\lambda)+(1-\lambda)\big)\,\theta\theta^T \\ &\quad + \lambda\sigma_V^2 + \big(\lambda-\lambda^2+\lambda^2(1-\lambda)\big)\,\nu\nu^T + \big(-\lambda(1-\lambda)-\lambda^2(1-\lambda)\big)\big(\mu\nu^T+\nu\mu^T\big) \\ &= (1-\lambda)\sigma_H^2 + \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\big(\mu\mu^T-\mu\nu^T-\nu\mu^T+\nu\nu^T\big) + \lambda\sigma_V^2 \\ &= (1-\lambda)\sigma_H^2 + \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)\gamma\gamma^T + \lambda\sigma_V^2 = \Gamma.\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le TCL pour les martingales à M_n pour avoir

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_3(\mathbf{0},\Gamma).$$

□

3.3.4 Limite d'échelle

On peut même exploiter la décomposition de Hodge pour obtenir une limite d'échelle des processus $\big(S_{\lfloor nt\rfloor}\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Théorème 3.3.3.

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt\rfloor}-\lfloor nt\rfloor m}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (AW_t)_{t\geq 0}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard de dimension 3 et A vérifie $AA^T=\Gamma$.

Démonstration. Le TCL fonctionnel pour les martingales locales de [8] garantit que

$$\left(\frac{M_{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (AW_t)_{t\geq 0}$$

sous la condition que $\forall\ t\geq 0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} B(\Delta_k)B(\Delta_k)^T \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} t\,\Gamma.$$

Il suffit donc de remarquer que pour $t>0$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} B(\Delta_k)B(\Delta_k)^T = \frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\times\frac{1}{\lfloor nt\rfloor}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} B(\Delta_k)B(\Delta_k)^T \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} t\,\mathbb{E}_{\pi_E}[BB^T] = t\,\Gamma.$$

On conclut en reprenant la décomposition (3.9) (en remplaçant certains n par $\lfloor nt\rfloor$), puisque le second terme est toujours asymptotiquement négligeable. □

3.4 Simulations

On cherche à simuler la marche aléatoire du graphite dans le cas des deux empilements considérés, afin de vérifier empiriquement les résultats de convergence obtenus.

Pour cela on commence par importer les bibliothèques nécessaires pour nos simulations, réalisées en Pyhton 3.

```
In [1]: import math
        import numpy as np
        import random as rd
        import matplotlib.pyplot as plt
        from mpl_toolkits import mplot3d
```

3.4.1 Graphène

Commençons simplement par simuler le graphène. Cela permettra de poser les fonctions de base et de confirmer les résultats déjà connus.

Tout d'abord une fonction permettant de simuler une étape de la marche aléatoire. Les probabilités de transition seront stockées dans une double liste sous la forme $Q = [[q_{0,0}; q_{0,1}; q_{0,2}]; [q_{1,0}; q_{1,1}; q_{1,2}]]$. La variable "couleur" vaut 1 pour les sommets blancs et -1 pour les sommets noirs (vu que la configuration des voisins autour d'un sommet noir est celle autour d'un sommet blanc après une symétrie centrale, ce choix simplifiera les calculs).

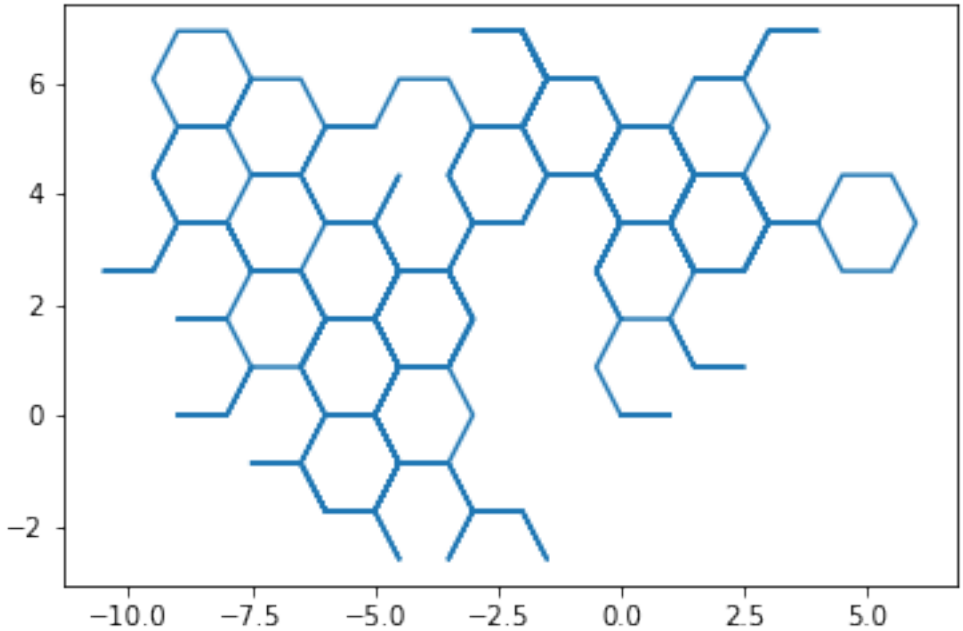
```
In [2]: def saut_graphene(Q, couleur):
            alea=rd.random()
            if couleur==1:
                if alea<Q[0,0]:
                    k=0
                elif alea<Q[0,0]+Q[0,1]:
                    k=1
                else:
                    k=2
            else:
                if alea<Q[1,0]:
                    k=0
                elif alea<Q[1,0]+Q[1,1]:
                    k=1
                else:
                    k=2
            return (couleur*math.cos(2*k*math.pi/3),couleur*math.sin(2*k*math.pi/3))
```

Il suffit alors d'appeler plusieurs fois de suite la fonction précédente pour simuler une marche aléatoire sur le graphène, en faisant attention de changer la couleur du sommet à chaque saut. On donne en paramètre les probabilités de transition Q, la longueur des arêtes a (nous ferons simplement une homothétie pour tenir compte de ce paramètre, puisqu'il s'agit simplement d'une variable d'échelle) et le nombre d'itérations n. On renvoie la liste complète des positions au cours du temps, séparée en deux listes pour les deux dimensions. Le point initial $(0, 0)$ est supposé blanc.

```
In [3]: def marche_graphene(Q, a, n):
            listeX=[0]
            listeY=[0]
            couleur=1
            for i in range(n):
                saut=saut_graphene(Q,couleur)
                listeX.append(listeX[i]+a*saut[0])
                listeY.append(listeY[i]+a*saut[1])
                couleur=-couleur
            return listeX,listeY
```

La fonction suivante sert de test afin de vérifier que tout marche bien : on simule la marche sur le graphène dans le cas où toutes les transitions sont équiprobables, et on affiche la trajectoire du marcheur pour voir apparaître le réseau hexagonal.

```
In [4]: def test_graphene():
            Q=np.array([[1/3, 1/3, 1/3],[1/3,1/3,1/3]])
            test=marche_graphene(Q,1,400)
            plt.plot(test[0],test[1])
            plt.show()
            return 1

        test_graphene()
```



3.4.2 Graphite - Empilement AAAA

Marche aléatoire

On s'intéresse à présent au cas où les couches de graphène sont simplement empilées les une au-dessus des autres et où chaque sommet permet de passer aux couches les plus proches. On continue de stocker les probabilités de transition horizontales sous la forme d'une double liste $Q = [[q_{0,0}; q_{0,1}; q_{0,2}]; [q_{1,0}; q_{1,1}; q_{1,2}]]$, et on introduit la variable p qui contient la probabilité de passer à une autre couche (que ce soit celle du dessus OU celle du dessous, pour une probabilité totale de changer de couche $2p$). On effectuera dans la fonction le produit $(1-2p)q_{i,j}$ pour obtenir la vraie probabilité de transition. La variable "couleur" remplit toujours le même rôle que dans le cas du graphène. Le changement majeur par rapport au modèle précédent est que la sortie "saut", en plus de contenir la valeur du saut selon chacune des 3 dimensions, contient également la couleur du sommet d'arrivée, puisqu'elle ne suit plus l'alternance systématique qu'il y avait dans le modèle du graphite.

```
In [5]: def saut_graphite(Q, p, couleur):
            alea=rd.random()
            if alea<p:
                saut=(0,0,1,couleur)
            elif alea<2*p:
                saut=(0,0,-1,couleur)
```

```
        else:
            alea=(alea-2*p)/(1-2*p)
            if couleur==1:
                if alea<Q[0,0]:
                    k=0
                elif alea<Q[0,0]+Q[0,1]:
                    k=1
                else:
                    k=2
            else:
                if alea<Q[1,0]:
                    k=0
                elif alea<Q[1,0]+Q[1,1]:
                    k=1
                else:
                    k=2
            X=couleur*math.cos(2*k*math.pi/3)
            Y=couleur*math.sin(2*k*math.pi/3)
            saut=(X,Y,0,-couleur)
        return saut
```

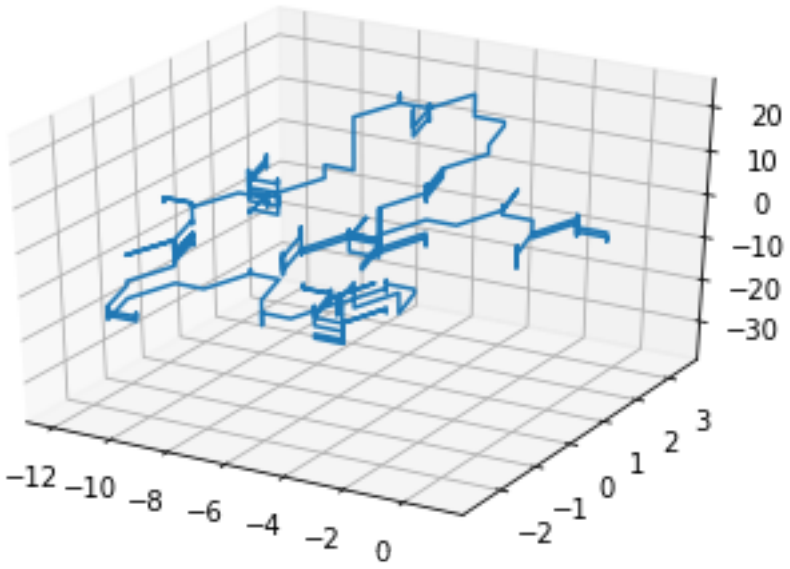
On itère la fonction de saut à plusieurs reprises pour obtenir une marche aléatoire qur le graphite AAAA. On donne en paramètres les probabilités de transition Q et p, la longueur d'une arête de graphène a (on fait une homothétie sur les deux axes x et y pour tenir compte de cette échelle), l'espacement entre deux couches successives h (simple homothétie à nouveau, uniquement sur l'axe z) et le nombre d'itérations souhaitées n. La couleur du sommet est mise à jour à chaque itération en récupérant le retour de la fonction "saut_graphite". On renvoie finalement la liste des positions du marcheur au cours du temps, séparée en 3 selon les différents axes. Le point initial $(0, 0, 0)$ est supposé blanc.

```
In [6]: def marche_graphite(Q, p, a, h, n):
            listeX=[0]
            listeY=[0]
            listeZ=[0]
            couleur=1
            for i in range(n):
                saut=saut_graphite(Q,p,couleur)
                listeX.append(listeX[i]+a*saut[0])
                listeY.append(listeY[i]+a*saut[1])
                listeZ.append(listeZ[i]+h*saut[2])
                couleur=saut[3]
            return listeX,listeY,listeZ
```

