



HAL
open science

Homologies legendriennes suturées et applications à la construction conormale

Côme Dattin

► **To cite this version:**

Côme Dattin. Homologies legendriennes suturées et applications à la construction conormale. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Nantes, 2020. Français. NNT: . tel-03049603

HAL Id: tel-03049603

<https://hal.science/tel-03049603>

Submitted on 9 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601

Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Côme DATTIN

Homologies legendriennes suturées et applications à la construction conormale

Thèse présentée et soutenue à l'UNIVERSITÉ DE NANTES, le 2 octobre 2020

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs :

Alexandru OANCEA, Professeur, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
Tobias EKHOLM, Professeur, Université d'Uppsala

Jury :

Président : **Alexandru OANCEA**, Professeur, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
Examineurs : **Baptiste CHANTRAINE**, Maître de conférences, Université de Nantes
Georgios DIMITROGLOU RIZELL, Forskarassistent, Université d'Uppsala
Tobias EKHOLM, Professeur, Université d'Uppsala
Paolo GHIGGINI, Chargé de recherche CNRS, Université de Nantes
Anne VAUGON, Maîtresse de conférence, Université Paris-Orsay
Directeur de thèse : **Vincent COLIN**, Professeur, Université de Nantes

Remerciements

De tout temps, l'Homme s'est intéressé aux invariants legendriens. Ce n'est pas très pertinent, ni complètement vrai, mais j'ai toujours voulu commencer ma thèse comme ça.

Ici commencent les traditionnels remerciements, dédiés à tous ceux qui m'ont accompagné ces dernières années, et dont l'objectif principal sera de distraire l'assemblée passées les dix premières minutes de présentation.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Vincent Colin, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Découvrir le monde de la géométrie de contact avec toi a été un plaisir, et ta patience et tes encouragements face à mes discours bancals fût fantastique. Tu m'as proposé un grand nombre de projets fascinants, et tout en me laissant une précieuse liberté mathématique, tu as su m'aider et me pousser au travail quand cela était nécessaire.

Je souhaiterais ensuite remercier mes rapporteurs Alexandru Oancea et Tobias Ekholm, dont les remarques et corrections m'ont permis de remarquer l'utilisation d'un certain nombre d'outils que je ne comprenais pas. Je dois à Alex mon initiation à la théorie de Morse, et mon goût pour la géométrie est sans aucun doute lié à l'enthousiasme et à la clarté dont il a fait preuve lors de la présentation de ces belles idées. Merci aussi à Tobias pour avoir accepté plus de cent pages rédigées en français, être lu par un auteur que l'on a tant cité est un honneur. Je remercie également tous les membres de mon jury : Anne Vaugon, qui m'a aussi suivi et écouté ces trois dernières années comme membre du CSI; Georgios Dimitroglou Rizell, responsable de la bonne ambiance lors de ma première école d'été à Uppsala; Baptiste Chantraine, dont la porte est toujours ouverte et qui m'a montré que les courbes holomorphes ne sont pas si simples; Paolo Ghiggini, qui m'a fait comprendre la transversalité et m'a prouvé que le bon thé, bien préparé, est en effet meilleur. Merci aussi à François Laudénbach qui a virtuellement fait partie de mon jury, par ses remarques particulièrement pertinentes ainsi que par d'enrichissantes discussions, et à Frédéric Bourgeois, qui m'a guidé dans ma lutte pour la transversalité - malheureusement les courbes holomorphes sont encore récalcitrantes.

Je remercie aussi l'ensemble des membres du laboratoire, qui font de cet endroit un lieu chaleureux, où il est facile de discuter, de faire une pause, puis de prendre un café. Merci en particulier à Samuel Tapie, qui a toujours répondu à mes questions ingénues sur la géométrie hyperbolique, et qui m'a attiré à cette excellente pièce des $n + 1$. Je remercie également Salim Rivière, dont l'esprit algébrique m'est incompréhensible mais qui, malgré son emploi du temps, ne désespère pas de me faire comprendre les opérades. Merci à Erwann pour tous ces restos, et à Marco qui a pris la relève, et auquel je dois encore un exposé sur Alexander. Je remercie aussi tout particulièrement les secrétaires du laboratoire, sans lesquelles cette institution s'effondrerait en une heure : Anaïs, Annick, Béatrice, Brigitte et Stéphanie, qui m'ont accompagné durant trois années de péripéties administratives, et dont la clémence pour les retards sera leur perte, ainsi qu'Alexandra qui m'a déjà tant aidé ce dernier mois.

Et voici venu le moment que vous attendez tous : une pluie de remerciements pour les doctorants, postdocs et ATERs du laboratoire. Alors il faut bien dire que lorsqu'on arrive dans un labo de maths, on est pas sûr de ce qu'on va y trouver : un vieux prof un peu fou, ou pire, ennuyeux ; des gens plongés dans des symboles cabalistiques, ou bien dans des pages de calcul ? J'ai appris depuis qu'ils sont appelés algèbristes et analystes, mais je m'égare. Dans mon cas, j'y ai trouvé une fine équipe, toujours disposée à lancer un jeu, faire une pause, prendre un café, refaire une pause, puis aller prendre une bière (ou faire du sport pour les plus motivés). Autant dire que l'ambiance est plutôt bonne, et je suis très heureux de m'être retrouvé ici.

Procédons donc par ordre légèrement chronologique, autrement dit commençons par Thomas G, pilier du labo : merci pour tes astuces de cours, et tes coinches sans pitié qui ont produit des parties intéressantes (et désolé pour ton adaptateur). Merci à Guillem, mon premier cobureau, pour son accent chantant et son accueil chaleureux lors de mon arrivé, et à l'autre sudiste Claire C, ma seconde cobureau, dont la langue acérée et les anecdotes piquantes éclairaient ma journée. Pour continuer avec l'arrière-arrière garde, merci à Damien, dont les passages inopinés ne les rendaient que plus mémorables, pour ta bonne humeur contagieuse, et Johann ce barbu non métalleux qui fait finalement officiellement partie du laboratoire, et avec qui j'ai fait mon premier passage à la scène michelet.

S'ensuit une génération légèrement plus jeune. Merci à Thomas "la beaude" pour avoir réchauffé mon bureau durant mes absences, et dont le lancé de fléchettes est une expérience ; à Thomas W pour ses énigmes quotidiennes, et ses sons d'origine mystérieuse, je n'ai toujours pas percé le code que tu utilisais avec Matthieu ; à Victor VdR, désormais légende de la taroinche, dont la chance est passé dans le vocabulaire courant, et pour

m'avoir fait découvrir les abridged ; à Caro V, pour avoir prouvé, par l'exemple, qu'on pouvait faire un exposé de géométrie en 20 minutes tout en étant clair ; à Guillaume, mon grand frère de thèse, qui a pris le temps d'écouter mes questions de débutant, et m'a fait découvrir les escape game ; à Noémie pour son humeur, dont la belle voix peut animer la forêt, même après une soirée arrosée.

C'est maintenant le tour de ceux avec qui j'ai partagé la plus grande partie de ma thèse. Merci à Solène pour les soirées rhum arrangé, les hanabi/taroinche folies, je te dois un certain nombre de points sur bga ; à Benjamin, doctorant honoraire, que j'ai cotoyé plus que certains membres officiels, et toujours motivé pour que l'on soit cinq ; à Caro B pour avoir introduit Jean-Claude et Michael à la taroinche, et pour les croustillantes anecdotes de collègues ; à Amiel pour m'avoir introduit au Magic Maze, et tant d'autre jeux ; à Claire, la reine du babyfoot, qui nous a écrasé cette soirée là ; à Hélène pour toutes les sessions jeux organisées, j'en ai découvert à chaque fois ; à Giovanni "Andres", mon contact mafieux, dont l'enthousiasme pour les fruits n'a pas d'égal ; à Germain, avec qui je suis rarement d'accord, mais dont j'espère avoir l'honneur de goûter un jour le risotto ; à Matilde, pour le dynamisme dont elle fait preuve, et les "tchao" du matin ; Maha, sans qui Nantes n'aurait pas participé à l'organisation des rencontres doctorales ; Hala et Zeinab pour les gâteaux libanais dont j'ai beaucoup trop abusé ; Matthieu, mon mangeur de cookies favori, seul capable de comprendre le langage du Wallez, et qui n'hésite pas à prendre sans valet ; Voici finalement les "jeunes" : merci à Fabien pour les Hanabi et les astuces végétariennes que tu m'as donné ; à Anh qui m'a montré que l'on pouvait faire du badminton avec les pieds, et avec qui j'ai découvert le fonctionnement d'un vélo ; à Antoine, qui a su me motiver à aller à la piscine, ce qui n'est pas une tâche facile ; à Anthony, qui me montrera un jour comment connecter ma douche et mes rideaux ; à Alexandre IG, dont l'appartement a vu bien des évènement et pour avoir sauvé des flammes cette belle institution qu'est la K-Fêt ; Mohamad pour avoir supporté l'assaut sans répit des taroincheurs ; Trung l'équilibriste, que je n'ai jamais vu tomber ; Adrian, dont l'enthousiasme face à la transversalité me fascine.

Un grand merci finalement aux nouveaux arrivants, que je n'ai que peu rencontré, étant donnée l'année passée. J'espère apprendre à vous connaître durant les mois à venir.

Je dois maintenant remercier un grand nombre de personnes extérieures au labo, qui m'ont côtoyé avant même que je ne commence ma thèse. Tout d'abord un grand merci à Alex qui m'a accompagné dans un grand nombre de plans douteux, des glaciers à l'enfer des tiques, en passant par les taxis. Toujours là pour discuter de géométrie et écouter mes théories foireuses, notre grand théorème ne saurait tarder (mais il est encore trop tôt pour

l'annoncer). Merci également à Hugo, dont la leona ap mid est désormais légendaire en challenjour, malgré son manque évident de skills. Plus que quelques années sur cette voie pour atteindre la sagesse du Hodja. Et heureusement que tu m'as appris à cuire des courgettes, je n'aurais jamais réussi sans toi. Merci aussi à Aurélien, qui est désormais le plus responsable d'entre nous, à la surprise générale. En dépit de ton goût musical contestable, je te dois quelques bonnes découvertes (et un certain nombre plus critiquables).

Je voudrais ensuite remercier le reste d'Antony, en commençant par l'essentiel : le canapé dont je n'ai que trop abusé. Merci à Simon qui m'a convaincu de ne jamais jouer au Tolkin avec lui, sans même avoir à essayer (même contre Chaussette je n'oserais pas) ; à Chloé qui m'a impressionné en jonglant, en quelques mois, avec plus de balles que je ne saurais en tenir ; à Matthieu, dont les blagues "inattendues" révélaient ce que l'on pensait (parfois) tous ; à François qui m'a bien surpris avec sa reconversion professionnelle, et dont j'espère un jour manger le gratin dauphinois ; à Roxanne qui semble survivre sans dormir, tout en restant trois fois plus efficace que le reste.

Un aspect essentiel du travail de thèse, difficile des derniers mois, est aussi d'assister à des conférences. Malgré certains exposés incompréhensibles, elles sont rendues mémorables par ceux qu'on y rencontre régulièrement : merci à Benoît pour les longues séances de Hanabi, motivé même lorsqu'il faisait sombre au point de ne plus distinguer les couleurs ; à Maylis pour son franc-parler, et avec qui il est possible de discuter de tout ; à Michelle, qui a su me redonner le goût du voyage ; à Antoine, qui m'a montré qu'exterminer les zombies n'est pas bien difficile lorsqu'on est organisé ; à Fabio, avec qui j'ai bu ma première bière de conférence ; à Danny, bien trop généreux avec sa voiture et son appart, ce dont je ne me plains pas. J'en oublie sans aucun doute beaucoup d'autres, ce que je réaliserai lors du prochain évènement, et il me faudrait ajouter tous ceux que je n'ai croisé qu'une ou deux fois, mais qui rendent ces évènements si agréables. Malheureusement l'heure tourne, et je n'ai donc qu'un grand merci collectif à vous présenter, j'espère que vous me pardonneriez l'affront.

Remontons encore quelques années, et passons maintenant aux très anciens, que j'ai rencontré alors que je savais à peine dériver (c'est donc l'occasion de remercier M. Combrouze, qui m'a appris à marcher - mathématiquement - à quatre pattes) : merci à JC, mon premier coloc, qui m'a appris le plus important : la cuisine (et tant d'autres choses). Les oignons de Noël sont désormais standards chez moi, et l'aubergine ailée restera dans nos cœurs, à défaut de la table. Puisses-tu faire penser les fleuves et les souris pour toujours. Merci aussi à Yann, dont l'appartement était une seconde résidence en ces temps reculés, et qui a partagé mon enthousiasme durant cette quête pour la dimension des éponges

(malgré un échec retentissant). Je suis sûr qu'un jour la géométrie de contact te sera utile, n'oublie pas de me citer lorsque ce sera publié. Merci également à Jules, radio-head et artiste incompris qui s'était retrouvé dans cette galère. Ta connaissance du deep youtube et ta maîtrise des transitions reste sans égale après tout ce temps, et j'espère te voir un jour à l'avant-première. Finalement, le plus beau pour la fin, merci à Vincent, notre autre radio-head, qui m'a fait découvrir le bout de la ligne E et onepunch-man. Je n'oublierai pas ton mélange tabasco/ingrédients-secrets, ni tes massacres unilatéraux sur gamecube (heureusement, les pauses Zelda faisaient passer le désespoir).

Pour terminer sur cette époque, je voudrais remercier Quentin pour ses suggestions de jeux - j'ai heureusement attendu la fin de la rédaction pour me lancer, sans quoi les bugs d'Hollow Knight auraient eu raison de moi ; Guillaume K avec qui j'ai creusé la Bretagne, ce dont elle avait bien besoin, et qui m'a aidé à retourner quelques pots ; Didier, toujours disponible quand il le faut ; et tous ceux que j'ai croisé boulevard Saint-Michel durant ces brèves années.

Un vieux merci également à Léo, qui m'a fait découvrir la vraie musique (cela me semble bien lointain) ; à Antoine Remond de Blère, pour ces heures de petits carrés ; et aux autres qui ont fait partie de cette antique époque popolienne, dont les soirées sur les quais resteront dans les mémoires. Finalement, merci à ma famille : mes parents, qui m'ont supporté toutes ces années ; Yolé, le plus professionnel d'entre nous ; A-F, la seule motivée pour aller skier ; Tchekou, bientôt plat'.

Ces dernières lignes sont bien sûr dédiées aux cookies de la boulangerie du rond-point de Vannes (les meilleurs de la ville), qui m'ont aidé à passer de longues après-midi pluvieuses. Toutes mes excuses à ceux que j'ai oublié, qui sont légions, un grand merci à vous aussi. Et bonne lecture pour les plus motivés.

Table des matières

Introduction	13
1 Hypersurfaces convexes et variétés suturées	29
1.1 Définitions	29
1.1.1 Variétés symplectiques et de contact	29
1.1.2 Champs de contact	31
1.1.3 Domaines de Liouville	33
1.1.4 D'une isotopie legendrienne à un cobordisme exact	34
1.1.5 Variétés de Stein et de Weinstein	36
1.2 Hypersurfaces convexes	38
1.3 Variétés suturées et sous-variétés legendriennes	43
1.3.1 Variétés de contact positivement suturées	44
1.3.2 Legendriennes cylindriques	45
1.3.3 Variétés négativement suturées	48
1.4 Changer de condition au bord	49
1.4.1 De convexe à suturé	50
1.4.2 D'une suture négative à une suture positive	53
1.5 Complétions	54
2 Courbes holomorphes	57
2.1 Espace de module des surfaces	57
2.2 Structures presque complexes adaptées	59
2.3 Courbes holomorphes et énergies	61
2.4 Géométrie finie à l'infini et monotonie	63
2.5 Principes du maximum : 5 nuances de Stokes	64
2.5.1 Dans une symplectisation	64
2.5.2 Dans un cobordisme	65

TABLE DES MATIÈRES

2.5.3	Dans une variété suturée : complétion cylindrique	67
2.5.4	Dans une variété suturée : complétion enroulée	71
3	Invariants des legendriennes suturées	73
3.1	Version cylindrique	73
3.1.1	Algèbre	73
3.1.2	Degré	74
3.1.3	Espaces de module et compacité	78
3.1.4	Transversalité et structures presque complexe régulières	80
3.1.5	Structure spin	81
3.1.6	Différentielle	82
3.1.7	Invariance	82
3.1.8	Inclusion de variété suturée	86
3.2	Version enroulée	89
3.2.1	Homologie relative	89
3.2.2	Homologie suturée enroulée	89
3.2.3	Suites exactes	92
3.3	Variété à sutures circulaires	94
3.3.1	Complétion	96
3.3.2	Structure presque complexe	97
3.3.3	Principe du maximum	98
3.3.4	Homologie suturée	100
4	Cas particuliers	103
4.1	Épaississement d'un domaine de Liouville	103
4.2	Complémentaire de la section nulle	106
4.3	Cotangent unitaire : en général	112
4.4	Complémentaire du conormal d'un nœud hyperbolique	115
4.4.1	Cotangent unitaire du complémentaire du nœud hyperbolique	117
4.4.2	Attachement d'une anse de contact circulaire	129
4.4.3	Du fibré unitaire du complémentaire au complémentaire du conormal	132
4.5	Conormal d'une tresse dans un cylindre	142
4.5.1	Groupe des 2-tresses	143
4.5.2	Deux fibres dans le cotangent unitaire d'une surface	144
4.5.3	Forme de contact adaptée	144

4.5.4	Espace des 1-jets	145
4.5.5	Preuve du théorème	149
4.5.6	Cas général	151
4.6	Algèbre des cordes	152
Bibliographie		160

Introduction

We study Legendrians with boundary, properly embedded in a contact manifold (V, ξ) with sutured convex boundary, as well as some examples. Following ideas from Lagrangian Floer theory, and extending results from [CGHH11], we define the cylindrical and wrapped sutured Legendrian homologies of a Legendrian whose boundary is in the suture Γ of the convex boundary ∂V . For this construction, our main contribution is a maximum principle for pseudo-holomorphic curves with boundary, in the symplectisation of a non-compact contact manifold (similar results appeared in [CGHH11] for curves without boundary, and in [AS10][GPS19] in the Hamiltonian framework). Moreover, after linearisation those homologies fit into an exact sequence which conjecturally generalises the exact triangle from [Ekh11].

We also show that the unit conormal construction, applied to a submanifold N properly embedded in a manifold M with boundary, such that $\partial N \subset \partial M$, is a typical instance of this situation. Hence our Legendrian homology yields a (presumably) powerful invariant of topological submanifolds with boundary. The main illustration involves braids in a thickened surface : by an explicit computation of the previous exact sequence, we prove that the conormals of two local pure 2-braids are isotopic (as Legendrians with fixed boundary) if and only if the braids are equivalent.

In the second part, we apply the conormal construction to a hyperbolic knot $K \subset S^3$ (of finite volume), and study the sutured contact manifold (V, ξ, Γ) obtained by taking the complement of a standard neighbourhood of the unit conormal $\Lambda_K \subset (ST^*S^3, \xi_{\text{st}})$ of the knot. We show that the Legendrian contact homology of a fiber Λ_0 in the sutured contact manifold (V, ξ, Γ) , with its product structure, is a complete invariant of the knot (up to mirror). It can be understood as a sutured version of a result from [ENS17] : for any knot, the Legendrian homology of $\Lambda_0 \cup \Lambda_K$ in the unit cotangent bundle $(ST^*S^3, \xi_{\text{st}})$, with its product structure, is a complete knot invariant.

Contact invariants

A *contact structure* on a manifold V of dimension $2n + 1$ is a hyperplane field ξ locally given by the kernel of the standard form

$$\lambda_{\text{st}} = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i,$$

see figure 1 for an illustration.

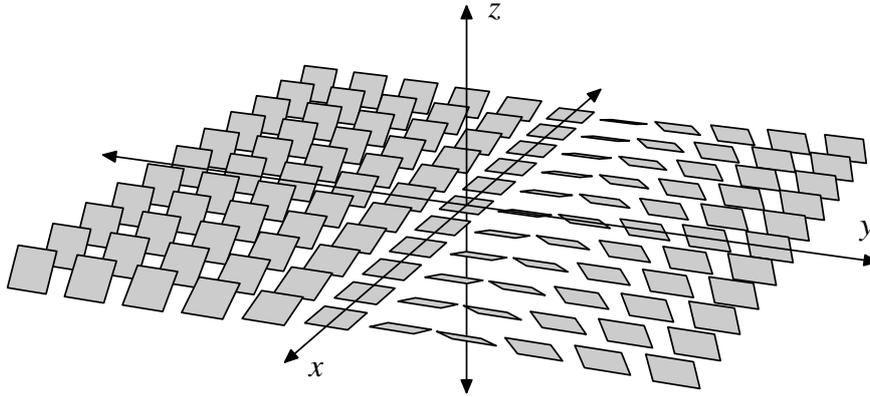


FIGURE 1: The standard contact structure in \mathbb{R}^3

Such a structure is usually cooriented, and can then be described as the kernel of a global contact 1-form λ , satisfying $\lambda \wedge (d\lambda^n) > 0$. A plain example is the contactisation of a Liouville manifold (W, β) , where W is a $2n$ -manifold and β is a 1-form satisfying $(d\beta)^n > 0$:

$$(\mathbb{R}_t \times W, dt + \beta)$$

is then a contact manifold. A main topic in contact geometry is to construct *invariants* of the pair (V, ξ) using those contact forms, providing computable ways to distinguish contact structures up to isotopy.

Morse homology

We start with a brief presentation of Morse theory, as the ideas used in contact geometry are similar (see [MSW69] and [Mat02] for details). Let M be a closed manifold, and $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a Morse function, meaning that all critical points are non-degenerate.

Picking a metric allows us to define the gradient field of the function, whose negative flow will be denoted ϕ^t . Given two critical points p_+ and p_- of f , the moduli space of gradient

trajectories going from p_+ to p_- is defined by

$$\mathcal{M}(p_+, p_-; f, g) = \{x \in V, \phi^t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} p_{\pm}\} / \mathbb{R},$$

where we quotient by the action of $\phi^t, t \in \mathbb{R}$. For a generic metric, this space is a manifold of dimension $|p_+| - |p_-| - 1$, where $|p_{\pm}|$ are the indices of the critical points.

The Morse complex $C(M, f, g)$ is the \mathbb{Z}_2 -module formally generated by the critical points of f , and where the differential counts rigid gradient trajectories :

$$\partial p_+ = \sum_{|p_-|=|p_+|-1} \#\mathcal{M}(p_+, p_-; f, g) \cdot p_-.$$

This expression defines indeed a differential because ∂^2 counts the number of boundary components of a one-dimensional moduli space, and thus vanishes, see figure 2 for a simple illustration.

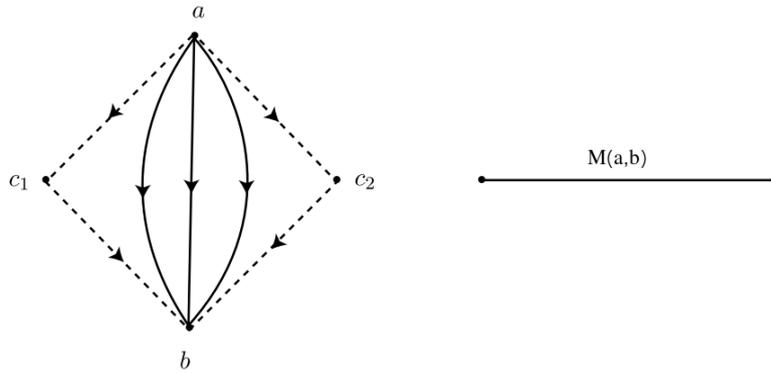


FIGURE 2: A one-dimensional moduli space of gradient trajectories.

The Morse homology of M relative to f is the module

$$H(M, f, g) = \frac{\ker \partial}{\text{Im } \partial},$$

graded by indices of the critical points, and is isomorphic to the singular homology of the manifold. In particular it doesn't depend on the choice of f and g , which warrants the term of invariant (it actually only depends on M up to homeomorphism).

We note that there also exists a version of Morse homology for manifolds with boundary, see [Lau10], in which the critical points of the boundary are added to the complex.

Furthermore this construction recovers the exact triangle involving the relative homology $\xrightarrow{[-1]} H(\partial M) \longrightarrow H(M) \longrightarrow H(M, \partial M) \xrightarrow{[-1]}$.

Contact homology

For a closed manifold V , endowed with a contact structure ξ , we can define an invariant by using a contact form to define some sort of "Morse functional". This point of view was first implemented by Floer [Flo88] in the context of symplectic geometry, studying even-dimensional manifolds endowed with a non-degenerate 2-form, then by Chekanov [Che97] for contact geometry (see also [EGH00]). The key point is to replace gradient trajectories by holomorphic curves, introduced by Gromov, and to show that it still defines a differential.

We give here a short description of this construction, the parallel with Morse homology being summarized in the following table :

	Morse homology	Contact homology
Object	Manifold	Contact manifold
Choices	Morse function	Contact form
	Metric	Almost complex structure
Generators	Critical points	Reeb orbits
Differential	Gradient trajectories	Pseudo-holomorphic curves
Invariance	Homeomorphism	Contactomorphism

We first choose a contact form λ , whose associated Reeb vector field R_λ is defined by $\iota_{R_\lambda} d\lambda = 0$ and $\lambda(R_\lambda) = 1$. This vector field is transverse to the contact hyperplanes, and for the standard contact form it is ∂_z .

Then the periodic orbits of R_λ can be seen as the critical points of the action functional

$$\mathcal{A}_\lambda : \gamma \in C^\infty(S^1, V) \mapsto \int_\gamma \lambda$$

and we denote by $CC(V, \lambda)$ the algebra generated by those periodic Reeb orbits, which are countable for a generic contact form.

The counterpart of the metric used to define gradient trajectories will be an almost complex structure J on $\mathbb{R} \times V$ satisfying some compatibility conditions with λ , and the differential will count J -holomorphic curves in $\mathbb{R} \times W$ with prescribed asymptotics : for Reeb orbits $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ the relevant moduli space is

$$\mathcal{M}(\gamma_0; \gamma_1 \dots \gamma_k; V, J) = \left\{ U = (a, u) : (S^2 \setminus \{z_0, \dots, z_k\}, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J) \mid \right. \\ \left. dU \circ j = J \circ dU, u \xrightarrow{z \rightarrow z_i} \gamma_i, a \xrightarrow{z \rightarrow z_0} +\infty, a \xrightarrow{z \rightarrow z_i} -\infty \text{ for } i > 0 \right\}.$$

The results from [BEHWZ03] and [CM05], which rely on the compactness of V , show that Gromov compactness is verified in this setting. Hence the formula

$$\partial\gamma_0 = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k} \#\mathcal{M}(\gamma_0; \gamma_1 \dots \gamma_k; V, J) \gamma_1 \dots \gamma_k,$$

extended by the Leibniz rule, defines a differential : the squared differential counts broken holomorphic curves, and, similarly to Morse homology, those curves form the boundary of a 1-dimensional manifold, see figure 3. The homology is thus a unital algebra, which only depends on ξ up to isotopy : if $(\lambda_t, J_t)_{t \in [0,1]}$ is a path of contact forms and adapted complex structures, we get a quasi-isomorphism

$$CC(V, \lambda_0, J_0) \longrightarrow CC(V, \lambda_1, J_1)$$

by counting holomorphic curves in a Liouville cobordism.

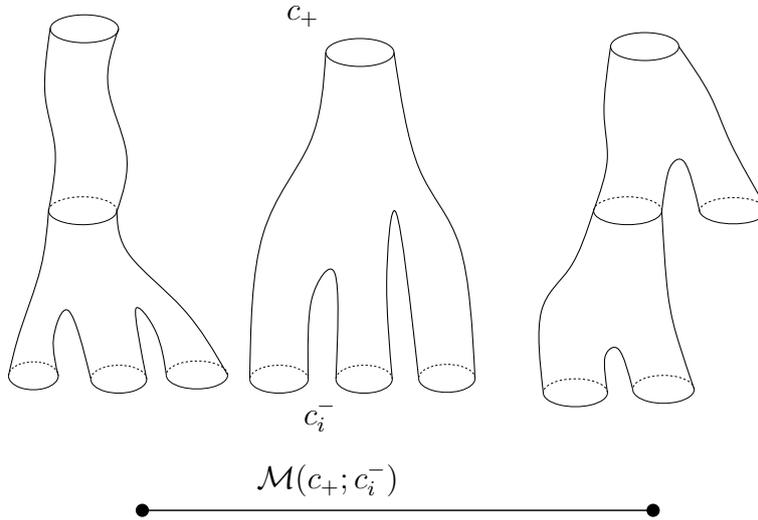


FIGURE 3: A one-dimensional moduli space of broken curves.

We can also define a relative version of contact homology using a Legendrian $\Lambda \subset (V, \xi)$, n -dimensional properly embedded submanifold such that $T\Lambda \subset \xi$. The relevant algebra is generated by the Reeb trajectories joining two points of the Legendrian, and the differential counts pseudo-holomorphic curves with boundary in $\mathbb{R} \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times V$. The homology is now an invariant of the Legendrian up to (Legendrian) isotopy.

Remark 1. Unlike Morse trajectories, moduli spaces of pseudo-holomorphic curves are not manifolds, but polyfolds, which yields some analytical issues. Details have been worked out for the contact homology of a closed manifold in [Par19] (using sheaf technics, see also [Par16]), and for the Legendrian contact homology in contactisations, see [EES07].

Conormal construction

A natural occurrence of contact manifolds originates from the topological world : given a closed manifold M , its unit cotangent bundle

$$ST^*M = \{(x, \alpha) | x \in M, \alpha \in (T_x^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*\},$$

where \mathbb{R}_+^* acts by dilation, comes with a canonical contact structure

$$\xi_{(x,\alpha)} = \{(v, \cdot), \alpha(v) = 0\},$$

and any properly embedded submanifold $N \subset M$ yields a Legendrian by taking its conormal

$$ST_N^*M = \{(x, \alpha) | x \in N, \alpha|_{TN} = 0\}.$$

Moreover any metric on M defines a contact form on ST^*M , and the Reeb trajectories project to geodesics of this metric.

Extensive work has been done on the relations between topological invariants of a manifold and contact invariants of its unit bundle. To cite a few, the Legendrian homology of the conormal of a knot in S^3 was computed in [EENS13], and it was proven by [CELN17] that its 0-degree part is isomorphic to the cord algebra of the knot, a topological invariant defined combinatorially in [Ng05a] (the parts of higher degrees can be interpreted via topological string theory, see [Ekh13]). Furthermore, using this description, it is shown in [ENS17] that the contact homology of the conormal of a knot and a point, with its natural product structure, is a complete invariant of the knot. The underlying philosophy here is that the contact invariants of a conormal recover most of the geometric information of the initial manifold.

Contact manifolds with convex boundary

Up until now all manifolds considered were either closed, or the contactisation of a Liouville domain. As established in [CGHH11], we can also define the contact homology of a contact manifolds with convex boundary.

Convex hypersurfaces

A hypersurface $\Sigma \subset (V, \xi = \ker \lambda)$ is said ξ -convex if there exists a vector field X preserving the contact structure, and transverse to Σ . This notion was first introduced by Giroux in [Gir91], in which genericity is proven in dimension 3, while C^0 -genericity has

been proven in higher dimension by [HH19].

As a consequence of that definition, the dividing set

$$\Gamma = \{x \in \Sigma, X(x) \in \xi_x\}$$

is a codimension two contact submanifold, separating the hypersurface in two regions

$$\Sigma \setminus \Gamma = R_+ \cup R_-, \text{ where } R_{\pm} = \{x \in \Sigma, \pm \lambda_x(X) > 0\}.$$

Moreover one can construct a contact form whose Reeb vector field is positively transverse to R_+ and negatively transverse to R_- , making each region a Liouville domain, see figure 4.

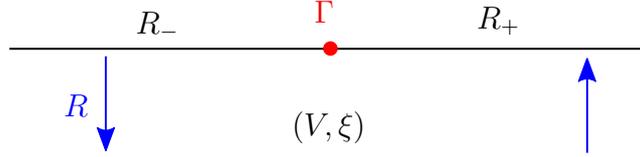


FIGURE 4: Reeb vector field of a contact form adapted to the convex boundary.

Examples of contact manifold with convex boundary are :

- A standard ball $B^{2n+1} \subset (\mathbb{R}_z \times \mathbb{R}_{x,y}^{2n}, \ker \lambda_{\text{st}})$. The radial vector field preserves the contact structure, the dividing set is the standard sphere

$$\Gamma = \{z = 0, \sum x_i^2 + y_i^2 = 1\} \simeq S^{2n-1} \subset (B^{2n}, -x_i dy_i),$$

and R_{\pm} are both symplectomorphic to a standard Liouville ball $(B^{2n}, -\sum x_i dy_i)$.

- A standard neighbourhood of a Legendrian Λ , contactomorphic to

$$\{t^2 + \sum p_i^2 \leq 1\} \subset (\mathbb{R}_t \times T^*\Lambda_{(q,p)}, dt - pdq).$$

Taking $X = t\partial_t + p\partial_p$, the dividing set is the unit tangent bundle of Λ

$$\Gamma = \{t = 0, \sum p_i^2 = 1\} \simeq (ST^*\Lambda, \ker -pdq),$$

and R_{\pm} are both symplectomorphic to the disk cotangent bundle of Λ .

- Half of a contact open book decomposition (see section 3.3 for details). The dividing set is then the binding of the open book, and R_{\pm} are both a page.

Sutured contact manifold

Starting from a contact manifold with convex boundary, the authors of [CGHH11] make use of the previous decomposition of the boundary to control holomorphic curves, leading to a well-defined contact homology. The first step is to remove a neighbourhood of the dividing set to obtain a *sutured contact manifold*. That kind of boundary was first used by [Gab83] in a topological settings, then by [CH05] in the 3-dimensional contact case. Roughly speaking, it is a manifold contactomorphic near its boundary to (a neighbourhood of the boundary of) the finite contactisation $([-1, 1]_t \times W, dt + \beta)$, where (W, β) is a Liouville domain.

More precisely, using the procedure from [CGHH11] we get a manifold with corners, whose boundary splits into

$$R_+ \cup ([-1, 1]_t \times \Gamma) \cup R_-,$$

where corners are exactly the gluing loci. The constructed contact form λ is such that its Reeb vector field is positively (resp. negatively) transverse to R_+ (resp. R_-), and on a neighbourhood $(-\varepsilon, 0]_\tau \times [-1, 1]_t \times \Gamma$ of the remaining boundary, it is given by

$$\lambda = dt + e^\tau \lambda_\Gamma$$

where λ_Γ is a contact form on Γ .

This manifold is completed into a non-compact contact manifold (V^*, λ^*) by gluing the products $([1, \infty)_t \times R_+, dt + \lambda_{|_{TR_+}}$ and $((-\infty, -1]_t \times R_-, dt + \lambda_{|_{TR_-}}$ along R_\pm , and $(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma, dt + e^\tau \lambda_{|_{T\Gamma}})$ along $\mathbb{R}_t \times \Gamma$, see figure 5 for an illustration. For example the completion of $([-1, 1] \times W, dt + \beta)$ is the contactisation of the completion of (W, β) . Choosing an adapted contact form on those glued regions, the Reeb vector field is directed by ∂_t , hence all periodic orbits are in the original manifold. Moreover, for an adjusted almost complex structure, the pseudo-holomorphic curves are bounded and thus verify Gromov compactness, so counting those curves provides a differential.

The authors of [CGHH11] obtain that way an invariant of contact manifolds with convex boundary, depending only on ξ up to a path of contact structures keeping the boundary convex. Moreover, an inclusion $V \subset (V', \xi)$, where V has convex boundary, induces an application

$$CC(V, \xi|_V) \longrightarrow CC(V', \xi).$$

In addition, they also get a Legendrian invariant by considering the contact homology of the complement of a standard neighbourhood of the Legendrian.

Thesis results

We now present the results obtained, as well as the structure of this manuscript.

Sutured Legendrian homology

From a contact manifold (V, ξ) , with convex boundary, containing a compact Legendrian Λ , with boundary in the dividing set, we extend the results from [CGHH11] to define two kind of *sutured Legendrian homologies*. Those invariants generalize the usual Lagrangian Floer homologies (see [Flo88], [AS10] and [FOOO09] for details) : a Lagrangian L in a Liouville domain (W, β) lifts to a Legendrian Λ_L in $([-1, 1] \times W, C.dt + \beta)$ for C big enough, and it was proven in [DR16] that (positive) Lagrangian Floer homology in (W, β) is isomorphic to Legendrian contact homology of the lifts. We will define the Legendrian homology for Legendrians $\Lambda \subset (V, \xi = \ker \lambda)$ which are contactomorphic to some $\Lambda_L \subset ([-1, 1] \times W, C.dt + \beta)$ near the boundary.

As previously, from a contact manifold with convex boundary we construct a sutured contact manifold, now containing a Legendrian such that $\partial\Lambda \subset \{0\} \times \Gamma$. We complete the sutured manifold as before and, following the ideas coming from Lagrangian Floer homology, we can complete the Legendrian in different ways :

- *Cylindrical completion* : we extend the Legendrian cylindrically by gluing a product to get a non-compact Legendrian

$$\Lambda^* = \Lambda \cup (\{0\} \times \mathbb{R}^+ \times \partial\Lambda).$$

- *Wrapped completion* : choosing a splitting of the boundary into $\partial\Lambda = \partial_0\Lambda \sqcup \partial_1\Lambda$, we complete $\partial_1\Lambda$ cylindrically as previously, and we extend $\partial_0\Lambda$ using a Hamiltonian quadratic in τ : in the completion, this is a Legendrian lift of the Lagrangian $\mathbb{R}^+ \times \partial_0\Lambda \subset (\mathbb{R}^+ \times \Gamma, e^\tau \lambda_\Gamma)$ pushed by the induced Hamiltonian diffeomorphism. We now have Reeb chords outside the original manifold, corresponding to chords in Γ going from $\partial_0\Lambda$ to $\partial_1\Lambda$, see figure 5.

Theorem 1. *For any completion, the pseudo-holomorphic curves in the symplectisation of (V^*, λ^*) , with boundary in $\mathbb{R} \times \Lambda^*$ and fixed asymptotics, stay in a compact set. Hence Gromov's compactness result holds.*

This result, based on Stokes' theorem and similar to [AS10, Lemma 7.2] in the Floer framework, allows us to define the Legendrian homology of a Legendrian submanifold with boundary in the dividing set of a contact manifold with convex boundary.

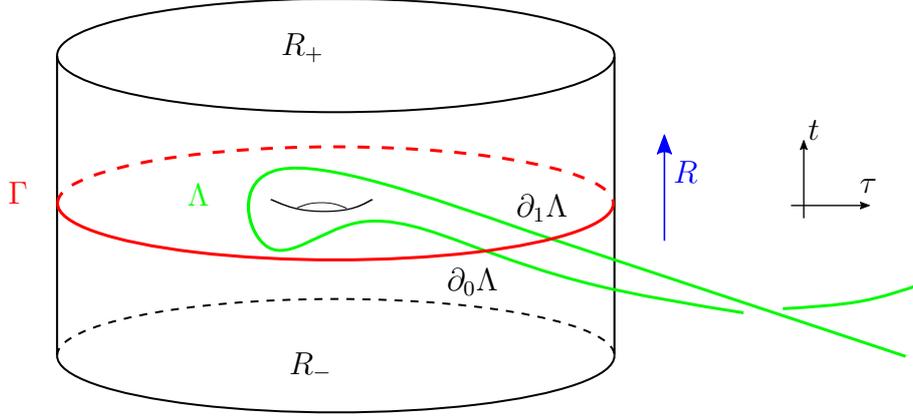


FIGURE 5: Completion of a Legendrian

Remark 2. We prove no new result regarding the problem of transversality of moduli spaces. Thus for the general case, we would need the theory of polyfolds, still under development, or a variant of the sheaf technics from [Par16] for curves with boundary.

Modulo transversality issues being solved, those constructions provide several invariants :

- with the first kind of completion we obtain the *cylindrical sutured Legendrian homology*, depending on $(V, \xi, \Gamma, \Lambda)$;
- with the second one we get the *wrapped sutured Legendrian homology*, depending on $(V, \xi, \Gamma, \Lambda)$, and the splitting of $\partial\Lambda$;

Moreover they are invariants in the following sense :

Theorem 2. *The cylindrical Legendrian homology $\mathcal{LH}(\Lambda, V)$ is invariant along a Legendrian path such that $\partial\Lambda \subset \Gamma$ remains an embedded Legendrian.*

The wrapped Legendrian homology $\mathcal{WLH}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, V)$ is invariant along a Legendrian path, where $\partial_1\Lambda$ stays in $\{t = 0\}$ and $\partial_0\Lambda$ can be in $\{t = -\varepsilon\}$, with $\varepsilon \geq 0$.

Furthermore for a wrapped completion, the curves positively asymptotic to an interior chord stay inside the original sutured manifold, thus for a Legendrian completion which is hypertight ¹, the strip Legendrian complexes $LC(\Lambda, V) \subset \mathcal{WLC}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, V)$ are well-defined (where the differential only counts holomorphic strips), which induces an exact sequence

$$\rightarrow LH(\Lambda, V) \longrightarrow \mathcal{WLH}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, V) \longrightarrow LH^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, \Gamma) \quad (1)$$

We conjecture that this triangle extends the results from [Ekh11] : firstly a sutured manifold should define an augmentation ε on the Legendrian algebra of its boundary (for

¹. Here it means that all Reeb orbits are non-contractible, and all Reeb chords are non-contractible (through paths with endpoints in the Legendrian).

the contactisation of a Liouville domain, it follows from [DR16]), and there should be an isomorphism

$$LH^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, \Gamma) \simeq LH_\varepsilon(\partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda, \Gamma).$$

Indeed, by taking Hamiltonians of τ stretching the boundary and slowing down at infinity, the curves contributing to the differential of the quotient should correspond to curves in the symplectisation of $\partial\Lambda \subset (\Gamma, \lambda_\Gamma)$, positively asymptotic to a chord going from $\partial_0\Lambda$ to $\partial_1\Lambda$, and with negative asymptotics anchored by curves counted by the augmentation, see [BO09b] for a similar statement regarding curves without boundary.

Moreover, isotopic sutured Legendrians (with fixed boundary during the isotopy) should define equivalent augmentations, and this triangle should be invariant under such an isotopy, see section 3.2.3 for a more precise statement.

Remark 3. By taking several perturbed copies of the Legendrians, and wrapping each end properly, we should be able to extend the \mathcal{A}_∞ -operations (for "admissible" Legendrians) from Floer theory to the sutured setting. Actually, most of the constructions from the Lagrangian framework should broaden to the sutured situation : stopped Lagrangian homology [Syl19], Viterbo functoriality [Vit99], Rabinowitz-Floer homology [CF09], and more generally various flavours of Floer homology satisfying the Eilenberg-Steenrod axioms [CO18].

Conormal constructions

We now expose the examples, coming from the conormal construction, examined to illustrate those contact invariants. This procedure is a rich source of contact manifolds with convex boundary :

Proposition 1. *If M is a manifold with boundary, then its unit cotangent bundle ST^*M has convex boundary, and its dividing set is the unit bundle of the boundary. Moreover, for any compact submanifold $N \subset M$ with boundary in ∂M , intersecting transversely the boundary, its conormal is Legendrian, of boundary $ST_{\partial N}^*(\partial M)$.*

Proof :

Indeed, if X is a vector field on M , of flow ϕ^t , the flow of the vector field lifted to ST^*M , denoted $\hat{X} = (X, 0)$, is

$$\hat{\phi}^t : (x, \alpha) \in ST^*M \mapsto (\phi(x), \phi_*\alpha).$$

We claim that \hat{X} preserve the contact structure : for $\alpha \in (T_x^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} d_{(x,\alpha)}\hat{\phi}^t(\xi_{(x,\alpha)}) &= \{(d_{(x,\alpha)}\hat{\phi}^t(v, w), v \in T_xM, w \in T_\alpha((T_x^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*), \alpha(v) = 0\} \\ &= \{(v', *) \in T_{(\phi^t(x), \phi_*\alpha)}(ST^*M), \alpha \circ (d_x\phi^t)^{-1}(v') = 0\} \\ &= \{(v', *) \in T_{(\phi^t(x), \phi_*\alpha)}(ST^*M), \phi_*\alpha(v') = 0\} \\ &= \xi_{(\phi^t(x), \phi_*\alpha)} = \xi_{\hat{\phi}^t(x,\alpha)}. \end{aligned}$$

If X is transverse to ∂M , then \hat{X} is transverse to the boundary of ST^*M , and the resulting dividing set is

$$\Gamma_{\hat{X}} = \{(x, \alpha), x \in \partial M, \alpha \in (T_x^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*, \alpha(X) = 0\} \simeq ST^*(\partial M).$$

Moreover, the boundary of the conormal $ST_N^*M \subset (ST^*M, \xi_{st})$ is

$$\{(x, \alpha) \in \partial M \times (T_x^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+^*, \alpha|_{TN} = 0\} \simeq ST_{\partial N}^*(\partial M).$$

Indeed for $x \in \partial M$, a linear form on T_xM , vanishing on T_xN , is equivalent to a linear form on $T_x(\partial M)$, vanishing on $T_x(\partial N)$. \square

Furthermore, if X is a vector field on M transverse to the boundary and tangent to N , the boundary $\partial\Lambda$ is in the dividing set associated to \hat{X} . To summarize the relevant submanifolds, we have :

$$\begin{aligned} V &= ST^*M & \partial V &= D^*(\partial M) \cup_{\Gamma} D^*(\partial M) & \Gamma &= ST^*(\partial M) \\ \Lambda &= ST_N^*M & \partial\Lambda &= ST_{\partial N}^*\partial M. \end{aligned}$$

Lastly, to construct a sutured contact manifold, we can take a contact form coming from a metric on M , such that on a neighbourhood of ∂M ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\partial M) &\simeq (\varepsilon, 0]_u \times \partial M \\ g &\simeq f(u)(du^2 + g_\partial) \end{aligned}$$

where g_∂ is a metric on ∂M and f is a well-chosen increasing function. However it will usually be more convenient to change directly the contact form.

Once again the philosophy will be that the contact invariants of a conormal recover most (maybe all, if one is optimistic) of the geometric data. The next examples are to compare to the result from [ENS17], which we briefly recall : let $K \subset S^3$ be a knot, and pick a point $x \in S^3$. Then the linearized Legendrian homology of $ST_K^*S^3 \cup ST_x^*S^3$, with its product structure, determines the knot (up to mirror). Indeed, they show that this Legendrian invariant recover the group $\pi_1(S^3 \setminus K)$, with its peripheric subgroup, which is known to be a complete knot invariant [Wal68] [GL89].

Hyperbolic knot : For this first example the Legendrian has no boundary. If $K \subset M^3$ is a hyperbolic knot with finite volume, its conormal is Legendrian in $V = (ST^*M, -p.dq)$, and admits a standard neighbourhood \mathcal{N} with convex boundary. Let Λ_x be a fiber in $V \setminus \mathcal{N}$, and \tilde{V} the sutured contact manifold obtained from $V \setminus \mathcal{N}$. Then, if $M = S^3$, the linearized Legendrian homology $LH(\Lambda_0, \tilde{V})$, with its product structure, is a complete invariant of the knot :

Theorem 3. *$LH(\Lambda_x, \tilde{V})$ is a free \mathbb{Z}_2 -module with one generator c_γ by element $\gamma \in \pi_1(M \setminus K, x)$. Moreover the product between chords recovers the group law : in homology, $\mu(c_\gamma, c_{\gamma'}) = c_{\gamma\gamma'}$, hence $(LH(\Lambda_x, \tilde{V}), \mu)$ is isomorphic to the ring $\mathbb{Z}[\pi_1(M \setminus K, x) \setminus 1]$. In particular if $M = S^3$, it is a complete invariant of the knot, up to mirror.*

The idea is as follows : let V_0 be the sutured manifold constructed from $ST^*(M \setminus \mathcal{N}(K))$, unit bundle of the complement of a neighbourhood of K . We construct a contact form such that \tilde{V} can be obtained from V_0 , by gluing two circular "hyperbolic" handles

$$(H, \lambda) = (S_t^1 \times D_x^2 \times D_y^2, (1 + \varepsilon x \cdot y)dt - ydx)$$

along thickened tori in R_+ . A theorem from [CGHH11] states that removing those handles doesn't change the Legendrian homology, essentially by stretching the gluing loci. After an isotopy we get a contact form on V_0 coming from a cut-off of the hyperbolic metric on $M \setminus K$, perturbed near the boundary to get a sutured manifold. By a colimit stretching the manifold to the unit bundle of $M \setminus K$, we can actually compute the homology using the contact form coming from the hyperbolic metric. Reeb trajectories being geodesics, we have one chord by element of the fundamental group, and the differential vanishes for action reasons. Moreover, using the Morse flow trees introduced by Ekholm [Ekh07], we show that for any pair of chords there is exactly one pseudo-holomorphic triangle positively asymptotic to those chords.

2-braids : The second considered example is the conormal of a braid with two strands in a surface S : we show that the exact triangle 1 is an invariant which distinguishes local pure braids. Let $\Lambda_k \subset V = ST^*(I \times S)$ be the conormal of the braid making k twists in a small disk $D_\varepsilon \subset S$.

Theorem 4. *If Λ_k and $\Lambda_{k'}$ are isotopic as Legendrians with fixed boundaries, then $k = k'$.*

In that specific case, we first show that the exact triangle 1 is indeed invariant under exact Lagrangian cobordism with cylindrical vertical boundary. We then determines this triangle by restricting to a neighbourhood of $I \times ST^*S \subset V$, and by lifting the braid

to \mathbb{R}^2 . After completion, the situation boils down to Legendrians in $J^1(S^1 \times \mathbb{R})$, and Λ_k becomes the union of the 0-section and the 1-jet of a function

$$h_k : (a, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 \mapsto f(a) \cos(\theta + 2\pi\eta_k(a)) - g(a),$$

where f presents a minimum at 0, $f - g$ presents two maximums at ± 1 , and η_k is a monotone function evaluating to 0 if $u \leq 0$ and k if $u \geq 1$. We conclude by using this description to explicitly compute the exact sequences via Morse trajectories : if C is the $\mathbb{Z}[H_1(S^1)] - \mathbb{Z}[H_1(S^1)]$ -bimodule generated by the elements of $\pi_1(S)$, the exact triangle associated to Λ_k is

$$\longrightarrow C \xrightarrow{0} C[1] \longrightarrow C[1] \oplus C[1] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \text{Id} \oplus \delta_k \\ [-1] \end{smallmatrix}]{\text{Id} \oplus \delta_k} C \xrightarrow{0}$$

with $\delta_k x = \mu^k x \mu^{-k}$, where μ is a generator of $H_1(S^1)$.

Remark 4. The map δ_k can be seen as induced on $LH(U_x S \cup U_y S, US)$ by an exact Lagrangian cobordism in the symplectisation of US , obtained by lifting the braid to a loop of Legendrians (in US).

Conjecture 1. *If there exists an exact Lagrangian cobordism (with cylindrical vertical boundary) between the conormals of two 2-braids in a surface, the braids are equivalent.*

Note that to deal with commutators of local and global braids, one should use coefficients in $H_2(V, \Lambda)$.

Others results

We prove some others small results partially related to the previous ones, but which should be expanded upon.

Firstly, adapting the work from [CGH10] to higher dimension, we define in section 3.3 the (non-Legendrian) contact homology of a contact manifold with *circular boundary* $S^1 \times \Gamma$, foliated by a Γ -family of Reeb orbits directed by the factor S^1 . Those manifolds are typically obtained by removing a neighbourhood $\mathcal{N} \subset (V, \xi)$ of the binding of an open book decomposition, and in that case the homologies of V et $V \setminus \mathcal{N}$ should be related similarly to the result from [CGH10].

We also observe that the (non-Legendrian) sutured contact homology of the complement of a standard neighbourhood of the 0-section $\mathcal{N}(0_M) \subset J^1(M)$ is the contact homology of the unit cotangent bundle of the basis :

$$CC(J^1(M) \setminus \mathcal{N}(0_M), \ker \lambda_{\text{st}}) \simeq CC(ST^*M, \xi_{\text{st}}).$$

Finally, we define in section 4.6 the cord algebra of a link L (with boundary) and a surface S in a topological manifold M with boundary, extending the construction from [Ng05b] (see also [CELN17]). The key additional ingredient is fixing a basepoint z in each connected component of $S \cup \partial M$. Roughly, the cord algebra of (M, S, L) is generated by some homological variables and by homotopy classes of paths

$$([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (M \setminus L, L \cup \mathbf{z}),$$

which we quotient by the usual skein relations, as well as the relations $c \otimes c' \sim c \cdot c'$ if the path c (resp. c') ends (resp. begins) at a point z , where $c \cdot c'$ denotes the concatenation. We then prove a gluing theorem, stating that the cord algebra of $(M_1 \cup M_2, \partial M_i, L_1 \cup L_2)$ can be seen as a pushout in the category of algebras.

Organisation

In the first chapter, we recall some classical definitions, and extend some constructions from [CGHH11] to the Legendrian framework : we present the construction of a sutured manifold when a Legendrian submanifold is involved, and how to complete it.

The next chapter is dedicated to holomorphic curves : after standard definitions, we prove that, for an adjusted almost complex structure, Gromov's compactness still hold for the completion of a Legendrian in a sutured contact manifold, once again extending the results from [CGHH11].

In the third chapter we define the cylindrical and wrapped sutured Legendrian homology, and prove their invariance using the same approach than [CGHH11]. We also define the (non-Legendrian) contact homology of a manifold with circular boundary, extending the construction of [CGH10] to higher dimensions.

Finally, in the last chapter we cover the two examples arising from the conormal constructions discussed above, as well as the case of the complement of the zero section of a 1-jet space. We also define the cord algebra for manifolds with boundary, and prove the gluing theorem.

Hypersurfaces convexes et variétés suturées

1.1 Définitions

On rappelle quelques définitions de géométrie symplectique et de contact qui s'avèreront utiles par la suite. Sauf mention contraire, tous les objets mentionnés seront lisses.

Notation 1.1.1. Si X est un sous-ensemble de Y , $\mathcal{N}(X)$ désignera un voisinage arbitrairement petit de X , non nécessairement ouvert.

1.1.1 Variétés symplectiques et de contact

Une *variété symplectique* (W, ω) est une variété W^{2n} de dimension paire, orientée, munie d'une 2-forme fermée ω telle que $\omega^n > 0$. Autrement dit ω doit être non-dégénérée : pour tout $v \in T_x W$, $(\iota_v \omega)_x \neq 0$.

Une *variété de contact* (V, ξ) est une variété de dimension impaire V^{2n+1} , orientée, munie d'une *structure de contact* ξ : il s'agit d'un champ d'hyperplans coorientés maximalement non-intégrable, c'est-à-dire qu'il existe une 1-forme λ vérifiant $\ker \lambda = \xi$ et satisfaisant la condition de contact $\lambda \wedge d\lambda^n > 0$. Une telle forme sera dite de contact. Notons que si λ_0

est une forme de contact pour ξ , une autre forme λ est de contact pour ξ si et seulement si $\lambda = f\lambda_0$, où $f : V \rightarrow \mathbb{R}^*$.

Son *champ de Reeb* R_λ est le champ de vecteurs défini par $i_{R_\lambda}d\lambda = 0$ et $\lambda(R_\lambda) = 1$ (la première égalité donne une droite transverse à $\xi = \ker \lambda$). Notons que si $f\lambda$ est une autre forme de contact définissant ξ , les champs de Reeb de λ et $f\lambda$ sont reliés par la formule

$$R_{f\lambda} = \frac{1}{f^2} \left(fR_\lambda + (df|_{\xi})^{\perp d\lambda} \right) \quad (1.1)$$

où $\alpha^{\perp d\lambda}$ est le vecteur $v \in \xi$ tel que $\alpha = \iota_v d\lambda|_{\xi}$.

Démonstration. En effet si on écrit $R_{f\lambda} = \phi R_\lambda + Z$, où $Z \in \xi$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= f\lambda(R_{f\lambda}) = f \cdot \phi \quad \text{et donc } \phi = 1/f \\ 0 &= \iota_{R_{f\lambda}} d(f\lambda) = \iota_{\phi R_\lambda + Z} (df \wedge \lambda + f d\lambda) \\ &= \phi df(R_\lambda) \cdot \lambda - \phi \cdot df + df(Z)\lambda + f \iota_Z d\lambda. \end{aligned}$$

En évaluant la seconde relation en R_λ cela donne $0 = df(Z)$, et sur ξ on obtient $\iota_Z(d\lambda)|_{\xi} = \frac{df}{f^2}|_{\xi}$, ce qui détermine un unique $Z \in \xi$ (et cela implique $0 = df(Z)$). \square

Remarque 1.1.2. Une forme symplectique ainsi qu'une forme de contact déterminent l'orientation de la variété. En particulier elles orientent le bord par la convention de la normale : si v est un vecteur sortant, une base du bord B_∂ est directe si et seulement si (v, B_∂) est directe.

Exemples 1.1.3. Voici quelques exemples standards de variété de contact.

- Si (V, λ) est de contact, sa *symplectisation* est la variété $\text{Symp}(V) = (\mathbb{R} \times V, \omega = d(e^s \lambda))$. Notons qu'après le changement de coordonnées $\tilde{s} = e^s$, $\text{Symp}(V) \simeq (\mathbb{R}_+^* \times V, d(\tilde{s}\lambda))$. On définit aussi $\text{Symp}_+ = \{s \geq 0\} = \{\tilde{s} \geq 1\}$ et $\text{Symp}_- = \{s \leq 0\} = \{\tilde{s} \leq 1\}$.
- Si $(W, \omega = d\beta)$ est une variété symplectique exacte, $\text{Cont}(W) = (\mathbb{R}_t \times W, \lambda = dt + \beta)$ est une variété de contact appelée la *contactisation* de $(W, d\beta)$. Similairement, la S^1 -contactisation de W est la variété $\text{Cont}_{S^1}(W) = (S_\theta^1 \times W, d\theta + \beta)$.
- Une surface orientée est une variété symplectique (toute forme d'aire est une forme symplectique).
- $(\mathbb{R}^{2n+1}, \lambda = dz - x_i dy_i)$ est de contact, et $R_\lambda = \partial_z$.
- $(J^1(M) = \mathbb{R}_z \times T^*M, \lambda = dz - p \cdot dq)$ est de contact, et $R_\lambda = \partial_z$.
- ST^*M munie de $\xi_{(q,\alpha)} = \{(v, w) \in T_{(q,\alpha)}ST^*M, \alpha(v) = 0\}$ est de contact. Si on fixe une métrique g sur M , elle induit un contactomorphisme entre U^*M et $(U_g M, \lambda_g)$, où $(\lambda_g)_{(q,p)}(v, w) = g(p, v)$ (en particulier tous les $U_g M$ sont contacto-

morphes). Le champ de Reeb associé est $R_{(q,p)} = (p, w)$, où w est déterminé par la métrique, et son flot relève le flot géodésique associé.

