



Étude et amélioration des méthodologies de couplage aérothermique fluide-structure

Rocco Moretti

► To cite this version:

Rocco Moretti. Étude et amélioration des méthodologies de couplage aérothermique fluide-structure. Matériaux. Université Paris sciences et lettres, 2019. Français. NNT : 2019PSLEM076 . tel-02992558v2

HAL Id: tel-02992558

<https://hal.science/tel-02992558v2>

Submitted on 22 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à MINES ParisTech

**Étude et amélioration des méthodologies de couplage
aérothermique fluide-structure**

Soutenue par

Rocco MORETTI

Le 04 décembre 2019

École doctorale n°621

**Ingénierie des Systèmes,
Matériaux, Mécanique,
Énergétique**

Spécialité

Mécanique

Composition du jury :

Alain DEGIOVANNI

Professeur émérite, Université de Lorraine *Président du jury*

Khalil EL KHOURY

Professeur, Université Libanaise *Rapporteur*

Pénélope LEYLAND

Dr es-Sciences, École Polytechnique Fédérale de Lausanne *Rapporteur*

David RYCKELYNCK

Professeur, Mines ParisTech *Examineur*

Frédéric FEYEL

Directeur de Recherche, SafranTech *Directeur de thèse*

Marc-Paul ERRERA

Maître de Recherche, ONERA *Maître de thèse*

TITRE

Étude et amélioration des méthodologies de couplage aérothermique fluide-structure

© Décembre 2019

CONTACT

✉ rocco.moretti@onera.fr

REMERCIEMENTS

*Coming together is a beginning ;
keeping together is progress ;
working together is success.*

— Henry Ford

Ces travaux de thèse n'auraient pas pu aboutir sans l'aide de nombreuses personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler.

Je voudrais d'abord remercier Frédéric Feyel, mon directeur de thèse, d'avoir accepté de diriger cette thèse bien que son agenda soit déjà bien rempli. Grâce à son esprit critique et sa capacité de voir mes travaux dans leur globalité, il m'a donné de très précieux conseils et de nombreuses pistes à suivre.

Un grand remerciement va à Marc Errera, mon encadrant ONERA, qui m'a suivi jour après jour. Grâce à lui j'ai pu développer mon expertise dans l'aérothermique et affiner mon esprit critique. J'ai beaucoup apprécié les moments de discussion scientifique agrémentés de quelques passages davantage philosophiques. Qui connaît Marc sait bien de quoi je parle.

Je voudrais également remercier Marc Lazareff et Tristan Soubrié avec lesquels j'ai eu le plaisir de travailler.

Ayant travaillé sur un sujet multiphysique, j'ai pu interagir avec beaucoup de monde. Je voudrais alors remercier toute l'équipe développant elsA, en particulier Julien Mayeur et Sébastien Heib, J.-D. Garaud (mon référent Z-set), Lionel Tessé pour son aide avec ASTRE et Gilles Chaineray celle avec CEDRE. Merci à Teddy Chantrait et Arjen Roos de SafranTech pour les nombreuses discussions sur le coulage aérothermique en milieu industriel.

Je voudrais remercier Vincent Couaillier et tous les ingénieurs de l'unité NFLU de l'ONERA qui m'ont accueilli pendant ces trois ans de thèse. Ça a été un plaisir de partager ce temps avec vous.

Je voudrais remercier les autres doctorants et post-docs : Quentin, Mikel, Pratick, Emmanuelle, Javi, Luc et tous les autres. En particulier merci à la "squadra azzurra" de l'ONERA : Fabio, Francesca, Tito, Matteo et Fabrizio. Avec eux j'ai pu passer des bons moments à l'ONERA mais également à l'extérieur grâce aux nombreuses sorties que nous avons réalisées.

Je veux également remercier l'équipe ASCO de volley. Avec vous j'ai pu partager des victoires et des défaites mais aussi des barbecues et un week-end en Bretagne.

Un grand remerciement va à une personne spéciale, Marie, qui m'a supporté chaque jour pendant ces années. Elle a été assez patiente et compréhensive pendant les derniers mois assez stressants. De plus, elle m'a aidé dans la rédaction en français du manuscrit, tâche assez complexe surtout si on a en face quelqu'un de têtu comme moi.

Petite partie en italien : Ringrazio infinitamente i miei genitori e i miei due fratelli che nonostante la distanza mi hanno sempre sostenuto in questi tre anni. Vi ringrazio per tutti gli sforzi che avete fatto, i quali mi hanno permesso di arrivare fin qui. Grazie di cuore!

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xv
Liste des Algorithmes	xvii
Acronymes	xix
Publications	xxi
INTRODUCTION	1
1 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE	5
1.1 Formulation	6
1.1.1 Description lagrangienne	6
1.1.2 Description eulérienne	6
1.1.3 Dérivée particulière	7
1.2 Mécanique des fluides	7
1.2.1 Formulation	7
1.2.2 Discrétisation spatiale	9
1.2.3 Discrétisation temporelle	13
1.2.4 Conditions aux limites	14
1.3 Thermique du solide	15
1.3.1 Formulation	15
1.3.2 Discrétisation spatiale	16
1.3.3 Discrétisation temporelle	18
1.3.4 Conditions aux limites	18
1.4 Résolution des problèmes d'interaction fluide-structure	19
1.4.1 Approches de résolution fluide-structure	20
1.4.2 Algorithmes de couplage partitionnés	23
1.4.3 Algorithmes de couplage utilisés dans le cadre de la thèse	28
1.5 Conclusion	31
2 PANORAMA DES ÉTUDES DE STABILITÉ DES ALGORITHMES PARTITIONNÉS POUR L'AÉROTHERMIQUE	33
2.1 Études de stabilité basées sur la théorie des modes normaux	34
2.1.1 Travaux de Giles	34
2.1.2 Autres principales études de stabilité basées sur la théorie du mode normal	36
2.2 Étude de stabilité basée sur la méthode de l'énergie	37
2.3 Études de stabilité basées sur une analyse matricielle du système couplé	37
2.4 Étude de stabilité basée sur un approche physique	39

2.5	Analyse de stabilité développée à l'ONERA	43
2.5.1	Étude de stabilité en régime permanent	44
2.5.2	Étude de stabilité en régime transitoire	53
2.6	Conclusion	55
3	ÉTUDE DU POTENTIEL DE LA MÉTHODE OPTIMALE DE DIRICHLET-ROBIN À STABILISER UN CALCUL DE COUPLAGE AÉROTHERMIQUE	57
3.1	Simplification du problème	57
3.2	Potentiel théorique de la méthode optimale Dirichlet-Robin à stabiliser le problème	58
3.2.1	Nombre de Biot numérique	59
3.2.2	Zones de stabilité	60
3.2.3	Stabilité en fonction du ratio des conductivités	61
3.2.4	Stabilité en fonction du ratio des conductances	61
3.2.5	Stabilité en fonction de la taille de la première maille fluide	62
3.2.6	Stabilité en fonction de la période de couplage	64
3.3	Cas test : Plaque plane	65
3.3.1	Discretisation du domaine fluide	65
3.3.2	Discretisation du domaine solide	67
3.3.3	Interpolation spatiale entre les maillages	67
3.3.4	Critère de convergence	68
3.4	Capacité numérique de la méthode optimale Dirichlet-Robin à stabiliser des problèmes aérothermiques	69
3.4.1	Interactions thermiques faibles et modérées	69
3.4.2	Interactions thermiques fortes	80
3.5	Étude de l'initialisation de la méthode	83
3.6	Étude de la période de couplage	85
3.7	Conclusion	89
4	DÉVELOPPEMENT ET VALIDATION DE LA MÉTHODE NEUMANN-ROBIN POUR LA STABILISATION DES CALCULS AÉROTHERMIQUES À FORTE INTERACTION THERMIQUE	91
4.1	Développement de la méthode Neumann-Robin	91
4.2	Étude théorique du potentiel de stabilisation de la méthode	92
4.2.1	Recherche des différents comportements du modèle en fonction du coefficient de couplage	93
4.2.2	Stabilité en fonction du ratio des conductances	95
4.2.3	Stabilité en fonction de la taille de la première maille fluide	95
4.2.4	Stabilité en fonction de la période de couplage	98
4.3	Étude numérique	100
4.4	Conclusion	103
5	DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE ROBIN-ROBIN POUR LA STABILISATION DE L'ENSEMBLE DES CALCULS AÉROTHERMIQUES STATIONNAIRES	105
5.1	Description de la méthode Robin-Robin	106

