HAL
open science

Complexes d'intersection des compactifications de Baily-Borel

Sophie Morel

To cite this version:

Sophie Morel. Complexes d'intersection des compactifications de Baily-Borel. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris Saclay, 2005. Français. NNT : . tel-03058332

HAL Id: tel-03058332

https://hal.science/tel-03058332v1

Submitted on 14 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE :

UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

PAR

Sophie MOREL

Sujet : **COMPLEXES D'INTERSECTION DES COMPACTIFICATIONS DE BAILY-BOREL**
Le cas des groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$

Soutenue le 13 décembre 2005 devant le jury composé de :

Michael HARRIS	Rapporteur
Guy HENNIART	
Laurent LAFFORGUE	
Gérard LAUMON	Directeur de thèse
Richard PINK	
Jörg WILDESHAUS	

Autre rapporteur : Robert KOTTWITZ

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Gérard Laumon, pour le sujet intéressant qu'il m'a donné, pour sa disponibilité, ses conseils et ses encouragements. Je remercie également mes rapporteurs Michael Harris et Robert Kottwitz, qui ont corrigé ou simplifié certaines preuves, ainsi que Guy Henniart, Laurent Lafforgue, Richard Pink et Jörg Wildeshaus, qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Au printemps dernier, David Blottière et moi-même avons organisé un groupe de travail sur les variétés de Shimura, au cours duquel j'ai appris beaucoup de choses. Je suis très reconnaissante à David de m'avoir proposé d'organiser ce groupe de travail avec lui, et à tous les participants, en particulier aux orateurs : Mathieu Cossutta, Laurent Fargues, Francesco Lemma, Sandra Rosensztajn, Benjamin Schraen, Jörg Wildeshaus et Yih-Jeng Yu.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont pris sur leur temps pour répondre à mes questions ou m'expliquer des sujets que je ne comprenais pas bien. Je pense en particulier à Luc Illusie, mais je suis redevable à beaucoup d'autres, dont Joël Bellaïche, Mladen Dimitrov, Michel Duflo, Laurent Fargues, Ofer Gabber, Guy Henniart, Sandra Rozensztajn, Jacques Tilouine et Jörg Wildehaus.

Table des matières

0 Introduction **7**

1 Variétés de Shimura en caractéristique 0 **11**

1.1 Quelques notations 11
1.2 Données de Shimura pour certains groupes unitaires 12
1.3 Sous-groupes paraboliques de $\mathbf{GU}(p,q)$ 14
1.4 Compactification de Baily-Borel 15
1.4.1 Description 15
1.4.2 Stratification du bord 18
1.4.3 Algébricité 20
1.5 Combinatoire des strates de la compactification de Baily-Borel 21
1.6 Modèles canoniques 23
1.6.1 Variété de Shimura 23
1.6.2 Compactification de Baily-Borel 26

2 Systèmes de coefficients et leurs prolongements à la compactification de Baily-Borel, d'après Pink **29**

2.1 Variété de Shimura 29
2.1.1 Systèmes locaux sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ 29
2.1.2 Systèmes locaux sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$ 31
2.1.3 Rappels sur la construction de Pink 32
2.1.4 Systèmes locaux étales sur les modèles canoniques 36
2.2 Le théorème de Pink (prolongement des faisceaux sur la compactification de Baily-Borel) 39

3 Modèles entiers **43**

3.1 Variété de Shimura 43
3.1.1 Schémas abéliens et structures de niveau 43
3.1.2 Le problème de modules 45
3.1.3 Changement de niveau 47
3.2 Compactification de Baily-Borel 48
3.3 Systèmes de coefficients 51
3.4 Poids 52
3.5 Théorème de Pink 55

4 Prolongement intermédiaire des faisceaux pervers purs **57**
4.1 Troncature par le poids dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 57
4.2 Preuve des propositions de la section 4.1 60
4.3 t-structures recollées 63
4.4 Propriétés supplémentaires des t-structures recollées 65
4.5 Quelques lemmes techniques 67

5 Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel **71**
5.1 Complexes pondérés 71
5.2 Restrictions des complexes pondérés aux strates 73
5.3 La formule des traces 78
5.3.1 Rappels sur un théorème de Kottwitz 78
5.3.2 Formule des traces pour certains tronqués 80
5.3.3 Formule des traces pour un complexe pondéré 87

Bibliographie **89**

0 Introduction

Les variétés de Shimura les plus étudiées sont celles associées au groupe $\mathbf{GL}_2$, autrement dit les courbes modulaires. Si Y est une courbe modulaire, on obtient sa compactification de Baily-Borel $j : Y \longrightarrow Y^*$ en ajoutant un nombre fini de pointes (car $\mathbf{GL}_2$ est de rang semi-simple 1). Comme Y^* est lisse, le complexe d'intersection associé à un système de coefficients $\mathcal{F}$ sur Y est $j_*\mathcal{F}$. Il est possible dans ce cas de calculer la fonction L de $j_*\mathcal{F}$, et il a été prouvé dans des travaux d'Eichler, Shimura, Deligne et Ihara (entre autres) qu'elle s'écrit comme un produit alterné de fonctions L de formes modulaires et de fonctions zêta.

La fonction L est un produit de facteurs locaux L_p, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, et ce sont les L_p que l'on calcule. Le cas essentiel est celui où Y^* et $j_*\mathcal{F}$ ont bonne réduction en p. Le facteur local L_p ne dépend alors que des réductions modulo p de Y^* et $j_*\mathcal{F}$.

Pour calculer L_p dans le cas des courbes modulaires, il existe deux méthodes : la méthode des congruences, qui ne se généralise pas en dimension supérieure, et la comparaison de la formule des traces d'Arthur-Selberg et de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. C'est cette deuxième méthode que l'on cherche à généraliser.

Pour une variété de Shimura générale $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, l'application de cette méthode est plus délicate. Un premier pas est le calcul de la trace d'une puissance du morphisme de Frobenius sur la cohomologie du complexe d'intersection de la compactification de Baily-Borel, ou, ce qui suffit grâce à la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz (cf SGA 4 1/2 Rapport), de la fonction trace de Frobenius de ce complexe.

Brylinski et Labesse ([BL]) ont effectué ce calcul pour $\mathbf{G} = R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_2$, avec E une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré supérieur ou égal à 2, et ils en ont déduit que la fonction L du complexe d'intersection était bien de la forme attendue.

Pour $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(2,1)$, le calcul a été fait par Kottwitz et Rapoport dans l'article [KR] du livre [LR] (dans ce cas, on peut aussi montrer que la fonction L à coefficients dans le complexe d'intersection est un produit alterné de fonctions L automorphes, voir l'article de Langlands et Ramanujan dans le même livre [LR]). Le cas général d'un groupe de rang 1 a été traité par Rapoport dans son article [R], paru dans le même livre.

Dans cette thèse, nous traitons le cas des groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$ de rang arbitraire, avec la restriction suivante : comme on ne dispose pas de compactifications toroïdales des modèles entiers, on doit exclure un ensemble fini de nombres premiers.

Du point de vue topologique, le complexe d'intersection peut être calculé en utilisant la compactification de Borel-Serre réductive. Plus précisément, Goresky, Harder et MacPherson construisent une famille de complexes pondérés sur la compactification de Borel-Serre réductive et montrent que le complexe d'intersection sur la compactification de Baily-Borel

est l'image directe de deux de ces complexes pondérés par le morphisme naturel de la compactification de Borel-Serre réductive sur la compactification de Baily-Borel (cf [GHM]).

On peut définir en caractéristique finie des complexes pondérés analogues aux images directes des complexes pondérés de Goresky, Harder et MacPherson.

La méthode consiste à remplacer les troncatures par les poids pour les actions des tores centraux des groupes associés aux composantes de bord par les troncatures par les poids de l'endomorphisme de Frobenius sur les strates de bord. Les premiers, à notre connaissance, à utiliser ce type de méthode sont Looijenga et Rapoport dans [LR2].

Les deux points clé de notre méthode sont le théorème de Pink calculant les restrictions aux strates de la compactification de Baily-Borel du prolongement d'un système de coefficients sur la variété de Shimura (cf [P2]) et la formule suivante : Si $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert non vide dans un schéma X séparé de type fini sur un corps fini et K un faisceau pervers pur de poids a sur U, alors

$$j_{!*}K = w_{\leqslant a} R j_* K.$$

Dans cette formule, $w_{\leqslant a}$ est le tronqué pour la t-structure $({}^wD^{\leqslant a}(X), {}^wD^{>a}(X))$, où ${}^wD^{\leqslant a}(X)$ (resp. ${}^wD^{>a}(X)$) est la sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes mixtes sur X dont les objets sont les complexes qui ont tous leurs faisceaux de cohomologie perverse de poids $\leqslant a$ (resp. $> a$). Cette t-structure est assez inhabituelle ; par exemple, elle est dégénérée et de coeur nul.

Pour les variétés de Shimura $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ considérées dans cette thèse, le théorème de Pink s'écrit (cf le corollaire 2.2.2)

$$i^* R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V \simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}), V)).$$

j est l'inclusion de la variété de Shimura dans sa compactification de Baily-Borel $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, V est une représentation algébrique du groupe $\mathbf{G}$, $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ est le système de coefficients associé à V, i est l'inclusion d'une strate associée à un parabolique maximal $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et Γ_ℓ est un sous-groupe arithmétique de la parte linéaire du quotient de Levi de $\mathbf{P}$.

On peut aussi appliquer ce théorème à des systèmes locaux sur les strates de bord de la compactification de Baily-Borel, ce qui permet, par exemple, si $M_2 \subset \overline{M}_1 \subset M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, X)^*$ sont deux strates, de calculer la restriction à M_2 de $R i_{1*} i_1^* R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$, où i_1 est l'inclusion de M_1 dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

Rappelons que les poids du faisceau lisse $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ sont déterminés par le caractère central de V (cf 3.4).

On a vu ci-dessus qu'on disposait d'une formule pour calculer le prolongement intermédiaire. Supposons par exemple que le caractère central de V est trivial, donc que $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ est pur de poids 0, et notons d la dimension de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[d]$ est alors un faisceau pervers pur

de poids d sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$, et le complexe d'intersection IC_V à coefficients dans V, égal par définition à $(j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[d]))[-d]$, est donné par la formule suivante :

$$IC_V = w_{\leqslant d} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V.$$

Il s'agit ensuite de calculer le complexe $w_{\leqslant d} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$. La t-structure $({}^wD^{\leqslant d}, {}^wD^{>d})$ sur la compactification de Baily-Borel s'obtient en recollant les t-structures analogues sur la variété de Shimura et les strates du bord. En utilisant cette remarque et le fait que les foncteurs de troncature $w_{\leqslant d}$ et $w_{>d}$ sont triangulés, on obtient la formule suivante dans le groupe de Grothendieck (qui est un cas particulier du théorème 4.3.5) :

$$[IC_V] = [w_{\leqslant d} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V] = \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_r \leqslant n} (-1)^r [R i_{n_r *} w_{>d} i_{n_r}^* \ldots R i_{n_1 *} w_{>d} i_{n_1}^* R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V],$$

où i_k est l'inclusion de la k-ième strate dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ (on a choisi un ordre total sur les strates tel que la dimension soit décroissante).

On peut calculer explicitement les complexes qui apparaissent dans cette somme alternée grâce à des applications successives du théorème de Pink. On obtient finalement le théorème 5.2.2 :

$$[i^* IC_V] =$$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}} \left(\sum_{S \subset \{1,\ldots,r-1\}} \sum_{i \in I_S} \left[Ind_{\mathrm{K}_{p_i g, S\cup\{r\}}}^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}} (-1)^{card(S)} R\Gamma \left(\Gamma_{p_i g, S\cup\{r\}}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}), V)_{\geqslant t_r, < t_s, s \in S} \right) \right] \right).$$

Les notations précises sont expliquées dans 5.2. Disons seulement que i est comme plus haut l'inclusion d'une strate de bord de la compactification de Baily-Borel, que les t_i sont des entiers qui ne dépendent que des dimensions des différentes strates (on peut prendre par exemple t_i égal à l'opposé de la codimension de la i-ième strate), que $S \cup \{r\}$ parcourt un système d'indices des sous-groupes paraboliques standard dont les strates de bord associées dans la compactification de Borel-Serre réductive s'envoient sur la strate de la compactification de Baily-Borel considérée, que, si $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}$ est le sous-groupe parabolique correspondant à $S\cup\{r\}$, alors $\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}$ et les $\Gamma_{p_i g, S\cup\{r\}}$ sont des sous-groupes arithmétique de la partie linéaire du quotient de Levi $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}/\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}$ de $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}$, et enfin que $R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}), V)_{\geqslant t_r, < t_s, s \in S}$ est un tronqué pour les poids de certains tores centraux de $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}/\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}$.

Passons en revue les différentes parties.

Les trois premières parties contiennent essentiellement des rappels.

Dans la partie 1, nous introduisons les groupes unitaires $\mathbf{GU}(p,q)$ que nous comptons étudier et leurs données de Shimura, puis nous rappelons la définition de l'ensemble des points complexes des variétés de Shimura associées et celle de l'ensemble des points complexes des

compactifications de Baily-Borel. En suivant Pink ([P2] 3.7), nous définissons une stratification du bord des compactifications de Baily-Borel par des variétés de Shimura associées à des groupes unitaires plus petits. Enfin, nous rappelons les théorèmes d'algébricité (sur $\mathbb{C}$) pour les variétés ci-dessus et les théorèmes d'existence des modèles canoniques sur le corps reflex. Signalons aussi que la section 1.3 contient une liste des sous-groupes paraboliques standard de $\mathbf{GU}(p,q)$, et la section 1.5 un calcul de nature combinatoire sur la compactification de Baily-Borel, qui sert dans la section 5.2, et pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence.

La partie 2 présente la construction des systèmes de coefficients sur la variété de Shimura provenant de représentations du groupe. Nous rappelons d'abord la construction de ces systèmes de coefficients sur les points complexes, puis nous expliquons une méthode, due à Pink ([P2] 1), pour montrer que ces systèmes de coefficients proviennent de faisceaux étales sur les modèles canoniques. Ensuite, nous énonçons le théorème de Pink sur le prolongement de ces faisceaux étales à la compactification de Baily-Borel.

La partie 3 est consacrée aux modèles entiers. Le but est de montrer que, quitte à inverser un ensemble fini de nombres premiers, la situation des deux premières parties sur le corps reflex s'étend à l'anneau des entiers de ce corps. Comme les variétés de Shimura considérées sont PEL, elles ont des modèles sur l'anneau des entiers du corps reflex où on a inversé le discriminant et certains nombres premiers qui dépendent du niveau. Une fois qu'on a ces modèles, la construction de Pink des systèmes de coefficients étales s'étend automatiquement (cf 3.3). En revanche, pour s'assurer que ces systèmes de coefficients sont bien mixtes (3.4), pour avoir une compactification de Baily-Borel avec des propriétés convenables (3.2) et pour que le théorème de Pink reste vrai (3.5), on doit inverser d'autres nombres premiers, sur lesquels on n'a que très peu d'informations.

La partie 4 est indépendante des autres. Dans un premier temps, nous y étudions la t-structure $({}^wD^{\leqslant a}(X), {}^wD^{>a}(X))$ définie plus haut et y montrons la formule pour le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur K de poids a sur un ouvert non vide $j : U \longrightarrow X$. Dans un deuxième temps, nous considérons des t-structures sur un schéma stratifié X qui s'obtiennent en recollant des t-structures $({}^wD^{\leqslant a'}, {}^wD^{>a'})$ sur les strates (avec un a' qui dépend de la strate). Grâce aux propriétés de ces t-structures, nous obtenons si l'ouvert U est réunion de strates une égalité entre les classes dans le groupe de Grothendieck d'un $w_{\leqslant a}Rj_*K$ et d'une somme alternée de tronqués par le poids qui se calculent sur les strates contenues dans $X - U$ (théorème 4.3.5).

Dans la partie 5, nous appliquons les résultats de la partie 4 aux variétés de Shimura. Dans 5.1, nous définissons les complexes pondérés et montrons que deux de ces complexes sont isomorphes au complexe d'intersection. En particulier, à l'aide du théorème de Pink et du théorème 4.3.5, nous obtenons une formule explicite, dans le groupe de Grothendieck, pour la restriction à une strate de bord de la compactification de Baily-Borel du complexe d'intersection (plus généralement, d'un complexe pondéré). Grâce à cette formule et à un résultat de Kottwitz ([K2]), nous calculons dans 5.3 la trace d'une puissance de l'endomorphisme de Frobenius sur la cohomologie d'intersection.

1 Variétés de Shimura en caractéristique 0

1.1 Quelques notations

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$. On note $\mathbf{S}$ son centre déployé. On appelle *espace symétrique* de $\mathbf{G}$ un espace homogène X sous $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ tel que pour un $x \in X$, le stabilisateur de x dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ soit de la forme $\mathrm{A.K}_\infty$, où $\mathrm{A} = \mathbf{S}(\mathbb{R})^\circ$ et K_∞ est un sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ (cette propriété est alors vraie pour tout $x \in X$). Si Γ est un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$, on dit que $\Gamma \setminus X$ est un *espace localement symétrique* associé à $\mathbf{G}$.

Pour tout sous-groupe ouvert compact K de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, on pose

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, X)(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (X \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

Si $(g_i)_{i \in I}$ est un système de représentants du double quotient $\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, on a

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, X)(\mathbb{C}) = \coprod_{i \in I} \Gamma_i \setminus X,$$

où $\Gamma_i = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \cap g_i \mathrm{K} g_i^{-1}$ est un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$, net si K est net.

En particulier, si K est net, $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est une variété analytique réelle.

Si K, K' sont deux sous-groupes ouverts compacts de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ est tel que $\mathrm{K}' \subset g\mathrm{K}g^{-1}$, on définit une application analytique finie étale

$$T_g : M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, X)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, X)(\mathbb{C})$$

par : pour tous $x \in X$ et $h \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$T_g(\mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x, h\mathrm{K}')) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}).(x, hg\mathrm{K}).$$

Si Γ, Γ' sont deux sous-groupes arithmétiques de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ est tel que $\Gamma' \subset \gamma\Gamma\gamma^{-1}$, on définit une application analytique finie étale

$$T_\gamma : \Gamma' \setminus X \longrightarrow \Gamma \setminus X$$

par : pour tout $x \in X$,

$$T_\gamma(\Gamma'.x) = \Gamma.\gamma^{-1}x.$$

1.2 Données de Shimura pour certains groupes unitaires

Notation 1.2.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$$

et

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

On note $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ le tore de Serre.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p + q = n$ et $p \geqslant q$. On note $J_{p,q}$ ou simplement J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_q \\ 0 & I_{p-q} & 0 \\ J_q & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

Soit $E = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ($d \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré) une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, dont l'automorphisme non trivial, qui est la conjugaison complexe, sera noté $\overline{}$; on fixe une fois pour toutes des injections $E \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ pour tout nombre premier p. On s'intéresse au groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(p, q)$, dont les points à valeurs dans une $\mathbb{Q}$-algèbre A sont donnés par

$$\mathbf{G}(A) = \{g \in \mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} A), g^* J g = c(g) J, c(g) \in A^\times\},$$

avec, si $g \in \mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} A)$, $g^* = {}^t\overline{g}$. Si $q = 0$, on note aussi $\mathbf{GU}(p) = \mathbf{GU}(p, q)$.

On a des morphismes de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$:

$$c : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{G}_m \text{ et } det : \mathbf{G} \longrightarrow Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m.$$

On utilisera aussi les groupes $\mathbf{U}(p, q) = Ker(c)$ et $\mathbf{SU}(p, q) = Ker(c) \cap Ker(det)$.

Les groupes $\mathbf{GU}(p, q)$ et $\mathbf{U}(p, q)$ sont réductifs, et $\mathbf{SU}(p, q)$ est semi-simple.

Fait 1.2.2

(1) Le groupe $\mathbf{G}$ est connexe. Le $\mathbb{Q}$-rang semi-simple et le $\mathbb{R}$-rang semi-simple de $\mathbf{G}$ sont tous les deux égaux à q.

(2) Si $p > q$, $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est connexe. Si $p = q$, $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, $\mathbf{G}(\mathbb{R})^+ = c^{-1}(\mathbb{R}^{+\times})$ et $\mathbf{G}(\mathbb{R})^- = c^{-1}(\mathbb{R}^{-\times})$.

(3) Le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est $\mathbf{G}^{der} = \mathbf{SU}(p, q)$. Il est simplement connexe.

(4) Le quotient $\mathbf{G}/\mathbf{G}^{der}$ est isomorphe au tore

$$\mathbf{H} = \{(x, \lambda), x\overline{x} = \lambda^n\} \subset Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m.$$

Introduisons l'espace symétrique $\mathcal{X}$ de $\mathbf{G}$. Pour cela, on a besoin d'un certain sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, qu'il est plus facile d'écrire pour un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ conjugué à $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soit donc

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

et

$$\widetilde{G} = \mathrm{GU}(\widetilde{J}) = \{g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), g^*\widetilde{J}g = c(g)\widetilde{J}, c(g) \in \mathbb{R}^\times\}.$$

Soit

$$u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}I_q & 0 & 1/\sqrt{2}J_q \\ 0 & I_{p-q} & 0 \\ 1/\sqrt{2}J_q & 0 & -1/\sqrt{2}I_q \end{pmatrix}.$$

Alors $u = u^* = u^{-1}$ et et $\widetilde{J} = uJu^{-1}$, donc $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \simeq \widetilde{\mathbb{G}}$ par $\varphi : g \longmapsto ugu$.

On note $\widetilde{\mathrm{K}}_\infty$ le sous-groupe compact maximal de $\widetilde{\mathbb{G}}$ défini par

$$\widetilde{\mathrm{K}}_\infty = \mathbf{U}(p,0)(\mathbb{R}) \times \mathbf{U}(0,q)(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, A \in \mathbf{U}(p)(\mathbb{R}), B \in \mathbf{U}(q)(\mathbb{R}) \right\}.$$

$K_\infty = \varphi^{-1}(\widetilde{\mathrm{K}}_\infty)$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soient $\mathbf{S} = \mathbb{G}_m I_n$ le centre déployé de $\mathbf{G}$ et $\mathrm{A} = \mathbf{S}(\mathbb{R})^\circ = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}^{+\times}\}$. On pose

$$\mathcal{X} = \mathbf{G}(\mathbb{R})/\mathrm{AK}_\infty \text{ et } x_0 = \mathrm{AK}_\infty \in \mathcal{X}.$$

Comme $\mathrm{AK}_\infty \subset \mathbf{G}(\mathbb{R})^\circ$, on a $\pi_0(\mathcal{X}) = \pi_0(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire que $\mathcal{X}$ est connexe si $p > q$ et que, si $p = q$, $\mathcal{X}$ a deux composantes connexes (isomorphes) $\mathcal{X}^+ = \mathbf{G}(\mathbb{R})^+/\mathrm{AK}_\infty$ et $\mathcal{X}^- = \mathbf{G}(\mathbb{R})^-/\mathrm{AK}_\infty$.

On veut définir une application $\mathbf{G}(\mathbb{R})$-équivariante $h : \mathcal{X} \longrightarrow Hom(\mathbb{S}, \mathbf{G}_\mathbb{R})$. Comme $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathcal{X}$, il suffit de se donner $h_0 = h(x_0) : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_\mathbb{R}$ tel que $h_0(\mathbf{S}(\mathbb{R}))$ soit dans le centralisateur de AK_∞. On prend

$$h_0 : \begin{cases} \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbf{G}_\mathbb{R} \\ z = a + ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} aI_q & 0 & ibJ_q \\ 0 & zI_{p-q} & 0 \\ ibJ_q & 0 & aI_q \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Si $\widetilde{h}_0 = \varphi \circ h_0$, on a

$$\widetilde{h}_0(z) = \begin{pmatrix} zI_p & 0 \\ 0 & \overline{z}I_q \end{pmatrix}.$$

On suppose désormais que $q \geqslant 1$ ou $q = 0$ et $p = 1$ (si $p \geqslant 2$, $\mathbf{GU}(p)$ ne peut pas être le groupe d'une donnée de Shimura, car il est de type compact modulo son centre).

Fait 1.2.3 $(\mathbf{G}, \mathcal{X}, h)$ *est une donnée de Shimura pure (cf [P1] 2.1).*

Si K est un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, l'ensemble des points complexes de la variété de Shimura associée est

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

Proposition 1.2.4 *([P1] 3.3) $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$ a une structure canonique d'espace complexe normal. Si de plus* K *est net (cf [P1] 0.6), $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$ est une variété analytique complexe.*

1.3 Sous-groupes paraboliques de $\mathbf{GU}(p,q)$

On note $E_{ij} \in M_n(\mathbb{Z})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, les matrices élémentaires : pour tous $k,l \in \{1,\dots,n\}$, $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Un tore maximal de $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(p,q)$ est le tore $\mathbf{T}$ tel que

$$\mathbf{T}(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1,\dots,\lambda_n \in E^\times, \lambda_1\overline{\lambda_n} = \cdots = \lambda_q\overline{\lambda_{p+1}} = \lambda_{q+1}\overline{\lambda_{q+1}} = \cdots = \lambda_p\overline{\lambda_p} \in \mathbb{Q}^\times \right\}.$$

Le sous-tore déployé maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{T}$ vérifie

$$\mathbf{S}(\mathbb{Q}) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p-q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \lambda, \lambda_1,\dots,\lambda_q \in \mathbb{Q}^\times \right\}.$$

Un parabolique minimal contenant $\mathbf{S}$ est le groupe $\mathbf{P}$ dont les $\mathbb{Q}$-points sont

$$\mathbf{P}(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, A, C \in \mathbf{B}_q(E), B \in \mathbf{GL}_{p-q}(E) \right\} \cap \mathbf{GU}(p,q)(\mathbb{Q}),$$

où $\mathbf{B}_q \subset \mathbf{GL}_q$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures.

On dit qu'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ est *standard* s'il contient $\mathbf{P}$. On sait qu'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ est conjugué par $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ à un unique sous-groupe parabolique standard, donc il suffit de décrire les sous-groupes paraboliques standard. Il sont indexés par les sous-ensembles $I \subset \{1,\dots,q\}$ de la manière suivante.

Soit $I \subset \{1,\dots,q\}$. On écrit

$$I - \{q\} = \{q_1,\dots,q_1+\dots q_{r-1}\}$$

et on note $q_r = q - (q_1 + \cdots + q_{r-1})$. On pose

$$\mathbf{P}_I = \begin{pmatrix} R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_{q_1} & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \mathbf{GU}(q_r,q_r) & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_{q_1} \end{pmatrix} \cap \mathbf{GU}(q,q).$$

En particulier, les sous-groupes paraboliques maximaux standard de $\mathbf{GU}(p,q)$ sont les

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_{\{r\}} = \begin{pmatrix} R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_r & * & * \\ 0 & \mathbf{GU}(p-r,q-r) & * \\ 0 & 0 & R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_r \end{pmatrix} \cap \mathbf{GU}(p,q)$$

pour $r \in \{1,\ldots,q\}$.

1.4 Compactification de Baily-Borel

1.4.1 Description

Soit $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ la donnée de Shimura pure de la section 1.2.

On obtient la compactification de Baily-Borel des $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$ en ajoutant à $\mathcal{X}$ des composantes rationnelles de bord, indexées par les sous-groupes paraboliques maximaux de $\mathbf{G}$, pour former une compactification partielle $\mathcal{X}^*$, en étendant l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ à $\mathcal{X}^*$ et en faisant le double quotient

$$\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X}^* \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

On suit ici [P1] chapitres 4 et 6 (dont les résultats reposent sur ceux de [AMRT]).

Dans [P1] 4.6, Pink introduit pour chaque sous-groupe parabolique maximal (admissible, mais ici ils le sont tous, car G^{ad} est simple) $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ un morphisme $\omega : \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}$ (noté $\omega \circ h_\infty$ par Pink).

La construction de ce morphisme repose sur celle du morphisme de Harish-Chandra $\mathbf{U}^1 \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})^q \longrightarrow \mathbf{G}^{ad}(\mathbb{R})$ de [AMRT] th 2 (ii) p 177-178. Le lemme suivant résulte facilement de la définition de ce morphisme.

Lemme 1.4.1.1 *Le morphisme de Harish-Chandra est l'image du morphisme* $\varphi : \mathbf{U}^1 \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\varphi\left(u, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_q & b_q \\ c_q & d_q \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 & & & & 0 & & ib_1 \\ & \ddots & & & 0 & & & \iddots & \\ 0 & & a_q & & & & ib_q & & 0 \\ & & & u & & 0 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & 0 & & u & & & \\ 0 & & -ic_q & & & & d_q & & 0 \\ & \iddots & & & 0 & & & \ddots & \\ -ic_1 & & 0 & & & & 0 & & d_1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 1.4.1.2 *Pour* $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r$, $1 \leqslant r \leqslant q$, *le morphisme* $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}$ *de [P1] 4.6, que l'on notera* ω_r, *associe à* $(z,z') = 1 \otimes x + i \otimes y \in \mathbb{S}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times$, *avec* $x = (z+z')/2$ *et*

$y = (z - z')/2i$, la matrice

$$\begin{pmatrix} ZI_r & 0 & 0 & 0 & (1\otimes 1 - Z)J_r \\ 0 & 1\otimes xI_{q-r} & 0 & i\otimes yJ_{q-r} & 0 \\ 0 & 0 & (1\otimes x + i\otimes y)I_{p-q} & 0 & 0 \\ 0 & i\otimes yJ_{q-r} & 0 & 1\otimes xI_{q-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}$$

où $Z = 1\otimes Re(zz') + i\otimes Im(zz')$.

Définition 1.4.1.3 *Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$, $\mathbf{N}$ son radical unipotent et $\mathbf{L} = \mathbf{P}/\mathbf{N}$ son quotient de Levi. La* partie hermitienne $\mathbf{L}_h$ *de $\mathbf{L}$ est le centralisateur dans $\mathbf{L}$ du centre $\mathbf{U}$ de $\mathbf{N}$ (pour l'action de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{U}$ déduite de l'action par conjugaison de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{N}$). Il existe un unique sous-groupe $\mathbf{L}_\ell$ de $\mathbf{L}$, appelé* partie linéaire *de $\mathbf{L}$, tel que $\mathbf{L}_h$ et $\mathbf{L}_\ell$ commutent, que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_h\mathbf{L}_\ell$ et que $\mathbf{L}_h(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}_\ell(\mathbb{R})$ soit fini (cf [AMRT] p 221-222).*

Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{N}$ son radical unipotent. Dans [P1] 4.7, Pink introduit le plus petit sous-groupe sous-groupe distingué $\mathbf{Q}_\mathbb{C}$ de $\mathbf{P}_\mathbb{C}$ qui est défini sur $\mathbb{Q}$ et contient l'image de ω (Pink note ce sous-groupe $\mathbf{P}_1$). $\mathbf{Q}$ contient $\mathbf{N}$ (d'après la preuve de [P1] 4.8), et $\mathbf{Q}/\mathbf{N}$ est, à un facteur de type compact près et au centre près, la partie hermitienne de $\mathbf{P}/\mathbf{L}$ (cf [AMRT] III.4.1). On peut sans rien changer agrandir le centre de $\mathbf{Q}/\mathbf{N}$ (cf la remarque (ii) de [P1] 4.11). On utilisera donc la définition suivante de $\mathbf{Q}$:

Définition 1.4.1.4 *Soit $r \in \{1, \ldots, q\}$. Si $r < q$ on pose*

$$\mathbf{Q}_r = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_r & * & * \\ 0 & D & * \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}, D \in \mathbf{GU}(p-r, q-r), \lambda = c(D) \right\},$$

et, si $r = q$,

$$\mathbf{Q}_q = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\overline{\lambda} I_q & * & * \\ 0 & \lambda I_{p-q} & * \\ 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}, \lambda \in E^* \right\}.$$

Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$. Il existe $g \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et $r \in \{1, \ldots, q\}$ tels que $\mathbf{P} = g\mathbf{P}_r g^{-1}$. On pose alors $\mathbf{Q} = g\mathbf{Q}_r g^{-1}$ (cette définition ne dépend pas de g, car $\mathbf{Q}_r$ est distingué dans $\mathbf{P}_r$).