A nouveau une fonction permettant de tester la fonction et de tracer la trajectoire de la marche aléatoire (même si le caractère tridimensionnel rend la lecture difficile).

```
In [7]: def test_graphite():
            Q=np.array([[1/3, 1/3, 1/3],[1/3,1/3,1/3]])
            p=0.4
            a=1
            h=1
            n=500
            test=marche_graphite(Q,p,a,h,n)
            ax = plt.axes(projection='3d')
            zline = test[2]
            xline = test[0]
            yline = test[1]
            ax.plot3D(xline, yline, zline)
            plt.show()
            return 1
```

```
test_graphite()
```



Normalité asymptotique

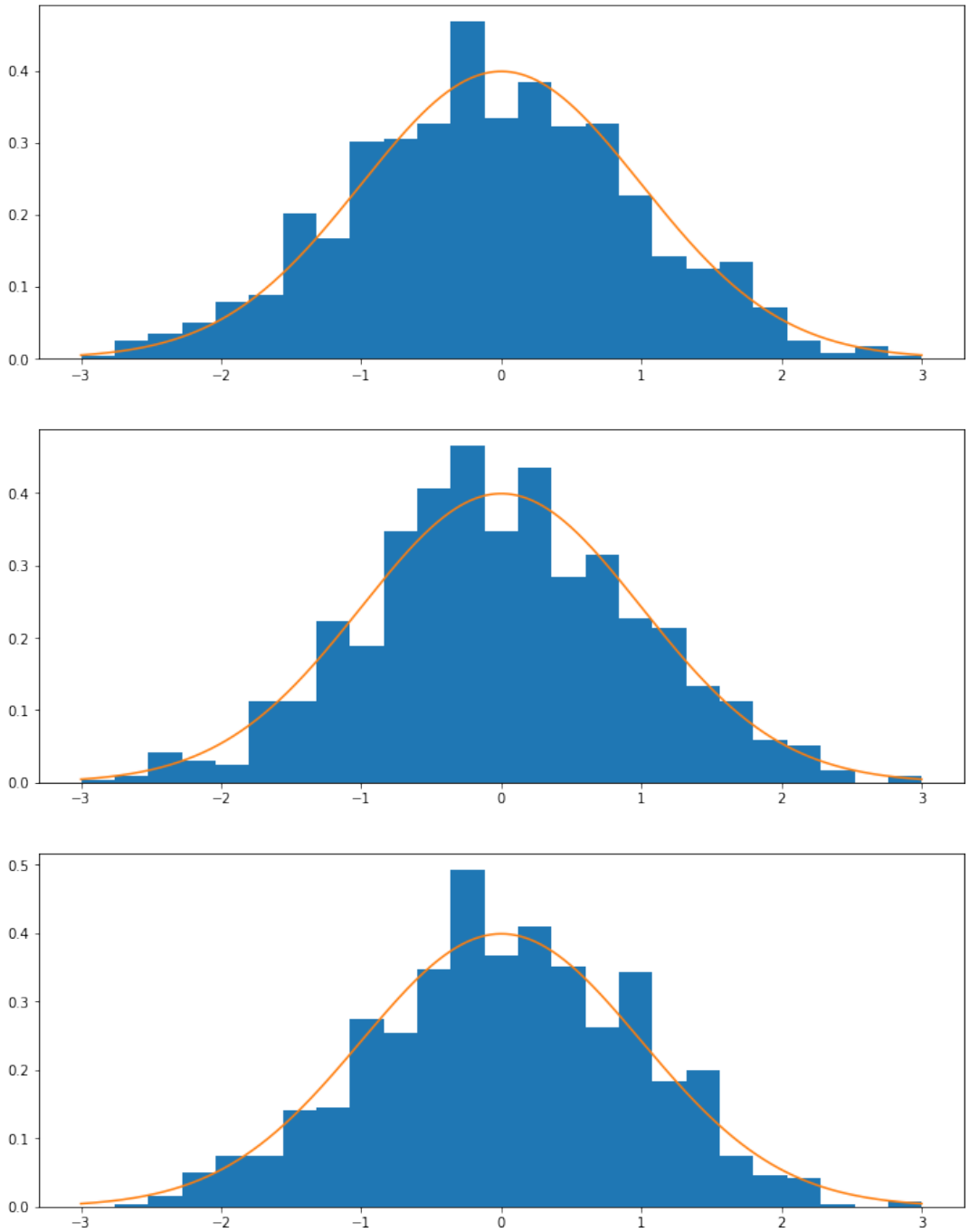
A présent nous allons observer le TCL que nous avons démontré dans le cadre de ce modèle. Pour cela nous introduisons la fonction suivante, qui va appeler N fois la fonction précédemment écrite qui simule la marche aléatoire sur le graphite AAAA, avec les paramètres Q,p,a,h et n (qu'il faut fournir à cette nouvelle fonction). Elle conservera la dernière position prise par la marche (celle au temps n), avant de centrer et réduire (selon les résultats théoriques de notre TCL) chacune des 3 coordonnées, puis stockera cette valeur dans 3 listes distinctes (une pour chaque dimension). Enfin elle affiche l'histogramme de ces 3 listes, afin de faire apparaître la densité empirique, en traçant par-dessus la densité d'une loi Gaussienne centrée réduite $N(0,1)$.

```
In [8]: def normal_graphite(Q, p, a, h, n, N):
            echantX=[]
            echantY=[]
            echantZ=[]
            mu1=3/4*a*(Q[1,1]+Q[1,2]-Q[0,1]-Q[0,2])
            mu2=math.sqrt(3)/4*a*(Q[0,1]+Q[1,2]-Q[1,1]-Q[0,2])
            mu1bis=2*p*(1-2*p)*mu1**2
            mu2bis=2*p*(1-2*p)*mu2**2
            temp=(Q[0,1]+Q[0,2])+(Q[1,1]+Q[1,2])
            sigma1=(1-2*p)*9/8*a**2*(temp-(Q[0,1]+Q[0,2])**2-(Q[1,1]+Q[1,2])**2)+mu1bis
            sigma2=(1-2*p)*3/8*a**2*(temp-(Q[0,1]-Q[0,2])**2-(Q[1,1]-Q[1,2])**2)+mu2bis
            sigma3=2*p*h**2

            for i in range(N):
                S=marche_graphite(Q,p,a,h,n)
                echantX.append((S[0][n]-mu1*n*(1-2*p))/math.sqrt(n*sigma1))
                echantY.append((S[1][n]-mu2*n*(1-2*p))/math.sqrt(n*sigma2))
                echantZ.append(S[2][n]/math.sqrt(n*sigma3))


            Xgauss=np.linspace(-3,3,1000)
            Ygauss=[]
```

```
        for i in range(1000):
            Ygauss.append(math.exp(-Xgauss[i]**2/2)/math.sqrt(2*math.pi))

        plt.figure(figsize=(12,16))

        plt.subplot(311)
        plt.hist(echantX, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)

        plt.subplot(312)
        plt.hist(echantY, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)
        plt.subplot(313)

        plt.hist(echantZ, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)

        plt.show()
        return 1
```

Il convient à présent d'utiliser cette fonction afin d'illustrer la validité de notre résultat.

```
In [9]: def test_normal():
            Q=np.array([[1/3, 1/2, 1/6],[1/6,1/3,1/2]])
            p=0.2
            a=2
            h=1
            n=500
            N=1000
            normal_graphite(Q,p,a,h,n,N)
            return 1

        test_normal()
```



3.4.3 Graphite - Empilement ABAB

Marche aléatoire

Passons au modèle suivant, celui du graphite-2H où les couches alternent selon un pattern ABAB, les couches B étant légèrement décalées par rapport aux couches A. Commençons par la fonction qui va simuler une étape de la marche aléatoire, en prenant en paramètres les probabilités de transition sous la forme $Q = [[q_{0,0}; q_{0,1}; q_{0,2}]; [q_{1,0}; q_{1,1}; q_{1,2}]; [p_{0,0,3}; p_{0,0,4}, p]]$ (toutes les probabilités de transition s'obtiennent à partir de celles-ci, comme indiqué dans la description détaillée du modèle), une variable "blanc" indiquant la couleur du sommet (variable booléenne) et une variable "vert" indiquant si le sommet fait partie de ceux autorise le changement de couche (variable booléenne, dépend à la fois de la couleur

et l'altitude). Cette fonction renvoie alors le saut qui a été tiré aléatoirement, ainsi que les propriétés du sommet d'arrivée, i.e. sa couleur et s'il autorise les changements de couches.

```
In [10]: def jump(Q, blanc, vert):
             if blanc == True:
                 e = 0
             else:
                 e = 1
             alea=rd.random()
             if (vert == True) & (alea < Q[2][2]):
                 if alea < Q[2][0]:
                     saut = np.array([0, 0, 1])
                 else:
                     saut = np.array([0, 0, -1])
             else:
                 if vert == True:
                     alea = (alea-Q[2][2])/(1-Q[2][2])
                 vert = not vert
                 if alea < Q[e][0] :
                     saut = np.array([-2*e+1, 0, 0])
                 elif alea < Q[e][0] + Q[e][1]:
                     saut = np.array([e-0.5, math.sqrt(3)*(0.5-e), 0])
                 else:
                     saut = np.array([e-0.5, math.sqrt(3)*(e-0.5), 0])
             return (saut, not blanc, vert)
```

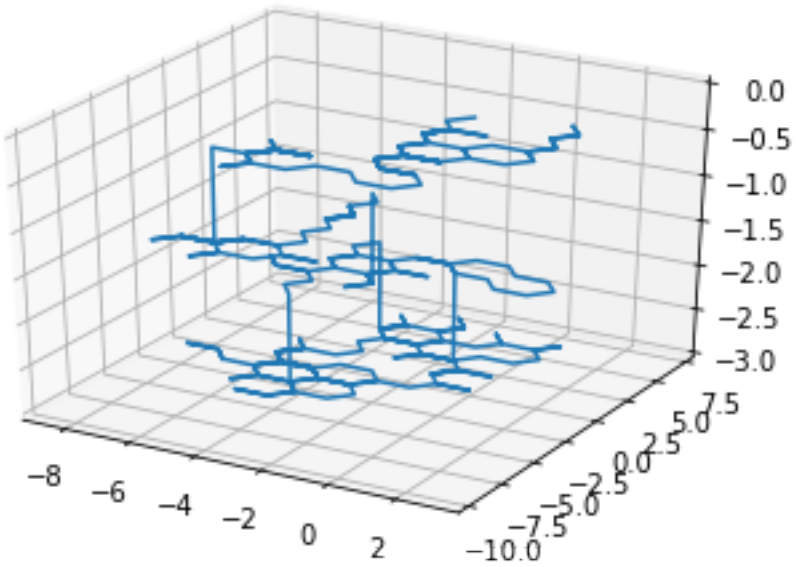
Comme toujours, il suffit de mettre la fonction précédente dans une boucle pour simuler la marche aléatoire, puisque la fonction "jump" nous donne directement les propriétés du sommet sur lequel on se trouve. La fonction prend donc en paramètres les probabilités de transition sous la même forme que précédemment, la taille des arêtes dans le graphène a (pour faire une homothétie sur les axes x et y), la hauteur entre deux couches successives de graphène h (pour l'homothétie de l'axe z) et le nombre d'itérations n. On retourne l'historique des positions prises par la marche aléatoire au cours du temps, séparées en trois listes (une pour chaque dimension). On suppose que la marche aléatoire part de $(0, 0, 0)$ et que c'est un sommet blanc qui autorise les changements de couche de graphène.

```
In [11]: def marche_graphite_abab(Q, a, h, n):
             listeX=[0]
             listeY=[0]
             listeZ=[0]
             blanc=True
             vert=True
             for i in range(n):
                 saut=jump(Q,blanc,vert)
                 listeX.append(listeX[i]+a*saut[0][0])
                 listeY.append(listeY[i]+a*saut[0][1])
                 listeZ.append(listeZ[i]+h*saut[0][2])
                 blanc=saut[1]
                 vert=saut[2]
             return listeX,listeY,listeZ
```