5.2	Implémentation de la condition de Robin dans le solveur elsA	106
5.3	Étude paramétrique sur la stabilité de la méthode Robin-Robin	108
5.3.1	Cas test avec interaction thermique modérée	109
5.3.2	Cas test avec interaction thermique forte	110
5.4	Conclusion	112
6	PRISE EN COMPTE DU RAYONNEMENT DANS LE COUPLAGE AÉROTHERMIQUE ET ÉTUDE DE LA STABILITÉ	115
6.1	Transfert de chaleur radiatif	116
6.1.1	Formulation	116
6.1.2	Calcul des flux radiatifs	117
6.2	Algorithme de couplage	119
6.3	Développement des méthodes de couplage avec prise en compte du rayonnement	120
6.4	Validation	122
6.4.1	Description du cas test	122
6.4.2	Résultats de la validation	124
6.5	Conclusion	127
7	IMPLÉMENTATION ET ÉTUDE DU COUPLAGE AÉROTHERMIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE	129
7.1	Description et analyse des méthodes optimales de stabilisation des couplages aérothermiques en régime transitoire	130
7.1.1	Méthode Dirichlet-Robin	130
7.1.2	Méthode Neumann-Robin	134
7.2	Validation du couplage aérothermique en régime transitoire	136
7.2.1	Description du cas test	137
7.2.2	Résultats	139
7.3	Conclusion	142
8	AMÉLIORATION DE LA PRÉCISION DES CALCULS AÉROTHERMIQUES TRANSITOIRES	143
8.1	Correction de la prédiction linéaire afin de supprimer la dépendance de la solution au coefficient de couplage	143
8.1.1	Interpolation du seul flux de chaleur	144
8.1.2	Évaluation des quantités pariétales aux points de Gauss	146
8.1.3	Importance du raffinement du maillage solide (près de l'interface de couplage)	147
8.1.4	Validation de la méthode DR2 en comparant les résultats obtenus avec une solution de référence	150
8.2	Amélioration de la précision en modifiant la prédiction du flux de chaleur	154
8.2.1	Développement de la prédiction flux-température	154
8.2.2	Validation de la méthode DR3 en comparant les résultats obtenus avec la solution de référence	155

8.2.3	Validation de la méthode DR ₃ sur un cas test à forte interaction thermique	157
8.2.4	Validation de la méthode DR ₃ sur un cas test où l'instationnarité provient du changement de la condition d'injection de l'écoulement fluide	160
8.3	Conclusions	164
9	COUPLAGE AÉROTHERMIQUE TRANSITOIRE SUR DES CONFIGURATIONS QUASI-INDUSTRIELLES	167
9.1	Validation sur un cas de disque de turbine aéronautique HP refroidi par un écoulement d'air	167
9.1.1	Description du cas test	168
9.1.2	Validation de la méthode de couplage	170
9.2	Validation sur un cas de tambour d'un compresseur aéronautique HP refroidi par un écoulement d'air	182
9.2.1	Description du cas test	182
9.2.2	Validation de la méthode de couplage	185
9.3	Conclusion	192
	CONCLUSIONS	195
	PERSPECTIVES	199
A	ANALYSE DE STABILITÉ	201
A.1	Couplage stationnaire	201
A.1.1	Dirichlet-Robin	201
A.1.2	Robin-Robin	206
A.2	Couplage stationnaire avec rayonnement	209
A.3	Couplage transitoire	211
B	DÉMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES	215
B.1	Étude théorique de la méthode Dirichlet-Robin	215
B.1.1	Effet de la taille de la première maille fluide sur la stabilité	215
C	VALIDATION DE LA CONDITION DE ROBIN DANS ELSA VIA UNE COMPARAISON AVEC LE COUPLAGE CEDRE-ZSET	217
D	IMPLÉMENTATION DE L'ALGORITHME DE COUPLAGE QUASI-INSTATIONNAIRE DANS LE SOLVEUR Z-SET	221
	BIBLIOGRAPHIE	225

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1	Propulseur aéronautique (Turbofan).	2
FIGURE 1.1	Système couplé	20
FIGURE 1.2	Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel	23
FIGURE 1.3	Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé	24
FIGURE 1.4	Schématisation de l'algorithme partitionné parallèle	25
FIGURE 1.5	Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel désynchronisé	26
FIGURE 1.6	Schématisation de l'algorithme partitionné parallèle amélioré	26
FIGURE 1.7	Schématisation de l'algorithme de couplage séquentiel stationnaire	29
FIGURE 1.8	Algorithme quasi-instationnaire	30
FIGURE 2.1	Effet de la période du couplage sur la température et le flux de chaleur dans le fluide dans le cas d'une condition de température imposée (Verstraete et Scholl, 2016)	42
FIGURE 2.2	Effet de la période du couplage sur la température dans le cas d'une condition de flux imposé (Verstraete et Scholl, 2016)	43
FIGURE 2.3	Schéma discrétisé des sous-domaines fluide Ω_f et solide Ω_s	45
FIGURE 2.4	$ g $ en fonction de θ pour plusieurs α_f	49
FIGURE 2.5	$\max g $ en fonction de α_f	49
FIGURE 2.6	Étude de stabilité du couplage en régime transitoire : discrétisation du modèle 1-D	53
FIGURE 3.1	$\max g $ en fonction de α_f pour différents Bi_v	59
FIGURE 3.2	Géométrie et conditions aux limites du cas test "Plaque Plane"	65
FIGURE 3.3	Maillage fluide et solide près de l'interface	66
FIGURE 3.4	Maillage fluide de la plaque plane (hors zone tampon)	67
FIGURE 3.5	Profil du coefficient d'échange thermique le long de l'interface	68
FIGURE 3.6	Évolution du facteur d'amplification temporelle pour des interactions faibles et modérées	70
FIGURE 3.7	Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$, $Bi_v = 0,5$)	72
FIGURE 3.8	Champs de température fluide et solide (cas $\lambda_s = 10 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 0,5$)	72
FIGURE 3.9	Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 2,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 1,9$)	73
FIGURE 3.10	Évolution de la température au bord d'attaque pour $\alpha_f = 0$ et pour $\alpha_f^{(\text{opt})}$ ($\lambda_s = 2,5 \text{ W/(mK)}$, $Bi_v = 9,4$)	73

FIGURE 3.11	Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 9,4$)	74
FIGURE 3.13	Position des coefficient de couplage α_f étudiés sur le tracé du facteur d'amplification temporelle ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 9,4$)	75
FIGURE 3.14	Résidu et Température pour $\alpha_f = 380$ (cas $Bi_v = 9,4$)	76
FIGURE 3.15	Résidu et Température pour $\alpha_f = 400$ (cas $Bi_v = 9,4$)	77
FIGURE 3.16	Résidu et Température pour $\alpha_f = h(x)$ (cas $Bi_v = 9,4$)	78
FIGURE 3.17	Température pour $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$ (cas $Bi_v = 9,4$)	78
FIGURE 3.18	Résidu de la densité pour la CFD seule et le calcul CHT	79
FIGURE 3.19	Résidu pour $\alpha_f = h(x)$ à partir de $\Delta T_s = 10^{-4}$ (cas $Bi_v = 9,4$)	80
FIGURE 3.20	Facteur d'amplification temporelle en fonction du coefficient de couplage α_f pour des interactions thermiques fortes	81
FIGURE 3.21	Évolution du résidu sur la température pour les simulations à forte interaction thermique	82
FIGURE 3.22	Résultat des simulations à forte interaction thermique ($Bi_v = 428$)	83
FIGURE 3.23	Résultats des simulations utilisant une initialisation Dirichlet-Dirichlet	84
FIGURE 3.24	Résultats des simulations utilisant K_f comme coefficient de couplage pour initialiser le calcul	85
FIGURE 3.25	Effet de la période de couplage sur la stabilité	86
FIGURE 3.26	Étude paramétrique sur α_f pour les calculs à faible fréquence de couplage	87
FIGURE 3.27	Effet de la fréquence de couplage sur la stabilité sur $\max(g)$	88
FIGURE 4.1	$\max g $ pour la méthode Neumann-Robin en fonction de α_f	93
FIGURE 4.2	$\max g $ de la méthode Neumann-Robin en fonction de α_f pour différents Bi^Δ	94
FIGURE 4.3	Évolution de $\max g(\infty) $ en fonction de la taille de la première maille fluide Δy_f	97
FIGURE 4.4	$ g(\infty) $ en fonction de Bi^Δ pour plusieurs valeurs de $\bar{D}_f$	100
FIGURE 4.5	Facteur d'amplification pour des interactions fortes	101
FIGURE 4.6	Résidu en norme infini sur la température en fonction des itérations de couplage pour des cas à forte interaction thermique.	102
FIGURE 4.7	Profile de température le long de l'interface dans le cas de la méthode Dirichlet-Robin ($\alpha_f^{(opt)}$) et celle de Neumann-Dirichlet (cas $\lambda_s = 0.5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 141,5$)	103
FIGURE 5.1	Résultat du balayage des coefficients α_f et α_s à gauche. Facteur d'amplification temporelle théorique à droite (cas avec $Bi_v = 6,85$)	109
FIGURE 5.2	Résidu en norme infini de la température de l'interface solide résultant du balayage en fonction des coefficients de couplage α_f et α_s à gauche. Facteur d'amplification temporelle en fonction des coefficients de couplage α_f et α_s à droite (cas avec $Bi_v = 273,98$)	111

