



**HAL**  
open science

# Analyse spectrale de quelques opérateurs de Schrödinger magnétiques fibrés

Paul Geniet

► **To cite this version:**

Paul Geniet. Analyse spectrale de quelques opérateurs de Schrödinger magnétiques fibrés. Théorie spectrale [math.SP]. Université de Bordeaux, 2020. Français. NNT : . tel-03042651

**HAL Id: tel-03042651**

**<https://hal.science/tel-03042651v1>**

Submitted on 7 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE  
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PRÉSENTÉE PAR

**Paul Geniet**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

---

**Analyse spectrale de quelques opérateurs de  
Schrödinger magnétiques fibrés**

---

**Date de soutenance :** 22 Octobre 2020

**Directeurs de thèse :** M. Vincent Bruneau Professeur des Universités (Université de Bordeaux)  
M. Nicolas Popoff Maître de conférence (Université de Bordeaux)

**Rapporteurs :** M. Éric Soccorsi Maître de conférence (Université d'Aix-Marseille)  
Mme Sonia Fliss Maître de conférence (ENSTA ParisTech)

**Devant la commission d'examen composée de :**

Mouez DIMASSI ...	Professeur des Universités, Université de Bordeaux	Examinateur
Jérémy FAUPIN ....	Professeur des Universités, Université de Lorraine	Examinateur
Sonia FLISS .....	Maître de conférence, ENSTA ParisTech ....	Rapporteur
Karel PRAVDA-STAROV	Professeur des Universités, Université de Rennes 1	Examinateur
Éric SOCCORSI ....	Maître de conférence, Université d'Aix-Marseille	Rapporteur

---

# RÉSUMÉ

---

Cette thèse analyse le spectre d'opérateurs de Schrödinger particuliers, associés à des champs magnétiques possédant des invariances géométriques. Nous nous intéressons aux cas d'un champ magnétique constant sur le demi-plan, avec une condition au bord de Neumann, puis d'un champ magnétique en dimensions supérieures, associé à un potentiel axisymétrique.

Dans ces deux configurations, l'opérateur de Schrödinger a une structure fibrée et son spectre est décrit par une famille de fonctions réelles appelées fonctions de bande. Au sein du spectre, certains niveaux d'énergie, appelés seuils, sont remarquables. Ils peuvent correspondre aux valeurs critiques de ces fonctions de bande ou à leurs limites en l'infini.

Dans le cas d'un champ magnétique constant sur le demi-plan, nous étudions l'existence de résonances au voisinage des seuils correspondant aux valeurs critiques. Nous perturbons l'opérateur soit par l'ajout d'un potentiel électrique soit par une déformation de la frontière du demi-plan. Nous prolongeons la résolvante de l'opérateur libre à travers le spectre puis nous identifions les résonances avec les pôles de cette extension. Cette méthode nous permet également d'analyser le comportement asymptotique de ces résonances lorsque la perturbation est petite.

Le second modèle que nous étudions est celui d'un champ magnétique engendré par un potentiel axisymétrique dans l'espace entier. Le champ magnétique généré par ce potentiel est invariant par translation. Nous étudions les fonctions de bande associées, en particulier l'influence d'un autre type de seuil : les limites finies des fonctions de bande. Chacune de ces limites concerne une infinité de fonctions de bande et chaque niveau d'énergie au dessus d'un seuil est intersecté par une infinité de fonctions de bande. Nous nous intéressons aux conséquences de cette accumulation. Nous démontrons que les fonctions de bande qui intersectent un niveau d'énergie donné peuvent avoir une dérivée arbitrairement petite et nous appliquons ce résultat pour démontrer qu'il peut exister des particules quantiques soumises à ce champ magnétique, localisées en énergie loin des seuils, mais portant tout de même un courant arbitrairement faible, ce qui contraste avec les études préexistantes sur le sujet.

**Mots-clés** Théorie Spectrale, Opérateurs de Schrödinger, Laplacien magnétique, Opérateurs fibrés, Seuils, Résonances, Approximation harmonique.

**Laboratoire d'accueil** Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251  
Université de Bordeaux,  
Bâtiment A33,  
351 cours de la Libération,  
F-33405 Talence.



---

---

# REMERCIEMENTS

---

Je remercie Madame Sonia Fliss et Monsieur Éric Soccorsi qui ont accepté de rapporter cette thèse. Je remercie également Messieurs Mouez Dimassi, Karel Pravda-Starov et Jérémy Faupin qui ont accepté de faire parti du Jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux encadrants : Vincent Bruneau et Nicolas Poppoff. C'est grâce à leur dévouement, à leur perpétuelle disponibilité et à leur bienveillance que les travaux de recherches ont pu aboutir.

Je tiens également à remercier le personnel de l'IMB et les collègues de l'équipe EDP et physique mathématique ainsi que ceux des autres équipes pour l'excellent accueil qu'ils m'ont réservé pendant tout le temps passé à l'IMB, tout particulièrement Krisztian, Xiaoming et Badredine qui ont partagé le même "bureau" que moi. Bien entendu je remercie également les autres doctorants tels qu'Edoardo et Marco pour leur apport d'Italie ainsi que pour les fréquentes soirées studieuses au Chat, Jared pour sa passion francophone et son humour et bien entendu Pierre pour la très célèbre Réunion du "Mardi".

Enfin je ne saurais finir cette page sans remercier ma famille qui m'a soutenu pendant toute la durée de cette thèse et sans laquelle rien n'aurait été possible.



---

---

# SOMMAIRE

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
A Hamiltoniens magnétiques invariants par translation . . . . .	2
B Résonances sous l'effet d'une perturbation . . . . .	3
Le laplacien magnétique sur le demi-plan . . . . .	3
Définition des résonances . . . . .	4
Résonances engendrées par une perturbation électrique . . . . .	4
Résonances engendrées par une déformation de la frontière . . . . .	5
C Accumulation de fonctions de bande au voisinage de seuils non atteints . . . . .	7
Présentation du laplacien magnétique sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
Accumulation de fonctions de bande . . . . .	8
<b>1 Asymptotiques de valeurs propres et de résonances électromagnétiques sur le demi plan</b>	<b>11</b>
Introduction . . . . .	11
1.1 Présentation du modèle et réduction . . . . .	12
1.2 Étude de la résolvante libre . . . . .	15
1.3 Perturbation par un potentiel électrique . . . . .	24
1.3.1 Définition des résonances . . . . .	24
1.3.2 Asymptotique des pôles . . . . .	25
1.4 Perturbation géométrique . . . . .	30
1.4.1 Déformation de la frontière . . . . .	30
1.4.2 Définition de l'opérateur . . . . .	30
1.4.3 Une différence de Résolvante . . . . .	32
1.4.4 Asymptotique des pôles . . . . .	34
<b>2 On a quantum Hamiltonian in a unitary magnetic field with axisymmetric potential</b>	<b>43</b>
Introduction . . . . .	44
General context . . . . .	44
Spectral decomposition of the Hamiltonian and description of the model . . . . .	45
Transport properties . . . . .	46
On classical mechanics . . . . .	47
Organization of the chapter . . . . .	48
2.1 Reduction to one-dimensional Hamiltonians . . . . .	49
2.2 Basics about the eigenpairs of the fiber operator . . . . .	50
2.2.1 Behavior of the eigenfunctions at 0 . . . . .	50
2.2.2 Derivative of the band functions . . . . .	52
2.2.3 Global behavior of the band functions . . . . .	52

2.3	Asymptotic behaviour of the band functions . . . . .	54
2.3.1	Near thresholds: high frequency . . . . .	54
1	Canonical transformation and asymptotic expansion of the operator . . . . .	55
2	Calculation of the quasi-modes . . . . .	55
3	Evaluation of the quasi-mode . . . . .	56
4	Proof of Theorem 2.1 . . . . .	58
2.3.2	Near other energy levels: high frequency and high angular momentum . . . . .	58
2.3.2.a	Preliminary results: some localization properties . . . . .	59
2.3.2.b	Exponential decay of the eigenfunctions . . . . .	61
2.3.2.c	Asymptotic expansion of the derivative . . . . .	64
1	Lower bound . . . . .	64
2	Upper bound . . . . .	64
2.4	Velocity operator . . . . .	65
<b>Annexe</b>		<b>69</b>
A	Rappels de théorie spectrale . . . . .	69
B	La réalisation de Neumann du Laplacien magnétique dans un domaine à bord . . . . .	70
C	Analyse complexe . . . . .	71
D	Familles holomorphe d'opérateurs . . . . .	72
E	Opérateurs fibrés . . . . .	73
<b>Bibliographie</b>		<b>81</b>

---

# INTRODUCTION

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude spectrale de certains opérateurs de Schrödinger. Ces opérateurs apparaissant dans plusieurs contextes des mathématiques ou de la physique théorique. L'opérateur qui nous intéresse au chapitre 1 décrit par exemple le mouvement d'électrons confinés sur le demi-plan  $\Omega$  par le champ magnétique transversal et constant  $B(x, y) = (0, 0, 1)$ . Il intervient dans l'étude théorique des supraconducteurs [Fou10]. L'opérateur que nous étudions au chapitre 2 décrit le mouvement d'électrons sous l'action du champ magnétique généré par un courant rectiligne.

L'analyse spectrale de ces opérateurs est un ingrédient important de l'analyse des propriétés de diffusion. La littérature sur l'étude spectrale d'opérateurs de Schrödinger associé à un champ magnétique constant est maintenant assez développée dans différents contextes géométriques : dans l'espace entier ou dans un plan [Avr78, Rai92, Rai02, Fer04, Fil06, Bon07, Pus, Bru11, Bon11, Gof14, Bru15b, Bru20], dans une bande [Bri08] ou sur le demi-plan [De 99, Bru18a] ou dans des espaces à coins [Pop13]. D'autres champs magnétiques considérés possèdent des invariances géométriques [Iwa85, Yaf03, Yaf08, Bru15a]. Un point commun à ces différents contextes est qu'au moins une direction (ou angle) d'invariance d'un problème de référence (cas non-perturbé également appelé "libre") donne une structure fibrée à l'opérateur différentiel associé.

Le cas d'un champ magnétique constant dans l'espace tout entier donne des fonctions de bande constantes (ce sont les niveaux de Landau). En revanche, dans les autres situations géométriques de référence (demi-plan, bande, espace à coin), ces fonctions de bande (également appelées courbes de dispersions) ne sont plus constantes ce qui complexifie l'étude spectrale de toute perturbation. En particulier, l'étude des résonances pour des perturbations de tels opérateurs fibrés reste un domaine à développer.

Dans le contexte des opérateurs fibrés, les résonances sont notamment définies et étudiées en présence de structures périodiques [Gér90, Dim02, Dim03], pour les guides d'ondes [Asl00, Bru18b, Bru19, Che19], ainsi que dans des contextes d'électrodynamique quantique [Fau08, AS09, Bal14].

Nous nous intéressons à des contextes dans lesquels la structure fibrée de l'opérateur libre possède quelques particularités non triviales. Dans un premier temps, nous étudions l'existence de résonances pour l'opérateur associé à un champ magnétique constant sur le demi-plan lorsqu'il est perturbé soit par un champ électrique, soit par une déformation de la frontière. Dans un second temps, nous étudions l'influence d'un nouveau type de seuil pour l'opérateur défini sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  entier dans le cas où le champ magnétique est unitaire et associé à un potentiel à symétrie axiale (ce champ magnétique n'est plus constant).

## A Hamiltoniens magnétiques invariants par translation

Nous appelons potentiel magnétique un champ de vecteur  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Ce potentiel est associé à la 1-forme différentielle

$$\sum_{j=1}^n A_j dx_j.$$

À ce potentiel, nous associons la 2-forme différentielle  $\mathbf{B}$  suivante appelée champ magnétique

$$\mathbf{B} := d\mathbf{A} = \sum_{j < k} B_{j,k} dx_j \wedge dx_k. \quad (1)$$

Pour des champs magnétiques en dimension 2 et 3, nous expliquons comment identifier ces formes à des champs scalaires ou vectoriels. Lorsque  $n = 2$ , le coefficient  $b := B_{1,2}$  est le seul non nul. Cela définit une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  notée  $b = \text{rot}(\mathbf{A})$  que l'on appelle encore le champ magnétique. En dimension 3, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  comprend 3 coefficients non nuls. Il s'identifie donc au champ de vecteurs  $\mathbf{B} = (B_{2,3}, -B_{1,3}, B_{1,2}) = \text{rot}(A)$ .

Pour un potentiel magnétique donné  $\mathbf{A}$ , le laplacien magnétique est un opérateur autoadjoint, agissant sur les fonctions de son domaine comme l'opérateur différentiel

$$(i\nabla + \mathbf{A})^2. \quad (2)$$

Sa définition exacte, laquelle peut faire intervenir des conditions au bord, selon le contexte, sera précisée plus tard.

Les opérateurs que nous étudions sont des laplaciens magnétiques associés à des champs magnétiques possédant des invariances par translation et éventuellement perturbés. Trois modèles de ce type sont particulièrement présents dans la littérature :

- ☞ le cas du plan  $\mathbb{R}^2$  soumis à un champ magnétique ne dépendant que d'une seule variable (appelé modèle d'Iwatsuka) [Iwa85, Mân97, His15, Pop18, Exn18],
- ☞ le demi-plan soumis un champ magnétique constant [De 99, Hel01, Bru14]
- ☞ l'opérateur sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  soumis à un champ magnétique engendré par un potentiel axisymétrique [Yaf03, Rai08, Yaf08, Bru15a].

Grâce à leur invariance par translation dans une direction, l'étude de ces modèles se fait en utilisant une réduction par une transformée de Fourier partielle dans la direction d'invariance. En notant  $\mathcal{H}$  l'un de ces opérateurs et  $\mathcal{F}$  cette transformation de Fourier, on a alors la décomposition en intégrale directe (voir [Ree78, Section XIII]) :

$$\mathcal{F}\mathcal{H}\mathcal{F}^* = \int_M^\oplus h(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Dans les modèles précédents  $M = \mathbb{R}$  et  $(h(\xi))_{\xi \in M}$  est une famille d'opérateurs autoadjoints positifs. De plus, toujours dans le cadre des modèles précédents, ces opérateurs sont à résolvante compacte. Leur spectre est donc constitué d'une suite de valeurs propres  $\lambda_p(\xi)$ . Les fonctions  $\lambda_p$  sont appelées fonctions de bande (ou courbes de dispersion) du système. Le spectre de l'opérateur vaut alors

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overline{\lambda_p(\mathbb{R})}$$

et est absolument continu dès lors que les fonctions  $\lambda_p$  ne sont pas constantes [Ree78]. De plus certaines valeurs spectrales appelées seuils se démarquent par des propriétés singulières [Mân97, His16, Bru15a].

Cette structure du spectre est également typique des opérateurs décrivant des structures périodiques : opérateurs de Schrödinger avec potentiel périodique [Ree78] ou encore guides d'onde périodiques. Dans ces modèles, la transformée de Bloch-Floquet permet également de fibrer l'opérateur [Kuc93, Fig96]. De nombreux résultats existent pour les perturbations de tels modèles, on peut citer [Gér90] pour la description des résonances pour l'opérateur de Schrödinger, ou [Naz10, Fli09, Del17] pour les modèles de guide d'onde.

L'approche utilisée peut s'étendre à un ensemble plus large d'opérateurs : une étude générale des seuils existe pour une classe d'opérateurs analytiquement fibrés [Gér98]. Les hypothèses faites dans l'article [Gér98] pour qu'un opérateur appartienne à la classe des opérateurs analytiquement fibré impliquent que ses fonctions de bande soient des applications propres, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact est compact. Pour cette classe d'opérateurs, lorsque  $M$  est une variété de dimension 1, les seuils sont les valeurs critiques des fonctions de bande. On dit alors que ce sont des seuils atteints [Gei97, Hel01, Soc01, Bri09].

Cependant, les modèles magnétiques présentés au paragraphe précédent n'appartiennent pas à cette classe car  $\lambda_p(\xi)$  peut tendre vers une limite finie lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ . De nouveaux types de valeurs spectrales particulières apparaissent alors : les limites de fonctions de bandes, que l'on appelle seuil non atteints.

L'objectif de cette thèse est d'étudier des propriétés du spectre au voisinage de seuils qui peuvent être atteints ou non. Au chapitre 1, nous étudions l'opérateur de Schrödinger sur le demi-plan associé à un champ magnétique constant, avec condition au bord de Neumann. Cet opérateur possède des seuils atteints, et nous nous intéressons aux résonances créées dans leurs voisinages par l'ajout d'un champ électrique ou par une déformation régulière de la frontière du demi-plan.

Au chapitre 2, nous étudions l'opérateur sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  avec un champ magnétique engendré par un potentiel axisymétrique. L'objectif est l'étude de seuils non atteints. Il ne s'agit pas de construire une théorie générale pour les seuils non atteints mais d'illustrer dans le cas de ce modèle particulier quelques propriétés de ces seuils.

## B Résonances sous l'effet d'une perturbation

Dans ce paragraphe, nous présentons l'étude de résonances sur le demi-plan. Cette étude fait l'objet du chapitre 1.

### Le laplacien magnétique sur le demi-plan

Soit  $\Omega_0 := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , le demi-plan et soit  $\mathbf{A}$ , le potentiel magnétique défini par

$$\mathbf{A}(x, y) := (0, x), \quad (x, y) \in \Omega_0.$$

Ce potentiel est associé au champ magnétique constant  $b = 1$  (voir le paragraphe précédent pour le lien entre potentiel magnétique et champ magnétique).

Nous considérons l'opérateur

$$\mathcal{H}_0 = (i\nabla + \mathbf{A})^2 \tag{4}$$

agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  avec une condition au bord de Neumann, à savoir :

$$\partial_x u(0, y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Soit  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable  $y$  et soit pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $h_0(\xi)$  défini par  $h_0(\xi) := -\partial_x^2 + (x - \xi)^2$  agissant sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$  avec une condition de

Neumann en 0. La décomposition (3) s'écrit

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}^* \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_0(\xi) d\xi \right) \mathcal{F}. \quad (6)$$

Dans la terminologie de la théorie de Kato, la famille  $(h_0(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$  est une famille analytique et le spectre de chaque opérateur  $h_0(\xi)$  est constitué d'une suite croissante de valeurs propres positives et simples  $\lambda_p(\xi)$ . Les fonctions de bande  $\lambda_p$ , décrites dans le paragraphe précédent, sont donc analytiques. De plus leurs limites en  $\pm\infty$  sont données par [Dau93, Fou10] :

$$\lambda_p(\xi) \underset{\xi \rightarrow -\infty}{\sim} \xi^2, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \lambda_p(\xi) = E_p := 2p - 1, \quad p \geq 1.$$

Enfin chacune de ces fonctions possède un unique minimum non dégénéré  $\theta_p$ . Ces minima sont des seuils atteints dans le spectre absolument continu de  $\mathcal{H}_0$  donné par

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \overline{\lambda_p(\mathbb{R})} = \bigcup_{p=1}^{+\infty} [\theta_p, +\infty) = [\theta_1, +\infty).$$

L'objectif du chapitre 1 est d'étudier l'apparition de résonances au voisinage des seuils atteints sous l'effet de certaines perturbations.

Notre étude est menée en deux temps. Tout d'abord nous prolongeons la résolvante libre  $(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}$  à travers le spectre essentiel de  $\mathcal{H}_0$  entre des espaces à poids. Les outils utilisés reposent sur une décomposition explicite de la résolvante libre issue de la décomposition (6) de  $\mathcal{H}_0$ , sur l'analyticité de la famille  $(h_0(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$  et sur la simplicité des valeurs propres  $\lambda_p(\xi)$ . La construction de ce prolongement fait l'objet de la partie 1.2.

Dans un second temps nous ajoutons une perturbation à l'opérateur  $\mathcal{H}_0$ .

## Définition des résonances

Une résonance est un nombre complexe  $\nu + i\Gamma$  qui décrit un état quantique instable qui oscille avec une fréquence  $\nu$  et une durée de vie proportionnelle à  $\Gamma^{-1}$ . Physiquement les résonances les plus intéressantes sont celles qui ont une durée de vie élevée, c'est-à-dire, celles qui sont proches de l'axe réel.

Il existe différents moyens de définir les résonances [Sim78]. Dans un cadre non réduit à la dimension 1, les premières définitions mathématiques des résonances sont dues à Lax et Phillips [Lax64], Vainberg [Vai68] et à Aguilar et Combes [Agu71].

Aujourd'hui, les définitions les plus fréquentes reposent sur deux techniques : les dilatations ou distorsions analytiques [Hun86, Avr78, Wan92, Ast07], et les prolongements méromorphes de la résolvante [Hel86, Fro97, Bon07]. Cette deuxième méthode est celle que nous utilisons au chapitre 1. Enfin, nous pouvons noter que ces définitions coïncident [Hel87].

## Résonances engendrées par une perturbation électrique

Dans la partie 1.3, nous perturbons l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  par un potentiel électrique  $V$ . Ce potentiel est mesurable et pour un certain  $\beta > 0$  et un certain  $m \geq 2$ ,

$$V(x, y) = O\left(e^{-\beta\langle y \rangle} \langle x \rangle^{-m}\right), \quad \|(x, y)\| \rightarrow +\infty, \quad (7)$$

où  $\langle t \rangle := \sqrt{1+t^2}$ . Nous considérons donc l'opérateur  $\mathcal{H}$  agissant sur  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$  et défini par

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V. \quad (8)$$

La décroissance de  $V$  à l'infini implique que l'opérateur de multiplication par  $V$  est une perturbation relativement compacte de  $\mathcal{H}_0$ . Un théorème de Weyl assure alors que les spectres essentiels de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{H}_0$  coïncident. De plus les résolvantes  $\mathcal{R}(z)$  de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}_0(z)$  de  $\mathcal{H}_0$  sont reliées par l'identité de la résolvante

$$\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}_0(z) (I + V\mathcal{R}_0(z))^{-1}, \quad z \notin \sigma(\mathcal{H}).$$

Nous utilisons alors le théorème de Fredholm analytique pour montrer que la résolvante  $\mathcal{R}(z) := (\mathcal{H} - z)^{-1}$ , initialement définie sur  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{H})$  admet une extension méromorphe par rapport à la variable  $\sqrt{z - \theta_q}$  dans un voisinage du seuil atteint  $\theta_q$  sur une surface de Riemann (voir le théorème 1.3). Une description effective de cette surface de Riemann est donnée par l'équation  $z_p(k) = \theta_p + k^2$  (voir la remarque 2). Cette extension est de plus définie dans l'espace à poids des fonctions à décroissance exponentielle par rapport à la variable  $y$ . Nous identifions les résonances au voisinage de  $\theta_q$  avec les pôles de cette extension méromorphe.

Dans la partie 1.3.2, nous étudions le cadre d'une petite perturbation électrique, à savoir  $V = \delta V_0$ , où  $V_0$  vérifie la propriété de décroissance (7) et où le paramètre  $\delta \in \mathbb{R}$  est destiné à tendre vers 0. Nous démontrons au théorème 1.4 que pour  $\delta$  assez petit, la résolvante  $(\mathcal{H} - z)^{-1}$  possède un unique pôle  $z_q(\delta)$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\theta_q$ , indépendant de  $\delta$  et que le comportement lorsque  $\delta$  tend vers 0 de  $z_q(\delta)$  est explicite, à savoir :

$$\sqrt{z_q(\delta) - \theta_q} = -i\eta\delta + O(\delta^2). \quad (9)$$

De plus  $\eta$  est réel et si  $V_0$  est de signe constant, alors  $\eta$  est du même signe que  $V_0$ .

En particulier, si  $V_0 \leq 0$ , alors  $\eta < 0$ . Lorsque  $\delta > 0$  est assez petit, la partie imaginaire de  $\sqrt{z_q(\delta) - \theta_q}$  est alors positive. La résonance  $z_1(\delta)$  est alors une valeur propre située sous le spectre essentiel de  $\mathcal{H}$ . Ce résultat est cohérent avec une précédente étude de l'existence de valeurs propres pour  $\mathcal{H}_0 + V$  avec  $V \leq 0$  [Bru14, Corollary 2.4].

Cette étude peut être reliée à l'étude du laplacien agissant sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  au voisinage de 0 qui joue le rôle de seuil atteint [Sim76].

## Résonances engendrées par une déformation de la frontière

Dans la partie 1.4, nous nous intéressons à une déformation de la frontière de  $\Omega_0$ . Pour cela nous paramétrons la frontière du demi-plan par une fonction  $\chi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à support compact. Nous définissons alors le domaine  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq \chi(y)\}$ , montré par la figure 1.

L'opérateur  $\mathcal{H}$  que nous étudions est la réalisation de Neumann du laplacien magnétique  $-\partial_x^2 + (i\partial_y + x)^2$  agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Nous identifions cet opérateur à l'opérateur

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + (i\partial_y + x - i\chi'(y)\partial_x + \chi(y))^2, \quad (10)$$

agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  avec la condition au bord

$$(1 + \chi'(y)^2) \partial_x u(0, y) - \chi'(y) \partial_y u(0, y) = i\chi'(y) \chi(y) u(0, y), \quad y \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{D}(\mathcal{H}). \quad (11)$$

Comme dans le cas de la perturbation par un potentiel électrique, nous allons comparer l'opérateur  $\mathcal{H}$  à l'opérateur  $\mathcal{H}_0$ . Cependant contrairement au cadre de la perturbation électrique, nous ne pouvons pas comparer directement ces opérateurs car leurs domaines sont différents. En effet comme le

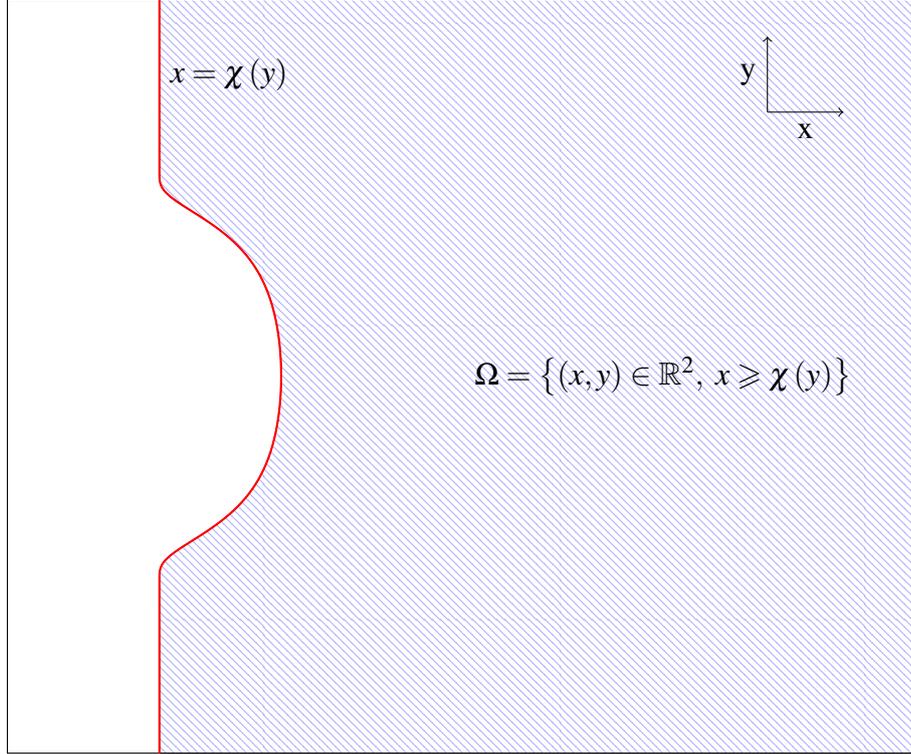


Figure 1 – Le demi-plan avec déformation de la frontière.

montrent les formules (5) et (11), après s'être ramené à un domaine fixe du plan, les conditions aux bords associées à ces deux opérateurs diffèrent. Nous ne pouvons donc pas réutiliser directement les méthodes précédentes car l'opérateur  $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0$  ne peut pas être défini.

Pour étudier la résolvante de  $\mathcal{H}$ , nous utilisons une méthode perturbative, déjà utilisée dans le cadre de l'étude de résonances engendrées par un obstacle [Bru15b]. Elle consiste à introduire un opérateur auxiliaire :  $V := \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}^{-1}$ , agissant sur l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  entier. Cet opérateur,  $V$ , joue le rôle d'une perturbation. Nous utilisons alors l'identité de la résolvante suivante qui relie les résolvantes  $\mathcal{R}(z)$  de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}_0(z)$  de  $\mathcal{H}_0$  par l'intermédiaire de  $V$  :

$$\mathcal{R}(z) = (\mathcal{R}_0(z) - V\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z))(I + zV\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z))^{-1}. \quad (12)$$

Au voisinage du seuil atteint  $\theta_q$  les résonances sont définies comme les pôles d'une extension méromorphe dans un espace à poids sur une surface de Riemann.

Dans la partie 1.4.4, nous étudions le cadre d'une petite perturbation, à savoir  $\chi = \delta\chi_0$ , où  $\chi_0$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à support compact. Nous démontrons au théorème 1.5 que pour  $\delta$  assez petit, la résolvante  $(\mathcal{H} - z)^{-1}$  possède un unique pôle  $z_q(\delta)$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\theta_q$ , indépendant de  $\delta$ . La méthode utilisée repose sur l'analyse de l'opérateur  $V$  lorsque  $\delta$  tend vers 0 (voir le lemme 1.4.2).

Le comportement lorsque  $\delta$  tend vers 0 de  $z_q(\delta)$  est donné par :

$$\sqrt{z_q(\delta) - \theta_q} = i\eta\delta^2 + O(\delta^2). \quad (13)$$

La valeur de  $\eta$  est donnée par le théorème 1.5 mais ne permet pas la lecture directe du signe de la partie imaginaire de  $\sqrt{z_q(\delta) - \theta_q}$  selon la perturbation  $\chi_0$ .

## C Accumulation de fonctions de bande au voisinage de seuils non atteints

Au chapitre 2, nous menons l'étude du spectre de l'hamiltonien agissant sur  $\mathbb{R}^n$  et associé à un champ magnétique unitaire engendré par un potentiel axisymétrique en dimension  $n \geq 3$ . Ce type de modèle a été étudié par Yafaev [Yaf08]. Le cas du champ magnétique engendré par un fil infini fournit un modèle similaire [Yaf03, Bru15a]. Contrairement au cadre du chapitre 1, le champ magnétique n'est pas constant et nous allons étudier certaines des propriétés de transport du modèle, induites par les variations du champ magnétique. Ce travail a fait l'objet d'un article [Gen20].

### Présentation du laplacien magnétique sur $\mathbb{R}^n$

Soit  $n \geq 3$ . Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , nous posons  $r := \|(x_1, \dots, x_{n-1})\|$  (avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne). Nous introduisons le champ magnétique  $\mathbf{B}$ , défini par la formule (1), avec  $B_{jk} = (\delta_{jn} - \delta_{nk})x_j r^{-1}$ . Ce champ magnétique est unitaire et invariant par translation selon la coordonnée  $x_n$ . Un potentiel associé vérifiant  $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$  est donné par le champ de vecteur  $\mathbf{A}(x) = (0, \dots, 0, r)$ . Lorsque  $n = 3$ , si on note  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques de  $\mathbb{R}^3$ , le champ magnétique prend la forme simplifiée

$$\mathbf{B}(r, \theta, z) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0).$$

Ce champ est représenté à la figure 2. Nous introduisons l'opérateur  $\mathcal{H}$  comme étant l'opérateur différentiel (2) agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Certaines propriétés de cet opérateur ont déjà été étudiées par Yafaev [Yaf08, Section 4] (des propriétés sont également connues pour un opérateur similaire [Yaf03, Bru15a]) et l'objectif du chapitre 2 est de poursuivre son analyse spectrale.

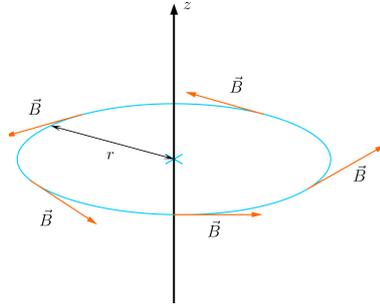


Figure 2 – Schéma du champ magnétique.

Pour étudier cet opérateur nous effectuons une réduction de dimension en utilisant les invariances du potentiel magnétique par translation et par rotation autour de l'axe  $(Ox_n)$  : en utilisant la transformée de Fourier partielle et la transformée de Fourier angulaire par rapport à cet axe, nous démontrons (voir la partie 2.1) que  $\mathcal{H}$  est unitairement équivalent à

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H_m(\xi) d\xi,$$

où pour  $m \in \mathbb{N}$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $H_m(\xi) \simeq L_m(\xi)$  et où l'opérateur  $L_m(\xi)$  agit sur  $L^2(\mathbb{R}_+)$  par

$$L_m(\xi) := -\partial_r^2 + \frac{(2m+n-3)^2 - 1}{4r^2} + (r-\xi)^2.$$

Le spectre de chaque opérateur  $L_m(\xi)$  est constitué d'une suite croissante de valeurs propres positives et simples  $(\lambda_{m,p}(\xi))_{p \geq 1}$  et les fonctions de bande  $\lambda_{m,p}$ , décrites dans la partie A, sont analytiques. De

plus pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $p \geq 1$ ,  $\lambda_{m,p}(\xi) \rightarrow +\infty$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$  et  $\lambda_{m,p}(\xi) \rightarrow E_p := 2p - 1$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$  [Yaf08, Proposition 3.6]. Le premier objectif du chapitre 2 est d'améliorer l'asymptotique des fonctions de bandes près des seuils non atteints. Nous montrons au théorème 2.1 qu'il existe une suite  $(\alpha_q^p)$  telle que, lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ ,

$$\lambda_{m,p}(\xi) = E_p + \frac{(2m+n-3)^2 - 1}{4} \sum_{q=2}^N \frac{\alpha_q^p}{\xi^q} + O\left(\frac{1}{\xi^{N+1}}\right), \quad N \geq 2, \quad \text{avec} \quad \alpha_2^1 = 1.$$

La preuve de ce théorème repose sur la construction de quasi-modes, (voir l'annexe A), dans l'esprit de l'approximation harmonique [Dim99].

## Accumulation de fonctions de bande

En comparaison avec le modèle d'Iwatsuka et avec le modèle sur le demi-plan, pour lesquels chaque seuil non atteint est la limite en  $+\infty$  d'une seule (ou éventuellement deux, [Mân97, Proposition 2.2]) fonctions de bande, le modèle du chapitre 2 contient une subtilité supplémentaire : chaque seuil  $E_p$  est la limite de toutes les fonctions de bande  $\lambda_{m,p}$  pour  $m \geq 0$ , on dit alors que les fonctions de bande s'accumulent près des niveaux de Landau. Le deuxième objectif du chapitre 2 est d'étudier des conséquences originales de ce phénomène d'accumulation, en particulier le fait que chaque intervalle d'énergie est intersecté par une infinité de fonctions de bande.

Nous fixons un niveau d'énergie  $E \in \sigma(\mathcal{H})$  qui n'est pas un niveau de Landau, ainsi que  $p \in \mathbb{N}$  et nous notons  $\xi_m \in \mathbb{R}$  la fréquence associée, définie par l'équation d'énergie  $\lambda_{m,p}(\xi_m) = E$ . Nous démontrons que  $\xi_m \rightarrow +\infty$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$  (voir la proposition 2.3.2), et nous démontrons au théorème 2.2 que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda'_{m,p}(\xi_m) = 0, \quad (14)$$

avec un encadrement de l'ordre de  $m^{-1}$ . Pour montrer ce résultat, nous donnons dans un premier temps des estimées de la fréquence  $\xi_m$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , puis nous établissons des estimées de localisation des fonctions propres associées à  $\lambda_{m,p}$  de type Agmon, uniforme par rapport à  $m$ , à énergie fixée.

Ce résultat a des conséquences sur les propriétés de transport dans la direction d'invariance. L'évolution temporelle d'une particule quantique  $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  est donnée par l'équation de Schrödinger. La position dans la direction d'invariance  $x_n$  est donnée par l'opérateur  $x_n(t) = e^{it\mathcal{H}} x_n e^{-it\mathcal{H}}$ , et la vitesse associée peut être décrite à l'aide de l'opérateur dit de courant  $J := -i[H, x_n] = -2(i\partial_{x_n} + r)$ . Aussi bien dans le cadre du chapitre 2 que dans un cadre plus général [Pop19, Section 5.3], l'action de  $J$  sur un état quantique est relié à la famille des dérivées des fonctions de bande (voir la formule (2.4.8)). Pour obtenir un contrôle du courant porté par un état quantique localisé en énergie dans un intervalle  $I \subset \sigma(\mathcal{H})$ , il suffit donc d'estimer la dérivée  $\lambda'_p$  des fonctions de bande décrites dans la partie A pour les fréquences telles que  $\lambda_p(\xi) \in I$ . Nous renvoyons à l'introduction du chapitre 2 pour plus de précisions sur l'opérateur  $J$ .