Soit $r \in \{1, \ldots, q\}$. On note $\mathbf{N}_r$ le radical unipotent de $\mathbf{P}_r$ (qui est aussi celui de $\mathbf{Q}_r$) et $\mathbf{U}_r$ le centre de $\mathbf{N}_r$. Construisons l'espace principal homogène sous $\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})\mathbf{U}_r(\mathbb{C})$ de [P1] 4.11. On considère l'application $\mathbf{P}_r(\mathbb{R})$-équivariante

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X} = \mathbf{P}_r(\mathbb{R})/(\mathbf{P}_r(\mathbb{R}) \cap \mathrm{AK}_\infty) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{X}) \times Hom(\mathbb{S}_\mathbb{C}, \mathbf{Q}_{r,\mathbb{C}}) \\ x = g(\mathbf{P}_r(\mathbb{R}) \cap \mathrm{AK}_\infty) & \longmapsto & ([x], int(g) \circ \omega_r) \end{array}.$$

L'image de cette application est contenue dans une $\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})\mathbf{U}_r(\mathbb{C})$-orbite ($\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})\mathbf{U}_r(\mathbb{C})$ agit sur $\pi_0(\mathcal{X})$ par $\pi_0(\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})\mathbf{U}_r(\mathbb{C})) = \pi_0(\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_0(\mathbf{P}_r(\mathbb{R})))$, qu'on note $\mathcal{Y}_r$. On note h_r :

$\mathcal{Y}_r \longrightarrow Hom(\mathbb{S}_c, \mathbf{Q}_{r,\mathbb{C}})$ la deuxième projection.

Proposition 1.4.1.5 *([P1] 4.11) $(\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r, h_r)$ est une donnée de Shimura mixte (cf [P1] 2.1).*

$(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) = (\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r)/\mathbf{N}_r$ (cf [P1] 2.9 pour la définition du quotient) est donc une donnée de Shimura pure. Si $r < q$, elle est isomorphe à la donnée de la section 1.2 pour $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(p-r, q-r)$. Si $r = q$, elle est isomorphe à la donnée de la section 1.2 pour $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(1) = R_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$.

Définition 1.4.1.6 *Si $1 \leqslant r < q$, on note $\mathbf{G}'_r = \mathbf{G}_r$. Pour $r = q$, on note*

$$\mathbf{G}'_q = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_q & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}, D \in \mathbf{GU}(p-q), \lambda = c(D) \right\}.$$

On voit $\mathbf{G}'_q$ comme un sous-groupe de $\mathbf{P}_q/\mathbf{N}_q$; $\mathbf{G}_q$ est alors le centre de $\mathbf{G}'_q$, et $\mathbf{G}'_q/\mathbf{G}_q$ est de type compact.

Si $\mathbf{P}$ est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$ de radical unipotent $\mathbf{N}$, il est conjugué à l'un des $\mathbf{P}_r$, donc on peut aussi lui associer une donnée de Shimura mixte $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ et une donnée de Shimura pure $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})/\mathbf{N}$.

Définition 1.4.1.7 *([P1] 4.11) Une* composante rationnelle de bord *de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est une donnée de Shimura mixte $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ associée à un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$.*

Définition 1.4.1.8 *On pose*

$$\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \sqcup \coprod_{(\mathbf{Q},\mathcal{Y})} \mathcal{Y}/\mathbf{N},$$

où la somme est sur l'ensemble des composantes rationnelles de bord de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ et, si $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ est une telle composante, $\mathbf{N}$ est le radical unipotent de $\mathbf{Q}$ et $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})/\mathbf{N} = (\mathbf{Q}/\mathbf{N}, \mathcal{Y}/\mathbf{N})$.

On munit $\mathcal{X}^*$ de la topologie de Satake (cf [P1] 6.2).

Remarque 1.4.1.9 Si $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ et $(\mathbf{Q}', \mathcal{Y}')$ sont deux composantes de bord, et si on note $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ les sous-ensembles correspondants de $\mathcal{X}^*$, il résulte immédiatement de la définition de la topologie dans [P1] 6.2 que $\mathcal{Z}' \subset \overline{\mathcal{Z}}$ si et seulement si $\mathbf{Q}' \subset \mathbf{Q}$.

Définition 1.4.1.10 *Soit K un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. La compactification de Baily-Borel de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est*

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X}^* \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

Elle a naturellement une stratification par des espaces localement symétriques (isomorphes à des $\Gamma \setminus \mathcal{X}_r$, avec Γ un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{G}_r(\mathbb{Q})$).

Théorème 1.4.1.11 *([P1] 6.2, [BB] th 10.4) Il existe une unique structure d'espace analytique complexe normal compact sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ dont la restriction à une strate isomorphe à $\Gamma \setminus \mathcal{X}_r$ est la structure complexe induite par celle de $\mathcal{X}_r$.*

De plus :

Proposition 1.4.1.12 *([P1] 6.2) Soient* K', K *des sous-groupes compacts ouverts de* $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ *et* $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ *tels que* $\mathrm{K}' \subset g\mathrm{K}g^{-1}$. *Le morphisme*

$$T_g : M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$$

se prolonge par continuité en une application holomorphe finie

$$M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}),$$

qu'on notera $\overline{T}_g$.

1.4.2 Stratification du bord

Décrivons, en suivant [P2] 3.7, une stratification du bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$.

Les $(\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r)$, $1 \leqslant r \leqslant q$, forment un ensemble de représentants des classes de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$-conjugaison de composantes de bord de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. Soient $r \in \{1, \ldots, q\}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Notons $\pi : \mathbf{P}_r \longrightarrow \mathbf{P}_r/\mathbf{N}_r = \mathbf{G}_r$ la projection, $\mathrm{K}_Q = \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \cap g\mathrm{K}g^{-1}$ et $\mathrm{K}_G = \pi(\mathrm{K}_Q)$. Le morphisme holomorphe $i_{r,g} : M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{M}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G}_r(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{X}_r \times (\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_G) & & [(x, \pi(h)] \\
\wr\uparrow & & \uparrow \\
\mathbf{Q}_r(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{X}_r \times (\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_Q) & & [(x, h)] \\
\wr\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{P}_r(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{X}_r \times (\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_Q) & & [(x, h)] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{X}^* \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}) & & [(x, hg)]
\end{array}$$

Notons $\mathrm{H}_P = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{H}_\ell = g\mathrm{K}g^{-1} \cap Cent_{\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})}(\mathcal{X}_r)\mathbf{N}(\mathbb{A}_f)$. On fait agir H_P sur $M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ par multiplication à droite sur le deuxième facteur dans la troisième ligne du diagramme ci-dessus. Les sous-groupes K_Q et H_ℓ de H_P agissent trivialement. Comme $\mathrm{H}_P/\mathrm{K}_Q\mathrm{H}_\ell$ est fini, $i_{r,g}$ est fini sur son image.

Lemme 1.4.2.1 *([P2] (3.7))*

(i) $i_{r,g}$ *induit une immersion localement fermée* $M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})/\mathrm{H}_P \longrightarrow M^K(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$.

(ii) Si K *est net, le groupe fini* $\mathrm{H}_P/\mathrm{K}_Q\mathrm{H}_\ell$ *agit librement sur* $M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$.

Remarque 1.4.2.2 Si K est net, $\mathrm{H}_P/\mathrm{K}_Q$ est un sous-groupe arithmétique net de $(\mathbf{P}_r/\mathbf{Q}_r)(\mathbb{Q})$. Or, si $r = 1$, tous les sous-groupes arithmétiques de $(\mathbf{P}_r/\mathbf{Q}_r)(\mathbb{Q})$ sont finis ; donc dans ce cas on a $\mathrm{K}_Q = \mathrm{H}_P$, et le morphisme $i_{r,g}$ est une immersion localement fermée.

Les images des morphismes $i_{r,g}$ forment une partition du bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*(\mathbb{C})$, et les images de $i_{r,g}$ et $i_{r,g'}$ sont les mêmes si et seulement si $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g\mathrm{K} = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g'\mathrm{K}$.

On a donc obtenu une stratification du bord de la compactification de Baily-Borel par des quotients de variétés de Shimura par des groupes finis.

On peut réécrire d'une manière un peu plus simple les définitions de H_P et H_ℓ. On pose, pour $1 \leqslant r \leqslant q-1$,

$$\mathbf{L}_{\ell,r} = \mathbf{L}'_{\ell,r} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{L}'_{\ell,q} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-2q} & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{\ell,q} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{SU}(p-q) & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(les blocs diagonaux sont carrés de tailles $r, n-2r, r$ resp. $q, n-2q, q$). Le groupe $\mathbf{L}'_{\ell,r}$ est, au centre près, la partie linéaire de $\mathbf{L}_r$ (cf la définition 1.4.1.3).

$\mathbf{L}_r$ est produit direct de $\mathbf{L}'_{\ell,r}$ et de $\mathbf{G}'_r$, et produit quasi-direct de $\mathbf{L}_{\ell,r}$ et de $\mathbf{G}_r$. Si $1 \leqslant r \leqslant q-1$, on a $\mathbf{L}_{\ell,r} = \mathbf{L}'_{\ell,r}$ et de $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}'_r$, et $\mathbf{L}_r$ est simplement produit direct de ces deux sous-groupes.

Lemme 1.4.2.3 *Soient* $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique maximal de* $\mathbf{G}$ *et* $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. $\mathbf{P}$ *est conjugué à un unique* $\mathbf{P}_r$. *On note* $\mathbf{N}$ *le radical unipotent de* $\mathbf{P}$, $\mathbf{L} = \mathbf{P}/\mathbf{N}$ *le quotient de Levi,* $\mathbf{Q}$ *le sous-groupe distingué défini par Pink (cf plus haut),* $\mathbf{L}_\ell, \mathbf{L}'_\ell$ *les sous-groupes de* $\mathbf{L}$ *obtenus à partir de* $\mathbf{L}_{\ell,r}, \mathbf{L}'_{\ell,r}$ *par conjugaison,* $\mathcal{Z}$ *la composante de bord de* $\mathcal{X}^*$ *associée à* $\mathbf{P}$,

$$\mathrm{H}_P = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{H}_\ell = g\mathrm{K}g^{-1} \cap Cent_{\mathbf{P}(\mathbb{Q})}(\mathcal{Z})\mathbf{N}(\mathbb{A}_f).$$

Alors, si K *est net,*

(i) $\mathrm{H}_P = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{L}'_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{Q}(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{L}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{Q}(\mathbb{A}_f)$ *;*

(ii) $\mathrm{H}_\ell = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{L}'_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{L}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}(\mathbb{A}_f)$.

Démonstration. On se ramène par conjugaison au cas où $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r$. Supposons d'abord $r < q$. Alors $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q}) = \mathbf{L}_{\ell,r}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{Q})$ et $\mathbf{Q}_r(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, d'où (i) (on n'utilise pas dans ce cas la netteté de K). Prouvons (ii). L'image de H_ℓ par la projection $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathbf{L}_{\ell,r}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f) \simeq \mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe compact (pour la topologie induite par $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$) de $\mathbf{G}_r(\mathbb{Q})$, dont les éléments sont nets et agissent trivialement sur $\mathcal{X}_r$, donc c'est un sous-groupe du centre de $\mathbf{G}_r(\mathbb{Q})$; comme le centre de $\mathbf{G}_r$ est une extension d'un tore déployé par un tore de type compact, ce sous-groupe est trivial.

Traitons le cas $r = q$, et montrons les premières égalité de (i) et (ii). $\mathbf{G}'_q$ est isomorphe à $\mathbf{GU}(p-q)$, et $\mathbf{L}_q \simeq \mathbf{G}'_q \times \mathbf{L}'_{\ell,q}$. De plus, $\mathbf{G}_q$ est le centre de $\mathbf{G}'_q$. L'image de H_P par la projection $\mathbf{P}_q(\mathbb{A}_f) \longrightarrow (\mathbf{P}_q/\mathbf{L}_{\ell,q}\mathbf{Q}_q)(\mathbb{A}_f) \simeq (\mathbf{G}'_q/\mathbf{G}_q)(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe net de $(\mathbf{G}_q/\mathbf{G}'_q)(\mathbb{Q})$; comme $(\mathbf{G}_q/\mathbf{G}'_q)(\mathbb{R})$ est compact, cette image est triviale, d'où (i). Pour (ii), on remarque que $Cent_{\mathbf{P}_q(\mathbb{Q})}(\mathcal{X}_q) = \mathbf{P}_q(\mathbb{Q})$, donc l'image de H_ℓ dans $\mathbf{G}'_q(\mathbb{A}_f)$ est un sous-groupe arithmétique net de $\mathbf{G}'_q(\mathbb{Q})$, forcément trivial puisque $\mathbf{G}'_q \simeq \mathbf{GU}(p-q)$. Enfin, on peut remplacer $\mathbf{L}'_{\ell,q}(\mathbb{Q})$ par $\mathbf{L}_{\ell,q}(\mathbb{Q})$ dans (i) et (ii) car $\mathbf{L}_{\ell,q} = \mathbf{L}'_{\ell,q} \times \mathbf{SU}(p-q)$ (et K est net).

□

Enfin, on a :

Proposition 1.4.2.4 *([P1] 7.6) Le morphisme $i_{r,g} : M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ se prolonge en un morphisme fini holomorphe*

$$\overline{i_{r,g}} : M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)^*(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}),$$

dont l'image est l'adhérence de l'image de $i_{r,g}$.

1.4.3 Algébricité

On donne ici des résultats d'algébricité (sur $\mathbb{C}$) pour les variétés de Shimura et les compactifications de Baily-Borel.

Théorème 1.4.3.1 *([BB] th. 10.11, cf aussi [P1] 8.2) Soient $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ une donnée de Shimura pure, et K un sous-groupe compact ouvert net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Alors $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique complexe projective normale, qu'on notera $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*_{\mathbb{C}}$. De plus, les morphismes $\overline{T}_g$ du paragraphe précédent sont algébriques.*

Corollaire 1.4.3.2 *([P1] 9.24) Avec les même hypothèses, $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points sur $\mathbb{C}$ d'une variété algébrique complexe quasi-projective lisse, notée $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$, et les morphismes T_g définis plus haut sont algébriques, ainsi que l'immersion ouverte*

$$M^K(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}).$$

La limite projective $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ des $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ est un schéma séparé quasi-compact sur $\mathbb{C}$, sur lequel $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ agit continûment (à droite), et on a pour tout K

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}} = \mathbf{M}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}/\mathrm{K}.$$

Et enfin :

Proposition 1.4.3.3 *La stratification de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ définie plus haut est algébrique, c'est-à-dire que les morphismes $i_{r,g}$ sont algébriques (ce qui implique que les morphismes $\overline{i_{r,g}}$ le sont aussi).*

1.5 Combinatoire des strates de la compactification de Baily-Borel

Les résultats de ce paragraphe serviront dans la section 5.2.

Soit $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact net. Pour tout $I \subset \{1, \ldots, q\}$ non vide, soit

$$\mathbf{P}_I = \bigcap_{i \in I} \mathbf{P}_i,$$

et

$$\mathbf{N}_I = \prod_{i \in I} \mathbf{N}_i$$

le radical unipotent de $\mathbf{P}_I$. Les $\mathbf{P}_I$ sont les sous-groupes paraboliques standard de $\mathbf{G}$. Si $r = max(I)$, on a $\mathbf{Q}_r \subset \mathbf{P}_I \subset \mathbf{P}_r$, donc $\mathbf{P}_I/\mathbf{N}_r$ est produit quasi-direct de $\mathbf{G}_r$ et $\mathbf{P}_{\ell,I}$, avec $\mathbf{P}_{\ell,I}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}_{\ell,r}$. Si $r < q$, $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}'_r$, et $\mathbf{P}_I/\mathbf{N}_r$ est produit direct de $\mathbf{G}_r$ et $\mathbf{P}_{\ell,I}$; on note $\mathbf{P}'_{\ell,I} = \mathbf{P}_{\ell,I}$. Si $r = q$, $\mathbf{G}_q$ est le centre de $\mathbf{G}'_q \simeq \mathbf{GU}(p-q)$. $\mathbf{P}_I/\mathbf{N}_q$ s'écrit $\mathbf{P}'_{\ell,I} \times \mathbf{G}'_q$, avec $\mathbf{P}'_{\ell,I}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}'_{\ell,q}$, et on a $\mathbf{P}_{\ell,I} = \mathbf{P}'_{\ell,I} \times \mathbf{SU}(p-q)$.

Pour tous $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $r \in \{1, \ldots, q\}$ et $I \subset \{1, \ldots, q\}$ non vide, on note

$$\mathrm{K}_{g,r} = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))$$

$$\mathrm{H}_{g,I} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{max(I)}(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}'_{\ell,I}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{max(I)}(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{K}_{g,I} = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{max(I)}(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_{\ell,I}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_{max(I)}(\mathbb{A}_f)).$$

Si $r = max(I)$, $\mathrm{K}_{g,r} \subset \mathrm{K}_{g,I}$ s'identifient à des sous-groupes compacts ouverts nets de $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$.

Pour tous $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $r \in \{1, \ldots, q\}$, on a défini dans 1.4.2 un morphisme holomorphe fini sur son image $i : M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$. L'image de ce morphisme est un sous-espace localement fermé de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$, qui s'identifie à $M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$. De plus, $M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ et $M^{\mathrm{K}_{h,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ ont la même image dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ si et seulement si $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g\mathrm{K} = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h\mathrm{K}$. Si $I \subset \{1, \ldots, q\}$ et $r = max(I)$, on a aussi un morphisme holomorphe fini sur son image $M^{\mathrm{K}_{g,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$, le composé du revêtement étale fini $T_1 : M^{\mathrm{K}_{g,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ et de l'immersion localement fermée $M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$. Tous ces morphismes se prolongent aux compactifications de Baily-Borel, et ces prolongements sont des morphismes finis.

Notation 1.5.1 *Soient $g, h \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $I \subset J \subset \{1, \ldots, q\}$ non vides tels que $max(I) = max(J) = r$. Si $a \in \mathbf{L}'_{\ell,r}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ est tel que $\mathrm{H}_{g,J} \subset a\mathrm{H}_{h,I}a^{-1}$, alors la réduction modulo $(\mathbf{P}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f)$ de a, $\overline{a} \in \mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$, vérifie $\mathrm{K}_{g,J} \subset \overline{a}\mathrm{K}_{h,I}\overline{a}^{-1}$, donc on a un morphisme*

$$T_{\overline{a}} : M^{\mathrm{K}_{g,J}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}_{h,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}).$$

On notera aussi T_a ce morphisme.

On fixe $a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $I \subset \{1, \ldots, q\}$ non vide et $s > r = max(I)$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des diagrammes commutatifs $D_{b,q,g,h,c}$

$$\begin{tikzcd}
M^{\mathrm{K}_{hg,I\cup\{s\}}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{C}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "T_c"'] & M^{\mathrm{K}_{g,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)^*(\mathbb{C}) & M^{\mathrm{K}_{g,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "T_q"] & \\
M^{\mathrm{K}_{a,\{s\}}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{C}) & & M^{\mathrm{K}_{b,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \arrow[r, hook] & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*
\end{tikzcd}$$

avec $b, g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $q, h \in \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ et $c \in \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)$ tels que $g \in bq\mathrm{K}$ et $hg \in ca\mathrm{K}$. On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'équivalence suivante : $D_{b,q,g,h,c} \sim D_{b',q',g',h',c'}$ si et seulement si

(i) $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)b\mathrm{K} = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)b'\mathrm{K}$;

(ii) $\mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g\mathrm{K} = \mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g'\mathrm{K}$;

(iii) $\mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)hg\mathrm{K} = \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)hg\mathrm{K}$.

La condition (i) signifie que $M^{\mathrm{K}_{b,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ et $M^{\mathrm{K}_{b',\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ ont la même image dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, la condition (ii), qui se réécrit

$$\mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)q\mathrm{H}_{b,\{r\}} = \mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)q'\mathrm{H}_{b,\{s\}},$$

implique que l'isomorphisme $M^{\mathrm{K}_{b,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \simeq M^{\mathrm{K}_{b',\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)(\mathbb{C})$ donné par (i) se relève (et se prolonge) en un isomorphisme $T_\gamma : M^{\mathrm{K}_{g,I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)^*(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{K}_{g',I}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)^*(\mathbb{C})$, avec $\gamma \in \mathbf{P}_I(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, et la condition (iii) que, modulo cet isomorphisme, les images de $M^{\mathrm{K}_{hg,I\cup\{s\}}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{C})$ et $M^{\mathrm{K}_{h'g',I\cup\{s\}}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{C})$ sont les mêmes. Remarquons enfin que la condition (iii) implique les conditions (i) et (ii), et que, pour tout $D_{b,q,g,h,c} \in \mathcal{E}$, on a

$$D_{b,q,g,h,c} \sim D_{ca,1,ca,1,c}.$$

Proposition 1.5.2 *Considérons l'application Φ qui à un élément $D_{b,q,g,h,c} \in \mathcal{E}$ associe la classe de $c \in \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)$ dans*

$$\mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{a,\{s\}}.$$

Alors Φ passe au quotient par $\sim$ et donne une bijection

$$\mathcal{E}/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{a,\{s\}}.$$

Démonstration. Soient $D = D_{b,q,g,h,c}, D' = D_{b',q',g',h',c'} \in \mathcal{E}$. Supposons que $D \sim D'$, et montrons que $\Phi(D) = \Phi(D')$. Soient $k, k', l \in \mathrm{K}$ et $\gamma \in \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)$ tels que $hg = cak$, $h'g' = c'ak'$ et $\gamma hgl = h'g'$. Alors

$$c = hgk^{-1}a^{-1} = \gamma^{-1}h'g'l^{-1}k^{-1}a^{-1} = \gamma^{-1}c'ak'l^{-1}l^{-1}a^{-1},$$

avec $\gamma^{-1} \in \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)$ et $ak'lk^{-1}a^{-1} = p'^{-1}\gamma p \in (a\mathrm{K}a^{-1} \cap \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)) = \mathrm{H}_{a,\{s\}}$, donc $\Phi(D) = \Phi(D')$.

Supposons maintenant que $\Phi(D) = \Phi(D')$, et montrons que $D \sim D'$. Grâce au calcul qu'on vient de faire, on peut remplacer D et D' par des diagrammes équivalents. D'après la remarque qui précède l'énoncé de la proposition, on peut supposer que $q = q' = h = h' = 1$, $b = g = ca$ et $b' = g' = c'a$. $\Phi(D) = \Phi(D')$ s'écrit

$$\mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)c(a\mathrm{K}a^{-1} \cap \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)) = \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)c'(a\mathrm{K}a^{-1} \cap \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)),$$

et ceci implique évidemment que

$$\mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)caK = \mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)c'a\mathrm{K},$$

c'est-à-dire que $D \sim D'$.

Enfin, pour tout $c \in \mathbf{L}'_{\ell,s}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)$, la classe de c dans $\mathbf{P}_{I\cup\{s\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)\backslash\mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{a,\{s\}}$ est l'image par Φ de $D_{ca,1,ca,1,c} \in \mathcal{E}$, donc Φ est surjective.

□

1.6 Modèles canoniques

On renvoie à [P1] chapitre 11 et à [D] pour la théorie générale des modèles canoniques. On s'intéressera ici à la donnée de Shimura $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ définie dans la section 1.2, c'est-à-dire que $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(p, q)$.

1.6.1 Variété de Shimura

Soit K un sous-groupe ouvert compact net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. La théorie des modèles canoniques assure l'existence d'un modèle de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ sur un corps de nombres F appelé corps reflex de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, c'est-à-dire d'une variété algébrique normale quasi-projective $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ sur F telle que $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \otimes_F \mathbb{C} \simeq M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ (vérifiant aussi d'autres propriétés). De plus, tous les morphismes T_g de la section 1.1 sont définis sur F.

Corps reflex et loi de réciprocité

Fait 1.6.1.1 *([D1] 2.6, [P1] 11.1) Soit $r : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}_C$ le morphisme qui à $z \in \mathbb{C}^\times$ associe*

$$(z, 1) = 1 \otimes \frac{z+1}{2} + i \otimes \frac{z-1}{2i} \in \mathbb{S}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times.$$

Le corps reflex de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, qu'on notera F, est le corps de définition de la classe de conjugaison de

$$h_0 r : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}.$$

Lemme 1.6.1.2 *Le corps de reflex de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est E si $p > q$, $\mathbb{Q}$ si $p = q$.*

Démonstration. On écrit comme avant $E = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$, avec d un entier positif sans facteur carré. On a, si $z \in \mathbb{C}^\times$,

$$h_0r(z) = \begin{pmatrix} 1 \otimes \frac{z+1}{2} I_q & 0 & i\sqrt{d} \otimes \frac{z-1}{2i\sqrt{d}} J_q \\ 0 & \left(1 \otimes \frac{z+1}{2} + i\sqrt{d} \otimes \frac{z-1}{2i\sqrt{d}}\right) I_{p-q} & 0 \\ i\sqrt{d} \otimes \frac{z-1}{2i\sqrt{d}} J_q & 0 & 1 \otimes \frac{z+1}{2} I_q \end{pmatrix} \in \mathbf{G}(\mathbb{C}).$$

On cherche le plus petit sous-corps F de $\mathbb{C}$ tel que $h_0r(\mathbb{Q}^\times)$ soit conjugué dans $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q})$.

Déjà, on a $h_0r(\mathbb{Q}^\times) \subset \mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} E)$, donc $F \subset E$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{Q}^\times$, on a

$$Tr(h_0r(z)) = n\left(1 \otimes \frac{z+1}{2}\right) + (p-q)\left(i\sqrt{d} \otimes \frac{z-1}{2i\sqrt{d}}\right),$$

et $(z-1)/2i\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ si $z \neq 1$, donc, si $p > q$, $h_0r(\mathbb{Q}^\times)$ ne peut pas être conjugué dans $\mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q})$, donc $F \neq \mathbb{Q}$, et finalement $F = E$.

Supposons maintenant $p = q$. On a

$$h_0r(z) = 1 \otimes \frac{z+1}{2} I_n + i\sqrt{d} \otimes \frac{z-1}{2i\sqrt{d}} J_n.$$

J_n est conjugué dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ à

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & iJ_q \\ -iJ_q & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le morphisme $\mathbf{GU}(p,q)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, $1 \otimes X + i\sqrt{d} \otimes Y \longmapsto X + i\sqrt{d}Y$, induit un isomorphisme $\mathbf{U}(p,q)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $g \in \mathbf{U}(p,q)(\mathbb{C})$ tel que l'image de $J'' = g(i\sqrt{d} \otimes (1/i\sqrt{d})J_n)g^{-1}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ soit J'. De plus, on a $c(J'') = c(i\sqrt{d} \otimes (1/i\sqrt{d})J_n) = -1$. Soit

$$J''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \otimes iJ_q \\ -1 \otimes iJ_q & 0 \end{pmatrix}.$$

$J''' \in \mathbf{GU}(p,q)(\mathbb{C})$, l'image de J''' dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est J', et $c(J''') = -1$, donc $J'' = J'''$. On a donc montré que pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$,

$$gh_0r(z)g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \otimes \frac{1+z}{2} I_q & 1 \otimes \frac{z-1}{2} J_q \\ 1 \otimes \frac{1-z}{2} J_q & 1 \otimes \frac{1+z}{2} I_q \end{pmatrix},$$

donc $h_0r(\mathbb{Q}^\times)$ est conjugué dans $\mathbf{GU}(p,q)(\mathbb{C})$ à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$, et le corps reflex est $\mathbb{Q}$. $\square$

Comme $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est l'ensemble des points complexes d'une variété définie sur F, le groupe $Gal(\overline{F}/F)$ agit sur $\pi_0(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}))$. On va calculer cette action.

Soit $\mathbf{H} = \mathbf{G}/\mathbf{G}^{der}$. On note $\kappa : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{H}$ la projection.

Proposition 1.6.1.3 *([D] 3.3.2) L'application, induite par κ,*

$$\pi_0(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})) \longrightarrow \pi_0(\mathbf{H}(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{H}(\mathbb{A})/\kappa(\mathrm{K}))/\kappa(\mathrm{AK}_\infty)$$

est bijective.

L'action de $Gal(\overline{F}/F)$ sur $\pi_0(\mathbf{H}(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{H}(\mathbb{A})/\kappa(\mathrm{K}))/\kappa(\mathrm{AK}_\infty)$ se factorise par $Gal(\overline{F}^{ab}/F)$ ([D] 2.4). On identifie $Gal(\overline{F}^{ab}/F)$ à $\pi_0(F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times)$ par l'isomorphisme du corps de classes, avec la convention suivante ([P1] 11.3) : Si v est une place non archimédienne de F, ϖ_v est une uniformisante de F_v et F' est une extension abélienne de F non ramifiée en v, alors le morphisme

$$\pi_0(F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times) \xrightarrow{\sim} Gal(\overline{F}^{ab}/F) \longrightarrow Gal(F'/F)$$

envoie la composante de l'idèle $(\dots, 1, \varpi_v, 1, \dots)$ sur le Frobenius arithmétique en v.

Proposition 1.6.1.4 *([D] 2.4, 2.5, 2.6) L'action de $Gal(\overline{F}^{ab}/F) \simeq \pi_0(F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times)$ sur $\pi_0(\mathbf{H}(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{H}(\mathbb{A})/\kappa(\mathrm{K}))/\kappa(\mathrm{AK}_\infty)$ provient d'un morphisme de groupes algébriques*

$$\lambda : Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{H},$$

appelé morphisme de réciprocité, et donné par la règle suivante : si $r' : \mathbb{G}_{m,F} \longrightarrow \mathbf{H}_F$ est le morphisme $\kappa h_0 r$ (quitte à changer de point base, ce morphisme est défini sur F), λ est le composé de

$$Res_{F/\mathbb{Q}}(r') : Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{H}_F$$

et de la norme de $\mathbf{H}$

$$Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{H}_F \longrightarrow \mathbf{H}.$$

Lemme 1.6.1.5 *On a*

$$\mathbf{H} \simeq \{(x, \lambda), x\overline{x} = \lambda^n\} \subset Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m,$$

et

$$\lambda(z) = (z^p \overline{z}^q, z\overline{z}).$$

Corollaire 1.6.1.6 *On note $\lambda' : Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}$ l'application qui envoie z sur*

$$\begin{pmatrix} z\overline{z}I_q & 0 & 0 \\ 0 & zI_{p-q} & 0 \\ 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Comme $\lambda = \kappa\lambda'$, l'action de $Gal(\overline{F}^{ab}/F) \simeq \pi_0(F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times)$ sur $\pi_0(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}))$ est induite par l'action de $Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ sur $\mathbf{G}$ donnée par la multiplication à gauche par λ'.

Le système projectif

On a dit que les T_g étaient définis sur F. En particulier, pour $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$, on a

$$T_1 : M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}).$$

Le système projectif des $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est donc défini sur F, et on note $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ sa limite projective. C'est un F-schéma séparé quasi-compact, sur lequel $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ agit continûment.

Fait 1.6.1.7 *([P2] 3.4) Si* $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$ *un sous-groupe ouvert distingué, alors*

$$T_1 : M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$$

est un recouvrement étale galoisien fini de groupe K/K'.

En conséquence,

$$M(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$$

est un recouvrement étale galoisien profini de groupe K.

1.6.2 Compactification de Baily-Borel

Théorème 1.6.2.1 *([P1] 12.3, [P2] 3.7.2)*

(1) $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*_{\mathbb{C}}$ *a un modèle* $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ *sur* F*, les* $\overline{T}_g$ *sont définis sur ces modèles et on a la propriété suivante :*

(2) Soit $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ *une composante rationnelle de bord de* $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ *et* $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$*. On note* $\mathbf{N}$ *le radical unipotent de* $\mathbf{Q}$*,* $(\mathbf{G}', \mathcal{Z}) = (\mathbf{Q}, \mathcal{Y})/\mathbf{N}$*,* $\mathrm{K}_Q = \mathbf{Q}(\mathbb{A}_f) \cap g\mathrm{K}g^{-1}$*,* K_G *l'image de* K_Q *dans* $\mathbf{G}'(\mathbb{A}_f)$*. Alors le corps reflex de* $(\mathbf{G}', \mathcal{Z})$ *est celui de* $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$*, c'est-à-dire* F*, et le morphisme (fini sur son image)*

$$M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}', \mathcal{Z})(\mathbb{C}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$$

de 1.4.2 vient d'un unique morphisme des modèles canoniques.