Proposition 1.1.4 (Théorème de Gray). *Soit $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ une famille de structures de contact sur V . Alors ξ_0 et ξ_1 sont contactomorphes. Plus précisément, il existe un champ de vecteurs (dépendant du temps) X_t tel que $(\phi_t^*)^*(\xi_t) = \xi_0$.*

Démonstration. On reprend ici la démonstration de [Gei08], qui utilise l'astuce de Moser : soit λ_t une famille de 1-formes telles que $\xi_t = \ker \lambda_t$. On cherche un champ de vecteurs dépendant du temps X_t tel que son "flot" ϕ_t vérifie $\phi_t^* \lambda_t = \mu_t \lambda_0$ avec $\mu_t : V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. En dérivant par rapport à t , on obtient $\phi_t^*(\partial_t \lambda_t + \mathcal{L}_{X_t} \lambda_t) = \partial_t \mu_t \cdot \lambda_0$.

En posant $\nu_t = (\phi_t^{-1})^*(\partial_t \log \mu_t)$, on a $\partial_t \mu_t \cdot \lambda_0 = \frac{\partial_t \mu_t}{\mu_t} \phi_t^* \lambda_t = \phi_t^*(\nu_t \lambda_t)$.

Autrement dit, le vecteur X_t doit vérifier $\partial_t \lambda_t + \mathcal{L}_{X_t} \lambda_t = \nu_t \lambda_t$. On le prend dans ξ_t , et donc $\mathcal{L}_{X_t} \lambda_t = \iota_{X_t} d\lambda_t$ ce qui simplifie encore l'équation : $\partial_t \lambda_t + \iota_{X_t} d\lambda_t = \nu_t \lambda_t$.

En évaluant en R_{λ_t} on obtient $\partial_t \lambda_t(R_{\lambda_t}) = \nu_t$. Cette relation permet de définir ν_t et implique $R_{\lambda_t} \in \ker(\nu_t \lambda + \partial_t \lambda_t)$. L'équation $\iota_{X_t} d\lambda_t|_{\xi_t} = (\nu_t \lambda_t - \partial_t \lambda_t)|_{\xi_t}$ définit alors un unique vecteur X_t car $d\lambda_t|_{\xi_t}$ est non dégénérée. \square

Remarque 1.1.5. Le champ X_t est nul uniquement là où ξ_t est constant, et ne dépend que de ξ_t .

Une *legendrienne* est une sous-variété $\Lambda^n \subset (V^{2n+1}, \xi)$ de dimension n et satisfaisant $T\Lambda \subset \xi$ (autrement dit si λ est une forme de contact pour ξ , $\lambda|_{T\Lambda} = 0$). Une *lagrangienne* est une sous-variété $L^n \subset (W^{2n}, \omega)$ de dimension n et telle que $\omega|_{TL} = 0$.

Proposition 1.1.6 (Voisines standards). *Soit $p \in (V, \xi)$. Il existe un voisinage de p et des coordonnées (z, x_i, y_i) sur ce voisinage tels que $\xi = \ker(dz - x_i dy_i)$.*

Soit $\Lambda \subset (V, \xi)$ une legendrienne. Alors un voisinage de Λ est contactomorphe à un voisinage de $0_\Lambda = \Lambda \times \{0\} \subset (J^1(\Lambda), \xi_{st})$.

*Soit $L \subset (W, \omega)$ une lagrangienne. Alors un voisinage de L est symplectomorphe à un voisinage de $0_L = L \times \{0\} \subset (T^*M, \omega_{st})$.*

Proposition 1.1.7 (Moser legendrien, [Gei06], Thm 2.41). *Soit $\Lambda_t \subset (V, \xi_t)$ une famille de legendriennes. Alors il existe une famille de difféomorphismes ϕ_t telle que*

$$\phi_t^* \xi_t = \xi_0 \text{ et } \phi_t^*(\Lambda_t) = \Lambda_0 \text{ (ie } \phi_t(\Lambda_0) = \Lambda_t).$$

1.1.2 Champs de contact

Définition 1.1.8. Soit (V, ξ) une variété de contact. Un champ de vecteurs X est de *contact* si il vérifie une des conditions suivantes équivalentes :

1. Le flot de X préserve ξ , ie $(\phi_X^t)^*\xi = \xi$.
2. Pour toute 1-forme λ de noyau ξ on a $\mathcal{L}_X\lambda = f\lambda$, où $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$.
3. Il existe une 1-forme λ de noyau ξ telle que $\mathcal{L}_X\lambda = f\lambda$, où $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$.

Démonstration. 1 \Rightarrow 3 : on fixe une forme de contact pour ξ . Par définition on a

$$\ker(\phi_X^t)^*\lambda = (\phi_X^t)^*\xi$$

et donc

$$(\phi_X^t)^*\lambda = \varphi_t\lambda$$

où $\varphi_t \in C(V, \mathbb{R}^*)$ est telle que $\varphi_0 = 1$. D'où

$$\mathcal{L}_X\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_X^t)^*\lambda - \lambda}{t} = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} \right) \lambda = f\lambda$$

avec $f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t - 1}{t}$.

3 \Rightarrow 2 : soit $\phi \in C^\infty(V, \mathbb{R}^*)$ on calcule $\mathcal{L}_X(\phi\lambda) = (\mathcal{L}_X\phi)\lambda + \phi\mathcal{L}_X\lambda = (\mathcal{L}_X\phi + f)\lambda$

2 \Rightarrow 1 : par définition $(\phi_X^t)^*\xi = \ker(\phi_X^t)^*\lambda$. On a alors

$$(\phi_X^t)^*\lambda - \lambda = \int_0^t \partial_s((\phi_X^s)^*\lambda) . ds = \int_0^t (\phi_X^s)^*\mathcal{L}_X\lambda . ds = \left(\int_0^t (\phi_X^s)^*f . ds \right) \lambda.$$

□

Lemme 1.1.9. *Soit (V, ξ) une variété de contact (coorientée). Il existe une bijection entre les champs de contact et les fonctions $C^\infty(V, \mathbb{R})$. Si on fixe une forme de contact adaptée la bijection est donnée par*

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto X_\varphi = \varphi R_\lambda + (d\varphi|_\xi)^\perp d\lambda.$$

Démonstration. On décompose le vecteur en $X = \varphi R_\lambda + Z$ où $Z \in \xi$. Ce champ est de contact si et seulement si $\mathcal{L}_X\lambda = f\lambda$ où $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Or la formule de Cartan nous donne

$$\mathcal{L}_X\lambda = d\iota_X\lambda + \iota_X d\lambda = d\varphi + \iota_Z(d\lambda).$$

En restreignant ces formes à R_λ et à ξ on obtient $f = d\varphi(R_\lambda)$ et $0 = d\varphi|_\xi + \iota_Z d\lambda$, et donc f et Z sont uniquement déterminés par $\varphi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. □

Remarque 1.1.10. 1. Si X est de contact, pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ le champ fX est aussi de contact.

2. Si $\tilde{\varphi}$ est une C^1 -perturbation de φ , alors $X_{\tilde{\varphi}}$ est C^0 -proche de X_φ .
3. X_φ est un champ de Reeb (coorienté) si et seulement si $\varphi > 0$.
4. On peut interpoler "en temps" (si X et Y sont des champs de contact, $(1-t)X + tY$ est de contact) et "en espace" sur des fermés disjoints (si X et Y sont deux

champs de contact sur les fermés en question, on peut interpoler entre les fonctions correspondantes).

5. Si ξ n'est pas coorientée (en particulier si V n'est pas orientable), un champ de contact correspond à une section du fibré en droites TV/ξ .

1.1.3 Domaines de Liouville

Une *variété (ou domaine) de Liouville* (W, β) est une variété munie d'une 1-forme telle que :

- W est une variété compacte, à bord ;
- $(W, d\beta)$ est symplectique ;
- le champ de Liouville Y défini par $\iota_Y d\beta = \beta$ est positivement transverse au bord.

Un *cobordisme de Liouville* (W, β) est une variété munie d'une 1-forme telle que

- $(W, d\beta)$ est symplectique.
- Le bord de W se décompose en $\partial W = \partial_+ W \sqcup \partial_- W$ tel que le champ de Liouville est positivement (resp. négativement) transverse à $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$).

On dira alors que W est un cobordisme de Liouville de $(\partial_+ W, \beta|_{\partial_+ W})$ vers $(\partial_- W, \beta|_{\partial_- W})$. En particulier un domaine de Liouville est un cobordisme de $(\partial W, \beta|_{\partial W})$ vers l'ensemble vide.

Proposition 1.1.11. *Le champ de Liouville dilate la forme symplectique : $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$.*

Plus généralement si (W, ω) est symplectique il existe une bijection entre $\{Y, \mathcal{L}_Y \omega = \omega\}$ et $\{\beta, d\beta = \omega\}$, donnée par $Y \mapsto \iota_Y \omega$.

Démonstration. $\mathcal{L}_Y \beta = \beta$, car $\beta(Y) = d\beta(Y, Y) = 0$, et donc

$$\mathcal{L}_Y \omega = d\iota_Y \omega + \iota_Y d\omega = d\beta = \omega.$$

□

Proposition 1.1.12. *Soit (W, β) un cobordisme de Liouville. Alors le bord $(\partial_+ W, \beta|_{\partial_+ W})$ est de contact, et il existe un voisinage $\mathcal{N}(\partial_+ W) \simeq (-\varepsilon, 0]_r \times \partial W$ tel que*

$$Y = \partial_r, \quad \beta = e^r \beta|_{\partial W} \text{ et } \partial_W = \{0\} \times W.$$

Autrement dit, un voisinage du bord positif est symplectomorphe à (un voisinage du bord de) la symplectisation négative de $\partial_+ W$. Similairement, un voisinage bord négatif est symplectomorphe à la symplectisation positive du bord négatif.

La *complétion* d'une variété de Liouville (W, β) , dénotée $(\hat{W}, \hat{\beta})$, est obtenue en recollant la symplectisation positive du bord via les coordonnées précédentes : $\hat{W} = W \cup ([0, \infty)_r \times \partial W, e^r \beta|_{\partial W})$.

- Exemples 1.1.13.*
- Si (V, λ) est de contact, sa symplectisation est un cobordisme de Liouville. Plus généralement, on verra dans la section suivante qu'un chemin de formes de contact permet de construire un cobordisme de Liouville.
 - $(D^{2n}, -x_i dy_i)$ est de Liouville.
 - $(D^*M, -p \cdot dq)$ est un domaine de Liouville. Son champ de Liouville est $p \cdot \partial_p$, et sa complétion T^*M .
 - Une surface à bord est de Liouville.

Définition 1.1.14. Soit $L \subset (W, \beta)$ une lagrangienne immergée dans un cobordisme de Liouville. Elle est exacte si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

- $\beta|_{TL}$ est une 1-forme exacte.
- L se relève en une legendrienne dans la contactisation de W .

Démonstration. Si $\beta|_{TL} = df$, on pose $\Lambda_L = \{(-f(x), x), x \in L\} \subset \mathbb{R}_s \times W$. On calcule alors avec $\phi : L \rightarrow W$ et $\psi = (-f, \phi) : L \rightarrow \mathbb{R} \times V$ (on a donc $\phi^* \beta = df$)

$$\psi^* \lambda = (\partial_s + \beta)(-df \partial_s + d\phi) = -df + \phi^* \beta = 0.$$

Inversement si $\Lambda \subset \mathbb{R} \times V$ est une legendrienne, on a $\phi = \pi_V \circ \psi$ et donc

$$\phi^* \beta = \psi^* \pi_V^* \beta = \psi^* \beta = \psi^*(\lambda - dt) = -\psi^*(dt) = -d(t \circ \psi).$$

□

1.1.4 D'une isotopie legendrienne à un cobordisme exact

Soit $(\lambda_t)_{t \in [0,1]}$ un chemin de forme de contact sur une variété V . Il existe alors un cobordisme de Liouville allant de $(V, C\lambda_1)$ vers (V, λ_0) , pour $C \in \mathbb{R}$ assez grand. Pour cela on choisit un fonction $\psi : \mathbb{R}_s \rightarrow [0, 1]$ croissante, nulle pour $s \ll 0$ et valant 1 pour $s \gg 0$. Alors si sa dérivé ψ' est assez petite, la variété

$$(W, \beta) = (\mathbb{R}_s \times V, e^s \lambda_{\psi(s)})$$

est un domaine de Liouville. En effet,

$$d\beta = e^s (d\lambda_{\psi(s)} + ds \wedge \lambda_{\psi(s)} + \psi'(s) ds \wedge \partial_s \lambda_{\psi(s)})$$

et la condition de symplecticité est ouverte.

Plus généralement si $\Lambda_s \subset (V, \lambda_s)$, $s \in [0, 1]$ est un chemin de legendriennes, on peut construire un cobordisme lagrangien exact :

Lemme 1.1.15. *Il existe un cobordisme de Liouville (W, β) , ainsi qu'une lagrangienne exacte $L \subset (W, \beta)$, allant de $\Lambda_S \subset (V, C\lambda_S)$ vers $\Lambda_0 \subset (V, \lambda_0)$, pour C assez grand.*

Remarque 1.1.16. Cette lagrangienne étant cylindrique à l'infini, une primitive de $\beta_{\Gamma TL}$ est localement constante hors d'un compact.

Démonstration. Contrairement au cas des formes de contact, le graphe d'une isotopie legendrienne ne définit pas une lagrangienne. On présente ici la construction de [Cha10]. Notons cependant qu'il existe d'autres constructions similaires, par exemple dans [CCDR19] (basé sur des techniques de [EG98]) et [Ekh08].

Remarquons qu'une isotopie de (V, λ) se relève en un symplectomorphisme hamiltonien dans la symplectisation $(\mathbb{R} \times V, d(e^s \lambda))$ ([Cha10, Prop 2.2]). En effet, une telle isotopie est le flot d'un champ de contact à paramètre X_u , associé à une fonction $f_u : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} f_u &= \lambda(X_u) \\ \iota_{X_u} d\lambda &= -(df_u)_{|\xi}. \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs

$$\hat{X}_u := X_u + a_u(x)\partial_s,$$

où $a_u(x) = -df_u(R)$, est alors hamiltonien :

$$\begin{aligned} \iota_{\hat{X}_u} \omega &= \iota_{X_u} e^s (ds \wedge \lambda + d\lambda) \\ &= e^s (a_u \lambda - \lambda(X_u) s - (df_u)_{|\xi}) \\ &= -e^s (-df_u - f_u ds) = -d(e^s f_u). \end{aligned}$$

Le champ à paramètre \hat{X}_u est donc associé à l'hamiltonien $H_u = e^s f_u$.

Si maintenant $\Lambda_t \subset (V, \lambda_t)$, $t \in [0, T]$ est un chemin de legendriennes, il existe d'après le lemme de Moser une isotopie $\varphi^t : V \rightarrow V$ telle que $(\varphi^t)^* \lambda_t = \mu_t \lambda_0$. Quitte à ralentir l'isotopie,

$$(W, \beta) = ([0, T]_s \times V, e^s \mu_s \lambda_0)$$

est un cobordisme de Liouville¹, et

$$L_0 = [0, T] \times \Lambda_0$$

est une lagrangienne exacte.

De plus le chemin de legendriennes

$$(\varphi^t)^*(\Lambda_t) \subset (V, \ker \lambda_0)$$

peut être obtenu comme flot d'un champ de contact à paramètre, correspondant aux fonctions $f_u : V \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in [0, T]$.

1. Notons que l'on retrouve la forme de Liouville $e^s \lambda_s$ en composant par $\varphi : (s, x) \mapsto (s, \phi^s(x))$.

On choisit maintenant un hamiltonien (dépendant du temps)

$$H_u : [0, T] \times V \rightarrow \mathbb{R}, u \in [0, T]$$

tel que :

- $H_u(s, x) = 0$ si $s < \varepsilon$;
- $H_u(s, x) = e^s f_u(x)$ si $s > T - \varepsilon$,

et l'on dénote son flot (sur W) par ψ^u . Alors, par construction,

$$L = \psi^T(L_0)$$

coïncide avec $\mathbb{R} \times \Lambda_0$ en $s < \varepsilon$, et avec $\mathbb{R} \times (\phi^T)^* \Lambda_T$ en $s > T - \varepsilon$. Le bord positif de ce cobordisme est donc

$$((\phi^T)^* \Lambda_T, V, e^T \mu_T \lambda_0) \stackrel{\phi^T}{\simeq} (\Lambda_T, V, e^T \lambda_T).$$

De plus L est une lagrangienne exacte, car ϕ^T est un difféomorphisme hamiltonien (voir par exemple [MS17, §9.4]).

□

Notons que d'après [MS17, Prop 9.3.1], une primitive de $j^* \beta$ est la fonction

$$F : (s, x) \in L_0 \mapsto \int_0^1 (\partial_s H_u + H_u) \circ j \cdot du.$$

Remarque 1.1.17. On pourrait aussi changer la forme de Liouville, comme dans [Ekh08, Appendix A] : si $\Lambda_s \subset (V, \lambda)$ est un chemin de legendriennes, induit par le flot de X_s , associé à $f_s : V \rightarrow \mathbb{R}$, alors le graphe de ce chemin

$$L = \{(s, x), x \in \Lambda_s\} \subset \mathbb{R}_s \times V$$

est une lagrangienne exacte pour la forme de Liouville

$$\beta = e^s (\lambda - df)$$

où $f : (s, x) \in \mathbb{R} \times V \mapsto f_s(x)$ (là encore il faut ralentir l'isotopie pour que cette forme soit de Liouville). On a cette fois

$$\beta_{|TL} = d(e^s f).$$

1.1.5 Variétés de Stein et de Weinstein

Une *variété de Weinstein* (W, β, f) est un domaine de Liouville muni d'une fonction de Morse f telle que :

- le champ de Liouville Y est un pseudo-gradient de f :

$$\forall x \notin \text{Crit}(f), df_x(Z(x)) > 0$$

- le bord de W est un niveau régulier de f .

Notons que f peut être étendue à la complétion \hat{W} sans rajouter de point critique (en choisissant $f(r, x)$ telle que $f(0, *) = f(\partial W)$ et $\partial_r f > 0$).

Le squelette de la variété $\text{Core}(W) = \bigcap_{t>0} \phi_Y^{-t}(W)$ est alors l'union des variétés Y -stables des points critiques de f , qui sont isotropes et donc de dimension inférieure à n (voir [CE12] et [EG91]).

Remarque 1.1.18. Si Y est Morse-Smale et égal au gradient sur un voisinage des points critiques (pour la métrique euclidienne), le squelette admet une stratification de Whitney d'après [Lau92].

Notons que le squelette reste défini pour une variété de Liouville quelconque, cependant il peut alors être de codimension 1 comme observé dans [McD91].

La paire (\hat{W}, J_0) est une *variété de Stein* si J_0 est une structure complexe intégrable, autrement dit si (W, J_0) peut être proprement plongée dans (\mathbb{C}^N, i) . D'après [Gra58] (voir aussi [Bis61] et [Nar60]) cette propriété est équivalente à l'existence d'une fonction $\phi : \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ propre, minorée, et strictement pluri-sous-harmonique, c'est-à-dire telle que $\Delta_J \phi := -d(d\phi \circ J)$ est une forme symplectique.

Remarques 1.1.19. [CGHH11, §3.2] Si (W, J) est un domaine de Stein (c'est-à-dire une variété compacte à bord telle qu'il existe une fonction strictement pluri-sous-harmonique ϕ dont le bord est une valeur régulière), $\beta = d\phi \circ J$ est une forme de Liouville. Cependant dans un voisinage du bord J n'est a priori pas adaptée à la symplectisation du bord $(\partial W, \beta|_{TW})$, car les niveaux de ϕ sont distincts de ceux du champ de Liouville. En particulier J ne sera pas ajustée au sens de la définition 2.2.2.

[Cou12] Deux symplectisations peuvent être symplectomorphes sans que les variétés de départ soient contactomorphes, il est donc plus naturel de considérer directement les variété complétées.

Une variété de Stein est automatiquement de Weinstein : en effet $\beta = -d\phi \circ J_0$ est une forme de Liouville, et le champ de Liouville associé est l'anti-gradient de ϕ . Un théorème difficile de Cieliebak et Eliashberg affirme que les variétés de Weinstein peuvent être déformées en variétés de Stein, voir [CE12, Théorème 13.9].

Exemples 1.1.20. 1. Une surface non compacte est une variété de Stein.

2. $(\mathbb{R}^{2n}, \beta = x_i dy_i, \mathcal{L} = x_i \partial_{x_i} + y_i dy_i, f = x^2 + y^2)$ est de Weinstein.

3. [CE13] $(T^*M, \beta = -p \cdot dq + dg, \mathcal{L} = (p - \nabla g, 0), f = g(q) + |p|^2)$ est une variété de Weinstein, où g est une petite fonction de Morse sur M .

Notons que si (W, J) est de Stein, la forme de Liouville induite β est telle que $\beta \circ J$ est exacte. Pour un certain nombre de considérations à venir, les calculs seront simplifiés

lorsque $\beta \circ J$ est fermée, et le résultat sera parfois plus fort que dans le cas général. À l'occasion, de telles variétés de Liouville (W, β, J) seront dites *pseudo-Stein*.

1.2 Hypersurfaces convexes

Les hypersurfaces convexes, introduites par Giroux en dimension 3, sont des sous-variétés au voisinage desquelles la structure de contact est transversalement invariante, ce qui permet d'obtenir une expression simple. On reprend essentiellement le 2e paragraphe de [CGHH11].

Définition 1.2.1. Soit (V, ξ) une variété de contact, de dimension $2n+1$. Une hypersurface $\Sigma^{2n} \subset (V, \xi)$ est dite *convexe* si il existe un champ de contact X transverse à Σ . La *suture* de Σ associée à X est l'ensemble

$$\Gamma_X = \{x \in X \mid X(x) \in \xi(x)\} \subset \Sigma.$$

Le but de cette section est de donner une expression simple de ξ au voisinage de Σ .

On considère un voisinage $\mathcal{N}(\Sigma) = [-\varepsilon, \varepsilon] \times \Sigma$, avec coordonnées $(t, *)$ tel que $\Sigma = \{0\} \times \Sigma$ et $X = \partial_t$.

Lemme 1.2.2. [CGHH11, §2.2] *Il existe une ξ -forme de contact $\lambda = f.dt + \beta$ telle que f et β ne dépendent pas de t et β n'a pas de terme en dt . La condition de contact devient alors $f.dt \wedge (d\beta)^n + n.df \wedge dt \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1} > 0$.*

Démonstration. Soit λ une ξ -forme de contact quelconque. Le champ X est de contact, donc il existe une fonction $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{L}_X \lambda = \phi \lambda$. On considère le voisinage du bord $\mathcal{N}(\Sigma)$ muni des coordonnées $(t, x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times \Sigma$ définies précédemment, et on pose $h(t, x) = C e^{-\int_0^t \phi(t,x).dt}$ où $C > 0$. Sur $\mathcal{N}(\Sigma)$ on a

$$\mathcal{L}_X(h\lambda) = (\mathcal{L}_X h)\lambda + h\mathcal{L}_X \lambda = (\partial_t h + h\phi)\lambda = 0$$

car $\frac{\partial_t h}{h} = \partial_t(\ln h) = -\phi(t, x)$.

On décompose maintenant la nouvelle forme de contact en $h\lambda = f dt + \beta$, où β n'a pas de terme en dt . On calcule maintenant $\mathcal{L}_X(h\lambda)$ sur le voisinage $\mathcal{N}(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_X(h\lambda) = \mathcal{L}_{\partial_t}(f.dt + \beta) = (d\iota_{\partial_t} + \iota_{\partial_t}d)(f.dt + \beta) \\ &= df + \iota_{\partial_t}(df \wedge dt + d\lambda) = \partial_t f.dt + \iota_{\partial_t}d\lambda. \end{aligned}$$

La forme $\iota_{\partial_t}d\lambda$ n'ayant pas de terme en dt , on obtient $0 = \partial_t f$ et $0 = \iota_{\partial_t}d\lambda = \mathcal{L}_{\partial_t}\beta$. f et β ne dépendent donc pas de t .

Avec cette expression, la condition de contact prend la forme

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \wedge (d\lambda)^n &= (f dt + \beta) \wedge (df \wedge dt + d\beta)^n \\ &= f \cdot dt \wedge (d\beta)^n + \beta \wedge (df \wedge dt + d\beta)^n \\ &= f \cdot dt \wedge (d\beta)^n + n \cdot df \wedge dt \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1} \end{aligned}$$

car $\beta \wedge (d\beta)^n = 0$. □

On note plusieurs conséquences de ce lemme :

- La suture étant donnée par $\Gamma_X = \{f = 0\}$, la condition de contact implique que $df|_{\Gamma_X} \neq 0$. La suture est donc une sous-variété $\Gamma_X^{2n-1} \subset \Sigma^{2n}$, de codimension 1.
- $\lambda|_{T\Gamma} = \beta|_{T\Gamma}$ est une forme de contact sur Γ_X , associée à la structure de contact $\xi \cap T\Gamma$.
- Γ est transverse à ξ car $df \wedge \beta \neq 0$.

Remarque 1.2.3. Si X et X' sont deux champs de contact transverses à Σ , alors $(\Gamma_X, \lambda|_{\Gamma_X})$ est de contact isotope à $(\Gamma_{X'}, \lambda|_{\Gamma_{X'}})$. En effet pour tout $t \in [0, 1]$, le champ $tX + (1-t)X'$ est de contact et transverse à Σ , et on conclut grâce à l'astuce de Moser. La suture est donc définie indépendamment de X à contactomorphisme près.

Le lemme suivant, tiré de [CGHH11], permet de construire facilement des hypersurfaces convexes.

Lemme 1.2.4. [CGHH11, Lemme 2.2] *Soit $\Sigma^{2n} \subset (V^{2n+1}, \xi)$ une hypersurface fermée, sans bord. Σ est convexe si et seulement si il existe une orientation de Σ , une sous-variété $\Gamma^{2n-1} \subset \Sigma$ et une forme de contact λ de noyau ξ telles que*

- $(\Gamma, \xi \cap T\Gamma)$ est une variété de contact, orientée telle que la forme de contact soit positive.
- Γ découpe Σ en régions alternantes R_{\pm} , telles que R_+ induit sur Γ l'orientation précédente (ie $\Gamma = \partial R_+ = -\partial R_-$).
- (R_+, λ) et $(-R_-, \lambda)$, où R_+ est orientée comme Σ et R_- est munie de l'orientation opposée, sont des domaines de Liouville. Autrement dit si $(d\lambda|_{\pm R_{\pm}})^n > 0$.

Dans ce cas λ sera dite adaptée à (Σ, Γ) .

Cette preuve nécessite la notion de *champ caractéristique*, défini de la façon suivante : étant donnée une hypersurface $\Sigma \subset (V, \xi)$, il s'agit du champ de droites singulier $L_{(\Sigma, \xi)}$ satisfaisant

$$L \subset \xi \cap T\Sigma, \text{ et pour toute forme } \lambda \text{ adaptée à } \xi, \iota_L(d\lambda)|_{\xi \cap T\Sigma} = 0$$

Remarque 1.2.5. Le champ est singulier lorsque $\xi = T\Sigma$. Si V est de dimension 3, alors $L = \xi \cap T\Sigma$.

Démonstration. On résume ici la preuve de [CGHH11]. On commence par le lemme suivant :

Lemme 1.2.6. *Le champ de Reeb est positivement transverse à $W^{2n} \subset V$, orientée, si et seulement si λ induit une forme de Liouville (positive) sur W .*

Démonstration. (\Rightarrow) Le champ de Reeb induit des coordonnées $\mathcal{N}(W) \simeq (-\varepsilon, \varepsilon)_t \times W$ telles que $\lambda = dt + \beta$, où β est une forme sur W indépendante de t . La condition de contact devient alors $0 < \lambda \wedge d\lambda^n = (dt + \beta) \wedge (d\beta)^n = dt \wedge d\beta^n$.

(\Leftarrow) On choisit des coordonnées arbitraires $\mathcal{N}(W) \simeq (-\varepsilon, \varepsilon)_t \times W$. On alors $\lambda = f_t dt + \beta_t$, où $d_W \beta_0$ est symplectique sur $\{0\} \times W$. On calcule alors $d\lambda = d_W f_t \wedge dt + d_W \beta_t + dt \wedge \partial_t \beta_t =: dt \wedge \alpha + d_W \beta_t$. Si le champ de Reeb est tangent à $\{0\} \times W$ on a $dt(R) = 0$, et donc $0 = i_R d\lambda = -\alpha(R)dt + d_W \beta_0(R, \cdot)$. Cependant $d_W \beta_0$ étant symplectique, il existe un vecteur v tel que $dt(v) = 0$ et $d_W \beta_0(R, v) \neq 0$, on obtient une contradiction. \square

(\Leftarrow) On considère λ une forme de contact adaptée à (Σ, Γ) . On choisit des coordonnées arbitraires $(t, \tau, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-1, 1) \times \Sigma \simeq \mathcal{N}(\Gamma)$. En prenant un champ de vecteurs dirigeant le champ caractéristique, et dont la composante selon τ est ∂_τ , on obtient une nouvelle coordonnée \tilde{x} telle que

$$\lambda \upharpoonright_{T\Sigma} = g(\tau, \tilde{x})\lambda_0, \text{ où } \lambda_0 = \lambda \upharpoonright_{T\Gamma}.$$

On définit alors une nouvelle forme de contact $\tilde{\lambda}$ en posant

$$\tilde{\lambda} = \tilde{f}(\tau)dt + \tilde{\beta}(\tau, \tilde{x})$$

où f, g sont des fonctions lisses telles que :

- hors de $\mathcal{N}(\Gamma)$, $\tilde{f} = \pm 1$ est constante et $\tilde{\beta} = \lambda \upharpoonright_{T\Sigma}$
- sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, $\tilde{\beta}$ est proportionnel à $g(\tau, \tilde{x})\lambda_0$.

Alors Σ est $(\ker \tilde{\lambda})$ -convexe (∂_t est un champ de contact) et $\tilde{\lambda} \upharpoonright_{T\Sigma}$ est proportionnelle à $\lambda \upharpoonright_{T\Sigma}$, On utilise maintenant le lemme suivant :

Lemme 1.2.7. *Soit λ_0, λ_1 deux formes de contact sur V , et $\Sigma \subset V$ une hypersurface telle que $\lambda_0 \upharpoonright_{T\Sigma}$ est proportionnelle à $\lambda_1 \upharpoonright_{T\Sigma}$. Alors il existe un difféomorphisme (défini sur un voisinage de Σ) fixant Σ et envoyant ξ_0 sur ξ_1 .*

En particulier ce difféomorphisme préserve les champs de vecteurs transverses à Σ et envoie les champs de vecteurs ξ_0 -contact sur ceux ξ_1 -contact, et donc Σ est bien ξ -convexe.

Démonstration. Il s'agit d'une variante de l'astuce de Moser, voir [Mas14, Lemme 13].

On écrit ainsi $\lambda_i = u_i dt + \beta_i$, où β_i est une 1-forme sur Σ . Par hypothèse il existe $\phi : \Sigma \rightarrow (0, \infty)$ telle que $\beta_1 = \phi\beta_0$, et donc

$$\xi_1 = \ker\left(\frac{u_1}{\phi}dt + \beta_0\right).$$

Alors $\lambda_s = u_s dt + \beta_0$, où

$$u_s = (1 - s)u_0 + s\frac{u_1}{\phi},$$

est une famille de formes de contact :

$$\begin{aligned} \lambda_s \wedge (d\lambda_s)^n &= (u_s dt + \beta) \wedge (du_s \wedge dt + d\beta)^n \\ &= u_s dt \wedge (d\beta)^n + du_s \wedge dt \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1} \\ &= (1 - s)(u_0 dt \wedge (d\beta)^n + du_0 \wedge dt \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}) \\ &\quad + s\left(\frac{u_1}{\phi}dt \wedge (d\beta)^n + d\frac{u_1}{\phi} \wedge dt \wedge \beta \wedge (d\beta)^{n-1}\right) \\ &= (1 - s)\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n + s\frac{\lambda_1}{\phi} \wedge (d\frac{\lambda_1}{\phi})^n > 0. \end{aligned}$$

Le théorème de Gray nous fournit donc un difféomorphisme ψ , sous la forme du flot au temps 1 d'un champ de vecteurs X_s , tel que $\psi^*\xi_1 = \xi_0$. De plus, ψ préserve Σ , car le champ de vecteurs est dirigé par le champ caractéristique. En effet, il est déterminé par

$$\iota_{X_s} d\lambda_s = (\partial_s \lambda_s(R_{\lambda_s})\lambda_s - \partial_s \lambda_s)|_{\xi_s}.$$

Or la forme $\partial_s \lambda_s(R_{\lambda_s})\lambda_s - \partial_s \lambda_s$ s'annule sur $\xi_s \cap T\Sigma = \ker \beta$.

□

(\Rightarrow) On suppose maintenant que Σ est ξ -convexe. D'après le lemme 1.2.2 il existe un voisinage $\mathcal{N}(\Sigma) \simeq (-\varepsilon, \varepsilon)_t \times \Sigma$ et une forme ξ -adaptée s'écrivant $\lambda = f.dt + \beta$. On pose alors $R_+ = \{f > 0\}$ et $R_- = \{f < 0\}$, et on oriente Γ de sorte que $\lambda|_\Gamma$ soit une forme de contact positive, ce qui détermine une orientation sur Σ (Γ est orienté comme le bord de $\pm R_\pm$).

On choisit ensuite un voisinage

$$\mathcal{N}(\Gamma) \simeq (-\varepsilon, \varepsilon)_t \times (-1, 1)_\tau \times \Sigma$$

tel que β est de contact sur chaque tranche $\{(t, \tau)\} \times \Gamma$. Quitte à multiplier par une fonction positive, on peut supposer $f = \pm 1$ sur $(-\varepsilon, \varepsilon) \times R_\pm \setminus \{-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}\}$. La condition de contact implique alors $(d\beta)^n > 0$ sur $R_+ \setminus \{\tau < \frac{1}{2}\}$ (et $(d\beta)^n < 0$ sur $R_- \setminus \{-\frac{1}{2} < \tau\}$). Finalement on utilise le champ caractéristique pour définir une nouvelle coordonnée \tilde{x} sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, et maintenant $\lambda = f(\tau)dt + g(\tau, \tilde{x})\lambda_0$. On multiplie ensuite cette forme par une fonction adaptée pour obtenir la condition sur un voisinage du bord (il faut que $\tau g' \geq$

0).

□

En corollaire de cette preuve on obtient une normalisation de la structure de contact au voisinage de l’hypersurface convexe.

Corollaire 1.2.8. *Si X est un champ de contact transverse à Σ , il alors il existe une forme de contact λ de noyau ξ et des fonctions coordonnées $t : \mathcal{N}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau : \mathcal{N}(\Gamma_X) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

- $X = \partial_t$, $\Sigma = \{t = 0\}$ et $\Gamma = \{t = \tau = 0\}$;
- sur $\mathcal{N}(\Sigma) \setminus \mathcal{N}(\Gamma)$, $\lambda = \pm dt + \beta_{\pm}$ où β ne dépend pas de t (et n’a pas de terme dt);
- sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, $\lambda = f(\tau)dt + g(\tau)\lambda_0$ tel que $\{f = 0\} = \{0\}$, $g > 0$, λ_0 est une forme de contact sur Γ et $f'g - fg' > 0$.

En coordonnées, le champ de Reeb vaut

- $\pm \partial_t$ sur $R_{\pm} \setminus \mathcal{N}(\Gamma)$
- $(f'g - fg')^{-1}(f'R_0 - g'\partial_t)$ sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, où R_0 est le champ de Reeb de λ_0 . En effet $d\lambda = d\tau \wedge (\partial_{\tau}f dt + \partial_{\tau}g \lambda_0) + g d\lambda_0$.

De plus, on peut multiplier λ par une fonction positive pour obtenir au choix

- $g = 1$ sur $\mathcal{N}'(\Gamma) \subset \mathcal{N}(\Gamma)$. La condition de contact devient $f' > 0$, et le champ de Reeb est dirigé par $f'R_0$.
- $g = 1 - \tau^2$ sur $\mathcal{N}'(\Gamma) \subset \mathcal{N}(\Gamma)$. Le champ de Reeb est alors dirigé par $f'R_0 + 2\tau\partial_t$.
- $f = \tau$ sur $\mathcal{N}'(\Gamma) \subset \mathcal{N}(\Gamma)$. La condition de contact devient $g - \tau \cdot \partial_{\tau}g > 0$, et le champ de Reeb est alors dirigé par $R_0 - \partial_{\tau}g \cdot \partial_t$.

Remarques 1.2.9. [CGHH11] On peut modifier $\lambda_{|\Sigma}$ de sorte que les fermetures \bar{R}_{\pm} soient des domaines de Liouville (ces modifications ne sont pas compatibles : on prend $g = 1 \pm \tau$ sur R_{\pm}). Notons aussi que la suture et la structure de contact (coorientée) déterminent R_{\pm} , cependant une autre forme de contact ne se restreint pas forcément en une forme symplectique sur R_{\pm} .

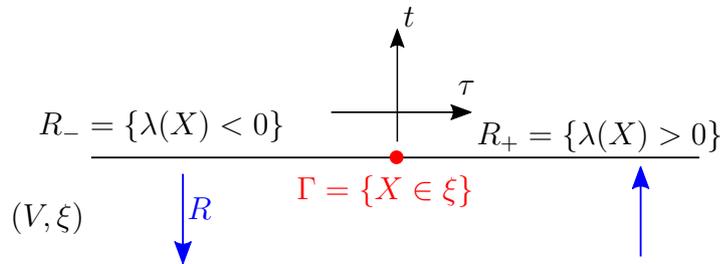


FIGURE 1.1: Champ de Reeb d’une forme de contact adaptée à une hypersurface convexe.

On note aussi l'existence d'un autre critère de convexité dû à Honda et Huang, qui utilise le champ caractéristique $L = L_{\Sigma, \xi}$:

Théorème 1.2.10. [HH19] *Soit Σ une hypersurface telle que L est de Morse et qu'il n'existe pas de L -trajectoire d'une singularité négative vers une singularité positive. Alors Σ est convexe.*

De plus les hypersurfaces convexes sont C^0 -génériques (en dimension trois, elles sont C^∞ -génériques d'après [Gir91]).

Ici un champ de droites est dit de Morse si il provient d'un champ de vecteurs X tel que :

- les singularités de X sont non-dégénérées ;
- pour tout x , $\phi_X^t(x)$ converge vers une singularité (en $\pm\infty$) ;
- il n'existe pas de "cycle" (singularités reliées par des trajectoires).

Exemples 1.2.11. • $S^{2n} \subset (B^{2n+1}, \xi_{st} = \ker(dz - x_i dy_i + y_i dx_i))$. Le champ radial $z\partial_z + x_i\partial_{x_i} + y_i\partial_{y_i}$ est de contact, et $\Gamma = \{z = 0\} \simeq S^{2n-1}$.

- $\partial(\mathcal{N}(0_M)) \subset (J^1(M), \xi_{st})$ est convexe : $z\partial_z + p.\partial_p$ est de contact. En particulier si $\Lambda \subset (V, \xi)$ est legendrienne, il existe un voisinage à bord convexe.
- Plus généralement, toute variété coisotrope admet un voisinage à bord convexe.
- L'union de deux pages opposées d'un livre ouvert (se recollant en une variété lisse) est convexe.
- Si $S \subset M$ est une hypersurface, $U_S^*M \subset U^*M$ est convexe (on prend une métrique produit sur un voisinage de S).
- Si $\Sigma \subset V$ est une hypersurface convexe, il existe un voisinage $\mathcal{N}(\Sigma) \simeq ([0, 1] \times \Sigma, \lambda = f(\tau)dt + \beta)$ qui est à bord convexe. Plus généralement, à partir de deux remplissages symplectiques de (Γ, λ_0) , notés (W_\pm, β_\pm) , on peut construire une variété $I_t \times (W_+ \cup_\Gamma W_-)$ à bord convexe en posant $\lambda = fdt + \beta$, où $f = \pm 1$ et $\beta = \beta_\pm$ sur $W_\pm \setminus \mathcal{N}(W_\pm)$ (on recolle grâce aux coordonnées fournies par le champ de Liouville).
- Si Σ est une hypersurface convexe, toute variété qui lui est suffisamment C^1 -proche est aussi convexe.

1.3 Variétés suturées et sous-variétés legendriennes

On rappelle ici les définitions de [CGHH11, §2.3], que l'on adapte au contexte legendrien.

1.3.1 Variétés de contact positivement suturées

Définition 1.3.1. Une variété M^m compacte, orientée, à bord et à coins, sera dite *topologiquement suturée* si elle est munie de :

- une sous-variété $\Gamma^{m-2} \subset \partial M$, appelée la suture,
- un voisinage $\mathcal{N}_0(\Gamma) \stackrel{\psi}{\simeq} [-1, 0]_\tau \times [-1, 1]_t \times \Gamma \subset M$,

tels que

- $\Gamma = \{\tau = t = 0\}$;
- $\mathcal{N}_0(\Gamma) \cap \partial M = \{0\} \times [-1, 1] \times \Gamma \cup [-1, 0] \times \{\pm 1\} \times \Gamma$;
- $\partial M \setminus \{0\} \times (-1, 1) \times \Gamma = R_+(\Gamma) \sqcup R_-(\Gamma)$, où $R_+(\Gamma)$ (resp. $R_-(\Gamma)$) est une sous-variété munie de l'orientation de ∂M (resp. de l'orientation opposée);
- les coins de M sont exactement $\{0\} \times \{\pm 1\} \times \Gamma$.

Remarque 1.3.2. Par rapport au paragraphe précédent, ce ne sont plus les mêmes coordonnées (t, τ) (comparer les figures 1.1 et 1.2).

Près du bord, la variété est orientée comme le produit $[-1, 1] \times [-1, 0] \times \Gamma$ (ie $dt \wedge d\tau \wedge \lambda_\Gamma \wedge (d\lambda_\Gamma)^{n-1} > 0$), cependant on veut penser la direction t comme la verticale et τ comme l'horizontale.

Définition 1.3.3. Soit $(M, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \psi)$ une variété suturée et ξ une structure de contact sur M . On dira que $(M, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \xi)$ est une *variété de contact suturée* si il existe une forme de contact (positive) λ pour ξ telle que

- $(R_\pm(\Gamma), \lambda|_{R_\pm(\Gamma)})$ sont des variétés de Liouville, dont les champs de Liouville seront notés Y_\pm .
- Sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$, on a $\lambda = Cdt + \beta$ où $C \in \mathbb{R}_+^*$ et β est une 1-forme indépendante de t et sans terme en dt .
- Sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$, on a $\partial_\tau = Y_\pm$ (autrement dit $\iota_{\partial_\tau} d\beta = \beta$).

Si de plus les complétions $(\hat{R}_\pm, \lambda|_{\hat{R}_\pm})$ admettent des structures de Weinstein (resp. Stein), on parlera de variété W-saturée (resp. S-saturée).

On dira alors que λ est adaptée à la variété suturée $(M, \Gamma, \mathcal{N}(\Gamma))$.

Remarques 1.3.4. • Le champ de Reeb est donné par $\frac{1}{C}\partial_t$ sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$ et est \pm -transverse à R_\pm par la remarque 1.2.6. On peut donc prolonger la coordonnée t à un voisinage de R_\pm .

- D'après le lemme 1.1.12, $\beta = e^\tau \lambda_0$ où λ_0 est une forme de contact sur Γ , et donc $\lambda = C \cdot dt + e^\tau \lambda_0$ sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$. Par conséquent, l'hyperplan de contact est

$$\xi = \left\langle \partial_\tau, R_\Gamma - \frac{e^\tau}{C} \partial_t \right\rangle \oplus \ker \lambda_\Gamma.$$

- Dans [CGHH11], de telles variétés suturées sont dites convexes, et les variétés négativement suturées définies plus loin sont dites concaves.

1.3.2 Legendriennes cylindriques

Définition 1.3.5. Une forme de contact sera dite *non-dégénérée* si pour toute orbite de Reeb γ d'action T , 1 n'est pas une valeur propre de la linéarisation de l'application de premier retour restreinte à $\xi : 1 \notin Sp((d\phi_R^T)|_{\xi})$, autrement dit $\det((d\phi_R^T)|_{\xi} - Id) \neq 0$. Une legendrienne $\Lambda \subset (V, \lambda)$ sera dite *non-dégénérée* si pour toute corde de Reeb c d'action T , $(d\phi_R^T)(T_{c(0)}\Lambda) \pitchfork T_{c(T)}\Lambda$

Proposition 1.3.6. [Bou03, Lemme 2] *Les formes de contact non-dégénérées sont génériques, et les legendriennes non-dégénérées sont génériques relativement à Λ et à la forme de contact : si on fixe une forme de contact λ et un voisinage standard de Λ tel que $(\mathcal{N}(\Lambda), \xi, \Lambda) \simeq (J^1(\Lambda), \xi_{st}, 0_\Lambda)$, il existe un ensemble G_γ -dense $U \subset C^\infty(\Lambda, \mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in U$, $\Lambda_f = j^1(f)$ est λ -non-dégénérée, ainsi qu'un ensemble G_δ -dense $V \subset C^\infty(V, \mathbb{R}_+^*)$ tel que pour tout $\phi \in V$, la forme $(\phi\lambda)$ est non-dégénérée, et Λ est $(\phi\lambda)$ -non-dégénérée.*

Définition 1.3.7. Une legendrienne proprement plongée Λ , incluse dans une variété suturée $(M, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \psi)$, sera dite

- *centrée* si $\partial\Lambda \subset \{t = 0\}$.
- *cylindrique* si $\partial\Lambda \subset \{\tau = 0\}$ et pour toute composante connexe de $\partial\Lambda = \sqcup_i \partial_i\Lambda$, il existe t_i tel que $\Lambda \cap \mathcal{N}_0(\Gamma) = [-1, 0] \times \{t_i\} \times \partial_i\Lambda$. En particulier chaque $\partial_i\Lambda$ est legendrienne dans (Γ, λ_0) .
- *relativement non-dégénérée* si elle est cylindrique et il n'existe pas de corde de Reeb dans le bord de M (autrement dit $\pi_\Gamma(\partial\Lambda)$ est une legendrienne plongée).
- *∂ -non-dégénérée* si elle est cylindrique et toute composante connexe du bord $\partial_i\Lambda \subset (\Gamma, \lambda_0)$ est non-dégénérée.
- *totalement non-dégénérée* si Λ est relativement non-dégénérée, ∂ -non-dégénérée et $\mathring{\Lambda}$ est non-dégénérée au sens de la définition 1.3.5.

Remarque 1.3.8. Si $\partial_0\Lambda$ est t -centrée, on peut la rendre centrée sans rajouter de corde : en effet l'hyperplan de contact tend vers le plan vertical lorsque τ tend vers l'infini, et donc une variation dans la direction t induit une variation dans Γ qui peut être prise arbitrairement petite.

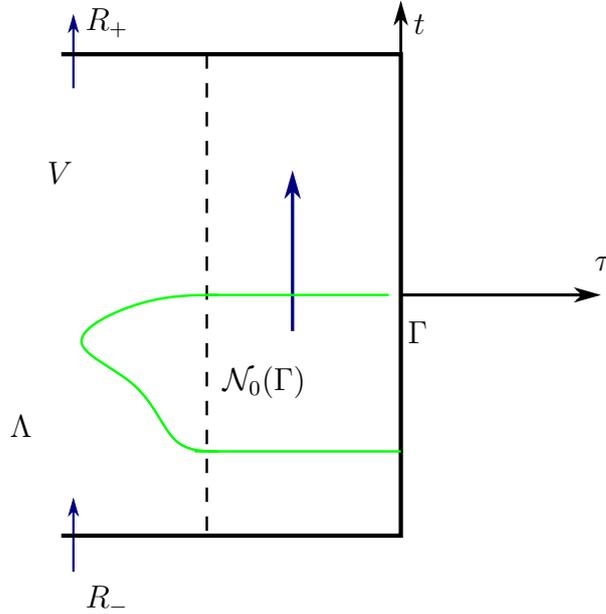


FIGURE 1.2: Legendrienne cylindrique dans une variété suturée

- Exemples 1.3.9.*
1. Soit (W, β) un domaine de Liouville. Sa contactisation finie $([-1, 1] \times W, dt + \beta)$ est une variété de contact suturée, et la suture est ∂W . Une legendrienne cylindrique dans $[-1, 1] \times W$ se projette sur une lagrangienne immergée dans W , cylindrique au bord. Inversement, toute lagrangienne exacte immergée $L \subset W$ se relève en une legendrienne dans $([-1, 1] \times W, C.dt + \beta)$ pour C assez grand. Si L est cylindrique alors Λ_L est cylindrique.
 2. Si $(V, \xi = \ker \lambda)$ est adapté à un livre ouvert de reliure K (autrement dit K est une sous-variété de contact de codimension 2, et on a une application $\theta : V \setminus K \rightarrow S^1$ telle que pour tout $\varphi \in S^1$, $(\theta^{-1}(\varphi), \lambda)$ est de Liouville), alors le demi livre ouvert $\{0 \leq \theta \leq \pi\} \setminus \mathcal{N}(K)$ est suturée, où $\mathcal{N}(K)$ est un voisinage convenable de la reliure (voir la section 3.3 pour plus de détails).
 3. [GPS19] Si $(W^{2n}, \lambda_{\Gamma W})$ est un domaine de Liouville dans (V, λ) , il existe un voisinage dont le complémentaire est positivement suturé. Notons qu'a priori c'est le voisinage de W qui est positivement suturé, et donc son complémentaire est négativement suturé. Il faut ensuite appliquer la procédure décrite section 1.4.2.
 4. [Vau13] Soit (W_{\pm}, β_{\pm}) deux domaines de Liouville de bord (Γ, λ_0) , et Λ_0 une legendrienne dans (Γ, λ_0) . On peut alors construire une variété suturée

$$V = [-1, 1]_s \times (W_+ \cup_{\Gamma} W_-) \setminus \mathcal{N}(\{-1, 1\} \times \Gamma),$$

munie de la forme de contact $\lambda = f ds + \beta$, qui contient une legendrienne cylindrique centrée $I \times \Lambda_0$.

Plus précisément, si r est la coordonnée donnée par le champ de Liouville au voisinage du bord Γ , telle que $W_{\pm} = \{\pm r > 0\}$, on pose

- sur W_{\pm} , $f = \pm 1$ et $\beta = \beta_{\pm}$ hors de $I \times \mathcal{N}(\Gamma)$
- $f = f(r, s)$ et $\beta = g(r, s)\lambda_0$ sur $I \times \mathcal{N}(\Gamma)$.

La condition de contact est $g^{n-1}(gf_r - f_r g) > 0$ (la variété est orientée par $[-1, 1] \times W_+$). De plus le champ de Reeb est donné par $\pm \partial_s$ sur $I \times (W_{\pm} \setminus \mathcal{N}(\Gamma))$ et est dirigé par $X_g + f_r R_{\Gamma}$ sur $I \times \mathcal{N}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \iota_{X_g + f_r R_{\Gamma}}(d\lambda) &= \iota_{X_g}(f_r dr \wedge ds) - f_r dg \\ &= f_r dg - f_r dg = 0 \end{aligned}$$

On prend g une fonction possédant deux maximums en $(\pm 1, 0)$ et un point selle en $(0, 0)$, pour obtenir le champ de Reeb présenté (projeté) à droite sur la figure 1.3.

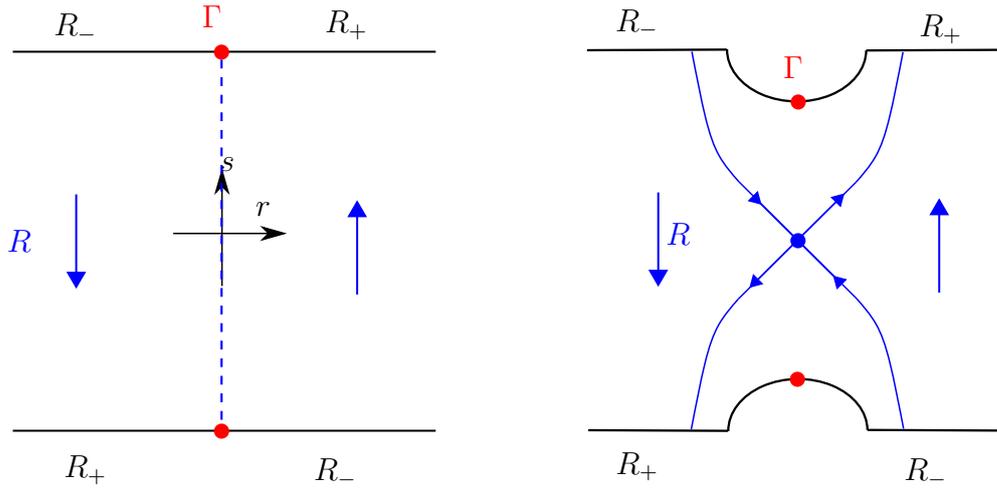


FIGURE 1.3: Le champ de Reeb dans une variété de contact cylindrique. Sur la gauche les fonctions f et g ne dépendent que de r , et $R = R_{\Gamma}$ en $\{r = 0\}$, tandis que sur la droite la forme de contact est adaptée à la variété suturée.

Il suffit alors d'enlever un voisinage de $\{\pm 1\} \times \Gamma$ pour obtenir une variété suturée. De plus, tout cobordisme lagrangien exact inclu dans la symplectisation de Γ induit une legendrienne suturée dans V .

5. Finalement la construction conormale fournit des legendriennes cylindriques dans des variétés suturées, voir la section 4.3 pour plus de détails.

1.3.3 Variétés négativement suturées

Définition 1.3.10. Soit V^{2n+1} une variété compacte à $3\pi/2$ -coins², et $\Gamma^{2n-1} \subset \partial V$ une sous-variété (orientée) du bord. $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma))$ sera dite négativement (topologiquement) suturée si $\mathcal{N}_0(\Gamma)$ est un voisinage de Γ de la forme

$$([-1, 1]_\tau \times [-2, 2]_t \setminus (0, 1) \times (-1, 1)) \times \Gamma \supset \{0\} \times \{0\} \times \Gamma = \Gamma$$

tel que tous les coins sont dans ce voisinage.

Le bord se décompose alors en $\partial M = R_+ \cup (-1, 1) \times \Gamma \cup R_-$, où R_+ (resp. R_-) est la partie telle que, munie de l'orientation de ∂M (resp. opposée à celle de ∂V), Γ soit orientée comme son bord.

Définition 1.3.11. Une variété de contact *négativement suturée* est un triplet $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \xi)$ où $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma))$ est négativement suturée et ξ est une structure de contact telle qu'il existe une forme adaptée λ satisfaisant :

- $(\pm R_\pm, \lambda)$ est un domaine de Liouville.
- Sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$, $\lambda = Cdt + \beta$ et le champ de Reeb va de R_- vers R_+ .

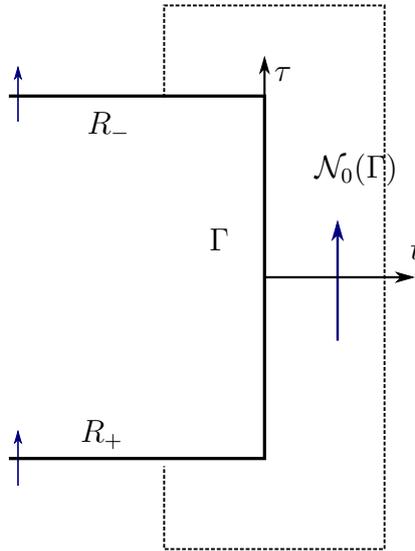


FIGURE 1.4: Variété négativement suturée

Exemples 1.3.12. 1. [CGHH11, Ex 4.4] Si $\theta : V \setminus K \rightarrow S^1$ est une décomposition en livre ouvert d'une variété de contact, λ est une forme ajustée à cette décomposition

2. C'est-à-dire qu'un voisinage d'un coin $C^{2n-1} \subset \partial V$ est difféomorphe à $(\{x \geq 0\} \cup \{y \geq 0\}) \times C \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2 \times C$.

(voir la section 3.3 pour plus de détails) et $I \subset S^1$ est un intervalle (ouvert et possédant un nombre fini de composantes connexes) alors $V \setminus \{\theta \in I, r \geq \varepsilon\}$ est à suture négative, où r est la coordonnées radiale dans un voisinage de K .

2. [CGHH11, Ex 4.5] Soit $\Lambda \subset (V, \xi)$ une legendrienne, λ une ξ -forme de contact et $\mathcal{N}(\Lambda)$ un voisinage tel que $(\mathcal{N}(\Lambda), \lambda)$ est contactomorphe à un voisinage standard et positivement suturé de $0_\Lambda \subset J^1(\Lambda)$. Alors $V \setminus \mathcal{N}_0(L)$ est négativement suturée.

1.4 Changer de condition au bord

Soit (V, ξ) une variété de contact contenant une hypersurface convexe Σ , et $\Lambda \subset (V, \xi)$ une legendrienne intersectant Σ transversalement.

Lemme 1.4.1. *Si Σ est W -convexe, pour une forme de contact λ , alors pour une perturbation générique de Λ il existe un champ de contact X , transverse à Σ , tel que $\Lambda \pitchfork \Sigma \subset \Gamma_X$*

Remarque 1.4.2. On pourrait aussi laisser la legendrienne inchangée, et perturber λ (sans changer la structure de contact) de sorte que la legendrienne n'intersecte pas les squelettes de $(R_\pm, \lambda|_{R_\pm})$.