Pour les modèles sur le demi-plan et de type Iwatsuka, on distingue deux types de composantes pour un état quantique  $\varphi$  (avec  $\|\varphi\| = 1$ ) :

- ☞ si celui-ci est localisé en énergie loin des seuils, il ne possède que des composantes de type "edge", pour lesquelles le courant  $(J\varphi \mid \varphi)$  est minoré uniformément,
- ☞ si l'état est localisé en énergie dans un intervalle contenant un seuil, il peut contenir une composante de type "bulk", dont le courant peut être arbitrairement petit.

Pour comprendre cette distinction, on peut remarquer que tout intervalle d'énergie  $I$  localisé loin des seuils n'est intersecté que par un nombre fini de fonctions de bande, lesquelles ont leurs dérivées bornées inférieurement sur les fréquences associées à  $I$ , tandis que si  $I$  contient un seuil, l'une des fonctions de bande qui intersecte  $I$  a une dérivée arbitrairement petite. On peut noter par ailleurs

que les dénominations "bulk" et "edge", initialement liées à des propriétés de localisation de  $\varphi$  dans des modèles avec un bord [De 99, His15, His16], ne sont pas adaptées à nos modèles : ici ce sont plutôt les variations du champ magnétique qui vont guider les propriétés de localisation de ces états [Mân97, Exn99, Pop18].

Dans notre modèle, l'accumulation des fonctions de bande et l'atténuation des dérivées proche de tout niveau d'énergie (voir la formule (14)) génère une situation différente : nous montrons au théorème 2.3 que l'opérateur  $J$ , même restreint aux énergies loin des niveaux de Landau, n'est pas borné inférieurement, autrement dit que pour tout intervalle d'énergie  $I \subset \sigma(\mathcal{H})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un état quantique  $\varphi \neq 0$  localisé en énergie sur  $I$  de type "bulk", c'est-à-dire tel que

$$|(J\varphi | \varphi)| \leq \varepsilon \|\varphi\|^2.$$



# ASYMPTOTIQUES DE VALEURS PROPRES ET DE RÉSONANCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES SUR LE DEMI PLAN

## Résumé

Nous considérons la réalisation de Neumann du laplacien magnétique sur le demi-plan. Cet opérateur est fibré et son spectre est décrit par une famille de fonctions analytiques réelles appelées fonctions de bande. Ces fonctions possèdent des minima locaux qui jouent le rôle de seuils atteints dans le spectre absolument continu du laplacien magnétique. Nous utilisons une décomposition explicite de la résolvante libre pour l'étendre analytiquement à travers le spectre essentiel au voisinage de ces seuils atteints. Nous perturbons alors l'opérateur par un petit potentiel électrique ou par une petite déformation de la frontière du demi-plan et nous prolongeons la résolvante de l'opérateur perturbé au voisinage des seuils atteints. Nous montrons alors que pour une perturbation assez petite, cette résolvante prolongée possède un unique pôle au voisinage de chaque seuil atteint et nous déterminons un développement asymptotique de ce pôle lorsque le petit paramètre tend vers 0.

## Sommaire

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.1 Présentation du modèle et réduction</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.2 Étude de la résolvante libre</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.3 Perturbation par un potentiel électrique</b> . . . . .	<b>24</b>
1.3.1 Définition des résonances . . . . .	24
1.3.2 Asymptotique des pôles . . . . .	25
<b>1.4 Perturbation géométrique</b> . . . . .	<b>30</b>
1.4.1 Déformation de la frontière . . . . .	30
1.4.2 Définition de l'opérateur . . . . .	30
1.4.3 Une différence de Résolvante . . . . .	32
1.4.4 Asymptotique des pôles . . . . .	34

## Introduction

Dans ce chapitre,  $\Omega_0$  est le demi-plan :  $\Omega_0 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Nous considérons l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  défini comme l'extension de Friedrichs sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  du laplacien magnétique  $-\partial_x^2 + (i\partial_y + x)^2$ , initialement

défini sur  $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega_0})$ . C'est sa réalisation de Neumann. Nous renvoyons au début de la partie 1.1 pour une définition précise de cet opérateur.

Cet opérateur est fibré, aussi il se ramène à une famille d'opérateurs sur la demi-droite. Son spectre est absolument continu. Il est décrit par une famille de fonctions de bande  $\lambda_p$  et contient une famille de seuils atteints  $(\theta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . Notre objectif est l'étude de certaines résonances engendrées au voisinage de ces seuils atteints par des perturbations de  $\mathcal{H}_0$ .

Dans un premier temps, nous perturbons l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  en ajoutant un potentiel électrique  $V$ . Cela signifie que nous étudions l'opérateur  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 + V$ . Dans un second temps, nous perturbons la frontière de  $\Omega_0$ . Dans ce cadre nous considérons un paramétrage de la frontière  $\chi$ . C'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à support compact. Nous définissons alors un domaine  $\Omega$  par  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq \chi(y)\}$  puis l'opérateur  $\mathcal{H}$ , comme la réalisation de Neumann du laplacien magnétique  $-\partial_x^2 + (i\partial_y + x)^2$  agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Dans chacun de ces cadres, nous construisons une extension méromorphe de la résolvante  $(\mathcal{H} - z)^{-1}$  dans un espace à poids. Les résonances sont alors définies comme les pôles de cette extension. Nous nous intéressons aux résonances engendrées par des petites perturbations. Nous considérons donc un potentiel  $V$  de la forme  $V = \delta V_0$  ou un paramétrage de la frontière  $\chi$  de la forme  $\chi = \delta \chi_0$  et nous étudions le régime  $\delta \rightarrow 0$ . Dans chacun de ces cadres, nous montrons que pour  $\delta$  assez petit, il existe au voisinage de chaque seuil atteint  $\theta_q$  une unique résonance  $z_q(\delta) = \theta_q + k_q(\delta)^2$ . De plus nous montrons que  $z_q(\delta) \rightarrow \theta_q$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$  et nous déterminons un développement asymptotique de  $k_q(\delta)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

La partie 1.1 est dédiée à la présentation de l'opérateur. Dans la partie 1.2, nous prolongeons la résolvante libre  $(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}$  à travers le spectre de  $\mathcal{H}_0$  loin des niveaux de Landau. Cette extension est méromorphe sur une surface de Riemann sur laquelle chaque fonction  $\sqrt{\theta_q - z}$  est analytique. Ses pôles sont simples et sont les seuils atteints  $\theta_q$ . Dans les parties 1.3 et 1.4, nous utilisons cette extension pour étendre dans les deux cas la résolvante  $(\mathcal{H} - z)^{-1}$  puis nous définissons ainsi les résonances comme les pôles de cette extension. Nous nous plaçons alors dans le cadre  $\delta \rightarrow 0$  et nous étudions le comportement asymptotique des résonances au voisinage des seuils  $\theta_q$  (voir les théorèmes 1.4 et 1.5).

## 1.1 Présentation du modèle et réduction

Soit  $\Omega_0 := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , le demi-plan et soit  $\mathbf{A}$ , le potentiel magnétique défini sur  $\Omega_0$  par  $\mathbf{A}(x, y) := xdy$  (ou de manière équivalente par le champ de vecteurs  $\mathbf{A}(x, y) = (0, x)$ ). Ce potentiel est associé à un champ magnétique unitaire. En effet, le champ magnétique associé à  $\mathbf{A}$  est le champ scalaire, donné par  $b = \text{rot}(\mathbf{A}) = \partial_x x - \partial_y 0 = 1$ . Cette situation modélise un plan de l'espace, traversé par un champ magnétique constant normal au plan.

Soit  $q$ , la forme quadratique définie par

$$q(u) = \int_{\Omega_0} |(i\nabla + \mathbf{A})u|^2 dx dy, \quad (1.1.1)$$

définie sur le domaine de forme

$$\mathcal{D}(q) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), (i\nabla + \mathbf{A})u \in \mathbf{L}^2(\Omega_0)\}.$$

Nous considérons l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  défini comme la réalisation de Neumann sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  du laplacien magnétique  $(i\nabla + \mathbf{A})^2$ , à savoir l'extension de Friedrichs de la forme quadratique  $q$ .

Cet opérateur est l'opérateur

$$\mathcal{H}_0 = -\partial_x^2 + (i\partial_y + x)^2, \quad (1.1.2)$$

avec une condition de Neumann magnétique, c'est-à-dire,  $\mathbf{n} \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u|_{\partial\Omega_0} = 0$ , où  $\mathbf{n}$  est une normale unitaire à  $\partial\Omega_0$ . Nous renvoyons à la proposition B.1 pour une définition plus détaillée de l'opérateur,

incluant le lien entre la forme quadratique et la condition au bord. La définition de cet opérateur et ses propriétés les plus classiques peuvent également être trouvées dans [Fou10, chapitre 1] et dans les références incluses.

Notre choix du potentiel  $\mathbf{A}(x, y) = (0, x)$  implique qu'en tout point  $(0, y) \in \partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{A}(0, y) = 0$ . Ainsi la précédente condition de Neumann magnétique se ramène à la condition de Neumann classique, à savoir  $\mathbf{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega_0} = 0$ , c'est-à-dire,  $\partial_x u(0, y) = 0$  pour tout réel  $y$ . L'opérateur  $\mathcal{H}_0$  est donc donné par

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 u = -\partial_x^2 u + (i\partial_y + x)^2 u, \\ \mathcal{D}(\mathcal{H}) = \left\{ u \in \mathcal{D}(q), (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), \partial_x u(0, y) = 0 \right\}. \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{F}_y$ , la transformée de Fourier partielle par rapport à  $y$  définie par

$$\mathcal{F}_y f(x, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(x, y) dy. \quad (1.1.3)$$

Cet opérateur est inversible et son inverse est donné par

$$\mathcal{F}_y^* f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} f(x, \xi) d\xi. \quad (1.1.4)$$

Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , nous définissons l'opérateur  $h_0(\xi)$  comme la réalisation de Neumann sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$  de l'opérateur

$$-\partial_x^2 + (x - \xi)^2.$$

Soit  $\mathcal{D}(h_0(\xi))$ , le domaine de  $h_0(\xi)$ . Ce domaine est donné par [Fou10, Section 3.2] :

$$\mathcal{D}(h_0(\xi)) = \left\{ u \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}_+), x^2 u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), u'(0) = 0 \right\}. \quad (1.1.5)$$

Dans la terminologie de la théorie des perturbations de Kato [Kat66, Section VII.2], la famille  $h_0(\xi)$  est une famille analytique de type (A). Autrement dit, pour tout réel  $\xi_0$ , il existe un voisinage  $\mathcal{B}$  de  $\xi_0$  tel que la famille  $(h_0(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$  s'étend en une famille d'opérateurs fermés  $(h_0(\xi))_{\xi \in \mathcal{B}}$  dont le domaine, donné par la formule (1.1.5), ne dépend pas de  $\xi \in \mathcal{B}$ . De plus, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(h_0(\xi))$ , l'application  $\xi \in \mathcal{B} \rightarrow h_0(\xi) \varphi$  est holomorphe. Nous renvoyons à la note [Bon17, partie 2.2] pour la description des opérateurs  $h_0(\xi)$ , lorsque  $\xi$  est dans un voisinage de l'axe réel et nous notons que  $h_0(\xi)^* = h_0(\overline{\xi})$ . Par conséquent, ces opérateurs ne sont autoadjoints que si  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Enfin, l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  admet la décomposition en intégrale directe (voir l'annexe E pour les notations sur les intégrales directes)

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_y^* \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_0(\xi) d\xi \right) \mathcal{F}_y \quad (1.1.6)$$

Comme  $|x|^2 \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , l'injection de  $\mathcal{D}(h_0(\xi))$  dans  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$  est compacte. L'opérateur positif  $h_0(\xi)$  est alors à résolvante compacte. Son spectre est donc constitué d'une suite croissante de valeurs propres positives,  $\lambda_p(\xi)$ ,  $p \geq 1$ . Une paire propre  $(\lambda, u)$ , avec  $\lambda \geq 0$  et  $u \neq 0$ , vérifie donc

$$\begin{cases} -u'' + (x - \xi)^2 u = \lambda u, \\ u \in \mathcal{D}(h_0(\xi)). \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Dans la proposition suivante, nous montrons que la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$  est simple. Ce résultat assurera alors que les fonctions de bande  $\xi \mapsto \lambda_p(\xi)$  sont analytiques.

**Proposition 1.1.1**

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$  est simple.

**Démonstration :** Tout vecteur propre  $u$  de  $h_0(\xi)$  vérifie  $u'(0) = 0$ . Si de plus  $u(0) = 0$ , alors le théorème de Cauchy assure que  $u = 0$ , ce qui est impossible.

Supposons que la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$  n'est pas simple. L'espace propre associé à  $\lambda_p(\xi)$  est alors au moins de dimension 2. Cet espace contient donc deux éléments  $u_1$  et  $u_2$  formant une famille libre. Ainsi,  $u := u_2(0)u_1 - u_1(0)u_2 \neq 0$ . De plus ce vecteur propre de  $h_0(\xi)$  vérifie  $u(0) = 0$ . C'est impossible. ■

Comme vu dans la proposition précédente, la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$  est simple. La théorie des perturbations analytiques de Kato [Kat66, chapitre VII, Théorème 1.7] assure donc que les fonctions  $\lambda_p$ , appelées fonctions de bande, sont analytiques sur  $\mathbb{R}$ . Le comportement à l'infini de  $\lambda_p(\xi)$  est donné par [Dau93] :

$$\lambda_p(\xi) \underset{\xi \rightarrow -\infty}{\sim} \xi^2, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \lambda_p(\xi) = E_p := 2p - 1, \quad p \geq 1. \quad (1.1.8)$$

Enfin, chaque fonction de bande  $\lambda_p$  possède un unique minimum non dégénéré,  $\theta_p$  [Hel01, Annexe A]. La démonstration repose sur l'utilisation de la formule de Dauge-Helffer [Dau93, Section 1, formule (F)]. Ces propriétés sont visibles sur les graphes de ces fonctions présentés à la figure 1.1.

Soit pour tout  $p \geq 1$ ,  $\xi_p$ , l'unique solution réelle de  $\lambda_p(\xi) = \theta_p$ . Comme  $\theta_p$  est un minimum non dégénéré, en notant  $K_p := \lambda_p''(\xi_p)/2 > 0$ , le comportement asymptotique de  $\lambda_p(\xi)$  lorsque  $\xi \rightarrow \xi_p$  est donné par

$$\lambda_p(\xi) = \theta_p + K_p(\xi - \xi_p)^2(1 + O(\xi - \xi_p)), \quad \xi \rightarrow \xi_p.$$

Soit  $d_p$ , la fonction définie par

$$d_p(\xi) := \frac{\lambda_p(\xi) - \theta_p}{(\xi - \xi_p)^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.9)$$

La fonction  $d_p$  est positive et analytique sur  $\mathbb{R}$ . Nous notons que  $d_p(\xi_p) = K_p > 0$ . De plus,  $\lambda_p - \theta_p$  se décompose sous la forme

$$\lambda_p(\xi) - \theta_p = (\xi - \xi_p)^2 d_p(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.10)$$

Soit  $\mu_p$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\mu_p(\xi) := -(\xi - \xi_p) \sqrt{d_p(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.1.11)$$

Le lemme suivant décrit le comportement de la fonction  $\mu_p$ . Il sera utilisé dans la partie 1.2 (voir la proposition 1.2.2) pour prolonger la résolvante de  $\mathcal{H}_0$ .

**Lemme 1.1.1**

La fonction  $\mu_p$  est analytique sur  $\mathbb{R}$  et décroît strictement de  $+\infty$  vers  $-\sqrt{E_p - \theta_p}$ .

**Démonstration :** Par définition de  $\theta_p$ , et par la définition (1.1.9) de  $d_p$ , pour tout  $\xi \neq \xi_p$ ,  $d_p(\xi) > 0$ . De plus,  $d_p(\xi_p) = K_p > 0$ . Donc, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $d_p(\xi) > 0$ . Nous combinons cela avec l'analyticité de la fonction  $\sqrt{\cdot}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Nous en déduisons que  $\mu_p$  est analytique sur  $\mathbb{R}$ .

La définition (1.1.11) de  $\mu_p$  et la formule (1.1.10) fournissent

$$\lambda_p - \theta_p = \mu_p^2. \quad (1.1.12)$$

Ainsi  $\lambda_p' = 2\mu_p\mu_p'$ . Si  $\xi \neq \xi_p$ , alors  $\lambda_p'(\xi) \neq 0$  puis  $\mu_p'(\xi) \neq 0$ . De plus, la définition (1.1.11) fournit  $\mu_p'(\xi_p) = -\sqrt{K_p} < 0$ . Nous en concluons que  $\mu_p'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  puis que pour tout réel  $\xi$ ,  $\mu_p'(\xi) < 0$ . Par suite,  $\mu_p$  décroît.

Nous combinons la relation (1.1.12) avec la propriété (1.1.8). Ainsi,  $\mu_p(\xi) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\xi \rightarrow -\infty$  et  $|\mu_p(\xi)| \rightarrow \sqrt{E_p - \theta_p}$  lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ . Comme  $\mu_p(\xi) < 0$  pour  $\xi > \xi_p$ , nous en déduisons que  $\mu_p(\xi) \rightarrow -\sqrt{E_p - \theta_p}$  lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ . ■

Comme les fonctions de bande sont analytiques et non constantes, la théorie des opérateurs fibrés [Ree78, Théorème XIII.85] (voir la proposition E.1) assure que le spectre de  $\mathcal{H}_0$ , noté  $\sigma(\mathcal{H}_0)$ , est absolument continu et vaut

$$\sigma(\mathcal{H}_0) = \sigma_{ac}(\mathcal{H}_0) = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \overline{\lambda_p(\mathbb{R})} = \bigcup_{p=1}^{+\infty} [\theta_p, +\infty) = [\theta_1, +\infty).$$

**Remarque 1.1.1 :** Le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  est  $\theta_1$ . C'est une constante qui intervient également dans des problèmes de supraconductivité de surface [SJ63, SJ69, Fou10, Hel96]. Dans ce contexte, elle est notée  $\Theta_0$ . Une approximation précise de  $\theta_1$  est calculée par la méthode des différences finies [Bon12] et est donnée par  $\theta_1 \approx 0,590106125$ .

Nous introduisons pour tout entier  $p$  et tout réel  $\xi$ ,  $u_p(\cdot, \xi)$ , une fonction propre unitaire de  $h_0(\xi)$  associée à la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$ . Comme la famille  $h_0(\xi)$  est analytique, et comme les valeurs propres  $\lambda_p(\xi)$  sont simples (voir la proposition 1.1.1), une telle fonction peut être choisie de sorte que l'application  $\xi \in \mathbb{R} \mapsto u_p(\cdot, \xi) \in \mathcal{D}(h_0(\xi))$  soit analytique. L'application qui à  $\xi$  associe la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(u_p(\cdot, \xi))$ , notée  $\pi_p(\xi)$ , est par conséquent également analytique. Enfin nous notons que la paire  $(\lambda_p(\xi), u_p(\cdot, \xi))$  vérifie l'équation (1.1.7). Ainsi,

$$-\partial_x^2 u_p(x, \xi) + (x - \xi)^2 u_p(x, \xi) = \lambda_p(\xi) u_p(x, \xi).$$

**Approximation numérique des fonctions de bande** Nous utilisons la méthode des différences finies pour tracer des approximations numériques des fonctions de bande  $\lambda_p$ ,  $p \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ . Nous effectuons le calcul pour  $\xi \in [-1, 5]$  sur l'intervalle  $x \in [0, 20]$  avec une condition de Dirichlet artificielle en  $x = 20$ .

La figure 1.1 montre les approximations de  $\lambda_p(\xi)$  pour  $\xi \in [-1, 5]$  et  $p \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ . En accord avec la théorie,  $\lambda_p$  possède un unique minimum non dégénéré et tend vers  $E_p$  lorsque  $\xi \rightarrow \infty$ .

## 1.2 Étude de la résolvante libre

Dans cette partie, nous construisons une extension analytique dans un espace à poids de la résolvante

$$\mathcal{R}_0(z) := (\mathcal{H}_0 - z)^{-1}, \quad z \notin [\theta_1, +\infty). \quad (1.2.1)$$

Plus précisément, nous construisons au théorème 1.1 une extension méromorphe de  $\mathcal{R}_0$  dans un voisinage du seuil  $\theta_p$ . Notre objectif est d'établir une description explicite du comportement de  $\mathcal{R}_0(z)$  au voisinage  $\theta_p$ , donnée par le théorème 1.2. Cette description des pôles sera utilisée dans les parties 1.3 et 1.4 pour construire et analyser des résonances.

Nous posons pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\langle y \rangle := \sqrt{1 + y^2}$  et pour  $\beta > 0$ , nous introduisons le poids  $w$  défini par

$$w(y) = w_\beta(y) := e^{-\beta \langle y \rangle}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.2.2)$$

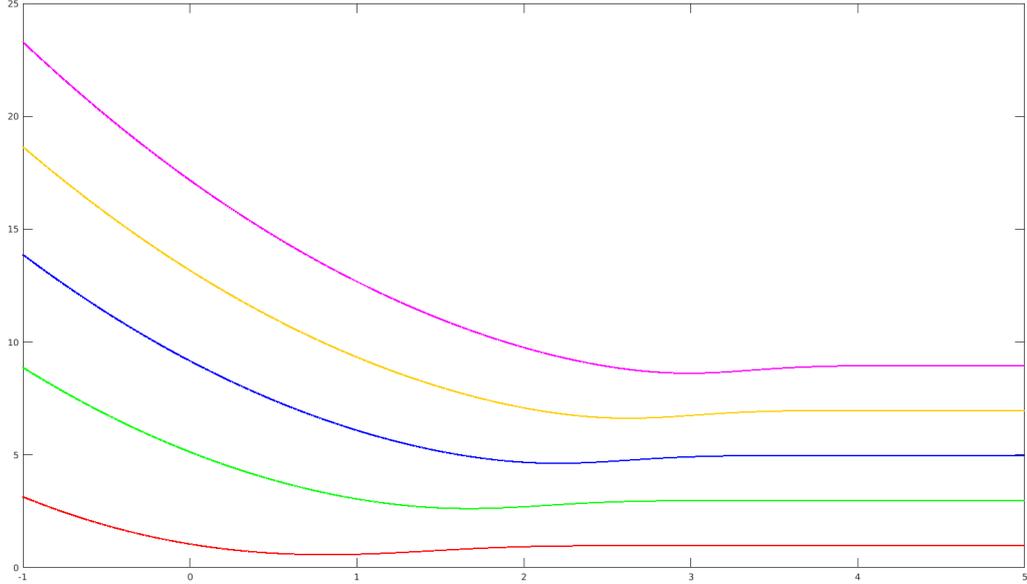


Figure 1.1 – Tracé des fonctions de bande  $\lambda_p(\xi)$  pour  $1 \leq p \leq 5$  et  $\xi \in [-1, 5]$ .

Nous considérons la fonction définie sur  $\mathbb{C} \setminus [\theta_1, +\infty)$  par

$$z \mapsto (\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \in \mathcal{L}(w\mathbf{L}^2(\Omega_0); w^{-1}\mathbf{L}^2(\Omega_0)).$$

Elle s'identifie à la fonction  $R_0 : \mathbb{C} \setminus [\theta_1, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ , appelée résolvante à poids, définie par

$$R_0(z) := w\mathcal{R}_0(z)w. \quad (1.2.3)$$

Nous rappelons que les paires propres de l'opérateur autoadjoint  $h_0(\xi)$  sont les  $(\lambda_p(\xi), u_p(\cdot, \xi))$ . Par conséquent,

$$h_0(\xi) = \sum_{p \geq 1} \lambda_p(\xi) \pi_p(\xi),$$

puis, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$(h_0(\xi) - z)^{-1} = \sum_{p \geq 1} \frac{\pi_p(\xi)}{\lambda_p(\xi) - z}, \quad z \notin \sigma(h_0(\xi)).$$

Pour  $p \geq 1$ , nous définissons l'opérateur  $r_p$  par

$$r_p(z) := w\mathcal{F}_y^* \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \frac{\pi_p(\xi)}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi \right) \mathcal{F}_y w, \quad z \notin [\theta_p, +\infty). \quad (1.2.4)$$

Nous combinons la définition (1.2.3) de  $R_0(z)$ , la décomposition (1.1.6) de l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  en intégrale directe, la définition (1.2.4) de  $r_p(z)$  et une interversion somme intégrale. Nous en déduisons que l'opérateur  $R_0(z)$ , se décompose sous la forme

$$R_0(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} r_p(z), \quad z \notin [\theta_1, +\infty). \quad (1.2.5)$$

Soit  $p \geq 1$ . Pour tout  $\beta > 0$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , nous définissons l'opérateur  $G_p(\xi) : \mathbf{L}^2(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$G_p(\xi)f := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_0} e^{-i\xi y} w(y) u_p(x, \xi) f(x, y) dx dy, \quad f \in \mathbf{L}^2(\Omega_0). \quad (1.2.6)$$

L'adjoint  $G_p(\xi)^*$  de  $G_p(\xi)$  est l'opérateur  $G_p(\xi)^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_0)$  donné par

$$(G_p(\xi)^* z)(x, y) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi y} w(y) u_p(x, \xi), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cet adjoint s'identifie à l'élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  suivant :

$$G_p(\xi)^*(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi y} w(y) u_p(x, \xi), \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (1.2.7)$$

Soit  $\sqrt{\cdot}$ , la fonction racine carrée définie par

$$\sqrt{re^{i\theta}} := \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in (0, 2\pi). \quad (1.2.8)$$

Cette fonction est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  et à valeur dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}^+$ . Dans le lemme suivant, nous écrivons  $r_p(z)$  (défini par (1.2.4)) à l'aide de  $G_p(\xi)$ . Nous utiliserons cette décomposition dans les propositions 1.2.1 et 1.2.2 pour prolonger  $r_p(z)$  à travers le spectre de  $\mathcal{H}_0$ . Nous utilisons des intégrales au sens de Bochner pour que les écritures soient plus compactes.

### Lemme 1.2.1

Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus [\theta_p, +\infty)$ ,  $r_p(z)$  se décompose sous la forme

$$r_p(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi. \quad (1.2.9)$$

De plus l'opérateur  $r_p(z)$  se décompose sous la forme

$$r_p(z) = \frac{1}{2\sqrt{z - \theta_p}} \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} + \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{-\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi. \quad (1.2.10)$$

**Démonstration :** Nous déduisons de la définition (1.2.4) de  $r_p(z)$  que

$$r_p(z)f = w\mathcal{F}_y^* \left( \frac{1}{\lambda_p - z} \pi_p \mathcal{F}_y(wf) \right), \quad f \in \mathbf{L}^2(\Omega_0). \quad (1.2.11)$$

La définition de  $\mathcal{F}_y$  fournit

$$\mathcal{F}_y(wf)(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y'} w(y') f(x, y') dy', \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nous combinons cette identité avec les définitions de  $\pi_p(\xi)$  et de  $G_p(\xi)$ . Nous déduisons que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \pi_p(\xi) \mathcal{F}_y(wf)(x, \xi) &= u_p(x, \xi) \int_{\mathbb{R}_+} u_p(x', \xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y'} w(y') f(x', y') dy' dx' \\ &= u_p(x, \xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_0} u_p(x', \xi) e^{-i\xi y'} w(y') f(x', y') dy' dx' \\ &= u_p(x, \xi) G_p(\xi) f. \end{aligned}$$

Nous injectons cela dans la définition (1.1.4) de  $\mathcal{F}^*$ . Cela fournit

$$\begin{aligned} w(y) \mathcal{F}_y^* \left( \frac{1}{\lambda_p - z} \pi_p \mathcal{F}_y(wf) \right) (x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi y} w(y) u_p(x, \xi)}{\lambda_p(\xi) - z} G_p(\xi) f d\xi \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi) f}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi \right) (x, y). \end{aligned}$$

Nous en déduisons la formule (1.2.9) en injectant cela dans l'identité (1.2.11).

Enfin nous combinons la propriété (1.1.12) et la formule (1.2.9). Cela produit

$$\begin{aligned} r_p(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\theta_p + \mu_p(\xi)^2 - (\theta_p + \sqrt{z - \theta_p})} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi)^2 - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{(\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p})(\mu_p(\xi) + \sqrt{z - \theta_p})} d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z - \theta_p}} \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} + \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{-\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi. \end{aligned}$$

C'est le résultat souhaité. ■

**Remarque 1.2.1 :** Nous avons en fait démontré que  $r_p(z)$  est un opérateur à noyau dont le noyau,  $K$ , est donné par :

$$K(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi(y-y')} w(y) u_p(x, \xi) w(y') u_p(x', \xi)}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi.$$

Nous fixons un niveau d'énergie  $\mathcal{E}_0 > \theta_p$  tel que  $\mathcal{E}_0 \neq E_p$ . Nous prolongeons l'application  $r_p$ , initialement définie sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}^+$  au voisinage de  $\mathcal{E}_0$ . La démonstration repose sur une déformation de contour dans la décomposition intégrale donnée par le lemme 1.2.1.

**Proposition 1.2.1** (Prolongement loin des seuils)

Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta > \beta_0$ , l'application  $r_p$  initialement définie sur  $\mathbb{C}^+$  admet un prolongement holomorphe sur un voisinage de  $\mathcal{E}_0$  que nous appelons toujours  $r_p$ .

**Démonstration :** Nous rappelons que la fonction  $\lambda_p$  admet  $\theta_p$  comme unique minimum local et que  $\lambda_p(\xi)$  tend vers  $E_p$  lorsque  $\xi$  tend vers  $+\infty$ . L'équation  $\lambda_p(\xi) = \mathcal{E}_0$  possède donc une unique solution réelle,  $\xi_-$  si  $\mathcal{E}_0 > E_p$  et deux solutions réelles,  $\xi_{\pm}$  si  $\mathcal{E}_0 \in (\theta_p, E_p)$  vérifiant  $\xi_- < \xi_p < \xi_+$  (voir le tracé des fonctions  $\lambda_p$  présenté par la figure 1.1). Comme  $\mathcal{E}_0 \neq \theta_p$ , la dérivée  $\lambda_p'(\xi_{\pm})$  est non nulle. Il existe donc  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que  $\lambda_p$  est bi-holomorphe<sup>a</sup> sur la boule ouverte de centre  $\xi_{\pm}$  et de rayon  $\tilde{\varepsilon}$ , notée  $\mathcal{B}(\xi_{\pm}, \tilde{\varepsilon})$ . Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $\mathcal{B}(\mathcal{E}_{\pm}, \varepsilon) \subset \lambda_p(\mathcal{B}(\xi_{\pm}, \tilde{\varepsilon}))$ . Nous définissons le chemin (non orienté)  $\Gamma$  par

$$\Gamma := (\theta_p, \mathcal{E}_0 - \varepsilon) \cup \{\lambda \in \mathbb{C}^-, |\lambda - \mathcal{E}_0| = \varepsilon\} \cup (\mathcal{E}_0 + \varepsilon, +\infty). \quad (1.2.12)$$

Nous définissons également le chemin  $\gamma$  comme le contour en variable  $\xi$  associé à  $\Gamma$  :  $\gamma := \lambda_p^{-1}(\Gamma)$ .

a. Une application bi-holomorphe est une application holomorphe et bijective. Dans ce cas, sa bijection réciproque est également holomorphe.

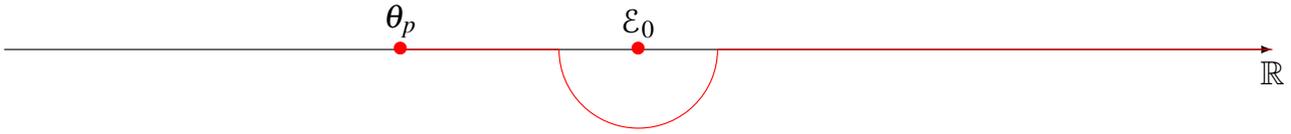


Figure 1.2 – Le contour  $\Gamma$ .

Afin de mieux comprendre la preuve, nous allons décrire et représenter le contour gamma. Comme nous allons le voir ci-dessous, lorsque  $\xi$  parcourt le contour  $\gamma$ ,  $\lambda_p(\xi)$  parcourt une partie du contour  $\Gamma$  deux fois. En particulier  $\lambda_p(\xi)$  parcourt  $\Gamma \setminus \mathbb{R}$  deux fois si et seulement si  $\epsilon_0 < E_p$ .

Pour pouvoir tracer sur la figure 1.5 l'allure de ce contour ainsi que le domaine situé entre l'axe réel et le contour  $\gamma$ , noté  $\mathcal{D}$ , nous allons établir que le chemin  $\gamma$  passe dans le demi-plan supérieur  $\mathbb{C}^+$  au voisinage de  $\xi_-$  et (dans le cas où  $\epsilon_0 \in (\theta_p, E_p)$ ) dans le demi-plan inférieur  $\mathbb{C}^-$  au voisinage de  $\xi_+$ .

Supposons que le contour  $\gamma$  soit orienté de  $-\infty$  vers  $+\infty$ . Lorsque  $\xi$  parcourt  $\gamma$ ,  $\lambda_p(\xi)$  parcourt  $\Gamma$  de manière suivante :

1. De  $+\infty$  vers  $\theta_p$  en passant sur le demi cercle  $\{\lambda \in \mathbb{C}^-, |\lambda - \epsilon_0| = \epsilon\}$  de  $\epsilon_0 + \epsilon$  vers  $\epsilon_0 - \epsilon$ ,
2. De  $\theta_p$  vers  $E_p$ . En particulier  $\lambda_p(\xi)$  parcourt le demi cercle  $\{\lambda \in \mathbb{C}^-, |\lambda - \epsilon_0| = \epsilon\}$  si et seulement si  $\epsilon_0 < E_p$  (dans ce cas, le demi-cercle est parcouru de  $\epsilon_0 - \epsilon$  vers  $\epsilon_0 + \epsilon$ ).

Lorsque  $\xi$  parcourt  $\gamma$  au voisinage de  $\xi_-$ ,  $\lambda_p(\xi)$  parcourt le demi-cercle  $\Gamma \setminus \mathbb{R}$  de  $\epsilon_0 + \epsilon$  vers  $\epsilon_0 - \epsilon$ . Nous allons déterminer le comportement de  $\xi$ , situé au voisinage de  $\xi_-$ , lorsque  $\lambda_p(\xi)$  parcourt le chemin orienté de la figure 1.3.

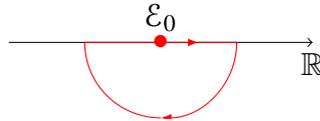


Figure 1.3 – Chemin parcouru par  $\lambda_p(\xi)$  au voisinage de  $\epsilon_0$  lorsque  $\xi$  est au voisinage de  $\xi_-$

Nous rappelons que la fonction  $\lambda_p$  décroît au voisinage de  $\xi_-$  (voir l'allure de la courbe de  $\lambda_p$  sur la figure 1.1). Par conséquent, lorsque  $\lambda_p(\xi)$  parcourt le chemin 1.3, la portion située sur l'axe réel du chemin parcouru par la variable  $\xi$  est parcourue dans le sens décroissant. Comme la fonction  $\lambda_p$  est biholomorphe au voisinage de  $\xi_-$ , elle est conforme et préserve alors les orientations. La variable  $\xi$  suit alors le chemin 1.4 au voisinage de  $\xi_0$ .

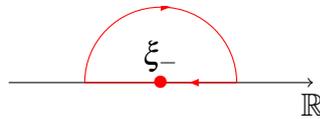


Figure 1.4 – Allure du chemin parcouru par  $\xi$  au voisinage de  $\xi_-$  lorsque  $\lambda_p(\xi)$  suit le chemin de la figure 1.3

Nous avons donc montré  $\gamma$  passe dans le demi-plan supérieur au voisinage de  $\xi_-$ .