Proposition 1.6.2.2 *([P2] 3.8) Soit* $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$ *un sous-groupe ouvert distingué.* K *agit à droite sur* $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ *(par les morphismes* T_g*), et le quotient est*

$$M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*/\mathrm{K} = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*.$$

Corollaire 1.6.2.3 *On note* $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ *la limite projective sur* K *des* $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$*. Le morphisme*

$$M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^* \longrightarrow M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*/\mathrm{K} \simeq M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$$

est un K*-recouvrement (au sens de [P2] 1.7). La limite projective des morphismes*

$$M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}', \mathcal{Z}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_*$$

est une immersion (localement fermée)

$$M(\mathbf{G}', \mathcal{Z}) \longrightarrow M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*.$$

2 Systèmes de coefficients et leurs prolongements à la compactification de Baily-Borel, d'après Pink

2.1 Variété de Shimura

2.1.1 Systèmes locaux sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$

Espaces localement symétriques

Soient $\mathbf{G}$ un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$ et X un espace symétrique de $\mathbf{G}$. On note comme avant $\mathbf{S}$ le centre déployé de $\mathbf{G}$ et $A = \mathbf{S}(\mathbb{R})^\circ$.

Soit Γ un sous-groupe arithmétique net de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$. Pour tout Γ-module à gauche discret M, on pose

$$\mathcal{F}^\Gamma(M) = \Gamma \setminus (M \times X),$$

où, si $\gamma \in \Gamma$ et $(m, x) \in M \times X$,

$$\gamma.(m, x) = (\gamma m, \gamma x).$$

La flèche évidente $\mathcal{F}^\Gamma(M) \longrightarrow \Gamma \setminus X$ fait de $\mathcal{F}^\Gamma(M)$ un système local (de groupes abéliens) sur l'espace localement symétrique $\Gamma \setminus X$ (qui est une variété analytique réelle).

Il est clair que $\mathcal{F}^\Gamma$ est un foncteur exact et fidèle de la catégorie Mod_Γ des Γ-modules à gauche dans celle des systèmes locaux sur $\Gamma \setminus X$. On notera donc $\mathcal{F}^\Gamma$ son foncteur dérivé, défini sur $D^b(Mod_\Gamma)$. L'isomorphisme canonique $H^0(\Gamma \setminus X, \mathcal{F}^\Gamma(M)) = M^\Gamma$ s'étend en un isomorphisme fonctoriel

$$R\Gamma(\Gamma \setminus X, \quad)\mathcal{F}^\Gamma \simeq R\Gamma(\Gamma, \quad).$$

Soient $g \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et Γ, Γ' deux sous-groupes arithmétiques nets de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ tels que $\Gamma' \subset g\Gamma g^{-1}$. On a défini dans 1.1 un morphisme analytique réel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_g : \Gamma' \setminus X & \longrightarrow & \Gamma \setminus X \\ \Gamma' x & \longmapsto & \Gamma g^{-1} x \end{array} \right. .$$

On note θ le morphisme $\gamma \longmapsto g^{-1}\gamma g$ de Γ' dans Γ. Le foncteur $\theta^* : Mod_\Gamma \longrightarrow Mod_{\Gamma'}$ de restriction des scalaires via θ est exact, et on note encore θ^* le foncteur dérivé $D^b(Mod_\Gamma) \longrightarrow D^b(Mod_{\Gamma'})$.

Fait 2.1.1.1

(i) On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}^{\Gamma'}\theta^* \simeq T_g^*\mathcal{F}^{\Gamma},$$

donné, pour un Γ*-module* M*, par*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma' \setminus (M \times X) & \longrightarrow & (\Gamma \setminus (M \times X)) \times_{\Gamma\setminus X} \Gamma' \setminus X \\ (m, x) & \longmapsto & (m, g^{-1}x, x) \end{array}.$$

(ii) Si M *est un* $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$*-module et si* $\Gamma = \Gamma'$ *(donc* g *normalise* Γ*) on a un isomorphisme de* Γ*-modules* $M \xrightarrow{\sim} \theta^*M, m \longmapsto g^{-1}m$*, et le composé*

$$R\Gamma(\Gamma, M) = R\Gamma(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}^{\Gamma}(M)) \xrightarrow{CB} R\Gamma(\Gamma\backslash X, T_g^*\mathcal{F}^{\Gamma}(M)) \simeq R\Gamma(\Gamma\backslash X, \mathcal{F}^{\Gamma}(M)) \simeq R\Gamma(\Gamma, M)$$

est l'endomorphisme de $R\Gamma(\Gamma, M)$ *provenant de l'endomorphisme* $\gamma \longmapsto g^{-1}\gamma g$ *de* Γ*.*

Variétés de Shimura

On fixe un nombre premier ℓ. Supposons que $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est une donnée de Shimura (pure ou mixte). Notons $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ la catégorie des représentations algébriques de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit K un sous-groupe compact ouvert net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Si $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus V \times \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}),$$

où $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ agit sur $V \times \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})$ de la manière suivante : si $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, $v \in V$, $x \in \mathcal{X}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$\gamma.(v, x, gK) = (\gamma.v, \gamma.x, \gamma gK).$$

$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$ est un système local de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$.

Comme plus haut, il est clair que $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}$ est un foncteur exact et fidèle sur $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. On notera de la même façon le foncteur dérivé.

Soient $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $K' \subset gKg^{-1}$ un sous-groupe ouvert, et soit comme avant

$$\begin{array}{rcl} T_g : M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) \\ (x, hK') & \longmapsto & (x, hgK) \end{array}.$$

Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}'}(V) \simeq T_g^*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V),$$

donné par

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus V \times \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}') & \longrightarrow & (\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus V \times \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})) \times_{M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})} M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) \\ (v, (x, hK')) & \longmapsto & (v, (x, hgK), (x, hK')) \end{array}.$$

Remarque 2.1.1.2 On retrouve sur les composantes de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$ les systèmes locaux définis plus haut : Fixons $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et posons $\Gamma = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{G}(\mathbb{Q})$. On a une immersion holomorphe

$$\begin{array}{rcl} i : \Gamma \setminus \mathcal{X} & \longrightarrow & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C}) \\ \Gamma x & \longmapsto & [(x,g)] \end{array}$$

dont l'image est une composante connexe de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$, et qui est un isomorphisme sur son image. Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, $i^*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}^{\Gamma}(M)$, où M est V, avec la structure de Γ-module donnée par l'inclusion $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$.

2.1.2 Systèmes locaux sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$

Soient $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ une donnée de Shimura, K un sous-groupe ouvert compact net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. On voudrait associer à V un faisceau $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell)$ de $\mathbb{Z}_\ell$-modules sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$. On va rappeler la méthode de [Ln], p34.

On fait agir $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ sur V via la projection $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$, et on choisit un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau stable par K de V, qu'on note $V(\mathbb{Z}_\ell)$. Soit

$$\mathcal{E} = \coprod_{g\mathrm{K}\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/K} (g.V(\mathbb{Z}_\ell) \times \mathcal{X} \times (g\mathrm{K}/\mathrm{K})).$$

On a une application continue surjective $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})$ qui envoie $(g.v, x, gK)$ sur (x, gK). Cette application est $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$-équivariante, pour l'action suivante de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{E}$:

$$\gamma.(g.v, x, g\mathrm{K}) = (\gamma g.v, \gamma.x, (\gamma g)\mathrm{K}).$$

On pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{E}.$$

$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{X} \times (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}) = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$ est un faisceau en $\mathbb{Z}_\ell$-modules localement libre, et on a

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V).$$

De plus, la classe d'isomorphisme de $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell)$ est indépendante du choix de $V(\mathbb{Z}_\ell)$.

Si $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{K}' \subset g\mathrm{K}g^{-1}$, on a comme avant un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}'}(V)(\mathbb{Z}_\ell) \simeq T_g^*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell).$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}.$$

C'est un faisceau abélien de ℓ^m-torsion sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$. Nous montrerons plus loin que ce faisceau provient d'un faisceau étale sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$.

2.1.3 Rappels sur la construction de Pink

On va introduire rapidement certains faisceaux étales, qui sont construits et étudiés dans les deux premières parties de [P2].

Rappel 2.1.3.1 *([P2] 1.1.2) Un groupe topologique* Γ *est dit* de type pro-FP_∞ *s'il existe une famille de sous-groupes ouverts distingués* Δ *de* Γ *telle que :*
- *les* Δ *sont profinis ;*
- *pour tout* Δ*, le groupe discret* Γ/Δ *est de type* FP_∞ *;*
- $\Gamma = \varprojlim_{\Delta} \Gamma/\Delta$.

Rappelons qu'un groupe discret Γ *est dit de type* FP_∞ *si le* $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-module trivial* $\mathbb{Z}$ *a une résolution* $\ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ *par des* $\mathbb{Z}[\Gamma]$*-modules libres de type fini.*

Exemple 2.1.3.2 *([P2] 1.1.3) Soient* $\mathbf{G}$ *un groupe linéaire algébrique sur* $\mathbb{Q}$*,* Γ *un sous-groupe arithmétique de* $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ *et* K *un sous-groupe compact de* $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ *normalisé par* Γ*. Alors* Γ *est de type* FP_∞*,* K *est profini (donc de type pro-*FP_∞*) et* $\Gamma\mathrm{K}$ *est de type pro-*FP_∞*.*

Notation 2.1.3.3 *([P2] 1.1,1.2)*
- *Si* Γ *est un groupe topologique, on note* Mod_Γ *la catégorie abélienne des* Γ*-modules à gauches discrets sur lesquels l'action de* Γ *est continue (c'est-à-dire tels que le stabilisateur d'un point soit un sous-groupe ouvert de* Γ*). On note* Mod'_Γ *la sous-catégorie pleine de* Mod_Γ *engendrée par les limites inductives de* Γ*-modules de type fini sur* $\mathbb{Z}$*.*
- *Tous les schémas et morphismes de schémas sont supposés quasi-séparés. Si* X *est un schéma, on note* $\acute{E}t_X$ *la catégorie des faisceaux abéliens étales sur* X*.*

Lemme 2.1.3.4 *([P2] 1.2) Soient* X *un schéma,* Γ *un groupe de type pro-*FP_∞ *et* $\mathcal{F}$ *un faisceau étale de* Γ*-modules à gauche sur* X*. Pour tout sous-groupe* Δ *de* Γ*, on note* $\mathcal{F}^\Delta$ *le sous-faisceau de* $\mathcal{F}$ *(des* Δ*-invariants) défini par* $\mathcal{F}^\Delta(U) = \mathcal{F}(U)^\Delta$ *pour tout* $U \longrightarrow X$ *étale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) toutes les fibres de $\mathcal{F}$ *sont dans* Mod_Γ *;*
(2) $\mathcal{F} = \varinjlim_{\Delta} \mathcal{F}^\Delta$*, où* Δ *parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de* Γ *;*
(3) (si X *est quasi-compact) pour tout* $U \longrightarrow X$ *étale de présentation finie,* $\mathcal{F}(U)$ *est dans* Mod_Γ*.*

Notation 2.1.3.5 *([P2] 1.2) On note* $\acute{E}t_{X,\Gamma}$ *la catégorie des faisceaux étales de* Γ*-modules à gauches sur* X *satisfaisant les conditions du lemme précédent. (Si* X *est le spectre d'un corps séparablement clos, on peut identifier* $\acute{E}t_{X,\Gamma}$ *et* Mod_Γ*.)*

Définition 2.1.3.6 *Soit* X *un schéma sur lequel un groupe discret* Γ *agit à droite fidèlement. On dit que l'action de* Γ *est* propre *s'il existe un recouvrement de* X *par des ouverts affines tel que pour tout ouvert* U *de ce recouvrement,*

$$card(\{\gamma \in \Gamma, U.\gamma \cap U \neq \emptyset\}) < \infty.$$

Définition 2.1.3.7 *([P2] 1.7) Soit X un schéma muni d'une action à droite d'un groupe Γ de type pro-FP_∞. On suppose qu'il existe une famille de sous-groupes ouverts distingués Δ de Γ telle que :*

- *pour tout Δ, il existe un recouvrement ouvert affine de X dont chaque ouvert est invariant par Δ ; en particulier, le quotient catégorique X/Δ existe ;*
- *$X = \varprojlim_{\Delta} X/\Delta$;*
- *pour tout Δ, si Δ' est le noyau de l'action de Γ sur X/Δ, alors Γ/Δ' agit proprement sur X/Δ.*

Alors le quotient géométrique de X/Γ existe. On dit que $X \longrightarrow Y$ est un Γ-recouvrement.

Notation 2.1.3.8 *Si X est un schéma et A est un groupe abélien, on note $\underline{A}_X$ ou simplement $\underline{A}$ le faisceau étale constant de fibre A sur X.*

Définition 2.1.3.9 *([P2] 1.8) Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y$ un Γ-recouvrement. Pour un sous-groupe ouvert distingué assez petit Δ de Γ, on a un diagramme commutatif de morphismes Γ-équivariants*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X/\Delta \arrow[dl, "\varphi_\Delta"] \\ & Y & \end{tikzcd} .$$

Pour un tel Δ, le faisceau $\varphi_{\Delta *}\underline{\mathbb{Z}}$ sur Y est muni d'une action à gauche de Γ : $\gamma \in \Gamma$ envoie une section $s \in \varphi_{\Delta *}\underline{\mathbb{Z}}(U) \simeq \mathbb{Z}^{\pi_0(\varphi_\Delta^{-1}(U))}$ sur la section $\gamma.s$ qui à V dans $\pi_0(\varphi_\Delta^{-1}(U))$ associe $s(V.\gamma)$. Les $\varphi_{\Delta *}\underline{\mathbb{Z}}$ forment un système inductif de $\acute{E}t_{Y,\Gamma}$, dont la limite est aussi dans $\acute{E}t_{Y,\Gamma}$.

On définit alors un foncteur

$$\begin{cases} \lambda_{\Gamma,\varphi} : Mod_\Gamma & \longrightarrow & \acute{E}t_{Y,\Gamma} \\ \qquad\qquad M & \longmapsto & \underline{M} \otimes \varinjlim_{\Delta} \varphi_{\Delta *}\underline{\mathbb{Z}} \end{cases},$$

où Γ agit sur les deux facteurs. Ce foncteur est exact et commute aux limites inductives.

Lemme 2.1.3.10 *([P2] 1.8) On se place dans la situation de la définition ci-dessus. Soit M un objet de Mod_Γ ; on va décrire les fibres de $\lambda_{\Gamma,\varphi}(M)$. Soient x un point géométrique de X, y l'image de x dans Y, $\Gamma_1 \subset \Gamma$ le stabilisateur de x. Le choix de x détermine une bijection Γ-équivariante $\varphi^{-1}(x) \simeq \Gamma_1 \setminus \Gamma$, d'où un isomorphisme de Γ-modules*

$$\lambda_{\Gamma,\varphi}(M)_y \simeq M \otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}\mathbb{Z},$$

où Γ_1 agit trivialement sur $\mathbb{Z}$.

Proposition 2.1.3.11 *([P2] 1.9.3) Soient $X \longrightarrow Y$ un Γ-recouvrement et $1 \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma'' \longrightarrow 1$ une suite exacte de groupes de type pro-FP_∞ tels que Γ' agisse trivialement sur X. Alors on a un isomorphisme de foncteurs sur $D^+(Mod'_\Gamma)$*

$$R(\Gamma', \quad) \circ \lambda_{\Gamma,\varphi} \simeq \lambda_{\Gamma'',\varphi} \circ R(\Gamma', \quad).$$

Proposition-définition 2.1.3.12 *([P2] 1.10.1) Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un recouvrement étale galoisien de groupe de Galois Γ. Alors $\lambda_{\Gamma,\varphi}(M)$ est $R\Gamma(\Gamma, \quad)$-acyclique pour tout objet M de Mod'_Γ. On obtient donc un foncteur exact*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu_{\Gamma,\varphi} : Mod'_\Gamma & \longrightarrow & \acute{E}t_X \\ M & \longmapsto & \Gamma(\Gamma, \lambda_{\Gamma,\varphi}(M)) \end{array} \right. .$$

Pour tout $U \longrightarrow X$ étale de présentation finie, on a

$$\mu_{\Gamma,\varphi}(M)(U) = \varinjlim_{\Delta} \{s : \pi_0(\varphi_\Delta^{-1}(U)) \longrightarrow M, \forall \gamma \in \Gamma, \forall V \in \pi_0(\varphi_\Delta^{-1}(U)), s(V.\gamma) = \gamma^{-1}s(V)\}.$$

Proposition 2.1.3.13 *([P2] 1.10.4) Soient $\varphi : X \longrightarrow Y$ comme avant, et M un objet de Mod'_Γ. Soit $y_0 = Spec(k)$ un point de Y, $\overline{k}$ une clôture séparable de k, y le point géométrique de Y correspondant, x un point géométrique de X au-dessus de y. Pour tout $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$, on note $\psi(\sigma)$ l'unique élément de Γ tel que $\sigma.x = x.\psi(\sigma)$. Alors*

$$\psi : Gal(\overline{k}/k) \longrightarrow \Gamma$$

est un morphisme continu, et la fibre de $\mu_{\Gamma,\varphi}(M)$ en y est isomorphe à M avec l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ donnée par $\sigma.m = \psi(\sigma).m$.

Proposition 2.1.3.14 *Soient $\widetilde{X}$ un schéma muni d'une action à droite d'un groupe Γ de type pro-FP_∞ et Γ' un sous-groupe fermé de Γ. On note $\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}/\Gamma = X$, $\varphi' : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}/\Gamma' = X'$ et $f : X' \longrightarrow X$ les morphismes évidents. On a un morphisme canonique de foncteurs (provenant de morphismes de changement de base, cf [P1] 1.11.3)*

$$Res^\Gamma_{\Gamma'} f^* \lambda_{\Gamma,\varphi} \longrightarrow \lambda_{\Gamma',\varphi'} Res^\Gamma_{\Gamma'}.$$

On suppose que le stabilisateur de tout point géométrique de $\widetilde{X}$ est inclus dans Γ'. Alors :

(i) Le morphisme canonique

$$\begin{array}{rcl} f^* R\Gamma(\Gamma, \quad)\lambda_{\Gamma,\varphi} & \longrightarrow & f^* R\Gamma(\Gamma', \quad) Res^\Gamma_{\Gamma'} \lambda_{\Gamma,\varphi} = R\Gamma(\Gamma', \quad) f^* Res^\Gamma_{\Gamma'} \lambda_{\Gamma,\varphi} \\ & \longrightarrow & R\Gamma(\Gamma', \quad)\lambda_{\Gamma',\varphi'} Res^\Gamma_{\Gamma'} \end{array}$$

(cf [P1] 1.11.4) est un isomorphisme de foncteurs sur $D^+(Mod'_\Gamma)$.

(ii) Si de plus Γ' est d'indice fini dans Γ, alors le morphisme canonique (déduit du morphisme de (i) par adjonction)

$$R\Gamma(\Gamma, \quad)\lambda_{\Gamma,\varphi} Ind^\Gamma_{\Gamma'} \longrightarrow f_* R\Gamma(\Gamma', \quad)\lambda_{\Gamma',\varphi'}$$

est un isomorphisme de foncteurs sur $D^+(Mod'_{\Gamma'})$.

Démonstration. (i) est [P1] 1.11.5.

(ii) se prouve de la même façon. Soit $\widetilde{x}$ un point géométrique de $\widetilde{X}$. Notons x le point géométrique de X image de $\widetilde{x}$ et Γ_1 le stabilisateur de $\widetilde{x}$ dans Γ. On a $\Gamma_1 \subset \Gamma'$ par hypothèse.

On fixe un système de représentants $(\delta_i)_{i\in I}$ de $\Gamma'\setminus\Gamma$. Soit $M\in Mod'_\Gamma$. D'après le lemme 2.1.3.10, le choix de $\widetilde{x}$ et de (δ_i) détermine des isomorphismes

$$\left(R\Gamma\left(\Gamma,\lambda_{\Gamma,\varphi}Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\right)\right)_x\simeq Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}\mathbb{Z}$$

$$\left(Rf_*R\Gamma\left(\Gamma',\lambda_{\Gamma',\varphi'}M\right)\right)_x\simeq\bigoplus_{i\in I}\left(R\Gamma\left(\Gamma',\lambda_{\Gamma',\varphi'}(M)\right)\right)_{\varphi'(\widetilde{x}\delta_i)}\simeq\bigoplus_{i\in I}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}\mathbb{Z},$$

et le morphisme

$$u:\left(R\Gamma\left(\Gamma,\lambda_{\Gamma,\varphi}Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\right)\right)_x\longrightarrow\left(Rf_*R\Gamma\left(\Gamma',\lambda_{\Gamma',\varphi'}M\right)\right)_x$$

correspond au composé du morphisme fonctoriel $R\Gamma(\Gamma,\quad)\longrightarrow R\Gamma(\Gamma',\quad)Res_{\Gamma'}^{\Gamma}$ de [P1] 1.11.1 et du morphisme

$$\begin{array}{rcl} v:Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}\mathbb{Z}\\ f\otimes g & \longmapsto & \sum_{i\in I}f(\delta_i)\otimes g_{|\Gamma'}\end{array}$$

où $f\in Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M$ est une fonction $f:\Gamma\longrightarrow M$ et $g\in Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}\mathbb{Z}$ est une fonction $\Gamma\longrightarrow\mathbb{Z}$.

Comme tous les foncteurs considérés commutent aux limites inductives, on peut supposer M de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors on a des isomorphismes canoniques (cf [P1] 1.10.2)

$$Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}\mathbb{Z}\simeq Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M$$

$$\bigoplus_{i\in I}M\otimes Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}\mathbb{Z}\simeq\bigoplus_{i\in I}Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}M$$

et le morphisme v ci-dessus devient

$$\left(f:\Gamma\longrightarrow Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M\right)\longmapsto\sum_{i\in I}(f_{\delta_i}:\gamma'\longmapsto f(\gamma')(\delta_i)).$$

Comme dans la preuve de [P1] 1.11.5, on peut remplacer M par un complexe $M^\bullet=Ind_{\{1\}}^{\Gamma'}A^\bullet$. D'après [P1] 1.6.1, les composantes de $Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\Gamma'}^{\Gamma}M^\bullet$ sont $R\Gamma(\Gamma,\quad)$-acycliques, et celles de $Ind_{\Gamma'}^{\Gamma_1}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}M^\bullet$ sont $R\Gamma(\Gamma',\quad)$-acycliques, donc le morphisme u devient dans ce cas

$$\left(Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\{1\}}^{\Gamma}A^\bullet\right)^{\Gamma}\longrightarrow\left(Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\{1\}}^{\Gamma}A^\bullet\right)^{\Gamma'}\longrightarrow\left(\bigoplus_{i\in I}Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Ind_{\{1\}}^{\Gamma'}A^\bullet\right)^{\Gamma'}.$$

Or on a

$$\left(Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\{1\}}^{\Gamma}A^\bullet\right)^{\Gamma}=\left(Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\{1\}}^{\Gamma}A^\bullet\right)^{\Gamma_1}$$

$$\left(\bigoplus_{i\in I}Ind_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Ind_{\{1\}}^{\Gamma'}A^\bullet\right)^{\Gamma'}=\left(\bigoplus_{i\in I}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Ind_{\{1\}}^{\Gamma'}A^\bullet\right)^{\Gamma_1}$$

et u est induit par le morphisme

$$\begin{array}{rcl} Res_{\Gamma_1}^{\Gamma}Ind_{\{1\}}^{\Gamma}A^\bullet & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I}Res_{\Gamma_1}^{\Gamma'}Ind_{\{1\}}^{\Gamma'}A^\bullet\\ (f:\Gamma\longrightarrow A^\bullet) & \longmapsto & \sum_{i\in I}(f_{\delta_i}:\gamma'\longmapsto f(\gamma'\delta_i))\end{array}$$

Ce dernier morphisme est clairement un isomorphisme.

□

2.1.4 Systèmes locaux étales sur les modèles canoniques

Systèmes locaux provenant de représentations du groupe

Revenons à la situation de 2.1.1. On fixe donc un nombre premier ℓ, une donnée de Shimura $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, un sous-groupe compact ouvert $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On veut construire un faisceau étale sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ qui sur $\mathbb{C}$ redonne le faisceau $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ de 2.1.2. Pour cela, on applique la construction de Pink au K-recouvrement

$$\varphi : M(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}).$$

On fait agir K sur $V(\mathbb{Q}_\ell)$ via

$$\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell).$$

On choisit comme avant un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau K-invariant $V(\mathbb{Z}_\ell)$ de V. Alors $V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = V(\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z} = V(\mathbb{Z}_\ell)/\ell^m V(\mathbb{Z}_\ell)$ est dans Mod'_{K} et on peut lui appliquer le foncteur $\mu_{\mathrm{K},\varphi}$.

Proposition 2.1.4.1 *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C}),$$

où $\mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C})$ est le faisceau en groupes abéliens sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ provenant du faisceau étale $\mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

Démonstration. ([Ln] p 38)

Comme $V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ est fini, il existe un sous-groupe ouvert distingué K_0 de K qui agit trivialement sur $V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$. Si on note φ_0 la projection $T_1 : M^{\mathrm{K}_0}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, on a

$$\lambda_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = \underline{V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})} \otimes \varphi_{0*}\underline{\mathbb{Z}}$$

et

$$\mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = (\underline{V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})} \otimes \varphi_{0*}\underline{\mathbb{Z}})^{\mathrm{K}/\mathrm{K}_0},$$

donc

$$\mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C}) = (\mathrm{K}/\mathrm{K}_0) \setminus V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \times M^{\mathrm{K}_0}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}),$$

où K/K_0 agit sur $V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \times M^{\mathrm{K}_0}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ par

$$k.(v, x, g\mathrm{K}_0) = (k^{-1}.v, x, gk\mathrm{K}_0).$$

On pose

$$\mathcal{E} = \coprod_{g\mathrm{K} \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}} (g.V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \times \mathcal{X} \times g\mathrm{K}/\mathrm{K}).$$

$\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ agit sur $\mathcal{E}$ comme dans 2.1.2, et on a $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{E}$. On considère l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mu_{\mathrm{K},\varphi} V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C})$, qui à $(g.v, x, g\mathrm{K})$ associe $(v, x, g\mathrm{K}_0)$. Cette application est bien définie, car, si on remplace g par gk avec $k \in \mathrm{K}$, l'image de

$$(g.v, x, gk\mathrm{K}) = (gkk^{-1}.v, x, gk\mathrm{K})$$

qu'on obtient est encore
$$(k^{-1}.v, x, gk\mathrm{K}_0) = (v, x, g\mathrm{K}_0).$$
De plus, si $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, l'image de
$$\gamma.(g.v, x, g\mathrm{K}) = (\gamma g.v, \gamma.x, (\gamma g)\mathrm{K})$$
est
$$(v, \gamma.x, \gamma g\mathrm{K}_0) = (v, x, g\mathrm{K}_0),$$
donc $\mathcal{E} \longrightarrow \mu_{\mathrm{K},\varphi}V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C})$ donne
$$\Phi : \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus \mathcal{E} = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \longrightarrow \mu_{\mathrm{K},\varphi}V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})(\mathbb{C}),$$
qui est l'isomorphisme cherché :
- Φ est un homéomorphisme local ;
- Φ est surjective ;
- Φ est injective : Soient $(v, x, g), (v', x', g') \in V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \times \mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ tels que $\Phi(g.v, x, gK) = \Phi(g'.v', x', g'\mathrm{K})$. Alors il existe $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et $k \in \mathrm{K}$ tels que $x' = \gamma.x$, $g' = \gamma gk$ et $v' = k^{-1}.v$, donc
$$(g'.v', x', g'\mathrm{K}) = (\gamma g.v, \gamma.x, \gamma g\mathrm{K}) = (g.v, x, g\mathrm{K}).$$

□

Notation 2.1.4.2 *Le faisceau ℓ-adique*
$$\varprojlim_{m \in \mathbb{N}^*} \mu_{\mathrm{K},\varphi}(V(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$
sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ sera noté $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ dans la suite.

Généralisation

Dans la suite, on utilisera des faisceaux ℓ-adiques sur certains quotients de variétés de Shimura par des groupes finis, qui proviennent de représentations d'un groupe plus grand que celui de la donnée. On se place dans la situation suivante : $\mathbf{B}$ est un groupe linéaire connexe sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{N}_0$ est son radical unipotent, $\mathbf{L} = \mathbf{B}/\mathbf{N}_0$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_\ell$ sont deux sous-groupes fermés réductifs connexes de $\mathbf{L}$ commutant entre eux, d'intersection finie et vérifiant $\mathbf{L} = \mathbf{G}\mathbf{G}_\ell$. On note $\mathbf{Q}_0$ l'image inverse $\mathbf{G}\mathbf{N}_0$ de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{B}$. On considère une donnée de Shimura $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. On suppose que l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{X}$ se prolonge en une action de $\mathbf{L}(\mathbb{Q})$ telle que $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$ agisse trivialement et on prolonge l'action à droite de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ sur $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ à $\mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$ en faisant agir trivialement $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_0(\mathbb{A}_f)$.

Enfin, soit K un sous-groupe ouvert compact net de $\mathbf{B}(\mathbb{A}_f)$; on note $\mathrm{H} = \mathrm{K} \cap \mathbf{B}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{H}_\ell = \mathrm{K} \cap Cent_{\mathbf{B}(\mathbb{Q})}(\mathcal{X})\mathbf{N}_0(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{K}_Q = \mathrm{K} \cap \mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f) \subset \mathrm{H}$, $\mathrm{K}_N = \mathrm{K} \cap \mathbf{N}_0(\mathbb{A}_f) \subset \mathrm{H}_\ell$ et $\mathrm{K}_G = \mathrm{K}_Q/\mathrm{K}_N$. Le morphisme quotient
$$\varphi : M(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M(\mathbf{G}, \mathcal{X})/\mathrm{H} = M$$

est un revêtement étale profini de groupe $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell$, et $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell\mathrm{K}_Q$ est fini, donc M est le quotient de la variété de Shimura $M^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ par un groupe fini. On sait qu'à tout H-module $A \in Mod'_{\mathrm{H}}$ on peut associer un complexe de faisceaux étales sur M,

$$R\Gamma(\mathrm{H}, \lambda_{\mathrm{H},\varphi}(A)) \simeq \mu_{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell,\varphi}(R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, A)).$$

On voudrait, à partir d'une représentation algébrique de $\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie (ou d'un complexe borné de telles représentations), sur laquelle $\mathbf{B}(\mathbb{A}_f)$ et ses sous-groupes agissent comme d'habitude via le morphisme $\mathbf{B}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)$, construire un complexe borné de faisceaux ℓ-adiques sur M.

Lemme 2.1.4.3 *([P2] 5.2.2) Soient* $\mathbf{U}$ *un groupe algébrique unipotent connexe sur* $\mathbb{Q}$ *et* K_U *un sous-groupe ouvert compact de* $\mathbf{U}$*. Alors, pour tout* $V \in D^b(Rep_{\mathbf{U}(\mathbb{Q}_\ell)})$*, le morphisme de restriction*

$$R\Gamma_{cont}(\mathrm{K}_U, V) \longrightarrow R\Gamma(\mathrm{K}_U \cap \mathbf{U}(\mathbb{Q}), V)$$

est un isomorphisme.

Le lemme ci-dessous, qui est une version algébrique du théorème de van Est, est prouvé dans [GHM] 24.