FIGURE 5.3	Robin-Robin : proposition d'une solution empirique. Facteur d'amplification temporelle et couple optimal des coefficients de couplage (cf. Eq. 5.13) pour six valeurs de Bi^Δ	113
FIGURE 6.1	Algorithme de couplage aérothermique avec prise en compte du rayonnement.	119
FIGURE 6.2	Schématisation du cas test du canal. Les conditions aux limites fluides et solides sont incluses.	123
FIGURE 6.3	Maillages des domaines fluide (en rouge avec la zone tampon en vert) et solide (en bleu) près du bord d'attaque de l'interface de couplage supérieure.	124
FIGURE 6.4	Résidu en norme infini sur la température pour le cas de couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,5$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(opt)}$ et $\alpha_{f-R}^{(opt)}$, respectivement sans et avec la prise en compte du rayonnement.	125
FIGURE 6.5	Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage pour le cas du couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,5$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(opt)}$ et $\alpha_{f-R}^{(opt)}$, i.e. respectivement sans et avec prise en compte du rayonnement.	126
FIGURE 6.6	Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage pour le cas du couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,8$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(opt)}$ et $\alpha_{f-R}^{(opt)}$, i.e. respectivement sans et avec la prise en compte du rayonnement.	127
FIGURE 6.7	Profils de température sur les surfaces de couplage lorsqu'aucun échange radiatif a lieu et lorsqu'il y a de l'échange radiatif (cas avec $\epsilon = 0,8$).	128
FIGURE 7.1	$\max g $ en fonction de α_f pour différents Bi^Δ	132
FIGURE 7.2	Schématisation du cas test de la plaque plane. La température imposée sur la surface inférieure du domaine solide évolue dans le temps.	137
FIGURE 7.3	Variation temporelle de la température imposée sur la surface inférieure du domaine solide.	138
FIGURE 7.4	Schématisation de l'algorithme quasi-instationnaire avec mise en évidence des états fluides interpolés.	139
FIGURE 7.5	Profils de la température et du flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface pour trois valeurs du coefficient de couplage α_f (0, $\alpha_f^{(opt)}$ et 10^5) obtenus avec la prédiction linéaire classique.	141

FIGURE 7.6	Profils de la température et du flux de chaleur au bord de fuite de l'interface pour trois valeurs du coefficient de couplage α_f (0, $\alpha_f^{(opt)}$ et 10^5) obtenus avec la prédiction linéaire classique.	141
FIGURE 8.1	Profils de la température et du flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface pour deux valeurs du coefficient de couplage α_f (0 et 10^5) obtenus avec la méthode DR2.	145
FIGURE 8.2	Profils de la température et du flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface pour deux valeurs du coefficient de couplage α_f (0 et 10^5) obtenus avec la méthode DR2 et avec la méthode DR2 utilisant les points de Gauss.	148
FIGURE 8.3	Profils des flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface obtenus avec la méthode DR2 aux points de Gauss pour le maillage solide utilisé jusqu'à présent ($\Delta y_s = 3,3 \cdot 10^{-4}$ mm). La comparaison est réalisée entre le flux de chaleur reçu aux points des Gauss, le flux calculé aux centres des éléments surfaciques et celui envoyé de ce dernier point.	149
FIGURE 8.4	Profils des flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface obtenus avec la méthode DR2 aux points de Gauss pour un maillage solide plus raffiné ($\Delta y_s = 2,7 \cdot 10^{-5}$ mm). La comparaison est réalisée entre le flux de chaleur reçu aux points des Gauss, le flux calculé aux centres des éléments surfaciques et celui envoyé de ce dernier point.	150
FIGURE 8.5	Profils de la température et du flux de chaleur de la solution de référence au bord d'attaque de l'interface	151
FIGURE 8.6	Comparaison de la solution de référence obtenue en couplant à chaque itération fluide avec celle obtenue en couplant à chaque itération solide au bord d'attaque de l'interface.	152
FIGURE 8.7	Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface.	153
FIGURE 8.8	Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface.	156
FIGURE 8.9	Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface pour le cas test à forte interaction thermique.	159
FIGURE 8.10	Schématisation du cas test de la plaque plane. La température et la vitesse caractérisant l'injection de l'écoulement fluide évoluent dans le temps.	161
FIGURE 8.11	Variation temporelle de la température et de la vitesse imposées dans la condition d'injection du domaine fluide.	161

FIGURE 8.12	Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface pour le cas test où l'instationnarité vient de la condition d'injection.	163
FIGURE 9.1	Schéma du cas test du disque de turbine HP. La température imposée à la surface supérieure du domaine solide évolue dans le temps.	168
FIGURE 9.2	Champ du nombre de Mach dans le domaine fluide.	169
FIGURE 9.3	Variation temporelle de la température imposée à la surface supérieure du disque. Les instants de couplage sont représentés par des petits cercles.	170
FIGURE 9.4	Comparaison des profils de température obtenus avec des périodes de couplage égales à 1 s et 10 s.	172
FIGURE 9.5	Comparaison entre les profils de températures obtenus avec les méthodes DR2 et DR3 et la solution de référence.	174
FIGURE 9.6	Comparaison entre les profils de température obtenus par la méthode DR3 avec deux valeurs du critère de convergence (0,1 K et 0,01 K) et la solution de référence.	175
FIGURE 9.7	Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant 48 et 11 instants de couplage et la solution de référence.	177
FIGURE 9.8	Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d'instants de couplage et la solution de référence.	179
FIGURE 9.9	Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d'instants de couplage et la solution de référence. Zoom sur le plateau de température au Point 1.	180
FIGURE 9.10	Comparaison entre les temps de calcul (en heures) pour chaque calcul effectué en incluant les calculs de référence. Le temps nécessaire afin de terminer le calcul de référence ($\Delta t_c = 1$ s) a été calculé par extrapolation linéaire.	181
FIGURE 9.11	Comparaison entre les nombres d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence du processus itératif pour chaque distribution d'instants de couplage étudiée.	181
FIGURE 9.12	Représentation schématique du tambour du compresseur HP utilisé dans le projet ICAS-GT (Smout et al., 2002)	183
FIGURE 9.13	Schématisation du cas test du tambour de compresseur HP. La température imposée à la surface supérieure et inférieure du domaine solide évolue dans le temps. La vitesse de rotation du système évolue également dans le temps.	183

FIGURE 9.14	Évolution des conditions aux limites imposées au système : vitesse de rotation et températures sur les surfaces en titane et en acier. .	184
FIGURE 9.15	Surfaces de couplage et maillages fluide et solide du cas test du tambour de compresseur HP.	184
FIGURE 9.16	Champs de température dans le fluide et dans les solides aux différents instants de couplage.	187
FIGURE 9.17	Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d'instant de couplage et la solution de référence sur le cas du tambour de compresseur HP.	188
FIGURE 9.18	Comparaison entre les profils de température obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d'instant de couplage et la solution de référence. Zoom sur le plateau de température au Point 7	189
FIGURE 9.19	Comparaison entre les temps de calcul (en heures) pour chaque calcul effectué en incluant les calcul de référence.	191
FIGURE 9.20	Comparaison entre les nombre d'itérations nécessaires à atteindre la convergence du processus itératif pour chaque distribution d'instant de couplage étudiée.	192
FIGURE A.1	Étude de stabilité pour le couplage stationnaire : discrétisation pour le modèle 1-D	201
FIGURE A.2	Étude de stabilité pour le couplage transitoire : discrétisation pour le modèle 1-D	211
FIGURE C.1	Comparaison du comportement de la méthode Dirichlet-Robin vis-à-vis de la variation des coefficients de couplage α_f et α_s dans le cas d'un couplage CEDRE-Zset (à gauche) et dans le cas d'un couplage elsA-Zset (à droite). Cas test à $Bi_v = 6, 85$	218
FIGURE C.2	Comparaison du comportement de la méthode Dirichlet-Robin vis-à-vis de la variation des coefficients de couplage α_f et α_s dans le cas d'un couplage CEDRE-Zset (à gauche) et dans le cas d'un couplage elsA-Zset (à droite). Cas test à $Bi_v = 127$	219
FIGURE D.1	Schématisation des principales étapes du code Z-set parcourues afin de réaliser un calcul générique.	223