De la même manière, dans le cas où  $\epsilon_0 \in (\theta_p, E_p)$ , la croissance de  $\lambda_p$  au voisinage de  $\xi_+$  assure que  $\gamma$  passe dans le demi-plan inférieur au voisinage de  $\xi_+$ .

Soit  $\beta_0 := \sup(|\text{Im}(\xi)|, \xi \in \gamma)$  et soit  $\beta > \beta_0$ . Nous rappelons que l'application  $\xi \rightarrow u_p(\cdot, \xi)$  est analytique sur  $\mathbb{R}$ . Il en est donc de même pour l'application  $\xi \mapsto G_p(\xi)$  (pour tout  $\beta \geq 0$ ). Pour tout  $\xi \in \mathcal{D}$ ,  $y \mapsto e^{i\xi y} w(y) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_y)$  puis en vertu de la définition (1.2.7) de  $G_p(\xi)^*$ , la famille  $\xi \mapsto G_p(\xi)^*$  s'étend analytiquement à  $\mathcal{D}$ . En combinant ce résultat avec l'analyticité de  $G_p$  et de  $\lambda_p$  au voisinage de



Figure 1.5 – Allure du contour  $\gamma$  et du domaine  $\mathcal{D}$  dans le cas  $\theta_p < \varepsilon_0 < E_p$ ,  $\xi_{\pm}$  sont les deux solutions réelles de  $\lambda_p(\xi) = \varepsilon_0$  et le domaine  $\mathcal{D}$  est hachuré.

$\xi_0$ , nous déduisons que la fonction  $\xi \mapsto (\lambda_p(\xi) - z)^{-1} (G_p(\xi)^* G_p(\xi))$ , à valeur opérateur est analytique sur  $\mathcal{D}$ . Comme  $\Gamma \cap (\mathbb{C}^+ \cup \mathcal{B}(\varepsilon_0, \varepsilon))$ , la combinaison de la décomposition (1.2.9) de  $r_p(z)$  et d’une application directe du théorème d’holomorphie sous le signe intégrale assure que l’application

$$z \mapsto \int_{\gamma} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi$$

définit une extension analytique à  $\mathcal{B}(\varepsilon_0, \varepsilon)$  de  $r_p$ , initialement définie sur  $\mathbb{C}^+$ . Par abus nous désignons toujours par  $r_p$  cette extension. ■

Soit  $\mathcal{M}$ , le revêtement connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{\theta_p, p \geq 1\}$  à une infinité de feuilletés sur lequel chaque fonction  $z \mapsto \sqrt{z - \theta_p}$  est analytique.

**Remarque 1.2.2 :** Au voisinage du seuil atteint  $\theta_p$ , la surface de Riemann  $\mathcal{M}$  peut être paramétrée par  $z_p(k) = \theta_p + k^2$ , où  $k \in \mathbb{C}^*$  est au voisinage de 0.

**Proposition 1.2.2** (Prolongement au voisinage de  $\theta_p$ )

Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta > \beta_0$ , l’application  $r_p$  initialement définie sur  $\mathbb{C} \setminus [\theta_p, +\infty)$  admet un prolongement méromorphe sur un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$ . De plus,  $r_p$  se décompose sous la forme

$$r_p(z) = \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + r(z), \quad (1.2.13)$$

où  $r$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $\theta_p$  et  $A$  est l’opérateur de rang 1 donné par

$$A = i \frac{\pi}{\sqrt{K_p}} G(\xi_p)^* G(\xi_p). \quad (1.2.14)$$

**Démonstration :** Nous avons vu au lemme 1.2.1 qu’au voisinage de  $\theta_p$ ,

$$r_p(z) = \frac{1}{2\sqrt{z - \theta_p}} \int_{\mathbb{R}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} + \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{-\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi. \quad (1.2.15)$$

Nous définissons pour  $\varepsilon$  assez petit le chemin  $\Gamma$  par

$$\Gamma := \left( -\sqrt{E_p - \theta_p}, -\varepsilon \right) \cup \{ \lambda \in \mathbb{C}^-, |\lambda| = \varepsilon \} \cup (\varepsilon, +\infty), \quad (1.2.16)$$

puis les chemins  $\gamma_{\pm}$  par  $\gamma_{\pm} := \pm \mu_p^{-1}(\Gamma)$ . Nous rappelons que  $\mu_p$  décroît (voir le lemme 1.1.1). Par suite  $\mu_p$  est bi-holomorphe, donc conforme au voisinage de  $\xi_p$ . Nous en déduisons donc (par le même raisonnement que dans la proposition 1.2.1) que  $\gamma_{\pm} \subset \mathbb{C}^{\pm}$ . La figure 1.6 montre l’allure des contours  $\gamma_{\pm}$ .

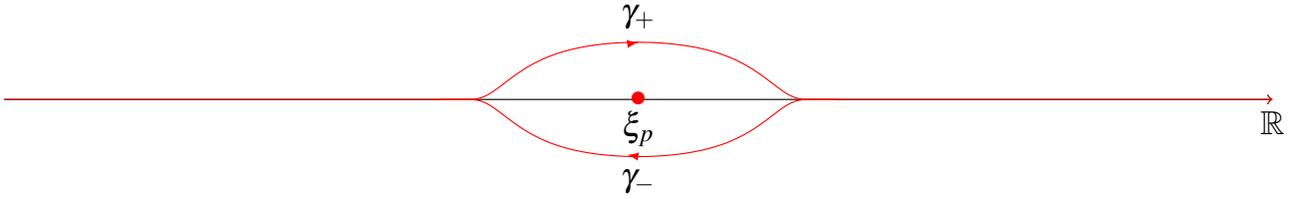


Figure 1.6 – Allure du contour  $\gamma_{\pm}$ .

Soit  $\beta > \beta_0 := \sup(|\text{Im}(\xi)|, \xi \in \gamma_{\pm})$ . Les applications  $\xi \mapsto (\pm\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p})^{-1} (G_p(\xi)^* G_p(\xi))$  à valeur opérateurs s'étendent analytiquement aux domaines bornés délimités par l'axe réel et par les contours  $\gamma_{\pm}$ . La combinaison de la décomposition (1.2.15) et d'une application directe du théorème d'holomorphic sous le signe intégrale assure alors que l'application

$$z \mapsto \frac{1}{2\sqrt{z - \theta_p}} \left( \int_{\gamma_+} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi + \int_{\gamma_-} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{-\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi \right) \quad (1.2.17)$$

définit une extension méromorphe de  $r_p$  initialement définie sur  $\mathbb{C} \setminus [\theta_p, +\infty)$  à un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$ .

De la formule (1.2.17), nous déduisons que le résidu  $A$  est donné par :

$$A = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma_+} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi)} d\xi - \int_{\gamma_-} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi)} d\xi \right).$$

Soit  $\mathcal{C} := \gamma_+ - \gamma_-$ . Par construction,  $\mathcal{C}$  est un chemin fermé encerclant  $\xi_p$  et  $\text{Ind}_{\mathcal{C}}(\xi_p) = -1$  (voir la figure 1.6). Par suite

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\mu_p(\xi)} d\xi.$$

Nous combinons la définition (1.1.11) de  $\mu_p$  et la formule intégrale de Cauchy pour obtenir l'égalité (1.2.14). ■

Nous montrons maintenant que l'application  $r_p(z)$  ainsi construite est un opérateur compact. Étant donné  $p \in [1, +\infty)$ , nous appelons  $\mathfrak{S}_p(\mathbf{L}^2(\Omega_0); \mathbb{C})$  (resp.  $\mathfrak{S}_p(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ ) la classe de Schatten-Von Neumann des opérateurs compacts de  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  dans  $\mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$ ) munie de la norme

$$\|T\|_p := \left( \sum_{\lambda \in \sigma(T^*T)} \lambda^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Nous rappelons de plus que si  $T$  est un opérateur à noyau dont le noyau  $K \in \mathbf{L}^p(\Omega_0^2)$ , alors  $T \in \mathfrak{S}_p(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$  et  $\|T\|_p \leq \|K\|_p$ . Les opérateurs de la classe  $\mathfrak{S}_1(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$  sont appelés opérateurs à trace. Ceux de la classe  $\mathfrak{S}_2(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$  sont les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

### Proposition 1.2.3

Soit  $\varepsilon_0 \in \sigma(\mathcal{H}_0)$  tel que  $\varepsilon_0 \notin \{E_p = 2p - 1, p \geq 1\}$ . Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta > \beta_0$  et tout  $z \in \mathcal{M}$  assez proche de  $\varepsilon_0$ ,  $r_p(z) \in \mathfrak{S}_1(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ .

**Démonstration :** Nous nous plaçons dans le cas où  $\varepsilon_0$  n'est pas un seuil. Nous rappelons que le chemin  $\gamma$  est défini dans la démonstration de la proposition 1.2.1 et que son allure est tracé sur la figure 1.5.

Soit  $\mathcal{D}$ , le domaine situé entre l'axe des abscisses et le chemin  $\gamma$ . Soit  $\beta_0 := \sup(|\operatorname{Im}(\xi)|, \xi \in \gamma)$ . Pour  $\beta > \beta_0$ ,

$$\left| e^{-i\xi y} w(y) \right| \leq e^{-(\beta - \beta_0)y}, \quad \xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}, y \in \mathbb{R}.$$

Nous rappelons que  $u_p(\cdot, \xi) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$  et nous en déduisons que

$$(x, y) \mapsto e^{-i\xi y} w(y) u_p(x, \xi) \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), \quad \xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}.$$

Donc pour tout  $\xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ ,  $G_p(\xi) \in \mathfrak{S}_2(\mathbf{L}^2(\Omega_0); \mathbb{C})$ . Nous en déduisons que pour  $\xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ , fixé,  $G_p(\xi)^* G_p(\xi) \in \mathfrak{S}_1(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ .

De plus nous déduisons de la définition de  $\gamma$  que, pour tout  $z$  il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|\lambda_p(\xi) - z| > C, \quad \xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}. \quad (1.2.18)$$

Cette relation assure que  $\lambda_p - z$  est borné inférieurement sur  $\mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ . Donc pour tout  $\xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}$ , fixé,  $(G_p(\xi)^* G_p(\xi)) (\lambda_p(\xi) - z)^{-1}$  est un opérateur à trace.

De plus, par définition de  $\gamma$ ,  $\gamma \setminus \mathbb{R}$  est un chemin borné inclus dans  $\mathbb{C}^+$ . Donc la fonction  $\xi \mapsto \left\| (G_p(\xi)^* G_p(\xi)) (\lambda_p(\xi) - z)^{-1} \right\|_1$ , à valeurs réelles, est intégrable sur  $\gamma \setminus \mathbb{R}$  (nous intégrons une quantité bornée sur un chemin borné).

De plus, nous notons que  $\xi \mapsto \left\| (G_p(\xi)^* G_p(\xi)) (\lambda_p(\xi) - z)^{-1} \right\|_1 \in \mathbf{L}^1(\gamma \cap \mathbb{R})$  [Bru18a, Formule (3.13)]. La démonstration de ce résultat repose sur l'intégrabilité de  $(\lambda_p - z)^{-1}$  lorsque  $\xi \rightarrow -\infty$  et sur l'analyse de l'opérateur  $G_p(\xi)^* G_p(\xi)$  lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$ . Cette dernière analyse repose elle-même sur l'approximation lorsque  $\xi \rightarrow +\infty$  de l'opérateur  $h_0(\xi)$  par l'oscillateur harmonique translaté  $-\partial_x^2 + (x - \xi)^2$  agissant sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres de cet opérateur sont les niveaux de Landau et les fonctions propres associées sont les fonctions d'Hermite translattées.

La combinaison de ces deux résultats assure que  $\xi \mapsto (G_p(\xi)^* G_p(\xi)) (\lambda_p(\xi) - z)^{-1} \in \mathbf{L}^1(\gamma)$ . En conséquence,

$$\int_{\gamma} \frac{G_p(\xi)^* G_p(\xi)}{\lambda_p(\xi) - z} d\xi \in \mathfrak{S}_1(\mathbf{L}^2(\Omega_0)), \quad \xi \in \mathbb{R} \cup \mathcal{D}. \quad (1.2.19)$$

Nous avons donc démontré que si  $\mathcal{E}_0$  n'est pas un seuil atteint, alors l'opérateur  $r_p(z)$  est un opérateur à trace. Nous montrons ce résultat de la même manière dans le cas où  $\mathcal{E}_0$  est un seuil atteint. Nous rappelons que les contours  $\gamma_{\pm}$  sont définis dans la proposition 1.2.2 et que leurs allures sont montrées à la figure 1.6. Nous démontrons comme dans la première partie que si  $\beta$  est assez grand, les opérateurs

$$\int_{\gamma_+} \frac{(G_p(\xi)^* G_p(\xi))}{\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_-} \frac{(G_p(\xi)^* G_p(\xi))}{-\mu_p(\xi) - \sqrt{z - \theta_p}} d\xi \quad (1.2.20)$$

définissent des opérateurs à trace. Par suite, pour tout  $z \in \mathcal{M}$  au voisinage de  $\theta_p$ ,  $r_p(z) \in \mathfrak{S}_1(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ . ■

Pour construire un prolongement analytique de  $R_0$ , nous combinons les résultats de la proposition 1.2.1 pour toutes les valeurs de  $p \geq 1$ . Soit  $\mathcal{E}_0 \in \sigma(\mathcal{H}_0) \setminus \{E_p, p \geq 1\}$ , et soient

$$q = q(\mathcal{E}_0) := \sup(p \geq 1, \mathcal{E}_0 \geq \theta_p), \quad (1.2.21)$$

et

$$\Pi^+ := \mathcal{F}^* \left( \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \sum_{p > q} \pi_p(\xi) d\xi \right) \mathcal{F}. \quad (1.2.22)$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$ , l'opérateur  $R_0(z)$  se décompose sous la forme

$$\begin{aligned} R_0(z) &= R_-(z) + r_q(z) + R_+(z), \quad \text{avec} \\ R_-(z) &= R_-(z, q) := \sum_{p=1}^{q-1} r_p(z) \quad \text{et} \quad R_+(z) = R_+(z, q) := \sum_{p=q+1}^{+\infty} r_p(z). \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

**Remarque 1.2.3 :** La notation (1.2.21) est consistante avec le cas  $\mathcal{E}_0 = \theta_q$ . En effet pour tout  $q \geq 1$ ,  $q(\theta_q) = q$ . De plus nous notons que  $\Pi_+$  dépend de  $q$ .

**Théorème 1.1** (Prolongement analytique de la résolvante libre)

Soit  $\varepsilon_0 \in \sigma(\mathcal{H}_0)$  tel que  $\varepsilon_0$  n'est pas un niveau de Landau. Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta > \beta_0$ , l'application  $R_0$  initialement définie sur  $\mathbb{C} \setminus [\theta_1, +\infty)$ , possède une extension méromorphe à un voisinage  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{M}$  de  $\varepsilon_0$ .

De plus les pôles de cette extension sont les seuils atteints  $\theta_q$ .

**Démonstration :** Nous notons que  $R_+$  est la résolvante à poids de  $\Pi^+ \mathcal{H}_0 \Pi^+$ . Le spectre de cet opérateur est donné par

$$\sigma(\Pi^+ \mathcal{H}_0 \Pi^+) = \bigcup_{p=q+1}^{+\infty} [\theta_p, +\infty) = [\theta_{q+1}, +\infty).$$

Donc  $\varepsilon_0 \notin \sigma(\Pi^+ \mathcal{H}_0 \Pi^+)$  et l'application  $R_+$  est alors holomorphe au voisinage de  $\varepsilon_0$ .

Comme  $q$  est fini, la proposition 1.2.1 assure que  $R_-$  possède une extension holomorphe à un voisinage de  $\varepsilon_0$ .

Nous supposons que  $\varepsilon_0 \neq \theta_q$ . D'après la proposition 1.2.1 le prolongement de  $r_q$  est holomorphe au voisinage de  $\varepsilon_0$ . Cela conclut la démonstration. Si au contraire  $\varepsilon_0 = \theta_q$ , la proposition 1.2.2 précise que  $r_q$  admet un prolongement méromorphe sur un voisinage  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_q$  et que  $\theta_q$  est le seul pôle de  $r_q$ , d'où le résultat. ■

Dans le théorème suivant, nous précisons la nature du pôle  $\theta_q$  de  $R_0(z)$ .

**Théorème 1.2** (Décomposition de la résolvante proche d'un seuil atteint)

L'opérateur  $R_0(z)$  défini au théorème 1.1 se décompose au voisinage de  $\theta_q$  sous la forme

$$R_0(z) = \frac{A}{\sqrt{z - \theta_q}} + F(z), \quad (1.2.24)$$

où  $F$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $\theta_q$  et  $A$  est l'opérateur de rang 1 donné par

$$A = i \frac{\pi}{\sqrt{K_q}} G(\xi_q)^* G(\xi_q). \quad (1.2.25)$$

**Démonstration :** En vertu de la proposition 1.2.1, les applications  $R_{\pm}$  sont holomorphes au voisinage de  $\theta_q$ . Nous avons établi à la proposition 1.2.2 que  $r_q(z)$  se décompose sous la forme

$$r_q(z) = \frac{A}{\sqrt{z - \theta_q}} + r(z),$$

où  $r$  est holomorphe. Nous en déduisons la décomposition (1.2.24) avec  $A$  donné par la formule (1.2.14) (qui correspond donc également à la formule (1.2.25)) et  $F = R_- + r + R_+$ . ■

**Remarque 1.2.4 :** Si nous posons  $k := \sqrt{z - \theta_p} \in \mathbb{C}^+$ , les théorèmes 1.1 et 1.2 assurent que l'application

$$k \in \mathbb{C}^+ \mapsto R_0(\theta_p + k^2) \quad (1.2.26)$$

possède une extension méromorphe dans un voisinage complexe de 0. De plus, 0 est le seul pôle de cette extension et le résidu est donné par la définition (1.2.25) :

$$R_0(\theta_q + k^2) = \frac{A}{k} + \tilde{F}_0(k). \quad (1.2.27)$$

Nous utiliserons cette variable  $k$  aux théorèmes 1.4 et 1.5 pour étudier des résonances.

Nous montrons maintenant la proposition suivante qui assure que  $\langle x \rangle^{-\alpha} R_0(z)$  est un opérateur compact. Elle sera utilisée dans la partie 1.3 (voir le théorème 1.3).

**Proposition 1.2.4** (Prolongement compact)

Soit  $\alpha > 1$ , soit  $\mathcal{E}_0 \in \sigma(\mathcal{H}_0) \setminus \{E_p, p \geq 1\}$  et soit, pour  $z \in \mathcal{V}_0$ , l'opérateur  $R_0(z)$  construit au théorème 1.1.

Pour tout  $z \in \mathcal{V}_0$ , l'opérateur  $\langle x \rangle^{-\alpha} R_0(z)$  est un opérateur compact.

**Démonstration :** Comme  $q$  est fini, la proposition 1.2.3 implique que les opérateurs  $R_-(z)$  et  $r_q(z)$  sont des opérateurs à trace. Comme l'opérateur de multiplication par  $\langle x \rangle^{-\alpha}$  est continu, les opérateurs  $\langle x \rangle^{-\alpha} R_-(z)$  et  $\langle x \rangle^{-\alpha} r_q(z)$  sont des opérateurs compacts.

De plus, comme  $\beta > 0$  et  $\alpha > 1$ , l'inégalité dia-magnétique [Fou10, Chapitre 2] assure que  $w(y) \langle x \rangle^{-\alpha} \mathcal{H}_0^{-1}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Nous rappelons que pour  $p > q$ ,  $\gamma = \mathbb{R}$ . Par suite,  $R_+(z) = w \Pi^+ \mathcal{R}_0(z) \Pi^+ w$ , puis  $\|\langle x \rangle^{-\alpha} R_+(z)\|_2 \leq \|\langle x \rangle^{-\alpha} w \mathcal{H}_0^{-1}\|_2 \|\Pi^+ \mathcal{H}_0 \mathcal{R}_0(z) \Pi^+ w\|$ . Nous notons que  $\sigma(\Pi^+ \mathcal{H}_0 \Pi^+) = [\theta_{q+1}, +\infty)$ . Nous en déduisons au moyen du théorème spectral que  $\|\Pi^+ \mathcal{H}_0 \mathcal{R}_0(z) \Pi^+\| \leq \theta_{q+1} |\theta_{q+1} - z|^{-1}$ . Par suite,

$$\|\langle x \rangle^{-\alpha} R_+(z)\|_2 \leq \|\langle x \rangle^{-\alpha} w \mathcal{H}_0^{-1}\|_2 \|w\| \frac{\theta_{q+1}}{|\theta_{q+1} - z|}, \quad (1.2.28)$$

d'où  $\langle x \rangle^{-\alpha} R_+(z) \in \mathfrak{S}_2(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ . Le résultat final est alors issu de la décomposition (1.2.23). ■

## 1.3 Perturbation par un potentiel électrique

### 1.3.1 Définition des résonances

Nous rappelons que le poids  $w$  est défini par  $w(y) = e^{-\beta \langle y \rangle}$ . Nous considérons un potentiel électrique  $V : \Omega_0 \mapsto \mathbb{R}$ , mesurable tel qu'il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\alpha > 1$  telles que :

$$|V(x, y)| \leq C w(y)^2 \langle x \rangle^{-\alpha}, \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (1.3.1)$$

Soit  $\mathcal{H}$ , l'opérateur défini sur le domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$  par

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 + V. \quad (1.3.2)$$

Comme  $V(x, y) \rightarrow 0$  lorsque  $(x, y) \rightarrow \infty$ , l'inégalité dia-magnétique assure que  $V \mathcal{H}_0^{-1}$  est compact. La perturbation autoadjointe définie par l'opérateur de multiplication par  $V$  est donc une perturbation relativement compacte de  $\mathcal{H}_0$ . Ainsi par le critère de Weyl, les spectres essentiels de  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}$  coïncident :  $\sigma_{ess}(\mathcal{H}) = \sigma_{ess}(\mathcal{H}_0) = \sigma(\mathcal{H}_0) = [\theta_1, +\infty)$ .

Nous définissons pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{H})$  la résolvante  $\mathcal{R}(z) := (\mathcal{H} - z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ , puis la résolvante à poids  $R(z) := w \mathcal{R}(z) w \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ . Le théorème suivant nous permet de définir les résonances.

**Théorème 1.3** (Extension méromorphe)

Pour tout  $\mathcal{E}_0 \in \sigma(\mathcal{H}_0) \setminus \{E_p, p \geq 1\}$ , l'application  $R$ , initialement définie sur  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{H})$  admet une extension méromorphe à un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\mathcal{E}_0$ .

**Démonstration :** Nous rappelons que  $R_0(z)$  est définie pour  $z \in \mathbb{C} \setminus [\theta_1, +\infty)$  par  $R_0(z) = w(\mathcal{H}_0 - z)^{-1}w$  et s'étend analytiquement à un voisinage  $\mathcal{V}_0$  de  $\mathcal{E}_0$  (voir le théorème 1.1). Nous déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que  $R(z)$  soit bien défini. Pour cela nous calculons formellement

$$\begin{aligned} R(z) &= w(\mathcal{H} - z)^{-1}w = w(\mathcal{H}_0 + V - z)^{-1}w \\ &= w \left( \left( I + V(\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \right) (\mathcal{H}_0 - z) \right)^{-1} w = w(\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \left( I + V(\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \right)^{-1} w \\ &= R_0(z) w^{-1} \left( I + V(\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \right)^{-1} w = R_0(z) \left( w^{-1} \left( I + V(\mathcal{H}_0 - z)^{-1} \right) w \right)^{-1} \\ &= R_0(z) \left( I + V w^{-1} (\mathcal{H}_0 - z)^{-1} w \right)^{-1} = R_0(z) \left( I + V w(y)^{-2} R_0(z) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $R(z)$  est bien défini si  $R_0(z)$  est bien défini (c'est le cas si  $z \in \mathcal{V}_0 \setminus \theta_p$ ) et si  $I + V w(y)^{-2} R_0(z)$  est inversible. Dans ce cas les résolvantes  $R(z)$  et  $R_0(z)$  sont reliées par l'identité de la résolvante.

$$R(z) = R_0(z) \left( I + V w(y)^{-2} R_0(z) \right)^{-1}. \quad (1.3.3)$$

Comme  $V$  satisfait la majoration (1.3.1), il existe  $K > 0$  tel que  $|V w(y)^{-2}| \leq K \langle x \rangle^{-\alpha}$ . Par suite, d'après la proposition 1.2.4, l'opérateur  $V w(y)^{-2} R_0(z)$  est compact. Le théorème de Fredholm analytique (voir le théorème C.2) assure alors l'existence d'une extension méromorphe de  $\left( I + V w(y)^{-2} R_0(z) \right)^{-1}$  à un voisinage  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{M}$  de  $\mathcal{E}_0$ . Ce résultat combiné à celui du théorème 1.1 et à l'identité (1.3.3) fournit le résultat. ■

### 1.3.2 Asymptotique des pôles

Nous nous intéressons aux pôles générés par une petite perturbation électrique. Nous considérons un potentiel  $V = \delta V_0$ , où  $V_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable vérifiant la majoration (1.3.1). Nous étudions pour  $\delta$  petit, la résolvante à poids  $R_\delta$  définie par

$$R_\delta(z) := w(\mathcal{H}_0 + \delta V_0 - z)^{-1}w.$$

Nous montrons qu'il existe un voisinage de  $\theta_p$  sur lequel  $R_\delta$  possède un unique pôle  $z_p(\delta)$  et nous calculons un développement asymptotique de  $k(\delta) := \sqrt{z_p(\delta) - \theta_p}$ .

Le théorème 1.3 assure l'existence d'une extension méromorphe de  $R_\delta$  sur un voisinage de  $\theta_p$  et donc la définition d'éventuels pôles. Nous rappelons que l'opérateur  $A$  et la fonction  $F$  sont définis dans le théorème 1.2 et que la fonction  $F$  est holomorphe, donc bornée, au voisinage de  $\theta_p$ . Il existe donc un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\theta_p$  tel que  $R_\delta$  admet un prolongement méromorphe à  $\mathcal{V}$  et que  $F$  soit bornée sur  $\mathcal{V}$ . Nous définissons l'opérateur  $A_\delta$  et la fonction  $F_\delta$  holomorphe et bornée sur  $\mathcal{V}$  par

$$\begin{aligned} A_\delta &:= \delta V_0 w^{-2} A, \\ F_\delta &:= \delta V_0 w^{-2} F. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Nous rappelons que  $G_p(\xi_p)$  est l'opérateur défini par la formule (1.2.6). Nous définissons, pour  $\delta$  assez petit pour que pour tout  $z \in \mathcal{V}$  l'opérateur  $I + F_\delta(z)$  soit inversible, l'opérateur  $\tilde{G}_p^*(\xi_p) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_0)$  par

$$\tilde{G}_p^*(\xi_p) := \tilde{G}_p^*(\xi_p, \delta, z) = \delta \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} (I + F_\delta(z))^{-1} V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^*. \quad (1.3.5)$$

Soit  $\eta(z, \delta)$  le nombre complexe défini pour  $\delta$  assez petit par

$$\eta(z, \delta) := G_p(\xi_p) \tilde{G}_p^*(\xi_p) \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathcal{V}. \quad (1.3.6)$$

Nous notons que  $\eta(z, \delta)$  est donné par

$$\eta(z, \delta) = \delta \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) (I + F_\delta(z))^{-1} V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^*. \quad (1.3.7)$$

Nous verrons plus tard (voir la proposition 1.3.2) que  $\eta$  permet de caractériser les résonances au voisinage de  $\theta_p$ . Dans la proposition suivante, nous voyons que  $\eta$  est analytique par rapport à  $\delta$  et à  $z$ . Nous utiliserons ce résultat au théorème 1.4 pour montrer que  $R_\delta$  possède un unique pôle au voisinage de  $\theta_p$ .

**Proposition 1.3.1** (Développement de  $\eta$ )

Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0 et un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$  et une fonction  $H$  analytique et bornée sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  tels que l'application  $(z, \delta) \mapsto \eta(z, \delta)$  soit holomorphe sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  et que pour tout  $\delta \in \mathcal{U}$  et tout  $z \in \mathcal{V}$ ,

$$\eta(z, \delta) = i\eta_1 \delta + \delta^2 H(z, \delta). \quad (1.3.8)$$

De plus le coefficient  $\eta_1$  est donné par

$$\eta_1 = \frac{1}{2\sqrt{K_p}} \int_{\Omega_0} V_0(x, y) |u_p(x, \xi_p)|^2 dx dy. \quad (1.3.9)$$

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{V}$ , un voisinage de  $\theta_p$  tel que  $R_\delta$  soit méromorphe sur  $\mathcal{V}$  et que  $F$  soit bornée sur  $\mathcal{V}$ . Nous posons  $\tilde{F} := -V_0 w^{-2} F$  de sorte que  $F_\delta = -\delta \tilde{F}$ . Nous notons que  $\tilde{F}$  est holomorphe et bornée sur  $\mathcal{V}$ . Par suite si  $\delta < \|\tilde{F}\|_\infty^{-1}$ , la série de terme général  $(\delta \tilde{F}(z))^j$  converge normalement. L'inverse de  $I + F_\delta(z)$  est alors donné par la série de Neumann (convergent au sens de la convergence uniforme sur  $\mathcal{V}$ ) suivante.

$$(I + F_\delta(z))^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-F_\delta(z))^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta^j \tilde{F}(z)^j. \quad (1.3.10)$$

Ainsi pour tout  $z \in \mathcal{V}$ , fixé,  $\delta \mapsto (I + F_\delta(z))^{-1}$  est holomorphe dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0. De plus comme  $\tilde{F}$  est bornée sur  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$  ne dépend pas de  $z$ . Enfin comme pour  $\delta \in \mathcal{U}$  fixé,  $z \mapsto (I + F_\delta(z))^{-1}$  est holomorphe sur  $\mathcal{V}$ , le théorème d'Hartogs (voir le théorème C.1) assure que l'application  $(z, \delta) \mapsto (I + F_\delta(z))^{-1}$  est holomorphe sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ . De la formule (1.3.7), nous déduisons que  $\eta$  est holomorphe sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ .

Nous posons

$$\tilde{H}(z, \delta) := \frac{(I + F_\delta(z))^{-1} - I}{\delta}$$

De la relation (1.3.10), nous déduisons que  $\tilde{H}$  est bornée sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  puis que

$$(I + F_\delta(z))^{-1} = I + \delta \tilde{H}(z, \delta), \quad z \in \mathcal{V}, \delta \in \mathcal{U}.$$

Nous injectons ce résultat dans l'identité (1.3.7) ce qui fournit la décomposition (1.3.8), avec

$$H(z, \delta) = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) \tilde{H}(z, \delta) V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^*$$

et

$$\eta_1 = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^*.$$

Nous utilisons alors les définitions (1.2.6) de  $G_p(\xi_p)$  et (1.2.7) de  $G_p(\xi_p)^*$  pour en déduire la formule (1.3.9). ■

La proposition suivante fournit une équation caractérisant les pôles de  $R_\delta$ .

**Proposition 1.3.2**

Nous supposons qu'il existe  $\delta_0 > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_0$ , tel que

$$\eta(z, \delta) \neq 0, \quad |\delta| < \delta_0, \quad z \in \mathcal{V}. \quad (1.3.11)$$

Au voisinage du seuil atteint  $\theta_p$ , les pôles de  $R_\delta$  sont des nombres  $z \in \mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  tels que

$$\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) = 0. \quad (1.3.12)$$

**Remarque 1.3.1 :** L'hypothèse (1.3.11) est vérifiée dès que la valeur de  $\eta_1$ , donnée par la définition (1.3.9) est non nulle. C'est le cas lorsque le potentiel  $V_0 \neq 0$  est de signe constant.

**Démonstration :** Soit  $K$  l'opérateur défini par

$$K := K(\delta, z) = I + \delta V_0 w^{-2} R_0(z), \quad z \in \mathcal{V}, \quad (1.3.13)$$

de sorte que l'identité de la résolvante (1.3.3) s'écrive pour tout  $z \in \mathcal{V}$  tel que  $K$  est inversible

$$R_\delta(z) = R_0(z) K^{-1}. \quad (1.3.14)$$

Nous rappelons (voir le théorème 1.2) que  $R_0(z)$  se décompose sous la forme

$$R_0(z) = \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z).$$

Nous injectons cela dans la définition (1.3.13) de  $K$ . Cela produit l'identité

$$K = I + \delta V_0 w^{-2} \left( \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) \right) = I + \frac{\delta V_0 w^{-2} A}{\sqrt{z - \theta_p}} + \delta V_0 w^{-2} F(z).$$

De la définition (1.3.4) de  $A_\delta$  et  $F_\delta$ , nous déduisons

$$K = I + \frac{A_\delta}{\sqrt{z - \theta_p}} + F_\delta(z).$$

Ainsi pour  $\delta$  assez petit pour que  $I + F_\delta(z)$  soit inversible,  $K$  admet la factorisation

$$K = (I + F_\delta(z)) \left( I + \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p}} (I + F_\delta(z))^{-1} A_\delta \right). \quad (1.3.15)$$

Nous rappelons que  $A = i\pi K_p^{-1/2} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p)$ . Nous injectons cela dans la définition de  $A_\delta$ , ce qui fournit :

$$A_\delta = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} \delta V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p).$$

La définition (1.3.5) de  $\tilde{G}_p^*$  fournit alors

$$(I + F_\delta(z))^{-1} A_\delta = \delta \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} (I + F_\delta(z))^{-1} V_0 w^{-2} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p) = \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p).$$

La factorisation (1.3.15) de  $K$  s'écrit donc

$$K = (I + F_\delta(z)) \left( I + \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p}} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p) \right). \quad (1.3.16)$$

Afin de calculer la résolvante de  $\mathcal{H}$ , notre objectif est d'inverser  $K$  (voir la relation (1.3.14)). Pour ce faire nous allons utiliser la factorisation (1.3.16) précédente. Pour  $\delta$  assez petit,  $(I + F_\delta(z))$  est inversible. Nous allons chercher à inverser  $I + (z - \theta_p)^{-1/2} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p)$  sur les espaces  $\ker(G_p(\xi_p))$  et  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$  qui sont supplémentaires. En effet  $\ker(G_p(\xi_p))$  est un hyperplan de  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  et que  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$  est une droite vectorielle de  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$ . Ainsi, soit ces espaces sont supplémentaires, soit  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p)) \subset \ker(G_p(\xi_p))$  et donc  $\eta(z, \delta) = 0$ . Comme nous avons supposé que  $z$  et  $\delta$  sont tels que  $\eta(z, \delta) \neq 0$ , les espaces  $\ker(G_p(\xi_p))$  et  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$  sont donc supplémentaires.

