



Unicité et stabilité pour le problème inverse de Steklov

Germain Gendron

► To cite this version:

Germain Gendron. Unicité et stabilité pour le problème inverse de Steklov. Mathématiques [math]. Université de NANTES, 2020. Français. NNT : . tel-03082591v2

HAL Id: tel-03082591

<https://hal.science/tel-03082591v2>

Submitted on 20 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601

Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Spécialité : Mathématiques et leurs Interactions

Par

Germain GENDRON

Unicité et stabilité pour le problème inverse de Steklov

Thèse présentée et soutenue à l'UNIVERSITÉ DE NANTES, le 20 novembre 2020

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs :

M. Alexandre GIROUARD, Professeur des universités, Université de Laval

M. Otared KAVIAN, Professeur émérite, Université de Versailles

Jury :

Président : **M. Bernard HELFFER**, Professeur émérite, Université de Nantes

Examineurs : **M. Benoît GREBERT**, Professeur des universités, Université de Nantes

M. Alexandre JOLLIVET, Chargé de recherche au CNRS, Université de Lille 1

Mme Françoise TRUC, Maître de conférence HDR, Institut Fourier

Directeurs de thèse : **M. François NICOLEAU**, Maître de conférence HDR, Université de Nantes

M. Thierry DAUDE, Maître de conférence HDR, Université de Cergy

Remerciements

Les remerciements tiennent généralement une place de choix dans le manuscrit d'un doctorant nantais. Je compte ne pas y déroger, même en temps de confinement. En d'autres circonstances, cette tradition occuperait tous ceux venus spécialement me soutenir par leur présence et que ma présentation (palpitante s'il en fut) laisserait malheureusement de marbre. Quand bien même ne sont-ils que deux aujourd'hui, je leur souhaite bonne lecture.

J'adresse, en premier lieu, toute ma reconnaissance à François et Thierry qui m'ont encadré sur ce travail. À bien des égards, les trois années qui s'achèvent comptent parmi les plus agréables de mes études, et vous y avez contribué pour une large part. Dans une ambiance de travail détendue, j'ai appris, en vous côtoyant, à faire des essais, à me tromper, à persévérer, à discuter, à essayer encore... Vous avez su m'encourager tout au long de ce chemin parfois escarpé, répondre à mes questions sans compter votre temps, réorienter mes errances quand il le fallait. Merci, donc, pour la générosité qui fut la vôtre et à laquelle je dois beaucoup.

Je remercie chaleureusement Otared Kavian et Alexandre Girouard d'avoir accepté de rapporter mon travail, pour leurs relectures attentives, leurs remarques et corrections, ainsi que les approfondissements qu'ils m'ont suggérés. Merci également à Françoise Truc, Alexandre Jollivet, Benoît Grébert et Bernard Helffer d'avoir accepté d'être membres de mon jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Un merci tout particulier à Bernard, qui me fait l'honneur de présider ce jury, pour toutes ses remarques et suggestions à la lecture du manuscrit.

Je salue la formidable équipe du secrétariat : Anaïs, Stéphanie, Annick, Béatrice et Brigitte, figures modernes d'Ariane pour nous guider dans les dédales de l'administration. Un merci particulier à Brigitte, qui a pris de son temps pour m'aider à régler des détails

qui traînaient dans certains dossiers, sans jamais renoncer à sa gentillesse ni à sa bonne humeur. Merci également à Éric Paturel, directeur du département ces trois dernières années, pour sa disponibilité. Je remercie nos deux gardiens du temple sacré, Anh et Claude (même s'il me faut admettre, à ma grande honte, que ma dévotion y fut rare). Je profite de l'occasion pour saluer les mails prospectifs de Claude, dont le sens de la poésie revisite d'une façon réjouissante un certain nombre de thèmes chers aux mathématiciens. Merci, bien sûr, à nos deux informaticiens Éric et Saïd, toujours là en cas de besoin. Une pensée, enfin, pour Bertrand-de-la-cafèt qui est en retraite après tant de bons et loyaux services et dont la titanesque mémoire m'aura ébloui jusqu'à la fin.

J'attaque maintenant la brochette des doctorants...

Caroline R, ce fut un réel plaisir de partager ton bureau. Ta jovialité (parfois féroce) nous a permis de bavarder joyeusement de tout et ce fut précieux. Évidemment, la rivalité Serpentard/Poufsouffle n'a pas manqué de ressurgir lors des parties de cartes où je me suis distingué par ma nullité profonde. Tu t'es cependant largement vengée avec cette inoubliable imitation au Time's up !

Caroline V, je t'ai eu comme co bureau quelques mois seulement, mais je te remercie pour ton accueil. C'est volontiers que je te recroiserai pour parler de maths ou d'autre chose (au passage, ton site est fort intéressant, continue d'y poster des articles).

Matilde, tu es venue me libérer de l'empire carolingien ! Que de bons moments en ta compagnie, et quels fous rires mémorables ! Ah, ce mail envoyé par erreur : "sauvez la date". J'en ris encore.

Matthieu, j'espère que tu garderas toujours ce réjouissant esprit d'à-propos, cet humour pourri et cette appétence pour les contrepèteries douteuses. Si un jour tu renonces aux mathématiques, pense à faire carrière dans les percussions, tu y serais très bon (comme la moussaka). Merci également de m'avoir fait découvrir le bar Pioche, auquel j'attache de très bons moments.

Solène, ma partenaire de badminton ! Nous savons, toi et moi, que ce fut glorieux quoiqu'en pensèrent nos adversaires. Navré d'avoir douché vos espoirs de relève, à Caroline et toi, pour la taroinche. Tout a une fin... Tu as contribué généreusement à cette joyeuse ambiance du laboratoire et tes taquineries désinvoltes vont me manquer. Un grand merci, bien sûr, pour ta relecture de mon introduction et tes remarques pertinentes. Merci également à Benjamin qui a été, de bien des façons, un membre actif de l'équipe des doctorants. Je vous retrouverai volontiers un de ces jours à Nantes.

Côme, j'espère ne pas t'avoir importuné de façon intempestive. Je prenais pour acquis le fait que ta présence, d'autant plus estimable qu'elle était rare, devait être honorée à sa juste valeur. Nos conversations informelles m'ont aidé bien des fois à recharger les piles. Je t'encourage à persévérer dans la pratique du badminton-mur, excellente en temps de confinement, et à continuer de ne manger que des cookies car ça me déculpabilise. Je t'encourage aussi à arrêter de regarder des vidéos de chats.

Fabien, je garde précieusement tes propositions de recettes qui équilibreront (un jour) mon régime alimentaire désastreux. J'investirai dans une mandoline pour prendre le temps de cuisiner et arrêter de manger sur le pouce (j'ai cru comprendre que c'était efficace). J'en profite pour te rappeler que tu me dois une crêpe. Merci pour toutes les discussions, profondes ou désinvoltes, que nous avons entretenues sur tout et rien et bonne chance pour la suite de ton parcours.

Maha, quel plaisir de t'avoir rencontré ! Je suis heureux que nous ayons pu faire notre thèse ensemble. Ta présence, calme et posée, faisait du bien à tout le monde. J'ai toujours, sur mon bureau, le petit cèdre de métal que tu as eu la gentillesse de me rapporter de ton pays. Je te souhaite plein de bonnes choses pour la suite.

Alexandre, nous avons abusé de ton hospitalité, c'est certain. Merci d'y avoir contribué sciemment par toutes les soirées que tu as organisées dans ton appartement. Bavarder avec toi est un plaisir que je n'aurais refusé pour rien au monde, sauf éventuellement pour engloutir une bouchée de ton délicieux gâteau d'anniversaire. Merci aussi pour ta relecture et tes remarques sur mon chapitre 3.

Thomas G, une fois encore ton nom apparaît parmi les doctorants. Les soirées autour d'un verre ou d'un jeu en ta compagnie sont autant de très bons souvenirs. Bon courage pour la suite (mais tu n'en as guère besoin si tu es effectivement éternel comme le prétendent certains).

Hala, merci pour ton sourire et tes gâteaux. Ton anniversaire brestois est le meilleur souvenir que je garde des rencontres doctorales 2018.

Zeinab, merci pour ta bonne humeur et pour les spécialités culinaires libanaises que j'ai découvertes, grâce à toi ! Maintenant que je suis parti, qui m'affublera d'un surnom ? Enfin... Je reviendrai sans doute de temps à autre, juste pour faire coucou.

Claire, te rappelles-tu cette première fois où tu t'es tournée vers moi en disant « Ah mais, je suis pas du tout d'accord ! » ? Moi oui : c'était dans une pizzeria et tu étais à ma gauche. Je n'imaginais pas que cette phrase aurait autant d'écho dans les deux années qui suivraient. Félicitations pour ta titularisation ! Je te souhaite beaucoup de plaisir dans ton métier de chercheuse. Et même s'il te faut du sucre pour réfléchir, n'abuse pas des

popcorns, il paraît que c'est agressif.

Anthony, ami de Descartes et dessinateur de dragons, j'ai été ravi de partager ton bureau un an et de contribuer à ralentir ton travail toutes les fois où j'ai été présent. Autant de passionnantes discussions sur tous les sujets et presque autant de désaccords profonds. C'était bien sympathique.

Samuel, j'espère que tu as trouvé quelqu'un d'autre pour tester tes blind-tests Disney ou de Noël. On était fait pour s'entendre (sans parler de notre intérêt commun pour l'enseignement). Je te souhaite bonne chance pour tes deux dernières années de thèse et pour la suite !

Adrian, j'ai été très content de te rencontrer, de parler de maths (la suite de Goodstein, ça ne sert à rien mais j'ai retenu le nom), de cours, de pédagogie ou d'autres choses... Merci pour le temps que tu as consacré à relire mon premier chapitre de thèse et pour tes remarques. J'aurai grand plaisir à te retrouver autour d'un verre.

Mohamad, tu es resté égal à toi-même en toute circonstance. J'ai admiré ta patience toutes les fois où je suis venu dans votre bureau vous déconcentrer. Je garde un souvenir très sympathique de ce retour en train des rencontres jeunes EDPistes où tu m'as parlé du Liban et de ses coutumes.

Antoine, il est clair que tu as l'étoffe d'un passionné aussi je te souhaite beaucoup de réussite dans ce dur métier de chercheur. Ton caractère éminemment raisonnable devant un plat de pâtisseries est un idéal que je m'efforce d'atteindre.

Cécile et Arthur, grâce à vous je garde un souvenir particulièrement réjouissant de cette journée des doctorants, vendue pourtant comme le summum de l'ennui par ceux qui nous y précédèrent. Votre compagnie a toujours été un plaisir. Emmanuel, je te mets dans le lot, bien sûr ! J'admets que j'aurais aimé avoir plus de temps pour parler avec toi.

Amiel, notre visagiste local, discutant de maths partout sauf dans ton bureau (t'y ai-je déjà vu ?). Je te souhaite bon vent là où celui-ci te mènera. Garde surtout ce caractère jovial qui rend ta compagnie si plaisante. Peut-être reviendras-tu aux mathématiques un jour... On ne les abandonne jamais complètement.

Andrès, si même une fonction holomorphe n'est pas rigide pour toi alors tu dois être l'homme le plus inflexible que je connaisse (sauf quand il s'agit de faire la fête). Merci pour les soirées que tu as organisées chez toi, et pour ta bonne humeur quotidienne.

Hélène, je n'ai fait qu'entr'apercevoir ta passion pour les jeux de société, mais les soirées passées à jouer en ta compagnie et celle de Laura sont autant de très bons souvenirs.

Meissa, j'espère que ton doctorat se poursuit tranquillement entre le Sénégal et la

France. Tu m'avais dit que ce n'était pas toujours facile. Désormais, quand je lis la fable « Le meunier, son fils et l'âne », je pense à toi !

Anh, ton dynamisme ne retombe jamais et tu es une des personnes les plus sociables que j'ai croisées ! Ta maîtrise de la langue française, acquise en si peu de temps, fait mon admiration. Bonne chance pour la suite, dont je ne doute pas qu'elle sera brillante !

Trung, nous n'avons pas eu beaucoup l'occasion d'échanger durant ces trois ans, mon anglais étant bien limité. Je garde précieusement ce hand-spinner que tu m'as offert en revenant de voyage et qui accompagne désormais mes pensées mathématiques.

Thomas W, tu m'as fait un bel accueil au laboratoire et Dieu sait si c'est important ! Ton talent pour la pédagogie est évident, j'espère que tu t'y épanouis pleinement. Comme tu as écrit quelque part que tu ne m'oublieras jamais, peut-être trouverons-nous l'occasion de nous revoir, autour d'un verre ou ailleurs.

Maël, le chouchou de Bertrand-de-la-cafêt. Je garde le souvenir (impressionné) d'une soirée où tu as parlé de théodicée le plus naturellement du monde en évoquant tes anciens cours de lettres. Chapeau !

Johan, j'ai mis du temps à comprendre que tu n'étais PAS doctorant au laboratoire. Je suis heureux de te savoir à Nantes et d'avoir été moi-même nommé dans ton pays d'origine. Cela appelle de nombreux pots en perspective. J'ai toujours grand plaisir à ta compagnie.

Comme il n'est pas si fréquent de poursuivre un doctorat au sein de l'université qui vous a vu grandir, je profite de l'occasion pour remonter le temps un peu plus loin en remerciant François Nicoleau pour la qualité de ses cours, que j'ai suivis en licence et en master. Dans ce métier où les retours ne sont pas légion, je me fais également l'ambassadeurs de dizaines d'étudiants qui sont d'accord avec moi. J'en profite aussi pour saluer l'investissement et la disponibilité de Sylvain Gervais, Friedrich Wagemann, Eric Paturel, Samuel Tapie, Gilles Carron, Anaïs Crestetto, Jean-Paul Pézenec, Xavier Saint-Raymond, Hélène Mathis et François Jauberteau. Mention spéciale à Christophe Berthon pour la limpidité de son enseignement, même si cela se paye de quelques courbatures de poignets.

Je remercie Xue-Ping Wang, avec qui j'ai partagé le plus d'enseignements communs. J'ai vraiment apprécié cette ouverture que tu as eue à mes propositions d'enseignant débutant. Merci également à Vincent Franjou de m'avoir secouru alors lorsque je m'étais témérement proposé pour gérer une partie du distanciel en L1. J'aurais peiné, seul, pour la partie technique.

Dans ma lancée, je remercie au passage Frédéric Héreau, Erwan Brugalle, Laurent Piriou, Nicolas Petrelis, Joseph Viola et Salim Rivière d'être eux-mêmes.

Hors des murs du LMJL, je suis particulièrement reconnaissant à Anne Denmat pour la confiance qu'elle m'a accordée en me proposant d'assumer plusieurs casquettes au sein de la prépa EDEN, et pour m'avoir permis d'enseigner à l'ICAM. Il est bien clair que ces remerciements s'adressent aussi à Ronan.

Un très grand merci, évidemment, à Mélanie Chiron ! C'est par ton intermédiaire que le monde de la prépa m'a entrouvert ses portes. Comme Angers et Nantes sont des villes qui nous sont communes et que le trajet en canapé-tram se fait bien, les occasions d'apéros ne manqueront pas.

J'adresse une pensée reconnaissante à mes anciens enseignants de mathématiques de lycée et de classe préparatoire : Yann Canivet, tout d'abord, qui eut l'art de me rendre les mathématiques faciles pendant mes années de première et de terminale. Stéphane Frigot, ensuite, avec qui j'ai développé un goût certain pour l'investigation mathématique par ces heures nombreuses passées à chercher ses devoirs maison, et qui m'a montré par l'exemple comment rédiger convenablement un texte en mathématiques.

Mes cinq premières années d'études auraient été bien ternes sans toutes les amitiés que j'y ai nouées, celles d'un moment comme celles qui durent. En vrac : merci à Pierre H, Corentin, Jérémie, Lucie, Cloé, Yann-Hogo, Maxime, Lawrence, Emmanuel, Thi, Victor, Emmanuelle, Eddy, Matthieu, Allison, Yannis, et bien d'autres.

Adrian V, ami lettré, je suppose que tu ne te serais guère attendu à apparaître dans une thèse de mathématiques. C'est pourtant chose faite. Merci pour ta présence régulière (je n'ai pas dit fréquente) au moins sur le plan épistolaire, tout au long de cette décennie (oui, ça fait mal) qui s'achève.

Merci à Kizeze, à Petero et Astrid pour tous ces moments passés, présents et à venir. Je ne peux les résumer, ni les sélectionner. Votre amitié fait ma joie.

Je tiens, en dernier lieu, à remercier ma famille pour son soutien tout au long de ces trois ans de thèse, tout au long de ces neuf ans d'études, tout au long de ces vingt-neuf ans de vie qui sont autant d'années merveilleuses, et qui me rappelle constamment par la présence de chacun qu'il est bon d'exister. Merci à Claire, François, Pauline, Franck, Georges, Priscille ainsi qu'à ma ribambelle de neveux et nièces : Ombeline, Louis, Ca-

mille, Faustine, Augustin, Ambroise, Zélie ¹. Bien entendu, quelques mots à la fin d'une interminable litanie ne sauraient témoigner avec justesse de la gratitude que j'éprouve à l'égard de mes parents. À eux, particulièrement, je dis merci et leur dédie cette thèse.

1. si, avec tout ça, vous ne devinez pas où je suis le dimanche matin...

Table des matières

Introduction	11
1 Isospectralité au sens de Steklov	29
1.1 Introduction	29
1.1.1 Les problèmes de Calderón et de Steklov	29
1.1.2 Le résultat	33
1.2 Réduction du problème à l'étude d'une EDO	38
1.2.1 La séparation des variables	38
1.2.2 Fonctions de Weyl-Titchmarsh	41
1.2.3 Diagonalisation de l'opérateur Dirichlet-à-Neumann	43
1.3 Une caractérisation par la trace et le déterminant	46
1.4 Unicité de la trace et du déterminant	60
1.4.1 Le cas $f(0) = f(1)$	65
1.4.2 Le cas $f(0) \neq f(1)$	69
2 Un résultat d'unicité locale	77
2.1 Introduction	77
2.1.1 Le résultat	79
2.1.2 Plan de la preuve	81
2.2 Asymptotique des valeurs propres	82
2.3 Preuve du résultat d'unicité locale	87
2.3.1 Le cas $f(0) \neq f(1)$	91
2.3.2 Le cas $f(0) = f(1)$	96
2.3.3 Cas particulier	100
3 Stabilité pour des facteurs conformes symétriques	103
3.1 Introduction	103

TABLE DES MATIÈRES

3.1.1	Proximité de deux spectres	103
3.1.2	Les résultats	105
3.1.3	Plan de la preuve	107
3.2	Estimations sur les fonctions de Weyl-Titchmarsh	109
3.3	Une estimation intégrale	113
3.4	Construction d'un opérateur intégral inversible	117
3.5	Un théorème d'approximation de Müntz	123
3.5.1	Un problème de moments de Hausdorff	123
3.5.2	Inversibilité de l'opérateur B	132
3.6	Estimation uniforme des facteurs conformes	134
3.7	Le problème de Calderón	135
Bibliographie		143

Introduction

Alberto Calderón, on le sait, entreprit dès ses jeunes années d'étudier le problème qui porte aujourd'hui son nom. La question qui, la première, engagea sa curiosité appartenait cependant à un champ d'étude qui n'était pas celui des mathématiques mais de la géophysique. En ce milieu de XX^e siècle, Calderón travaillait pour l'industrie pétrolière en Argentine, son pays natal. La compagnie qui l'embauchait, familière d'une technique de tomographie recourant à *l'impédance électrique*, chargeait ses ingénieurs d'évaluer la résistivité² du sol par la mise en circulation d'un courant dont ils consignaient les données, entrées et sorties, à la surface. Il leur devenait alors possible de localiser certaines poches de pétrole là où des variations significatives étaient relevées. Le bien-fondé de ce savoir-faire reposait sur les succès de terrain, et tout le monde s'en trouvait bien. Pour Calderón, toutefois, de tels résultats exigeaient une explication plus profonde, la mise au jour de quelque théorie sous-jacente. S'étant rapproché de ce groupe de braves gens à qui l'on doit absolument tout justifier, dont les membres répondent au nom de mathématiciens, il s'y distingua rapidement par de remarquables dispositions. On rapporte ainsi³ qu'en 1948, Antoni Zygmund dispensait à Buenos Aires un cours auquel assistait le jeune Calderón (qu'il ne connaissait pas encore). Sur le point d'écrire les détails d'une preuve de sa découverte, le professeur eut, comme cela peut arriver parfois, hélas, un trou de mémoire. Calderón intervint pour le tirer d'embarras, croyant invoquer des arguments du propre livre de Zygmund - il l'avait vaguement lu - qui se révélèrent, en réalité, tout à fait originaux. Deux ans plus tard, Calderón validait une thèse⁴ portant, notamment, sur les fonctions harmoniques, avant de devenir professeur dans diverses institutions de renom. Au cours des trente années qui suivirent son questionnement initial, il ne fit pas mention de ses recherches touchant au problème de prospection, cependant qu'il réalisait de grandes percées dans les domaines de l'analyse harmonique et des équations aux dé-

2. exprimée en ohms mètres

3. cette anecdote est relatée par Yves Meyer sur le site *Images des mathématiques* dans l'article intitulé *Comment enseigner les mathématiques selon Yves Meyer*

4. sous la direction de Zygmund

riées partielles (voir [Chr+98] pour une courte biographie agrémentée de témoignages d'étudiants). C'est en 1980, seulement, qu'il énonça officiellement le cadre du problème, présenté comme ouvert, en ces termes ([Cal80]) :

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de bord lipschitzien ∂D et $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et bornée dont la borne inférieure est strictement positive. Étant donnée une fonction ψ de $H^{1/2}(\partial D)$, l'équation de la conductivité

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 & \text{dans } D \\ u = \psi & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (1)$$

possède une unique solution u dans $H^1(D)$. On peut alors considérer l'opérateur $Q_\gamma : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$Q_\gamma(\psi) = \int_D \gamma (\nabla u)^2 dx,$$

et s'intéresser aux questions suivantes :

- 1) Q_γ caractérise-t-il γ ?
- 2) Peut-on reconstruire γ à partir de Q_γ ?

Précisons le lien que ce problème entretient avec le précédent : si D modélise un corps non homogène de conductivité γ alors l'opérateur Q_γ encode, quant à lui, la donnée exhaustive des mesures de type tension-flux de courant prises au bord. La définition de cet opérateur s'éclaire si l'on suppose assez régulière la solution u de (1), par exemple dans $H^2(\Omega)$. Dans ce cas, d'après la formule de la divergence et la formule de Green, pour tout $\psi = u|_{\partial\Omega}$ de $H^{1/2}(\partial D)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \psi dS &= \int_D \nabla(\gamma u) \nabla u dx + \int_D \gamma u \Delta u dx \\ &= \int_D \gamma (\nabla u)^2 dx + \int_D u \nabla \gamma \nabla u dx + \int_D \gamma u \Delta u dx \\ &= \int_D \gamma (\nabla u)^2 dx + \int_D \nabla \cdot (\gamma \nabla u) u dx \\ &= \int_D \gamma (\nabla u)^2 dx, \quad \text{car } u \text{ est solution de (1)} \\ &= Q_\gamma(\psi). \end{aligned}$$

En d'autres termes, si u est suffisamment régulière alors $Q_\gamma(\psi)$ est la forme quadratique

associée à l'opérateur de *Dirichlet-à-Neumann* $\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$ défini par

$$\Lambda_\gamma \psi = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (2)$$

Cet opérateur, entièrement caractérisé par la forme quadratique Q_γ , modélise usuellement le procédé générant des données de type tension-flux mesurées au bord d'un corps physique. Calderón ne résolut pas ce problème mais apporta des réponses à une version linéarisée de celui-ci, démontrant que l'application

$$\gamma \mapsto Q_\gamma$$

possède une différentielle injective en toute fonction γ de $L^\infty(D)$ *constante* et strictement positive. Il prouva également qu'autour de chaque constante existait un ouvert O_{γ_0} (pour la topologie L^∞) tel que toute fonction γ de O_{γ_0} soit, selon ses propres termes, "presque" déterminée par Q_γ . Par là, Calderón jetait les bases d'un programme qui se déclinait en plusieurs sous-questions empruntées à la typologie des *problèmes bien posés* léguée par Jacques Hadamard :

1. Unicité : l'application $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ est-elle injective ?
2. Stabilité : Λ_γ et $\Lambda_{\tilde{\gamma}}$ étant proches, les conductivités associées le sont-elles également ?
3. Reconstruction : peut-on retrouver explicitement γ à partir de Λ_γ ?

Les recherches menées pour y apporter des réponses furent remarquables dès la décennie suivante. Signalons trois résultats majeurs, pour $n \geq 3$, tous publiés avant l'année 1990 (voir [SU87 ; Ale88 ; Nac88] et, pour un cours très agréable sur le sujet : [Sal08]) :

Théorème (Sylvester-Uhlman 1987). *L'application $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ est injective sur $C^1(\partial D)$.*

Théorème (Alessandrini 1988). *Soit $s > \frac{n}{2} + 2$ et, pour $j = 1, 2$, $\gamma_j \in H^s(D)$. Supposons que γ vérifie les encadrements $\|\gamma_j\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq M$ et $\frac{1}{M} \leq \gamma_j \leq M$. Alors*

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty} \leq \omega \left(\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{H^{1/2}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Omega)} \right),$$

où $w(t) = \frac{C}{|\ln(t)|^\sigma}$ pour t petit et $\sigma \in]0, 1[$.

Théorème (Nachmann 1988). *Il existe un algorithme convergent pour retrouver γ à partir de Λ_γ .*

Il est possible de restreindre l'opérateur Λ_γ à une partie du bord seulement. On se reportera à [BU02 ; KC07] pour d'importants apports sur le sujet.

Une généralisation de ce problème émergera rapidement pour considérer la fonction γ à valeurs, non plus seulement dans $\mathbb{R}$, mais dans l'espace des matrices symétriques définies positives $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il s'agissait de prendre en considération l'existence de corps *anisotropes* pour lesquels la conductivité en un point varie selon les directions. Dans cette nouvelle version, il n'y a pas lieu de changer la forme du problème (1) mais seulement la nature de γ qui, de scalaire en tous points, devient une matrice (γ_{ij}) de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Le cas originellement posé par Calderón est alors celui, particulier, où γ désigne une homothétie. Cette formulation plus générale apporte son lot de difficultés propres dont la première, de taille, est la perte de l'injectivité de $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$. En effet ([Uhl01]), considérons de nouveau l'application Q_γ définie dans le cas anisotrope par :

$$Q_\gamma(\psi) = \int_D \nabla u \cdot (\gamma \nabla u) dx,$$

ainsi qu'un difféomorphisme $\phi : D \rightarrow D$ de classe C^∞ vérifiant $\phi|_{\partial D} = \text{id}$. Le changement de variable $u = v \circ \phi^{-1}$ dans l'équation (1) prise au sens des distributions conduit à

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\tilde{\gamma} \nabla v) = 0 & \text{dans } D \\ v = \psi & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (3)$$

où $\tilde{\gamma} = \left(\frac{({}^t D\phi) \gamma (D\phi)}{|\text{Det}(D\phi)|} \right) \circ \phi^{-1}$. On vérifie alors l'égalité :

$$Q_{\tilde{\gamma}}(\psi) = \int_D \nabla v \cdot (\tilde{\gamma} \nabla v) dx = \int_D \nabla u \cdot (\gamma \nabla u) dx = Q_\gamma(\psi).$$

L'application $\gamma \mapsto Q_\gamma$ n'est donc pas injective et, par suite, $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ non plus. Cette considération va nous amener à relâcher un peu la conclusion du problème d'unicité, puisque celle-ci, prise au sens strict, se trouve désormais infirmée. Avant d'en préciser la teneur, nous basculons sur une formulation géométrique du problème, équivalente à la première (voir [LU89 ; Uhl01]), que l'on peut présenter ainsi : soit (M, g) une variété riemannienne lisse compacte à bord. Pour $\psi \in H^{1/2}(\partial M)$ et $\omega \in \mathbb{R}$, considérons le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \omega u & \text{dans } M \\ u = \psi & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (4)$$

L'opérateur Laplacien $-\Delta_g$ s'écrit dans une carte

$$-\Delta_g = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right),$$

où $|g| = \det(g_{ij})$ et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Si ω n'est pas dans le spectre de Dirichlet de la variété M , le problème de Dirichlet (4) admet une unique solution dans $H^1(M)$, ce qui permet de définir l'opérateur *Dirichlet-à-Neumann*

$$\begin{aligned} \Lambda_g(\omega) : H^{1/2}(\partial M) &\rightarrow H^{-1/2}(\partial M) \\ \psi &\mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial M} \end{aligned}$$

où ν est la normale unitaire sortante de ∂M . En dimension $n \geq 3$, le lien avec le problème initial, dans sa version anisotrope, est donné par les égalités

$$(g^{ij}) = (\det \gamma^{k\ell})^{\frac{1}{n-2}} (\gamma_{ij})^{-1} \quad \text{et} \quad \Lambda_g(0) = \lambda_\gamma.$$

Ce nouveau problème est en fait plus général puisque l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ est défini à partir d'un paramètre ω qui peut être non nul. L'obstruction à l'unicité, quant à elle, se reformule par l'énoncé suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Pour tout } C^\infty\text{-difféomorphisme } \psi : M \rightarrow M \text{ vérifiant } \psi|_{\partial M} = id, \text{ on a} \\ &\Lambda_{\psi^*g}(\omega) = \Lambda_g(\omega). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$, l'actuel problème de Calderón est alors :

$$\begin{aligned} &\text{Supposons } \Lambda_g(\omega) = \Lambda_{\tilde{g}}(\omega). \text{ Existe-t-il alors } \psi : M \rightarrow M \text{ un } C^\infty\text{-difféomorphisme} \\ &\text{vérifiant : } \psi|_{\partial M} = id \text{ et } \psi^*g = \tilde{g} ? \end{aligned}$$

Il demeure ouvert à l'heure de mettre ce travail sous presse. Nous y reviendrons plus en détails dans l'introduction du premier chapitre. Contentons-nous de signaler ici qu'au sein de certaines classes particulières de variétés *conformes*, sa résolution est complète. Mieux : la réponse est positive et l'unicité stricte, c'est à dire que le seul difféomorphisme C^∞ qui répond au problème précédent est l'identité. On peut mentionner les travaux menés dans [Fer+09 ; Fer+16] pour des variétés *conformément transversalement anisotropes*, c'est à dire de la forme

$$M \subset \subset \mathbb{R} \times K, \quad g = c(x, y_K)(dx^2 + g_K),$$

avec (K, g_K) une variété compacte de dimension $n - 1$ satisfaisant certaines conditions géométriques. Plus récemment, les résultats de [DKN19a; DKN19b] montrent que, pour le cylindre $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ muni de deux métriques

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}), \quad \tilde{g} = \tilde{f}(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}),$$

où dx^2 est la métrique euclidienne sur $[0, 1]$ et $g_{\mathbb{S}}$ la métrique induite par le plongement de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$, l'égalité $\Lambda_g(\omega) = \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)$ implique l'identification $f = \tilde{f}$ sur $[0, 1]$ et, partant, l'égalité $g = \tilde{g}$. Fort de cette certitude, et eu égard à la relative simplicité de ce dernier modèle et des puissants outils d'analyse complexe à disposition, on peut se demander s'il n'y a pas là une occasion à saisir pour tenter de mieux comprendre le lien entre, d'une part, la métrique de la variété M et, d'autre part, le spectre de l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$. Cette interrogation s'inscrit dans le champ de recherche du problème inverse de *Steklov*, sur lequel porte ce travail de thèse. En reprenant l'esprit du programme de Calderón, les questions que nous y examinons sont alors celles-ci :

1. Unicité : le spectre de l'opérateur Λ_g caractérise-t-il la métrique g sur tout M ?
2. Unicité locale : que suffit-il de connaître du spectre pour que la métrique g soit déterminée en un voisinage du bord de M ?
3. Stabilité : si le spectre est connu à une erreur $\varepsilon > 0$ fixée près, peut-on en déduire une approximation de la métrique g sur tout M ? Si oui, en quel sens ?

Le *problème de Steklov* originellement laissé par le mathématicien russe Vladimir Steklov (1866-1926) est, en fait, bien antérieur à celui de Calderón. Il s'agit cependant d'un problème *direct* dont une formulation géométrique moderne peut être exprimée par l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & \text{sur } \partial M, \end{cases} \quad (5)$$

d'inconnue u , qu'il s'agit de résoudre. Le paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ doit alors être une valeur propre de l'opérateur $\Lambda_g(0)$ dont la fonction propre associée est la trace sur $H^{1/2}(\partial M)$ d'une fonction u harmonique sur M . Steklov introduisit en 1902 cette étude de paramètres spectraux au bord d'un domaine qui modélise divers problèmes de vibrations : fluide soumis à la gravité, membrane dont la masse se concentre au bord, etc. (voir par exemple [Jam14]). Les premières réponses complètes apportées à ce problème furent mises en œuvre sur des domaines simples comme le disque, le carré ou encore le cy-

lindre. Il convient de nous y arrêter quelques instants, la méthode de résolution employée, désormais classique, se révélant particulièrement instructive pour la suite de notre propos. Qu'il s'agisse du disque, du carré ou du cylindre, l'existence de symétries naturelles suggère de chercher une solution du problème (5) en *séparant les variables*. Le cas le plus simple est probablement celui du disque unité (exemple repris de [GP17]).