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 3.1	Comportement de la condition de Dirichlet-Robin en fonction de α_f	61
TABLEAU 3.2	Récapitulatif des nombres de Biot et des nombre d'itérations de couplage à laquelle le critère de convergence à été atteint selon la valeur de λ_s (interactions faibles et modérées)	71
TABLEAU 3.3	Valeurs des coefficients de couplage minimal $\alpha_f^{(\min)}$ et optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ théorique et numériques pour les périodes de couplage $\Delta t_c = 1000\Delta t_f$ et $\Delta t_c = 10000\Delta t_f$	87
TABLEAU 4.1	Zones de stabilité de la méthode Neumann-Robin	94
TABLEAU 4.2	Valeurs numériques et itération de couplage de convergence ($\Delta T = 10^{-3}$) pour les interaction faibles et modérées	101
TABLEAU 6.1	Paramètres de la méthode Dirichlet-Robin caractérisant les problèmes étudiés avec rayonnement ($\epsilon > 0$) et sans rayonnement ($\epsilon = 0$).	125
TABLEAU 7.1	Comportement de la condition de Dirichlet-Robin en régime transitoire en fonction du coefficient de couplage α_f	132
TABLEAU 7.2	Comportement de la condition de Neumann-Robin en régime transitoire en fonction du coefficient de couplage α_f	135
TABLEAU 7.3	Paramètres caractérisant le problème thermique	138
TABLEAU 8.1	Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3	157
TABLEAU 8.2	Paramètres caractérisant le problème à forte interaction thermique	157
TABLEAU 8.3	Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 pour le cas test à forte interaction thermique	158
TABLEAU 8.4	Paramètres caractérisant le problème à forte interaction thermique	160
TABLEAU 8.5	Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 pour le cas test où l'instationnarité vient de la condition d'injection.	162
TABLEAU 8.6	Résumé des principales caractéristiques des méthodes de prédiction étudiées	165
TABLEAU 9.1	Paramètres caractérisant le problème thermique pour le cas du disque de turbine HP	170
TABLEAU 9.2	Erreur relative entre les deux profils de température obtenus avec des périodes de couplage égales à 1 s et 10 s.	171
TABLEAU 9.3	Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 aux trois points de l'interface étudiés.	173

TABLEAU 9.4	Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux trois points de l'interface étudiés pour deux valeurs du critère de convergence (0,1 K et 0,01 K).	175
TABLEAU 9.5	Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux trois points de l'interface étudiés pour différentes distributions d'instants de couplage.	180
TABLEAU 9.6	Paramètres caractérisant le problème thermique sur le cas du tambour de compresseur HP.	185
TABLEAU 9.7	Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux quatre points étudiés pour différentes distributions d'instants de couplage.	190

LISTE DES ALGORITHMES

1	Algorithme partitionné séquentiel	23
2	Algorithme partitionné parallèle	25
3	Algorithme partitionné séquentiel stationnaire	29
4	Algorithme quai-instationnaire	30
5	Algorithme partitionné séquentiel stationnaire pour la résolution du problème aérothermique avec prise en compte du rayonnement	120

ACRONYMES

CFD Computational Fluid Dynamics

CFT Continuité Flux-Température

CHT Conjugate Heat Transfer

HP Haute-Pression

MEF Méthode des Elements Finis

MVF Méthode des Volumes Finis

PUBLICATIONS

ARTICLES DANS DES REVUE INTERNATIONALES

Moretti, Rocco, Marc Errera, Vincent Couaillier et Frédéric Feyel

- 2018 "Stability, convergence and optimization of interface treatments in weak and strong thermal fluid-structure interaction", *International Journal of Thermal Sciences*, 126, ISSN : 12900729, DOI : [10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.014](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.014).

Errera, Marc, Rocco Moretti, Rami Salem, Yohann Bachelier, Thomas Arrivé et Minh Nguyen

- 2019 "A single stable scheme for steady conjugate heat transfer problems", *Journal of Computational Physics*, 394, p. 491-502, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2019.05.036](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.05.036), <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999119303808>.

Moretti, Rocco, Marc Lazareff, Marc Errera, Frédéric Feyel, Tristan Soubrié et Farid Benyoucef

- 2019 "Accuracy of Heat Load Transfer in a Quasi-Dynamic Fluid-Structure Interaction", *Journal of Computational Physics*, Soumis.

Errera, Marc, Rocco Moretti, Julien Mayeur, Lionel Tessé, Jean-Michel Lamet et Emmanuel Laroche

- 2020 "A Numerical Predictive Model for Conjugate Heat Transfer with Radiation", en rédaction.

Nguyen, Minh, Marc Errera, Odile Labbé, Rocco Moretti, Florent Renac et Vincent Couaillier

- 2020 "Adaptive interface treatment for aerothermal coupling using a Discontinuous Galerkin method", *International Journal of Thermal Sciences*, 149, p. 106-208, ISSN : 1290-0729, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106208>, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072919304338>.

ARTICLES DANS DES CONFÉRENCES INTERNATIONALES

Errera, Marc et Rocco Moretti

- 2016 “Numerical Interface Treatments for Weak and Strong Interaction in Conjugate Heat Transfer Problems”, in *VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering*.

Errera, Marc-Paul, Rocco Moretti et Yohann Bachelier

- 2018 “Optimized Numerical Interface Conditions for Conjugate Heat Transfer”, in *Proceedings of the 3rd World Congress on Momentum, Heat and Mass Transfer (MHMT’18)*, Budapest, Hungary, DOI : [10.11159/enfht18.109](https://doi.org/10.11159/enfht18.109), http://avestia.com/MHMT2018%7B%5C_%7DProceedings/files/paper/ENFHT/ENFHT%7B%5C_%7D109.pdf.

Moretti, Rocco et Marc Errera

- 2018 “Comparison between Dirichlet-Robin and Neumann-Robin Interface Conditions in CHT Problems”, in *5th International Conference of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer (FFHMT’18)*, Niagara Falls, Canada, DOI : [10.11159/ffhmt18.112](https://doi.org/10.11159/ffhmt18.112), http://avestia.com/FFHMT2018%7B%5C_%7DProceedings/files/paper/FFHMT%7B%5C_%7D112.pdf.

Errera, Marc, Rocco Moretti, Yohann Bachelier et Tristan Soubrié

- 2019 “Stable and Optimal Interface Treatment for Partitioned Conjugate Heat Transfer Problems”, in *AIAA Scitech 2019 Forum*, American Institute of Aeronautics et Astronautics, Reston, Virginia, ISBN : 978-1-62410-578-4, DOI : [10.2514/6.2019-1561](https://doi.org/10.2514/6.2019-1561), <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2019-1561>.

Moretti, Rocco, Marc Errera et Frédéric Feyel

- 2019 “Temporal Interpolation Methods for Transient CHT”, en, in *AIAA Scitech 2019 Forum*, January, American Institute of Aeronautics et Astronautics, San Diego, California, p. 1-11, ISBN : 978-1-62410-578-4, DOI : [10.2514/6.2019-2059](https://doi.org/10.2514/6.2019-2059), <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2019-2059>.

INTRODUCTION

Dans le passé, la difficulté à comprendre les phénomènes physiques ainsi que le manque de moyens ont amené les scientifiques à décomposer les problèmes physiques complexes en sous-problèmes élémentaires plus simples à traiter. Cette démarche a donné naissance aux différentes branches de la physique qui sont devenues, au fil du temps, de plus en plus indépendantes.

Des accidents majeurs survenus au cours du siècle dernier, comme l'effondrement du pont de Tacoma (1940) et plusieurs accidents aéronautiques, ont cependant conduit à la réévaluation de cette démarche. Ainsi, plusieurs disciplines (l'aéroélasticité, l'aérothermique, etc...) sont apparues. Elles permettent d'étudier l'interaction entre deux ou plusieurs physiques notamment pour le dimensionnement de systèmes complexes tel qu'un propulseur aéronautique (cf. Figure 1). En effet, le propulseur aéronautique est soumis à des températures extrêmement élevées et il est essentiel de calculer avec précision la charge thermique appliquée sur ses différentes parties structurales. Ce calcul oriente d'une part la conception, le coût, le choix des matériaux et l'optimisation des circuits de refroidissement et d'autre part la durée de vie et l'efficacité du propulseur. À ce jour, la modélisation de la diffusion thermique dans les pièces structurales du propulseur aéronautique est bien établie. Cependant, la définition des conditions aux limites à appliquer à l'interface fluide-structure dépend encore majoritairement de corrélations obtenues à partir de données expérimentales et de l'expertise de l'utilisateur (Verdicchio et al., 2001). De plus, ces corrélations ne sont disponibles que pour un nombre limité de points de fonctionnement du système.

Ainsi, le besoin de s'affranchir de ces corrélations et les progrès réalisés dans la modélisation des écoulements fluides (CFD) a naturellement orienté les chercheurs vers la modélisation de l'interaction fluide-structure.