Soit  $\Pi_\delta$  la projection sur  $\ker(G_p(\xi_p))$  parallèlement à  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$  et soit  $\tilde{\Pi}_\delta := I - \Pi_\delta$ . Par construction,  $G_p(\xi_p)\Pi_\delta = 0$ . De plus par définition de  $\tilde{\Pi}_\delta$ , pour tout  $u \in \mathbf{L}^2(\Omega_0)$ , il existe  $v \in \mathbf{L}^2(\Omega_0)$  tel que  $\tilde{\Pi}_\delta u = \tilde{G}_p^*(\xi_p)v$ . Ainsi,  $\tilde{G}_p^*(\xi_p)G_p(\xi_p)\tilde{\Pi}_\delta u = \tilde{G}_p^*(\xi_p)G_p(\xi_p)\tilde{G}_p^*(\xi_p)v$ . Nous rappelons que  $G_p(\xi_p)\tilde{G}_p^*(\xi_p) = \eta(z, \delta)$ . Nous en déduisons que  $\tilde{G}_p^*(\xi_p)G_p(\xi_p)\tilde{\Pi}_\delta u = \eta(z, \delta)\tilde{G}_p^*(\xi_p)v = \eta(z, \delta)\tilde{\Pi}_\delta u$ . Par suite

$$\tilde{G}_p^*(\xi_p)G_p(\xi_p)\tilde{\Pi}_\delta = \eta(z, \delta)\tilde{\Pi}_\delta.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left( I + \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p}} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p) \right) \Pi_\delta &= \Pi_\delta, \\ \left( I + \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p}} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p) \right) \tilde{\Pi}_\delta &= \left( 1 + \frac{\eta(z, \delta)}{\sqrt{z - \theta_p}} \right) \tilde{\Pi}_\delta. \end{aligned}$$

Donc pour  $z \in \mathcal{V}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  assez petit  $I + (z - \theta_p)^{-1/2} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p)$  est inversible sur  $\ker(G(\xi_p))$  et si de plus  $\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) \neq 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  assez petit  $I + (z - \theta_p)^{-1/2} \tilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p)$  est inversible sur  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$ . Nous déduisons alors de la décomposition  $I = \Pi_\delta + \tilde{\Pi}_\delta$  et de la factorisation (1.3.16) que pour  $z \in \mathcal{V}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  assez petit tels que  $\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) \neq 0$ ,

$$K^{-1} = \left( \Pi_\delta + \frac{\sqrt{z - \theta_p}}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \tilde{\Pi}_\delta \right) (I + F_\delta(z))^{-1}.$$

Nous combinons cela avec l'identité de la résolvante (1.3.14) et avec la décomposition (1.2.24) de  $R_0(z)$ . Nous en déduisons la factorisation suivante de  $R_\delta(z)$

$$R_\delta(z) = \left( \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) \right) \left( \Pi_\delta + \frac{\sqrt{z - \theta_p}}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \tilde{\Pi}_\delta \right) (I + F_\delta(z))^{-1}. \quad (1.3.17)$$

Enfin les définitions de  $A$  et de  $\Pi_\delta$  fournissent  $A\Pi_\delta = 0$  et donc, pour  $z \in \mathcal{M}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  assez petit tels que  $\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) \neq 0$ ,

$$R_\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \left( A + \sqrt{z - \theta_p} F(z) \right) \tilde{\Pi}_\delta (I + F_\delta(z))^{-1} + F(z) \Pi_\delta (I + F_\delta(z))^{-1}. \quad (1.3.18)$$

Les pôles de  $R_\delta$  sont alors solutions de l'équation  $\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) = 0$ . ■

**Remarque 1.3.2 :** Nous pouvons lire sur la formule (1.3.18) que la multiplicité du pôle  $z$  est donnée par le rang de  $(A + \sqrt{z - \theta_p} F(z)) \tilde{\Pi}_\delta$  qui est le résidu de  $z \mapsto R_\delta(z)$ . Cependant, une solution de  $\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) = 0$  pourrait ne pas être un pôle de  $R_\delta$  car elle pourrait aussi être un zéro de  $A + \sqrt{z - \theta_p} F(z)$ . Nous verrons au théorème 1.4 que pour  $\delta$  assez petit, toute solution de l'équation (1.3.12) est aussi un pôle de  $R_\delta$ .

### Théorème 1.4

Soit  $\theta_p$  un seuil atteint. Il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$  et  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ , la fonction méromorphe  $R_\delta$ , possède un unique pôle  $z_p(\delta) = \theta_p + k(\delta)^2$  sur  $\mathcal{V}$ .

Ce pôle est simple et la fonction  $\delta \in (-\delta_0, \delta_0) \mapsto k(\delta)$  est holomorphe au voisinage de 0. De plus,  $k(\delta)$  vérifie le développement asymptotique

$$k(\delta) = -i\eta_1\delta + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0, \quad (1.3.19)$$

où  $\eta_1$  est donné par l'identité (1.3.9).

**Remarque 1.3.3 :** Comme  $V_0$  est à valeur réelle  $\eta_1 \in \mathbb{R}$ . De plus, si  $V_0$  est de signe constant,  $\eta_1$  est du signe de  $V_0$ .

Connaitre le signe de  $\eta_1$  est important. En effet pour  $\delta$  assez petit, la partie imaginaire de  $k(\delta)$  est du signe de  $-\eta_1$ . Dans le cas où  $\eta_1 < 0$ , alors  $k(\delta)$  est dans le demi-plan supérieur et la résonance  $z_p = \theta_p + k(\delta)^2$  associée est alors située sur le premier feuillet de la surface de Riemann. Si dans ce cas et dans le cas particulier  $p = 1$ ,  $k(\delta)$  est de plus imaginaire pur, alors  $z_p \in \theta_p + \mathbb{R}_-$  est une valeur propre de  $\mathcal{H}_\delta$  situé sous le spectre essentiel. Dans le cas où  $\eta_1 > 0$ , alors  $k(\delta)$  est dans le demi-plan inférieur et la résonance  $z_q$  associée est alors située sur le second feuillet de la surface de Riemann.

**Démonstration :** Nous avons vu dans la proposition 1.3.2 qu'au voisinage de  $\theta_p$ , les pôles de  $R_\delta$  sont solutions de l'équation

$$\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) = 0. \quad (1.3.20)$$

Nous allons maintenant résoudre cette équation. Nous rappelons que la fonction  $(z, \delta) \mapsto \eta(z, \delta)$  est holomorphe sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  (voir la proposition 1.3.1) et nous définissons sur  $\{k \in \mathbb{C}, \theta_p + k^2 \in \mathcal{V}, \delta \in \mathcal{U}\}$  la fonction  $\zeta$  par

$$\zeta(k, \delta) = \eta(\theta_p + k^2, \delta) + k.$$

La décomposition (1.3.8) fournit alors

$$\partial_k \zeta(k, \delta) = 1 + 2k\delta^2 \partial_k H(\theta_p + k^2, \delta).$$

Ainsi  $\partial_k \zeta(0, 0) = 1$  et le théorème des fonctions implicites holomorphe assure l'existence d'un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $0 \in \mathbb{C}_k$ , d'un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $0 \in \mathbb{C}_\delta$  et d'une fonction holomorphe  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  tels que pour tout  $k \in \mathcal{V}$  et tout  $\delta \in \mathcal{U}$ ,  $\zeta(k, \delta) = 0$  si et seulement si  $k = k(\delta) := g(\delta)$ . La valeur  $z_\delta = \theta_p + k(\delta)^2$  est alors solution de l'équation (1.3.20). C'est le pôle de  $R_\delta$  recherché.

Nous combinons l'holomorphie de  $\delta \mapsto k(\delta)$  et la proposition 1.3.1. Cela fournit le développement asymptotique (1.3.19) de  $k(\delta)$ .

Enfin nous rappelons que la multiplicité du pôle  $z_p(\delta) := \theta_p + k(\delta)^2$  est donnée par le rang du résidu  $(A + \sqrt{z_p(\delta) - \theta_p} F(z_p(\delta))) \tilde{\Pi}_\delta$  (voir la remarque 2 et la formule (1.3.18)). Comme  $\sqrt{z_p(\delta) - \theta_p} = k(\delta)^2$ , ce résidu s'écrit  $(A + k(\delta) F(z_p(\delta))) \tilde{\Pi}_\delta$ .

Nous rappelons que  $\tilde{\Pi}_\delta$  est la projection sur  $\text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$ , que  $\tilde{G}_p^*(\xi_p)$  est donné par la définition (1.3.5) et que  $A$  est donné par l'identité 1.2.25. Par conséquent

$$A \tilde{G}_p^*(\xi_p) = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p) \tilde{G}_p^*(\xi_p) = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} \eta(z, \delta) G_p(\xi_p)^*.$$

Ainsi, la restriction de  $A$  à la droite vectorielle  $\text{Im}(\tilde{\Pi}_\delta) = \text{Im}(\tilde{G}_p^*(\xi_p))$  envoie cette droite vectorielle sur la droite vectorielle  $\text{Im}(G_p(\xi_p)^*)$ . Cet opérateur est donc un opérateur inversible. Nous en déduisons que  $A \tilde{\Pi}_\delta$  est un opérateur de rang 1.

De plus, si  $|\delta|$  est assez petit, alors  $k(\delta)F(z_p(\delta))$  est petit (voir la formule (1.3.19)). Le rang de  $(A + k(\delta)F(z_p(\delta)))\tilde{\Pi}_\delta$  est alors celui de  $A\tilde{\Pi}_\delta$ , à savoir 1, ce qui conclut la démonstration puisque la multiplicité du pôle est alors 1. ■

## 1.4 Perturbation géométrique

### 1.4.1 Déformation de la frontière

Nous rappelons que  $\Omega_0 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Soit  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ . Nous définissons le domaine  $\Omega$  par

$$\Omega := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, t \geq \chi(s)\}.$$

Sur la figure 1.7, nous représentons le domaine  $\Omega$  dans le cas où  $\chi(s) = 2e^{-(s+3)^{-2} - (s-3)^{-2}}$  si  $|s| < 3$  et  $\chi(s) = 0$  pour  $|s| \geq 3$ .

Soit  $\mathcal{L}$  la bijection de  $\Omega_0$  dans  $\Omega$  définie par  $\mathcal{L}(x, y) = (x + \chi(y), y)$ ,  $(x, y) \in \Omega_0$ . Sa matrice jacobienne est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \chi'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det(J) = 1$ ,  $\mathcal{L}$  est un difféomorphisme entre le demi-plan  $\Omega_0$  et  $\Omega$ .

La frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est la courbe paramétrée donnée par  $(t(y), s(y)) = (\chi(y), y)$ . Le vecteur tangent à  $\partial\Omega$  au point  $M(y)$ , de paramètre  $y$ , est donc dirigé par  $(\chi'(y), 1)$ . La normale à  $\partial\Omega$  unitaire et dirigée vers l'intérieur de  $\Omega$  vaut donc

$$\mathbf{n}(y) := \frac{(1, -\chi'(y))}{\sqrt{1 + \chi'(y)^2}}. \quad (1.4.1)$$

### 1.4.2 Définition de l'opérateur

Nous rappelons que  $\mathbf{A}$  est le potentiel magnétique défini par  $\mathbf{A}(t, s) = (0, t)$  et comme dans la partie 1.1, nous définissons le laplacien magnétique  $\mathcal{H}$  comme l'opérateur associé à la forme quadratique

$$q(u) := \int_{\Omega} |i\nabla u(t, s) + A(t)u(t, s)|^2 dt ds,$$

initialement définie sur  $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$  puis fermée dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Cet opérateur est un laplacien magnétique dans le domaine à bord  $\Omega$ . La proposition B.1 assure alors que  $\mathcal{H}$  s'identifie à l'opérateur différentiel

$$(i\nabla + \mathbf{A})^2, \quad (1.4.2)$$

agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  avec la condition au bord de Neumann magnétique

$$\mathbf{n} \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u|_{\partial\Omega_0} = 0. \quad (1.4.3)$$

Nous utilisons le changement de variable  $(s, t) = \mathcal{L}(x, y)$  afin de ramener l'étude de  $\mathcal{H}$  à l'étude d'un opérateur agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$ . En variables  $x, y$ , le potentiel magnétique  $\mathbf{A} = (0, t)$  s'écrit

$$\mathbf{A}(t, s) = \tilde{\mathbf{A}}(x, y) = (0, x + \chi(y)). \quad (1.4.4)$$

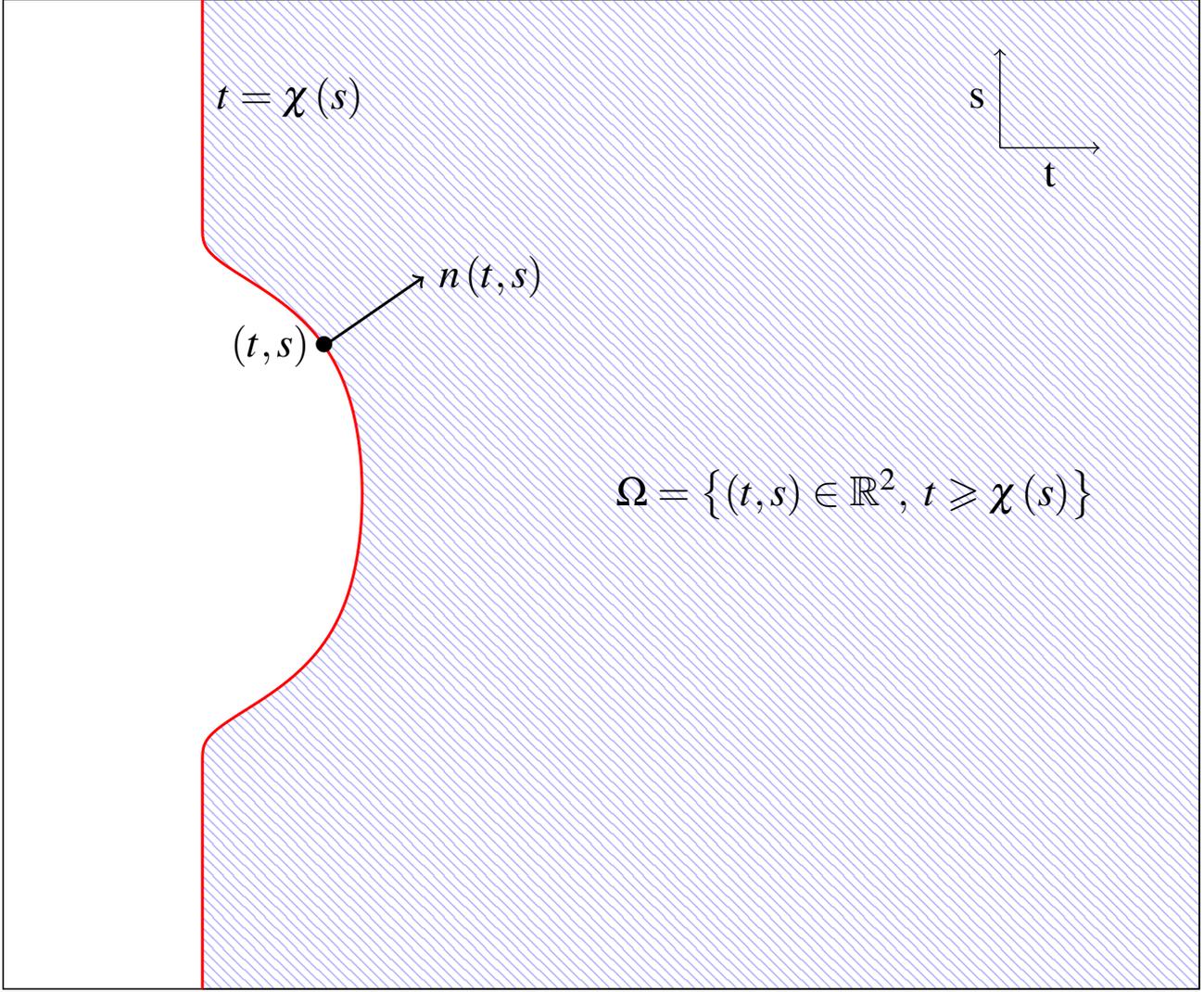


Figure 1.7 – Le demi-plan  $\Omega$  avec perturbation de la frontière.

et le gradient  $\nabla := \partial_t dt + \partial_s ds$  est donné par

$$\nabla = {}^t J^{-1} \nabla_{x,y} = \partial_x dx + (\partial_y - \chi'(y) \partial_x) dy. \quad (1.4.5)$$

En combinant la définition (1.4.2) de l'opérateur  $\mathcal{H}$  comme opérateur différentiel en variables  $(s, t)$ , la valeur (1.4.5) du gradient  $\nabla$  par rapport aux variables  $(x, y)$  et la valeur (1.4.4) du potentiel  $\mathbf{A}$  par rapport aux variables  $(x, y)$ , nous voyons que l'opérateur  $\mathcal{H}$  est unitairement équivalent à l'opérateur

$$-\partial_x^2 + (i\partial_y + x - i\chi'(y) \partial_x + \chi(y))^2, \quad (1.4.6)$$

agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$ . De plus, en utilisant la valeur (1.4.1) du vecteur normal  $\mathbf{n}(y)$ , nous calculons que la condition au bord (1.4.3) se traduit en variables  $(x, y)$  par  $\mathbf{n}(y) \cdot (i\nabla + \mathbf{A}) u(x, y)|_{x=0} = 0$ . Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{aligned} 0 &= (1, -\chi'(y)) \cdot (i\partial_x u(0, y), i\partial_y u(0, y) - i\chi'(y) \partial_x u(0, y) + \chi(y) u(0, y)) \\ &= i \left( (1 + \chi'(y)^2) \partial_x u(0, y) - \chi'(y) \partial_y u(0, y) \right) - \chi'(y) \chi(y) u(0, y). \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{H}$  est donc unitairement équivalent à l'opérateur  $\mathcal{H}$  donné par

$$\mathcal{H}u = -\partial_x^2 + (i\partial_y + x - i\chi'(y) \partial_x + \chi(y))^2,$$

agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  avec la condition au bord

$$\left(1 + \chi'(y)^2\right) \partial_x u(0, y) - \chi'(y) \partial_y u(0, y) = -i\chi'(y) \chi(y) u(0, y). \quad (1.4.7)$$

**Remarque 1.4.1 :** Le domaine de  $\mathcal{H}$  est donc donné par

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega_0), u \circ \mathcal{L} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0), u \text{ vérifie (1.4.7)}\}.$$

Dans la suite nous allons montrer que dans le cas où  $\chi$  modélise une petite perturbation du bord, la résolvante de  $\mathcal{H}$  admet un prolongement méromorphe au voisinage des seuils  $\theta_p$  puis nous analyserons ses pôles (voir le théorème 1.5). Les méthodes que nous avons utilisées dans la partie 1.3 ne peuvent pas être appliquées exactement de la même façon. En effet il n'est pas possible de définir une perturbation  $V$  comme  $V := \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$  car les domaines de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{H}_0$  sont différents. De plus, même après avoir redressé la frontière, les domaines de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{H}_0$  sont différents car la condition au bord (1.4.7) diffère de la condition au bord de Neumann classique. La méthode que nous utilisons est inspirée de l'étude de résonances générées par un obstacle [Bru15b]. Elle consiste à étudier la différence de résolvante  $\mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}^{-1}$  défini sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  tout entier.

### 1.4.3 Une différence de Résolvante

Nous commençons par étudier l'opérateur  $V$  défini sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  par

$$V := \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}^{-1}. \quad (1.4.8)$$

Cet opérateur servira dans la suite à construire explicitement une extension méromorphe de la résolvante de  $\mathcal{H}$  (voir la proposition 1.4.3). Son rôle est à rapprocher du rôle que jouait le potentiel électrique  $V$  dans la partie précédente<sup>b</sup>.

Afin de décomposer l'opérateur  $V$ , nous introduisons les opérateurs  $V^\infty$  et  $V^0$  suivants. L'opérateur  $V^\infty$  est défini sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  par

$$V^\infty := \mathcal{H}_0^{-1} \left( (-i\chi' \partial_x + \chi)^2 + (i\partial_y + x)(-i\chi' \partial_x + \chi) + (-i\chi' \partial_x + \chi)(i\partial_y + x) \right) \mathcal{H}^{-1}, \quad (1.4.9)$$

et  $V^0$  est l'opérateur agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$  associé à la forme bilinéaire

$$q^0(f, g) = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \mathcal{H}^{-1} f(0, y) \overline{\mathcal{H}_0^{-1} g(0, y)} dy. \quad (1.4.10)$$

#### Proposition 1.4.1 (Décomposition de $V$ )

L'opérateur  $V$  se décompose sous la forme :

$$V = V^0 + V^\infty \quad (1.4.11)$$

**Démonstration :** Soit  $(f, g) \in \mathbf{L}^2(\Omega_0)^2$ . Soient  $u := \mathcal{H}^{-1} f \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  et  $v := \mathcal{H}_0^{-1} g \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$ . Nous rappelons que l'opérateur  $\mathcal{H}_0$  agit sur les fonctions de son domaine comme l'opérateur donné par la définition (1.1.2) et nous calculons  $(\mathcal{H}^{-1} f | g)$  à l'aide de  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{-1} f | g) &= (u | \mathcal{H}_0 v) = \int_{\Omega_0} u \overline{(-\partial_x^2 v - \partial_y^2 v + 2ix\partial_y v + x^2 v)} dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} u \overline{(-\partial_x^2 \bar{v} - \partial_y^2 \bar{v} - 2ix\partial_y \bar{v} + x^2 \bar{v})} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(0, y) \partial_x \bar{v}(0, y) dy + \int_{\Omega_0} \partial_x u \partial_x \bar{v} - \partial_y^2 u \cdot \bar{v} + 2ix\partial_y u \cdot \bar{v} + x^2 u \cdot \bar{v} dx dy. \end{aligned}$$

b. L'analogue exact de  $V$  dans la partie précédente serait l'opérateur  $\mathcal{H}_0^{-1} V \mathcal{H}^{-1}$

Nous rappelons que  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$  et que  $\mathcal{H}_0$  vérifie la condition au bord de Neumann classique, à savoir  $\partial_x v(0, y) = 0, y \in \mathbb{R}$  (voir la partie 1.1). Ainsi

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}^{-1}f \mid g) &= \int_{\Omega_0} \partial_x u \partial_x \bar{v} - \partial_y^2 u \cdot \bar{v} + 2ix \partial_y u \cdot \bar{v} + x^2 u \cdot \bar{v} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \partial_x u(0, y) \bar{v}(0, y) dy + \int_{\Omega_0} (-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u + 2ix \partial_y u + x^2 u) \bar{v} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \partial_x u(0, y) \bar{v}(0, y) dy + \int_{\Omega_0} (-\partial_x^2 u + (i\partial_y + x)^2 u) \bar{v} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \partial_x u(0, y) \bar{v}(0, y) dy + (-\partial_x^2 u + (i\partial_y + x)^2 u \mid v).
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

D'une part, nous utilisons  $u = \mathcal{H}^{-1}f$  et  $v = \mathcal{H}_0^{-1}g$ . Cela produit

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x u(0, y) \bar{v}(0, y) dy = \int_{\mathbb{R}} \partial_x \mathcal{H}^{-1}f(0, y) \overline{\mathcal{H}_0^{-1}g(0, y)} dy = -q^0(f, g). \tag{1.4.13}$$

D'autre part, nous exploitons  $\mathcal{H} = -\partial_x^2 + (i\partial_y + x - i\chi'(y)\partial_x + \chi(y))^2$ ,  $u = \mathcal{H}^{-1}f$  puis la définition (1.4.9) de  $V^\infty$  pour en déduire que

$$-\partial_x^2 u + (i\partial_y + x)^2 u = f - \mathcal{H}_0 V^\infty f. \tag{1.4.14}$$

De plus,  $\mathcal{H}_0^{-1}$  est autoadjoint et  $v = \mathcal{H}_0^{-1}g \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$ . Par suite

$$(\mathcal{H}_0 V^\infty f \mid v) = (V^\infty f \mid \mathcal{H}_0 v) = (V^\infty f \mid g). \tag{1.4.15}$$

Nous injectons maintenant les formules (1.4.13), (1.4.14) et (1.4.15) dans la relation (1.4.12). Nous en déduisons que

$$(\mathcal{H}^{-1}f \mid g) = -q^0(f, g) + (f \mid v) - (V^\infty f \mid g). \tag{1.4.16}$$

Enfin comme  $\mathcal{H}_0^{-1}$  est autoadjoint, il vient  $(\mathcal{H}_0^{-1}f \mid g) = (f \mid \mathcal{H}_0^{-1}g) = (f \mid v)$ . Nous combinons cela avec la formule (1.4.16) et avec  $V = \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}^{-1}$  ce qui fournit

$$(Vf \mid g) = q^0(f, g) + (V^\infty f \mid g),$$

c'est-à-dire,  $V = V^0 + V^\infty$ . ■

Nous définissons la famille de fonctions.

$$\begin{aligned}
f_{00}(x, y) &= \chi(y)^2 + 2x\chi(y), & f_{11}(x, y) &= 2\chi'(y), \\
f_{01}(x, y) &= 2i\chi(y), & f_{20}(x, y) &= -\chi'^2(y), \\
f_{10}(x, y) &= \chi''(y) - 2i\chi(y)\chi'(y) - 2ix\chi'(y),
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

de sorte que l'opérateur  $V^\infty$  se décompose sous la forme

$$V^\infty = \mathcal{H}_0^{-1} (f_{00} + f_{10}\partial_x + f_{01}\partial_y + f_{11}\partial_x\partial_y + f_{20}\partial_x^2) \mathcal{H}^{-1}. \tag{1.4.18}$$

Nous définissons pour  $z \in \mathbb{C}^+$  la résolvante  $\mathcal{R}(z) := (\mathcal{H} - z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ , puis nous posons  $R(z) := w\mathcal{R}(z)w \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\Omega_0))$ .

Nous rappelons que  $V = \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}^{-1}$  et nous développons

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(z)(I + zV\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z)) &= \mathcal{R}(z)(\mathcal{H}_0 - z + zV\mathcal{H}_0)\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{R}(z)((\mathcal{H}_0 - z)\mathcal{H}_0^{-1} + zV)\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) \\
&= \mathcal{R}(z)(I - z\mathcal{H}_0^{-1} + zV)\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{R}(z)(I - z\mathcal{H}_0^{-1} + z\mathcal{H}_0^{-1} - z\mathcal{H}^{-1})\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) \\
&= \mathcal{R}(z)(I - z\mathcal{H}^{-1})\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{R}(z)(\mathcal{H} - z)\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z).
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que  $\mathcal{R}(z)(I + zV\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z)) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z)$ . De plus, comme  $\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}_0^{-1} - V$ , nous déduisons que

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = (\mathcal{H}_0^{-1} - V)\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{R}_0(z) - V\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z).$$

Nous avons donc montré que  $\mathcal{R}(z)(I + zV\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z)) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = \mathcal{R}_0(z) - V\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z)$ . Nous injectons alors l'identité  $\mathcal{H}_0\mathcal{R}_0(z) = I + z\mathcal{R}_0(z)$  dans cette relation. Cela produit

$$R(z)(I + zw^{-1}Vw + z^2w^{-1}Vw^{-1}R_0(z)) = R_0(z) - wVw - zwVw^{-1}R_0(z). \quad (1.4.19)$$

Par la suite nous allons utiliser cette identité pour calculer une formule explicite de la résolvante  $R(z)$ .

#### 1.4.4 Asymptotique des pôles

Nous nous intéressons à l'influence d'une petite perturbation de la frontière. Avec les notations des sous-parties 1.4.1 et 1.4.2, nous considérons une frontière paramétrée par une fonction  $\chi$  de la forme  $\chi = \delta\chi_0$  où  $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $\mathcal{H}_\delta$  l'opérateur défini dans la sous-partie 1.4.2, soit  $\mathcal{R}_\delta$  sa résolvante et soit  $V_\delta := \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}_\delta^{-1}$ . Nous montrons que pour  $\delta$  assez petit, la résolvante à poids  $R_\delta$  définie par  $R_\delta(z) := w(\mathcal{H}_\delta - z)^{-1}w$  possède une extension méromorphe, que cette dernière possède un unique pôle  $z_q(\delta)$  au voisinage de  $\theta_q$  et nous montrons que  $\sqrt{z_q(\delta) - \theta_q} = O(\delta^2)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

Nous définissons la famille de fonctions

$$\begin{aligned} f_{00}^1(x, y) &= 2x\chi_0(y), & f_{00}^2(x, y) &= \chi_0(y)^2, \\ f_{10}^1(x, y) &= \chi_0''(y) - 2ix\chi_0'(y), & f_{10}^2(x, y) &= -2i\chi_0(y)\chi_0'(y), \\ f_{01}^1(x, y) &= 2i\chi_0(y), & f_{01}^2(x, y) &= 0, \\ f_{11}^1(x, y) &= 2\chi_0'(y), & f_{11}^2(x, y) &= 0, \\ f_{20}^1(x, y) &= 0, & f_{20}^2(x, y) &= -\chi_0'(y)^2. \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

et les opérateurs  $v_j^\infty$  par

$$v_j^\infty = \mathcal{H}_0^{-1} \left( f_{00}^j + f_{10}^j \partial_x + f_{01}^j \partial_y + f_{11}^j \partial_x \partial_y + f_{20}^j \partial_x^2 \right), \quad j \in \{1, 2\}. \quad (1.4.21)$$

Nous définissons également  $v_\delta^0$  comme l'opérateur associé à la forme quadratique

$$q_\delta^0(f, g) := - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \mathcal{H}_\delta^{-1} f(0, y) \overline{\mathcal{H}_0^{-1} g(0, y)} dy. \quad (1.4.22)$$

Nous rappelons que  $\chi = \delta\chi_0$  et nous combinons la proposition 1.4.1 avec la décomposition (1.4.18) de  $V^\infty$  et avec la définition (1.4.10) de  $V^0$ . L'opérateur  $V_\delta$  se décompose donc sous la forme

$$V_\delta = (\delta v_1^\infty + \delta^2 v_2^\infty) \mathcal{H}_\delta^{-1} + v_\delta^0. \quad (1.4.23)$$

Soient  $v_1^0$  et  $v_2^0$ , les opérateurs respectivement associés aux formes quadratiques

$$q_1^0(f, g) := - \int_{\mathbb{R}} \chi_0'(y) \partial_y f(0, y) \overline{\mathcal{H}_0^{-1} g(0, y)} dy. \quad (1.4.24)$$

$$q_2^0(f, g) := -i \int_{\mathbb{R}} \chi_0(y) \chi_0'(y) f(0, y) \overline{\mathcal{H}_0^{-1} g(0, y)} dy. \quad (1.4.25)$$

Dans le lemme suivant, nous analysons le comportement asymptotique de  $v_\delta^0$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Il sera utilisé au lemme 1.4.2 pour déterminer le comportement asymptotique de  $V_\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

**Lemme 1.4.1** (Développement de  $v_\delta^0$ )

L'opérateur  $v_\delta^0$  se décompose sous la forme

$$v_\delta^0 = (\delta v_1^0 + \delta^2 v_2^0 + r_\delta^0) \mathcal{H}_\delta^{-1}. \quad (1.4.26)$$

De plus,  $\delta \mapsto r_\delta^0$  est holomorphe au voisinage de 0 et  $r_\delta^0 = O(\delta^3)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

**Démonstration :** Nous rappelons que les fonctions du domaine de  $\mathcal{H}_\delta$  vérifient la condition au bord (1.4.7).  
Ainsi

$$q_\delta^0(f, g) = - \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\delta \chi_0'(y)}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \partial_y \mathcal{H}_\delta^{-1} f(0, y) + \frac{i \delta^2 \chi_0(y) \chi_0'(y)}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \mathcal{H}_\delta^{-1} f(0, y) \right] \overline{\mathcal{H}_\delta^{-1} g(0, y)} dy.$$

De plus, nous développons

$$\begin{aligned} \frac{\delta \chi_0'(y)}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} &= \delta \chi_0'(y) - \frac{\delta^3 \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2}, \\ \frac{\delta^2 \chi_0(y) \chi_0'(y)}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} &= \delta^2 \chi_0(y) \chi_0'(y) - \frac{\delta^4 \chi_0(y) \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que

$$\begin{aligned} q_\delta^0(f, g) &= \delta q_1^0(\mathcal{H}_\delta^{-1} f, g) + \delta^2 q_2^0(\mathcal{H}_\delta^{-1} f, g) + \\ &\int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\delta^3 \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \partial_y \mathcal{H}_\delta^{-1} f(0, y) + \frac{i \delta^4 \chi_0(y) \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \mathcal{H}_\delta^{-1} f(0, y) \right] \overline{\mathcal{H}_\delta^{-1} g(0, y)} dy. \end{aligned}$$

C'est la décomposition (1.4.26) où  $r_\delta^0$  est l'opérateur associé à la forme quadratique

$$\tilde{q}_\delta(f, g) := - \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\delta^3 \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \partial_y f(0, y) + \frac{i \delta^4 \chi_0(y) \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} f(0, y) \right] \overline{\mathcal{H}_\delta^{-1} g(0, y)} dy. \quad (1.4.27)$$

Enfin nous rappelons que  $\chi_0$  est à support compact. Par conséquent, il existe une constante  $K_0$  telle que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta^3 \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \right| &\leq K_0 \delta^3 \\ \left| \frac{\delta^4 \chi_0(y) \chi_0'(y)^3}{1 + \delta^2 \chi_0'(y)^2} \right| &\leq K_0 \delta^3 \end{aligned}$$

. Nous injectons cette majoration dans la définition (1.4.27) de  $r_\delta^0$  ce qui fournit  $r_\delta^0 = O(\delta^3)$ .

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale fournit l'holomorphie de  $\delta \mapsto r_\delta^0$  au voisinage de 0. ■

Le lemme suivant décrit le comportement asymptotique de  $V_\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Nous l'utiliserons à la proposition 1.4.2.

**Lemme 1.4.2**

L'application  $\delta \mapsto V_\delta$  est holomorphe au voisinage de 0. L'opérateur  $V_\delta$  admet le développement asymptotique

$$V_\delta = \delta V_1 + \delta^2 V_2 + r_\delta, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.4.28)$$

De plus  $r_\delta = O(\delta^3)$  et  $V_1$  et  $V_2$  sont donnés par

$$\begin{aligned} V_1 &= (v_1^\infty + v_1^0) \mathcal{H}_0^{-1} \\ V_2 &= \left( v_2^\infty + v_2^0 - (v_1^\infty + v_1^0)^2 \right) \mathcal{H}_0^{-1} \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

**Démonstration :** Nous combinons les décompositions (1.4.23) et (1.4.26). Cela produit

$$V_\delta = (\delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta) \mathcal{H}_\delta^{-1}. \quad (1.4.30)$$

Nous rappelons que  $V_\delta$  est défini par  $V_\delta = \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}_\delta^{-1}$ . Par suite  $\mathcal{H}_\delta^{-1} = \mathcal{H}_0^{-1} - V_\delta$ .

En injectant cela dans l'identité (1.4.30) précédente, nous déduisons que

$$V_\delta = (\delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta) (\mathcal{H}_0^{-1} - V_\delta).$$

Par suite, nous déduisons que  $V_\delta$  vérifie l'équation

$$(I + \delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta) V_\delta = (\delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta) \mathcal{H}_0^{-1}. \quad (1.4.31)$$

Nous déduisons alors que si  $\delta$  est assez petit,

$$V_\delta = (I + \delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta)^{-1} (\delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta) \mathcal{H}_0^{-1}. \quad (1.4.32)$$

Nous rappelons que  $\delta \mapsto r_\delta^0$  est holomorphe au voisinage de 0. Ainsi  $\delta \mapsto (I + \delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta^0)$  puis  $\delta \mapsto (I + \delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta^0)^{-1} (\delta (v_1^\infty + v_1^0) + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0) + r_\delta^0)$  le sont également. Nous combinons cela avec l'identité (1.4.32). Nous en déduisons que  $\delta \mapsto V_\delta$  est holomorphe au voisinage de 0.

Enfin comme  $r_\delta^0 = O(\delta^3)$ , nous tirons de la décomposition (1.4.32) que

$$V_\delta = \delta (v_1^\infty + v_1^0) \mathcal{H}_0^{-1} + \delta^2 (v_2^\infty + v_2^0 - (v_1^\infty + v_1^0)^2) \mathcal{H}_0^{-1} + O(\delta^3). \quad (1.4.33) \quad \blacksquare$$

Nous rappelons que  $A$  et  $F$  sont définis par le théorème 1.2. Nous définissons l'opérateur  $A_\delta$  et les fonctions  $F_\delta$  et  $\tilde{F}_\delta$ , holomorphe sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\theta_p$  par

$$\begin{aligned} A_\delta &:= \theta_p^2 w^{-1} V_\delta w^{-1} A, \\ F_\delta(z) &:= z w^{-1} V_\delta w + z^2 w^{-1} V_\delta w^{-1} F(z) + \sqrt{z - \theta_p} (z + \theta_p) w^{-1} V_\delta w^{-1} A, \\ \tilde{F}_\delta(z) &:= F(z) - w V_\delta w - \sqrt{z - \theta_p} w V_\delta w^{-1} A - z w V_\delta w^{-1} F(z). \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Nous rappelons que  $G_p(\xi_p)$  est défini par la formule (1.2.6). Nous définissons pour  $\delta$  assez petit pour que pour tout  $z \in \mathcal{V}$  l'opérateur  $(I + F_\delta(z))$  soit inversible, l'opérateur  $\tilde{G}_p^*(\xi_p) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega_0)$  par

$$\tilde{G}_p^*(\xi_p) := \tilde{G}_p^*(\xi_p, \delta, z) = \frac{i\pi\theta_p^2}{\sqrt{K_p}} (I + F_\delta(z))^{-1} w^{-1} V_\delta w^{-1} G_p(\xi_p)^*. \quad (1.4.35)$$

Nous notons que  $\tilde{G}_p^*(\xi_p)$  est un opérateur de rang 1. Enfin, soit  $\eta(z, \delta)$ , le nombre complexe défini par

$$\eta(z, \delta) := G_p(\xi_p) \tilde{G}_p^*(\xi_p) \in \mathbb{C}. \quad (1.4.36)$$

La proposition suivante décrit le comportement de  $\eta$ . Elle servira à déterminer le comportement asymptotique des résonances au théorème 1.5. Contrairement au cadre de la partie 1.3 (voir la proposition 1.3.1), ici le terme d'ordre 1 du développement asymptotique est toujours nul. Nous serons donc amené à calculer le terme d'ordre 2.