Lemme 2.1.4.4 *Soient* $\mathbf{U}$ *un groupe algébrique unipotent connexe sur* $\mathbb{Q}$ *et* Γ_U *un sous-groupe arithmétique de* $\mathbf{U}(\mathbb{Q})$*. On note* $Mod_{\mathbf{U}}$ *la catégorie des limites inductives de représentations algébriques rationnelles de dimension finie de* $\mathbf{U}$ *(ou, ce qui revient au même, de* $Lie(\mathbf{U})$*), et* A_U *la* $\mathbb{Q}$*-algèbre des polynômes à coefficients rationnels sur* $\mathbf{U}(\mathbb{Q})$*, qui contient la sous-algèbre* $\mathbb{Q}$ *des constantes. Pour tout* M*, on définit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u_0} I^0(M) \xrightarrow{u_1} I^1(M) \xrightarrow{u_2} I^2(M) \xrightarrow{u_3} \dots$$

par :

- $u_0 : M \longrightarrow I^0(M)$ *est l'injection évidente* $M \simeq M \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow M \otimes A_U = I^0(M)$ *;*
- *pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $u_{i+1} : I^i(M) \longrightarrow I^{i+1}(M)$ *est le morphisme évident* $I^i(M) \longrightarrow Coker(u_i) \longrightarrow Coker(u_i) \otimes A_U = I^{i+1}(M)$*.*

Alors :

(i) Pour tout $M \in Mod_{\mathbf{U}}$*,* $M \otimes A_U$ *est un objet injectif de* $Mod_{\mathbf{U}}$ *et un objet acyclique pour le foncteur* $(\quad)^{\Gamma_U}$ *(invariants par* Γ_U*).*

(ii) Pour tout $M \in Mod_{\mathbf{U}}$*, le morphisme suivant est un isomorphisme :*

$$R\Gamma(Lie(\mathbf{U}), M) = R\Gamma(\mathbf{U}(\mathbb{Q}), M) \simeq I^\bullet(M)^{\mathbf{U}(\mathbb{Q})} \longrightarrow I^\bullet(M)^{\Gamma_U} \simeq R\Gamma(\Gamma_U, M).$$

Corollaire 2.1.4.5 *Soit* $V \in D^b(Rep_{\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)})$*. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, V) \simeq R\Gamma(\mathrm{H}_\ell/\mathrm{K}_N, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_0), V)).$$

Si $V \in D^b(Rep_{\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)})$, $R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_0), V) \in D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)})$, donc le corollaire permet de se ramener au cas $\mathbf{B} = \mathbf{L}$. Traitons ce cas.

Comme K est net, $\Gamma_\ell = \mathrm{H}_\ell$ est net, et $\Gamma_\ell \cap \mathbf{G}(\mathbb{Q}) = \{1\}$ (car le stabilisateur dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ d'un élément de $\mathcal{X}$ est compact modulo le centre de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$). Γ_ℓ s'injecte donc dans $(\mathbf{L}/\mathbf{G})(\mathbb{Q})$, et son image est un sous-groupe arithmétique. On a un autre sous-groupe arithmétique de $(\mathbf{L}/\mathbf{G})(\mathbb{Q})$, $\Gamma'_\ell = \mathrm{H}/\mathrm{K}_G$, et Γ_ℓ s'identifie à un sous-groupe distingué de Γ'_ℓ (forcément d'indice fini). D'après [BS] 11.1, la compactification de Borel-Serre partielle d'un espace symétrique de $\mathbf{L}/\mathbf{G}$ permet de construire une résolution bornée $L_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z}$ du $\mathbb{Z}[\Gamma'_\ell]$-module trivial $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[\Gamma'_\ell]$-modules libres de type fini (les L_i sont donc aussi des $\mathbb{Z}[\Gamma_\ell]$-modules libres de type fini). On fait agir H sur les L_i via la projection $\mathrm{H} \longrightarrow \Gamma'_\ell$. Si A est un H-module fini, alors $Hom_{\mathbb{Z}[\Gamma_\ell]}(L_\bullet, A)$, où H/Γ_ℓ agit par $(h\Gamma_\ell.f)(x) = hf(h^{-1}x)$, est un complexe borné de H/Γ_ℓ-modules finis qui représente l'objet $R\Gamma(\Gamma_\ell, A)$ de $D^b(Mod_{\mathrm{H}/\Gamma_\ell})$.

Définition 2.1.4.6 *Soit $V \in Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)}$. On choisit un réseau* K*-invariant $\Lambda \subset V$. Alors le système projectif des $\mu_{\mathrm{H}/\Gamma_\ell,\varphi}(Hom_{\mathbb{Z}[\Gamma_\ell]}(L_\bullet, \Lambda/\ell^m\Lambda)), m \in \mathbb{N}^*$, avec les morphismes de transition évidents, est un complexe borné de faisceaux ℓ-adiques constructibles sur M. On note $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, V)$ l'objet correspondant de $D^b_c(M, \mathbb{Q}_\ell)$, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de Λ. Cette construction s'étend trivialement au cas où V est un complexe borné de représentations de $\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)$, et donne un foncteur triangulé*

$$\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, \quad) : D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)}) \longrightarrow D^b_c(M, \mathbb{Q}_\ell).$$

Si on revient au cas général du début de ce paragraphe ($\mathbf{L}$ *est le quotient de Levi d'un groupe connexe* $\mathbf{B}$*), on obtient un foncteur triangulé*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell} R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, \quad) : D^b(Rep_{\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)}) & \longrightarrow & D^b_c(M, \mathbb{Q}_\ell) \\ V & \longmapsto & \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell} R\Gamma(\mathrm{H}_\ell/\mathrm{K}_N, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_0), V)) \end{array}.$$

Remarque 2.1.4.7 De même, si A est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel avec une action de $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell$ qui admet un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau Λ invariant par $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell$, alors on lui associe le faisceau ℓ-adique lisse sur M

$$\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell} A = (\mu_{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell,\varphi}(\Lambda/\ell^m\Lambda))_{m\in\mathbb{Z}},$$

dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de Λ.

Par exemple, dans le cas $\mathbf{B} = \mathbf{L}$, si $V \in Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un faisceau $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} H^i(\Gamma_\ell, V)$, qui s'identifie à $H^i(\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, V))$ (grâce à l'exactitude de $\mu_{\mathrm{H}/\Gamma_\ell,\varphi}$).

La notation $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell}$ qu'on vient d'introduire est une généralisation de la notation $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}$ du paragraphe précédent.

2.2 Le théorème de Pink (prolongement des faisceaux sur la compactification de Baily-Borel)

Soient $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(p,q)$, $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ la donnée de Shimura pure définie dans la section 1.2. On va énoncer un résultat très légèrement plus général que celui de Pink (mais qui se prouve exactement de la même façon), en se plaçant dans la situation de la définition 2.1.4.6.

Soient donc $\mathbf{B}$ un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{N}_0$ son radical unipotent, $\mathbf{L} = \mathbf{B}/\mathbf{N}_0$ son quotient de Levi. On suppose que $\mathbf{G}$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $\mathbf{L}$, et qu'on a un sous-groupe réductif connexe $\mathbf{G}_\ell \subset \mathbf{L}$ commutant avec $\mathbf{G}$, d'intersection finie avec $\mathbf{G}$, et tel que $\mathbf{L} = \mathbf{G}\mathbf{G}_\ell$. Enfin, on note $\mathbf{Q}_0$ l'image réciproque de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{B}$ (donc $\mathbf{G} = \mathbf{Q}_0/\mathbf{N}_0$). Si $\mathbf{G}'$ est un sous-groupe de $\mathbf{L}$, on notera souvent $\mathbf{G}'\mathbf{N}_0$ son image réciproque dans $\mathbf{B}$. On suppose qu'on peut prolonger l'action à droite de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ sur $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ à $\mathbf{B}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$ en faisant agir trivialement $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_0(\mathbb{A}_f)$. Soit K un sous-groupe compact ouvert net de $\mathbf{B}(\mathbb{A}_f)$. On note $\mathrm{H} = \mathrm{K} \cap \mathbf{B}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{H}_\ell = \mathrm{K} \cap Cent_{\mathbf{B}(\mathbb{Q})}(\mathcal{X})\mathbf{N}_0(\mathbb{A}_f)$, et φ le recouvrement étale $\widetilde{M} = M(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})/\mathrm{H}$, qui est galoisien profini de groupe $\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell$. L'action de $\mathbf{B}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$ s'étend évidemment à $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, et on note j l'immersion ouverte $M \longrightarrow M^* = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*/\mathrm{H}$. Dans [P2], Pink a calculé, pour un H-module de torsion M et dans le cas $\mathbf{B} = \mathbf{G}$, la restriction de $Rj_*R\Gamma(\mathrm{H}, \lambda_{\mathrm{H},\varphi}M)$ aux strates de M^*. Nous allons énoncer ce théorème dans le cas où $\mathbf{B}$ n'est plus forcément égal à $\mathbf{G}$.

Soient $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$ et $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ la composante de bord associée. On note comme avant $\mathbf{N}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}_P = \mathbf{P}/\mathbf{N}$ le quotient de Levi, et $(\mathbf{G}_1, \mathcal{X}_1) = (\mathbf{Q}, \mathcal{Y})/\mathbf{N}$. Soit $g \in \mathbf{B}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_0(\mathbb{A}_f)$. On pose

$$\mathrm{K}_Q = (\mathbf{Q}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f) \cap g\mathrm{K}g^{-1}$$

$$\mathrm{K}_N = (\mathbf{N}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f) \cap g\mathrm{K}g^{-1}$$

$$\mathrm{K}_G = \mathrm{K}_Q/\mathrm{K}_N \subset \mathbf{G}_1(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{H}_P = g\mathrm{K}g^{-1} \cap Stab_{\mathbf{B}(\mathbb{Q})}(\mathcal{X}_1)(\mathbf{Q}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap (\mathbf{G}_\ell\mathbf{P})(\mathbb{Q})(\mathbf{Q}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{H}_{P,\ell} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap Cent_{\mathbf{B}(\mathbb{Q})}(\mathcal{X}_1)(\mathbf{N}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap (\mathbf{G}_\ell\mathbf{L}_{P,\ell})(\mathbb{Q})(\mathbf{N}\mathbf{N}_0)(\mathbb{A}_f),$$

où $\mathbf{L}_{P,\ell}$ est la partie linéaire de $\mathbf{L}_P$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M} = M(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \arrow[r, hook, "\widetilde{j}"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{M}^* = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^* \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & M(\mathbf{G}_1, \mathcal{X}_1) = \widetilde{M}_1 \arrow[l, hook', "\widetilde{i}"'] \arrow[d, "\varphi_1"] \\
M = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})/\mathrm{H} \arrow[r, hook, "j"] & M^* = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*/\mathrm{H} & M(\mathbf{G}_1, \mathcal{X}_1)/\mathrm{H}_P = M_1 \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}$$

où φ_1 est un recouvrement étale galoisien profini de groupe $\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}$.

Soit $TorMod_{\mathrm{H}}$ la sous-catégorie pleine de Mod'_{H} dont les objets sont les H-modules de torsion. On note encore $\lambda_{\mathrm{H},\varphi}$ la restriction de $\lambda_{\mathrm{H},\varphi} : Mod'_{\mathrm{H}} \longrightarrow \acute{E}t_{M,\mathrm{H}}$ à $TorMod_{\mathrm{H}}$.

Théorème 2.2.1 *(cf [P2] 4.2.1) On note $\theta : \mathrm{H}_P \longrightarrow \mathrm{H}$, $h \longmapsto g^{-1}hg$, qui donne $\theta^* : TorMod_{\mathrm{H}} \longrightarrow TorMod_{\mathrm{H}_P}$.*

On a un isomorphisme canonique de foncteurs $D^+(TorMod_{\mathrm{H}}) \longrightarrow D^+(\acute{E}t_{M_1})$

$$i^*Rj_*R\Gamma(\mathrm{H}, \quad)\lambda_{\mathrm{H},\varphi} \simeq R\Gamma(\mathrm{H}_P, \quad)\lambda_{\mathrm{H}_P,\varphi_1}\theta^*,$$

ou, autrement dit,

$$i^*Rj_*\mu_{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell,\varphi}R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, \quad) \simeq \mu_{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell},\varphi_1}R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell}, \quad)\theta^*.$$

$$\begin{tikzcd}
D^+(TorMod_{\mathrm{H}}) \arrow[r, "\theta^*"] \arrow[d, "\mu_{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell,\varphi} R\Gamma(\mathrm{H}_\ell,\ \ )"] & D^+(TorMod_{\mathrm{H}_P}) \arrow[r, "R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell},\ \ )"] & D^+(TorMod_{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}}) \arrow[d, "\mu_{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell},\varphi_1}"] \\
D^+(\acute{E}t_M) \arrow[r, "Rj_*"'] & D^+(\acute{E}t_{M^*}) \arrow[r, "i^*"'] & D^+(\acute{E}t_{M_1})
\end{tikzcd}$$

Voyons ce que ce théorème donne pour les systèmes de coefficients définis plus haut.

Corollaire 2.2.2 *(cf [P2] 5.3.1) Soit $V \in D^b(Rep_{\mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)})$, sur lequel on fait comme d'habitude agir H via le morphisme $\mathrm{H} \subset \mathbf{B}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathbb{Q}_\ell)$. On a construit plus haut (voir la définition 2.1.4.6) un complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell} R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, V) \in D^b_c(M, \mathbb{Q}_\ell)$. De même, en utilisant cette fois l'inclusion $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{L}_P$, on peut associer à tout complexe $V' \in D^b(Rep_{(\mathbf{PN}_0)(\mathbb{Q}_\ell)})$ un complexe de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{F}^{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}} R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell}, V') \in D^b_c(M_1, \mathbb{Q}_\ell)$.*

On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
i^* Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\mathrm{H}_\ell} R\Gamma(\mathrm{H}_\ell, V) &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}} R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell}, V) \\
&\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}} R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell}/\mathrm{K}_N, R\Gamma(\mathrm{K}_N, V)) \\
&\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{H}_P/\mathrm{H}_{P,\ell}} R\Gamma(\mathrm{H}_{P,\ell}/\mathrm{K}_N, R\Gamma(Lie(\mathbf{NN}_0), V)).
\end{aligned}$$

Le corollaire résulte du théorème ci-dessus, et des lemmes 2.1.4.3 et 2.1.4.4.

3 Modèles entiers

Le but de cette partie est de trouver un ensemble fini de nombres premiers Σ tel que les variétés et les systèmes de coefficients sur le corps reflex F des parties 1 et 2 s'étendent (en gardant les mêmes propriétés) sur l'anneau $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$. Pour la variété de Shimura elle-même, Σ est explicite et ne dépend que du discriminant de E et du niveau (voir la section 3.1). Malheureusement, comme on ne dispose pas de compactifications toroïdales des modèles entiers, on doit dès que l'on veut travailler avec la compactification de Baily-Borel inverser un certain ensemble d'autres nombres premiers sur lequel on n'a aucune information (à part le fait qu'il est fini).

3.1 Variété de Shimura

$(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est toujours la donnée de Shimura définie dans la section 1.2, et on utilise les notations du chapitre 1.

Les variétés de Shimura qu'on considère ici sont des variétés PEL, c'est-à-dire qu'elles s'interprètent comme des espaces de modules de variétés abéliennes avec des polarisations, des endomorphismes imposés et des structures de niveau. Cette description modulaire permet de construire des modèles des variétés de Shimura sur l'anneau des entiers de son corps reflex, où on a inversé certains nombres premiers. La référence qu'on utilisera ici est [K2].

3.1.1 Schémas abéliens et structures de niveau

Commençons par mettre une structure entière sur le groupe $\mathbf{G}$. Il en existe une évidente : si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre, on pose

$$\mathbf{G}(A) = \{g \in \mathbf{GL}_n(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_E), g^* J_{p,q} g = \lambda J_{p,q}, \lambda \in A^\times\}.$$

On note D le discriminant de $E = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ (donc $D = -4d$ si $d \neq 3 \bmod 4$ et $D = -d$ si $d = 3 \bmod 4$). On rappelle qu'on a noté F le corps reflex de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ ($F = E$ si $p > q$ et $F = \mathbb{Q}$ si $p = q$). On pose $\alpha = \sqrt{-d}$ si $d \neq 3 \bmod 4$ et $\alpha = (1 + \sqrt{-d})/2$ si $d = 3 \bmod 4$; on a donc

$$\mathcal{O}_E = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}[\alpha].$$

Soit V le E-espace vectoriel E^{p+q}, muni de la forme hermitienne J de matrice $J_{p,q}$ dans la base canonique. On a une forme alternée $\psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ associée à J par la formule

$$J(v, w) = \psi(v, \alpha w) - \overline{\alpha}\psi(v, w).$$

Un calcul simple donne

$$\psi(v,w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} ImJ(v,w) & \text{si } d \neq 3 \bmod 4 \\ \frac{2}{\sqrt{d}} ImJ(v,w) & \text{si } d = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

En particulier, le $\mathcal{O}_E$-réseau $\Lambda = \mathcal{O}_E^{p+q}$ de V est autodual pour ψ.

Notation 3.1.1.1

(1) Si A et B sont deux schémas abéliens sur un schéma S, on note $Hom_S(A,B)$ (ou $Hom(A,B)$) le groupe abélien des morphismes de A dans B.

(2) Si $A \longrightarrow S$ est un schéma abélien, on note $\widehat{A} \longrightarrow S$ le schéma abélien dual. Si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de schémas abéliens sur S, on note $\widehat{f} : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A}$ le morphisme dual.

(3) Soient $A \longrightarrow S$ un schéma abélien et λ une polarisation de A. On définit une involution ι_λ de $End(A)$, dite involution de Rosati associée à λ : si $f \in End(A)$, $\iota_\lambda(f) = \widehat{\lambda}\widehat{f}\lambda$.

$$\begin{tikzcd} A & A \arrow[d, "\lambda"] \\ \widehat{A} \arrow[u, "\widehat{\lambda}"] & \widehat{A} \arrow[l, "\widehat{f}"] \end{tikzcd}$$

(4) Soit R un anneau commutatif. La catégorie des schémas abéliens sur S à R-polarisation près est la catégorie additive (et même R-linéaire) dont les objets sont les schémas abéliens sur S et où le groupe des morphismes de A dans B est $Hom_S(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Une R-isogénie de A dans B est un isomorphisme dans cette catégorie. Comme plus haut, une R-isogénie de A dans $\widehat{A}$ donne une involution de Rosati sur $End(A) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

(5) Soit $\pi : A \longrightarrow S$ un schéma abélien, $\pi' : \widehat{A} \longrightarrow S$ le schéma abélien dual et ℓ un nombre premier inversible sur S. On a une forme bilinéaire non dégénérée canonique

$$R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell \times R^1\pi'_*\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1)_S.$$

Si $\lambda : A \longrightarrow \widehat{A}$ est une $\mathbb{Q}$-isogénie, elle induit un isomorphisme $R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R^1\pi'_*\mathbb{Q}_\ell$, d'où une forme alternée non dégénérée

$$R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell \times R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1)_S,$$

qu'on appellera accouplement de Weil associé à λ.

Notation 3.1.1.2 *Pour tout nombre premier ℓ, on note $\Lambda_\ell = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ et*

$$\mathrm{K}_{0,\ell} = \{g \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell) \ tq \ g(\Lambda_\ell) = \Lambda_\ell\} = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_\ell).$$

$\mathrm{K}_{0,\ell}$ *est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$.*

Soit Σ un ensemble de nombres premiers. On note

$$\mathbb{Z}[1/\Sigma] = \mathbb{Z}[1/\ell, \ell \in \Sigma]$$

$$\mathbb{Z}_\Sigma = \prod_{\ell \in \Sigma} \mathbb{Z}_\ell$$

$$\mathbb{Z}^\Sigma = \prod_{\ell \notin \Sigma} \mathbb{Z}_\ell$$

$$\mathbb{A}_{f\Sigma} = \mathbb{Z}_\Sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{A}_f^\Sigma = \mathbb{Z}^\Sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$\mathrm{K}_0^\Sigma = \prod_{\ell \notin \Sigma} \mathrm{K}_{0,\ell}.$$

Si R est un anneau commutatif, on note

$$R[1/\Sigma] = R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\Sigma].$$

La définition des structures de niveau que nous donnons ici est directement inspirée de celle de [K2] 5.

Définition 3.1.1.3 *Soit $A \longrightarrow S$ un schéma abélien, avec S connexe, et Σ un ensemble de nombres premiers inversibles sur S. On se donne une $\mathbb{Z}[1/\Sigma]$-isogénie $\lambda : A \longrightarrow \widehat{A}$ et un morphisme d'anneaux $i : \mathcal{O}_E[1/\Sigma] \longrightarrow End(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/\Sigma]$ qui envoie la conjugaison complexe sur l'involution de Rosati associée à λ. Enfin, soit K un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ de la forme $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\Sigma \mathrm{K}_0^\Sigma$, avec $\mathrm{K}_\Sigma \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma})$.*

Soit s un point géométrique de S. Une structure de niveau (K, Σ) sur (A, λ, i) est une K-orbite $\overline{\eta}$ stable par $\pi_1(S, s)$ d'isomorphismes E-linéaires $\eta : H^1(A_s, \mathbb{A}_{f\Sigma}) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{f\Sigma}$ (avec l'action de E sur $H^1(A_s, \mathbb{A}_{f\Sigma})$ provenant de i) qui envoient l'accouplement de Weil associé à λ sur un multiple (par un scalaire de $\mathbb{A}_{f\Sigma}^\times$) de la forme alternée ψ. Cette notion est essentiellement indépendante du choix de s.

Remarque 3.1.1.4

(a) On parlera de structure de niveau K si la définition de Σ est claire.

(b) Si $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}_0 = \prod_\ell \mathrm{K}_\ell$ est un sous-groupe compact ouvert, il existe un Σ fini qui vérifie la condition de la définition.

3.1.2 Le problème de modules

Définition 3.1.2.1 *Soient Σ un ensemble de nombres premiers qui contient tous les facteurs premiers de D, et $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact vérifiant la condition de la définition 3.1.1.3. On note $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ la catégorie fibrée en groupoïdes sur la catégorie $Sch/\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$ des $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$-schémas localement noethériens suivante : pour tout $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$-schéma localement noethérien S*

(i) les objets de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(S)$ *sont les quadruplets* $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$*, où* $A \longrightarrow S$ *est un schéma abélien,* λ *est une polarisation de* A *qui est une* $\mathbb{Z}[1/\Sigma]$*-isogénie,* $i : \mathcal{O}_E[1/\Sigma] \longrightarrow End(A)[1/\Sigma]$ *est un morphisme d'anneaux qui envoie la conjugaison complexe sur l'involution de Rosati associée à* λ*, et* $\overline{\eta}$ *est la donnée d'une structure de niveau* (K,Σ) *au-dessus de chaque composante connexe de* S*, vérifiant la condition suivante (dite condition du déterminant) :*

$$det(X_1+\alpha X_2, Lie(A)^*) = (X_1+\alpha X_2)^p(X_1+\overline{\alpha}X_2)^q \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S)[X_1,X_2]$$

(ii) les morphismes de $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$ *dans* $(A',\lambda',i',\overline{\eta}')$ *sont les* $\mathbb{Z}[1/\Sigma]$*-isogénies* $A \longrightarrow A'$ *qui commutent à l'action de* $\mathcal{O}_E[1/\Sigma]$*, envoient* λ *sur un multiple (par un scalaire de* $\mathbb{Z}[1/\Sigma]^\times$*) de* λ' *et* $\overline{\eta}$ *sur* $\overline{\eta}'$*.*

Remarque 3.1.2.2

(a) Les schémas abéliens qui interviennent dans le problème de modules précédent sont forcément de dimension $p+q$ (c'est une conséquence de la condition du déterminant ou de l'existence de la structure de niveau).

(b) $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est un champ fppf.

(c) Si S est un schéma sur $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$, le polynôme $(X_1+\alpha X_2)^p(X_1+\overline{\alpha}X_2)^q$ peut bien être vu comme un polynôme à coefficients dans $\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$, car, si $p=q$ (le seul cas où $F=\mathbb{Q}$), ce polynôme est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Demander que (A,i) vérifie la condition du déterminant revient à demander que le $\mathcal{O}_S$-module localement libre $Lie(A)^* \otimes \mathbb{Z}[1/\Sigma]$, muni de l'action de $\mathcal{O}_E$ provenant de i, soit de type (p,q) au sens de [Be] I.2.

(d) Soit p un nombre premier qui ne divise pas D, $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert de la forme $\mathrm{K} = \mathrm{K}_p\mathrm{K}^p$, avec $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$, et Σ l'ensemble des nombres premiers différents de p. Alors $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est le problème de modules de [K2] 5, excepté que Kottwitz impose aux schémas abéliens d'être projectifs (mais on peut tout de même utiliser les résultats de [K2] sur les points du problème de modules à valeurs dans un corps) et que nous avons remplacé H_1 par H^1 et $Lie(A)$ par $Lie(A)^*$.
Indiquons la correspondance entre les notations utilisées ici et celles de [K2] 5 : l'algèbre simple B de [K2] est le corps E, le $\mathbb{Z}_{(p)}$-ordre $\mathcal{O}_B$ est $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$, l'involution * sur B est la conjugaison complexe, le B-module V est aussi noté par V ici, la forme alternée $(.,.)$ sur V est ψ, le réseau autodual Λ_0 de $V_{\mathbb{Q}_p}$ est Λ_p. Les symboles $\mathbf{G}$ et K^p désignent les mêmes objets que dans [K2], et le $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{R})$ de [K2] est le prolongement évident du $h_0 : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{R})$ de la partie I. Le corps reflex (noté E dans [K2]) est noté F ici. Enfin, la base $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ du $\mathbb{Z}_{(p)}$-module $\mathcal{O}_B$ est ici $(1,\alpha)$.

Lemme 3.1.2.3 *Pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$*, notons*

$$\mathrm{K}(N) = \{g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f), (g-1)(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}) \subset N(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}})\}.$$

Soit (K,Σ) *comme plus haut. S'il existe* $N \geqslant 3$ *tel que* $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}(N)$*, alors les objets de* $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ *n'ont pas d'automorphismes non triviaux.*

Proposition 3.1.2.4 *Soient $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ des ensembles de nombres premiers (contenant les facteurs premiers de D), et $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact qui s'écrit $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\Sigma_1}\mathrm{K}_0^{\Sigma_1}$, avec $\mathrm{K}_{\Sigma_1} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma_1})$. On a un 1-morphisme évident de $\mathcal{M}_{\Sigma_2}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ dans $\mathcal{M}_{\Sigma_1}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})_{|Sch/\mathcal{O}_F[1/\Sigma_2]}$: soit S un schéma localement noethérien sur $\mathcal{O}_F[1/\Sigma_2]$; si $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$ est un objet de $\mathcal{M}_{\Sigma_2}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(S)$, on lui associe l'objet $(A,\lambda,i,\overline{\eta}')$ de $\mathcal{M}_{\Sigma_1}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(S)$, où $\overline{\eta}'$ est obtenue en restreignant les $\eta \in \overline{\eta}$ à $H^1(A_s,\mathbb{A}_{f\Sigma_1})$.*

Ce morphisme est un isomorphisme.

Corollaire 3.1.2.5 *Soit (K,Σ) comme dans la définition 3.1.2.1 et $p \notin \Sigma$. (K est bien sûr de la forme $\mathrm{K}_p\mathrm{K}^p$, avec $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$.) Alors $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})_{|Sch/\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_{(p)}}$ est canoniquement isomorphe au problème de modules de [K2] 5.*

Théorème 3.1.2.6 *Avec les notations de la définition 3.1.2.1, $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est un champ de Deligne-Mumford connexe, lisse et de dimension relative pq sur $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$. S'il existe $N \geqslant 3$ tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{K}(N)$, $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est représentable par un espace algébrique.*

Théorème 3.1.2.7 *Soient (K,Σ) comme dans la définition 3.1.2.1. Alors $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})_F$ est le modèle canonique de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{C})$, autrement dit, $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})_F$ et $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. On applique [K2] 8, en remarquant que $ker^1(\mathbb{Q},\mathbf{G}) = \{1\}$ ([Sh] 5.8). □

3.1.3 Changement de niveau

Soient Σ un ensemble de nombres premiers contenant les facteurs premiers de D, $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma})$, $\mathrm{K}_\Sigma, \mathrm{K}'_\Sigma$ des sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma})$ tels que $\mathrm{K}'_\Sigma \subset g\mathrm{K}_\Sigma g^{-1}$. Notons $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\Sigma\mathrm{K}_0^\Sigma$ et $\mathrm{K}' = \mathrm{K}'_\Sigma\mathrm{K}_0^\Sigma$; on a $\mathrm{K}' \subset g\mathrm{K}g^{-1}$. On définit un 1-morphisme

$$T_g : \mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$$

de la manière suivante : Soit S un $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$-schéma localement noethérien, qu'on peut supposer connexe. Si $(A,\lambda,i,\overline{\eta})$ est un objet de $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})(S)$, la K-orbite de ηg ne dépend pas du choix de $\eta \in \overline{\eta}$; on la note $\overline{\eta}'$, et on pose $T_g(A,\lambda,i,\overline{\eta}) = (A,\lambda,i,\overline{\eta}')$.

Proposition 3.1.3.1 *On garde les notations ci-dessus. T_g est un morphisme fini étale, et sa restriction à la fibre générique est le morphisme T_g entre les modèles canoniques de la section 1.6.*

Si $\mathrm{K}'_\Sigma \subset \mathrm{K}_\Sigma$ est un sous-groupe ouvert distingué, on obtient une action de $\mathrm{K}_\Sigma/\mathrm{K}'_\Sigma = \mathrm{K}/\mathrm{K}'$ sur $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})$, et le quotient de $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ par cette action est $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$. En fait, T_1 : $\mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_{\Sigma}^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est un revêtement fini étale galoisien de groupe K/K'.

3.2 Compactification de Baily-Borel

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour (K, Σ) comme plus haut, quitte à ajouter à Σ un nombre fini de nombres premiers, le modèle entier $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ s'étend en un "bon" modèle de la compactification de Baily-Borel $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. On veut en particulier que le modèle entier de la compactification ait une stratification dont les strates sont les modèles entiers des strates de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. Pour que cela soit possible, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.1 *Soit (K, Σ) comme plus haut, c'est-à-dire tel que $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\Sigma \mathrm{K}_0^\Sigma$, avec $\mathrm{K}_0^\Sigma = \mathbf{G}(\mathbb{Z}^\Sigma)$ et $\mathrm{K}_\Sigma \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$, et tel que Σ contienne les diviseurs premiers du discriminant D de E. Soit $\mathbf{P}_r$, $r \in \{1, \ldots, q\}$ un sous-groupe parabolique maximal standard de $\mathbf{G}$. On rappelle qu'on a défini dans 1.4.1 et 1.4.2 des sous-groupes distingués $\mathbf{G}_r \subset \mathbf{G}'_r$ et $\mathbf{L}'_{\ell,r} \subset \mathbf{L}_{\ell,r}$ du quotient de Levi $\mathbf{L}_r = \mathbf{P}_r/\mathbf{N}_r$ de $\mathbf{P}_r$ tels que $\mathbf{L}_r$ soit produit direct de $\mathbf{G}'_r$ et $\mathbf{L}'_{\ell,r}$ et produit quasi-direct de $\mathbf{G}_r$ et $\mathbf{L}_{\ell,r}$, que $\mathbf{G}_r$ soit le centre de $\mathbf{G}'_r$, que $\mathbf{L}'_{\ell,r} = \mathbf{L}_{\ell,r}$ et $\mathbf{G}'_r = \mathbf{G}_r$ si $r \neq q$ et que $\mathbf{L}_{\ell,q}$ soit isomorphe à $\mathbf{L}'_{\ell,q} \times \mathbf{SU}(p-q)$.*

(i) Si $r < q$, on peut trouver un système de représentants du double quotient $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ dans $(\mathbf{L}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$. Si $r = q$, on peut trouver un système de représentants du double quotient ci-dessus dans $\mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$.

(ii) Soit $\mathbf{R}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{Q}_r \subset \mathbf{R}$. On note $\mathbf{N}_R$ le radical unipotent de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_\ell$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}_{\ell,r}$ correspondant à $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}/\mathbf{N}_r$ est produit quasi-direct de $\mathbf{R}_\ell$ et $\mathbf{G}_r$). Si $g \in (\mathbf{L}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$, et si K_G est l'un des sous-groupes ouverts compact de $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$ ci-dessous

$$(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))$$

$$(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{R}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{R}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))$$

$$(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_R(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_R(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))$$

alors K_G s'écrit $\mathrm{K}_G = \mathrm{K}_{G,\Sigma}\mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$, avec $\mathrm{K}_{G,\Sigma} \subset \mathbf{G}_r(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$.
Si $r = q$, cette propriété reste vraie pour $g \in \mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$.