Théorème. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité muni de la métrique euclidienne. Alors l'ensemble $\sigma(\Lambda_g(0))$ des valeurs propres du problème (5), comptées avec multiplicité, pour la variété $M = \mathbb{D}$, est donné par

$$\sigma(\Lambda_g(0)) = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots\}.$$

Démonstration. On écrit une solution de (5) en la décomposant sur les harmoniques sphériques

$$u(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(r) e^{i\theta k}$$

avec $r \in]0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. En coordonnées polaires, le laplacien s'écrit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

On a donc les équivalences

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(r) e^{i\theta k} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(u_k''(r) + \frac{1}{r} u_k'(r) + \frac{(ik)^2}{r^2} u_k(r) \right) e^{i\theta k} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad r^2 u_k''(r) + r u_k'(r) - k^2 u_k(r) = 0. \end{aligned}$$

Posons $r = e^x$ et $v(x) = u_k(r)$. On se ramène à une équation d'ordre 2 à coefficients constants :

$$v''(x) = e^{2x} u_k''(e^x) + e^x u_k'(e^x) = r^2 u_k''(r) + r u_k'(r) = k^2 u_k(r) = k^2 v(x).$$

Il existe donc $C_k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-\infty, e], \quad v(x) = C_k e^{kx} \quad \text{ou} \quad \forall x \in]-\infty, e], \quad v(x) = C_k e^{-kx},$$

c'est à dire

$$\forall r \in]0, 1], \quad u_k(r) = C_k r^k \quad \text{ou} \quad \forall r \in]0, 1], \quad u_k(r) = C_k r^{-k}.$$

Pour que u_k soit régulière en $r = 0$, on exclut les exposants négatifs. Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, la forme générale d'une solution régulière u de l'équation $\Delta u = 0$ est donc

$$\forall r \in [0, 1], \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad u(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad u'_k(r)|_{r=1} = \lambda C_k r^k|_{r=1} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad u'_k(1) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad C_k |k| = C_k \lambda \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \quad C_k (|k| - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Comme tous les C_k ne peuvent être simultanément nuls (afin que u soit effectivement fonction propre), il existe k_0 dans $\mathbb{Z}$ tel que C_{k_0} soit non nul. Nécessairement alors $\lambda = |k_0|$ et $C_k = 0$ si k diffère de k_0 . En conclusion, les valeurs propres du problème (5) sont les entiers naturels qui sont de multiplicité 2 (à part 0 dont la multiplicité est 1). Pour chaque valeur propre $|k|$ non nulle, l'espace de ses fonctions propres est de dimension 2, engendré par les fonctions $u_{-k} : (r, \theta) \mapsto r^{|k|} e^{-ik\theta}$ et $u_k : (r, \theta) \mapsto r^{|k|} e^{ik\theta}$. Une base de fonctions propres *réelles* est alors donnée par $(r, \theta) \mapsto r^{|k|} \cos(k\theta)$ et $(r, \theta) \mapsto r^{|k|} \sin(k\theta)$. $\square$

Un autre exemple classique où la séparation des variables se révèle cruciale est celui du cylindre. La preuve du théorème suivant introduit un algorithme de résolution qui sera le nôtre tout au long de ce travail de thèse. C'est pourquoi nous le présentons ici dans sa version la plus élémentaire (exemple emprunté de nouveau à [GP17 ; CESG11]) :

Théorème. Soit $M = [-L, L] \times K$ où K est une variété compacte sans bord, munie de la métrique produit $g = dx^2 + g_K$, où dx^2 désigne la métrique euclidienne sur $[-L, L]$ et g_K la métrique de K . Notons

$$0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \rightarrow +\infty$$

les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_K$ sur K comptées avec mul-

tiplicité. L'ensemble $\sigma(\Lambda_g(0))$ des valeurs propres du problème (5) comptées avec multiplicité est alors donné par

$$\sigma(\Lambda_g(0)) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{L} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\mu_m} \tanh(\sqrt{\mu_m} L), \sqrt{\mu_m} \coth(\sqrt{\mu_m} L), \quad m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Démonstration. Notons (Y_m) une base de fonctions propres dans $L^2(K)$ associée à la suite des valeurs propres (μ_m) . Une fonction u définie sur $[-L, L] \times K$ peut s'écrire

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x) Y_m(y).$$

Pour tout (x, y) de $[-L, L] \times K$, l'expression du laplacien est alors

$$\Delta u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_K \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x) Y_m(y) \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} (u_m''(x) - \mu_m u_m(x)) Y_m(y).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, u_m''(x) - \mu_m u_m(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, u_m(x) = A_m e^{\sqrt{\mu_m} x} + B_m e^{-\sqrt{\mu_m} x} \quad \text{et} \quad u_0(x) = A_0 + B_0 x, \end{aligned}$$

où, pour tout entier m , A_m et B_m sont des constantes réelles. Puisque $[-L, L] \times K$ possède deux bords $\Gamma_{-L} = \{-L\} \times K$ et $\Gamma_L = \{L\} \times K$ (qui sont deux copies de K), la fonction u au bord peut être vue comme un élément de $H^{1/2}(\Gamma_{-L}) \oplus H^{1/2}(\Gamma_L)$ et décrite à l'aide d'une suite de matrices :

$$u|_{\partial M} = \begin{pmatrix} u(-L) \\ u(L) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} u_m(-L) \\ u_m(L) \end{pmatrix} \otimes Y_m.$$

où la notation tensorielle $\otimes$ signifie simplement que l'on multiplie par Y_m dans chaque coordonnée. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial M} = \sigma u|_{\partial M} &\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} -u_m'(-L) \\ u_m'(L) \end{pmatrix} \otimes Y_m = \sigma \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} u_m(-L) \\ u_m(L) \end{pmatrix} \otimes Y_m \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \begin{cases} -u_m'(-L) = \sigma u_m(-L) \\ u_m'(L) = \sigma u_m(L). \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

On distingue alors le cas $m = 0$ de celui où $m \geq 1$:

$$(6) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} -\sqrt{\mu_m} \left(A_m e^{-\sqrt{\mu_m} L} - B_m e^{\sqrt{\mu_m} L} \right) = \sigma \left(A_m e^{-\sqrt{\mu_m} L} + B_m e^{\sqrt{\mu_m} L} \right) \\ \sqrt{\mu_m} \left(A_m e^{\sqrt{\mu_m} L} - B_m e^{-\sqrt{\mu_m} L} \right) = \sigma \left(A_m e^{\sqrt{\mu_m} L} + B_m e^{-\sqrt{\mu_m} L} \right) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} -B_0 = \sigma(A_0 - B_0 L) \\ B_0 = \sigma(A_0 + B_0 L), \end{cases}$$

ce que l'on peut réécrire matriciellement

$$(6) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ b_m & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_m \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_m = (\sigma - \sqrt{\mu_m}) e^{\sqrt{\mu_m} L} \\ b_m = (\sigma + \sqrt{\mu_m}) e^{-\sqrt{\mu_m} L} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_0 = \sigma L - 1 \\ b_0 = \sigma. \end{cases}$$

Comme u est fonction propre, en particulier non nulle, il existe un entier m tel que

$$\begin{pmatrix} B_m \\ A_m \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cas 1 : $m = 0$. On a :

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sigma L - 1 & -\sigma \\ \sigma L - 1 & \sigma \end{pmatrix} = 0,$$

c'est à dire

$$2\sigma(\sigma L - 1) = 0,$$

puis

$$\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{1}{L}.$$

Cas 2 : $m \geq 1$. Alors :

$$\det \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ b_m & a_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (\sigma - \sqrt{\mu_m})e^{\sqrt{\mu_m}L} & (\sigma + \sqrt{\mu_m})e^{-\sqrt{\mu_m}L} \\ (\sigma + \sqrt{\mu_m})e^{-\sqrt{\mu_m}L} & (\sigma - \sqrt{\mu_m})e^{\sqrt{\mu_m}L} \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui se réécrit

$$(\sigma - \sqrt{\mu_m})^2 e^{2\sqrt{\mu_m}L} = (\sigma + \sqrt{\mu_m})^2 e^{-2\sqrt{\mu_m}L},$$

soit encore

$$(\sigma - \sqrt{\mu_m})e^{\sqrt{\mu_m}L} = (\sigma + \sqrt{\mu_m})e^{-\sqrt{\mu_m}L} \quad \text{ou} \quad (\sigma - \sqrt{\mu_m})e^{\sqrt{\mu_m}L} = -(\sigma + \sqrt{\mu_m})e^{-\sqrt{\mu_m}L}.$$

Si la première égalité est satisfaite, on a

$$\sigma = \sqrt{\mu_m} \frac{e^{\sqrt{\mu_m}L} + e^{-\sqrt{\mu_m}L}}{e^{\sqrt{\mu_m}L} - e^{-\sqrt{\mu_m}L}} = \sqrt{\mu_m} \coth(\sqrt{\mu_m}L)$$

et, dans le cas de la seconde :

$$\sigma = \sqrt{\mu_m} \frac{e^{\sqrt{\mu_m}L} - e^{-\sqrt{\mu_m}L}}{e^{\sqrt{\mu_m}L} + e^{-\sqrt{\mu_m}L}} = \sqrt{\mu_m} \tanh(\sqrt{\mu_m}L).$$

□

Que l'on soit dans le cas du disque muni de la métrique euclidienne ou du cylindre muni de la métrique produit, la résolution du problème *direct* de Steklov par séparation des variables permet de ramener le problème (5) à un système dénombrable d'équations différentielles ordinaires et de tirer profit des outils propres à la dimension 1 pour énumérer la suite *exacte* du spectre $\sigma(\Lambda_g(0))$. On peut dès lors s'interroger sur la possibilité d'étendre de telles méthodes à notre modèle, en vue d'expliciter la dépendance entre le spectre de Steklov et la métrique g . L'enjeu de cette question relève tant du problème direct, consistant à connaître le spectre à partir de la métrique, que du problème inverse qui interroge la quantité d'informations géométriques contenues dans ce spectre.

Énoncé des résultats.

On se propose donc d'en examiner quelques aspects pour des déformations conformes de variétés ayant la topologie du cylindre

$$M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}, \tag{7}$$

chacune munie d'une métrique de la forme

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}), \quad (8)$$

où dx^2 désigne la métrique euclidienne sur $[0, 1]$ et $g_{\mathbb{S}}$ la métrique sur $\mathbb{S}^{n-1}$ induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Notre étude se subdivise en trois chapitres.

Le premier chapitre de cette thèse vise à démontrer qu'au sein de la classe de variétés riemanniennes donnée par (7) et (8), le spectre de Steklov caractérise le facteur conforme à une invariance de jauge naturelle près. Précisément, on démontre que deux spectres sont égaux si, et seulement si, les facteurs conformes associés coïncident à l'involution $\eta : x \mapsto 1 - x$ près (pour $n \geq 3$, on émet une hypothèse technique supplémentaire sur les facteurs conformes au bord de M). Il s'agit, en premier lieu, d'expliciter le spectre de Steklov ou, à tout le moins, d'en trouver un développement asymptotique suffisamment précis. L'idée que nous suivrons reprend celle que nous avons mise en œuvre dans l'exemple précédent du cylindre $[-L, L] \times K$. À l'aide d'une séparation des variables, en écrivant

$$u(x, y) = \sum_{m \geq 0} u_m(x) Y_m(y) \quad \text{et} \quad v_m = f^{\frac{n-2}{4}} u_m,$$

on peut rapporter l'étude du problème de Dirichlet à celle d'un système d'équations de Sturm-Liouville $-v_m'' + q_f v_m = -\mu_m v_m$ dont le potentiel $q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f$ est indépendant de m pour chaque équation. On établit donc un pont entre le problème harmonique $\Delta u = 0$ et un autre problème mettant en jeu des équations différentielles ordinaires. Cependant, contrairement au cas du cylindre muni de sa métrique produit usuelle, il ne s'agit pas, ici, de résoudre directement cette équation. Suivant les idées exposées dans [DKN19a; DKN19b], on fait plutôt appel à la théorie de Weyl-Titchmarsh. Celle-ci introduit en effet des fonctions méromorphes $M(z)$ et $N(z)$ qui caractérisent le potentiel q de l'EDO $-u'' + qu = -zu$. Ces fonctions apparaissent naturellement dans une diagonalisation par blocs 2×2 de $\Lambda_g(\omega)$, par laquelle il devient possible de démontrer l'existence de deux suites de valeurs propres et d'établir pour chacune une asymptotique mettant en jeu ces fonctions M et N , avec un terme d'erreur exponentiellement décroissant. On montre alors que l'égalité des spectres $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ implique, au choix, l'une des égalités $M = \tilde{M}$ ou $M = \tilde{N}$. Dans le premier cas, le Théorème de Borg-Marchenko permettra de conclure que $q_f = \tilde{q}_f$, puis que $f = \tilde{f}$ par un argument classique de type Cauchy-Lipschitz. Dans le second cas, on montre au préalable que N joue le rôle de M mais pour le potentiel $q_f(1 - x)$. On en déduit alors $q_f = q_{\tilde{f}} \circ \eta$ (avec $\eta(x) = 1 - x$), puis

$$f = \tilde{f} \circ \eta.$$

Remarque 1. Lorsque $\omega = 0$, le potentiel $q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}}$ est associé à la notion géométrique de *courbure scalaire*, notée $scal_g(x)$. En effet, en notant $scal_{g_0} = (n-1)(n-2)$ la courbure scalaire de M pour la métrique $g_0 = dx^2 + g_S$, on a la formule (voir [Pet06] p. 69 et [DKN18] p.8) :

$$\begin{aligned} \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} &= \frac{n-2}{4(n-1)} (Scal_{g_0} - f(x)scal_g(x)) \\ &= \frac{n-2}{4(n-1)} ((n-1)(n-2) - f(x)scal_g(x)) \\ &= \frac{(n-2)^2}{4} - \frac{n-2}{4(n-1)} f(x)scal_g(x). \end{aligned}$$

Le second chapitre reprend le modèle du premier et s'intéresse, cette fois, à la possibilité de caractériser la métrique au voisinage du bord de $[0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ (ou l'une de ses composantes) par une donnée plus faible que celle du spectre exact. Nous supposons ici avoir connaissance des valeurs propres à une erreur exponentiellement décroissante près. On reprend l'acquis du premier chapitre où ont été obtenues des asymptotiques précises du spectre de Steklov, exprimées à l'aide des fonctions de Weyl-Titchmarsh, et adaptons à notre cadre des arguments de [DKN19c]. Notre résultat repose sur le célèbre Théorème de Borg-Marchenko *local* qui, pour tout $0 < a < 1$, établit une équivalence entre, d'une part, la connaissance exacte sur $[0, a]$ du potentiel q de l'équation ordinaire $-u'' + qu = zu$ sur $[0, 1]$ et, d'autre part, la connaissance asymptotique, sur le demi-plan à droite, de la fonction $M(z^2)$ à une erreur de l'ordre de $\tilde{O}(e^{-2az})$ (cette notation, rappelée au début du chapitre 2, signifie une condition légèrement plus faible qu'un grand O classique). Avec pour horizon l'invocation de ce résultat étonnant, on procède en deux temps. Au préalable, notons (κ_m) la suite des valeurs propres de Δ_S comptées sans multiplicité, et pour laquelle nous disposons de la formule explicite $\kappa_m = m(m+n-2)$. On fait également l'hypothèse technique :

$$q_f, q_{\tilde{f}} \in \mathcal{D}_b =: \{q \in C^\infty([0, 1]) \mid \exists k \in \mathbb{N}, q^{(k)}(0) \neq (-1)^k q^{(k)}(1)\},$$

qui limite, en quelque sorte, la symétrie des potentiels par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$. Nous précisons plus loin pourquoi. Un nombre a étant fixé dans $]0, 1]$, on fait donc l'hypothèse que les éléments de $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ se rapprochent à une vitesse exponentielle-

ment décroissante, de l'ordre de $\tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\mu_m}})$ (le sens du verbe "se rapprocher" pour nos spectres est explicité au début du chapitre). On montre que cette hypothèse implique, à une erreur $\tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}})$ près, l'égalité asymptotique de $M(\kappa_m)$ ou de $N(\kappa_m)$ à $\tilde{M}(\kappa_m)$ ou $\tilde{N}(\kappa_m)$, dans un régime donné par l'entier m sur un sous-ensemble $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L} \cap \{m, m+1\} \neq \emptyset.$$

La condition précédente informe de la fréquence d'apparition des entiers appartenant à $\mathcal{L}$, supérieure à $\frac{1}{2}$. Le fait que cette fréquence minimale d'apparition soit strictement positive est essentiel pour notre preuve, et c'est ce que nous assure l'hypothèse $q_f, q_{\tilde{f}} \in \mathcal{D}_b$.

Remarque 2. Nous sommes également en mesure de traiter le cas d'une parfaite symétrie par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$ (cela est fait à la fin du chapitre). Cependant, lorsque les potentiels ne sont pas symétriques mais que, néanmoins, les valeurs en 0 et 1 de $x \mapsto q(x)$ et $x \mapsto q(1-x)$ coïncident, ainsi que celles de toutes leurs dérivées, il y a des situations qui ne sont pas couvertes par notre raisonnement, celles où l'existence d'un tel sous-ensemble $\mathcal{L}$ n'est pas établie.

Revenons à la preuve. Dans le cas, par exemple, où

$$M(\kappa_m) - \tilde{M}(\kappa_m) = \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}), \quad m \rightarrow +\infty, \quad m \in \mathcal{L},$$

il est possible, à l'aide d'une représentation intégrale des fonctions de Weyl-Titchmarsh ([Sim99]) et par des arguments d'analyse complexe qui reposent sur la minoration par une constante strictement positive (ici : $\frac{1}{2}$) de la fréquence de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$, d'étendre cette asymptotique au demi-plan à droite, c'est à dire :

$$M(z^2) - \tilde{M}(z^2) = \tilde{O}(e^{-2az}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Le théorème de Borg-Marchenko local nous assure que q_f et $q_{\tilde{f}}$ coïncident sur $[0, a]$. On en déduit alors que $f = \tilde{f}$ sur $[0, a]$. Par permutation des rôles, et en notant toujours $\eta(x) = 1 - x$, les trois autres cas impliquent respectivement $f = \tilde{f} \circ \eta$ sur $[0, a]$, $f \circ \eta = \tilde{f}$ sur $[0, a]$ et $f = \tilde{f}$ sur $[1 - a, 1]$.

Le troisième chapitre a pour objet un résultat de stabilité, toujours pour le modèle introduit au premier chapitre. On y étudie la continuité de la métrique par rapport au spectre. En d'autres termes, on cherche à répondre à la question suivante : une légère perturbation de ce spectre n'entraînera-t-elle qu'un faible changement pour la métrique associée ?

D'emblée, une difficulté surgit : d'après le Théorème 1.1.1 du premier chapitre, un même spectre de Steklov peut être issu de métriques distinctes, ce qui semble ruiner, dans le même temps, tout espoir d'obtenir la stabilité. Cependant, ce même théorème *caractérise* le défaut d'unicité, établissant qu'à un spectre de Steklov sont associées *au plus* deux métriques conformes, de facteurs $f(x)$ et $f(1-x)$. En particulier, la seule façon de récupérer l'unicité stricte est de supposer que les facteurs conformes sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $x = 1/2$. C'est ce cadre dans lequel nous plaçons naturellement notre étude. Nous y démontrons alors que la connaissance de chaque valeur propre de Steklov à une erreur $\varepsilon > 0$ près, fixée, assez petite, entraîne en norme L^2 la connaissance du potentiel $q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f$ à une erreur logarithmique près. En particulier, à fréquence nulle ($\omega = 0$) et pour $n \geq 3$, on en déduit une approximation du facteur conforme. La stratégie de la preuve s'inspire de nouveau de [DKN19c] et fait intervenir deux grandes étapes. On montre en premier lieu, sous une hypothèse de proximité entre deux spectres de Steklov à une erreur ε près, qu'il existe un opérateur $B : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ inversible et un entier $m_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de ε , tels que

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \int_0^1 e^{-2\tau y_m} B(q_f - q_{\tilde{f}})(\tau) d\tau \right| \leq C_A \varepsilon,$$

où $y_m = \sqrt{m(m+n-2)}$. Le changement de variable $\tau = -\ln(t)$ mène alors à un problème des moments

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \int_0^1 t^{2y_m-1} B(q_f - q_{\tilde{f}})(-\ln(t)) dt \right| \leq C_A \varepsilon,$$

dont on déduit, dans un second temps, un contrôle de la fonction $t \mapsto B(q_f - q_{\tilde{f}})(-\ln(t))$ en norme L^2 :

$$\|B(q_f - q_{\tilde{f}})(-\ln(t))\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

On montre finalement que l'opérateur B est inversible d'inverse borné pour la norme subordonnée, ce qui entraîne une majoration pour $\|q_f - q_{\tilde{f}}\|_{L^2(0,1)}$. On en déduit que $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ si $\omega = 0$ et $n \geq 3$.

Enfin, à l'appui des mêmes techniques, nous établissons un résultat de stabilité portant sur le problème de Calderón. S'il n'est plus besoin de supposer la symétrie des facteurs conformes, on fait tout de même intervenir une hypothèse sur la moyenne de la différence

des potentiels $q_f - q_{\tilde{f}}$, quantité qui apparaît naturellement dans nos calculs et que l'on suppose préalablement petite (voir aussi la Remarque 21 p. 101 pour quelques observations d'ordre géométrique).

Liste des publications

Notre travail a donné lieu à deux articles, l'un publié dans la revue *Inverse Problems and Imaging* :

- G. Gendron, *Uniqueness results in the inverse spectral Steklov problem*, *Inverse Problems and Imaging*, **14** (4), 631-664, (2020),

l'autre soumis, disponible sur ArXiv :

- G. Gendron, *Stability estimates for an inverse Steklov problem in a class of hollow spheres*, (2020).

Isospectralité au sens de Steklov

1.1 Introduction

On s'intéresse à l'étude d'un problème inverse d'isospectralité au sein d'une classe de variétés riemanniennes conformes, chacune de même dimension et munie d'une métrique tordue. Nous établissons que le spectre de Steklov caractérise le facteur conforme à une invariance de jauge près.

1.1.1 Les problèmes de Calderón et de Steklov

Considérons une variété riemannienne (M, g) lisse, compacte, à bord ∂M , dont nous notons n la dimension, avec $n \geq 2$. Le problème de Dirichlet est une équation aux dérivées partielles d'inconnue u qui s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \omega u & \text{dans } M \\ u = \psi & \text{sur } \partial M, \end{cases} \quad (1.1)$$

où ψ appartient à $H^{1/2}(M)$ et où le réel ω est fixé en dehors du spectre de Dirichlet de M . En coordonnées locales $(x^i)_{i=1,\dots,n}$ l'opérateur $-\Delta_g$ s'écrit

$$-\Delta_g = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j),$$

où $|g| = \det(g_{ij})$ et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Puisque ω n'appartient pas à $\sigma(-\Delta_g)$, il existe une unique solution u au problème (1.1) dans $H^1(M)$, ce qui nous autorise à définir l'opérateur de *Dirichlet-à-Neumann* par

$$\begin{aligned} \Lambda_g(\omega) : H^{1/2}(\partial M) &\rightarrow H^{-1/2}(\partial M) \\ \psi &\mapsto \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial M}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où ν désigne la dérivée normale sortante sur ∂M . La définition précédente est à traduire au sens plus large des distributions :

$$\forall (\psi, \phi) \in H^{1/2}(\partial M)^2 : \langle \Lambda_g(\omega) \psi, \phi \rangle = \int_M \langle du, dv \rangle_g d\text{Vol}_g + \omega \int_M uv d\text{Vol}_g,$$

où u est l'unique solution faible du problème (1.1) et v n'importe quelle fonction de $H^1(M)$ dont la restriction au bord ∂M est ϕ . Dès que ψ est assez régulière, cette définition coïncide en coordonnées locales avec celle que l'on rencontre d'ordinaire, à savoir

$$\partial_\nu u = \nu^i \partial_i u. \tag{1.3}$$

En première approche, le problème de Calderón anisotrope peut s'énoncer ainsi :

À fréquence ω fixée, la connaissance de l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ détermine-t-elle de manière unique la métrique g ?

Au vu d'un certain nombre d'invariances de jauge, il est connu que la réponse à la question précédente est, en général, négative. Une observation relevée par Luc Tartar (mentionnée dans [KV84], p.2) mène à l'égalité

$$\Lambda_g(\omega) = \Lambda_{\psi^*g}(\omega),$$

pour tout difféomorphisme lisse $\psi : M \rightarrow M$ égal à l'identité sur le bord (ici, ψ^*g désigne le tiré-en-arrière de g par ψ). De plus, en dimension $n = 2$ et pour $\omega = 0$, il existe une obstruction supplémentaire à l'unicité. En effet, par invariance conforme du Laplacien,

pour toute fonction strictement positive c on a

$$\Delta_{cg} = \frac{1}{c} \Delta_g.$$

Par conséquent, les solutions du problème de Dirichlet (1.1) associées respectivement aux métriques g et cg sont les mêmes si ω est nul. De plus, si c vaut 1 sur le bord, les normales unitaires sortantes de ∂M sont également identiques. Par suite

$$\Lambda_{cg}(0) = \Lambda_g(0),$$

et il est manifeste que la métrique ne peut se déduire de la seule donnée de l'opérateur $\Lambda_g(0)$. Cela conduit à une nouvelle formulation du problème qui module la conclusion en substituant à l'unicité stricte une unicité à isométries près. L'actuel problème de Calderón s'énonce de la façon suivante :

*Supposons $n \geq 3$ (resp. $n = 2$ et $\omega \neq 0$). Si $\Lambda_g(\omega) = \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)$, existe-t-il un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ tel que $\psi|_{\partial M} = id$ et $\psi^*g = \tilde{g}$?*

Ce problème reste aujourd'hui largement ouvert. Certains cas particuliers ont été résolus positivement (on renvoie à [Sal13] et [Uhl09] pour un survol de l'état de l'art) mais le cas général s'avère d'étude ardue. La question devient cependant plus accessible en délimitant les données du problème à des classes conformes de variétés. Précisément :

Pour $c \in C^\infty(M)$, supposons l'égalité $\Lambda_g(\omega) = \Lambda_{cg}(\omega)$. Existe-t-il un difféomorphisme lisse $\psi : M \rightarrow M$ tel que $\psi|_{\partial M} = id$ et $\psi^(g) = cg$?*

Nous pouvons encore préciser la question grâce au théorème suivant dû à Lionheart ([Lio97]) : un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ satisfaisant les égalités $\psi^*(cg) = g$ et $\psi|_{\partial M} = id$ est nécessairement l'identité. Le problème de Calderón anisotrope au sein d'une classe conforme peut se reformuler ainsi :

Si $\Lambda_g(\omega) = \Lambda_{cg}(\omega)$, a-t-on $c = 1$?

D'importants résultats ont été obtenus dans [Fer+09] pour des variétés (M, g) de dimension supérieure à 3 et transverse, c'est à dire

$$M \subset \subset \mathbb{R} \times K, \quad g = c(x, y_K)(dx^2 + g_K)$$

où (K, g_K) est une variété compacte de dimension $n - 1$. Lorsque l'on ajoute à K certaines hypothèses géométriques, telles que la *simplicité* (une variété compacte K est dite *simple* si deux points de K peuvent être reliés par une unique géodésique et si son bord est strictement convexe) alors le facteur conforme c est uniquement déterminé par l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann associé à la fréquence $\omega = 0$. D'autres résultats présentés dans [DKN19a; DKN19b] apportent la solution au problème d'unicité de la métrique lorsque M admet la topologie d'un cylindre à deux bouts $[0, 1] \times K$. Leurs preuves font intervenir une séparation des variables qui permet de représenter l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ à l'aide des fonctions de *Weyl-Titchmarsh*. Ces fonctions sont classiquement associées au potentiel q d'un opérateur de Sturm-Liouville en dimension 1 et apparaissent ici lorsque le problème (1.1) est reformulé en un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 dont le potentiel est invariant. La représentation de $\Lambda_g(\omega)$ permet alors l'emploi de puissantes techniques issues de l'analyse complexe. En s'inspirant de ce travail, on étudie un problème voisin au sein de la classe de variétés $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ ayant une structure de produit tordu (où $\mathbb{S}^{n-1}$ est l'hypersphère de dimension $n - 1$) en posant la question suivante :

Le spectre de l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ caractérise-t-il le facteur conforme ?

Rappelons que $\Lambda_g(\omega)$ est un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 1 et autoadjoint sur $L^2(\partial M, dS_g)$, où dS_g est la métrique induite par g sur le bord ∂M . Ainsi, l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ possède un spectre discret, noté $\sigma(\Lambda_g(\omega))$, divergeant vers $+\infty$

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) = \{\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow +\infty\}.$$

On l'appelle communément *spectre de Steklov* (voir [JS14], p.2). Dans le cas particulier où la fréquence ω est nulle, on peut établir, à l'aide de la formule de Green, la positivité de l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$, ce qui implique $\lambda_0 = 0$. Les propriétés du spectre de Steklov varient sensiblement avec la régularité du bord ∂M . Par exemple (voir [GP17]) : si ∂M est lisse, les valeurs propres vérifient la formule de Weyl pour le spectre de Steklov :

$$\lambda_j = 2\pi \left(\frac{j}{\text{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) \text{Vol}(\partial M)} \right)^{\frac{1}{n-1}} + O(1). \quad (1.4)$$

Ce développement asymptotique peut-être précisé si M est une surface lisse. Il fait intervenir les longueurs des composantes connexes de M , avec un taux de décroissance en $O(j^{-\infty})$ (voir [Gir+19]). Ce résultat, cependant, n'est plus vrai pour les polygones

([GP17]). Dans certains cas, lorsque le bord ∂M est simplement C^1 , il est également possible d'obtenir une asymptotique du premier ordre pour les valeurs propres de Steklov comptées avec multiplicité (voir [Agr06]). Pour certains domaines plus spécifiques dont le bord est Lipschitzien, un article récent ([Gir+19]) établit une formule asymptotique d'ordre 2 pour des pavés droits (*cuboids* en anglais), c'est à dire des domaines définis, pour $n \geq 2$, par

$$M = (-a_1, a_1) \times \dots \times (-a_n, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction de comptage $N(\lambda)$ des valeurs propres de Steklov est alors la suivante pour $n \geq 3$:

$$N(\lambda) = C_1 \text{Vol}_{n-1}(\partial M) \lambda^{n-1} + C_2 \text{Vol}_{n-2}(\partial^2 M) \lambda^{n-2} + O(\lambda^\eta),$$

où $\partial^2 M$ est l'union de toutes les faces de dimension $n - 2$ de M , $\eta = \frac{2}{3}$ si $n = 3$ et $\eta = n - 2 - \frac{1}{n-1}$ si $n \geq 4$. Ici, C_1 et C_2 sont deux constantes réelles. Si $n = 2$, on dispose de l'asymptotique

$$N(\lambda) = \pi^{-1} \text{Vol}_1(\partial M) \lambda + O(1).$$

En corollaire, les auteurs déduisent pour un rectangle que le spectre de Steklov détermine la longueur de ses côtés. En d'autres termes, ce sont des invariants spectraux. D'autres quantités géométriques sont connues pour l'être. On peut citer par exemple (voir [Gir+19; GP17] pour les détails et références) :

- la dimension de la variété et le volume de son bord.
- Lorsque $\dim M \geq 3$, l'intégrale de la courbure moyenne sur ∂M .
- Lorsque $\dim M = 2$, le nombre de composantes connexes de ∂M et leurs diamètres.

On pourra également consulter [GHW18] pour une présentation de méthodes de constructions de variétés isospectrales (au sens de Steklov).

1.1.2 Le résultat

Nous présentons ici en détails l'énoncé de notre premier résultat. Considérons la variété $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ munie de la métrique

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}), \tag{1.5}$$

où $\mathbb{S}^{n-1}$ est l'hypersphère de $\mathbb{R}^n$, $g_{\mathbb{S}}$ la métrique induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et où le facteur conforme f désigne une fonction strictement positive en la variable $x \in [0, 1]$. La variété M présentant deux bords $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ et $\Gamma_1 = \{1\} \times \mathbb{S}^{n-1}$, on identifie naturellement $\Lambda_g(\omega)$ à un opérateur défini sur l'espace $H^{1/2}(\mathbb{S}^{n-1}) \oplus H^{1/2}(\mathbb{S}^{n-1})$, dont l'expression sera précisée plus loin. La question à laquelle nous souhaitons répondre est celle-ci : Le spectre de Steklov caractérise-t-il la fonction conforme f sur $[0, 1]$? Ce problème a été résolu positivement dans [DKN19c] pour $M' = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$ munie de la métrique (1.5). La différence entre ce modèle et le nôtre réside dans la topologie des variétés M et M' . Le bord $\partial M'$ est constitué d'une copie de $\mathbb{S}^{n-1}$ et, par suite, est connexe. Celui de M , en revanche, possède deux composantes connexes, ce qui n'est pas sans poser des difficultés spécifiques sur lesquelles nous reviendrons. Signalons, en premier lieu, que l'on ne peut espérer obtenir, au sens strict, une caractérisation de f par le spectre de Steklov en raison d'une invariance de jauge naturelle. En effet, soit $\psi : M \rightarrow M$ un difféomorphisme lisse. On a l'identité ([JS14]) :

$$\Lambda_{\psi^*g}(\omega) = \varphi^* \circ \Lambda_g(\omega) \circ \varphi^{*-1},$$

où $\varphi := \psi|_{\partial M}$ et où $\varphi^* : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$ est l'application définie par $\varphi^*h := h \circ \varphi$. En particulier :

$$\sigma(\Lambda_{\psi^*g}(\omega)) = \sigma(\Lambda_g(\omega)).$$

Pour trouver un contre-exemple à la caractérisation de la métrique par la donnée du spectre de Steklov, il suffit de trouver un difféomorphisme ψ , non égal à l'identité, qui préserve la structure de produit tordu de la variété M donnée par (1.5). Considérons par exemple

$$\psi : (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} \mapsto (1 - x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Un calcul simple mène à l'égalité $\psi^*g = f(1 - x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}})$. Par conséquent $\Lambda_g(\omega)$ et $\Lambda_{\psi^*g}(\omega)$ possèdent le même spectre de Steklov. Ayant à l'esprit cette obstruction, nous reformulons avec précision notre question initiale. Soit g et $\tilde{g}$ deux métriques de M données par (1.5) dont nous notons respectivement $f(x)$ et $\tilde{f}(x)$ les facteurs conformes. Supposons que $\Lambda_g(\omega)$ et $\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)$ aient le même spectre. En définissant $\eta : x \mapsto 1 - x$ sur $[0, 1]$, a-t-on nécessairement

$$f = \tilde{f} \quad \text{ou} \quad f = \tilde{f} \circ \eta \quad ?$$

Dans ce qui suit, nous répondons à cette question par l'affirmative en dimension $n = 2$

avec $\omega \neq 0$, ainsi qu'en dimension supérieure pour toute fréquence ω avec une hypothèse supplémentaire sur les métriques au bord ∂M .

La raison pour laquelle notre choix se porte sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ comme variété transverse est purement technique. En effet, notre preuve requiert une asymptotique précise (et même exacte) des valeurs propres de l'opérateur de Laplace Beltrami $\Delta_{g_{\mathbb{S}}}$ sur $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}})$. Nous soulignons par ailleurs le fait suivant : dans notre problème inverse, la métrique transverse $g_{\mathbb{S}}$ est fixe. Si tel n'est pas le cas, on sait pouvoir trouver deux métriques transverses non isométriques telles que les variétés associées sont isospectrales. Cela conduirait alors, dans notre cas, à des cylindres isospectraux. De même, si $\dim(M) \geq 3$, il est connu (voir [Gir+19; Par13]) que l'on peut construire des variétés isospectrales au sens de Steklov $M = [0, L] \times K$ et $\tilde{M} = [0, L] \times \tilde{K}$ (avec K et $\tilde{K}$ non connexes) telles que les aires des composantes connexes respectives de M et $\tilde{M}$ ne soient pas identiques.

L'énoncé de notre résultat d'unicité est le suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit la variété riemannienne lisse $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ munie des métriques*

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \tilde{f}(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}),$$

et soit $\omega \in \mathbb{R}$ n'appartenant pas au spectre de $-\Delta_g$ ni à celui de $-\Delta_{\tilde{g}}$.

1. *Pour $n = 2$ et une fréquence ω non nulle,*

$$\left(\sigma(\Lambda_g(\omega)) = \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \right) \Leftrightarrow \left(f = \tilde{f} \quad \text{ou} \quad f = \tilde{f} \circ \eta \right)$$

où $\eta(x) = 1 - x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

2. *Pour $n \geq 3$, si de plus*

$$f, \tilde{f} \in \mathcal{C}_b := \left\{ f \in C^\infty([0, 1]), \left| \frac{f'(k)}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{n-2}, k = 0 \text{ et } 1 \right\},$$

alors

$$\left(\sigma(\Lambda_g(\omega)) = \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \right) \Leftrightarrow \left(f = \tilde{f} \quad \text{ou} \quad f = \tilde{f} \circ \eta \right).$$

Le schéma de la preuve est commun aux cas $n = 2$ et $n \geq 3$. Il se décompose en quatre étapes dont les trois premières n'invoquent pas la spécificité de la variété transverse au cas de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$. Ceci n'apparaît qu'au cours de la dernière étape.

Étape 1. Nous employons ici les techniques mises en œuvre par Daudé, Kamran et Nico-leau dans [DKN19a]. Puisque M possède la topologie d'un cylindre et est munie d'une métrique de type produit tordu, nous séparons les variables en écrivant la solution u du problème de Dirichlet (1.1) sous la forme

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x) Y_m(y),$$

et la fonction ψ qui fixe u sur ∂M

$$\psi(y) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \psi_m^0 Y_m(y) \\ \psi_m^1 Y_m(y) \end{pmatrix}$$

où ψ^0 et ψ^1 désignent respectivement la composante de ψ sur $\{0\} \times K$ et $\{1\} \times K$. On rap-porte ainsi l'étude à celle du système dénombrable d'équations différentielles ordinaires de type Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} -v_m'' + q_f v_m = -\mu_m v_m, & \text{sur }]0, 1[\\ v_m(0) = f^{\frac{n-2}{4}}(0) \psi_m^0, & v_m(1) = f^{\frac{n-2}{4}}(1) \psi_m^1, \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

où

$$q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f \quad \text{et} \quad v_m = f^{\frac{n-2}{4}} u_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

La suite (Y_m) désigne ici une base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta_{g_S}$ sur la sphère unité. On notera simplement par la suite : $q = q_f$ et $\tilde{q} = q_{\tilde{f}}$.