**Proposition 1.4.2** (Développement de  $\eta$ )

Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0, un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$  et une fonction  $g$  analytique et bornée sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  tels que l'application  $(z, \delta) \mapsto \eta(z, \delta)$  soit holomorphe sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  et que pour tout  $\delta \in \mathcal{U}$  et tout  $z \in \mathcal{V}$ ,

$$\eta(z, \delta) = i\eta_2 \delta^2 + \sqrt{z - \theta_p} \delta^2 g(z) + O(\delta^3), \quad z \in \mathcal{V}, \quad |\delta| < \delta_0. \quad (1.4.37)$$

**Démonstration :** Dans un premiers temps nous montrons le résultat d'holomorphicité de  $\eta$ . Nous rappelons que  $F_\delta$  est donnée par

$$F_\delta(z) = zw^{-1}V_\delta w + z^2 w^{-1}V_\delta w^{-1}F(z) + \sqrt{z - \theta_p}(z + \theta_p)w^{-1}V_\delta w^{-1}A.$$

La proposition (1.4.28) assure que  $\delta \mapsto V_\delta$  est holomorphe sur un voisinage de 0. Il en est donc de même pour  $\delta \mapsto F_\delta(z)$ . Par suite, comme  $F_\delta(z) = o(\delta)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\delta \mapsto (I + F_\delta(z))^{-1}$  est analytique dans un voisinage de 0 (comme composée d'applications holomorphe). Nous combinons ce résultat avec l'holomorphicité de  $\delta \mapsto V_\delta$  au voisinage de 0 et nous en déduisons que l'application  $\delta \mapsto \widetilde{G}_p^*(\xi_p)$  est holomorphe au voisinage de 0 (nous rappelons que  $\widetilde{G}_p^*(\xi_p)$  est donné par la définition (1.4.35)). Ce résultat, injecté dans la définition de  $\eta(z, \delta)$ , assure alors que la fonction  $\delta \mapsto \eta(z, \delta)$  est analytique sur un voisinage  $\mathcal{U}$  de 0.

De plus, comme  $F$  est holomorphe au voisinage de  $\theta_p$ , la fonction  $z \mapsto F_\delta(z)$  est holomorphe au voisinage de  $\theta_p$ . Il en est donc de même pour  $z \mapsto (I + F_\delta(z))^{-1}$  puis pour  $z \mapsto \widetilde{G}_p^*(\xi_p)$  et enfin pour  $z \mapsto \eta(z, \delta)$ . En notant  $\mathcal{V}$ , un voisinage de  $\theta_p$  sur lequel  $z \mapsto \eta(z, \delta)$  est holomorphe. Le théorème d'Hartogs (voir le théorème C.1) assure l'holomorphicité de  $(z, \delta) \mapsto \eta(z, \delta)$  sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .

Nous montrons maintenant la décomposition (1.4.37). Soient  $V_1$  et  $V_2$  les opérateurs définis par la définition (1.4.29) et soient les fonctions holomorphes définies par

$$\begin{aligned} H_1(z) &= zw^{-1}V_1 w + z^2 w^{-1}V_1 w^{-1}F(z) + \sqrt{z - \theta_p}(z + \theta_p)w^{-1}V_1 w^{-1}A, \\ \widetilde{R}_\delta(z) &= F_\delta(z) - \delta H_1(z). \end{aligned}$$

Nous déduisons du développement (1.4.28) que  $V_\delta$  est borné. Ainsi, pour  $\delta$  assez petit,  $F_\delta(z)$  est bornée sur un voisinage de  $\theta_p$  indépendant de  $\delta$ . De plus,  $F_\delta = O(\delta)$  et, pour  $\delta$  assez petit,  $I + F_\delta(z)$  est inversible et  $(I + F_\delta(z))^{-1}$  se décompose sous la forme

$$(I + F_\delta(z))^{-1} = I - F_\delta(z) + O(\delta^2) = I - \delta H_1(z) + O(\delta^2).$$

Il existe donc une fonction  $\widetilde{g}$ , holomorphe au voisinage de  $\theta_p$  telle que

$$(I + F_\delta(z))^{-1} = I - \delta H_1(\theta_p) + \sqrt{z - \theta_p} \delta \widetilde{g}(z) + O(\delta^2). \quad (1.4.38)$$

Enfin, nous injectons les décompositions (1.4.28) et (1.4.38) dans l'identité

$$\eta(z, \delta) = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) (I + F_\delta(z))^{-1} \theta_p^2 w^{-1} V_\delta w^{-1} G_p(\xi_p)^*.$$

Il vient donc

$$\eta(z, \delta) = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) \left( I - \delta H_1(\theta_p) + \sqrt{z - \theta_p} \delta \widetilde{g}(z) + O(\delta^2) \right) \theta_p^2 w^{-1} (\delta V_1 + \delta^2 V_2 + r_\delta) w^{-1} G_p(\xi_p)^*.$$

Par suite

$$\eta(z, \delta) = \delta \eta_1 + \delta^2 \eta_2(z) + O(\delta^3),$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} V_1 w^{-1} G_p(\xi_p)^*, \\ \eta_2(z) &= \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) \left( \theta_p^2 w^{-1} V_2 + \left( \sqrt{z - \theta_p} \tilde{g}(z) - H_1(\theta_p) \right) \theta_p^2 w^{-1} V_1 \right) w^{-1} G_p(\xi_p)^*. \end{aligned}$$

Nous rappelons que les fonctions  $f_{00}^1$ ,  $f_{01}^1$ ,  $f_{10}^1$  et  $f_{11}^1$  sont définies par la définition (1.4.20) et que  $v_1^\infty$  est défini par la formule (1.4.21). Nous définissons alors les nombres

$$\begin{aligned} \eta_1^0 &:= 2\pi G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} v_1^0 \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1} G_p(\xi_p)^* \\ \eta_1^{00} &:= 2\pi G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} f_{00}^1 \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1} G_p(\xi_p)^* \\ \eta_1^{10} &:= 2\pi G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} f_{10}^1 \partial_x \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1} G_p(\xi_p)^* \\ \eta_1^{01} &:= 2\pi G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} f_{01}^1 \partial_y \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1} G_p(\xi_p)^* \\ \eta_1^{11} &:= 2\pi G_p(\xi_p) \theta_p^2 w^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} f_{11}^1 \partial_y \partial_x \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1} G_p(\xi_p)^*, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\eta_1 = \frac{i}{2\sqrt{K_p}} (\eta_1^0 + \eta_1^{00} + \eta_1^{10} + \eta_1^{01} + \eta_1^{11}). \quad (1.4.39)$$

Soit  $v_p$ , la fonction définie par

$$v_p(x, y) := e^{i\xi_p y} u_p(x, \xi_p)$$

Nous rappelons que  $\chi_0$  est à support compact. Soit  $I$  un ouvert contenant le support de  $\chi_0$ . L'opérateur  $\mathcal{H}_0^{-1}$  est autoadjoint sur  $\mathbf{L}^2(\Omega_0)$ . Ainsi  $\mathcal{H}_0^{-1}$  est autoadjoint sur  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+ \times I)$ . De plus  $v_p \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+ \times I)$  et nous calculons  $\theta_p \mathcal{H}_0^{-1} v_p = v_p$ . Enfin nous rappelons que

$$G_p(\xi) f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega_0} e^{-i\xi_p y} w(y) u_p(x, \xi_p) f(x, y) dx dy. \quad (1.4.40)$$

Nous calculons alors

$$\begin{aligned} \eta_1^{00} &= \int_{\Omega_0} e^{-i\xi_p y} w(y) u_p(x, \xi_p) \theta_p^2 w^{-1}(y) \mathcal{H}_0^{-1} f_{00}^1(x, y) \mathcal{H}_0^{-1} w^{-1}(y) e^{i\xi_p y} w(y) u_p(x, \xi_p) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times I} \overline{v_p(x, y)} \theta_p \mathcal{H}_0^{-1} f_{00}^1(x, y) \theta_p \mathcal{H}_0^{-1} v_p(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times I} \overline{\theta_p \mathcal{H}_0^{-1} v_p(x, y)} f_{00}^1(x, y) \theta_p \mathcal{H}_0^{-1} v_p(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times I} \overline{v_p(x, y)} f_{00}^1(x, y) v_p(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times I} e^{-i\xi_p y} u_p(x, \xi_p) 2x \chi_0(y) e^{i\xi_p y} u_p(x, \xi_p) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times I} u_p(x, \xi_p)^2 2x \chi_0(y) dx dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}_+} x u_p(x, \xi_p)^2 dx \int_{\mathbb{R}} \chi_0(y) dy. \end{aligned}$$

Nous calculons de même

$$\eta_1^{01} = -2 \int_{\mathbb{R}_+} \xi_p u_p(x, \xi_p)^2 dx \int_{\mathbb{R}} \chi_0(y) dy.$$

De plus,  $\chi_0$  est à support compact. Par conséquent  $\chi_0'$  et  $\chi_0''$  sont d'intégrale nulle. Nous combinons cela avec les définitions (1.4.20) de  $f_{10}^1$  et de  $f_{11}^1$  et un calcul analogue au précédent. Cela fournit

$$\eta_1^{10} = \eta_1^{11} = 0.$$

Nous avons donc montré que

$$\eta_1^{00} + \eta_1^{01} + \eta_1^{10} + \eta_1^{11} = 2 \int_{\mathbb{R}_+} (x - \xi_p) u_p(x, \xi_p)^2 dx \int_{\mathbb{R}} \chi_0(y) dy. \quad (1.4.41)$$

Pour calculer la valeur de cette intégrale, nous utilisons la Formule de Feynman Hellmann (voir la proposition A.2) qui fournit

$$\lambda_p'(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_\xi (x - \xi)^2 u_p(x, \xi)^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}_+} (x - \xi) u_p(x, \xi)^2 dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La formule (1.4.41) s'écrit alors

$$\eta_1^{00} + \eta_1^{01} + \eta_1^{10} + \eta_1^{11} = -\lambda_p'(\xi_p) \int_{\mathbb{R}} \chi_0(y) dy.$$

Enfin nous rappelons que  $\xi_p$  est un minimum pour  $\lambda_p$ . Par conséquent,  $\lambda_p'(\xi_p) = 0$  puis

$$\eta_1^{00} + \eta_1^{01} + \eta_1^{10} + \eta_1^{11} = 0.$$

Nous combinons cela avec l'égalité (1.4.41) puis avec la décomposition (1.4.39) de  $\eta_1$ , nous déduisons que  $\eta_1 = i(2\sqrt{K_p})^{-1} \eta_1^0$ . Nous rappelons que  $v_1^0$  est associé à la forme quadratique  $q^0$  définie par l'identité (1.4.24). Nous calculons alors

$$\begin{aligned} \eta_1^0 &= \theta_p^2 ( v_p \mid v^0 \mathcal{H}_0^{-1} v_p ) \\ &= \theta_p ( v_p \mid v^0 v_p ) \\ &= - \int_I \chi_0'(y) \partial_y v_p \overline{\theta_p H_0^{-1} v_p(0, y)} dy \\ &= - \int_I \chi_0'(y) \partial_y v_p \overline{v_p(0, y)} dy \\ &= -2i \xi_p u_p(0, \xi_p)^2 \int_I \chi_0'(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\eta(z, \delta)$  admet le développement  $\eta(z, \delta) = \eta_2 \delta^2 + \delta^2 g(z) + O(\delta^3)$ , où  $\eta_2$  est donné par :

$$\eta_2 = \frac{i\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) (\theta_p^2 w^{-1} V_2 - H_1(\theta_p) \theta_p^2 w^{-1} V_1) w^{-1} G_p(\xi_p)^* \quad \blacksquare$$

### Proposition 1.4.3

Nous supposons qu'il existe  $\delta_0 > 0$  et un voisinage de  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$  tel que

$$\eta(z, \delta) \neq 0, \quad |\delta| < \delta_0, \quad z \in \mathcal{V}.$$

Pour  $\delta$  assez petit, l'application  $z \mapsto R_\delta(z)$  est méromorphe sur un voisinage épointé  $\mathcal{V}$  de  $\theta_p$ . De plus les pôles de  $R_\delta$  sont des solutions de l'équation

$$\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta) = 0. \quad (1.4.42)$$

**Démonstration :** Soit  $K$  l'opérateur défini par :

$$K = K(\delta, z) := I + zw^{-1}V_\delta w + z^2w^{-1}V_\delta w^{-1}R_0(z).$$

de sorte que l'identité de la résolvante (1.4.19) s'écrive sous la forme

$$R_\delta(z)K = R_0(z) - wV_\delta w - zwV_\delta w^{-1}R_0(z). \quad (1.4.43)$$

Nous rappelons que (voir le théorème 1.2)

$$R_0(z) = \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z).$$

Nous injectons cela dans la définition de  $K$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} K &= I + zw^{-1}V_\delta w + z^2w^{-1}V_\delta w^{-1} \left( \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) \right) \\ &= I + zw^{-1}V_\delta w + z^2w^{-1}V_\delta w^{-1}F(z) + \sqrt{z - \theta_p}(z + \theta_p)w^{-1}V_\delta w^{-1}A + \frac{\theta_p^2 w^{-1}V_\delta w^{-1}A}{\sqrt{z - \theta_p}}. \end{aligned}$$

Nous combinons cette identité avec les définitions (1.4.34) de  $A_\delta$  et de  $F_\delta$ . Nous en déduisons que

$$K = I + F_\delta(z) + \frac{A_\delta}{\sqrt{z - \theta_p}}.$$

Ainsi, pour  $\delta$  assez petit et  $z$  au voisinage de  $\theta_p$ ,  $K$  se factorise sous la forme

$$K = (I + F_\delta(z)) \left( I + \frac{(I + F_\delta(z))^{-1}A_\delta}{\sqrt{z - \theta_p}} \right). \quad (1.4.44)$$

Nous rappelons que  $A = i\pi K_p^{-1/2} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p)$ . Nous injectons cela dans la définition de  $A_\delta$ , ce qui produit

$$A_\delta = \frac{i\pi\theta_p^2}{\sqrt{K_p}} w^{-1}V_\delta w^{-1} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p).$$

Par conséquent, la définition (1.4.35) de  $\widetilde{G}_p^*(\xi_p)$  fournit

$$(I + F_\delta(z))^{-1}A_\delta = \frac{i\pi\theta_p^2}{\sqrt{K_p}} (I + F_\delta(z))^{-1} w^{-1}V_\delta w^{-1} G_p(\xi_p)^* G_p(\xi_p) = \widetilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p).$$

Enfin, de la factorisation (1.4.44) de  $K$ , nous tirons

$$K = (I + F_\delta(z)) \left( I + \frac{1}{\sqrt{z - \theta_p}} \widetilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p) \right). \quad (1.4.45)$$

Comme dans la partie 1.3, pour calculer explicitement la résolvante  $R_\delta$ , nous cherchons à inverser  $K$  (voir l'identité de la résolvante (1.4.43)). Pour ce faire, nous allons utiliser la factorisation (1.4.45) précédente. Pour  $\delta$  assez petit,  $(I + F_\delta(z))$  est inversible. Nous allons maintenant chercher à inverser  $I + (z - \theta_p)^{-1/2} \widetilde{G}_p^*(\xi_p) G_p(\xi_p)$  sur les espaces  $\ker(G_p(\xi_p))$  et  $\text{Im}(\widetilde{G}_p^*(\xi_p))$  qui sont supplémentaires (car nous avons supposé que  $\eta(z, \delta) \neq 0$  pour  $\delta$  assez petit et  $z$  au voisinage de  $\theta_p$ ).

Soit  $\Pi_\delta$  la projection sur  $\ker(G_p(\xi_p))$  parallèlement à  $\text{Im}(\widetilde{G}_p^*(\xi_p))$  et soit  $\widetilde{\Pi}_\delta := I - \Pi_\delta$ . Comme dans la partie 1.3.2,  $G_p(\xi_p)\Pi_\delta = 0$  et  $\widetilde{G}_p^*(\xi_p)G_p(\xi_p)\widetilde{\Pi}_\delta = \eta(z, \delta)\widetilde{\Pi}_\delta$ . Nous en déduisons donc<sup>c</sup> que

$$K^{-1} = \left( \Pi_\delta + \frac{\sqrt{z - \theta_p}}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \widetilde{\Pi}_\delta \right) (I + F_\delta(z))^{-1}. \quad (1.4.46)$$

D'autre part, nous combinons la décomposition  $R_0(z) = A(z - \theta_p)^{-1/2} + F(z)$  avec la définition (1.4.34) de  $\widetilde{F}_\delta$  ce qui produit

$$\begin{aligned} R_0(z) - wV_\delta w - zwV_\delta w^{-1}R_0(z) &= \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) - wV_\delta w - zwV_\delta w^{-1} \left( \frac{A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) \right) \\ &= \frac{(I - zwV_\delta w^{-1})A}{\sqrt{z - \theta_p}} + F(z) - wV_\delta w - zwV_\delta w^{-1}F(z) \\ &= \left( \frac{(I - \theta_p wV_\delta w^{-1})A}{\sqrt{z - \theta_p}} + \widetilde{F}_\delta(z) \right). \end{aligned} \quad (1.4.47)$$

Nous injectons alors les décompositions (1.4.46) et (1.4.47) dans l'identité (1.4.43). Nous en déduisons que

$$R_\delta(z) = \left( \frac{(I - \theta_p wV_\delta w^{-1})A}{\sqrt{z - \theta_p}} + \widetilde{F}_\delta(z) \right) \left( \Pi_\delta + \frac{\sqrt{z - \theta_p}}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \widetilde{\Pi}_\delta \right) (I + F_\delta(z))^{-1}. \quad (1.4.48)$$

Enfin, comme  $A\Pi_\delta = 0$ , il vient

$$R_\delta(z) = \frac{(I - \theta_p wV_\delta w^{-1})A + \sqrt{z - \theta_p} \widetilde{F}_\delta(z)}{\sqrt{z - \theta_p} + \eta(z, \delta)} \widetilde{\Pi}_\delta (I + F_\delta(z))^{-1} + \widetilde{F}_\delta(z) \Pi_\delta (I + F_\delta(z))^{-1}. \quad (1.4.49)$$

Nous lisons sur cette formule que pour  $\delta$  assez petit,  $z \mapsto R_\delta(z)$  est méromorphe et que tout pôle de  $R_\delta$  est solution de l'équation (1.4.42). ■

**Remarque 1.4.2 :** Nous lisons sur la formule (1.4.49) que si  $z$  est un pôle de  $R_\delta$ , alors sa multiplicité est donnée par le rang du résidu  $\left( \left( (I - \theta_p wV_\delta w^{-1})A + \sqrt{z - \theta_p} \widetilde{F}_\delta(z) \right) \widetilde{\Pi}_\delta \right)$ . Nous allons voir au théorème 1.5 que le rang de ce résidu vaut 1 et que toute solution de l'équation (1.4.42) est donc un pôle de  $R_\delta$ .

### Théorème 1.5

Soit  $\theta_p$  un seuil atteint. Il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$  de  $\theta_p$  et  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ , la fonction méromorphe  $R_\delta$  possède un unique pôle  $z_\delta = \theta_p + k(\delta)^2$  sur  $\mathcal{V}$ . Ce pôle est simple et  $k(\delta)$  vérifie le développement asymptotique

$$k(\delta) = i\eta_2 \delta^2 + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0, \quad (1.4.50)$$

où  $\eta_2$  est donné par :

$$\eta_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{K_p}} G_p(\xi_p) (\theta_p^2 w^{-1} V_2 - H_1(\theta_p) \theta_p^2 w^{-1} V_1) w^{-1} G_p(\xi_p)^*$$

c. les calculs sont identiques à ceux de la proposition 1.3.2

**Démonstration :** La proposition 1.4.2 assure que  $\eta$  est holomorphe sur un voisinage de  $(\theta_p, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Soit  $\zeta$  la fonction (holomorphe) définie pour  $k \in \mathbb{C}$  tel que  $z = \theta_p + k^2 \in \mathcal{V}$  et  $\delta \in \mathcal{U}$  par

$$\zeta(k, \delta) = \eta(\theta_p + k^2, \delta) + k.$$

La décomposition (1.4.37) fournit

$$\partial_k \zeta(k, \delta) = 1 + \delta^2 g(\theta_p + k^2) + 2k^2 \delta^2 g'(k).$$

Par conséquent  $\partial_k \eta(0, 0) = 1$ . Le théorème des fonctions implicites holomorphe assure alors l'existence d'un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $0 \in \mathbb{C}_k$ , d'un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $0 \in \mathbb{C}_\delta$  et d'une fonction holomorphe  $\tilde{g} \in \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  tels que pour tout  $k \in \mathcal{V}$  et tout  $\delta \in \mathcal{U}$ ,  $\zeta(k, \delta) = 0$  si et seulement si  $k = k(\delta) := \tilde{g}(\delta)$ . La valeur de  $z_p(\delta) = \theta_p + k(\delta)^2$  est alors solution de l'équation (1.4.42). C'est le pôle de  $R_\delta$  cherché.

Nous combinons l'holomorphie de  $\delta \mapsto k(\delta)$  et la proposition 1.4.2. Cela fournit le développement asymptotique (1.4.50) de  $k(\delta)$ .

Enfin nous rappelons que la multiplicité du pôle  $z_p(\delta) := \theta_p + k(\delta)^2$  est donnée par le rang du résidu  $\left( ((I - \theta_p w V_\delta w^{-1}) A + k(\delta) \tilde{F}_\delta(z_p(\delta))) \tilde{\Pi}_\delta \right)$ .

Par les mêmes arguments qu'au théorème 1.4, nous voyons que la restriction de  $A$  à  $\text{Im}(\tilde{\Pi}_\delta)$  est inversible, que le rang de  $A \tilde{\Pi}_\delta$  vaut donc 1 et enfin que si  $|\delta|$  est assez petit, alors le rang de  $\left( ((I - \theta_p w V_\delta w^{-1}) A + k(\delta) \tilde{F}_\delta(z_p(\delta))) \tilde{\Pi}_\delta \right)$  est celui de  $A \tilde{\Pi}_\delta$ . Cela conclut la démonstration puisque la multiplicité de pôle est alors 1. ■

# ON A QUANTUM HAMILTONIAN IN A UNITARY MAGNETIC FIELD WITH AXISYMMETRIC POTENTIAL

---

## Abstract

We study a magnetic Schrödinger Hamiltonian, with axisymmetric potential in any dimension. The associated magnetic field is unitary and non constant. The problem reduces to a 1D family of singular Sturm-Liouville operators on the half-line indexed by a quantum number. We study the associated band functions. They have finite limits that are the Landau levels. These limits play the role of thresholds in the spectrum of the Hamiltonian. We provide an asymptotic expansion of the band functions at infinity. Each Landau level concerns an infinity of band functions and each energy level is intersected by an infinity of band functions. We show that among the band functions that intersect a fixed energy level, the derivative can be arbitrary small. We apply this result to prove that even if they are localized in energy away from the thresholds, quantum states possess a bulk component. A similar result is also true in classical mechanics.

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>44</b>
General context . . . . .	44
Spectral decomposition of the Hamiltonian and description of the model . . . . .	45
Transport properties . . . . .	46
On classical mechanics . . . . .	47
Organization of the chapter . . . . .	48
<b>2.1 Reduction to one-dimensional Hamiltonians</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>2.2 Basics about the eigenpairs of the fiber operator</b> . . . . .	<b>50</b>
2.2.1 Behavior of the eigenfunctions at 0 . . . . .	50
2.2.2 Derivative of the band functions . . . . .	52
2.2.3 Global behavior of the band functions . . . . .	52
<b>2.3 Asymptotic behaviour of the band functions</b> . . . . .	<b>54</b>
2.3.1 Near thresholds: high frequency . . . . .	54
2.3.2 Near other energy levels: high frequency and high angular momentum . . . . .	58
<b>2.4 Velocity operator</b> . . . . .	<b>65</b>

---

# Introduction

## General context

The motion of a spinless quantum particle in  $\mathbb{R}^n$  is described by the spectral properties of the associated Hamiltonian. When the particle moves in a magnetic field, it is the magnetic Laplacian  $\mathcal{H} := (-i\nabla - \mathbf{A})^2$  acting on  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , where  $\mathbf{A}$  is a magnetic potential.

One of the simplest example of a magnetic field is the constant one. In the case  $n \in \{2, 3\}$ , this model has been studied from the beginning of quantum mechanics [Lan77] and also more recently for the general case  $n \geq 2$  [Hel96, Rai01].

The variations of a non constant field can induce transport properties for the particle. In this context, we focus on magnetic fields that are translationally invariant along one direction. For such fields, the Hamiltonian has a band structure and transport properties in the direction of invariance are linked to the study of band functions (also called dispersion curves) that are the eigenvalues of the fibered operators. Moreover, the propagation of the particle in this direction is determined by the derivatives of these band functions that play the role of group velocities [Yaf08, Exn99].

In the case  $n = 2$ , one of the studied models of this class is the Iwatsuka model [Iwa85, Mân97]. For  $n = 3$ , similar models are the planar translationally invariant magnetic fields [Yaf08, Rai08]. Let  $(r, \theta, z)$  denote the cylindrical coordinates of  $\mathbb{R}^3$ . The potential takes the form  $\mathbf{A}(r, \theta, z) = (0, 0, a(r))$ , where  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is the intensity of the potential. The associated magnetic field is therefore given by

$$\mathbf{B}(r, \theta, z) = a'(r) (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0). \quad (2.1)$$

Thus this field is planar and its norm is  $\|\mathbf{B}(r, \theta, z)\| = |a'(r)|$ . Moreover the associated field lines are circles contained in planes  $\{z = \text{cst}\}$  with center on the invariant axis (see Figure 2.1).

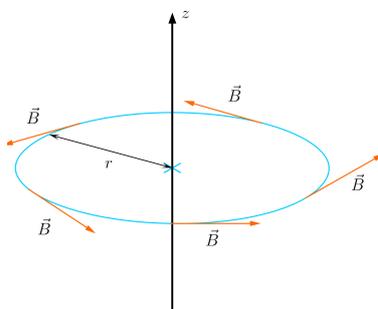


Figure 2.1 – Schematic of translationally invariant magnetic fields.

In view of the form of the magnetic field (2.1), two specific cases are relevant. The first model consists of a magnetic field generated by an infinite rectilinear wire bearing a constant current [Yaf03, Bru15a]. If we assume that the wire coincides with the  $Oz$  axis, then the Biot & Savard law states that the generated magnetic fields writes as the field (2.1) for the intensity  $a(r) = \ln(r)$ . Here all the band functions are decreasing from  $+\infty$  to 0. Hence the spectrum of  $\mathcal{H}$  is  $\sigma(\mathcal{H}) = \mathbb{R}_+$ . The band functions tend exponentially to 0 as the momentum in the  $z$ -direction tends to infinity and it provides a reaction of the ground state energy of  $\mathcal{H}$  under an electric perturbation [Bru15a]. Moreover the particle has a preferable direction of propagation along the  $Oz$  axis [Yaf03].

It is also natural to consider the case of a unitary magnetic field. For the field (2.1), it corresponds to the intensity  $a(r) = r$ . In this case the band functions tend to finite limits that are the Landau levels as the momentum in the  $z$ -direction tends to infinity [Yaf08, Proposition 3.6]. Therefore the bottom of the spectrum of  $\mathcal{H}$  is positive. An approximated value has been calculated and used to compare

the energy on a wedge in a magnetic model and the one coming from the regular part of the wedge [Pop12, Pop15].

In this chapter we continue to study this magnetic field in the case  $a(r) = r$  and we generalize the framework to any dimension  $n \geq 3$ . In particular we will show that the derivatives of the band functions possess a new type of behavior.

## Spectral decomposition of the Hamiltonian and description of the model

For every  $x \in \mathbb{R}^n$ , we set  $r := \|(x_1, \dots, x_{n-1})\|_2$  and we define the magnetic potential  $\mathbf{A}$  by

$$\mathbf{A}(x_1, \dots, x_n) := (0, \dots, 0, r). \quad (2.2)$$

We define the Hamiltonian as the following operator, self-adjoint in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$\mathcal{H} := (-i\nabla - \mathbf{A})^2. \quad (2.3)$$

In order to define the magnetic field we consider, we identify this potential with the 1-differential form  $r dx_n$ . We define the magnetic field  $\mathbf{B}$  as  $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ . We calculate  $B_{j,k} = (\delta_{j,n} - \delta_{n,k}) x_j r^{-1}$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Therefore  $\mathbf{B}$  is unitary since  $2^{-1} \text{Tr}(\mathbf{B}^* \mathbf{B}) = 2^{-1} \text{Tr}^+(\mathbf{B}) = 1$  [Hel96, Section 1].

After a partial Fourier transform in the  $x_n$  variable,  $\mathcal{H}$  is unitarily equivalent to the direct integral in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_\xi; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}))$  of the family of operators  $h(\xi)$ , self-adjoint in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})$  and defined by

$$h(\xi) := -\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}} + (r - \xi)^2. \quad (2.4)$$

Moreover as we will see in Section 2.1 for any frequency  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $h(\xi)$  reduces to the orthogonal sum over  $m \in \mathbb{Z}_+$  (called the magnetic quantum numbers) of operators  $H_m(\xi)$  self-adjoint in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; r^{n-1} dr)$  and defined by

$$H_m(\xi) := -\frac{1}{r^{n-2}} \partial_r (r^{n-2} \partial_r) + \frac{m(m+n-3)}{r^2} + (r - \xi)^2.$$

The spectrum of each  $H_m(\xi)$  is discrete (see Section 2.2). Let  $\lambda_{m,p}(\xi)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  be the increasing sequence of its eigenvalues. The  $\lambda_{m,p}$  are the band functions (also called dispersion curves).

We say that an operator  $A$  is fibered [Ree78, Section XIII.16] (see also appendix E) if it can be written as

$$A := \int_M^\oplus A(\xi) d\xi,$$

with  $(M, d\xi)$  a  $\sigma$ -finite measure space. An important class of fibered operators is the one of analytically fibered operators introduced in [Gér98]. In this framework,  $M$  is a real analytic manifold and some energy levels are particularly relevant [Gér98, Theorem 3.1 and Section 3]. They form a discrete set and are referred to as thresholds [Gér98, Definition 3.9]. We refer to [Gér98, Section 3] for a precise definition of these thresholds but we give an outline of this definition. The definition of threshold remain to stratification. A stratification of an analytic manifold  $N$  is a partition  $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$  of  $N$  that satisfies

- ☞  $\mathcal{S}_i$  is a connected analytic submanifold of  $N$ ,
- ☞ the family  $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$  is locally finite,
- ☞ if  $\overline{\mathcal{S}_i} \cap \mathcal{S}_j \neq \emptyset$  then  $\mathcal{S}_j \subset \overline{\mathcal{S}_i}$ .

We refer to [Gér98, Definition 3.6 and 3.7] and to the references therein for more details about stratifications. We construct a stratification  $(T_i)_{i \in I}$  of  $\mathbb{R}$  and we define the set of thresholds,  $\tau$ , as

$$\tau := \bigcup_{\dim(T_i)=0} T_i.$$

The construction of  $(T_i)_{i \in I}$  is provided by [Gér98, Theorem 3.8]. It makes use of the analyticity of  $M$ . We refer to [Gér98] and to the references therein for more details.

Moreover away from these thresholds, some spectral results are rather standard. For example a limiting absorption principle as well as propagation estimates hold [Gér98, Theorem 3.3] and they are tied to Mourre estimates. For a fibered operator  $A$ , we define the energy-momentum set  $\Sigma$  as

$$\Sigma := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R} \times M, \quad \lambda \in \sigma(A(\xi))\}.$$

One of the necessary conditions for the operator  $A$  to be analytically fibered in this sense is that the projection  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  defined as  $\pi((\lambda, \xi)) = \lambda$  is proper. Finally, notice that if  $M$  is a 1-dimensional manifold, then these thresholds correspond to the critical values of the band functions and can be referred to as attained thresholds [Gei97, Hel01, Soc01, Bri09].

Other examples of fibered magnetic models can be found in the literature, in dimension 2 [Iwa85], on the half-plane [Bru14] or in dimension 3 [Yaf08]. In these models, the considered Hamiltonian is also fibered along  $\mathbb{R}$  and the band functions that are functions of  $\xi \in \mathbb{R}$  tend to finite limits as  $\xi \rightarrow +\infty$ . The sets of frequencies associated with the energy levels concentrated in the neighborhood of these limits are unbounded. Hence the previous projection,  $\pi$ , is not proper. So these magnetic models are not contained in the class of analytically fibered operators that we described above. Nevertheless thresholds can still be defined as the limits of the band functions as  $\xi \rightarrow +\infty$ .

The model described in this chapter remains in this case. Indeed it is already known that the band functions tend to the Landau levels  $E_p$  as  $\xi \rightarrow +\infty$  [Yaf08, Proposition 3.6]. Our first goal is to precise the convergence of the band functions to these levels. To that aim we provide an asymptotic expansion for  $\lambda_{m,p}(\xi)$  as  $\xi \rightarrow +\infty$  (see Theorem 2.1). The method used to prove this theorem is inspired by the method of quasi-modes [Dim99] that has already been used in the proof of similar result [Bru15a, His16].

For the previous magnetic models, some studies of classical spectral problems already exist [Mân97, De 99, His15, His16, Pop16]. Our model contains one additional challenge. Actually for the Iwatsuka model and for the half-plane model, the thresholds are the limits at infinity of the band functions. Moreover, these band functions do not accumulate at any of these thresholds. On the contrary, in this chapter, each threshold  $E_p$  is the limit of all the band functions  $\lambda_{m,p}$  for  $m \geq 0$  at infinity. Therefore any interval of energy  $I \subset \sigma(\mathcal{H})$  is intersected by an infinity of band functions (see equation (2.3.15)) and the set of frequencies  $\{\lambda_{m,p}^{-1}(I), m \geq 0, p \in \mathbb{N}\}$  associated with  $I$  (even if  $\bar{I}$  is away from the Landau levels) is unbounded (see Proposition 2.3.2). Furthermore we will prove in Theorem 2.2 that even if  $\bar{I}$  is away from the Landau levels, the supremum  $\sup(\lambda'_{m,p}(\xi), \lambda_{m,p}(\xi) \in I)$  tends to 0 as  $m \rightarrow +\infty$ . Therefore it is not clear at first sight that the Mourre estimates used in the case of the analytically fibered operators still hold. Indeed these estimates make use of the fact that away from the thresholds, the derivatives of the band functions are bounded from below by a positive constant [Gér98, formulas (3.3) to (3.5)]. The proof of Theorem 2.2 uses a convenient formula for the derivative  $\lambda'_{m,p}$  (see Proposition 2.2.2) which links this derivative to the normalized eigenfunctions of the operator  $H_m(\xi)$ . This proof also uses the exponential decay of these eigenfunctions that is uniform with respect to  $m$  and relies on Agmon estimates.

## Transport properties

These properties have consequences for the transport properties associated with the magnetic field that we consider: define a position operator in the  $x_n$ -direction as the multiplier by the coordinate  $x_n$ .

Moreover the time evolution of a quantum state  $\varphi$  is given by the Schrödinger equation

$$i\partial_t\varphi = \mathcal{H}\varphi \quad (2.5)$$

and therefore by the evolution group  $e^{-it\mathcal{H}}$ . Combine this with the definition of  $x_n$ . We see with the identity (2.4.4) that the position in the  $x_n$ -direction at time  $t$  is given by the operator

$$x_n(t) := e^{it\mathcal{H}}x_n e^{-it\mathcal{H}}. \quad (2.6)$$

Define the velocity in the  $x_n$ -direction operator as the time derivative of  $x_n(t)$ . This velocity operator has been studied for the Iwatsuka model [Mân97] or the 3D model [Yaf08]. Let  $J$  be the current operator defined as

$$J := -i[\mathcal{H}, x_n]$$

and define the current carried by a state  $\varphi$  as  $(J\varphi \mid \varphi)$  [Ens83]. Note that (see formula (2.4.5)) the velocity in the  $x_n$ -direction is linked to  $J$  as follow:

$$\partial_t x_n(t) = -e^{it\mathcal{H}} J e^{-it\mathcal{H}}. \quad (2.7)$$

Hence, if  $J$  is bounded from below, then  $\partial_t x_n(t)$  is bounded from below.