Démonstration. On commence par noter que génériquement l'intersection $\Lambda_\Sigma := \Lambda \cap \Sigma$ est transverse. On amène ensuite Λ_Σ dans un voisinage de la suture grâce au champ de Liouville $Y : Z = t\partial_t + Y$ est un champ de contact sur $\mathcal{N}(\Sigma) \setminus \mathcal{N}(\Gamma_X)$ car

$$\mathcal{L}_Z(dt + \beta) = d(t + \iota_Y\beta) + i_Y d\beta = dt + \beta$$

et on le prolonge par zéro loin de Σ . Génériquement Λ_Σ^{n-1} n'intersecte pas le squelette de R_\pm , car il est l'union de variétés isotropes et donc de dimension majorée par n .

Son flot ϕ_Z amène donc Λ_Σ dans un voisinage de Γ_X . Il faut maintenant perturber X tel que $\phi_Z\Lambda \cap \Sigma \subset \Gamma_{\tilde{X}}$. On aura alors $\Lambda_\Sigma \subset \Gamma_{\phi_Z^*\tilde{X}}$.

Dans ce but on utilise les coordonnées obtenues au paragraphe précédent : sur $\mathcal{N}(\Gamma)$, la forme de contact s'écrit $\lambda = \tau dt + g(\tau)\lambda_\Gamma$, le champ de contact est $X = \partial_t$ et la suture est donnée par $\{t = \tau = 0\}$.

On choisit maintenant un champ de contact \tilde{X} tel que $\phi_Z\Lambda \cap \Sigma \subset \Gamma_{\tilde{X}}$ de la façon suivante : d'après le lemme 1.1.9 un champ de contact \tilde{X} est déterminé par $\lambda(\tilde{X})$. Notons que pour X on obtient $\psi_0 := \lambda(X) = (f(\tau)dt + g(\tau)\lambda_\Gamma)(\partial_t) = f(\tau)$. On choisit maintenant $\tilde{\psi} : \mathcal{N}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\psi}(\phi_Z\Lambda \cap \Sigma) = 0$ pour obtenir $\tilde{X} = \psi\mathcal{R} + (d\tilde{\psi})^{\perp_{d\lambda}}$.

$\phi_Z\Lambda \cap \Sigma$ pouvant être arbitrairement proche de Γ_X , après avoir perturbé Λ tel que la projection de $\phi_Z\Lambda \cap \Sigma$ à Γ (parallèlement à ∂_τ) soit plongée (ce qui est possible car

$\dim(\Lambda \cap \Sigma) = n - 1$ et $\dim(\Gamma) = 2n - 1$, $\tilde{\psi}$ peut être choisi arbitrairement C^1 -proche de ψ . \tilde{X} est donc transverse à Σ lorsque la différence entre ψ_0 et $\tilde{\psi}$ est assez petite, et la suture est alors donnée par $\{\psi = t = 0\}$ car $\lambda(\tilde{X}) = \tilde{\psi}$. □

1.4.1 De convexe à suture

On normalise ici la structure de contact sur un voisinage de la reliure. Essentiellement il s'agit de montrer que cela ressemble au voisinage de la reliure d'un livre ouvert.

Lemme 1.4.3. [CGHH11, Lemme 4.1] *Soit (V, ξ) une variété de contact de bord Σ convexe, X contact transverse à Σ , et Λ une legendrienne telle que $\Lambda \pitchfork \Sigma \subset \Gamma_X$. Alors il existe une forme de contact λ et un voisinage de la suture $\mathcal{N}(\Gamma)$ tels que $(M \setminus \mathcal{N}(\Gamma), \lambda)$ est suturee et Λ y est cylindrique.*

Démonstration. On commence par trouver un champ de contact tangent à Λ .

Lemme 1.4.4. *Soit $\Sigma \subset (V, \xi)$ une hypersurface convexe et $\Lambda \subset V$ une legendrienne l'intersectant transversalement. Si X est un champ de contact transverse à Σ tel que $\Lambda_\Sigma = \Lambda \cap \Sigma \subset \Gamma_X$, alors il existe un champ de contact \tilde{X} tel que*

- \tilde{X} est transverse à Σ .
- $\Lambda_\Sigma = \Sigma \cap \Lambda \subset \Gamma_{\tilde{X}}$
- \tilde{X} est tangent à Λ dans un voisinage de $\Sigma \cap \Lambda$, et donc $\Lambda = \bigcup_{-\varepsilon \leq s \leq \varepsilon} \phi_X^s(\Lambda_\Sigma)$ (autrement dit Λ est cylindrique).

En particulier Λ_Σ est une sous-variété legendrienne de $(\Gamma_X, \xi \cap T\Gamma)$. De plus, Λ est invariant par le flot de X et $T\Lambda = \langle T\Lambda_\Sigma, X \rangle$ sur $\mathcal{N}(\Lambda_\Sigma)$. Cela signifie aussi que l'on peut choisir les coordonnées telles que $\Lambda = \{t, \tau = 0, \partial\Lambda \subset \Gamma\}$ dans un voisinage de Σ .

Démonstration. On utilise les coordonnées (t, τ) fournies par le lemme 1.2.8, où $X = \partial_t$, telles que $\xi = \ker(f(\tau)dt + g(t)\lambda_\Gamma)$. On considère alors la legendrienne Λ_0 obtenue en transportant Λ_Σ par le flot de X : $\Lambda_0 = \bigcup_{-\varepsilon < s < \varepsilon} \phi_X^s(\Lambda_\Sigma) = [-\varepsilon, \varepsilon]_t \times \{0\} \times \Lambda_\Gamma$. C'est une legendrienne car $\lambda|_{T\Lambda_0} = 0$ et $\lambda(\partial_t) = 0$ en $\{\tau = 0\}$.

D'après le lemme 1.1.6, il existe un voisinage $\mathcal{N}(\Lambda)$ contactomorphe à un voisinage de $0_\Lambda \subset (J^1(\Lambda), dz - p \cdot dq)$. Pour $\varepsilon > 0$ petit, Λ_0 reste dans $\mathcal{N}(\Lambda_\Sigma) \subset \mathcal{N}(\Lambda)$. Elle se représente par le graphe d'une fonction $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un voisinage de $\Lambda_\Sigma \subset \Lambda$. On prolonge cette fonction à Λ par 0, et son graphe sera toujours dénoté par Λ_0 . Les deux legendriennes coïncident en Σ ($\Lambda_0 \cap \Sigma = \Lambda_\Sigma$), et donc $\phi|_{\Lambda_\Sigma} = 0 = d_{\Lambda_\Sigma}\phi$.

Dans les coordonnées $(z; q, p) \in \mathbb{R} \times T^*\Lambda = J^1(\Lambda)$, on définit le champ

$$Z(z; q, p) = \phi(q)\partial_z + \partial_{q_i}f \cdot \partial_{p_i}.$$

Ce champ est de contact :

$$\mathcal{L}_Z(dz - p \cdot dq) = d(f(q)) - \iota_Z(dp \wedge dq) = d_q f - \partial_{q_i} f \cdot dq_i = 0$$

et on peut le prolonger par 0 loin de $\mathcal{N}(\Lambda)$. De plus son flot (au temps 1) envoie $\Lambda \simeq 0_\Lambda$ sur Λ_0 et induit donc un contactomorphisme $(V, \xi, \Lambda) \rightarrow (V, \xi, \Lambda')$, qui préserve Λ_Σ (mais pas Σ). Le tiré-en-arrière de X est de contact, tangent à Λ sur un voisinage de Σ , et reste transverse pour ε petit : en effet X est donné par une fonction $V \rightarrow \mathbb{R}$ (il faut avoir fixé une forme de contact), et on peut rendre le contactomorphisme C^1 -proche de l'identité (sur Λ_Σ il est C^1 -égal à l'identité). \tilde{X} étant donné par le tiré-en-arrière de cette fonction, il est C^0 -proche de X par la remarque . □

On reprend maintenant la preuve de [CGHH1] en suivant la legendrienne : on va montrer qu'il existe un voisinage de sa suture $\mathcal{N}(\Gamma_{\tilde{X}})$, une ξ -forme λ , ainsi que des coordonnées (r, θ) définies sur $\mathcal{N}(\Gamma)$ tels que

- $\Sigma = \{\theta = 0, \pi\}$, $\Lambda_\Sigma \subset \Gamma_{\tilde{X}}$, $\Lambda \subset \{\theta = \pi/2\}$, et $\partial_\theta = \pm \tilde{X}$ pour $\theta \simeq 0, \pi$ et r assez grand.
- $\lambda = h_0(r, \theta, x) \cdot (\lambda_0 + r^2 d\theta)$.

(i) D'après le lemme 1.2.8 on peut écrire sur un voisinage de la suture

$$\lambda = g(\tau)(\tilde{f}(\tau)dt + \lambda_0)$$

tel que $\tilde{f}(\tau) = \tau$ si $|\tau| \leq 1/4$, $g > 0$ et $g(\tau) = g(-\tau)$.

On considère désormais des coordonnées polaires (r, θ) telles que

$$(\tau, t) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ et } \mathcal{N}(\Gamma) = \{\pi \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \delta\}$$

et on définit

$$\lambda_s = \lambda_\Gamma + (1 - s)\tau dt + sr^2 d\theta$$

Ces formes et leurs différentielles étant constantes sur Σ (près de la suture), elles sont de contact sur un voisinage de la suture.

D'après le théorème de Gray (lemme 1.1.4) il existe une famille de difféomorphismes (locaux) ϕ_s telle que $\phi_0 = id$ et $\phi_s^*(\ker \lambda_s) = \ker \xi_0$. Autrement dit, il existe des coordonnées $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$ et une fonction $h_0 : \mathcal{N}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lambda = h_0(\lambda_\Gamma + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta})$$

(ii) Sur Σ on a $(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = (r, \theta)$, car $\ker \lambda_s$ y est constant. De plus, après ce changement de coordonnées, $\partial_{\tilde{r}}$ reste tangent à la legendrienne.

En effet en détaillant l'astuce de Moser, ϕ_s est le flot d'un champ de vecteurs X_s tel que

$$X_s \in \xi_s \text{ et } \partial_s \lambda_s + \iota_{X_s} d\lambda_s = \nu_s \lambda_s$$

En évaluant en $R_{\lambda_s} = R_\Gamma$ (le champ de Reeb de λ_Γ) on obtient

$$\nu_s = \partial_s \lambda_s(R_\Gamma) = (-\tau dt + r^2 d\theta)(R_\Gamma) = 0$$

et donc X_s est déterminé par

$$\iota_{X_s} d\lambda_s = -\partial_s \lambda_s = -\tau dt + r^2 d\theta$$

En $\{\tau = 0\}$, $\xi_s = \langle \ker \beta_0, \partial_t, s\tau R_0 - \partial_\tau \rangle$ et X_s est déterminé par

$$i_{X_s}(d\beta_0 + (1+s)d\tau \wedge dt) = t^2 d\tau.$$

D'où $X_s = \frac{-t^2}{1+s} \partial_t$.

(iii) On choisit maintenant $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $h = h_0$ sur $\partial U \cap \{\tilde{r} = \delta\}$
- $\partial_{\tilde{r}} h < 0$
- $h = C_0/\tilde{r}^2$ pour $\varepsilon/2 \leq \tilde{r} \leq \varepsilon \leq \delta$

Finalement, on définit une forme de contact ξ -adaptée par

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda \text{ sur } V \setminus U \\ &= h(\beta_0 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}) \text{ sur } U. \end{aligned}$$

Alors $V \setminus \{\tilde{r} < \varepsilon/2\}$ est une variété de contact suturee (avec $\Gamma = \{\tilde{r} = \varepsilon/2, \tilde{\theta} = 3\pi/2\}$ et $\mathcal{N}_0(\Gamma) = V \cap \{\varepsilon/2 \leq \tilde{r} \leq \varepsilon\}$, où le champ de Reeb est $\frac{1}{C_0} \partial_{\tilde{\theta}}$), et Λ est une legendrienne cylindrique. □

Plus généralement on a montré que si Σ est une hypersurface convexe découpant V en V_1 et V_2 , il existe une forme de contact et un voisinage N de Γ tels que :

- Les $V_i \setminus N, i \in \{1, 2\}$, sont des variétés positivement suturees.
- $V \setminus N$ est circulairement suturee (voir la section 3.3)
- Les $V_i \cup N, i \in \{1, 2\}$, sont des variétés négativement suturees.

1.4.2 D'une suture négative à une suture positive

Soit $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda)$ une variété négativement suturée. On décrit ici la procédure de [CGHH11] permettant d'obtenir une variété positivement suturée :

Sur $\mathcal{N}_0(\Gamma) \simeq [-1, 1]_t \times [-1, 0]_\tau \times \Gamma$, on a $\lambda = Cdt + e^{-\tau}\lambda_0$. On s'intéresse aux formes de contact s'écrivant

$$\lambda_{f,g} = f(t, \tau)dt + g(t, \tau)\lambda_0$$

La condition de contact s'écrit $g^{n-1}(g\partial_\tau f - f\partial_\tau g) > 0$, et le champ de Reeb est donné par

$$R_{f,g} = (g\partial_\tau f - f\partial_\tau g)^{-1}(\partial_\tau f R_0 + X_g)$$

où R_0 est le champ de Reeb de (Γ, λ_0) et X_g est le champ hamiltonien associé à g : il vérifie $\iota_{X_g}(d\tau \wedge dt) = dg$, autrement dit $X_g = g_t\partial_\tau - g_\tau\partial_t$, et ce champ est tangent aux lignes de niveaux de g . En effet, on calcule

$$\begin{aligned} d\lambda &= \partial_\tau f d\tau \wedge dt + dH \wedge \lambda_0 + d\lambda_0 \\ \iota_{\partial_\tau f R_0 + X_g} d\lambda &= \partial_\tau f \iota_{X_g}(d\tau \wedge dt) + \iota_{\partial_\tau f R_0}(dg \wedge \lambda_0 + d\lambda_0) \\ &= \partial_\tau f dg - \partial_\tau f dg + 0 = 0. \end{aligned}$$

Pour vérifier l'orientation, on peut remarquer que $\omega(X_H, \nabla H) = dH(\nabla H) \geq 0$.

Voici un cas particulier permettant de conserver la même structure de contact : fixons $g(t, \tau) : [-1, 1] \times [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\lambda' = e^\tau g \lambda = e^\tau g dt + g \lambda_0$$

La condition de contact devient $e^\tau g^2 > 0$, elle est donc automatiquement remplie. Le champ de Reeb est alors dirigé par

$$R \sim e^\tau (g + \partial_\tau g) R_0 + X_g$$

On suppose aussi que $g + \partial_\tau g > 0$, ce qui implique la positivité de $\partial_\tau f$. Si g est une fonction de Morse possédant uniquement deux points critiques en position d'élimination, une selle et un minimum, on obtient le champ suivant dans le plan (t, τ) :

En effet au voisinage d'un minimum on a $g = t^2 + \tau^2$, et donc $X_g = t d\tau - \tau dt = d\theta$ en coordonnées radiales $(t, \tau) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Similairement, au voisinage du point selle $g = \tau^2 - t^2$ et donc $X_g = -t \partial_\tau - \tau \partial_t$.

On enlève ensuite une famille d'orbites pour obtenir une variété positivement suturée, à droite sur l'image. Ce faisant, on a créé une famille d'orbites au point selle x de g . Plus précisément on a créé une nouvelle orbite (resp. corde) par orbite de (Γ, λ_0) (resp. corde de $\Lambda_\Sigma \subset (\Gamma, \lambda_0)$).

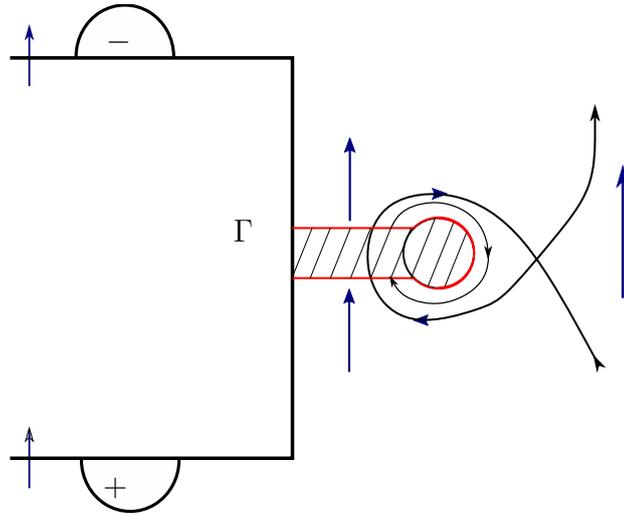


FIGURE 1.5: Variété positivement suturée obtenue en modifiant la forme de contact puis en enlevant un voisinage (hachuré).

Remarque 1.4.5. Soit $\Sigma \subset (V, \xi)$ une hypersurface convexe telle que $V = V_1 \cup_{\Sigma} V_2$, N un voisinage d'une suture $\Gamma \subset \Sigma$, λ une forme de contact adaptée à la suture et telle que $V_i \cup N$ est une variété négativement suturée. Lorsqu'on applique la procédure décrite ci-dessus, on obtient deux familles d'orbites en position d'élimination. Après une isotopie les faisant disparaître, on retrouve la variété $V_i \setminus N$.

1.5 Complétions

On présente ici la construction de [CGHH11, §2.4], que l'on étend à la situation legendrienne en suivant les idées de la théorie de Floer.

Soit $(M, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda, \Lambda)$ une variété de contact suturée munie d'une legendrienne cylindrique. On la complète en une variété de contact non-compacte $(\mathcal{M}^*, \lambda^*, \Lambda^*)$ de la façon suivante :

- Sur $\mathcal{N}(R_{\pm})$, on a $\lambda = Cdt + \beta_{\pm}$ avec $t \in [-1, -1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$. On étend la variété "verticalement" en recollant $([1, \infty) \times R_+, Cdt + \beta_+)$ et $((-\infty, -1] \times R_-, Cdt + \beta_-)$. On obtient ainsi une variété de bord $\mathbb{R} \times \Gamma$.
- Sur un voisinage $(-1, 0] \times \mathbb{R} \times \Gamma$ de ce nouveau bord, avec la coordonnée τ étendue par translation, on a $\lambda = Cdt + e^{\tau} \lambda_0$. On complète maintenant "horizontalement" en recollant $([0, \infty) \times \mathbb{R} \times \Gamma, Cdt + e^{\tau} \lambda_0)$.

Il existe maintenant plusieurs façon de prolonger la legendrienne, inspirée par la situation symplectique : on rappelle qu'étant donné une lagrangienne cylindrique L dans un domaine de Liouville (W, β) , la complétion cylindrique est

$$\hat{L} = L \cup \mathbb{R}^+ \times \partial L \subset (\hat{W}, \hat{\beta}).$$

De plus pour un hamiltonien à paramètre $H_u : \mathbb{R}^+ \times \partial W \rightarrow \mathbb{R}, u \in [0, 1]$, nul en $\{0\} \times \partial W$, on peut définir la complétion relative à H :

$$L^H = \phi_{X_H}^1(\hat{L}),$$

où X_H est déterminé par $\iota_{X_H} d\hat{\beta} = -dH$.

Complétion legendrienne cylindrique Sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$, on a

$$\Lambda = (-1, 0] \times \{0\} \times \partial\Lambda \subset (-1, 0] \times \mathbb{R} \times \Gamma.$$

On étend la legendrienne "horizontalement" en posant $\Lambda^* = \Lambda \cup [0, \infty) \times \{0\} \times \partial\Lambda$.

Exemple 1.5.1. Si (W, β) est de Liouville, la complétion de $(W \times I, dt + \beta)$ est la contactisation de sa complétion $\hat{W} : (W^*, \lambda^*) = (\mathbb{R} \times \hat{W}, dt + \hat{\beta})$. De plus la complétion Λ^* d'une legendrienne cylindrique se projette sur $\hat{L} \subset \hat{W}$, complétion d'une lagrangienne exacte immergée cylindrique.

Complétion legendrienne enroulée : Soit $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction nulle près de 0. On définit alors la complétion enroulée selon H de la legendrienne par :

$$\begin{aligned} \Lambda^H &= \Lambda \cup \{(\tau, -f_H(\tau), \phi_{R_0}^{g_H(\tau)}(x)), \tau \geq 0, x \in \partial\Lambda\} \\ \text{où } f_H &= \frac{1}{C} \int_0^\tau e^\tau H'' \cdot d\tau \text{ et } g_H = H' \end{aligned}$$

Cette variété est legendrienne car $\lambda(-f_H' \partial_t + \partial_\tau + g_H' R_0) = -C f_H' + e^\tau g_H' = 0$.

Notons que la projection de Λ_H à $\mathbb{R}_+ \times \Gamma$ est alors la lagrangienne cylindrique $\mathbb{R}_+ \times \Lambda_\Sigma \subset (\mathbb{R}_+ \times \Gamma, d(e^\tau \lambda_0))$ enroulée par l'hamiltonien $H : \pi(\Lambda^H) = \phi_{X_H}^1(\mathbb{R}_+ \times \partial\Lambda)$, car $\phi_{X_H}^1 = \phi_{R_0}^{H'(\tau)}$. Alternativement, on peut voir cette legendrienne comme un relevé de la lagrangienne enroulée par H , et de ce point de vue f_H est une primitive de $(e^\tau \lambda_\Gamma) \upharpoonright_{L^H}$

Définition 1.5.2. La complétion sera dite *positive* si H' est croissant (ie si $H'' \geq 0$), et *totale* si $H' \rightarrow \infty$.

Remarque 1.5.3. Plus généralement, toute isotopie de $\partial\Lambda \subset (\Gamma, \lambda_\Gamma)$ induit un cobordisme lagrangien exact $L \subset ([0, C]_\tau \times \Gamma, e^\tau \lambda_\Gamma)$, comme décrit section 1.1.4. Cette lagrangienne se relève en une legendrienne \hat{L} dans la contactisation, et on complète Λ par $\Lambda^\mu := \Lambda \cup \hat{L}$ (qui dépend des choix faits lors de la construction du cobordisme).

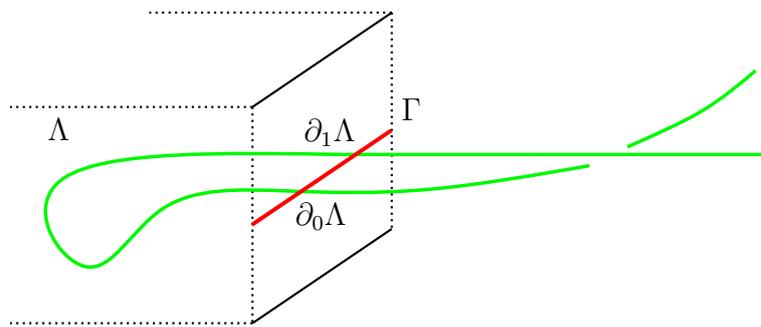


FIGURE 1.6: Complétion d'une legendrienne : $\partial_2\Lambda$ est prolongée cylindriquement, et $\partial_1\Lambda$ est prolongée par une isotopie positive.

Courbes holomorphes

Dans ce chapitre on présente les courbes holomorphes utilisées pour définir une différentielle. Introduites par Gromov [Gro85], elles constituent un espace compact si leurs images sont incluses dans la symplectisation d'une variété compacte d'après [BEHWZ03]. Les variétés suturées étant non-compactes, on prouvera plusieurs principes du maximums afin que ce résultat reste valable.

2.1 Espace de module des surfaces

On expose tout d'abord quelques résultats classiques concernant la convergence des surfaces de Riemann. On commence par le cas des courbes sans bord, en suivant la présentation de [BEHWZ03].

Une *surface de Riemann marquée* est un triplet $\mathbf{S} = (S, j, \mathbf{p})$ où (S, j) est une surface de Riemann fermée sans bord, et $\mathbf{p} \subset S$ est un ensemble fini ordonné de points, appelés *perçures* (ou points marqués). Deux surfaces marquées S et S' sont *équivalentes* si il existe un difféomorphisme $\phi : S \rightarrow S'$ tel que $\phi^*j' = j$ et $\phi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ (comme ensembles ordonnés). Une surface sera dite *stable* si, pour chaque composante connexe S_0 de S , on a $2g(S_0) + \#(\mathbf{p} \cap S_0) \geq 3$.

Une *surface nodale* est un quadruplet (S, j, \mathbf{p}, D) où (S, j, \mathbf{p}) est une surface de Riemann marquée et $D \subset S \setminus \mathbf{p}$ est un ensemble fini (non ordonné) décomposé en paires (non

ordonnées) $\{d_i, d'_i\}$. Une surface nodale sera dite *stable* si, pour toute composante connexe $S_0 \subset S$, on a $2g(S_0) + \#((\mathbf{p} \cup D) \cap S_0) \geq 3$. À partir d'une surface nodale, on peut construire une surface singulière $\hat{S}_D = S/(d_i \sim d'_i)$.

Proposition 2.1.1. *Étant donnée une surface de Riemann marquée nodale stable $\mathbf{S} = (S, j, \mathbf{p})$, il existe sur $\dot{S} = S \setminus (\mathbf{p} \cup D)$ une unique métrique hyperbolique complète, de volume fini, et compatible avec j . On la note $g^{j, \mathbf{p}, D}$.*

Si ρ dénote le rayon d'injectivité de $g^{j, \mathbf{p}, D}$, et $\varepsilon \in (0, \log(1 + \sqrt{2}))$, la "décomposition fine-épaisse" de \mathbf{S} est définie par

$$\begin{aligned} \text{Thick}_\varepsilon(\mathbf{S}) &= \{z \in \dot{S} \mid \rho(z) \geq \varepsilon\} \\ \text{Thin}_\varepsilon(\mathbf{S}) &= \overline{\{z \in \dot{S} \mid \rho(z) < \varepsilon\}} \subset \dot{S} \end{aligned}$$

Notons que chaque composante connexe de la partie fine est équivalente à un disque percé ou à un cylindre fini. De plus chaque composante cylindrique C de la partie fine contient une unique géodésique fermée, notée γ_C .

Définition 2.1.2 (Convergence). On dit qu'une suite de surfaces de Riemann marquées $\mathbf{S}_n = (S_n, j_n, \mathbf{p}_n)$ converge vers une surface nodale $\mathbf{S} = (S, j, \mathbf{p}, D)$ si :

- Il existe une surface lisse S^D contenant un ensemble ordonné \mathbf{p}^D , ainsi que des difféomorphismes $\phi_n : S^D \rightarrow S_n$ tels que $\phi_n(\mathbf{p}^D) = \mathbf{p}_n$.
- Il existe des cercles disjoints $S_i^1 \subset S^D \setminus \mathbf{p}^D$ et une application $\phi : S^D \rightarrow \hat{S}_D$ induisant un difféomorphisme entre $S^D \setminus \cup S_i^1$ et telle que $\phi(\mathbf{p}^D) = \mathbf{p}$
- $\phi_n(S_i^1) \subset S_n$ sont géodésiques fermées (pour la métrique h^{j_n, \mathbf{p}_n}) contenues dans la partie fine.
- $\phi_n^* j_n \rightarrow \phi^* j$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(S^D \setminus \cup S_i^1)$, autrement dit $\phi_n^* g^{j_n, \mathbf{p}_n} \rightarrow \phi^* g^{j, \mathbf{p}}$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(S^D \setminus (\cup S_i^1 \cup \mathbf{p}^D))$
- Étant donné $z \in S_i^1$, l'arc géodésique δ^n (pour la métrique $\phi^* g^{j_n, \mathbf{p}_n}$), intersectant S_i^1 orthogonalement en z et d'extrémités contenues dans la partie épaisse de S^D (encore pour $\phi^* g^{j_n, \mathbf{p}_n}$), converge uniformément vers un arc continu de S^D passant par z et géodésique dans $S^D \setminus (\cup S_i^1 \cup \mathbf{p}^D)$ pour la métrique $\phi^* g^{j, \mathbf{p}}$.

Théorème 2.1.3 (Compacité, Deligne-Mumford). *Soit $(\Sigma_n, j_n, \mathbf{p}_n)$ une séquence de surfaces marquées stables de complexité bornée. Alors il existe une sous-suite qui converge au sens précédent.*

On présente maintenant le cas des courbes à bord. Pour notre construction, il suffit de se limiter aux surfaces sans genre. On considère $\mathbf{S} = (S, j, \mathbf{p}, \mathbf{p}_\partial)$ où (S, j) est une union

disjointe de disques munis de la structure complexe standard, $\mathbf{p} \subset \mathring{S}$ est une collection (ordonnée) de points marqués dans l'intérieur et $\mathbf{p}_\partial \subset \partial S$ est une collection ordonnée de points marqués dans le bord. Similairement aux définitions précédentes, une *surface nodale* sera une collection $\mathbf{S} = (S, j, \mathbf{p}, \mathbf{p}_\partial, D, \mathcal{D}_\partial)$ où $(S, j, \mathbf{p}, \mathbf{p}_\partial)$ est une union disjointe de disques marqués, $D \subset \mathring{S} \setminus \mathbf{p}$ est un ensemble fini de points partitionné en paires, comme $D_\partial \subset \partial S$.

2.2 Structures presque complexes adaptées

Soit W une variété de dimension paire. Une *structure presque-complexe* est une application lisse, linéaire sur les fibres $J : TW \rightarrow TW$ et telle que $J^2 = -Id$ (sur chaque fibre). Si (W, ω) est symplectique, J sera dite ω -admissible si $\omega(v, Jv) > 0$ et $\omega(\cdot, \cdot) = \omega(J\cdot, J\cdot)$ (autrement dit $\omega(\cdot, J\cdot)$ définit une métrique).

L'ensemble des structures presque-complexes admissibles sur (W, ω) est non-vide et contractible, car ces structures sont en bijection avec les métriques. Plus précisément, on a trois structures ω, J et g , et, sur un espace vectoriel, deux d'entre elles déterminent la troisième.

Pour une symplectisation

Définition 2.2.1. Soit (Y, ξ) de contact, $W = \mathbb{R}_s \times Y$ sa symplectisation, et J une structure presque-complexe sur W . Elle est dite *adaptée* à la symplectisation si

- J est invariant par translation selon \mathbb{R} .
- Sur chaque niveau $\{s\} \times Y$, J préserve ξ
- Il existe une forme λ ξ -adaptée telle que J envoie ∂_s sur R_λ .
- $J|_{\xi}$ est $d\lambda$ -admissible.

Notons que la dernière condition ne dépend pas du choix de λ . Si on veut préciser la forme utilisée on dira que J est λ -adaptée. De plus, J est entièrement déterminée par sa projection $\bar{J} = J|_{\{s\} \times \xi}$.

Pour un cobordisme Soit (W, β) un cobordisme de Liouville de (V_+, λ_+) vers (V_-, λ_-) , et J une structure presque-complexe admissible. On dira que J est adaptée si il existe un compact K tel que $W \setminus K = \text{Symp}_+(V_+, \lambda_+) \sqcup \text{Symp}_-(V_-, \lambda_-)$ et tel que J est adaptée aux symplectisations au sens de la définition 2.2.1

Pour une variété suturée On reprend les définitions de [CGHH11], qui sont inchangées dans le cas Legendrien.

Définition 2.2.2. Soit $(M, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \xi)$ une variété de contact suturée, et λ une forme adaptée. Une structure presque complexe sur la symplectisation (de la complétion) $W = \mathbb{R}_s \times M^*$ est dite *ajustée* si

- J est λ^* -adaptée
- J est ∂_t -invariante dans un voisinage de $M^* \setminus \mathring{M}$
- La projection de J à $T\hat{R}_\pm$ (parallèlement à t et s), dénotée J_\pm , est adaptée à la forme de Liouville $\hat{\beta}_\pm$: J_\pm est λ_0 -adaptée sur $\{\tau \geq 0\} = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$, et J_0 est $d\beta_\pm$ -positive sur R_\pm

En particulier J_0 , et donc $\bar{J}_0 = J_0 \upharpoonright_{\xi_0}$, déterminent uniquement J sur $M^* \setminus \mathring{M}$. En effet $\lambda^* = Cdt + e^\tau \lambda_0$, donc ξ est engendré par $\xi_\Gamma = \ker \lambda_0, \partial_\tau$ et $CR_0 - e^\tau \partial_t$ où R_0 désigne le champ de Reeb associé à λ_0 . Alors $J_0 \partial_\tau = R_0$ et J préservant ξ , cela impose $J \partial_\tau = R_0 - \frac{e^\tau}{C} \partial_t$. J étant déterminée par $J \upharpoonright_\xi$, J_0 définit bien J . Matriciellement J s'écrit (en orientant cette fois convenablement) :

$$\begin{array}{c} \partial_s \quad \partial_t \quad \partial_\tau \quad R_\Gamma \quad \xi_\Gamma \\ \partial_s \left(\begin{array}{ccccc} & -1 & & -\frac{e^\tau}{C} & \\ 1 & & -\frac{e^\tau}{C} & & \\ & & & -1 & \\ R_\Gamma & & 1 & & \\ \xi_\Gamma & & & & \bar{J}_\Gamma \end{array} \right) \end{array}$$

Remarque 2.2.3. Le flot de ∂_t identifie $J_0 \upharpoonright_{\hat{R}^+ \setminus R_+}$ et $J_0 \upharpoonright_{\hat{R}^- \setminus R_-}$.

Lemme 2.2.4. Soit J une structure presque complexe adaptée à la symplectisation d'une variété suturée. Alors :

- $d\pi \circ J = J_\Gamma \circ d\pi$, où π dénote la projection parallèlement à s et à t .
- $\lambda_\Gamma \circ J = d\tau$.

Démonstration. En effet ces deux 1-formes s'annulent sur ∂_s, ∂_t et ξ_Γ , valent 1 en ∂_τ , et s'annulent en R_Γ car

$$R_\Gamma = \left(R_\Gamma - \frac{e^\tau}{C} \partial_t \right) + \frac{e^\tau}{C} \partial_t$$

□

2.3 Courbes holomorphes et énergies

Une *courbe holomorphe* dans une variété munie d'une structure presque complexe (W, J) est une application lisse $F : (S, j) \rightarrow (W, J)$, définie sur une surface de Riemann et telle que $dF \circ j = J \circ dF$, autrement dit $\partial_x F + J\partial_y F = 0$ en coordonnées locales holomorphes (telles que $\partial_y = j\partial_x$). Si la surface possède du bord, la courbe devra être telle que $F(\partial S) \subset L$ où $L \subset W$ est une lagrangienne.

Remarque 2.3.1. Si $W = \mathbb{R} \times V$ est la symplectisation d'une variété de contact, $f = \pi_V \circ F$ détermine F (à translation selon \mathbb{R} près). En effet en projetant sur ξ et le plan $\langle \partial_s, R \rangle$, et en posant $\bar{s} = s \circ F$ on obtient

$$\begin{aligned} d\bar{s} &= f^* \lambda \circ j \\ \bar{J} \pi_\xi df &= \pi_\xi df j \end{aligned}$$

Notons cependant que la seconde équation n'implique pas la première. En particulier une courbe $f : S \rightarrow V$ la satisfaisant ne se relève pas forcément en une courbe holomorphe : il faut pour cela que $f^* \lambda \circ j$ soit fermée (et même exacte si S a du genre).

Soit g la métrique induite par (ω, J) . On a alors l'identité

$$A(F) = \text{Aire}_g(F(S)) = \int_S F^* \omega \geq 0$$

On définit maintenant plusieurs notions d'énergie pour des courbes holomorphes :

Si $F : (S, j) \rightarrow (W, d\beta, J)$ est une courbe holomorphe dans une variété symplectique (W, ω) munie d'une structure p-complexe adaptée J , on définit pour toute fonction $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$E_\phi(F) = \int_S F^*(\phi\omega) \geq 0$$

Si $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R}_s \times V, \lambda, J)$ est une courbe holomorphe dans la symplectisation de (V, λ) , munie d'une structure complexe adaptée, on pose

$$\begin{aligned} E_{d\lambda}(F) &= \int_S f^* d\lambda \geq 0 \\ E_\lambda(F) &= \sup_{\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \int \varphi = 1} \int_S (\varphi \circ a) ds \wedge f^* \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$E(F) = E_{d\lambda}(F) + E_\lambda(F) \geq \sup_{\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \psi' \geq 0} \int_S F^* d(\psi\lambda) \geq 0$$

On s'intéresse désormais aux courbes asymptotes à des cordes et orbites de Reeb.

Définition 2.3.2 (Espaces de modules). Soit (M, λ) une variété de contact, J une structure complexe adaptée à sa symplectisation, et $\Lambda \subset \mathbb{R} \times V$ une legendrienne. On fixe une col-

lection finie ordonnée de cordes $c_0, \dots, c_k, k \geq 1$. On définit alors $\mathcal{M}(c_0; c_1, \dots, c_k; \Lambda, J)$ comme l'ensemble des courbes J -holomorphes $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$ telles que

- $S = D \setminus \{z_0, \dots, z_k\}$ où les $z_i \in \partial D$ sont ordonnés dans le sens direct.
- $f(\partial D \setminus \{z_i\}) \subset \Lambda$
- F est positivement asymptote à c_0 en z_0 et négativement asymptote à c_i en z_i ($i \geq 1$).

Autrement dit $a \xrightarrow{z_0} +\infty, a \xrightarrow{z_i} -\infty$ pour $i \geq 1$, et il existe des coordonnées holomorphes locales $(x, *)$ telles que $f(x, \cdot) \xrightarrow{z_i} c_i(\cdot)$ dans $\mathcal{C}^\infty([0, 1], V)$.

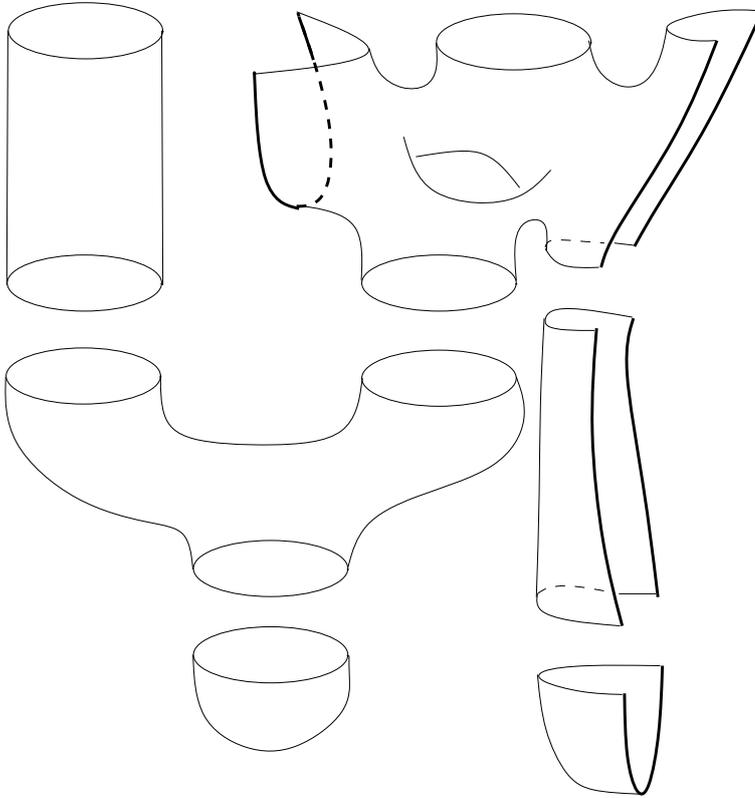


FIGURE 2.1: Bâtiment holomorphe à bord dans une lagrangienne, figure tirée de [Abb14]

Lemme 2.3.3. [BEHWZ03] Soit $F \in \mathcal{M}(c_i, \Lambda)$. Alors

$$E_{d\lambda}(F) = \mathcal{A}(c_0) - \sum_{i \geq 1} \mathcal{A}(c_i) \qquad E_\lambda(F) = \mathcal{A}(c_0)$$

Une hypothèse d'énergie finie permet de contraindre les courbes holomorphes. On rappelle ainsi des résultats classiques :

Soit $U = (a, u) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R}_s \times V, J)$ une courbe holomorphe telle que $E_{d\lambda}(U) = 0$. Alors U est soit un cylindre sur une orbite de Reeb, soit constante.

Soit $u : (D^2 \setminus \{0\}, i) \rightarrow (W, \omega, J)$ une courbe holomorphe de ω -énergie finie, à valeurs dans une variété symplectique compacte. Alors u se prolonge en une courbe holomorphe $(D^2, i) \rightarrow (W, J)$.

Si $u : (S, j, z) \rightarrow (W, J)$, courbe holomorphe à valeur dans la complétion d'un cobordisme de Liouville, est d'énergie finie, alors pour toute perçure $z \in S$, on a l'alternative suivante :

- u se prolonge en z de façon holomorphe
- u est asymptote en z à une orbite de Reeb.

2.4 Géométrie finie à l'infini et monotonie

Soit (W, ω) symplectique, J une structure ω -admissible, $L \subset W$ une lagrangienne telles qu'il existe $r_0, C_1, C_L > 0$ et $K \subset W$ compact satisfaisant :

1. $g = \omega(\cdot, J)$ est complète
2. Pour tout $x \in W$, $\exp_p : B(0, r_0) \rightarrow B(x, r_0)$ est un difféomorphisme (autrement dit le rayon d'injectivité est supérieur à r_0).
3. Pour tout $x \in W, r < r_0$, tout lacet $\gamma : S^1 \rightarrow B(x, r)$ s'étend à $\tilde{\gamma} : D^2 \rightarrow B(x, r)$ tel que $\text{Aire}_g(\tilde{\gamma}) \leq C_1 \text{lgth}_g(\gamma)$
4. Si $x, y \in L \setminus (L \cap K)$ et $d_g(x, y) < r_0$, alors $d_{(L, g)}(x, y) < C_L d_g(x, y)$, où $d_{(L, g)}$ est la distance induite sur L par $g|_L$.
5. pour tout $x \in L$, $L \cap B(x, r_0)$ est contractible. En particulier deux points dans des composantes connexes distinctes de L sont à distance au moins r_0 .

On dit alors que (W, ω, J, L) est à géométrie finie à l'infini.

Exemple 2.4.1. La complétion cylindrique d'une lagrangienne incluse un domaine de Liouville, muni d'une structure presque complexe cylindrique, est à géométrie finie, voir [GPS19, Lem 2.43].

Lemme 2.4.2 (Monotonie). [AL12, Ch5, Lemme 4.7.2] Soit (W, ω, J, L) ayant une géométrie finie à l'infini (on reprend les mêmes notations), $F : (S, j) \rightarrow (W, J)$ une courbe holomorphe compacte et $x \in L$ tels que

- $(F(S), F(\partial S)) \subset (B(x, r), \partial B(x, r) \cup L)$ avec $r \leq r_0$
- $x \in F(S)$

Alors $\text{Aire}_g(F(S)) \geq \delta r^2$, où $\delta = 1/(4C_0(1 + C_1 + \text{Diam}_g(K)))$.

Démonstration. La preuve repose sur la monotonie des courbes holomorphes. Il s'agit des propriétés 4.3.1(ii) (sans bord) et 4.7.2(ii) de [Sik94].

Voir aussi [Sul02, Théorème 2.7] pour le cas à paramètre : si (L_t, J_t) est une famille à géométrie finie pour tout t , telle que le compact et les constantes sont indépendants de t , on a le même résultat indépendamment de t . \square

Corollaire 2.4.3. *Si (W, ω, J, L) est à géométrie finie et $F : (S, j) \rightarrow (W, J)$ une courbe holomorphe compacte telle que*

$$f(S) \cap K \neq \emptyset \text{ et } F(\partial S) \subset K \cup L$$

Alors il existe une constante C telle que $F(S) \subset \mathcal{N}_g(K, CAire(F(S)))$

Démonstration. Voir [Gro85 §2.3.D],[Sik94, Prop 4.7.1 et 4.7.2(iv)] [Sul02, Thm 2.7] pour le cas à paramètre, [EliGro04] et [EES05 §11]. \square

2.5 Principes du maximum : 5 nuances de Stokes

On présente ici plusieurs principes du maximum permettant d'appliquer les résultats de [BEHWZ03]. On commence par quelques situations standards avant d'aborder le cas surturé.

2.5.1 Dans une symplectisation

Lemme 2.5.1. *Soit V une variété de contact, et J une structure presque complexe adaptée sur sa symplectisation. Si $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$ est pseudo-holomorphe, alors a n'a pas de maximum local sur \mathring{S} .*

Démonstration. On reprend la preuve de [Bou03] : on note s la coordonnée selon \mathbb{R} . En posant $d^{\mathbb{C}}\alpha = d\alpha \circ J$ on a alors $\Delta = -dd^{\mathbb{C}}$, et donc

$$\Delta e^a = \Delta(F^*e^s) = F^*(\Delta e^s)$$

Or $\Delta e^s = -d(d(e^s) \circ J) = -d(e^s ds \circ J) = d(e^s \lambda) = \omega$, et donc $\Delta e^a = F^*\omega > 0$ sur S . Par conséquent la fonction e^a n'a pas de maximum local sur \mathring{S} , et donc il en va de même pour a .

Remarque 2.5.2. Notons que a est elle aussi pluri-sous-harmonique, car $\Delta s = -d(ds \circ J) = d\lambda \geq 0$ (mais pas strictement pluri-sous-harmonique).

□

Lemme 2.5.3 (Folklore, [GPS19]). *Soit $L \subset (\mathbb{R}_s^+ \times V, e^s \lambda)$ une lagrangienne dans la symplectisation positive d'une variété de contact, J une structure presque complexe adaptée, et $F = (a, f) : S \rightarrow \mathbb{R}_+ \times V$ une courbe pseudo-holomorphe sans perçure telle que*

$$\partial S = \partial_t S \cup \partial_n S, F(\partial_t S) \subset L, a(\partial_n S) = 0 \text{ et } F^* \lambda|_{\partial_t S} \leq 0$$

Alors F est constante.

Démonstration. On reprend la preuve de [GPS19, Lemme 2.45], voir aussi [AS10, Lemme 7.2] pour le cas des courbes de Floer.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi' \geq 0$. On utilise alors la formule de Stokes pour calculer :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_S F^*(\varphi(s)d\lambda) = \int_{\partial S} F^*(\varphi(s)\lambda) - \int_S F^*(\varphi'(s)ds \wedge \lambda) \\ &= \int_{\partial_t S} \varphi \circ a.F^* \lambda - \int_S \varphi' \circ a.F^*(ds \wedge \lambda) \leq 0 \end{aligned}$$

On a alors $F^*d\lambda = 0$ et donc $\text{Im}(dF) \subset \text{Vect}(R, \partial_s)$. Si la courbe n'est pas constante, elle devrait être un cylindre sur une trajectoire de Reeb, ce qui est impossible car on a supposé la courbe sans perçure.

□

Corollaire 2.5.4. *Une courbe holomorphe dans une symplectisation $F : (S, \partial S) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times \Lambda)$ n'a pas de maximum local, même dans le bord.*

Démonstration. En effet si $z_0 \in \partial S$ est un maximum local, on peut restreindre la courbe à un voisinage $S_0 \subset S$ vérifiant les conditions du lemme précédent : on considère $u^{-1}(\{s \geq a(z_0) - \varepsilon\})$ et on se restreint à la composante connexe contenant z_0 . □

2.5.2 Dans un cobordisme

On considère $(\xi_s)_{s \in [0,1]}$ une isotopie de structures de contact sur V , et on fixe des formes de contact adaptées λ_0 et λ_1 ainsi que des structures presque complexes admissibles $\bar{J}_0 : \xi_0 \rightarrow \xi_0$ et $\bar{J}_1 : \xi_1 \rightarrow \xi_1$. Comme vu dans le paragraphe 1.1.13, on peut alors construire (à l'aide du théorème de Gray) un cobordisme de Liouville $\mathbb{R} \times V$ allant de $(V, C\lambda_1)$ vers (V, λ_0) . L'espace des structures presque complexes admissibles étant contractible, il existe J admissible interpolant entre les structures presque complexes choisies. Le lemme suivant montre que l'on peut trouver J telle que la coordonnée s est pluri-sous-harmonique (après reparamétrisation).

Lemme 2.5.5 (Dans un cobordisme). [CGHH11, Lemme 3.3] Soit $\mathbb{R}_s \times Y$ un cobordisme de $(Y, C\lambda_1)$ à (Y, λ_0) provenant d'une isotopie, comme décrit précédemment. Il existe une structure complexe J sur $\mathbb{R} \times Y$, $s_{\pm} \in \mathbb{R}_{\pm}$ et $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante tels que

- Pour $s > s_+$, J est adaptée à $C\lambda_1$ et $J|_{\xi_+} = J_1$.
- Pour $s < s_-$, J est adaptée à λ_0 et $J|_{\xi_-} = J_0$.
- $\phi(s) : \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est J -pluri-sous-harmonique.

En particulier si $u : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times Y, J)$ est une courbe J -holomorphe, $s \circ u$ n'a pas de maximum local sur \mathring{S} .

Démonstration. On reprend la preuve de [CGHH11] : on commence par montrer qu'il existe $C > 0$ et J adaptée à $C\lambda_+$ (resp. λ_-) pour $s > 1$ (resp. $s < 0$) tels que $s : \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est J -pluri-sous-harmonique, puis on posera $\tilde{s} = s/C$ pour s grand pour obtenir le lemme.

D'après le théorème de Gray, on peut supposer que $\lambda_+ = f\lambda_-$, quitte à composer par un difféomorphisme préservant les tranches $\{s\} \times Y$. On considère alors la forme de contact $\lambda = g(s, x)\lambda_-$ où g est tel que

- $g(s, *) = 1$ pour $s \leq 0$
- $g(s, *) = Cf$, où C est une constante supérieure à $\max(1/f)$
- $g_s = \partial_s g \geq 0$

On prend maintenant J une structure presque complexe préservant $\xi = \ker(\lambda_-)$, envoyant ∂_s sur R_s le champ de Reeb de $g(s, *)\lambda_-$ et telle que $d_Y \lambda \circ (id \otimes J)$ est une métrique sur ξ (où d_Y est la dérivé sur Y). On calcule alors

$$\Delta s = -d(ds \circ J) = d\lambda = g_s ds \wedge \lambda_- + d_Y \lambda$$

Si on décompose un vecteur en $v = a\partial_s + bR_s + X$, où $X \in \xi$, alors $Jv = aR_s - b\partial_s + JX$ et on obtient

$$\Delta s(v, Jv) = g^{-1}g_s(a^2 + b^2) + d_Y \lambda(X, JX) \geq 0$$

□

On montre maintenant un lemme similaire pour une courbe à bord. On considère une isotopie legendrienne $\Lambda_t \subset (V, \xi_t)$, qui fournit un cobordisme lagrangien exact $L \subset (\mathbb{R} \times V, e^s \lambda_t)$ entre Λ_+ et Λ_- , cylindrique si $s < s_-$ ou $s > s_+$, voir le paragraphe 1.1.4.

Lemme 2.5.6. Il existe une structure presque complexe adaptée au cobordisme, et telle

qu'il n'existe pas de courbe sans perçure

$$u : (S, \partial S, j) \rightarrow ([s_-, \infty) \times V, \{s_-\} \times V \cup L, J)$$

De plus on peut imposer $J|_{\xi}$ pour $s > s_+$ et $s < s_-$.

Démonstration. Là encore la pluri-sous-harmonicité ne permet que d'éviter les maximums dans l'intérieur de la surface. Pour généraliser au cas des courbes à bord on utilise la formule de Stokes.

En effet on vient de montrer que $u^* \Delta s$ est positif. Si une telle courbe existe, on décompose son bord en :

$$\partial S = \partial_l S \cup \partial_n S, \quad u(\partial_l S) \subset L, \quad u(\partial_n S) \subset \{s_-\} \times Y$$

On prend alors $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante et nulle en s_- et on calcule

$$0 \leq \int_S u^*(\phi(s) \Delta s) = \int_S u^*(\phi(s) d(g\lambda_-)) = \int_{\partial S} u^*(\phi(s) g\lambda_-) - \int_S u^*(\phi'(s) ds \wedge \lambda)$$

car $\Delta s = -d(ds \circ J) = d(g\lambda_-)$. Le second terme est négatif car $ds \wedge \lambda$ est positif : si $v = a\partial_s + bR_s + X$, alors $ds \wedge \lambda(v, Jv) = a^2 + b^2$. De plus $\phi = 0$ sur $\partial_n S$ et $(g\lambda_-)|_L = df$, où f est une fonction nulle en s_- . On obtient donc

$$0 \leq \int_S u^*(\phi(s) \Delta s) \leq \int_{\partial_l S} u^*(\phi(s) df)$$

Lorsque ϕ tend vers 1, cet encadrement devient

$$0 \leq \int_S u^*(\Delta s) \leq \int_{\partial_l S} d(f \circ u) = 0$$

car f est constant en s_- .

D'où $u^* d\lambda = 0$ sur \hat{S} , et donc $du = 0$ sur un ouvert. Par unicité du prolongement holomorphe, la courbe devrait être constante. \square

2.5.3 Dans une variété suturée : complétion cylindrique

On étend maintenant le résultat de [CGHH11] bornant les courbes sans bord dans la complétion d'une variété de contact suturée.

Lemme 2.5.7. *Soit $(V, \Gamma, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda)$ une variété de contact suturée munie d'une forme adaptée, $\Lambda \subset V$ une legendrienne cylindrique, J une structure presque-complexe ajustée sur V^* et $F \in \mathcal{M}(c_0; c_i, \Lambda^*)$. une courbe pseudo-holomorphe. Alors $\tau \circ F < 0$ et $|t \circ F|$ est borné par une contante (qui ne dépend que de c_+ , J , et λ).*

Démonstration. On commence par montrer que la courbe est bornée horizontalement (selon la direction τ). La structure complexe étant ajustée à la complétion, la projection à

$\mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma$ est J_0 -holomorphe. En effet en posant

$$S_0 = (\tau \circ F)^{-1}(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad G = \pi \circ F : (S_0, j) \rightarrow \mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma$$

où π est la projection parallèlement à (s, t) , la condition $dF \circ j = J \circ dF$ implique

$$dG \circ j = d\pi \circ dF \circ j = d\pi \circ J \circ dF = J_0 \circ d\pi \circ dF = J_0 \circ dG$$

car J est adaptée.

On obtient une courbe une courbe J_0 -holomorphe dans la symplectisation de (Γ, λ_0) , satisfaisant les hypothèses du lemme 2.5.3. En particulier $\tau \circ F$ n'a pas de maximum local, même dans le bord. La courbe F étant asymptote à des cordes contenues dans l'intérieur de V , elle reste dans cet intérieur.

Remarques 2.5.8. • Le reste des équations est donné par

$$\begin{aligned} \partial_y \bar{t} &= \partial_x a - \frac{e^\tau}{C} \partial_x \bar{\tau} \\ \partial_x \bar{t} &= -\partial_y a \end{aligned}$$

- On pourrait aussi utiliser la monotonie pour montrer que des courbes d'énergie bornée restent dans un compact, en notant que l'énergie de G est bornée par celle de F .
- *Réflexion de Schwartz* (cf [EES02] et [Abb04]) Alternativement, on peut utiliser une méthode de doublage : si F sort de V , elle un τ -max local, qui est forcément dans le bord. Localement on obtient $(\bar{\tau}, g) : \mathbb{H} \cap \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \Gamma$ J_Γ -hol, telle que $g(\mathbb{R}) \subset \Lambda_0$ et $\bar{\tau}$ atteint son max en 0. D'après [Abbas 2.55, p158], cette courbe se prolonge à D^2 , et 0 reste un τ -maximum local (pour une legendrienne prolongée cylindriquement !) : en effet le prolongement est donné en coordonnées locales par $\bar{\tau}(\bar{z}) = \bar{\tau}(z)$ (et $g(\bar{z}) = g(z)$). Notons que $d\tau(dF(\partial_v)) = \lambda_0(dF(\partial_u)) = 0$ car $dF(\partial_u) \in T\Lambda$.

Pour la direction verticale (t) on reprend la preuve de [CGHH11]. On commence par un cas particulier qui s'avèrera utile par la suite : on suppose la variété S -saturée et munie d'une structure presque-complexe adaptée telle que sa projection à R_\pm soit de Stein.

Soit J_\pm les structures induites sur \hat{R}_\pm par projection selon ∂_s et ∂_t . J étant ajustée, $(\hat{R}_\pm, \hat{\beta}_\pm, J_\pm)$ sont de Stein : il existe des fonctions $\phi_\pm : \hat{R}_\pm \rightarrow \mathbb{R}$ strictement pluri-

sous-harmoniques telles que $\hat{\beta}_\pm \circ J_\pm = d\phi_\pm$. Cela nous permet de calculer

$$\begin{aligned} \Delta(t \circ F) &= -dd^c(t \circ F) = -d(d(F^*t) \circ j) = -d(F^*(dt \circ J)) \\ &= -F^*d\left(\frac{\lambda - \hat{\beta}_\pm}{C}\right) \circ J = \frac{1}{C}F^*d(\hat{\beta}_\pm \circ J) \end{aligned}$$

car $\lambda \circ J = ds$. De plus $\hat{\beta}_\pm \circ J = d\phi_\pm$: ces deux 1-formes s'annulent sur ∂_s et ∂_t , et coïncident sur $T\hat{R}_\pm$: si v est tangent à \hat{R}_\pm , alors $\hat{\beta} \circ \bar{J}(v) = \hat{\beta}(J_\pm v + *\partial_t) = \hat{\beta}(J_\pm v)$.

Par conséquent $\Delta(t \circ F) = 0$, autrement dit $t \circ F$ est harmonique sur $F^{-1}(\{|t| > 1\})$. Le principe du maximum interdit alors l'existence d'un maximum local, qui existerait si la courbe sortait de $\{|t| < 1\}$ (la courbe est asymptote à des cordes de Reeb, qui sont dans \mathring{V} . On a donc pas de problème de bord).

Remarque 2.5.9. A priori une structure de Stein sur \hat{R}_\pm ne relève pas en une structure adaptée à la variété suturée, car les lignes de niveau de la fonction pluri-sous-harmonique ϕ diffèrent de celles de la coordonnée τ . Voir [CGHH10, §3.2] pour un exemple.

Si la variété n'est pas S-saturée, [CGHH11] montrent que la borne selon t dépend de la complexité de la courbe (genre et nombre de points marqués). Le cas legendrien se traite de la même façon, car la legendrienne ne traverse pas R_\pm . Dans la suite on dénote par c_{top} la complexité topologique d'une surface marquée (S, \mathbf{p}) , définie par

$$c_{top}(S) = g(S) + |p|$$

et on pose $\bar{t} = t \circ F$, $\bar{\tau} = \tau \circ F$.