Démonstration.

(i) Pour tout $p \notin \Sigma$, on a la décomposition d'Iwasawa

$$\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q}_p)\mathrm{K}_p.$$

On en déduit que

$$\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^\Sigma) = \mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)\mathrm{K}_0^\Sigma,$$

donc qu'il existe un système de représentants dans $\mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$ du double quotient $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$. Si $r < q$, $\mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f) = \mathbf{P}_{\ell,r}(\mathbb{A}_f)\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, donc on peut prendre le système de représentants dans $(\mathbf{P}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$.

(ii) Soit $g \in (\mathbf{L}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f^\Sigma)\mathbf{G}(\mathbb{A}_{f_\Sigma})$.
Il suffit de montrer que

$$\mathrm{K}_1 = (g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma))/(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma))$$

et
$$\mathrm{K}_2 = (g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{R}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma))/(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{R}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma))$$
sont tous les deux égaux à $\mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$. Comme $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{K}_2$, on va montrer que $\mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma) \subset \mathrm{K}_1$ et $\mathrm{K}_2 \subset \mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$.
Supposons d'abord que $r < q$. Alors il suffit de traiter le cas où $g \in (\mathbf{L}_{\ell,r}\mathbf{N}_r)(\mathbb{A}_f^\Sigma)$. Notons π la projection de $\mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)$ sur $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)$; alors
$$\mathrm{K}_1 = \pi(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma))$$
$$\mathrm{K}_2 = \pi(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{R}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)).$$
Soit $h \in \mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$. Il existe $h' \in \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma) \cap \mathrm{K}_0^\Sigma = \mathbf{Q}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$ tel que $\pi(h') = h$. Alors $gh'g^{-1} \in g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)$, et $\pi(gh'g^{-1}) = h$ (car $\pi(g) = 1$). Donc $\mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma) \subset \mathrm{K}_1$.
Soit $k \in \mathrm{K}_0^\Sigma$ tel que $gkg^{-1} \in g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{R}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)$. Alors $k \in \mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma) \cap \mathrm{K}_0^\Sigma$ (car $g \in \mathbf{P}_r(\mathbb{A}_f^\Sigma)$), donc $\pi(k) = \pi(gkg^{-1}) \in \mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$. Donc $\mathrm{K}_2 \subset \mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)$.
Traitons enfin le cas $r = q$. On peut supposer que $g \in \mathbf{P}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)$. K_1 est le projeté sur $\mathbf{L}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)$ de $g(\mathrm{K}_0^\Sigma \cap \mathbf{Q}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma))g^{-1} = g\mathbf{Q}_q(\mathbb{Z}\Sigma)g^{-1}$. Comme $\mathbf{G}_q$ est central dans $\mathbf{L}_q$, K_1 contient $\mathbf{G}_q(\mathbb{Z}^\Sigma)$. D'autre part, on sait que $\mathbf{L}_q = \mathbf{L}'_{\ell,q} \times \mathbf{G}'_q$. Notons π la projection de $\mathbf{P}_q$ sur $\mathbf{G}'_q$. On a
$$\mathrm{K}_2 = (g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{L}'_{\ell,q}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma))/(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{L}'_{\ell,q}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)) = \pi(g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{L}'_{\ell,q}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)).$$
Soit $k \in K_0^\Sigma$ tel que $gkg^{-1} \in g\mathrm{K}_0^\Sigma g^{-1} \cap \mathbf{L}'_{\ell,q}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)$. Alors $k \in \mathbf{P}_q(\mathbb{A}_f^\Sigma)$, et $\pi(gkg^{-1}) = \pi(g)\pi(k)\pi(g)^{-1} = \pi(k)$, car $\pi(k) \in \mathbf{G}_q(\mathbb{Z}^\Sigma)$ et $\mathbf{G}_q$ est le centre de $\mathbf{G}'_q$. Donc $\mathrm{K}_2 \subset \mathbf{G}_q(\mathbb{Z}^\Sigma)$.

□

On voudrait de plus que tous les modèles entiers qui apparaissent soient des espaces algébriques. C'est possible grâce au lemme suivant.

Lemme 3.2.2 *Soit* (K, Σ) *comme dans la définition 3.1.1.3. Rappelons qu'on a fixé un système* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_q$ *de sous-groupes paraboliques maximaux standard de* $\mathbf{G}$. *Alors il existe un sous-groupe ouvert compact* $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$, *un ensemble de nombres premiers* $\Sigma' \supset \Sigma$ *et, pour tout* $i \in \{1, \ldots, q\}$, *un système de représentants* $(g_{ij})_{i \in J_i}$ *du double quotient* $\mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/K'$ *tels que*
(i) $\Sigma' - \Sigma$ *est fini ;*
(ii) (K', Σ') *vérifie la condition de la définition 3.1.1.3 ;*
(iii) les g_{ij} *vérifient la condition du (ii) du lemme 3.2.1 ;*
(iv) pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, *pour tout* $j \in J_i$, *le sous-groupe compact ouvert*
$$\mathrm{K}'_{ij} = (g_{ij}\mathrm{K}'g_{ij}^{-1} \cap \mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f))/(g_{ij}\mathrm{K}'g_{ij}^{-1} \cap \mathbf{L}_{\ell,i}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_i(\mathbb{A}_f))$$
de $\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f)$ *vérifie la condition suivante, qu'on notera (*) : pour tout sous-groupe compact ouvert* $\mathrm{K}_G \subset \mathrm{K}'_{ij}$ *tel que* (K_G, Σ') *vérifie la condition de la définition 3.1.1.3, le champ* $\mathcal{M}_{\Sigma'}^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_i, \mathcal{X}_i)$ *est représentable par un espace algébrique.*

En particulier, si $\mathbf{R} \subset \mathbf{P}_i$ *est un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{P}_i$ *tel que* $\mathbf{Q}_i \subset \mathbf{R}$ *et si* K_G *est un des sous-groupes ouverts compacts de* $\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f)$ *qui sont associés à* $\mathbf{R}$ *comme dans le lemme 3.2.1, le champ* $\mathcal{M}_{\Sigma'}^{\mathrm{K}_G}(\mathbf{G}_i, \mathcal{X}_i)$ *est représentable par un espace algébrique.*

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$ soit $(g_{ij})_{j \in J_i}$ un système de représentants du double quotient $\mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ vérifiant la condition du (i) lemme 3.2.1. Si K' est un sous-groupe compact ouvert de K, on note

$$\mathrm{K}'_{ij} = (g_{ij}\mathrm{K}'g_{ij}^{-1} \cap \mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f))/(g_{ij}\mathrm{K}'g_{ij}^{-1} \cap \mathbf{L}_{\ell,i}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_i(\mathbb{A}_f)).$$

Si K' est assez petit, il existe pour tous i, j un entier $N \geqslant 3$ tel que

$$\mathrm{K}'_{ij} \subset \{g \in \mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f) \text{ tq } (g-1)(\mathcal{O}_E^{p+q-2i} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}) \subset N(\mathcal{O}_E^{p+q-2i} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}})\}.$$

Fixons un $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$ assez petit au sens ci-dessus et distingué dans K. Quitte à diminuer encore K', on peut trouver un ensemble fini Σ_0 de nombres premiers tel que $\mathrm{K}' = \mathrm{K}'_{\Sigma_0}\mathrm{K}_0^{\Sigma_0}$, avec $\mathrm{K}'_{\Sigma_0} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma_0})$. On pose $\Sigma' = \Sigma \cup \Sigma_0$. Pour tous i, j, $(\mathrm{K}'_{ij}, \Sigma')$ vérifie la condition de la définition 3.1.1.3, et K'_{ij} vérifie la condition (*). Pour tout i, on peut choisir un système de représentants de $\mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'$ dans $\bigcup_{j \in J_i} g_{ij}\mathrm{K}$. Comme K' est distingué dans K, ceci finit la démonstration du lemme.

□

Remarque 3.2.3 Plus généralement, la méthode de la preuve ci-dessus permet de montrer qu'on peut rendre les sous-groupes compacts ouverts des $\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f)$ associés aux strates de bords aussi petits que l'on veut (en les nombres premiers de Σ) en diminuant K (ce n'est pas entièrement évident, car le nombre de strates de bord augmente lorsque K diminue).

Soit (K, Σ) comme plus haut ; on suppose que $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est un espace algébrique. On pose

$$\omega = \bigwedge^{pq} \Omega_{\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})/\mathcal{O}_F[1/\Sigma]}.$$

C'est un faisceau inversible sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega^{\otimes N}$ soit très ample sur la fibre générique $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ ([BB] 10.11). On a un morphisme (injectif sur les fibres génériques)

$$\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow P = \mathbf{Proj} \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \omega^{\otimes mN}.$$

Définition 3.2.4 *On note*

$$\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$$

l'adhérence de l'image de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ *dans* P*, et*

$$j : \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$$

le morphisme évident.

La fibre générique de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ est canoniquement isomorphe à $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, et la restriction de j aux fibres génériques est l'immersion ouverte $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ (mais j lui-même n'est pas forcément une immersion).

Soit (K,Σ) comme plus haut. On suppose que K vérifie les mêmes conditions que le K' du lemme 3.2.2. Pour tout $i \in \{1,\dots,q\}$, soit $(g_{ij})_{j\in J_i}$ un système de représentants du double quotient $\mathbf{P}_i(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_i(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ comme dans le lemme 3.2.2. On a construit dans 1.4.2 des sous-groupes compacts ouverts $\mathrm{K}_{ij}\subset\mathbf{G}_i(\mathbb{A}_f)$ et une stratification

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \sqcup \coprod_{i,j} M_{ij}$$

telle que M_{ij} s'identifie à la variété de Shimura $M^{\mathrm{K}_{ij}}(\mathbf{G}_i,\mathcal{X}_i)$. De plus, on a choisi les g_{ij} pour que (K_{ij},Σ) vérifie la condition de la définition 3.1.1.3, donc $M^{\mathrm{K}_{ij}}(\mathbf{G}_i,\mathcal{X}_i)$ a un modèle $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}_{ij}}(\mathbf{G}_i,\mathcal{X}_i)$ sur $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$, qui est un espace algébrique.

On va définir, par récurrence descendante sur i, des sous-espaces algébriques localement fermés $\mathcal{M}_{ij}$ de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ dont les fibres génériques sont les M_{ij}. Remarquons que, pour tout i, les M_{ij} sont fermés dans

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* - \left(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \cup \bigcup_{i'>i,j'} M_{i'j'}\right).$$

Ceci suggère une manière de faire. Pour tout $j\in J_q$, on prend pour $\mathcal{M}_{qj}$ l'adhérence de M_{qj} dans $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* - j(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}))$, munie de la structure réduite. Soit $i\in\{1,\dots,q-1\}$, et supposons les $\mathcal{M}_{i'j'}$ définis pour tout $i'>i$. Alors, pour tout $j\in J_i$, on prend pour $\mathcal{M}_{ij}$ l'adhérence (munie de la structure réduite) de M_{ij} dans

$$\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* - \left(j(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})) \cup \bigcup_{i'>i,j'} \mathcal{M}_{i'j'}\right).$$

Proposition 3.2.5 *Si on remplace Σ par son union avec un ensemble fini de nombres premiers (ce qui revient à inverser un nombre fini de nombres premiers sur la base $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$), alors $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ est un schéma normal projectif sur $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$, $j:\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ est une immersion ouverte, $(\mathcal{M}_{ij})$ est une stratification du bord $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* - \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ et, pour tous i,j, l'isomorphisme $M_{ij}\simeq M^{\mathrm{K}_{ij}}(\mathbf{G}_i,\mathcal{X}_i)$ se prolonge en un isomorphisme $\mathcal{M}_{ij}\simeq\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}_{ij}}(\mathbf{G}_i,\mathcal{X}_i)$.*

3.3 Systèmes de coefficients

Dans ce paragraphe, on va étendre les complexes de la définition 2.1.4.6 aux modèles entiers. On a donc un groupe connexe $\mathbf{L}$ qui est produit quasi-direct de deux sous-groupes $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_\ell$ et une donnée de Shimura $(\mathbf{G},\mathcal{X})$, et l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{X}$ s'étend en une action de $\mathbf{L}(\mathbb{Q})$ telle que $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$ agisse trivialement. Soit $\mathrm{K}_L\subset\mathbf{L}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact net.

On note $\mathrm{H} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $\Gamma_\ell = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$. Dans les cas qui nous intéressent ici, H/Γ_ℓ s'identifie à un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, et $M(\mathbf{G}, \mathcal{X})/\mathrm{H} = M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

Soit Σ un ensemble de nombres premiers. On suppose que H/Γ_ℓ s'écrit $\mathbf{G}_r(\mathbb{Z}^\Sigma)\mathrm{K}_\Sigma$, avec $\mathrm{K}_\Sigma \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma})$. Alors $(\mathrm{H}/\Gamma_\ell, \Sigma)$ vérifie la condition de la définition 3.1.1.3, donc le modèle entier $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ existe.

Proposition 3.3.1 *On fixe un nombre premier $\ell \in \Sigma$. Alors les complexes de faisceaux ℓ-adiques lisses $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, V)$ de la définition 2.1.4.6 (resp. les faisceaux ℓ-adiques lisses $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} A$ de la remarque 2.1.4.7) s'étendent en des complexes de faisceaux ℓ-adiques lisses (resp. des faisceaux ℓ-adiques lisses) sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, qu'on désignera par les mêmes notations.*

Démonstration. Notons pr la projection $\mathbf{L}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)$. Les faisceaux ℓ-adiques lisses sur $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ qu'on cherche à prolonger sont définis par la méthode de Pink, en utilisant le système projectif de revêtements finis étales $M^{\mathrm{H}'/\Gamma'_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, où $\mathrm{K}'_L \subset \mathrm{K}_L$, $\mathrm{H}' = \mathrm{K}'_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma'_\ell = \mathrm{K}'_L \cap \mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$. Comme tous les H-modules auxquels on applique la méthode de Pink proviennent de $pr(\mathrm{H})$-modules, on n'utilise en fait que les revêtements $M^{\mathrm{H}'/\Gamma'_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ tels que $\mathrm{K}'_L \supset \mathrm{K}_L \cap ker(pr)$. Or, si $\mathrm{K}'_L \supset \mathrm{K}_L \cap ker(pr)$, H'/Γ'_ℓ s'écrit $\mathbf{G}(\mathbb{Z}^\Sigma)\mathrm{K}'_\Sigma$, avec $\mathrm{K}'_\Sigma \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_{f\Sigma})$, donc le revêtement fini étale $M^{\mathrm{H}'/\Gamma'_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ s'étend en un revêtement fini étale $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}'/\Gamma'_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. On peut donc, en appliquant la méthode de Pink à ces revêtements, construire des faisceaux lisses ℓ-adiques sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ qui prolongent ceux déjà construits sur $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

□

3.4 Poids

On s'intéresse maintenant aux poids des faisceaux obtenus.

On identifie le groupe des caractères de $\mathbb{G}_m$ avec $\mathbb{Z}$ en faisant correspondre à $m \in \mathbb{Z}$ le caractère $\chi_m : x \longmapsto x^m$. Soient $\mathbf{H}$ un groupe algébrique, $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{H}$ un cocaractère et $\rho : \mathbf{H}(\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ une représentation algébrique de $\mathbf{H}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie. Alors la représentation $\rho \circ \lambda$ de $\mathbb{G}_m$ s'écrit comme une somme de caractères :

$$\rho \circ w = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \chi_m^{\otimes a_m},$$

et les poids de ρ (ou V) relativement à λ sont les m tels que $a_m \neq 0$. On dit que la représentation ρ est pure si elle n'a qu'un seul poids. Si λ est un cocaractère central de $\mathbf{H}$ (c'est le cas qui nous intéresse), alors toute représentation de $\mathbf{H}(\mathbb{Q}_\ell)$ est somme de représentations pures.

Rappelons qu'on a un cocaractère central $h_0 \circ w : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}, \lambda \longmapsto \lambda I_n$ (le cocaractère $w : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S}$ est l'inclusion $\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ sur les points réels). Dans la suite, les poids des représentations de $\mathbf{G}$ seront toujours relativement à ce cocaractère. Le résultat suivant a été

prouvé par Pink ([P2] 5.6.2, voir aussi [LR2] 6) :

Proposition 3.4.1 *On suppose ici que* $\mathbf{L} = \mathbf{G}$. *Soient* (K, Σ) *et* ℓ *comme ci-dessus. Alors, quitte à remplacer* Σ *par sa réunion avec un ensemble fini de nombres premiers, on a le résultat suivant : pour tout* $p \notin \Sigma$, *pour toute représentation algébrique de* $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ *dans un* $\mathbb{Q}_\ell$*-espace vectoriel* V *de dimension finie, si* V *est pure de poids* w, *le faisceau lisse* $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$ *sur la réduction modulo* p *de* $\mathcal{M}^{\mathrm{K}}_{\Sigma}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ *est pur de poids* $-w$ *(au sens de [BBD 5]).*

Corollaire 3.4.2 *On se place dans la situation de la section 3.3, et on prend* (K_L, Σ) *et* ℓ *comme ci-dessus. On fixe* $p \notin \Sigma$, *et on travaille sur la réduction modulo* p *des variétés de Shimura. Comme* $\mathbf{L} = \mathbf{G}\mathbf{G}_\ell$ *et que* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{G}_\ell$ *commutent, on peut voir* $h_0 \circ w$ *comme un cocaractère central de* $\mathbf{L}$, *et les poids des représentations de* $\mathbf{L}$ *seront pris relativement à ce cocaractère. Soit* V *une représentation de* $\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)$ *dans un* $\mathbb{Q}_\ell$*-espace vectoriel de dimension finie qui est pure de poids* w. *On note* $C = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, V)$, *vu comme un complexe de faisceaux* ℓ*-adiques sur* $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. *Alors on a un isomorphisme (non canonique)*

$$C \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(C)[-i],$$

et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, *le faisceau* $H^i(C) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} H^i(\Gamma_\ell, V)$ *est lisse pur de poids* $-w$ *sur* $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

Démonstration. Notons $\mathrm{K} = \mathrm{H} \cap \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. $\mathrm{H}/\mathrm{K}\Gamma_\ell$ est un groupe fini, donc on un revêtement fini étale $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, et l'image inverse de C à $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est le complexe ℓ-adique associé au complexe $R\Gamma(\Gamma_\ell, V)$ de représentations du groupe réductif $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$. L'isomorphisme

$$C \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(C)[-i]$$

est une conséquence du premier des lemmes ci-dessous, appliqué au morphisme fini étale $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. L'isomorphisme canonique

$$H^i(C) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} H^i(\Gamma_\ell, V)$$

vient de l'exactitude du foncteur $\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}$, et la lissité de $H^i(C)$ de la proposition 3.3.1. Enfin, le fait que les $H^i(C)$ soient purs de poids $-w$ découle de la proposition ci-dessus et du deuxième des lemmes ci-dessous, appliqué à $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$.

□

Lemme 3.4.3 *Soient* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *un morphisme fini étale entre schémas de type fini sur un corps et* $K \in D^b_c(Y, \mathbb{Q}_\ell)$. *S'il existe un isomorphisme*

$$\varphi^* K \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(\varphi^* K)[-i] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^* H^i(K)[-i],$$

alors on a un isomorphisme

$$K \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(K)[-i].$$

Démonstration. Supposons que

$$\varphi^* K \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^* H^i(K)[-i].$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$\tau_{\leqslant i-1}K \longrightarrow \tau_{\leqslant i}K \longrightarrow H^i(K)[-i] \xrightarrow{+1} .$$

Si on montre que la flèche de degré 1 de ce diagramme est nulle pour tout $i \in \mathbb{Z}$, cela impliquera que l'on a des isomorphismes $\tau_{\leqslant i}K \simeq \tau_{\leqslant i-1}K \oplus H^i(K)[-i]$, et la conclusion du lemme en découlera par récurrence sur le cardinal de $\{i \in \mathbb{Z}, H^i(K) \neq 0\}$.

Soit donc $i \in \mathbb{Z}$. L'image par φ^* de la flèche de degré 1 du triangle distingué

$$\tau_{\leqslant i-1}K \longrightarrow \tau_{\leqslant i}K \longrightarrow H^i(K)[-i] \xrightarrow{+1}$$

est la flèche de degré 1 du triangle distingué

$$\tau_{\leqslant i-1}\varphi^* K \longrightarrow \tau_{\leqslant i}\varphi^* K \longrightarrow H^i(\varphi^* K)[-i] \xrightarrow{+1} .$$

Cette dernière flèche est nulle, car l'hypothèse implique que $\tau_{\leqslant i}\varphi^* K \simeq \tau_{\leqslant i-1}\varphi^* \oplus H^i(\varphi^* K)[-i]$. D'après le sous-lemme ci-dessous, le morphisme

$$\mathrm{Ext}^1(H^i(K)[-i], \tau_{\leqslant i-1}K) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H^i(\varphi^* K)[-i], \tau_{\leqslant i-1}\varphi^* K)$$

induit par φ^* est injectif, d'où le résultat cherché.

□

Sous-lemme 3.4.4 *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini étale. Alors, pour tous $K, L \in D^b_c(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit par φ^**

$$\mathrm{Ext}^k(K, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(\varphi^* K, \varphi^* L)$$

est injectif.

Démonstration. Soient $K, L \in D^b_c(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ et $k \in \mathbb{Z}$. Le morphisme $\mathrm{Ext}^k(K, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(\varphi^* K, \varphi^* L)$ est le composé du morphisme $\mathrm{Ext}^k(K, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(K, \varphi_*\varphi^* L)$ provenant du morphisme d'adjonction $L \longrightarrow \varphi_*\varphi^* L$ et de l'isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Ext}^k(K, \varphi_*\varphi^* L) \simeq \mathrm{Ext}^k(\varphi^* K, \varphi^* L)$. Or on a le morphisme trace $Tr : \varphi_*\varphi^* L \longrightarrow L$, qui est tel que le composé

$$L \xrightarrow{adj} \varphi_*\varphi^* L \xrightarrow{Tr} L$$

soit un isomorphisme (puisqu'on a pris des complexes à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$). Le morphisme d'adjonction $L \longrightarrow \varphi_*\varphi^* L$ identifie donc L à un facteur direct de $\varphi_*\varphi^* L$, ce qui implique que le morphisme $\mathrm{Ext}^k(K, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k(K, \varphi_*\varphi^* L)$ est injectif.

□

Lemme 3.4.5 *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini étale entre deux schémas lisses de type fini sur un corps fini et $\mathcal{F}$ un faisceau ℓ-adique lisse sur Y. Si $\varphi^*\mathcal{F}$ est pur de poids w, alors $\mathcal{F}$ est pur de poids w.*

Démonstration. Supposons $\varphi^*\mathcal{F}$ pur de poids w. D'après [BBD] 4.1.3 et 5.1.14, $\varphi_*\varphi^*\mathcal{F}$ est pur de poids w. Or on a comme dans la preuve du sous-lemme ci-dessus le morphisme trace $Tr : \varphi_*\varphi^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, qui est tel que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{adj} \varphi_*\varphi^*\mathcal{F} \xrightarrow{Tr} \mathcal{F}$$

soit un isomorphisme. $\mathcal{F}$ s'identifie donc à un facteur direct de $\varphi_*\varphi^*\mathcal{F}$, donc, d'après [BBD] 5.3.1, il est pur de poids w.

□

3.5 Théorème de Pink

On se place, comme dans les deux sections ci-dessus, dans la situation de la définition 2.1.4.6. Soit Σ un ensemble de nombres premiers. On suppose que $(\mathrm{H}/\Gamma_\ell, \Sigma)$ est comme dans la proposition 3.2.5, dont on utilisera les notations (c'est-à-dire que $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ a une "bonne" compactification de Baily-Borel). On note j l'immersion ouverte $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$.

On fixe $\ell \in \Sigma$ et on note pr la projection $\mathbf{L}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)$.

La proposition suivante et son corollaire ont été montrés par Wildeshaus dans [W] :

Proposition 3.5.1 *Quitte à remplacer Σ par sa réunion avec un ensemble fini de nombres premiers, on a le résultat suivant : la formation de Rj_* commute à tout changement de base $S \longrightarrow Spec(\mathcal{O}_F[1/\Sigma])$, et pour tout K_L-module M qui provient d'un $pr(\mathrm{K}_L)$-module annulé par une puissance de ℓ, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour toute strate $\mathcal{M}_{ij}$ de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, la restriction de $R^q j_* \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} R\Gamma(\Gamma_\ell, M)$ à $\mathcal{M}_{ij}$ est un faisceau localement constant.*

Démonstration. La première condition et la propriété cherchée peuvent être obtenues pour un nombre fini de K_L-modules en ajoutant à Σ un nombre fini de nombres premiers, grâce au théorème de changement de base générique de Deligne (SGA 4 1/2 Th finitude), cf [W] 3.8.

Notons $\mathcal{C}$ la catégorie des K_L-modules M qui proviennent d'un $pr(\mathrm{K}_L)$-module annulé par une puissance de ℓ. Si la propriété cherchée est vrai pour les objets simples de $\mathcal{C}$, alors elle est vraie pour tous les objets de $\mathcal{C}$. Or $\mathcal{C}$ n'a qu'un nombre fini d'objets simples ([W] 3.7), d'où la proposition.

□

Comme un faisceau localement constant sur le modèle canonique d'une variété de Shimura a au plus une extension localement constante au modèle entier, on en déduit le :

Corollaire 3.5.2 *Dans la situation de la proposition ci-dessus, le théorème 2.2.1 et son corollaire restent vrais sur les modèles entiers, à condition de se restreindre aux* H*-modules qui proviennent de* $\mathrm{K}_L/(\mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^\ell))$*-modules annulés par une puissance de* ℓ*.*

Soit $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert net. Pour construire les complexes pondérés sur (la réduction modulo p de) la compactification de Baily-Borel de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, on utilisera un certain nombre (fini) de variétés de Shimura :

(i) $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$;

(ii) les strates de bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, et les revêtements finis étales de ces strates qui correspondent aux sous-groupes ouverts compacts du lemme 3.2.1 (ii) ;

(iii) pour toute variété de Shimura de (ii), les strates de bord de sa compactification de Baily-Borel, et les revêtements de ces strates analogues aux revêtements de (ii) ;

(iv) et ainsi de suite.

Définition 3.5.3 *On dira que* K *est assez petit s'il existe un ensemble fini de nombres premiers* Σ *et* $\ell \in \Sigma$ *tels que* (K, Σ) *vérifie la condition de la définition 3.1.1.3, et que tous les modèles entiers des variétés de Shimura énumérées ci-dessus (ces modèles existent sur* $\mathcal{O}_F[1/\Sigma]$ *d'après le lemme 3.2.1) vérifient la conclusion du lemme 3.2.2 et que les modèles entiers de leurs compactifications de Baily-Borel vérifient les conclusions des propositions 3.2.5, 3.4.1 et 3.5.1.*

Il est toujours possible de rendre K assez petit dans ce sens (utiliser la remarque 3.2.3).

Si on a un couple (K, Σ) vérifiant toutes les conditions ci-dessus et si p est un nombre premier qui n'appartient pas à Σ, on peut réduire toutes les variétés modulo p : on obtient des modèles modulo p des variétés et des complexes de faisceaux ℓ-adiques à faisceaux de cohomologie lisses purs de poids connus sur les variétés de Shimura, dont les prolongements aux compactifications de Baily-Borel vérifient le corollaire 2.2.2. De plus, d'après la proposition 3.1.2.4, ces objets ne dépendent pas du choix de Σ. On les notera souvent de la même façon que les objets sur le corps reflex F (en précisant à l'avance si l'on est en caractéristique 0 ou p).

Dans la suite, lorsque nous parlerons de la réduction modulo p de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, nous ferons toujours référence à la situation ci-dessus.

Remarque 3.5.4 Si l'on disposait de compactifications toroïdales des $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ vérifiant les propriétés de [P2] 3.9 et 3.10, alors les résultats de [P2] s'étendraient automatiquement aux modèles entiers (sans qu'il soit besoin d'inverser des nombres premiers supplémentaires). Malheureusement, on ne sait construire ces compactifications que si le groupe est $\mathbf{GU}(1,1)$ (auquel cas les variétés de Shimura associées sont des courbes modulaires) ou $\mathbf{GU}(2,1)$ (voir [L] et le chapitre I de [Be]).

4 Prolongement intermédiaire des faisceaux pervers purs

Cette partie est indépendante des autres.

On fixe un corps fini $\mathbb{F}_q$ et un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$. Tous les schémas sont séparés de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Si X est un schéma, on note $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ la catégorie des complexes ℓ-adiques mixtes sur X (au sens de [BBD] 5.1.5 ; en particulier, les complexes sont à poids entiers), munie de la t-structure donnée par la perversité autoduale.

Soient X un schéma et $j : U \longrightarrow X$ un ouvert non vide de X. Le premier objectif de cette partie est d'écrire $j_{!*}K$, où K est un faisceau pervers pur sur U, comme un certain tronqué par le poids de Rj_*K (théorème 4.1.4). Le deuxième objectif est de calculer la trace d'une puissance Φ de l'endomorphisme de Frobenius sur la cohomologie de $j_{!*}K$ en fonction de la trace de Φ sur la cohomologie de Rj_*K et de complexes de même type supportés par $X - U$ (théorème 4.3.5).

4.1 Troncature par le poids dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$

Proposition 4.1.1 *Soit X un schéma sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, on note ${}^wD^{\leqslant a}(X)$, ou ${}^wD^{\leqslant a}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X, (resp. ${}^wD^{\geqslant a}(X)$ ou ${}^wD^{\geqslant a}$) la sous-catégorie pleine de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dont les objets sont les complexes mixtes K tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK$ soit de poids $\leqslant a$ (resp. $\geqslant a$). Alors :*

(i) ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant a}$ sont des sous-catégories stables par décalage et extensions (cf [BBD] 1.2.6) de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (en particulier, ce sont des sous-catégories triangulées).
La dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant -a}$.
Si $a < a'$, on a ${}^wD^{\leqslant a} \cap {}^wD^{\geqslant a'} = 0$.

(ii) On a ${}^wD^{\leqslant a}(1) = {}^wD^{\leqslant a-2}$ et ${}^wD^{\geqslant a}(1) = {}^wD^{\geqslant a-2}$ (où (1) est le twist à la Tate).

(iii) Pour tous $K \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $L \in {}^wD^{\geqslant a+1}$, on a $R\mathrm{Hom}(K, L) = 0$.

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $({}^wD^{\leqslant a}, {}^wD^{\geqslant a+1})$ est une t-structure sur $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

Cette proposition sera démontrée dans la section 4.2.

D'après [BBD] 1.3.3, l'inclusion ${}^wD^{\leqslant a} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (resp. ${}^wD^{\geqslant a} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche), qu'on notera $w_{\leqslant a}$ (resp. $w_{\geqslant a}$), et pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, il existe un unique morphisme $w_{\geqslant a+1}K \longrightarrow (w_{\leqslant a})K[1]$ qui fait du triangle suivant un triangle distingué

$$w_{\leqslant a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{\geqslant a+1}K \longrightarrow (w_{\leqslant a}K)[1].$$

Ce triangle est, à isomorphisme unique près, l'unique triangle distingué $A \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{+1}$ avec $A \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $B \in {}^wD^{\geqslant a+1}$ (toujours d'après [BBD] 1.3.3).

Comme la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant -a}$, elle échange aussi $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant -a}$.

Remarques 4.1.2

(1) ${}^wD^{\leqslant a}$ n'est pas la catégorie des complexes mixtes de poids $\leqslant a$: un complexe mixte K est de poids $\leqslant a$ si et seulement si ${}^pH^iK$ est de poids $\leqslant a+i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ([BBD] 5.4.1), et cette condition est différente de la condition qui caractérise les objets de ${}^wD^{\leqslant a}$.

(2) Le décalage de 1 dans la définition de la t-structure est nécessaire : $({}^wD^{\leqslant a}, {}^wD^{\geqslant a})$ n'est pas une t-structure.