Étape 2. On diagonalise par blocs l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$. Plus précisément, considérons la base hilbertienne $\mathfrak{B} = (\{e_m^1, e_m^2\})_{m \in \mathbb{N}}$, avec $e_m^1 = (Y_m, 0)$ et $e_m^2 = (0, Y_m)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda_g^m(\omega)$ l'opérateur induit par $\Lambda_g(\omega)$ sur le sous-espace engendré par $\{e_m^1, e_m^2\}$. La matrice de $\Lambda_g(\omega)$ dans cette base $\mathfrak{B}$ s'écrit

$$[\Lambda_g]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \Lambda_g^1(\omega) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \Lambda_g^2(\omega) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \Lambda_g^3(\omega) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Chaque matrice $\Lambda_g^m(\omega)$ est de taille 2 et possède une représentation simple faisant inter-

venir les fonctions de Weyl-Titchmarsh issues des équations de Sturm-Liouville (1.6). En notant

$$\sigma(-\Delta_{g_S}) = \{0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots \rightarrow +\infty\}$$

le spectre de $-\Delta_{g_S}$ et $h := f^{n-2}$, nous obtenons :

$$\Lambda_g^m(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \end{pmatrix}$$

où $M(z)$, $N(z)$ sont les fonctions de Weyl-Titchmarsh et $\Delta(z)$ la fonction caractéristique associées à l'équation ordinaire (1.6). En particulier, la trace et le déterminant de ces opérateurs $\Lambda_g^m(\omega)$ sont des fonctions méromorphes évaluées en μ_m . De plus, on peut montrer que le spectre de Steklov se décompose en deux sous-suites $(\lambda^-(\mu_m))_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda^+(\mu_m))_{m \in \mathbb{N}}$ satisfaisant les asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} + O(\sqrt{\mu_m} e^{-\sqrt{\mu_m}}) \\ \lambda^+(\mu_m) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} + O(\sqrt{\mu_m} e^{-\sqrt{\mu_m}}) \end{cases}$$

Étape 3. On démontre que la connaissance, à partir d'un certain rang, des traces et des déterminants de chaque opérateur induit $\Lambda_g^m(\omega)$ caractérise f à une involution près : il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} (\text{Tr } \Lambda_g^m(\omega) = \text{Tr } \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega) \text{ et } \det \Lambda_g^m(\omega) = \det \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega) \text{ pour tout } m \geq m_0) \\ \Leftrightarrow (f = \tilde{f} \text{ ou } f = \tilde{f} \circ \eta.) \end{aligned}$$

Cette étape demande de connaître le comportement asymptotique des éléments du spectre de Steklov.

Étape 4. Ici seulement apparaît le choix de $\mathbb{S}^{n-1}$ comme variété transverse. Celle-ci est munie de la métrique induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. De l'égalité des ensembles $\sigma(\Lambda_g(\omega)) = (\lambda^\pm(\mu_m))_{m \in \mathbb{N}}$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) = (\tilde{\lambda}^\pm(\mu_m))_{m \in \mathbb{N}}$, nous voulons déduire

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \tilde{\lambda}^-(\mu_m) \\ \lambda^+(\mu_m) = \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \\ \lambda^+(\mu_m) = \tilde{\lambda}^-(\mu_m), \end{cases}$$

pour des entiers m appartenant à un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ satisfaisant la condition de Müntz $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$. Il est clair que, pour chaque $\lambda^\pm(\mu_m)$ de $\sigma(\Lambda_g(\omega))$, il existe $\tilde{\lambda}^-(\mu_\ell)$ ou $\tilde{\lambda}^+(\mu_\ell)$ dans $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ tel que

$$\lambda^\pm(\mu_m) = \tilde{\lambda}^-(\mu_\ell) \quad \text{ou} \quad \lambda^\pm(\mu_m) = \tilde{\lambda}^+(\mu_\ell).$$

L'hypothèse $\left| \frac{f'(k)}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{n-2}$ pour $k \in \{0, 1\}$ est utile ici pour assurer l'égalité $m = \ell$ dès que m est assez grand. Cette étape conduit à distinguer le cas où $f(0)$ et $f(1)$ sont égaux de celui où ils diffèrent. Nous montrons alors que les égalités $\text{Tr } \Lambda_g^m(\omega) = \text{Tr } \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)$ et $\det \Lambda_g^m(\omega) = \det \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)$ sont vraies si m est assez grand. Les résultats montrés à l'étape 3 permettent de conclure.

Remarque 3. L'étape 3 établit la conclusion du Théorème 1.1 sous une condition suffisante dans un cadre plus général. Il se peut donc que certains résultats se recoupent avec ceux de l'étape 4.

1.2 Réduction du problème à l'étude d'une EDO

Dans cette section, (K, g_K) est une variété quelconque fermée de dimension $n - 1$ et (M, g) désigne la variété produit $[0, 1] \times K$ munie de la métrique $g = f(x)(dx^2 + g_K)$.

1.2.1 La séparation des variables

Le bord ∂M de M possédant deux composantes connexes distinctes

$$\Gamma_0 = \{0\} \times K \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \{1\} \times K,$$

nous pouvons décomposer $H^{1/2}(\partial M)$ en la somme directe

$$H^{1/2}(\partial M) = H^{1/2}(\Gamma_0) \oplus H^{1/2}(\Gamma_1).$$

On adoptera ainsi un point de vue matriciel pour décrire un élément ψ de $H^{1/2}(\partial M)$:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix}, \quad \psi^0 \in H^{1/2}(\Gamma_0) \quad \text{et} \quad \psi^1 \in H^{1/2}(\Gamma_1).$$

Le laplacien $-\Delta_{g_K}$ est un opérateur autoadjoint sur $L^2(K)$ et possède un spectre ponctuel (μ_m) , avec $\mu_0 = 0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \mu_m \rightarrow +\infty$. On note $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la base hilbertienne de fonctions propres associée dans $L^2(K)$. En identifiant Γ_0 et Γ_1 à K , nous pouvons décomposer ψ^0 et ψ^1 sur la base (Y_m) :

$$\psi^0 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \psi_m^0 Y_m, \quad \psi^1 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \psi_m^1 Y_m$$

et chercher l'unique solution $u(x, y)$ du problème de Dirichlet (1.1) sous la forme

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x) Y_m(y).$$

Proposition 1.2.1. *Résoudre l'équation (1.1) revient à résoudre le système d'équations de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} -v_m'' + qv_m = -\mu_m v_m, & \text{sur } [0, 1] \\ v_m(0) = f^{\frac{n-2}{4}}(0)\psi_m^0, \quad v_m(1) = f^{\frac{n-2}{4}}(1)\psi_m^1, \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

où

$$q = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad v_m = f^{\frac{n-2}{4}} u_m.$$

Remarque 4. Signalons que le réel μ_m n'est pas une valeur propre de Dirichlet pour l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ sinon, en notant u_m une fonction propre associée, la fonction $u = u_m Y_m$ serait solution non triviale du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \omega u & \text{dans } M \\ u = 0 & \text{sur } \partial M, \end{cases}$$

et ω serait dans le spectre de Dirichlet, ce qu'il n'est pas par hypothèse (cet argument est repris de [DKN19a], Remarque 3.1 p.19).

On prouve la Proposition 1.2.1 :

Démonstration. D'après la loi de transformation de l'opérateur de Laplace-Beltrami par changement de métrique conforme, on a l'égalité

$$-\Delta_g = f^{-\frac{n+2}{4}} (-\Delta_{g_0} + d_f) f^{\frac{n-2}{4}},$$

où $g_0 = dx^2 + g_K$ et $d_f := \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}}$.

Par suite :

$$\begin{aligned} -\Delta_g u(x, y) = \omega u(x, y) &\Leftrightarrow f^{-\frac{n+2}{4}} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{g_K} + d_f \right) f^{\frac{n-2}{4}} u(x, y) = \omega u(x, y) \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{g_K} + d_f \right) v(x, y) = \omega f(x) v(x, y), \end{aligned}$$

avec le changement de variable $v = f^{\frac{n-2}{4}} u$. On peut décomposer v sur la base (Y_m) :

$$v(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} v_m(x) Y_m(y),$$

et injecter cette expression dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} -\Delta_g u(x, y) = \omega u(x, y) &\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta_{g_K} + d_f \right) v_m(x) Y_m = \sum_{m=0}^{+\infty} \omega f(x) v_m(x) Y_m \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-v_m''(x) + \mu_m v_m(x) + d_f(x) v_m(x) \right) Y_m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \omega f(x) v_m(x) Y_m \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, -v_m''(x) + q(x) v_m(x) = -\mu_m v_m(x), \end{aligned}$$

où $q := d_f - \omega f$. Enfin :

$$\begin{aligned} u = \psi \text{ sur } \partial\Omega &\Leftrightarrow \begin{cases} u(0, \cdot) = \psi_0 \\ u(1, \cdot) = \psi_1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_m(0) = \psi_m^0 \\ u_m(1) = \psi_m^1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : \begin{cases} v_m(0) = f^{\frac{n-2}{4}}(0) \psi_m^0 \\ v_m(1) = f^{\frac{n-2}{4}}(0) \psi_m^1 \end{cases} \end{aligned}$$

et la fonction v_m vérifie bien les conditions au bord de l'équation (1.7). $\square$

Notre étude a donc rapport avec la théorie des équations de Sturm-Liouville unidimensionnelle. Notons que le potentiel q reste indépendant du paramètre m , ce qui va nous permettre, plus précisément, d'utiliser à profit la *théorie de Weyl-Titchmarsh*. Le paragraphe qui suit en rappelle quelques points utiles.

1.2.2 Fonctions de Weyl-Titchmarsh

Soit l'équation différentielle ordinaire

$$-u'' + qu = -zu, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

On note $\{c_0, s_0\}$ et $\{c_1, s_1\}$ les deux systèmes de solutions de (1.8) dont les conditions initiales vérifient

$$\begin{cases} c_0(0) = 1, & c'_0(0) = 0 \\ c_1(1) = 1, & c'_1(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s_0(0) = 0, & s'_0(0) = 1 \\ s_1(1) = 0, & s'_1(1) = 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Étant données deux solutions f et g de (1.8), le wronskien $W(f, g) = fg' - f'g$ reste constant par rapport à la variable x , dépendant ainsi du seul paramètre z . On peut donc définir les fonctions de la variable complexe suivantes :

Définition 1.2.2. La fonction caractéristique $\Delta(z)$ de l'équation (1.8) est définie, pour tout z dans $\mathbb{C}$, par

$$\Delta(z) := W(s_0, s_1) = s_0(1) = -s_1(0).$$

On pose également $D(z) := W(c_0, s_1) = c_0(1)$ et $E(z) := W(c_1, s_0) = c_1(0)$.

Les trois propositions qui suivent joueront plus tard un rôle important (les détails sont donnés dans [DKN19a] et [PT87]).

Proposition 1.2.3. Notons $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ le demi-plan à droite. Les fonctions Δ , D et E sont analytiques sur $\mathbb{C}$ et vérifient sur Π^+ les asymptotiques suivantes lorsque $\Re(z)$ tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} + O\left(\frac{e^{|\Re(\sqrt{z})|}}{\sqrt{z}}\right), & D(z) &= \cosh(\sqrt{z}) + O\left(\frac{e^{|\Re(\sqrt{z})|}}{\sqrt{z}}\right), \\ E(z) &= \cosh(\sqrt{z}) + O\left(\frac{e^{|\Re(\sqrt{z})|}}{\sqrt{z}}\right) \end{aligned}$$

où $\sqrt{z}$ désigne la détermination principale de la racine carrée de z . En particulier, $\Delta(z)$, $D(z)$ et $E(z)$ sont des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{2}$.

Proposition 1.2.4. *Les racines (α_j) de la fonction $z \mapsto \Delta(z)$ sont réelles et simples. Ce sont les opposées des valeurs propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + q =: H$ sur $L^2((0, 1), dx)$ avec conditions au bord de Dirichlet.*

Proposition 1.2.5. *La fonction $\Delta(z)$ se représente à l'aide d'un produit infini. Il existe une constante réelle C telle que :*

$$\Delta(z) = C \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right).$$

Démonstration. Une conséquence directe de la Proposition 1.2.3 et du théorème de factorisation de Hadamard nous permet de représenter $\Delta(z)$ par le produit

$$\Delta(z) = Cz^p \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right),$$

avec p dans $\{0, 1\}$. Pour démontrer que $z = 0$ n'est pas racine de Δ , nous reprenons les arguments donnés à la Remarque 4 et présents dans [DKN19a] (Remarque 3.1 p.19). Supposons donc l'égalité $\Delta(0) = 0$. La Proposition 1.2.4 affirme l'existence d'une fonction propre u_0 associée à la valeur propre 0 pour l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q$. D'après la Proposition 1.2.1, la fonction $u := u_0 Y_0$ est alors une solution non triviale du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \omega u & \text{in } M \\ u = 0 & \text{on } \partial M, \end{cases}$$

contredisant le fait que ω n'appartient pas à $\sigma(-\Delta_g)$. □

Remarque 5. La Proposition 1.2.5 nous fournit une caractérisation de $\Delta(z)$ par ses zéros (modulo une constante) puisque ceux-ci sont tous simples.

Considérons à présent les solutions de Weyl-Titchmarsh ψ et ϕ de (1.8) qui sont de la forme

$$\psi(x) = c_0(x) + M(z)s_0(x), \quad \phi(x) = c_1(x) - N(z)s_1(x)$$

et vérifiant la condition de Dirichlet au bord respectivement en $x = 1$ et $x = 0$. Les fonctions $M(z)$ et $N(z)$ sont appelées *fonctions de Weyl-Titchmarsh* associées à l'équation (1.8). On obtient immédiatement :

Proposition 1.2.6. *Les fonctions de Weyl-Titchmarsh M et N s'écrivent :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad M(z) = -\frac{D(z)}{\Delta(z)}, \quad N(z) = -\frac{E(z)}{\Delta(z)}.$$

Démonstration. Puisque $\psi(1) = 0$ et $\phi(0) = 0$, on a :

$$M(z) = -\frac{c_0(1, z)}{s_0(1, z)} = -\frac{D(z)}{\Delta(z)}, \quad N(z) = \frac{c_1(0, z)}{s_1(0, z)} = -\frac{E(z)}{\Delta(z)}.$$

□

Nous verrons que le spectre de Steklov peut s'exprimer à l'aide des fonctions de Weyl-Titchmarsh et de la fonction caractéristique définies ci-dessus. Nous pourrions alors exploiter les propriétés d'holomorphic de $\Delta(z)$, $D(z)$ et $E(z)$ et faire appel au théorème de Nevanlinna (les détails sont dans la prochaine section).

1.2.3 Diagonalisation de l'opérateur Dirichlet-à-Neumann

Remarquons tout d'abord que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$ stabilise le sous-espace de dimension 2 engendré par $\{(Y_m, 0), (0, Y_m)\}$. En effet, pour tout ψ dans $H^{1/2}(\partial M)$, en notant u la solution de (1.1) dont la condition au bord est donnée par ψ , on a :

$$\Lambda_g(\omega)\psi = \Lambda_g(\omega) \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_\nu u)|_{\Gamma_0} \\ (\partial_\nu u)|_{\Gamma_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{f(0)}}(\partial_x u)|_{x=0} \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}}(\partial_x u)|_{x=1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier m , il vient donc (en reprenant les notations utilisées au moment de séparer les variables) :

$$\Lambda_g(\omega) \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} \otimes Y_m = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{f(0)}}u'_m(0) \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}}u'_m(1) \end{pmatrix} \otimes Y_m.$$

La restriction de $\Lambda_g(\omega)$ à $\text{Vect}((1, 0) \otimes Y_m, (0, 1) \otimes Y_m)$ est notée $\Lambda_g^m(\omega)$. Cet opérateur induit possède la structure d'une matrice carrée de taille 2

$$\begin{pmatrix} L^m(\omega) & T_R^m(\omega) \\ T_L^m(\omega) & R^m(\omega) \end{pmatrix}.$$

Par définition, on a donc

$$\begin{pmatrix} L^m(\omega) & T_R^m(\omega) \\ T_L^m(\omega) & R^m(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} u'_m(0) \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}} u'_m(1) \end{pmatrix}.$$

Le spectre de Steklov est alors égal à l'union des spectres de chaque opérateur $\Lambda_g^m(\omega)$.

Remarque 6. L'ordre croissant d'apparition des valeurs propres du spectre de Steklov *global* ne coïncide pas nécessairement avec celui des valeurs propres des blocs $\Lambda_g^m(\omega)$.

Il convient désormais de rechercher l'expression exacte de $\Lambda_g^m(\omega)$. C'est l'objet de la Proposition suivante :

Proposition 1.2.7. *Pour tout entier m , on a :*

$$\Lambda_g^m(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln'(h)(0)}{4\sqrt{f(0)}} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln'(h)(1)}{4\sqrt{f(1)}} \end{pmatrix}$$

où $h := f^{n-2}$.

Démonstration. Rappelons que v_m désigne le m -ième coefficient de Fourier de $v = h^{1/4}u$ contre la fonction Y_m . On a :

$$\begin{aligned} \Lambda_g^m(\omega) \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} u'_m(0) \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}} u'_m(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{v'_m(0)}{h^{1/4}(0)\sqrt{f(0)}} + \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} u_m(0) \\ \frac{v'_m(1)}{h^{1/4}(1)\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} u_m(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{v'_m(0)}{h^{1/4}(0)\sqrt{f(0)}} \\ \frac{v'_m(1)}{h^{1/4}(1)\sqrt{f(1)}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} \psi_m^0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \psi_m^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il reste à trouver une expression du premier terme en fonction du membre de droite. Puisque v_m est une solution de (1.7), elle s'exprime au choix comme combinaison linéaire des solutions des systèmes fondamentaux $\{c_0, s_0\}$ ou $\{c_1, s_1\}$ définis en (1.9). Il existe ainsi $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans $\mathbb{C}^4$ vérifiant simultanément :

$$v_m = \alpha c_0 + \beta s_0 = \gamma c_1 + \delta s_1.$$

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} v_m(0) \\ v_m(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c_1(0) + \delta s_1(0) \\ \alpha c_0(1) + \beta s_0(1) \end{pmatrix}$$

La seconde égalité se réécrit

$$\begin{pmatrix} \alpha - \gamma c_1(0) \\ \gamma - \alpha c_0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta s_1(0) \\ \beta s_0(1) \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_1(0) \\ -c_0(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta s_1(0) \\ \beta s_0(1) \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{1/4}(0)u_m(0) \\ h^{1/4}(1)u_m(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{1/4}(0)\psi_m^0 \\ h^{1/4}(1)\psi_m^1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{h^{1/4}(0)}{s_1(0)} & -\frac{h^{1/4}(1)c_1(0)}{s_1(0)} \\ -\frac{h^{1/4}(0)c_0(1)}{s_0(1)} & \frac{h^{1/4}(1)}{s_0(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Mais $\delta = v'_m(1)$ et $\beta = v'_m(0)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Lambda_g^m(\omega) \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{v'_m(0)}{h^{1/4}(0)\sqrt{f(0)}} \\ \frac{v'_m(1)}{h^{1/4}(1)\sqrt{f(1)}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} \psi_m^0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \psi_m^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{c_0(1)}{s_0(1)} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)s_0(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)s_1(0)} & -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{c_1(0)}{s_1(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} \psi_m^0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \psi_m^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{c_0(1)}{s_0(1)} + \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)s_0(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)s_1(0)} & -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{c_1(0)}{s_1(0)} - \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_m^0 \\ \psi_m^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnait, par définition, l'expression des fonctions M , N et Δ évaluées en μ_m :

$$M(\mu_m) = -\frac{c_0(1)}{s_0(1)}, \quad N(\mu_m) = \frac{c_1(0)}{s_1(0)} \quad \text{et} \quad \Delta(\mu_m) = -s_1(0) = s_0(1).$$

Autrement dit :

$$\Lambda_g^m(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \end{pmatrix}$$

qui est l'égalité cherchée. $\square$

Remarque 7. Pour tout entier m , la quantité $\Delta(\mu_m)$ est bien non nulle puisque μ_m n'est pas dans le spectre de Dirichlet de $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q$.

1.3 Une caractérisation par la trace et le déterminant

Dans cette section, (K, g_K) est toujours une variété fermée quelconque de dimension $n - 1$ et $M = [0, 1] \times K$ le cylindre muni de la métrique $g = f(x)(dx^2 + g_K)$. Nous y démontrons le résultat suivant :

Proposition 1.3.1. *Supposons que, pour tout entier m , on ait :*

$$\det(\Lambda_g^m(\omega)) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)),$$

alors

$$f = \tilde{f} \quad \text{ou} \quad f = \tilde{f} \circ \eta$$

où, pour tout $x \in [0, 1]$, $\eta(x) = 1 - x$.

Remarque 8. Cette proposition reste vraie si les égalités portant sur les traces et déterminants de $\Lambda_g^m(\omega)$ sont satisfaites pour $m \geq m_0$, avec m_0 un entier fixé.

Afin de prouver cette proposition, nous commençons par déterminer les valeurs propres de l'opérateur induit $\Lambda_g^m(\omega)$. En fait, la connaissance de leurs asymptotiques, qui est l'objet du lemme suivant, suffit.

Lemme 1.3.2. *L'opérateur induit $\Lambda_g^m(\omega)$ possède deux valeurs propres $\lambda^-(\mu_m)$ et $\lambda^+(\mu_m)$ dont les asymptotiques sont données par*

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) \underset{m \rightarrow \infty}{=} \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) \\ \lambda^+(\mu_m) \underset{m \rightarrow \infty}{=} \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right). \end{cases}$$

où l'on a noté $h = f^{n-2}$.

Remarque 9. Dans le cas où $f(0) < f(1)$, on a asymptotiquement $\lambda^-(\mu_m) < \lambda^+(\mu_m)$. Cette hypothèse sera faite, sans perte de généralité, chaque fois que $f(0)$ et $f(1)$ seront différents (c'est pourquoi nous employons les notations $\lambda^-(\mu_m)$ et $\lambda^+(\mu_m)$).

Remarque 10. D'après la loi de Weyl pour les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami, on dispose de l'asymptotique

$$\mu_m = 4\pi^2 \left(\text{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) \text{Vol}(K) \right)^{-\frac{2}{n-1}} m^{\frac{2}{n-1}} + O(m^{\frac{1}{n-1}}).$$

En remplaçant, dans l'énoncé du Lemme 1.3.2, la valeur propre μ_m par l'expression précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \lambda^-(\mu_m) &\underset{m \rightarrow \infty}{=} \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(1)}} + O(1) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{f(1)}} \left(\text{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) \text{Vol}(K) \right)^{-\frac{1}{n-1}} m^{\frac{1}{n-1}} + O(1). \end{aligned}$$

Puisque la composante Γ_1 est une copie de K munie de la métrique $\gamma_1 = f(1)g_K$, on a :

$$\text{Vol}(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} d\text{Vol}_{\gamma_1} = f(1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Vol}(K),$$

puis $\frac{1}{\sqrt{f(1)}} = \frac{\text{Vol}(K)^{\frac{1}{n-1}}}{\text{Vol}(\Gamma_1)^{\frac{1}{n-1}}}$. Il vient alors :

$$\lambda^-(\mu_m) = 2\pi \left(\frac{m}{\text{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) \text{Vol}(\Gamma_1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} + O(1).$$

L'asymptotique de $\lambda^-(\mu_m)$ que l'on obtient n'est donc rien d'autre que la loi de Weyl restreinte à la composante Γ_1 . De la même manière, on peut établir :

$$\lambda^+(\mu_m) = 2\pi \left(\frac{m}{\text{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) \text{Vol}(\Gamma_0)} \right)^{\frac{1}{n-1}} + O(1).$$

On reconnaît de nouveau la loi de Weyl restreinte à la composante Γ_0 .

Remarque 11. Les égalités du Lemme 1.3.2 mettent en exergue les relations entre le spectre de Steklov et celui du laplacien sur le bord. Notons les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $(K, f(0)g_K)$ par

$$\mu_0^{(0)} \leq \mu_1^{(0)} \leq \mu_2^{(0)} \leq \dots \rightarrow +\infty$$

avec $\mu_m^{(0)} = \frac{\mu_m}{f(0)}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Le Lemme 1.3.2 implique en particulier qu'il existe une constante $C_f^{(0)} > 0$ ne dépendant que du facteur conforme f et de sa dérivée en $x = 0$ telle que

$$|\lambda^+(\mu_m) - \sqrt{\mu_m^{(0)}}| \leq C_f^{(0)}.$$

Cette estimation peut être rapprochée d'autres résultats obtenus dans [PS19] (Théorème 1.7 p.2) où il est démontré que, pour un domaine borné $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dont le bord est C^2 et connexe, il existe une borne $C_\Omega > 0$, dépendant de Ω seulement, telle que

$$|\lambda_m - \sqrt{\mu_m}| \leq C_\Omega, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

où λ_m et μ_m sont respectivement la m -ième valeur propre de Steklov et la m -ième valeur propre de Dirichlet au bord. Dans notre cas, $C_f^{(0)}$ ne dépend que de la métrique de la composante du bord $(K, f(0)g_K)$. On peut établir un second parallèle avec un récent article ([CGH19], Théorème 3, p.3) où il est démontré que la borne précédente C_Ω peut être choisie uniformément par rapport à une classe de variétés $\mathcal{M}$ vérifiant certaines conditions géométriques au voisinage du bord.

De façon similaire, le Lemme 1.3.2 entraîne l'existence d'une borne $C_f^{(1)} > 0$ ne dépendant que du facteur conforme f en $x = 1$ et telle que

$$|\lambda^-(\mu_m) - \sqrt{\mu_m^{(1)}}| \leq C_f^{(1)}$$

où $\mu_m^{(1)} = \frac{\mu_m}{f(1)}$ est la m -ième de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $(\mathbb{S}, f(1)g_{\mathbb{S}})$.

Démontrons maintenant le Lemme 1.3.2.

Démonstration. On distingue deux cas :

- Supposons $f(0) \neq f(1)$ (par exemple $f(0) < f(1)$) et, pour alléger les notations, notons

$$C_0 = \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}}, \quad C_1 = \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}}.$$

Le polynôme caractéristique $P(X)$ de $\Lambda_g^m(\omega)$ est

$$P(X) = X^2 - \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega))X + \det(\Lambda_g^m(\omega)).$$

Grâce aux Propositions 1.2.3 et 1.2.7, pour m assez grand, $\text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega))$ et $\det(\Lambda_g^m(\omega))$ vérifient

$$\begin{cases} \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_0 - C_1. \\ \det(\Lambda_g^m) = \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0\right)\left(-\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right) + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{cases}$$

L'asymptotique du discriminant δ de $P(X)$ en fonction de $M(\mu_m)$ et $N(\mu_m)$ est donc

$$\begin{aligned} \delta &= \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right)^2 - 4\left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0\right)\left(-\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right) \\ &\quad + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \\ &= \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_1\right)^2 + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

On fait ici appel à la représentation asymptotique de la fonction M obtenue par Barry Simon dans l'article [Sim99] :

Théorème 1.3.3. $M(z^2)$ admet le développement limité suivant :

$$\forall A \in \mathbb{N}, \quad -M(z^2) \underset{z \rightarrow \infty}{=} z + \sum_{j=0}^A \frac{\beta_j(0)}{z^{j+1}} + o\left(\frac{1}{z^{A+1}}\right)$$

$$\text{où, pour tout } x \text{ de } [0, 1], \beta_j(x) \text{ est défini par : } \begin{cases} \beta_0(x) = \frac{1}{2}q(x) \\ \beta_{j+1}(x) = \frac{1}{2}\beta_j'(x) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^j \beta_l(x)\beta_{j-l}(x). \end{cases}$$

Par symétrie, on en déduit :

Corollaire 1.3.4. $N(z^2)$ admet le développement limité suivant :

$$\forall A \in \mathbb{N}, \quad -N(z^2) \underset{z \rightarrow \infty}{=} z + \sum_{j=0}^A \frac{\gamma_j(0)}{z^{j+1}} + o\left(\frac{1}{z^{A+1}}\right)$$

où, pour tout x de $[0, 1]$, $\gamma_j(x)$ est défini par :

$$\begin{cases} \gamma_0(x) = \frac{1}{2}q(1-x) \\ \gamma_{j+1}(x) = \frac{1}{2}\gamma_j'(x) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^j \gamma_l(x)\gamma_{j-l}(x). \end{cases}$$

Démontrons le Corollaire 1.3.4 :

Démonstration. Posons :

$$\begin{cases} \tilde{c}_0 = c_0 \circ \eta \\ \tilde{c}_1 = c_1 \circ \eta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{s}_0 = s_0 \circ \eta \\ \tilde{s}_1 = s_1 \circ \eta \end{cases}$$

où les fonctions c_0, c_1, s_0 et s_1 sont définies en (1.9) et où, pour $x \in [0, 1]$, $\eta(x) = 1 - x$. Alors $\{\tilde{c}_0, \tilde{c}_1\}$ et $\{\tilde{s}_0, \tilde{s}_1\}$ sont deux systèmes fondamentaux de solutions de l'équation

$$\tilde{u}''(x) + q(1-x)\tilde{u}(x) = -z\tilde{u}(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

dont les conditions initiales sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{c}_1(0) = 1, \tilde{c}_1'(0) = 0 \\ \tilde{c}_0(1) = 1, \tilde{c}_0'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\tilde{s}_1(0) = 0, -\tilde{s}_1'(0) = 1 \\ -\tilde{s}_0(1) = 0, -\tilde{s}_0'(1) = 1. \end{cases}$$

La première fonction de Weyl-Titchmarsh $\tilde{M}$ s'écrit

$$\tilde{M}(z) = \frac{W(\tilde{c}_1, -\tilde{s}_0)}{W(-\tilde{s}_0, -\tilde{s}_1)},$$

où $W(f, g)$ désigne le wronskien de solutions f et g de l'équation de Sturm-Liouville (1.8). Un tel wronskien étant constant par rapport à x , il vient :

$$W(\tilde{c}_1, -\tilde{s}_0) = (\tilde{c}_1' \tilde{s}_0 - \tilde{s}_0' \tilde{c}_1)(1) = -\tilde{c}_1(1) = -c_1(0).$$

et

$$W(-\tilde{s}_0, -\tilde{s}_1) = \tilde{s}_1(1) = s_1(0).$$

Par suite :

$$\tilde{M}(z) = -\frac{c_0(1)}{s_0(1)} = N(z). \quad (1.11)$$

D'après les asymptotiques du Théorème 1.3.3 pour $\tilde{M}(z^2)$, on a alors

$$\forall A \in \mathbb{N} : -N(z^2) = -\tilde{M}(z^2) \underset{z \rightarrow \infty}{=} z + \sum_{j=0}^A \frac{\gamma_j(0)}{z^{j+1}} + o\left(\frac{1}{z^{A+1}}\right)$$

où, pour tout $x \in [0, 1]$, $\gamma_j(x)$ est défini par :

$$\begin{cases} \gamma_0(x) = \frac{1}{2}q(1-x) \\ \gamma_{j+1}(x) = \frac{1}{2}\gamma'_j(x) + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^j \gamma_l(x)\gamma_{j-l}(x). \end{cases}$$

□

Des Théorème 1.3.3 et Corollaire 1.3.4, on déduit les égalités

$$-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}\right)}_{>0} \sqrt{\mu_m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right).$$

Ceci et l'expression du discriminant (1.10) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta} &= \left(\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + C_1 \right) \sqrt{1 + O\left(e^{-2\sqrt{\mu_m}}\right)} \\ &= \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + C_1 + O\left(\sqrt{\mu_m}e^{-2\sqrt{\mu_m}}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière expression de $\sqrt{\delta}$ dans les égalités

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_0 - C_1 \right) - \sqrt{\delta} \right] \\ \lambda^+(\mu_m) = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_0 - C_1 \right) + \sqrt{\delta} \right], \end{cases}$$

puis en exprimant C_1 et C_2 par leurs valeurs et $M(\mu_m)$ et $N(\mu_m)$ par leurs asymptotiques, on obtient bien

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) \\ \lambda^+(\mu_m) = \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right). \end{cases}$$

• Supposons à présent $f(0) = f(1)$. Dans ce cas, l'opérateur induit

$$\Lambda_g^m(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \end{pmatrix}$$

étant symétrique, on peut invoquer un résultat bien connu sur les quasi-modes :

Lemme 1.3.5. *Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe un réel λ_0 et u_0 un vecteur unitaire dans H tels que $\|(A - \lambda_0 Id)u_0\| \leq \varepsilon$. Alors on peut trouver λ dans le spectre de A tel que $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$.*

On applique ce théorème à $A = \Lambda_g^m(\omega)$, $\lambda_0 = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a

$$A - \lambda_0 I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} - \lambda_0 \end{pmatrix},$$

puis

$$(A - \lambda_0 I_2)U_0 = -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \end{pmatrix} = O(\sqrt{\mu_m} e^{-\sqrt{\mu_m}}).$$

D'après le Lemme 1.3.5, on dispose de $\lambda_m^+ \in \sigma(\Lambda_g^m(\omega))$ tel que

$$\begin{aligned} \lambda_m^+ &= -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O(\sqrt{\mu_m} e^{-\sqrt{\mu_m}}) \\ &= \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right). \end{aligned}$$

La seconde valeur propre λ_m^- (nécessairement distincte de λ_m^+ car $\Lambda_g^m(\omega)$ n'est pas une

homothétie) peut alors se déduire de la première via l'égalité

$$\begin{aligned}\lambda_m^- &= \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) - \lambda_m^+ \\ &= -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O(\sqrt{\mu_m}e^{-\sqrt{\mu_m}}) \\ &= \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right).\end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.6. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.3.1, on a l'alternative*

$$\begin{cases} f(0) = \tilde{f}(0) \\ f(1) = \tilde{f}(1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(0) = \tilde{f}(1) \\ f(1) = \tilde{f}(0). \end{cases}$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.3.2, les égalités des traces

$$\frac{\text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega))}{\sqrt{\mu_m}} = \frac{\text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega))}{\sqrt{\mu_m}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

impliquent en particulier

$$\frac{1}{\sqrt{f(0)}} + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(0)}} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}}.$$

De même, à partir des égalités des déterminants

$$\frac{\det(\Lambda_g^m(\omega))}{\mu_m} = \frac{\det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega))}{\mu_m} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

on tire

$$\frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(0)\tilde{f}(1)}},$$

ce qui termine la preuve. □

On poursuit la preuve du Théorème 1.3.1 :

Cas 1 : $f(0) = \tilde{f}(0)$ et $f(1) = \tilde{f}(1)$.

Lemme 1.3.7. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.3.1, on a :*

$$\Delta(z) = \tilde{\Delta}(z), \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.12)$$

Démonstration. L'hypothèse $\text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega))$ de la Proposition 1.3.1 se réécrit : pour tout μ_m de $\sigma(-\Delta_{g_K})$,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) + \left(-\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) &= \left(-\frac{\tilde{M}(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \\ &+ \left(-\frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right). \end{aligned}$$

Les asymptotiques des fonctions de Weyl-Titchmarsh fournies par le Théorème 1.3.3 permettent, en faisant tendre m vers $+\infty$, d'identifier les constantes de l'égalité précédente :

$$\frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}}. \quad (1.13)$$

En particulier :

$$\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} = \frac{\tilde{M}(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}},$$

ou, de façon équivalente :

$$\tilde{\Delta}(\mu_m) \left(\frac{D(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{E(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} \right) = \Delta(\mu_m) \left(\frac{\tilde{D}(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\tilde{E}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} \right). \quad (1.14)$$

L'hypothèse $\det(\Lambda_g^m(\omega)) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega))$ s'écrit également

$$\begin{aligned} \left(\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \left(\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) - \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}\Delta^2(\mu_m)} \\ = \left(\frac{\tilde{M}(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \times \left(\frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) - \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}\tilde{\Delta}^2(\mu_m)}. \end{aligned}$$

En multipliant de part et d'autre cette égalité par $-\Delta^2(\mu_m)\tilde{\Delta}^2(\mu_m)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\Delta}^2(\mu_m) \left[\left(\frac{D(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \Delta(\mu_m) \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \left(\frac{E(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \Delta(\mu_m) \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) + \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}} \right] \\
 &= \Delta^2(\mu_m) \left[\left(\frac{\tilde{D}(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \tilde{\Delta}(\mu_m) \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{\tilde{E}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \tilde{\Delta}(\mu_m) \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) + \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}} \right].
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Nous allons montrer que les égalités (1.14) et (1.15) se prolongent sur tout le demi-plan complexe à droite. À cette fin, rappelons ce qu'est la classe de Nevanlinna :

Définition 1.3.8. Soit $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ le demi-plan complexe à droite. La classe de Nevanlinna $\mathcal{N}(\Pi^+)$ est l'ensemble des fonctions analytiques f définies sur Π^+ telles que

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f \left(\frac{1 - re^{i\theta}}{1 + re^{i\theta}} \right) \right| d\theta < \infty,$$

avec

$$\ln^+(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } \ln(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \ln(x) < 0. \end{cases}$$

On a le résultat suivant [Ram99] :

Proposition 1.3.9. Soit h une fonction analytique définie sur Π^+ , A et C deux constantes strictement positives. Supposons :

$$|h(z)| \leq Ce^{A\Re(z)}, \quad \forall z \in \Pi^+.$$

Alors $h \in \mathcal{N}(\Pi^+)$.