Lemme 2.5.10. [CGHH11, Lemme 5.18] *Soit J une structure presque complexe adaptée et $F_n : (\Sigma_n, j_n, p_n) \rightarrow (\mathbb{R} \times V^*, J)$ une suite de courbes holomorphes telles que $E(F_n)$, $c_{top}(\Sigma_n)$ et $\bar{\tau}_n$ soient uniformément bornées. Alors \bar{t}_n est uniformément bornée.*

Démonstration. On résume ici les principales étapes de la preuve : on commence par rajouter des points marqués \mathbf{p}'_n afin d'obtenir une borne uniforme sur $\rho_n(z) \cdot |\nabla F_n(z)|$, où ρ dénote le rayon d'injectivité calculé pour l'unique métrique hyperbolique complète sur $(S, \mathbf{p}_n \cup \mathbf{p}'_n)$. L'espace des surfaces hyperboliques nodales étant compact, on peut extraire une suite telle que $(\Sigma_n, j_n, \mathbf{p}_n \cup \mathbf{p}'_n)$ converge vers une surface nodale.

Supposons que $\delta_n = \sup \bar{t}_n - \inf \bar{t}_n$ soit non borné. On considère alors une décomposition fine-épaisse de la suite de surfaces. Alors la convergence "respecte cette décomposition" et il existe un nombre fini de pièces, on peut donc trouver une composante sur laquelle δ_n diverge. Le diamètre des parties épaisses étant borné indépendamment de n (car elles se décomposent en pantalons hyperboliques de diamètre fini, dont le nombre est borné par

la complexité topologique), il s'agit forcément d'une partie fine de la décomposition, qui peut être reparamétrisée en un demi cylindre $[0, r_n] \times S^1$ sur lequel $|\nabla F_n|$ (calculé avec la métrique plate) est borné (ce gradient est commensurable à $\rho_n(z) \cdot |\nabla F_n(z)|$, cf [CGHH11, Lemme 5.12]).

Si $\sup_{\Sigma_n} |\nabla F_n|$ est minoré par $c > 0$, on obtient (après translations et restrictions) une suite de courbes $G_n : [-R_n, R_n] \rightarrow \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_t \times R_\pm$ telle que $R_n \rightarrow \infty$ et $|\nabla G_n(0, 0)| \geq c$. Par compacité il existe une sous-suite convergeant vers une courbe cylindrique $G_\infty : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathcal{R}_\pm$, non constante. Son énergie étant finie, les points marqués sont soit "remplissables", soit asymptotes à des orbites de Reeb. Comme il n'y a pas d'orbite dans cette région, la courbe se prolonge en $\tilde{G}_\infty : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \times R_\pm$ ce qui est impossible (d'après Stokes son énergie est nulle, et donc la courbe est constante).

Si maintenant $\sup_{\Sigma_n} |\nabla F_n| \rightarrow 0$, on obtient aussi une contradiction : après restriction on a des courbes $G_n : [0, r_n] \times S^1 \rightarrow \mathbb{C} \times R_\pm$ telles que $d(G_n(0, 0), G_n(r_n, 0)) = 1$ et le diamètre de l'image est entre 1 et 2. L'inégalité isopérimétrique implique alors $\text{Aire}(\text{Im}(G_n)) \leq C \sup_{\Sigma_n} |\nabla F_n|$, où C est indépendant de n . Cependant il existe aussi δ , indépendant de n , et $x_n \in \text{Im}(G_n)$ tels que le bord de $\text{Im}(G_n)$ est à l'extérieur de $B_\delta(x_n)$. Le lemme de monotonie implique alors $\text{Aire}(\text{Im}(G_n) \cap B_\delta(x_n)) \geq C' \delta^2$, où C' est indépendant de n . □

□

Remarques 2.5.11. Ce résultat reste vrai si la complétion provient d'un Γ -cobordisme, ainsi que pour des courbes sont positivement asymptotes à plusieurs cordes.

Si le domaine de Liouville (W, β) admet une structure complexe J_Γ le rendant de Stein, $\beta \circ J_\Gamma$ est exacte, cependant pour cette preuve il suffit que cette forme soit fermée. Un principe du maximum valable pour une plus grande classe de paires (β, J) permettrait d'éviter le résultat technique de [CGHH11]. Plus précisément, étant donnée β une forme de Liouville, il faudrait trouver J_+ (resp. J_-) telle que $d(\beta \circ J_+)$ est positive (resp. négative).

2.5.4 Dans une variété suturée : complétion enroulée

On commence par considérer une legendrienne $\Lambda = \sqcup \Lambda_i \subset (V, \lambda)$, ainsi qu'une collection d'hamiltoniens $H_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ qui nous permettent de construire la lagrangienne enroulée

$$L = \cup L_i \subset (\mathbb{R}_s^+ \times V, \beta = e^s \lambda)$$

où

$$L_i = \Lambda_i^{H_i} = \{(s, \phi_R^{H_i(s)}(x)), x \in \Lambda_i\}$$

Notons que cela correspond à enrouler par les hamiltoniens H_i , car $\phi_R^{H_i(s)} = \phi_{X_{H_i}}^1$. On fixe aussi J une structure presque complexe adaptée à la symplectisation. On commence par montrer que les courbes holomorphes vérifient un principe du maximum.

Lemme 2.5.12. *Avec les notations précédentes, soit $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R}^+ \times V, J)$ une courbe holomorphe sans perçure telle que*

$$\partial S = \partial_l S \cup \partial_n S, \quad F(\partial_l S) \subset L \text{ et } a(\partial_n S) = 0.$$

Alors F est constante.

Démonstration. A priori on ne peut pas appliquer le lemme 2.5.3 car on ne contrôle pas le signe de $F^* \lambda$ sur le bord. Cependant la formule de Stokes permet toujours de conclure. On choisit ainsi $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante, nulle en 0, et on calcule :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_S F^*(\phi(s) d\lambda) = \int_{\partial S} F^*(\phi(s) \lambda) - \int_S F^*(\phi'(s) ds \wedge \lambda) \\ &= \int_{\partial_l S} F^*(\phi(s) \lambda) - \int_S \phi' \circ a. F^*(ds \wedge \lambda) \end{aligned}$$

F étant J -holomorphe et J étant adaptée, le terme $F^*(ds \wedge \lambda)$ est positif. En décomposant le bord en $\partial_l S = \sqcup \partial_i S$ tel que $F(\partial_i S) \subset L_i$, on a $\lambda|_{TL_i} = df_i(s)$ où $f_i = f_{H_i}$, positive et nulle en 0, comme dans la section 1.5 (voir aussi le lemme 1.1.14). On calcule alors :

$$\int_{\partial_i S} G^*(\phi \lambda) = \int_{\partial_i S} G^*(\phi f'_i ds) = \int_{\partial_i S} d(\psi_i \circ G)$$

où $\psi_i(s)$ est une primitive de $\phi f'_i$ nulle en zéro. La courbe n'ayant pas de perçure, $\partial(\partial_i S) \subset \{s = 0\}$ et donc la première intégrale est nulle. \square

Remarque 2.5.13. Le point important ici est que l'enroulement ne dépend que de la coordonnée τ : le projeté sur $\mathbb{R}_\tau \times \Gamma$ est une lagrangienne exacte, et la primitive de la restriction de la forme de Liouville est une fonction de τ . Notons que l'on n'a pas utilisé la positivité de l'enroulement.

Corollaire 2.5.14. Soit Λ_0, Λ_1 deux legendriennes cylindriques centrées dans une variété suturée V , $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction lisse croissante nulle sur un voisinage de 0, et $F \in \mathcal{M}(c_0; c_i; \Lambda_0^H \cup \Lambda_1^*)$. Alors $\sup \tau \circ F \leq \max(0, \tau(c_0))$, et $|t \circ F| \leq C(c_0, c_{top})$.

Démonstration. Pour la direction τ , l'idée est la même que précédemment : après restriction et projection on obtient une courbe $G : S \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \Gamma$, où le bord de surface se décompose en $\partial S = \partial_n S \cup \partial_0 S \cup \partial_1 S$ tel que

$$\tau(\partial_n S) = 0, \quad G(\partial_0 S) \subset \Lambda_0^H, \quad G(\partial_1 S) \subset \Lambda_1^*$$

Le principe du maximum précédent implique alors $\sup \bar{\tau} \leq \max(0, \tau(c_0), \tau(c_i))$.

On montre maintenant par l'absurde que pour toute perçure négative c_i on a $\tau(c_i) \leq \tau(c_0)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait après restriction et projection une courbe J_Γ -holomorphe

$$U_0 = (a, u) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma, J_\Gamma)$$

avec une perçure négative et telle que $\partial S = \partial_0 S \cup \partial_n S \cup \partial_1 S$ et $U_0(\partial_0 S) \subset \pi_\Gamma(\Lambda_0^H)$, $a(\partial_n S) = 0, U_0(\partial_1 S) \subset \Lambda_1^*$.

On calcule alors en prêtant attention à l'orientation du bord (voir figure 2.2) :

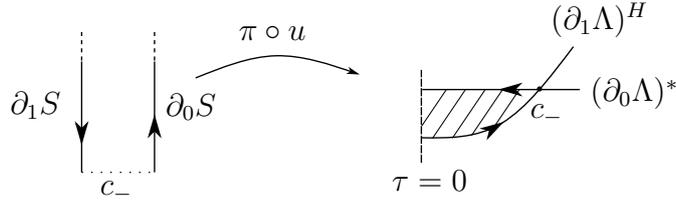


FIGURE 2.2: Orientation du bord près d'une perçure négative

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_S U^* \phi(\tau) d\lambda_\Gamma = \int_{\partial S} U^* \phi(\tau) \lambda_\Gamma - \int_S U^* (\phi' d\tau \wedge \lambda_\Gamma) \\ &= \int_{\partial_0 S} U^* (\phi \lambda_\Gamma) - \int_S U^* (\phi' d\tau \wedge \lambda_\Gamma) \leq 0 \end{aligned}$$

En effet

$$\int_{\partial_0 S} \phi \cdot \lambda_{\Gamma|T\Lambda_1^H} = \int_{\partial_0 S} U^* (\phi d\psi(\tau)) = \int_{U(\partial_0 S)} \phi \psi' d\tau \leq 0$$

car ψ , primitive de $\lambda_{\Gamma|T\Lambda_1^H}$ nulle en 0, est une fonction croissante positive de τ (voir lemme 1.1.14).

La preuve bornant la direction t est inchangée. □

Invariants des legendriennes suturées

On définit maintenant plusieurs variantes de l'homologie legendriennes suturée.

3.1 Version cylindrique

Soit $(V, \lambda, \mathcal{N}_0(\Gamma), \Lambda)$ une variété de contact suturée munie d'une legendrienne cylindrique, telle que les cordes soient non-dégénérées. Pour simplifier la présentation on suppose aussi que

- (Classe de Chern) $c_1(\xi) = 0$
- (Homologie) $H_1(V)$ est libre
- (Classe de Maslov) $\mu(\Lambda) = 0$
- (Hypertension) Il n'existe pas d'orbite de Reeb contractible.

Pour un contexte plus général, on se réfèrera à [EENS13, §2.3], voir aussi [Bou03] et [Par19].

3.1.1 Algèbre

On considère une legendrienne Λ non-dégénérée, et on dénote :

- $\mathcal{C}(\Lambda)$ l'ensemble de ses cordes de Reeb ;

- $\mathcal{C}^c(\Lambda)$ l'ensemble des cordes contractibles (c'est à dire homotopes à un chemin constant, via des chemins à extrémités dans Λ);
- $\mathcal{C}^T(\Lambda)$ l'ensemble des cordes de Reeb d'action majorée par T .

Similairement, on pose $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des orbites de Reeb, contenant $\mathcal{P}^c(V)$.

On définit $\mathcal{LC}(\Lambda)$ comme la \mathbb{Q} -algèbre unitaire non-commutative engendrée par les cordes de Reeb et les éléments de $\mathcal{R} = \mathbb{Z}[H_1(\Lambda)]$. Comme \mathbb{Z} -module, $\mathcal{LC}(\Lambda)$ est engendré par les mots $q_0 c_1 q_1 c_2 \dots c_r q_r$ où $q_i \in \mathcal{R}$ et $c_i \in \mathcal{C}(\Lambda, \lambda)$.

Si $\Lambda = \sqcup \Lambda_i$ a plusieurs composantes, on peut aussi considérer l'*algèbre composable*, \mathbb{Z} -module engendré par les mots composables de cordes de Reeb et éléments de $\mathcal{R} = \bigoplus \mathbb{Z}[H_1 \Lambda_i]$. Plus précisément il s'agit du \mathbb{Z} -module engendré par les mots $q_0 c_1 q_1 \dots c_r q_r$, où c_k est une corde de Λ_{i_k} vers $\Lambda_{i_{k+1}}$ et $q_{k_1} \in \mathbb{Z}[H_1(\Lambda_{i_k})]$. On a ainsi décomposé l'identité de $\mathbb{Z}[H_1(\Lambda)]$ en une somme d'idempotents $e_i \in \mathbb{Z}[H_1(\Lambda_i)]$.

Remarque 3.1.1. On pourrait faire commuter les cordes et classes d'homologies, comme dans [Ng08].

3.1.2 Degré

On commence par rappeler les définitions des indices de Maslov et de Conley-Zehnder.

Indice de Conley-Zehnder [CZ84] Une matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est dite symplectique si elle vérifie $M^t J_n M = J_n$, où $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, et l'ensemble de ces matrices sera dénoté $Sp(2n)$. Notons que le sous-ensemble $Sp^*(2n) = \{M \in Sp(2n), \det(M - I) \neq 0\}$ est composé de deux composantes connexes. De plus $Sp(2n) \cap O(2n) \simeq U(n)$, ensemble des matrices complexes unitaire, et il existe un rétracte par déformation

$$\rho : Sp(2n) \rightarrow U(n)$$

En particulier $\pi_1(Sp(2n)) = \mathbb{Z}$.

Si $M_t \in Sp(2n), t \in [0, T]$, est un chemin continu de matrices symplectiques tel que $M_0 = I$ et $\det(M_T - I) \neq 0$, son indice de Conley-Zehnder compte le nombre d'intersection du chemin avec $Sp(2n) \setminus Sp^*(2n)$. Plus précisément si $\det(M_T - I)$ est positif

(resp. négatif), on complète le chemin jusqu'à $-I$ (resp. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & I_{2n-2} \end{pmatrix}$) tout en restant

dans $Sp^*(2n)$. On dénote par \hat{M}_t ce nouveau chemin, et on pose

$$\mu_{CZ}(M_t) = \deg(\det_{\mathbb{C}}^2 \rho(\hat{M}_t))$$

où $\det_{\mathbb{C}} : U(n) \rightarrow S^1$ désigne le déterminant complexe. D'après [CZ84] ce nombre est indépendant du choix de ρ et du chemin utilisé pour prolonger, et ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin (à extrémités fixées).

Définition alternative : voici une définition plus facile à manipuler, voir [Bou03]. Pour un chemin $M_t \in Sp(2n)$ comme précédemment, un croisement est une valeur $t \in [0, T]$ telle que $\det(M_t - I) = 0$. Alors Q_t défini par

$$Q_t(v) = \omega(v, \dot{M}_t v)$$

(où ω est la forme symplectique standard) est une forme quadratique sur $\ker(M_t - I)$. Si pour tout croisement cette forme est non-dégénérée, l'indice de Conley-Zehner s'exprime comme suit

$$\mu_{CZ}(M_t) = \frac{1}{2} \text{sign}(Q_0) + \sum_{t \text{ croisement} \neq 0} \text{sign}(Q_t)$$

où sign désigne la signature de la forme quadratique.

Remarque 3.1.2. L'indice de Conley-Zehnder vérifie

$$(-1)^{\mu_{CZ}(M_t)} = (-1)^n \text{sign}(\det(M_T - I))$$

(ici sign est le signe et non la signature). Autrement dit modulo 2 il est déterminé le signe de $\det(M_T - I)$, qui sera indépendant de la trivialisation choisie.

Indice de Maslov [RS93], [EES02] Soit \mathcal{L}_n l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ (notons que $\pi_1(\mathcal{L}_n) \simeq \mathbb{Z}$). Étant donné une lagrangienne $V \in \mathcal{L}_n$, son cycle de Maslov est

$$\Sigma(V) = \cup_1^n \Sigma_k(V)$$

où $\Sigma_k(V)$ est l'ensemble des lagrangiennes intersectant V selon un sous-espace de dimension k .

Si $L_t \subset (\mathbb{C}^n, \omega_{st}), t \in [0, T]$ est un chemin continu de lagrangiennes, son indice de Maslov relatif à $V \in \mathcal{L}_n$ est le nombre d'intersections de ce chemin avec $\Sigma(V)$. On peut relier cette quantité à l'indice de Conley-Zehnder en voyant une lagrangienne comme l'image de $V \subset CC^n$ par une matrice symplectique : si $L_t = M_t(V)$, on pose

$$\mu(L_t, V) = \mu_{CZ}(M_t).$$

Remarque 3.1.3. Inversement on peut exprimer l'indice de Conley-Zehnder à partir de l'indice de Maslov : l'indice d'un chemin de matrices M_t est l'indice de Maslov du lacet

de lagrangiennes $\hat{M}_t(\mathbb{R}^n \times 0), t \in [0, T + 1]$, relatif à $\mathbb{R}^n \times 0$.

Comme précédemment il existe aussi une formule faisant intervenir l'indice de formes quadratiques. Plus précisément, la contribution d'une intersection $L_{t_0} \in \Sigma(V)$ est calculée comme suit : si K est un supplémentaire lagrangien de L_{t_0} , pour tout $v \in L_{t_0} \cap V$ il existe $w(t) \in K$ tel que $v + w(t) \in L_t$ (pour t assez proche de t_0). Alors $Q_{t_0}(v) := \partial_t \omega(v, w(t))|_{t=t_0}$ est une forme quadratique sur $L_{t_0} \cap V$, non-dégénérée quitte à perturber le chemin. L'indice de Maslov s'écrit

$$\mu(L_t, L) = \frac{1}{2} \text{sign } Q_0 + \sum_{t \in (0,1)} \text{sign } Q_t + \frac{1}{2} \text{sign } Q_1$$

Notons que si $L_t = Gr(A_t) = \{(x, A_t x), x \in \mathbb{R}^n\}$, où A_t est un chemin de matrices symétriques (de taille n), et $V = \mathbb{R}^n \times 0$, alors $Q_t : (x, 0) \mapsto \langle x, \dot{A}_t(x) \rangle$

Proposition 3.1.4. [RS93, Thm 2.3] *L'indice de Maslov vérifie les propriétés suivantes :*

- Pour tout $M \text{ sin } Sp(2n)$, $\mu(L_t, V) = \mu(ML_t, MV)$
- $\mu(L_t, V) = \mu(L_{[0,t]}, V) + \mu(L_{[t,T]}, V)$
- $\mu(L_t \oplus L'_t, V \oplus V') = \mu(L_t, V) + \mu(L'_t, V')$
- Si $L_t = Gr(A_t)$ et $V = \mathbb{R}^n \times 0$, alors $\mu(L_t, V) = \frac{1}{2} \text{sign } A_0 - \frac{1}{2} \text{sign } A_T$

Si L_t est un lacet de lagrangiennes son indice de Maslov est défini en ouvrant le lacet en un point arbitraire, ce qui est indépendant de V . On obtient ainsi un isomorphisme $\mu : H_1(\mathcal{L}_n) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Finalement, un lacet dans une legendrienne Λ induit un lacet dans \mathcal{L}_n en fixant une trivialisatation de ξ le long de ce chemin (la classe de Chern étant nulle, cette trivialisatation est bien définie). Ceci définit une application

$$\mu_\Lambda : H_1(\Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$$

et la classe de Maslov de Λ est sa plus petite valeur strictement positive.

Remarque 3.1.5. Dans le cas général, une trivialisatation est induite par un élément de $H_2(V, \Lambda)$, est la classe de Maslov est le générateur de l'image de l'application $\mu_\Lambda : H_2(V, \Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Degré Un élément $q \in \mathcal{R}$ sera de degré nul. Pour définir le degré d'une corde, il faut faire certains choix. L'idée est la suivante : on choisit une trivialisatation de ξ le long d'une corde c , c'est-à-dire un morphisme de fibrés symplectiques

$$(\xi, d\lambda|_\xi)|_c \longrightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{st}) \times I$$

ce qui induit un chemin de lagrangiennes en considérant l'image de $T\Lambda$ par la linéarisation du flot du champ de Reeb. On complète alors ce chemin en un lacet, et le degré de la corde en sera l'indice de Maslov.

Cependant il existe \mathbb{Z} trivialisations possibles pour chaque corde, car $\pi_1(Sp(2n)) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour faire un choix cohérent, on fixe :

- Des cercles γ_i engendrant $H_1(V)$ (on rappelle que $H_1(V)$ est supposé libre), ainsi qu'une trivialisation de ξ sur ceux-ci
- un point $p_i \in \Lambda_i$ pour chaque composante de Λ
- pour tout $i \neq 1$, un chemin γ_{1i} allant de p_1 à p_i , ainsi qu'un chemin de lagrangiennes de ξ reliant $T_{p_1}\Lambda$ à $T_{p_i}\Lambda$
- pour chaque extrémité de corde $x \in \Lambda_i$, un chemin γ_x contenu dans Λ_i reliant x à p_i .

On peut maintenant définir le degré d'une corde de Reeb c reliant $x \in \Lambda_i$ à $y \in \Lambda_j$ (voir la figure 3.1 pour une illustration) :

- Si $i = j$, on considère le lacet $\gamma_c = \gamma_y \cdot \gamma_x^{-1} \cdot c$. Étant cobordant à un certain $\sum n_i h_i$, $\xi|_{\gamma_c}$ hérite d'une trivialisation notée \mathcal{T} : les n_i sont bien définis car $H_1(V)$ est libre, et la trivialisation découle de la trivialité d'un fibré complexe sur une surface à bord. On obtient alors un chemin de lagrangiennes $L_t \subset \xi|_{\gamma_c}$ en prenant l'espace tangent à Λ en γ_x et γ_y , et en poussant $T_x\Lambda$ par la linéarisation du flot de Reeb sur c . Finalement on complète ce chemin en un lacet comme suit : la corde étant non-dégénéré, L_0 et L_1 s'intersectent transversalement, donc il existe une structure complexe I sur ξ_y telle que $d\lambda(\cdot, I\cdot) \geq 0$ et $I(L_1) = L_0$. Le lacet \tilde{L}_t est alors obtenu en concaténant L_t avec le chemin $(e^{tI}L_1)_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}$.

Le degré de la corde est défini à partir de l'indice de Maslov de ce chemin :

$$|c| = \mu(\tilde{L}_t, \mathcal{T}) - 1 = \mu(\mathcal{T}(\tilde{L}_t)) - 1$$

Notons qu'il est indépendant des choix car la classe de Chern $c_1(\xi)$ et la classe de Maslov $m(\Lambda)$ s'annulent (cf [EES07] et [EES05b]).

- Si $i \neq j$ on considère le chemin $\gamma_c = \gamma_y \cdot \gamma_{1j}^{-1} \cdot \gamma_{1i} \cdot \gamma_x^{-1} \cdot c$. Comme précédemment $\xi|_{\gamma_c}$ hérite d'une trivialisation, et on obtient un chemin de lagrangiennes en prenant l'espace tangent à Λ sur γ_x et γ_y , le chemin fixé précédemment sur γ_{1i} et γ_{1j} , et en poussant $T_x\Lambda$ par le flot de Reeb sur c . On complète en un lacet comme précédemment, pour définir

$$|c| = \mu(\gamma_c, \mathcal{T}) - 1$$

où là encore \mathcal{F} provient des trivialisations fixées. Ce degré dépend cette fois des

chemins γ_{1i} , cependant sa parité est bien définie. Cf [EENS13, remarque 2.4] (ici on choisit des triv sur les γ_{1i}) et [EES05b].

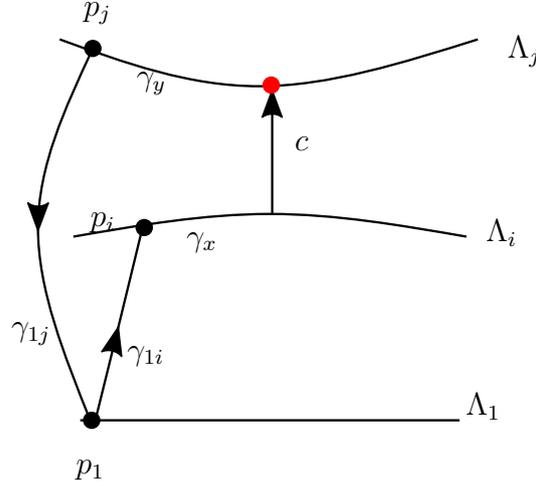


FIGURE 3.1: Chemins utilisés pour définir le degré, le point de départ étant rouge

Remarque 3.1.6. Si on choisit une autre trivialisation sur un chemin γ_i , cela correspond à composer par un élément de $k_i \in \pi_1(Sp(2n)) \simeq \mathbb{Z}$, et pour toute corde c telle que $\hat{c} \simeq \gamma_i$, les degrés sont reliés par $d'(c) = d(c) + 2k_i$. Si ces deux trivialisations sont induites par des surfaces S_i et $S - i'$, alors $d'(c) = d(c) + 2 \langle c_1(\xi), S'_i \# S_i \rangle$ (voir [Vit87]).

3.1.3 Espaces de module et compacité

Dans une symplectisation : pour toute corde c_0 et tout mot $w = q_0 c_1 q_1 \dots c_r q_r$, on définit $\mathcal{M}(c_0; w; \Lambda, V)$ comme l'ensemble des courbes holomorphes $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow \mathbb{R}_s \times V$ telles :

- $S = D^2 \setminus \{z_0, \dots, z_r\}$ les z_i sont des points cycliquement ordonnés du bord de D^2 ;
- $f(\partial D^2 \setminus \{z_i\}) \subset \Lambda$;
- F est positivement asymptote à c_0 en z_0 , négativement asymptote à c_i en z_i , et définie à \mathbb{R}_s -translation près;
- $\gamma_{c_i(1)} \cdot f(z_i, z_{i+1}) \cdot \gamma_{c_{i+1}(0)} = q_i \in H_1(\Lambda)$ pour $1 \leq i \leq r - 1$.

La *dimension virtuelle* de cet espace de module est donnée par $\dim \mathcal{M}(c_0; w; \Lambda) = |c_0| - \sum_{i \geq 1} |c_i| - 1$. On verra dans la section suivante qu'elle provient de l'indice de Fredholm d'un opérateur, elle est donc indépendante des choix nécessaires à la définition du degré.

Le résultat de compacité de Gromov permet de compactifier l'espace $\mathcal{M}(c_0; w; V, \Lambda, J)$ en y ajoutant les bâtiments holomorphes modélés selon des surfaces nodales obtenues

par brisures à partir de S . Pour notre construction il suffit de considérer des espaces de modules de dimension virtuelle un, qui peuvent uniquement se casser en bâtiments à deux étages. On définit donc, pour $c_0 \in \mathcal{C}_*(\Lambda)$ et $|w| = * - 2$, l'espace de module compactifié :

$$\overline{\mathcal{M}}(c_0; w) = \mathcal{M}(c_0; w) \cup \bigcup_{\substack{c \in \mathcal{C}_{*-1}(\Lambda) \\ w_1 w_- w_2 = w}} \mathcal{M}(c_0; w_1 c w_2) \times \mathcal{M}(c; w_-)$$

Remarque 3.1.7. Plus généralement, il faudrait poser $\overline{\mathcal{M}}(S) = \bigcup_{(S_i), \cup S_i = S} \prod_i \mathcal{M}(S_i)$ où S est une surface de Riemann décorée par les cordes et classes d'homologie. Notons que l'on pourrait encoder toutes ces informations dans un arbre décoré, similairement à [Par19], ce qui simplifierait les notations. Un morphisme d'arbres est alors la contraction d'une arête, correspondant géométriquement à un recollement de courbes.

Un bâtiment holomorphe est une collection de courbes holomorphes $F_i : S_i \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$, telles que les asymptotes négatives de F_i correspondent aux asymptotes positives de F_{i-1} , avec des décorations permettant de recoller les courbes (voir [BEHWZ03, §7.2] pour une définition plus précise). On dira qu'une suite de courbes holomorphes (S^i, F^i) converge vers un bâtiment holomorphe $[(S_1, F_1), \dots, (S_N, F_N)]$ si

- S^i converge vers la surface nodale $\cup S_n$ au sens de la définition 2.1.2 ;
- les applications $f^i \circ \phi^i$, où $\phi^i : S^{D,r} \rightarrow S^{D_i, r_i}$ provient de la convergence précédente, convergent uniformément vers F ;
- pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on pose $C_n = S_n^{D,r} \setminus \cup \Gamma_j$. Il existe une suite de réels c_i^n telle que $a_i \circ \phi_i - a_n - c_i^n \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ dans $\mathcal{C}_{\text{loc}}^0(C_n)$.

Remarque 3.1.8. Notons que cette définition de convergence provient d'une métrique, voir [BEHWZ03, § B.2].

Théorème 3.1.9 ([Gro85], [BEHWZ03], [Abb14]). *Si les courbes considérées sont contenues dans un compact de V , alors les espaces de module compactifiés sont compacts.*

Dans un cobordisme : la définition est la même, mais on ne quotiente plus par translation au but. Plus précisément si $L \subset (W, \beta)$ est un cobordisme lagrangien exact (plongé) de $\Lambda^+ \subset (V^+, \lambda^+)$ vers $\Lambda^- \subset (V^-, \lambda^-)$, alors pour $c \in \mathcal{C}(\Lambda^+)$ et w un mot de cordes de Λ^- , on pose $\hat{\mathcal{M}}(c, w; W, L, J)$ l'ensemble des applications J -holomorphes à valeurs dans la complétion, à bord dans (la complétion de) L et d'asymptotes prescrites par c et w . La dimension virtuelle est alors donnée par

$$\text{vdim } \hat{\mathcal{M}}(c, w; L, W, J) = |c| - |w|$$

Similairement au cas précédent, cet espace se compactifie en rajoutant les bâtiments holomorphes $k_+ | 1 | k_-$, modélés sur des courbes nodales étagées ayant un étage dans W .

3.1.4 Transversalité et structures presque complexe régulières

Ne prouvant pas de nouveau résultat concernant les problèmes analytiques amenés par les courbes holomorphes, on se contente de rappeler les grandes lignes du problème. Pour plus de détails voir [EES07] [EES05b] [Bou06] [Wen10a] [Riz16] [Wen16] et [MS12, Chapitre 3] .

Fixons une structure presque complexe J . La stratégie usuelle pour montrer que les espaces de courbes considérés sont des variétés consiste à voir ces ensembles comme les zéros d'une section

$$\bar{\partial}F = (dF)_{j,J}^{0,1} = dF + J \circ dF \circ j,$$

dont la linéarisation est un opérateur de Fredholm L . Si il est surjectif pour toutes les courbes d'indice 0 et 1, les espaces de modules sont des variétés et la J est dite *régulière*. Pour prouver qu'une telle structure presque complexe existe, on peut parfois étudier la section $(F, J) \mapsto (dF)_{j,J}^{0,1}$. Sa linéarisation est encore est opérateur de Fredholm, et, s'il est surjectif, alors la différentielle de la projection $\pi : (F, J) \in \mathcal{M}(c, w) \mapsto J \in \mathcal{J}^{\text{adm}}$ est aussi Fredholm, d'indice $|c| - |w|$.

On applique ensuite le théorème de Sard-Smale, qui implique que l'ensemble des valeurs régulières de Π est un ensemble de Baire ¹. On dénote par $\mathcal{J}_{\text{reg}}(c, w)$ l'ensemble des valeurs régulières, et l'ensemble des structures régulières est alors

$$\mathcal{J}_{\text{reg}} = \cap \mathcal{J}_{\text{reg}}(c, w)$$

qui reste un ensemble de Baire. Alors pour tout $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}$, les espaces de modules sont des variétés dont la dimension est donnée par la dimension virtuelle.

Remarque 3.1.10. Lorsque l'on considère des courbes à bord dans la symplectisation d'une legendrienne Λ , on peut perturber cette dernière dans un voisinage des cordes pour obtenir une paire régulière $(\tilde{\Lambda}, J)$, voir [EES07].

Cette approche, efficace dans le contexte symplectique, pose cependant problème lorsqu'il s'agit de définir l'homologie de contact :

- tout d'abord on est a priori amené à considérer des courbes multiples (dites aussi factorisables), pour lesquelles L n'est pas surjectif, voir [Wen10a];
- pour l'homologie legendrienne, et si la forme de contact est hypertendue, de telles courbes ne sont pas considérées. Dans une symplectisation, la transversalité sera alors réalisée par une structure presque complexe générique (voir [Bou06] pour le cas sans bord, et [EES07] pour la situation legendrienne), et donc la différentielle

1. c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts denses

sera bien définie. Cependant les problèmes surviennent lorsqu'il faut définir une application provenant d'une homotopie de cobordismes, et dans le cas général la situation semble sans espoir.

Ces difficultés techniques sont récurrentes en géométrie de contact, et admettent plusieurs solutions, que l'on présente succinctement :

- Une première méthode consiste à se contenter de structures presque complexes telles que les espaces de modules soient des polyfolds. Cette théorie, initiée par Hofer, Wysocki et Zehnder, est cependant encore en développement.
- Une autre approche, présentée dans [Par19], consiste à définir une classe fondamentale virtuelle via une construction faisceautique, permettant d'associer un nombre à un espace stratifié.

3.1.5 Structure spin

On suit ici la présentation de [EES05b] : pour définir une orientation cohérente des espaces de courbes il faut se fixer une structure spin, que l'on définit de la manière suivante : on fixe une métrique sur M^n , et on considère $Fr(M)$ le fibré de base M dont la fibre en x est l'ensemble des bases orthogonales de $T_x M$ (la fibre est donc $SO(n)$). Une structure spin est alors un relevé équivariant de $Fr(M)$ en un fibré sur M de fibre $Spin(n)$, groupe obtenu par revêtement double (non trivial) de $SO(n)$ (la suite exacte de groupes de Lie $1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(n) \rightarrow SO(n) \rightarrow 1$ définit en fait ce groupe).

Remarque 3.1.11. [EES05b, §3.4.2] Une structure spin sur M peut aussi être vue comme une trivialisatation de $TM \oplus \mathbb{R}^2$ sur le 1-squelette s'étendant sur le 2-squelette. Notons que cette extension est unique (à homotopie près), et qu'elle peut être automatiquement étendue au 3-squelette (mais cette extension n'est plus unique).

Lemme 3.1.12. [EES05b, §4.4.1] *L'ensemble des structures spin sur M est un espace affine isomorphe à $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$*

L'élément associé à une structure spin \mathfrak{s} , relativement à \mathfrak{s}_0 , sera noté $\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 \in H_1(M, \mathbb{Z}_2)$. Une legendrienne $\Lambda \subset (V, \xi)$ sera dite relativement spin si Λ peut être munie d'une structure spin.

Théorème 3.1.13. [EES05b, Théorème 4.29] *Une structure relativement spin permet d'orienter les espaces de modules de courbes asymptotes à des cordes. Soit \mathfrak{s} et \mathfrak{s}_0 deux structures spin sur Λ , et c une corde de Λ telle que $\partial_{\mathfrak{s}_0} c = \sum \alpha(w)w$, où $w = q_0 c_1 q_1 \dots c_r q_r$*

est un mot de l'algèbre, $\alpha(w) \in \mathbb{Z}$, $q_i \in H_1(\Lambda)$ et c_i est une corde. Alors, si $\delta = \mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 \in H^1(\Lambda)$, on a

$$\partial_{\mathfrak{s}} c = \sum \left(\prod_i \sigma(\langle \delta, q_i \rangle) \right) \alpha(w) w$$

où $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pm 1$ est le morphisme de groupe non trivial.

Par conséquent l'application $q \in H_1(\Lambda) \mapsto \sigma(\langle \delta, q \rangle) q$ induit un isomorphisme de dgas entre $\mathcal{LC}(\Lambda, \mathfrak{s})$ et $\mathcal{LC}(\Lambda, \mathfrak{s}_0)$ (notons que dans [EES05b] les classes d'homologie commutent avec les cordes).

Remarque 3.1.14. [EES05b, §4.4.3] L'homologie d'une legendrienne, à coefficients dans $H_1(\Lambda)$, est indépendante de la structure spin : deux structures spin distinctes donnent des dga "tame isomorphes". Ce n'est plus le cas pour l'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} .

3.1.6 Différentielle

La différentielle d'une corde est obtenue en comptant les disques holomorphes positivement asymptotes à cette corde : pour tout $c \in \mathcal{C}(\Lambda)$,

$$\partial c = \sum_w \# \mathcal{M}(c; w; V, \Lambda^*; J, \mathfrak{s}) w,$$

étendue par la règle de Leibniz $\partial(ab) = \partial a \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot \partial b$.

Il s'agit bien d'une différentielle car le lemme 2.5.7 montre que les courbes holomorphes restent dans \mathring{V} , compact. Le résultat de compacité de Gromov reste donc valable, et donc $\partial^2 = 0$.

Cette algèbre différentielle graduée (ce terme sera abrégé en dga par la suite) sera notée $\mathcal{LC}(\Lambda, V; J, \mathfrak{s}, \mathcal{T})$, où J est la structure presque complexe ajustée, \mathfrak{s} est la structure spin et \mathcal{T} est l'ensemble des choix nécessaires à la définition d'un degré (chemins "fermant" et trivialisations).

3.1.7 Invariance

Dans cette section on montre que l'homologie legendrienne saturée ne dépend pas d'un certain nombre de choix.

Théorème 3.1.15. *Soit $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \xi)$ une variété de contact saturée et Λ une legendrienne cylindrique totalement non-dégénérée. Alors*

- *$LH(\Lambda; V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda, J)$ ne dépend pas du choix de forme de contact adaptée ni de la structure complexe ajustée.*

- Soit $(V, \mathcal{N}_0^u(\Gamma), \xi^u)$ un chemin de variétés de contact positivement suturées, et Λ^u un chemin de legendriennes cylindriques ∂ -non-dégénérées tel que Λ^0 et Λ^1 sont totalement non-dégénérées. On a alors un quasi-isomorphisme $\mathcal{LC}(\Lambda_0, \lambda_0) \rightarrow \mathcal{LC}_s(\Lambda_1, \lambda_1)$, et cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin (ξ^u, Λ^u) .

Remarque 3.1.16. En particulier le choix de coordonnées sur $\mathcal{N}_0(\Gamma)$ est sans importance. En effet l'espace des choix est contractible, et tout chemin de fonctions coordonnées induit une isotopie de formes de contact adaptées.

Démonstration. On adapte ici la preuve de [CGHH11]. Il suffit de prouver la seconde partie du théorème, qui implique le premier point.

On choisit ainsi une famille de structures presque-complexes J^u adaptées aux (V^*, λ^u) (cet espace est contractible).

Première étape : On commence par supposer λ^u, J^u et Λ^u indépendants de u sur la région $\{\tau \geq 0\}$. On considère le cobordisme

$$(\mathbb{R}_s \times V^*, \omega = d(e^s \lambda^{\phi(s)}), \tilde{J} = J^{\phi(s)})$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction lisse décroissante telle que $\phi(s) = 1$ pour $s \leq -N$ et $\phi(s) = 0$ pour $s \geq N$, avec N grand. Si $|\phi'|$ est assez petit, w est symplectique et \tilde{J} lui est adaptée. De plus il existe un cobordisme lagrangien exact $V \subset (\mathbb{R} \times V^*)$ interpolant entre les deux legendriennes, et coïncidant avec $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}^+ \times \partial\Lambda$ sur la région $\{\tau > 0\}$.

On définit alors une application

$$\Phi : \mathcal{LC}_s(\Lambda^0, \lambda^0, J^0) \rightarrow \mathcal{LC}_s(\Lambda^1, \lambda^1, J^1)$$

en comptant les courbes pseudo-holomorphes d'indice 0 (avec une asymptote positive), à bord dans L , dont les projections à M^* restent dans un compact.

En effet, le lemme 2.5.7 limite les courbes horizontalement : \tilde{J} étant s -invariant sur le bord, les courbes restent dans la zone $\{\tau \leq 0\}$. De plus si on a une suite de courbes F_n (à asymptotes et topologie fixées) ainsi que $z_n \in \dot{\Sigma}$ tels que $t \circ F_n(z_n) \rightarrow \infty$, alors similairement au lemme 2.5.7 il devrait exister une courbe holomorphe d'énergie finie à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times R_{\pm}$, ce qui est impossible car il n'y a pas d'orbite de Reeb dans cette région.

L'argument usuel, basé sur la compactification de ces courbes, implique que Φ est un morphisme de dga et qu'il existe un inverse homotopique. En effet les espaces de modules du cobordisme se cassent en bâtiments holomorphes, et en considérant les espaces 1-

dimensionnels on obtient $\Phi\partial_0 - \partial_1\Phi = 0$. Similairement, le cobordisme de λ^1 vers λ^0 donne un morphisme $\Psi : \mathcal{L}C_s(\Lambda^1, \lambda^1, J^1) \rightarrow \mathcal{L}C_s(\Lambda^0, \lambda^0, J^0)$.

De plus la composition $\Psi \circ \Phi$ peut être obtenue en comptant les courbes dans le cobordisme obtenu en recollant les deux cobordismes précédent. Ce nouveau cobordisme étant homotope au cobordisme trivial, l'étude des espaces de courbes de dimension un montre qu'il existe une application H telle que $\Psi \circ \Phi - Id = H\partial_0 - \partial_1H$.

Deuxième étape : On étudie maintenant le cas où J^u , λ^u et Λ^u varient sur $\{\tau \geq 0\}$. On va construire une variété suturée intermédiaire $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \tilde{\lambda}, \tilde{J})$ permettant de comparer les deux dga. D'après le lemme 2.5.6, il existe une forme de Liouville $\tilde{\beta}_\Gamma$, \tilde{J}_Γ une structure presque complexe sur $\mathbb{R}_\tau \times \Gamma$, et $L \subset \mathbb{R}^+ \times \Gamma$ une lagrangienne exacte interpolant entre $(\partial\Lambda^0, \lambda_\Gamma^0, J_\Gamma^0)$ et $(\partial\Lambda^1, C\lambda_\Gamma^1, J_\Gamma^1)$, et telles que les courbes \tilde{J}_Γ -holomorphes à bord dans L n'aient pas de τ -maximum.

On définit alors $(\tilde{\lambda}, \tilde{J})$ par

- $\tilde{\lambda} = \lambda^0$ sur $\{\tau < 0\}$
- $\tilde{\lambda} = dt + \tilde{\beta}_\Gamma$ pour $\tau > 0$
- $\tilde{J} = \tilde{J}_\Gamma$ sur $\ker \tilde{\beta}_\Gamma$
- $\tilde{J}(\partial_a) = \partial_t$
- $\tilde{J}(\partial_\tau) = \tilde{J}_\Gamma\partial_\tau + \mu\partial t \in \ker \tilde{\lambda}$, où $\mu = -\tilde{\lambda}_\Gamma(\tilde{J}_\Gamma\partial_\tau)$.

La variété $(\tilde{V} = \{\tau < S, |t| \leq 1\}, \tilde{\lambda})$ est alors suturée, \tilde{J} est une structure ajustée et $\tilde{\Lambda}$, relevé legendrien de L , est une legendrienne cylindrique totalement non-dégénérée.

De plus \tilde{J} relève la structure \tilde{J}_Γ :

$$d\Pi \circ \tilde{J} = \tilde{J}_\Gamma \circ d\Pi,$$

et donc toute courbe \tilde{J} -holomorphe se projette en une courbe \tilde{J}_Γ -holomorphe. En particulier, d'après le lemme 2.5.6 elle restent dans la région $\{\tau < 0\}$. On a alors

$$\mathcal{L}C(\Lambda^0; V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda^0, J^0) = \mathcal{L}C(\tilde{\Lambda}; \tilde{V}, \tilde{\lambda}, \tilde{J})$$

comme complexes, car les générateurs et les différentielles sont identiques.

De plus il existe un chemin entre $\tilde{\Lambda} \subset (\tilde{V}, \tilde{\lambda}, \tilde{J})$ et $\Lambda^1 \subset (\tilde{V}, \lambda^1, J^1)$ qui est fixe au bord, et l'étape précédente montre que l'on a un quasi-isomorphisme entre les dga associées.

Troisième étape : Il faut maintenant montrer que deux chemins homotopes fournissent le même isomorphisme (en homologie). On commence par le cas usuel, où V est compact sans bord : on peut recoller les cobordismes induits pour obtenir un cobordisme de $\Lambda^0 \subset (V, \lambda^0, J^0)$ vers lui-même. Les deux chemins étant homotopes, ce cobordisme est

homotope au cobordisme trivial. On compte alors les courbes holomorphes dans ce cobordisme pour obtenir un morphisme $F : \mathcal{LC}(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma) \rightarrow \mathcal{LC}(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma)$ homotope à l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $H : \mathcal{LC}_*(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma) \rightarrow \mathcal{LC}_{*+1}(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma)$ tel que $F - Id = H\partial + \partial H$, est donc $H(F) = Id$. De plus F peut aussi être obtenu comme composition de F_0 et G_1 , où $F_0 : \mathcal{LC}(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma) \rightarrow \mathcal{LC}(\Lambda_1; \lambda_1, J_1)$ est induit par la première isotopie et $G_1 : \mathcal{LC}(\Lambda_1; \lambda_1, J_1) \rightarrow \mathcal{LC}(\Lambda_0; \lambda_0, J_\Gamma)$ par l'opposé de la deuxième. On obtient donc $Id = H(F) = H(G_1) \circ H(F_0)$ et en composant par $H(F_1)$ on a bien $H(F_1) = H(F_1)H(G_1)H(F_0) = H(F_0)$ (la composition $F_1 \circ G_1$ pouvant être obtenue en recollant un cobordisme et son opposé, cette application est homotope à l'identité comme vu à la première étape).

L'argument est le même pour des variétés suturees, il faut simplement s'assurer que les courbes restent dans un compact. On commence par fixer des formes de contact ajustées à ξ^0 et ξ^1 , ainsi que des structures presque complexes ajustées. Comme précédemment, on peut construire une variété suturee $(\tilde{V}, \tilde{\lambda}, \tilde{J})$ ainsi qu'une legendrienne $\tilde{\Lambda}$ telle que

- $\mathcal{LC}(\tilde{\Lambda}; \tilde{V}, \tilde{l}, \tilde{J}) = \mathcal{LC}(\Lambda^0; V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda^0, J^0)$ comme dga.
- Il existe une isotopie de $\tilde{\Lambda} \subset (\tilde{V}, \tilde{l}, \tilde{J})$ vers $\Lambda^1 \subset (V, \lambda^1, J^1)$ fixe au bord.

On peut donc appliquer les arguments du cas compact à ce contexte : les cobordismes permettant de définir les morphismes sont constants au bord, et l'homotopie vers le cobordisme trivial peut être réalisée sans changer le bord. Toutes les courbes considérées vérifient donc un principe du τ -maximum. □

Remarque 3.1.17. Notons que les applications de cobordismes ne sont pas définies pour un chemin de structures complexes quelconque.

Via la construction 1.4.3, cette homologie devient un invariant d'une variété à bord convexe (lisse).

Corollaire 3.1.18. *Soit (V, ξ) une variété de contact à bord convexe, X un champ de contact transverse au bord, et Λ une legendrienne transverse au bord telle que $\partial\Lambda \subset \Gamma_X$. Alors l'homologie de la legendrienne obtenue par la transformation convexe-suturee ne dépend que de $(V, \xi, \Gamma_X, \Lambda)$, et sera notée $\mathcal{LH}(V, \xi, \Gamma, \Lambda)$.*

De plus si $\Lambda \subset (V, \xi)$ est une legendrienne sans bord, Alors l'homologie de la legendrienne obtenue par la transformation convexe-suturee ne dépend plus de la suture.

Démonstration. L'ensemble des sutures possibles est connexe, car en interpolant entre deux champs de contact on obtient des champ de contact restant transverses au bord. De

plus l'opération convexe-saturée est continue pour un chemin de structures de contact adaptées au bord. \square

Corollaire 3.1.19. *Soit ξ^u un chemin de structures de contacts sur V telles que ∂V est convexe pour tout u , X^u un chemin de champs de contact transverses au bord, et Λ^u un chemin de legendriennes transverses au bord et telles que $\partial\Lambda^u \subset \Gamma_{X^u}$. Alors les homologies $\mathcal{LH}(V, \xi^0, \Gamma_{X^0}, \Lambda^0)$ et $\mathcal{LH}(V, \xi^1, \Gamma_{X^1}, \Lambda^1)$ sont quasi-isomorphes, et cette application ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin $(\xi^u, \Gamma_{X^u}, \Lambda^u)$.*

En particulier, comme remarqué dans [CGHH11], si $\Lambda, \Lambda_0 \subset V$ sont des legendriennes disjointes, l'homologie $LH(\Lambda, V \setminus \mathcal{N}_{\text{st}}(\Lambda_0))$ est un invariant de la paire, où \mathcal{N}_{st} est un voisinage standard à bord convexe disjoint de Λ .

Finalement, notons que si X, X' sont deux champs de contact transverses au bord, et tels que les sutures associées contiennent $\partial\Lambda$, alors les homologies associées sont isomorphes. Cependant, comme vu dans le lemme 1.4.1, il est a priori nécessaire de modifier la legendrienne pour qu'un tel champ de contact existe.

Question 3.1.20. L'homologie est-elle indépendante de cette modification ?

3.1.8 Inclusion de variété saturée

On reprend ici un résultat de [CGHH11], adapté au cas legendrien. Les idées sont les mêmes, cependant la présentation est différente car la situation considérée ici est plus simple.

Théorème 3.1.21. *Soit (V, ξ) une variété saturée contenant V_0 , de codimension 0, et Λ une legendrienne cylindrique relativement non dégénérée telles que*

- (V_0, ξ) est une variété saturée
- $\Lambda_0 = \Lambda \cap V_0 \subset (V_0, \lambda)$ est une legendrienne cylindrique relativement non dégénérée

On a alors un morphisme d'algèbres entre les homologies saturees

$$f_{V_0, V} : \mathcal{LH}(\Lambda_0; V_0, \xi|_{V_0}) \rightarrow \mathcal{LH}(\Lambda; V, \xi)$$

Démonstration. L'idée est similaire à celle de [CGHH11] : on va construire une suite de formes de contact qui "étire" un voisinage du bord de V_0 .

Pour tout $A \geq 0$ on note V_0^A la complétion partielle de V_0 :

$$V_0^A = V_0 \cup [1, 1+A]_{t_0} \times R_+(V_0) \cup [-A-1, -1]_{t_0} \times R_-(V_0) \cup [0, A]_{\tau_0} \times [-A-1, A+1]_{t_0} \times \Gamma_0$$

Quitte à faire une isotopie on peut supposer que $V_0^{2\delta} \subset V$, et sur $V_0^{2\delta} \setminus V_0$ une forme de contact ajustée s'écrit

$$\lambda = dt + \beta_{\pm} \text{ avec } \beta_{\pm} = dt + e^{\tau} \lambda_{\Gamma} \text{ sur } \{0 \leq \tau \leq 2\delta\}$$

On construit maintenant un chemin de formes de contact λ^A telles que

- $\lambda^A = \lambda$ sur $V \setminus V_0^{2\delta}$
- $(V_0^{\delta}, \lambda^A)$ est exactement contactomorphe à $(V_0^A, \delta \lambda_0^*)$, où $\delta < e^{-A}$

À cet effet on fixe des fonctions strictement croissantes $\eta_A : [0, \delta] \rightarrow [0, \delta + A]$ telles que $\eta(x) = x$ sur un voisinage de 0 et $\eta(x) = x + A$ sur un voisinage de δ . On considère alors des difféomorphismes $\phi_A : V_0^{\delta} \rightarrow \{\tau_0 \leq 1 + A, |t_0| \leq (1 + \delta)e^A\} \subset V_0^*$ valant l'identité sur un voisinage de V_0 , et donnés sur un voisinage du bord par

- Si $\delta - \varepsilon \leq \tau \leq \delta$, alors pour tout $x \in \Gamma$, $\phi_A(\tau, t, x) = (A + \tau, e^A t, x)$
- Si $1 + \delta - \varepsilon \leq |t| \leq 1 + \delta$ et $\tau \leq 0$, alors pour tout $z \in R_{\pm}(V_0)$, $\phi_A(t, z) = (e^A t, z)$
- Si $1 + \delta - \varepsilon \leq |t| \leq 1 + \delta$ et $\tau \geq 0$, alors pour tout $x \in \Gamma_0$, $\phi_A(\tau, t, x) = (\eta_A(\tau), e^A t, x)$

Alors sur un voisinage de ∂V_0^{δ} , on a

$$\begin{aligned} \phi_A^*(\lambda_0^*) &= e^A dt + e^{A+\tau} \lambda_{\Gamma} && \text{sur } \{\delta - \varepsilon \leq \tau \leq \delta, -1 - \delta \leq t \leq 1 + \delta\} \\ &e^A dt + \beta_{\pm} && \text{sur } \{\tau \leq 0, 1 + \delta - \varepsilon \leq |t| \leq 1 + \delta\} \\ &e^A dt + e^{\eta_A - A(\tau)} \lambda_{\Gamma} && \text{sur } \{0 \leq \tau \leq \delta, 1 + \delta - \varepsilon \leq |t| \leq 1 + \delta\}. \end{aligned}$$

On définit alors une forme de contact λ^A sur V par :

- $\lambda^A = \lambda$ sur $V \setminus V_0^{2\delta}$
- $\lambda^A = e^{-A} \phi_A^*(\lambda_0^*)$ sur V_0^{δ} (en particulier $\lambda^A = e^{-A} \lambda$ sur V_0)
- $\lambda^A = dt + g(\tau, t) \lambda_{\Gamma_0}$ sur $\{\delta - \varepsilon \leq \tau \leq 2\delta, |t| \leq 1 + 2\delta\}$
- $\lambda^A = dt + \bar{g}(t) \beta_{\pm}$ sur $\{\tau \leq \delta - \varepsilon, 1 + \delta \leq |t| \leq 1 + 2\delta\}$

où g, \bar{g} sont des fonctions lisses positives telles que :

- $\bar{g}(t) = g(-\varepsilon, t)$, et les fonctions se recollent de façon lisse.
- $\bar{g}(1 + \delta) = e^{-A}$ et $\bar{g}(1 + 2\delta) = 1$
- $g(\tau, t) = e^{\tau}$ si $\tau \geq \delta - \varepsilon$
- $g(\tau, 1 + \delta) = e^{\eta(\tau) - A}$ et $g(\tau, 1 + 2\delta) = e^{\tau}$
- Condition de contact : $\partial_{\tau} g > 0$

Voir la figure 3.2 pour une illustration.

La legendrienne étant supposée cylindrique dans la région $V_0^{\delta} \setminus V_0$, elle reste legendrienne pour chacune de ces formes. De plus on peut choisir ces fonctions telles que si $A' > A$ alors $g_{A'} \leq g_A$, ce qui permet de définir un cobordisme de (V, λ^A) vers $(V, \lambda^{A'})$ (voir la section 1.1.13).

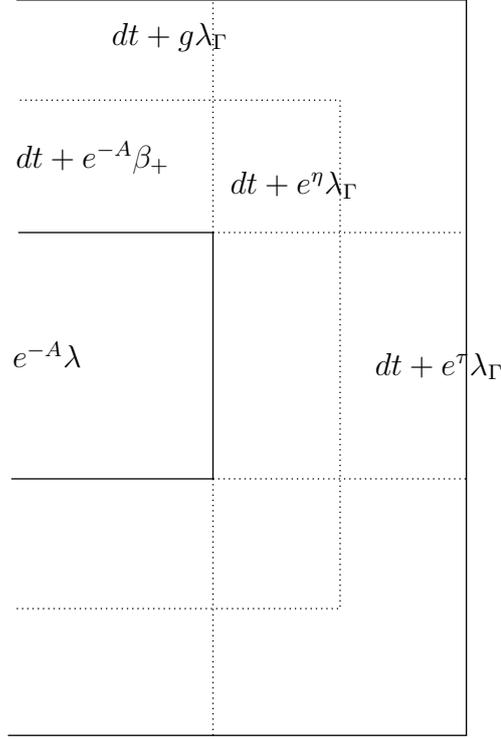


FIGURE 3.2: Forme de contact λ_A

D'après les lemmes 2.4.3 et 2.5.10, pour tout $T > 0$ il existe $A(T) \geq 0$ tel que toute courbe pseudo-holomorphe sortant de (V_0^A, λ_0^*) est d'énergie supérieure à T , et donc toute courbe sortant de (V_0^δ, λ^A) est d'énergie supérieure à $e^{-A(T)}T$. On obtient donc, pour tout $A \geq A(T)$, une inclusion d'algèbres

$$\Phi_{A,T} : \mathcal{L}C^T(\Lambda_0, V_0, \lambda_0) = \mathcal{L}C^{e^{-A}T}(\Lambda_0, V_0, e^{-A}\lambda_0) \hookrightarrow \mathcal{L}C(\Lambda, V, \lambda^A)$$

De plus pour $T' \geq T$ et $A' \geq A \geq A(T')$ le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}H^T(V_0, \lambda_0) & \xrightarrow{\Phi_A} & \mathcal{L}H(V, \lambda^A) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \psi \\ \mathcal{L}H^{T'}(V_0, \lambda_0) & \xrightarrow{\Phi_{A'}} & \mathcal{L}H(V, \lambda^{A'}) \end{array}$$

où ψ est issue du cobordisme de λ^A à $\lambda^{A'}$. En effet les courbes comptées par le cobordisme et d'asymptote positive incluse dans V_0 restent dans V_0 , ce qui rend l'application triviale, car le cobordisme ψ est trivial.

On obtient ainsi des applications $\mathcal{L}H^T(V_0, \xi_0) \rightarrow \mathcal{L}H(V, \xi)$ compatibles, induisant un morphisme $\mathcal{L}H(V_0, \xi_0) = \text{colim } \mathcal{L}H^T(V_0, \xi_0) \rightarrow \mathcal{L}H(V, \xi)$. \square

Notons qu'il existe une application semblable lorsque les variétés sont à bord convexe

(lisse), similairement au résultat 3.1.19.

De plus comme dans [CGHH11], si V est obtenue par recollement des variétés suturées (V_1, λ_1) et (V_2, λ_2) (voir [CGHH11, §4.3] pour plus de détails), contenant chacune une legendrienne suturée Λ_i de bord disjoint du lieu de recollement, alors l'inclusion $V_1 \sqcup V_2 \subset V$ induit un morphisme

$$\mathcal{LH}(\Lambda_1, V_1) \otimes \mathcal{LH}(\Lambda_2, V_2) = \mathcal{LH}(\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2, V_1 \sqcup V_2) \rightarrow \mathcal{LH}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, V).$$

Notons que les legendriennes peuvent être suturée si leur bord est loin du lieu de recollement.