(3) $({}^wD^{\leqslant a}, {}^wD^{\geqslant a+1})$ est une t-structure quelque peu étrange : son coeur est nul, et elle ne donne donc pas lieu à une théorie cohomologique intéressante. De plus, ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant a+1}$ sont des sous-catégories triangulées de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (en particulier, elles sont stables par le foncteur [1]), ce qui est inhabituel.

(4) Si K est un faisceau pervers mixte, $w_{\leqslant a}$ est simplement le plus grand sous-faisceau pervers de K de poids $\leqslant a$, et $w_{\geqslant a}K$ est le plus grand quotient pervers de K de poids $\geqslant a$ ([BBD] 5.3.5).
Beilinson a montré dans [B] que le foncteur "réalisation" ([BBD] 3.1.9) de la catégorie dérivée bornée de la catégorie des faisceaux pervers mixtes sur X dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ est une équivalence de catégories. Si $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ est représenté par un complexe $C^\bullet$ de faisceaux pervers mixtes, alors $w_{\leqslant a}K$ (resp. $w_{\geqslant a}K$) est représenté par le complexe $(w_{\leqslant a}C^n)$ (resp. $(w_{\geqslant a}C^n)$).

La proposition suivante donne quelques propriétés des foncteurs $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant a}$.

Proposition 4.1.3

(i) Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, on a $w_{\leqslant a}(K(1)) = (w_{\leqslant a+2}K)(1)$ et $w_{>a}(K(1)) = (w_{>a+2}K)(1)$.

(ii) Soit $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. L'image par ${}^pH^i$ de la flèche de cobord $w_{\geqslant a+1}K \longrightarrow (w_{\leqslant a}K)[1]$ est nulle pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué

$$w_{\leqslant a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{\geqslant a+1}K \xrightarrow{+1}$$

donne des suites exactes courtes de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow {}^pH^i w_{\leqslant a}K \longrightarrow {}^pH^iK \longrightarrow {}^pH^i w_{\geqslant a+1}K \longrightarrow 0.$$

(iii) $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant a}$ commutent au foncteur de décalage [1], et ils envoient les triangles distingués de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sur des triangles distingués.

(iv) $w_{\leqslant a}$ et $w_{\geqslant a}$ envoient la catégorie abélienne des faisceaux pervers mixtes dans elle-même, et leurs restrictions à cette catégorie sont des foncteurs exacts. Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$w_{\leqslant a}({}^pH^iK) = {}^pH^i w_{\leqslant a}K$$

$$w_{\geqslant a}({}^pH^iK) = {}^pH^i w_{\geqslant a}K.$$

(v) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Si la dimension des fibres de f est inférieure ou égale à d, alors

$$Rf_!({}^wD^{\leqslant a}(X)) \subset {}^wD^{\leqslant a+d}(Y)$$

$$Rf_*({}^wD^{\geqslant a}(X)) \subset {}^wD^{\geqslant a-d}(Y)$$
$$f^*({}^wD^{\leqslant a}(Y)) \subset {}^wD^{\leqslant a+d}(X)$$
$$f^!({}^wD^{\geqslant a}(Y)) \subset {}^wD^{\geqslant a-d}(X).$$

La démonstration des propositions 4.1.1 et 4.1.3 sera donnée dans la section 4.2.

Théorème 4.1.4 *Soient $a \in \mathbb{Z}$, X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $j : U \longrightarrow X$ un ouvert non vide de X, et K un faisceau pervers pur de poids a sur U. Alors les flèches canoniques*

$$w_{\geqslant a} j_! K \longrightarrow j_{!*} K \longrightarrow w_{\leqslant a} R j_* K$$

sont des isomorphismes.

Si K est le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$, cette formule est à rapprocher des formules 4.5.7 et 4.5.9 de l'article [S] de Morihiko Saito.

Démonstration. Il suffit de montrer que la deuxième flèche est un isomorphisme (le cas de la première flèche en résulte par dualité).
Cela découle des trois points suivants (i est l'inclusion de $X - U$ dans X) :

(1) Un complexe $K \in D^b_m(U, \mathbb{Q}_\ell)$ a au plus un prolongement $L \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que $i^*L \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $i^!L \in {}^wD^{\geqslant a+1}$.
En effet, soient $L, L' \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On a un triangle distingué

$$R\mathrm{Hom}(i^*L, i^!L') \longrightarrow R\mathrm{Hom}(L, L') \longrightarrow R\mathrm{Hom}(j^*L, j^*L') \xrightarrow{+1}.$$

Si $i^*L \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $i^!L \in {}^wD^{\geqslant a+1}$, alors $R\mathrm{Hom}(i^*L, i^!L') = 0$ d'après le (iii) de la proposition 4.1.1, donc on a un isomorphisme

$$R\mathrm{Hom}(L, L') \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(j^*L, j^*L').$$

(2) Soit $K \in D^b_m(U, \mathbb{Q}_\ell)$. On note $L = w_{\leqslant a} R j_* K$. Alors $i^*L \in {}^wD^{\leqslant a}$ par le (iv) de la proposition 4.1.3. De plus, on a un triangle distingué

$$L \longrightarrow R j_* K \longrightarrow w_{\geqslant a+1} R j_* K \xrightarrow{+1},$$

d'où un isomorphisme

$$i^! w_{\geqslant a+1} R j_* K[-1] \xrightarrow{\sim} i^!L.$$

D'après le (iv) de la proposition 4.1.3, $i^!L \in {}^wD^{\geqslant a+1}$.

(3) Soit K un faisceau pervers pur de poids a sur U. Alors $j_{!*}K$ est pervers pur de poids a sur X par [BBD] 5.4.3, donc, par [BBD] 5.1.14 et 5.4.1, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^k i^* j_{!*} K$ est de poids $\leqslant a + k$ et ${}^pH^k i^! j_{!*} K$ est de poids $\geqslant a + k$. D'après le lemme 4.5.1 de la section 5 à la fin de cette partie, ${}^pH^k i^* j_{!*} K = 0$ si $k \geqslant 0$ et ${}^pH^k i^! j_{!*} K = 0$ si $k \leqslant 0$, donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^k i^* j_{!*} K$ est de poids $\leqslant a - 1$ et ${}^pH^i k^! j_{!*} K$ est de poids $\geqslant a + 1$. Autrement dit, $i^* j_{!*} K \in {}^wD^{\leqslant a-1} \subset {}^wD^{\leqslant a}$ et $i^! j_{!*} K \in {}^wD^{\geqslant a+1}$.

□

4.2 Preuve des propositions de la section 4.1

Dans cette section, nous allons prouver les propositions 4.1.1 et 4.1.3 de la section précédente.

Démonstration de la proposition 4.1.1.

(i) Il est clair que ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant a}$ sont stables par décalage et que la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant -a}$.
Pour montrer la stabilité par extensions de ${}^wD^{\leqslant a}$ (resp. ${}^wD^{\geqslant a}$), il suffit de prouver que la catégorie des faisceaux pervers de poids $\leqslant a$ (resp. $\geqslant a$) est une sous-catégorie épaisse de la catégorie des faisceaux pervers, c'est-à-dire stable par noyaux, conoyaux et extensions. Par dualité, il suffit de traiter le premier cas. La stabilité par noyaux et conoyaux résulte de [BBD] 5.3.1, et la stabilité par extensions se prouve facilement à partir de [BBD] 5.1.9. Supposons que $a < a'$. En appliquant la fin de [BBD] 5.1.8 aux objets de cohomologie perverse, on voit que ${}^wD^{\leqslant a} \cap {}^wD^{\geqslant a'} = 0$.

(ii) Évident.

(iii) Voir le premier des lemmes ci-dessous.

(iv) La condition (ii) de [BBD] 1.3.1 est évidente. La condition (i) résulte du point (iii) ci-dessus, et la condition (iii) est prouvée dans le deuxième des lemmes ci-dessous.

□

Lemme 4.2.1 *Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $K, L \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K)$ est de poids $\leqslant a$ et ${}^pH^i(L)$ de poids $\geqslant a+1$. Alors $R\mathrm{Hom}(K, L) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$ {}^p\tau_{\leqslant i-1}L \longrightarrow {}^p\tau_{\leqslant i}L \longrightarrow {}^pH^iL[-i] \xrightarrow{+1}, $$

d'où un triangle distingué

$$ R\mathrm{Hom}(K, {}^p\tau_{\leqslant i-1}L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(K, {}^p\tau_{\leqslant i}L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(K, {}^pH^iL)[-i] \xrightarrow{+1}. $$

Si on montre le résultat pour L pervers, on pourra, grâce à ces triangles, en déduire le résultat pour L quelconque en faisant une récurrence sur le cardinal de $\{i \in \mathbb{Z} \text{ tq } {}^pH^iL \neq 0\}$. On peut donc supposer L pervers. On se ramène de même au cas où K est pervers.

Notons F le morphisme de Frobenius géométrique. D'après [BBD] 5.1.2.5, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$ une suite exacte

$$ 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F \longrightarrow 0. $$

K est de poids $\leqslant a$ et L de poids $\geqslant a+1$, donc $\mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})$ est de poids $> i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ([BBD] 5.1.15 (i)). On en déduit que si $i \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})$ est de poids > 0, donc que

$$ \mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F = \mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F = 0 $$

(comme dans la preuve de [BBD] 5.1.15).

D'autre part, K et L sont pervers (donc $K_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et $L_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ aussi), d'où $\mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = 0$ pour $i < 0$.

Finalement, on a obtenu : pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F = \mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F = 0.$$

Les suites exactes ci-dessus impliquent que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(K, L) = 0,$$

ce qui est le résultat cherché.

□

Remarque 4.2.2 Le lemme ci-dessus reste valable, avec la même preuve, pour une perversité arbitraire (vérifiant les conditions de [BBD] 2.2.1).

Lemme 4.2.3 *Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, il existe un triangle distingué dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$*

$$K_1 \longrightarrow K \longrightarrow K_2 \xrightarrow{+1}$$

tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK_1$ soit de poids $\leqslant a$ et ${}^pH^iK_2$ de poids $\geqslant a+1$.

Démonstration. On fixe $a \in \mathbb{Z}$ et on raisonne par récurrence sur $card(\{i \in \mathbb{Z} \text{ tq } {}^pH^iK \neq 0\})$.

Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $K \simeq {}^pH^iK[-i]$. Alors, d'après [BBD] 5.3.5, il existe un sous-faisceau pervers $L \subset {}^pH^iK$ de poids $\leqslant a$ tel que ${}^pH^iK/L$ soit de poids $\geqslant a+1$. Il suffit de poser $K_1 = L[-i]$ et $K_2 = ({}^pH^iK/L)[-i]$.

Soit $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que $n = card\{i \in \mathbb{Z} \text{ tq } {}^pH^iK \neq 0\} \geqslant 2$. Supposons le lemme prouvé pour tous les $K' \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tels que $card\{i \in \mathbb{Z} \text{ tq } {}^pH^iK' \neq 0\} < n$, et montrons-le pour K. Il suffit de montrer le résultat suivant : si on a un triangle distingué de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$

$$K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$$

et que la conclusion du lemme vaut pour K' et K'', alors elle vaut aussi pour K.

On se donne donc des triangles distingués dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$

$$\begin{tikzcd}
 & & \\
K'_2 \arrow[u, "+1"] & & K''_2 \arrow[u, "+1"] \\
K' \arrow[u] \arrow[r] & K \arrow[r] & K'' \arrow[u] \arrow[r, "+1"] \\
K'_1 \arrow[u] & & K''_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et on suppose que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK_1'$ et ${}^pH^iK_1''$ sont de poids $\leqslant a$ et ${}^pH^iK_2'$ et ${}^pH^iK_2''$ de poids $\geqslant a+1$; autrement dit, K_1' et K_1'' sont dans ${}^wD^{\leqslant a}$ et K_2' et K_2'' sont dans ${}^wD^{\geqslant a+1}$. D'après le lemme 4.2.1, $R\mathrm{Hom}(K_1'', K_2'[1]) = 0$, donc il existe un unique morphisme $K_1'' \longrightarrow K_1'[1]$ qui fait commuter le carré

$$\begin{tikzcd} K_1'' \arrow[r] \arrow[d] & K_1'[1] \arrow[d] \\ K'' \arrow[r] & K'[1] \end{tikzcd}$$

D'après [BBD] 1.1.11, on peut compléter le diagramme commutatif en traits pleins pour obtenir un diagramme dont les lignes et les colonnes sont des triangles distingués et dont tous les carrés sont commutatifs, sauf le carré marqué $-$, qui est anticommutatif :

$$\begin{tikzcd} K_1''[1] \arrow[r] & K_1'[2] \arrow[r, dashed] & K_1[2] \arrow[r, dashed] & K_1''[2] \\ K_2'' \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_2'[1] \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_2[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] \arrow[ur, phantom, "-"] & K_2''[1] \arrow[u] \\ K'' \arrow[u] \arrow[r] & K'[1] \arrow[u] \arrow[r] & K[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r] & K''[1] \arrow[u] \\ K_1'' \arrow[u] \arrow[r] & K_1'[1] \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_1[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & K_1''[1] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Comme ${}^wD^{\leqslant a}$ et ${}^wD^{\geqslant a+1}$ sont stables par extensions (proposition 4.1.1 (i)), $K_1 \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $K_2 \in {}^wD^{\geqslant a+1}$.

□

Démonstration de la proposition 4.1.3.

(i) Soit $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On a un triangle distingué

$$(w_{\leqslant a+2}K)(1) \longrightarrow K(1) \longrightarrow (w_{>a+2}K)(1) \xrightarrow{+1}$$

avec $(w_{\leqslant a+2}K)(1) \in {}^wD^{\leqslant a}$ et $(w_{>a+2}K)(1) \in {}^wD^{>a}$, d'où des isomorphismes canoniques $w_{\leqslant a}(K(1)) = (w_{\leqslant a+2}K)(1)$ et $w_{>a}(K(1)) = (w_{>a+2}K)(1)$.

(ii) Soient $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $i \in \mathbb{Z}$. Comme ${}^pH^iw_{\geqslant a+1}K$ est de poids $\geqslant a+1$ et que ${}^pH^{i+1}w_{\leqslant a}K$ est de poids $\leqslant a$, la flèche ${}^pH^iw_{\geqslant a+1}K \longrightarrow {}^pH^{i+1}w_{\leqslant a}K$ est nulle par [BBD] 5.3.1.

(iii) et (iv) Il suffit de prouver les assertions pour $w_{\leqslant a}$, celles pour $w_{\geqslant a}$ en résultant par dualité.

$w_{\leqslant a}$ commute au décalage parce que ${}^wD^{\leqslant a}$ est invariante par décalage.

Soit K un faisceau pervers mixte. Si L est le plus grand sous-faisceau pervers de K de poids $\leqslant a$, alors K/L est de poids $\geqslant a+1$ ([BBD] 5.3.5). Donc $w_{\leqslant a}K = L$, et $w_{\leqslant a}K$ est pervers.

L'exactitude de la restriction de $w_{\leqslant a}$ à la catégorie des faisceaux pervers mixtes provient de la fin de [BBD] 5.3.5 (le fait que les morphismes sont strictement compatibles à la filtration par le poids).
Soient $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $i \in \mathbb{Z}$. D'après (ii), on a une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow {}^pH^i w_{\leqslant a} K \longrightarrow {}^pH^i K \longrightarrow {}^pH^i w_{\geqslant a+1} K \longrightarrow 0$$

avec ${}^pH^i w_{\leqslant a} K$ de poids $\leqslant a$ et ${}^pH^i w_{\geqslant a+1} K$ de poids $\geqslant a+1$, donc ${}^pH^i w_{\leqslant a} K = w_{\leqslant a}({}^pH^i K)$.
Le fait que $w_{\leqslant a}$ envoie les triangles distingués sur des triangles distingués résulte de la preuve du lemme 4.2.3.

(v) Les inclusions résultent de [BBD] 4.2.4 et 5.1.14.
Traitons par exemple le cas de $Rf_!$. Soit $K \in {}^wD^{\leqslant a}(X)$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^j K$ est de poids $\leqslant a$ par définition de ${}^wD^{\leqslant a}(X)$, donc $Rf_! {}^pH^j K$ est de poids $\leqslant a$ par [BBD] 5.1.14, et ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K)$ est de poids $\leqslant a+i$ par [BBD] 5.4.1. Or, par [BBD] 4.2.4, ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K) = 0$ si $i > d$, donc ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K)$ est de poids $\leqslant a+d$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. En utilisant la suite spectrale

$$E_2^{ij} = {}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K) \Longrightarrow {}^pH^{i+j} Rf_! K,$$

on voit que ${}^pH^k Rf_! K$ est de poids $\leqslant a+d$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

□

4.3 t-structures recollées

Nous utiliserons la notion suivante de stratification :

Définition 4.3.1 *Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Une* stratification *de X est une partition finie $(S_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de X par des sous-schémas localement fermés (les strates) telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, S_i est ouvert dans $X - \bigcup_{0 \leqslant j < i} S_j$.*

Soit X un schéma muni d'une stratification $(S_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note i_k l'inclusion de S_k dans X. $U = S_0$ est un ouvert de X ; on note $j = i_0 : U \longrightarrow X$ l'inclusion.
La proposition suivante est un cas particulier de [BBD] 1.4.10.

Proposition 4.3.2 *Soit $\underline{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$. On note ${}^wD^{\leqslant \underline{a}}(X)$ ou ${}^wD^{\leqslant \underline{a}}$ (resp. ${}^wD^{>\underline{a}}(X)$ ou ${}^wD^{>\underline{a}}$) la sous-catégorie pleine de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dont les objets sont les complexes mixtes K tels que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $i_k^* K \in {}^wD^{\leqslant a_k}(S_k)$ (resp. $i_k^! K \in {}^wD^{>a_k}(S_k)$).*
Alors $({}^wD^{\leqslant \underline{a}}, {}^wD^{>\underline{a}})$ est une t-structure sur $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

On note aussi ${}^wD^{\geqslant (a_0, \ldots, a_n)} = {}^wD^{>(a_0-1, \ldots, a_n-1)}$. Il est évident d'après la définition de ${}^wD^{\leqslant \underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ que ce sont des sous-catégories stables par décalage et extensions de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, que la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leqslant \underline{a}}$ et ${}^wD^{\geqslant -\underline{a}}$, et que

$${}^wD^{\leqslant (a_0, \ldots, a_n)}(1) = {}^wD^{\leqslant (a_0-2, \ldots, a_n-2)}$$

$$^{w}D^{>(a_0,\dots,a_n)}(1) = {}^{w}D^{>(a_0-2,\dots,a_n-2)}.$$

D'après [BBD] 1.3.3, l'inclusion $^{w}D^{\leqslant \underline{a}} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (resp. $^{w}D^{>\underline{a}} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche), qu'on note $w_{\leqslant \underline{a}}$ (resp. $w_{>\underline{a}}$). Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, il existe un unique morphisme $w_{>\underline{a}}K \longrightarrow (w_{\leqslant \underline{a}}K)[1]$ tel que le triangle

$$w_{\leqslant \underline{a}}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{>\underline{a}}K \longrightarrow (w_{\leqslant \underline{a}}K)[1]$$

soit distingué.
De plus, à isomorphisme unique près, il existe un unique triangle distingué $K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$ avec $K' \in {}^{w}D^{\leqslant \underline{a}}$ et $K'' \in {}^{w}D^{>\underline{a}}$.

Enfin, la dualité de Poincaré échange $w_{\leqslant \underline{a}}$ et $w_{\geqslant -\underline{a}}$ (car elle échange $^{w}D^{\leqslant \underline{a}}$ et $^{w}D^{\geqslant -\underline{a}}$).

Lemme 4.3.3 *Si $a_0 = \cdots = a_n = a$, alors $({}^{w}D^{\leqslant \underline{a}}, {}^{w}D^{>\underline{a}})$ est la t-structure $({}^{w}D^{\leqslant a}(X), {}^{w}D^{>a}(X))$ de la section 4.1.*

Démonstration. Soit $K \in {}^{w}D^{\leqslant a}$. D'après le (iv) de la proposition 4.1.3, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $i_k^* K \in {}^{w}D^{\leqslant a}(S_k)$. Donc $K \in {}^{w}D^{\leqslant \underline{a}}$. Par dualité, on a $^{w}D^{>a} \subset {}^{w}D^{>\underline{a}}$.

Soit $K \in {}^{w}D^{\leqslant \underline{a}}$. On a un triangle distingué

$$w_{\leqslant a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{>a}K \xrightarrow{+1}.$$

D'après ce qui précède, $w_{\leqslant a}K \in {}^{w}D^{\leqslant \underline{a}}$ et $w_{>a} \in {}^{w}D^{>\underline{a}}$, donc $w_{\leqslant a}K = w_{\leqslant \underline{a}}K = K$, et $K \in {}^{w}D^{\leqslant a}$. Par dualité, on a $^{w}D^{>\underline{a}} \subset {}^{w}D^{>a}$.

□

Proposition 4.3.4 *Pour tous $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on note*

$$w^k_{\leqslant a} = w_{\leqslant(+\infty,\dots,+\infty,a,+\infty,\dots,+\infty)}$$

$$w^k_{\geqslant a} = w_{\geqslant(-\infty,\dots,-\infty,a,-\infty,\dots,-\infty)}$$

où, dans les deux formules, le a est en k-ième position (et on commence à compter à 0).

(i) On a

$$w_{\leqslant \underline{a}} = w^n_{\leqslant a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\leqslant a_0}$$

$$w_{\geqslant \underline{a}} = w^n_{\geqslant a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\geqslant a_0}.$$

(ii) Soient $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ et $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Alors on a des triangles distingués (uniques à isomorphisme unique près)

$$w^k_{\leqslant a}K \longrightarrow K \longrightarrow Ri_{k*}w_{>a}i_k^*K \xrightarrow{+1}$$

$$i_{k!}w_{\leqslant a}i_k^!K \longrightarrow K \longrightarrow w^k_{>a}K \xrightarrow{+1}.$$

Démonstration.

(i) Il suffit d'appliquer plusieurs fois [BBD] 1.4.13.1.

(ii) Il suffit de traiter le cas de $w^k_{\leqslant a}$ (celui de $w^k_{>a}$ en résulte par dualité). On définit $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ par : $a_r = +\infty$ et si $r \neq k$, et $a_k = a$.
On note $L = Ri_{k*}w_{>a}i_k^*K \in {}^wD^{>\underline{a}}$, et on complète le morphisme évident $K \xrightarrow{adj} Ri_{k*}i_k^*K \longrightarrow L$ en un triangle distingué $L' \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{+1}$.
Il suffit de montrer que $L \in {}^wD^{>\underline{a}}$ et que $L' \in {}^wD^{\leqslant \underline{a}}$. Si $r \neq k$, $i_r^! L = 0$, car $i_r^! Ri_{k*} = 0$, donc $i_r^! L \in {}^wD^{>a_r}(S_r)$ (et il est évident que $i_r^* L' \in {}^wD^{\leqslant a_r}(S_r)$). De plus, $i_k^* L = i_k^! L = w_{>a} i_k^* K \in {}^wD^{>a_k}(S_k)$ et on a un triangle distingué $i_k^* L' \longrightarrow i_k^* K \longrightarrow i_k^* L = w_{>a} i_k^* K \xrightarrow{+1}$, donc $i_k^* L' \simeq w_{\leqslant a} i_k^* K \in {}^wD^{\leqslant a_k}(S_k)$.

□

Théorème 4.3.5 *Pour tout $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$, pour tout $K \in {}^wD^{\leqslant a_0}(U)$ on a*

$$[w_{\leqslant \underline{a}} Rj_* K] = \sum_{1 \leqslant n_1 < \cdots < n_r \leqslant n} (-1)^r [Ri_{n_r *} w_{>a_{n_r}} i_{n_r}^* \ldots Ri_{n_1 *} w_{>a_{n_1}} i_{n_1}^* Rj_* K]$$

dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration.
D'après la proposition ci-dessus, on a, dans l'anneau des endomorphismes du groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$w_{\leqslant \underline{a}} = w^n_{\leqslant a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\leqslant a_0} = (1 - Ri_{n*} w_{>a_n} i_n^*) \circ \cdots \circ (1 - Ri_{1*} w_{>a_1} i_1^*) \circ (1 - Rj_* w_{>a_0} j^*).$$

Le théorème résulte de cette égalité et du fait que $Rj_* w_{>a_0} j^* Rj_* K = 0$ (car $K \in {}^wD^{\leqslant a_0}(U)$).

□

4.4 Propriétés supplémentaires des t-structures recollées

Proposition 4.4.1

(i) Si $K \in D^{\leqslant \underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}}$, alors $R\mathrm{Hom}(K, L) = 0$.

(ii) $w_{\leqslant \underline{a}}$ et $w_{>\underline{a}}$ commutent au foncteur de décalage [1], et ils envoient les triangles distingués sur des triangles distingués.
Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, on a

$$w_{\leqslant (a_0, \ldots, a_n)}(K(1)) = (w_{\leqslant (a_0+2, \ldots, a_n+2)} K)(1)$$

$$w_{>(a_0, \ldots, a_n)}(K(1)) = (w_{>(a_0+2, \ldots, a_n+2)} K)(1).$$

(iii) Soit $\underline{a}' = (a'_0, \ldots, a'_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ tel que $a_k \leqslant a'_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, pour tous $K \in {}^wD^{\leqslant \underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}'}$, le morphisme canonique

$$R\mathrm{Hom}(K, L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(j^*K, j^*L)$$

est un isomorphisme.

(iv) Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme et $(S'_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une stratification de Y telle que, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $f(S'_k) \subset S_k$. On suppose que la dimension des fibres de f est inférieure ou égale à d. Alors

$$f^*({}^wD^{\leqslant(a_0,\dots,a_n)}(X)) \subset {}^wD^{\leqslant(a_0+d,\dots,a_n+d)}(Y)$$
$$f^!({}^wD^{>(a_0,\dots,a_n)}(X)) \subset {}^wD^{>(a_0-d,\dots,a_n-d)}(Y)$$
$$Rf_*({}^wD^{>(a_0,\dots,a_n)}(Y)) \subset {}^wD^{>(a_0-d,\dots,a_n-d)}(X)$$
$$Rf_!({}^wD^{\leqslant(a_0,\dots,a_n)}(Y)) \subset {}^wD^{\leqslant(a_0+d,\dots,a_n+d)}(X).$$

Démonstration.

(i) Montrons le résultat par récurrence sur n. Si $n = 0$, c'est le lemme 4.2.1. Soit $n \geqslant 1$, et supposons le résultat vrai pour $n' < n$. On note $\underline{a}' = (a_0,\dots,a_{n-1})$, $V = \bigcup_{k=0}^{n-1} S_k$, $Y = S_n = X - V$, j_1 l'immersion ouverte de V dans X et i l'immersion fermée de S_n dans X. Soient $K \in {}^wD^{\leqslant\underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}}$. On a un triangle distingué

$$R\mathrm{Hom}(i^*K, i^!L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(K,L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(j_1^*K, j_1^*L) \xrightarrow{+1}.$$

Or $j_1^*K \in {}^wD^{\leqslant\underline{a}'}(U)$, $j_1^*L \in {}^wD^{>\underline{a}'}(U)$, $i^*K \in {}^wD^{\leqslant a_n}(Y)$ et $i_k^!L \in {}^wD^{>a_n}(Y)$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$R\mathrm{Hom}(j_1^*K, j_1^*L) = R\mathrm{Hom}(i^*K, i^!L) = 0,$$

d'où

$$R\mathrm{Hom}(K,L) = 0.$$

(ii) $w_{\leqslant\underline{a}}$ et $w_{>\underline{a}}$ commutent au foncteur de décalage car ${}^wD^{\leqslant\underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ sont stables par décalage. Soit $K \longrightarrow K' \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$ un triangle distingué. D'après [BBD] 1.1.11, on peut construire un diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont distinguées

$$\begin{tikzcd}
w_{\leqslant\underline{a}}K \arrow[r] \arrow[d] & w_{\leqslant\underline{a}}K' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
w_{>\underline{a}}K \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & w_{>\underline{a}}K' \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & L' \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "+1"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Comme ${}^wD^{\leqslant\underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ sont des sous-catégories stables par extensions de $D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$, $L \in {}^wD^{\leqslant\underline{a}}$ et $L' \in {}^wD^{>\underline{a}}$, donc $L = w_{\leqslant\underline{a}}K''$ et $L' = w_{>\underline{a}}K''$.
La dernière assertion se prouve exactement comme la propriété analogue dans le (i) de la proposition 4.1.3.

(iii) Notons i l'immersion fermée $X - U = S_1 \cup \cdots \cup S_n \subset X$, $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\underline{b}' = (a'_1, \ldots, a'_n)$. Soient $K \in {}^wD^{\leqslant \underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}'}$. On a un triangle distingué canonique

$$R\mathrm{Hom}(i^*K, i^!L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(K, L) \longrightarrow R\mathrm{Hom}(j^*K, j^*L) \xrightarrow{+1}.$$

Or $i^*K \in {}^wD^{\leqslant \underline{b}}(X-U)$ et $i^!L \in {}^wD^{>\underline{b}'}(X-U)$, donc, d'après le point (i), $R\mathrm{Hom}(i^*K, i^!L) = 0$.

(iv) Il suffit de traiter les cas de f^* et $Rf_!$, car ceux de $f^!$ et Rf_* en résultent par dualité. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on note i'_k l'inclusion $S'_k \subset Y$ et $f_k : S'_k \longrightarrow S_k$ la restriction de f. Soit $K \in {}^wD^{\leqslant \underline{a}}(X)$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, ${i'_k}^* f^*K = f_k^* i_k^* K$; $i_k^* K \in {}^wD^{\leqslant a_k}(S_k)$ par la définition de ${}^wD^{\leqslant \underline{a}}(X)$, donc, d'après le (iv) de la proposition 4.1.3, $f_k^* i_k^* K \in {}^wD^{\leqslant a+d}(S'_k)$. On a donc bien $f^*K \in {}^wD^{\leqslant (a_0+d, \ldots, a_n+d)}(Y)$.
Soit $K \in {}^wD^{\leqslant \underline{a}}(Y)$. Fixons $k \in \{0, \ldots, n\}$. Comme $S'_k = f^{-1}(S_k)$, le diagramme suivant est cartésien aux nilpotents près

$$\begin{tikzcd} S'_k \arrow[r, "i'_k"] \arrow[d, "f_k"'] & Y \arrow[d, "f"'] \\ S_k \arrow[r, "i_k"] & X \end{tikzcd}$$

donc, d'après le théorème de changement de base propre, ${i_k}^* Rf_! K \simeq Rf_{k!} {i'_k}^* K$. Or ${i'_k}^* K \in {}^wD^{\leqslant a_k}(S'_k)$, donc, d'après le (iv) de la proposition 4.1.3, $i_k^* Rf_! K \simeq Rf_{k!} {i'_k}^* K \in {}^wD^{\leqslant a_k+d}(S_k)$. On a donc bien $Rf_! K \in {}^wD^{\leqslant (a_0+d, \ldots, a_n+d)}(X)$.

□

La proposition suivante est une reformulation de [BBD] 1.4.14 dans le cas particulier considéré.

Proposition 4.4.2 *Soit $\underline{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$. On note $\underline{a}' = (a_0, a_1 + 1, \ldots, a_n + 1)$. Alors, pour tout $K \in {}^wD^{\leqslant a_0}(U) \cap {}^wD^{\geqslant a_0}(U)$, $w_{\geqslant \underline{a}'} j_! K = w_{\leqslant \underline{a}} Rj_* K$ est l'unique prolongement de K dans ${}^wD^{\leqslant \underline{a}} \cap {}^wD^{\geqslant \underline{a}'}$.*

En particulier, si K est pervers pur de poids a sur U, on a

$$w_{\geqslant (a, a+1, \ldots, a+1)} j_! K = j_{!*} K = w_{\leqslant a} Rj_* K,$$

et par dualité on obtient aussi

$$w_{\geqslant a} j_! K = j_{!*} K = w_{\leqslant (a, a-1, \ldots, a-1)} Rj_* K.$$

(On retrouve le résultat du théorème 4.1.4.)