Une fois encore, on teste notre fonction pour s'assurer que tout fonctionne comme prévu.

```
In [12]: def test_graphite_abab():
             Q=[[1./3., 1./3., 1./3.], [1./3., 1./3., 1./3.], [0.01, 0.02, 0.03]]
             a=1
             h=1
             n=300
             test = marche_graphite_abab(Q, a, h, n)
```

```
        ax = plt.axes(projection='3d')
        zline = test[2]
        xline = test[0]
        yline = test[1]
        ax.plot3D(xline, yline, zline)

        plt.show()
        return 1

    test_graphite_abab()
```



Normalité asymptotique

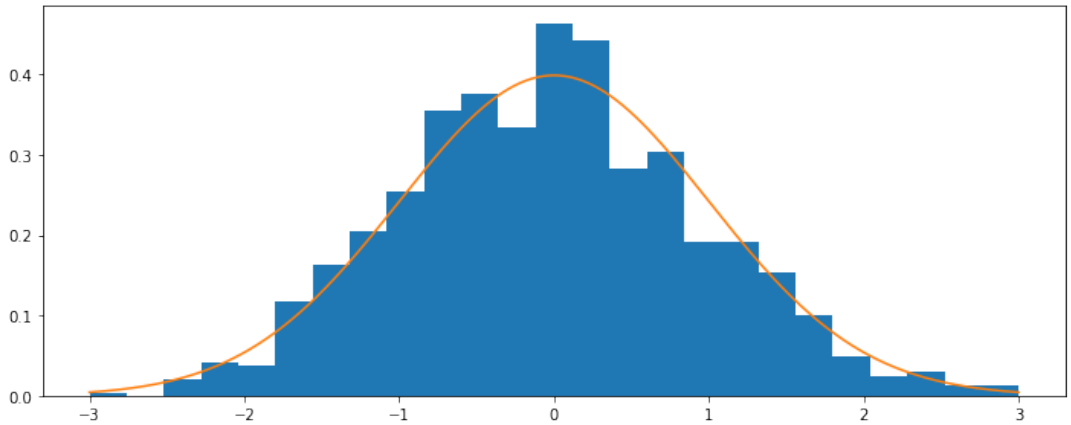
Exactement comme pour le modèle précédent, nous allons numériquement vérifier notre TCL sur chacune des trois coordonnées. Pour cela nous allons appeler N fois la fonction précédemment écrite qui simule la marche aléatoire sur le graphite ABAB, avec les paramètres Q,a,h et n (qu'il faut donc fournir à la nouvelle fonction). On garde la dernière position prise par la marche (celle au temps n), avant de centrer et réduire (selon les résultats théoriques de notre TCL) chacune des 3 coordonnées, puis stocker ces valeurs dans 3 listes distinctes (une pour chaque dimension). Enfin on affiche l'histogramme de ces 3 listes, afin de faire apparaître la densité empirique, en traçant par-dessus la densité d'une loi Gaussienne centrée réduite $N(0,1)$.

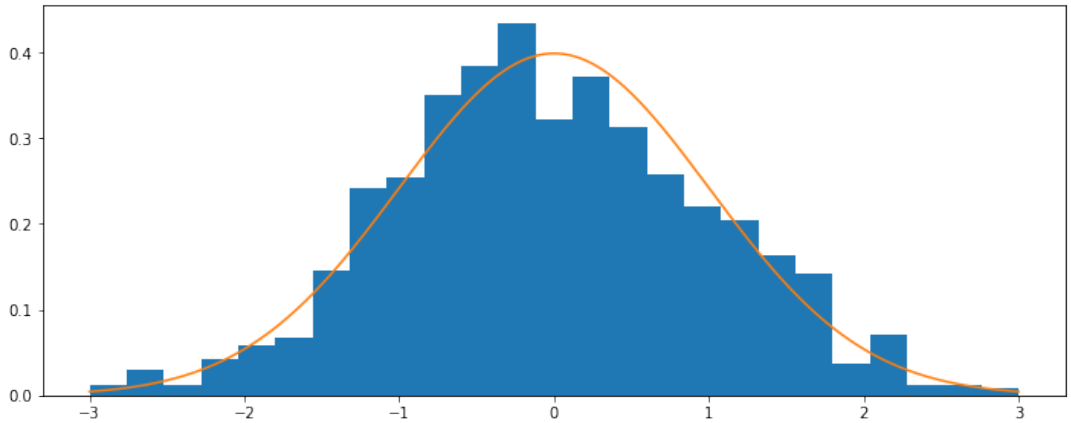
```
In [13]: def normal_graphite_abab(Q, a, h, n, N):
             echantX=[]
             echantY=[]
             echantZ=[]

             mu1=3/4*a*(Q[1,1]+Q[1,2]-Q[0,1]-Q[0,2])
             mu2=math.sqrt(3)/4*a*(Q[0,1]+Q[1,2]-Q[1,1]-Q[0,2])
             mu3=(Q[2,0]-Q[2,1])/Q[2,2]*h
             lamb=Q[2,2]/(2-Q[2,2])
             mu1bis=lamb*(1-lamb)*(1+lamb)*mu1**2
             mu2bis=lamb*(1-lamb)*(1+lamb)*mu2**2
             temp=(Q[0,1]+Q[0,2])+(Q[1,1]+Q[1,2])
             sigma1=(1-lamb)*9/8*a**2*(temp-(Q[0,1]+Q[0,2])**2-(Q[1,1]+Q[1,2])**2)+mu1bis
```

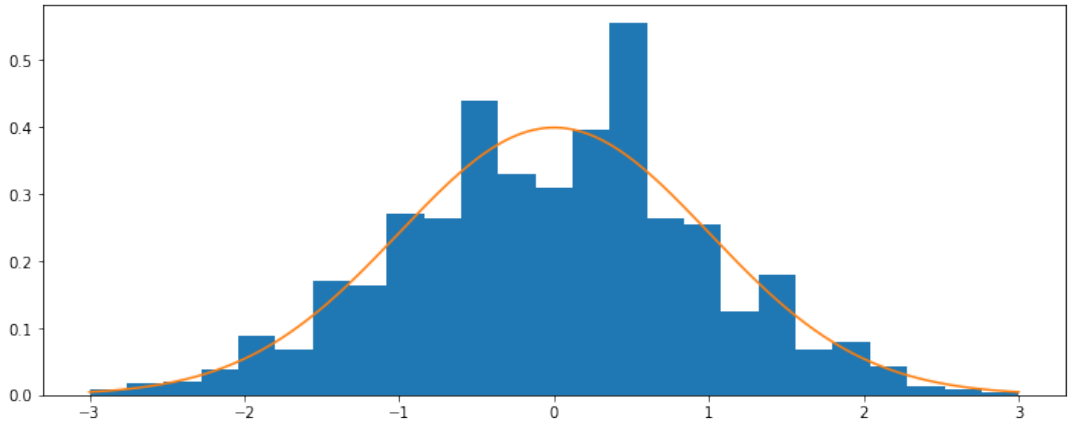
```
        sigma2=(1-lamb)*3/8*a**2*(temp-(Q[0,1]-Q[0,2])**2-(Q[1,1]-Q[1,2])**2)+mu2bis
        sigma3=lamb*(h**2-mu3**2)+lamb*(1-lamb)*(1+lamb)*mu3**2

        for i in range(N):
            S=marche_graphite_abab(Q,a,h,n)
            echantX.append((S[0][n]-(1-lamb)*mu1*n)/math.sqrt(n*sigma1))
            echantY.append((S[1][n]-(1-lamb)*mu2*n)/math.sqrt(n*sigma2))
            echantZ.append((S[2][n]-lamb*mu3*n)/math.sqrt(n*sigma3))


        Xgauss=np.linspace(-3,3,1000)
        Ygauss=[]
        for i in range(1000):
            Ygauss.append(math.exp(-Xgauss[i]**2/2)/math.sqrt(2*math.pi))

        plt.figure(figsize=(12,16))

        plt.subplot(311)
        plt.hist(echantX, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)

        plt.subplot(312)
        plt.hist(echantY, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)
        plt.subplot(313)

        plt.hist(echantZ, range = (-3, 3), bins = 25, density = True)
        plt.plot(Xgauss,Ygauss)

        plt.show()
        return 1
```

Ces dernières lignes de code testent notre dernière fonction, et nous rassure quand à la fiabilité de nos résultats.

```
In [14]: def test_normal_abab():
             Q=np.array([[1./3., 1./3., 1./3.], [1./3., 1./3., 1./3.], [0.1, 0.2, 0.3]])
             a=1
             h=1
             n=500
             N=1000
             normal_graphite_abab(Q, a, h, n, N)
             return 1

         test_normal_abab()
```


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3

Chapitre 4

Hypercube

Ce Chapitre est tiré de l'article [15] rédigé en anglais. Il est consacré à l'étude du *toy model* sur les hypercubes et sur les résultats de double asymptotique que nous avons pu mettre en évidence.

4.1 Introduction

Many results (like the Law of Large Numbers or the Central Limit Theorem) are already known for the asymptotic behavior in time of an additive functional of a Markov chain (see for instance [14]). But the case where we consider a sequence of such processes is only partially studied. Here we adress the problem of a double asymptotic as both the time and the index in the sequence tend to infinity. For instance, a well understood case is the discretization of a diffusion process : as we consider larger time horizons and finer meshes, the discrete processes converge to the continuous diffusion they come from.

Actually this paper was initially motivated by the study of a constrained random walk introduced in [2], where an additive observable of a simple random walk on a graph G_K whose vertices are $\{-1,1\}^K$ is described. The authors used a discrete Hodge decomposition to rewrite their observable as a sum of a divergence-free and a bounded gradient vector fields, and then proved that for every K the rescaled constrained random walk converges in time to a Brownian motion with variance $\sigma_K^2 = \frac{2}{K+2}$.

A natural generalization of this result would be to let K grow to $+\infty$, but the diffusivity tends to 0 as K grows, which means that the normalization $\sqrt{n}$ used in [2] is too strong to get a non-trivial limit in this case. Moreover the gradient part was neglected since it is bounded when K is fixed. Actually, it is a function of K, and when K tends to infinity it is no more obvious that it can be neglected.

In our setting we are dealing with a simplified version of this model. By removing some edges from the graphs G_K, the additive observable corresponds to a pure gradient term. Hence in this model we have σ_K vanishing for every K. Moreover this toy model is more amenable to computations since the dependence in K of the gradient term is quite simple. Even if the diffusivity is zero we managed to get a convergence to Gaussian processes when both n and K tend to $+\infty$.