Il existe deux principales approches pour étudier l'interaction entre deux voire plusieurs physiques : l'approche monolithique et l'approche partitionnée. La première consiste à résoudre un unique problème multiphysique tenant compte du phénomène dans son ensemble (Heil et al., 2008). Cette approche entraîne des difficultés de mise en place et de résolution de problèmes physiques très différents les uns par rapport aux autres. La deuxième voie, l'approche partitionnée, consiste à résoudre chaque physique de manière indépendante. La continuité du problème physique globale est alors assurée grâce à des échanges de quantités à l'interface (Felippa et Park, 1980). Ainsi, l'approche partitionnée permet la réutilisation des codes spécifiques à chaque physique ce qui en

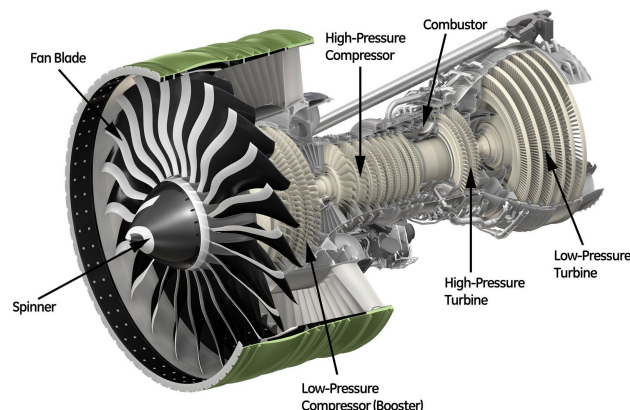


FIGURE 1 – Propulseur aéronautique (Turbofan).

fait la solution la plus répandue pour la résolution de problèmes multiphysiques¹. Cette approche présente cependant certaines instabilités dues au décalage temporel entre les résolutions des différents problèmes physiques (Farhat, Lesoinne et Le Tallec, 1998). Par exemple, dans le cas des problèmes aérothermiques, le temps caractéristique, et donc de résolution, diffère parfois de plusieurs ordres de grandeur entre le problème associé à l'écoulement fluide et celui associé au solide. L'instabilité à l'interface fluide-solide, si elle n'est pas amortie, peut entraîner la divergence du calcul ou des convergences très lentes.

Le décalage temporel engendre également des erreurs dans le calcul de l'évolution de la charge thermique au cours du temps lorsque le problème aérothermique est résolu en régime transitoire via un algorithme quasi-stationnaire. Cet algorithme permet d'étudier l'interaction thermique entre un écoulement fluide et un solide pendant une longue période temporelle avec un temps de calcul largement inférieur à la méthode traditionnelle (couplage à chaque itération du solveur fluide). Ainsi, un calcul incorrect de l'évolution thermique pendant la durée de fonctionnement du système conduit à une mauvaise optimisation du système aérothermique et donc à une estimation inexacte de sa durée de vie pouvant mener à la défaillance prématurée du système. Cette situation peut s'avérer catastrophique dans le cas d'un propulseur aéronautique.

Ces travaux de thèse ont pour objectif de mettre en place une démarche robuste pour modéliser avec précision l'interaction thermique fluide-structure. Plus particulièrement, l'attention a été portée sur la stabilité et la précision des principaux algorithmes utilisés pour la résolution des problèmes aérothermiques en régime permanent et transitoire. Concernant la stabilité, différentes méthodes existent dans la littérature dont de très prometteuses développées au sein du département DAAA de l'ONERA (Errera et Chemin, 2013; Errera, Lazareff et al., 2017). Ces dernières, qui utilisent la condition de Dirichlet à

1. Le couplage de codes pour la résolution thermique est communément appelée *Conjugate Heat Transfer* (CHT)

l'interface fluide et la condition de Robin à l'interface solide, ont été analysées dans le cadre de cette thèse. L'effet de la prise en compte du rayonnement sur la stabilité de ces méthodes a été analysé. Concernant la précision des calculs aérothermiques en régime transitoire via l'algorithme quasi-instationnaire, des écarts entre la solution calculée et les données expérimentales ont été observés dans la littérature. L'origine de ces écarts a alors été explorée dans ces travaux de thèse.

La partie introductive de ce mémoire de thèse est constituée d'une revue des principaux algorithmes de résolution des problèmes multiphysiques (Chapitre 1) et des principales méthodes de stabilisation des problèmes d'interaction thermique entre un écoulement fluide et une structure solide (Chapitre 2). Ensuite, une étude théorique et numérique de la méthode de stabilisation Dirichlet-Robin proposée par Errera et Chemin, 2013 a été menée (Chapitre 3). Cette méthode n'a pas encore été étudiée pour un large éventail d'interactions thermiques. Ainsi, l'étude du couplage aérothermique a tout d'abord été réalisée en régime stationnaire afin d'identifier facilement l'influence des principaux paramètres sur la stabilité du couplage. Ensuite, nous avons choisi d'analyser ces méthodes sur le cas test de la plaque plane, simple du point de vue géométrique, mais qui peut être complexe du point de vue aérothermique. De plus, elle permet d'avoir des maillages coïncidents afin d'éliminer les problèmes d'interpolation spatiale. Enfin, l'étude du comportement théorique et numérique des méthodes a permis de mettre en évidence les aspects positifs mais aussi les limites de l'utilisation de ces méthodes pour la stabilisation du couplage aérothermique. Pour contourner ces limites, la méthode Neumann-Robin qui utilise la condition aux limites de Neumann sur l'interface fluide a été développée puis comparée à la méthode Dirichlet-Robin (Chapitre 4). Ces deux méthodes se sont avérées complémentaires. Le travail présenté au Chapitre 3 et au Chapitre 4 a fait l'objet de deux publications, une dans l'*International Journal of Thermal Science* et la deuxième dans le *Journal of Computational Physics*. Une méthode plus générale (méthode Robin-Robin) capable d'évoluer entre les deux précédentes méthodes a été développée permettant de choisir la méthode la plus adaptée au problème étudié (Chapitre 5). La méthode Robin-Robin a ainsi été étudiée sur les plans théorique et numérique en montrant son potentiel et ses limites. Ensuite, l'effet de la prise en compte du rayonnement (couplage de 3 codes) sur la stabilité du problème aérothermique a été étudiée (Chapitre 6). En effet, l'échange radiatif peut jouer un rôle important dans l'interaction thermique fluide-structure de systèmes confinés comme ceux des propulseurs aéronautiques. Ainsi, une méthode basée sur la condition Dirichlet-Robin (plus simple à mettre en place) et adaptée aux problèmes aérothermiques avec rayonnement a été développée et validée sur un cas académique de canal. La déstabilisation du calcul couplé par le rayonnement a été mise en évidence théoriquement et quantifiée. Une étude numérique a confirmé ces résultats. Une publication sur cette déstabilisation est d'ailleurs en cours de rédaction.

La deuxième partie du mémoire est dédiée à l'étude de la précision du couplage aérothermique en régime transitoire via l'algorithme quasi-instationnaire. L'objectif de cette partie est de mettre en place une démarche robuste pour calculer avec précision l'évo-

lution de l'interaction thermique pendant une longue période temporelle. L'algorithme quasi-instationnaire a d'abord été mis en place puis étudié sur le cas test de la plaque plane, ce qui a mis en évidence des problèmes de précision (Chapitre 7). Le chapitre suivant (Chapitre 8) est alors consacré à la mise en place de méthodes permettant de réduire ces problèmes de précision en améliorant la qualité des résultats. Ces méthodes ont été validées en comparant les résultats obtenus à la solution de référence réalisée avec la méthode de résolution traditionnelle (extrêmement coûteuse en termes de temps de calcul) sur le cas de la plaque plane. Ces travaux ont fait l'objet d'une seconde publication qui a été soumise au *Journal of Computational Physics*. Puisque ces dernières méthodes ont donné des résultats appréciables dans la résolution des problèmes aérothermiques en régime transitoire sur le cas de la plaque plane, leur efficacité a été testée sur des cas test plus complexes (quasi-industriels). Les cas test analysés sont un disque de turbine haute-pression (HP) refroidi par un écoulement d'air et un circuit de refroidissement d'un tambour de compresseur axial à haute pression chauffé au niveau du carter extérieur (Chapitre 9).

Enfin, les principaux résultats présentés dans ce travaux de thèse sont discutés et de possibles perspectives sont proposées pour de futures recherches.

1

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Résoudre un problème d'interaction thermique entre un fluide et une structure consiste à prendre en compte simultanément les phénomènes de convection/diffusion du fluide et la conduction à l'intérieur du solide. Ce chapitre a pour objectif de décrire les principaux modèles utilisés pour simuler les phénomènes physiques dans chaque milieu et les principales approches qui permettent d'en étudier l'interaction.

Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt est porté sur les méthodes permettant d'évaluer avec fiabilité l'évolution temporelle de la charge thermique subie par une structure en interaction avec un écoulement fluide sur une longue plage temporelle. Par exemple, la mission d'une turbine haute pression (HP) d'un moteur aéronautique comprend toutes les phases de vol entre le décollage et l'atterrissage du moteur. Une évaluation fiable de la charge thermique assure une meilleure estimation de la fatigue due aux contraintes thermiques et donc de la durée de vie de la pièce.

Il existe d'autres raisons d'étudier l'interaction thermique fluide-structure, comme connaître l'effet des fluctuations de l'écoulement fluide sur la diffusion dans le solide ou, inversement, l'effet de la paroi solide sur l'écoulement fluide (Duchaine et al., 2009; Koren et al., 2017). Ces études sont généralement réalisées via la simulation des grandes structures de la turbulence (en anglais *Large Eddy Simulation* (LES)) qui permet d'avoir une haute résolution de l'écoulement fluide. Jaure et al., 2013 utilisent l'association de la LES et d'une méthode de résolution de la conduction dans le solide pour l'étude de l'effet des instabilités de combustion sur les parois d'une chambre de combustion. Un autre exemple d'interaction thermique fluide-structure est l'étude de la convection naturelle (Boukhris et al., 2008). Toutes ces applications sont spécifiques et nécessitent des méthodes de résolution appropriées qui ne seront pas abordées dans le cadre de la thèse.

Avant de s'intéresser à la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure en régime transitoire, nous allons d'abord les traiter en régime permanent (sur un point de fonctionnement du système) afin de présenter la modélisation des différentes physiques et les enjeux de la simulation des problèmes d'interaction thermique fluide-structure.

Dans un premier temps, les deux approches les plus communes (lagrangien et eulérien) pour suivre la physique dans un milieu sont décrites dans la section 1.1 Les équations gouvernant les différentes physiques (fluide et solide) et leurs méthodes de résolution respectives sont, d'abord, présentées de manière indépendante (cf. §1.2 et §1.3). Ensuite, la résolution des problèmes aérothermiques est traitée, permettant ainsi de prendre en

compte l'interaction entre les deux physiques (§1.4). Dans cette dernière partie, l'attention est portée sur la résolution des problèmes aérothermiques en régime permanent, puis le régime transitoire est abordé.

1.1 FORMULATION

On distingue deux formulations pour la description du mouvement des particules dans un milieu continu : les formulations de Lagrange et d'Euler. La première est adaptée à la description de la physique du solide (mécanique, thermique et dynamique des structures), alors que la formulation d'Euler est la plus utilisée pour la mécanique des fluides.

1.1.1 Description lagrangienne

La description lagrangienne permet de suivre la trajectoire d'un point matériel en définissant la position courante par rapport à une configuration de référence. Autrement dit, la position $\mathbf{x}$ à l'instant t de chaque particule est définie en fonction de sa position $\mathbf{X}$ en configuration de référence et de l'instant t considéré par la transformation Φ comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

Le déplacement $\mathbf{u}$ d'une particule et sa vitesse $\mathbf{v}$ sont décrits par les relations suivantes :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} (\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

1.1.2 Description eulérienne

La description eulérienne décrit le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ qui associe un vecteur vitesse en tout point de la configuration actuelle. Le mouvement est défini par incrément entre la configuration à l'instant t (position $\mathbf{x}$) et à $t + dt$ (position $\mathbf{x} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dt$).

1.1.3 Dérivée particulaire

Les descriptions lagrangienne et eulérienne sont liées à travers la dérivée particulaire (ou totale) $\frac{D}{Dt}$. Soit $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ une quantité vectorielle du milieu, dépendant du point d'observation $\mathbf{x}$ et du temps t . La variation de $\mathbf{q}$ est définie par :

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\Phi(\mathbf{x}, t), t) \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{grad} \mathbf{q} \cdot \mathbf{V} \quad (1.4)$$

La dérivée particulaire décrit la variation avec le temps en suivant la particule en mouvement (point de vue lagrangien), $\partial \mathbf{q} / \partial t$ décrivant la variation locale avec le temps en un point d'observation fixé (point de vue eulérien). Le dernier terme $\mathbf{grad} \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}$ est le terme d'advection qui mesure le transport de la quantité $\mathbf{q}$ d'un élément donné par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant.

1.2 MÉCANIQUE DES FLUIDES

1.2.1 Formulation

1.2.1.1 Équations de Navier-Stokes

Le mouvement des fluides homogènes visqueux est décrit en approche eulérienne par les équations de Navier-Stokes qui traduisent la conservation de trois quantités : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.5a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \text{div} \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.5b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} E) = -\text{div} p \mathbf{v} + \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v} - \text{div} \mathbf{q}) \quad (1.5c)$$

où $\rho(\mathbf{x}, t)$ est la densité du fluide au point $\mathbf{x}$ du domaine de résolution et à l'instant t , $p(\mathbf{x}, t)$ sa pression, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sa vitesse, E l'énergie totale par unité de masse et $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ le tenseur des contraintes. Le terme $\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ est le terme d'advection qui est non-linéaire.

Le tenseur des contraintes se décompose en partie sphérique et déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{-p \underline{\underline{1}}}_{\text{partie sphérique}} + \underbrace{\underline{\underline{\tau}}}_{\text{partie déviatorique}} \quad (1.6)$$

Pour de nombreux fluides usuels comme l'eau et l'air, la partie déviatorique est proportionnelle à la partie symétrique du tenseur des contraintes (hypothèse de *fluide newtonien*) :

$$\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{x}, t) = \mu (\mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{grad} \mathbf{v}^T) \quad (1.7)$$

où μ est la viscosité du fluide qui dépend de la température et de la densité du fluide.

La partie sphérique du tenseur des contraintes $-\rho \underline{\underline{1}}$ peut être, par exemple, définie via la loi des gaz parfaits rappelée ci-dessous :

$$p = \rho RT \quad (1.8)$$

où R est la constante des gaz parfaits et T est la température du gaz.

1.2.1.2 Équations de Navier-Stokes moyennées (RANS)

Dans cette thèse l'écoulement fluide sera modélisé via les équations de Navier-Stokes moyennées (*Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS)* en anglais), qui sont une simplification des équations de Navier-Stokes. Cette simplification consiste dans la décomposition des grandeurs instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante proposée par Reynolds à la fin du XIXème siècle. Les équations de Navier-Stokes moyennées sont alors :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (1.9a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \text{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) = \text{div} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_r - \bar{\rho} \underline{\underline{1}}) \quad (1.9b)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} (\bar{E} + k)}{\partial t} + \text{div} [\bar{\rho} (\bar{E} + k) \bar{\mathbf{v}}] = \text{div} \left[(\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_r) \cdot \bar{\mathbf{v}} - (\bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{q}}_t) \right] \quad (1.9c)$$

où $(\bar{\bullet})$ et $(\bullet)$ représentent respectivement la moyenne de Reynolds et la moyenne de Favre. Cette dernière est définie comme :

$$\bar{q} = \frac{\bar{\rho} q}{\bar{\rho}} \quad (1.10)$$

La moyenne de Favre du champ instantané $q = \bar{q} + q'$ de la quantité générique q amène alors à la suivante décomposition du champ :

$$q = \bar{q} + q'' \quad (1.11)$$

Les nouveaux termes qui viennent d'apparaître dans les équations (1.9) sont :

— L'énergie cinétique turbulente k :

$$k = \frac{\frac{1}{2} \overline{\rho \mathbf{v}''^2}}{\bar{\rho}} \quad (1.12)$$

— Le tenseur de Reynolds $\underline{\underline{\tau_r}}$:

$$\underline{\underline{\tau_r}} = -\overline{\rho \mathbf{v}'' \otimes \mathbf{v}''} \quad (1.13)$$

— Le flux diffusif turbulent $\mathbf{q_t}$:

$$\mathbf{q_t} = \overline{\rho \mathbf{v}'' h''} \quad (1.14)$$

Afin de fermer le système d'équations (1.9), il est nécessaire de modéliser la turbulence via la définition du scalaire k , du tenseur $\underline{\underline{\tau_r}}$ et du vecteur $\mathbf{q_t}$. Ces modèles de turbulence décomposent les inconnues principales du problème en une somme de leur valeur moyenne plus une fluctuation représentant la turbulence. Grâce aux hypothèses de Boussinesq les modèles de turbulence peuvent être réduits à la définition de trois scalaires : l'énergie cinétique turbulente k , le coefficient de viscosité turbulente μ_t et le nombre de Prandtl turbulent Pr_t à partir desquels on définit :

$$\underline{\underline{\tau_r}} = -\frac{2}{3} (\rho k + \mu_t \operatorname{div} \mathbf{v}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu_t \underline{\underline{D}} \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{q_t} = -\frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \mathbf{grad} T \quad (1.15b)$$

Pour fermer le système (1.9) nous utilisons le modèle de turbulence à une équation de Spalart-Allmaras (Spalart et Allmaras, 1992).