Now let's see how the velocity operator is captured in similar magnetic models and how it is connected to the derivatives of the band functions. For the Iwatsuka model (resp. 3D model), the existence of an asymptotic velocity in the  $y$ -direction (resp.  $z$ -direction) as  $t \rightarrow \infty$  has been proven [Mân97, Theorem 4.2], [Yaf08, Theorem 5.1]. Moreover in both case, the asymptotic velocity is constructed thank to estimates on the derivatives of the band functions [Mân97, Formula (4.2)], [Yaf08, Formula 5.4].

For the model on the half-plane, the current operator has been studied [His16]. The study distinguishes between two types of behavior: the edge states that carry a non zero current and their counterpart, the bulk states that carry an arbitrarily small one [Hal82, Akk98], [Hor02, Section 7]. One of the key argument for this study is the decomposition of the current operator thank to the derivatives of the band functions [His16, formula (1.10)]. In this framework any energy interval  $I$  away from the thresholds is intersected by a finit number of band functions. Moreover the derivative of each band function is bounded from below by a positive constant on  $I$ . Hence the current operator is bounded from below on  $I$ . Therefore any quantum state localized in energy on  $I$  carries a non trivial current [De 99, Frö00, His08]. On the counterpart, if there is a threshold in  $I$ , then there is a band function that intersect  $I$  with a arbitrarily small derivative. Hence one can see that the current operator is not bounded from below on  $I$  [His08, Section 4].

In section 2.4 we study the current operator associated with the operator (2.3). First we will show that, the current operator is still linked to the multiplier by the family of the derivatives of the band functions (formula (2.4.8)). So in Theorem 2.3, we will apply Theorem 2.2 that states that for any energy interval  $I$  (even if  $I$  does not contain a Landau level), the family of the derivatives of the band functions that cross  $I$  is not bounded from below on  $I$  to see that the current operator is not bounded from below on  $I$  either.

Finally, as a conclusion, according to Theorem 2.3, the definition of “thresholds” as the Landau levels seems not to be relevant in this chapter: in the case of the model considered here, any quantum state, even localized in energy away from the Landau levels possesses a component with small current (see Theorem 2.3 and remark 1). We still denote it a bulk component by analogy with the previous model.

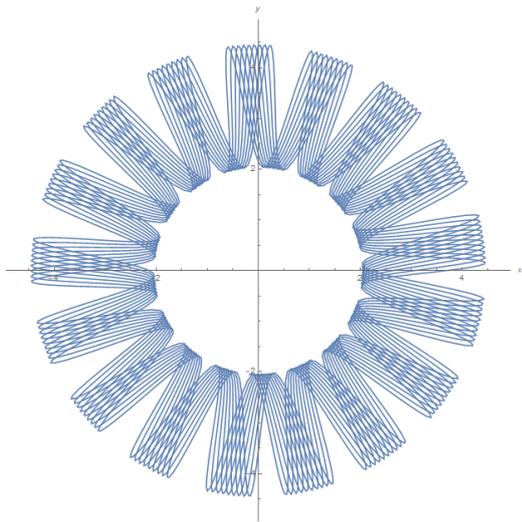
## On classical mechanics

In classical mechanics, such a magnetic field also induces transport properties. Indeed a charged particle follows the Newton law  $m\ddot{\mathbf{x}} = q\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$ . This equation can be integrated [Yaf03, Section 4] and

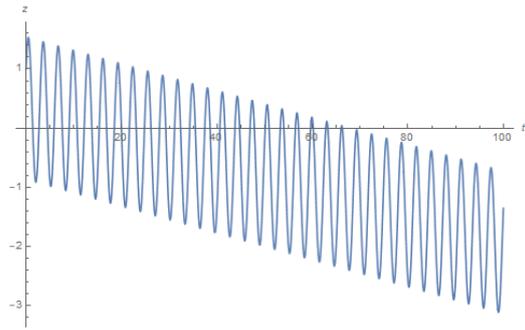
we plotted the classical trajectories (Figure 2.2) in the case  $a(r) = r$ . We can observe that the particle propagates in the  $Oz$  direction and one can show that it has an effective velocity  $v_z$  in this direction: there is a constant  $v_z$  such that  $z(t) = v_z t + O(1)$  [Yaf03, Theorem 4.2]. Denote by  $(r(t), \theta(t), z(t))$  the cylindrical coordinates of the particle at time  $t$ . One can see that  $r$  is a periodic function of the time [Yaf03, Formula (4.18)]. Let  $T$  be its period. Furthermore, denote by  $\sigma := r^2 \dot{\theta}$  the areal velocity of the particle that is a constant fixed by the initial conditions [Yaf03, Formula (4.13)]. We deduce the following value for  $v_z$  [Yaf03, Formula (4.22)]:

$$v_z = \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T \frac{dt}{r(t)^3}. \quad (2.8)$$

Let  $E$  be the total energy of the particle. Note that  $E$  does not depend on time [Yaf03, Formula (4.3)]. Moreover one can see that  $r^2 \dot{\theta}^2 \leq E$  [Yaf03, Formula (4.12)]. Combine it with the definition of  $\sigma$  and with the relation (2.8). We get the estimate  $|v_z| \leq E^{3/2} |\sigma|^{-1}$ . In addition for  $(E, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , with  $\sigma \neq 0$ , one can find initial conditions such that  $E$  is the energy of the particle and  $\sigma$  its areal velocity. Therefore one can find initial conditions such that  $v_z$  is arbitrarily small, namely such that the particle propagates arbitrarily slowly along the  $Oz$  axis.



(a) Projection in the plan  $xOy$ .



(b) Plot of  $z$  in function of the time.

Figure 2.2 – Trajectories of a charged particle moving in the magnetic field shown by Figure 2.1.

## Organization of the chapter

In Section 2.1, the Hamiltonian is reduced to a family of 1D singular Sturm-Liouville operators. The band functions are introduced and described in Section 2.2. Section 2.3 presents the results concerning the asymptotic behaviors of these band functions as  $\xi$  and  $m$  get large. More precisely, in Subsection 2.3.1, we prove Theorem 2.1 that provides an asymptotic expansion of  $\lambda_{m,p}(\xi)$  as  $\xi$  gets large. Subsection 2.3.2 presents the asymptotic study of the derivative. In particular, Theorem 2.2 provides the asymptotic behavior of  $\lambda'_{m,p}(\xi)$  as  $m \rightarrow +\infty$  and as  $\lambda_{m,p}(\xi)$  is fixed far from the Landau level  $E_p$ . In Section 2.4, we analyze the current carried by quantum states that are localized in energy away from the thresholds.

## 2.1 Reduction to one-dimensional Hamiltonians

In this section we define precisely the operators that we consider and we explain how  $\mathcal{H}$  is reduced to 1 dimensional operators.

Let  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  be the magnetic potential given by definition (2.2) and let  $\mathcal{H}$  be the self-adjoint Schrödinger operator (2.3). This operator is defined via its quadratic form

$$q(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |-i\nabla u(x) - \mathbf{A}(x)u(x)|^2 dx.$$

This form, initially defined on  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , is semi-bounded from below. Thus it admits a Friedrichs extension:  $\mathcal{H}$ . Let  $q_\xi$  be the quadratic form defined by

$$q_\xi(u) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( |(\nabla u)(x)|^2 + (-\xi + \|(x_1, \dots, x_{n-1})\|_2)^2 |u(x)|^2 \right) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

This form, initially defined on  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  and then closed in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})$ , is the quadratic form associated with the operator (2.4). Denote by  $\mathcal{F}$  the Fourier-transform with respect to  $x_n$ , which is defined by

$$(\mathcal{F}u)(\tilde{x}, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x_n} u(\tilde{x}, x_n) dx_n, \quad (\tilde{x}, \xi) \in \mathbb{R}^n.$$

The forms  $q$  and  $q_\xi$  are related through the relation

$$q(u) = \int_{\mathbb{R}} q_\xi((\mathcal{F}u)(\xi)) d\xi.$$

Therefore the operator  $\mathcal{H}$  is decomposed as follows:

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}}^\oplus h(\xi) d\xi \right) \mathcal{F}.$$

We now reduce the problem to a 1-dimensional one using both the cylindrical symmetry and the following Laplace-Beltrami formula:

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}} = \frac{1}{r^{n-2}} \partial_r (r^{n-2} \partial_r) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-2}}.$$

Recall that  $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-2}}$  is essentially self-adjoint on  $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^{n-2})$  and that its spectrum is discrete. Its eigenvalues are  $\mu_m := m(m+n-3)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Denote by  $X_m$  the corresponding eigenspaces. Remember that  $X_m$  has a finite dimension:  $N_m$ . The spaces  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; r^{n-2} dr) \otimes X_m$  are invariant under  $h(\xi)$ . In addition, the restrictions of the operator  $h(\xi)$  to these spaces are identified with the operators

$$H_m(\xi) := -\frac{1}{r^{n-2}} \partial_r (r^{n-2} \partial_r) + \frac{\mu_m}{r^2} + (r - \xi)^2.$$

These operators act on  $\mathbf{L}^2(r^{n-2} dr)$ . They are associated with the bilinear forms

$$h_m(u, v) := \int_0^{+\infty} \left( u'(r) v'(r) + \frac{\mu_m}{r^2} u(r) v(r) + (r - \xi)^2 u(r) v(r) \right) r^{n-2} dr. \quad (2.1.1)$$

Denote by  $\Phi$  the angular Fourier transform. The operator  $h(\xi)$  is decomposed as:

$$h(\xi) = \Phi^{-1} \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H_m(\xi) \right) \Phi.$$

Finally, it is more convenient to consider operators acting on the Hilbert space  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ . To proceed we use the isometry  $\phi : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; r^{n-2} dr) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+; dr)$  defined by  $(\phi u)(r) = r^{(n-2)/2} u(r)$ . We define  $k_m$  as

$$k_m := \mu_m + \frac{n-2}{2} \left( \frac{n-2}{2} - 1 \right) = \frac{(2m+n-3)^2 - 1}{4} \quad (2.1.2)$$

and the functions  $V_m$  as

$$V_m(r, \xi) := \frac{k_m}{r^2} + (r - \xi)^2, \quad (r, \xi) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (2.1.3)$$

So  $H_m(\xi) = \phi^{-1} L_m(\xi) \phi$  where  $L_m(\xi)$  is defined by

$$L_m(\xi) := -\partial_r^2 + V_m(r, \xi). \quad (2.1.4)$$

This operator acts on  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$  with domain  $\mathcal{D}(L_m(\xi)) = \phi(\mathcal{D}(H_m(\xi)))$ . It is associated with the quadratic form

$$l_m(u, \xi) := \int_0^{+\infty} \left( |u'(r)|^2 + V_m(r, \xi) |u(r)|^2 \right) dr. \quad (2.1.5)$$

## 2.2 Basics about the eigenpairs of the fiber operator

In this section we prove that the dispersion curves are analytic functions, we calculate their derivative and we investigate the behavior of the eigenfunctions at 0.

### 2.2.1 Behavior of the eigenfunctions at 0

First we investigate the behavior of the functions of  $\mathcal{D}(L_m(\xi))$  at 0, namely:

#### Lemme 2.2.1

Let  $n \geq 3$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$  and  $\xi \in \mathbb{R}$ .

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathcal{D}(L_m(\xi)) \subset \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad u \underset{r \rightarrow 0}{=} o\left(r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \right\}. \quad (2.2.1)$$

Moreover

$$\begin{aligned} \text{if } n = 3, \quad \mathcal{D}(L_m(\xi)) &\subset \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad u(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} O(\sqrt{r}) \right\}; \\ \text{if } n = 4, \quad \mathcal{D}(L_m(\xi)) &\subset \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+), \quad u(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} O(r) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

**Proof:** First we prove the embedding (2.2.1). The bilinear form associated with  $H_m(\xi)$  is given by relation (2.1.1). For every  $u \in \mathcal{D}(H_m(\xi))$  and every  $v \in \mathcal{D}(h_m)$ , we have  $(H_m(\xi)u | v) = h_m(u, v)$ . Notice that  $\mathcal{D}(h_m) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{R}_+)$ . We integrate by part the first term of the form  $h_m$  which yields:

$$h_m(u, v) = (H_m(\xi)u | v) + \lim_{r \rightarrow 0} u'(r) v(r) r^{n-2}.$$

Hence we get

$$\lim_{r \rightarrow 0} u'(r) v(r) r^{n-2} = 0, \quad u \in \mathcal{D}(H_m(\xi)), \quad v \in \mathcal{D}(h_m).$$

We apply this formula to an arbitrary function  $u \in \mathcal{D}(H_m(\xi))$  and to a function  $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{D}(h_m)$  that satisfies for a given  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(r) &= r^{\frac{3-n}{2}+\varepsilon}, & \text{if } r \in (0, 1); \\ v_\varepsilon(r) &= 0, & \text{if } r \geq 2. \end{aligned}$$

We deduce that

$$u'(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0, u \in \mathcal{D}(H_m(\xi)).$$

Therefore integrating this condition, we deduce that

$$u(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} o\left(r^{\frac{3-n}{2}-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, u \in \mathcal{D}(H_m(\xi)).$$

Thus remembering that  $\mathcal{D}(L_m(\xi)) = \phi(\mathcal{D}(H_m(\xi)))$ , we conclude that relation (2.2.1) holds.

We now prove the embedding (2.2.2). First note that if  $n \in \{3, 4\}$  then owing to a Sobolev embedding,  $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ . Moreover we remember that  $\mathcal{D}(h(\xi)) \subset \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^{n-1})$ . Combine these embeddings. We deduce that  $\mathcal{D}(h(\xi)) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ . Thus if  $u \in \mathcal{D}(H_m(\xi))$ , then  $u(r)$  is bounded as  $r \rightarrow 0$ . Combine it with the fact that  $\mathcal{D}(L_m(\xi)) = \phi(\mathcal{D}(H_m(\xi)))$  and it provides the embedding (2.2.2). ■

Notice that  $V_m(r, \xi) \rightarrow +\infty$  as  $r \rightarrow +\infty$ . Therefore the operator  $L_m(\xi)$  has compact resolvent. So for every  $\xi \in \mathbb{R}$  and for every  $m \in \mathbb{Z}_+$  the spectrum of  $L_m(\xi)$  is an increasing sequence of positive eigenvalues  $\lambda_{m,p}(\xi)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . We conclude this subsection by proving the following proposition.

**Proposition 2.2.1** (Behavior of the eigenfunctions at 0)

Let  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$  and  $p \in \mathbb{N}$ . The eigenvalue  $\lambda_{m,p}(\xi)$  is non-degenerate. Let  $u_{m,p}(\cdot, \xi)$  be the normalized eigenfunction associated with it. There exists an analytic function  $f$  such that  $f(0) \neq 0$  and such that in a neighborhood of 0,

$$u_{m,p}(r, \xi) = r^{\frac{1+|2m+n-3|}{2}} f(r). \quad (2.2.3)$$

**Proof:** First, consider the differential equation

$$r^2 u''(r) + \left( r^2 \left( \lambda_{m,p}(\xi) - (r - \xi)^2 \right) - k_m \right) u(r) = 0, \quad r > 0. \quad (2.2.4)$$

We look for solutions that admit a series expansion in a neighborhood of 0. By the Frobenius method, if a solution  $u$  is given by  $u(r) = r^\nu f(r)$  where  $f$  is an analytic function such that  $f(0) \neq 0$ , then  $\nu$  satisfies the indicial equation

$$\nu(\nu - 1) = k_m.$$

This equation has  $\nu_\pm := (1 \pm (2m + n - 3))/2$  as solutions. Thus the equation (2.2.4) admits a solution of the form  $u_+(r) = r^{\nu_+} f(r)$  with  $f$  an analytic function such that  $f(0) = 1$ . In order to have a basis of solutions for equation (2.2.4) we look for a solution of the form  $u_- = hu_+$ . By straightforward calculations we find that  $h'(r) = Ku_+^{-2}(r) \sim Kr^{-1-|2m+n-3|}$  as  $r \rightarrow 0$ , so

- ☞ if  $(n, m) = (3, 0)$ , then  $u_-(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} K \log(r) \sqrt{r}$ ,
- ☞ in the other cases,  $u_-(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} Kr^{\nu_-}$ .

Finally, we deduce from Lemma 2.2.1 that in both cases  $u_- \notin \mathcal{D}(L_m(\xi))$ . Hence the eigenspace associated to  $\lambda_{m,p}(\xi)$  is given by  $\ker(L_m(\xi) - \lambda_{m,p}(\xi)) = \text{span}(u_+)$ . This concludes the proof since  $\lambda_{m,p}(\xi)$  is an eigenvalue of  $L_m(\xi)$ . ■

**Remark 2.2.1:** We deduce from this proposition that the embedding (2.2.2) is optimal.

According to Proposition 2.2.1, the eigenvalues  $\lambda_{m,p}(\xi)$  are non degenerate. Moreover,  $L_m(\xi)$  is a Kato analytic family [Kat66, Chapter VII]. Therefore it follows from Proposition 2.2.1 that  $\lambda_{m,p}$  are real analytic functions that are called band functions.

## 2.2.2 Derivative of the band functions

Here we give a formula for the derivative of the band functions.

### Proposition 2.2.2

Let, for  $(\xi, m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{N}$ ,  $K_{m,p}(\xi) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_{m,p}(r, \xi)^2}{r}$ . The derivative  $\lambda'_{m,p}(\xi)$  is given by:

$$\lambda'_{m,p}(\xi) = \begin{cases} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{u_{m,p}(r, \xi)^2}{r} - K_{0,p}(\xi) \right] dr & \text{if } n = 3 \text{ and } m = 0, \\ - |u'_{m,p}(0, \xi)|^2 & \text{if } n = 4 \text{ and } m = 0, \\ -2k_m \int_0^{+\infty} \frac{|u_{m,p}(r, \xi)|^2}{r^3} dr & \text{in the other cases.} \end{cases}$$

**Proof:** In the case  $n = 3$ , this proposition has already been proved [Yaf08, Theorem 4.3]. The way to prove it in the general case is the same as in this particular case so we refer to this proof for more details. We still present the main ideas of the proof.

The Feynman-Hellmann formula [Mou88] (see Proposition A.2) yields that

$$\lambda'_{m,p}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} \partial_\xi \left( (r - \xi)^2 \right) |u_{m,p}(r, \xi)|^2 dr = - \int_{\mathbb{R}_+} \partial_r \left( (r - \xi)^2 \right) |u_{m,p}(r, \xi)|^2 dr. \quad (2.2.5)$$

We apply integrations by parts to get the result. We use the super-exponential decay of eigenfunctions  $u_{m,p}(\cdot, \xi)$  for handling the non-integral terms corresponding to  $r \rightarrow +\infty$  [Shn57, Olv97] and Proposition 2.2.1 for handling the non-integral term at  $r = 0$ . In the particular case  $(n, m) = (3, 0)$ , the result of Proposition 2.2.1 is not sharp enough. In order to improve it, we inject the identity (2.2.3) into the following eigenvalue equation:

$$L_0(\xi) u_{0,p}(r, \xi) = \lambda_{0,p}(\xi) u_{0,p}(r, \xi).$$

Therefore we obtain that  $u_{m,p}(r, \xi)^2 r^{-1} - K_{0,p}(\xi) = O(r^2)$  as  $r \rightarrow 0$  and we use it for handling non-integral term at  $r = 0$ . ■

## 2.2.3 Global behavior of the band functions

The min-max principle implies that

$$\lambda_{m,p}(\xi) \underset{\xi \rightarrow -\infty}{\sim} \xi^2.$$

Indeed first note that if  $\xi \leq 0$ , then  $L_m(\xi) \geq \xi^2$ . Therefore

$$\lambda_{m,p}(\xi) \geq \xi^2, \quad \xi \leq 0.$$

On the other hand, we define for  $\varepsilon > 0$  the operator  $G(\varepsilon)$ , self-adjoint on  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ ,

$$G(\varepsilon) := -\partial_r^2 + \frac{k_m}{r^2} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) r^2.$$

This operator has compact resolvent, therefore its spectrum is discrete. Let  $(\nu_q(\varepsilon))_{q \in \mathbb{N}}$  be the increasing sequence of its eigenvalues. Note that  $L_m(\xi) \leq G(\varepsilon) + (1 + \varepsilon)\xi^2$ . Hence, for any  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{m,p}(\xi) \leq \nu_p(\varepsilon) + (1 + \varepsilon)\xi^2$ . Thus,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \limsup_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{\lambda_{m,p}(\xi)}{\xi^2} \leq 1 + \varepsilon. \quad (2.2.6)$$

From Proposition 2.2.2 we deduce that if  $(n, m) \neq (3, 0)$ , then for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda'_{m,p}$  is negative on  $\mathbb{R}$ . Therefore in this case the band functions are decreasing. So these functions admit finite limits at  $+\infty$ . In the case  $n = 3$  the min-max principle yields that these limits are the Landau levels [Yaf08, Proposition 3.6], namely

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \lambda_{m,p}(\xi) = E_p := 2p - 1, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.2.7)$$

This proof is still valid if  $n > 3$  and Subsection 2.3.1 provides an asymptotic expansion of  $\lambda_{m,p}(\xi)$  when  $\xi$  tends to  $+\infty$ . In the case  $n = 3$  then  $k_0 = -4^{-1} < 0$ . Therefore we will deduce from Theorem 2.1 (see remark 2) that for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{0,p}$  admits local minima (the question of the number of minima stays open). In the other cases, according to Proposition 2.2.2, for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{m,p}$  is decreasing from  $+\infty$  to  $E_p$ .

**Numerical approximation.** We use a finite difference method to compute numerical approximations of the band function  $\lambda_{m,p}(\xi)$  with  $n = 5$ ,  $m \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$  and  $p \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . We compute for  $\xi \in [-1, 6]$  on the interval  $[0, 20]$  with an artificial Dirichlet boundary condition at  $r = 20$ .

On Figure 2.3, we have plotted the numerical approximation of  $\lambda_{m,p}(\xi)$  for  $\xi \in [-1, 6]$ ,  $m \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$  and  $p \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . According to the theory,  $\lambda_{m,p}$  decrease from  $+\infty$  to  $E_p = 2p - 1$ . We also plotted this level. Note that different band function may intersect for different values of  $m$ .

Figure 2.4 presents a zoom on the first level:  $p = 1$  for  $\xi \in [-1, 6]$  and  $m \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ .

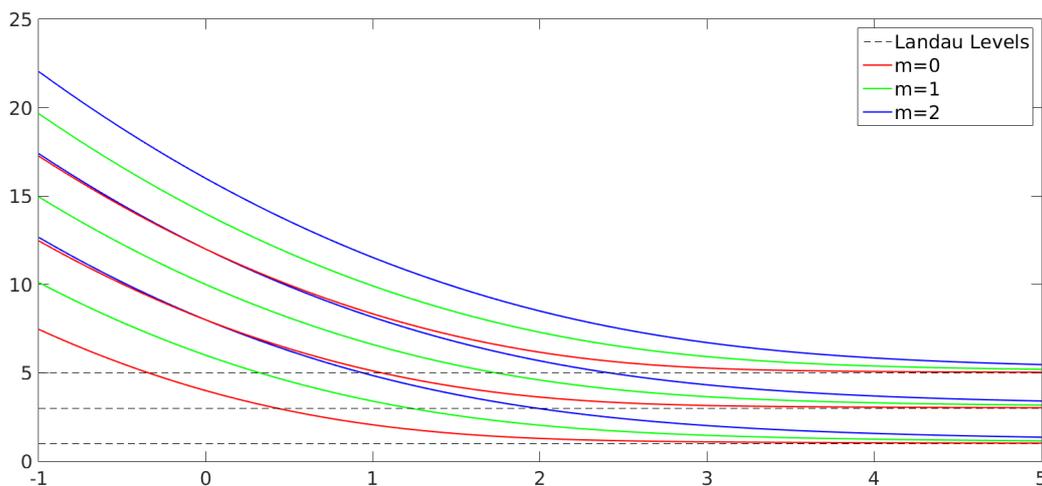


Figure 2.3 – Plot of the band functions  $\lambda_{m,p}(\xi)$  for  $n = 5$ ,  $0 \leq m \leq 3$ ,  $1 \leq p \leq 3$  and  $\xi \in [-1, 5]$ .

Graph courtesy of N. Popoff.

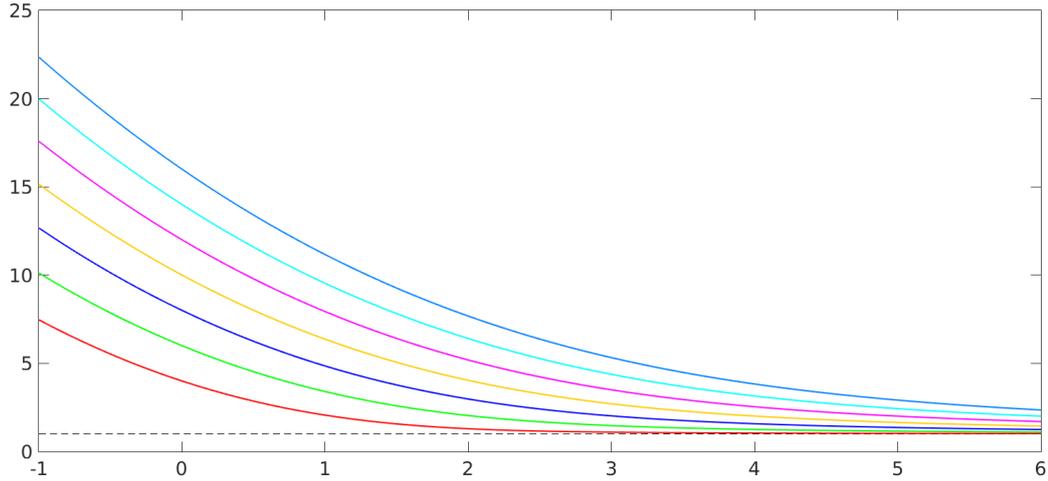


Figure 2.4 – Plot of the band functions  $\lambda_{m,1}(\xi)$  for  $n = 5$ ,  $0 \leq m \leq 6$  and  $\xi \in [-1, 6]$ .

## 2.3 Asymptotic behaviour of the band functions

In this section we provide an asymptotic expansion for the band functions and their derivative. First we provide an asymptotic expansion for  $\lambda_{m,p}(\xi)$  as  $\xi \rightarrow +\infty$  with  $m$  and  $p$  fixed. In a second time we estimate the behavior of  $\lambda'_{m,p}(\xi)$  as  $p$  is fixed and as  $m$  and  $\xi$  tend to  $+\infty$  and are related to each other by the condition  $\lambda_{m,p}(\xi) = E$  where  $E$  is a constant.

### 2.3.1 Near thresholds: high frequency

In this subsection we study the behaviour of the spectrum of  $H$  near the thresholds. Namely we describe the behaviour of  $\lambda_{m,p}(\xi)$  when  $m$  and  $p$  are fixed and  $\xi \rightarrow +\infty$ . More precisely, this subsection is devoted to the proof of the following theorem.

#### Théorème 2.1 (Asymptotic expansion of the band functions)

Let  $m \in \mathbb{Z}_+$  and  $p \in \mathbb{N}$ . There is a sequence of real numbers  $(\alpha_q^p)_{q \in \mathbb{N}}$  such that

$$\forall N \geq 0, \exists C > 0, \exists \xi_0 > 0, \forall \xi \geq \xi_0, \left| \lambda_{m,p}(\xi) - E_p - k_m \sum_{q=1}^N \frac{\alpha_q^p}{\xi^q} \right| \leq \frac{C}{\xi^{N+1}}.$$

To prove this theorem we consider the operators  $L_m(\xi)$  defined by relation (2.1.4) and we apply the method of the harmonic approximation [Hel88, Dim99] to derive an asymptotic expansion of its eigenvalues.

**Remark 2.3.1:** In the case  $k_m = 0$ , that is  $(n, m) = (4, 0)$ , Theorem 2.1 states that

$$\lambda_{m,p}(\xi) = E_p + O(\xi^{-\infty}), \text{ as } \xi \rightarrow +\infty.$$

In this case, the operator  $L_m(\xi)$  is given by  $L_m(\xi) = -\partial_r^2 + (r - \xi)^2$  acting on  $L^2(\mathbb{R}_+)$  with Dirichlet boundary condition at 0. This operator has already been studied and we know [His16, Theorem 1.4]

[Ivr18, Section 15.A] that there are some constant  $\gamma_p > 0$  such that

$$\lambda_{0,p}(\xi) \underset{\xi \rightarrow +\infty}{=} E_p + \gamma_p \xi^{2p-1} e^{-\xi^2} (1 + O(\xi^{-2})).$$

So we focus on the proof in the particular case  $k_m \neq 0$ .

**Remark 2.3.2:** We compute that  $\alpha_1 = 0$  and  $\alpha_2 = 1$ . Therefore for  $N = 2$ , Theorem 2.1 yields

$$\lambda_{m,p}(\xi) = E_p + \frac{k_m}{\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^3}\right).$$

In the case  $n = 3$  and  $m = 0$ ,  $k_m = -4^{-1} < 0$ . Therefore for every  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{0,p}(\xi)$  tend to  $E_p$  from below. Hence the  $\lambda_{0,p}$  have local minima.

## 1 Canonical transformation and asymptotic expansion of the operator

For  $\xi \in \mathbb{R}_+$  we apply the change of variable  $s = r - \xi$ . It shows that  $L_m(\xi)$  is unitarily equivalent to the following operator acting on  $\mathbf{L}^2(-\xi, +\infty)$ :

$$\tilde{L}_m(\xi) = -\partial_s^2 + \frac{k_m}{(s+\xi)^2} + s^2 = -\partial_s^2 + s^2 + \frac{k_m}{\xi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\xi}\right)^2}.$$

A Taylor expansion of the potential for large  $\xi$  provides

$$\frac{k_m}{(s+\xi)^2} = \frac{k_m}{\xi^2} \sum_{q=0}^N (q+1) \left(\frac{-s}{\xi}\right)^q + R_N(s, \xi), \quad N \geq 0. \quad (2.3.1)$$

Estimation on the remainder term  $R_N(s, \xi)$  will be written later (see equation (2.3.8)). We define a sequence of formal operators by

$$\begin{cases} H_0 := -\partial_s^2 + s^2, \\ A_1 := 0, \\ \forall q \geq 2, A_q := (q-1)(-s)^{q-2}. \end{cases}$$

For every  $N \in \mathbb{N}$ , we set

$$\tilde{L}_m^N(\xi) := H_0 + k_m \sum_{q=1}^N \frac{A_q}{\xi^q}, \quad (2.3.2)$$

with the convention  $\tilde{L}_m^0 = H_0$ . We set  $R_{-2}(s, \xi) = R_{-1}(s, \xi) := k_m (s + \xi)^{-2}$ . For every  $N \geq 0$ , the operator  $\tilde{L}_m(\xi)$  can be formally decomposed into:

$$\tilde{L}_m(\xi) = \tilde{L}_m^N(\xi) + R_{N-2}(s, \xi).$$

First we look for quasi-modes for the formal operator  $\tilde{L}_m^N(\xi)$  acting on  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . This formal procedure provides functions defined on  $\mathbb{R}$  and we use a suitable cut-off function in  $(-\xi, +\infty)$  to derive quasi-modes for  $\tilde{L}_m(\xi)$ .

## 2 Calculation of the quasi-modes

We look for quasi-eigenpairs  $(\lambda_m^N(\xi), f_m^N(\cdot, \xi))$  of  $\tilde{L}_m^N(\xi)$  of the form

$$(\lambda_m^N(\xi), f_m^N(\cdot, \xi)) = \left( \alpha_0 + k_m \sum_{q=1}^N \frac{\alpha_q}{\xi^q}, \sum_{q=0}^N \frac{g_q}{\xi^q} \right),$$

where the functions  $g_q$  are mutually orthogonal in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ . Note that the functions  $g_q$  may depend on  $k_m$ . We are led to solve the system

$$\begin{aligned} (H_0 - \alpha_0) g_0 &= 0, \\ (H_0 - \alpha_0) g_q + k_m \sum_{j=1}^q (A_j - \alpha_j) g_{q-j} &= 0, \quad q \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

We solve it by induction:

☞ **q = 0**

Note that  $H_0$  is the quantum harmonic oscillator. Hence we choose for  $(\alpha_0, g_0)$  a couple  $(E_p, \Psi_p)$  for  $p \in \mathbb{N}$  where  $E_p = 2p - 1$  is a Landau level, and  $\Psi_p$  is the corresponding normalised Hermite function with the convention that  $\Psi_1(s) = (2\pi)^{-1/4} e^{-t^2/2}$ . So from now on we set  $(\alpha_0, g_0) = (\alpha_0^p, g_0^p) = (E_p, \Psi_p)$  for a certain  $p \in \mathbb{N}$ , fixed. All the quantities considered in what follows may depend on the choice of  $p$ . We simplify the notations with omitting this index.

☞ **Induction**

We assume that there exists  $q_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$  such that for every  $q \leq q_0 - 1$ ,  $\alpha_q$  and  $g_q$  have been constructed.

The scalar product of the second equation of the system (2.3.3) with  $g_0$  provides the value of  $\alpha_{q_0}$ :

$$\alpha_{q_0} = (A_{q_0} g_0 \mid g_0) + \left( \sum_{q=1}^{q_0-1} (A_q - \alpha_q) g_{q_0-q} \mid g_0 \right).$$

So  $\alpha_{q_0}$  is known, therefore the Fredholm alternative provides a unique value for  $g_{q_0}$  such that  $(g_{q_0} \mid g_q) = 0$  for every  $q < q_0$ .

The quasi-modes  $f_m^N(\cdot, \xi)$  can be computed using the Hermite functions. The Hermite functions satisfy the following results

$$\begin{aligned} \forall q \geq 1, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall s \in \mathbb{R}, \quad \Psi_q(s) &= e^{-\frac{s^2}{2}} P(s), \\ \forall q \geq 1, \quad s \Psi_q(s) &= \sqrt{\frac{q-1}{2}} \Psi_{q-1}(s) + \sqrt{\frac{q}{2}} \Psi_{q+1}(s). \end{aligned}$$

Combining them with the system (2.3.3) we infer that for every  $N \geq 0$ , there exist polynomial functions  $P_0, \dots, P_N$  such that

$$f_m^N(s, \xi) = e^{-\frac{s^2}{2}} \sum_{q=0}^N \frac{P_q(s)}{\xi^q}, \quad \xi > 0, s \in \mathbb{R}. \quad (2.3.4)$$

### 3 Evaluation of the quasi-mode

Previously we have obtained quasi-eigenpairs  $(\lambda_m^N(\xi), f_m^N(\cdot, \xi))$  for  $\tilde{L}_m^N(\xi)$ . The functions  $f_m^N$  are defined on  $\mathbb{R}$ . We now use a suitable cut-off function to get quasi-modes  $u_m^N(\cdot, \xi)$  for  $\tilde{L}_m(\xi)$ .

Let  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$  such that

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq 1/2; \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1. \end{cases}$$

For  $\xi \in \mathbb{R}_+$ , we define the cut-off function  $\chi_\xi$  on  $\mathbb{R}$  by

$$\chi_\xi(t) := \chi\left(\frac{2t}{\xi}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3.5)$$

Note that this function is supported in  $(-\xi/2, \xi/2)$  and is equal to 1 on  $(-\xi/4, \xi/4)$ . Let, for  $N \geq 0$ ,  $u_m^N$  be defined by

$$u_m^N(r, \xi) := \chi_\xi(r) f_m^N(r, \xi), \quad \xi > 0, r \in \mathbb{R}. \quad (2.3.6)$$

Since  $\text{supp}(u_m^N(\cdot, \xi)) \subset \text{supp}(\chi_\xi) \subset (-\xi/2, \xi/2)$ ,  $u_m^N$  can be used as a quasi-mode for  $\tilde{L}_m(\xi)$ .