Question 3.1.22. Qu'arrive-t-il au bord d'une legendrienne suturée lorsqu'il est inclus dans une partie de la suture qui disparaît lors du recollement ?

3.2 Version enroulée

3.2.1 Homologie relative

On fixe une paire de legendriennes (Λ_1, Λ_2) . On définit alors $LC(\Lambda_1, \Lambda_2)$ comme le $LC(\Lambda_1) - LC(\Lambda_2)$ -bimodule engendré par les cordes de Λ_1 à Λ_2 . On peut y penser comme un quotient de $LC(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ par les mots ayant plus d'une corde mixte : la différentielle augmentant le nombre de cordes mixtes, l'idéal engendré est un sous-complexe (on peut aussi se limiter aux cordes contractibles).

Si les Λ_i sont relativement hypertendues, ou plus généralement si on fixe des augmentations ε_i sur $LC(\Lambda_i)$, on peut simplement considérer un \mathbb{Q} -bimodule en augmentant les cordes non mixtes. Ces considérations, de nature algébrique, s'étendent au cas des legendriennes cylindriques dans des variété suturées.

3.2.2 Homologie suturée enroulée

Soit $\Lambda \subset (V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \lambda)$ une legendrienne cylindrique centrée totalement non dégénérée, J une structure presque complexe ajustée et $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction induisant un enroulement positif et total. On décompose le bord de la legendrienne en $\partial\Lambda = \partial_1\Lambda \sqcup \partial_2\Lambda$, et on dénote μ l'isotopie positive constante sur $\partial_2\Lambda$ et induite par H sur $\partial_1\Lambda$. Comme vu dans la section 1.5 on obtient une legendrienne complétée non compacte Λ^μ .

On définit $\mathcal{WLC}(\Lambda, \partial_1\Lambda, \partial_2\Lambda; V, \lambda; J, H, \mathfrak{s}, \mathcal{T})$ comme l'algèbre différentielle graduée engendrée par les cordes de Λ^μ , où la différentielle compte les courbes holomorphes rigides dans la symplectisation. D'après le lemme 2.5.12, les courbes restent dans un

compact (à asymptotes fixées) et donc on a bien $\partial^2 = 0$. Si $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, et $\partial_i \Lambda = \partial \Lambda_i$, le $\mathcal{LC}(\Lambda_1) - \mathcal{LC}(\Lambda_2)$ -bimodule engendré par les cordes mixtes sera noté $\mathcal{WLC}(\Lambda_1, \Lambda_2)$.

Remarque 3.2.1. On pourrait considérer des legendriennes non centrées. Dans ce cas il faut s'assurer que la complétion fait bien passer $\partial_1 \Lambda$ en-dessous de $\partial_2 \Lambda$, ce qui sera toujours possible si l'on enroule suffisamment loin, voir la remarque 1.3.8.

Remarque 3.2.2. On pourrait aussi enrouler $\partial_1 \Lambda$ négativement, ou bien enrouler les deux bord positivement, en poussant ∂_0 plus rapidement que ∂_1 .

Comme colimite Similairement à [AS10] (voir aussi [Aur14]), cette homologie peut aussi être contruite via une colimite sur les enroulements partiels. Pour un hamiltonien positif et total H_∞ , on choisit une suite d'hamiltoniens $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que

- H_k induit un enroulement positif (ie $H_k'' \geq 0$);
- $H_k = H_\infty$ sur $[0, k]$;
- $H_k'' = 0$ pour $\tau \geq k + 1$.

On obtient ainsi des legendriennes cylindriques Λ^k , et d'après le lemme 2.5.12 on a des inclusions de complexe $\mathcal{LC}(\Lambda^k) \subset \mathcal{LC}(\Lambda^{k+1})$.

Alors $\mathcal{WLC}(\Lambda^\infty, V, \lambda; J, \mathfrak{s}, \mathcal{T}) \simeq \operatorname{colim}_{k \rightarrow \infty} \mathcal{LC}(\Lambda^k; V, \lambda; J, \mathfrak{s}, \mathcal{T})$ Notons que cette colimite est bien définie car les morphismes utilisés sont des inclusions de dga.

Remarques 3.2.3. On présente quelques idées géométriquement similaires mais dont l'implémentation est plus difficile :

- On peut perturber $\partial_2 \Lambda$ pour la rendre cylindrique et $-\varepsilon$ -centrée. On munit maintenant la variété suturée de la forme de contact $\lambda = f dt + e^\tau \lambda_\Gamma$ où f est une fonction croissante telle que $e^{-\tau} f' \rightarrow \infty$. Le champ de Reeb est alors dirigé par $\partial_t - e^{-\tau} f' R_\Gamma$, ce qui fait apparaître des cordes en bijection avec $\mathcal{C}(\partial_1 \Lambda \rightarrow \partial_2 \Lambda; \lambda_\Gamma)$. Il s'agit maintenant de prouver que les différentielles correspondent, cependant la projection d'une courbe holomorphe à $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ n'est plus une courbe J_Γ -holomorphe.
- On pourrait garder des legendriennes cylindriques et la forme de contact habituelle, mais considérer des courbes plus générales, dont l'énergie est infinie mais d'énergie "réduite" finie, typiquement obtenue en intégrant $\phi(\tau) d\tau \wedge \lambda_\Gamma$ sur $V^* \setminus \mathring{V}$, où ϕ est une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ . Cette fois, les cordes de la reliure apparaissent à l'infini dans la direction τ , et la bonne façon de compactifier les espaces de module est moins claire. Notons que cette méthode fait aussi apparaître les orbites de Reeb de (Γ, λ_Γ) , ce qui n'était pas le cas auparavant. Cette façon de faire devrait nous

permettre de retrouver l'homologie complète de $\partial\Lambda$ comme quotient par les cordes intérieures.

- Alternativement on pourrait compter des courbes vérifiant une équation de type Floer. En effet d'après [Aur14, Remarque 1.10], les bandes de Floer entre deux lagrangiennes, asymptotes à des trajectoires 1-périodiques d'un hamiltonien H , correspondent aux courbes pseudo-holomorphe entre L et $\varphi_H^{-1}(L')$, asymptotes à des points d'intersection. Dans ce contexte hamiltonien le principe du maximum est prouvé par [AS10] (voir aussi [Abo10]).

Théorème 3.2.4. *Soit $(V, \mathcal{N}_0(\Gamma), \xi)$ une variété suturée, λ une forme de contact adaptée, J une structure presque complexe ajustée, Λ une legendrienne cylindrique centrée totalement non-dégénérée, telle que $\partial\Lambda = \partial_1\Lambda \cup \partial_2\Lambda$, et H un hamiltonien positif et total. Alors l'homologie enroulée $\mathcal{WLC}H(\Lambda, \partial_1\Lambda, \partial_2\Lambda; \lambda, J, H)$ est indépendant des choix de λ , J et H .*

De plus un chemin de variétés suturées induit un quasi-isomorphisme qui ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin (ξ^u, Λ^u)

Ici on ne demande que Λ^u soit relativement non dégénérée durant l'isotopie : les projections de $\partial_i\Lambda^u$ à Γ peuvent se croiser tant que $\partial_1\Lambda$ passe sous $\partial_2\Lambda$.

Démonstration. Si l'isotopie laisse le bord fixe, elle induit un cobordisme lagrangien exact dans $\mathbb{R} \times V^*$ (voir le paragraphe 1.1.4), qui définit un quasi-isomorphisme entre les complexes.

Si maintenant le bord est modifié, on obtient une isotopie du bord $\partial_0\Lambda^s \subset (\Gamma, \lambda_\Gamma)$, ce qui permet de construire un cobordisme lagrangien exact $L_\Gamma \subset [0, 1] \times \Gamma$ interpolant entre $\partial_0\Lambda^0$ et $\partial_0\Lambda^1$. Après relèvement, on obtient une legendrienne $\hat{\Lambda}_0 \subset \{\tau \leq 1\}$, de bord $\partial\Lambda^1$, que l'on enroule par un hamiltonien H . Par conséquent

$$\mathcal{WLC}(\Lambda^1) \simeq \mathcal{WLC}(\hat{\Lambda}_0).$$

Pour montrer que ce complexe est quasi-isomorphe à celui provenant de Λ^0 , on construit une suite de legendriennes $\hat{\Lambda}_T$, fixes à l'infini (dans la direction τ), et telles que $\hat{\Lambda}_T$ coïncide avec $(\Lambda^0)^H$ sur $\{\tau \leq T\}$, et avec $(\Lambda^1)^H$ sur $\{\tau \geq T + 1\}$. Ceci permet d'absorber l'isotopie du bord, finie, dans l'enroulement. On pose ainsi

- sur $[0, T] \times \Gamma$, $L_T = \bigcup_{\tau \in [0, T]} \{\tau\} \times \phi_{R_\Gamma}^{H'(\tau)}(\partial_0\Lambda^0)$
- sur $[T, T + 1] \times \Gamma$, $L_T = \phi^{H'(T)}(L_\Gamma)$
- sur $[T + 1, \infty)$, on enroule par un hamiltonien dépendant de τ .

On obtient ainsi une lagrangienne exacte, qui se relève en une legendrienne $\Lambda_T \subset V^*$. De plus, $(\lambda_\Gamma)|_L = df$, et f est une fonction de τ sur $\mathbb{R}^+ \setminus [T, T+1]$. Alors pour tout $A > 0$, il existe $T > 0$ tel que toutes les cordes de Λ_T d'action majorée par A sont dans la zone $\{\tau \leq T\}$. Or toute courbe positivement asymptote à une telle corde reste dans cette zone, d'après le lemme 2.5.6 (qui reste valable pour une lagrangienne immergée). On obtient donc une égalité de complexes

$$\mathcal{WLC}^A(\Lambda^0) = \mathcal{WLC}^A(\Lambda_T).$$

De plus, Λ_T coïncidant avec $(\Lambda^1)^H$ à l'infini, on a

$$\mathcal{WLC}(\Lambda_T) \simeq \mathcal{WLC}(\Lambda^1).$$

On obtient le quasi-isomorphisme désiré en prenant la colimite des applications

$$\mathcal{WLC}^A(\Lambda^0) = \mathcal{WLC}^A(\mathcal{L}_T) \subset \mathcal{WLC}(\Lambda_T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{WLC}(\Lambda^1)$$

lorsque $A \rightarrow \infty$. □

Remarque 3.2.5 (Indépendance de la partition du bord). En considérant le module engendré par les cordes de $\Lambda \subset (V, \lambda)$ (toujours supposée hypertendue), et les cordes de $\partial\Lambda \subset (\Gamma, \lambda_\Gamma)$ reliant deux composantes connexes, on obtient un complexe $\mathcal{WLC}(\Lambda, V, \lambda)$. On peut le voir comme un quotient de la somme directe $\bigoplus_{\partial_0\Lambda \in \pi_0(\partial\Lambda)} \mathcal{WLC}(\Lambda; \partial_0\Lambda, \partial\Lambda \setminus \partial_0\Lambda)$, et son homologie ne dépend que de (V, ξ, Λ) .

3.2.3 Suites exactes

Similairement à [Ekh11], les homologies cylindriques et enroulées s'inscrivent dans une suite exacte qui devrait faire intervenir l'homologie du bord. Si $\mathring{\Lambda}$ est relativement hypertendue, on définit

$$\mathcal{LC}^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \lambda, J, H) = \mathcal{WLC}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \lambda, J, H) / \mathcal{I}(\mathring{\Lambda}),$$

où $\mathcal{I}(\mathring{\Lambda})$ désigne l'idéal engendré par les cordes de Reeb intérieures, qui est un sous-complexe d'après le lemme 2.5.7. Comme algèbre, $\mathcal{LC}^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda)$ est engendré par les cordes du bord $\mathcal{C}(\partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \Gamma)$.

Si la legendrienne enroulée est relativement hypertendue (notons qu'il faut s'assurer que les cordes du bord ne sont pas contractibles dans V), on peut considérer le module engendré par les cordes de Reeb du bord, que l'on note LC^{ext} . On obtient alors un triangle exact

$$\longrightarrow LH(\Lambda; V, \xi) \longrightarrow \mathcal{WLH}(\Lambda; \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; V, \xi) \longrightarrow LH^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \Gamma, \xi_\Gamma) \xrightarrow{[-1]}$$

où la dernière application provient d'une partie de la différentielle de $\mathcal{W}LH(\Lambda; \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; V, \xi)$. Dans le chapitre suivant, on montrera dans un cas particulier que :

- ce complexe ne dépend que du bord
- le triangle est invariant lors d'un chemin de legendriennes suturées fixe au bord

Conjectures : On formule maintenant certaines conjectures concernant cette homologie dans le cas général, à comparer au théorèmes de [Ekh11].

1. Une legendrienne suturée relativement hypertendue induit une augmentation ε sur $\mathcal{L}C(\partial\Lambda)$. De plus, une isotopie legendrienne fixe au bord fournit une augmentation équivalente.
2. Le quotient précédent s'exprime à partir de l'homologie du bord :

$$LC^{\text{ext}}(\Lambda, \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \lambda, J, H) \simeq LC_\varepsilon(\partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \Gamma, \lambda_\Gamma, J_\Gamma)[1]$$

où ce complexe est à coefficients dans $H_1(\Lambda)$, induit par l'inclusion $\partial\Lambda \hookrightarrow \Lambda$, et l'augmentation ε est utilisée pour augmenter les cordes contractibles de $\partial\Lambda$.

3. Finalement le triangle est invariant au sens suivant : si Λ^u est un chemin de legendriennes suturées tel que
 - pour tout u , Λ^u est une legendrienne plongée cylindrique et centrée (en particulier les bord de la legendrienne de se croisent pas dans Γ).
 - le bord détermine un lacet legendrien : $\partial_0\Lambda^0 = \partial_0\Lambda^1$ et $\partial_1\Lambda^0 = \partial_1\Lambda^1$.
 - pour $i \in \{0, 1\}$, les extrémités du chemin, Λ_i^0 et Λ_i^1 , sont hypertendues.

Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} LH(\Lambda^0; V, \xi) & \longrightarrow & \mathcal{W}LH(\Lambda^0; \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; V, \xi) & \xrightarrow{[-1]} & LH_\varepsilon(\partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \Gamma, \xi_\Gamma) & \xrightarrow{\delta^0} \\ F_* \downarrow \wr & & F_*^W \downarrow \wr & & F_*^\partial \downarrow \wr & \\ LH(\Lambda^1; V, \xi) & \longrightarrow & \mathcal{W}LH(\Lambda^1; \partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; V, \xi) & \xrightarrow{[-1]} & LH_\varepsilon(\partial_0\Lambda, \partial_1\Lambda; \Gamma, \xi_\Gamma) & \xrightarrow{\delta^1} \end{array}$$

où les applications F et F^W sont proviennent des théorèmes 3.1.15 et 3.2.4, et F^∂ est induit par un cobordisme lagrangien dans $(\mathbb{R} \times \Gamma, e^s \lambda_\Gamma)$, déterminé par le chemin $\partial\Lambda^u \subset (\Gamma, \lambda_\Gamma)$. En particulier si le bord est fixe lors du chemin, $F_*^\partial = \text{Id}$.

Rappelons tout d'abord qu'un remplissage lagrangien exact L dans un domaine de Liouville (W, β) définit une augmentation sur $\mathcal{L}C(\partial L, \partial W)$ en comptant des demi-plans holomorphes à bord dans la complétion de cette lagrangienne, voir [Ekh11] et [BC14] pour plus de détails. On verra ainsi dans la section 4.1 que les deux premiers points de cette conjecture sont vrais dans une variété suturée $[-1, 1] \times W$, car on peut projeter les courbes au domaine de Liouville.

Pour définir une augmentation dans le contexte suturé, l'idée serait de considérer plusieurs

copies de la legendrienne, poussées par le champ de Reeb à l'intérieur et par R_Γ sur un voisinage du bord, et perturbées par des fonctions de Morse $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_\partial : \partial\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, puis complétées en enroulant. Si Λ^+ est une telle copie, alors les cordes mixtes sont

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Lambda, \Lambda^+) &\simeq \mathcal{C}(\Lambda) \cup \text{Crit}(f) & \mathcal{C}_\Gamma(\partial\Lambda, \partial\Lambda^+) &\simeq \mathcal{C}(\partial\Lambda) \cup \text{Crit}(f_\partial) \\ \mathcal{C}(\Lambda^+, \Lambda) &\simeq \mathcal{C}(\Lambda) & \mathcal{C}_\Gamma(\partial\Lambda^+, \partial\Lambda) &\simeq \mathcal{C}_\Gamma(\partial\Lambda) \end{aligned}$$

L'augmentation compterait alors des courbes holomorphes positivement asymptotes à une corde extérieure (appartenant à $\mathcal{C}(\partial\Lambda) \subset \mathcal{C}_\Gamma(\partial\Lambda, \partial\Lambda^+)$), et négativement asymptotes à des cordes intérieures correspondant à des minimums de fonctions de Morse.

De tels résultats nécessitent une analyse des dégénérescences des courbes holomorphes pour une suite d'hamiltoniens H_n étirant le bord (ie telle que $H_n = 0$ sur $[0, n]$), et ralentissant l'enroulement (ie tel que $H_n'' = \frac{1}{n}$ à l'infini). Lorsque V est l'épaissement d'un domaine de Liouville, on peut projeter ces courbes, et cette étude est réalisée dans [EES09, Section 6] (voir aussi [EES05a, Section 2.7], et [BO09a, Prop 5] [BO09b, Prop 3.7]). Une autre solution serait d'utiliser une définition alternative de l'homologie suturée enroulée, comptant des courbes holomorphes dans \mathring{V} , et satisfaisant l'équation de Floer sur la complétion $V^* \setminus \mathring{V}$.

Remarque 3.2.6 (Homologie complète du bord). Il peut sembler plus naturel de faire apparaître l'homologie legendrienne du bord comme sous-dga. Pour ce faire, on pourrait faire apparaître, similairement au paragraphe 1.4.2, deux familles de Γ -orbites en position d'élimination. L'homologie enroulée peut alors être définie comme le quotient de $\mathcal{LC}(\Lambda)$ par une de ces familles, et la famille restante devrait être une sous-algèbre isomorphe à $\mathcal{LC}(\partial\Lambda)$ (possiblement à l'aide d'une colimite).

3.3 Variété à sutures circulaires

Dans cette section on définit l'homologie de contact (non-legendrienne) d'une variété à suture circulaire, ce qui généralise l'invariant construit dans [CGH10] à la grande dimension.

Définition 3.3.1. Une variété de contact à *suture circulaire* est un triplet $(V, \mathcal{N}_0(\partial V), \xi)$, où V est une variété compacte, de bord $S^1 \times \Gamma$, $\mathcal{N}_0(\partial V)$ est un voisinage² du bord de la forme

$$\mathcal{N}_0(\partial V) \stackrel{\psi}{\simeq} S_\theta^1 \times (-\varepsilon, 0]_\tau \times \Gamma,$$

2. Ici V est bien orientée comme le produit.

et ξ est une structure de contact associée à une forme de contact s'écrivant

$$\lambda = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma$$

sur $\mathcal{N}_0(\partial V)$, où λ_Γ est une forme de contact sur Γ , et (f, g) sont des fonctions lisses positives et telles que :

- La condition de contact est vérifiée : $A = fg' - f'g > 0$;
- $f' \leq 0$, avec égalité uniquement en 0, et $g' > 0$;
- $p(\tau) = -\frac{f'}{g'} \geq 0$ est strictement décroissante.

Remarque 3.3.2. Dans [CGH10], un tel bord est dit positif.

On vérifie que la forme est de contact sur \mathcal{N}_0 : pour toute 1-forme α on a $\alpha \wedge \alpha = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda \wedge (d\lambda)^n &= (fd\theta + g\lambda_\Gamma) \wedge (d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma) + gd\lambda_\Gamma)^n \\ &= (fd\theta + g\lambda_\Gamma) \wedge d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma) \wedge (gd\lambda_\Gamma)^{n-1} \\ &= g^{n-1}(fg' - f'g)d\theta \wedge d\tau \wedge \lambda_\Gamma \wedge (d\lambda_\Gamma)^{n-1} > 0 \end{aligned}$$

Le champ de Reeb est donné sur \mathcal{N}_0 par

$$\begin{aligned} R &= A^{-1}(g'\partial_\theta - f'R_\Gamma) \\ &= \bar{A}(\partial_\theta + p(\tau)R_\Gamma) \quad \text{où } \bar{A} = g'/A > 0. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.3. On adapte ici la construction de [CGH10] à la grande dimension. Si $\Gamma \subset (V, \xi)$ est une sous-variété de contact de codimension 2 (par exemple la suture d'une hypersurface convexe)³, elle admet un voisinage contactomorphe à

$$(\mathbb{D}_{(r,\theta)}^2 \times \Gamma, \ker r^2d\theta + \lambda_\Gamma),$$

où λ_Γ est une forme de contact sur Γ . On perturbe la structure de contact en

$$\lambda = f(r)d\theta + g(r)\lambda_\Gamma,$$

où $f, g : [0, 3\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions lisses, positives, et telles que :

- $f(0) = f^{(2k+1)}(0) = g^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- pour tout $r > 0$, $f'g - fg' > 0$ (cette condition de contact est l'opposée de la précédente pour des raisons d'orientation);
- la limite $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f'g - fg'}{r} > 0$ existe et est strictement positive;
- $g' \leq 0$, avec égalité uniquement en 0;
- f' est strictement positive sur $(0, \varepsilon) \cup (2\varepsilon, 3\varepsilon)$ et strictement négative sur $(\varepsilon, 2\varepsilon)$;
- $p = -\frac{f'}{g'}$ est strictement croissante sur un voisinage de 2ε .

3. Dans [CGH10], Γ est la suture d'une décomposition en livre ouvert.

Voir la figure 3.3 pour le graphe typique de ces fonctions. Alors λ est une forme adaptée à la variété à suture circulaire $\{r \geq 2\varepsilon\}$.

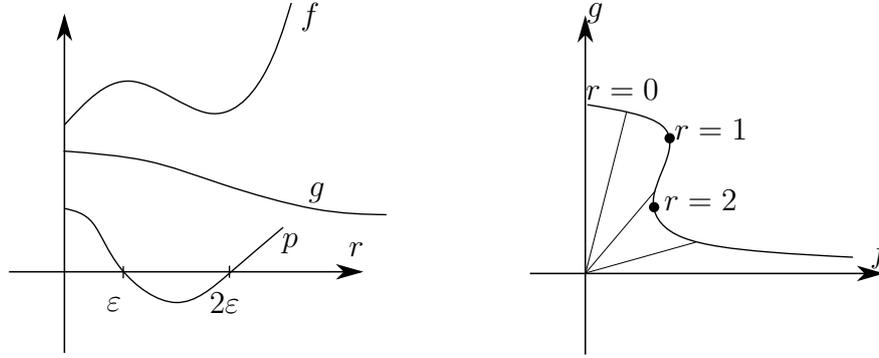


FIGURE 3.3: Forme de contact sur un voisinage de Γ

3.3.1 Complétion

On complète la variété en recollant $S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \Gamma$ et en prolongeant la forme de contact par $\lambda = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma$, où f et g sont telles que

- $A = fg' - f'g > 0$;
- $\tau f' \geq 0$, avec égalité uniquement en 0, et $g' > 0$;
- $p = -\frac{f'}{g'}$ est strictement décroissante, nulle en 0, tendant vers $-\delta$ en $+\infty$.

Voir la figure 3.4 pour le graphe typique de ces fonctions. La variété de contact obtenue sera notée (V^*, λ^*) .

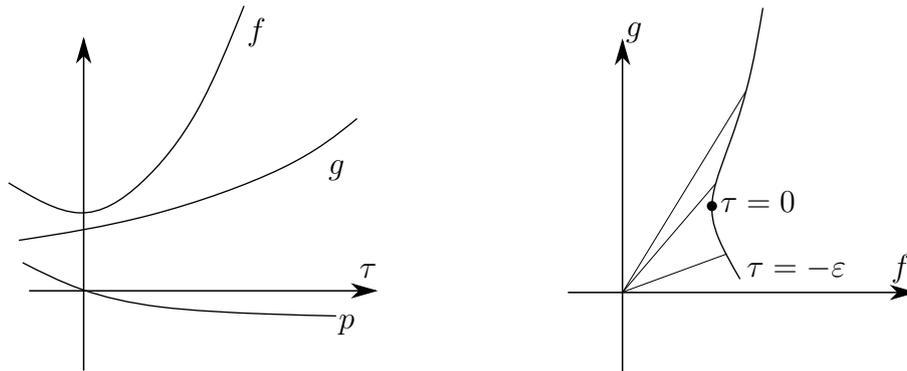


FIGURE 3.4: Forme de contact sur la complétion d'une variété à suture circulaire

Remarque 3.3.4 (Condition de contact et courbes paramétrées). On peut observer la condition de contact sur la courbe paramétrée $C(\tau) = (f(\tau), g(\tau)) \in \mathbb{R}^2$: la forme associée est de contact si et seulement si la paire de vecteurs $(C(\tau), \dot{C}(\tau))$ forme une base directe.

Comme précédemment, le champ de Reeb est alors donné sur $\{\tau > -\varepsilon\}$ par

$$R = \bar{A}(\partial_\theta + p(\tau)R_\Gamma) \quad \text{où } \bar{A} = g'/A > 0.$$

Les tranches $S^1 \times \{\tau\} \times \Gamma$ sont donc feuilletées par le champ de Reeb, et, pour toute orbite $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma, \lambda_\Gamma)$ et tout entier $k \geq \frac{A\lambda_\Gamma(\gamma)}{\delta}$, on a une S^1 -famille d'orbites dans la tranche $\{p(\tau) = -\frac{A\lambda_\Gamma(\gamma)}{k}\}$. De plus une telle orbite est d'action

$$f(\tau)k - g(\tau)\mathcal{A}_\Gamma(\gamma) = k\left(f - \frac{f'g}{g'}\right) = k\frac{A(\tau)}{g'(\tau)}$$

3.3.2 Structure presque complexe

Soit $(V, \mathcal{N}, \lambda)$ une variété de contact à suture positivement circulaire, autrement dit $\lambda = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma$ sur \mathcal{N} . Une structure presque complexe J sur $\mathbb{R} \times V$ sera dite ajustée si :

- elle est admissible (voir la section 2.2) ;
- elle est adaptée à la symplectisation ;
- sur $\mathcal{N}(V_0)$, J préserve $\xi_\Gamma = \ker \lambda_\Gamma$ et $J|_{\xi_\Gamma} = J_\Gamma$, où J_Γ ne dépend que de la coordonnée dans Γ ;
- sur $\mathcal{N}(V_0)$, $J = J_\Gamma$ sur ξ_Γ et $J(\partial_\tau) = \mu(\tau)(fR_\Gamma - g\partial_\theta) \in \xi$ où $\mu > 0$.

Notons que cette notion s'étend à une structure complexe définie sur la complétion d'une variété à suture circulaire.

Lemme 3.3.5. *Si J est adaptée à une variété à suture circulaire, alors elle est adaptée à la structure de contact et $d\tau \circ J = -B(f'd\theta + g'\lambda_\Gamma)$, où $B = \frac{1}{\mu A} > 0$.*

Démonstration. Cette structure presque complexe est admissible :

$$\begin{aligned} d\lambda \circ (\text{Id} \otimes J) &= d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma)(\text{Id} \otimes J) + gd\lambda_\Gamma(d\pi_\Gamma \otimes J_\Gamma d\pi_\Gamma) \\ &\geq -A^{-1}(d\tau \wedge d\tau \circ J)(\text{Id} \otimes J) \geq 0 \end{aligned}$$

car $-d\tau \wedge d\tau \circ J \circ (\text{Id} \times J) \geq 0$. Les autres hypothèses sont trivialement vérifiées.

On vérifie maintenant l'égalité entre les deux 1-formes. Elles s'annulent sur $\partial_s, \partial_\tau$ et ξ_Γ , et on les calcule en ∂_θ et R :

- $d\tau \circ J(R) = d\tau(\partial_s) = 0$, et $(f'd\theta + g'\lambda_\Gamma)(R) = 0$;
- $d\tau \circ J(fR_\Gamma - g\partial_\theta) = d\tau(-\mu^{-1}\partial_\tau) = -1/\mu$, et $(f'd\theta + g'\lambda_\Gamma)(gR_\Gamma - f\partial_\theta) = -A$.

□

3.3.3 Principe du maximum

Ici on ne considère pas de legendrienne, on n'a donc pas de problème de bord. Cependant contrairement aux complétions précédentes, la projection d'une courbe à $\mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma$ n'est pas holomorphe. Notons qu'en dimension trois, ce résultat est prouvé dans [CGH10] via la positivité des intersections de courbes holomorphes.

Lemme 3.3.6. *Une courbe holomorphe dans la symplectisation d'une complétion d'une variété à suture circulaire, sans perçure à l'extérieur de V , reste dans V . Si elle est plus asymptote à une orbite dans le bord de V , il s'agit d'une perçure négative.*

Démonstration.

Première étape : soit $U : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V^*, J)$ une courbe sortant de \mathring{V} , où J est ajustée à $\lambda^* = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma$. On la restreint à $U_0 : (S_0, j) \rightarrow (\mathbb{R}_s \times S_\theta^1 \times [\tau_0, \infty)_\tau \times \Gamma, J)$, sans perçure et telle que $\tau(\partial_0 S) = \tau_0 \geq 0$. On choisit $\phi : [\tau_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et nulle en 0, et on calcule à l'aide de la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{S_0} U^*(\phi(\tau)d\lambda) = \int_{U(S_0)} \phi d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma) + \phi g d\lambda_\Gamma \\ &= \int_{U(S_0)} \phi d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma) - (\phi g)' d\tau \wedge \lambda_\Gamma \quad \left(\int_{\partial S_0} = 0 \text{ car } \phi(\tau_0) = 0 \right) \\ &= \int_{U(S_0)} d\tau \wedge (\phi f' d\theta - \phi' g \lambda_\Gamma) \\ &= - \int_{U(S_0)} \frac{\phi' g}{g'} d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma) + \int_{U(S_0)} \left(\phi f' + \frac{\phi' g f'}{g'} \right) d\tau \wedge d\theta \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en faisant apparaître un terme en $d\tau \wedge d\theta$. La première intégrale est négative car $\frac{\phi' g}{g'} \geq 0$, et d'après le lemme 3.3.5 :

$$\begin{aligned} d\tau \wedge (f'd\theta + g'\lambda_\Gamma)(v, Jv) &= -(d\tau \wedge d\tau \circ J)(v, Jv) \\ &= d\tau(v)^2 + d\tau(Jv)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

La seconde intégrale est nulle : si $\psi(\tau)$ est une primitive de $\phi f' + \frac{\phi' g f'}{g'}$ nulle en τ_0 ,

$$\int_{S_0} U^* \left(\phi f' + \frac{\phi' g f'}{g'} \right) d\tau \wedge d\theta = \int_{\partial S_0} U^*(\psi(\tau)d\theta) = 0$$

Par conséquent la courbe est constante. Les courbes restent donc dans un compact, et le résultat de compacité de Gromov reste valable.

Deuxième étape : on montre maintenant par l'absurde que si U est asymptote à une orbite du bord $\{\tau = 0\}$, la perçure est négative. D'après le résultat précédent, la courbe est entièrement incluse dans V , on peut donc se restreindre à

$$U_0 : (S_0, j) \rightarrow \mathbb{R}_s \times S_\theta^1 \times [-\varepsilon, 0]_\tau \times \Gamma$$

et en se limitant à la composante connexe de la perçure on peut même supposer que $S_0 = \mathbb{R}^+ \times S^1$. On raisonne alors en deux temps :

(i) $U_0^* d\lambda_\Gamma = 0$. En effet la structure J étant adaptée, $U_0^* d\lambda_\Gamma \geq 0$. On prend maintenant $\phi : [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que $\phi(-\varepsilon) = 0$ et $\phi(0) = 1$, et on calcule :

$$0 \leq \int_{S_0} U_0^*(\phi(\tau)d\lambda_\Gamma) = \int_{\partial S_0} U_0^*(\phi(\tau)\lambda_\Gamma) - \int_{S_0} U_0^*(\phi' d\tau \wedge \lambda_\Gamma)$$

L'intégrale sur le bord s'annule car $\phi(-\varepsilon) = 0$ et la courbe est asymptote à une orbite du champ de Reeb, dirigée par ∂_θ en $\{\tau = 0\}$. En faisant apparaître un terme en $d\tau \wedge d\theta$ on obtient

$$\int_{S_0} U_0^*(\phi(\tau)d\lambda_\Gamma) = - \int_{U_0(S_0)} \frac{\phi'}{g'} d\tau \wedge (f' d\theta + g' \lambda_\Gamma) + \int_{U_0(S_0)} \frac{\phi' f'}{g'} d\tau \wedge d\theta \leq 0$$

En effet la première intégrale est positive : $g' \geq 0$ et $U_0^*(d\tau \wedge (f' d\theta + g' \lambda_\Gamma)) \geq 0$, car J est ajustée.

De plus la dernière intégrale est négative : si ψ est une primitive de $\frac{\phi' f'}{g'}$ nulle en $-\varepsilon$, elle est décroissante et négative en 0 car $\frac{\phi' f'}{g'} \leq 0$ sur $(-\varepsilon, 0]$, et donc

$$\int_{U_0(S_0)} \frac{\phi' f'}{g'} d\tau \wedge d\theta = \int_{U_0(S_0)} d\psi(\tau) d\theta = \psi(0) \int_{\partial_\infty S_0} U_0^* d\theta$$

où $\partial_\infty S_0 = \{\infty\} \times S^1$ est le bord de la compactification de S_0 , envoyé sur l'orbite de Reeb. La perçure étant supposée positive, l'orientation de $\partial_\infty S_0$ induite par celle S_0 est telle que $\int_{\partial_\infty S_0} U_0^* d\theta \geq 0$.

(ii) $U_0^* d\lambda = 0$. Là encore celle quantité est positive car J est ajustée. On applique à nouveau la formule de Stokes pour obtenir :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{S_0} U_0^* d\lambda = \int_{U_0(S_0)} d\tau \wedge (f' d\theta + g' \lambda_\Gamma) \\ &= \bar{f}(0) \int_{\partial_\infty S_0} U_0^* d\theta + \bar{g}(0) \int_{\partial_\infty S_0} U_0^* \lambda_\Gamma - \int_{U_0(S_0)} \bar{g}(\tau) d\lambda_\Gamma \end{aligned}$$

où \bar{f} est une primitive de f' nulle en $-\varepsilon$, donc négative en 0, et \bar{g} est une primitive de g , elle aussi nulle en $-\varepsilon$. La première intégrale est positive comme auparavant, et les deux autres sont nulles d'après l'étape précédente. □

Remarque 3.3.7. On a même montré qu'une courbe asymptote à des orbites incluses dans la région $\{\tau \leq \tau_0\}$ restent dans cette zone (pour $\tau_0 \geq 0$).

On aura aussi besoin d'une version de ce lemme pour une complétion provenant d'une

isotopie : soit (V, ξ) une variété à suture circulaire, telle que $\xi = \ker(f(\tau)d\theta + e^\tau \lambda_\Gamma)$. Si λ_Γ^u est une isotopie de formes de contact sur Γ , on dénote par β la forme de Liouville provenant du cobordisme associé, et on considère $\tilde{\lambda}$ forme de contact sur V^* donnée par

$$\tilde{\lambda} = f(\tau)d\theta + \beta$$

On fixe aussi une structure presque complexe J , adaptée au cobordisme, que l'on relève en \tilde{J} structure ajustée à $\tilde{\lambda}$. Comme précédemment, on obtient un principe du maximum dans la direction τ :

Lemme 3.3.8. *Si $U : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R}_s \times S_\theta^1 \times \mathbb{R}_\tau^+ \times \Gamma_x, \tilde{J})$ est une courbe holomorphe sans perçure et telle que $\tau \circ U(\partial S) = 0$, alors cette courbe est constante.*

Démonstration. On reprend le premier point de la preuve précédente en remplaçant la fonction $g(\tau)$ par $g(\tau, x)$, où $\partial_\tau g > 0$. On a toujours $d\tau \wedge (f'd\tau + \partial_t g \lambda_\Gamma) \circ (\text{Id} \otimes J) \geq 0$, et par un calcul similaire on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{S_0} U^*(\phi(\tau)d\lambda) \leq \int_{U(S_0)} (\phi f' + \frac{\phi' f' g}{\partial_\tau g}) d\tau \wedge d\theta \\ &\leq \int_{U(S_0)} \frac{\phi' f' g}{\partial_\tau g} d\tau \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Lorsque $\phi \rightarrow 1$, ce dernier terme converge vers $\int_{\partial S_0} \frac{f' g}{\partial_\tau g} d\theta = 0$. □

Par conséquent le second point de la propriété précédente reste valable : la courbe étant entièrement incluse dans V , une orbite du bord $\{\tau = 0\}$ est forcément une asymptote négative.

3.3.4 Homologie suturee

On généralise la définition de [CGH10] : si (V, λ) est une variété à suture circulaire, on définit $CC(V, \lambda)$ comme l'algèbre engendrée par les orbites de V (y compris celles du bord, mais pas celles incluses dans $\{\tau > 0\}$), munie d'une différentielle comptant les courbes holomorphes dans la symplectisation d'une complétion quelconque. Notons que la forme de contact est Morse-Bott, le bord étant feuilleté par des orbites de Reeb. Il s'agit bien d'un complexe car le lemme 3.3.3 montre que les courbes holomorphes comptées par la différentielle restent dans V .

Comme colimite On peut aussi obtenir cette homologie comme colimite sur des complétions faisant décroître la pente du champ de Reeb à l'infini : soit

$$\delta \in (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{\mathcal{A}_\Gamma(\gamma)}{k}, \gamma \in \mathcal{P}(\Gamma, \lambda_\Gamma), k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Quitte à multiplier λ par une constante et à reparamétriser la coordonnée τ , on peut supposer que $g = 1 + \tau$ sur $(-\varepsilon, 0]$, que l'on prolonge par la même formule. On choisit

$$\begin{aligned} f &= f(0) + \frac{1}{2}\delta\tau^2 && \text{si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ &f(0) + \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right) && \text{si } \tau \geq 1, \end{aligned}$$

que l'on lisse en 0 et 1 pour obtenir une fonction C^∞ . On utilise ces fonctions pour définir une forme λ_δ sur la complétion V^* : la pente $p = -f'$ est bien décroissante, et vaut $-\delta$ pour $\tau \geq 1$. De plus pour toute orbite $\gamma \in \mathcal{C}(\Gamma, \lambda_\Gamma)$, et entier $k \geq \frac{\mathcal{A}_\Gamma(\gamma)}{\delta}$, l'orbite de Reeb correspondante γ_k , dans la tranche $p(\tau) = -\frac{\mathcal{A}_\Gamma(\gamma)}{k}$, est d'action

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\gamma_k) &= k \frac{A(\tau)}{g'(\tau)} \geq \frac{\mathcal{A}_\Gamma(\gamma)}{\delta} (f - (1 + \tau)f') \\ &\geq \hbar_\Gamma \left(\frac{f(0)}{\delta} - \tau^2 - 2\tau \right) \geq \hbar_\Gamma \left(\frac{f(0)}{\delta} - 3 \right) && \text{si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ &\hbar_\Gamma \left(\frac{f(0)}{\delta} - 1 \right) && \text{si } \tau \geq 1. \end{aligned}$$

où $\hbar_\Gamma = \min\{\mathcal{A}_\Gamma(\gamma), \gamma \in \mathcal{P}(\Gamma, \lambda_\Gamma)\}$. On choisit donc $T_\delta < \hbar_\Gamma \left(\frac{f(0)}{\delta} - 3 \right)$, et on a

$$CC(V, \lambda) = \operatorname{colim}_{\delta \rightarrow 0} CC^{T_\delta}(V^*, \lambda_\delta),$$

où les morphismes sont des inclusions de complexes d'après le lemme 3.3.3.

Invariance

Théorème 3.3.9. *L'homologie $CH(V, \xi)$ est un invariant de (V, ξ) , indépendant de la forme de contact et de la structure presque complexe. Plus précisément, un chemin de variétés de contact circulairement suturées induit un quasi-isomorphisme ne dépendant que de la classe d'isotopie du chemin ξ^u .*

Démonstration. Si la forme de contact est fixe sur le voisinage du bord, on a un principe du τ -maximum en vertu du lemme 3.3.3. Le cobordisme fournit donc un quasi-isomorphisme.

Si λ_Γ varie, on a sur le voisinage du bord $\xi^u = \ker \lambda^u$, où $u \in [0, 1]$, avec

$$\lambda^u = f_u(\tau)d\theta + g_u(\tau)\lambda_\Gamma^u.$$

On définit alors une famille de formes de contact $\hat{\lambda}_T$ sur V^* , telles que :

- pour $\tau \leq 0$, $\hat{\lambda}_T = \lambda^0$;
- pour $0 \leq \tau \leq C$, $\hat{\lambda}_T = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma^{\frac{\tau}{C}}$;
- pour $\tau \geq C$, $\hat{\lambda}_T = f(\tau)d\theta + g(\tau)\lambda_\Gamma^1$, coïncidant avec une complétion de λ^1 ;
- les orbites de Reeb dans la région $\{\tau > 0\}$ sont d'action supérieure à $1/T$.

Ceci est possible pour C assez grand, et, en appliquant les lemmes 3.3.3 et 3.3.8, on a

$$CC^{\frac{1}{T}}(V, \lambda^0) = CC^{\frac{1}{T}}(V^*, \hat{\lambda}^T) \simeq CC^{\frac{1}{T}}(V^*, \lambda^1) \hookrightarrow CC(V, \lambda^1),$$

où ce dernier complexe est engendré par les orbites dans la zone $\{\tau \leq 0\}$. En prenant une colimite⁴, on obtient une application $CC(V, \lambda^0) \rightarrow CC(V, \lambda_1)$. Il s'agit d'un quasi-inverse car la même procédure appliquée au chemin opposé fournit un quasi-inverse. \square

Remarque 3.3.10. Similairement à [CGH10], on pourrait aussi définir une homologie en fixant la pente à l'infini, pour obtenir un complexe $CC(\Lambda, l, \delta)$.

Homologie réduite Le bord ∂V étant une Γ -famille d'orbites Morse-Bott, on a une inclusion de complexes naturelle due au lemme 3.3.3 :

$$C_*(\Gamma, f) \hookrightarrow CC_*(V, \lambda),$$

où $C_*(\Gamma, f)$ est le complexe de Morse associé à une fonction de Morse (auto-indicée) $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut alors définir une variante de cette homologie en ne considérant que les orbites du bord correspondant à un minimum, comme dans [CGHH11] (cette homologie y est dénotée CH^b). Soit $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse possédant un unique minimum ν_i par composante connexe Γ_i . En perturbant (formellement) on obtient une orbite simple $\gamma_q \subset \partial V$ par point critique q . L'idéal engendré par les orbites ne provenant pas d'un minimum

$$I = \mathcal{I}(\gamma_{q,k}, q \in \text{Crit}(f), q \neq \nu_i, k \in \mathbb{N}^*),$$

où $\gamma_{q,k}$ désigne l'orbite associée à q parcourue k fois, est un sous-complexe de $CC(V, \lambda)$ ce qui permet de définir

$$\begin{aligned} CC^b(V, \xi) &= CC(V, \xi) / \mathcal{I} \\ &= \langle \mathcal{C}(\mathring{V}, \lambda) \cup \{\gamma_{\nu_i, k}, k \in \mathbb{N}^*\} \rangle. \end{aligned}$$

Les inclusions $C_0(\Gamma) \hookrightarrow C_*(\Gamma, f) \hookrightarrow CC(V, \lambda)$ étant fonctorielles d'après la théorie de Morse-Bott [Bou02], cette homologie est un invariant de la variété suturee.

4. Bien que l'on considère des algèbres, la colimite existe car les morphismes sont des inclusions.

Cas particuliers

4.1 Épaississement d'un domaine de Liouville

Soit (W_0, β) un domaine de Liouville, $(V = [-1, 1]_t \times W_0, \lambda = dt + \beta)$ sa symplectisation et $\Lambda \subset V$ une legendrienne cylindrique totalement non-dégénérée. Alors $L_\Lambda = \pi(\Lambda)$ est une lagrangienne exacte immergée, et l'homologie legendrienne de Λ est une partie de l'homologie de Floer de L . De plus, le triangle obtenu dans la section précédente apparaît dans [Ekh11]. On présente d'abord grossièrement l'homologie de Floer lagrangienne (pour un hamiltonien nul). Introduite par Floer [Flo88], et développée dans [FOOO09] (voir aussi [Aur14] [AS10], et [AJ10] [AB18a] pour le cas immergé), il s'agit d'une version symplectique des idées de la théorie de Morse.

Soit L_0 et L_1 deux lagrangiennes exactes dans (W, β) , que l'on munit d'une structure presque complexe J . Le complexe de Floer est alors obtenu en considérant le \mathbb{Z}_2 -module $CF(L_0, L_1)$ engendré par les points d'intersection des deux lagrangiennes, et où la différentielle est

$$\forall c_+ \in L_0 \cap L_1, \partial c_+ = \sum_{c_- \in L_0 \cap L_1} N(c_+, c_-) c_-,$$

où $N(c_+, c_-)$ est le nombre de bandes holomorphes rigides

$$u : (\mathbb{R} \times I, j_{st}) \rightarrow (\hat{W}, J)$$

telles que :

- $u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \hat{L}_0$;
- $u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset \hat{L}_1$;
- $(du)_{j,J}^{0,1} = 0$;
- $u(x, \cdot) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} c_{\mp}$.

Ce complexe vient avec une action définie à partir de primitives f_i de $\beta|_{TL_i}$: pour tout point d'intersection $x \in L_0 \cap L_1$ on pose

$$\mathcal{A}(x) = f_1(x) - f_0(x)$$

La différentielle diminue cette quantité et donc \mathcal{A} induit une filtration. Notons qu'elle n'est définie qu'à translation près, un changement correspondant à une translation des relevés legendriens des lagrangiennes. Si de tels relevés sont choisis, on dénote $CF^-(L_0, L_1)$ le sous-complexe engendré par les générateurs d'actions négative, et on pose

$$CF^+(L_0, L_1) = CF(L_0, L_1)/CF^-(L_0, L_1).$$

Si L_0 est maintenant complétée par un hamiltonien H quadratique à l'infini, on obtient l'homologie lagrangienne enroulée $\mathcal{W}FH(L_0, L_1)$. On définit comme précédemment l'homologie lagrangienne enroulée positive $\mathcal{W}FH^+(L_0, L_1)$.

Théorème 4.1.1. [DR16] *Soit Λ_0, Λ_1 des legendriennes cylindriques centrées dans la contactisation d'un domaine de Liouville, relevant des lagrangiennes L_i plongées (ou au moins sans larmes). Alors*

$$\begin{aligned} LH(\Lambda_0, \Lambda_1) &= FH^+(L_0, L_1), & LH(\Lambda_1, \Lambda_0) &= FH^-(L_0, L_1), \\ \text{et } \mathcal{W}LH(\Lambda_0, \Lambda_1; \partial\Lambda_0, \partial\Lambda_1) &= \mathcal{W}FH^+(L_0, L_1) \end{aligned}$$

Démonstration. Le point essentiel est de montrer que, malgré les problèmes de transversalité, les différentielles comptent bien le même nombre de courbes. Le reste de l'argument est standard.

On commence par remarquer que les générateurs sont en bijection : une corde de $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ se projette sur un point d'intersection des lagrangiennes, et les actions coïncident au signe près. En effet les cordes de Λ_0 vers Λ_1 correspondent aux points d'intersection d'action positive, et celles de Λ_1 vers Λ_0 correspondent à celles d'action négative.

On fixe J_W structure presque complexe sur W ajustée à la symplectisation de ∂W sur un voisinage de ∂W , et on note J la structure ajustée relevant J_W sur la variété suturée :

$$\begin{aligned} \partial_s &\mapsto \partial_t \\ J : \partial_t &\mapsto -\partial_s \\ v \in TW &\mapsto J_W v - \beta(v)\partial_t + \beta(J_W v)\partial_s \end{aligned}$$

Alors J est une structure presque complexe ajustée à la variété suturée, et

$$J_W \circ d\pi = d\pi \circ J,$$

où π est la projection parallèlement à s et t . On vérifie que $J^2 = -\text{Id}$, le reste étant trivial. Pour tout $v \in TW$,

$$\begin{aligned} J^2v &= J(J_Wv) + \beta(v)\partial_s + \beta(J_Wv)\partial_t \\ &= -v - \beta(J_Wv)\partial_t - \beta(v)\partial_s + \beta(v)\partial_s + \beta(J_Wv)\partial_t = -v \end{aligned}$$

En particulier la projection sur W d'une courbe J -holomorphe est J_W -holomorphe. On note de plus que toute courbe J_W -holomorphe $f : (S, j) \rightarrow (W, J_W)$ se relève à $\mathbb{C} \times W$: si $F = (\bar{s}, \bar{t}, f)$ est le relevé, on calcule

$$\begin{aligned} \Delta\bar{t} &= \Delta(t \circ F) = F^*\Delta t = F^*d(dt \circ J) \\ &= F^*d((\lambda - \beta) \circ J) = F^*(d(ds - \beta \circ J)) \\ &= -F^*d(\beta \circ J). \end{aligned}$$

Lorsque (W, β, J_W) est pseudo-Stein \bar{t} doit donc être harmonique. Sa valeur étant déterminée au bord par le relevé de la lagrangienne, cette fonction doit satisfaire un problème de Dirichlet, qui admet une unique solution (voir [DR16] pour plus de détails, ainsi que [EES02] pour le cas $W = \mathbb{C}^n$).

Pour le cas général, on fait appel à la formule de Green-Riesz ([Dem97, §4.B.1]) sur un disque présentant k points marqués sur le bord : il existe des noyaux $P_k(z, z_0)$ et $G_k(z, z_0)$, tels que pour toute fonction lisse $f : (S, j) \rightarrow \mathbb{R}$ (à croissance exponentielle au voisinage des perçures), on ait

$$f(z_0) = \int_{\partial S} P(z, z_0) f d\theta + \int_S \Delta f \cdot G(z, z_0) dz \wedge d\bar{z}.$$

Ici \bar{t} est imposée par le relevé au bord et $\Delta\bar{t}$ est déterminé par f , car $\Delta\bar{t} = F^*(\beta \circ J) = f^*(\beta \circ J_W)$. Là encore, il existe une unique solution.

La coordonnée de symplectisation est alors uniquement définie, à translation près, car \bar{s} doit être une primitive de $F^*(\lambda \circ J)$. Or cette forme est fermée, donc exacte :

$$dF^*(\lambda \circ J) = \Delta\bar{t} + F^*d(\beta \circ J) = 0$$

Il faut maintenant s'assurer que les deux différentielles comptent bien le même nombre de courbes. Il s'agit d'un théorème de relèvement dû à [DR16, Thm 2.1]. □

De plus, le triangle obtenu dans la section 3.2.3 se réexprime en terme d'homologie de

Floer. D'après [Ekh11], l'inclusion $CF^+ \subset WCF^+$ induit un triangle exact

$$FH^+(L_0, L_1) \rightarrow WFH^+(L_0, L_1) \rightarrow LH_\varepsilon(\partial L_0, \partial L_1; \partial W).$$

Ce théorème est en fait énoncé pour l'inclusion $CF \subset WCF$, mais ici tous les générateurs du quotient WCF/CF sont d'action positive, car les deux legendriennes sont centrées.

Par conséquent, le second point de la conjecture 3.2.3 est valable dans ce cas particulier : on a bien

$$LH^{\text{ext}}(\Lambda_0, \Lambda_1) \simeq LH_\varepsilon(\partial\Lambda_0, \partial\Lambda_1)[1].$$

Complexe de Floer complet L'homologie legendrienne de $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ compte moins de courbes que l'homologie de Floer, car les bandes holomorphes allant d'un point d'action positive vers un point d'action négative ne se relèvent pas en une courbe comptée par la différentielle : on aurait une bande holomorphe allant d'une corde de $\mathcal{C}(\Lambda_0, \Lambda_1)$ vers une corde de $\mathcal{C}(\Lambda_1, \Lambda_0)$. On peut cependant retrouver le complexe de Floer en considérant un complexe de type Chtulu (voir [CRGG15]) et en comptant les courbes "en U" : les générateurs sont les cordes de $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$, et la différentielle est donnée par

- si $c \in C(\Lambda_0, \Lambda_1)$ alors ∂c compte les courbes $\mathcal{M}(c; d)$, où $d \in C(\Lambda_0, \Lambda_1)$, ainsi que les courbes $\mathcal{M}(c, d; \emptyset)$.
- si $c \in C(\Lambda_1, \Lambda_0)$, alors ∂c compte les courbes $\mathcal{M}(d; c)$, où $d \in C(\Lambda_1, \Lambda_0)$.

On obtient ainsi un complexe isomorphe à $CF(L_0, L_1)$, que l'on peut aussi voir comme le cône de l'application $LC_*(\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow LC^{*-1}(\Lambda_1, \Lambda_0)$ comptant les courbes en U dans la symplectisation de $\mathbb{R} \times W$.

Remarque 4.1.2. On a donc une inclusion de complexes $LC(\Lambda_0, \Lambda_1) = FC^-(L_0, L_1) \subset FC(L_0, L_1)$, induisant un triangle

$$LH(\Lambda_1, \Lambda_0) \longrightarrow FH(L_0, L_1) \longrightarrow LH(\Lambda_0, \Lambda_1)$$

4.2 Complémentaire de la section nulle

La section nulle $\Lambda = 0_M \subset (J^1(M), \xi_{st})$ est legendrienne. En enlevant un voisinage standard \mathcal{N} de Λ , on retrouve l'homologie du cotangent unitaire de la legendrienne :

Proposition 4.2.1. *L'homologie de contact suturée $CH(J^1(M) \setminus \mathcal{N}, \xi_{st})$ est isomorphe à $CH(U^*M, \xi_{st})$.*

Remarque 4.2.2. La variété $J^1(M)$ est non-compacte, cependant on peut la voir comme la complétion de $[-1, 1] \times D^*M$, et donc les courbes restent bornées d'après les lemmes 2.5.7 et 2.5.10.

Démonstration. On munit l'espace des 1-jets de coordonnées $(z, q, p) \in \mathbb{R} \times TM$, et de la forme de contact $\lambda = dz - pdq$ (il faut à cet effet fixer une métrique, qui sera omise dans les notations). Au lieu de retirer un voisinage standard à bord convexe (lisse), on préfère enlever un voisinage suturé $\mathcal{N} = \{|s| < 1, |p| < 1\}$. On applique ensuite la procédure concave-convexe, décrite proposition 1.4.2, à la variété

$$V = \{|s| \leq S, |p| \leq P\} \setminus \mathcal{N} \subset (J^1(M), \lambda_{\text{st}})$$

pour obtenir une variété positivement suturée $(\tilde{V}, \tilde{\lambda})$. Elle peut être vue comme une variété cylindrique :

$$\tilde{V} \simeq ([-1, 1]_u \times (DM \cup_{UM} DM)) \setminus \mathcal{N}(\{\pm 1\} \times UM),$$

munie de la forme de contact

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \pm du + \beta_{DM} && \text{loin de } I \times UM \\ &f(\nu)dt + g(\nu, u)\lambda_{UM} && \text{sur un voisinage de } I \times UM, \end{aligned}$$

où $\nu \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$ est la coordonnée donnée par le champ de Liouville sur un voisinage de UM (telle que $UM = \{\nu = 0\}$), β_{DM} (resp. λ_{UM}) est la forme standard sur DM (resp. UM), et f, g sont des fonctions lisses positives comme dans l'exemple 1.3.9 :

- pour $\pm\nu \geq \varepsilon$, on a $f = \pm 1$ et $g = e^{1\mp\nu}$;
- g présente un point critique d'indice 1 en $(0, 0)$, et deux maximums en $(0, \pm 1)$;
- la condition de contact $A := f'g - f\partial_\nu g > 0$ est satisfaite¹.

Dans $J^1(M)$, le lieu de recollement est $\{s = 0, 1 \leq |p| \leq P\}$, voir la figure 4.1 pour une illustration.

On détermine maintenant l'homologie de contact suturée de $(\tilde{V}, \tilde{\lambda})$.

Orbites : Tout d'abord, le champ de Reeb est donné par

$$\begin{aligned} R &= \pm \partial_u && \text{si } \pm \nu > \varepsilon \\ &A^{-1}(X_g + \partial_\nu f R_0) && \text{sinon,} \end{aligned}$$

où R_0 est le champ de Reeb de (UM, λ_{UM}) et X_g est déterminé par $\iota_{X_g} d\nu \wedge du = dg$. Les orbites de Reeb sont donc en correspondance : $\mathcal{C}(\tilde{V}, \tilde{\lambda}) \simeq \mathcal{C}(UM, \lambda_{UM})$. De plus, une trivialisatation de la structure de contact au dessus d'une orbite $\gamma \subset (UM, \lambda_{UM})$ induit

1. Ici \tilde{V} est orientée de sorte que $d\nu \wedge dt \wedge \lambda_{UM} \wedge (d\lambda_{UM})^{2n-3} > 0$.

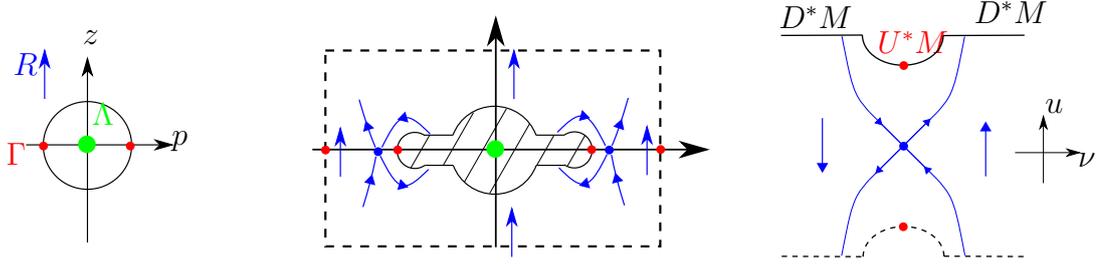


FIGURE 4.1: 1. Un voisinage standard de la section nulle ; 2. Le champ de Reeb (bleu) et le voisinage (hachuré) après l'opération concave-convexe ; 3. La variété suturée vue comme un produit.

une trivialisaton sur l'orbite relevée $\tilde{\gamma} \subset (\tilde{V}, \tilde{\lambda})$ (incluse dans $\{\nu = u = 0\}$), car

$$\ker \tilde{\lambda} = \langle \partial_\nu, g\partial_u - fR_0 \rangle \oplus \ker \lambda_{UM}.$$

Dans un voisinage de $\tilde{\gamma}$, le flot linéarisé du champ de Reeb est hyperbolique dans le premier facteur de cette décomposition, et donc d'après la proposition 3.1.4 les degrés correspondent : $|\gamma|_{UM} = |\tilde{\gamma}|_{\tilde{V}}$.