4.5 Quelques lemmes techniques

Ce paragraphe contient quelques lemmes utilisés dans les preuves des résultats des parties 4 et 5.

Lemme 4.5.1 *Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et (S_α) une partition finie de*

X par des sous-schémas localement fermés. Pour tout α, on note $i_\alpha : S_\alpha \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors, pour tout $K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, on a

(a) $K \in {}^pD_c^{\leqslant 0}$ si et seulement si pour tout α, pour tout $i \geqslant 1$, on a ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$;

(b) $K \in {}^pD_c^{\geqslant 0}$ si et seulement si pour tout α, pour tout $i \leqslant -1$, on a ${}^pH^i(i_\alpha^! K) = 0$.

De plus, si U est un ouvert de X réunion de strates, si $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion et si K est un faisceau pervers sur U, alors $j_{!*}K$ est l'unique prolongement $L \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ de K tel que : pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$, on a

$$\begin{cases} {}^pH^i(i_\alpha^* L) = 0 \text{ pour } i \geqslant 0 \\ {}^pH^i(i_\alpha^! L) = 0 \text{ pour } i \leqslant 0 \end{cases}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer (a), car (b) en résulte par dualité. D'après [BBD] 2.2.5, les i_α^* sont t-exacts à droite, donc, si $K \in {}^pD_c^{\leqslant 0}$, on a bien ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$ pour tout α et pour $i \geqslant 1$.

Réciproquement, soit $K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que pour tout α, pour tout $i \geqslant 1$, ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$. On sait par [BBD] 2.2.12 qu'un complexe L est dans ${}^pD_c^{\leqslant 0}$ si et seulement si pour tout point x de X, notant $i_x : x \longrightarrow X$ et $dim(x) = dim(\overline{\{x\}})$, on a $H^i(i_x^* L) = 0$ pour $i < p(2dim(x))$. On va utiliser cette caractérisation pour montrer que $K \in {}^pD_c^{\leqslant 0}$. Soit x un point de X, et soit α tel que $x \in S_\alpha$. Comme S_α est localement fermé dans X, $\overline{\{x\}} \cap S_\alpha$ est ouvert dans $\overline{\{x\}}$, donc $dim(\overline{\{x\}} \cap S_\alpha) = dim(\overline{\{x\}})$ ($\overline{\{x\}}$ est irréductible), et $dim(x)$ ne change pas si on considère x comme un point de S_α. Comme par hypothèse $i_\alpha^* K \in {}^pD_c^{\leqslant 0}(S_\alpha)$, on a bien $H^i(i_x^* K) = 0$ si $i < p(2dim(x))$.

Montrons enfin la dernière assertion du lemme. U est un ouvert de X réunion de strates, $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion, K est un faisceau pervers sur U. D'après [BBD] 1.4.24 (qui s'applique par [BBD] 2.2.3 et 2.2.11), on a ${}^pH^0(i_\alpha^* j_{!*}K) = 0$ pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$. L'annulation des ${}^pH^0(i_\alpha^! j_{!*}K)$ s'en déduit par dualité.

Soit $L \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, muni d'un isomorphisme $j^*L \simeq K$, tel que, pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$, on ait ${}^pH^i(i_\alpha^* L) = 0$ pour $i \geqslant 0$ et ${}^pH^i(i_\alpha^! L) = 0$ pour $i \leqslant 0$. D'après ce qui précède, on sait que L est pervers. En raisonnant par récurrence sur le cardinal de $\{\alpha \text{ tq } S_\alpha \subset X - U\}$, on se ramène au cas où $X - U = S_\alpha$ est une strate. Notons $i = i_\alpha$. On a un triangle distingué

$$i_* i^! L \longrightarrow L \longrightarrow Rj_* j^* L \simeq Rj_* K \xrightarrow{+1},$$

d'où une suite exacte

$${}^pH^0(i_* i^! L) \longrightarrow {}^pH^0(L) = L \longrightarrow {}^pH^0(Rj_* K).$$

Comme i_* est t-exact ([BBD] 2.2.6), ${}^pH^0(i_* i^! L) = i_* {}^pH^0(i^! L) = 0$, et le morphisme $L \longrightarrow {}^pH^0(Rj_* K)$ est injectif. D'autre part, on a un triangle distingué

$$j_! j^* L \simeq j_! K \longrightarrow L \longrightarrow i_* i^* L \xrightarrow{+1},$$

d'où une suite exacte

$${}^pH^0(j_! K) \longrightarrow L \longrightarrow {}^pH^0(i_* i^* L) = i_* {}^pH^0(i^* L) = 0.$$

Le morphisme ${}^pH^0(j_!K) \longrightarrow L$ est donc surjectif, ce qui finit la démonstration.

□

Lemme 4.5.2 *Soient X un schéma de type fini lisse purement de dimension d sur un corps k de caractéristique 0 ou fini et $K \in D^b_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On suppose que les $H^i(K)$ sont lisses. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K) = H^{i-d}(K)[d]$.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le cardinal $N(K)$ de $\{i \in \mathbb{Z} \text{ tq } H^i(K) \neq 0\}$.

Si $N(K) = 1$, on a $K \simeq H^i(K)[-i]$ pour un $i \in \mathbb{Z}$, donc $K[i+d]$ est pervers, et

$$ {}^pH^j(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+d \\ H^i(K)[d] & \text{si } j = i+d \end{cases} . $$

Soit K tel que $N(K) > 1$, et supposons le résultat prouvé pour tous les L tels que $N(L) < N(K)$. Soit $i = max\{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } H^k(K) \neq 0\}$. Comme $H^i(K)[-i]$ est lisse, on a comme plus haut

$$ {}^pH^j(H^i(K)[-i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+d \\ H^i(K)[d] & \text{si } j = i+d \end{cases} . $$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$ {}^pH^j(\tau_{\leqslant i-1}K) = H^{j-d}(\tau_{\leqslant i-1}K)[d] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geqslant i+d \\ H^{j-d}(K)[d] & \text{si } j < i+d \end{cases} . $$

On conclut en utilisant la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué

$$ \tau_{\leqslant i-1}K \longrightarrow \tau_{\leqslant i}K \simeq K \longrightarrow H^i(K)[-i] \xrightarrow{+1} . $$

□

5 Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel

5.1 Complexes pondérés

Dans cette section, on définit à l'aide des foncteurs $w_{\leqslant \underline{a}}$ de 4.3 une famille de complexes sur la compactification de Baily-Borel, qu'on appellera complexes pondérés, et dont les complexes d'intersection sont des cas particuliers. Ces complexes pondérés sont des analogues en caractéristique finie des complexes pondérés définis sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ par Goresky, Harder et MacPherson dans [GHM].

Notation 5.1.1 *Soient $\mathbf{G}$ un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$, $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}$ un cocaractère central, ℓ un nombre premier et $t \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Pour tout $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on note $w_{<t}V$ (resp. $w_{\geqslant t}V$) la plus grande sous-représentation de V sur laquelle le poids relativement à λ est $< t$ (resp. $\geqslant t$).*

Les foncteurs exacts $w_{<t}$ et $w_{\geqslant t}$ s'étendent trivialement à la catégorie dérivée $D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on a

$$V = w_{<t}V \oplus w_{\geqslant t}V,$$

et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(w_{<t}V) = w_{<t}H^i(V)$ est de poids $< t$ et $H^i(w_{\geqslant t}V) = w_{\geqslant t}H^i(V)$ de poids $\geqslant t$.

Lemme 5.1.2 *Comme dans le paragraphe 2.1.4, on se place dans la situation suivante : $\mathbf{L}$ est un groupe algébrique connexe qui est produit quasi-direct de deux sous-groupes $\mathbf{G}_\ell$ et $\mathbf{G}$, $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est une donnée de Shimura pure telle que $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q}) \cap \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ agisse trivialement sur $\mathcal{X}$, K_L est un sous-groupe ouvert compact net de $\mathbf{L}(\mathbb{A}_f)$, et on note $\mathrm{H} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $\Gamma_\ell = \mathrm{K}_L \cap Cent_{\mathbf{L}(\mathbb{Q})}(\mathcal{X})$. On se place sur les réductions modulo p des variétés, où le nombre premier p est comme dans le corollaire 3.4.2. On note d la dimension de $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. Alors, pour tous $V \in D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)})$ et $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$,*

$$w_{\leqslant a}\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, V) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, w_{\geqslant d-a}V)$$

$$w_{>a}\mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, V) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, w_{<d-a}V).$$

Démonstration. Notons $t = d - a$, $K = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, V)$, $K_1 = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, w_{\geqslant t}V)$ et $K_2 = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}R\Gamma(\Gamma_\ell, w_{<t}V)$. Comme $V = w_{<t}V \oplus w_{\geqslant t}V$, on a $K = K_1 \oplus K_2$. Il suffit de montrer que K_1 est dans ${}^wD^{\leqslant a}(M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}))$ et K_2 dans ${}^wD^{>a}(M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X}))$. $M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est

lisse et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(K_1) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} H^i(\Gamma_\ell, w_{\geqslant t}V)$ et $H^i(K_2) = \mathcal{F}^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell} H^i(\Gamma_\ell, w_{<t}V)$ sont lisses, donc, d'après le lemme 4.5.2, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K_1) = H^{i-d}(K_1)[d]$ et ${}^pH^i(K_2) = H^{i-d}(K_2)[d]$. Soit $i \in \mathbb{Z}$. D'après le corollaire 3.4.2, $H^{i-d}(K_1)$ est de poids $\leqslant -t$ et $H^{i-d}(K_2)$ est de poids $> -t$. On en déduit que ${}^pH^i(K_1) = H^{i-d}(K_1)[d]$ est de poids $\leqslant -t + d = a$ et que ${}^pH^i(K_2) = H^{i-d}(K_2)[d]$ est de poids $> -t + d = a$.

□

On se place maintenant dans la situation de la définition 3.5.3, c'est-à-dire que $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est la donnée de Shimura de la section 1.2 et qu'on a inversé assez de nombres premiers pour avoir un modèle entier de la compactification de Baily-Borel possédant toutes les propriétés souhaitables. On travaille sur les réductions modulo p des variétés. On pose $M^* = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, $M_0 = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ et, pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, on note M_r l'union des strates de bord correspondant à $(\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r)$. Pour tout $r \in \{0, \ldots, q\}$, $dim(M_r) = (p-r)(q-r)$. $(M_0, M_1, \ldots, M_q)$ est une stratification de M^* (au sens de la définition 4.3.1) , et c'est toujours celle qu'on utilisera dans la suite.

Définition 5.1.3 *Soient $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, on pose $a_r = -t_r + (p-r)(q-r)$. On définit un foncteur additif triangulé*

$$W^{\geqslant t_1, \ldots, \geqslant t_q} : D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}) \longrightarrow D^b_m(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*)$$

de la manière suivante : pour tout $m \in \mathbb{Z}$, si $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$ est tel que $H^i(V)$ soit de poids m pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$W^{\geqslant t_1, \ldots, \geqslant t_q}(V) = w_{\leqslant(-m+pq, -m+a_1, \ldots, -m+a_q)} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V.$$

Définition 5.1.4 *Soit $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. Comme $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est de dimension pq, $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq]$ est un faisceau pervers sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. On pose*

$$IC^{\mathrm{K}} V = (j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq]))[-pq].$$

Proposition 5.1.5

(1) Pour tous $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on a un isomorphisme canonique

$$D(W^{\geqslant t_1, \ldots, \geqslant t_q}(V)) \simeq W^{\geqslant s_1, \ldots, \geqslant s_q}(V^*)[2pq](pq),$$

où D est le foncteur dualisant, $V^* = R\mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ est la représentation duale de V et $s_r = 1 - t_r + 2r(r-n)$ pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$.

(2) Notons, pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, $t_r = r(r-n) + 1$ et $s_r = r(r-n)$. Alors, pour tout $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on a des isomorphismes canoniques

$$IC^{\mathrm{K}} V \simeq W^{\geqslant t_1, \ldots, \geqslant t_q}(V) \xrightarrow{\sim} W^{\geqslant s_1, \ldots, \geqslant s_q}(V).$$

Démonstration.

(1) On peut supposer que $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ et que V est pure. Notons m le poids de V. V^* est alors une représentation de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ de poids $-m$. On pose $a_0 = -m+pq$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,q\}$, $a_r = -(t_r+m)+(p-r)(q-r)$. Alors

$$W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V) = w_{\leqslant(a_0,\dots,a_q)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V,$$

donc

$$\begin{aligned} D(W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V)) &= w_{\geqslant(-a_0,\dots,-a_q)}(j_! \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V^*[2pq](pq)) \\ &= (w_{\geqslant(-a_0+2pq,\dots,-a_q+2pq)} j_! \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V^*)[2pq](pq). \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.4.2,

$$w_{\geqslant(-a_0+2pq,\dots,-a_q+2pq)} j_! \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V^* = w_{\leqslant(-a_0+2pq,-a_1+2pq-1,\dots,-a_q+2pq-1)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V^*.$$

Notons $b_0 = m+pq$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,q\}$, $b_r = -(s_r-m)+(p-r)(q-r)$. Alors $b_0 = -a_0+2pq$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,q\}$, $b_r = -a_r-1+2pq$. Donc

$$D(W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V)) = (w_{\leqslant(b_0,\dots,b_q)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V^*)[2pq](pq) = W^{\geqslant s_1,\dots,\geqslant s_q}(V^*)[2pq](pq).$$

(2) On peut supposer que V est pure. Soit m son poids. Le faisceau $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ est lisse pur de poids $-m$ sur M_0, qui est lisse de dimension pq, donc le seul faisceau de cohomologie perverse non nul de $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ est ${}^pH^{pq}\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V = \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq]$, qui est de poids $-m+pq$. D'après la proposition 4.4.2,

$$\begin{aligned} IC^{\mathrm{K}} V[pq] = j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq]) &= w_{\leqslant(-m+pq,\dots,-m+pq)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq] \\ &= w_{\leqslant(-m+pq,-m+pq-1,\dots,-m+pq-1)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[pq], \end{aligned}$$

donc

$$IC^{\mathrm{K}} V = w_{\leqslant(-m+pq,\dots,-m+pq)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V = w_{\leqslant(-m+pq,-m+pq-1,\dots,-m+pq-1)} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout $r \in \{1,\dots,q\}$,
$-t_r-m+(p-r)(q-r) = -m+pq-1$ et $-s_r-m+(p-r)(q-r) = -m+pq$.

□

5.2 Restrictions des complexes pondérés aux strates

On note $\mathbf{S} = \mathbb{G}_m.I_{p+q}$ le centre déployé de $\mathbf{G}$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,q\}$,

$$\mathbf{S}_r = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^2 I_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_{p-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{G}_m \right\}$$

$\mathbf{S}_r$ est le centre déployé de $\mathbf{G}_r$. On note χ_r le caractère de $\mathbf{S}_r$ défini par

$$\chi_r \left(\begin{pmatrix} \lambda^2 I_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_{p-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix} \right) = \lambda.$$

On identifie $X^*(\mathbf{S}_r)$ à $\mathbb{Z}$ en envoyant χ_r sur 1, ce qui donne un ordre sur $X^*(\mathbf{S}_r)$.

Notation 5.2.1 *Soient $I \subset \{1, \ldots, q\}$ et $V \in Rep_{\mathbf{L}_I(\mathbb{Q}_\ell)}$, avec $\mathbf{L}_I = \mathbf{P}_I/\mathbf{N}_I$ (cf 1.5).*

Si $(t_i)_{i\in I} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^I$, on note

$$V_{<t_i, i\in I}$$

le sous-espace vectoriel de V sur lequel, pour tout $i \in I$, $\mathbf{S}_i$ agit par des caractères $< t_i$. Comme les $\mathbf{S}_i$ sont centraux dans $\mathbf{L}_I$, $V_{<t_i,i\in I}$ est stable par $\mathbf{L}_I(\mathbb{Q}_\ell)$.

La définition ci-dessus s'étend trivialement aux complexes et donne un foncteur exact

$$\begin{cases} D^b(Rep_{\mathbf{L}_I(\mathbb{Q}_\ell)}) & \longrightarrow & D^b(Rep_{\mathbf{L}_I(\mathbb{Q}_\ell)}) \\ V & \longmapsto & V_{<t_i,i\in I} \end{cases}.$$

On définit de même $V_{\geqslant t_i, i\in I}$.

On se place dans la situation de la définition 5.1.3.

On utilisera les notations suivantes (qui sont celles de 1.5) : Soit $S \subset \{1, \ldots, q\}$ non vide. On pose

$$\mathbf{P}_S = \bigcap_{s\in S} \mathbf{P}_s.$$

C'est un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$, dont on note $\mathbf{N}_S$ le radical unipotent et $\mathbf{L}_S = \mathbf{P}_S/\mathbf{N}_S$ le quotient de Levi. Soit $r = max(S)$. Rappelons (voir la section 1.4) qu'on a trois sous-groupes distingués $\mathbf{L}'_{\ell,r}$, $\mathbf{L}_{\ell,r}$ et $\mathbf{G}_r = \mathbf{Q}_r/\mathbf{N}_r$ de $\mathbf{L}_r$ tels que $\mathbf{G}_r$ et $\mathbf{L}'_{\ell,r}$ soient d'intersection triviale, que $\mathbf{L}_r$ soit produit quasi-direct de $\mathbf{L}_{\ell,r}$ et $\mathbf{G}_r$, que $\mathbf{L}_{\ell,r}$ et $\mathbf{L}'_{\ell,r}$ soient égaux si $1 \leqslant r < q$, et que $\mathbf{L}_{\ell,q} = \mathbf{L}'_{\ell,q} \times \mathbf{SU}(p-q)$.

On a $\mathbf{Q}_r \subset \mathbf{P}_S \subset \mathbf{P}_r$, donc $\mathbf{P}_S/\mathbf{N}_r$ est produit quasi-direct de $\mathbf{G}_r$ et d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\ell,S}$ de $\mathbf{L}_{\ell,r}$. On note $\mathbf{P}'_{\ell,S}$ le sous-groupe parabolique correspondant de $\mathbf{L}'_{\ell,r}$, et $\mathbf{L}_{\ell,S}$ et $\mathbf{L}'_{\ell,S}$ les quotients de Levi respectifs de $\mathbf{P}_{\ell,S}$ et $\mathbf{P}'_{\ell,S}$. On a $\mathbf{L}'_{\ell,S} = \mathbf{L}_{\ell,S}$ si $q \notin S$, et $\mathbf{L}_{\ell,S} = \mathbf{L}'_{\ell,S} \times \mathbf{SU}(p-q)$ si $q \in S$.

Pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, on pose

$$\mathrm{H}_{g,S} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{H}_{g,\ell,S} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap Cent_{\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})}(\mathcal{X}_r)\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f) = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{K}_{g,S} = \mathrm{H}_{g,S}/\mathrm{H}_{g,\ell,S}$$

$$\Gamma_{g,S} = \mathrm{H}_{g,\ell,S}/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)) = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_S(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{A}_f)).$$

$\mathrm{K}_{g,S}$ s'identifie à un sous-groupe ouvert compact net de $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$, et $\Gamma_{g,S}$ à un sous-groupe arithmétique net de $\mathbf{L}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})$ (ou de $\mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{Q})$).

Théorème 5.2.2 *Soient $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{Z}$ et $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. On suppose que tous les $H^i(V)$ sont purs de même poids $m \in \mathbb{Z}$. On fixe $r \in \{1, \ldots, q\}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, et on note i l'inclusion de la strate $M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. Alors*

$[i^*W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V)] =$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}\left(\sum_S\sum_{i\in I_S}\left[Ind_{\mathrm{K}_{p_ig,S\cup\{r\}}}^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(-1)^{card(S)}R\Gamma\left(\Gamma_{p_ig,S\cup\{r\}},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S\cup\{r\}}),V)_{\geqslant t_r+m,<t_s+m,s\in S}\right)\right]\right),$$

où S parcourt l'ensemble des sous-ensembles de $\{1,\dots,r-1\}$, et, pour tout $S\subset\{1,\dots,r-1\}$, on choisit un système de représentants $(p_i)_{i\in I_S}$ du double quotient $\mathbf{P}_{S\cup\{r\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{g,\{r\}}$.

Supposons que V est concentré en degré 0. Alors, si $t_s=s(s-n)$ pour tout $s\in\{1,\dots,q\}$, ou si $t_s=s(s-n)+1$ pour tout $s\in\{1,\dots,q\}$, on a $IC^{\mathrm{K}}V=W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V)$ (proposition 5.1.5 (2)). On obtient donc en particulier une formule pour $[i^*IC^{\mathrm{K}}V]$.

Démonstration. Le théorème résulte du théorème 4.3.5, de la proposition ci-dessous, et du (ii) de la proposition 2.1.3.14 (qui permet de remplacer les images directes par des induites). □

Rappelons qu'on a noté, pour tout $r\in\{1,\dots,q\}$, M_r l'union des strates de bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ associées à $(\mathbf{Q}_r,\mathcal{Y}_r)$. On note i_r l'inclusion de M_r dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$.

Proposition 5.2.3 *Soient $r_1,\dots,r_c\in\{1,\dots,q\}$ tels que $r_1<\dots<r_c$, $a_1,\dots,a_c\in\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$, $V\in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, $r\in\{r_c,\dots,q\}$ et $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Pour tout $i\in\{1,\dots,c\}$, on pose $t_i=-a_i+(p-r_i)(q-r_i)$. On note*

$$L=Ri_{r_c*}w_{>a_c}i_{r_c}^*\dots Ri_{r_1*}w_{>a_1}i_{r_1}^*Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$$

et i l'inclusion de la strate $M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)$ dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$. Soit

$$S=\{r_1,\dots,r_c,r\}.$$

Alors on a un isomorphisme canonique

$$i^*L\simeq\bigoplus_C L_C$$

où C parcourt l'ensemble des doubles classes de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{g,\{r\}}$, et de plus, si $b\in\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ est un représentant de la double classe C, on a un isomorphisme

$$L_C\simeq T_{b*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{bg,S}}R\Gamma(\Gamma_{bg,S},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c}).$$

Démonstration. Si $r>r_c$, on pose $d=c+1$, $r_d=r$, $a_d=-\infty$ et $t_d=+\infty$; si $r=r_c$, on pose $d=c$.

On raisonne par récurrence sur d.

Si $d=1$, le résultat cherché est une conséquence immédiate du théorème de Pink et du lemme 5.1.2.

Supposons donc $d \geqslant 2$, et supposons le résultat prouvé pour tout $1 \leqslant d' < d$. On note

$$S' = \{r_1, \ldots, r_{d-1}\} = S - \{r\}.$$

Calculons d'abord

$$M = i^* R i_{r_{d-1}*} w_{>a_{d-1}} i^*_{r_{d-1}} \ldots R i_{r_1 *} w_{>a_1} i^*_{r_1} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V).$$

Pour tout $h \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, soit i_h l'inclusion de $M^{\mathrm{K}_{h,\{r_{d-1}\}}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})$ dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. Le complexe $N = R i_{r_{d-1}*} w_{>a_{d-1}} i^*_{r_{d-1}} \ldots R i_{r_1 *} w_{>a_1} i^*_{r_1} R j_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$ est égal à

$$\bigoplus_{h \in \mathbf{P}_{r_{d-1}}(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_{r_{d-1}}(\mathbb{A}_f) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}} R i_{h*} i^*_h N,$$

donc on a

$$M = \bigoplus_{h \in \mathbf{P}_{r_{d-1}}(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_{r_{d-1}}(\mathbb{A}_f) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/K} i^* R i_{h*} i^*_h N.$$

Soit $h \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a un isomorphisme

$$i^*_h N \simeq \bigoplus_{C'} N_{C'},$$

où C' parcourt l'ensemble des doubles classes dans $\mathbf{P}_{S'}(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_{r_{d-1}}(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, et, si b est un représentant de C',

$$N_{C'} \simeq T_{b*} \mathcal{F}^{\mathrm{K}_{bh,S'}} R\Gamma(\Gamma_{bh,S'}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S'}), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}}).$$

Fixons $b \in \mathbf{P}_{r_{d-1}}(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_{r_{d-1}}(\mathbb{A}_f)$ et calculons

$$i^* R i_{h*} T_{b*} \mathcal{F}^{\mathrm{K}_{bh,S'}} R\Gamma(\Gamma_{bh,S'}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S'}), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}}).$$

On définit X par le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & M^{\mathrm{K}_{bh,S'}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})^* \arrow[d, "\overline{T}_b"] \\
M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) \arrow[r] & \overline{M^{\mathrm{K}_{h,\{r_{d-1}\}}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})}
\end{tikzcd}$$

où $\overline{M^{\mathrm{K}_{h,\{r_{d-1}\}}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})}$ est l'adhérence de $M^{\mathrm{K}_{h,\{r_{d-1}\}}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})$ dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. Alors on a

$$X \simeq \coprod_{j \in J} M^{\mathrm{K}_{q_j bh,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r),$$

et le morphisme $X \longrightarrow M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ est $\sqcup T_{q_j}$, avec $(q_j)_{j \in J}$ un système fini (éventuellement vide) de représentants pour une certaine relation d'équivalence sur $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, qu'on

précisera plus tard. Soit $q \in \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, et calculons la restriction à la strate $M^{\mathrm{K}_{qbh,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ de $M^{\mathrm{K}_{bh,S'}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})^*$ du complexe

$$L' = \mathcal{F}^{\mathrm{K}_{bh,S'}} R\Gamma(\Gamma_{bh,S'}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S'}), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}}).$$

Notons $\mathbf{R}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_{r_{d-1}}$ correspondant à $\mathbf{P}_r$, c'est-à-dire $\mathbf{R} = (\mathbf{Q}_{r_{d-1}} \cap \mathbf{P}_r)/\mathbf{N}_{r_{d-1}}$. Soient $\mathbf{N}_R = \mathbf{N}_S/\mathbf{N}_{S'}$ le radical unipotent de $\mathbf{R}$, $(\mathbf{Q}_R, \mathcal{Y})$ la composante rationnelle de bord de $(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})$ associée à $\mathbf{R}$. On a $(\mathbf{Q}_R, \mathcal{Y})/\mathbf{N}_R = (\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$, et la partie linéaire $\mathbf{R}_\ell$ de $\mathbf{R}/\mathbf{N}_R$ est telle que $\mathbf{L}_{\ell,S} = \mathbf{L}_{\ell,S'} \times \mathbf{R}_\ell$. de plus, on vérifie facilement que

$$(q\mathrm{K}_{bh,S'}q^{-1} \cap \mathbf{R}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_R(\mathbb{A}_f))/(q\mathrm{K}_{bh,S'}q^{-1} \cap \mathbf{R}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_R(\mathbb{A}_f)) = \mathrm{K}_{qbh,S},$$

et que le sous-groupe arithmétique net

$$\Gamma = (q\mathrm{K}_{bh,S'}q^{-1} \cap \mathbf{R}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{N}_R(\mathbb{A}_f))/(q\mathrm{K}_{bh,S'}q^{-1} \cap \mathbf{N}_R(\mathbb{A}_f))$$

de $\mathbf{R}_\ell(\mathbb{Q})$ s'identifie à

$$\Gamma_{qbh,S}/\Gamma_{bh,S'}.$$

D'autre part, comme l'action de $\mathbf{S}_{r_1}, \ldots, \mathbf{S}_{r_{d-1}}$ sur $\mathbf{N}_R$ est triviale, on a

$$R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_R), R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S'}, V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}})) \simeq R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}}.$$

Finalement, en utilisant le théorème de Pink, on voit que la restriction de L' à $M^{\mathrm{K}_{qbh,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ est isomorphe à

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{qbh,S}} R\Gamma(\Gamma_{qbh,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}}).$$

Il reste à compter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M^{\mathrm{K}_{qbh,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) & \longrightarrow & M^{\mathrm{K}_{bh,S'}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_r)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) & \longrightarrow & \overline{M^{\mathrm{K}_{h,\{r_{d-1}\}}}(\mathbf{G}_{r_{d-1}}, \mathcal{X}_{r_{d-1}})} \end{array}$$

modulo une relation d'équivalence convenable. C'est ce qui a été fait dans la proposition 1.5.2. La conclusion de cette proposition, combinée avec les calculs ci-dessus, montre que, si $(b_i)_{i\in I}$ est un système de représentants du double quotient $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{g,\{r\}}$, on a un isomorphisme

$$i^*M \simeq \bigoplus_{i\in I} T_{b_i*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{b_i g,S}} R\Gamma(\Gamma_{b_i g,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\ldots,<t_{d-1}})).$$

Le résultat cherché résulte alors du lemme 5.1.2.

□

Remarque 5.2.4 Nous pouvons maintenant rendre plus explicite le rapport entre les complexes pondérés définis ici et ceux de [GHM]. Soient $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et V une

représentation algébrique de $\mathbf{G}$, qu'on suppose pure de poids 0 pour simplifier. Pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$, on note $a_r = -t_r + (p-r)(q-r)$. Alors, d'après le théorème 4.3.5, on a une égalité dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*, \mathbb{Q}_\ell)$

$$[W^{\geqslant t_1, \ldots, \geqslant t_q} V(\mathbb{Q}_\ell)] = \sum_{1 \leqslant r_1 < \cdots < r_c \leqslant q} (-1)^c [Ri_{r_c *} w_{>a_{r_c}} i^*_{r_c} \ldots Ri_{r_1 *} w_{>a_1} i^*_{r_1} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V(\mathbb{Q}_\ell)].$$

Or, d'après le calcul explicite des

$$L_{r_1, \ldots, r_c} = Ri_{r_c *} w_{>a_{r_c}} i^*_{r_c} \ldots Ri_{r_1 *} w_{>a_{r_1}} i^*_{r_1} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V(\mathbb{Q}_\ell)$$

qui a été fait dans la proposition ci-dessus, il existe une manière naturelle de relever ces complexes en des complexes sur un modèle entier $\mathcal{M}^{\mathrm{K}}_\Sigma(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, qu'on notera encore $L_{r_1, \ldots, r_c}$. Notons $L_{r_1, \ldots, r_c}(\mathbb{C})$ le complexe de faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ déduit du complexe $L_{r_1, \ldots, r_c}$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{K}}_\Sigma(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. Alors la somme alternée

$$\sum_{1 \leqslant r_1 < \cdots < r_c \leqslant q} (-1)^c [L_{r_1, \ldots, r_c}(\mathbb{C})]$$

est égale à la classe (dans le groupe de Grothendieck de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$) de l'image directe par le morphisme canonique de la compactification de Borel-Serre réductive de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ du complexe pondéré de [GHM] associé au profil de poids $(t_1, \ldots, t_q)$ et à coefficients dans V.

5.3 La formule des traces

5.3.1 Rappels sur un théorème de Kottwitz

Commençons par fixer quelques notations.

Notation 5.3.1.1 *Soient $p \neq \ell$ deux nombres premiers, $q = p^k$ une puissance de p, $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ les corps finis à p et q éléments, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et X un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On note F l'endomorphisme de Frobenius de X, qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et l'élévation à la puissance q sur les sections du faisceau structural. Sur $X(\mathbb{F})$, F agit comme la substitution de Frobenius $\varphi : x \longmapsto x^q$, donc $X(\mathbb{F})^F = X(\mathbb{F}_q)$.*

Considérons maintenant $K \in D^b_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On a alors une correspondance de Frobenius

$$F^* : F^* K \xrightarrow{\sim} K,$$

d'où un endomorphisme

$$F^* : R\Gamma_c(X_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}}) \longrightarrow R\Gamma_c(X_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}}),$$

qui est l'inverse de l'endomorphisme que φ induit par transport de structure. On note

$$Tr(F^*, R\Gamma_c(X_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}})) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i Tr(F^*, H^i_c(X_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}})).$$

Soient x un point fermé de X et $n = [k(x) : \mathbb{F}_q]$. Si $\overline{x}$ est un point géométrique de $X(\mathbb{F})$ localisé en x, c'est un point fixe de F^n, et on note F_x^* l'endomorphisme de $K_{\overline{x}}$ induit par F^n. La classe d'isomorphisme du couple $(K_{\overline{x}}, F_x^*)$ ne dépend pas du choix de $\overline{x}$, donc la trace

$$Tr(F_x^*, K_{\overline{x}}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^* Tr(F_x^*, H^i(K)_{\overline{x}})$$

ne dépend que de x ; on la note $Tr(F_x^*, K_x)$.