**Lemme 2.3.1** (Control of the quasi-mode)

Let  $N \in \mathbb{Z}_+$ . Recalling that  $m, N$  and  $p$  are fixed, there is a constant  $K \geq 0$  such that

$$\exists \xi_0 > 0, \forall \xi \geq \xi_0, \quad \|(\tilde{L}_m(\xi) - \lambda_m^N(\xi)) u_m^N(\cdot, \xi)\|_2 \leq \frac{K}{\xi^{N+1}}$$

**Proof:** First, observe that

$$\begin{aligned} \|(\tilde{L}_m(\xi) - \lambda_m^N(\xi)) u_m^N(\cdot, \xi)\|_2 &\leq \|\chi_\xi(\tilde{L}_m^N(\xi) - \lambda_m^N(\xi)) f_m^N(\cdot, \xi)\|_2 + \|R_{N-2}(\cdot, \xi) u_m^N(\cdot, \xi)\|_2 \\ &\quad + \|[\tilde{L}_m^N(\xi), \chi_\xi] f_m^N(\cdot, \xi)\|_2. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

We proceed to control the right hand side term by term:

☞ We use the definition of  $f_m^N$  to compute the first term:

$$(\tilde{L}_m^N(\xi) - \lambda_m^N(\xi)) f_m^N(\cdot, \xi) = \sum_{q=N+1}^{2N} \frac{k_m}{\xi^q} \sum_{i+j=q} (A_i - \alpha_i) g_j.$$

Thus we deduce that

$$\exists K > 0, \quad \|\chi_\xi(\tilde{L}_m^N(\xi) - \lambda_m^N(\xi)) f_m^N(\cdot, \xi)\|_2 \leq \frac{K k_m}{\xi^{N+1}}.$$

Note that  $K$  may depend on  $m$ .

☞ Remind that  $R_N(s, \xi)$  is defined by relation (2.3.1), the localization of  $\text{supp}(\chi_\xi)$  provides the following estimate:

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall s \in \text{supp}(\chi_\xi), \quad |R_{N-2}(s, \xi)| &\leq \frac{C s^{N+1}}{\xi^{N+1}}, \quad \text{if } N \geq 2; \\ \forall s \in \text{supp}(\chi_\xi), \quad |R_{N-2}(s, \xi)| &\leq 4 \frac{k_m}{\xi^2}, \quad \text{if } N \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Hence using the exponential decay of Hermite functions, we deduce from the definition of  $u_m^N$  and from relation (2.3.4) that

$$\begin{aligned} \|R_{N-2}(\cdot, \xi) u_m^N(\cdot, \xi)\|_2 &\leq \frac{K}{\xi^{N+1}} \quad \text{if } N \geq 2, \\ \|R_{N-2}(\cdot, \xi) u_m^N(\cdot, \xi)\|_2 &\leq 4 \frac{k_m}{\xi^2} \quad \text{if } N \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

☞ Finally notice that  $[\tilde{L}_m^N(\xi), \chi_\xi] f_m^N(\cdot, \xi) = 2\chi'_\xi(f_m^N)'(\cdot, \xi) + \chi''_\xi f_m^N(\cdot, \xi)$ . Moreover,  $\chi'_\xi$  and  $\chi''_\xi$  are supported in  $\{t \in \mathbb{R}, \xi/4 < |t| < \xi/2\}$ . Therefore we deduce from formula (2.3.4) that

$$\|[\tilde{L}_m^N(\xi), \chi_\xi] f_m^N(\cdot, \xi)\|_2 = O\left(\frac{1}{\xi^\infty}\right).$$

■

#### 4 Proof of Theorem 2.1

We deduce from the spectral theorem and from Lemma 2.3.1 that

$$d(\lambda_m^N(\xi), \sigma(L_m(\xi))) \|u_m^N(\cdot, \xi)\|_{\mathbf{L}^2(-\xi, +\infty)} \leq \frac{K}{\xi^{N+1}}.$$

Moreover  $\|u_m^N(\cdot, \xi)\|_{\mathbf{L}^2(-\xi, +\infty)} = \|f_m^N(\cdot, \xi)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} + O(\xi^{-\infty})$  and  $\|f_m^N(\cdot, \xi)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 1 + O(\xi^{-2})$ .  
Therefore

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \|u_m^N(\cdot, \xi)\|_{\mathbf{L}^2(-\xi, +\infty)} = 1 \quad (2.3.9)$$

Hence for  $\xi$  large enough

$$d(\lambda_m^N(\xi), \sigma(L_m(\xi))) \leq \frac{\tilde{K}}{\xi^{N+1}}.$$

Finally we observe that  $\lambda_m^N(\xi) \rightarrow E_p$ , as  $\xi \rightarrow +\infty$ . We combine it with the identity (2.2.7) that provides the statement of the theorem.

#### 2.3.2 Near other energy levels: high frequency and high angular momentum

We are now interested in the behaviour of the spectrum of  $\mathcal{H}$  near other energy levels. First if  $\xi$  is fixed, then  $\lambda_{m,p}(\xi)$  tends to  $+\infty$  as  $m \rightarrow +\infty$ . In a second time we study the behaviour of the band functions when  $m$  and  $\xi$  tends to  $+\infty$  together. More precisely we fix an integer  $p$  and an energy level  $E > E_p$  and we study the behaviour of  $\lambda'_{m,p}(\xi)$  when  $\lambda_{m,p}(\xi) = E$ .

Remember that the quadratic form defined by equation (2.1.5) is associated to  $L_m(\xi)$  and that  $u_{m,p}(\cdot, \xi)$  denotes the normalized eigenfunction of  $L_m(\xi)$  associated with the eigenvalue  $\lambda_{m,p}(\xi)$ . Therefore,

$$\lambda_{m,p}(\xi) = \int_0^{+\infty} |u'_{m,p}(r, \xi)|^2 + V_m(r, \xi) u_{m,p}(r, \xi)^2 dr. \quad (2.3.10)$$

Moreover  $k_m$  (resp.  $V_m$ ) is defined by relation (2.1.2) (resp. relation (2.1.3)). Hence for every  $m > 0$ ,  $k_m \geq 0$ . Therefore the following useful estimates are valid for every  $m > 0$ :

$$\lambda_{m,p}(\xi) \geq k_m \int_0^{+\infty} \frac{|u_{m,p}(r, \xi)|^2}{r^2} dr, \quad (2.3.11)$$

$$\lambda_{m,p}(\xi) \geq \int_0^{+\infty} (r - \xi)^2 |u_{m,p}(r, \xi)|^2 dr. \quad (2.3.12)$$

#### Proposition 2.3.1 (Limit of the band functions)

For every  $p \in \mathbb{N}$  and every  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_{m,p}(\xi) = +\infty.$$

**Proof:** We simplify the notations by omitting the index  $p$ . According to estimate (2.3.11),

$$\lambda_m(\xi) \geq \frac{k_m}{R_0^2} \int_0^{R_0} |u_m(r, \xi)|^2 dr = \frac{k_m}{R_0^2} \left(1 - \int_{R_0}^{+\infty} |u_m(r, \xi)|^2 dr\right), \quad R_0 > 0. \quad (2.3.13)$$

Moreover, if  $R_0 \geq \xi$ , then

$$\int_0^{+\infty} (r - \xi)^2 |u_m(r, \xi)|^2 dr \geq (R_0 - \xi)^2 \int_{R_0}^{+\infty} |u_m(r, \xi)|^2 dr.$$

Therefore, from estimate (2.3.12) we deduce that

$$\lambda_m(\xi) \geq (R_0 - \xi)^2 \int_{R_0}^{+\infty} |u_m(r, \xi)|^2 dr, \quad R_0 \geq \xi. \quad (2.3.14)$$

Therefore, combining estimates (2.3.13) and (2.3.14) we obtain

$$\lambda_m(\xi) \geq \frac{k_m}{R_0^2} \left(1 - (R_0 - \xi)^{-2} \lambda_m(\xi)\right), \quad R_0 \geq \xi.$$

Hence, recalling that  $k_m \rightarrow +\infty$  as  $m \rightarrow +\infty$ , we deduce that

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \quad \lambda_m(\xi) \geq \frac{k_m}{R_0^2} \left(1 + k_m (R_0 (R_0 - \xi))^{-2}\right)^{-1} \geq \frac{(R_0 - \xi)^2}{2}.$$

This is true for all  $R_0 > \xi$ . So letting  $R_0$  tend to  $+\infty$  provides the result. ■

We now study  $\lambda'_{m,p}(\xi)$ . Remember that for any  $m \in \mathbb{N}$  and for any  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{m,p}$  is decreasing from  $+\infty$  to  $E_p$ . Therefore

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall E > E_p, \quad \exists! \xi_m \in \mathbb{R}, \quad E = \lambda_{m,p}(\xi_m). \quad (2.3.15)$$

**Remark 2.3.3:** Note that  $\xi_m$  depends on  $E$  and  $p$ .

### 2.3.2.a Preliminary results: some localization properties

First we look for the behaviour of  $\xi_m$  when  $m$  tends to  $+\infty$ .

#### Proposition 2.3.2 (Control of $\xi_m$ )

There exist constants  $K_{\pm} > 0$  such that as  $m$  gets large,

$$K_- \sqrt{k_m} \leq \xi_m \leq K_+ \sqrt{k_m}.$$

To get the lower bound, we use formula (2.3.10) and we localize the normalized eigenfunctions  $u_m := u_m(\cdot, \xi_m)$  of  $L_m := L_m(\xi_m)$ .

**Proof of the lower bound :** Let  $\alpha \in [0, 1)$  and let  $R_m(\alpha) := \sqrt{k_m \alpha E^{-1}}$ . We inject  $\lambda_m(\xi_m) = E$  into estimate (2.3.11). It yields

$$\frac{E}{k_m} \geq \int_0^{+\infty} \frac{|u_m(r)|^2}{r^2} dr \geq \int_0^{R_m(\alpha)} \frac{|u_m(r)|^2}{r^2} dr \geq \frac{1}{R_m(\alpha)^2} \int_0^{R_m(\alpha)} |u_m(r)|^2 dr.$$

So

$$\int_0^{R_m(\alpha)} |u_m(r)|^2 dr \leq \alpha. \quad (2.3.16)$$

Let  $\varepsilon > 0$  and let  $C(\varepsilon) := \sqrt{E\varepsilon^{-1}}$ . We make use of estimate (2.3.12) to prove in the same way that,

$$\int_{\{|r-\xi_m| \leq C(\varepsilon)\}} |u_m(r, \xi_m)|^2 dr \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.3.17)$$

We combine these estimates to derive an upper bound for  $\xi_m$ . Let  $(\varepsilon, \alpha) \in (0, 1)^2$  such that  $1 - \varepsilon > \alpha$ . We assume that for some  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$(\xi_m - C(\varepsilon), \xi_m + C(\varepsilon)) \subset (0, R_m(\alpha)). \quad (2.3.18)$$

We deduce from estimates (2.3.16) and (2.3.17) that

$$1 - \varepsilon \leq \int_{-C(\varepsilon) + \xi_m}^{C(\varepsilon) + \xi_m} |u_m(r, \xi_m)|^2 dr \leq \int_0^{R_m(\alpha)} |u_m(r, \xi_m)|^2 dr \leq \alpha.$$

So hypothesis (2.3.18) can not hold. Moreover according to Proposition 2.3.1,  $\xi_m \rightarrow +\infty$  as  $m \rightarrow +\infty$ . Therefore for  $m$  large enough  $\xi_m - C(\varepsilon) \geq 0$ . Hence,

$$\exists M > 0, \forall m \geq M, \quad C(\varepsilon) + \xi_m \geq R_m(\alpha).$$

Thus we deduce the existence of  $K_-$ . ■

**Proof of the upper bound :** We now examine the second part of Proposition 2.3.2: we show that the sequence  $(\xi_m k_m^{-1/2})_{m \in \mathbb{N}}$  admits an upper bound. The key argument is  $E \neq E_p$ . Indeed we prove that if  $\xi_m$  tends too fast to  $+\infty$ , the limit operator is a quantum harmonic oscillator whose eigenvalues are the Landau levels. Let's assume that the sequence  $(\xi_m k_m^{-1/2})_{m \in \mathbb{N}}$  admits no upper bounds. Up to an extraction, one can assume that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\xi_m}{\sqrt{k_m}} = +\infty. \quad (2.3.19)$$

Recall (see Subsection 2.3.1) that  $H_0$  is the quantum harmonic oscillator acting on  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  and that the operator  $L_m$  is unitarily equivalent to the following operator acting on  $\mathbf{L}^2(-\xi_m, +\infty)$

$$H_0 + \left( \frac{\sqrt{k_m}}{\xi_m} \right)^2 \frac{1}{\left( 1 + \frac{s}{\xi_m} \right)^2}.$$

Let  $(E_q, \Psi_q)_{q \in \mathbb{N}}$  be the eigenpairs of  $H_0$ . For any  $m \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$ , we use the functions  $\chi_m$  and  $u_m^1(\cdot, \xi_m)$  defined by formulas (2.3.5) and (2.3.6). Note that  $\chi_m(H_0 - E_q)\Psi_q = 0$ , therefore according to estimates (2.3.7) and (2.3.8),

$$\|(L_m - E_q)u_{m,q}^1\|_2 \leq \|[H_0, \chi_m]\Psi_q\|_2 + 4 \left( \frac{\sqrt{k_m}}{\xi_m} \right)^2, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Moreover,

$$\|[H_0, \chi_m]\Psi_q\|_2 = O\left(\frac{1}{\xi_m}\right).$$

Recall that  $\|u_m^1(\cdot, \xi_m)\| \rightarrow 1$  as  $m \rightarrow +\infty$  (remember that  $\xi_m \rightarrow +\infty$  as  $m \rightarrow +\infty$  and see the identity (2.3.9)) and that we have assumed that  $\sqrt{k_m}\xi_m^{-1} \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ . We thus conclude from the spectral theorem that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} d(\sigma(L_m), E_q) = 0.$$

It implies that for every  $q \in \mathbb{N}$ ,  $d(\{\lambda_{m,s}(\xi_m), s \geq 1\}, E_q) \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ . So for every  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{m,q}(\xi_m) \rightarrow E_q$  as  $m \rightarrow +\infty$ , therefore  $E = E_p$ . But we have assumed that  $E \neq E_p$ , hence the hypothesis (2.3.19) can not hold and we get the upper-bound. ■

We now study the potential  $V_m$ , defined by formula (2.1.3). Note that  $V_m$  is strictly convex and that it verifies  $V_m(r) \rightarrow +\infty$  as  $r \rightarrow 0$  or  $r \rightarrow +\infty$ . Therefore  $V_m$  admits a unique minimum on  $\mathbb{R}_+$ ,  $V_m^{\min}$ , reached at the single critical point of  $V_m$ :  $r_m$ . In Lemma 2.3.2, we use Proposition 2.3.2 to localize the quantities  $r_m$  and  $V_m^{\min}$ .

**Lemme 2.3.2 (Localization of extrema)**

There are constants  $M \in \mathbb{N}$ ,  $R_{\pm} > 0$  and  $V_{\pm} > 0$  such that for every  $m \geq M$ ,

1.  $R_- \sqrt{k_m} \leq r_m \leq R_+ \sqrt{k_m}$ ;
2.  $V_- \leq V_m^{\min} \leq V_+$ .

Moreover, for any  $y > V_m^{\min}$ , the two solutions  $r_{\pm}$  of  $V_m(r) = y$  satisfy:

$$\exists K_{\pm} > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \quad K_- \sqrt{k_m} \leq r_- < r_m < r_+ \leq K_+ \sqrt{k_m}.$$

**Proof :**

1. First, recall that  $r_m \in \mathbb{R}_+$  is the single critical point of  $V_m$ . Therefore,  $V'_m(r_m) = 0$  provides

$$\frac{k_m}{r_m^3} = r_m - \xi_m.$$

Since  $r_m > 0$ , we deduce that  $r_m - \xi_m > 0$ . So according to Proposition 2.3.2

$$\exists R_- > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \quad r_m > \xi_m \geq R_- \sqrt{k_m}.$$

Moreover  $0 < r_m - \xi_m \leq k_m \left( R_- \sqrt{k_m} \right)^{-3} = R_-^{-3} k_m^{-1/2}$ . So using  $k_m \rightarrow +\infty$  as  $m \rightarrow +\infty$ , we deduce that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} r_m - \xi_m = 0. \quad (2.3.20)$$

Thus Proposition 2.3.2 provides the result.

2. Recall that  $V_m^{\min} = V_m(r_m)$ . Hence, according to equation (2.3.20),  $V_m^{\min} - k_m r_m^{-2} \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ . So the first point provides the result.
3. According to the variations of  $V_m$ ,  $r_{\pm}$  exists and is solution of the equation  $k_m r^{-2} + (r - \xi_m)^2 = y$ . Thus  $(r_{\pm} - \xi_m)^2 \leq y$  and therefore  $|r_{\pm} - \xi_m| \leq \sqrt{y}$ . The result follows from Proposition 2.3.2. ■

**Remark 2.3.4:** We do not know if the limits  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\xi_m}{\sqrt{k_m}}$  and  $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m^{\min}$  exist.

### 2.3.2.b Exponential decay of the eigenfunctions

Here we introduce some tools to estimate the exponential decay of the eigenfunctions. This is an application of the well-known Agmon estimates for 1D Schrödinger operators with confining potential. In our case we would like to take into account the dependance on  $m$ . Therefore we are led to perturb the Agmon distance to get some uniform estimates.

We define the Agmon distance by:

$$d_m(r_1, r_2) = \left| \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(V_m(r) - E)_+} dr \right|, \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

For  $\alpha > 3/2$  and for every  $m \in \mathbb{N}$ , we define  $\delta_m$  by

$$\delta_m = \delta_m(\alpha) := \frac{\alpha}{\sqrt{k_m}}.$$

Let  $I_m$  be defined by

$$I_m = I_m(E) := \{r > 0, \quad V_m(r) < E\}. \quad (2.3.21)$$

We recall that we have chosen  $E > E_p$ , therefore  $I_m \neq \emptyset$ . Indeed,

$$E = l_m(u_m) > \int_{\mathbb{R}_+} V_m |u_m|^2 \geq V_m^{\min} \|u_m\|_2^2 = V_m^{\min}. \quad (2.3.22)$$

Furthermore, remember that  $V_m$  is strictly convex and that  $V_m(r) \rightarrow +\infty$  as  $r \rightarrow 0$ . Therefore  $I_m$  is an open bounded interval of  $\mathbb{R}_+$ . Recall that the distance between  $x \in \mathbb{R}$  and a set  $X \subset \mathbb{R}$  is defined as  $d_m(x, X) := \inf(d_m(x, y), y \in X)$ . For every  $m \in \mathbb{N}$ , we define the function  $\Phi_m$  on  $\mathbb{R}_+$  by

$$\Phi_m = \Phi_m(\cdot, \delta_m) := \delta_m d_m(\cdot, I_m). \quad (2.3.23)$$

The function  $\Phi_m$  is decreasing on  $(0, \inf(I_m))$ , zero on  $I_m$  and increasing on  $(\sup(I_m), +\infty)$ . Moreover since  $I_m$  is a bounded interval, we deduce that

$$\begin{aligned} \Phi_m(r) &= \delta_m \int_r^{\inf(I_m)} \sqrt{(V_m(r) - E)_+} dr, & r < \inf(I_m), \\ \Phi_m(r) &= 0, & r \in I_m, \\ \Phi_m(r) &= \delta_m \int_{\sup(I_m)}^r \sqrt{(V_m(r) - E)_+} dr, & r > \sup(I_m). \end{aligned}$$

Hence,  $\Phi_m$  satisfies the eikonal equation:

$$|\Phi'_m(r)|^2 = \delta_m^2 (V_m(r) - E)_+. \quad (2.3.24)$$

Notice that  $\Phi_m$  is a perturbed Agmon distance and that  $\delta_m \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ . We use this fact to prove the following proposition that provides a uniform control for  $e^{\Phi_m} u_m$ . First of all we use the definition of  $\Phi_m$  given by equation (2.3.23) and a Taylor expansion at 0 and at  $+\infty$  to get the following lemma.

### Lemme 2.3.3

Let  $\Phi_m$  be the function defined by definition (2.3.23). The behavior of  $\Phi_m(r)$  as  $r \rightarrow \partial\mathbb{R}_+$  is given by:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Phi_m(r) &= -\alpha \ln(r) + O(1) \text{ as } r \rightarrow 0; \\ \Leftrightarrow \Phi_m(r) &= \frac{\delta_m r^2}{2} + O(r) \text{ as } r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

The following proposition is a well known Agmon estimate result [Agm82]. Here we are interested in the uniformity with respect to  $m$ . To that aim we adapt the classical proof of the result [Hel88].

### Proposition 2.3.3

There exist a constant  $K$  and an integer  $M$  such that

$$\forall m \geq M, \quad \|e^{\Phi_m} u_m\|_2 \leq K.$$

**Proof:** According to Lemma 2.3.3, there is a constant  $\beta \in \mathbb{R}$  such that,

$$\begin{aligned} e^{2\Phi_m(r)} &= O(r^{-2\alpha}) & r \rightarrow 0; \\ e^{2\Phi_m(r)} &= O\left(e^{\frac{\delta_m}{2} r^2 + \beta r}\right) & r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Hence according to Proposition 2.2.1,

$$e^{2\Phi_m(r)} u_m(r) = O\left(r^{m+\frac{n}{2}-1-2\alpha}\right), \quad r \rightarrow 0.$$

Therefore for  $m$  large enough,  $e^{2\Phi_m} u_m \in \mathbf{L}^2(0, 1)$ . Moreover according to the Liouville-Green approximation [Olv97, Chapter 6],

$$u_m(r) \sim (V_m(r) - E)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int \sqrt{V_m(r) - E} dr}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Remember that  $\int \sqrt{V_m(r) - E} dr \sim r^2/2$  as  $r \rightarrow +\infty$ . Therefore we deduce that for  $m$  large enough,  $e^{\Phi_m} u_m \in \mathbf{L}^2(1, +\infty)$ , therefore  $e^{2\Phi_m} u_m \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$ . Moreover an integration by parts yields

$$\left(-u_m'' \mid e^{2\Phi_m} u_m\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(|u_m'|^2 + 2\Phi_m' u_m u_m'\right) e^{2\Phi_m} - [e^{2\Phi_m} u_m u_m']_0^{+\infty}.$$

According to what preceds,  $[e^{2\Phi_m} u_m u_m']_0^{+\infty} = 0$ , thus  $e^{\Phi_m} u_m \in \mathcal{D}(h_m)$ . Moreover by combining it with the relations (2.3.10) and (2.3.15) we obtain

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left| (e^{\Phi_m} u_m)' \right|^2 + \int_{\mathbb{R}_+} e^{2\Phi_m} (V_m - E - |\Phi_m'|^2) |u_m|^2 = 0. \quad (2.3.25)$$

Furthermore, according to estimate (2.3.22),  $E - V_m^{\min} > 0$ . For every  $m \in \mathbb{N}$ , define  $\varepsilon_m > 0$  as  $\varepsilon := 2^{-1}(E - V_m^{\min})$ . Recall that  $I_m$  is given by definition (2.3.21). We define  $I_{\pm}$  as

$$\begin{aligned} I_+ &:= I_m(E + \varepsilon_m) = \{r \in \mathbb{R}_+, V_m(r) < E + \varepsilon_m\}, \\ I_- &:= \mathbb{R}_+ \setminus I_+ = \{r \in \mathbb{R}_+, V_m(r) \geq E + \varepsilon_m\}. \end{aligned}$$

By injecting  $\mathbb{R}_+ = I_+ \sqcup I_-$  into equation (2.3.25), we prove that

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} \left| (e^{\Phi_m} u_m)' \right|^2 + \int_{I_+} e^{2\Phi_m} (V_m - E - |\Phi_m'|^2) |u_m|^2 = \\ &- \int_{I_-} e^{2\Phi_m} (V_m - E - |\Phi_m'|^2) |u_m|^2 \leq \left\| V_m - E - |\Phi_m'|^2 \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)} \int_{I_-} e^{2\Phi_m} |u_m|^2. \end{aligned}$$

Let for  $m$  large enough such that  $\delta_m \leq 1$ ,  $C_m := (1 - \delta_m^2) \varepsilon_m > 0$ . We combine equation (2.3.24) with the definition of  $I_{\pm}$  to get

$$\begin{aligned} V_m(r) - E - |\Phi_m'(r)|^2 &\geq C_m, & \text{if } r \in I_+; \\ V_m^{\min} - E \leq V_m(r) - E - |\Phi_m'(r)|^2 &< C_m, & \text{if } r \in I_-. \end{aligned}$$

So remembering that  $\varepsilon_m = (E - V_m^{\min})/2$ , we get  $\left\| V_m - E - |\Phi_m'|^2 \right\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)} \leq E - V_m^{\min}$  and we deduce that

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left| (e^{\Phi_m} u_m)' \right|^2 + C_m \int_{I_+} e^{2\Phi_m} |u_m|^2 \leq (E - V_m^{\min}) \int_{I_-} e^{2\Phi_m(r)} |u_m|^2.$$

We recall that  $u_m$  is normalized that provides

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left| (e^{\Phi_m} u_m)' \right|^2 + C_m \int_{\mathbb{R}_+} e^{2\Phi_m} |u_m|^2 \leq (E - V_m^{\min} + C_m) \int_{I_-} e^{2\Phi_m} |u_m|^2 \leq (E - V_m^{\min} + C_m) e^{2\|\Phi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)}}.$$

Finally we deduce the following estimate

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{2\Phi_m(r)} |u_m(r)|^2 dr \leq \frac{E - V_m^{\min} + C_m}{C_m} e^{2\|\Phi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)}}. \quad (2.3.26)$$

The choices of  $\delta_m$  and  $\varepsilon_m$  yield  $(E - V_m^{\min} + C_m) C_m^{-1} = (3 - \delta_m^2) (1 - \delta_m^2)^{-1}$ . Thus  $(E - V_m^{\min} + C_m) C_m^{-1}$  is bounded as  $m \rightarrow +\infty$ . Moreover the variations of  $\Phi_m$  ensure that  $\|\Phi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)} = \|\Phi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial I_-)}$ . Therefore Lemma 2.3.2 provides the following control

$$\exists K > 0, \exists M_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq M_0, \quad \|\Phi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(I_-)} \leq K \delta_m \sqrt{k_m} = K \alpha.$$

We conclude the proof by combining it with estimate (2.3.26) that provides the expected result.  $\blacksquare$

### 2.3.2.c Asymptotic expansion of the derivative

Here we prove the following theorem.

#### **Théorème 2.2** (Asymptotic behaviour of the derivative)

Recall that  $\xi_m$  is defined by relation (2.3.15). There are constants  $K_{\pm} > 0$  and there exists  $M \in \mathbb{N}$  such that

$$\forall m \geq M, \quad \frac{K_-}{\sqrt{k_m}} \leq |\lambda'_m(\xi_m)| \leq \frac{K_+}{\sqrt{k_m}}.$$

**Remark 2.3.5:** For further use note that this theorem can be adapted to the case where the energy level is an interval  $J$ . Namely, if  $J \subset \mathbb{R}$  denotes an interval such that  $\bar{J} \cap \{E_p, p \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ , then

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \forall \xi \in \lambda_m^{-1}(J), \quad \frac{K_-(J)}{\sqrt{k_m}} \leq |\lambda'_m(\xi)| \leq \frac{K_+(J)}{\sqrt{k_m}}.$$

**Remark 2.3.6:** If  $J$  is on the form  $(E_p, E_p + \eta)$ , then the combinaison of Theorem 2.1 and of Proposition 2.3.2 states that there is a constant  $C > 0$  such that if  $\lambda_m(\xi) \in J$  then  $\xi \geq C\sqrt{k_m\eta^{-1}}$ . Therefore one could prove that

$$\exists C > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \forall \xi \in \lambda_m^{-1}(J), \quad |\lambda'_m(\xi)| \leq C\sqrt{\frac{\eta}{k_m}}.$$

#### 1 Lower bound

According to Proposition 2.2.2,

$$|\lambda'_m(\xi)| \geq \frac{2k_m}{R^3} \int_0^R |u_m(r, \xi)|^2 dr, \quad \xi \in \mathbb{R}, R > 0, m \geq 1.$$

Let's combine it with estimate (2.3.14) and with  $\|u_m(\cdot, \xi)\| = 1$ . We deduce that

$$|\lambda'_m(\xi)| \geq \frac{2k_m}{R^3} \left(1 - \int_R^{+\infty} |u_m(r, \xi)|^2 dr\right) \geq \frac{2k_m}{R^3} \left(1 - \frac{\lambda_m(\xi)}{(R-\xi)^2}\right), \quad R > \xi > 0.$$

Remembering that  $\lambda_{m,p}(\xi_m) = E$ , we get

$$|\lambda'_m(\xi_m)| \geq \frac{2k_m}{R^3} \left[1 - \frac{E}{(R-\xi_m)^2}\right], \quad R > \xi_m.$$

Let us choose  $R = R_m := \xi_m + \sqrt{2E} > \xi_m$ . in order to obtain  $E(R_m - \xi_m)^{-2} = 1/2$ . This implies that  $|\lambda'_m(\xi_m)| \geq k_m R_m^{-3}$ . Observe that  $R_m \sim \xi_m$  as  $m \rightarrow +\infty$ . Therefore Proposition 2.3.2 provides

$$\exists K > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \geq M, \quad |\lambda'_m(\xi_m)| \geq \frac{K}{\sqrt{k_m}}.$$

#### 2 Upper bound

Recall that  $\Phi_m$  is defined by the formula (2.3.23). Let us define the function  $\Psi_m$  by

$$\Psi_m(r) = \frac{e^{-2\Phi_m(r)}}{r^3}, \quad r > 0.$$

Let's combine Propositions 2.2.2 and 2.3.3. We get that for  $m$  large enough

$$|\lambda'_m(\xi_m)| \leq 2Kk_m \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \Psi_m(r). \quad (2.3.27)$$

Therefore it is enough to prove that there is an integer  $M$  and a constant  $K > 0$  such that

$$\forall m \geq M, \quad \|\Psi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{K}{k_m \sqrt{k_m}}. \quad (2.3.28)$$

First note that  $\Phi_m \geq 0$ . Therefore for any  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Psi_m(r) \leq r^{-1}$ , meaning that  $\Psi_m(r) \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow +\infty$ . Moreover, according to Lemma 2.3.3,  $-2\phi_m(r) = 2\alpha \ln(r) + O(1)$  as  $r \rightarrow 0$ . By combining it with the definition of  $\Psi_m$ , we deduce that  $\Psi_m(r) = O(r^{2\alpha-3})$  as  $r \rightarrow 0$ . Remembering that  $\alpha > 3/2$ , we conclude that  $\Psi_m(r) \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow 0$ . Hence we deduce that

$$\exists \tilde{r}_m > 0, \quad \|\Psi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})} = \Psi_m(\tilde{r}_m).$$

Furthermore,  $\tilde{r}_m$  is a critical point of  $\Psi_m$ . Therefore  $\Psi'_m(\tilde{r}_m) = 0$  implies that

$$\Phi'_m(\tilde{r}_m) = -\frac{3}{2\tilde{r}_m}. \quad (2.3.29)$$

Observing that  $\tilde{r}_m > 0$ , we get  $\Phi'_m(\tilde{r}_m) < 0$ . Remembering that  $\Phi_m$  is non decreasing on  $(\inf(I_m), +\infty)$ , we deduce that  $\tilde{r}_m < \inf(I_m)$ . Note that  $\inf(I_m)$  is solution of  $V_m(r) = E$ . Therefore Proposition 2.3.2 provides a constant  $K_+ > 0$  such that

$$\tilde{r}_m \leq \inf(I_m) \leq K_+ \sqrt{k_m}.$$

Now combine equations (2.3.29) and (2.3.24). It yields

$$\delta_m^2 \left( \frac{k_m}{\tilde{r}_m^2} + (\tilde{r}_m - \xi_m)^2 - E \right) = \frac{9}{4\tilde{r}_m^2}.$$

Hence we get

$$\frac{\delta_m^2 k_m - \frac{9}{4}}{\tilde{r}_m^2} = \delta_m^2 \left( E - (\tilde{r}_m - \xi_m)^2 \right) \leq \delta_m^2 E. \quad (2.3.30)$$

Remembering that  $\delta_m \sqrt{k_m} = \alpha$ , estimate (2.3.30) can be written as  $(\alpha^2 - 9/4) \tilde{r}_m^{-2} \leq E \alpha^2 k_m^{-1}$ . Moreover  $\alpha > 3/2$ , so there is a constant  $K_- > 0$  such that for  $m$  large enough,

$$\tilde{r}_m \geq K_- \sqrt{k_m}. \quad (2.3.31)$$

Recall that  $\Phi_m(\tilde{r}_m) \geq 0$  meaning that  $\|\Psi_m\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+)} = \Psi(\tilde{r}_m) \leq \tilde{r}_m^{-3}$ . Combine it with the estimate (2.3.31) and recall that  $\Psi_m(r) \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow 0$  and as  $r \rightarrow +\infty$ . It provides the estimate (2.3.28). Finally we combine the estimates (2.3.27) and (2.3.28) that proves the upper bound.

## 2.4 Velocity operator

In this section we assume that  $n \geq 4$ . The case  $n = 3$  could also be studied but according to remark 2, attained thresholds arise in that case. We apply the results of the previous section to derive some properties of the current operator.

We refer to Section 2.1 for notations. Remember that  $\mathcal{F}$  denotes the partial Fourier transform with respect to  $x_n$ . Let  $(r, \omega)$  be the cylindrical coordinates of  $\mathbb{R}^{n-1}$ , namely, for any  $x \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ ,

$r = \|x\|_2$  and  $\omega = r^{-1}x \in \mathbb{S}^{n-2}$ . In terms of these variables,  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-2}; r^{n-2}dr)$ . Let  $Y_{m,j}$ ,  $m \geq 0$ ,  $j \in \llbracket 1, N_m \rrbracket$  be the family of the spherical Harmonics. Remember that these functions form an orthonormal basis of solutions for the equation  $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-2}}u = \mu_m u$ ,  $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{S}^{n-2})$  and denote by  $v_{m,p}(\cdot, \xi)$  the eigenfunctions of  $H_m(\xi)$ ,  $m \geq 0$  and  $\xi \in \mathbb{R}$ .