Surprisingly we find out that the good normalization and the limiting process both depend on the asymptotic of the ratio of our parameters. Indeed, if the limit of $\frac{n}{K}$ is a positive constant, our rescaled process will converge to an Ornstein-Uhlenbeck process. If the ratio tends to $+\infty$ the limiting process is a Gaussian white noise (i.e. a collection of i.i.d. Gaussian random variables). Last but not least if $\frac{n}{K}$ tends to 0 the initial value may diverge (for instance in the stationary case), hence we will prove first a convergence to a Brownian motion if we subtract the value of the processes at time 0 before considering a "stationary Brownian motion" (i.e. some weak form of Brownian motion starting from the Lebesgue measure) as a singular limit.

4.2 The model

Let the graph $H_K = (V_K, E_K)$ be the K-dimensional hypercube, more precisely :

$$V_K = \{-1,+1\}^K \text{ and } E_K = \{\{u, u_i'\} : u \in V_K, i \in [K]\}$$

with $u_i' = (u^{(1)}, \dots, u^{(i-1)}, -u^{(i)}, u^{(i+1)}, \dots, u^{(K)})$ and $[K] \overset{def}{=} [\![1, K]\!]$.

We define $(Y_K(n))_{n\geq 0}$ as the simple random walk on H_K starting from a law μ_K on V_K. We set $f_K : V_K \to \mathbb{R}$ the function giving the sum of the coordinates in H_K, namely :

$$\forall\ v \in V_K :\ f_K(v) = \sum_{i=1}^{K} v^{(i)}.$$

We are interested in the behavior of $f_K(Y_K(n))$, and more specifically we want to give some scaling limit as n and K both tend to infinity of the linear interpolations processes defined by :

$$X_{n,K}(t) = f_K(Y_K(\lfloor nt \rfloor)) \quad t \geq 0.$$

In other words we want to find some $c_{n,K}$ and random process $(X_t)_{t\geq 0}$ such that :

$$\left(\frac{X_{n,K}(t)}{c_{n,K}}\right)_{t\geq 0} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} (X_t)_{t\geq 0}.$$

The mode of such convergences will be either the convergence in distribution in the set of càdlàg functions $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (endowed with the Skorokhod topology used in [8]), or a convergence of the finite-dimensional marginals (weakly or vaguely). In the next sections $X \overset{\mathcal{D}}{=} Y$ will mean that the random variables or processes X and Y both have the same probability law, and we will consider that K is a function of n (but we will keep writing K instead of $K(n)$ to lighten the notations).

We begin with the intermediate regime (both parameters grow at comparable speeds) using diffusion approximation results from [8]. Then in the fast regime (n growing faster than K) the processes do no longer converge to a diffusion process, so we use an ersatz of Donsker's theorem (which will be proven in the appendix) to prove a convergence of the finite-dimensional laws. Lastly in the slow regime (n grows slower than K) we state a convergence in law of the increments of the processes before proving a vague convergence to a Brownian motion starting from its invariant measure (i.e. the Lebesgue measure) using the results from the intermediate regime.

One can remark that $X_{n,K}$ is an affine transformation of an Ehrenfest's urn, which explains the convergence to an Ornstein-Uhlenbeck process in the intermediate regime (see for instance [5] for a proof of this scaling limit).

4.3 Intermediate regime

Consider the sequences of random variables defined by :

$$Z_{n,K}(i) \overset{def}{=} \frac{f_K(Y_K(i))}{c_{n,K}}$$

for every $i \in \mathbb{N}$. In this section we will assume that K and n grow at comparable speeds, namely there exists $\lambda > 0$ such that :

$$\frac{n}{K} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

One can check that for every $n \geq 1$ the sequence $(Z_{n,K}(i))_{i\in\mathbb{N}}$ is an homogeneous Markov chain with values in :

$$\mathcal{S}_n = \left\{\frac{2k-K}{c_{n,K}} : k \in [\![0, K]\!]\right\}$$

whose transition kernel is given for every $x \in \mathcal{S}_n$ by :

$$\mathbb{P}_n(x, .) = \left(\frac{1}{2} + \frac{xc_{n,K}}{2K}\right)\delta_{x-\frac{2}{c_{n,K}}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{xc_{n,K}}{2K}\right)\delta_{x+\frac{2}{c_{n,K}}}.$$

Using the same kind of proof as the Example 27.8 from [5], we simply have to compute the two following functions :

$$b_n(x) \overset{def}{=} n\int_{|y-x|\leq 1} (y-x)\ \mathbb{P}_n(x, dy) = -2x\frac{n}{K}$$
$$a_n(x) \overset{def}{=} n\int_{|y-x|\leq 1} (y-x)^2\ \mathbb{P}_n(x, dy) = 4\frac{n}{c_{n,K}^2}.$$

We will mostly use the following result, which grants a convergence to diffusion processes for homogeneous Markov chains :

Proposition 4.3.1. *Suppose there exist a random variable X_0 and two continuous functions $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ and $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ such that all the following properties hold for any $r, \varepsilon > 0$:*

$$\sup_{|x|\leq r} |a_n(x) - a(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\sup_{|x|\leq r} |b_n(x) - b(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\sup_{|x|\leq r} n \times \mathbb{P}_n(x, [x-\varepsilon, x+\varepsilon]^c) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\text{and} \qquad Z_{n,K}(0) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} X_0.$$

Then we get the following convergence of processes :

$$(Z_{n,K}(\lfloor nt \rfloor))_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (X_t)_{t\geq 0}$$

where $(X_t)_{t\geq 0}$ is the diffusion starting from X_0 and solving :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sqrt{a(X_t)}dW_t$$

with $(W_t)_{t\geq 0}$ a standard Brownian motion starting from 0.

Proof. This result is just an adapted version of the Corollary 4.2 (p.355) from [8] about the diffusion approximation. □

Once applied to the processes $Z_{n,K}$, it grants the following result :

Theorem 4.3.1. *Under the following assumptions :*

$$\frac{n}{c_{n,K}^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \geq 0, \qquad \frac{n}{K} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \geq 0 \qquad \text{and} \qquad Z_{n,K}(0) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} Z_0$$

we have the convergence in distributions of the random processes :

$$(Z_{n,K}(\lfloor nt \rfloor))_{t\geq 0} \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (O_{\lambda,\sigma}(t))_{t\geq 0}$$

where $(O_{\lambda,\sigma}(t))_{t\geq 0}$ denotes the diffusion process solving :

$$\begin{cases} dO_{\lambda,\sigma}(t) = -2\lambda O_{\lambda,\sigma}(t)dt + 2\sigma dW_t \\ O_{\lambda,\sigma}(0) \overset{\mathcal{D}}{=} Z_0. \end{cases}$$

Proof. We simply apply the Proposition 4.3.1 : $a_N(x) = 4\frac{n}{c_{n,K}^2}$ converges uniformly to $a(x) = 4\sigma^2$, $b_N(x) = -2x\frac{n}{K}$ converges locally uniformly to $b(x) = -2x\lambda$ and :

$$n\mathbb{P}_n(x, [x-\varepsilon, x+\varepsilon]^c) = n\mathbb{1}_{\frac{2}{c_{n,K}} > \varepsilon}$$

which tends uniformly to 0 since the condition $\frac{n}{c_{n,K}^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$ guaranties that $c_{n,K}$ tends to infinity. □

Remark 1. *We allow $\lambda = 0$ in the Theorem 4.3.1 because we will use this specific case later to prove the Theorem 4.5.2 in the slow regime. But keep in mind that the intermediate regime restrains to positive values of λ.*

We can distinguish two different cases for the intermediate regime in the previous theorem :

Corollary 4.3.1.
- *If $\sigma^2 > 0$ (i.e. $c_{n,K}$ is equivalent to $\sigma\sqrt{n}$) then the limit diffusion is an Ornstein-Uhlenbeck process. Moreover, if $Y_K(0)$ is uniformly distributed, $Z_{n,K}(0)$ converges in law to a $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{\lambda})$ random variable, making the process $O_{\lambda,\sigma}$ temporally stationary.*
- *If $\sigma = 0$ (i.e. $c_{n,K}$ grows faster than $\sqrt{n}$) the limit process is the (random) function $Z_0 e^{-2\lambda t}$. Note that if $c_{n,K}$ grows faster than K or $Y_K(0)$ is uniform over V_K, then the limit process is constantly equal to 0.*

Example 1. *If there exists $C \in [-1, 1]$ such that $\frac{f_K(Y_K(0))}{K} \underset{K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} C$, then we may set $c_{n,K} = K$ to check the assumptions of Theorem 4.3.1 and the limit would be the deterministic function $t \mapsto Ce^{-2\lambda t}$.*

4.4 Fast regime

In this section we will consider regime $\frac{n}{K} \to \infty$, and we will always assume that μ_K is the uniform distribution on V_K. The Theorem 4.3.1 let us think that the good normalization will be of the order of $\sqrt{K}$, but the limit process would no longer be a diffusion. Since we can't use the diffusion approximation theorems from [8], we need to take a closer look at the finite-dimensional laws of the processes. Let's define $\mathbf{t}_n = (t_1(n), \dots, t_s(n))$ such that

$$\frac{n}{K}\left(t_{j+1}(n) - t_j(n)\right) \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \ \forall\ 1 \le j \le s-1 \tag{4.1}$$

and set the following notation :

$$X_{n,K}(\mathbf{t}_n) = \left(X_{n,K}(t_1(n)), \dots, X_{n,K}(t_s(n))\right).$$

Our goal is to show that :

$$\frac{X_{n,K}(\mathbf{t}_n)}{\sqrt{K}} = \mathbf{F}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i\in B_k}\xi_i\right)_{k\in[N]}\right) \tag{4.2}$$

for some linear functional $\mathbf{F}$, where $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is an i.i.d. sequence of Rademacher random variables, and $(B_k)_{k\in[N]}$ is a random partition of $[K]$ (independent from the ξ_i).

Since $X_{n,K}(t) = f_K(Y_K(\lfloor nt\rfloor))$, we will rewrite $f_K(Y_K(n))$ in a more suitable form :

Proposition 4.4.1. *Let $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be i.i.d. Rademacher random variables and let $\left(U_k^{(K)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ be i.i.d. uniform random variables on $[K]$ independent from the ξ_k. Then :*

$$f_K(Y_K(n)) \overset{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^{K}\xi_i\left(\mathbb{1}_{i\notin O_0^n} - \mathbb{1}_{i\in O_0^n}\right)$$

where $O_i^j \overset{def}{=} \{k\in[K] : |\{i<l\le j : U_l^{(K)} = k\}|$ is odd$\}$.

Proof. We use the simple fact that for all integer $n \ge 0$:

$$f_K(Y_K(n+1)) = f_K(Y_K(n)) - 2Y_K^{(U_n^{(K)})}(n).$$

By induction we get that :

$$f_K(Y_K(n)) = f_K(Y_K(0)) - 2\sum_{i=1}^{K} Y_K^{(i)}(0)\mathbb{1}_{\epsilon_i(n)\text{ odd}} = \sum_{i=1}^{K}(-1)^{\epsilon_i(n)}Y_K^{(i)}(0)$$

with $\epsilon_i(n) \overset{def}{=} |\{U_k^{(K)} = i : k\in[\![0,n-1]\!]\}|$. Since only the oddness of $\epsilon_i(n)$ impacts the value of $f_K(Y_K(n))$, we get the expected result by denoting ξ_i the value of $Y_K^{(i)}(0)$. □

Now that we made the $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ appear in the value of $X_{n,K}(\mathbf{t}_n)$, we want to construct a suitable partition to get the equation (4.2).