Nous allons énoncer le résultat principal de l'article [K2] pour la donnée de Shimura $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ de la section 1.2, dans le cas particulier où la correspondance de Hecke considérée est l'identité (c'est-à-dire où, avec les notations de [K2], $g = 1$).

Théorème 5.3.1.2 *On se place dans la situation de la section 3.1 : (K, Σ) est comme dans la définition 3.1.2.1, p est un nombre premier tel que $p \notin \Sigma$, et on s'intéresse à la réduction modulo p de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, qu'on notera $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ ou simplement M. En particulier, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{0,p}\mathrm{K}^p$, avec $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Soient $\ell \in \Sigma$ et $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. On note $K = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{x\in M(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, K_x) = \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)} c(\gamma_0;\gamma,\delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi) Tr(\gamma_0, V).$$

□

Il faut encore expliquer toutes les notations. Rappelons qu'on a fixé une injection $E \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. On note $\wp$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de p déterminé par cette injection, L l'extension non ramifiée de degré j de $E_\wp$, $\mathbb{Q}_p^{nr}$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$ et $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}_p^{nr}/\mathbb{Q}_p)$ l'élément correspondant au Frobenius arithmétique $x \longmapsto x^p$ de $\mathbb{F}$.

Dans la somme, le triplet $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de triplets formés de $\gamma_0 \in \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ semi-simple elliptique dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, de $\gamma = (\gamma_v) \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et de $\delta \in \mathbf{G}(L)$ vérifiant les conditions de [K1] 2 (en particulier, pour toute place $v \neq p, \infty$ de $\mathbb{Q}$, γ_0 et γ_v sont conjugués sous $\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_v)$, et γ_0 et $N\delta$ sont conjugués sous $\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, où $N\delta \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est la norme de δ, définie par $N\delta = \delta.\sigma(\delta)\dots\sigma^{d-1}(\delta)$, avec $d = [L : \mathbb{Q}_p]$), et tels que

$$\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta) = 1,$$

où α est défini dans [K1] 2, pour la relation d'équivalence suivante : deux triplets $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ et $(\gamma_0';\gamma',\delta')$ sont équivalents si et seulement si γ_0 et γ_0' sont conjugués sous $\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}})$, γ et γ' sont conjugués sous $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et δ et δ' sont σ-conjugués sous $\mathbf{G}(L)$ (c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbf{G}(L)$ tel que $\delta' = x\delta\sigma(x)^{-1}$).

Rappelons qu'on a fixé un $\mathcal{O}_E$-réseau autodual $\Lambda = \mathcal{O}_E^{p+q}$ de E^{p+q}. On note K_0 le stabilisateur dans $\mathbf{G}(L)$ du réseau $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L$.

Soit $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ un triplet comme ci-dessus.

On note I_0 le centralisateur de γ_0 dans $\mathbf{G}$. Dans [K1] 3, Kottwitz montre qu'il existe une forme intérieure I de I_0 telle que $I(\mathbb{A}_f^p)$ soit le centralisateur de γ dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $I(\mathbb{Q}_p)$ le centralisateur tordu de δ dans $\mathbf{G}(L)$ (c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbf{G}(L)$ tels que $x\delta = \delta\sigma(x)$).

On pose
$$c(\gamma_0;\gamma,\delta) = vol(I(\mathbb{Q})\setminus I(\mathbb{A}_f)).$$
(La définition de Kottwitz est $c(\gamma_0;\gamma,\delta) = vol(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f)).card(ker(ker^1(\mathbb{Q},I_0)\to ker^1(\mathbb{Q},\mathbf{G})))$, mais ici, $ker^1(\mathbb{Q},\mathbf{G}) = \{1\}$ d'après [Sh] 5.8).

On choisit des mesures de Haar dy et dx sur $I(\mathbb{A}_f^p)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $I(\mathbb{Q}_p)\setminus\mathbf{G}(L)$. Si g est ψ sont des fonctions localement constantes à support compact sur $I(\mathbb{A}_f^p)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $I(\mathbb{Q}_p)\setminus\mathbf{G}(L)$, on pose
$$O_\gamma(g) = \int_{I(\mathbb{A}_f^p)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)} g(y^{-1}\gamma y)dy$$
$$TO_\delta(\psi) = \int_{I(\mathbb{Q}_p)\backslash\mathbf{G}(L)} \psi(x^{-1}\delta\sigma(x))dx.$$
On note
$$f^p = \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{K}^p}}{vol(\mathrm{K}^p)}$$
$$\phi = \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{K}_0 a\mathrm{K}_0}}{vol(\mathrm{K}_0)}.$$
Il reste à expliquer qui est a (cf la fin de [K1] 3). On a défini dans 2.1.1 un morphisme
$$h_0 r : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}$$
(noté μ_h dans [K1], où L est noté F et F est noté E). Il est conjugué par $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ au morphisme
$$\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}, \quad z \longmapsto \begin{pmatrix} \left(1\otimes\frac{z+1}{2} + i\otimes\frac{z-1}{2i}\right) I_p & 0 \\ 0 & \left(1\otimes\frac{z+1}{2} - i\otimes\frac{z-1}{2i}\right) I_q \end{pmatrix}.$$
L'image de μ arrive dans $T_{\mathbb{C}}$, où T est le sous-tore déployé sur $\mathcal{O}_L$ maximal du tore diagonal de $\mathbf{GU}(p,q)$, donc on peut prendre
$$a = \mu(\varpi_L^{-1}),$$
où ϖ_L est une uniformisante de $\mathcal{O}_L$.

Remarque 5.3.1.3 Le sous-groupe compact ouvert K de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ n'intervient que dans l'intégrale orbitale $O_\gamma(f^p)$.

5.3.2 Formule des traces pour certains tronqués

On se place dans la situation du paragraphe précédent. Le but est maintenant d'écrire la formule des traces pour les complexes $Ri_{r_c*}w_{>a_c}i_{r_c}^*\dots Ri_{r_1*}w_{>a_1}i_{r_1}^*Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$.

La proposition suivante va nous permettre d'utiliser le théorème 5.3.1.2.

Proposition 5.3.2.1 *Soient $S\subset\{1,\dots,r\}$, $r = max(S)$, $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, $a\in\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ et $W\in D^b(Rep_{\mathbf{L}_S(\mathbb{Q}_\ell)})$. On note comme ci-dessus*
$$\Gamma_{ag,S} = ((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1}\cap\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1}\cap(\mathbf{N}_S\mathbf{Q}_r)(\mathbb{A}_f)),$$

et soit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{K}^\circ_{ag,S} & = & ((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f))/((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)) \\ & = & ((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1} \cap (\mathbf{N}_S\mathbf{Q}_r)(\mathbb{A}_f))/((ag)\mathrm{K}(ag)^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{A}_f)). \end{array}$$

On a un revêtement étale fini

$$T_a : M' = M^{\mathrm{K}_{ag,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) \longrightarrow M = M^{\mathrm{K}_{g,\{r\}}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r),$$

et on pose

$$M^\circ = M^{\mathrm{K}^\circ_{ag,S}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r);$$

on a un revêtement étale fini

$$T_1 : M^\circ \longrightarrow M'.$$

Enfin, on note

$$K = \mathcal{F}^{\mathrm{K}_{ag,S}} R\Gamma(\Gamma_{ag,S}, W);$$

$T_1^* K$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{F}^{\mathrm{K}^\circ_{ag,S}} R\Gamma(\Gamma_{ag,S}, W)$ *(avec* $\mathrm{K}^\circ_{ag,S}$ *agissant sur* $R\Gamma(\Gamma_{ag,S}, W)$ *via la représentation de* $\mathbf{G}_r(\mathbb{Q}_\ell)$ *dans ce complexe).*

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\sum_{x \in M(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, (T_{a*}K)_x) = \frac{1}{[\mathrm{K}_{ag,S} : \mathrm{K}^\circ_{ag,S}]} \sum_{x \in M^\circ(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, (T_1^* K)_x).$$

Démonstration. Comme $T_a : M' \longrightarrow M$ est propre, on a pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{x \in M(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, (T_{p*}K)_x) & = & Tr(F^{j*}, R\Gamma_c(M_{\mathbb{F}}, (T_{a*}K)_{\mathbb{F}})) \\ & = & Tr(F^{j*}, R\Gamma_c(M'_{\mathbb{F}}, K_{\mathbb{F}})) \\ & = & \sum_{x \in M'(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, K_x) \end{array}.$$

La proposition résulte alors du lemme suivant, appliqué à $\mathbf{G}_r \subset \mathbf{P}_S/\mathbf{N}_S$.

□

Lemme 5.3.2.2 *On se place dans la situation de la définition 2.1.4.6, avec* $\mathbf{N} = 0$ *: on a donc* $\mathbf{G}, \mathbf{G}_\ell \subset \mathbf{L}$*, une donnée de Shimura* $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$*, un sous-groupe compact ouvert net* $\mathrm{K}_L \subset \mathbf{L}(\mathbb{A}_f)$ *et* $W \in D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)})$*. Notons*

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$$

$$\mathrm{K}' = \mathrm{H}/\Gamma_\ell = (\mathrm{K}_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f))/(\mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})).$$

K *s'envoie injectivement dans* K'*, et son image est distinguée d'indice fini égal au cardinal de* $\mathrm{H}/\mathrm{K}\Gamma_\ell$*. On notera aussi* $[\mathrm{K}' : \mathrm{K}]$ *cet indice.* K' *agit sur* $R\Gamma(\Gamma_\ell, W)$ *via l'action de* H*, comme le quotient* H/Γ_ℓ*, et* K *agit sur* $R\Gamma(\Gamma_\ell, W)$ *comme sous-groupe de* $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$*, qui agit lui-même*

sur $R\Gamma(\Gamma_\ell, W)$ parce qu'il commute avec Γ_ℓ. On se place toujours sur les réductions modulo un nombre premier p assez grand. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{x \in M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = \frac{1}{[\mathrm{K}' : \mathrm{K}]} \sum_{x \in M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F_x^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)).$$

Démonstration. Fixons $j \in \mathbb{N}^*$, et notons $\widetilde{X} = M(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, $X' = M^{\mathrm{H}/\Gamma_\ell}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, $X = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & X \arrow[d, "T_1"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

où φ et φ' sont les revêtements évidents. φ est un revêtement étale galoisien profini de groupe K, et φ' est un revêtement étale galoisien profini de groupe K$'$. Soit $x' \in X'(\mathbb{F})^{F^j}$, et soit $y \in \widetilde{X}(\mathbb{F})$ tel que $x' = \varphi'(y)$. Comme x' est stable par F^j, on peut écrire $F^j(y) = y.k$, avec $k \in \mathrm{K}'$ (uniquement déterminé). On a deux possibilités :

(1) x' est l'image par T_1 d'un élément de $X(\mathbb{F})^{F^j}$, ce qui revient à demander que k soit dans K. Alors les $[\mathrm{K}' : \mathrm{K}]$ pré-images de x' par T_1 sont dans $X(\mathbb{F})^{F^j}$ (ce sont les $\varphi(y.l)$, pour $l \in \mathrm{K}'/\mathrm{K}$). De plus, comme $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} R\Gamma(\Gamma_\ell, W) \simeq T_1^* \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)$, pour tout $x \in X(\mathbb{F})$ tel que $T_1(x) = x'$, on a

$$Tr(F_x^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = Tr(F_{x'}^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)).$$

On en déduit que

$$Tr(F_{x'}^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = \frac{1}{[\mathrm{K}' : \mathrm{K}]} \sum_{x \in X(\mathbb{F})^{F^j}, T_1(x) = x'} Tr(F_x^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)).$$

(2) x' n'est pas l'image d'un élément de $X(\mathbb{F})^{F^j}$, ce qui revient à demander que $k \notin \mathrm{K}$. Nous allons montrer que dans ce cas

$$Tr(F_{x'}^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = 0,$$

ce qui finira la preuve du lemme. On choisit $h \in \mathrm{H} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ tel que $h\Gamma_\ell = k$. Comme $k \notin \mathrm{K}$, h n'est pas dans $\Gamma_\ell \mathrm{K}$. D'après la proposition 2.1.3.13, on a

$$Tr(F_{x'}^*, \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = Tr(k, R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = Tr(h, R\Gamma(\Gamma_\ell, W)).$$

Il suffit d'appliquer le lemme ci-dessous.

□

Lemme 5.3.2.3 *Soient $\mathbf{L}$ un groupe réductif connexe, $\mathbf{G}, \mathbf{G}_\ell$ deux sous-groupes réductifs de $\mathbf{L}$ tels que $\mathbf{L}$ soit produit quasi-direct de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_\ell$ et K_L un sous-groupe ouvert compact*

net de $\mathbf{L}(\mathbb{A}_f)$*. On suppose qu'il existe un sous-groupe distingué* $\mathbf{G}'_\ell \subset \mathbf{G}_\ell$ *et un sous-groupe* $\mathbf{G}' \subset \mathbf{L}$ *qui contient* $\mathbf{G}$ *comme un sous-groupe distingué tels que* $\mathbf{G}_\ell/\mathbf{G}'_\ell$ *et* $\mathbf{G}'/\mathbf{G}$ *soient de type compact et que* $\mathbf{L}$ *soit produit direct de* $\mathbf{G}'_\ell$ *et* $\mathbf{G}'$*. On note* $\mathrm{H} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{L}(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$*,* $\Gamma_\ell = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$ *et* $\mathrm{K} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$*.* Γ_ℓ*,* K *et* $\Gamma_\ell\mathrm{K}$ *sont des sous-groupes distingués de* H*. Pour tout* $W \in D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)})$*, pour tout* $h \in \mathrm{H}$*, si* $h \notin \Gamma_\ell\mathrm{K}$*, alors*

$$Tr(h, R\Gamma(\Gamma_\ell, W)) = 0.$$

Démonstration. Comme K_L est net, $\mathrm{H} = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f) = \mathrm{K}_L \cap \mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma_\ell = \mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{K}_L$. Notons Γ'_ℓ le projeté de H sur $\mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q})$. C'est un sous-groupe arithmétique net de $\mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q})$ qui contient Γ_ℓ comme sous-groupe distingué.

Soient $h \in \mathrm{H} - \Gamma_\ell\mathrm{K}$ et $W \in D^b(Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)})$. On peut supposer que $W \in Rep_{\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)}$. On écrit $h = \gamma.g$, avec $\gamma \in \mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q})$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Comme $h \notin \Gamma_\ell\mathrm{K}$, on a $\gamma \in \Gamma'_\ell - \Gamma_\ell$.

Comme $\mathbf{L}$ est produit direct de $\mathbf{G}'_\ell$ et $\mathbf{G}'$, la représentation W de $\mathbf{L}(\mathbb{Q}_\ell)$ est somme directe de représentations de la forme $W_1 \otimes W_2$, avec W_1 une représentation de $\mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$ et W_2 une représentation de $\mathbf{G}'(\mathbb{Q}_\ell)$; pour une telle représentation $W_1 \otimes W_2$, on a

$$R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1 \otimes W_2) = R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1) \otimes W_2,$$

et

$$Tr(h, R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1 \otimes W_2)) = Tr(\gamma, R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1)).Tr(g, W_2).$$

Il suffit donc de prouver l'énoncé suivant : pour toute représentation W_1 de $\mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$, on a

$$Tr(\gamma, R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1)) = 0$$

Soit Y l'espace symétrique du groupe $\mathbf{G}'_\ell$. Il a une compactification de Borel-Serre partielle $\overline{Y}^{BS}$, sur laquelle tout sous-groupe arithmétique de $\mathbf{G}'_\ell(\mathbb{Q})$ agit proprement, et telle que $\Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS}$ soit la compactification de Borel-Serre de l'espace localement symétrique $\Gamma_\ell \setminus Y$ ([BS] 9.3). Notons $j : \Gamma_\ell \setminus Y \longrightarrow \Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS}$ l'immersion ouverte. Comme γ normalise Γ_ℓ, on a une correspondance de Hecke

$$c_\gamma = (\overline{T}_{\gamma^{-1}}, \overline{T}_1) : \Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS} \times \Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS} \longrightarrow \Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS}.$$

Soit W_1 une représentation de $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$. On peut lui associer un faisceau de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\Gamma_\ell} W_1$ sur $\Gamma_\ell \setminus Y$ vérifiant

$$R\Gamma(\Gamma_\ell \setminus Y, \mathcal{F}) = R\Gamma(\Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS}, Rj_*\mathcal{F}) = R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1),$$

et la correspondance c_γ se relève en une correspondance cohomologique

$$u_\gamma : \overline{T}^*_{\gamma^{-1}} Rj_*\mathcal{F} \longrightarrow \overline{T}^!_1 Rj_*\mathcal{F} = Rj_*\mathcal{F}$$

telle que

$$Tr(u_\gamma, R\Gamma(\Gamma_\ell \setminus \overline{Y}^{BS}, Rj_*\mathcal{F})) = Tr(\gamma, R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1)).$$

Pour montrer que $Tr(\gamma, R\Gamma(\Gamma_\ell, W_1)) = 0$, il suffit donc, d'après la formule des traces de Lefschetz, de montrer que la correspondance de Hecke c_γ n'a pas de points fixes dans $\Gamma_\ell \backslash \overline{Y}^{BS}$. Supposons que c_γ a un point fixe. Il existe alors $y \in \overline{Y}^{BS}$ et $\delta \in \Gamma_\ell$ tels que $\gamma.y = \delta.y$, c'est-à-dire $(\delta^{-1}\gamma).y = y$. Comme $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$ agit proprement sur $\overline{Y}^{BS}$, $\delta^{-1}\gamma$ est d'ordre fini ; or $\delta^{-1}\gamma$ est un élément du sous-groupe arithmétique net Γ'_ℓ de $\mathbf{G}_\ell(\mathbb{Q})$, donc $\delta^{-1}\gamma = 1$, et $\gamma = \delta \in \Gamma_\ell$, ce qui contredit l'hypothèse.

□

Corollaire 5.3.2.4 *Soient $r_1, \dots, r_c \in \{1, \dots, q\}$ tels que $r_1 < \dots < r_c$, $a_1, \dots, a_c \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. On note*

$$t_i = -a_i + (p - r_i)(q - r_i)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, c\}$ et

$$L = Ri_{r_c *} w_{>a_c} i^*_{r_c} \dots Ri_{r_1 *} w_{>a_1} i^*_{r_1} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V.$$

Enfin, soit $j \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$Tr(F^{j*}, R\Gamma(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*_{\mathbb{F}}, L_{\mathbb{F}})) = \sum_{s=r_c}^{q} T_s,$$

avec, pour tout $s \in \{r_c, \dots, q\}$, T_s défini par

$$T_s = \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta) \in C_{s,j}} c(\gamma_0; \gamma, \delta) \chi(\mathbf{L}'_{\ell,S}) TO_\delta(\phi_j^{(s)}) Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\dots,<t_c})$$

$$\sum_{i \in I} O_\gamma(f_{g_i}) vol\left((g_i \mathrm{K} g_i^{-1} \cap \mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f))/(g_i \mathrm{K} g_i^{-1} \cap (\mathbf{G}'_s \mathbf{N}_S)(\mathbb{A}_f))\right)^{-1},$$

où

- *$S = \{r_1, \dots, r_c, s\}$.*
- *$C_{s,j}$ est l'ensemble d'indices du théorème 5.3.1.2 pour le groupe $\mathbf{G}_s$; si $(\gamma_0; \gamma, \delta) \in C_{s,j}$, $c(\gamma_0; \gamma, \delta)$, O_γ et $TO_\delta(\phi_j^{(s)})$ ont la même signification que dans l'énoncé du théorème 5.3.1.2 ;*
- *$(g_i)_{i \in I}$ est un système de représentants de $\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$;*
- *pour tout $i \in I$,*

$$f_{g_i} = \frac{\mathbb{1}_{(g_i \mathrm{K}^p g_i^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f^p))/(g_i \mathrm{K}^p g_i^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q}) \mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f^p))}}{vol((g_i \mathrm{K}^p g_i^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q}) \mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f^p))/(g_i \mathrm{K}^p g_i^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q}) \mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f^p)))};$$

- *pour un groupe réductif $\mathbf{H}$, $\chi(\mathbf{H})$ est défini dans [GKM] 7.10 : c'est un réel qui dépend du choix d'une mesure de Haar sur $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$ et qui est tel que, si X_H est l'espace symétrique de $\mathbf{H}$ et K_H est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$,*

$$\chi(\mathbf{H}(\mathbb{Q}) \setminus (X_H \times \mathbf{H}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_H)) = \chi(\mathbf{H}).vol(\mathrm{K}_H)^{-1}.$$

(Les diverses mesure de Haar utilisées plus haut doivent bien sûr être choisies de manière compatible.)

Démonstration. Rappelons que, pour tout $s \in \{0, \ldots, q\}$, M_s est l'union des strates de bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ associées à $(\mathbf{Q}_s, \mathcal{Y}_s)$ et i_s est l'inclusion de M_s dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. On sait que L est à support dans l'union des M_s, avec $r_c \leqslant s \leqslant q$, donc, d'après SGA 4 1/2 Rapport 3.2, on a

$$Tr(F^{j*}, R\Gamma(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*_{\mathbb{F}}, L_{\mathbb{F}})) = \sum_{s=r_c}^{q} T_s,$$

où

$$T_s = \sum_{x \in M_s(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F^*_x, L_x).$$

Fixons $s \in \{r_c, \ldots, q\}$. Les propositions 5.2.3 et 5.3.2.1 impliquent le résultat suivant : si $(g_i)_{i \in I}$ est un système de représentants de $\mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, et si, pour tout $i \in I$, $(p_{ij})_{j \in J_i}$ est un système de représentants de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)/(g_i \mathrm{K} g_i^{-1} \cap \mathbf{P}_s(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f))$, alors

$$T_s = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \frac{1}{[\mathrm{K}_{p_{ij}g_i,S} : \mathrm{K}^\circ_{p_{ij}g_i,S}]} \sum_{x \in M^{\mathrm{K}^0_{p_{ij}g_i,S}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F^*_x, L^{ij}_x),$$

où

$$L^{ij} = \mathcal{F}^{\mathrm{K}^\circ_{p_{ij}g_i,S}} R\Gamma(\Gamma_{p_{ij}g_i,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\ldots,<t_c}).$$

Rappelons que, pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$\mathrm{K}_{g,S} = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f))$$

$$\mathrm{K}^\circ_{g,S} = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f))$$

$$\Gamma_{g,S} = (g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{N}_s(\mathbb{A}_f)).$$

On voit facilement que $(p_{ij}g_i)_{i \in I, j \in J_i}$ est un système de représentants de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, donc la formule ci-dessus se réécrit, en changeant les notations : Soit $(g_i)_{i \in I}$ un système de représentants de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$. Alors

$$T_s = \sum_{i \in I} \frac{1}{[\mathrm{K}_{g_i,S} : \mathrm{K}^\circ_{g_i,S}]} \sum_{x \in M^{\mathrm{K}^\circ_{g_i,S}}(\mathbf{G}_s, \mathcal{X}_s)(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F^*_x, L^i_x),$$

où

$$L^i = \mathcal{F}^{\mathrm{K}^\circ_{g_i,S}} R\Gamma(\Gamma_{g,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_1,\ldots,<t_c}).$$

On utilise ensuite le théorème de Kottwitz (5.3.1.2). Il implique que, pour tout $i \in I$,

$$\sum_{x \in M^{\mathrm{K}^\circ_{g_i,S}}(\mathbb{F})^{F^j}} Tr(F^*_x, L^i_x) =$$

$$\sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in C_{j,s}s} c(\gamma_0;\gamma,\delta)O_\gamma(f_{g_i})TO_\delta(\phi_j^{(s)})Tr(\gamma_0, R\Gamma(\Gamma_{g_i,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c})).$$

Comme

$$Tr(\gamma_0, R\Gamma(\Gamma_{g_i,S}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c})) = \chi(\Gamma_{g_i,S})Tr(R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c})$$

et que ni $c(\gamma_0;\gamma,\delta)$ ni $TO_\delta(\phi_j^{(s)})$ ne dépendent de g_i, on obtient

$$T_s = \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)} c(\gamma_0;\gamma,\delta)TO_\delta(\phi_j^{(s)})\times$$

$$Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c})\sum_{i\in I}\frac{1}{[\mathrm{K}_{g_i,S}:\mathrm{K}^\circ_{g_i,S}]}\chi(\Gamma_{g_i,S})O_\gamma(f_{g_i}).$$

Notons, pour tout $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$\Gamma^\circ_{g,S} = (g\mathrm{K}g^{-1}\cap\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f))/(g\mathrm{K}g^{-1}\cap\mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)).$$

Alors, pour tout $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$[\mathrm{K}_{g,S}:\mathrm{K}^\circ_{g,S}] = [\Gamma^\circ_{g,S}:\Gamma_{g,S}],$$

donc

$$\frac{1}{[\mathrm{K}_{g,S}:\mathrm{K}^\circ_{g,S}]}\chi(\Gamma_{g,S}) = \chi(\Gamma^\circ_{g,S}).$$

Changeons de notation, et notons $(g_i)_{i\in I}$ un système de représentants dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ de $\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$. Pour tout $i\in I$, soit $(p_{ij})_{j\in J_i}$ un système de représentants dans $\mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{A}_f)$ de

$$\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)\backslash\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f)/(g_i\mathrm{K}g_i^{-1}\cap\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f)) = \mathbf{L}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{L}'_{\ell,S}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_{g_i,\ell,S},$$

où

$$\mathrm{K}_{g_i,\ell,S} = (g_i\mathrm{K}g_i^{-1}\cap\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f))/(g_i\mathrm{K}g_i^{-1}\cap(\mathbf{G}'_s\mathbf{N}_S)(\mathbb{A}_f)).$$

Alors $(p_{ij}g_i)_{i\in I,j\in J_i}$ est un système de représentants de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_s(\mathbb{A}_f)\backslash\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, donc, d'après les calculs ci-dessus,

$$T_s = \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)} c(\gamma_0;\gamma,\delta)TO_\delta(\phi_j^{(s)})Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_1,\dots,<t_c})\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\chi(\Gamma^\circ_{p_{ij}g_i,S})O_\gamma(f_{p_{ij}g_i}).$$

Pour tous $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $p\in\mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{K}^\circ_{g,S}=\mathrm{K}^\circ_{pg,S}$, donc $O_\gamma(f_g)=O_\gamma(f_{pg})$. On en déduit que

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}\chi(\Gamma^\circ_{p_{ij}g_i})O_\gamma(f_{p_{ij}g_i}) = \sum_{i\in I}O_\gamma(f_{g_i})\sum_{j\in J_i}\chi(\Gamma^\circ_{p_{ij}g_i}).$$

Soit $X_{\ell,S}$ l'espace symétrique de $\mathbf{L}'_{\ell,S}$. Fixons $i\in I$. Alors

$$\mathbf{L}'_{\ell,S}(\mathbb{Q})\backslash(X_{\ell,S}\times\mathbf{L}'_{\ell,S}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_{g_i,\ell,S}) = \coprod_{j\in J_i}\Gamma^\circ_{p_{ij}g_i,S}\backslash X_{\ell,S},$$

donc

$$\sum_{j\in J_i}\chi(\Gamma^{\circ}_{p_{ij}g_i,S}) = \chi(\mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\setminus(X_{\ell,S}\times\mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_{g_i,\ell,S})) = \chi(\mathbf{L}'_{\ell,S})vol(\mathrm{K}_{g_i,\ell,S})^{-1}.$$

□

5.3.3 Formule des traces pour un complexe pondéré

Théorème 5.3.3.1 *On utilise les notations du corollaire 5.3.2.4.*
Soient $t_1,\dots,t_q\in\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ et $V\in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. Alors, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,

$$Tr(F^{j*}, R\Gamma(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*_{\mathbb{F}}, W^{\geqslant t_1,\dots,\geqslant t_q}(V)_{\mathbb{F}})) =$$

$$\sum_{S\subset\{1,\dots,q\}}\ \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in C_{max(S),j}} c(\gamma_0;\gamma,\delta)\chi(\mathbf{L}_{\ell,S})TO_\delta(\phi_j^{(max(S))})Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{\geqslant t_s,s\in S})$$

$$\sum_{i\in I_S} O_\gamma(f_{g_i})vol\left((g_i\mathrm{K}g_i^{-1}\cap\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f))/(g_i\mathrm{K}g_i^{-1}\cap(\mathbf{G}'_s\mathbf{N}_S)(\mathbb{A}_f))\right)^{-1},$$

avec la convention $max(\emptyset)=0$, et où $(g_i)_{i\in I_S}$ est un système de représentants du double quotient $\mathbf{P}_S(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$.

Remarque 5.3.3.2 La somme sur les $S\subset\{1,\dots,q\}$ est en fait une somme sur les sous-groupes paraboliques standard de $\mathbf{G}$. Le terme pour $S=\emptyset$, c'est-à-dire le terme correspondant à $\mathbf{G}$, est celui qui apparaît dans le théorème 5.3.1.2.

Démonstration du théorème. Le théorème résulte directement de la définition des complexes pondérés, du corollaire 5.3.2.4, du théorème 4.3.5 et du fait que, pour tout $S\subset\{1,\dots,q\}$ et pour tout $\gamma_0\in\mathbf{G}_s(\mathbb{Q})$,

$$Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{\geqslant t_s,s\in S}) = \sum_{J\subset S}(-1)^{card(J)}Tr(\gamma_0, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),V)_{<t_j,j\in J}).$$

□

Bibliographie

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport et Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric spaces*, Lie groups : history, frontiers and applications vol. 4 (1975)

[BB] W. Baily et A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) 84 (1966), p 442-528

[B] A. Beilinson, *On the derived category of perverse sheaves*, dans *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1289, p 27-41, Springer (1987)

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérique 100 (1982)

[Be] J. Bellaïche, *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*, thèse de doctorat de l'université Paris 11 (2002)

[B] A. Borel, *Linear algebraic groups, second edition*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer (1991)

[BS] A. Borel et J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups*, Comm. Math. Helvet. 48 (1973), p 436-491

[BL] J.-L. Brylinski et J.-P. Labesse, *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. scient. de l'ÉNS, 4ième série, tome 17 (1984), p 361-412

[CF] C.-L. Chai et G. Faltings, *Degenerations of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 22, Springer (1980)

[D] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, exposé 389, février 1971

[GHM] M. Goresky, G. Harder et R. MacPherson, *Weighted cohomology*, Invent. math. 166 (1994), p 139-213

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson, *Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators*, Duke Math. J. 89 (1997), p 477-554

[K1] R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ-adic representations*, dans *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, partie I, Perspectives in Mathematics vol. 10, Academic Press, San Diego, CA (1990), p 161-209

[K2] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, Journal of the AMS, Vol. 5, n°2 (1992), p 373-444

[KR] R. Kottwitz et M. Rapoport, *Contribution of the points at the boundary*, dans [LR], p 111-150

[Ln] R. Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Mathematics 349, Springer (1972), p 361-500

[LR] R. Langlands et D. Ramakrishnan (éditeurs), *The zeta function of Picard modular surfaces*, publications du CRM (1992), Montréal

[L] M. Larsen, *Arithmetic compactification of some Shimura surfaces*, dans [LR], p 31-46

[LR2] E. Looijenga et M. Rapoport, *Weights in the local cohomology of a Baily-Borel compactification*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 53 (1991), p 223-260

[P1] R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse, Bonner Mathematische Schriften 209 (1989)

[P2] R. Pink, *On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification*, Math. Ann. 292 (1992), 197-240

[R] M. Rapoport, *On the shape of the contribution of a fixed point on the boundary : The case of $\mathbb{Q}$-rank one*, dans [LR], p 479-488, avec un appendice de L. Saper et M. Stern, p 489-491

[S] M. Saito, *Mixed Hodge modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), p 221-333

[Sh] G. Shimura, *Arithmetic of unitary groups*, Annals of Math. 79, n°2 (1964), p 369-409

[W] J. Wildeshaus, *Mixed sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in toroidal compactifications*, J. Algebraic Geom. 9, n°2 (2000), p 323-353

[SGA 4 1/2] P. Deligne et al., *Séminaire de géométrie algébrique 4 1/2. Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer (1977)