We define the  $(m, j, p)$ -th generalized Fourier coefficient of  $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  as

$$\varphi_{m,j,p}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widehat{\varphi}(r, \omega, \xi) \overline{Y_{m,j}(\omega) v_{m,p}(r, \xi)} r^{n-2} dr d\omega, \quad \varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

Moreover for every  $m \geq 0$ ,  $j \in \llbracket 1, N_m \rrbracket$  and  $p \in \mathbb{N}$ , denote by  $\pi_{m,j,p}$  the orthogonal projection associated with the  $(m, j, p)$ -th harmonic and by  $\pi_p$ , the projection associated with all the harmonic that have  $p$  as level:

$$\pi_{m,j,p}(\varphi)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x_n} \varphi_{m,j,p}(\xi) Y_{m,j}(\omega) v_{m,p}(r, \xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\pi_p := \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \pi_{m,j,p}.$$

In light of Section 2.1, every  $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  is decomposed as

$$\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{+\infty} \pi_{m,j,p}(\varphi) = \sum_{p=1}^{+\infty} \pi_p(\varphi).$$

Moreover the Parseval theorem yields

$$\|\varphi\|_2^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{p=1}^{+\infty} \|\varphi_{m,j,p}\|_2^2. \quad (2.4.1)$$

Finally for any non-empty interval  $I \subset \mathbb{R}$ , denote by  $\mathbb{P}_I$  the spectral projection of  $H$  associated with  $I$ . A quantum state  $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$  is said to be concentrated in  $I$  if  $\mathbb{P}_I \varphi = \varphi$ . With reference to Section 2.1, this condition can be written as

$$\forall m \geq 0, \forall j \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, \forall p \geq 1, \quad \text{supp}(\varphi_{m,j,p}) \subset \lambda_{m,p}^{-1}(I). \quad (2.4.2)$$

Let  $x_n$  be the position operator defined as the multiplier by coordinate  $x_n$  in  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$(x_n f)x = x_n f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

and let  $x_n(t)$  be the Heisenberg variable defined as

$$x_n(t) := e^{it\mathcal{H}} x_n e^{-it\mathcal{H}}. \quad (2.4.3)$$

A quantum state  $\varphi$  is a solution of the Schrödinger equation (2.5). Thus  $\varphi(x, t) = e^{-itH} \varphi(x, 0)$  and we deduce by a straightforward calculation that

$$\left( x_n \varphi(\cdot, t) \mid \varphi(\cdot, t) \right) = \left( x_n(t) \varphi(\cdot, 0) \mid \varphi(\cdot, 0) \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4.4)$$

Therefore the time evolution of the position operator  $x_n$  is  $x_n(t)$  and its time derivative is the velocity, given by

$$\partial_t x_n(t) = ie^{it\mathcal{H}} [\mathcal{H}, x_n] e^{-it\mathcal{H}}. \quad (2.4.5)$$

We define the current operator  $J$  as the following self-adjoint operator acting on  $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{D}(x_n)$  such that the current carried by a state  $\varphi$  is  $(J\varphi \mid \varphi)$ .

$$J := -i[\mathcal{H}, x_n] = -2(i\partial_{x_n} + r). \quad (2.4.6)$$

Note that

$$\partial_t x_n(t) = -e^{it\mathcal{H}} J e^{-it\mathcal{H}}. \quad (2.4.7)$$

Since  $\mathcal{F}$  is an isometry, we observe that  $\mathcal{F}J\mathcal{F}^{-1} = -2(r - \xi)$ . Therefore the Feynman-Hellman formula (see equation (2.2.5)) yields

$$(J\pi_p\varphi \mid \pi_p\varphi) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \int_{\mathbb{R}} \lambda'_{m,p}(\xi) |\varphi_{m,j,p}(\xi)|^2 d\xi, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.4.8)$$

In Theorem 2.3, we will combine this identity with Theorem 2.2 to control the current operator. We define for each  $M \in \mathbb{N}$  and each  $p \in \mathbb{N}$ :

$$X_{I,M,p}^- := \{ \varphi \in \text{Ran}(\mathbb{P}_I) \cap \text{Ran}(\pi_p), \forall m \geq M+1, \forall j \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, \varphi_{m,j,p} = 0 \},$$

$$X_{I,M,p}^+ := \{ \varphi \in \text{Ran}(\mathbb{P}_I) \cap \text{Ran}(\pi_p), \forall m \leq M, \forall j \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, \varphi_{m,j,p} = 0 \},$$

$$X_{I,M}^- := \bigoplus_{p=1}^{+\infty} X_{I,M,p}^-;$$

$$X_{I,M}^+ := \bigoplus_{p=1}^{+\infty} X_{I,M,p}^+.$$

Note that  $\text{Ran}(\mathbb{P}_I) = X_{I,M}^- \oplus X_{I,M}^+$  and that these spaces are  $\mathcal{H}$  invariant.

### Théorème 2.3

Let  $I \subset \sigma(H)$  be a non-empty interval such that  $I \cap \{E_p, p \geq 1\} = \emptyset$ .

$$1. \forall M \geq 0, \exists C^- > 0, \forall \varphi \in X_{I,M}^-, \quad |(J\varphi \mid \varphi)| \geq C^- \|\varphi\|_2^2$$

$$2. \exists C^+, \exists M_0 \geq 0, \forall M \geq M_0, \forall \varphi \in X_{I,M}^+, \quad |(J\varphi \mid \varphi)| \leq \frac{C^+}{\sqrt{k_{M+1}}} \|\varphi\|_2^2.$$

**Proof:** First observe that  $I$  is bounded and recall that  $E_p \rightarrow +\infty$  as  $p \rightarrow +\infty$ . So  $P_I := \{p \in \mathbb{N}, E_p \geq \sup(I)\}$  is a finite set. Moreover, remembering that

$$\inf \{ \lambda_{m,p}(\xi) \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R} \} = E_p, \quad m \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N},$$

we get that  $P_I = \{p \in \mathbb{N}, \exists m \geq 0, I \cap \lambda_{m,p}(\mathbb{R}) \neq \emptyset\}$ . Moreover notice that for every  $p \in P_I$  and every  $m \in \mathbb{N}$ ,  $I \cap \lambda_{m,p}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ . Therefore it is enough to prove the theorem for  $\varphi \in X_{I,m,p}^\pm$  for a certain  $p \in P_I$  fixed. We simplify the notations by omitting the index  $p$ .

**Proof of the first part.** Let  $M \geq 0$  and let  $\varphi \in X_{I,M}^-$ . Note that  $\varphi = \pi_p\varphi$ . Therefore, according to the embedding (2.4.2) and to the identity (2.4.8),

$$(J\varphi \mid \varphi) = \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{N_m} \int_{\lambda_m^{-1}(I)} \lambda'_m(\xi) |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi.$$

Moreover  $E_p \notin \bar{I}$ , thus for every  $m \in \llbracket 0, M \rrbracket$ ,  $\lambda_m^{-1}(I)$  is bounded. Therefore, Proposition 2.2.2 states that for every  $m \in \llbracket 0, M \rrbracket$ ,  $D_m := \inf \{ \lambda'_m(\xi), \lambda_m(\xi) \in I \} > 0$ . Thus  $C^- := \inf \{ D_m, m \in \llbracket 0, M \rrbracket \} > 0$ . Hence

$$| ( J\varphi \mid \varphi ) | \geq C^- \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{N_m} \int_{\lambda_m^{-1}(I)} |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.4.9)$$

Remember that  $\varphi_{m,j}$  is localized in  $\lambda_m^{-1}(I)$  (see the embedding (2.4.2)). Therefore,

$$\int_{\lambda_m^{-1}(I)} |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi_{m,j}\|_2^2.$$

Hence according to the Parseval's identity (2.4.1),

$$\sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^{N_m} \int_{\lambda_m^{-1}(I)} |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi\|_2^2. \quad (2.4.10)$$

We combine it with the estimate (2.4.9) that provides the first statement of the Theorem.

**Proof of the second part.** Let  $\varphi \in X_{I,M}^+$ . We prove in the same way as for the first part that

$$( J\varphi \mid \varphi ) = \sum_{m=M+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \int_{\lambda_m^{-1}(I)} \lambda'_m(\xi) |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi.$$

Therefore, according to Theorem 2.2, there exist  $M_0 \geq 0$  and  $C_+ > 0$  such that for every  $M \geq M_0$ ,

$$| ( J\varphi \mid \varphi ) | \leq \sum_{m=M+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N_m} \frac{C_+}{\sqrt{k_m}} \int_{\lambda_m^{-1}(I)} |\varphi_{m,j}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.4.11)$$

Observe that for  $m \geq M+1$ ,  $C_+ k_m^{-1/2} \leq C_+ k_{M+1}^{-1/2}$ . We combine it with the estimate (2.4.11) and with the Parseval's identity (2.4.1) that yields

$$| ( J\varphi \mid \varphi ) | \leq \frac{C_+}{\sqrt{k_{M+1}}} \|\varphi\|_2^2. \quad \blacksquare$$

**Remark 2.4.1:** Remember that  $k_M \rightarrow +\infty$  as  $M \rightarrow +\infty$ . According to Theorem 2.3, for every  $\varepsilon > 0$  and for any bounded energy interval  $I \subset \sigma(H)$ , there is some quantum state  $\varphi_\varepsilon \in \text{Ran}(\mathbb{P}_I)$  such that  $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$  and  $| ( J\varphi_\varepsilon \mid \varphi_\varepsilon ) | \leq \varepsilon$ , even if  $\bar{I}$  is away from the Landau levels.

---

# ANNEXE

---

## A Rappels de théorie spectrale

Dans ce qui suit,  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert et  $P$  est un opérateur agissant sur  $\mathcal{H}$ . Son spectre est noté  $\sigma(P)$  et son spectre essentiel,  $\sigma_{ess}(P)$ . Nous rappelons ici quelques résultats de théorie spectrale sur les opérateurs auto-adjoints permettant d'établir des estimations sur la localisation de son spectre.

Le principe du min-max suivant permet de relier les quotients de Rayleigh d'un opérateur auto-adjoint avec ses valeurs propres [Ree78, Théorème XIII.1].

### Proposition A.1 (Principe du min-max)

Soit  $P$ , un opérateur auto-adjoint borné inférieurement de domaine  $\mathcal{D}(P)$  et de spectre  $\sigma(P)$ . Nous définissons le  $n$ -ième quotient de Rayleigh par

$$\lambda_n := \sup_{\substack{S \subset \mathcal{D}(P), \\ \dim(S) = n}} \inf_{\substack{\varphi \in S^\perp, \\ \|\varphi\| = 1}} (P\varphi | \varphi).$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'une des deux configurations suivante est vérifiée :

- ☞ L'opérateur  $P$  possède au moins  $n$  valeurs propres sous son spectre essentiel et  $\lambda_n$  est la  $n$ -ième valeur propre.
- ☞ pour tout  $p \geq n$ ,  $\lambda_p = \inf(\sigma_{ess}(P))$  et  $P$  possède au plus  $n - 1$  valeurs propres sous son spectre essentiel.

Pour minimiser les quotients de Rayleigh, nous construisons des quasi-modes. Bien qu'il soit suffisant que ces fonctions soient dans le domaine de forme, lorsqu'elles sont dans le domaine de l'opérateur, le théorème spectral suivant fournit un contrôle plus précis.

### Théorème A.1 (Théorème spectral)

Soit  $P$ , un opérateur auto-adjoint borné inférieurement de domaine  $\mathcal{D}(P)$  et de spectre  $\sigma(P)$ . Alors, la distance d'une valeur  $\lambda$  au spectre de  $P$  est contrôlée par

$$d(\lambda, \sigma(P)) \leq \frac{\|(P - \lambda)\varphi\|}{\|\varphi\|}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{D}(P). \quad (\text{A.1})$$

Lorsque nous étudions des opérateurs fibrés, nous considérons des opérateurs dépendant d'un paramètre, en particulier, la dépendance des valeurs propres par rapport au paramètre. La proposition suivante [Mou88] permet de calculer la dérivée de ces valeurs propres par rapport au paramètre.

**Proposition A.2** (Formule de Feynman Hellmann)

Soit  $(P(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}}$ , une famille d'opérateurs auto-adjoints positifs sur  $\mathcal{H}$  dont le domaine,  $\mathcal{D}$ , ne dépend pas de  $\xi$  et dont le spectre est constitué de valeurs propres simple  $\lambda_p(\xi)$ . Pour tout  $\xi$ , nous notons  $u_p(\xi)$  un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $\lambda_p(\xi)$  et nous supposons que  $(u(\xi) | u(\xi_0)) \rightarrow 1$  lorsque  $\xi \rightarrow \xi_0$ .

Nous supposons que la famille  $(P(\xi))$  est différentiable par rapport à  $\xi$  et nous notons  $\partial_\xi P(\xi)$  sa différentielle. Alors les fonction  $\lambda_p$  sont dérivables et leurs dérivées sont données par :

$$\lambda'_p(\xi_0) = ( \partial_\xi P(\xi) u_p(\xi) | u_p(\xi) ).$$

## B La réalisation de Neumann du Laplacien magnétique dans un domaine à bord

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un ouvert à bord et soit  $\mathbf{A}$ , un potentiel magnétique de classe  $\mathcal{C}^\infty$  défini sur  $\Omega$ . Soit  $q$ , la forme quadratique définie par

$$q(u) = \int_{\Omega} |(i\nabla + \mathbf{A})u|^2 d\lambda, \quad (\text{B.1})$$

initialement définie sur  $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$  puis étendue sur le domaine de forme

$$\mathcal{D}(q) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega), (i\nabla + \mathbf{A})u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Cette forme quadratique est associée à la forme bilinéaire  $\varphi$  donnée par

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega} (i\nabla + \mathbf{A})u \cdot \overline{(i\nabla + \mathbf{A})v} d\lambda, \quad (\text{B.2})$$

La réalisation de Neumann sur  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  du laplacien magnétique  $(i\nabla + \mathbf{A})^2$  est définie comme l'extension de Friedrichs de la forme quadratique  $q$ .

**Proposition B.1**

L'opérateur  $\mathcal{H}$  agit sur les fonctions de son domaine comme l'opérateur différentiel

$$(i\nabla + \mathbf{A})^2.$$

Son domaine est donné par

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) = \left\{ u \in \mathcal{D}(q), (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

où  $\mathbf{n}$  est une normale unitaire à  $\partial\Omega$ .

**Remarque B.1 :** La condition au bord  $\mathbf{n} \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u|_{\partial\Omega} = 0$  est appelée condition de Neumann magnétique. Si le potentiel magnétique vérifie

$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

alors cette condition au bord coïncide avec la condition au bord de Neumann classique :  $\mathbf{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Démonstration :** Nous rappelons que la forme bilinéaire  $\varphi$  est donnée par la formule (B.2).

Par définition de la forme bilinéaire associé à un opérateur, l'opérateur  $\mathcal{H}$  vérifie

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega} (\mathcal{H}u) \cdot \bar{v}, \quad v \in \mathcal{D}(q), \quad u \in \mathcal{D}(H). \quad (\text{B.3})$$

La formule de Green-Riemann fournit pour  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  et  $v \in \mathcal{D}(q)$

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega} (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \cdot \bar{v} + \int_{\partial\Omega} (n \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u) \cdot \bar{v}. \quad (\text{B.4})$$

En particulier,

$$\Phi_u(v) := \varphi(u, v) - \int_{\Omega} (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \cdot \bar{v}, \quad v \in \mathcal{D}(q), \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$$

ne dépend que de la valeur de  $v$  sur  $\partial\Omega$ . Ainsi, pour  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  et  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ,  $\Phi_u(v) = 0$ , c'est-à-dire

$$\varphi(u, v) = \int_{\Omega} (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \cdot \bar{v}.$$

Par suite, au sens des distributions,

$$\mathcal{H}u = (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \quad (\text{B.5})$$

et le domaine de l'opérateur  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ , vérifie

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \left\{ u \in \mathcal{D}(q), \quad (i\nabla + \mathbf{A})^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}.$$

Nous combinons la formule de Green-Riemann (B.4) avec la valeur de  $\mathcal{H}$  au sens des distribution (B.5). Nous en déduisons que pour tout  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  et tout  $v \in \mathcal{D}(q)$ ,  $\Phi_u(v) = 0$ , c'est-à-dire

$$\int_{\partial\Omega} (n \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u) \cdot \bar{v} = 0.$$

Ainsi  $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$  vérifie la condition au bord  $n \cdot (i\nabla + \mathbf{A})u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . ■

## C Analyse complexe

### Définition 1 (Fonction holomorphe)

Soit  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et soit  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction complexe. On dit que la fonction  $f$  est holomorphe si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\partial_{\bar{z}_k} f = 0$ .

Il découle de cette définition que si une fonction de  $n$  variables est holomorphe, alors elle est holomorphe par rapport à chacune de ses variables. Le théorème d'Hartogs suivant assure que la réciproque est vraie.

### Théorème C.1 (Théorème d'Hartogs)

Soit  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et soit  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , une fonction complexe. Si la fonction  $f$  est holomorphe par rapport à chaque variable, à savoir si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , fixé, et pour tout nombres complexes  $z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n$  fixés, la fonction

$$z \mapsto f(z_1, \dots, z_{k-1}, z, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

est holomorphe sur l'ouvert-tranche

$$\Omega \cap \{z_1\} \times \dots \times \{z_{k-1}\} \times \mathbb{C} \times \{z_{k+1}\} \times \{z_n\},$$

alors la fonction  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .

**Remarque C.1 :** Nous allons voir que ce théorème est faux dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Soit  $f$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^4 + y^4} & \text{lorsque } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , fixé, les fonctions  $x \mapsto f(x, a)$  et  $y \mapsto f(a, y)$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}$ . L'hypothèse d'analyticité séparée du théorème d'Hartogs est alors vérifiée. Cependant cette fonction n'est pas localement bornée au voisinage de 0. En effet,  $f(x, x) = (2x^2)^{-1}$ .

Pour définir les résonances, nous avons utilisé le théorème de Fredholm analytique suivant [Zwo12, Annexe D].

### Théorème C.2 (Théorème de Fredholm analytique)

Soit  $\Omega$ , un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et soit  $z \mapsto T(z)$ , une famille finiment méromorphe d'opérateurs compacts agissant sur un espace de Banach séparable. Supposons qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que  $I + T(z_0)$  soit inversible. Alors l'application  $z \mapsto (I + T(z))^{-1}$  a un sens en tant que famille finiment méromorphe d'opérateurs sur l'ouvert  $\Omega$ . En particulier, l'ensemble des pôles est discret dans  $\Omega$ .

## D Familles holomorphe d'opérateurs

Une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est holomorphe si elle vérifie la définition 1. Dans ce cas, nous disons qu'elle est holomorphe au sens classique.

### Définition 2 (Fonction holomorphe par rapport à un paramètre)

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , soit  $\mathcal{U}$ , un ouvert de  $\mathbb{C}$  et soit  $u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ . On dit que  $u$  est holomorphe au voisinage de  $x_0 \in \mathcal{U}$  si et seulement si pour tout  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , l'application  $x \mapsto (u(x) \mid f)$  est holomorphe au voisinage de  $x_0$ .

**Définition 3** (Fonction holomorphe à valeur opérateur)

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , soit  $\mathcal{U}$ , un ouvert de  $\mathbb{C}$  et soit  $T$ , une fonction définie sur  $\mathcal{U}$  à valeur dans l'ensemble des opérateurs agissant sur  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . On dit que  $u$  est holomorphe au voisinage de  $x_0 \in \mathcal{U}$  si et seulement si pour tout  $f \in \mathcal{D}(u(x))$  et tout  $g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , l'application  $x \mapsto (u(x)f \mid g)$  est holomorphe au voisinage de  $x_0$ .

## E Opérateurs fibrés

Cette partie est issu du chapitre XIII.16 du livre de Reed et Simon [Ree78]. Soit  $\mathcal{H}'$ , un espace de Hilbert séparable et soit  $(M, d\mu)$ , un espace mesuré. Nous définissons l'espace  $\mathcal{H}$  par :

$$\mathcal{H} := \int_M^{\oplus} \mathcal{H}' d\mu := \mathbf{L}^2(M, d\mu; \mathcal{H}').$$

Une fonction  $\xi \in M \mapsto H(\xi)$  à valeur dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoint sur  $\mathcal{H}'$  est dite mesurable si les fonctions

$$\xi \in M \mapsto \left( \varphi \mid (H(\xi) + i)^{-1} \varphi \right), \quad \varphi \in \mathcal{H}'$$

sont mesurables.

Dans le cas où cette fonction est mesurable, nous définissons un opérateur  $\mathcal{H}$ , agissant sur  $\mathcal{H}$  par

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{H}) := \{ \varphi \in \mathcal{H}, \varphi(\xi) \in \mathcal{D}(H(\xi)) \} \\ (\mathcal{H}\varphi)(\xi) := H(\xi) \varphi(\xi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}). \end{cases}$$

Nous disons alors que  $\mathcal{H}$  est un opérateur fibré et nous écrivons

$$\mathcal{H} = \int_M^{\oplus} H(\xi) d\xi.$$

Le théorème suivant permet de décrire le spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}$  à partir des spectre des opérateurs  $H(\xi)$ .

### Théorème E.1

Soit  $\mathcal{H}$ , un opérateur fibré donné par :

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(\xi) d\xi.$$

Nous supposons que  $\xi \mapsto H(\xi)$  est mesurable et que  $H(\xi)$  est autoadjoint pour tout  $\xi$ .

1. L'opérateur  $\mathcal{H}$  est auto-adjoint.
2. Pour toute fonction  $F$  mesurable,

$$F(\mathcal{H}) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} F(H(\xi)) d\xi.$$

3.  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{H}$  si et seulement si

$$\mu(\{\xi, \lambda \text{ est une valeur propre de } H(\xi)\}) > 0.$$

4.  $\lambda$  est une valeur spectrale de  $\mathcal{H}$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mu(\{\xi, \sigma(H(\xi)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset\}) > 0.$$

Nous déduisons de ce théorème la proposition suivante qui décrit la structure du spectre de certains opérateurs fibré.

### Proposition E.1

Soit  $\mathcal{H}$ , un opérateur fibré donné par :

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(\xi) d\xi.$$

Nous supposons que pour tout  $\xi$ ,  $\sigma(H(\xi)) = \sigma_p(H(\xi)) = \{\lambda_p(\xi), p \geq 1\}$ , avec  $\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \dots$ .

Nous supposons de plus que pour tout  $p \geq 1$ , la fonction  $\xi \mapsto \lambda_p(\xi)$  est analytique et non constante sur  $\mathbb{R}$ . Alors le spectre de  $\mathcal{H}$  est absolument continu et est donné par :

$$\sigma(\mathcal{H}) = \bigcup_{p \geq 1} \overline{\lambda_p(\mathbb{R})} \quad (\text{E.1})$$

**Démonstration :** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et tout  $p \geq 1$ , le principe des zéros isolés implique que l'une des configurations suivantes est vérifiée :

- ☞  $\{\xi \in \mathbb{R}, \lambda = \lambda_p(\xi)\}$  est discret,
- ☞  $\{\xi \in \mathbb{R}, \lambda = \lambda_p(\xi)\} = \mathbb{R}$ .

Comme les fonction  $\lambda_p$  ne sont pas constantes, pour tout  $p$ , l'ensemble  $\{\xi \in \mathbb{R}, \lambda = \lambda_p(\xi)\}$  est discret. Ainsi l'ensemble  $\{\xi, \lambda \text{ est une valeur propre de } H(\xi)\}$  est de mesure nulle. En effet,

$$\{\xi, \lambda \text{ est une valeur propre de } H(\xi)\} = \bigcup_{p \geq 1} \{\xi \in \mathbb{R}, \lambda = \lambda_p(\xi)\}.$$

Nous utilisons le théorème E.1 pour calculer le spectre de  $\mathcal{H}$ . Le point 3 assure que  $\mathcal{H}$  ne possède pas de valeurs propres et du point 4 nous déduisons l'égalité (E.1). ■



---

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [Agm82] S. AGMON : *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations : Bounds on Eigenfunctions of N-Body Schrödinger Operations. (MN-29)*. Princeton University Press, 1982.
- [Agu71] J. AGUILAR et J. M. COMBES : A class of analytic perturbations for one-body schrödinger hamiltonians. *Comm. Math. Phys.*, 22(4):269–279, 1971.
- [Akk98] E. AKKERMANS, J. E. AVRON, R. NAREVICH et R. SEILER : Boundary conditions for bulk and edge states in quantum hall systems. *Eur. Phys. J. B*, 1, 1998.
- [AS09] W.K. ABOU SALEM, J. FAUPIN, J. FRÖHLICH et I.M. SIGAL : On the theory of resonances in non-relativistic quantum electrodynamics and related models. *Advances in Applied Mathematics*, 43(3):201 – 230, 2009.
- [Asl00] A. ASLANYAN, L. PARNOVSKI et D. VASSILIEV : Complex resonances in acoustic waveguides . *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 53(3):429–447, 09 2000.
- [Ast07] M. ASTABURUAGA, P. BRIET, V. BRUNEAU, C. FERNANDEZ et G. D. RAIKOV : Dynamical resonances and ssf singularities for a magnetic schrödinger operator. *Serdica Mathematical Journal*, 34 (2008):179–218, 11 2007.
- [Avr78] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON : Schrödinger operators with magnetic fields. i. general interactions. *Duke Math. J.*, 45(4):847–883, 12 1978.
- [Bal14] M. BALLESTEROS, J. FAUPIN, J. FRÖHLICH et B. SCHUBNEL : Quantum electrodynamics of atomic resonances. *Communications in Mathematical Physics*, 337, 01 2014.
- [Bon07] J. F. BONY, V. BRUNEAU et G. D. RAIKOV : Resonances and spectral shift function near the Landau levels. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(2):629–671, 2007.
- [Bon11] J.-F. BONY, V. BRUNEAU et G. D. RAIKOV : Counting function of characteristic values and magnetic resonances. *Communications in Partial Differential Equations*, 39, 09 2011.
- [Bon12] V. BONNAILLIE-NOËL : Harmonic oscillators with Neumann condition of the half-line. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11(6):2221–2237, 2012.
- [Bon17] V. BONNAILLIE-NOËL, F. HÉRAU et N. RAYMOND : Holomorphic extension of the de Gennes function. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 24(2):225–234, 2017.
- [Bri08] P. BRIET, G. D. RAIKOV et É. SOCCORSI : Spectral properties of a magnetic quantum hamiltonian on a strip. *Asymptotic Analysis*, 58:127–155, 03 2008.
- [Bri09] P. BRIET, P. D. HISLOP, G. D. RAIKOV et É. SOCCORSI : Mourre estimates for a 2D magnetic quantum Hamiltonian on strip-like domains. *In Spectral and scattering theory for quantum magnetic systems*, volume 500 de *Contemp. Math.*, pages 33–46. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

- [Bru11] L. BRUNEAU, J. DEREZINSKI et V. GEORGESCU : Homogeneous schrödinger operators on half-line. *Annales Henri Poincaré*, 12, 2011.
- [Bru14] V. BRUNEAU, P. MIRANDA et G. D. RAIKOV : Dirichlet and Neumann eigenvalues for half-plane magnetic Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.*, 26(2):1450003, 23, 2014.
- [Bru15a] V. BRUNEAU et N. POPOFF : On the ground state energy of the Laplacian with a magnetic field created by a rectilinear current. *J. Funct. Anal.*, 268(5):1277–1307, 2015.
- [Bru15b] V. BRUNEAU et D. SAMBOU : Counting function of magnetic resonances for exterior problems. *Annales Henri Poincaré*, 17, 05 2015.
- [Bru18a] V. BRUNEAU et P. MIRANDA : Threshold singularities of the spectral shift function for a half-plane magnetic Hamiltonian. *J. Funct. Anal.*, 274(9):2499–2531, 2018.
- [Bru18b] V. BRUNEAU, P. MIRANDA et N. POPOFF : Resonances near thresholds in slightly twisted waveguides. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(11):4801–4812, 2018.
- [Bru19] V. BRUNEAU, P. MIRANDA, N. POPOFF et D. PARRA : Eigenvalue and Resonance Asymptotics in perturbed periodically twisted tubes : Twisting versus Bending. mars 2019.
- [Bru20] V. BRUNEAU et G. D. RAIKOV : Threshold singularities of the spectral shift function for geometric perturbations of magnetic hamiltonians. *Annales Henri Poincaré*, 03 2020.
- [Che19] L. CHESNEL et S. NAZAROV : Exact zero transmission during the fano resonance phenomenon in non symmetric waveguides. 07 2019.
- [Dau93] M. DAUGE et B. HELFFER : Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators. *J. Differential Equations*, 104(2):243–262, 1993.
- [De 99] S. DE BIÈVRE et J. V. PULÉ : Propagating edge states for a magnetic Hamiltonian. *Math. Phys. Electron. J.*, 5:Paper 3, 17, 1999.
- [Del17] B. DELOURME, S. FLISS, P. JOLY et E. VASILEVSKAYA : Trapped modes in thin and infinite ladder like domains. part 1 : Existence results. *Asymptotic Analysis*, 103:103–134, 06 2017.
- [Dim99] M. DIMASSI et J. SJÖSTRAND : *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Dim02] M. DIMASSI : Resonances for slowly varying perturbations of a periodic schrödinger operator. *Canadian Journal of Mathematics*, 54, 10 2002.
- [Dim03] M. DIMASSI et M. ZERZERI : A local trace formula for resonances of perturbed periodic Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 198(1):142–159, 2003.
- [Ens83] V. ENSS : Asymptotic observables on scattering states. *Comm. Math. Phys.*, 89(2):245–268, 1983.
- [Exn99] P. EXNER, A. JOYE et H. KOVAŘIK : Edge currents in the absence of edges. *Physics Letters A*, 264(2-3):124–130, décembre 1999.
- [Exn18] P. EXNER, T. KALVODA et M. TUŠEK : A geometric iwatsuka type effect in quantum layers. *Journal of Mathematical Physics*, 59(4):042105, 2018.
- [Fau08] J. FAUPIN : Resonances of the confined hydrogen atom and the lamb–dicke effect in nonrelativistic qed. *Annales Henri Poincare - ANN HENRI POINCARE*, 9:743–773, 06 2008.
- [Fer04] C. FERNANDEZ et G. D. RAIKOV : On the singularities of the magnetic spectral shiftfunction at the landau levels. *Annales Henri Poincare - ANN HENRI POINCARE*, 5:381–403, 04 2004.
- [Fig96] A. FIGOTIN et P. KUCHMENT : Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. i. scalar model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(1):68–88, 1996.

- [Fil06] N. FILONOV et A. PUSHNITSKI : Spectral asymptotics of pauli operators and orthogonal polynomials in complex domains. *Communications in Mathematical Physics*, 264(3):759–772, 6 2006.
- [Fli09] S. FLISS : *Analyse mathématique et numérique de problèmes de propagation des ondes dans des milieux périodiques infinis localement perturbés*. Theses, Ecole Polytechnique X, mai 2009.
- [Fou10] S. FOURNAIS et B. HELFFER : *Spectral Methods in Surface Superconductivity*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Boston, 2010.
- [Fro97] R. FROESE : Asymptotic distribution of resonances in one dimension. *Journal of Differential Equations*, 137(2):251 – 272, 1997.
- [Frö00] J. FRÖHLICH, G. M. GRAF et J. WALCHER : On the extended nature of edge states of quantum hall hamiltonians. 1(3):405–442, 2000.
- [Geř97] V. A. GEĀLER et M. M. SENATOROV : The structure of the spectrum of the Schrödinger operator with a magnetic field in a strip, and finite-gap potentials. *Mat. Sb.*, 188(5):21–32, 1997.
- [Gen20] P. GENIET : On a quantum Hamiltonian in a unitary magnetic field with axisymmetric potential. *J. Math. Phys.*, 61(8):082104, 23, 2020.
- [Gér90] C. GÉRARD : Resonance theory for periodic schrödinger operators. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 118(1):27–54, 1990.
- [Gér98] C. GÉRARD et F. NIER : The Mourre theory for analytically fibered operators. *J. Funct. Anal.*, 152(1):202–219, 1998.
- [Gof14] M. GOFFENG, A. KACHMAR et M. SUNDQVIST : Clusters of eigenvalues for the magnetic laplacian with robin condition. *Journal of Mathematical Physics*, 57, 06 2014.
- [Hal82] B. I. HALPERIN : Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B*, 25:2185–2190, Feb 1982.
- [Hel86] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND : Résonances en limite semi-classique. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 24-25:1–228, 1986.
- [Hel87] B HELFFER et A MARTINEZ : Comparaison entre les diverses notions de résonances. *Helvetica Physica Acta*, 1987.
- [Hel88] B. HELFFER : *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Hel96] B. HELFFER et A. MOHAMED : Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. *J. Funct. Anal.*, 138(1):40–81, 1996.
- [Hel01] B. HELFFER et A. MORAME : Magnetic bottles in connection with superconductivity. *J. Funct. Anal.*, 185(2):604–680, 2001.
- [His08] P. D. HISLOP et É. SOCCORSI : Edge currents for quantum hall systems i : One-edge, unbounded geometries. *Reviews in Mathematical Physics*, 20(01):71–115, 2008.
- [His15] P. D. HISLOP et É. SOCCORSI : Edge states induced by Iwatsuka Hamiltonians with positive magnetic fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 422(1):594–624, 2015.
- [His16] P. D. HISLOP, N. POPOFF et É. SOCCORSI : Characterization of bulk states in one-edge quantum Hall systems. *Ann. Henri Poincaré*, 17(1):37–62, 2016.
- [Hor02] K. HORNBERGER et U. SMILANSKY : Magnetic edge states. *Physics Reports*, 367(4):249 – 385, 2002.

- [Hun86] W. HUNZIKER : Distortion analyticity and molecular resonance curves. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, 45(4):339–358, 1986.
- [Ivr18] V. IVRII : *Microlocal Analysis, Sharp Spectral Asymptotics and Applications*. Available online on the author's website, 2018.
- [Iwa85] A. IWATSUKA : Examples of absolutely continuous Schrödinger operators in magnetic fields. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 21(2):385–401, 1985.
- [Kat66] T. KATO : *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [Kuc93] P. KUCHMENT : *Floquet theory for partial differential equations*, volume 60 de *Operator Theory :Advances and Applications*. Springer-Birkhäuser Basel, 1993.
- [Lan77] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ : *Quantum Mechanics (Third Edition, Revised and Enlarged)*. Pergamon, third edition, revised and enlarged édition, 1977.
- [Lax64] P. D. LAX et R. S. PHILLIPS : Scattering theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70(1):130–142, 01 1964.
- [Mân97] M. MÂNTOIU et R. PURICE : Some propagation properties of the Iwatsuka model. *Communications in Mathematical Physics*, 188(3):691–708, Oct 1997.
- [Mou88] E.H. I. MOURAD et Z. RUIMING : On the Hellmann-Feynman theorem and the variation of zeros of certain special functions. *Advances in Applied Mathematics*, 9(4):439 – 446, 1988.
- [Naz10] S. NAZAROV : Opening of a gap in the continuous spectrum of a periodically perturbed waveguide. *Mathematical Notes*, 87:738–756, 06 2010.
- [Olv97] F. W. J. OLVER : *Asymptotics and special functions*. AKP Classics. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York ; MR0435697 (55 #8655)].
- [Pop12] N. POPOFF : *On the spectrum of the magnetic Schrödinger operator in a dihedral domain*. Theses, Université Rennes 1, novembre 2012.
- [Pop13] N. POPOFF : The model magnetic laplacian on wedges. *Journal of Spectral Theory*, 5, 09 2013.
- [Pop15] N. POPOFF : The model magnetic Laplacian on wedges. *J. Spectr. Theory*, 5(3):617–661, 2015.
- [Pop16] N. POPOFF et É. SOCCORSI : Limiting absorption principle for the magnetic Dirichlet Laplacian in a half-plane. *Comm. Partial Differential Equations*, 41(6):879–893, 2016.
- [Pop18] N. POPOFF et P. MIRANDA : Band functions of iwatsuka models : power-like and flat magnetic fields. 2018.
- [Pop19] N. POPOFF : Magnetic fields and boundary conditions in spectral and asymptotic analysis. *arXiv : Spectral Theory*, 2019.
- [Pus] A. PUSHNITSKI et G. ROZENBLUM.
- [Rai92] G. D. RAIKOV : Eigenvalue asymptotics for the schrödinger operator with perturbed periodic potential. *Inventiones Mathematicae*, 110:75–93, 12 1992.
- [Rai01] G. D. RAIKOV et M. DIMASSI : Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields. *Cubo Mat. Educ.*, 3(2):317–391, 2001.
- [Rai02] G. D. RAIKOV et S. WARZEL : Quasi-classical versus non-classical spectral asymptotics for magnetic schrödinger operators with decreasing electric potentials. *Reviews in Mathematical Physics*, 14, 01 2002.

- [Rai08] G. D. RAIKOV : On the spectrum of a translationally invariant Pauli operator. *In Spectral theory of differential operators*, volume 225 de *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 157–167. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Ree78] M. REED et B. SIMON : *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [Shn57] I.E. SHNOL' : On the behaviour of the eigenfunctions of Schrödinger's equation. *Mat. Sb., Nov. Ser.*, 42:273–286, 1957. (in Russian).
- [Sim76] B. SIMON : The bound state of weakly coupled schrödinger operators in one and two dimensions. *Annals of Physics*, 97(2):279 – 288, 1976.
- [Sim78] B. SIMON : Resonances and complex scaling : A rigorous overview. *International Journal of Quantum Chemistry*, 14(4):529–542, 1978.
- [SJ63] D. SAINT-JAMES et P.-G. DE GENNES : Onset of superconductivity in decreasing fields. *Physics Letters*, 7(5):306 – 308, 1963.
- [SJ69] D. SAINT-JAMES, G. SARMA et E.-J. THOMAS : Type ii superconductivity. 1969.
- [Soc01] É. SOCCORSI : Analyticity and asymptotic properties of the Maxwell operator's dispersion curves. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(3):387–406, 2001.
- [Vaï68] B. R. VAÏNBERG : On the analytical properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 6(2):241–273, feb 1968.
- [Wan92] X. P. WANG : Barrier resonances in strong magnetic fields. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(9-10):1539–1566, 1992.
- [Yaf03] D. YAFAEV : A particle in a magnetic field of an infinite rectilinear current. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 6(3):219–230, 2003.
- [Yaf08] D. YAFAEV : On spectral properties of translationally invariant magnetic Schrödinger operators. *Annales Henri Poincaré*, 9(1):181–207, Feb 2008.
- [Zwo12] M. ZWORSKI : *Semiclassical analysis*, volume 138 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Soc., 2012.