Since we are only interested in the coordinates which have been drawn an odd number of times between $\lfloor nt_{i-1}(n)\rfloor$ and $\lfloor nt_i(n)\rfloor$, we define the following sets :

$$\forall\ J\subset[s],\ B(J) \overset{def}{=} \left(\bigcap_{k\in J} O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor}\right)\bigcap\left(\bigcap_{k\notin J}\left(O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor}\right)^c\right) \tag{4.3}$$

(with the convention $t_0(n) = 0$). In order to lighten the notations, we will write for every $k\in[s]$:

$$O_k(J) \overset{def}{=} \begin{cases} O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor} & \text{if } k\in J, \\ \left(O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor}\right)^c & \text{else.}\end{cases}$$

Thus with this new notation we have :

$$B(J) = \bigcap_{k=1}^{s} O_k(J).$$

In fact, if we cut the integer interval $[\![1, \lfloor nt_s(n) \rfloor]\!]$ into the s intervals of the form $[\![\lfloor nt_{i-1}(n) \rfloor + 1, \lfloor nt_i(n) \rfloor]\!]$, then the set $B(J)$ contains all coordinates which have been drawn an odd number of times on the j-th interval for all $j \in J$ and an even number of times on the j-th interval for all $j \notin J$.

For example, $B(\varnothing)$ is the set of coordinates which have been drawn an even number of times on each $[\![\lfloor nt_{i-1}(n) \rfloor + 1, \lfloor nt_i(n) \rfloor]\!]$.

By construction, one can see that $\{B(J) : J \subset [s]\}$ is a partition of $[K]$. Moreover we can see every set $O_0^{\lfloor nt_k(n) \rfloor}$ for $k \in [s]$ as a (disjoint) union of some $B(J)$, since the coordinates who have been drawn an odd number of times between 0 and $\lfloor nt_k(n) \rfloor$ are the ones who have been drawn an odd number of times in an odd number of intervals preceding $\lfloor nt_k(n) \rfloor$, i.e. :

$$O_0^{\lfloor nt_j(n) \rfloor} = \bigsqcup_{\substack{J \subset [s] \\ |J \cap [j]| \text{ odd}}} B(J). \tag{4.4}$$

Combining (4.4) with the Proposition 4.4.1, we get the following :

$$\begin{aligned} X_{n,K}(\mathbf{t}_n) &\overset{\mathcal{D}}{=} \left(\sum_{i \in [K]} \left(\mathbb{1}_{i \notin O_0^{\lfloor nt_j(n) \rfloor}} - \mathbb{1}_{i \in O_0^{\lfloor nt_j(n) \rfloor}} \right) \xi_i \right)_{j \in [s]} \\ &= \left(\sum_{J \subset [s]} (-1)^{|J \cap [j]|} \sum_{i \in B(J)} \xi_i \right)_{j \in [s]}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

We now state a lemma (whose proof is in appendix), which is an ersatz of Donsker's Theorem with converging random time vectors :

Lemma 4.4.1. *Let $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ be i.i.d. Rademacher random variables and $(\mathbf{t}_K)_{K \geq 1}$ a sequence of random vectors in $(\mathbb{R}_+)^k$ independent from $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Define for all $K \geq 1$ and $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$:*

$$T_K(\mathbf{s}) = \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{\lfloor Ks_j \rfloor} \xi_i \right)_{j \in [k]}.$$

If there exists a deterministic $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ such that $\mathbf{t}_K \xrightarrow[K \to \infty]{\mathbb{P}} \mathbf{t}$, then :

$$T_K(\mathbf{t}_K) \xrightarrow[K \to \infty]{\mathcal{D}} \left(W_{t_j} \right)_{j \in [k]}$$

where $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ denotes a standard Brownian motion starting from 0.

In order to apply the Lemma 4.4.1, we need to reorder the ξ_i but also to prove that all the $\frac{|B(J)|}{K}$ converge to some constants.

Lemma 4.4.2. *Whatever the choices of $s \geq 1$, under the assumption (4.1) we get :*

$$\forall\ J \subset [s],\ \frac{|B(J)|}{K} \xrightarrow[\substack{n,K \to \infty \\ n/K \to \infty}]{\mathbb{L}^2} \frac{1}{2^s}.$$

Proof. We aim to compute the first two moments of $\frac{|B(J)|}{K}$ and show they converge to 2^{-s} and 0 respectively. First we use the fact that the coordinates are exchangeable, namely :

$$\forall\ i \in [K],\ \mathbb{P}(i \in O_k(J)) = \mathbb{P}(1 \in O_k(J)) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(j \in O_k(J)). \tag{4.6}$$

Then, since the sets $(O_k(J))_{k \in [s]}$ are independent, we get :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|B(J)|\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K} \prod_{k=1}^{s} \mathbb{1}_{i \in O_k(J)} \right] = \sum_{i=1}^{K} \prod_{k=1}^{s} \mathbb{P}(i \in O_k(J)) \\ &= \sum_{i=1}^{K} \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(j \in O_k(J)) = \frac{1}{K^{s-1}} \prod_{k=1}^{s} \mathbb{E}\left[|O_k(J)|\right] \end{aligned}$$

In particular :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right] = \prod_{k=1}^{s} \mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K}\right]. \tag{4.7}$$

Next we use the Lemma 4.4.3 (statement and proof some pages ahead) to get :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K}\right] \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Then :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right] \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

Now we compute the variance using (4.6) and (4.7) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{|B(J)|}{K}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{K^2}\sum_{1\le i,j\le K} \mathbb{1}_{i\in B(J)}\mathbb{1}_{j\in B(J)}\right] - \left(\frac{1}{2^s}\right)^2 \\
&= \frac{1}{K^2}\sum_{1\le i,j\le K}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{P}(i\in O_k(J), j\in O_k(J)) \\
&= \frac{1}{K^2}\sum_{1\le i\le K}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{P}(1\in O_k(J)) \\
&\quad + \frac{1}{K^2}\sum_{\substack{1\le i,j\le K \\ i\neq j}}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{P}(1\in O_k(J), 2\in O_k(J)) \quad - 4^{-s} \\
&= \frac{1}{K}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K}\right] \\
&\quad + \frac{K-1}{K}\prod_{k=1}^{s}\frac{1}{K(K-1)}\sum_{\substack{1\le i,j\le K \\ i\neq j}}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{i\in O_k(J)}\mathbb{1}_{j\in O_k(J)}\right] \quad - 4^{-s} \\
&= \frac{1}{K}\mathbb{E}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right] \quad + \quad \frac{K-1}{K}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|(|O_k(J)|-1)}{K(K-1)}\right] - \frac{1}{4^s}.
\end{aligned}$$

The first term obviously tends to 0, so we just have to rewrite the second one in a more suitable way :

$$\begin{aligned}
&\frac{K-1}{K}\prod_{k=1}^{s}\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|(|O_k(J)|-1)}{K(K-1)}\right] = \\
&\qquad \frac{K-1}{K}\prod_{k=1}^{s}\frac{K}{K-1}\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{|O_k(J)|}{K}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K^2}\right]\right).
\end{aligned}$$

Using the Lemma 4.4.3, we get for every $k\in[s]$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K^2}\right] \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} 0, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\frac{|O_k(J)|}{K}\right)^2\right] \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

$$\text{and finally } \mathbb{V}\left[\frac{|B(J)|}{K}\right] \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} 0 + \frac{1}{4^s} - \frac{1}{4^s} = 0.$$

□

Lemma 4.4.3. *For every $J\subset[s]$ and $k\in[s]$ we have the following convergence :*

$$\frac{|O_k(J)|}{K} \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\overset{\mathbb{L}^2}{\longrightarrow}} \frac{1}{2}.$$

Proof. It's easy to check that $\left|O_i^j\right| \overset{\mathcal{D}}{=} E_K(j-i)$ where $(E_K(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a K-Ehrenfest's urn starting from 0.

Then we can use the moments of Ehrenfest's urn to get the convergence (see for instance [1] for computations of the first two moments of Ehrenfest's urn). Setting $\Delta_k(n) \overset{def}{=} \lfloor nt_k(n)\rfloor - \lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor$ we have :

$$\mathbb{E}\left[O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor}\right] = \frac{K}{2}\left(1-(1-\frac{2}{K})^{\Delta_k(n)}\right) = K - \mathbb{E}\left[\left(O_{\lfloor nt_{k-1}(n)\rfloor}^{\lfloor nt_k(n)\rfloor}\right)^c\right] \tag{4.8}$$

and then in whichever cases ($k\in J$ or $k\notin J$) we get :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{|O_k(J)|}{K}\right] &= \frac{1}{2}\left(1\pm(1-\frac{2}{K})^{\Delta_k(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(1\pm\exp\left(\Delta_k(n)\ln(1-\frac{2}{K})\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1\pm\exp\left(\Delta_k(n)(-\frac{2}{K}+O(K^{-2}))\right)\right) \underset{\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

since we assumed $\frac{\Delta_k(n)}{K} \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ in (4.1). And for the variance (which is the same in both cases) :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[\frac{|O_k(J)|}{K}\right] &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{K}+\frac{K-1}{K}(1-\frac{4}{K})^{\Delta_k(n)}-(1-\frac{2}{K})^{2\Delta_k(n)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{K}+\frac{K-1}{K}\exp\left(-4\frac{\Delta_k(n)}{K}+O\left(\frac{\Delta_k(n)}{K^2}\right)\right)\right.\\ &\qquad\left.-\exp\left(-4\frac{\Delta_k(n)}{K}+O\left(\frac{\Delta_k(n)}{K^2}\right)\right)\right)\\ &= \frac{1}{4K}\left(1-\exp\left(-4\frac{\Delta_k(n)}{K}+O\left(\frac{\Delta_k(n)}{K^2}\right)\right)\right) \underset{\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to\infty}}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

□

With the Lemmas 4.4.1 and 4.4.2 we get the following convergence :

Proposition 4.4.2.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i\in B(J)}\xi_i\right)_{J\subset[s]} \underset{\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to\infty}}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \left(G_J^{(s)}\right)_{J\subset[s]}$$

where $\left(G_J^{(s)}\right)_{J\subset[s]}$ *denotes an i.i.d. collection of Gaussian random variables* $\mathcal{N}(0,2^{-s})$.