En vertu des asymptotiques de la Proposition 1.2.3, les fonctions analytiques définies par $\delta : z \mapsto \Delta(z^2)$, $d : z \mapsto D(z^2)$ et $e : z \mapsto E(z^2)$ appartiennent à $\mathcal{N}(\Pi^+)$. Ici intervient de manière décisive un résultat d'unicité portant sur les fonctions de la classe de Nevanlinna (voir [Ram99]) énoncé dans le théorème suivant, qui va nous permettre d'étendre sur $\mathbb{C}$ les égalités discrètes de la trace et du déterminant obtenues précédemment.

Théorème 1.3.10. Soit h dans $\mathcal{N}(\Pi^+)$ et $\mathcal{L}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}_+$ tel que

$$\sum_{\mu \in \mathcal{L}} \frac{1}{\mu} = +\infty.$$

Alors

$$(h(\mu) = 0, \forall \mu \in \mathcal{L}) \Rightarrow h \equiv 0 \text{ sur } \Pi^+.$$

D'après la loi de Weyl (cf [SV97]), on a :

$$\mu_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} c(K)m^{\frac{2}{n-1}} + O(m^{\frac{1}{m-1}})$$

où $c(K) = \frac{(2\pi)^2}{(\omega_1 \text{vol}(K))^{\frac{2}{n-1}}}$ et où ω_1 désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour un entier T fixé, on dispose donc de l'asymptotique

$$\frac{\mu_{(mT)^{n-1}}}{c(K)T^2} = m^2 + \frac{O(m)}{c(K)T}.$$

puis :

$$\sqrt{\frac{\mu_{(mT)^{n-1}}}{c(K)T^2}} = m + \frac{O(1)}{T}$$

Dès lors, si T est suffisamment grand, les réels $\sqrt{\mu_{(mT)^{n-1}}}$ sont toujours distincts. Posons

$$\mathcal{L} = \{\sqrt{\mu_{(mT)^{n-1}}}, m \in \mathbb{N}\}.$$

L'équivalent $\sqrt{\mu_{(mT)^{n-1}}} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{c(K)T}m$ entraîne, par divergence de la série harmonique, l'égalité

$$\sum_{\mu \in \mathcal{L}} \frac{1}{\mu} = +\infty.$$

Les conditions sont donc remplies pour appliquer le Théorème 1.3.10 aux relations (1.14) et (1.15) : elles restent vraies en remplaçant μ_m par z^2 dans $\mathbb{C}$, puis par z .

À présent, nous voulons montrer, pour tout z dans $\mathbb{C}$, l'égalité

$$\Delta(z) = \tilde{\Delta}(z).$$

Rappelons que les fonctions caractéristiques Δ et $\tilde{\Delta}$ sont entières, d'ordre $1/2$ et que leurs racines sont simples. D'après le théorème de factorisation de Hadamard (voir Proposition 1.2.5) ces fonctions sont caractérisées par leurs racines (à une constante multiplicative

près). En vue d'identifier Δ et $\tilde{\Delta}$, il suffit donc de montrer que leurs racines sont les mêmes. Posons $\mathcal{P} = \{\alpha_j \in \mathbb{C}, \Delta(\alpha_j) = 0\}$ et considérons un élément α_k de $\mathcal{P}$. Par définition, $-\alpha_k$ est une valeur propre de l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ avec conditions de Dirichlet au bord. D'après la Proposition 1.2.4, α_k est réel. Le potentiel q étant également réel, les quantités $D(\alpha_k)$ et $E(\alpha_k)$ le sont aussi. L'évaluation en α_k des égalités (1.14) et (1.15), dont on a montré qu'elles étaient valables sur $\mathbb{C}$, mène au système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{D(\alpha_k)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{E(\alpha_k)}{\sqrt{f(1)}} \right) \tilde{\Delta}(\alpha_k) = 0 \\ \left(\frac{D(\alpha_k)E(\alpha_k) - 1}{\sqrt{f(0)f(1)}} \right) \tilde{\Delta}(\alpha_k)^2 = 0. \end{cases}$$

Pour terminer, nous distinguons deux cas :

- Si $\frac{D(\alpha_k)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{E(\alpha_k)}{\sqrt{f(1)}} \neq 0$, alors $\tilde{\Delta}(\alpha_k) = 0$.
- Sinon $\frac{D(\alpha_k)}{\sqrt{f(0)}} = -\frac{E(\alpha_k)}{\sqrt{f(1)}}$. D'après la seconde égalité du système, il vient :

$$\left(\frac{D(\alpha_k)^2}{f(0)} + \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}} \right) \tilde{\Delta}(\alpha_k)^2 = 0.$$

Or $D(\alpha_k)$ est réel, donc $\tilde{\Delta}(\alpha_k) = 0$. Par symétrie, on en déduit que Δ et $\tilde{\Delta}$ ont les mêmes racines. Il existe donc une constante réelle C telle que $\Delta = C\tilde{\Delta}$. Enfin, d'après la Proposition 1.2.3, les fonctions Δ et $\tilde{\Delta}$ vérifient chacune l'asymptotique

$$\Delta(z), \tilde{\Delta}(z) \sim \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

ce qui implique $C = 1$ et termine la preuve du Lemme 1.3.7. □

Remarque 12. En fait, l'égalité $\Delta(z) = \tilde{\Delta}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ est équivalente à l'isospectralité de q et $\tilde{q}$ pour le problème de Dirichlet associé à $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q$.

Nous pouvons à présent simplifier par $\Delta(z)$ dans les égalités (1.14) et (1.15) (toujours avec μ_m remplacé par z), ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) + \left(\frac{N(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) = \left(\frac{\tilde{M}(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \\ &\hspace{20em} + \left(\frac{\tilde{N}(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) \\ &\left(\frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \left(\frac{N(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) = \left(\frac{\tilde{M}(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \right) \\ &\hspace{20em} \times \left(\frac{\tilde{N}(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \right) \end{aligned} \right.$$

et, pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$, à l'alternative

$$\begin{cases} \frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} = \frac{\tilde{M}(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \\ \frac{N(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{\tilde{N}(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} = \frac{\tilde{N}(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} \\ \frac{N(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{\tilde{M}(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}}. \end{cases}$$

- Supposons d'abord que le premier système soit satisfait pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$. Alors, en remplaçant $M(z)$ et $\tilde{M}(z)$ par leur asymptotique commune $\sqrt{z} + o(1)$, on obtient

$$\frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} = \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}},$$

ce qui entraîne l'égalité

$$M(z) = \tilde{M}(z) \quad \text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}.$$

D'après le Théorème de Borg-Marchenko (voir par exemple [Sim99]) :

$$q = \tilde{q} \quad \text{sur } [0, 1]. \quad (1.16)$$

Rappelons enfin que

$$q = \frac{(h^{1/4})''}{h^{1/4}} - \omega f,$$

où l'on a posé $h = f^{n-2}$ (respectivement $\tilde{q}$ et $\tilde{h} = \tilde{f}^{n-2}$).

En dimension $n = 2$: la conclusion est immédiate. Dans ce cas, $q = -\omega f$ et, ω étant non nul,

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [0, 1].$$

En dimension $n \geq 2$: on remarque que f et $\tilde{f}$ sont chacune solution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$\left(u^{\frac{n-2}{4}}\right)'' - \omega u^{\frac{n+2}{4}} = qu^{\frac{n-2}{4}}$$

De plus, l'égalité $f(0) = \tilde{f}(0)$ et la relation

$$\frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} = \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}},$$

entraînent

$$f'(0) = \tilde{f}'(0).$$

Finalement, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz :

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [0, 1].$$

- Supposons à présent qu'il existe un z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\frac{M(z_0)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \neq \frac{\tilde{M}(z_0)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}}.$$

Par continuité, nous pouvons trouver une boule B centrée en z_0 satisfaisant

$$\frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} \neq \frac{\tilde{M}(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(0)}{4\sqrt{f(0)}}, \quad \forall z \in B.$$

Mais alors nécessairement :

$$\frac{M(z)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} = \frac{\tilde{N}(z)}{\sqrt{f(1)}} + \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}}, \quad \forall z \in B. \quad (1.17)$$

Par prolongement analytique, l'égalité précédente est vraie pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$. En remplaçant $M(z)$ et $\tilde{N}(z)$ par leurs asymptotiques, cette égalité implique

$$f(0) = f(1) \quad \text{et} \quad \frac{\ln'(h)(0)}{4\sqrt{f(0)}} = -\frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}}. \quad (1.18)$$

En simplifiant dans (1.17), on trouve alors :

$$M(z) = \tilde{N}(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Par symétrie, $\tilde{N}$ joue le même rôle que celui de $\tilde{M}$ pour le potentiel $x \mapsto \tilde{q}(1-x)$. D'après le Théorème de Borg-Marchenko :

$$q(x) = \tilde{q}(1-x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Puisque $f(0) = \tilde{f}(1)$ et $f'(0) = -\tilde{f}'(1)$ d'après (1.18), on obtient finalement par Cauchy-Lipschitz :

$$f = \tilde{f} \circ \eta \quad \text{sur } [0, 1],$$

avec $\eta(x) = 1 - x$.

Cas 2 : $f(0) = \tilde{f}(1)$ et $f(1) = \tilde{f}(0)$.

Il suffit d'intervertir les rôles de M et N , puis d'appliquer le premier cas.

1.4 Unicité de la trace et du déterminant

On suppose désormais que la variété transverse (K, g_K) est $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}})$. L'objet de cette section est la preuve du résultat suivant :

Proposition 1.4.1. *Supposons $\sigma(\Lambda_g(\omega)) = \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$. Il existe alors $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0 \Rightarrow \det(\Lambda_g^m(\omega)) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)).$$

On commence par le lemme suivant :

Lemme 1.4.2. *Sous l'hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) = \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ on a l'alternative :*

$$\begin{cases} f(0) = \tilde{f}(0) \\ f(1) = \tilde{f}(1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(0) = \tilde{f}(1) \\ f(1) = \tilde{f}(0). \end{cases}$$

Démonstration. Introduisons l'ensemble

$$\Sigma(\Lambda_g(\omega)) = \{\lambda^\pm(\kappa_m), \quad m \in \mathbb{N}\}$$

où (κ_m) désigne la suite des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_{\mathbb{S}}$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ (munie de sa métrique usuelle) comptées *sans multiplicité*. Par hypothèse, on a donc :

$$\Sigma(\Lambda_g(\omega)) = \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)).$$

Pour tout entier m , on dispose d'une expression explicite de κ_m (voir par exemple [Shu87]), à savoir :

$$\kappa_m = m(m + n - 2).$$

La preuve du Lemme 1.4.2 se déroule en deux temps.

Étape 1. Il est aisé, en premier lieu, d'établir l'égalité

$$f(0)^{\frac{n-1}{2}} + f(1)^{\frac{n-1}{2}} = \tilde{f}(0)^{\frac{n-1}{2}} + \tilde{f}(1)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.19)$$

En effet, la donnée du spectre de Steklov caractérise le volume du bord de M : c'est une conséquence directe de la loi de Weyl (1.4) pour les valeurs propres de Steklov (voir [GP17]). Dans notre cadre, le bord connexe est l'union disjointe de Γ_0 et Γ_1 où, pour $i \in \{0, 1\}$, Γ_i est la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ munie de la métrique $\gamma_i = f(i)g_{\mathbb{S}}$. Par suite :

$$\text{Vol}(\partial M) = \text{Vol}(\partial \tilde{M}) \Leftrightarrow \int_{\Gamma_0} d\text{Vol}_{\gamma_0} + \int_{\Gamma_1} d\text{Vol}_{\gamma_1} = \int_{\Gamma_0} d\text{Vol}_{\tilde{\gamma}_0} + \int_{\Gamma_1} d\text{Vol}_{\tilde{\gamma}_1},$$

ce qui se réécrit

$$\left(f(0)^{\frac{n-1}{2}} + f(1)^{\frac{n-1}{2}}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) = \left(\tilde{f}(0)^{\frac{n-1}{2}} + \tilde{f}(1)^{\frac{n-1}{2}}\right) \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

et aboutit donc à l'égalité cherchée.

Étape 2. Nous démontrons par l'absurde que $f(0)$ appartient à l'ensemble $\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$. Supposons donc le contraire. Sans perte de généralité, on peut se placer dans la situation

où $f(0) < \min\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$. L'égalité (1.19) entraîne alors

$$f(1) > \max\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}. \quad (1.20)$$

La stratégie consiste à montrer qu'il existe un élément du spectre $\Sigma(\Lambda_g(\omega))$ qui n'appartient pas à $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, ce qui contredira l'hypothèse d'égalité des spectres.

Soit ε et A deux réels strictement positifs. Définissons

$$\alpha_A = \inf\{|\lambda^+(\kappa_n) - \lambda^-(\kappa_m)| \mid m, n \geq A\}.$$

Alors, pour A choisi suffisamment grand, α_A vérifie : $\alpha_A \leq \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} + \varepsilon$.

En effet, soit un entier n . Posons

$$m = \max \left\{ j \in \mathbb{N} \mid \lambda^-(\kappa_j) < \lambda^+(\kappa_n) - \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Par définition de m , on a :

$$\lambda^-(\kappa_{m+1}) \geq \lambda^+(\kappa_n) - \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - \varepsilon.$$

Mais

$$\begin{aligned} \lambda^-(\kappa_{m+1}) &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ &< \lambda^+(\kappa_n) - \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ &< \lambda^+(\kappa_n) + \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} + \frac{\varepsilon}{2} + O\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\alpha_A \leq |\lambda^+(\kappa_n) - \lambda^-(\kappa_{m+1})| \leq \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} + \varepsilon, \quad \text{pour } m, n \geq A \text{ assez grands.}$$

D'après ce qui précède, on dispose donc de deux entiers m et n , aussi grands que l'on souhaite, tels que

$$-\frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - \varepsilon \leq \lambda^+(\kappa_n) - \lambda^-(\kappa_m) \leq \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} + \varepsilon. \quad (1.21)$$

Par l'égalité des ensembles $\Sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, il existe deux éléments $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$ de $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ tels que

$$\{\lambda^-(\kappa_m), \lambda^+(\kappa_n)\} = \{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\}.$$

Remarquons que, si $\lambda^-(\kappa_m)$ et $\lambda^+(\kappa_n)$ diffèrent, alors les éléments $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$ ne peuvent appartenir tous deux à la même suite $(\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell))$ ou $(\tilde{\lambda}^+(\kappa_p))$ car, pour des indices m et n assez grands, on aurait alors

$$|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2| \geq \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(0)}}, \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} \right\} - \varepsilon$$

et, choisissant ε assez petit, cela contredirait (1.20) et (1.21). Par conséquent, il existe (ℓ, p) dans $\mathbb{N}^2$ tel que

$$\{\lambda^-(\kappa_m), \lambda^+(\kappa_n)\} = \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell), \tilde{\lambda}^+(\kappa_p)\}.$$

Supposons, sans perte de généralité, que l'on puisse apparier les valeurs propres suivant le système

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) \\ \lambda^+(\kappa_n) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_p). \end{cases} \quad (1.22)$$

* **Cas 1** : $\lambda^-(\kappa_m) \leq \lambda^+(\kappa_n)$. Alors $\lambda^-(\kappa_{m+1})$ ne peut s'identifier à un élément de $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$. En effet, d'une part :

$$\begin{aligned} \lambda^-(\kappa_{m+1}) &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1}) + \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} \right]}_{<0} + O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{1}{\ell}\right) \end{aligned}$$

Donc, pour m et ℓ assez grands, on a : $\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) < \lambda^-(\kappa_{m+1}) < \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1})$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \lambda^-(\kappa_{m+1}) &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
 &\leq \lambda^+(\kappa_n) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
 &= \tilde{\lambda}^+(\kappa_p) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
 &= \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p+1}) + \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(0)}} \right]}_{<0} + O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right).
 \end{aligned}$$

Enfin, à l'aide de (1.21) et (1.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \lambda^-(\kappa_{m+1}) &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
 &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} + \varepsilon + O\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - \varepsilon \\
 &\geq \tilde{\lambda}^+(\kappa_p) + \frac{1}{2\sqrt{f(1)}} - 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour m et p assez grands :

$$\tilde{\lambda}^+(\kappa_p) < \lambda^-(\kappa_{m+1}) < \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p+1}).$$

Les suites $(\tilde{\lambda}^-(\kappa_m))$ et $(\tilde{\lambda}^+(\kappa_m))$ étant strictement croissantes (au moins à partir d'un certain rang), aucun élément de $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ ne peut être égal à $\lambda^-(\kappa_{m+1})$. Ceci contredit l'égalité $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) = \Sigma(\Lambda_g(\omega))$.

* Cas 2 : $\lambda^-(\kappa_m) > \lambda^+(\kappa_n)$. Des arguments semblables permettent d'établir :

$$\max\left(\tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell-1}), \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p-1})\right) < \lambda^-(\kappa_{m-1}) < \min\left(\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell), \tilde{\lambda}^+(\kappa_p)\right).$$

Enfin, si nous avons supposé

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_p) \\ \lambda^+(\kappa_n) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) \end{cases}$$

alors, par échange des rôles de $\tilde{f}(0)$ et $\tilde{f}(1)$, nous aurions montré que $\lambda^-(\kappa_{m+1})$ ou $\lambda^-(\kappa_{m-1})$ n'appartient pas à l'ensemble $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$.

Ainsi : $f(0) \in \{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$. Ceci, combiné à l'égalité (1.19), donne la conclusion. $\square$

Dans toute la suite, sans perte de généralité, on va supposer

$$f(0) = \tilde{f}(0) \text{ et } f(1) = \tilde{f}(1),$$

le cas où $f(0) = \tilde{f}(1)$ et $f(1) = \tilde{f}(0)$ s'obtenant par un échange des rôles de $\tilde{\lambda}^-(\kappa_m)$ et $\tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$. Nous distinguons maintenant deux cas, en commençant par le plus simple.

1.4.1 Le cas $f(0) = f(1)$

Sans perte de généralité, on suppose $f(0) = f(1) = 1$. D'après le Lemme 1.3.2, chaque opérateur $\Lambda_g^m(\omega)$ possède deux valeurs propres $\lambda^-(\mu_m)$ et $\lambda^+(\mu_m)$ dont les asymptotiques sont données par :

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \sqrt{\mu_m} - \frac{h'(1)}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) \\ \lambda^+(\mu_m) = \sqrt{\mu_m} + \frac{h'(0)}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right). \end{cases} \quad (1.23)$$

Pour m dans $\mathbb{N}$, posons

$$V_m = \left\{ \lambda^-(\kappa_m), \lambda^+(\kappa_m) \right\} \text{ et } \tilde{V}_m := \left\{ \tilde{\lambda}^-(\kappa_m), \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \right\}.$$

• En dimension 2

Puisque $\sqrt{\kappa_m}$ s'écrit

$$\sqrt{\kappa_m} = m + \frac{n-2}{2} + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

les valeurs propres $\lambda^\pm(\kappa_m)$ satisfont les asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = m + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = m + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{cases}$$

Si m est assez grand, les ensembles V_m et $\tilde{V}_m$ sont tous deux inclus dans l'intervalle $\left[m - \frac{1}{4}, m + \frac{1}{4}\right]$. En particulier leur intersection $V_m \cap \tilde{V}_{m'}$ est vide si m et m' diffèrent. L'hypothèse $\Sigma(\Lambda_g(\omega)) = \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ conduit alors aux égalités $V_m = \tilde{V}_m$ à partir d'un certain rang. Il existe donc un entier m_0 tel que, pour $m \geq m_0$:

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) + \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \\ \lambda^-(\kappa_m)\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)\tilde{\lambda}^+(\kappa_m). \end{cases}$$

Bien entendu, les égalités précédentes restent vraies en remplaçant κ_m par μ_m . On a donc montré :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0 \Rightarrow \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \quad \text{et} \quad \det(\Lambda_g^m(\omega)) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)).$$

• **En dimension $n \geq 3$**

Les asymptotiques (1.23) se réécrivent

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = m + \frac{n-2}{2} - \frac{h'(1)}{4} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = m + \frac{n-2}{2} + \frac{h'(0)}{4} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{cases} \quad (1.24)$$

Contrairement au cas de la dimension deux, il n'est pas possible de conclure aussitôt à l'égalité des ensembles V_m et $\tilde{V}_m$ pour m grand, ceci en raison de la présence des constantes $h'(0)$ et $h'(1)$.

Proposition 1.4.3. *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ tel que $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$ et*

$$\forall m \in \mathcal{L}, \quad \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) + \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \\ \lambda^-(\kappa_m)\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)\tilde{\lambda}^+(\kappa_m). \end{cases}$$

Démonstration. Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 1.4.4. *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{L}_1$ de $\mathbb{N}$ tel que $\sum_{m \in \mathcal{L}_1} \frac{1}{m} = +\infty$ et*

$$\left(\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m), \quad \forall m \in \mathcal{L}_1 \right) \quad \text{ou} \quad \left(\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m), \quad \forall m \in \mathcal{L}_1 \right).$$

Démonstration. Puisque les ensembles $\Sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ sont supposés égaux, on a l'inclusion

$$\{\lambda^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\} \subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}.$$

Il existe donc une suite d'entiers (a_m) vérifiant $\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_m} = +\infty$ et

$$\begin{aligned} \{\lambda^-(\kappa_{a_m}), m \in \mathbb{N}\} &\subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou} \\ \{\lambda^-(\kappa_{a_m}), m \in \mathbb{N}\} &\subset \{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Traitons par exemple le premier cas (le second est semblable). Il existe une autre suite d'entiers $(\tilde{a}_m)$ telle que

$$\lambda^-(\kappa_{a_m}) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\tilde{a}_m}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

En remplaçant les valeurs propres précédentes par leurs asymptotiques rappelées en (1.24), on obtient

$$a_m - \tilde{a}_m = \frac{\tilde{h}'(1)}{4} - \frac{h'(1)}{4} + O\left(\frac{1}{a_m}\right).$$

La suite d'entiers $(a_m - \tilde{a}_m)$ converge donc vers $\frac{n-2}{4} \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{n-2}{4} \frac{\tilde{f}'(1)}{\tilde{f}(1)}$. Ce dernier nombre doit alors être également entier. Par hypothèse :

$$f, \tilde{f} \in \mathcal{C}_b = \left\{ f \in C^\infty([0, 1]), \left| \frac{f'(i)}{f(i)} \right| \leq \frac{1}{n-2}, i \in \{0, 1\} \right\}.$$

et donc

$$\left| \frac{n-2}{4} \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{n-2}{4} \frac{\tilde{f}'(1)}{\tilde{f}(1)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

La quantité de gauche étant entière, elle doit valoir 0. On a montré, pour $m \geq m_0$, les égalités :

$$a_m = \tilde{a}_m.$$

En posant $\mathcal{L}_1 = \{a_m, m \geq m_0\}$, la preuve du Lemme 1.4.4 est établie. $\square$

Nous terminons maintenant la démonstration de la Proposition 1.4.3. Supposons satisfaites, par exemple, les égalités :

$$\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m), \quad \forall m \in \mathcal{L}_1.$$

Réitérons les mêmes arguments que ceux de la preuve précédente. On a l'inclusion :

$$\{\lambda^+(\kappa_m), m \in \mathcal{L}_1\} \subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}$$

Il existe une suite d'entiers, notée $(b_m) \in \mathcal{L}_1$, telle que $\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{b_m} = +\infty$ et :

$$\begin{aligned} \{\lambda^+(\kappa_{b_m}), m \in \mathbb{N}\} &\subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou} \\ \{\lambda^+(\kappa_{b_m}), m \in \mathbb{N}\} &\subset \{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

- Dans le second cas, on dispose d'une suite $(\tilde{b}_m)$ telle que

$$\lambda^+(\kappa_{b_m}) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_{\tilde{b}_m}),$$

ce qui implique, comme précédemment, $b_m = \tilde{b}_m$. En posant $\mathcal{L} = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$ on obtient, pour tout m dans $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m). \end{cases}$$

- Dans le premier cas, on établirait de même :

$$\lambda^+(\kappa_{b_m}) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_{b_m}) \quad (= \lambda^-(\kappa_{b_m})).$$

Mais ceci ne peut advenir puisque $\Lambda_g^{b_m}(\omega)$ serait alors une homothétie, ce qui contredirait la structure de la matrice $\Lambda_g^{b_m}(\omega)$. Ceci conclut la preuve de la Proposition 1.4.3. $\square$

Rappelons que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des racines de $\Delta(z)$. Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$, posons

$$B(z) = -\frac{D(z) + E(z)}{\Delta(z)} + C_0 - C_1 \tag{1.25}$$

$$C(z) = \left(-\frac{D(z)}{\Delta(z)} + C_0\right) \left(-\frac{E(z)}{\Delta(z)} - C_1\right) - \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)\Delta(z)^2}}, \tag{1.26}$$

où

$$C_0 = \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}}, \quad C_1 = \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}}.$$

Pour tout m dans $\mathbb{N}$, on a (voir la preuve du Lemme 1.3.2) :

$$B(\kappa_m) = \lambda^-(\kappa_m) + \lambda^+(\kappa_m) \quad \text{et} \quad C(\kappa_m) = \lambda^-(\kappa_m)\lambda^+(\kappa_m).$$

Introduisons sur Π^+ les fonctions g_1 et g_2 définies par

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \Delta(z^2)\tilde{\Delta}(z^2)[B(z^2) - \tilde{B}(z^2)] \\ g_2(z) &= \Delta(z^2)^2\tilde{\Delta}(z^2)^2[C(z^2) - \tilde{C}(z^2)]. \end{aligned}$$

Nous affirmons que g_1 et g_2 sont identiquement nulles. En effet :

- g_1 et g_2 sont holomorphes sur Π^+ .
- g_1 et g_2 appartiennent à $\mathcal{N}(\Pi^+)$ d'après les asymptotiques de la Proposition 1.2.3.
- Grâce à la Proposition 1.4.3, on a les égalités $g_1(\sqrt{\kappa_m}) = g_2(\sqrt{\kappa_m}) = 0$ pour tout m dans $\mathcal{L}$. Mais $\sqrt{\kappa_m} \sim m$, ce qui, par divergence de la série harmonique, entraîne $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_m}} = +\infty$. Le théorème de Nevanlinna permet de conclure :

$$g_1 \equiv g_2 \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \Pi^+.$$

En particulier, pour tout entier m :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) + \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \\ \lambda^-(\kappa_m)\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)\tilde{\lambda}^+(\kappa_m). \end{cases}$$

En remplaçant κ_m par μ_m , on conclut finalement :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \quad \text{et} \quad \det(\Lambda_g^m(\omega)) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)).$$

1.4.2 Le cas $f(0) \neq f(1)$

Sans perte de généralité, supposons $f(0) < f(1)$. Rappelons que

$$\sqrt{\kappa_m} = m + \frac{n-2}{2} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

En injectant cette expression asymptotique dans le Lemme 1.3.2, on a :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \frac{m}{\sqrt{f(1)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \frac{m}{\sqrt{f(0)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{cases}$$

Puisque $f(0)$ est différent de $f(1)$, la preuve se révèle un peu plus délicate. Comme précédemment, il s'agit de construire un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ satisfaisant la condition de Müntz $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$ et tel que, pour tout m dans $\mathcal{L}$, on ait $\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)$ ou $\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$. Nous commençons par la proposition suivante.

Proposition 1.4.5. *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ tel que $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$ et :*

$$\{\lambda^-(\kappa_m), m \in \mathcal{L}\} \subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration. Si le sous-ensemble des éléments de $\{\lambda^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}$ appartenant à $\{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}$ est fini, la proposition est vraie. Dans le cas contraire, il existe deux applications $\varphi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que

$$\lambda^-(\kappa_{\psi(m)}) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_{\varphi(m)}). \quad (1.27)$$

Précisons que φ et ψ sont construites de telle sorte qu'un entier naturel m qui n'appartient pas à l'image de ψ (respectivement à celle de φ) satisfait l'égalité $\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_n)$ pour un certain n dans $\mathbb{N}$ (respectivement $\lambda^+(\kappa_n) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$ pour un n dans $\mathbb{N}$).

En remplaçant $\lambda^+(\kappa_{\varphi(m)})$ et $\tilde{\lambda}^-(\kappa_{\psi(m)})$ par leurs asymptotiques dans l'égalité (1.27), on obtient :

$$\frac{\varphi(m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right) = \frac{\psi(m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{\psi(m)}\right).$$

Cette égalité implique en particulier que les restes sont de même ordre de grandeur : $O\left(\frac{1}{\psi(m)}\right) = O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right)$. En posant

$$C = -\frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{n-2}{2\sqrt{f(0)}},$$

on peut écrire (1.27) comme suit :

$$\frac{\varphi(m)}{\sqrt{f(0)}} = \frac{\psi(m)}{\sqrt{f(1)}} + C + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right). \quad (1.28)$$

Ceci nous amène au lemme suivant :

Lemme 1.4.6. *Il existe un entier m_0 tel que, si $m \geq m_0$, alors $\psi(m+1) \geq \psi(m) + 2$.*

Démonstration. Posons

$$A = \frac{\sqrt{f(1)}}{\sqrt{f(0)}} > 1 \text{ et } C' = -\sqrt{f(1)}C.$$

Avec ces notations, l'égalité (1.28) se réécrit

$$\psi(m) = A\varphi(m) + C' + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right).$$

Pour un certain entier m , supposons l'égalité $\psi(m+1) = \psi(m) + 1$. Alors

$$\begin{aligned} \psi(m) + 1 = \psi(m+1) &= A\varphi(m+1) + C' + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right) \\ &\geq A(\varphi(m) + 1) + C' + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right) \\ &= A\varphi(m) + C' + A + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right) \\ &= \psi(m) + A + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right). \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité

$$1 \geq A + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right),$$

fausse si m est choisi assez grand. □

Par conséquent, l'ensemble image de ψ ne peut contenir deux entiers consécutifs. Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 1.4.7. *Dénombrons par $a_1, a_2, \dots$ la suite des entiers qui n'appartiennent pas à l'image de ψ . Il existe une constante $C > 0$ telle que la suite (a_m) satisfasse*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad a_m \leq 2m + C. \tag{1.29}$$

Démonstration. Posons $p_0 = \psi(m_0)$ et $C := a_{p_0} - 2p_0$. L'estimation (1.29) est vraie pour $m = p_0$ par définition de C . Supposons que (1.29) soit satisfaite pour un certain m supérieur ou égal à p_0 . Alors :

- ou bien $a_m + 1$ n'appartient pas à l'image de ψ , et donc $a_{m+1} = a_m + 1$,

- ou bien $a_m + 1$ appartient à l'image de ψ . Dans ce cas, $a_m + 2$ n'est pas dans l'image de ψ puisque cette image ne contient pas deux entiers consécutifs. Par conséquent, $a_{m+1} = a_m + 2$.

Dans chacun des cas : $a_{m+1} \leq 2(m+1) + C$. Le résultat s'ensuit par récurrence. $\square$

En particulier, le Lemme 1.4.7 montre :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Ainsi, en posant $\mathcal{L} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a :

$$\{\lambda^-(\kappa_m), m \in \mathcal{L}\} \subset \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}$$

ce qui conclut la preuve de la Proposition. $\square$

Comme auparavant, nous distinguons les cas $n = 2$ et $n \geq 3$.

En dimension 2

Lemme 1.4.8. *Pour tout m dans $\mathcal{L}$, on a :*

$$\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m).$$

Démonstration. Par construction, pour tout élément m de $\mathcal{L}$, il existe un indice $\ell(m)$ tel que :

$$\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell(m)}).$$

D'après le Lemme 1.3.2, on a :

$$m = \ell(m) + O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{1}{\ell(m)}\right),$$

ce qui entraîne $m = \ell(m)$ dès que m est assez grand. $\square$

Considérons de nouveau les fonctions B et C définies en (1.25) et (1.26). En posant

$$R(z) = B(z)^2 - 4C(z),$$

on a l'égalité

$$\lambda^\pm(\kappa_m) = \frac{1}{2} \left(B(\kappa_m) \pm \sqrt{R(\kappa_m)} \right).$$

En cohérence avec les notations, on peut donc définir sur Π^+ la fonction $\lambda^-(z)$ par

$$\lambda^-(z) = \frac{1}{2} \left(B(z) - \sqrt{R(z)} \right).$$

Lemme 1.4.9. *Pour tout réel t positif assez grand, on a l'alternative*

$$\lambda^-(t) = \tilde{\lambda}^-(t) \quad \text{ou} \quad \lambda^+(t) = \tilde{\lambda}^+(t).$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.4.8, on dispose d'un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ satisfaisant la condition $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$ et tel que

$$\forall m \in \mathcal{L}, \quad B(\kappa_m) - \sqrt{R(\kappa_m)} = \tilde{B}(\kappa_m) - \sqrt{\tilde{R}(\kappa_m)}.$$

On a

$$\left(B(\kappa_m) - \tilde{B}(\kappa_m) \right)^2 = \left(\sqrt{R(\kappa_m)} - \sqrt{\tilde{R}(\kappa_m)} \right)^2,$$

et donc

$$\underbrace{\left[\left(B(\kappa_m) - \tilde{B}(\kappa_m) \right)^2 - R(\kappa_m) - \tilde{R}(\kappa_m) \right]^2}_{:=g_1(\kappa_m)} - 4R(\kappa_m)\tilde{R}(\kappa_m) = 0.$$

Pour tout z dans Π^+ , posons

$$g_2(z) = \Delta(z^2)^4 \tilde{\Delta}(z^2)^4 g_1(z^2).$$

La fonction g_2 est alors identiquement nulle sur Π^+ . En effet :

- g_2 est holomorphe sur Π^+ .
- $g_2 \in \mathcal{N}(\Pi^+)$ grâce aux estimées données par la Proposition 1.2.3.
- On a $g_2(\sqrt{\kappa_m}) = 0$ pour tout m appartenant à $\mathcal{L}$, ce qui permet de conclure, en faisant appel au théorème de Nevanlinna, que

$$g_2 \equiv 0 \text{ sur } \Pi^+.$$

Nous avons donc montré :

$$\forall z \in \Pi^+, \quad \left[\left(B(z^2) - \tilde{B}(z^2) \right)^2 - R(z^2) - \tilde{R}(z^2) \right]^2 - 4R(z^2)\tilde{R}(z^2) = 0.$$

Tout z de Π^+ vérifie alors l'une des quatre alternatives suivantes :

$$\lambda^-(z^2) = \tilde{\lambda}^-(z^2), \quad \lambda^+(z^2) = \tilde{\lambda}^-(z^2), \quad \lambda^-(z^2) = \tilde{\lambda}^+(z^2) \quad \text{or} \quad \lambda^+(z^2) = \tilde{\lambda}^+(z^2).$$

Notons ici que les asymptotiques du Lemme 1.3.2 restent évidemment vraies pour $\mathbb{R}_+$ (la preuve serait la même). À présent, si une suite de nombres positifs (t_m) vérifie par exemple $\lambda^+(t_m^2) = \tilde{\lambda}^-(t_m^2)$ lorsque t_m tend vers l'infini, alors, d'après le Lemme 1.3.2 avec t_m^2 au lieu de κ_m on en tire $f(0) = f(1)$ et cela contredit notre hypothèse. Le même argument conduit à exclure le troisième cas lorsque z est réel et assez grand. Pour tout nombre t positif et suffisamment grand, il reste donc deux choix :

$$\lambda^-(t) = \tilde{\lambda}^-(t) \quad \text{ou} \quad \lambda^+(t) = \tilde{\lambda}^+(t).$$

□

Cas I : Supposons que l'on puisse trouver un réel x , arbitrairement grand, tel que $\lambda^-(x) \neq \tilde{\lambda}^-(x)$. Par continuité, il doit exister aussi un intervalle I centré en x tel que

$$\forall t \in I, \quad \lambda^-(t) \neq \tilde{\lambda}^-(t),$$

ce qui implique nécessairement, pour tout t dans I , que l'on ait $\lambda^+(t) = \tilde{\lambda}^+(t)$. De plus, pour un certain $L > 0$, la fonction réelle

$$t \mapsto \lambda^+(t) - \tilde{\lambda}^+(t)$$

est analytique sur l'intervalle $[L, +\infty[$. Ainsi, pour tout réel t supérieur à L , on a nécessairement $\lambda^+(t) = \tilde{\lambda}^+(t)$ par prolongement analytique. Il existe donc un entier m_0 tel que, pour tout élément m de $\mathcal{L}$ supérieur à m_0 :

$$\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \quad \text{et} \quad \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m).$$

Sans perte de généralité, supposons que $\min \mathcal{L}$ soit plus grand que m_0 . On a :

$$\forall m \in \mathcal{L}, \quad \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) + \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \\ \lambda^-(\kappa_m)\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)\tilde{\lambda}^+(\kappa_m). \end{cases}$$

Nous avons donc établi le même résultat que celui de la Proposition 1.4.3, d'où l'on tire semblablement que chacune des égalités précédentes est en fait vraie pour tout m de $\mathbb{N}$, i.e

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m) \quad \text{et} \quad \det(\Lambda_g^m) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m).$$

Nous sommes ainsi reconduits à la troisième section.