1.2.2 Discrétisation spatiale

Différentes méthodes sont disponibles pour discrétiser les équations de Navier-Stokes en espace : différences finies, volumes finis, éléments finis, etc... Dans le cadre de cette thèse, les codes utilisés pour résoudre les équations de Navier-Stokes sont elsA (Cambier et al., 2013 ; elsA, 2019) et Fluent (Fluent, 2019). Ces logiciels utilisent la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis consiste à découper le domaine en éléments de volume (ou cellules) à l'intérieur desquels les variables représentatives de l'écoulement sont supposées constantes.

Les équations peuvent, par exemple, être discrétisées sur un maillage structuré. Ce maillage est constitué de cellules hexaédriques empilées suivant trois directions topologiques (i, j, k) déduites des coordonnées physique (x, y, z). L'approche volumes finis consiste alors dans l'intégration du bilan des flux sur chacun des hexaèdres (cellules ou volumes de contrôle).

Une loi de conservation est définie comme suit :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (F(\psi(\mathbf{x}, t))) = 0 \quad (1.16)$$

qui s'applique en tout point d'un domaine fluide. ψ représente la variable conservative et F le flux physique. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, le flux physique peut être décomposé en une partie convective F_c et une partie visqueuse F_v :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} (F_c(\psi(\mathbf{x}, t)) + F_v(\psi(\mathbf{x}, t), \nabla \psi(\mathbf{x}, t))) = 0 \quad (1.17)$$

Le flux visqueux F_v dépend à la fois de ψ et de $\nabla \psi$.

Au lieu de chercher la solution de loi de conservation sous forme locale en tout point du domaine fluide, on va chercher à résoudre sa forme intégrale. Étant donné Ω le volume de contrôle, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} (F(\psi(\mathbf{x}, t))) d\Omega = 0 \quad (1.18)$$

Le théorème de *Green-Ostrogradski* est appliqué afin de transformer l'intégrale volumique de la divergence du flux physique en intégrale surfacique (on choisit comme volume de contrôle chaque cellule c_i du domaine fluide) :

$$\int_{c_i} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega + \sum_{f \in N_{f_{c_i}}} \int_f F(\psi(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (1.19)$$

où $N_{f_{c_i}}$ est l'ensemble des faces de la cellule c_i et $\mathbf{n}_f$ désigne la normale à la face f orientée vers l'extérieur de la cellule c_i . Sous l'hypothèse de cellules indéformables la loi de bilan peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c_i} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega + \sum_{f \in N_{f_{c_i}}} \int_f F(\psi(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (1.20)$$

On introduit la valeur moyenne de ψ sur la cellule c_i , notée $\overline{\psi}_{c_i}$:

$$\overline{\psi}_{c_i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_{c_i}} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (1.21)$$

La loi de conservation discrète prend alors la forme suivante :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}(t)}{dt} + \frac{1}{|\Omega|} \sum_{f \in N_{f_{c_i}}} \int_f F(\psi(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (1.22)$$

L'évolution des quantités inconnues $\overline{\psi}_{c_i}(t)$ dans chaque cellule est calculée par le bilan du flux physique (cf. Éq. (1.22)) qui est exprimé en fonction des états moyens dans la cellule c_i et dans les cellules voisines de celle-ci.

Le flux physique est décomposé en composantes convective et visqueuse. L'équation (1.22) s'écrit alors :

$$\frac{d\overline{\psi_{c_i}}(t)}{dt} + \frac{1}{|\Omega|} \sum_{f \in N_{f_{c_i}}} \int_f [F_c(\psi(\mathbf{x}, t)) + F_v(\psi(\mathbf{x}, t), \nabla \psi(\mathbf{x}, t))] \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (1.23)$$

Les flux convectifs et visqueux normaux à la face f sont définis comme suit :

$$F_c \cdot \mathbf{n}_f = F_c^\perp = \begin{pmatrix} \rho V_\perp \\ \rho u V_\perp + p(\mathbf{n}_f)_x \\ \rho v V_\perp + p(\mathbf{n}_f)_y \\ \rho w V_\perp + p(\mathbf{n}_f)_z \\ \rho H V_\perp \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$F_v \cdot \mathbf{n}_f = F_v^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_x \\ (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_y \\ (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_z \\ u(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_x + v(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_y + w(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_f)_z + \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}_f \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

où $V_\perp = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_f$ est la vitesse normale à la face f , $H = E + p/\rho$ l'enthalpie totale spécifique et λ la conductivité thermique. Le flux physique convectif ne dépend que des composantes ψ du vecteur des variables conservatives $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

La quantité ψ est reconstruite dans chaque cellule c_i en adoptant une reconstruction dite constante :

$$\forall \mathbf{X} \in c_i \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \overline{\psi_{c_i}}(t) \quad (1.27)$$

Les valeurs de ψ dans chacune de deux cellules se partageant la face f sont donc généralement discontinues. Ainsi, par raison de conservation, le flux physique normal est évalué par un flux numérique qui dépend des états de la cellule à gauche et à droite de celle-ci (respectivement gauche ψ^G et droite ψ^D) :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}}{dt} + \frac{1}{|\Omega|} \sum_{f \in N_{f_{c_i}}} \left[F_c^\perp(\psi^G, \psi^D) + F_v^\perp(\psi^G, \psi^D) \right] |\Sigma_f| = 0 \quad (1.28)$$

où Σ_f est la surface de la face f .

Dans le cadre de cette thèse, le schéma de Jamenson ([Jameson et al., 1981](#)) a été utilisé pour la discrétisation des flux convectifs. Il s'agit d'un schéma centré du deuxième ordre stabilisé grâce à un flux dissipatif D . Ainsi, le flux convectif normal à la face f $F_c^\perp$ est obtenu avec la relation suivante :

$$F_c^\perp(W^G, W^D) = \frac{1}{2} \left[F_c^\perp(W^G) + F_c^\perp(W^D) \right] - D(W^G, W^D) \quad (1.29)$$

où W^G et W^D indiquent respectivement le vecteur des variables conservatives respectivement dans la cellule à gauche et à droite de la face. Concernant les cellules frontières du domaine fluide, le flux convectif utilisé est celui obtenu directement avec le traitement de l'application de la condition aux limites.

Le flux numérique visqueux normal à la face f est également évalué via un schéma centré :

$$F_v^\perp(W^G, W^D) = \frac{1}{2} (F_v^G + F_v^D) \quad (1.30)$$

où F_v^G et F_v^D désignent respectivement le flux visqueux dans la cellule à gauche et à droite de la face.

Toutefois, afin d'améliorer la précision de l'estimation du gradient au centre de la face, une correction est appliquée. Le flux numérique visqueux corrigé F_v^{corr} est exprimé de la façon suivante :

$$F_v^{corr}(W^G, W^D) = F_v^\perp - \left(F_v^\perp \cdot \frac{I^G I^D}{\|I^G I^D\|} - \frac{F_v^G - F_v^D}{\|I^G I^D\|} \right) \cdot \frac{I^G I^D}{\|I^G I^D\|} \quad (1.31)$$

où I^G et I^D sont respectivement les centres des cellules à gauche et à droite de la face f .

Par défaut, le calcul du flux à la paroi est effectué par une extrapolation à l'ordre 0 du flux visqueux calculé au centre de la cellule.

1.2.3 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est généralement réalisée via un schéma basé sur la relation suivante :

$$f_{t+\Delta t} = f_t + ((1 - \theta) \dot{f}_t + \theta \dot{f}_{t+\Delta t}) \Delta t \quad (1.32)$$

où θ est un paramètre qui varie entre 0 et 1. Pour $\theta < 1/2$ (schéma explicite), afin que le schéma soit stable il est nécessaire qu'il respecte la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Cette condition impose une borne supérieure sur le pas de temps proportionnelle à la taille de la maille Δx :

$$\Delta t_C \propto \frac{\Delta x}{\max(|u|, |u \pm c|)} \quad (1.33)$$

où u et c sont respectivement la vitesse du fluide et la vitesse du son dans la direction x .