Proof. Let's write $\{J\subset[s]\} = \{J_1, J_2, \dots, J_{2^s}\}$ and set $S_k \overset{def}{=} \sum_{i=1}^k |B(J_i)|$. By reordering the ξ_i, we get :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i\in B(J)}\xi_i\right)_{J\subset[s]} \overset{\mathcal{D}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=S_{k-1}}^{S_k-1}\xi_i\right)_{k\in[2^s]}.$$

We can use the Lemma 4.4.2 to show the following convergence :

$$\left(\frac{S_k}{K}\right)_{k\in[2^s]} \underset{\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to\infty}}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} \left(\frac{k}{2^s}\right)_{k\in[2^s]}.$$

Since $(S_k)_{k\in[2^s]}$ and $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ are independent, the Lemma 4.4.1 states :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{i=S_k}^{S_{k+1}}\xi_i\right)_{k\in[2^s]} \underset{\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to\infty}}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \left(W_{\frac{k+1}{2^s}}-W_{\frac{k}{2^s}}\right)_{k\in[2^s]}$$

where $(W_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion starting from 0. We can conclude thanks to the following :

$$\left(W_{\frac{k+1}{2^s}}-W_{\frac{k}{2^s}}\right)_{k\in[2^s]} \overset{\mathcal{D}}{=} \left(G_J^{(s)}\right)_{J\subset[s]}.$$

□

We finally get the convergence of the rescaled finite dimensions laws of the processes $X_{n,K}$ under the fast regime :

Theorem 4.4.1. *Under the assumption (4.1) we have :*

$$\frac{X_{n,K}(\mathbf{t}_n)}{\sqrt{K}} \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (G_j)_{1\le j\le s}$$

where $(G_j)_{1\le j\le s}$ are i.i.d. Gaussian random variables $\mathcal{N}(0,1)$.

Proof. Using Proposition 4.4.2 we know that the limit is a centered Gaussian vector, so we just need to compute its covariance, namely $cov(G_i, G_j)$ for all $1 \le i, j \le s$. In the case $i < j$, using (4.5) with $\mathbf{t}'_n = (t_i(n), t_j(n))$ we get

$$\begin{aligned} cov(G_i, G_j) &= cov\left(\sum_{J\subset[2]} (-1)^{|J\cap[1]|} G_J^{(2)}, \sum_{J\subset[2]} (-1)^{|J\cap[2]|} G_J^{(2)}\right) \\ &= cov(G_\varnothing^{(2)} - G_{\{1\}}^{(2)} + G_{\{2\}}^{(2)} - G_{\{1,2\}}^{(2)}, G_\varnothing^{(2)} - G_{\{1\}}^{(2)} - G_{\{2\}}^{(2)} + G_{\{1,2\}}^{(2)}) \\ &= \mathbb{V}[G_\varnothing^{(2)}] + \mathbb{V}[G_{\{1\}}^{(2)}] - \mathbb{V}[G_{\{2\}}^{(2)}] - \mathbb{V}[G_{\{1,2\}}^{(2)}] = 0. \end{aligned}$$

For the variance, just consider $s = 1$ and we have for any j :

$$\mathbb{V}[G_j] = \mathbb{V}\left[\sum_{J\subset[1]} (-1)^{|J\cap[1]|} G_J^{(1)}\right] = \mathbb{V}[G_\varnothing^{(1)} - G_{\{1\}}^{(1)}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Then $(G_j)_{1\le j\le s}$ is a centered Gaussian vector whose covariance is given by :

$$cov(G_i, G_j) = \mathbb{1}_{i=j}$$

which characterizes the standard normal random vector, i.e. a random vector whose marginals are i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ random variables. □

Corollary 4.4.1.

$$\left(\frac{X_{n,K}(t)}{\sqrt{K}}\right)_{t\ge 0} \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to\infty}}{\overset{f.d.l.}{\longrightarrow}} (G_t)_{t\ge 0}$$

where $(G_t)_{t\ge 0}$ is an i.i.d. collection of Gaussian random variables $\mathcal{N}(0,1)$.

Proof. Any constant vector $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s)$ such that $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_s$ fulfills the assumption (4.1), and thus we can apply the previous Theorem. □

We could try to prove the results in the fast regime by dilating time in the intermediate one, but the fact that the dilation goes to infinity rises many technical issues. That is why we use another way to reach the asymptotic behavior in the fast regime.

4.5 Slow regime

Now we consider the slow regime, i.e. the case where $\frac{n}{K} \to 0$. This condition on the asymptotic of $\frac{n}{K}$ raises the following issue : if $Y_K(0)$ is distributed under the invariant law, $\mathbb{V}[X_{n,K}(0)] = K$ while $\mathbb{V}[X_{n,K}(t) - X_{n,K}(0)]$ is roughly nt. Then either we set $c_{n,K} = \sqrt{K}$ and the limit process is constant, or we consider $c_{n,K} = \sqrt{n}$ and the law of $\frac{X_{n,K}(0)}{c_{n,K}}$ diverges as n and K tend to infinity.

We will consider the second option, and then set $Z_{n,K}(t) = n^{-\frac{1}{2}} X_{n,K}(t)$. If $n^{-\frac{1}{2}} X_{n,K}(0)$ converges in law we can apply the Theorem 1, but it doesn't include the case when $Y_K(0)$ is distributed under the invariant law.

We will then consider a wider class of initial laws, but in order to get rid of the "diverging initial value" problem we will focus on the increments of the processes, namely we set :

$$\Delta Z_{n,K}(t) \overset{def}{=} Z_{n,K}(t) - Z_{n,K}(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(X_{n,K}(t) - X_{n,K}(0)\right).$$

Theorem 4.5.1. *If the sequence μ_K is such that $\frac{\sqrt{n}}{K} X_{n,K}(0) \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to 0}}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0$, then :*

$$(\Delta Z_{n,K}(t))_{t\geq 0} \underset{\substack{n,K\to\infty \\ n/K\to 0}}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} (2W_t)_{t\geq 0}$$

where $(W_t)_{t\geq 0}$ denotes a standard Brownian motion starting from 0.

Proof. The Proposition 4.3.1 can no longer be used since the processes $\Delta Z_{n,K}$ are not Markovian. We need a more general result, namely the Theorem 4.1 from [8].

To apply this theorem, we need to find two sequences of random processes A_n and B_n such that $M_n(t) \overset{def}{=} \Delta Z_{n,K}(t) - B_n(t)$ and $M_n^2(t) - A_n(t)$ are $(\mathcal{F}_t^n)$-local martingales, with $\mathcal{F}_t^n = \sigma(\Delta Z_{n,K}(s), A_n(s), B_n(s) : s \leq t)$.

Let $\tilde{\mathcal{F}}_t^n = \sigma(X_{n,K}(s) : s \leq t)$. If we note $\nabla X_{n,K}(i) \overset{def}{=} X_{n,K}\left(\frac{i+1}{n}\right) - X_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right)$ we get for any integer $i \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\nabla X_{n,K}(i) | \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] &= \mathbb{E}\left[f_K(Y_K(i+1)) - f_K(Y_K(i)) | \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K Y_K^{(k)}(i+1) - \sum_{k=1}^K Y_K^{(k)}(i) \middle| Y_K(i)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[-2Y_K^{(j)}(i) \middle| Y_K(i)\right] = -2\sum_{k=1}^K \frac{Y_K^{(k)}(i)}{K} \\
&= -\frac{2}{K} X_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right)
\end{aligned}$$

where j denotes the changing coordinate between $Y_K(i)$ and $Y_K(i+1)$. Similarly we set $\nabla Z_{n,K}(i) \overset{def}{=} \Delta Z_{n,K}\left(\frac{i+1}{n}\right) - \Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right)$ and then :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\nabla Z_{n,K}(i) | \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\left[\nabla X_{n,K}(i) \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{-2}{K} X_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= -\frac{2}{K}\left(\Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{X_{n,K}(0)}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

So if we set :

$$\begin{aligned}
B_n(t) &\overset{def}{=} \sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor - 1} \mathbb{E}\left[\nabla Z_{n,K}(i) | \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] = -\frac{2}{K} \sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor - 1}\left(\Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{X_{n,K}(0)}{\sqrt{n}}\right) \\
A_n(t) &\overset{def}{=} \sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor - 1}\left(\mathbb{E}\left[(\nabla Z_{n,K}(i))^2 \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right] - \mathbb{E}\left[\nabla Z_{n,K}(i) | \tilde{\mathcal{F}}_{i/n}^n\right]^2\right) \\
&= 4\frac{\lfloor nt\rfloor}{n} - \frac{4}{K^2} \sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor - 1}\left(\Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{X_{n,K}(0)}{\sqrt{n}}\right)^2
\end{aligned}$$

then the processes $M_n(t)$ and $M_n^2(t) - A_n(t)$ will be $(\tilde{\mathcal{F}}_t^n)$-martingales, and then $(\mathcal{F}_t^N)$-martingales (since they are $(\mathcal{F}_t^N)$-adapted).

We now just have to check the technical requirements of the Theorem from [8] :

Proposition 4.5.1. *For all $T, r > 0$, if $\tau_n^r = \inf\{t : |\Delta Z_{n,K}(t)| \geq r\}$ we have :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0<t\leq T\wedge\tau_n^r}\left|\Delta Z_{n,K}(t) - \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta Z_{n,K}(t-\varepsilon)\right|^2\right] &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0<t\leq T\wedge\tau_n^r}\left|B_n(t) - \lim_{\varepsilon\to 0} B_n(t-\varepsilon)\right|^2\right] &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\
\mathbb{E}\left[\sup_{0<t\leq T\wedge\tau_n^r}\left|A_n(t) - \lim_{\varepsilon\to 0} A_n(t-\varepsilon)\right|\right] &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\
\sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r} |B_n(t)| \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0 \text{ and } \sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r} |A_n(t) - 4t| &\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0.
\end{aligned}$$

Proof. The first convergence is obvious since the jumps of $\Delta Z_{n,K}$ are bounded by $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Then we deal with the jumps of the compensator B_n :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0<t\leq T\wedge\tau_n^r}\left|B_n(t)-\lim_{\varepsilon\to 0}B_n(t-\varepsilon)\right|^2\right]\\
&\qquad=\mathbb{E}\left[\sup_{\frac{i}{n}\leq T\wedge\tau_n^r}\left|-\frac{2}{K}\left(\Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{X_{n,K}(0)}{\sqrt{n}}\right)\right|^2\right]\\
&\qquad\leq\mathbb{E}\left[\sup_{\frac{i}{n}\leq T\wedge\tau_n^r}4\left(\left(\frac{\Delta Z_{n,K}(i/n)}{K}\right)^2+\left(\frac{X_{n,K}(0)}{K\sqrt{n}}\right)^2\right)\right]\\
&\qquad\leq 4\left(\left(\frac{r}{K}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

which obviously tends to 0. The same kind of computations applied to A_n ensure the third convergence.

The trickiest assumptions in this proposition are the two last ones, namely :

$$\sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r}|B_n(t)|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0 \text{ and } \sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r}|A_n(t)-4t|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$

With a good use of the stopping times T and τ_n^r we get the following bound :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r}|B_n(t)|&=\sup_{t\leq T\wedge\tau_n^r}\left|-\frac{2}{K}\left(\frac{\lfloor nt\rfloor X_{n,K}(0)}{\sqrt{n}}+\sum_{i=0}^{\lfloor nt\rfloor-1}\Delta Z_{n,K}\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right|\\
&\leq\frac{2\lfloor nT\rfloor}{K\sqrt{n}}|X_{n,K}(0)|+\frac{2\lfloor nT\rfloor r}{K}
\end{aligned}$$

where the second term tends to 0 in this regime. Since we assumed :

$$\frac{\sqrt{n}}{K}X_{n,K}(0)\xrightarrow[\substack{n,K\to\infty\\ n/K\to 0}]{\mathbb{P}}0$$

then the supremum of $|B_n|$ converges to 0 in probability.