Cas 2 : Pour tout réel t assez grand, on a : $\lambda^-(t) = \tilde{\lambda}^-(t)$. En particulier, tout entier m assez grand satisfait l'égalité $\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m)$. Pour de tels indices, on a également $\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$. En effet, si $\lambda^+(\kappa_m)$ appartient à la suite $(\tilde{\lambda}^+(\kappa_\ell))$, il existe un indice $\ell(m)$ tel que $\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_{\ell(m)})$. On peut montrer, comme dans la preuve du Lemme 1.4.8, que $\ell(m) = m$, et de même si $\tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$ appartient à $(\lambda^+(\kappa_\ell))$. La seule autre option est l'existence de deux indices p et ℓ tels que

$$\begin{cases} \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_p) \\ \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = \lambda^-(\kappa_\ell). \end{cases}$$

Alors $\lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_p) - \lambda^-(\kappa_\ell)$, ce qui entraîne

$$O\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{p - \ell}{\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{p}\right) + O\left(\frac{1}{\ell}\right),$$

puis $p = \ell$ pour m, p, ℓ assez grands, et donc $\lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$. Il existe donc un entier m_0 tel que

$$\forall m \geq m_0, \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m) \quad \text{et} \quad \det(\Lambda_g^m) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m).$$

Nous sommes de nouveau ramenés à la troisième section (voir la Remarque 8 p. 13).

En dimension $n \geq 3$.

Les arguments qui suivent sont des adaptations plus ou moins immédiates du cas bidimensionnel. Nous y renvoyons pour les détails.

Lemme 1.4.10. *Il existe $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ tel que $\sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{m} = +\infty$ et :*

$$\tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = \lambda^-(\kappa_m), \quad \forall m \in \mathcal{L}.$$

Démonstration. Par définition de la suite (a_n) définie au Lemme 1.4.7, il existe une autre suite d'entiers $(\tilde{a}_n)$ telle que

$$\lambda^-(\kappa_{a_n}) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\tilde{a}_n}).$$

Comme dans la preuve du Lemme 1.4.4, on montre que $a_m = \tilde{a}_m$ et on pose $\mathcal{L} = \{a_m, m \in \mathcal{L}\}$. □

On a le Lemme suivant (la preuve est identique à celle de la dimension deux).

Lemme 1.4.11. *Pour tout réel t positif assez grand, on a l'alternative*

$$\lambda^-(t) = \tilde{\lambda}^-(t), \quad \lambda^+(t) = \tilde{\lambda}^+(t).$$

On déduit alors, pour tout m dans $\mathcal{L}$:

$$\lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) \quad \text{et} \quad \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m).$$

Il en découle :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Tr}(\Lambda_g^m) = \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m) \quad \text{et} \quad \det(\Lambda_g^m) = \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m).$$

Un résultat d'unicité locale

2.1 Introduction

Ce chapitre prolonge l'étude précédente. On y examine la possibilité de caractériser localement le facteur conforme à partir d'une connaissance approchée du spectre de Steklov. La variété considérée est toujours $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ munie de la métrique

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}), \quad (2.1)$$

où dx^2 désigne la métrique euclidienne sur $[0, 1]$ et $g_{\mathbb{S}}$ la métrique induite par le plongement de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. L'opérateur de Dirichlet-à-Neumann $\Lambda_g(\omega)$, introduit au début du premier chapitre par l'égalité (1.2), est défini sur l'espace $H^{1/2}(\partial M)$ à valeurs dans $H^{-1/2}(\partial M)$. Enfin $-\Delta_{g_{\mathbb{S}}}$ désigne de nouveau l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}})$ dont on note le spectre (compté avec multiplicité)

$$\sigma(-\Delta_{g_{\mathbb{S}}}) := \{0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots \rightarrow +\infty\}.$$

Nous entreprenons la preuve d'un résultat d'*unicité locale* qui s'inspire d'arguments présentés dans [DKN19c]. Le modèle de cet article, cependant, se distingue du nôtre par la différence topologique suivante : la variété que considèrent ses auteurs est le cylindre à

un seul bout $M' = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$ muni d'une métrique décrite par (2.1). Le spectre de Steklov est alors constitué d'une seule suite de valeurs propres

$$\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_m \rightarrow +\infty.$$

Les auteurs démontrent que la connaissance de ce spectre à une erreur exponentiellement décroissante près détermine le facteur conforme f de la métrique g au voisinage de 0. Plus précisément, pour $a > 0$ quelconque, ils établissent l'équivalence

$$\sigma_m - \tilde{\sigma}_m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-2a\kappa_m}) \quad \Leftrightarrow \quad f = \tilde{f} \text{ sur } [0, a],$$

où, nous le rappelons, $\kappa_m = m(m + n - 2)$ désigne la m -ième valeur propre du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ énuméré *sans multiplicité*. Nous souhaitons obtenir un résultat semblable adapté à notre modèle, en gardant toutefois à l'esprit que sa structure spécifique soulève des difficultés déjà rencontrées qu'il s'agit d'examiner de nouveau. La principale complication tient au caractère non connexe du bord. Nous avons prouvé, au cours du premier chapitre, que cette structure de bord à deux bouts scindait le spectre de $\Lambda_g(\omega)$ en deux sous-suites de valeurs propres $\{\lambda^\pm(\mu_m)\}$ évoluant asymptotiquement de manière différente. Que veut dire, dès lors, que deux spectres sont proches à une erreur exponentiellement décroissante? La première difficulté à lever consiste, en premier lieu, à formuler ce que l'on désire démontrer, c'est à dire de définir convenablement ce qu'est pour nous la *proximité* entre deux spectres $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$.

Définition 2.1.1. Soit $(\varepsilon_m)_m$ une suite de nombres positifs. On dit que $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ est approximativement inclus dans $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ à la précision $(\varepsilon_m)_m$ si, pour tout $\lambda^\pm(\mu_m)$ de $\sigma(\Lambda_g(\omega))$:

- il existe $\tilde{\lambda}$ dans $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ tel que $|\lambda^\pm(\mu_m) - \tilde{\lambda}| \leq \varepsilon_m$,
- $\text{Card}\{\lambda \in \sigma(\Lambda_g(\omega)), |\lambda^\pm(\mu_m) - \lambda| \leq \varepsilon_m\} \leq \text{Card}\{\tilde{\lambda} \in \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)), |\lambda^\pm(\mu_m) - \tilde{\lambda}| \leq \varepsilon_m\}.$

On note cela

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\subsetneq} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)).$$

Remarque 13. Le second point de la Définition 2.1.1 revient à prendre en compte la multiplicité des valeurs propres de Steklov.

Définition 2.1.2. On dit que $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ s'approchent à la précision $(\varepsilon_m)_m$ si

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\lesssim} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \quad \text{et} \quad \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\lesssim} \sigma(\Lambda_g(\omega)).$$

On note alors

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)).$$

Un énoncé de notre problème pourrait être : soit $0 < a < 1$ et (ε_m) une suite vérifiant l'estimation $\varepsilon_m = O(e^{-2a\mu_m})$. Si $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ s'approchent à la précision (ε_m) , a-t-on égalité des facteurs conformes f et $\tilde{f}$ (modulo l'unique invariance de jauge mise au jour dans le premier chapitre) sur un voisinage du bord ∂M dépendant de a ?

Tout comme dans le premier chapitre, nous sommes confronté à la difficulté suivante : le passage de la proximité de deux spectres de Steklov $\sigma(\Lambda_g(\lambda))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\lambda))$ à celle, ponctuelle, de leurs éléments pour les *mêmes indices*, ne va pas de soi. A-t-on par exemple

$$\begin{aligned} (\sigma(\Lambda_g(\omega)) \text{ et } \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \text{ proches}) &\Rightarrow (\lambda^-(\mu_m) \text{ et } \tilde{\lambda}^-(\mu_m) \text{ proches pour } m \in \mathbb{N}) \\ &\text{ou } (\lambda^-(\mu_m) \text{ et } \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \text{ proches pour tout } m \in \mathbb{N}) ? \end{aligned}$$

Dans l'énoncé de notre théorème, nous invoquerons une hypothèse sur le facteur conforme f qui n'apparaissait pas dans celui du résultat d'unicité. L'idée est d'introduire un défaut de symétrie entre les deux composantes du bord de la variété pour mieux distinguer, en quelque sorte, les deux sous-suites entre elles. De cette façon l'implication précédente sera vraie en remplaçant $\mathbb{N}$ par un ensemble infini $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ qui vérifie, pour m assez grand, $\mathcal{L} \cap \{m, m+1\} \neq \emptyset$. En d'autres termes, la fréquence d'apparition des entiers appartenant à $\mathcal{L}$ sera plus grande que $1/2$.

2.1.1 Le résultat

Définition 2.1.3. On note $\mathcal{D}_b$ la classe de fonctions définie par

$$\mathcal{D}_b = \{q \in C^\infty([0, 1]) \mid \exists k \in \mathbb{N}, q^{(k)}(0) \neq (-1)^k q^{(k)}(1)\}.$$

Définition 2.1.4. Le potentiel associé au facteur conforme f est la fonction q_f définie sur $[0, 1]$ par

$$q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f.$$

Ce potentiel q_f apparaissait naturellement dans le premier chapitre lorsque, écrivant la solution du problème (1.1) en séparant les variables, on ramenait l'étude à celle d'un système infini d'équations différentielles ordinaires (avec conditions au bord). C'est sur q_f que portera notre hypothèse *technique* de défaut de symétrie.

Notation : Soit x_0 un réel et g une fonction à valeurs réelles telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

On écrit $f(x) \underset{x_0}{=} \tilde{O}(g(x))$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^{1-\varepsilon}} = 0.$$

Notre résultat d'unicité locale est le suivant :

Théorème 2.1.5. *Soit $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ une variété riemannienne lisse que l'on munit des métriques*

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}), \quad \tilde{g} = \tilde{f}(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}),$$

où f et $\tilde{f}$ sont des fonctions strictement positives sur $[0, 1]$. Soit ω une fréquence qui n'appartient ni au spectre de Dirichlet de $-\Delta_g$ ni à celui de $-\Delta_{\tilde{g}}$. Soit a un élément de $]0, 1[$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(\varepsilon_m)_m$ qui vérifient

$$\varepsilon_m = \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\mu_m}}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Afin d'alléger l'énoncé du résultat, on définit les propositions

- * $(P_1) : f = \tilde{f}$ sur $[0, a]$,
- * $(P_2) : f = \tilde{f} \circ \eta$ sur $[0, a]$,
- * $(P_3) : f = \tilde{f}$ sur $[1 - a, 1]$,
- * $(P_4) : f = \tilde{f} \circ \eta$ sur $[1 - a, 1]$,

où, pour tout x de $[0, 1]$, $\eta(x) = 1 - x$.

Supposons que f et $\tilde{f}$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{C}_b$ défini par

$$\mathcal{C}_b = \left\{ \bullet f \in C^\infty([0, 1]), \quad \bullet \left| \frac{f'(k)}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{n-2}, \quad k \in \{0, 1\}, \quad \bullet q_f \in \mathcal{D}_b \right\}.$$

Alors :

Pour $n = 2$ et $\omega \neq 0$ ou pour $n \geq 3$:

$$\left(\exists (\varepsilon_m) \in \mathcal{E}, \quad \sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \right) \Rightarrow (P_1) \text{ ou } (P_2) \text{ ou } (P_3) \text{ ou } (P_4).$$

Remarque 14. Lorsque $n = 2$, la condition $\left| \frac{f'(k)}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{n-2}$ est toujours satisfaite.

Remarque 15. La réciproque du Théorème 2.1.5 n'est pas vraie si $f(0)$ diffère de $f(1)$. En effet, si l'une, seulement, des quatre propositions (P_i) est satisfaite, elle ne peut entraîner plus que la proximité de l'une des sous-suites $(\lambda^-(\mu_m))$ ou $(\lambda^+(\mu_m))$ avec l'une de ses homologues tildées $(\tilde{\lambda}^-(\mu_m))$ ou $(\tilde{\lambda}^+(\mu_m))$. On ne peut rien dire de l'autre sous-suite.

Cas particulier : Si $f(0) = f(1)$, on a l'équivalence suivante :

$$\left(\exists (\varepsilon_m) \in \mathcal{E}, \sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \right) \Leftrightarrow \left((P_1) \text{ et } (P_3) \right) \text{ ou } \left((P_2) \text{ et } (P_4) \right).$$

2.1.2 Plan de la preuve

Étape 1. Suivant l'itinéraire tracé par le premier chapitre, nous commençons par établir les asymptotiques des valeurs propres avec un terme d'erreur exponentiellement décroissant. Nous n'en reprenons cependant pas le résultat *talis qualis* car l'hypothèse $q_f \in \mathcal{D}_b$ permet d'obtenir, cette fois, un terme d'erreur plus précis. Sous cette hypothèse, on montre que les deux suites $(\lambda^-(\mu_m))$ et $(\lambda^+(\mu_m))$, dont l'union forme le spectre de $\Lambda_g(\omega)$, vérifient les asymptotiques suivantes :

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \\ \lambda^+(\mu_m) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{(\ln h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{cases}$$

où M et N sont les fonctions de Weyl-Titchmarsh définies dans le premier chapitre. L'exposant du terme d'erreur est donc doublé par rapport à celui dont nous disposons au premier chapitre, ce qui influencera la taille du voisinage sur lequel on récupère avec exactitude la donnée des facteurs conformes.

Étape 2. On montre, à l'aide des asymptotiques précédentes, que la proximité des spectres $\Lambda_g(\omega)$ et $\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)$ à la précision (ε_m) conduit à l'égalité

$$\{f(0), f(1)\} = \{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\},$$

à partir de laquelle, sans perte de généralité, on supposera : $f(0) = \tilde{f}(0)$ et $f(1) = \tilde{f}(1)$.

Étape 3. Sans perte de généralité, là non plus, en supposant $f(0) \leq f(1)$, on montre alors que la proximité des spectre implique l'existence d'un sous-ensemble d'indices $\mathcal{L}$ vérifiant la propriété $\mathcal{L} \cap \{m, m+1\} \neq \emptyset$ pour tout m assez grand et tel que

$$\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O(e^{-2a\kappa_m}), \quad m \rightarrow +\infty, \quad m \in \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Étape 4. On fait appel à une représentation intégrale des fonctions de Weyl-Titchmarsh obtenue par Barry Simon : un élément a de $]0, 1[$ étant fixé, il existe une fonction A dans $L^1([0, a])$ telle que

$$N(z^2) = -z - \int_0^a A(x)e^{-2xz}dx + \tilde{O}(e^{-2az}), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.3)$$

On prouve alors, en invoquant par des arguments d'analyse complexe, que la relation (2.2) implique l'égalité des intégrandes A et $\tilde{A}$ sur $[0, a]$ dans les représentations de N et $\tilde{N}$. On en tire alors

$$N(z^2) - \tilde{N}(z^2) = \tilde{O}(e^{-2az}), \quad z \rightarrow +\infty.$$

Le théorème d'unicité local de Borg-Marchenko permet d'identifier les potentiels q_f et $q_{\tilde{f}}$ sur $[1-a, 1]$ puis, par un argument de type Cauchy-Lipschitz, d'aboutir à l'égalité $f = \tilde{f}$ sur $[1-a, 1]$: c'est la propriété (P_3) . Les autres propriétés sont vérifiées en permutant les rôles de $f(0)$, $f(1)$, $\tilde{f}(0)$ et $\tilde{f}(1)$.

2.2 Asymptotique des valeurs propres

Désormais, nous noterons simplement $q = q_f$ et $\tilde{q} = q_{\tilde{f}}$. L'hypothèse selon laquelle q appartient à $\mathcal{D}_b$ permet d'améliorer les asymptotiques des valeurs propres $\lambda^\pm(\mu_m)$. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Si q appartient à $\mathcal{D}_b$ alors les deux suites de valeurs propres $\lambda^-(\mu_m)$ et $\lambda^+(\mu_m)$ de $\Lambda_g(\omega)$ vérifient les égalités*

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \\ \lambda^+(\mu_m) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{(\ln h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique $P(X)$ de l'opérateur $\Lambda_g^m(\omega)$, défini dans la

Proposition 1.2.7 du chapitre 1, s'écrit

$$P(X) = X^2 - \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega))X + \det(\Lambda_g^m(\omega)).$$

Afin d'alléger les calculs, on pose

$$C_0 = \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}}, \quad C_1 = \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}}.$$

D'après la représentation matricielle de $\Lambda_g^m(\omega)$ impliquant les fonctions de Weyl-Titchmarsh, $\text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega))$ et $\det(\Lambda_g^m(\omega))$ vérifient les égalités

$$\begin{cases} \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_0 - C_1 \\ \det(\Lambda_g^m(\omega)) = \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0\right)\left(-\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right) + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}), \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Le discriminant δ de $P(X)$ s'exprime alors de manière asymptotique :

$$\begin{aligned} \delta &= \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right)^2 - 4\left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0\right)\left(-\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1\right) \\ &\quad + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \\ &= \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_1\right)^2 + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{aligned}$$

On fait de nouveau appel aux asymptotiques de $M(z^2)$ et $N(z^2)$ obtenues par Simon dans [Sim99] et rappelées au cours du premier chapitre (Théorème 1.3.3 et Corollaire 1.3.4).

D'après ces résultats, si $f(0)$ diffère de $f(1)$, nous pouvons écrire :

$$-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}\right)}_{\neq 0} \sqrt{\mu_m} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right).$$

Si $f(0)$ et $f(1)$ sont égaux, nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.2.2. *On a l'équivalence :*

$$q^{(k)}(0) = (-1)^k q^{(k)}(1), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_k(0) = \gamma_k(0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

où les fonctions β et γ ont été définies au cours du premier chapitre dans l'énoncé du Théorème 1.3.3 et son Corollaire 1.3.4.

Démonstration. On démontre par récurrence que, pour tout entier j , il existe un polynôme P_j de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_j]$ tel que

$$\begin{cases} \beta_j(x) = \frac{1}{2^{j+1}} q^{(j)}(x) + P_j(q, q', \dots, q^{(j-1)})(x) \\ \gamma_j(x) = \frac{1}{2^{j+1}} (q \circ \eta)^{(j)}(x) + P_j(q \circ \eta, (q \circ \eta)', \dots, (q \circ \eta)^{(j-1)})(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\eta(x) = 1 - x$.

- Pour tout x de $[0, 1]$, on a, par définition : $\beta_0(x) = \frac{1}{2}q(x)$ et $\gamma_0(x) = \frac{1}{2}q(1 - x)$. Les deux égalités données par (2.4) sont donc satisfaites pour $j = 0$ en posant $P_0(X) = 0$.
- Soit un entier j tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, j \rrbracket$, on ait l'existence de P_k vérifiant :

$$\begin{cases} \beta_k(x) = \frac{1}{2^{k+1}} q^{(k)}(x) + P_k(q, q', \dots, q^{(k-1)})(x) \\ \gamma_k(x) = \frac{1}{2^{k+1}} (q \circ \eta)^{(k)}(x) + P_k(q \circ \eta, (q \circ \eta)', \dots, (q \circ \eta)^{(k-1)})(x). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \beta_{j+1}(x) &= \frac{1}{2} \beta_j'(x) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \beta_l(x) \beta_{j-l}(x) \\ &= \frac{1}{2^{j+2}} q^{(j+1)}(x) + P_{j+1}(q, q', \dots, q^{(j)})(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé $P_{j+1}(q, q', \dots, q^{(j)}) = \frac{1}{2} [P_j(q, q', \dots, q^{(j-1)})]' + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \beta_l(x) \beta_{j-l}(x)$.

De la même façon :

$$\begin{aligned} \gamma_{j+1}(x) &= \frac{1}{2} \gamma_j'(x) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \gamma_l(x) \gamma_{j-l}(x) \\ &= \frac{1}{2^{j+2}} (q \circ \eta)^{(j+1)}(x) + P_{j+1}(q \circ \eta, (q \circ \eta)', \dots, (q \circ \eta)^{(j)})(x). \end{aligned}$$

- Par récurrence, le résultat en découle.

Démontrons maintenant l'équivalence du Lemme 2.2.2.

($\Rightarrow$) Si, pour tout entier j , $q^{(j)}(0) = (-1)^j q^{(j)}(1)$, alors pour tout entier k et tout

polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$:

$$P(q, q', \dots, q^{(k-1)})(0) = P(q \circ \eta, (q \circ \eta)', \dots, (q \circ \eta)^{(k-1)})(0).$$

Grâce aux égalités données par (2.4), il vient :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \beta_j(0) = \gamma_j(0).$$

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe un entier j tel que $q^{(j)}(0) \neq (-1)^j q^{(j)}(1)$, et posons alors

$$k = \min\{j \in \mathbb{N}, q^{(j)}(0) \neq (-1)^j q^{(j)}(1)\}. \quad (2.5)$$

Comme précédemment, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$:

$$P(q, q', \dots, q^{(k-1)})(0) = P(q \circ \eta, (q \circ \eta)', \dots, (q \circ \eta)^{(k-1)})(0),$$

puis

$$\begin{aligned} \beta_k(0) \neq \gamma_k(0) &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{k+1}} q^{(k)}(0) + P_k(q, \dots, q^{(k-1)})(0) \neq \frac{1}{2^{k+1}} (q \circ \eta)^{(k)}(0) \\ &\quad + P_k((q \circ \eta), \dots, (q \circ \eta)^{(k-1)})(0) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{k+1}} q^{(k)}(0) \neq \frac{1}{2^{k+1}} (q \circ \eta)^{(k)}(0) \\ &\Leftrightarrow q^{(k)}(0) \neq (-1)^k q^{(k)}(1), \end{aligned}$$

et ceci est vrai par définition de l'entier k . □

Comme nous avons supposé que le potentiel q appartient à $\mathcal{D}_b$, en définissant k par l'égalité (2.5), on obtient, toujours en vertu des asymptotiques de $M(z^2)$ et $N(z^2)$:

$$-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} = \underbrace{\left(\frac{\beta_k(0) - \gamma_k(0)}{\sqrt{f(0)}} \right)}_{\neq 0} \frac{1}{(\sqrt{\mu_m})^{k+1}} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{\mu_m})^{k+2}} \right).$$

Dans les deux cas, il existe un réel A non nul et k dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} = A(\sqrt{\mu_m})^k + o((\sqrt{\mu_m})^k) \quad (2.6)$$

En se rappelant que le discriminant δ vérifie l'asymptotique

$$\delta = \left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_1 \right)^2 + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}),$$

on obtient, A étant non nul :

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta} &= \left[\left(-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + C_1 \right)^2 + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(A(\sqrt{\mu_m})^k + C_0 + C_1 + o((\sqrt{\mu_m})^k) \right)^2 + O(\mu_m e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left| A(\sqrt{\mu_m})^k + C_0 + C_1 + o((\sqrt{\mu_m})^k) \right| \left[1 + O\left((\sqrt{\mu_m})^{-2k+2} e^{-2\sqrt{\mu_m}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left| \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + C_1 \right| \left[1 + O\left((\sqrt{\mu_m})^{-2k+2} e^{-2\sqrt{\mu_m}} \right) \right] \\ &= \left| \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 + C_1 \right| + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres $\lambda^\pm(\mu_m)$ vérifient alors

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}) \\ \lambda^+(\mu_m) = -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \tilde{O}(e^{-2\sqrt{\mu_m}}). \end{cases}$$

□

En fait, les valeurs propres μ_m étant comptées avec multiplicité, les asymptotiques du Lemme 2.2.1 ne seront pas assez précises pour l'objectif qui est le nôtre. En effet, les égalités portant sur les fonctions de Weyl-Titchmarsh

$$\begin{cases} -N(z^2) = z + O\left(\frac{1}{z}\right) \\ -M(z^2) = z + O\left(\frac{1}{z}\right), \end{cases}$$

combinées à la loi de Weyl mènent à :

$$\begin{cases} \lambda^-(\mu_m) = \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) = a_1 m^{\frac{1}{n-1}} + O(1) \\ \tilde{\lambda}^-(\mu_m) = \frac{\sqrt{\mu_m}}{\sqrt{f(0)}} + \frac{(\ln h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) = a_0 m^{\frac{1}{n-1}} + O(1), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $a_0, a_1 > 0$. En vue d'avoir à disposition une asymptotique plus précise, on considère de nouveau l'ensemble

$$\Sigma(\Lambda_g(\omega)) = \{\lambda^\pm(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}, \quad (2.8)$$

où les κ_m sont les valeurs propres de $-\Delta_{\mathbb{S}}$ comptées *sans multiplicité*. On rappelle que la formule explicite pour κ_m (cf [Shu87]) est donnée par

$$\kappa_m = m(m + n - 2).$$

Dans toute la suite, on utilisera systématiquement les asymptotiques du Lemme 2.2.1 en remplaçant μ_m par κ_m .

2.3 Preuve du résultat d'unicité locale

Nous donnons maintenant la preuve du Théorème 2.1.5.

Démonstration. Soit (ε_m) une suite à valeurs réelle telle que

$$\varepsilon_m = \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Sous l'hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, on a l'alternative*

$$\begin{cases} f(0) = \tilde{f}(0) \\ f(1) = \tilde{f}(1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(0) = \tilde{f}(1) \\ f(1) = \tilde{f}(0). \end{cases}$$

Démonstration. Procédons en deux temps.

- On démontre d'abord l'égalité

$$\sqrt{f(0)} + \sqrt{f(1)} = \sqrt{\tilde{f}(0)} + \sqrt{\tilde{f}(1)}. \quad (2.9)$$

En remplaçant $\sqrt{\kappa_m}$ par $m + \frac{n-2}{2} + O\left(\frac{1}{m}\right)$, on tire de (2.7) l'asymptotique suivante :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \frac{m}{\sqrt{f(1)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = \frac{m}{\sqrt{f(0)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(0)}} + \frac{(\ln h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{cases} \quad (2.10)$$

Soit $L > 0$. Les suites $(\lambda^\pm(\kappa_m))$ suivent asymptotiquement une progression arithmétique. La relation

$$\Sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)),$$

conduit alors à (lorsque $L \rightarrow +\infty$) :

$$\begin{aligned} & \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, \lambda^-(\kappa_m) \leq L\} + \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, \lambda^+(\kappa_m) \leq L\} \\ &= \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) \leq L\} + \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) \leq L\} + O(1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

En combinant (2.10) et (2.11), on en déduit :

$$\begin{aligned} & \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, m \leq \sqrt{f(1)}L\} + \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, m \leq \sqrt{f(0)}L\} \\ &= \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, m \leq \sqrt{\tilde{f}(1)}L\} + \text{Card}\{m \in \mathbb{N}, m \leq \sqrt{\tilde{f}(0)}L\} + O(1), \end{aligned}$$

puis

$$\sqrt{f(1)}L + \sqrt{f(0)}L = \sqrt{\tilde{f}(1)}L + \sqrt{\tilde{f}(0)}L + O(1) \quad L \rightarrow +\infty.$$

Le nombre $L > 0$ étant quelconque, ceci démontre (2.9).

- Il s'agit désormais d'établir : $f(0) \in \{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$. À cet effet, nous pourrions reprendre, en l'adaptant, la preuve du Lemme 1.4.2 donnée dans le premier chapitre. Nous en proposons une autre, qui s'appuie toujours sur un raisonnement par l'absurde. Supposons que $f(0)$ n'appartienne pas à $\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$, par exemple :

$$f(0) < \min\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}. \quad (2.12)$$

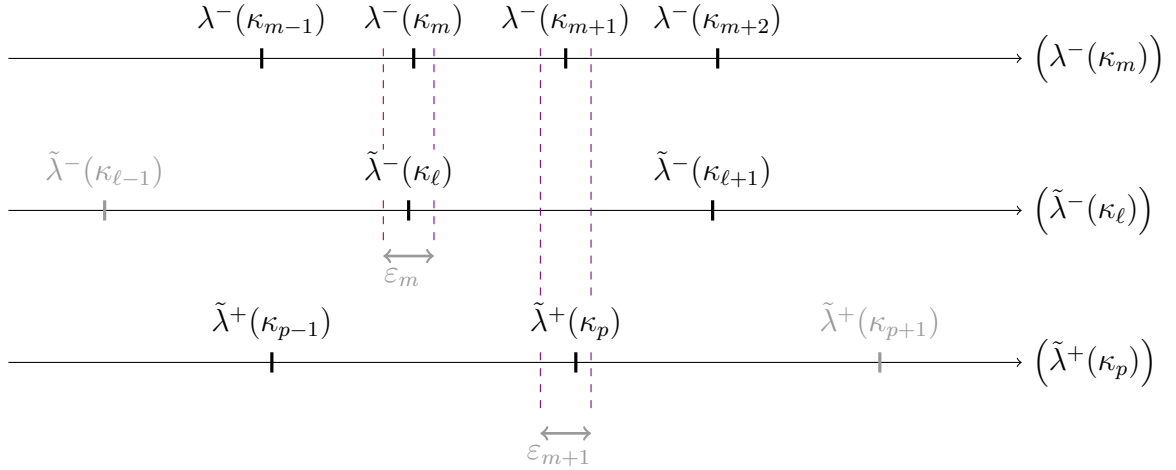
Alors l'égalité (2.9) implique

$$f(1) > \max\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}. \quad (2.13)$$

Soit m un entier. Il existe un indice ℓ tel que

$$\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) = O(\varepsilon_m), \quad (2.14)$$

avec $|O(\varepsilon_m)| \leq \varepsilon_m$. D'après notre hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, chaque valeur propre $\lambda^-(\kappa_{m-1})$, $\lambda^-(\kappa_{m+1})$ et $\lambda^-(\kappa_{m+2})$ est proche d'un élément de $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$. Pour m assez grand, la situation est alors nécessairement la suivante :



En effet, puisque $f(1)$ est strictement supérieur à $\tilde{f}(1)$, on tire de (2.10) et (2.14) :

$$\begin{aligned} \lambda^-(\kappa_{m+1}) &= \lambda^-(\kappa_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + o(1) \\ &= \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) + O(\varepsilon_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + o(1) \\ &= \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1}) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}}}_{<0} + O(\varepsilon_m) + o(1). \end{aligned}$$

Choisissons m assez grand pour que les deux conditions

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f(1)}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} + O(\varepsilon_m) + o(1) < \varepsilon_{m+1} \\ O(\varepsilon_m) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} + o(1) > \varepsilon_{m+1}, \end{cases}$$

soit satisfaites. On obtient l'encadrement.

$$\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) + \varepsilon_{m+1} < \lambda^-(\kappa_{m+1}) < \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1}) - \varepsilon_{m+1}.$$

Dans ce cas, $\lambda^-(\kappa_{m+1})$ n'est proche d'aucun élément de la sous-suite $(\tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell))$ à la précision ε_{m+1} . Il existe donc un indice p tel que

$$\lambda^-(\kappa_{m+1}) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_p) = O(\varepsilon_{m+1}), \quad (2.15)$$

avec $|O(\varepsilon_{m+1})| \leq \varepsilon_{m+1}$. Pour les mêmes raisons, on a également

$$\tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell-1}) + \varepsilon_{m-1} < \lambda^-(\kappa_{m-1}) < \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) - \varepsilon_{m-1},$$

d'où l'on déduit la relation

$$\lambda^-(\kappa_{m-1}) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p-1}) = O(\varepsilon_{m-1}), \quad (2.16)$$

avec $|O(\varepsilon_{m-1})| \leq \varepsilon_{m-1}$. Puisque $f(1)$ est également strictement supérieur à $\tilde{f}(0)$, on tire enfin

$$\tilde{\lambda}^+(\kappa_p) + \varepsilon_{m+2} < \lambda^-(\kappa_{m+2}) < \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p+1}) - \varepsilon_{m+2}.$$

Par conséquent

$$\lambda^-(\kappa_{m+2}) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1}) = O(\varepsilon_{m+2}), \quad (2.17)$$

avec $|O(\varepsilon_{m+2})| \leq \varepsilon_{m+2}$.

Ainsi, grâce aux égalités (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), on a, pour m assez grand :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_{m+1}) - \lambda^-(\kappa_{m-1}) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_p) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_{p-1}) + O(\varepsilon_{m+1}) - O(\varepsilon_{m-1}) \\ \lambda^-(\kappa_{m+2}) - \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_{\ell+1}) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell) + O(\varepsilon_{m+2}) - O(\varepsilon_m). \end{cases}$$

En particulier, dans un régime donné par $m \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{f(1)}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(0)}} + o(1) \\ \frac{2}{\sqrt{f(1)}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} + o(1). \end{cases}$$

Par passage à la limite, il vient

$$2\sqrt{\tilde{f}(0)} = \sqrt{f(1)} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\tilde{f}(1)} = \sqrt{f(1)}.$$

Mais ces deux relations, combinées à l'égalité $\sqrt{f(0)} + \sqrt{f(1)} = \sqrt{\tilde{f}(0)} + \sqrt{\tilde{f}(1)}$, impliquent :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{f(0)} &= 2\sqrt{\tilde{f}(0)} - \sqrt{f(1)} + 2\sqrt{\tilde{f}(1)} - \sqrt{f(1)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

contredisant la stricte positivité de $f(0)$.

Par conséquent $f(0)$ appartient à $\{\tilde{f}(0), \tilde{f}(1)\}$ et l'égalité (2.9) donne la conclusion. $\square$

On se place désormais, sans perte de généralité, dans la situation

$$f(0) = \tilde{f}(0) \quad \text{et} \quad f(1) = \tilde{f}(1).$$

L'autre cas s'obtient par échange des rôles de $\tilde{\lambda}^-(\kappa_m)$ et $\tilde{\lambda}^+(\kappa_m)$ dans la suite du chapitre.

2.3.1 Le cas $f(0) \neq f(1)$

Sans perte de généralité, là non plus, on suppose $f(0) < f(1)$. Le résultat du prochain lemme porte sur la suite $(\lambda^-(\kappa_p))$ qui a, d'après les asymptotiques (2.10), une croissance plus lente que celle de $(\lambda^+(\kappa_p))$. Si nous avons traité le cas $f(0) > f(1)$, la suite étudiée dans cette section aurait été $(\lambda^+(\kappa_p))$.

Lemme 2.3.2. *Supposons $f(0) < f(1)$. Il existe un sous-ensemble infini $\mathcal{L}$ de $\mathbb{N}$ tel que*

- $\lambda^-(\kappa_p) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_p) = \tilde{O}(e^{-2a\kappa_p})$, $p \rightarrow +\infty$, $p \in \mathcal{L}$.
- Pour tout entier m assez grand, $\{m, m+1\} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$.

Démonstration. Notons U le sous-ensemble de $\{\lambda^-(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$U \underset{(\varepsilon_m)}{\subsetneq} \{\tilde{\lambda}^+(\kappa_m), m \in \mathbb{N}\}.$$

Cas 1 : U est fini. Il existe alors un entier m_1 tel que :

$$\forall m \geq m_1, \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad |\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_p)| \leq \varepsilon_m.$$

Cela s'écrit encore

$$\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_p) = O(\varepsilon_m),$$

avec $|O(\varepsilon_m)| \leq \varepsilon_m$. En remplaçant, dans la relation précédente, les valeurs propres par leurs asymptotiques (2.10), on trouve (en ayant à l'esprit que $f(1) = \tilde{f}(1)$) :

$$\frac{m}{\sqrt{f(1)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{p}{\sqrt{f(1)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + O(\varepsilon_m).$$

- Si $n = 2$ alors $h = f^{n-2}$ est constante. On a alors $\frac{m}{\sqrt{f(1)}} = \frac{p}{\sqrt{f(1)}} + O(\varepsilon_m)$.

Puis, pour m assez grand, $m = p$.

- Si $n \geq 3$, alors $m - p = \frac{\ln(h)'(1)}{4} - \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4} + O(\varepsilon_m)$. Par hypothèse :

$$\left| \frac{\ln(h)'(1)}{4} - \frac{\ln(\tilde{h})'(1)}{4} \right| = \frac{n-2}{4} \left| \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{\tilde{f}'(1)}{\tilde{f}(1)} \right| \leq \frac{n-2}{4} \times \frac{2}{n-2} = \frac{1}{2}.$$

Puis $m = p$ si m et p dépassent un certain entier m_0 .