Courbes holomorphes : Choisissons une structure presque-complexe $J_0 \in \text{End}(\ker \lambda_{UM})$, admissible. Pour un bon choix de forme de contact J_0 induit une structure presque complexe adaptée à la variété suturée associée : prenons $g = e^{|u|}$ et $f = \nu$ sur un voisinage de la suture. Le champ de Reeb est dirigé par $\partial_\nu + R_0$, et donc les t -niveaux correspondent aux ν -niveaux. De plus sur chaque ν -tranche le champ de Liouville est exactement le vecteur $v = \partial_u - \frac{f}{g}R_0$, et donc la carte standard sur le voisinage de la suture est $(\tau, t, x) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times (-\varepsilon, 0] \times UM \mapsto (\nu, u, \phi_{R_0}^{h(\tau, t)}(x)) \in V$. La condition $J(\partial_\tau) = R_0 - \frac{e^\tau}{C}\partial_t$ s'écrit maintenant $Jv = -\partial_\nu$, car ∂_ν est la seule combinaison linéaire de R et R_0 incluse dans ν . Finalement, la structure presque complexe

$$J_{(\nu, u, x)} : \partial_\nu \mapsto \partial_u - \frac{f}{g}R_0$$

$$V \in \ker \lambda_{UM} \mapsto (\phi_{R_0}^{h(\nu, u)})^* J(V)$$

définie sur $\{|\nu| \leq \varepsilon_0, |u| \leq 1 - \varepsilon_0\}$ s'étend en $J \in \text{End}(\ker \lambda)$ adaptée à la variété suturée $\{g \leq g(0, \pm 1) - \varepsilon\}$.

Toute courbe holomorphe dans la symplectisation de (UM, λ_{UM}, J_0) se relève en une courbe incluse dans $\{\nu = u = 0\} \subset (\mathbb{R} \times \tilde{V}^*, J)$. Pour montrer que ce sont les seules, on étudie la projection sur les coordonnées (ν, u) , dénotée

$$\pi : (\mathbb{R} \times V^*, J) \longrightarrow ((-\varepsilon, \varepsilon)_\nu \times \mathbb{R}_u, i).$$

Lemme 4.2.3. *La projection est (J, i) -holomorphe : $d\pi \circ J = i \circ d\pi$.*

Démonstration. Dans la base de 1-formes $(ds, \lambda, d\nu, \alpha = v^*) \oplus (\ker \lambda_{UM})^*$, la composante anti-holomorphe de $d\pi$ est

$$\begin{aligned} d\pi \circ J - i \circ d\pi &= d\pi(R) \otimes ds + (-id\pi(R)) \otimes \lambda \\ &\quad + (d\pi(v) - i\partial_\nu) \otimes d\nu + (-\partial_\nu - id\pi(v)) \otimes \alpha \\ &= A^{-1}(X_g \otimes ds - iX_g \otimes \lambda) \quad \text{car } d\pi(v) = \partial_u = i\partial_\nu \\ &= A^{-1}(X_g \otimes ds - iX_g \otimes ds \circ J). \end{aligned}$$

Or cette dernière expression est la composante holomorphe de $\mu = -iA^{-1}X_g \otimes ds$, par conséquent $(d\pi)^{0,1} = \mu^{1,0} = 0$. \square

Soit maintenant $F : (S, j_S) \rightarrow (\mathbb{R} \times \tilde{V}^*, J^*)$ une courbe holomorphe d'énergie finie, que l'on restreint à la préimage de $\{|u| < 0\}$. Alors $\pi_F = \pi \circ F$ est prolongeable en ses perçures, et on obtient une courbe holomorphe à bord

$$\pi_F : (S, \partial_\pm S, j_S) \longrightarrow ([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}, \{\pm\varepsilon\} \times \mathbb{R}, i).$$

Son aire se calcule par la formule de Stokes :

$$\int \pi_F^*(d\nu \wedge du) = \int_{\partial_- S} \pi_F^*(-\varepsilon du) + \int_{\partial_+ S} \pi_F^*(\varepsilon du) = 0,$$

car ∂S est sans bord. Par conséquent π_F est constante, et la courbe est incluse dans $\{\nu = u = 0\}$.

Transversalité : On esquisse ici un résultat similaire à [DR16, Lemme 8.2] : si J_0 est une structure presque complexe régulière sur UM , alors son relevé à V^* est aussi une structure régulière. On rappelle brièvement les objets impliqués, déjà mentionnés dans la section 3.1.4 (pour plus de détails voir les références données là-bas). Étant donnée une variété de contact (V, λ) , munie d'une structure presque complexe adaptée J , on fixe une surface de Riemann (S, j) ainsi qu'une collection d'orbites de Reeb γ_i , et on dénote \mathcal{B} l'ensemble des applications $u : S \rightarrow \mathbb{R} \times V$ convenablement asymptotes aux orbites de Reeb choisies. On considère ensuite la fibration $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, dont la fibre en u est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_u &= \Omega^{0,1}(u^*T(\mathbb{R} \times V)) \\ &= \{\alpha : TS \longrightarrow u^*T(\mathbb{R} \times V), \alpha j = -J\alpha\} \end{aligned}$$

(dans cette partie les applications seront implicitement des morphismes de fibrés). Alors l'application $\bar{\partial} : u \mapsto du + J \circ du \circ j$ est une section de \mathcal{E} , dont la linéarisation en $u \in \mathcal{B}$

est un opérateur de Fredholm dénoté

$$D_u = \pi_{\mathcal{E}_u} \circ T_u \bar{\partial} : T_u \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}_u,$$

d'indice déterminé par le degré des orbites de Reeb choisies.

L'espace tangent $T_u \mathcal{B}$ est un ensemble de sections du fibré $u^*T(\mathbb{R} \times V)$, qui se décompose en :

$$T_u \mathcal{B} = \mathcal{S}(u^*T(\mathbb{R} \times V)) \oplus \bigoplus_i V_i,$$

où les éléments de $\mathcal{S}(u^*T(\mathbb{R} \times V))$ sont les sections convergeant exponentiellement vers zéro en les perçures, et les V_i sont des espaces vectoriels de dimension 2, voir [Bou06, Appendice] pour les détails analytiques. Pour ne pas surcharger les symboles les sections sont ici notées \mathcal{S} , au lieu de l'usuel Γ . De plus on omettra l'application de projection lorsqu'elle est évidente.

On applique maintenant cette construction à (UM, J_0) , pour laquelle les notations seront inchangées, à (\tilde{V}^*, J) pour obtenir $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{E}}$ et \tilde{D} , et à (\mathbb{C}, i) pour obtenir $\mathcal{B}_0, \mathcal{E}_0$ et D_0 . Cette dernière variété n'est pas de contact, cependant la construction reste valable :

- \mathcal{B}_0 est l'ensemble des applications $S \rightarrow \mathbb{C}$ se prolongeant par 0 en les points marqués (on obtient ainsi une application $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$);
- son espace tangent en u_0 est $\mathcal{S}(u_0^*\mathbb{C}) \simeq \bar{\mathcal{S}}(S^2 \times \mathbb{C} \rightarrow S^2)$, où $\bar{\mathcal{S}}$ dénote les sections nulles en les points marqués;
- $\mathcal{E}_0 = \Omega^{0,1}(S \times \mathbb{C})$.

Soit $u : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times \Gamma, J_0)$ une courbe holomorphe, qui se relève en \tilde{u} à valeur dans $(\mathbb{R} \times V^*, J)$, d'image incluse dans $\{\nu = u = 0\}$.

Lemme 4.2.4. $\dim \text{coker } \tilde{D}_u \leq \dim \text{coker } D_u$.

Démonstration. La courbe \tilde{u} étant incluse dans $\{u = \nu = 0\}$, on peut remplacer V^* par la variété produit $UM \times D^2$. On suit maintenant le raisonnement de [DR16, Lemme 8.2].

L'espace tangent à $\tilde{\mathcal{B}}$ se décompose en

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\tilde{u}^*T(\mathbb{R} \times \tilde{V}^*)) &\simeq \mathcal{S}(u^*T(\mathbb{R} \times UM)) \oplus V_i \oplus \mathcal{S}(0^*TD^2) && \text{(ici 0 désigne une application)} \\ &\simeq \mathcal{S}(u^*T(\mathbb{R} \times UM)) \oplus V_i \oplus \bar{\mathcal{S}}(S^2 \times \mathbb{C} \rightarrow S^2), \end{aligned}$$

par conséquent $T_{\tilde{u}}\tilde{\mathcal{B}} \simeq T_u\mathcal{B} \oplus T_0\mathcal{B}_0$. Similairement, la fibre $\tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{u}}$ se décompose en

$$\begin{aligned} \Omega^{0,1}(\tilde{u}^*T(\mathbb{R} \times \tilde{V})) &= \{\alpha : v \in T_x S \mapsto \alpha(v) \in T_{\tilde{u}(x)}(\mathbb{R} \times \tilde{V}), \alpha j = -J\alpha\} \\ &\simeq \Omega^{0,1}(u^*T(\mathbb{R} \times UM)) \oplus \{\alpha : TS \rightarrow \mathbb{C}, \alpha j = -i\alpha\} \\ &\simeq \mathcal{E}_u \oplus \Omega^{0,1}(S \times \mathbb{C} \rightarrow S) \\ &\simeq \mathcal{E}_u \oplus (\mathcal{E}_0)_0. \end{aligned}$$

Dénotant $P : \mathbb{R} \times V^* \rightarrow \mathbb{R} \times UM$ la projection parallèlement au facteur D^2 , elle induit des projections \mathcal{P} , $P_{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{E}}$ s'inscrivant dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \ker \tilde{D}_{\tilde{u}} \hookrightarrow & T_{\tilde{u}}\tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\tilde{D}_{\tilde{u}}} & \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{u}} \\ \downarrow \mathcal{P} & \downarrow P_{\mathcal{B}} & & \downarrow P_{\mathcal{E}} \\ \ker D_u \hookrightarrow & T_u\mathcal{B} & \xrightarrow{D_u} & \mathcal{E}_u \end{array}$$

et le carré de droite étant commutatif, l'application \mathcal{P} est bien définie.

Remarque 4.2.5. Pour prouver rigoureusement cette affirmation, il faudrait utiliser des cartes exponentielles comme dans [DR16, §8.2].

On montre maintenant que $\ker \mathcal{P} = \ker \tilde{D}_{\tilde{u}} \cap \ker P_{\mathcal{B}}$ est de dimension nulle. En effet

$$(\tilde{D}_{\tilde{u}})|_{\ker P_{\mathcal{B}}} : \bar{\mathcal{S}}(S \times \mathbb{C} \rightarrow S) \longrightarrow \Omega^{0,1}(S \times \mathbb{C} \rightarrow S) \subset \tilde{\mathcal{E}}_{\tilde{u}}$$

est l'opérateur de Cauchy-Riemann standard, associant à une section χ la partie anti-holomorphe de sa différentielle :

$$(\tilde{D}_{\tilde{u}})|_{\ker P_{\mathcal{B}}}(\chi) = d\chi + i \circ d\chi \circ j.$$

De plus une telle section peut être vue comme une fonction $S \rightarrow \mathbb{C}$, et, par régularité elliptique des éléments de $\ker \tilde{D}_{\tilde{u}}$, les sections appartenant à $\ker \mathcal{P}$ s'étendent en des applications holomorphes définies sur la sphère S^2 (on rappelle que les courbes considérées n'ont pas de genre, et donc S est une sphère privée de points marqués). Par conséquent $\ker \mathcal{P}$ est réduit à l'application nulle :

$$\ker \mathcal{P} = \text{Hol}(S^2, \mathbb{C}) = \{0\},$$

et donc \mathcal{P} est une injection. On obtient alors, à l'aide l'égalité $\text{ind } D_u = \text{ind } \tilde{D}_{\tilde{u}}$,

$$\begin{aligned} \dim \text{coker } D_u &= \dim \ker D_u - \text{ind } D_u \\ &\geq \dim \ker \tilde{D}_{\tilde{u}} - \text{ind } \tilde{D}_{\tilde{u}} = \dim \text{coker } \tilde{D}_{\tilde{u}} \end{aligned}$$

□

Par conséquent si J_0 est une structure régulière, les dga $CC(\tilde{V}^*, \tilde{\lambda}^*, J)$ et $CC(UM, \lambda_{UM}, J_0)$ sont isomorphes (au niveau des chaînes). □

Notons qu’au premier abord, il pourrait sembler qu’une courbe holomorphe dans la complétion de (DM, β_{DM}) devrait se relever à la symplectisation de \tilde{V} . Cette absence est peut-être éclaircie par l’observation suivante : dans la situation Morse-Bott (ie lorsque g ne dépend que de ν), toute orbite de UM se relève en une \mathbb{R} -famille d’orbites dans $V_{MB} = \mathbb{R} \times (DM \cup DM)$, et la différentielle compte des \mathbb{R} -familles de courbes (invariantes par translation selon u). Les constructions de [Rou17] (voir aussi [Wen10b] et [Sie11]) devraient être applicables à cette situation, permettant de relever DM en un \mathbb{R}^2 -feuilletage de sous-variétés holomorphes dans $\mathbb{R} \times (V_{MB} \setminus \mathbb{R} \times UM)$, invariant par translation selon s et u (il faut pour cela prendre une structure presque complexe hamiltonienne stable, et non plus adaptée à la symplectisation). Les courbes holomorphes sont alors incluses dans ces feuilles, que l’on peut voir comme la complétion de DM . Essayons de compter les disques holomorphes dans $\mathbb{R} \times V_{MB}$ ne se projetant pas à $\mathbb{R} \times UM$: si γ est une orbite de degré 1 dans UM , la dimension des courbes positivement asymptotes à cette orbite dans TM est 1. Par conséquent on obtiendrait un espace de courbes dans $\mathbb{R} \times V_{MB}$ de dimension 2 (en quotientant par la translation selon la direction de symplectisation). Or les espaces de courbes comptés par la différentielle Morse-Bott devraient être de dimension 1.

Remarque 4.2.6. Plus généralement, l’homologie de contact suturée d’une variété de contact cylindrique $[-1, 1] \times (W_1 \cup W_2)$ est quasi-isomorphe à l’homologie de contact de $(\partial W_i, \lambda|_{\partial W_i})$. On prouvera un théorème similaire pour des legendriennes produits $[-1, 1] \times \Lambda_\partial$ dans la section 4.5.

Question 4.2.7. Lorsqu’on retire une boule standard, l’homologie obtenue est-elle reliée à l’homologie Legendrienne d’une sphère standard, ou bien au cône de $U : CC(V) \rightarrow CC(V)$? Cette application compte les courbes holomorphes $F = (a, f) : (S, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times V, J)$ telles que $z \in f(S)$, où $z \in V$ est un point générique. Elle n’est définie, pour le moment, qu’en dimension 3 pour l’homologie de contact plongée, et peut être interprétée comme la multiplication par un coefficient en homologie de Heegaard-Floer (voir [Hut02] [Hut10] [CGH10] et [CGH11]).

4.3 Cotangent unitaire : en général

Une métrique g sur une variété M induit une forme de contact sur le fibré tangent unitaire

$$V = U_g M = \{(x, v) \in M \times T_x M \mid g_x(v) = 1\},$$

en posant $\lambda_{(x,v)} = g_x(v, dx)$. Cette variété de contact est contactomorphe à (ST^*M, ξ_{st}) , et son flot de Reeb relève le flot géodésique.

Lemme 4.3.1. *Soit λ la forme de contact sur $U_g M$ associée à la métrique g . Alors les trajectoires du champ de Reeb sont des relevés de géodésiques, et l'action est donnée par la longueur relative à la métrique g .*

Démonstration. Il suffit de prouver ce lemme localement : on choisit des coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dans lesquelles la métrique s'écrit

$$g = g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i \otimes dx_j$$

avec $g_{ij} = g_{ji}$. Le fibré unitaire est $\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathbb{R}^n, \sum_{i,j} g_{ij}(\mathbf{x}) v_i v_j = 1\}$, et son espace tangent en un point (\mathbf{x}, \mathbf{v}) est le noyau de la forme

$$\alpha = \sum_{i,j} \left(2g_{ij} v_i dv_j + \sum_k \partial_k g_{ij} v_i v_j dx_k \right).$$

La forme de contact associée à la métrique s'écrit

$$\lambda_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} = \sum_{i,j} g_{ij} v_i dx_j$$

On va montrer que le champ de Reeb est $R_{(\mathbf{x}, \mathbf{v})} = (\mathbf{v}, w)$. On commence par vérifier la condition de normalisation : on a bien

$$\lambda(R) = g_x(v, v) = 1.$$

On détermine maintenant w :

$$\begin{aligned} i_R d\lambda &= i_R \left(\sum_{i,j} g_{ij} dv_i \wedge dx_j + \sum_{i,j \neq k} \partial_k g_{ij} v_i dx_k \wedge dx_j \right) \\ &= \sum_{i,j} g_{ij} (w_i dx_j - v_j dv_i) + \sum_{i,j \neq k} \partial_k g_{ij} v_i (v_k dx_j - v_j dx_k) \\ &= -\frac{\alpha}{2} + \sum_{i,j} g_{ij} w_i dx_j + \sum_{i,j \neq k} \partial_k g_{ij} v_i v_k dx_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq k} \partial_k g_{ij} v_i v_j dx_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_j g_{ij} v_i v_j dx_j \end{aligned}$$

Cette forme doit être proportionnelle à α ce qui impose, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$2 \sum_i g_{ij} w_i = -2 \sum_{i,j \neq k} \partial_k g_{ij} v_i v_k + \sum_{i,j \neq k} \partial_j g_{ik} v_i v_k + \frac{1}{2} \sum_i \partial_j g_{ij} v_i v_j$$

La matrice (g_{ij}) étant symétrique et définie positive, w est uniquement déterminé. De plus, une trajectoire du champ de Reeb se projette sur un chemin $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$, géodésique car $|\dot{\gamma}|_g = |v|_g = 1$. Inversement un chemin géodésique (paramétré à vitesse 1) se relève en une trajectoire du champ de Reeb, car en dérivant $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ on retrouve l'équation déterminant w et donc $(\dot{\gamma}, \tilde{\gamma})$ est bien le champ de Reeb. \square

Si M est une variété à bord, on a vu dans l'introduction que ST^*M est une variété de contact à bord convexe. On détaille maintenant le pendant tangent. Choisissons g_∂ une métrique sur le bord ∂M , et un voisinage du bord

$$\mathcal{N}(\partial M) \simeq (-\varepsilon, 0]_u \times \partial M,$$

sur lequel on définit une métrique $g = du^2 + g_\partial$ étendue arbitrairement à M . La variété $U_g M$, munie de la forme de contact λ associée à g , est alors à bord convexe, car ∂_u est un champ de contact : son flot préserve la métrique, et donc la structure de contact. Alternativement on peut calculer sur le voisinage du bord, muni de coordonnées :

$$U_g \mathcal{N}(\partial M) = \{(u, y; \nu, w) \in (-\varepsilon, 0]_u \times \partial M \times \mathbb{R} \times T_y \partial M \mid \nu^2 + g_\partial(w, w) = 1\}.$$

On a $\lambda_{(u,y;\nu,w)} = \nu du + g_\partial(y, dy)$, et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\partial_u} \lambda &= d(\lambda(\partial_u)) + \iota_{\partial_u} \lambda \\ &= d\nu - d\nu = 0. \end{aligned}$$

De plus la suture associée est le fibré tangent unitaire du bord, car $\lambda(\partial_u) = \nu$:

$$\Gamma = \{u = 0, \nu = 0\} \simeq U_{g_\partial}(\partial M).$$

Pour obtenir une variété suturée il faut perturber la forme de contact similairement au cas cylindrique de l'exemple 1.3.9 : le fibré unitaire du voisinage du bord se décompose en

$$U_g((-\varepsilon, 0] \times \partial M) \simeq (-\varepsilon, 0]_u \times (D_{g_\partial} \partial M \cup D_{g_\partial} \partial M)$$

et dans ces coordonnées la forme de contact s'écrit

$$\begin{aligned} \lambda &= -\nu du - \beta_\partial \\ &= \mp \sqrt{1 - |\nu|^2} du - |\nu| \lambda_\partial \end{aligned}$$

où β est la forme de Liouville sur $D_{g_\partial}(\partial M)$ provenant de la métrique g_∂ , et λ_∂ est la forme de contact sur $U(\partial M)$ associée à cette même métrique. On perturbe cette forme de contact en une forme adaptée à la suture en posant

$$\lambda = F(u, \nu) du + G(u, \nu) \lambda_\partial$$

où F, G sont des fonctions lisses telles que

- si $|\nu| > \varepsilon$ ou $u < -\varepsilon$, $G(u, \nu) = \sqrt{1 - \nu^2}$ et $F = \nu$;
- G présente un maximum en $(0, 0)$;
- La condition de contact est vérifiée : $F \partial_\nu G - G \partial_\nu F > 0$.

D'après le calcul du cinquième exemple de 1.3.9, le champ de Reeb est alors dirigé par

$$X_G + \partial_\nu F R_{U\partial M},$$

et on obtient une variété suturée en enlevant un voisinage du bord.

Remarque 4.3.2. Le champ de Reeb est similaire à celui obtenu en prenant une métrique de type hyperbolique sur un voisinage du bord : si $g = \varphi(u)du^2 + g_\partial$, où φ est croissante en 0, le bord est une trompette hyperbolique. Une trajectoire géodésique $(u(t), x(t)) \in (-\varepsilon, 0] \times \partial M$ vérifie alors l'équation (voir le lemme 4.3.1)

$$\varphi(u)\dot{u}^2 + \varphi'(u)\ddot{u} = 0.$$

Alors en $u = 0$ on a $\ddot{u} < 0$, et donc le flot géodésique va bien de R_- vers R_+ (pour φ bien choisi). Cependant il sera en général plus facile de modifier directement la forme de contact grâce au lemme 1.4.3.

De plus, si $N \subset M$ est une sous-variété telle que $\partial N \subset \partial M$, on peut choisir la coordonnée u telle que, dans le voisinage du bord, $N \simeq (\varepsilon, 0] \times \partial N$. Alors le fibré unitaire normal

$$U_N M = \{(x, v) \mid x \in N, \forall v' \in T_x N, g(v, v') = 0\} \subset U M$$

est une legendrienne cylindrique centrée, de bord $U_{\partial N}(\partial M) \subset U(\partial M)$, legendrien dans la suture.

4.4 Complémentaire du conormal d'un nœud hyperbolique

Soit $K \subset M^3$ un nœud hyperbolique, c'est-à-dire tel que $M \setminus K$ admette une métrique hyperbolique *de volume fini*. Le conormal $\Lambda = ST_K^* M \subset (ST^* M, \xi_{st})$ est legendrien, et donc admet un voisinage standard à bord convexe $\mathcal{N}_{st}(\Lambda)$. Alors l'homologie legendrienne linéarisée d'une fibre

$$\Lambda_x = \{(x, a), a \in ST_x^* M\}$$

dans le complémentaire de ce voisinage, munie de sa structure produit, est l'anneau du groupe fondamental $\pi_1(M \setminus K)$.

Théorème 4.4.1. *L'homologie legendrienne linéarisée est déterminée par le groupe fondamental du complémentaire du nœud :*

$$\begin{aligned} LH(\Lambda_x, ST^* M \setminus \mathcal{N}_{st}(\Lambda), \xi_{st}) &\simeq \mathbb{Z}[\pi_1(M \setminus K) \setminus 1] \\ &= \bigoplus_{\gamma \in \pi_1(M \setminus K) \setminus 1} \mathbb{Z}.c_\gamma \end{aligned}$$

De plus le produit redonne la loi de groupe : en homologie on a $\mu(c_\gamma, c_{\gamma'}) = c_{\gamma\gamma'}^2$.

L'homologie d'une fibre, munie de la structure produit, est donc isomorphe à l'anneau du groupe $G_K = \pi_1(M \setminus K, x)$. Lorsque $M = S^3$ ceci permet de distinguer les nœuds dans la sphère de dimension trois :

Corollaire 4.4.2. *Si $(LH(\Lambda_x, U(S^3 \setminus K)), \mu_K) \simeq (LH(\Lambda_x, U(S^3 \setminus K')), \mu_{K'})$, alors $K \simeq K'$ (à miroir près).*

Ce résultat est à comparer à celui de [ENS17] (voir aussi [She19], où des faisceaux sont utilisés) : il y est prouvé que, pour tout nœud $K \subset S^3$ l'homologie legendrienne linéarisée de $U_\perp K \cup \Lambda_x \subset US^3$, munie de sa structure produit, est un invariant complet du nœud. L'idée est de retrouver le groupe fondamental de $S^3 \setminus K$, avec son sous-groupe périphérique, à partir de cette homologie. Pour se faire, les auteurs passent par une description topologique du degré 0 de l'homologie, appelée algèbre des cordes, présentée dans [CELN17] (voir aussi [Ng08]). Grossièrement, les générateurs sont les éléments de $\pi_1(S^3 \setminus K)$, et le produit détermine la loi de groupe. Une version de cette algèbre pour les variétés à bord sera présentée section 4.6. Notons que dans la situation étudiée ici, retrouver le groupe fondamental du complémentaire du nœud sera suffisant, car il est hyperbolique.

Démonstration. On commence par prouver le corollaire. Tout d'abord, notons qu'étant donnés deux groupes G, G' , un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}_2[G \setminus 1] \simeq \mathbb{Z}_2[G' \setminus 1]$ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}_2[G] \simeq \mathbb{Z}_2[G']$, en rajoutant un élément c_1 et en modifiant la structure produit par $\mu(c_1, c_\gamma) = \mu(c_\gamma, c_1) = c_\gamma$, et $\mu(c_\gamma, c_{\gamma^{-1}}) = c_1$.

Les groupes G_K étant ordonnables à gauche (voir [Rol14, Corollaire 6.0.4]), un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}_2[G_K] \simeq \mathbb{Z}_2[G_{K'}]$ provient d'un isomorphisme de groupe (voir [LR68], l'idée étant que les seuls inversibles sont les monômes). L'homologie linéarisée, munie de sa structure produit, détermine ainsi G_K , et donc $S^3 \setminus K$ d'après le théorème de rigidité de Mostow (on rappelle que les nœuds sont de volume fini) :

Théorème 4.4.3. [Mar74] *Soit M_0, M_1 deux variétés hyperboliques 3-dimensionnelles, complètes, et de volumes finis. Alors tout isomorphisme $\pi_1(M_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M_1)$ est induit par une isométrie $M_0 \xrightarrow{\sim} M_1$.*

Finalement deux nœuds dans S^3 sont équivalents (à miroir près) si et seulement si leurs complémentaires sont homéomorphes d'après [GL89]. \square

2. Si $\gamma' = \gamma^{-1}$, alors $\mu(c_\gamma, c_{\gamma^{-1}}) = 0$

Remarque 4.4.4. Mis à part le théorème de Mostow, les résultats utilisés dans ce raisonnement sont valables pour un nœud quelconque. L'hypothèse d'hyperbolicité rend le calcul de l'homologie legendrienne plus simple, cependant les résultats de [ENS17] indiquent que ce théorème pourrait s'étendre à un contexte plus général.

Question 4.4.5. Une autre legendrienne intéressante est $\phi_{\mathbb{R}}^1(U_{\perp}K)$, que l'on peut voir comme le conormal coorienté du tore $\partial\mathcal{N}(K)$. L'homologie de cette legendrienne (comme sous-variété du complémentaire du conormal), munie de sa structure produit, est-elle isomorphe à l'anneau du groupe $\pi_1(S^3 \setminus K, K)$?

Un autre exemple remarquable, suggéré par Y. Bae, et qui sera étudié dans un futur projet, est le conormal d'une surface de Seifert du nœud.

Le reste de cette section est dédié à la preuve du théorème. La stratégie est la suivante :

1. On commence par calculer l'homologie legendrienne d'une fibre dans la variété suturée issue de $U(M \setminus \mathcal{N}(K))$. Pour se faire on construit une suite de formes de contact adaptées à la variété suturée, "convergeant" vers la forme provenant de la métrique hyperbolique sur $M \setminus K$. Ceci permettra de se ramener à l'étude d'un réseau de fibres dans le fibré tangent unitaire de l'espace hyperbolique.
2. On décrit ensuite le recollement d'une anse de contact circulaire $S^1 \times D^2 \times D^2$, et on prouve que l'homologie legendrienne est inchangée lors de cette opération. Il s'agit d'une variante d'un résultat de [CGHH11].
3. Finalement on montre que la variété de contact $UM \setminus \mathcal{N}(U_{\perp}K)$ peut être obtenue à partir de $U(M \setminus \mathcal{N}(K))$ en recollant deux anses circulaires. Pour se faire on déplacera la suture en perturbant la forme de contact adaptée au bord convexe.

4.4.1 Cotangent unitaire du complémentaire du nœud hyperbolique

Dans cette section on calcule l'homologie d'une fibre dans le cotangent unitaire du complémentaire d'un voisinage de K .

Le nœud K étant hyperbolique, d'après le lemme de Margulis (voir par exemple [BP12, Théorème D.3.3]) il existe un voisinage $\mathcal{N}(K)$ tel que $\mathcal{N}(K) \setminus K \simeq \mathbb{R}_u^+ \times \mathbb{T}_z^2$ et sur lequel la métrique hyperbolique de $M \setminus K$ s'écrit $g_h = \frac{du^2 + g_{\mathbb{T}^2}}{(C+u)^2}$, où C est une constante et $g_{\mathbb{T}^2}$ est la métrique plate sur le tore.

On note alors λ_h la forme induite par la métrique hyperbolique sur

$$V = U_{g_h}(\{u \leq 1\}),$$

et Λ_x la fibre au-dessus d'un point de l'ensemble $\{u < 0\}$. On munit V des coordonnées

suivantes, définies sur un voisinage du bord :

$$\{(u, z; \nu, \eta) \in [0, 1] \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \frac{\nu^2 + \eta^2}{C + u^2} = 1\} \subset V$$

dans lesquelles on a

$$\lambda_h = \frac{-1}{(C + u)^2}(\nu du + \eta \cdot dz),$$

où $\eta \cdot dz = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2 = \Re(\eta d\bar{z}) = \frac{1}{2}(\eta d\bar{z} + \bar{\eta} dz)$, vus comme des complexes dans les dernières égalités.

On note $\tilde{\lambda}_h$ une forme adaptée à la variété suturée associée

$$\tilde{V} = V \setminus \mathcal{N}(\{u = 1, \nu = 0\})$$

obtenue en modifiant la forme de contact sur $\{\frac{5}{6} < u < 1\}$. En coordonnées elle est donnée par

$$\tilde{\lambda}_h = F(u, \nu)du + G(u)\eta \cdot dz$$

où F, G sont des fonctions lisses positives et telles que :

- lorsque $0 < u < \frac{5}{6}$, $F(u, \nu) = \frac{-\nu}{(C+u)^2}$ et $G(u) = -\frac{1}{(C+u)^2}$;
- G présente un maximum en 1 ;
- la condition de contact est vérifiée.

Au voisinage de $\{u = 1, \nu = 0\}$ cette forme se réécrit $F du + G\sqrt{1 - \nu^2}\lambda_{U\mathbb{T}^2}$ et donc cette forme est bien adaptée à la suture, similairement à l'exemple 1.3.9. Géométriquement cela revient à modifier la métrique près du bord : le cusp devient une trompette hyperbolique, voir la figure 4.3.

Alors l'homologie d'une fibre dans cette variété est l'anneau du groupe fondamental de $M \setminus K$.

Proposition 4.4.6. *L'homologie legendrienne linéarisée de la fibre dans la variété suturée $(\tilde{V}, \tilde{\lambda}_h)$ est le \mathbb{Z} -module librement engendré par les éléments de $\pi_1(M \setminus K)$:*

$$LH(\Lambda_x, V, \tilde{\lambda}_h) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \pi_1(M \setminus K) \setminus 1} \mathbb{Z}\tilde{c}_\gamma.$$

De plus, le produit est déterminé par la loi de groupe.

Formes de contact On construit dans cette section une famille $(\tilde{\lambda}_T)_{T \geq 1}$ de formes de contact ajustées à la variété suturée, indépendantes de T sur un voisinage du bord, et étirant le bord.

Notation 4.4.7. On définira pour cela plusieurs familles de formes de contact. λ_T proviendra d'une métrique, $\hat{\lambda}_T$ sera indépendante de T sur un voisinage du bord, et $\bar{\lambda}_T$ sera proportionnelle à $\hat{\lambda}_T$ et utilisée plus tard pour expliciter l'astuce de Moser.

Pour tout $T \geq 1$, on définit une forme de contact sur V via l'application

$$U_{gh}([- \varepsilon, 1] \times \mathbb{T}^2) \longrightarrow U_{gh}([- \varepsilon, \infty) \times \mathbb{T}^2)$$

$$\phi_T : (u, z; \nu, \eta) \mapsto (\varphi_T(u), z; a_T \nu, a_T \eta)$$

où $\varphi_T : [- \varepsilon, 1] \rightarrow [- \varepsilon, \infty)$ est une fonction lisse, strictement croissante et telle que

- $\varphi_T(u) = u$ sur $[- \varepsilon, 0]$
- $\varphi'_T = T$ sur $[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$
- $\varphi'_T = 1$ sur $[\frac{3}{6}, 1]$

et $a_T = \frac{C + \varphi_T(u)}{C + u}$. En particulier on a $\varphi_T(\frac{4}{6}) \geq \frac{T}{6}$. On se réfère à la figure 4.2 pour un graphe typique de cette fonction et de sa dérivé.

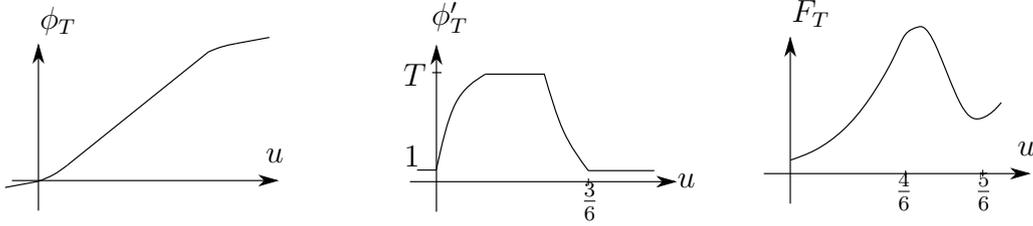


FIGURE 4.2: Graphe des fonctions étirant le bord.

On pose alors $\lambda_T = \phi_T^* \lambda_h$, qui vaut en coordonnées

$$\lambda_T = -\frac{1}{(C + \varphi_T(u))(C + u)}(\varphi'_T(u)\nu du + \eta \cdot dz)$$

On la modifie en une forme adaptée à la suture (mais pas à la variété suturée), et indépendante de T sur un voisinage du bord :

$$\hat{\lambda}_T = -\frac{1}{F_T}(\varphi'_T \nu du + \eta \cdot dz)$$

où F_T est une fonction lisse positive valant $(C + \varphi_T(u))(C + u)$ pour $u \leq \frac{4}{6}$ et $(C + u)^2$ si $\frac{5}{6} < u < 1$, voir la figure 4.2.

Finalement la forme $\tilde{\lambda}_T$, adaptée à la variété suturée, est obtenue en effectuant la même perturbation que pour $\tilde{\lambda}_h$. En particulier elle est indépendante de T sur $\{\frac{5}{6} < u < 1\}$, et là encore cela revient à modifier la métrique au voisinage du bord, voir la figure 4.3.

Filtration En rendant la variété suturée on a modifié le champ de Reeb sur un voisinage du bord, faisant apparaître des orbites de Reeb correspondant à un tore géodésique. Cependant l'action des cordes intersectant cette zone diverge, et on va pouvoir utiliser une filtration pour les ignorer et se ramener ainsi à $U_{gh}(M \setminus K)$, muni de la forme provenant de la métrique hyperbolique. Pour chaque élément de $\pi_1(M \setminus K)$, il existe une unique

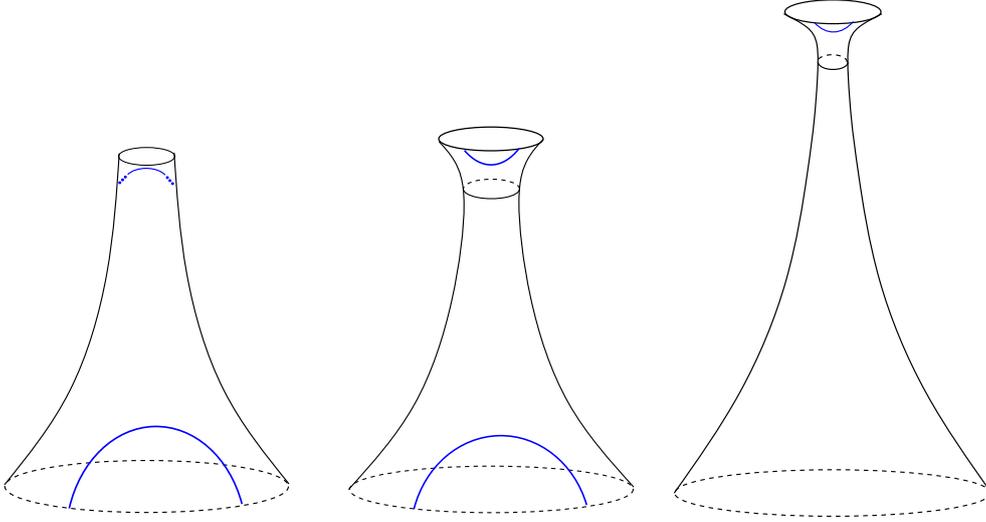


FIGURE 4.3: Les métriques correspondant aux formes de contact λ_h , $\tilde{\lambda}_h$ et $\tilde{\lambda}_2$, et une géodésique presque tangente au bord.

géodésique dans $(M \setminus K, g_h)$, basée en x , le représentant. On dénote par $\pi_1^A(M \setminus K, x)$ l'ensemble des éléments tels la longueur de cette géodésique est bornée par A .

Lemme 4.4.8. *Pour tout $A > 0$, il existe $T(A) \geq 0$ tel que pour tout $T \geq T(A)$, les λ_T -cordes d'action majorée par A sont en bijection avec les éléments non triviaux de $\pi_1^A(M, x)$:*

$$\mathcal{C}^A(\Lambda_x, V, \tilde{\lambda}_T) \simeq \pi_1^A(M \setminus K, x) \setminus 1$$

De plus toutes ces cordes sont de degré un, et on peut prendre $T(A) = Ce^{A/2}$.

Notation 4.4.9. Pour $\gamma \in \pi_1(M \setminus K)$, c_γ désignera la géodésique correspondante dans $M \setminus K$, d'extrémités x , ainsi que la corde de Reeb la relevant dans $U_{g_h}(M \setminus K)$. La corde relevée à H^3 , ainsi que la corde de Reeb associée, seront notées \hat{c}_γ .

Démonstration. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $T(A)$ tel que tout chemin dans $(M \setminus K, g_h)$ reliant x à $\{u = \frac{T(A)}{6}\}$ est de g_h -longueur supérieure à A . D'après le lemme 4.3.1, les λ_T -cordes de $\Lambda_x \subset (\tilde{V}, \tilde{\lambda}_T)$ d'action bornée par A restent dans $\{u \leq \frac{4}{6}\}$, où la forme de contact provient de la métrique hyperbolique sur $M \setminus K$. Elles sont donc en bijection avec les lasso géodésiques basés en x et de longueur inférieure à A . De plus en choisissant

$T(A)$ tel que $A = d_{g_h}(x, \{u = \frac{T(A)}{6}\})$, on peut majorer $T(A)$ comme désiré :

$$\begin{aligned} A &= d_{g_h}(x, \{u = \frac{T(A)}{6}\}) = d_{g_h}(x, \{u = 0\}) + \int_0^{\frac{T(A)}{6}} \frac{du}{C+u} \\ &= D + \ln(C + \frac{T(A)}{6}) - \ln C \end{aligned}$$

d'où $\frac{T(A)}{6} = Ce^{-D}e^A - C$, et donc

$$T(A) \leq C'e^A$$

□

Toutes ces cordes de Reeb sont de degré 1 (voir la section 4.4.1). De plus, les orbites de Reeb d'action bornée sont en bijection avec les classes d'homotopie libre de la variété. Par conséquent pour tout $T \geq T(A)$, le complexe legendrien de la fibre dans $(\tilde{V}, \tilde{\lambda}_T)$, d'action bornée par A , est

$$LC^A(\Lambda_x, \tilde{V}, \tilde{\lambda}_T) = \mathbb{Z}[\pi_1^A(M \setminus K) \setminus 1],$$

muni de la différentielle triviale. En effet, ce complexe est bien défini car il n'existe pas de corde contractible, et la différentielle est nulle car il existe une unique corde par classe d'homotopie.

On peut même montrer que la différentielle est nulle pour le complexe "complet", pour lequel on devrait compter des courbes possédant plusieurs asymptotes négatives. Bien que ce résultat ne soit pas nécessaire pour notre preuve, il implique que $\mathcal{L}C(\Lambda_x, \tilde{V})$ est (après colimite) l'algèbre engendrée par les éléments non triviaux de $\pi_1(M \setminus K)$, munie de la différentielle triviale.

Lemme 4.4.10. *La différentielle de $\mathcal{L}C^A(\Lambda_x, V, \lambda_T)$ est nulle pour $T \geq T(A)$.*

Démonstration. La borne sur l'action est choisie de sorte que les cordes de Reeb correspondent géodésiques de $(M \setminus K, g_h)$. Une courbe holomorphe sans asymptote négative ne peut pas exister pour des raisons homotopiques : il n'existe pas d'orbite contractible d'action inférieure à A , on n'a donc pas de demi-plan holomorphe. De plus la différentielle préserve la classe d'homotopie des cordes : une courbe positivement asymptote à \tilde{c}_γ doit être négativement asymptote à un mot $\tilde{c}_{\gamma_1} \dots \tilde{c}_{\gamma_r}$ tel que $\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_r = \gamma \in \pi_1(M, x)$. Cependant, l'action d'une corde étant donnée par la longueur de la géodésique correspondante, on aurait

$$\sum_i \text{lgth}(\gamma_i) \leq \text{lgth}(\gamma)$$

car la différentielle diminue l'action. Or ceci est impossible, car γ minimise la longueur des chemins dans sa classe d'homotopie. □

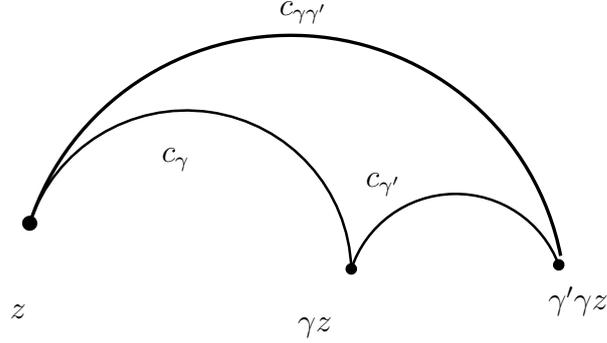


FIGURE 4.4: Géodésiques dans le demi-espace hyperbolique

Colimite On montre maintenant que cette suite de complexes converge bien vers l’homologie désirée. Pour s’assurer que la colimite converge bien vers l’homologie legendrienne on appliquera le lemme suivant :

Lemme 4.4.11. [CGH10, Lem 3.1.7, Thm 3.2.1] Soit (V, λ) une variété de contact contenant une legendrienne Λ , T_n une suite de réels, et $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions positives et lisses.

- Si $\frac{T_{n+1}}{f_{n+1}} > \frac{T_n}{f_n}$, les applications

$$LC^{\leq T_n}(\Lambda, V, f_n \lambda) \longrightarrow LC^{\leq T_{n+1}}(\Lambda, V, f_{n+1} \lambda)$$

sont bien définies et compatibles.

- Si $\frac{T_n}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, alors $\text{colim}_{n \rightarrow \infty} LC^{\leq T_n}(\Lambda, V, f_n \lambda) \simeq LC(\Lambda, V, \lambda)$

On prouve maintenant le premier point de la proposition 4.4.6 : $LH(\Lambda_x, \tilde{V}, \tilde{\lambda}_h)$ est le \mathbb{Z} -module engendré par les éléments de $\pi_1(M \setminus K)$.

Démonstration. On se ramène à une unique variété de contact (V, ξ) : d’après le théorème de Gray il existe un contactomorphisme exact tel que

$$(V, \tilde{\lambda}_T) \simeq (V, \mu_T \tilde{\lambda}_h).$$

Les formes $\tilde{\lambda}_T$ étant constantes sur la zone $\{\frac{5}{6} < uw1\}$, on a $\mu_T = 1$ sur ce voisinage.

Astuce de Moser : On vérifie que ce lemme s’applique à la suite de forme $\tilde{\lambda}_T$. En appliquant l’astuce de Moser (voir la preuve du lemme 1.1.4) à

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_T &= F_T \lambda_T \\ &= -\varphi'_T \nu du - \eta dz \end{aligned}$$

sur la zone $\{\frac{5}{6} < u < 1\}$ (si $u > \frac{5}{6}$ la forme est indépendante de T), on obtient une isotopie ψ_T , constante sur un voisinage du bord, et telle que

$$\psi_T^*(\varphi'_T \nu du + \eta dz) = \bar{\mu}_T(\nu du + \eta dz)$$

où ψ_T est le flot d'un champ de vecteurs X_T , et $\bar{\mu}_T$ est une fonction strictement positive, déterminés par

$$\partial_T(\ln \bar{\mu}_T) = \partial_T \bar{\lambda}_T(R_{\bar{\lambda}_T}) \circ \psi_T \quad (4.1)$$

$$(\iota_{X_T} d\bar{\lambda}_T)|_{\xi_T} = \left(\partial_T \bar{\lambda}_T(R_{\bar{\lambda}_T}) \cdot \lambda_T - \partial_T \bar{\lambda}_T \right)|_{\xi_T}. \quad (4.2)$$

On a donc $\mu_T = \frac{\bar{\mu}_T}{\psi_T^* F_T}$. On va montrer que la suite $(A, \mu_{T(A)} \tilde{\lambda}_h)$ satisfait la condition du lemme 4.4.11.

Détermination de μ_T :

Lemme 4.4.12. *Le champ de Reeb associé à $\bar{\lambda}_T$ est*

$$R_{\bar{\lambda}_T} = -B(\nu \partial_u + \varphi'_T \eta \cdot \partial_z + 2\partial_\nu)$$

avec $B = \frac{1}{\varphi'_T (C+u)^2} \geq 0$.

Démonstration. On calcule

$$d\bar{\lambda}_T = \varphi'_T du \wedge d\nu + dz \wedge d\eta$$

De plus sur V on a $\frac{\nu^2 + \eta^2}{(C+u)^2} = 1$ d'où

$$\begin{aligned} 0 &= d((\nu^2 + \eta^2)/(C+u)^2) \\ &= (C+u)^{-2}(\nu d\nu + \eta d\eta) - 2(C+u)^{-4}(\nu^2 + \eta^2)du \\ &= (C+u)^{-2}(\nu d\nu + \eta d\eta - 2du) \end{aligned}$$

et donc $0 = \nu d\nu + \eta d\eta - 2du$ sur V . On vérifie que le vecteur $\nu \partial_u + \varphi'_T \eta \cdot \partial_z + 2\partial_\nu$ est bien tangent à V :

$$(\nu d\nu + \eta d\eta - 2du)(\nu \partial_u + \varphi'_T \eta \cdot \partial_z + 2\partial_\nu) = 2\nu - 2\nu = 0$$

et que ce vecteur dirige bien de champ de Reeb :

$$\begin{aligned} \iota_{\nu \partial_u + \varphi'_T \eta \cdot \partial_z + 2\partial_\nu} d\bar{\lambda}_T &= \nu \varphi'_T d\nu - \varphi'_T \eta \cdot d\eta - 2\varphi'_T du \\ &= \varphi'_T(\nu d\nu + \eta d\eta - 2du) = 0. \end{aligned}$$

La condition de normalisation détermine B . □

Les équations 4.1 se réécrivent donc

$$\partial_T(\ln \bar{\mu}_T) \circ \psi_T^{-1} = \partial_T \bar{\lambda}_T(R_{\bar{\lambda}_T}) = -\partial_T \phi'_T \cdot \nu du(R_T) \quad (4.3)$$

$$= B\nu^2 \partial_T \phi'_T = \frac{\nu^2 \partial_T \phi'_T}{(C+u)^2 \phi'_T} \quad (4.4)$$

$$(\iota_{X_T} d\bar{\lambda}_T)|_{\xi_T} = - \left(\frac{\nu}{C+u} \right)^2 \frac{\partial_T \phi'_T}{\phi'_T} \eta \cdot dz|_{\xi_T}. \quad (4.5)$$

On précise maintenant le champ de vecteurs X_T

Lemme 4.4.13. $du(X_T) = 0$, et donc ψ_T préserve la coordonnée u .

Démonstration. L'hyperplan de contact $\ker \bar{\lambda}_T$ est l'intersection de deux noyaux :

$$\xi_T = \ker(2du - \nu d\nu - \eta \cdot d\eta) \cap \ker(\phi'_T \nu du + \eta \cdot dz),$$

il est donc engendré par les vecteurs

$$V_i = \eta_i \partial_\nu - \nu \partial_{\eta_i}$$

$$W_i = \eta_i \partial_u - \phi'_T \nu \partial_{z_i} + 2\partial_{\eta_i},$$

où $i \in \{1, 2\}$, et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$. On calcule

$$d\bar{\lambda}_T(V_1, V_2) = 0$$

$$d\bar{\lambda}_T(W_1, W_2) = 0$$

$$d\bar{\lambda}_T(W_i, V_j) = \phi'_T \eta_i \eta_j + \phi'_T \nu^2.$$

La forme $\eta \cdot dz$ s'annule sur les vecteurs V_i , le champ de vecteurs X_T est une combinaison linéaire des V_i d'après l'équation 4.3 (plus précisément, $\nu \iota_{V_1 - V_2} d\bar{\lambda}_T = (\eta_1 - \eta_2) \eta \cdot dz$). \square

Ceci permet de majorer $\bar{\mu}_T$: en reprenant l'équation 4.3, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_T(\ln \bar{\mu}_T) &= \partial_T \bar{\lambda}_T(R_{\bar{\lambda}_T}) \circ \psi_T \\ &\leq \frac{\partial_T \phi'_T}{(C+u)^2 \phi'_T}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln \bar{\mu}_T &\leq \frac{1}{(C+u)^2} \int_1^T \frac{\partial_T \phi'_T}{\phi'_T} \quad \text{car } \mu_1 = 1 \\ &\leq \ln \phi'_T - \ln \phi'_1 = \ln \phi'_T \quad \text{car } \phi'_1 = 1, \end{aligned}$$

d'où $\bar{\mu}_T \leq \phi'_T$.

Divergence de $\frac{A}{\mu_T(A)}$: On montre maintenant la condition du lemme 4.4.11 est satisfaite. On pose ainsi

$$Q_A = \frac{A}{\mu_T(A)} = \frac{AF_{T(A)}}{\bar{\mu}_{T(A)}}.$$

- Sur $[\frac{5}{6}, 1]$, on a $\bar{\mu}_T = 1$ et $F_T \geq 1$.
- Sur $[\frac{3}{6}, \frac{5}{6}]$, $\varphi'_T = 1$ et donc la structure de contact est constante. Par conséquent ψ_T est l'identité, et $F_T = \bar{\mu}_T$, d'où $Q_A = A$.
- Sur $[\frac{2}{6}, \frac{3}{6}]$, on a $F_T = (C + \varphi_T(u))(C + u) \geq 1 + \varphi_T$ (on a choisi $C \geq 1$). Donc on peut minorer par

$$Q_A = \frac{A}{\mu_{T(A)}} = \frac{AF_{T(A)}}{\bar{\mu}_{T(A)}} \geq \frac{A(1 + \varphi_{T(A)})}{\varphi'_{T(A)}} \quad (4.6)$$

De plus $\varphi_T \geq \frac{T}{6}$, et $\varphi'_T \leq T$, d'où $Q_A \geq \frac{A}{6}$.

- Sur $[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$, la minoration précédente reste valable, et on a $\varphi'_T = T$ et $\varphi_T \geq T(u - \delta)$, où $\delta < \frac{1}{6}$ est indépendant de T (on le montrera lors du lemme suivant). D'où

$$Q_A \geq A(u - \delta) \geq A(\frac{1}{6} - \delta)$$

- Finalement sur $[0, \frac{1}{6}]$, on utilise le lemme suivant

Lemme 4.4.14. *Pour tout $T \geq 1$, il existe $\varphi_T : [0, \frac{1}{6}] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante et telle que*

- $\varphi_T(0) = 0$, $\varphi'_T(0) = 1$ et $\varphi'_T(\frac{1}{6}) = T$;
- $\frac{1 + \varphi_T}{\varphi'_T}$ est uniformément minorée (en T et u) par un réel strictement positif;
- $\varphi_T(\frac{1}{6}) \geq \varepsilon T$, où ε est indépendant de T .

Ce lemme conclut la preuve : la minoration 4.6 reste valable, et donc Q_A diverge.

Démonstration. On va préférer construire une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, car cela simplifie l'écriture, et implique le même résultat. On pose ainsi

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(1 + 2T + 3T(x - 1) - (T - 1)(x - 1)^3 \right)$$

Alors

$$f(1) = \frac{2T + 1}{3} \geq \frac{2}{3}T$$

$$f' = T - (T - 1)(x - 1)^2 \geq 1.$$

On vérifie que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f'(1) = T$. Finalement, on calcule

$$\begin{aligned} 3 \frac{1+f}{f'} &= \frac{4-T+3Tx-(T-1)(x-1)^3}{(x-1)^2+T(2x-x^2)} \\ &= \frac{4-3x^2+x^3+\frac{1}{T}(4+(1-x)^3)}{2x(1-x)+\frac{1}{T}(x-1)^2} \\ &\geq \frac{4-3x^2+x^3}{2x(1-x)+1} \quad \text{car } \frac{(x-1)^2}{T} \leq 1 \\ &\geq \frac{4-3}{2+1} = \frac{1}{3} \quad x(1-x) \leq 1. \end{aligned}$$

□

Ceci conclut la preuve du premier point de la proposition 4.4.6 : le lemme 4.4.11 s'applique à la suite de formes $\tilde{\lambda}_T$, et les morphismes de continuation sont les inclusions $\mathbb{Z}[\pi_1^A(M \setminus K)] \subset \mathbb{Z}[\pi_1^{A'}(M \setminus K)]$. □

Remarque 4.4.15. Similairement, l'homologie non linéarisée est l'algèbre librement engendrée par les c_γ . A priori la colimite d'une famille de dga n'est pas définie (bien que sa colimite homotopique le soit), cependant ici les morphismes sont des inclusions.

Une autre façon de calculer cette homologie serait d'utiliser le principe du maximum dans le tangent unitaire d'une variété hyperbolique, prouvé dans [AB18b]. Cependant la variété est maintenant non-compacte, et la forme de contact utilisée provenant de la métrique hyperbolique, elle est "ajustée" à un bord négativement suturé : près de la reliure le champ de Reeb va de R_+ vers R_- . Il faudrait donc prouver que l'homologie calculée redonne bien l'homologie suturée, ce qui est en fait ce qu'on vient de faire.

Question 4.4.16. Concernant l'homologie suturée le calcul est plus difficile : on a bien une orbite par classe d'homotopie libre, et pour l'homologie cylindrique la différentielle est trivialement nulle. Cependant si on autorise plusieurs asymptotes négatives le raisonnement précédent ne fonctionne plus (cependant des considérations sur degré peuvent restreindre les courbes possibles).

Structure produit Pour une legendrienne relativement hypertendue $\Lambda \subset (V, \xi)$, son homologie $LH(\Lambda, V)$ est munie d'un produit défini au niveau des chaînes en comptant des courbes holomorphes dans la symplectisation de V , à bord dans $\mathbb{R} \times \Lambda$, et possédant deux asymptotes positives et une asymptotes négatives : on pose pour toute paire de générateurs

$$\mu(c, c') = \sum_{c_- \in \mathcal{C}(\Lambda)} \# \mathcal{M}(cc'; c_-).c_-,$$

que l'on étend par linéarité.

D'après [BEHWZ03], l'espace de module $\mathcal{M}(cc'; c_-)$ est de dimension (virtuelle) $|c| + |c'| - |c_-| - 1$, et se compactifie en rajoutant des bâtiments holomorphes (là encore, les courbes dans une symplectisation sont quotientées par la translation selon la direction de symplectisation). Plus précisément, les espaces de module 1-dimensionnels admettent une compactification de bord

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{M}(cc'; c_-) = & \left(\bigcup_{|c_0|=|c|-1} \mathcal{M}(c, c_0) \times \mathcal{M}(c_0c'; c_-) \right) \\ & \cup \left(\bigcup_{|c_0|=|c'|-1} \mathcal{M}(c', c_0) \times \mathcal{M}(cc_0; c_-) \right) \\ & \cup \left(\bigcup_{|c_0|=|c_-|+1} \mathcal{M}(cc'; c_0) \times \mathcal{M}(c_0; c_-) \right). \end{aligned}$$

Notons ici l'importance du caractère hypertendu, l'absence de corde contractible limitant les brisures possibles. Compter le bord de ces espaces de module (à c et c' fixés) fournit la relation $0 = \mu(\partial c, c') + \mu(c, \partial c') + \partial\mu(c, c')$ (on suppose ici que le complexe est à coefficients dans \mathbb{Z}_2). Si $c, c' \in \ker \partial$, on obtient

$$\begin{aligned} \mu(c + \partial a, c') &= \mu(c, c') + \mu(\partial a, c') = \mu(c, c') + \mu(a, \partial c') + \partial\mu(a, c') \\ &= \mu(c, c') + \partial\mu(a, c') \quad \text{car } \partial c' = 0, \end{aligned}$$

et donc ce produit est bien défini en homologie.