The last convergence may be proven exactly the same way. □

Then we fulfilled the assumptions of the Theorem 4.1 from [8], which prove that the processes $\Delta Z_{n,K}$ converge in distribution to a diffusion $(X_t)_{t\geq 0}$ such that $X_0=0$ a.s. and $dX_t=0dt+2dW_t$. We easily conclude that :

$$(\Delta Z_{n,K}(t))_{t\geq 0}\xrightarrow[n,K\to\infty]{\mathcal{D}}(2W_t)_{t\geq 0}.$$

□

The Theorem 4.5.1 describes correctly the increments of the processes $Z_{n,K}$ (especially in the stationary case), but does not help to approximate the processes themselves, since we lose the information of the initial value. In fact, if $Y_K(0)$ is uniform on V_K the processes $Z_{n,K}$ tend to behave like a "stationary Brownian motion", which starts from its invariant measure aka the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Obviously this is no longer a stochastic process, this is why we cannot use a convergence in distribution, but instead we will prove a vague convergence of the finite-dimensional laws of our processes :

Theorem 4.5.2. *If μ_K is the uniform law on V_K, then for any $0\leq t_1<\cdots<t_s$ and for every smooth compactly supported function $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^s,\mathbb{R})$ we have the following convergence :*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi\frac{K}{n}}\times\mathbb{E}\left[\varphi\left(Z_{n,K}(t_1),\Delta Z_{n,K}(t_2),\ldots,\Delta Z_{n,K}(t_s)\right)\right]\\
&\qquad\xrightarrow[n,K\to\infty]{}\int_{\mathbb{R}^s}\mathbb{E}\left[\varphi\left(x,2W_{t_2},\ldots,2W_{t_s}\right)\right]dx
\end{aligned}$$

where $(W_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion starting from 0.

Proof. Since the processes $Z_{n,K}$ are temporally stationnary we can assume that $t_1 = 0$. We will write $\varphi(Z_{n,K}) \overset{def}{=} \varphi\left(Z_{n,K}(0), \Delta Z_{n,K}(t_2), \ldots, \Delta Z_{n,K}(t_s)\right)$ to lighten the notations, and consider the following consequence of Theorem 4.3.1 from the intermediate regime :

Corollary 4.5.1. *Let $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a deterministic sequence such that $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ for some $x \in \mathbb{R}$. Then under the slow regime we get :*

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = x_n\right] \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\varphi\left(x, 2W_{t_2}, \ldots, 2W_{t_s}\right)\right].$$

Proof. We apply the Theorem 4.3.1 with $c_{n,K} = n^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda = 0$ and $Z_{n,K}(0) \overset{a.s.}{=} x_n$. Then the limit process is just $(2W_t + x)_{t\geq 0}$ where W is a standard Brownian motion starting from 0. □

Then we can write the following :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2\pi\frac{K}{n}} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K})\right] = \mathbb{E}\left[\sqrt{2\pi\frac{K}{n}} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0)\right]\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi\frac{K}{n}} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{k}{\sqrt{n}}\right] \times \mathbb{P}\left(Z_{n,K}(0) = \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi K} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] \times \mathbb{P}\left(Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right) dx.
\end{aligned}$$

We will need the following result (which is a consequence of De Moivre-Laplace Theorem, see for instance [10]) to replace the probability in the previous line by a "Gaussian equivalent" :

Theorem 4.5.3. *If $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is an i.i.d. sequence of Rademacher random variables, then for every $N \geq 1$:*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \sqrt{N} \times \left|\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i = m\right) - \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{m^2}{2N}} \mathbb{1}_{m\equiv N[2]}\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

where $x \equiv y[2]$ means that the integers x and y have same parity.

In our case we would get :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{K} \times \left|\mathbb{P}\left(Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2}{\sqrt{2\pi K}} e^{-\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor^2}{2K}} \mathbb{1}_{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\equiv K[2]}\right| \underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Using the fact that φ is compactly supported, there exists some compact set C_0 such that $x \notin C_0 \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] = 0$. Then we have :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi K} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] \times \mathbb{P}\left(Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right) dx\right. \\
&\qquad \left. - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] 2e^{-\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor^2}{2K}} \mathbb{1}_{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\equiv K[2]} dx\right| \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi K} \left|\mathbb{P}\left(Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{2}{\sqrt{2\pi K}} e^{-\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor^2}{2K}} \mathbb{1}_{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\equiv K[2]}\right| \mathbb{1}_{x\in C_0} dx
\end{aligned}$$

which tends to 0 as n and K tend to infinity.

The next step is to get rid of the "same parity indicator", but the reader can easily check that the error term we get by turning $\mathbb{1}_{\lfloor nx\rfloor\equiv K[2]}$ into $\frac{1}{2}$ will also vanish as n and K go to infinity (thanks to the uniform continuity of φ and the compactness of C_0).

Then :

$$\left|\sqrt{2\pi\frac{K}{n}} \times \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K})\right] - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K}) | Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] e^{-\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor^2}{2K}} dx\right|$$
$$\underset{n,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

The result of Theorem 4.5.2 follows from dominated convergence since in the slow regime :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z_{n,K})|\, Z_{n,K}(0) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}\right] \underset{n,K\to\infty}{\overset{\forall x\in\mathbb{R}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}\left[\varphi\left(x, 2W_{t_2}, \ldots, 2W_{t_s}\right)\right],$$

$$e^{-\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor^2}{2K}} \underset{n,K\to\infty}{\overset{\forall x\in\mathbb{R}}{\longrightarrow}} 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} \|\varphi\|_\infty \mathbb{1}_{x\in C_0}\, dx < +\infty.$$

□

4.A Appendix 1 : Proof of Lemma 4.4.1

Recall the Lemma 4.4.1 which comes from the "Fast regime" section :

Lemma. *Let $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ be i.i.d. Rademacher random variables and $(\mathbf{t}_K)_{K\geq 1}$ a sequence of random vectors in $(\mathbb{R}_+)^k$ independent from $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Define for all $K \geq 1$ and $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$:*

$$T_K(\mathbf{s}) = \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{\lfloor K s_j\rfloor} \xi_i\right)_{j\in[k]}.$$

If there exists a deterministic $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in (\mathbb{R}_+)^k$ such that $\mathbf{t}_K \underset{K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} \mathbf{t}$, then :

$$T_K(\mathbf{t}_K) \underset{K\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} \left(W_{t_j}\right)_{j\in[k]}$$

where $(W_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ denotes a standard Brownian motion starting from 0.

For all $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ we will consider the following norm :

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_{i\in[k]} |x_i|.$$

For the sake of simplicity we will set $\mathbb{R}_+^k \overset{def}{=} (\mathbb{R}_+)^k$, and for every $\mathbb{R}^k$-valued process $(X_t)_{t\geq 0}$ and $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$ we will note $X_{\mathbf{t}} \overset{def}{=} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$.

In order to prove the Lemma 4.4.1, we will use several times the following result :

Lemma 4.A.1. *Let $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ be a standard Brownian motion starting from 0. Then for all $\varepsilon > 0$ and $d > 0$ there exists $\delta > 0$ such that :*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(\|W_{\mathbf{x}} - W_{\mathbf{y}}\| > d) < \varepsilon.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|W_{\mathbf{x}} - W_{\mathbf{y}}\| > d) &= \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq i\leq k} |W_{x_i} - W_{y_i}| > d\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(|W_{x_i} - W_{y_i}| > d) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(|N_i| > d)
\end{aligned}$$

where N_i is a $\mathcal{N}(0, |x_i - y_i|)$ random variable. One can easily find a suitable $\delta > 0$ such that :

$$|x_i - y_i| \leq \delta \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(|N_i| > d) < \frac{\varepsilon}{k}$$

and get the result using the fact that $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta \Rightarrow |x_i - y_i| \leq \delta$ for all $i \in [k]$. □

Let's get back to the main proof. Assuming the premises of Lemma 4.4.1, we want to prove that for every function $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ bounded and uniformly continuous we have :

$$\mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{t}_K))] \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(W_{\mathbf{t}})].$$

Let $\varepsilon > 0$. For all $\delta > 0$ we have :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{t}_K))] - \mathbb{E}[f(W_{\mathbf{t}})]| &\leq |\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|>\delta}]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|\mathbf{t}_K - \mathbf{t}\| > \delta) \\ &\quad + |\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]|.\end{aligned}$$

Since $\mathbf{t}_K \underset{K\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} \mathbf{t}$ then $\forall\ \delta > 0$ there exists $N_1(\varepsilon,\delta) \in \mathbb{N}$ such that for every $K \geq N_1(\varepsilon,\delta)$ we have :

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{t}_K - \mathbf{t}\| > \delta) \leq \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty}. \tag{4.9}$$

Now we split the other term in two parts (which will be dominated separately) :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \leq &|\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}_K}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \\ &+ |\mathbb{E}[(f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]|.\end{aligned}$$

Let's define the functions φ_K and φ by :

$$\varphi_K(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{s}))] \text{ and } \varphi(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[f(W_{\mathbf{s}})] \text{ for } \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^k.$$

Proposition 4.A.1. *The functions $(\varphi_K)_{K\geq 1}$ converge uniformly on every compact of $\mathbb{R}_+^k$ to the function K.*

Proof. We already know via the Donsker's theorem that the sequence $(\varphi_K)_{K\geq 1}$ converges pointwise to φ (see for instance [12]).

Let $S \subset \mathbb{R}_+^k$ compact, for all $\delta > 0$ there exists a finite subset $\mathcal{M} \subset S$ such that :

$$\forall\ \mathbf{x} \in S\ \exists\ \mathbf{y} \in \mathcal{M} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta.$$

Let $\varepsilon > 0$ and $\mathbf{t} \in S$, and choose $\mathbf{s} \in \mathcal{M}$ such that $\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\| \leq \delta$. We then get :

$$|\varphi_K(\mathbf{t}) - \varphi(\mathbf{t})| \leq |\varphi_K(\mathbf{t}) - \varphi_K(\mathbf{s})| + |\varphi_K(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{s})| + |\varphi(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{t})|. \tag{4.10}$$

Let's dominate the first term. The function f being uniformly continuous, there exists $d > 0$ such that $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/6$. Then we get :

$$\begin{aligned}|\varphi_K(\mathbf{t}) - \varphi_K(\mathbf{s})| &\leq \mathbb{E}[|f(T_K(\mathbf{t})) - f(T_K(\mathbf{s}))|] \\ &= \mathbb{E}[|f(T_K(\mathbf{t})) - f(T_K(\mathbf{s}))|\mathbb{1}_{\|T_K(\mathbf{t})-T_K(\mathbf{s})\|\leq d}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|f(T_K(\mathbf{t})) - f(T_K(\mathbf{s}))|\mathbb{1}_{\|T_K(\mathbf{t})-T_K(\mathbf{s})\|>d}] \\ &\leq \frac{\epsilon}{6}\mathbb{P}(\|T_K(\mathbf{t}) - T_K(\mathbf{s})\| \leq d) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|T_K(\mathbf{t}) - T_K(\mathbf{s})\| > d).\end{aligned}$$

But we can see in the proof of the Theorem 4.20 (p70) from [12] that $\forall\ c > 0$ et $\forall\ D > 0$:

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\max_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ 0\leq x,y\leq D}} |T_K(x) - T_K(y)| > c\right) = 0.$$