L'ensemble $\mathcal{L} = \{m \in \mathbb{N}, m \geq m_0\}$ vérifie bien les propriétés énoncées par le Lemme 2.3.2.

Cas 2 : U est infini. Il existe alors deux applications $\varphi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que :

$$\lambda^-(\kappa_{\psi(m)}) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_{\varphi(m)}) = O(\varepsilon_m), \quad (2.18)$$

avec $|O(\varepsilon_m)| \leq \varepsilon_m$.

Remarque 16. Les suites φ et ψ sont construites de sorte qu'un entier m qui n'est pas dans l'image de ψ (respectivement pas dans celle de φ) vérifie $|\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_n)| < \varepsilon_m$ pour un certain indice n (respectivement $|\lambda^+(\kappa_n) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)| < \varepsilon_n$ pour un indice n).

En remplaçant $\lambda^+(\kappa_{\varphi(m)})$ et $\tilde{\lambda}^-(\kappa_{\psi(m)})$ par leurs asymptotiques dans l'égalité (2.18), on a :

$$\frac{\varphi(m)}{\sqrt{f(0)}} = \frac{\psi(m)}{\sqrt{f(1)}} + C + O(\varepsilon_m) + O\left(\frac{1}{\varphi(m)}\right), \quad (2.19)$$

$$\text{où } C = -\frac{\ln(h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} - \frac{\ln(h)'(0)}{4\sqrt{f(0)}} + \frac{n-2}{2\sqrt{f(1)}} - \frac{n-2}{2\sqrt{f(0)}}.$$

Lemme 2.3.3. *Il existe un entier m_0 tel que $(m \geq m_0 \Rightarrow \psi(m+1) \geq \psi(m) + 2)$.*

Démonstration. Posons $B = \frac{\sqrt{f(1)}}{\sqrt{f(0)}} > 1$ et $C' = -\sqrt{f(1)}C$. L'égalité (2.19) s'écrit :

$$\psi(m) = B\varphi(m) + C' + o(1).$$

Supposons $\psi(m+1) = \psi(m) + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \psi(m) + 1 = \psi(m+1) &= B\varphi(m+1) + C' + o(1) \\ &\geq B(\varphi(m) + 1) + C' + o(1) \\ &= B\varphi(m) + C' + B + o(1) \\ &= \psi(m) + B + o(1), \end{aligned}$$

et donc

$$1 \geq B + o(1),$$

ce qui est faux si $m \geq m_0$ pour un certain entier m_0 . □

Par conséquent, l'image de ψ ne contient pas deux entiers consécutifs. Posons :

$$\mathcal{L} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq m_0, m \notin \psi(\mathbb{N})\}.$$

Alors $\mathcal{L}$ vérifie la condition $\mathcal{L} \cap \{m, m+1\} \neq \emptyset$ pour tout m supérieur à m_0 . De plus, pour tout m de $\mathcal{L}$, il existe un indice ℓ tel que $|\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_\ell)| \leq \varepsilon_m$. On en déduit, comme précédemment, $m = \ell$. □

Remarque 17. Le Lemme 2.3.2 et les asymptotiques de (2.10) impliquent en particulier

$$\frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{(\ln \tilde{h})'(1)}{4\sqrt{\tilde{f}(1)}}.$$

À présent, rappelons la représentation asymptotiquement intégrale de la fonction de Weyl-Titchmarsh $N(z^2)$ obtenue par Simon dans [Sim99, Théorème 3.1] :

Théorème 2.3.4. *Pour tout $0 < a < 1$, il existe une fonction A dans $L^1([0, a])$ telle que*

$$N(z^2) = -z - \int_0^a A(x)e^{-2xz}dx + \tilde{O}(e^{-2az}), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.20)$$

Grâce à l'asymptotique de $\lambda^-(\kappa_m)$ obtenue dans le Lemme 2.2.1, on a :

$$\lambda^-(\kappa_m) = -\frac{N(\kappa_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} + \tilde{O}\left(e^{-2\sqrt{\kappa_m}}\right).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) &= \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \Rightarrow -\frac{N(\kappa_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} &= -\frac{\tilde{N}(\kappa_m)}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} - \frac{(\ln \tilde{h})'(1)}{4\sqrt{\tilde{f}(1)}} + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) + \tilde{O}\left(e^{-2\sqrt{\kappa_m}}\right). \end{aligned}$$

Puisque nous traitons le cas $f(1) = \tilde{f}(1)$, et grâce à l'égalité $\frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{(\ln \tilde{h})'(1)}{4\sqrt{\tilde{f}(1)}}$ mentionnée en Remarque 17, il vient :

$$\begin{aligned} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) &= \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \Rightarrow N(\kappa_m) &= \tilde{N}(\kappa_m) + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \Rightarrow \int_0^a A(x)e^{-2x\sqrt{\kappa_m}}dx &= \int_0^a \tilde{A}(x)e^{-2x\sqrt{\kappa_m}}dx + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \Rightarrow \int_0^a (A(x) - \tilde{A}(x))e^{-2x\sqrt{\kappa_m}}dx &= \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}). \end{aligned}$$

Soit ε un réel strictement positif. Pour tout z de $\mathbb{C}$, posons

$$F(z) = e^{2a(1-\varepsilon)z} \int_0^a (A(x) - \tilde{A}(x))e^{-2xz}dx.$$

La fonction F est entière et vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow |F(z)| \leq \|A - \tilde{A}\|_1 e^{2a(1-\varepsilon)\operatorname{Re}(z)}.$$

Soit m un entier assez grand. Grâce au Lemme 2.3.2, on dispose d'un entier p dans

$\{2m, 2m + 1\}$ tel que $|\lambda^-(\kappa_p) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_p)| \leq \varepsilon_p$. Nous construisons alors la suite (u_m) en posant, pour tout m assez grand, $u_m = \frac{\sqrt{\kappa_p}}{2}$. Cette suite vérifie la relation

$$u_m - m = O(1).$$

Posons enfin $G(z) = F(2z)$. Alors

$$\begin{cases} |G(z)| \leq \|A - \tilde{A}\|_1 e^{4a(1-\varepsilon)\operatorname{Re}(z)} \\ G(u_m) = o(1) \end{cases}$$

Par conséquent (voir [Boa11], Théorème 10.5.1, p.191), G est bornée sur tout $\mathbb{R}_+$ et F également :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^a (A(x) - \tilde{A}(x)) e^{-2xu} dx = O(e^{-2a(1-\varepsilon)u}).$$

Cette estimation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^a (A(x) - \tilde{A}(x)) e^{-2xu} dx = \tilde{O}(e^{-2au}).$$

Nécessairement ([Sim99], Lemme A.2.1) : $A = \tilde{A}$ sur $[0, a]$. On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad N(t^2) - \tilde{N}(t^2) = \tilde{O}(e^{-2at}).$$

Rappelons que, par symétrie, N (resp. $\tilde{N}$) tient le même rôle que M (resp. $\tilde{M}$) pour le potentiel $x \mapsto q(1-x)$ (resp. $x \mapsto \tilde{q}(1-x)$). Autrement dit :

$$N(z, q) = M(z, q \circ \eta),$$

où, pour tout $x \in [0, 1]$, $\eta(x) = 1 - x$. D'après le théorème de Borg-Marchenko local ([Sim99], Théorème A.1.1) on en tire $q(1-x) = \tilde{q}(1-x)$ pour tout x de $[0, a]$, i.e

$$\frac{(f^{n-2})''(x)}{f^{n-2}(x)} - \omega f(x) = \frac{(\tilde{f}^{n-2})''(x)}{\tilde{f}^{n-2}(x)} - \omega \tilde{f}(x) := r(x), \quad \forall x \in [1-a, 1].$$

Les fonctions f et $\tilde{f}$ résolvent sur $[1-a, 1]$ la même équation différentielle ordinaire

$$(y^{n-2})''(x) - \lambda y^{n-1}(x) = r(x) y^{n-2}(x).$$

Des égalités

$$f(1) = \tilde{f}(1) \quad \text{et} \quad \frac{(\ln h)'(1)}{4\sqrt{f(1)}} = \frac{(\ln \tilde{h})'(1)}{4\sqrt{\tilde{f}(1)}},$$

on tire $f'(1) = \tilde{f}'(1)$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet finalement de conclure :

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [1 - a, 1].$$

Remarque 18. Si nous avons supposé $f(0) > f(1)$, nous aurions, à l'aide des suites $(\lambda^+(\kappa_p))$ et $(\tilde{\lambda}^+(\kappa_p))$, démontré l'égalité $f = \tilde{f}$ sur $[0, a]$.

2.3.2 Le cas $f(0) = f(1)$

Sans perte de généralité, supposons $f(0) = f(1) = 1$. D'après le Lemme 2.2.1, les valeurs propres $\lambda^\pm(\kappa_m)$ vérifient les asymptotiques

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = -N(\kappa_m) - \frac{(\ln h)'(1)}{4} + \tilde{O}\left(e^{-2\sqrt{\kappa_m}}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = -M(\kappa_m) + \frac{(\ln h)'(0)}{4} + \tilde{O}\left(e^{-2\sqrt{\kappa_m}}\right). \end{cases}$$

On pose $C_0 = \frac{(\ln h)'(0)}{4}$, $C_1 = \frac{(\ln h)'(1)}{4}$, $\tilde{C}_0 = \frac{(\ln \tilde{h})'(0)}{4}$ et $\tilde{C}_1 = \frac{(\ln \tilde{h})'(1)}{4}$.

Grâce aux asymptotiques de $M(z^2)$ et $N(z^2)$ données par le Théorème 1.3.3 et le Corollaire 1.3.4, et à la connaissance explicite de $\kappa_m = m(m + n - 2)$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = m + \frac{n-2}{2} + C_1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = m + \frac{n-2}{2} + C_0 + O\left(\frac{1}{m}\right), \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

Posons

$$V_m = \left\{ \lambda^-(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}, \lambda^+(\kappa_m) - \frac{n-2}{2} \right\}$$

$$\text{et} \quad \tilde{V}_m = \left\{ \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}, \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) - \frac{n-2}{2} \right\}.$$

Puisque f et $\tilde{f}$ appartiennent à $\mathcal{C}_b$ par hypothèse, on a :

$$|C_i| \leq \frac{1}{4}, \quad |\tilde{C}_i| \leq \frac{1}{4}, \quad i \in \{0, 1\} \quad (2.22)$$

et par suite, (2.21) et (2.22) impliquent, pour m assez grand :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad V_m, \tilde{V}_m \subset \left[m - \frac{1}{3}, m + \frac{1}{3} \right]. \quad (2.23)$$

L'hypothèse $\Sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ équivaut bien sûr à écrire

$$-\frac{n-2}{2} + \Sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} -\frac{n-2}{2} + \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)). \quad (2.24)$$

Les relations (2.23) et (2.24) mènent alors à l'alternative

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}). \end{cases} \quad (2.25)$$

Il existe donc un sous-ensemble infini $\mathcal{S}$ de $\mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathcal{S}, \quad & \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \end{cases} \quad \text{ou} \\ & \forall m \in \mathcal{S}, \quad \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Par exemple, si le premier cas est satisfait, alors par passage à la limite, en utilisant les asymptotiques (2.21) :

$$C_1 = \tilde{C}_1 \quad \text{et} \quad C_0 = \tilde{C}_0. \quad (2.27)$$

Cas 1 : $C_0 \neq -C_1$.

Notons

$$\delta = \frac{|C_0 + C_1|}{3} \in]0, \frac{1}{4}[.$$

Pour m suffisamment grand, d'après les asymptotiques (2.21) :

- $\lambda^-(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}$ et $\tilde{\lambda}^-(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}$ appartiennent tous deux à l'intervalle $-C_1 + [m - \delta, m + \delta] := I_{m,1}$
- $\lambda^+(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}$ et $\tilde{\lambda}^+(\kappa_m) - \frac{n-2}{2}$ appartiennent tous deux à l'intervalle $C_0 + [m - \delta, m + \delta] := I_{m,0}$.

De plus, puisque C_0 diffère de $-C_1$, on a $d(I_{m,1}, I_{m,0}) \geq \delta$ dès que m assez grand, où $d(I, J) = \inf_{x \in I, y \in J} |x - y|$. Par suite, (2.24) implique

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) + O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty.$$

On peut alors montrer, comme dans la section Section 2.3.1, les égalités :

$$\begin{cases} N(t^2) - \tilde{N}(t^2) = \tilde{O}(e^{-2at}) \\ M(t^2) - \tilde{M}(t^2) = \tilde{O}(e^{-2at}) \end{cases} \quad t \rightarrow +\infty,$$

à partir desquelles on identifie les facteurs conformes sur un voisinage du bord (et non plus une de ses composantes seulement) de taille $2a$:

$$f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in [1-a, 1] \quad \text{et} \quad f(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in [0, a].$$

Cas 2 : $C_0 = -C_1$.

Puisque f et $\tilde{f}$ appartiennent à $\mathcal{D}_b$, et d'après le Lemme 2.2.2, il existe un indice j tel que $\beta_j(0)$ soit différent de $\gamma_j(0)$. Posons

$$j_0 = \min\{j \geq 2, \beta_j(0) \neq \gamma_j(0)\}.$$

Les asymptotiques des fonctions de Weyl-Titchmarsh impliquent l'égalité

$$\lambda^-(\kappa_m) - \lambda^+(\kappa_m) = \frac{\gamma_{j_0} - \beta_{j_0}}{m^{j_0}} + O\left(\frac{1}{m^{j_0+1}}\right).$$

D'après la relation $\Sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, ceci entraîne, pour le même j_0 :

$$\tilde{\lambda}^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = \frac{\tilde{\gamma}_{j_0} - \tilde{\beta}_{j_0}}{m^{j_0}} + O\left(\frac{1}{m^{j_0+1}}\right).$$

Il est alors possible d'ordonner les valeurs propres $\lambda^-(\kappa_m)$ et $\lambda^+(\kappa_m)$ (et pareillement pour leurs alter egos tildés), cet ordre dépendant du signe de $\gamma_{j_0} - \beta_{j_0}$ (respectivement celui de $\tilde{\gamma}_{j_0} - \tilde{\beta}_{j_0}$). Si $\gamma_{j_0} - \beta_{j_0}$ et $\tilde{\gamma}_{j_0} - \tilde{\beta}_{j_0}$ ont même signe, nous affirmons que

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}). \end{cases} \quad (2.28)$$

En effet, dans le cas contraire, d'après (2.25), il existe un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty, \quad m \in \mathcal{F}.$$

Alors $\lambda^-(\kappa_m) - \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}})$. En faisant tendre m vers l'infini :

$$\gamma_{j_0} - \beta_{j_0} = \tilde{\beta}_{j_0} - \tilde{\gamma}_{j_0}$$

ce qui est une contradiction. En utilisant (2.28) et par la même méthode que celle employée dans la Section 2.3.1, on démontre les égalités

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad M(t^2) - \tilde{M}(t^2) = \tilde{O}(e^{-2at}) \quad \text{et} \quad N(t^2) - \tilde{N}(t^2) = \tilde{O}(e^{-2at}),$$

et enfin l'égalité des facteurs conformes sur un voisinage du bord :

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [0, a] \quad \text{et} \quad f = \tilde{f} \text{ sur } [1 - a, 1].$$

Si $\gamma_{j_0} - \beta_{j_0}$ et $\tilde{\gamma}_{j_0} - \tilde{\beta}_{j_0}$ ont un signe opposé, alors

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) + O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^+(\kappa_m) = \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) + O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}). \end{cases}$$

Dans ce cas, on montre :

$$f = \tilde{f} \circ \eta \text{ sur } [0, a] \quad \text{et} \quad f = \tilde{f} \circ \eta \text{ sur } [1 - a, 1].$$

2.3.3 Cas particulier

On reste dans le cas où $f(0) = f(1)$. L'implication directe étant déjà établie, nous prouvons la réciproque. Soit a dans $]0, 1[$. Supposons vérifiées, par exemple, les propriétés (P_1) et (P_3) , c'est à dire

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [0, a] \quad \text{et} \quad f = \tilde{f} \text{ sur } [1 - a, 1].$$

Alors $q = \tilde{q}$ sur $[0, a]$ et $q \circ \eta = \tilde{q} \circ \eta$ sur $[0, a]$. Mais grâce au Théorème 3.1 de [Sim99], le potentiel q caractérise la fonction A qui apparaît dans la représentation (2.3.4). Par suite

$$\begin{cases} M(z^2) - \tilde{M}(z^2) = \tilde{O}(e^{-2az}) \\ N(z^2) - \tilde{N}(z^2) = \tilde{O}(e^{-2az}). \end{cases}$$

L'hypothèse (P_1) implique en particulier $f(0) = \tilde{f}(0)$ et $f'(0) = \tilde{f}'(0)$. L'hypothèse (P_3) implique également $f(1) = \tilde{f}(1)$ et $f'(1) = \tilde{f}'(1)$. Grâce aux asymptotiques du Lemme 2.2.1, on déduit immédiatement :

$$\begin{cases} \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \\ \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = \tilde{O}(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}) \end{cases} \quad m \rightarrow +\infty,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 19. Si $f(0) = f(1)$ et $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors nous avons un résultat d'unicité globale.

Corollaire 2.3.5. *Si f et $\tilde{f}$ sont analytiques sur $[0, 1]$, le résultat d'unicité locale précédent devient un résultat d'unicité global sans la condition supplémentaire $q, \tilde{q} \in \mathcal{D}_b$.*

Démonstration. Nous avons eu besoin de l'hypothèse $q, \tilde{q} \in \mathcal{D}_b$ seulement dans le cas où $f(0) = f(1)$ et $C_0 = -C_1$. Dans tous les autres cas, on obtenait, sans cette hypothèse, l'une des propriétés (P_1) , (P_2) , (P_3) ou (P_4) , dont chaque égalité s'étend sur $[0, 1]$ par prolongement analytique. Il reste donc à traiter ce dernier cas. Sans perte de généralité, on suppose $f(0) = 1$.

Sous-cas 1 : $q, \tilde{q} \in \mathcal{D}_b$ et la situation a déjà été étudiée.

Sous-cas 2 : q ou $\tilde{q}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_b$. Supposons, par exemple, $q \notin \mathcal{D}_b$. Puisque f est analytique, le potentiel q l'est également. La fonction $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto q(x) - q(1 - x)$

est donc analytique et, q n'étant pas dans $\mathcal{D}_b$, vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(k)}(0) = 0.$$

Par prolongement analytique φ est donc identiquement nulle sur $[0, 1]$ ou, de manière équivalente, $q = q \circ \eta$, i.e $M = N$.

Les valeurs propres $\lambda^\pm(\kappa_m)$ vérifient alors les asymptotiques

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) = M(\kappa_m) + C_0 + \tilde{O}\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) = M(\kappa_m) + C_0 + \tilde{O}\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right) \end{cases}$$

On montre alors, sous l'hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{(\varepsilon_m)}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ que $C_0 = \tilde{C}_0 = -\tilde{C}_1$, ce qui mène à l'alternative :

$$\begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_m) = O\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right) \\ \lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_m) = O\left(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}\right). \end{cases}$$

Par conséquent :

$$M(\kappa_m) - \tilde{M}(\kappa_m) = O(e^{-2a\sqrt{\kappa_m}}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

On peut alors montrer, comme dans la première partie de la preuve, l'estimation

$$M(t^2) - \tilde{M}(t^2) = O(e^{-2at}), \quad t \rightarrow +\infty \quad t \in \mathbb{R},$$

et enfin $f = \tilde{f}$ sur $[0, a]$. Par prolongement analytique, on en tire :

$$f = \tilde{f} \text{ sur } [0, 1].$$

□

Stabilité pour des facteurs conformes symétriques

3.1 Introduction

Le modèle reste celui des chapitres précédents et notre problème se présente ainsi : supposons connue chaque valeur propre de Steklov à *une constante* $\varepsilon > 0$ près, fixée et suffisamment petite. Est-il possible d'en déduire une approximation du facteur conforme f et d'en quantifier l'erreur ?

3.1.1 Proximité de deux spectres

Nous commençons par quelques définitions.

Définition 3.1.1. Soit $\varepsilon > 0$. On dit que $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ est approximativement inclus dans $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ à la précision ε si pour tout $\lambda^\pm(\mu_m)$ de $\sigma(\Lambda_g(\omega))$:

- il existe $\tilde{\lambda}$ dans $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ tel que $|\lambda^\pm(\mu_m) - \tilde{\lambda}| \leq \varepsilon$,
- $\text{Card}\{\lambda \in \sigma(\Lambda_g(\omega)), |\lambda^\pm(\mu_m) - \lambda| \leq \varepsilon\} \leq \text{Card}\{\tilde{\lambda} \in \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)), |\lambda^\pm(\mu_m) - \tilde{\lambda}| \leq \varepsilon\}$.

On note cela $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\subset} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$.

Remarque 20. Le second point de la Définition 3.1.1 revient à prendre en compte la multiplicité des valeurs propres de Steklov.

Définition 3.1.2. On dit que $\sigma(\Lambda_g(\omega))$ et $\sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ sont proches à la précision ε si

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\subsetneq} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \quad \text{et} \quad \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \underset{\varepsilon}{\subsetneq} \sigma(\Lambda_g(\omega)).$$

On note alors $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$.

Plus généralement, si A et $\tilde{A}$ désignent deux ensembles finis de $\mathbb{R}$, on notera $A \underset{\varepsilon}{\subsetneq} \tilde{A}$ si, pour tout a de A

- il existe $\tilde{a} \in \tilde{A}$ tel que $|a - \tilde{a}| \leq \varepsilon$,
- $\text{Card}\{\lambda \in A, |\lambda - a| \leq \varepsilon\} \leq \text{Card}\{\tilde{\lambda} \in \tilde{A}, |a - \tilde{\lambda}| \leq \varepsilon\}$.

On note également $A \underset{\varepsilon}{\asymp} \tilde{A}$ si $A \underset{\varepsilon}{\subsetneq} \tilde{A}$ et $\tilde{A} \underset{\varepsilon}{\subsetneq} A$.

Avec ces définitions, on souhaiterait démontrer quelque chose comme

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|f - \tilde{f}\|_{\infty} \leq C(\varepsilon),$$

où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = 0$.

Malheureusement, nous savons, d'après le Théorème 1.1.1, qu'il n'y a pas unicité dans le problème visant à retrouver f à partir de la connaissance *exacte* de $\sigma(\Lambda_g(\omega))$. Ceci semble constituer une réelle obstruction pour établir, dans un cadre général, la stabilité du spectre par rapport à la métrique. Le problème d'unicité se révélait, somme toute, assez rigide (tout comme celui portant sur l'unicité locale), sa résolution faisant appel à la théorie des fonctions analytiques. À présent, la condition $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$ apparaît bien plus souple qu'une égalité, et la non-unicité induite par la structure de notre modèle rend l'abord de cette nouvelle question difficile. Le Théorème 1.1.1, cependant, caractérise le défaut d'unicité et met ainsi au jour la seule façon d'obtenir l'unicité *stricte*, à savoir une hypothèse de symétrie par rapport à l'axe $x = 1/2$ pour les facteurs conformes. Cette condition, naturelle quoique restrictive, sera ajoutée sur f et $\tilde{f}$ dans le Théorème 3.1.5. L'énoncé de notre résultat requiert également l'introduction, pour un certain $A > 0$ fixé, d'une classe de fonctions A -admissible à laquelle appartiennent les facteurs conformes. Sa définition est la suivante :

Définition 3.1.3. Soit $A > 0$. La classe des fonctions A -admissibles est définie par :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \bullet f \in C^2([0, 1]) \quad \bullet \forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \|f^{(k)}\|_\infty + \left\| \frac{1}{f} \right\|_\infty \leq A \right\}$$

On rappelle enfin la définition du potentiel q_f associé à f :

Définition 3.1.4. Le potentiel associé au facteur conforme f est la fonction q_f définie sur $[0, 1]$ par $q_f = \frac{(f^{\frac{n-2}{4}})''}{f^{\frac{n-2}{4}}} - \omega f$.

3.1.2 Les résultats

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème 3.1.5. Soit $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ une variété riemannienne lisse munie des métriques

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \tilde{f}(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}),$$

avec $f, \tilde{f}$ positives sur $[0, 1]$ et symétriques par rapport à $x = 1/2$. Soit $A > 0$ fixé. Pour $n \geq 2$ et $\varepsilon > 0$ assez petit (indépendant de A) et sous l'hypothèse

$$f, \tilde{f} \in \mathcal{C}(A),$$

on a l'implication

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|q_f - q_{\tilde{f}}\|_2 \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

où C_A est une constante qui ne dépend que de A .

Nous en tirons deux corollaires :

Corollaire 3.1.6. Avec des notations et hypothèses identiques à celles du Théorème 3.1.5, pour tout $0 \leq s \leq 2$, on a :

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|q_f - q_{\tilde{f}}\|_{H^s(0,1)} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\theta},$$

où $\theta = (2 - s)/2$ et C_A est une constante qui ne dépend que de A . En particulier, à l'aide des injections de Sobolev, on prouve :

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|q_f - q_{\tilde{f}}\|_\infty \leq C_A \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}.$$

Corollaire 3.1.7. *Avec des notations et hypothèses identiques à celles du Théorème 3.1.5, et si de plus $\omega = 0$ et $n \geq 3$, on a*

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|f - \tilde{f}\|_{\infty} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

où C_A est une constante ne dépendant que de A .

Ces résultats sur le problème inverse de Steklov invitent à un petit détour pour dire quelques mots de son voisin, celui de Calderón, évoqué dans l'introduction. Soit $\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M))$ l'espace des opérateurs bornés de $H^{1/2}(\partial M)$ dans lui-même, muni de la norme

$$\|F\|_* = \sup_{\psi \in H^{1/2}(\partial M) \setminus \{0\}} \frac{\|F\psi\|_{H^{1/2}}}{\|\psi\|_{H^{1/2}}}.$$

Dans le Lemme 3.7.1 (Section 5) nous établissons l'équivalence

$$\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega) \in \mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = \tilde{f}(0) \\ f(1) = \tilde{f}(1), \end{cases}$$

et démontrons le résultat de stabilité suivant pour le problème de Calderón :

Théorème 3.1.8. *Soit $M = [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$ une variété Riemannienne lisse munie des métriques*

$$g = f(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \tilde{f}(x)(dx^2 + g_{\mathbb{S}}),$$

avec f et $\tilde{f}$ positives sur $[0, 1]$. Soit $A > 0$ fixé et ω une fréquence qui n'appartient pas au spectre de Dirichlet de $-\Delta_g$ et $-\Delta_{\tilde{g}}$ sur M . Soit $n \geq 2$, $\varepsilon > 0$ et supposons :

- $f(0) = \tilde{f}(0)$ et $f(1) = \tilde{f}(1)$,
- $f, \tilde{f} \in \mathcal{C}(A)$,
- $\left| \int_0^1 (q_f - q_{\tilde{f}}) \right| + \|\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)\|_* \leq \varepsilon$.

Alors :

$$\|q_f - q_{\tilde{f}}\|_2 \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

où C_A est une constante qui ne dépend que de A .

Corollaire 3.1.9. *Avec les mêmes notations et hypothèses que celles du Théorème 3.1.8, si de plus $\omega = 0$ et $n \geq 3$, on a la conclusion :*

$$\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega)) \Rightarrow \|f - \tilde{f}\|_{\infty} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

où C_A est une constante qui ne dépend que de A .

Remarque 21. Nous le disions en introduction dans la Remarque 1 : lorsque ω vaut 0, le potentiel q_f s'exprime à l'aide de la courbure scalaire $scal_g(x)$ de M . La différence des potentiels est alors

$$q_f - q_{\tilde{f}} = -\frac{n-2}{4(n-1)} \left(f(x)scal_g(x) - \tilde{f}(x)scal_{\tilde{g}}(x) \right).$$

En écrivant

$$f(x)scal_g(x) - \tilde{f}(x)scal_{\tilde{g}}(x) = (f(x) - \tilde{f}(x))Scal_g(x) + (scal_g(x) - scal_{\tilde{g}}(x))\tilde{f}(x),$$

on peut remplacer la condition portant sur la moyenne de la différence des potentiels par une autre, plus géométrique, qui contrôle respectivement la moyenne de la différence des facteurs conformes $\int_0^1 (f - \tilde{f})$ et celle de la différence des courbures scalaires $\int_0^1 (Scal_g - Scal_{\tilde{g}})$. En effet, si chacune de ces deux quantités est supposée plus petite que ε , l'appartenance de f et $\tilde{f}$ à la classe admissible $C(A)$ nous assure que la différence des potentiels sera plus petite que $C_A \varepsilon$ et permettra d'aboutir à la même conclusion.

Nous présentons à présent les grandes étapes de la preuve du Théorème 3.1.5. Désormais, nous noterons $q = q_f$ et $\tilde{q} = q_{\tilde{f}}$.

3.1.3 Plan de la preuve

Étape 1. Sous l'hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, on montre la proximité des traces et des déterminants des opérateurs $\Lambda_g^m(\omega)$ et $\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)$, ce qui permet d'obtenir les estimations

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left| \left(M(\kappa_m)N(\kappa_m) - \frac{1}{\Delta^2(\kappa_m)} \right) - \left(\tilde{M}(\kappa_m)\tilde{N}(\kappa_m) - \frac{1}{\tilde{\Delta}^2(\kappa_m)} \right) \right| \leq C_A \varepsilon \times y_m,$$

$$\text{où } y_m = \sqrt{\kappa_m} = \sqrt{m(m+n-2)}.$$

Étape 2. On établit un lien entre la quantité précédente et la différence des potentiels, à l'aide d'une égalité intégrale :

$$\begin{aligned} \Delta(x)\tilde{\Delta}(z) & \left[\left(M(z)N(z) - \frac{1}{\Delta(z)^2} \right) - \left(\tilde{M}(z)\tilde{N}(z) - \frac{1}{\tilde{\Delta}(z)^2} \right) \right] \\ & = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x)) c_0(x, z) \tilde{s}_0(x, z) dx + \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x)) \tilde{c}_0(x, z) s_0(x, z) dx, \end{aligned}$$

où les fonctions c_0 , s_0 , $\tilde{c}_0$ et $\tilde{s}_0$ ont été définies au cours du premier chapitre par les égalités (1.9). On en tire, par symétrie des potentiels et grâce aux estimations de l'étape 1 :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x)) [c_0(x, \kappa_m) \tilde{s}_0(x, \kappa_m) + \tilde{c}_0(x, \kappa_m) s_0(x, \kappa_m)] dx \right| \\ \leq C_A y_m |\Delta(\kappa_m)| |\tilde{\Delta}(\kappa_m)| \varepsilon. \end{aligned}$$

Étape 3. On montre l'existence d'un opérateur $B : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ tel que, pour m supérieur à un certain rang m_0 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 [c_0(x, \kappa_m) \tilde{s}_0(x, \kappa_m) + \tilde{c}_0(x, \kappa_m) s_0(x, \kappa_m)] (q - \tilde{q})(x) dx \\ = \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) B(q - \tilde{q})(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \int_0^1 e^{-2\tau y_m} B(q - \tilde{q})(\tau) d\tau \right| \leq C_A \varepsilon.$$

Étape 4. En posant le changement de variable $\tau = -\ln(t)$, nous sommes amenés à étudier le problème des moments

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \int_0^1 t^{2y_m-1} B(q - \tilde{q})(-\ln(t)) dt \right| \leq C_A \varepsilon.$$

On montre que ces estimations imposent un contrôle logarithmique en norme L^2 sur la fonction $t \mapsto B(q - \tilde{q})(-\ln(t))$:

$$\|B(q - \tilde{q})(-\ln(t))\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Étape 5 : enfin on en déduit d'une part, pour $0 \leq s \leq 2$ des estimations H^s sur la différence des potentiels grâce aux inégalité de Gagliardo-Nirenberg et, d'autre part, une estimation sur les facteurs conformes dans le cas où $\omega = 0$ et $n \geq 3$ sur la différence des facteurs conformes.

3.2 Estimations sur les fonctions de Weyl-Titchmarsh

Remarques préliminaires :

1. Jusqu'à la fin du chapitre, nous désignerons par C_A toute constante strictement positive ne dépendant que de A , y compris au cours d'un même calcul.
2. Désormais, les facteurs f et $\tilde{f}$ sont supposés symétriques par rapport à $x = 1/2$. Cette hypothèse simplifie bien des formules. Néanmoins, en vue de généraliser autant que possible notre propos, nous n'invoquerons cette propriété de symétrie qu'aux moments où elle intervient vraiment et privilégierons l'écriture des formules sous leurs versions génériques. Par exemple, nous distinguerons toujours les fonctions M et N bien qu'elles soient égales.