De plus il s'agit d'un invariant : les espaces de module de courbes dans un cobordisme se brisent de façon similaire, et le morphisme de complexes défini par le cobordisme induit un morphisme d'anneaux en homologie, voir [Ekh08] pour plus de détails.

D'après la section précédente, pour déterminer le produit sur $LH(\Lambda_x, \tilde{V}, \tilde{\lambda}_h)$ on peut se ramener à la forme induite par g_h sur $M \setminus K$. On relève le point considéré à l'espace hyperbolique pour obtenir un réseau $Q \subset \mathbb{H}^3$. Pour toute paire de points $x, y \in Q$, il existe une unique géodésique c_{xy} les reliant, qui se relève en une corde de Reeb dans le fibré unitaire $U^*\mathbb{H}^3$ (muni de la forme correspondant à la métrique hyperbolique), à extrémités dans $\Lambda_Q = \{(x, a), x \in Q, a \in U_x^*\mathbb{H}^3\} \subset U^*\mathbb{H}^3$.

Lemme 4.4.17. *Pour tout $x, y, z \in Q$, il existe une unique courbe holomorphe dans $\mathcal{M}(c_{xy}c_{yz}; c_{xz})$.*

Ce lemme conclut la preuve de la proposition 4.4.6 : pour tout $\gamma, \gamma' \in \pi_1(M \setminus K)$, et pour tout T suffisamment grand, il existe un unique pantalon holomorphe dans la symplectisation de (\tilde{V}, λ_T) , à bord dans $\mathbb{R} \times \Lambda_x$, et positivement asymptote à c_γ et $c_{\gamma'}$. De plus il est

négativement asymptote à $c_{\gamma\gamma'}$.

Démonstration.

Métrie euclidienne : Le produit étant invariant sous isotopie on se ramène à la forme de contact provenant de la métrie euclidienne. Pour cette forme aussi, il existe une unique corde de Reeb joignant deux fibres. Soit g^u un chemin de métriques interpolant entre la métrie hyperbolique g_h et la métrie plate g_{st} sur \mathbb{R}^3 . Il induit un cobordisme lagrangien exact $L \subset W$ entre $U_x\mathbb{R}^3 \subset (U_{g_h}\mathbb{R}^3, \lambda_{g_h})$ et $U_x\mathbb{R}^3 \subset (U_{g_{eu}}\mathbb{R}^3, \lambda_{g_{st}})$. L'application obtenue en comptant les bandes holomorphes dans le cobordisme de Liouville interpolant entre λ_{g_h} et $\lambda_{g_{eu}}$, à bord dans $\mathbb{R} \times U_x\mathbb{R}^3$, est un isomorphisme trivial (au niveau des chaînes), car il existe une unique corde de Reeb (les courbes négativement asymptotes à plusieurs cordes ne sont pas considérées car il n'y a pas de corde contractible).

Espace des 1-jets : On se ramène maintenant à l'espace des 1-jets de la sphère paramétré comme suit :

$$J^1(S^2) = \{(s, q, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times T_q\mathbb{R}^3 \mid |q|^2 = 1, q \cdot p = 0\}.$$

L'application standard vers le fibré tangent unitaire de \mathbb{R}^3 (relativement à la métrie euclidienne) s'écrit

$$\begin{aligned} J^1(S^2) &\rightarrow U\mathbb{R}^3 = \{(\mathbf{x}; v) \in \mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3, v^2 = 1\} \\ \phi &: (t, q, p) \mapsto (tq + p, q) \end{aligned}$$

Alors la forme de contact associée à la métrie euclidienne devient la forme standard :

$$\phi^* \lambda_{eu} = ds - pdq$$

et la fibre $U_0\mathbb{R}^3$ devient la section nulle. Plus généralement, la fibre $U_x\mathbb{R}^3$ devient le 1-jet de la fonction $f_x : q \mapsto \mathbf{x} \cdot q$. En effet $\phi^{-1}(U_x\mathbb{R}^3) = \{sq + p = \mathbf{x}\} \subset J^1(S^2)$. De plus p est orthogonal à q , d'où

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{x} \cdot q \\ p &= x - sq = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot q)q \\ &= d(\mathbf{x} \cdot q)|_{TS^2} \end{aligned}$$

Arbres de Morse : Dans un espace de 1-jets muni de la forme standard, les courbes holomorphes sont déterminées par les arbres de Morse introduits par Ekholm. Etant données trois fonctions $f_0, f_1, f_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, les cordes de Reeb joignant $j^1(f_i)$ à $j^1(f_j)$ correspondent aux points critiques positifs de $f_j - f_i$. Pour $0 \leq i < j \leq 2$, on choisit $q_{ij} \in S^2$, point critique de $f_j - f_i$, (la corde sera dénotée c_{ij} , de degré $\text{ind}q_{ij} - 1$). Un arbre de Morse

d'extrémités $(q_{01}, q_{12}; q_{02})$ est alors une collections de chemins $p_{01}, p_{12}, p_{02} \subset S^2$ tels que

- p_{01} est une trajectoire de $-\nabla(f_1 - f_0)$, reliant q_{01} à $q_* \in S^2$;
- p_{12} est une trajectoire de $-\nabla(f_2 - f_1)$, reliant q_{12} à q_* ;
- p_{02} est une trajectoire de $-\nabla(f_2 - f_0)$, reliant q_* à q_{02} .

Notons que q_* peut coïncider avec une extrémité, auquel cas un des chemin sera constant. Si $|q_{01}| + |q_{12}| - |q_{02}| = 2$ cet arbre sera dit rigide, et le résultat de [Ekh07] affirme que de les arbres rigides sont en correspondance avec les courbes holomorphes rigides.

Produit dans $J^1(S^2)$: La fonction $f_y - f_x : q \mapsto q \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ possède deux points critiques, $q_{xy} = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}$ et son opposé, correspondant à deux cordes de Reeb qui se projettent sur les deux géodésiques entre \mathbf{x} et \mathbf{y} . On note c_{xy} la corde de Reeb allant de Λ_x vers Λ_y , correspondant à q_{xy} . Alors pour tout triplet de point $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique arbre de Morse rigide d'extrémités (q_{xy}, q_{yz}, q_{xz}) .

En effet q_{xz} est un maximum de $f_z - f_x$, et donc un arbre de Morse, si il existe, a sa branche négative constante (ie $q_* = q_{xz}$). De plus, il existe une unique trajectoire de $-\nabla(f_y - f_x)$ allant du maximum q_{xy} à q_{xz} , et similairement pour q_{yz} . \square

Remarque 4.4.18. Notons que $U\mathbb{R}^3$ est non compacte, cependant les courbes restent bornées (pour des asymptotes fixées), car elles sont d'énergie finie (on pourrait la rendre suturée en enlevant un voisinage du bord, mais cela n'est pas nécessaire). Alternativement on pourrait utiliser le principe du maximum du à [BKO19].

4.4.2 Attachement d'une anse de contact circulaire

On considère une anse de dimension $2n + 1$, de la forme

$$H = S_s^1 \times D_x^n \times D_y^n,$$

munie de la forme de contact $\lambda = (1 + \varepsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) ds - y dx$. Le champ de Reeb est donné par

$$R = \partial_s + \varepsilon(\mathbf{x}\partial_x - \mathbf{y}\partial_y)$$

car $X_f = \varepsilon(\mathbf{x}\partial_x - \mathbf{y}\partial_y)$ et $\beta(X_f) = -\varepsilon \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (voir le lemme 4.4.25), et donc il existe une unique orbite de Reeb simple, incluse dans $\{x = y = 0\}$.

On note \tilde{H} l'anse privée d'un voisinage des coins, tel que le champ de Reeb est tangent au nouveau bord. Le bord de l'anse se décompose maintenant en trois parties, représentées

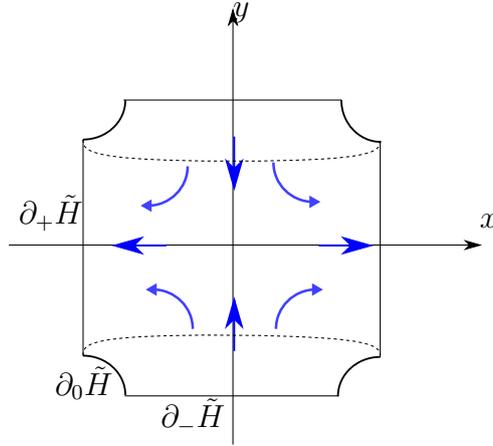


FIGURE 4.5: Champ de Reeb projeté sur une anse circulaire hyperbolique. Les pointillés délimitent le lieu de recollement.

sur la figure 4.5 :

$$\begin{aligned}\partial_- \tilde{H} &= S^1 \times \{(x, y), x^2 \leq 1 - \delta, y^2 = 1\} \\ \partial_0 \tilde{H} &= S^1 \times \{(x, y), x^2 + y^2 = 2 - \delta\} \\ \partial_+ \tilde{H} &= S^1 \times \{(x, y), x^2 = 1, y^2 \leq 1 - \delta\}.\end{aligned}$$

Le champ de Reeb étant transverse à $\partial_{\pm} \tilde{H}$, la forme de contact restreinte à ces hypersurfaces est une forme de Liouville (voir la remarque 1.2.6). De plus pour δ assez petit, il existe un voisinage de $\partial_- \tilde{H}$ contenant $\partial_0 \tilde{H}$ et exactement contactomorphe à $([0, \varepsilon]_t \times \partial_- \tilde{H}, dt + \lambda|_{T\partial_- \tilde{H}})$: similairement à la preuve du lemme 1.2.2, la coordonnée t est donnée par le champ de Reeb.

Si $\tilde{V} = V \cup_{\phi} \tilde{H}$, où (V, λ) est une variété de contact suturée et $\phi : \partial_- \tilde{H} \rightarrow R_{\pm}(V)$ est un symplectomorphisme exact, les homologies legendriennes sont reliées comme suit :

Proposition 4.4.19. [CGHH11, Thm 8.1] *Si $\Lambda \subset V$ est une legendrienne cylindrique, alors $\mathcal{LH}(\Lambda; \tilde{V}) \simeq \mathcal{LH}(\Lambda, V)$.*

L'homologie de contact, quant à elle, est modifiée comme suit : $CH(\tilde{V}) \simeq CH(V) \otimes \mathbb{Z}[c_k, k \geq 0]$.

Démonstration. Il faut légèrement modifier le résultat initial, qui ne s'applique qu'à un recollement de variétés de contact suturé (de ce point de vu l'opération de recollement est décrite dans [CGHH11, §4.3]). Or l'anse \tilde{H} est bien topologiquement suturée, cependant

la forme de contact ne lui est pas adaptée, notamment car le champ de Liouville n'est pas transverse au bord de $(\partial_- \tilde{H}, \lambda_{\uparrow \partial_- \tilde{H}})$:

$$Y = \frac{1}{\varepsilon} \partial_s + \left(x + (1 - (1 - \varepsilon)x.y)y \right) \partial_x.$$

Il est donc transverse au bord si pour tous $x, y \in S^{n-1}$, $1 + x.y - (1 - \varepsilon)(x.y)^2 > 0$, ie si $\varepsilon > 1$.

On se ramène à l'énoncé de [CGHH11] en modifiant la forme de contact (sur un voisinage de R_+), ce qui permet de recoller \tilde{H} munie de la forme de contact $\lambda_C = (1 + Cx.y)ds - ydx$. Pour C assez grand cette forme est adaptée à la variété suturée, et donc on peut appliquer [CGHH11, Thm 8.1] :

$$\mathcal{LC}(\Lambda, (V, \lambda') \cup (\tilde{H}, \lambda_C)) \simeq \mathcal{LC}(\Lambda, V, \lambda')$$

où λ' désigne la forme de contact modifiée. De plus, lors d'un chemin interpolant entre λ et λ' , le champ de Reeb restera transverse à $R_+(V)$. On aura donc $\mathcal{LC}(\Lambda, V, \lambda') \simeq \mathcal{LC}(\Lambda, V, \lambda)$. Le champ de Reeb étant transverse à $\partial_+ \tilde{H}$ pour tout C , ce sera aussi valable pour $V \cup \tilde{H}$, et on aura

$$\mathcal{LC}(\Lambda, (V, \lambda') \cup (\tilde{H}, \lambda_C)) \simeq \mathcal{LC}(\Lambda, (V, \lambda) \cup (\tilde{H}, \lambda_\varepsilon)).$$

On construit maintenant cette forme de contact modifiée, de sorte que :

- hors d'un voisinage du lieu de recollement, $\lambda' = \lambda$;
- sur le lieu de recollement $(-\varepsilon, 0]_t \times \partial_- \tilde{H}$, on a $\lambda = dt + (\lambda_C) \upharpoonright \partial_- \tilde{H}$.

Il suffit pour cela de modifier la forme de Liouville obtenue en restreignant λ au bord. On considère donc un voisinage (dans R_+) de l'image de l'application de recollement, pouvant s'écrire

$$S^1 \times \{(x, y) \in D^n \times D^n, x^2 \leq 2 + \varepsilon', y^2 = 1\},$$

et pour tout $u \in [\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ on définit $\beta_u = (1 + \chi_u(x^2)x.y)\lambda_K - ydx$, où $\chi_u(r)$ est une fonction réelle positive et décroissante, valant u si $r < 1$ et ε si $r \geq 2$. Sa différentielle est :

$$d\beta_u = \chi_u(xdy + ydx) \wedge ds + x.y\chi'_u xdx \wedge ds + dx \wedge dy,$$

et cette forme est symplectique si $ydy \wedge (d\beta_u)^n > 0$. On calcule donc

$$\begin{aligned} ydy \wedge (d\beta_u)^n &= ydy \wedge (\chi xdy + (x.y\chi'x + \chi y)dx) \wedge ds \wedge (dx \wedge dy)^{n-1} \\ &= (y_i(x.y\chi'x_i + \chi y_i)(dx \wedge dy)^n \wedge ds \\ &= ((x.y)^2\chi' + \chi)(dx \wedge dy)^n \wedge ds. \end{aligned}$$

Comme $\chi(x^2) + (x.y)^2\chi'(x^2) \geq (\chi + r\chi')(x^2)$, il suffit de trouver une fonction χ :

$[0, 2 + \varepsilon') \rightarrow \mathbb{R}$ valant u sur $[0, 1]$ et ε sur $[2, 2 + \varepsilon')$, et telle que

$$\chi + r\chi' > 0.$$

Une fonction affine par morceaux vérifie trivialement cette inégalité : sur $(1, 2)$ on a $\chi_u = u - (r - 1)(u - \varepsilon)$ et donc

$$\chi_u + r\chi'_u = (u - \varepsilon)(2 - r) + \varepsilon > 0.$$

On l'approxime par une fonction C^1 en interpolant, par des polynômes de degré 2 : au voisinage de 1 (resp. 2) on prend $u - \varepsilon - A(x - 1)^2$ (resp $\varepsilon + A(x - 2)^2$), qui vérifient bien $(\ln \chi)' \geq -1/x$. Finalement l'inégalité est préservée lorsque la fonction est lissée. \square

On remarque que lors de cette modification de la forme de Liouville, la dynamique du champ de Liouville est bouleversée, cependant on ne fait pas apparaître de zéros car la composante dans la direction ∂_s reste non-nulle. L'auteur remercie tout particulièrement A. Jannaud pour avoir suggéré un tel comportement.

Notons de plus que l'âme $C = K \times \{\mathbf{x}^2 = 0, \mathbf{y}^2 = 1\} \subset \partial_- \tilde{H}$ est une lagrangienne, non exacte car $\beta_{TC} = \lambda_K$, et pour toute lagrangienne $K_s \times S^{n-k-1} \xrightarrow{\iota} R_{\pm}$ telle que $\iota^* \lambda = \lambda_K$, on peut modifier la forme de Liouville pour recoller une telle anse sur un voisinage.

Remarque 4.4.20. On pourrait considérer des anses plus générales, de la forme

$$H_K = (K \times D^n \times D^n, (1 + \varepsilon x \cdot y) \lambda_K - y dx),$$

où λ_K est une forme de contact sur K . Comme précédemment, l'homologie legendrienne devrait être inchangée après recollement, et les homologies de contact suturées devraient vérifier $CC(V \cup H_K) \simeq CC(V) \otimes CC(K, \lambda_K)$.

4.4.3 Du fibré unitaire du complémentaire au complémentaire du conormal

Dans cette section on relie le complémentaire du conormal $U_{\perp} K \subset U^* M$ au fibré unitaire du complémentaire de $K \subset M$.

Proposition 4.4.21. *Il existe un voisinage de $U_{\perp} K \subset U^* M$, et une forme de contact λ adaptée au bord convexe, tels que $(U^* M \setminus \mathcal{N}(U_{\perp} K), \lambda)$ peut être obtenu à partir de $U^*(M \setminus \mathcal{N}(K))$, muni d'une forme de contact adapté, en recollant deux anses $(S^1 \times D^2 \times D^2, \lambda_H)$ selon R_{-} .*

Topologiquement, $UM \setminus U_{\perp}K$ peut en effet être obtenu à partir de $UM \setminus U_{\perp}K$ (on omet ici les voisinages pour faciliter la lecture) en recollant deux anses $S^1 \times D^2 \times D^2$ selon deux tores (qui sont, dans les coordonnées définies ci-dessous, $\{z^2 = \delta, \tau = \pm 1, \eta = 0\}$). Cependant ces tores seront inclus dans la suture d'une métrique produit sur un voisinage du bord. On va donc modifier la forme de contact afin de déplacer la suture, ce qui permettra de recoller les anses sans changer l'homologie legendrienne de la fibre. Il faudra ensuite s'assurer que la variété obtenue est bien le complémentaire d'un voisinage standard de $U_{\perp}K$. La procédure est représentée sur la figure 4.6. Le champ de Reeb est en bleu, et la suture en rouge. En carte, le champ de Reeb est en pointillés lorsqu'il est dirigé par ∂_s , et la suture est représentée par deux points (resp. un point creux) lorsque tout un cercle (resp. un seul point) dans la fibre en fait partie.

4.4.3.1 Cartes et voisinage

On considère le fibré unitaire associé à la métrique euclidienne. On définit ainsi des coordonnées $(t, z) \in S^1 \times D^2$ sur un voisinage du nœud, tel que $K = S^1 \times \{0\}$. On dénote alors $UM \subset TM$ la variété obtenue en prenant la fibre unitaire relativement à la métrique euclidienne $dt^2 + dz^2$, avec des coordonnées $(\tau, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ sur la fibre :

$$\begin{aligned} TM &\supset S^1_t \times D^2_z \times S^2_{\tau, \eta} \\ &= \{(t, z; \tau, \eta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid \tau^2 + |\eta|^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Le conormal du nœud devient $\Lambda = \{z = 0, \tau = 0\}$, et avec ces coordonnées la forme de contact correspondant à la métrique euclidienne s'écrit $\lambda_{\text{eu}} = -\tau dt - \eta \cdot dz$. De plus le champ de Reeb vaut

$$R_{\text{eu}} = \tau \partial_t + \eta \cdot \partial_z \tag{4.7}$$

où ici $\eta \cdot \partial_z = \eta_1 \partial_{z_1} + \eta_2 \partial_{z_2}$.

Voisinage standard On définit maintenant un voisinage standard de la legendrienne, qui sera à bord convexe :

$$N = \{(t, z; \tau, \eta) \mid \tau^2 + |\eta|^2 = 1, \tau^2 + |z|^2 < \delta\} \subset UM,$$

et on pose $V = UM \setminus N$.

Lemme 4.4.22. *Pour δ assez petit, N est la perturbation d'un voisinage standard de Λ , à bord convexe, et λ_{eu} est adaptée à la suture*

$$\Gamma_{\text{eu}} = \{(t, z; \tau, \eta) \mid \tau^2 + |\eta|^2 = 1, \tau^2 + |z|^2 = \delta, \eta \cdot z = 0\}$$

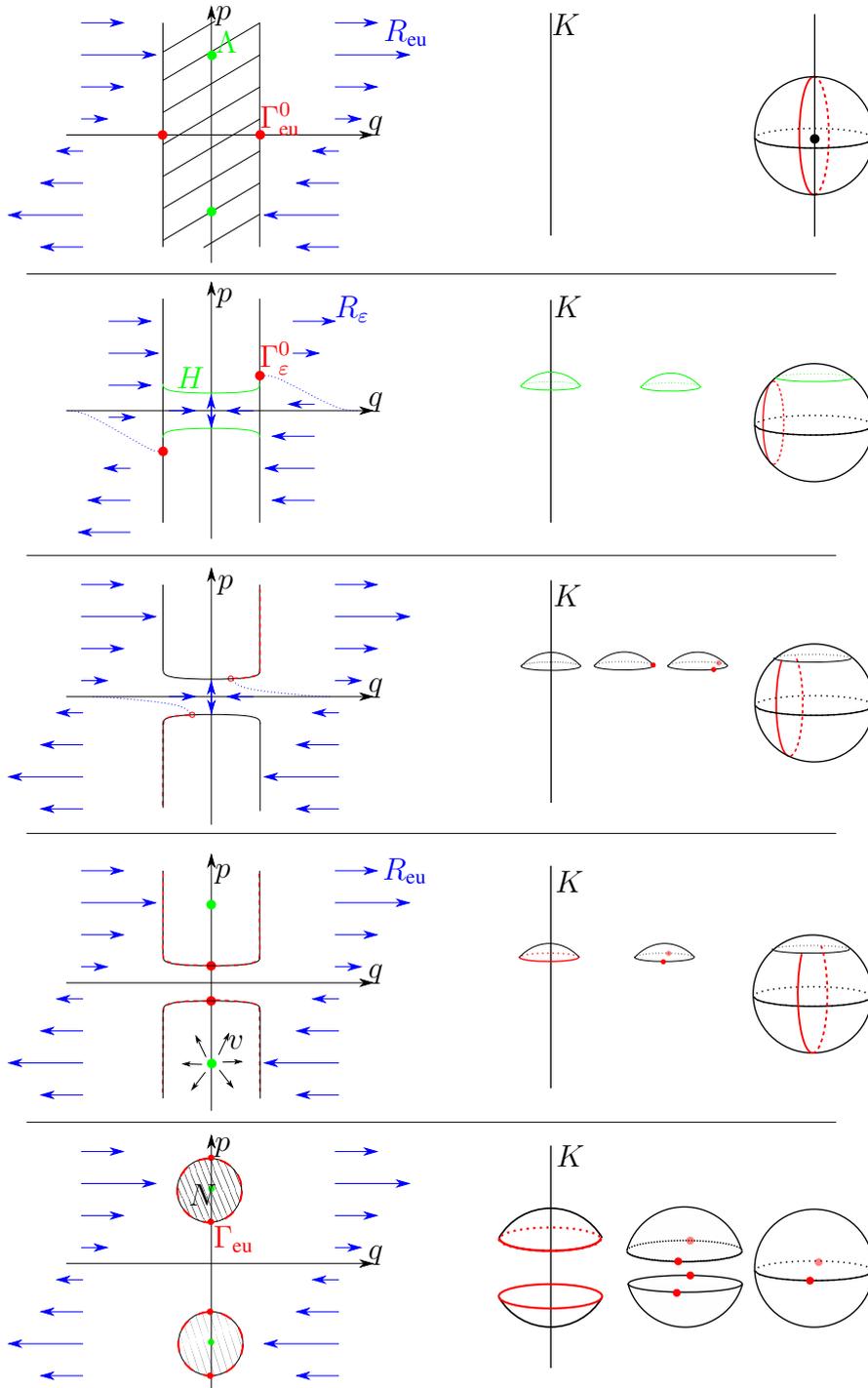


FIGURE 4.6: Recollement d'anse, à gauche en carte stéréographique, à droite comme fibré en sphères. Ligne à ligne : $(V_0, \lambda_{\epsilon u})$; $(V_0, \lambda_{\epsilon})$ avec une anse recollée; $(V_1, \lambda_{\epsilon'})$ pour $\epsilon' \ll \epsilon$; $(V_1, \lambda_{\epsilon u})$ et un champ de contact transverse au bord; $(V, \lambda_{\epsilon u})$.

Démonstration. Pour montrer que N est à bord convexe il suffit d'appliquer le lemme 1.2.4, cependant il faut aussi s'assurer qu'il s'agit d'un voisinage standard. On définit ainsi une application qui étend l'application usuelle $J^1(S^1) \rightarrow U\mathbb{R}^2$ en posant
 En tirant en arrière sur $J^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}_t \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})_{q_1} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})_{q_2} \times \mathbb{R}_{p_1} \times \mathbb{R}_{p_2}$ via

$$J^1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow U$$

$$\psi : (q_i; p_i; s) \mapsto (t = q_1, z = (-s + ip_2)e^{iq_2}; \tau = p_1, \eta = \sqrt{1 - p_1^2}e^{iq_2})$$

on obtient

$$\psi^* \lambda_{\text{eu}} = \sqrt{1 - p_1^2} ds - p_1 dq_1 - \sqrt{1 - p_1^2} p_2 dq_2$$

$$\text{En effet } d\psi = \begin{matrix} & q_1 & q_2 & p_1 & p_2 & s \\ \begin{matrix} t \\ z \\ \tau \\ \eta \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & i(-s + ip_2)e^{iq_2} & & ie^{iq_2} & -e^{iq_2} \\ & & 1 & & \\ & \sqrt{1 - p_1^2}ie^{iq_2} & * & & \end{pmatrix} & \text{, et donc} \end{matrix}$$

$$\lambda_{\text{eu}} \circ d\psi : \partial_{q_1} \mapsto \lambda_{\text{eu}}(\partial_t) = -p_1$$

$$\partial_{q_2} \mapsto -\sqrt{1 - p_1^2}e^{iq_2} \cdot (-s + ip_2)e^{iq_2} = -\sqrt{1 - p_1^2} \cdot i(s + ip_2) = \sqrt{1 - p_1^2} p_2$$

$$\partial_{p_1} \mapsto \lambda_{\text{eu}}(\partial_\tau + * \partial_\eta) = 0$$

$$\partial_{p_2} \mapsto -\sqrt{1 - p_1^2}e^{iq_2} \cdot ie^{iq_2} = 0$$

$$\partial_s \mapsto \sqrt{1 - p_1^2}e^{iq_2} \cdot e^{iq_2} = \sqrt{1 - p_1^2}$$

La legendrienne est maintenant la section nulle :

$$\psi^*(\Lambda) = \{s = p_2 = p_1 = 0\}$$

et le voisinage devient

$$\begin{aligned} \psi^*(N) &= \psi^{-1}(N) = \{|s + ip_2|^2 + |p_1|^2 \leq \delta\} \\ &= \{s^2 + p_1^2 + p_2^2 \leq \delta\} \subset J^1(\mathbb{T}^2). \end{aligned}$$

De plus $\psi^* \lambda_{\text{eu}}$ est une perturbation de la structure standard $\lambda_{\text{st}} = ds - p \cdot dq$, et celle-ci est adaptée à la suture

$$\Gamma_{\text{st}} = \{x \in \partial N, R_{\lambda_{\text{st}}}(x) \in T(\partial N)\} = \{s = 0, \mathbf{p}^2 = \varepsilon\} \subset J^1(\mathbb{T}^2)$$

elle-même associé au champ de contact radial $X_{\text{st}} = s\partial_s + p \cdot \partial_p$, ce dernier étant équivalent (via la forme de contact λ_{st}) à la fonction $f_{\text{st}} = \lambda(X) = s$.

Pour δ assez petit, cette fonction détermine un champ de contact X proche de X_{st} et donc transverse à ∂N . La variété de contact N est donc la perturbation d'un voisinage standard à bord convexe.

Finalement λ_{eu} est adaptée à la suture Γ_{eu} déterminée par $0 = d(\tau^2 + |z|^2)(R_{\text{eu}}) = -\eta \cdot z$. Elle coïncide avec la suture associée au champ de contact radial : $\psi^*(\Gamma_{\text{eu}}) = \{s = 0\} = \Gamma_{\text{st}}$. \square

Remarque 4.4.23. Plus généralement, pour toutes coordonnées $\mathcal{N}(\Lambda) \xrightarrow{f} \Lambda \times D_x^{n+1}$ tel que $f(\Lambda) = \Lambda \times \{0\}$, le voisinage $f^*\{|x| \leq \delta\}$ est la perturbation d'un voisinage standard pour δ assez petit.

Cartes stéréographiques On utilisera deux cartes pour se ramener à un espace plus simple, données par la projection stéréographique de la fibre relativement au point $(\tau, \eta) = (1, 0)$:

$$S^1 \times T^*D^2 \longrightarrow U$$

$$\varphi_{\pm} : (s, q, p) \mapsto (t = s, z = q, \tau = \pm \frac{1 - |p|^2}{1 + |p|^2}, \eta = \frac{2p}{1 + |p|^2})$$

La projection à la base est maintenant l'oubli de la coordonnée p , et la legendrienne devient

$$\varphi_{\pm}^*(\Lambda) = \{q = 0, |p| = 1\}$$

Les inverses sont $\varphi_{\pm}^{-1} : (t, z, \tau, \eta) \mapsto (s = t, q = z, p = \frac{\eta}{1 \pm \tau})$, et le changement de carte est l'application $(s, q, p) \mapsto (s, q, 1/p)$ (ici p est vu comme un complexe).

On calcule

$$\varphi_{\pm}^* \lambda_{\text{eu}} = \mp \frac{1 - |p|^2}{1 + |p|^2} ds - \frac{2}{1 + |p|^2} p \cdot dq \quad (4.8)$$

Dans ces cartes le conormal s'écrit $\varphi_{\pm}^{-1}(\Lambda) = \{q = 0, |p| = 1\}$, et le champ de Reeb devient

$$\varphi_{\pm}^* R_{\text{eu}} = d(\varphi_{\pm}^{-1})(\tau \partial_t + \eta \cdot \partial_z) \quad (4.9)$$

$$= \pm \frac{1 - |p|^2}{1 + |p|^2} \partial_s + \frac{2}{1 + |p|^2} p \cdot \partial_q \quad (4.10)$$

De plus $\varphi_{\pm}^{-1}(N) = \{q^2 + (\frac{1-p^2}{1+p^2})^2 < \delta\}$ et $\varphi_{\pm}^{-1}(\Gamma_{\text{eu}}) = \{p \cdot q = 0\}$.

4.4.3.2 Modification de la forme de contact

On construit ici une forme de contact sur $V = UM \setminus N$, pouvant être obtenue à partir de V_0 , fibré unitaire du complémentaire du nœud, en recollant deux anses circulaires comme

précédemment. Notons tout d'abord que topologiquement, il suffit de recoller de telles anses sur les tores $\{|z| = \delta, \tau = \pm 1, \eta = 0\}$, cependant ceux-ci font partie de la suture. On va donc choisir la forme de contact pour déplacer la suture loin de ces tores, ce qui permettra d'appliquer le résultat de recollement.

Remarque 4.4.24 (Prototype). Dans un espace de 1-jets muni de la forme standard, on peut pencher la suture (associée au champ radial) hors d'un voisinage de la section nulle. En effet le champ de vecteurs ∂_s est λ_{st} -contact (car il s'agit du champ de Reeb), et donc $X = (s + \varepsilon)\partial_s + p\partial_p$ est aussi un champ de contact transverse à $\{s^2 + p^2 = \delta\}$: on calcule $(sds + p.dp)(X) = s^2 + p^2 + \varepsilon s = \delta + \varepsilon s > 0$. La suture associée est alors

$$\Gamma_X = \{X \in \xi\} = \{s^2 + p^2 = \delta, s = -\varepsilon\}$$

On va utiliser ce phénomène pour déplacer la suture.

On décrit tout d'abord le champ de Reeb d'une forme de contact $\lambda = \phi(x)(f(x)ds + \beta)$ sur $S_s^1 \times W_x$, où β est une forme de Liouville sur W .

Lemme 4.4.25. *La condition de contact s'écrit*

$$ds \wedge (fd\beta - df \wedge \beta) \wedge (d\beta)^{n-1} > 0,$$

et le champ de Reeb vaut

$$R = \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\phi + d\phi(Y)}{f - df(Y)} (\partial_s + X_f) + \frac{df(X_\phi)}{f - df(Y)} Y + X_\phi \right)$$

où Y est le champ de Liouville associé à β et X_f est déterminé par $\iota_{X_f} d\beta = df$

En particulier la projection du champ de Reeb parallèlement à ∂_s est dirigée par

$$\pi(R) \sim (\phi + d\phi(Y))X_f + (f - df(Y))X_\phi + df(X_\phi)Y.$$

Démonstration. On a $d(f.ds + \beta) = df \wedge ds + d\beta$, la condition de contact s'écrit donc

$$0 \leq (f.ds + \beta) \wedge (df \wedge ds + d\beta)^n = f ds \wedge (d\beta)^n + \beta \wedge df \wedge ds \wedge (d\beta)^{n-1}.$$

On commence par déterminer le champ de Reeb de $\lambda_0 = f.ds + d\beta$: on obtient

$$R_0 = \frac{1}{f + \beta(X_f)} (\partial_s + X_f).$$

En effet

$$\begin{aligned} i_{\partial_s + X_f} d\lambda_0 &= \iota_{\partial_s + X_f} (df \wedge ds + d\beta) \\ &= -df + \iota_{X_f} d\beta = 0 \end{aligned}$$

car $df(X_f) = (\iota_{X_f} d\beta)(X_f) = 0$.

D'après la relation 1.1, le champ de Reeb de λ est $R = \frac{1}{\phi^2}(\phi R_0 + V)$, où $V \in \xi$ vérifie $(\iota_V d\lambda_0)|_\xi = d\phi|_\xi$. On pose $V = \beta(v)\partial_s - fv$, où $v \in TW$, et l'on détermine maintenant v : en se restreignant à ξ ,

$$\begin{aligned} \iota_{X_\phi} d\beta|_\xi &= d\phi|_\xi \\ &= \iota_{\beta(v)\partial_s - fv}(df \wedge ds + d\beta) \\ &= -f df(v)ds - \beta(v)df - f\iota_v d\beta \\ &= df(v)\beta - \beta(v)df - f\iota_v d\beta \quad \text{car } \xi = \ker f ds + \beta \\ &= \iota(df(v)Y - \beta(v)X_f - fv)d\beta \end{aligned}$$

D'où $fv = df(v)Y - \beta(v)X_f - X_\phi$. Appliquant β puis df on obtient

$$\begin{aligned} (f + \beta(X_f))\beta(v) &= -\beta(X_\phi) \\ (f - df(Y))df(v) &= -df(X_\phi), \end{aligned}$$

et en remarquant que $\beta(X_f) = d\beta(Y, X_f) = -df(Y)$, V se réécrit

$$\begin{aligned} V &= \beta(v)\partial_s - fv \\ &= \beta(v)(\partial_s + X_f) - df(v)Y + X_\phi \\ &= \frac{1}{f + \beta(X_f)} \left(-\beta(X_\phi)(\partial_s + X_f) + df(X_\phi)Y \right) + X_\phi \end{aligned}$$

Finalement le champ de Reeb associé à λ est

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\phi^2}(\phi R_0 + V) \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\phi}{f + \beta(X_f)}(\partial_s + X_f) + \frac{1}{f + \beta(X_f)} \left(-\beta(X_\phi)(\partial_s + X_f) + df(X_\phi)Y \right) + X_\phi \right) \\ &= \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\phi - \beta(X_\phi)}{f + \beta(X_f)}(\partial_s + X_f) + \frac{df(X_\phi)}{f + \beta(X_f)}Y + X_\phi \right) \end{aligned}$$

□

On considère le fibré unitaire du complémentaire d'un voisinage du nœud

$$V_0 = \{q^2 \geq \delta\} \subset UM.$$

Cette variété est à bord convexe, et la forme de contact λ_{eu} est adaptée à la suture

$$\Gamma^0 = \{(s, q, p), q^2 = \delta, p \cdot q = 0\}.$$

En effet, le champ de Reeb est tangent au bord lorsque $q \cdot p = 0$, et cet ensemble est une sous-variété de contact : son espace tangent étant l'intersection des formes qdq et $pdq + qdp$ (qui sont trivialement indépendante sur Γ^0), il est engendré par $\partial_s, V = iq\partial_p, W =$

$iq\partial_q + ip\partial_p$. On vérifie alors la condition de contact :

$$\left(d(1-p^2) \wedge (-2pdq) + 2(1-p^2)(dq \wedge dp)\right)(V, W) = 4(p \cdot iq)^2 \neq 0,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 1.2.4. Notons que cette forme n'est pas invariante par changement de cartes, cependant cela ne sera pas un problème.

Déplacement de la suture On commence par changer de forme de contact (mais pas la structure) pour éloigner la suture du lieu de recollement. On pose ainsi

$$\lambda_\varepsilon = (1 + 2\varepsilon p \cdot q) \left((1 - p^2) ds - 2pdq \right).$$

Proposition 4.4.26. *Le champ de Reeb associé à λ , projeté parallèlement à ∂_s , est dirigé par*

$$\left(\varepsilon(1 + p^2)q - (1 + 4\varepsilon p \cdot q)p \right) \partial_q - \varepsilon(1 - p^2)p \partial_p$$

et cette forme est adaptée au bord au sens de la définition 1.2.4.

Démonstration. Pour ε assez petit, cette forme est une perturbation de $\lambda_0 = (1 - p^2) ds - 2pdq$, dont le champ de Reeb, projeté parallèlement à ∂_s , est dirigé par $-p\partial_q$. Il est donc tangent au bord lorsque $p \cdot q = 0$, qui est une sous-variété de contact comme vu précédemment.

La condition " $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \partial V_0, dq(R_\varepsilon) = 0\}$ est une sous-variété de contact" étant ouverte, λ_ε est adaptée à la suture Γ_ε pour ε suffisamment petit. En appliquant le lemme précédent avec

$$\beta = -2pdq \quad f = 1 - p^2 \quad \phi = 1 + 2\varepsilon p \cdot q,$$

on obtient

$$\begin{aligned} d\beta &= 2dq \wedge dp & Y &= p\partial_p \\ df &= -2pdp & X_f &= -p\partial_q \\ d\phi &= 2\varepsilon(qdp + pdq) & X_\phi &= \varepsilon(q\partial_q - p\partial_p) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \phi + d\phi(Y) &= 1 + 4\varepsilon p \cdot q \\ f - df(Y) &= 1 - p^2 + 2p^2 = 1 + p^2. \end{aligned}$$

Le champ de Reeb, projeté, et donc dirigé par

$$-(1 + 4\varepsilon p \cdot q)p\partial_q + \varepsilon(1 + p^2)(q\partial_q - p\partial_p) + 2\varepsilon p^2 p\partial_p.$$

□

Remarque 4.4.27. Le champ de Reeb de λ_ε (sur $V \setminus N$) est similaire au champ hamiltonien d'une fonction F telle que $F = 1$ sur $\{p \cdot q = \varepsilon\}$, $F(0, 0) = 1 - \varepsilon$ et $(0, 0)$ est un point critique hyperbolique.

On détermine maintenant Γ_ε , en posant $X = q \cdot p$:

$$\begin{aligned} qdq(R_\varepsilon) &= \varepsilon(1 + p^2)q^2 - (1 + 4\varepsilon X)X \\ &= -4\varepsilon X^2 - X + \varepsilon(1 + p^2)\delta, \end{aligned}$$

et donc, au premier ordre en ε , les éléments de Γ_ε satisfont

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{8\varepsilon}(-1 \pm \sqrt{1 + 16\varepsilon^2(1 + p^2)\delta}) \\ &= (1 + p^2)\delta\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

car seule la solution positive subsiste.

Recollement d'anses La suture Γ_ε est donc disjointe du tore $\{q^2 = \delta, p = 0\}$ (qui est inclus dans la région R_-), ce qui permet de recoller une anse circulaire : pour $\varepsilon' \ll \varepsilon$, on pose

$$V_1 = \{q^2 \geq \delta\} \cup \{p^2 \leq \varepsilon'\},$$

où les coins sont lissés. Alors d'après la section 4.4.2, pour toute legendrienne $\Lambda \subset V_0$ on a

$$LH(\Lambda, V_0, \lambda_\varepsilon) \simeq LH(\Lambda, V_1, \lambda_\varepsilon).$$

En effet, l'anse recollée n'est pas strictement munie de la forme de contact standard, cependant le raisonnement du lemme 4.4.19 tient toujours, car R_ε est négativement transverse au nouveau bord :

$$pdp(R_\varepsilon) = -\varepsilon(1 - p^2)p^2 < 0,$$

ce qui permet d'étirer le lieu de recollement (on pourrait aussi se ramener à la forme standard via un chemin de formes de contact, mais ceci n'est pas nécessaire). De plus, si l'on creuse légèrement l'anse (on recolle alors $\{q^2 \leq \delta, p^2 \leq \varepsilon' + \varepsilon''q^2\}$), λ_{eu} est adaptée à V_1 .

Démonstration. Après lissage, le nouveau bord se décompose en

$$\partial V_1 = \{q^2 = \delta, p^2 \geq \varepsilon'\} \cup \{q^2 \leq \delta, p^2 = \mu(q^2)\}.$$

Le champ de Reeb R_{eu} (projeté parallèlement à ∂_s) étant dirigé par $p\partial_q$, il est tangent au bord lorsque $X = p \cdot q = 0$, et donc la suture se décompose en

$$\Gamma^1 = \{q^2 = \delta, p^2 \geq \varepsilon', X = 0\} \cup \{q^2 \leq \delta, p^2 = \mu(q^2), X = 0\}.$$

Comme auparavant, la première composante est bien une sous-variété de contact. Pour la seconde, son espace tangent est l'intersection des formes $pdq + qdp$ et $pdp - \mu'qdq$, qui sont bien indépendantes : si elles sont proportionnelles, alors p et q sont colinéaires, et donc $p \cdot q = 0$ impose $q = 0$ (car p est non nul sur le nouveau bord). Or pdq et pdp ne sont pas proportionnelles.

On vérifie maintenant la condition de contact : l'espace tangent est engendré par les vecteurs ∂_s et

$$\begin{aligned} V &= iq\partial_q + ip\partial_p \\ W &= p^2ip\partial_q + \mu'(q \cdot ip)p\partial_p \end{aligned}$$

On calcule maintenant :

$$\begin{aligned} (df \wedge \beta + fd\beta)(V, W) &= (4pdp \wedge pdq + 2(1 - p^2)dq \wedge dp)(V, W) \\ &= -4\mu'(q \cdot ip)p^2(p \cdot iq) + 2(1 - p^2)(\mu'(q \cdot ip)(iq \cdot p) - p^4) \\ &= -2(1 - p^2)p^4 - 2\mu'(q \cdot ip)^2(1 - p^2 - 2p^2) \neq 0 \end{aligned}$$

et donc λ_{eu} est bien adaptée à V_1 . □

En changeant de carte et en répétant l'opération, on obtient une variété

$$V_2 = UM \setminus \tilde{N},$$

à bord $(\ker \lambda_{\text{eu}})$ -convexe, et telle que λ_{eu} est une forme adaptée. A priori \tilde{N} est distinct du voisinage standard N défini précédemment, cependant on peut interpoler entre les deux variétés tout en gardant le bord convexe. En effet le champ de vecteurs

$$v = q\partial_q - \frac{1 - p^2}{1 + p^2}p\partial_p$$

reste transverse au bord, et est de contact :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \lambda_0 &= \mathcal{L}_{q\partial_q - fp\partial_p}((1 - p^2)ds - 2pdq) \quad \text{où } f = \frac{1 - p^2}{1 + p^2} \\ &= -d(2p \cdot q) + \iota_v(-2pdp \wedge ds + 2dq \wedge dp) \\ &= -2(pdq + qdp) + 2fp^2ds + 2(qdp + fpdq) \\ &= 2fp^2ds + 2(f - 1)pdq \\ &= \frac{2p^2}{1 + p^2}((1 - p^2)ds - 2pdq). \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve de la proposition 4.4.21 :

$$\begin{aligned} LH(\Lambda_x, V_0, \lambda_{\text{eu}}) &\simeq LH(\Lambda_x, V_0, \lambda_\varepsilon) \simeq LH(\Lambda_x, V_2, \lambda_\varepsilon) \\ &\simeq LH(\Lambda_x, V_2, \lambda_{\text{eu}}) \simeq LH(\Lambda_x, V, \lambda_{\text{eu}}), \end{aligned}$$

et implique le théorème 4.4.1, car les formes λ_{eu} et λ_h , utilisées dans la section 4.4.1, sont toutes deux adaptées à la variété V_0 .

Question 4.4.28. Comme vu remarque 4.4.20, étant donnée une variété de contact K^{2k+1} on peut construire une anse de contact $H_K = K \times D^{n-k} \times D^{n-k}$. Étant donnée une sous-variété $N \subset M$, a-t-on encore $UM \setminus U_{\perp}N = U(M \setminus N) \cup H_{UN}$?

4.5 Conormal d'une tresse dans un cylindre

L'objectif est de distinguer les tresses pures à deux brins à partir de leur conormaux (qui sont équivalentes comme sous-variétés différentielles). Notons tout d'abord que les homologies suturées sont inefficaces, car invariantes lors d'un chemin de legendriennes, ce qui permet de tout détresser. On va cependant pouvoir utiliser la suite exacte induite par l'homologie enroulée d'une paire de legendriennes.

Dans cette section S est une surface de genre strictement positif (la sphère ne sera pas considérée, car elle présente une unique tresse pure), et étant donnée une tresse $B \subset I \times S$, son conormal sera noté $\Lambda_B \subset ST^*(I \times S)$.

Théorème 4.5.1. *Les conormaux de deux 2-tresses B, B' , locales et pures, sont isotopes comme legendriennes (à bord fixé) si et seulement si les tresses sont équivalentes :*

$$\Lambda_B \simeq \Lambda_{B'} \Leftrightarrow B \sim B'.$$

La stratégie est la suivante :

- On voit $U(I \times S)$ comme une variété de contact cylindrique obtenue en recollant deux copies de $I \times DS$, ce qui permet de construire une forme de contact adaptée à la variété suturée.
- Quitte à étirer selon la direction du facteur I , le conormal de la tresse est inclus dans un voisinage de $I \times US$, que l'on parvient à compléter explicitement pour obtenir une legendrienne dans $\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times US$.
- On relève ensuite la tresse à \mathbb{R}^2 , ce qui revient à relever US à $U\mathbb{R}^2$. En utilisant le contactomorphisme standard $(U\mathbb{R}^2, \xi_{\text{st}}) \simeq (J^1(S^1), \xi_{\text{st}})$, le conormal de la tresse se relève à une legendrienne dans $(J^1(\mathbb{R} \times S^1), \xi_{\text{st}})$.
- Finalement on montre que dans cette situation le triangle exact de la section 3.2.3 est bien invariant, et le relevé précédent permet de l'expliciter en comptant des trajectoires de Morse.

Question 4.5.2. Est-ce vrai pour toute paire de tresses ? Et s'il existe un cobordisme lagrangien (fixe au bord) entre leurs conormaux ?

Dans [Ng03] est défini un invariant combinatoire d'un nœud à partir d'une représentation en tresse. L'homologie enroulée WLH lui est similaire, cependant on a trois générateurs par brin au lieu de deux. Retrouve-t-on cette dga en quotientant par $c_{\gamma,+} \sim c_{\gamma,-}$?

4.5.1 Groupe des 2-tresses

On donne ici une présentation du groupe des 2-tresses dans une surface S de genre g due à [Bel04], voir aussi [Sco70]. On fixe ainsi deux points $x, y \in S$.

Définition 4.5.3. Une 2-tresse est une paire d'applications $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow S$ telle que

- $f_1(-1) = x, f_2(-1) = y$ et $\{f_1(1), f_2(1)\} = \{x, y\}$
- pour tout $t \in [-1, 1], f_1(t) \neq f_2(t)$

Sa réalisation géométrique est la sous-variété

$$\{(t, f_i(t), t \in [-1, 1], i \in \{1, 2\}\} \subset [1, 1] \times S.$$

Une tresse sera dite *pure* si $f_1(1) = x$ et $f_2(1) = y$, autrement si la permutation induite est triviale.

On dénotera $\mathcal{B}_2(S)$ l'ensemble des tresses à homotopie près, muni de la loi de groupe induite par la concaténation.

Théorème 4.5.4. [Bel04, Thm 5.4] *Le groupe des 2-tresses est engendré par des générateurs σ, a_i , où $i \in \{1, \dots, 2g(S)\}$, avec les relations suivantes*

- $\sigma^{-1}a_i\sigma^{-1}a_i = a_i\sigma^{-1}a_i\sigma^{-1}$
- $a_i\sigma^{-1}a_j = \sigma a_j\sigma^{-1}a_i\sigma$ où $i < j$
- $\prod a_{2i-1}a_{2i}^{-1} \prod a_{2i-1}^{-1}a_{2i} = \sigma^2$

Pour tout élément $w \in \mathcal{B}_2(S)$ on dénotera par B_w sa réalisation géométrique, et une tresse sera dite locale si c'est une puissance de σ . Notons que le sous-groupe des tresses pures est le noyau de l'application $\delta : \mathcal{B}_2(S) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ induite par $\delta(\sigma) = -1, \delta(a_i) = \delta(b_i) = 1$. De plus ce sous-groupe est engendré par

$$t = \sigma^2, a_i, A_i = \sigma^{-1}a_i\sigma^{-1}$$

avec les relations

- $a_iA_i = A_ia_i$
- $a_iA_j = tA_ja_i$
- $\prod a_{2i-1}a_{2i}^{-1} \prod a_{2i-1}^{-1}a_{2i} = t$.

4.5.2 Deux fibres dans le cotangent unitaire d'une surface

On commence par déterminer l'homologie legendrienne linéarisée de deux fibres $\Lambda_x, \Lambda_y \subset U_{g_S}S$, munie de la forme λ_S induite par la métrique de courbure constante (où S n'est pas une sphère). On choisit deux générateurs $\mu_x \in H_1(\Lambda_x)$ et $\mu_y \in H_1(\Lambda_y)$. Les cordes correspondant aux géodésiques, il en existe une par élément de $\pi_1(S)$. Il n'y a pas de corde contractible, et donc il n'existe ni disques ni bandes holomorphes, car la différentielle préserve la classe d'homologie. D'où

$$LH(\Lambda_x, \Lambda_y; U_g S) = \bigoplus_{\gamma \in \pi_1(S)} \mathbb{Z}[\mu_x] \cdot c_\gamma \cdot \mathbb{Z}[\mu_y]$$

4.5.3 Forme de contact adaptée

On considère une tresse $B \subset M = [-1, 1] \times S$, telles que les fonctions f_i sont constantes sur un voisinage du bord. La métrique $g = dz^2 + g_S$ induit une forme de contact sur $V = U_g M$ par $\lambda_{p,q} = g_p(q, *)$. Cette variété de contact est à bord convexe, et λ est adaptée à la suture $\partial I \times U_{g_S}S$. De plus son conormal $U_\perp B \subset U(I \times S)$ est une legendrienne de bord inclu dans cette suture.

On considère la variété de contact suturée contruite comme dans l'exemple 1.3.9, en décomposant la variété en $V \simeq I \times (DS \cup DS)$. On fixe des coordonnées

$$V = \{(u, \nu; z, \eta) \in [-U - \varepsilon, U + \varepsilon] \times \mathbb{R} \times S \times T_z S \mid \nu^2 + g(\eta)^2 = 1\}$$

dans lesquelles la forme de contact s'écrit $\lambda = -\nu du - g_S(\eta, dz)$. Autrement dit

$$\lambda = -\nu du - \sqrt{1 - \nu^2} \lambda_\Gamma$$

où λ_Γ est la forme de contact sur US associée à la métrique g_S . Avec ces coordonnées, le conormal d'un brin $f : [-U, U \rightarrow S]$ est

$$\Lambda_f = \{(u, z = f(u), \nu, \eta), \nu + \dot{f}(u) \cdot \eta = 0\}$$

Par la suite, on supposera que la tresse est constante en dehors de la zone $\{\frac{3}{5}U \leq u \leq \frac{4}{5}U\}$.

On construit maintenant une forme de contact ajustée à la variété suturée, et telle que la legendrienne est inchangée. On pose

$$\tilde{\lambda} = -F(u, \nu)\nu du - G(u, \nu)\lambda_\Gamma,$$

où F, G sont des fonctions lisses telles que

- G est une fonction positive;
- La condition de contact est vérifiée;
- si $|u| \leq U - \varepsilon$, alors $F = G$;

- pour $|\nu| \leq \varepsilon_\nu$ et $|u| \leq U - \varepsilon$, $G = G(u)$ et présente un minimum en 0
- pour $|\nu| \geq 3\varepsilon_\nu$, on a $F = 1$ et $G = \sqrt{1 - \nu^2}$
- G présente deux maximum en $(\pm U \pm \varepsilon, 1)$.
- pour $U - \varepsilon \leq |u| \leq U$ et $|\nu| \leq \varepsilon_\nu$, on a $F = 1$ et $G = e^{\varepsilon_0|u-U|}$

Le champ hamiltonien X_G associé à cette fonction est représenté sur la figure 4.7. La variété suturée associée est alors

$$\tilde{V} = \{G \leq G(U)\}.$$

Le champ de Reeb associé vaut alors (voir 1.3.9)

$$\begin{aligned} R &= X_G + \partial_\nu(\nu F)R_{US} \\ &= X_G + (F + \nu\partial_\nu F)R_{US} \end{aligned}$$

et donc $\tilde{\lambda}$ est une forme ajustée à la variété suturée.

Le conormal d'un brin $f : [-U - \varepsilon, U + \varepsilon] \rightarrow S$, constant hors de $\{\frac{3}{5} \leq u \leq \frac{4}{5}\}$, est donnée par

$$\Lambda_f = \{(u, z = f(u), \nu, \eta) \mid \nu + \dot{f}(u) \cdot \eta = 0.\}$$

De plus, quitte à augmenter U , on peut supposer que cette legendrienne est incluse dans la région $\{|\nu| \leq \varepsilon_\nu\}$, et donc cette legendrienne est inchangée lors d'une isotopie entre $\ker \lambda$ et $\ker \tilde{\lambda}$.

4.5.4 Espace des 1-jets

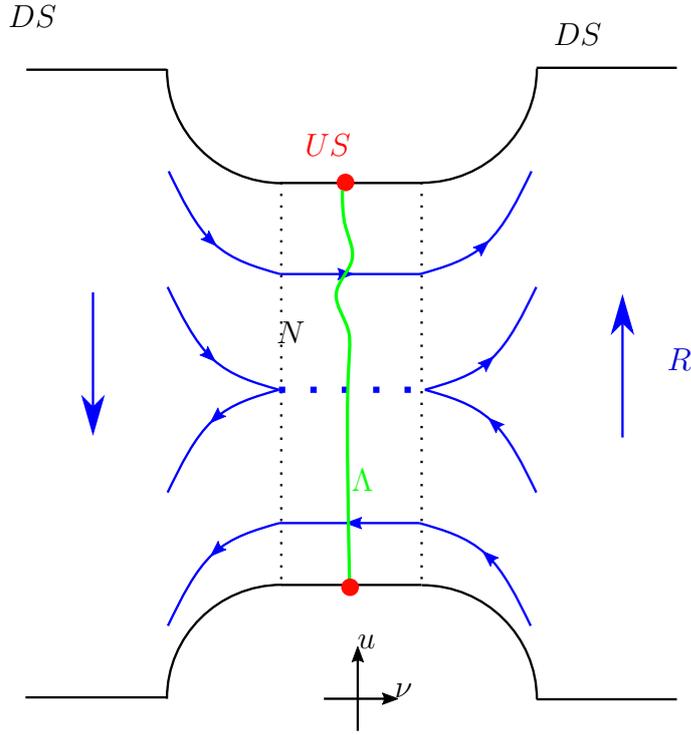
On va maintenant se ramener à l'espace des 1-jets $(J^1(\mathbb{R} \times S^1), \lambda_{st})$ via un contactomorphisme exact. Notons que pour une forme de contact $\tilde{\lambda}$ moins spécifique, on peut toujours se ramener à $(J^1(\mathbb{R} \times S^1), \mu\lambda_{st})$ via le théorème de Gray.

Remarque 4.5.5. La forme de contact $\tilde{\lambda}$ présente des orbites dégénérées, mais elle est bien non-dégénérée en ce qui concerne les cordes.

On définit un voisinage

$$N = \{|\nu| \leq \varepsilon\} \simeq [-U, U]_u \times [-\varepsilon, \varepsilon]_\nu \times US,$$

sur lequel $\tilde{\lambda} = -\nu F(u)du + G(u)\lambda_\Gamma$, qui contient la legendrienne, pour U assez grand.


 FIGURE 4.7: Le champ de Reeb associé à la forme $\tilde{\lambda}$.

Complétion On définit ici des coordonnées sur un voisinage de ∂N , telles que la forme de contact s'écrive comme la contactisation d'une symplectisation. On pose ainsi

$$(-\varepsilon, 0]_\tau \times [-\varepsilon, \varepsilon]_t \times US \longrightarrow N$$

$$\psi_1 : (t, \tau, y, \zeta) \mapsto (u = U + \tau, \nu = -\varepsilon_0 t, (z, \eta) = \phi_{US}^{\mu(\tau, t)}(y, \zeta)),$$

où ϕ_{US}^t est le flot de R_{US} . Alors en prenant $\mu(\tau, t) = te^{-\varepsilon_0 \tau}$, on obtient $\psi_1^* \tilde{\lambda} = dt + e^{\varepsilon_0 \tau} \lambda_\Gamma$.

En effet sur le voisinage de ∂N on a $\tilde{\lambda} = -\nu du + e^{\varepsilon_0(u-U)} \lambda_\Gamma$, et donc on calcule :

$$\begin{aligned} \psi_1^* \tilde{\lambda} : \partial_t &\xrightarrow{d\psi_1} -\varepsilon_0 \partial_\nu + e^{-\varepsilon_0 \tau} R_{US} \xrightarrow{\tilde{\lambda}} 1 \\ \partial_\tau &\mapsto \partial_u - \varepsilon_0 t e^{-\varepsilon_0 \tau} R_{US} \mapsto \varepsilon_0 t - \varepsilon_0 t = 0 \\ \partial_y &\mapsto (\phi_{US}^\mu)_* \partial_y \mapsto e^{\varepsilon_0 \tau} (\phi_{US}^\mu)_* (\zeta \cdot \partial_y) = e^{\varepsilon_0 \tau} \zeta \cdot \partial_y \\ \partial_\zeta &\mapsto (\phi_{US}^\mu)_* \partial_\zeta \mapsto 0 \end{aligned}$$

Il existe une application similaire à l'autre extrémité de N , par conséquent la complétion de N est

$$\begin{aligned} N^* &= \mathbb{R} \times (-\varepsilon_\nu, \varepsilon_\nu) \times US \\ \lambda^* &= -\nu F(u) du + G(u) \lambda_\Gamma \end{aligned}$$

où $G = e^{\varepsilon_0|u-U|}$ et $F = 1$ pour $|u| \geq U - \varepsilon$.