So there exists some $\delta_1(\varepsilon, d) > 0$ such that $\forall\ \delta \leq \delta_1(\varepsilon, d)$:

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\max_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ 0\leq x,y\leq D}} |T_K(x) - T_K(y)| > d\right) \leq \frac{\varepsilon}{12\|f\|_\infty k}$$

and then, setting $D(S) \overset{def}{=} \sup_{\mathbf{z}\in S}\|\mathbf{z}\|$, if we choose δ smaller than $\delta_1(\varepsilon, d)$ we have $\forall\ K \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|T_K(\mathbf{t}) - T_K(\mathbf{s})\| > d) &\leq k \times \mathbb{P}\left(\max_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ 0\leq x,y\leq D(S)}} |T_K(x) - T_K(y)| > d\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon k}{12\|f\|_\infty k} = \frac{\varepsilon}{12\|f\|_\infty}.\end{aligned}$$

We finally get :

$$\begin{aligned}|\varphi_K(\mathbf{t}) - \varphi_K(\mathbf{s})| &\leq \frac{\epsilon}{6}\mathbb{P}(\|T_K(\mathbf{t}) - T_K(\mathbf{s})\| \leq d) \\ &\quad + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|T_K(\mathbf{t}) - T_K(\mathbf{s})\| > d) \\ &\leq \frac{\epsilon}{6} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{12\|f\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Let's deal with the second term in (4.10), namely $|\varphi_K(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{s})|$. Since φ_K converges pointwise to φ, for every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$ there exists $N_{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ such that :

$$K \geq N_{\mathbf{x}}(\varepsilon) \Longrightarrow |\varphi_K(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

We just have to take K greater than $N(\varepsilon, \delta) \overset{def}{=} \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{M}} N_{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ to get :

$$|\varphi_K(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{s})| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

For the third term in (4.10), we use again the uniform continuity of f to get the following :

$$\begin{aligned}|\varphi(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{t})| &\leq \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{s}}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{s}}-W_{\mathbf{t}}\|\leq d}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{s}}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{s}}-W_{\mathbf{t}}\|>d}] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6}\mathbb{P}(\|W_{\mathbf{s}} - W_{\mathbf{t}}\| \leq d) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|W_{\mathbf{s}} - W_{\mathbf{t}}\| > d).\end{aligned}$$

Using the Lemma 4.A.1, we find that $\exists\ \delta_2(\varepsilon, d)$ such that :

$$\delta \leq \delta_2(\varepsilon, d) \Longrightarrow \mathbb{P}(\|W_{\mathbf{s}} - W_{\mathbf{t}}\| > d) < \frac{\varepsilon}{12\|f\|_\infty}.$$

We then have :

$$\begin{aligned}|\varphi(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{t})| &\leq \frac{\varepsilon}{6}\mathbb{P}(\|W_{\mathbf{s}} - W_{\mathbf{t}}\| \leq d) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|W_{\mathbf{s}} - W_{\mathbf{t}}\| > d) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{12\|f\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Grouping all these results in (4.10), we get that if $\delta \leq \min(\delta_1(\varepsilon, d), \delta(\varepsilon, d))$ then $\forall\ K \geq N(\varepsilon, \delta)$ we have :

$$\sup_{\mathbf{t}\in S} |\varphi_K(\mathbf{t}) - \varphi(\mathbf{t})| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Using the previous Proposition we get that for every S compact subset of $\mathbb{R}_+^k$ there exists $N(\varepsilon, S)$ such that $\forall\ \mathbf{s} \in S$ and $\forall\ K \geq N(\varepsilon, S)$:

$$|\varphi_K(\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{s})| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Using the independence of the $(\mathbf{t}_K)_K$ and the $(\xi_i)_i$ we can write that :

$$\mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{t}_K))] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{t}_K))|\mathbf{t}_K]] = \mathbb{E}[\varphi_K(\mathbf{t}_K)].$$

Then, since the ball of radius δ centered on $\mathbf{t}$ is compact, there exists an integer $N_2(\varepsilon,\delta) \overset{def}{=} N(\varepsilon, B(\mathbf{t},\delta))$ such that for all $K \geq N_2(\varepsilon,\delta)$ we have :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}_K}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| &= |\mathbb{E}[\mathbb{E}[(f(T_K(\mathbf{t}_K)) \\
&\qquad - f(W_{\mathbf{t}_K}))|\mathbf{t}_K]\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \\
&= |\mathbb{E}[(\varphi_K(\mathbf{t}_K) - \varphi(\mathbf{t}_K))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \\
&\leq \mathbb{E}[|\varphi_K(\mathbf{t}_K) - \varphi(\mathbf{t}_K)|\mathbb{1}_{\mathbf{t}_K\in B(\mathbf{t},\delta)}] \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4}\mathbb{P}(\mathbf{t}_K \in B(\mathbf{t},\delta)) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Now we have to dominate $|\mathbb{E}[(f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]|$. Using the uniform continuity of f we know there exists some $d > 0$ such that :

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq d \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

We then have :

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[(f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}}))\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}]| \\
&\qquad \leq \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{t}_K}-W_{\mathbf{t}}\|\leq d}] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{t}_K}-W_{\mathbf{t}}\|>d}] \\
&\qquad \leq \frac{\varepsilon}{4}\mathbb{P}(\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\| \leq \delta, \|W_{\mathbf{t}_K} - W_{\mathbf{t}}\| \leq d) \\
&\qquad\qquad + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\| \leq \delta, \|W_{\mathbf{t}_K} - W_{\mathbf{t}}\| > d). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Using the Lemma 4.A.1, for all $d > 0$ there exists $\delta(\varepsilon,d) > 0$ small enough such that the following holds :

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\| \leq \delta, \|W_{\mathbf{t}_K} - W_{\mathbf{t}}\| > d) \leq \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty}. \qquad (4.13)$$

In a nutshell if we sum up all the previous step, we find that for every bounded continuous function f and $\forall\ \varepsilon > 0$, we can choose $d \leq d(\varepsilon)$ such that (4.12) holds, $\delta \leq \delta(\varepsilon,d)$ to have (4.13), and then $K \geq \max(N_1(\varepsilon,\delta), N_2(\varepsilon,\delta)$ to get (4.9) and (4.11), which finally yields :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(T_K(\mathbf{t}_K))] - \mathbb{E}[f(W_{\mathbf{t}})]| &\leq \mathbb{E}[|f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|>\delta}] \\
&\quad + \mathbb{E}[|f(T_K(\mathbf{t}_K)) - f(W_{\mathbf{t}_K})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}] \\
&\quad + \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{t}_K}-W_{\mathbf{t}}\|\leq d}] \\
&\quad + \mathbb{E}[|f(W_{\mathbf{t}_K}) - f(W_{\mathbf{t}})|\mathbb{1}_{\|\mathbf{t}_K-\mathbf{t}\|\leq\delta}\mathbb{1}_{\|W_{\mathbf{t}_K}-W_{\mathbf{t}}\|>d}] \\
&\leq 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{8\|f\|_\infty} = \varepsilon
\end{aligned}$$

and thus $T_K(\mathbf{t_K}) \xrightarrow[K\to\infty]{\mathcal{D}} W_{\mathbf{t}}$.

Acknowledgements

I greatly thank my Ph.D advisor Serge Cohen for his constant help, and also Laurent Miclo, Charles Bordenave and Philippe Berthet for fruitful discussions and advices.

Bibliographie

[1] G. Baróti. Limit distributions for Ehrenfest's urn model. In *Statistics and probability (Visegrád, 1982)*, pages 1–8. Reidel, Dordrecht, 1984.

[2] Emmanuel Boissard, Serge Cohen, Thibault Espinasse, and James Norris. Diffusivity of a random walk on random walks. *Random Structures & Algorithms*, 47(2) :267–283, 2015.

[3] Xavier Bressaud and Serge Cohen. Discussion privée.

[4] Nikolas P Breuckmann and Barbara M Terhal. Space-time circuit-to-hamiltonian construction and its applications. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(19) :195304, Apr 2014.

[5] Djalil Chafaï and Florent Malrieu. *Recueil de modèles aléatoires*, volume 78 of *Mathématiques et Applications*. Springer, June 2016.

[6] Antonio Di Crescenzo, Claudio Macci, Barbara Martinucci, and Serena Spina. Analysis of random walks on a hexagonal lattice. 2019.

[7] T. Espinasse, N. Guillotin-Plantard, and P. Nadeau. A combinatorial approach to a model of constrained random walkers. *Combinatorics, Probability and Computing*, 25(2) :222–235, Mar 2015.

[8] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[9] Christophe Gallesco, Sebastian Müller, and Serguei Popov. A note on spider walks. *ESAIM Probability and Statistics*, 10 2009.

[10] B.V. Gnedenko and A.N. Kolmogorov. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley series in statistics. Addison-Wesley, 1968.

[11] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.

[12] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[13] Piet Lammers. Diffusivity of a walk on fracture loops of a discrete torus. 2017.

[14] Sean Meyn, Richard L. Tweedie, and Peter W. Glynn. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2009.

[15] Fabien Montégut. Double asymptotic for random walks on hypercubes. *Journal of Theoretical Probability*, Volume 32, Issue 4, December 2019, December 2019.

[16] Laurent Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996)*, volume 1665 of *Lecture Notes in Math.*, pages 301–413. Springer, Berlin, 1997.

Limites d'échelles de marches aléatoires contraintes

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans le domaine des théorèmes limites pour les chaînes de Markov. Nous considérons des suites de chaînes de Markov et cherchons à montrer des doubles asymptotiques pour des processus lorsque le temps et l'indice de la suite tendent vers l'infini.

Dans une première phase, nous nous concentrerons sur le modèle des prisonniers dans lequel un nombre fini de marcheurs aléatoires sont contraints de rester proches les uns des autres. Notre objectif est de déterminer le comportement limite lorsque le temps et le nombre de prisonniers augmentent, en utilisant la décomposition de Hodge d'une fonctionnelle additive d'une marche aléatoire sur un graphe fini, dans la lignée de travaux antérieurs de Boissard, Cohen, Espinasse et Norris.

Ensuite, nous tenterons de développer une généralisation de ce modèle dans lequel la décomposition de Hodge peut être utilisée pour prouver des théorèmes limites en double asymptotique.

Enfin, nous considérerons deux autres modèles - les marches aléatoires dans le graphite et les hypercubes de dimension K - dans lesquels les techniques précédentes nous permettent de prouver des limites d'échelle dans ces deux contextes.

Mots-clés : Théorèmes limites, chaînes de Markov, marches aléatoires, graphes.

Scaling limits for constrained random walks

Abstract : This thesis falls within the field of limit theorems for Markov chains. We consider sequences of Markov chains, and focus on proving double asymptotics for such processes as both the time and the index in the sequence tend to infinity.

In a first phase we will focus on the prisonners model in which a finite number of random walkers are constrained to stay close to each other. Our goal is to determine the limit behavior as the time and the number of prisonners is increasing, using the Hodge decomposition of an additive functionnal of a random walk on a finite graph, in line with previous work of Boissard, Cohen, Espinasse and Norris.

Then we develop a generalisation of this model in which the Hodge decomposition can be used to prove limit theorem in double asymptotics.

Finally we will consider two other models - the random walks in graphite and the K-dimensional hypercubes - in which the previous techniques allow us to prove scaling limits in both contexts.

Keywords : Limit theorems, Markov chains, random walks, graphs.