On se place dans les hypothèse du Théorème 3.1.5. L'objet de cette section est la preuve des estimations suivantes :

Proposition 3.2.1. *Soit ε un réel strictement positif, assez petit. Supposons que l'on ait $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \asymp_\varepsilon \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$. Alors il existe une constante $C_A > 0$ et un entier m_0 (indépendant de ε) tels que, pour tout $m \geq m_0$, et en posant $y_m = \sqrt{\kappa_m}$, on ait :*

$$\left| \left(M(\kappa_m)N(\kappa_m) - \frac{1}{\Delta^2(\kappa_m)} \right) - \left(\tilde{M}(\kappa_m)\tilde{N}(\kappa_m) - \frac{1}{\tilde{\Delta}^2(\kappa_m)} \right) \right| \leq C_A \varepsilon \times y_m.$$

Démonstration. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Sous l'hypothèse $\sigma(\Lambda_g(\omega)) \asymp_\varepsilon \sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, avec f et $\tilde{f}$ symétriques par rapport à $x = 1/2$, on a :*

$$f(0) = \tilde{f}(0).$$

Démonstration. Les mêmes arguments que ceux invoqués au début de la preuve du Lemme 2.3.1 établissent l'égalité

$$\sqrt{f(1)} + \sqrt{f(0)} = \sqrt{\tilde{f}(1)} + \sqrt{\tilde{f}(0)}.$$

Les fonctions f et $\tilde{f}$ étant symétriques par rapport à $x = 1/2$, on a $f(0) = f(1)$ et $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$. Par suite : $2f(0) = 2\tilde{f}(0)$ et le Lemme 3.2.2 est démontré. $\square$

Lemme 3.2.3. *Pour tout entier m fixé, assez grand, on a :*

$$\{\lambda^-(\kappa_m), \lambda^+(\kappa_m)\} \underset{\varepsilon}{\asymp} \{\tilde{\lambda}^-(\kappa_m), \tilde{\lambda}^+(\kappa_m)\}. \quad (3.1)$$

Démonstration. Soit m un entier positif. Il existe un indice p tel que

$$|\lambda^\pm(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^\pm(\kappa_p)| \leq \varepsilon. \quad (3.2)$$

Notons

$$C_1 = \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)} \quad \text{et} \quad C_0 = \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)}.$$

Alors, par symétrie des facteurs conformes,

$$C_0 = -C_1 \quad \text{et} \quad \tilde{C}_0 = -\tilde{C}_1.$$

En posant

$$C = C_0 - \tilde{C}_0,$$

on obtient, grâce aux asymptotiques du Lemme 1.3.2, la relation

$$\sqrt{f(0)} \left(\lambda^\pm(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^\pm(\kappa_p) \right) = (m - p) + C + o(1).$$

Soit $k = \lfloor C \rfloor$. On a :

$$m - p + k = \sqrt{f(0)} \left(\lambda^\pm(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^\pm(\kappa_p) \right) + \underbrace{k - C}_{\in]-1,0[} + o(1). \quad (3.3)$$

Or $m - p + k$ est un entier donc, en utilisant (3.2), ceci conduit, pour m assez grand et ε assez petit, à l'égalité

$$p = m + k.$$

Par suite, si m est assez grand, (3.2) équivaut à

$$\begin{cases} |\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_{m+k})| \leq \varepsilon \\ |\lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_{m+k})| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |\lambda^-(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^+(\kappa_{m+k})| \leq \varepsilon \\ |\lambda^+(\kappa_m) - \tilde{\lambda}^-(\kappa_{m+k})| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse $\Sigma(\Lambda_g(\omega)) \underset{\varepsilon}{\asymp} \Sigma(\Lambda_{\tilde{g}}(\omega))$, chacun des systèmes ci-dessus implique

$$2m = 2(m+k),$$

donc $k = 0$ et ceci conclut la preuve. $\square$

Bien entendu, le Lemme 3.2.3 reste vrai si l'on remplace κ_m par μ_m . Pour m assez grand, nous avons ainsi :

$$\{\lambda^-(\mu_m), \lambda^+(\mu_m)\} \underset{\varepsilon}{\asymp} \{\tilde{\lambda}^-(\mu_m), \tilde{\lambda}^+(\mu_m)\}. \quad (3.4)$$

On rappelle que l'endomorphisme induit $\Lambda_g^m(\omega)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\Lambda_g^m(\omega) = \begin{pmatrix} -\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 & -\frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \\ -\frac{1}{\sqrt{f(1)}} \frac{h^{1/4}(0)}{h^{1/4}(1)} \frac{1}{\Delta(\mu_m)} & -\frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1 \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) - \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \\ &= \left[-\frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - C_1 \right] - \left[-\frac{\tilde{M}(\mu_m)}{\sqrt{\tilde{f}(0)}} + \tilde{C}_0 - \frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} - \tilde{C}_1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \left[\tilde{M}(\mu_m) - M(\mu_m) \right] + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} \left[\tilde{N}(\mu_m) - N(\mu_m) \right] \\ & \quad + (\tilde{C}_0 - C_0) + (C_1 - \tilde{C}_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

En reprenant l'égalité (3.3) avec $k = 0$ et $m - p = 0$, on a

$$|C| = |\tilde{C}_0 - C_0| = |C_1 - \tilde{C}_1| \leq C_A \varepsilon, \quad (3.6)$$

et donc, d'après (3.4), (3.5) et (3.6) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \left(\tilde{M}(\mu_m) - M(\mu_m) \right) + \frac{1}{\sqrt{f(1)}} \left(\tilde{N}(\mu_m) - N(\mu_m) \right) \right| \\ \leq \underbrace{\left| \text{Tr}(\Lambda_g^m(\omega)) - \text{Tr}(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \right|}_{\leq 2\varepsilon} + C_A \varepsilon \\ \leq C_A \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme les fonctions f et $\tilde{f}$ sont symétriques par rapport à $1/2$, ce qui précède conduit à

$$\left| M(\mu_m) - \tilde{M}(\mu_m) \right| \leq C_A \varepsilon.$$

Nous pouvons alors établir une estimation sur la différence des déterminants des matrices $\Lambda_g^m(\omega)$ et $\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)$. À partir de la relation (3.4), supposons satisfaites, par exemple, les inégalités

$$\left| \lambda^+(\mu_m) - \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \tilde{\lambda}^-(\mu_m) - \lambda^-(\mu_m) \right| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \left| \det(\Lambda_g^m(\omega)) - \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \right| &= \left| \lambda^-(\mu_m) \lambda^+(\mu_m) - \tilde{\lambda}^-(\mu_m) \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \right| \\ &\leq \left| \lambda^-(\mu_m) \right| \left| \lambda^+(\mu_m) - \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \right| \\ &\quad + \left| \tilde{\lambda}^-(\mu_m) - \lambda^-(\mu_m) \right| \left| \tilde{\lambda}^+(\mu_m) \right| \\ &\leq C_A \varepsilon \times \sqrt{\mu_m}. \end{aligned}$$

Écrivons :

$$\det(\Lambda_g^m(\lambda)) - \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\lambda)) = \text{I}(\mu_m) + \text{II}(\mu_m) + \text{III}(\mu_m) + \text{IV},$$

avec

$$\text{I}(\mu_m) = \frac{1}{\sqrt{f(0)f(1)}} \left[\left(M(\mu_m) N(\mu_m) - \frac{1}{\Delta^2(\mu_m)} \right) - \left(\tilde{M}(\mu_m) \tilde{N}(\mu_m) - \frac{1}{\tilde{\Delta}^2(\mu_m)} \right) \right],$$

$$\text{II}(\mu_m) = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \left[C_1 (M(\mu_m) - \tilde{M}(\mu_m)) + (C_1 - \tilde{C}_1) \tilde{M}(\mu_m) \right],$$

$$\text{III}(\mu_m) = \frac{1}{\sqrt{f(1)}} \left[\tilde{C}_0(\tilde{N}(\mu_m) - N(\mu_m)) + (\tilde{C}_0 - C_0)N(\mu_m) \right],$$

et

$$\text{IV} = (\tilde{C}_0 - C_0)\tilde{C}_1 + C_0(\tilde{C}_1 - C_1).$$

On estime indépendamment les trois derniers termes :

$$\begin{aligned} |\text{II}(\mu_m)| &\leq \frac{1}{\sqrt{f(0)}} |C_1| |M(\mu_m) - \tilde{M}(\mu_m)| + \frac{1}{\sqrt{f(0)}} |C_1 - \tilde{C}_1| |\tilde{M}(\mu_m)| \\ &\leq C_A \varepsilon + C_A \varepsilon \sqrt{\mu_m} \\ &\leq C_A \varepsilon \sqrt{\mu_m}. \end{aligned}$$

De la même façon :

$$|\text{II}(\mu_m)| \leq C_A \varepsilon \sqrt{\mu_m} \quad \text{et} \quad |\text{IV}| \leq C_A \varepsilon.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} |I(\mu_m)| &\leq \left| \det(\Lambda_g^m(\lambda)) - \det(\Lambda_{\tilde{g}}^m(\lambda)) \right| + C_A \varepsilon \sqrt{\mu_m} \\ &\leq C_A \varepsilon \sqrt{\mu_m}. \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour μ_m , avec $m \geq m_0$ et m_0 qui ne dépend pas de ε , ce l'est également pour κ_m avec $m \geq m_0$ (où m_0 est différent du premier mais toujours indépendant de ε). Par conséquent, en posant $y_m = \sqrt{\kappa_m}$, on a démontré qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $m \geq m_0$:

$$\left| \left(M(\kappa_m)N(\kappa_m) - \frac{1}{\Delta^2(\kappa_m)} \right) - \left(\tilde{M}(\kappa_m)\tilde{N}(\kappa_m) - \frac{1}{\tilde{\Delta}^2(\kappa_m)} \right) \right| \leq C_A \varepsilon \times y_m.$$

□

3.3 Une estimation intégrale

Le point de départ de cette section est l'estimation de la Proposition (3.2.1), à partir de laquelle on veut prouver celle portant sur la différence des potentiels

$$\|q - \tilde{q}\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Revenons à l'équation de Surm-Liouville

$$-u'' + qu = -zu, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.7)$$

et aux deux systèmes fondamentaux de solutions $\{c_0, s_0\}$ et $\{c_1, s_1\}$ introduits dans le premier chapitre par les égalités (1.9). On avait également défini ψ et ϕ comme les deux uniques solutions de (3.7) pouvant s'écrire sous la forme

$$\psi(x, z) = c_0(x, z) + M(z)s_0(x, z), \quad \phi(x, z) = c_1(x, z) - N(z)s_1(x, z), \quad (3.8)$$

avec une condition au bord de Dirichlet respectivement en $x = 1$ et en $x = 0$.

Proposition 3.3.1. *On a les relations suivantes :*

$$\begin{array}{ll} s_0(1, z) = \Delta(z) & s_1(0, z) = -\Delta(z) \\ s'_0(1, z) = -N(z)\Delta(z) & s'_1(0, z) = -M(z)\Delta(z) \\ c_0(1, z) = -M(z)\Delta(z) & \text{et} \quad c_1(0, z) = -N(z)\Delta(z) \\ c'_0(1, z) = M(z)N(z)\Delta(z) - \frac{1}{\Delta(z)} & c'_1(0, z) = \frac{1}{\Delta(z)} - N(z)M(z)\Delta(z). \end{array}$$

Démonstration. Les égalités $s_0(1, z) = \Delta(z)$ et $s_1(0, z) = -\Delta(z)$ ont déjà été prouvées au cours du premier chapitre. Établissons la relation liant $s'_0(1, z)$ à $N(z)$ et $\Delta(z)$. L'espace des solutions de (3.7) qui vérifient $u(0, z) = 0$ est de dimension 1. Par conséquent, il existe une constante complexe $A(z)$ telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad s_0(x, z) = A(z)\phi(x, z). \quad (3.9)$$

Les conditions sur c_1 et s_1 en $x = 1$ conduisent à l'égalité $A(z) = s_0(1, z) = \Delta(z)$. On obtient également, en dérivant (3.9) :

$$s'_0(1, z) = A(z)(c'_1(1, z) - N(z)s'_1(1, z)) = -N(z)A(z) = -\Delta(z)N(z).$$

Pour les mêmes raisons, on a :

$$s_1(x, z) = -\Delta(z)\psi(x, z),$$

et par suite, $s'_1(1, z) = -\Delta(z)\psi'(1, z)$, puis $\psi'(1, z) = -\frac{1}{\Delta(z)}$. En dérivant (3.9) et en

évaluant cette égalité en $x = 1$, nous obtenons

$$c'_0(1, z) + M(z)s'_0(1, z) = -\frac{1}{\Delta(z)},$$

soit donc

$$c'_0(1, z) = M(z)N(z)\Delta(z) - \frac{1}{\Delta(z)}.$$

Ceci démontre les égalités portant sur c_0 et s_0 . On procède de façon similaire pour établir celles concernant c_1 et s_1 . $\square$

Grâce à ces relations, nous sommes en mesure de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *Notons $\mathcal{P}$ les pôles de N . Pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$ on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(z)\Delta(z)\left(M(z)N(z) - \frac{1}{\Delta(z)^2}\right) - M(z)\tilde{N}(z)\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) + 1 \\ = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))c_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Démonstration. Introduisons la fonction θ définie sur $[0, 1]$ par $\theta(x) = c_0(x, z)\tilde{s}'_0(x, z) - s'_0(x, z)\tilde{c}_0(x, z)$. Alors

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= c_0(x, z)\tilde{s}''_0(x, z) + c'_0(x, z)\tilde{s}'_0(x, z) - c'_0(x, z)\tilde{s}'_0(x, z) - c''_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z) \\ &= c_0(x, z)(\tilde{q}(x)\tilde{s}_0(x, z) + z\tilde{s}_0(x, z)) - (q(x)c_0(x, z) + zc_0(x, z))\tilde{s}_0(x, z) \\ &= (\tilde{q}(x) - q(x))c_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z). \end{aligned}$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 1, il vient

$$\theta(1) - \theta(0) = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))c_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx.$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} c'_0(1, z)\tilde{s}_0(1, z) - c_0(1, z)\tilde{s}'_0(1, z) - c'_0(0, z)\tilde{s}_0(0, z) + c_0(0, z)\tilde{s}'_0(0, z) \\ = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))c_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx. \end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer $c'_0(1, z)$, $\tilde{s}_0(1, z)$, $c_0(1, z)$ et $\tilde{s}'_0(1, z)$ par leurs expressions en fonction de $M(z)$, $N(z)$ et $\Delta(z)$, données dans la Proposition 3.3.1, pour obtenir l'égalité

annoncée. □

Dans l'égalité du Lemme 3.3.2, en échangeant les rôles de q et $\tilde{q}$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(z)\tilde{\Delta}(z)\left(\tilde{M}(z)\tilde{N}(z) - \frac{1}{\tilde{\Delta}(z)^2}\right) - \tilde{M}(z)N(z)\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) + 1 \\ = \int_0^1 (\tilde{q}(x) - q(x))\tilde{c}_0(x, z)s_0(x, z)dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En remplaçant également $q(x)$ et $\tilde{q}(x)$ par $q(1-x)$ et $\tilde{q}(1-x)$, les rôles de M et N sont échangés. On remarque de plus que $c_1(1-x)$ et $-s_1(1-x)$ tiennent respectivement les rôles de $c_0(x)$ et $s_0(x)$ mais pour le potentiel $q(1-x)$. En notant, pour tout x de $[0, 1]$, $\eta(x) = 1-x$, on a précisément

$$c_0(x, z, q \circ \eta) = c_1(1-x, z, q) \quad \text{et} \quad s_0(x, z, q \circ \eta) = -s_1(1-x, z, q).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta(z)\tilde{\Delta}(z)\left(\tilde{M}(z)\tilde{N}(z) - \frac{1}{\tilde{\Delta}(z)^2}\right) - \tilde{N}(z)M(z)\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) + 1 \\ = - \int_0^1 (\tilde{q}(1-x) - q(1-x))\tilde{c}_1(1-x, z)s_1(1-x, z)dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mais q est symétrique donc $c_1(1-x) = c_0(x)$ et $s_1(1-x) = -s_0(x)$. L'égalité (3.12) s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta(z)\tilde{\Delta}(z)\left(\tilde{M}(z)\tilde{N}(z) - \frac{1}{\tilde{\Delta}(z)^2}\right) - \tilde{N}(z)M(z)\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) + 1 \\ = \int_0^1 (\tilde{q}(x) - q(x))\tilde{c}_0(x, z)s_0(x, z)dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par suite, en soustrayant la relation du Lemme 3.3.2 à celle de l'égalité (3.13), il vient

$$\begin{aligned} \Delta(z)\tilde{\Delta}(z)\left[\left(M(z)N(z) - \frac{1}{\Delta(z)^2}\right) - \left(\tilde{M}(z)\tilde{N}(z) - \frac{1}{\tilde{\Delta}(z)^2}\right)\right] \\ = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))c_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx + \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))\tilde{c}_0(x, z)s_0(x, z)dx \end{aligned}$$

Finalement, d'après la Proposition 3.2.1, nous avons démontré :

Proposition 3.3.3. *Il existe un entier m_0 tel que, pour tout m supérieur à m_0 :*

$$\left| \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x)) [c_0(x, \kappa_m) \tilde{s}_0(x, \kappa_m) + \tilde{c}_0(x, \kappa_m) s_0(x, \kappa_m)] dx \right| \leq C_A y_m |\Delta(\kappa_m)| |\tilde{\Delta}(\kappa_m)| \varepsilon.$$

3.4 Construction d'un opérateur intégral inversible

Désormais, pour tout x de $[0, 1]$, nous posons $L(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$. L'enjeu de ce paragraphe est d'exprimer l'intégrande de la Proposition 3.3.3 en terme d'opérateur évalué en la fonction L .

Proposition 3.4.1. *Il existe un opérateur $B : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ tel que :*

1. *Pour tout entier m ,*

$$\begin{aligned} \int_0^1 [c_0(x, \kappa_m) \tilde{s}_0(x, \kappa_m) + \tilde{c}_0(x, \kappa_m) s_0(x, \kappa_m)] L(x) dx \\ = \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) BL(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2. *La fonction $\tau \mapsto BL(\tau)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$. De plus, BL et $(BL)'$ sont uniformément bornées par une constante C_A .*

Démonstration. Prolongeons q et $\tilde{q}$ par parité sur $[-1, 0]$. Marchenko a obtenu dans [Mar11] (page 9) les représentations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} s_0(x, -z^2) &= \frac{\sin(zx)}{z} + \int_0^x H(x, t) \frac{\sin(zt)}{z} dt, \\ c_0(x, -z^2) &= \cos(zx) + \int_0^x P(x, t) \cos(zt) dt, \end{aligned}$$

où $H(x, t)$ et $P(x, t)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} H(x, t) &= K(x, t) - K(x, -t), \\ P(x, t) &= K(x, t) + K(x, -t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec K une fonction C^1 sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ qui vérifie de bonnes estimations. Plus précisément ([Mar11], p.14) :

Théorème 3.4.2. *K vérifie sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ l'inégalité*

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right) - \sigma_1\left(\frac{x-t}{2}\right)\right),$$

$$\text{avec } w(u) = \max_{0 \leq \xi \leq u} \left| \int_0^\xi q(y) dy \right|, \quad \sigma_0(x) = \int_0^x |q(t)| dt, \quad \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt.$$

On montre alors la majoration suivante :

Proposition 3.4.3. *Il existe une constante $C_A > 0$, ne dépendant que de A , telle que*

$$\|K\|_\infty + \left\| \frac{\partial K}{\partial x} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial K}{\partial t} \right\|_\infty \leq C_A. \quad (3.15)$$

Démonstration. Puisque f appartient à la classe admissible $\mathcal{C}(A)$, le potentiel q est borné par une constante dépendant uniquement de A , il en est de même pour σ_0 , σ_1 , w et K . Posons $J(u, v) = K(u + v, u - v)$. Alors J est uniformément bornée par C_A et de plus (cf [Mar11], p.14 et p.16), on a les égalités :

$$\begin{cases} \frac{\partial J(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{2} q(u) + \int_0^v q(u + \beta) J(u, \beta) d\beta \\ \frac{\partial J(u, v)}{\partial v} = \int_0^u q(v + \alpha) J(\alpha, v) d\beta. \end{cases}$$

De cela, on déduit que les dérivées partielles premières de J sont uniformément bornées par C_A . En revenant aux coordonnées (x, t) , l'inégalité (3.15) est établie. $\square$

Pour $z = i\sqrt{\kappa_m} =: iy_m$, on a ainsi :

$$\begin{aligned} s_0(x, \kappa_m) &= \frac{\sinh(y_m x)}{y_m} + \int_0^x H(x, t) \frac{\sinh(y_m t)}{y_m} dt, \\ c_0(x, \kappa_m) &= \cosh(y_m x) + \int_0^x H(x, t) \cosh(y_m t) dt. \end{aligned}$$

La construction de notre opérateur B repose sur ces représentations. On écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(x) s_0(x) \tilde{c}_0(x) dx &= \int_0^1 L(x) \left[\frac{\sinh(y_m x)}{y_m} + \int_0^x H(x, t) \frac{\sinh(y_m t)}{y_m} dt \right] \times \\ &\quad \left[\cosh(y_m x) + \int_0^x \tilde{P}(x, u) \cosh(y_m u) du \right] dx \\ &= I_0 + II_0 + III_0 + IV_0, \end{aligned}$$

avec

- $I_0 = \int_0^1 L(x) \frac{\sinh(y_m x) \cosh(y_m x)}{y_m} dx,$
- $II_0 = \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \tilde{P}(x, u) \frac{\sinh(y_m x) \cosh(y_m u)}{y_m} du \right] dx,$
- $III_0 = \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x H(x, t) \frac{\sinh(y_m t) \cosh(y_m x)}{y_m} dt \right] dx,$
- $IV_0 = \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \int_0^x \tilde{P}(x, u) H(x, t) \frac{\sinh(y_m t) \cosh(y_m u)}{y_m} du dt \right] dx.$

On s'intéresse à ces quatre quantités de façon indépendante en vue de les exprimer chacune sous la forme $\int_0^1 \sinh(2y_m x) G L(x) dx$, où G est un opérateur de $L^2([0, 1])$ dans lui-même.

$$I_0 = \int_0^1 L(x) \frac{\sinh(y_m x) \cosh(y_m x)}{y_m} dx = \frac{1}{2y_m} \int_0^1 \sinh(2xy_m) L(x) dx.$$

$$\begin{aligned} II_0 &= \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \tilde{P}(x, u) \frac{\sinh(y_m x) \cosh(y_m u)}{y_m} du \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \tilde{P}(x, u) \frac{\sinh(y_m(x+u)) + \sinh(y_m(x-u))}{2} du \right] dx \\ &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \tilde{P}(x, u) \sinh(y_m(x+u)) du + \int_0^x \tilde{P}(x, u) \sinh(y_m(x-u)) du \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_{\frac{x}{2}}^x \tilde{P}(x, 2\tau - x) \sinh(2\tau y_m) d\tau + \int_0^{\frac{x}{2}} \tilde{P}(x, x - 2\tau) \sinh(2\tau y_m) d\tau \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \left[\int_{\tau}^{2\tau} \tilde{P}(x, 2\tau - x) L(x) dx + \int_{2\tau}^1 \tilde{P}(x, x - 2\tau) L(x) dx \right] d\tau. \end{aligned}$$

Mais, pour tout (x, τ) de $\mathbb{R}^2$, on a $\tilde{P}(x, x - 2\tau) = \tilde{P}(x, 2\tau - x)$ d'après (3.14). Donc

$$\text{II}_0 = \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \left[\int_\tau^1 \tilde{P}(x, 2\tau - x) L(x) dx \right] d\tau.$$

Calculons III_0 :

$$\begin{aligned} \text{III}_0 &= \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x H(x, t) \frac{\sinh(y_m t) \cosh(y_m x)}{y_m} dt \right] dx \\ &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x H(x, t) \sinh(y_m(t+x)) dt + \int_0^x H(x, t) \sinh(y_m(t-x)) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_{\frac{x}{2}}^x H(x, 2\tau - x) \sinh(2\tau y_m) d\tau + \int_{-\frac{x}{2}}^0 H(x, 2\tau + x) \sinh(2\tau y_m) d\tau \right] dx. \end{aligned}$$

En changeant τ par $-\tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{III}_0 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_{\frac{x}{2}}^x H(x, 2\tau - x) \sinh(2\tau y_m) d\tau + \int_0^{\frac{x}{2}} H(x, -2\tau + x) \sinh(-2\tau y_m) d\tau \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_{\frac{x}{2}}^x H(x, 2\tau - x) \sinh(2\tau y_m) d\tau - \int_0^{\frac{x}{2}} H(x, -2\tau + x) \sinh(2\tau y_m) d\tau \right] dx. \end{aligned}$$

Mais puisque H est impaire par rapport à la seconde variable :

$$\begin{aligned} \text{III}_0 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x H(x, 2\tau - x) \sinh(2\tau y_m) d\tau \right] dx \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \left[\int_\tau^1 H(x, 2\tau - x) L(x) dx \right] d\tau. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \text{IV}_0 &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \left[\int_0^x \int_0^x \tilde{P}(x, u) H(x, t) (\sinh(y_m(t+u)) + \sinh(y_m(t-u))) du dt \right] dx \\ &= \text{IV}_0(1) + \text{IV}_0(2), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \text{IV}_0(1) &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \int_0^x \int_0^x \tilde{P}(x, u) H(x, t) \sinh(y_m(t + u)) du dt dx \\
 &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \int_0^1 \mathbf{1}_{[0, x]}(t) \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} 2\tilde{P}(x, 2\tau - t) H(x, t) \sinh(2\tau y_m) d\tau dt dx \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \mathbf{1}_{[0, x]}(\tau) \int_{2\tau-x}^{2\tau} \tilde{P}(x, 2\tau - t) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt d\tau dx \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{\tau}^1 L(x) \int_{2\tau-x}^{2\tau} \tilde{P}(x, 2\tau - t) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt dx d\tau,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{IV}_0(2) &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \int_0^x \int_0^x \tilde{P}(x, u) H(x, t) \sinh(y_m(t - u)) du dt dx \\
 &= \frac{1}{2y_m} \int_0^1 L(x) \int_0^1 \mathbf{1}_{[0, x]}(t) \int_{\frac{t-x}{2}}^{\frac{t}{2}} 2\tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) \sinh(2\tau y_m) d\tau dt dx \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 L(x) \int_{-1}^1 \sinh(2\tau y_m) \mathbf{1}_{[-x, x]}(2\tau) \int_{2\tau}^{2\tau+x} \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt d\tau dx \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_{-1}^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2|\tau|}^1 L(x) \int_{2\tau}^{2\tau+x} \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt dx d\tau \\
 &= \text{IV}_0(2, 1) + \text{IV}_0(2, 2),
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \text{IV}_0(2, 1) &= \frac{1}{y_m} \int_{-1}^0 \sinh(2\tau y_m) \int_{-2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^{2\tau+x} \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt dx d\tau \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{-2\tau}^{-2\tau+x} \tilde{P}(x, t + 2\tau) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt dx d\tau \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2\tau}^1 L(x) \int_0^{-2\tau+x} \tilde{P}(x, t + 2\tau) H(x, t) dt dx d\tau \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t) H(x, t - 2\tau) dt dx d\tau,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{IV}_0(2, 2) &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^{2\tau+x} \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t) dt dx d\tau \\
 &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) dt dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_0^1 s_0(x) \tilde{c}_0(x) L(x) dx = \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) Q L(\tau) d\tau,$$

où Q est l'opérateur défini sur $L^2([0, 1])$ par

$$\begin{aligned} Q L(\tau) = & \frac{1}{2} L(\tau) + \int_{\tau}^1 \tilde{P}(x, 2\tau - x) L(x) dx + \int_{\tau}^1 H(x, 2\tau - x) L(x) dx \\ & + \int_{\tau}^1 L(x) \int_{2\tau-x}^{2\tau} \tilde{P}(x, 2\tau - t) H(x, t) \mathbf{1}_{[0,x]}(t) dt dx \\ & + \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t) H(x, t - 2\tau) dt dx \\ & + \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) dt dx. \end{aligned}$$

En échangeant les $\sim$ on construit de même un opérateur $R : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ tel que

$$\int_0^1 \tilde{s}_0(x) c_0(x) L(x) dx = \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) R L(\tau) d\tau$$

avec

$$\begin{aligned} R L(\tau) = & \frac{1}{2} L(\tau) + \int_{\tau}^1 P(x, 2\tau - x) L(x) dx + \int_{\tau}^1 \tilde{H}(x, 2\tau - x) L(x) dx \\ & + \int_{\tau}^1 L(x) \int_{2\tau-x}^{2\tau} P(x, 2\tau - t) \tilde{H}(x, t) \mathbf{1}_{[0,x]}(t) dt dx \\ & + \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x P(x, t) \tilde{H}(x, t - 2\tau) dt dx \\ & + \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x P(x, t - 2\tau) \tilde{H}(x, t) dt dx \end{aligned}$$

Posons $B = Q + R$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 [c_0(x, z) \tilde{s}_0(x, z) + \tilde{c}_0(x, z) s_0(x, z)] L(x) dx &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) (R + Q) L(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{y_m} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) B L(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ce qui établit la première partie de la Proposition 3.4.1. Démontrons la seconde. Puisque les facteurs conformes f et $\tilde{f}$ appartiennent à $\mathcal{C}(A)$, et en vertu de la Proposition 3.4.3, on sait que H et $\tilde{H}$ sont de classe C^1 et uniformément bornées par une constante C_A (ainsi que leurs dérivées partielles premières). De plus, pour toute fonction g de classe

C^1 sur $[0, 1]$, pour tout a dans $]0, 1[$ la fonction G_a définie par $G_a(\tau) = \int_a^\tau g(\tau, x)dx$ est également C^1 et sa dérivée est

$$G'_a(\tau) = \int_a^\tau \frac{\partial g}{\partial \tau}(\tau, x)dx + g(\tau, \tau).$$

Par suite BL et ses dérivées sont également bornées par une constante C_A . $\square$

Nous avons donc obtenu

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad m \geq m_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) BL(\tau) d\tau \right| \leq C_A \varepsilon \times \Delta(\kappa_m) \tilde{\Delta}(\kappa_m). \quad (3.16)$$

De plus :

$$\begin{aligned} y_m^2 e^{-2y_m} \times \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 \sinh(2\tau y_m) BL(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-2y_m} \int_0^1 e^{2\tau y_m} BL(\tau) d\tau + e^{-2y_m} \int_0^1 e^{-2\tau y_m} BL(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^{2(\tau-1)y_m} BL(\tau) d\tau + \int_0^1 e^{-2(\tau+1)y_m} BL(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^{-2\tau y_m} BL(1-\tau) d\tau + \int_1^2 e^{-2\tau y_m} BL(\tau-1) d\tau \right], \end{aligned}$$

et donc, en multipliant (3.16) par $y_m^2 e^{-2y_m}$, on obtient, pour $m \geq m_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} e^{-2\tau y_m} \left(BL(1-\tau) \mathbf{1}_{[0,1]}(\tau) + BL(\tau-1) \mathbf{1}_{[1,2]}(\tau) \right) d\tau \right| \\ \leq C_A \varepsilon \times \left[y_m^2 e^{-2y_m} \Delta(\kappa_m) \tilde{\Delta}(\kappa_m) \right] \\ \leq C_A \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.5 Un théorème d'approximation de Müntz

3.5.1 Un problème de moments de Hausdorff

Pour tout τ de $[0, 2]$, posons

$$g(\tau) = BL(1-\tau) \mathbf{1}_{[0,1]}(\tau) + BL(\tau-1) \mathbf{1}_{[1,2]}(\tau).$$

Le changement de variable $t = e^{-\tau}$ dans l'intégrale des estimations (3.17) conduit à écrire de façon équivalente

$$\forall m \geq m_0, \quad \left| \int_0^1 t^{2y_m-1} g(-\ln(t)) dt \right| \leq C_A \varepsilon.$$

Définissons $\alpha = 2y_{m_0} - 1$ et

$$\lambda_m := 2y_m - 1 - \alpha. \quad (3.18)$$

En notant, pour tout t de $]0, 1]$,

$$h(t) = t^\alpha g(-\ln(t)),$$

on obtient donc

$$\left| \int_0^1 t^{\lambda_m} h(t) dt \right| \leq C_A \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

La question est désormais la suivante : la connaissance approchée des moments de h évalués en la suite $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ détermine-t-elle h en norme L^2 à une petite erreur près ?

Fixons un entier m (que nous préciserons par la suite) et considérons la suite finie

$$\Lambda_m : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m.$$

Définition 3.5.1. Le sous-espace de polynômes de Müntz de degré λ_m est défini par

$$\mathcal{M}(\Lambda_m) = \{P : P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^{\lambda_k}\}.$$

Définition 3.5.2. L'erreur d'approximation d'une fonction $f \in L^2([0, 1])$ à l'espace $\mathcal{M}(\Lambda_m)$ est la distance entre f et son projeté orthogonal sur $\mathcal{M}(\Lambda_m)$, en d'autres termes :

$$E_2(f, \Lambda_m) = \inf_{P \in \mathcal{M}(\Lambda_m)} \|f - P\|_2.$$

$E_2(h, \Lambda_m)$ apparaît dans l'estimation de h en norme $\|\cdot\|_2$ donnée par la Proposition 3.5.3. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on définit la suite de polynômes

de Müntz $(L_p(x))$ par $L_0 \equiv 1$ et, pour $p \geq 1$:

$$L_p(x) = \sum_{j=0}^p C_{pj} x^{\lambda_j},$$

où

$$C_{pj} = \sqrt{2\lambda_p + 1} \frac{\prod_{r=0}^{p-1} (\lambda_j + \lambda_r + 1)}{\prod_{r=0, r \neq j}^p (\lambda_j - \lambda_r)}.$$

Proposition 3.5.3. *On a l'estimation suivante :*

$$\|h\|_2^2 \leq C_A \varepsilon^2 \sum_{k=0}^m \left(\sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}| \right)^2 + E_2(h, \Lambda_m)^2.$$

Démonstration. Notons $\pi(h) = \sum_{k=0}^m \langle L_k, h \rangle L_k$ la projection orthogonale de h sur $\mathcal{M}(\Lambda_m)$.

Alors

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \|\pi(h)\|^2 + \|h - \pi(h)\|_2^2 \\ &= \sum_{k=0}^m \langle L_k, h \rangle^2 + E_2(\Lambda_m, h)^2. \end{aligned}$$

Les coefficients $\langle L_k, h \rangle$ s'expriment en fonction des moments de h , sur lesquels on a obtenu, en (3.19), une estimation dépendant de ε :

$$|\langle L_k, h \rangle| = \left| \sum_{\ell=0}^k C_{k\ell} \underbrace{\int_0^1 x^{\lambda_\ell} h(x) dx}_{\leq C_A \varepsilon} \right| \leq C_A \varepsilon \sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}|.$$

On obtient donc

$$\|h\|_2^2 \leq C_A \varepsilon^2 \sum_{k=0}^m \left(\sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}| \right)^2 + E_2(\Lambda_m, h)^2.$$

□

Nous sommes en présence de deux quantités dépendant de m aux variations contraires : lorsque m est petit, la double somme contient peu de termes tandis que la distance de h à Λ_m est élevée. Cependant, celle-ci diminue à mesure que m grandit alors que $\sum_{k=0}^m \left(\sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}| \right)^2$ tend vers l'infini. Notre stratégie est la suivante : trouver $m(\varepsilon)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(\varepsilon) = +\infty,$$

et satisfaisant l'inégalité $\sum_{k=0}^{m(\varepsilon)} \left(\sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}| \right)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ afin d'obtenir $\|h\|_2^2 \leq C_A \varepsilon + E_2(\Lambda_{m(\varepsilon)}, h)$.

De la sorte, pour un tel $m(\varepsilon)$, le membre de droite tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

Lemme 3.5.4.

1. Pour tout entier m , $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2$.

2. $\lambda_{m+1} - \lambda_m = 2 + O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Démonstration.

1. Soit un entier m . Posons $a = n - 2$. Par définition de λ_m introduit en (3.18), on a l'équivalence $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2 \Leftrightarrow y_{m+1} - y_m \geq 1$, où $y_m = \sqrt{m^2 + am}$. Or :

$$\begin{aligned} y_{m+1} - y_m \geq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + a(m+1)} - \sqrt{m^2 + am} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow (m+1)^2 + a(m+1) - m^2 - am \\ &\quad \geq \sqrt{(m+1)^2 + a(m+1)} + \sqrt{m^2 + am} \\ &\Leftrightarrow 2m + 1 + a \geq m + 1 + \frac{a}{2} - \frac{a}{8(m+1)} + m + \frac{a}{2} - \frac{a}{8m} + o\left(\frac{1}{m}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{8(m+1)} \geq -\frac{a}{8m} + o\left(\frac{1}{m}\right), \end{aligned}$$

et ceci est vrai si m est assez grand, disons, sans perte de généralité, supérieur à m_0 . Pour de tels m : $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2$.

2. Soit un entier m et $u_m = \sqrt{\kappa_\ell}$ pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$. Alors

$$y_{m+1} = \sqrt{\kappa_{m+1}} = \sqrt{\kappa_m} + 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) = y_m + 1 + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

et le résultat suit. □

D'après le second point du Lemme 3.5.4, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier m , on ait $\lambda_m \leq 2m + C$. En posant $M_1 = \max(2, 2C + 1)$, il vient :

$$\prod_{r=0}^{p-1} (\lambda_j + \lambda_r + 1) \leq \prod_{r=0}^{p-1} (2j + 2r + 2C + 1) \leq M_1^p \prod_{r=0}^{p-1} (j + r + 1).$$

D'autre part, d'après le premier point du Lemme 3.5.4, pour tout entier m , on a la minoration : $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq 2$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $(r, j) \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq r, j \leq m$, $r \neq j$:

$$\begin{aligned} |\lambda_j - \lambda_r| &= |\lambda_j - \lambda_{j-1}| + |\lambda_{j-1} - \lambda_{j-2}| + \dots + |\lambda_{r+1} - \lambda_r| \\ &\geq 2|j - r|. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left| \prod_{r=0, r \neq j}^p (\lambda_j - \lambda_r) \right| \geq 2^p \left| \prod_{r=0, r \neq j}^p (j - r) \right|.$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} |C_{pj}| &\leq \sqrt{4p + 2C + 1} \left(\frac{M_1}{2} \right)^p \frac{\prod_{r=0}^{p-1} |j + r + 1|}{\prod_{r=0, r \neq j}^p |j - r|} \\ &= \sqrt{4p + 2C + 1} \left(\frac{M_1}{2} \right)^p \frac{(j + 1) \dots (j + p)}{j(j - 1) \dots 2 \times 1 \times 2 \times \dots (p - j)} \\ &= \sqrt{4p + 2C + 1} \left(\frac{M_1}{2} \right)^p \frac{(j + p)!}{(j!)^2 (p - j)!}. \end{aligned}$$

La formule du multinôme stipule que, pour toute suite finie $(x_0, \dots, x_m)$ et tout entier n :

$$\left(\sum_{k=0}^m x_k \right)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m},$$

où $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$

Puisque $j + j + (p - j) = j + p$, on en déduit :

$$\frac{(j + p)!}{(j)!(j)!(p - j)!} \leq (1 + 1 + 1)^{j+p} = 3^{j+p}.$$

Par suite (voir [DKN19c] ou [Ang+04, chapitre 4] pour des calculs semblables) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 \sum_{k=0}^m \left(\sum_{\ell=0}^k |C_{k\ell}| \right)^2 &\leq \varepsilon^2 \sum_{k=0}^m \left(\sum_{\ell=0}^k \sqrt{4k+2C+1} \left(\frac{M_1}{2} \right)^k 3^{k+\ell} \right)^2 \\
 &= \varepsilon^2 \sum_{k=0}^m \left(\frac{3M_1}{2} \right)^{2k} (4k+2C+1) \left(\sum_{\ell=0}^k 3^\ell \right)^2 \\
 &\leq \varepsilon^2 (4m+2C+1) \sum_{k=0}^m \left(\frac{3M_1}{2} \right)^{2k} \left(\sum_{\ell=0}^k 3^\ell \right)^2 \\
 &\leq \varepsilon^2 (4m+2C+1) \sum_{k=0}^m \left(\frac{3M_1}{2} \right)^{2k} \frac{3}{2} \times 3^{2k} \\
 &\leq \varepsilon^2 \times \frac{3}{2} (4m+2C+1) \sum_{k=0}^m \left(\frac{9M_1}{2} \right)^{2k} \\
 &\leq \varepsilon^2 \times \frac{3}{2} (4m+2C+1)(m+1) \left(\frac{9M_1}{2} \right)^{2m} \\
 &= \varepsilon^2 g(m)^2,
 \end{aligned}$$

où, pour tout $t > 0$, $g(t) := \frac{3}{2}(4t+2C+1)(t+1) \left(\frac{9M_1}{2} \right)^{2t}$.

Puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous pouvons poser, si ε est suffisamment petit, $m(\varepsilon) = E \left(g^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right)$. Grâce à ce choix, on obtient

$$g(m(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

de sorte que

$$\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{m(\varepsilon)} \left(\sum_{p=0}^k |C_{kp}| \right)^2 \leq \varepsilon.$$

En vue de majorer $E_2(\Lambda_m, h)$ en fonction de m , on rappelle quelques définitions.

Définition 3.5.5. L'indice d'approximation de Λ_m dans $L^2([0, 1])$ est donné par

$$\varepsilon_2(\Lambda_m) = \max_{y \geq 0} \left| \frac{B(1+iy)}{1+iy} \right|,$$

où $B : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est le produit de Blaschke défini par :

$$B(z) := B(z, \Lambda_m) = \prod_{k=0}^m \frac{z - \lambda_k - \frac{1}{2}}{z + \lambda_k + \frac{1}{2}}.$$

Nous tirerons profit d'une expression plus simple de $\varepsilon_2(\Lambda_m)$ grâce au théorème suivant ([LGM96], p.360) :

Théorème 3.5.6. *Soit $\Lambda_m : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m$ une suite finie. Supposons que $\lambda_{k+1} - \lambda_k$ soit supérieur à 2 pour $k \geq 0$. Alors*

$$\varepsilon_2(\Lambda_m) = \prod_{k=0}^m \frac{\lambda_k - \frac{1}{2}}{\lambda_k + \frac{3}{2}}.$$

Définition 3.5.7. Le module de continuité $L^2 w(f, \cdot) :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ d'une fonction f dans $L^2([0, 1])$ est défini par

$$w(f, u) = \sup_{0 \leq r \leq u} \left(\int_0^{1-r} |f(x+r) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'introduction de ces deux notions est motivée par le résultat suivant ([LGM96], Theorem 2.7 p.352) :

Théorème 3.5.8. *Soit f une fonction de $L^2([0, 1])$. Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que*

$$E_2(\Lambda_m, f) \leq C w(f, \varepsilon(\Lambda_m)).$$

Lemme 3.5.9. *Il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout u dans $[0, 1/e^2]$, on a : $w(h, u) \leq C_A u$.*

Démonstration. On écrit $h(t) = t^\alpha g(-\ln(t))$ comme la somme de deux fonctions à supports disjoints

$$h = h_1 + h_2,$$

avec

- $h_1(t) = t^\alpha BL(-\ln(t) - 1) \mathbf{1}_{[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}]}(t),$
- $h_2(t) = t^\alpha BL(1 + \ln(t)) \mathbf{1}_{[\frac{1}{e}, 1]}(t).$

Grâce à la seconde partie de la Proposition 3.4.1, la fonction BL est bornée par une constante C_A et donc, pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, chacune des fonctions h_i est bornée par une

constante C_A ne dépendant que de A . De plus, pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, h_i est de classe C^1 sur $[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}]$ et h'_i est bornée par une constante C_A . Soit donc $x \in [0, 1/e^2]$, $r \in [0, x]$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-r} |h(t+r) - h(t)|^2 dt &= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}-r^2} |h_1(t+r) - h_1(t)|^2 dt + \int_{\frac{1}{e}-r^2}^{\frac{1}{e}} |h_2(x+r) - h_1(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{e}}^{1-r} |h_2(t+r) - h_2(t)|^2 dt \\ &\leq \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} - r^2 \right) \|h'_1\|_\infty^2 r^2 + r^2 \left(\|h_2\|_\infty + \|h_1\|_\infty \right)^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{e} - r \right) \|h'_2\|_\infty^2 r^2 \\ &\leq C_A r^2. \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée et le supremum sur r de part et d'autre de l'inégalité, le résultat est établi. $\square$

Lemme 3.5.10.

$$\varepsilon_2(\Lambda_m) = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.5.6 et le Lemme 3.5.4, l'expression de $\varepsilon_2(\Lambda_m)$ définie ci-dessus peut s'écrire

$$\varepsilon_2(\Lambda_m) = \prod_{k=0}^m \frac{\lambda_k - \frac{1}{2}}{\lambda_k + \frac{3}{2}}.$$

On rappelle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier m , $\lambda_m \leq 4m + C$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \quad \ln \left(\prod_{k=0}^m \frac{\lambda_k - \frac{1}{2}}{\lambda_k + \frac{3}{2}} \right) &= \ln \left(\prod_{k=0}^m \left(1 - \frac{2}{\lambda_k + \frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \ln \left(1 - \frac{2}{\lambda_k + \frac{3}{2}} \right) \\ &\leq -2 \sum_{k=0}^m \frac{1}{\lambda_k + \frac{3}{2}} \\ &\leq -2 \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k + C + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Mais $-2 \sum_{k=0}^m \frac{1}{2k + C + \frac{3}{2}} \underset{m \rightarrow +\infty}{=} -\ln(m) + O(1)$. Par suite :

$$\varepsilon_2(\Lambda_m) = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

□

Puisque $\varepsilon_2(\Lambda_{m(\varepsilon)})$ appartient à $[0, 1/e^2]$ pour ε assez petit, on obtient grâce au Lemme 3.5.9 et au Théorème 3.5.8 l'inégalité

$$E_2(h, \Lambda_{m(\varepsilon)}) \leq C_A \varepsilon_2(\Lambda_{m(\varepsilon)}).$$

En vertu de la Proposition 3.5.3, on a donc :

$$\|h\|_2^2 \leq C_A \left(\varepsilon + \varepsilon_2(\Lambda_{m(\varepsilon)})^2 \right).$$

À présent, par l'estimation $\varepsilon_2(\Lambda_{m(\varepsilon)})^2 \leq \frac{C_A}{m(\varepsilon)^2}$ et l'encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + o(1) \leq g(m(\varepsilon)) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

il vient

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \ln \left(g(m(\varepsilon)) \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_A m(\varepsilon).$$

Par suite $\frac{1}{m(\varepsilon)} \leq \frac{C_A}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}$ et donc

$$\|h\|_2^2 \leq C_A \frac{1}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2}.$$

Puisque h_1 et h_2 ont des supports disjoints, on peut écrire

$$\|h\|_2^2 = \|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2.$$

En particulier :

$$\|h_2\|_2^2 \leq \|h\|_2^2.$$

Mais

$$\|h_2\|_2^2 = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{2\alpha} \left| BL(1 + \ln(t)) \right|^2 dt,$$

ce qui conduit à la majoration

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 t^{2\alpha+1} \left| BL(1 + \ln(t)) \right|^2 \frac{dt}{t} \leq \frac{C_A}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}.$$

Par conséquent, puisque l'intervalle d'intégration est $\left[\frac{1}{e^1}, 1\right]$, le terme $t^{2\alpha+1}$ est minoré par $(1/e)^{(2\alpha+1)}$. En retournant aux coordonnées en τ , on obtient :

$$\|BL(1 - \tau)\|_{L^2([0,1])} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

et donc

$$\|BL\|_{L^2([0,1])} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

3.5.2 Inversibilité de l'opérateur B

Il s'agit à présent de prouver que l'opérateur $B : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ est inversible et que son inverse est borné par une constante C_A . Rappelons que l'on peut décomposer B en la somme

$$B = I + C,$$

où I désigne l'identité et où l'opérateur C est défini par $Ch(\tau) = \int_{\tau}^1 H_1(x, \tau) h(x) dx$, avec :

$$\begin{aligned} H_1(x, \tau) = & \tilde{P}(x, 2\tau - x) + H(x, 2\tau - x) + \int_{2\tau-x}^{2\tau} \tilde{P}(x, 2\tau - t) H(x, t) \mathbf{1}_{[0,x]}(t) dt \\ & + \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t) H(x, t - 2\tau) dt \mathbf{1}_{[2\tau,1]}(x) + \int_{2\tau}^x \tilde{P}(x, t - 2\tau) H(x, t) dt \mathbf{1}_{[2\tau,1]}(x) \\ & + P(x, 2\tau - x) + \tilde{H}(x, 2\tau - x) + \int_{2\tau-x}^{2\tau} P(x, 2\tau - t) \tilde{H}(x, t) \mathbf{1}_{[0,x]}(t) dt \\ & + \int_{2\tau}^x P(x, t) \tilde{H}(x, t - 2\tau) dt \mathbf{1}_{[2\tau,1]}(x) + \int_{2\tau}^x P(x, t - 2\tau) \tilde{H}(x, t) dt \mathbf{1}_{[2\tau,1]}(x). \end{aligned}$$

Lemme 3.5.11. *Il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout h de $L^2(0, 1)$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \tau \in [0, 1], \quad |C^n h(\tau)| \leq C_A \frac{\left((1 - \tau)\|H_1\|_{L^\infty}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \|h\|_{L^2([0,1])}.$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- D'après les estimations de la Proposition 3.4.3, H , $\tilde{H}$ et H_1 sont bornées par une constante C_A . En invoquant les inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwarz, on obtient immédiatement :

$$|Ch(\tau)| \leq C_A \int_\tau^1 |h(x)| dx \leq C_A(1 - \tau) \|h\|_{L^2([0,1])} \leq C_A \|h\|_{L^2([0,1])}.$$

- Supposons que l'estimation soit vraie pour un certain entier n non nul. Alors

$$\begin{aligned} |C^{n+1}h(\tau)| &= \left| \int_\tau^1 H_1(x, t) C^n h(x) dx \right| \leq \int_\tau^1 \|H_1\|_\infty C_A \frac{(1-x)^{n-1} \|H_1\|_\infty^{n-1}}{(n-1)!} \|h\|_{L^2(0,1)} dx \\ &= C_A \frac{\|H_1\|_\infty^n}{(n-1)!} \|h\|_{L^2(0,1)} \int_\tau^1 (1-x)^{n-1} dx \\ &= C_A \frac{\left((1-\tau)\|H_1\|_\infty\right)^n}{n!} \|h\|_{L^2([0,1])}. \end{aligned}$$

□

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|C^n\| \leq C_A \frac{\left((1-\tau)\|H_1\|_\infty\right)^{n-1}}{(n-1)!}$. Il résulte de cela que la série

$\sum (-1)^n C^n$ converge. Par conséquent B est inversible, $B^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n C^n$ et

$$\|B^{-1}\| \leq C_A.$$

Finalement :

$$\|q - \tilde{q}\|_{L^2(0,1)} = \|L\|_{L^2(0,1)} \leq \|B^{-1}\| \|BL\|_{L^2(0,1)} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Passons à la preuve du Corollaire 3.1.6.

Démonstration. Soit $s_1, s_2 \geq 0$ et $\theta \in (0, 1)$. En vertu des inégalités de Gagliardo-Nirenberg (voir [BM18]), on a, pour tout g dans $H^{s_1}(0, 1) \cap H^{s_2}(0, 1)$ et $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$,

$$\|g\|_{H^s(0,1)} \leq \|g\|_{H^{s_1}(0,1)}^\theta \|g\|_{H^{s_2}(0,1)}^{1-\theta}.$$

Comme f et $\tilde{f}$ appartiennent à $\mathcal{C}(A)$, on a : $q - \tilde{q} \in H^2(0, 1)$ et $\|q - \tilde{q}\|_{H^2(0,1)} \leq C_A$. Ainsi, pour $s_1 = 0$ et $s_2 = 2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|q - \tilde{q}\|_{H^s(0,1)} &\leq \|q - \tilde{q}\|_{L^2(0,1)}^\theta \|q - \tilde{q}\|_{H^2(0,1)}^{1-\theta} \\ &\leq C_A^{1-\theta} \|q - \tilde{q}\|_{L^2(0,1)}^\theta \\ &\leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\theta}, \end{aligned}$$

où $\theta = \frac{2-s}{2}$. L'injection de Sobolev $H^1(0, 1) \hookrightarrow C^0(0, 1)$ avec $\|\cdot\|_\infty \leq 2\|\cdot\|_{H^1(0,1)}$ conduit alors, pour $s = 1$ et $\theta = 1/2$, à :

$$\|q - \tilde{q}\|_\infty \leq 2\|q - \tilde{q}\|_{H^1(0,1)} \leq C_A \sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}.$$

□

3.6 Estimation uniforme des facteurs conformes

On démontre maintenant le Corollaire 3.1.7. Posons $F = f^{n-2}$. Puisque $\omega = 0$, nous pouvons écrire $q = \frac{F''}{F}$. Par suite :

$$(\tilde{F}F' - \tilde{F}'F)'(t) = \tilde{F}F(q - \tilde{q})(t).$$

Pour tout t de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t)F'(t) - \tilde{F}'(t)F(t) &= (n-2)\tilde{f}^{n-2}f^{n-3}(t)f'(t) - (d-2)\tilde{f}^{n-3}f^{n-2}(t)\tilde{f}'(t) \\ &= (n-2)f^{n-3}(t)\tilde{f}^{n-3}(t)\left(\tilde{f}(t)f'(t) - f(t)\tilde{f}'(t)\right) \end{aligned}$$

Supposons que tout t de $[0, 1]$ vérifie $\tilde{f}(t)f'(t) - f(t)\tilde{f}'(t) \neq 0$, par exemple : $\tilde{f}(t)f'(t) > f(t)\tilde{f}'(t)$. Alors

$$\frac{f'(t)}{f(t)} > \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{f}(t)}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, il vient

$$\ln(f(1)) - \ln(f(0)) > \ln(\tilde{f}(1)) - \ln(\tilde{f}(0)),$$

ce qui contredit les égalités $f(0) = f(1)$ et $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$. Par conséquent, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $(\tilde{f}f' - f\tilde{f}')(x_0) = 0$. En posant $G(x) = (\tilde{F}F' - F\tilde{F}')(x)$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) = \int_{x_0}^x \tilde{F}F'(q - \tilde{q})(t)dt.$$

D'après les estimations en norme L^2 précédemment établies sur $q - \tilde{q}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad |G(x)| &\leq \sqrt{|x - x_0|} C_A \|q - \tilde{q}\|_2 \\ &\leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \left(\frac{F}{\tilde{F}} \right)'(x) \right| = \left| \frac{G(x)}{\tilde{F}(x)^2} \right| \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

et, en intégrant entre 0 et x :

$$\left| \frac{F(x)}{\tilde{F}(x)} - 1 \right| = \left| \int_0^x \left(\frac{F}{\tilde{F}} \right)'(t)dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{G(t)}{\tilde{F}(t)^2} \right| dt \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Cette dernière inégalité entraîne alors

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f^{n-2}(x) - \tilde{f}^{n-2}(x)| \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

En posant $k = n - 2$, et grâce à la relation $a^k - b^k = (a - b) \sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient enfin :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

3.7 Le problème de Calderón

Prouvons, pour terminer, le Théorème 3.1.8 et son Corollaire. Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\partial M)$ peut être décrit par

$$H^s(\partial M) = \left\{ \psi \in \mathcal{D}'(\partial M), \psi = \sum_{m \geq 0} \begin{pmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{pmatrix} \otimes Y_m, \quad \sum_{m \geq 0} (1 + \mu_m)^s \left(|\psi_m^1|^2 + |\psi_m^2|^2 \right) < \infty \right\}.$$

Rappelons que nous avons noté $\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M))$ l'espace des opérateurs bornés de $H^{1/2}(\partial M)$ dans lui-même, et muni $\mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M))$ de la norme

$$\|F\|_* = \sup_{\psi \in H^{1/2}(\partial M) \setminus \{0\}} \frac{\|F\psi\|_{H^{1/2}}}{\|\psi\|_{H^{1/2}}}.$$

Lemme 3.7.1. *On a l'équivalence :*

$$\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega) \in \mathcal{B}(H^{1/2}(\partial M)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = \tilde{f}(0) \\ f(1) = \tilde{f}(1). \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$C_0 = \frac{1}{4\sqrt{f(0)}} \frac{h'(0)}{h(0)}, \quad C_1 = \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} \frac{h'(1)}{h(1)}, \quad A_0 = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{\tilde{f}(0)} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{\tilde{f}(1)}.$$

Pour $m \geq 0$, on a, d'après la représentation par blocs de l'opérateur $\Lambda_g(\omega)$, les asymptotiques de $M(\mu_m)$ et $N(\mu_m)$ données dans le Théorème 1.3.3 et le Corollaire 1.3.4 :

$$\begin{aligned} \Lambda_g^m(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega) &= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{M}(\mu_m)}{\sqrt{\tilde{f}(0)}} - \frac{M(\mu_m)}{\sqrt{f(0)}} + C_0 - \tilde{C}_0 & O(e^{-2\mu_m}) \\ O(e^{-2\mu_m}) & \frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{\tilde{f}(1)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + \tilde{C}_1 - C_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_0\sqrt{\mu_m} + (C_0 - \tilde{C}_0) & 0 \\ 0 & A_1\sqrt{\mu_m} + (\tilde{C}_1 - C_1) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) & O(e^{-2\mu_m}) \\ O(e^{-2\mu_m}) & O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_m}}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(\psi_m^1, \psi_m^2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\Lambda_g^m(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \begin{pmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{pmatrix} = \sqrt{\mu_m} \begin{pmatrix} A_0\psi_m^1 \\ A_1\psi_m^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C_0 - \tilde{C}_0)\psi_m^1 \\ (\tilde{C}_1 - C_1)\psi_m^2 \end{pmatrix} + O\left(\frac{\psi_m^1 + \psi_m^2}{\sqrt{\mu_m}}\right)$$

Pour $\psi = \sum_{m \geq 0} \begin{pmatrix} \psi_m^1 \\ \psi_m^2 \end{pmatrix} \otimes Y_m \in H^{1/2}(\partial M)$, on a

$$\begin{aligned} & \|(\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega))\psi\|_{H^{1/2}(\partial M)}^2 \\ &= \sum_{m \geq 0} (1 + \mu_m)^{1/2} \mu_m \left(A_0^2 |\psi_m^1|^2 + A_1^2 |\psi_m^2|^2 \right) \\ &+ \sum_{m \geq 0} (1 + \mu_m)^{1/2} \sqrt{\mu_m} \left(2A_0(C_0 - \tilde{C}_0) |\psi_m^1|^2 + 2A_1(\tilde{C}_1 - C_1) |\psi_m^2|^2 \right) \\ &+ \sum_{m \geq 0} (1 + \mu_m)^{1/2} O(|\psi_m^1|^2 + |\psi_m^2|^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\|\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)\|_* < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{f}(0) = \tilde{f}(0) \\ \tilde{f}(1) = \tilde{f}(1). \end{cases}$$

□

Proposition 3.7.2. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons $\|\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)\|_* \leq \varepsilon$. Il existe alors une constante $C_A > 0$ telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left| N(\kappa_m) - \tilde{N}(\kappa_m) \right| \leq C_A \varepsilon.$$

Démonstration. Pour tout entier m , considérons $\psi_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes Y_m \in H^{1/2}(\partial M)$.

On a :

$$\begin{aligned} (\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega))\psi_m &= (\Lambda_g^m(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}^m(\omega)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes Y_m \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{f(0)}} \frac{h^{1/4}(1)}{h^{1/4}(0)} \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}(\mu_m)} - \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \right) \\ 0 & \left(\frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} \right) + (\tilde{C}_1 - C_1) \end{pmatrix} \otimes Y_m. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega))\psi_m\|_{H^{1/2}(\partial M)}^2 &= (\mu_m + 1)^{1/2} \left[\left(\frac{\tilde{N}(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} - \frac{N(\mu_m)}{\sqrt{f(1)}} + (\tilde{C}_1 - C_1) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{f(0)} \frac{h^{1/2}(1)}{h^{1/2}(0)} \left(\frac{1}{\tilde{\Delta}(\mu_m)} - \frac{1}{\Delta(\mu_m)} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

et donc, pour tout $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 (\mu_m + 1)^{1/2} \left| \frac{1}{\sqrt{f(1)}} (\tilde{N}(\mu_m) - N(\mu_m)) + (\tilde{C}_1 - C_1) \right|^2 &\leq \|(\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega))\psi_m\|_{H^{1/2}(\partial M)}^2 \\
 &\leq \|\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)\|_*^2 \|\psi_m\|_{H^{1/2}(\partial M)}^2 \\
 &= \|\Lambda_g(\omega) - \Lambda_{\tilde{g}}(\omega)\|_*^2 (\mu_m + 1)^{1/2} \\
 &\leq \varepsilon^2 (\mu_m + 1)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \frac{1}{\sqrt{f(1)}} (\tilde{N}(\mu_m) - N(\mu_m)) + (\tilde{C}_1 - C_1) \right| \leq \varepsilon. \quad (3.20)$$

Grâce à l'asymptotique $N(\mu_m) = -\mu_m + o(1)$, on déduit de (3.20) que

$$|\tilde{C}_1 - C_1| \leq \varepsilon$$

et donc qu'il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$|N(\mu_m) - \tilde{N}(\mu_m)| \leq C_A \varepsilon.$$

□

Comme dans le Lemme 3.3.2, on dispose d'une relation intégrale entre $N(z) - \tilde{N}(z)$ et $q - \tilde{q}$:

Lemme 3.7.3. *Pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$:*

$$(N(z) - \tilde{N}(z))\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))s_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx. \quad (3.21)$$

Démonstration. Définissons $\theta : x \mapsto s_0(x, z)\tilde{s}_0'(x, z) - s_0'(x, z)\tilde{s}_0(x, z)$. Alors :

$$\theta'(x) = (\tilde{q}(x) - q(x))s_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z).$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1, on obtient

$$s_0'(1, z)\tilde{s}_0(1, z) - s_0(1, z)\tilde{s}_0'(1, z) = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))s_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx.$$

Puisque $s'_0(1, z) = N(z)\Delta(z)$ et $s_0(1, z) = \Delta(z)$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$:

$$(N(z) - \tilde{N}(z))\Delta(z)\tilde{\Delta}(z) = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))s_0(x, z)\tilde{s}_0(x, z)dx.$$

□

Tout comme dans la Section 4 du chapitre 3, prolongeons q et $\tilde{q}$ par parité sur $[-1, 0]$ et posons $L(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$. On rappelle que, pour tout entier m , on a posé $y_m = \sqrt{\kappa_m}$.

Nous exploiterons ces représentations des fonctions c_1 et s_1 pour écrire autrement les égalités

$$(N(\kappa_m) - \tilde{N}(\kappa_m))\Delta(\kappa_m)\tilde{\Delta}(\kappa_m) = \int_0^1 (q(x) - \tilde{q}(x))s_0(x, \kappa_m)\tilde{s}_0(x, \kappa_m)dx.$$

Proposition 3.7.4. *Il existe un opérateur $D : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ tel que :*

1. *Pour tout entier m ,*

$$\begin{aligned} (N(\kappa_m) - \tilde{N}(\kappa_m))s_0(1, \kappa_m)\tilde{s}_0(1, \kappa_m) \\ = \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 \cosh(2\tau y_m) DL(\tau) d\tau - \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 L(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

2. *La fonction $\tau \mapsto DL(\tau)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et DL et $(DL)'$ sont uniformément bornées par une constante $C_A > 0$.*

Démonstration. Par des calculs semblables à ceux de la preuve de la Proposition 3.4.1 et à l'aide de la représentation de s_0

$$s_0(x, \kappa_m) = \frac{\sinh(y_m x)}{y_m} + \int_0^x H(x, t) \frac{\sinh(y_m t)}{y_m} dt,$$

on montre que D est donné par

$$\begin{aligned} DL(\tau) = L(\tau) &+ \int_\tau^1 \tilde{H}(x, 2\tau - x)L(x)dx + \int_\tau^1 H(x, 2\tau - x)L(x)dx \\ &+ \int_\tau^1 L(x) \int_{2\tau-x}^{2\tau} \tilde{H}(x, 2\tau - t)H(x, t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)dt dx \\ &+ \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{H}(x, t)H(x, t - 2\tau) dt dx \\ &+ \int_{2\tau}^1 L(x) \int_{2\tau}^x \tilde{H}(x, t - 2\tau)H(x, t) dt dx, \end{aligned}$$

et donc la fonction DL et sa dérivée sont bornées par une constante $C_A > 0$. $\square$

Pour tout entier m , on a :

$$\begin{aligned} (N(\kappa_m) - \tilde{N}(\kappa_m))s_0(1, \kappa_m)\tilde{s}_0(1, \kappa_m) \\ = \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 \cosh(2\tau y_m) DL(\tau) d\tau - \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 L(\tau) d\tau \\ = \frac{1}{2y_m^2} \int_0^1 e^{2\tau y_m} DL(\tau) d\tau + \frac{1}{2y_m^2} \int_0^1 e^{-2\tau y_m} DL(\tau) d\tau - \frac{1}{y_m^2} \int_0^1 L(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par suite, en multipliant de part et d'autre par $2y_m^2 e^{-2y_m}$, il vient :

$$\begin{aligned} 2y_m^2 e^{-2y_m} (N(\kappa_m) - \tilde{N}(\kappa_m))s_0(1, \kappa_m)\tilde{s}_0(1, \kappa_m) \\ = \int_0^1 e^{2y_m(\tau-1)} DL(\tau) d\tau + \int_0^1 e^{-2y_m(\tau+1)} DL(\tau) d\tau - 2e^{-2y_m} \int_0^1 L(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

L'asymptotique

$$s_0(1, \kappa_m) \sim \frac{e^{y_m}}{y_m}, \quad m \rightarrow +\infty,$$

nous assure que la quantité $y_m^2 e^{-2y_m} s_0(1, \kappa_m)\tilde{s}_0(1, \kappa_m)$ est uniformément bornée par rapport à m . De plus, par hypothèse :

$$\left| \int_0^1 L(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| \int_0^1 e^{2y_m(\tau-1)} DL(\tau) d\tau + \int_0^1 e^{-2y_m(\tau+1)} DL(\tau) d\tau \right| \leq C_A \varepsilon.$$

On écrit :

- $\int_0^1 e^{2y_m(\tau-1)} DL(\tau) d\tau = \int_0^1 e^{-2\tau y_m} DL(1-\tau) d\tau,$
- $\int_0^1 e^{-2y_m(\tau+1)} DL(\tau) d\tau = \int_1^2 e^{-2\tau y_m} DL(\tau-1) d\tau,$

En posant

$$RL(\tau) = DL(1-\tau)\mathbf{1}_{[0,1]}(\tau) + DL(\tau-1)\mathbf{1}_{[1,2]}(\tau),$$

on a, pour tout entier m :

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-2\tau y_m} RL(\tau) d\tau \right| \leq C_A \varepsilon$$

Le changement de variable $\tau = -\ln(t)$ nous conduit à un problème des moments :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 t^{2y_m} RL(-\ln(t)) dt \right| \leq C_A \varepsilon.$$

Les mêmes arguments que ceux avancés en Section 4.4.1 permettent de prouver l'estimation de stabilité

$$\|DL\|_{L^2([0,1])} \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Mais D peut s'écrire (voir la Section 4.4.2 pour un résultat similaire)

$$D = I + C,$$

avec $\|C^n\| \leq \frac{C_A}{n!}$. Par conséquent D est inversible et son inverse est borné par une constante $C_A > 0$. D'où :

$$\begin{aligned} \|q - \tilde{q}\|_2 &\leq \|D^{-1}\| \|DL\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \end{aligned}$$

Enfin, si $\omega = 0$ et $n \geq 3$, on déduit comme précédemment :

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq C_A \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Bibliographie

- [Agr06] MS AGRANOVICH. « On a mixed Poincaré-Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain ». *Russian Journal of Mathematical Physics* 13.3 (2006), p. 239-244.
- [Ale88] Giovanni ALESSANDRINI. « Stable determination of conductivity by boundary measurements ». *Applicable Analysis* 27.1-3 (1988), p. 153-172.
- [Ang+04] Dang D ANG et al. *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*. Springer, 2004.
- [BM18] Haïm BREZIS et Petru MIRONESCU. « Gagliardo–Nirenberg inequalities and non-inequalities : The full story ». *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. T. 35. 5. Elsevier. 2018, p. 1355-1376.
- [Boa11] Ralph Philip BOAS. *Entire functions*. T. 5. Academic Press, 2011.
- [BU02] Alexander L BUKHGEIM et Gunther UHLMANN. « Recovering a potential from partial Cauchy data ». (2002).
- [Cal80] A CALDERÓN. « On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980), 65–73 ». *Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro* (1980).
- [CESG11] Bruno COLBOIS, Ahmad EL SOUFI et Alexandre GIROUARD. « Isoperimetric control of the Steklov spectrum ». *Journal of Functional Analysis* 261.5 (2011), p. 1384-1399.
- [CGH19] Bruno COLBOIS, Alexandre GIROUARD et Asma HASSANNEZHAD. « The Steklov and Laplacian spectra of Riemannian manifolds with boundary ». *Journal of Functional Analysis* (2019), p. 108409.
- [Chr+98] Michael CHRIST et al. « Alberto Pedro Calderón ». *NOTICES OF THE AMS* 45.9 (1998).

- [DKN18] Thierry DAUDÉ, Niky KAMRAN et François NICOLEAU. « A survey of non-uniqueness results for the anisotropic Calderon problem with disjoint data ». *arXiv preprint arXiv :1803.00910* (2018).
- [DKN19a] T DAUDÉ, N KAMRAN et F NICOLEAU. « Non uniqueness results in the anisotropic Calderón problem with Dirichlet and Neumann data measured on disjoint sets ». *Annales de l'Institut Fourier*. T. 49. 2019.
- [DKN19b] Thierry DAUDÉ, Niky KAMRAN et François NICOLEAU. « On the Hidden Mechanism Behind Non-uniqueness for the Anisotropic Calderón Problem with Data on Disjoint Sets ». *Annales Henri Poincaré*. T. 20. 3. Springer. 2019, p. 859-887.
- [DKN19c] Thierry DAUDÉ, Niky KAMRAN et François NICOLEAU. « Stability in the inverse Steklov problem on warped product Riemannian manifolds ». *The Journal of Geometric Analysis* (2019).
- [DN10] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU. « Inverse scattering in de Sitter–Reissner–Nordström black hole spacetimes ». *Reviews in Mathematical Physics* 22.04 (2010), p. 431-484.
- [Fer+09] David Dos Santos FERREIRA et al. « Limiting Carleman weights and anisotropic inverse problems ». *Inventiones mathematicae* 178.1 (2009), p. 119-171.
- [Fer+16] David Dos Santos FERREIRA et al. « The Calderón problem in transversally anisotropic geometries ». *Journal of the European Mathematical Society* 18 (2016).
- [Gen20] Germain GENDRON. « Uniqueness results in the inverse spectral Steklov problem ». *Inverse Problems and Imaging* 144 (2020), p. 631-664.
- [GHW18] Carolyn GORDON, Peter HERBRICH et David WEBB. « Robin and Steklov isospectral manifolds ». *arXiv preprint arXiv :1808.10741* (2018).
- [Gir+14] Alexandre GIROUARD et al. « The Steklov spectrum of surfaces : asymptotics and invariants ». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 157. 3. Cambridge University Press. 2014, p. 379-389.
- [Gir+19] Alexandre GIROUARD et al. « The Steklov spectrum of cuboids ». *Mathematika* 65.2 (2019), p. 272-310.

- [GP17] Alexandre GIROUARD et Iosif POLTEROVICH. « Spectral geometry of the Steklov problem (survey article) ». *Journal of Spectral Theory* 7.2 (2017), p. 321-360.
- [Hor11] Miklós HORVÁTH. « Partial identification of the potential from phase shifts ». *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 380.2 (2011), p. 726-735.
- [Jam14] Pierre JAMMES. « Prescription du spectre de Steklov dans une classe conforme ». *Analysis & PDE* 7.3 (2014), p. 529-550.
- [JS14] Alexandre JOLLIVET et Vladimir SHARAFUTDINOV. « On an inverse problem for the Steklov spectrum of a Riemannian surface ». *Contemp. Math* 615 (2014), p. 165-191.
- [KC07] Uhlmann G. KENIG C. Sjöstrand J. « The Calderon problem with partial data ». *Ann. of Maths* 165 (2007), p. 567-591.
- [KV84] Robert V KOHN et Michael VOGELIUS. « Identification of an Unknown Conductivity by Means of Measurements at the Boundary. » *SIAM-AMS Proceedings*. American Mathematical Soc. 1984.
- [LGM96] George G LORENTZ, Manfred von GOLITSCHKE et Yuly MAKOVZ. *Constructive approximation : advanced problems*. T. 304. Springer, 1996.
- [Lio97] William LIONHEART. « Conformal uniqueness results in anisotropic electrical impedance imaging ». *Inverse Problems* 13.1 (1997), p. 125.
- [LU89] John M LEE et Gunther UHLMANN. « Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* 42.8 (1989), p. 1097-1112.
- [Mar11] Vladimir Aleksandrovich MARCHENKO. *Sturm-Liouville operators and applications*. T. 373. American Mathematical Soc., 2011.
- [Nac88] Adrian I NACHMAN. « Reconstructions from boundary measurements ». *Annals of Mathematics* 128.3 (1988), p. 531-576.
- [Par13] Ori PARZANCHEVSKI. « On G -sets and isospectrality ». *Annales de l'Institut Fourier*. T. 63. 6. 2013, p. 2307-2329.
- [Pet06] Peter PETERSEN. *Riemannian geometry*. T. 171. Springer, 2006.
- [PS19] Luigi PROVENZANO et Joachim STUBBE. « Weyl-type bounds for Steklov eigenvalues ». *Journal Of Spectral Theory* 9.ARTICLE (2019), p. 349-377.

BIBLIOGRAPHIE

- [PT87] Jurgen POSCHEL et Eugene TRUBOWITZ. *Inverse spectral theory*. T. 130. Academic Press, 1987.
- [Ram99] AG RAMM. « An inverse scattering problem with part of the fixed-energy phase shifts ». *Communications in mathematical physics* 207.1 (1999), p. 231-247.
- [Sal08] Mikko SALO. « Calderón problem ». *Lecture Notes* (2008).
- [Sal13] Mikko SALO. « The Calderón problem on Riemannian manifolds ». *Inverse problems and applications : inside out. II, Math. Sci. Res. Inst. Publ* 60 (2013), p. 167-247.
- [Shu87] Mikhail Aleksandrovich SHUBIN. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. T. 200. 1. Springer, 1987.
- [Sim99] Barry SIMON. « A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism ». *Annals of Mathematics-Second Series* 150.3 (1999), p. 1029-1058.
- [SU87] John SYLVESTER et Gunther UHLMANN. « A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem ». *Annals of mathematics* (1987), p. 153-169.
- [SV97] Ju SAFAROV et D VASSILEV. *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators*. T. 155. American Mathematical Soc., 1997.
- [Uhl01] Gunther UHLMANN. « Recent progress in the anisotropic electrical impedance problem ». *Proceedings of the USA-Chile workshop on Nonlinear Analysis, J. Diff. Eqns., Conf.* T. 6. 2001, p. 303-311.
- [Uhl09] Gunther UHLMANN. « Electrical impedance tomography and Calderón's problem ». *Inverse problems* 25.12 (2009), p. 123011.

Titre : Unicité et stabilité pour le problème inverse de Steklov

Mot clés : Problème de Steklov, fonctions de Weyl-Titchmarsh, Théorème de Nevanlinna, Théorème de Borg-Marchenko local, Problème des moments.

Resumé : On s'intéresse à l'étude d'un problème inverse de Steklov pour une classe conforme de variétés de dimension n ayant la topologie d'une sphère creuse, chacune munie d'une métrique de type produit tordu. On prouve que la donnée du spectre de Steklov caractérise le facteur conforme à une invariance de jauge naturelle près. On étudie ensuite la dépendance continue du facteur conforme par rapport au spectre de Steklov.

Title : Uniqueness and stability for the inverse Steklov problem

Keywords : Steklov spectrum, Weyl-Titchmarsh functions, Nevanlinna theorem, local Borg-Marchenko theorem, Moment problem.

Abstract : We aim at studying an inverse Steklov problem for a particular class of n -dimensional manifolds having the topology of a hollow sphere and equipped with a warped product metric. We prove that the knowledge of the Steklov spectrum determines uniquely the associated warping function up to a natural invariance. Then, we study the continuous dependence of the warping function defining the warped product with respect to the Steklov spectrum.