De plus, le bord du conormal d'un brin terminant en $z_0 \in S$ est $\{u = U, \nu = 0, z = z_0\}$, dont la préimage par ψ_1 est $\{t = 0, \tau = 0, y = z_0\}$. La legendrienne complétée en enroulant par un hamiltonien H est donc, dans N^* :

$$\Lambda^H = \Lambda \cup \left\{ (u, \nu = \varepsilon_0 f_H(|u-U|), z, \eta) \mid |u| \geq U, (z, \eta) \in \phi_{US}^{\tilde{g}_H(|u-U|)} U_{z_0} S \right\},$$

où f_H et \tilde{g}_H sont données par (voir section 1.5) :

$$\begin{aligned} f_H(x) &= \int_0^x e^{\varepsilon_0 x} H'' dx \\ \tilde{g}_H(x) &= H'(x) + \mu(x, -f_H(x)) = H' - f_H(x) e^{-\varepsilon_0 x} \\ &= H' - e^{-\varepsilon_0 x} \int e^{\varepsilon_0 x} H'' \end{aligned}$$

Relevé à \mathbb{R}^2 On relève maintenant les brins en des chemins $\hat{f}_i : [-U, U] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La projection $\mathbb{R}^2 \rightarrow S$ induit un contactomorphisme $\Pi : (U\mathbb{R}^2, \ker \lambda_{\text{eu}}) \rightarrow (UT^2, \ker \lambda_{US})$, où λ_{eu} est la forme provenant de la métrique plate sur \mathbb{R}^2 (les formes provenant des métriques plates et hyperboliques sur \mathbb{R}^2 sont proportionnelles). On relève maintenant le voisinage. On pose

$$\begin{aligned} \hat{N} &= [-U, U]_u \times [-\varepsilon, \varepsilon]_\nu \times U\mathbb{R}_{(\hat{z}, \hat{\eta})}^2 \\ \hat{\lambda} &= -\nu F(u) du + G(u) \Pi^* \lambda_\Gamma. \end{aligned}$$

On suppose désormais que $S = \mathbb{T}^2$, et donc $\Pi^* \lambda_{US} = \lambda_{\text{eu}}$. Une modification du contactomorphisme standard $(U\mathbb{R}^2, \lambda_{\text{eu}}) \simeq (J^1(S^1), \lambda_{\text{st}})$ permet alors de se ramener à $J^1(\mathbb{R} \times S^1)$: on définit

$$\begin{aligned} J^1(\mathbb{R}_a \times S_q^1) &\rightarrow \hat{N} \\ \psi_2 : (s; a, q; \alpha, p) &\mapsto \left(u = a, \hat{z} = \frac{p + sq}{G(a)}, \nu(a, \alpha); \hat{\eta} = q \right) \end{aligned}$$

où $q \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{R}^2$ est tel que $p \cdot q = 0$.

Lemme 4.5.6. *En prenant $\nu = \frac{G\alpha + G'}{GF}$, on obtient $\psi_2^* \hat{\lambda} = ds - \alpha da - pdq$. De plus le conormal d'un brin $f : [-U, U] \rightarrow S$ devient le 1-jet de la fonction $h_f : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par*

- si $|u| \leq U$, $h_f = G(a) \hat{f}(a) \cdot q$;
- si $|a| \geq U$, $h_f = e^{\varepsilon_0|a-U|} z_0 \cdot q + \varepsilon_0 \int_0^{|a-U|} e^{\varepsilon_0 x} H' dx$.

Démonstration. En coordonnées on a $\hat{\lambda} = -F(u)\nu du + G(u)\lambda_{eu}$, et donc on calcule

$$\begin{aligned}\psi_2^* \hat{\lambda} : \partial_s &\xrightarrow{d\psi_2} \frac{1}{G} q \partial_z \xrightarrow{\hat{\lambda}} q \cdot q = 1 \\ \partial_a &\mapsto \partial_u + * \partial_\nu - \frac{G'}{G^2} (p + sq) \partial_z \mapsto -\frac{G\alpha + G'}{GF} F - \frac{G'}{G^2} Gq \cdot (p + sq) \\ &= \alpha + \frac{G'}{G} - \frac{G'}{G} = \alpha \\ \partial_{q_i} &\mapsto \frac{s}{G} \partial_{z_i} + \partial_{\eta_i} \mapsto sq \cdot \partial_{z_i} = 0 \quad \text{car } \partial_{q_i} \text{ est orthogonal à } q \\ \partial_\alpha &\mapsto * \partial_\nu \mapsto 0 \\ \partial_p &\mapsto \frac{1}{G} p \partial_z + * \partial_\eta \mapsto \frac{1}{G} p \cdot q = 0.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\Lambda^H \subset N^*$ le conormal d'un brin $f : [-U, U] \rightarrow S$, que l'on relève en $\hat{\Lambda}^* \subset \hat{N}$. Il n'est pas nécessaire d'expliciter toutes les équations pour exprimer $\psi_2^*(\hat{\Lambda})$, la coordonnée s déterminant la legendrienne :

- si $|a| \leq U$, on a $p + sq = G(a)\hat{f}(a)$, et donc $s = (p + sq) \cdot q = G(a)\hat{f}(a) \cdot q$;
- si $|a| \geq U$, on a $\phi_{U\mathbb{R}^2}^x(U_{z_0}\mathbb{R}^2) = \{(\hat{z}, \hat{\eta}) \mid |\hat{z} - \hat{z}_0| = x, \hat{\eta} = \frac{\hat{z} - \hat{z}_0}{|\hat{z} - \hat{z}_0|}\}$, et donc lorsque $(z, \eta) = (\frac{p+sq}{G}, q)$, la condition $(\hat{z}, \hat{\eta}) \in \phi_{US}^{\tilde{g}_H}(U_{z_0}\mathbb{R}^2)$ impose

$$\begin{aligned}\tilde{g}_H &= |z - z_0| = (z - z_0) \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \\ &= \left(\frac{p + sq}{G} - z_0\right) \cdot q = \frac{s}{G} - z_0 \cdot q,\end{aligned}$$

Sur cette région $G = e^{\varepsilon_0(|a-U|)}$, et donc

$$\begin{aligned}s &= G(\tilde{g}_H + z_0 \cdot q) \\ &= e^{\varepsilon_0|a-U|} \left(H'(|a-U|) + z_0 \cdot q \right) - f_H(|a-U|).\end{aligned}$$

De plus $e^{\varepsilon_0 x} H' - \int_0^x e^{\varepsilon_0 t} H'' = \varepsilon_0 \int e^{\varepsilon_0 t} H'$.

□

Lorsque $g(S) > 1$: Si la surface n'est plus un tore, relever la forme de contact sur $U_g S$ (provenant d'une métrique à courbure constante) à $U\mathbb{R}^2 \simeq J^1(S^1)$ diffère de la forme standard par un facteur conforme. On se ramène au cas euclidien en interpolant vers la forme standard. En chaque degré, il existe une unique corde par classe d'homotopie, et donc l'application induite par un cobordisme est un isomorphisme trivial (au niveau des chaînes). Là encore on obtient deux legendriennes : la section nulle et le 1-jet d'une fonction $h = G(a)\hat{f}(a) \cdot q + \tilde{H}(a)$.

4.5.5 Preuve du théorème

Invariance du triangle : dans cette situation l'invariance du triangle 3.2.3 est vérifiée. Un chemin de legendriennes suturées $(\Lambda_0^u, \Lambda_1^u)$, fixe au bord, induit des applications

$$\begin{aligned} F &: LC(\Lambda_0^0, \Lambda_1^0) \longrightarrow LC(\Lambda_0^1, \Lambda_1^1) \\ F^{\mathcal{W}} &: \mathcal{W}LC(\Lambda_0^0, \Lambda_1^0) \longrightarrow \mathcal{W}LC(\Lambda_0^1, \Lambda_1^1) \\ F^{\text{ext}} &: LC^{\text{ext}}(\Lambda_0^0, \Lambda_1^0) \longrightarrow LC^{\text{ext}}(\Lambda_0^1, \Lambda_1^1) \end{aligned}$$

Soit C le $\mathbb{Z}[\mu_x] - \mathbb{Z}[\mu_y]$ -bimodule engendré par les $c_\gamma, \gamma \in \pi_1(S)$.

Lemme 4.5.7. *Pour toute tresse $LC(\Lambda_0, \Lambda_1) = C$, et $LC^{\text{ext}}(\Lambda_0, \Lambda_1) = C[1] \oplus C[1]$. De plus, pour tout cobordisme lagrangien exact fixe au bord, interpolant entre deux conormaux de tresses, $F^{\text{ext}} = Id$*

Démonstration. En effet pour chaque élément $\gamma \in \pi_1(S)$, il existe trois cordes de Reeb : une en $u = 0$, dénoté c_γ^0 , et une dans $\{\pm u > U\}$, dénotée c_γ^\pm . Pour des raisons homotopiques, il n'existe pas de bande holomorphes joignant deux cordes intérieures ou deux cordes extérieures.

Les applications précédentes comptent des courbes à bord dans un cobordisme lagrangien exact. D'après le lemme 2.5.12, une corde positivement asymptote à c_γ^+ reste dans la zone $\{u \geq U\}$. Pour des raisons de degré (on a $|c_\gamma^\pm| = |c_\gamma| + 1$), c_γ^+ est la seule asymptote négative possible. Or il existe une unique courbe holomorphe positivement et négativement asymptote à une même corde. En effet son énergie étant faible, elle doit rester dans la zone triviale du cobordisme, il s'agit donc d'une perturbation de la bande triviale. De plus on peut choisir les chemins permettant d'obtenir les coefficients dans $H_1(\Lambda)$ invariants lors de l'isotopie, par conséquent $F^{\text{ext}}c_\gamma^\pm = c_\gamma^\pm$. \square

Triangles exacts On détermine maintenant le triangle exact associé à la tresse locale B_{t^k} . On fixe un point $z_0 \in S$, et on choisit le représentant

$$\begin{aligned} f_1 &: u \mapsto z_0 + \varepsilon_1 e^{i\eta_k(u)} \\ f_2 &: u \mapsto z_0 \end{aligned}$$

où $\eta_k : [-U, U] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application croissante (resp. décroissante) si $k \geq 0$ (resp. $k \leq 0$), nulle sur $[-U, \frac{3U}{5}]$, et valant $2\pi k$ sur $[\frac{4U}{5}, U]$.

La legendrienne $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = U_{B_1}(I \times S) \cup U_{B_2}(I \times S)$ complétée, où Λ_1 est enroulée par l'hamiltonien H , est incluse dans N^* . On choisit un relevé à \mathbb{R}^2 tel que le point 0 se projete sur z_0 , et le point $(\varepsilon_1, 0)$ se projete sur $z_0 + \varepsilon_1$, extrémité de B_1 . Alors $\psi_2^*(\hat{\Lambda}) \subset J^1(\mathbb{R} \times S^1)$

est le 1-jet des fonctions

$$\begin{aligned} h_1(a, q) &= G(a)\varepsilon_1 \cos(\theta + \eta_k(a)) && \text{si } |u| \leq U \\ &\varepsilon_1 e^{\varepsilon_0|a-U|} \cos \theta + \varepsilon_0 \int_0^{|a-U|} e^{\varepsilon_0 x} H' && \text{si } |u| \geq U \\ h_2(a, q) &= 0 \end{aligned}$$

où $q = e^{i\theta} \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 4.5.8. Si S n'est pas un tore, on peut tout de même se ramener à cette situation en prenant deux brins très proches (en fixant la perturbation rendant la variété suturée).

Les bandes homomorphes dans $J^1(S^1 \times \mathbb{R})$, à bord dans $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, correspondant aux trajectoires de Morse de $h = h_2 - h_1$, on pose $\tilde{H} = \varepsilon_0 \int_0^x e^{\varepsilon_0 x} H'$, et on calcule

$$\begin{aligned} dh_1 &= \varepsilon_1 (\cos(\theta + \eta_k)G' - \sin(\theta + \eta_k)\eta'_k) da - \varepsilon_1 \sin(\theta + \eta_k) d\theta && \text{si } |a| \leq U \\ &\varepsilon_0 (\varepsilon_1 e^{\varepsilon_0|a-U|} \cos \theta + \tilde{H}'(|a-U|)) da - \varepsilon_1 e^{|a-U|} \sin \theta d\theta && \text{si } |a| \geq U. \end{aligned}$$

Cette différentielle s'annule lorsque $\sin(\theta + \eta_k) = 0$ et $G' = 0$, si $|a| \leq U$, ou lorsque $\sin \theta = 0$ et $\varepsilon_1 e^{\varepsilon_0|a-U|} + \tilde{H}'(|a-U|) = 0$. La fonction h présente bien trois points critiques positifs, dénotés $c_0 \in \{|a| \leq U\}$ et $c_{\pm} \in \{\pm a \geq U\}$, et il existe une unique trajectoire de Morse rigide reliant c_{\pm} à c_0 , dans un voisinage du chemin paramétré par $\theta = \pi - \eta_k(a)$, voir la figure 4.8.

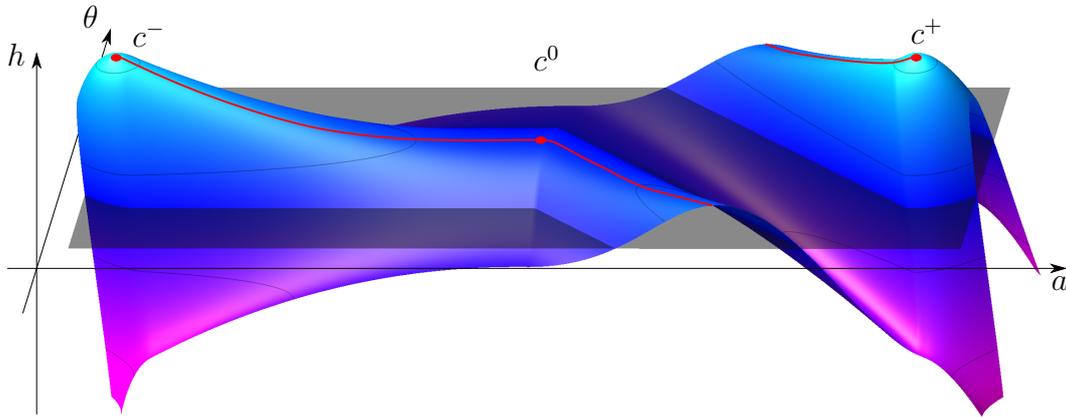


FIGURE 4.8: La fonction h (non lissée) pour la tresse B_t , ses points critiques positifs et ses trajectoires de gradient.

Lemme 4.5.9. Pour ε_0 assez petit et G assez proche de 1, il suffit de compter les courbes dans (N^*, λ^*)

Démonstration. En effet la différence d'actions entre c_{\pm} et c_0 tend vers 0 lorsque ε_0 tend vers 0 et G tend vers 1. Le résultat de monotonie 2.4.3 implique qu'une courbe de faible énergie reste dans N^* . \square

Le complexe legendrien enroulé est donc $\mathcal{WLC}(\Lambda_1, \Lambda_2) = C[1] \oplus C \oplus C[1]$, et la différentielle est

$$\partial c_{\gamma}^0 = 0 \quad \partial c_{\gamma}^{-} = c_{\gamma}^0 \quad \partial c_{\gamma}^{+} = \mu_x^{-k} c_{\gamma}^0 \mu_y^k$$

On prouve maintenant le théorème. Si Λ_k et $\Lambda_{k'}$ sont isotopes (comme legendriennes), on peut les recoller pour obtenir une isotopie entre Λ_0 et $\Lambda_{k-k'}$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que $k' = 0$. L'invariance du triangle exact implique la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C & \xrightarrow{0} & C[1] & \xrightarrow{f_0} & C[1] \oplus C[1] & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \delta_0} & C & \xrightarrow{0} & \longrightarrow \\ & \downarrow F_* & & \downarrow F_*^{\mathcal{W}} & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow F_* & & \\ \longrightarrow & C & \xrightarrow{0} & C[1] & \xrightarrow{f_k} & C[1] \oplus C[1] & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \delta_k} & C & \xrightarrow{0} & \longrightarrow \end{array}$$

où les applications f_0, f_k, δ_0 et δ_k sont des morphismes de $\mathbb{Z}[\mu_x] - \mathbb{Z}[\mu_y]$ -bimodules, et

$$f_0(c_{\gamma}) = (c_{\gamma}, c_{\gamma}), \quad \delta_0 = \text{Id}, \quad \delta_k(c_{\gamma}) = \mu_x^{-k} c_{\gamma} \mu_y^k.$$

Or ceci est impossible, car le noyau de $\text{Id} \oplus \delta_0$ est la diagonale engendrée par les éléments $\mu_x^i (c_{\gamma}, -c_{\gamma}) \mu_y^j$, ce qui n'est pas le cas de $\text{Id} \oplus \delta_k$.

Remarque 4.5.10. Si on prend une legendrienne hypertendue $\Lambda_{\Gamma} \subset \Gamma = \partial W_i$, où W_1, W_2 sont des domaines de Liouville, on peut considérer la legendrienne suturée cylindrique et centrée $\Lambda = I \times \Lambda_{\Gamma} \subset I \times (W_1 \cup W_2)$. Les homologies de cette legendrienne devraient s'exprimer à partir de celle de Λ_{Γ} comme suit :

$$LH(\Lambda, V) \simeq LH(\Lambda_{\Gamma}, \Gamma) \quad \mathcal{WLH}(\Lambda_1, \Lambda_2; V) \simeq LH(\Lambda_{\Gamma,1}, \Lambda_{\Gamma,2}; \Gamma)[1]$$

4.5.6 Cas général

On esquisse brièvement comment étendre ce résultat à une tresse quelconque, ce qui impliquerait la conjecture 1.

L'application δ_k sur le complexe $LC(U_x S, US)$ provient d'un cobordisme lagrangien exact dans $\mathbb{R} \times US$ induit par le chemin de fibres relevant $f_i : I \rightarrow S$ à US . On conjecture³ que ceci est vrai pour toute tresse B (constante sur $\{u \leq 0\}$), et donc le triangle exact serait

$$\xrightarrow{0} C[1] \longrightarrow C[1] \oplus C[1] \xrightarrow{\text{Id} \oplus \delta} C \xrightarrow{0}$$

3. Ceci est impliqué par la dernière conjecture de la section 3.2.3.

Remarque 4.5.11. On peut toujours se ramener à l'espace des 1-jets $J^1(S^1 \times \mathbb{R})$, cependant il faut maintenant s'assurer que l'on peut encore se restreindre à un tel voisinage. L'argument de petite énergie n'est plus valable, mais une borne sur la coordonnée ν similaire au résultat du paragraphe 4.2 permettrait de conclure.

Concernant les générateur du groupe des tresses, un tel triangle suffit à les distinguer de la tresse triviale : si le premier (resp. second) brin de la tresse relève $\gamma_0 \in \pi_1(S)$, on devrait avoir $\delta(c_\gamma) = c_{\gamma_0^{-1}\gamma}$ (resp. $\delta(c_\gamma) = c_{\gamma\gamma_0}$).

Notons que ce triangle est insuffisant pour les commutateurs de la forme $\gamma t \gamma t^{-1}$, pour lesquels une homologie à coefficients dans $H_2(V, \Lambda)$ devrait être utilisée. Plus précisément, il faut fixer un point par legendrienne, et, pour chaque classe d'homotopie possible (dans V), un chemin $p_i \subset V$ les reliant. Ensuite, pour toute corde de Reeb on choisit une surface (dont une partie du bord est incluse dans la legendrienne) réalisant un cobordisme avec un de ces chemins p_i . Alors une courbe holomorphe détermine un élément de $H_2(V, \Lambda \cup \{p_i\})$.

4.6 Algèbre des cordes

On donne une possible interprétation topologique du degré 0 de l'homologie du conormal d'un entrelas dans une 3-variété, suivant les idées de [Ng05a]. On définit ici l'algèbre des cordes d'une variété à bord, avant de prouver un théorème de recollement. La différence principale avec la définition originale est l'utilisation d'un point fixé par composante connexe de bord, qui permet de considérer des chemins traversant le bord de la variété.

On considère ainsi une 3-variété M (potentiellement à bord) contenant une surface $S = \sqcup S_k$ telle que $\partial M \subset S$, ainsi qu'un entrelas $L = \sqcup K_i$ tel que $\partial L \subset \partial M$. On fixe un point $z_k \in S_k \setminus \partial L$ par composante connexe de S , et au plus un point $x_i \in \overset{\circ}{K}_i$ par composante connexe de L . On décompose l'entrelas en

$$L = L^* \cup \bar{L} = \bigcup_i K_i^* \cup \bigcup_j \bar{K}_j$$

où les K_i^* sont les composantes possédant un point marqué.

On définit alors l'*algèbre des cordes* $\mathcal{C}(M; S, \mathbf{z}; L, \mathbf{x})$ de la façon suivante

- On a un générateur e_i^* par composante de L^* , un générateur \bar{e}_j par composante de \bar{L} , et un générateur f_k par point z_k . Ces éléments sont idempotents et le produit de deux éléments distincts est nul.
- Pour chaque composante connexe de L^* on a des éléments $\lambda_i^{\pm 1}$ et $\mu_i^{\pm 1}$, qui commutent et tels que $\lambda_i \cdot \lambda_i^{-1} = e_i = \lambda_i^{-1} \cdot \lambda_i$, et similairement pour les μ_i .

- Pour chaque composante connexe de \bar{L} on a des éléments $\bar{\mu}_j^{\pm 1}$ tels que $\bar{\mu}_j \cdot \bar{\mu}_j^{-1} = \bar{e}_j = \bar{\mu}_j^{-1} \cdot \bar{\mu}_j$.
- Pour chaque point z_k on a des éléments $\tau_k^{\pm 1}$ tels que $\tau_k \tau_k^{-1} = \tau_k^{-1} \tau_k = f_k$.
- Les autres générateurs sont les classes d'homotopies de chemins continus

$$c : (\mathring{I}, \partial I) \rightarrow (M \setminus L, \{z_k\} \cup L \setminus \{x_i\})$$

On insiste sur le fait que le produit de deux lacets n'est pas la concaténation, mais bien un produit formel. On quotiente ensuite cette algèbre par (l'idéal engendré par) des relations de composabilité :

- $c \cdot c' = 0$ lorsque $c(1)$ et $c'(0)$ ne sont pas dans la même composante connexe de $L \cup \{z_k\}$, autrement dit on ne considère que les mots de lacets "composables" (aux x_i près);
- si $c(1) = c'(0) \in \mathbf{z}$, $cc' = c \cdot c'$, la concaténation des chemins. Autrement dit un mot de chemins ne peut passer par un point de \mathbf{z} qu'au début du premier chemin ou à la fin du dernier chemin.
- $c \cdot e_i = 0$ si $c(1) \notin K_i^*$,
- $e_i \cdot c = 0$ si $c(0) \notin K_i^*$,

et similairement pour les $e_j, e_k, \mu_i, \lambda_i, \nu_k$ et τ_k .

Finalement on quotiente cette algèbre par les relations d'écheveau représentées sur la figure 4.9.

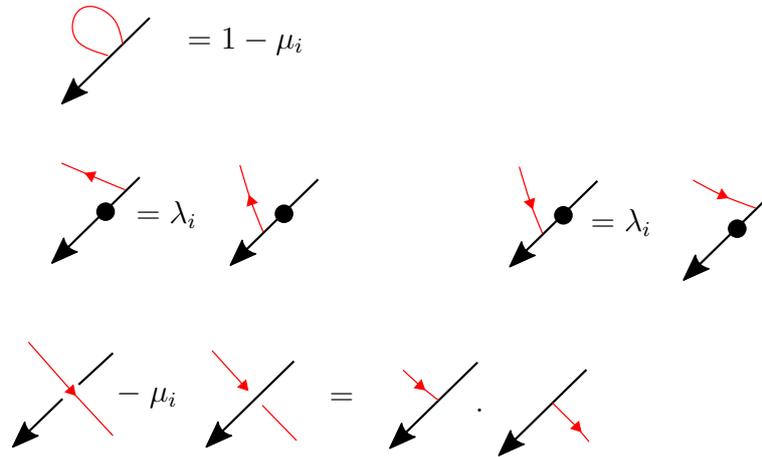


FIGURE 4.9: Relations d'écheveau pour un entrelacs à bord

Remarque 4.6.1. Une définition catégorique semble préférable. De même que les groupoïdes généralisent la notion de groupe (voir [Bro06] et [May99]), l'algèbre précédente devrait pouvoir être vue comme un "algébroïde".

On définit similairement l’algèbre des cordes d’une surfaces S , munie de points marqués y_k , coorientés, et de points z_k , que l’on dénote $\mathcal{C}(S, \mathbf{y}, \mathbf{z})$:

- On a un générateur f_k par point y_k , et f'_k par point z_k . Ces éléments sont idempotents et le produit de deux éléments distincts est nul.
- Pour chaque point y_k on a des éléments $\tau_k^{\pm 1}$ tels que $\tau_k \tau_k^{-1} = \tau_k^{-1} \tau_k = f_k$
- Les autres générateurs sont les classes d’homotopies des chemins continus

$$c : (\overset{\circ}{I}, \partial I) \rightarrow (S \setminus \{y_k\}, \{y_k, z_k\})$$

avec les relations

- $c \cdot c' = 0$ lorsque $c(1) \neq c'(0)$ (là encore on ne considère que les mots de lacets composables);
- si $c(1) = c(0) \in \mathbf{z}$, $cc' = c \cdot c'$;
- $c \cdot f_k = 0$ si $c(1) \neq y_k$;
- $f_k \cdot c = 0$ si $c(0) \neq y_k$,

et similairement pour les τ_k et f'_k .

Finalement on quotiente cette algèbre par (l’idéal engendré par) les relations d’écheveau de la figure 4.10.

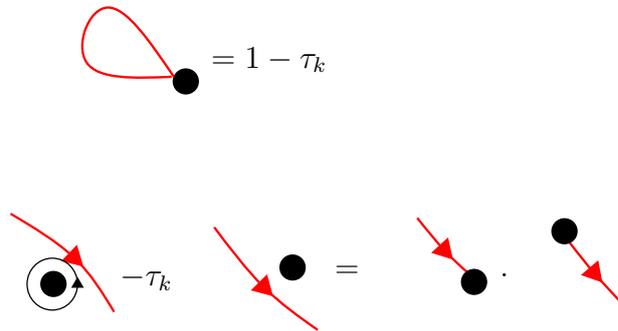


FIGURE 4.10: Relations d’écheveau pour un point coorienté z_k dans une surface

Lemme 4.6.2. *L’inclusion (topologique) induit des morphismes d’algèbres*

$$\mathcal{C}(\partial M; \partial L, \{z_k\}) \rightarrow \mathcal{C}(M; S, z_k; L, x_i)$$

Similairement si $M = M_1 \cup M_2$ et S est une surface telle que $\partial M_i \subset S$, on a une application

$$\mathcal{C}(M_i; S_i, \mathbf{z}_i; L_i, \mathbf{x}_i) \rightarrow \mathcal{C}(M; S, \mathbf{z}; L, \mathbf{x}),$$

où $S_i = S \cap M_i$, $\mathbf{z}_i = \mathbf{z} \cap M_i$, $L_i = L \cap M_i$ et $\mathbf{x}_i = \mathbf{x} \cap M_i$.

Démonstration. L’image des variables homologiques est déterminé par l’inclusion $\partial L \subset$

L . Il suffit ensuite de constater que l'inclusion topologique envoie les relations des espaces de départ sur des relations des espaces d'arrivée. \square

Théorème 4.6.3. *Le diagramme suivant est un push-out dans la catégorie des algèbres :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(S, \partial L, \mathbf{z}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(M_1; S, \mathbf{z}_1; L_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(M_2, S, \mathbf{z}_2, L_2) & \longrightarrow & \mathcal{C}(M, S, \mathbf{z}, L, \mathbf{x}) \end{array}$$

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose :

$$\begin{aligned} C_\partial &= \mathcal{C}(S, \partial L \cup \mathbf{z}) \\ C_i &= \mathcal{C}(M_i; S, \mathbf{z}_i; L_i) \\ C &= \mathcal{C}(M, S, \mathbf{z}, L, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

et on dénote $i_k : C_\partial \rightarrow C_k$ et $j_k : C_k \rightarrow C$ les applications induites par les inclusions. Soit D une algèbre, et $f_i : C_i \rightarrow D$ une paire de morphismes telle que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$. On cherche à remplir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & C_1 & & \\ & i_1 \nearrow & & \searrow f_1 & \\ C_\partial & & & & D \\ & i_2 \searrow & & \nearrow j_1 & \\ & & C_2 & & \\ & & & \nearrow j_2 & \\ & & & & C \xrightarrow{\exists! h} D \\ & & & \searrow f_2 & \end{array}$$

On commence par définir un candidat pour l'application h : pour tout générateur de $\mathcal{C}(M, S, K)$, on choisit un chemin γ le représentant. Ce chemin peut alors s'écrire comme une concaténation de chemins

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma'_1 \cdot \dots \cdot \gamma_r \cdot \gamma'_r,$$

où $\gamma_i \subset M_1$ et $\gamma'_i \subset M_2$. On choisit alors des chemins $c_i, 1 \leq i \leq r$ allant de l'extrémité de $\gamma_i(1)$ vers $x \in \partial L \cup \mathbf{z}$, pour poser

$$h([\gamma]) = f_1([\gamma_1 \cdot c_1])f_2([c_1^{-1} \cdot \gamma'_2 \cdot c_2])f_1([c_2^{-1} \cdot \gamma_2 \cdot c_3])\dots f_2([c_r^{-1} \cdot \gamma'_r])$$

Les images des éléments des C_i étant imposées, cette définition est la seule possible. Il suffit donc de vérifier que cette application est bien définie. On commence par montrer que $h([\gamma])$ ne dépend que de γ . Sans perte de généralité, on peut supposer $r = 1$ (et γ_1, γ'_1, c_1 seront simplement notés γ, γ', c), ce qui suit restant valable pour un mot de taille quelconque. Soit \tilde{c} est un chemin reliant $\gamma_1(1)$ à $\tilde{x} \in \mathbf{z}$. En notant le produit \otimes , pour bien

le distinguer de la concaténation, on a :

$$\begin{aligned}
 f_1(\gamma \cdot c) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c} \cdot \tilde{c}^{-1} \cdot c) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c} \otimes \tilde{c}^{-1} \cdot c) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c} \otimes i_1(\tilde{c}^{-1} \cdot c)) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c}) \otimes f_1 \circ i_1(\tilde{c}^{-1} \cdot c) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c}) \otimes f_2 \circ i_2(\tilde{c}^{-1} \cdot c) \otimes f_2(c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c}) \otimes f_2(\tilde{c}^{-1} \cdot c \otimes c^{-1} \cdot \gamma') \\
 &= f_1(\gamma \cdot \tilde{c}) \otimes f_2(\tilde{c}^{-1} \cdot \gamma')
 \end{aligned}$$

Finalement, un autre représentant $\tilde{\gamma}$ différant de γ par une suite d'homotopies et de relations d'écheveau, il suffit de montrer que chacune de ces modification de change pas la définition de h .

Relations d'écheveau : ces relations étant locales, on peut supposer, quitte à découper les chemin en des points de \mathbf{z} , que le mot est inclu soit dans M_1 soit dans M_2 . Les relations de C provenant de relations dans C_i , l'image par h est inchangée.

Homotopie : Là encore, quitte à découper le chemin (et l'homotopie), on peut se restreindre à des homotopies incluses dans M_1 , M_2 ou ∂M_i . L'application h est donc bien définie, et c'est un morphisme d'algèbres par construction. \square

Conjectures On formule plusieurs conjectures utilisant et généralisant cette construction :

1. Similairement à [CELN17], l'algèbre des cordes $\mathcal{C}(M; S, \mathbf{z}; L, \mathbf{x})$ est isomorphe au degré 0 de $\mathcal{W}\mathcal{L}H(U_{\perp}^*L \cup U_{\mathbf{z}}M)$, à coefficient dans $H_1(\Lambda)$. Notons que dans la variété suturée, $U_{\mathbf{z}}M$ est en réalité l'union disjointe de deux fibres $D_{\mathbf{z}}(\partial M) \subset D(\partial M) \simeq R_{\pm}$, de même bord (après projection à la suture). Plus précisément, une fibre dans $D(\partial M)$ se relève en une legendrienne dans $\mathbb{R}^{\pm} \times R_{\pm}$, non centrée mais ceci ne pose pas problème.
2. Les applications induites par les inclusions topologiques $(\partial M, \partial L) \subset (M_i, L_i)$ correspondent à des applications $\mathcal{L}C(U_{\partial L}(\partial M), U\partial M) \rightarrow \mathcal{W}\mathcal{L}C(U_{\perp}L, UM)$. Les applications induites par $(M_i, L_i) \subset (M, L)$ proviennent d'inclusions de variétés suturées.
3. La variété d'augmentation associée à un entreclas $L \subset M$ est

$$\begin{aligned}
 V(M, L) &= \{(a_i, b_i) \mid \exists \varepsilon : \mathcal{L}C(U_{\perp}L, UM) \rightarrow k \text{ augmentation, } \varepsilon(\mu_i) = a_i, \varepsilon(\lambda_i) = b_i\} \\
 &\subset \tilde{V}(M, L) = \{(a_i, b_i) \mid \exists \varepsilon : \mathcal{L}H_0 \rightarrow k \text{ morphisme d'algèbres, } \varepsilon(\mu_i) = a_i, \varepsilon(\lambda_i) = b_i\}.
 \end{aligned}$$

Le diagramme précédent devrait alors se traduire par :

$$\tilde{V}(M, L) = \tilde{V}(M_1, L_1) \cap \tilde{V}(M_2, L_2) \subset \tilde{V}(\partial M_i, \partial L).$$

Notons que pour un nœud K dans une variété sans bord M , sa variété d'augmentation $V_2(K, M)$ (associée au complexe à coefficient dans $H_2(M, K)$) permet de retrouver le polynôme d'Alexander du nœud, voir [DE20].

4. Soit (V, ξ) une variété de contact contenant une legendrienne cylindrique Λ , et $\Sigma \subset V$ une hypersurface convexe de suture Γ telle $\Lambda \cap \Sigma \subset \Gamma$. Si $L_{\pm} \subset R_{\pm}$ sont des lagrangiennes de même bord engendrant la catégorie de Fukaya de R_{\pm} , on devrait avoir un push-out d'algèbres de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{LH}(\partial L_{\pm} \cup \partial \Lambda; \Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{W}\mathcal{LH}(\Lambda_-, \Lambda_1, \Lambda_+; V_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}\mathcal{LH}(\Lambda_+, \Lambda_2, \Lambda_-; V_2) & \longrightarrow & \mathcal{LH}(\Lambda \cup \Lambda_+ \cup \Lambda_-; V) \end{array}$$

où Λ_{\pm} sont des relevés legendriens de L_{\pm} dans un voisinage de R_{\pm} . En effet, similairement à l'algèbre des cordes, on pourrait "casser" les cordes de Reeb traversant Σ , ainsi que les courbes holomorphes, selon les legendriennes Λ_{\pm} (cette idée est déjà visible en dimension 3 dans l'isomorphisme entre homologie de contact plongée et homologie de Heegaard-Floer [CGH11]). Un résultat similaire a été prouvé dans [Siv11] pour un nœud legendrien dans (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) (cependant les variétés à bord considérées ne sont pas suturées). Notons qu'une fibre dans le fibré cotangent d'une variété engendre effectivement sa catégorie de Fukaya d'après [Abo11], et donc le théorème de cette section est un cas particulier de cette conjecture (si la première conjecture est vraie). Similairement pour le cas non-legendrien (ie $\Lambda = \emptyset$) on s'attend à un push-out

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{LH}(\partial L_{\pm}; \Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{W}\mathcal{LH}(\Lambda_-, \Lambda_+; V_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{W}\mathcal{LH}(\Lambda_+, \Lambda_-; V_2) & \longrightarrow & \mathcal{LH}(\Lambda_+ \cup \Lambda_-; V) \end{array}$$

où ces homologies legendriennes sont des algèbres sur leurs homologies de contact respectives.

Table des figures

1	The standard contact structure in \mathbb{R}^3	14
2	A one-dimensional moduli space of gradient trajectories.	15
3	A one-dimensional moduli space of broken curves.	17
4	Reeb vector field of a contact form adapted to the convex boundary. . . .	19
5	Completion of a Legendrian	22
1.1	Champ de Reeb d'une forme de contact adaptée à une hypersurface convexe.	42
1.2	Legendrienne cylindrique dans une variété suturée	46
1.3	Le champ de Reeb dans une variété de contact cylindrique. Sur la gauche les fonctions f et g ne dépendent que de r , et $R = R_\Gamma$ en $\{r = 0\}$, tandis que sur la droite la forme de contact est adaptée à la variété suturée. . . .	47
1.4	Variété négativement suturée	48
1.5	Variété positivement suturée obtenue en modifiant la forme de contact puis en enlevant un voisinage (hachuré).	54
1.6	Complétion d'une legendrienne : $\partial_2\Lambda$ est prolongée cylindriquement, et $\partial_1\Lambda$ est prolongée par une isotopie positive.	56
2.1	Bâtiment holomorphe à bord dans une lagrangienne, figure tirée de [Abb14]	62
2.2	Orientation du bord près d'une perçure négative	72
3.1	Chemins utilisés pour définir le degré, le point de départ étant rouge . . .	78
3.2	Forme de contact λ_A	88
3.3	Forme de contact sur un voisinage de Γ	96
3.4	Forme de contact sur la complétion d'une variété à suture circulaire . . .	96
4.1	1. Un voisinage standard de la section nulle ; 2. Le champ de Reeb (bleu) et le voisinage (hachuré) après l'opération concave-convexe ; 3. La variété saturée vue comme un produit.	108

TABLE DES FIGURES

4.2 Graphe des fonctions étirant le bord. 119

4.3 Les métriques correspondant aux formes de contact λ_h , $\tilde{\lambda}_h$ et $\tilde{\lambda}_2$, et une géodésique presque tangente au bord. 120

4.4 Géodésiques dans le demi-espace hyperbolique 122

4.5 Champ de Reeb projeté sur une anse circulaire hyperbolique. Les pointillés délimitent le lieu de recollement. 130

4.6 Recollement d'anse, à gauche en carte stéréographique, à droite comme fibré en sphères. Ligne à ligne : (V_0, λ_{eu}) ; $(V_0, \lambda_\varepsilon)$ avec une anse recollée; $(V_1, \lambda_{\varepsilon'})$ pour $\varepsilon' \ll \varepsilon$; (V_1, λ_{eu}) et un champ de contact transverse au bord; (V, λ_{eu}) 134

4.7 Le champ de Reeb associé à la forme $\tilde{\lambda}$ 146

4.8 La fonction h (non lissée) pour la tresse B_t , ses points critiques positifs et ses trajectoires de gradient. 150

4.9 Relations d'écheveau pour un entrelas à bord 153

4.10 Relations d'écheveau pour un point coorienté z_k dans une surface 154

Bibliographie

- [AB18a] Garrett ALSTON et Erkao BAO. « Exact, graded, immersed Lagrangians and Floer theory ». *Journal of Symplectic Geometry* 16.2 (2018).
- [AB18b] Byung Hee AN et Youngjin BAE. *A Chekanov-Eliashberg algebra for Legendrian graphs*. 2018. arXiv : 1803.05717 [math.SG].
- [Abb04] Casim ABBAS. « Pseudoholomorphic strips in symplecticisations III : Embedding properties and compactness ». *Journal of Symplectic Geometry* 2.2 (2004).
- [Abb14] Casim ABBAS. *An introduction to compactness results in symplectic field theory*. Springer, 2014.
- [Abo10] Mohammed ABOUZAIID. « A geometric criterion for generating the Fukaya category ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* 112.1 (2010).
- [Abo11] Mohammed ABOUZAIID. « A cotangent fibre generates the Fukaya category ». *Advances in Mathematics* 228.2 (2011).
- [AJ10] Manabu AKAHO et Dominic JOYCE. « Immersed Lagrangian floer theory ». *Journal of Differential Geometry* 86.3 (2010).
- [AL12] Michèle AUDIN et Jacques LAFONTAINE. *Holomorphic curves in symplectic geometry*. T. 117. Birkhäuser, 2012.
- [AS10] Mohammed ABOUZAIID et Paul SEIDEL. « An open string analogue of Viterbo functoriality ». *Geometry & Topology* 14.2 (2010).
- [Aur14] Denis AUROUX. « A beginner’s introduction to Fukaya categories ». *Contact and symplectic topology*. Springer, 2014, p. 85-136.
- [BC14] Frédéric BOURGEOIS et Baptiste CHANTRAINE. « Bilinearized Legendrian contact homology and the augmentation category ». *Journal of Symplectic Geometry* 12.3 (2014).

BIBLIOGRAPHIE

- [BEHWZ03] Frederic BOURGEOIS, Yakov ELIASHBERG, Helmut HOFER, Kris WYSOCKI et Eduard ZEHNDER. « Compactness results in Symplectic Field Theory ». *Geometry & Topology* 7.2 (2003).
- [Bel04] Paolo BELLINGERI. « On presentations of surface braid groups ». *Journal of Algebra* 274.2 (2004).
- [Bis61] Errett BISHOP. « Mappings of Partially Analytic Spaces ». *American Journal of Mathematics* 83.2 (1961), p. 209-242.
- [BKO19] Youngjin BAE, Seonhwa KIM et Yong-Geun OH. « A wrapped Fukaya category of knot complement ». (2019). arXiv : 1901.02239.
- [BO09a] Frédéric BOURGEOIS et Alexandru OANCEA. « An exact sequence for contact-and symplectic homology ». *Inventiones mathematicae* 175.3 (2009).
- [BO09b] Frédéric BOURGEOIS et Alexandru OANCEA. « Symplectic homology, autonomous Hamiltonians, and Morse-Bott moduli spaces ». *Duke Mathematical Journal* 146.1 (2009).
- [Bou02] Frédéric BOURGEOIS. « A Morse-Bott approach to contact homology ». Thèse de doct. stanford university, 2002.
- [Bou03] Frédéric BOURGEOIS. « Introduction to contact homology ». *Summer School in Berder : Holomorphic curves and contact topology, (June 2003)* (2003).
- [Bou06] Frédéric BOURGEOIS. « Contact homology and homotopy groups of the space of contact structures ». *Mathematical Research Letters* 13.1 (2006).
- [BP12] R. BENEDETTI et C. PETRONIO. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN : 9783642581588.
- [Bro06] Ronald BROWN. *Topology and groupoids*. www.groupoids.org, 2006.
- [CCDR19] Baptiste CHANTRAINE, Vincent COLIN et Georgios DIMITROGLOU RIZELL. « Positive Legendrian isotopies and Floer theory ». *Annales de l'Institut Fourier* 69.4 (2019).
- [CE12] Kai CIELIEBAK et Yakov ELIASHBERG. *From Stein to Weinstein and back : symplectic geometry of affine complex manifolds*. T. 59. American Mathematical Soc., 2012.
- [CE13] Kai CIELIEBAK et Yasha ELIASHBERG. *Flexible Weinstein manifolds*. 2013. arXiv : 1305.1635 [math.SG].

- [CELN17] Kai CIELIEBAK, Tobias EKHOLM, Janko LATSCHEV et Lenhard NG. « Knot contact homology, string topology, and the cord algebra ». *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* 4 (2017).
- [CF09] Kai CIELIEBAK et Urs FRAUENFELDER. « A Floer homology for exact contact embeddings ». *Pacific Journal of Mathematics* 239.2 (2009).
- [CGH10] Vincent COLIN, Paolo GHIGGINI et Ko HONDA. « Embedded contact homology and open book decompositions ». (2010). arXiv : 1008.2734.
- [CGH11] Vincent COLIN, Paolo GHIGGINI et Ko HONDA. « Equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology via open book decompositions ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.20 (2011).
- [CGHH11] Vincent COLIN, Paolo GHIGGINI, Ko HONDA et Michael HUTCHINGS. « Sutures and contact homology I ». *Geometry & Topology* 15.3 (2011).
- [CH05] Vincent COLIN et Ko HONDA. « Constructions de champs de Reeb sous contrôle et applications ». *Geometry & Topology* (2005).
- [Cha10] Baptiste CHANTRAINE. « Lagrangian concordance of Legendrian knots ». *Algebraic & Geometric Topology* 10.1 (2010).
- [Che97] Yuri CHEKANOV. « Differential algebras of Legendrian links ». (1997). arXiv : math/9709233.
- [CM05] K. CIELIEBAK et K. MOHNKE. « Compactness for punctured holomorphic curves ». *J. Symplectic Geom.* 3.4 (2005), p. 589-654.
- [CO18] Kai CIELIEBAK et Alexandru OANCEA. « Symplectic homology and the Eilenberg–Steenrod axioms ». *Algebraic & Geometric Topology* 18.4 (2018).
- [Cou12] Sylvain COURTE. « Contact manifolds with symplectomorphic symplectizations ». (2012). arXiv : 1212.5618.
- [CRGG15] Baptiste CHANTRAINE, Georgios Dimitroglou RIZELL, Paolo GHIGGINI et Roman GOLOVKO. *Floer theory for Lagrangian cobordisms*. 2015. arXiv : 1511.09471 [math.SG].
- [CZ84] Charles CONLEY et Eduard ZEHNDER. « Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian Equations ». *Communications on pure and applied mathematics* 37.2 (1984).

BIBLIOGRAPHIE

- [DE20] Luís DIOGO et Tobias EKHOLM. « Augmentations, annuli, and Alexander polynomials ». *arXiv preprint arXiv :2005.09733* (2020).
- [Dem97] Jean-Pierre DEMAILLY. *Complex analytic and differential geometry*. Citeseer, 1997.
- [DR16] Georgios DIMITROGLOU RIZELL. « Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of $P \times \mathbb{R}$ and applications ». *Quantum Topology* 7.1 (2016).
- [EENS13] Tobias EKHOLM, John B ETNYRE, Lenhard NG et Michael G SULLIVAN. « Knot contact homology ». *Geometry & Topology* 17.2 (2013).
- [EES02] Tobias EKHOLM, John ETNYRE et Michael G. SULLIVAN. *Legendrian Submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} and Contact Homology*. 2002. arXiv : math / 0210124 [math.SG].
- [EES05a] Tobias EKHOLM, John ETNYRE et Michael SULLIVAN. « Non-isotopic Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1} ». *Journal of Differential Geometry* 71.1 (2005).
- [EES05b] Tobias EKHOLM, John ETNYRE et Michael G. SULLIVAN. « Orientations in Legendrian Contact Homology and Exact Lagrangian Immersions ». *International Journal of Mathematics* 16.05 (2005).
- [EES07] Tobias EKHOLM, John ETNYRE et Michael SULLIVAN. « Legendrian contact homology in $P \times \mathbb{R}$ ». *Transactions of the American Mathematical Society* 359.07 (2007).
- [EES09] Tobias EKHOLM, John B. ETNYRE et Joshua M. SABLOFF. « A duality exact sequence for legendrian contact homology ». *Duke Mathematical Journal* 150.1 (2009).
- [EG91] Yakov ELIASHBERG et Mikhael GROMOV. « Convex symplectic manifolds ». *Several complex variables and complex geometry, Part 2* (1991).
- [EG98] Yasha ELIASHBERG et Misha GROMOV. « Lagrangian intersection theory : finite-dimensional approach ». *Translations of the American Mathematical Society-Series 2* 186 (1998).
- [EGH00] Y. ELIASHBERG, A. GLVENTAL et H. HOFER. « Introduction to Symplectic Field Theory ». *Visions in Mathematics* (2000).
- [Ekh07] Tobias EKHOLM. « Morse flow trees and Legendrian contact homology in 1-jet spaces ». *Geometry & Topology* 11.2 (2007).

- [Ekh08] Tobias EKHOLM. « Rational symplectic field theory over \mathbb{Z}_2 for exact Lagrangian cobordisms ». *Journal of the European Mathematical Society* (2008).
- [Ekh11] Tobias EKHOLM. « Rational SFT, Linearized Legendrian Contact Homology, and Lagrangian Floer Cohomology ». *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology* (2011).
- [Ekh13] Tobias EKHOLM. *Notes on topological strings and knot contact homology*. 2013. arXiv : 1312.0800 [math.SG].
- [ENS17] Tobias EKHOLM, Lenhard NG et Vivek SHENDE. « A complete knot invariant from contact homology ». *Inventiones mathematicae* 211.3 (2017).
- [Flo88] Andreas FLOER. « Morse theory for Lagrangian intersections ». *Journal of differential geometry* 28.3 (1988).
- [FOOO09] Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA et Kaoru ONO. « Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction ». *IP Studies in Advanced Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI* 1 (2009).
- [Gab83] David GABAI. « Foliations and the topology of 3-manifolds ». *J. Differential Geom.* 18.3 (1983), p. 445-503.
- [Gei06] Hansjörg GEIGES. « Contact geometry ». *Handbook of differential geometry* 2 (2006).
- [Gei08] Hansjörg GEIGES. *An introduction to contact topology*. T. 109. Cambridge University Press, 2008.
- [Gir91] Emmanuel GIROUX. « Convexité en topologie de contact ». Thèse de doct. Lyon 1, 1991.
- [GL89] C. McA. GORDON et J. LUECKE. « Knots are Determined by Their Complements ». *Journal of the American Mathematical Society* 2.2 (1989), p. 371-415.
- [GPS19] Sheel GANATRA, John PARDON et Vivek SHENDE. « Covariantly functorial wrapped Floer theory on Liouville sectors ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* (2019).
- [Gra58] Hans GRAUERT. « On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds ». *Annals of Mathematics* 68.2 (1958), p. 460-472.

BIBLIOGRAPHIE

- [Gro85] Mikhael GROMOV. « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds ». *Inventiones mathematicae* 82.2 (1985).
- [HH19] Ko HONDA et Yang HUANG. *Convex hypersurface theory in contact topology*. 2019. arXiv : 1907.06025 [math.SG].
- [Hut02] Michael HUTCHINGS. « An index inequality for embedded pseudoholomorphic curves in symplectizations ». *Journal of the European Mathematical Society* 4.4 (2002).
- [Hut10] Michael HUTCHINGS. « Embedded contact homology and its applications ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010) (In 4 Volumes) Vol. I : Plenary Lectures and Ceremonies Vols. II–IV : Invited Lectures*. World Scientific, 2010.
- [Lau10] François LAUDENBACH. « A Morse complex on manifolds with boundary ». *Geometriae Dedicata* 153.1 (2010).
- [Lau92] François LAUDENBACH. « Appendix. On the Thom-Smale complex ». en. *An extension of a Theorem by Cheeger and Müller*. Astérisque 205. Société mathématique de France, 1992, p. 219-233.
- [LR68] R.H. LAGRANGE et A.H. RHEMTULLA. « A Remark on the Group Rings of Order Preserving Permutation Groups ». *Canadian Mathematical Bulletin* 11.5 (1968).
- [Mar74] Albert MARDEN. « The geometry of finitely generated Kleinian groups ». *Annals of Mathematics* (1974), p. 383-462.
- [Mas14] Patrick MASSOT. « Topological methods in 3-dimensional contact geometry ». *Contact and symplectic topology*. Sous la dir. de Frédéric BOURGEOIS, Vincent COLIN et András STIPSICZ. Springer, 2014, p. 27-83.
- [Mat02] Yukio MATSUMOTO. *An introduction to Morse theory*. T. 208. American Mathematical Soc., 2002.
- [May99] J Peter MAY. *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago press, 1999.
- [McD91] Dusa MCDUFF. « Symplectic manifolds with contact type boundaries ». *Inventiones mathematicae* 103.3 (1991), p. 651-671.
- [MS12] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON. *J-holomorphic curves and symplectic topology*. T. 52. American Mathematical Soc., 2012.

- [MS17] Dusa MCDUFF et Dietmar SALAMON. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, 2017.
- [MSW69] John Willard MILNOR, Michael SPIVAK et Robert WELLS. *Morse theory*. T. 1. Princeton university press Princeton, 1969.
- [Nar60] Raghavan NARASIMHAN. « Imbedding of holomorphically complete complex spaces ». *American Journal of Mathematics* 82.4 (1960).
- [Ng03] Lenhard L. NG. « Computable Legendrian invariants ». *Topology* 42.1 (2003).
- [Ng05a] Lenhard NG. « Knot and braid invariants from contact homology I ». *Geometry & Topology* 9.1 (2005).
- [Ng05b] Lenhard NG. « Knot and braid invariants from contact homology II ». *Geometry & Topology* 9.3 (2005).
- [Ng08] Lenhard NG. « Framed knot contact homology ». *Duke Mathematical Journal* 141.2 (2008).
- [Par16] John PARDON. « An algebraic approach to virtual fundamental cycles on moduli spaces of pseudo-holomorphic curves ». *Geometry & Topology* 20.2 (2016).
- [Par19] John PARDON. « Contact homology and virtual fundamental cycles ». *Journal of the American Mathematical Society* 32.3 (2019).
- [Riz16] Georgios Dimitroglou RIZELL. « Legendrian ambient surgery and Legendrian contact homology ». *Journal of Symplectic Geometry* 14.3 (2016).
- [Rol14] Dale ROLFSEN. « Low-dimensional topology and ordering groups ». *Mathematica Slovaca* 64.3 (2014).
- [Rou17] Guillaume ROUX. « Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension ». Thèse de doct. 2017.
- [RS93] Joel ROBBIN et Dietmar SALAMON. « The Maslov index for paths ». *Topology* 32.4 (1993).
- [Sco70] G. P. SCOTT. « Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface ». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 68.3 (1970).
- [She19] Vivek SHENDE. « The conormal torus is a complete knot invariant ». *Forum of Mathematics, Pi*. T. 7. Cambridge University Press. 2019.

BIBLIOGRAPHIE

- [Sie11] Richard SIEFRING. « Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves ». *Geometry & Topology* 15.4 (2011). ISSN : 1465-3060.
- [Sik94] SIKORAV. « Some properties of holomorphic curves in almost complex manifold ». *Holomorphic curves in symplectic geometry*. Sous la dir. d' AUDIN et LAFONTAINE. Birkhäuser, 1994.
- [Siv11] Steven SIVEK. « A bordered Chekanov-Eliashberg algebra ». *Journal of Topology* 4.1 (2011).
- [Sul02] Michael G SULLIVAN. « K-theoretic invariants for Floer homology ». *Geometric & Functional Analysis GAFA* 12.4 (2002).
- [Syl19] Zachary SYLVAN. « On partially wrapped Fukaya categories ». *Journal of Topology* 12.2 (2019).
- [Vau13] Anne VAUGON. « Reeb periodic orbits after a bypass attachment ». *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 35.2 (2013).
- [Vit87] Claude VITERBO. « Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens ». fr. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 115 (1987), p. 361-390.
- [Vit99] Claude VITERBO. « Functors and computations in Floer homology with applications, I ». *Geometric & Functional Analysis GAFA* 9.5 (1999).
- [Wal68] Friedhelm WALDHAUSEN. « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large ». *Annals of Mathematics* (1968), p. 56-88.
- [Wen10a] Chris WENDL. « Lectures on holomorphic curves in symplectic and contact geometry ». (2010). arXiv : 1011.1690.
- [Wen10b] Chris WENDL. « Open book decompositions and stable Hamiltonian structures ». *Expositiones Mathematicae* 28.2 (2010).
- [Wen16] Chris WENDL. « Lectures on symplectic field theory ». (2016). arXiv : 1612.01009.

Titre : Homologies legendriennes suturées et applications à la construction conormale

Mot clés : Hypersurfaces convexes, Variétés de contact suturées, Homologies legendriennes suturées, construction conormale, Nœud hyperbolique, 2-tresses

Resumé : Nous étudions des legendriennes à bord, incluses dans une variété de contact (V, ξ) à bord convexe suturé, et traitons quelques exemples. Tout d'abord on définit l'homologie cylindrique et enroulée d'une legendrienne dont le bord est inclus dans la suture de ∂V . De plus ces homologies s'inscrivent dans une suite exacte, qui généralise conjecturalement le triangle issu d'un remplissage lagrangien.

La construction conormale, appliquée à un sous-variété plongée dans une variété à bord, est un exemple typique d'une telle situation. L'illustration principale concerne les tresses dans une surface épaissie :

nous prouvons que les conormaux de deux 2-tresses pures et locales sont isotopes (comme legendriennes à bord fixe) si et seulement si les tresses sont équivalentes.

Dans un second temps, nous appliquons la construction conormale à un nœud hyperbolique dans la 3-sphère, et étudions la variété de contact suturée obtenue en retirant un voisinage du conormal du nœud. Nous montrons que l'homologie legendrienne d'une fibre dans cette variété de contact suturée, avec sa structure produit, est un invariant complet du nœud, ce qui peut être vu comme une version suturée d'un récent résultat.

Title : Sutured Legendrian homologies and applications to the conormal construction

Keywords : Convex hypersurfaces, Sutured contact manifolds, Sutured Legendrian homologies, Conormal construction, Hyperbolic knot, 2-braids

Abstract : We study Legendrians with boundary, in a contact manifold (V, ξ) with sutured convex boundary, and treat some examples. First we define the cylindrical and wrapped sutured Legendrian homologies of a Legendrian whose boundary is in the suture of ∂V . Moreover those homologies fit into an exact sequence, which conjecturally generalises the exact triangle arising from a Lagrangian filling.

The unit conormal construction, applied to a submanifold embedded in a manifold with boundary, is a typical instance of this situation. The main illustration involves braids in a thickened surface : we prove that the

conormals of two local pure 2-braids are isotopic (as Legendrians with fixed boundary) if and only if the braids are equivalent.

In a second part, we apply the conormal construction to an hyperbolic knot in the 3-sphere, and study the sutured contact manifold obtained by taking the complement of the unit conormal of the knot. We show that the Legendrian contact homology of a fiber in the sutured contact manifold, with its product structure, is a complete invariant of the knot (up to mirror), which can be understood as a sutured version of a recent result.