Le pas temps calculé avec l'Équation (1.33) est le pas de temps convectif. Cependant, dans la couche limite la diffusion peut devenir prépondérante et il est nécessaire alors respecter la limite due à la diffusion. Cette limite est donnée par :

$$\Delta t_D < \frac{\Delta x^2}{2\kappa} \quad (1.34)$$

où κ est définie pour l'équation du mouvement par :

$$\kappa = \frac{\mu}{\rho} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \right) \quad (1.35)$$

et pour l'équation de l'énergie par la relation suivante :

$$\kappa = \frac{\mu}{\rho} \frac{\gamma}{Pr} \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t} \right) \quad (1.36)$$

Ainsi, la limite de stabilité est le plus petit pas de temps :

$$\Delta t = \min(\Delta t_C, \Delta t_D) \quad (1.37)$$

Pour ces travaux, la méthode d'intégration "Euler arrière" (*Backward Euler Method*), qui est une méthode implicite du première ordre ($\theta = 1$), inconditionnellement stable, est retenue quelle que soit l'étude considérée (régime stationnaire ou transitoire) :

$$f_{t+\Delta t} = f_t + \dot{f}_{t+\Delta t} \Delta t \quad (1.38)$$

La plupart des logiciels CFD utilisent une résolution temporelle à pas de temps local¹ en respectant le CFL imposé (Éq. 1.33) afin d'accélérer la convergence vers l'état stationnaire. Le pas de temps local ne peut pas être utilisé pour la modélisation de l'écoulement fluide

1. à l'échelle de la cellule

en régime transitoire car il ne permet pas une cohérence temporelle entre les différentes cellules du maillage. Un pas de temps local sera alors adopté uniquement lorsque le régime stationnaire de l'écoulement est recherché.

1.2.4 Conditions aux limites

Dans le cas d'une paroi solide dans une résolution Navier-Stokes imperméable, la condition cinématique d'adhérence est imposée :

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{V}_p \quad (1.39)$$

Cette relation impose que la vitesse du fluide à la paroi $\mathbf{V}_f$ est égale à la vitesse de la paroi $\mathbf{V}_p$. La vitesse de la paroi peut être imposée par un autre code de calcul ou par un mouvement de corps rigide (translation ou rotation). Dans le cas de paroi immobile, $\mathbf{V}_p = 0$.

Dans la résolution d'un problème thermique, trois conditions aux limites sont généralement utilisées à la paroi (ces conditions aux limites sont explicitées en prenant la normale à la paroi sortante du domaine fluide) :

- La condition de Dirichlet : il s'agit d'imposer un profil de température sur la paroi p .

$$T_p = T_0 \quad (1.40)$$

où T_0 est un profil de température.

- La condition de Neumann : le flux de chaleur est imposé sur la paroi.

$$q_p = -q_0 \quad \text{ou} \quad \lambda \frac{\partial T_p}{\partial n} = -q_0 \quad (1.41)$$

où q représente le flux de chaleur.

- La condition de Robin : il s'agit d'une relation linéaire entre le flux de chaleur et la température.

$$\hat{q}_p + \alpha \hat{T}_p = -q_0 + \alpha T_0 \quad (1.42)$$

où le symbole $\hat{}$ est associé aux inconnues, α est un coefficient de "pondération" entre la condition de Neumann et la condition de Dirichlet qui sera dorénavant appelé coefficient de couplage car sa valeur permet de gérer la stabilité du problème couplé fluide-structure. En effet, en imposant les bornes du coefficient en 0 et $+\infty$ les deux premières conditions aux limites (Neumann et Dirichlet) sont retrouvées :

- Pour $\alpha_f = 0$ la condition de Neumann est obtenue (flux de chaleur imposé).
- Pour $\alpha_f = \infty$ la condition de Dirichlet est obtenue (température imposée).

L'équation (1.42) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\hat{q}_p = -q_0 + \alpha (T_0 - \hat{T}_p) \quad (1.43)$$

ainsi, une fois que l'équilibre $\hat{T}_p = T_0$ est atteint, l'équation (1.43) donne $\hat{q}_p = -q_0$. Les équilibres du flux de chaleur et de la température sont assurés quelle que soit la valeur du coefficient de couplage α .

Dans le cas $\alpha = h_\infty$ et $T_0 = T_\infty$ (température fluide loin de la paroi), la relation (1.43) peut être interprétée comme un modèle d'interface entre le fluide et la paroi. Le paramètre h_∞ est imposé par intermédiaire d'un modèle et similaire au coefficient d'échange thermique h .

1.3 THERMIQUE DU SOLIDE

1.3.1 Formulation

Soit V un volume arbitraire délimité par une surface S , la puissance thermique stockée dans V est égale à la somme de la puissance thermique générée par les sources volumiques r contenues dans V et de la puissance thermique reçue par un flux de chaleur externe q agissant sur la surface S :

$$\int_V \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV = \int_V r dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS \quad (1.44)$$

où U est l'énergie interne et $\mathbf{n}$ est la normale à la surface S dirigée vers l'interne de V . L'équation (1.44) suppose que l'analyse thermique est découplée de l'analyse mécanique du système, c'est-à-dire la température ne dépend pas des champs mécaniques comme les déformations et les contraintes dans le matériau. Plusieurs hypothèses peuvent être faites afin de simplifier le problème thermique. Ces hypothèses, décrites ci-dessous, seront employées par la suite dans le cadre des analyses de stabilité d'un problème aérothermique.

Si on suppose que le matériau a des liaisons parfaites et si on néglige la présence de toute transformation chimique ou physique de la matière, l'énergie interne est proportionnelle à la température absolue T par l'intermédiaire d'une constante C_p [J/(kgK)] appelée capacité calorifique massique. Cette relation est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.45)$$

De plus, on suppose que le matériau suit la loi de conduction de Fourier qui stipule que le flux de chaleur par unité de surface est une fonction linéaire du gradient thermique :

$$\mathbf{q} = -\underline{\lambda} \text{grad } T \quad (1.46)$$

où le tenseur $\underline{\underline{\lambda}}$ est la conductivité thermique. Si le corps est isotrope et homogène, la conductivité thermique est une constante.

Ainsi, l'Équation (1.44) devient :

$$\int_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V r dV + \int_S \mathbf{n} \cdot (-\underline{\underline{\lambda}} \mathbf{grad} T) dS \quad (1.47)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, l'intégrale surfacique devient une intégrale volumique. L'équation (1.47) s'écrit alors comme suit :

$$\int_V \left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} (-\underline{\underline{\lambda}} \mathbf{grad} T) - r \right] dV = 0 \quad (1.48)$$

Étant donné que le volume V est arbitraire, on déduit l'équation de la chaleur en tout point du solide :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} (-\underline{\underline{\lambda}} \mathbf{grad} T) - r = 0 \quad (1.49)$$

En absence de sources volumiques r et pour un matériau isotrope (λ est une constante), l'équation de la chaleur (1.49) se simplifie comme suit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad (1.50)$$

En utilisant la définition suivante de la diffusivité thermique α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (1.51)$$

L'équation (1.50) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (1.52)$$

Lorsque seul l'état stationnaire est recherché, il est possible de négliger le terme d'inertie en supposant que la chaleur se propage instantanément, l'équation de la chaleur se résume alors à l'équation suivante :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.53)$$

1.3.2 Discrétisation spatiale

La méthode la plus utilisée pour discrétiser un domaine solide est la méthode des éléments finis (MEF). La discrétisation consiste à découper le domaine en polyèdres qui représentent les éléments élémentaires e . La méthode des éléments finis utilise une

formulation intégrale (formulation faible de Galerkin) afin de se ramener à un système d'équations algébriques pouvant être résolu numériquement.

Pour résoudre l'équation de la chaleur (1.49) par la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin. Pour cela on multiplie l'équation (1.49) pour la fonction arbitraire δT et on intègre sur le domaine V :

$$\int_V \delta T \left[\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} (-\underline{\lambda} \mathbf{grad} T) - r \right] dV = 0 \quad (1.54)$$

δT est appelé fonction de pondération ou fonction de test.

En utilisant la relation suivante :

$$\text{div} (f \mathbf{v}) = f \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} f \quad (1.55)$$

où f est un scalaire, on peut écrire l'équation (1.54) comme suit :

$$\int_V \delta T \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V \text{div} [\delta T (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T)] - \int_V \mathbf{grad} \delta T \cdot (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T) dV - \int_V \delta T r dV = 0 \quad (1.56)$$

Le deuxième intégrale de l'équation (1.56) peut être transformé en intégrale de surface à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_V \text{div} [\delta T (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T)] = \int_{S_\varphi} \delta T \mathbf{n} \cdot (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T) dS + \int_{S_T} \delta T \mathbf{n} \cdot (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T) dS \quad (1.57)$$

où S_φ et S_T sont les parties de la surface S où on impose respectivement une condition de Neumann ou de Robin et une condition de Dirichlet. En imposant $\delta T = 0$ sur S_T le deuxième intégrale s'annule.

Ainsi, la formulation intégrale faible du problème thermique est obtenue :

$$\int_V \delta T \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_V \mathbf{grad} \delta T \cdot (\underline{\lambda} \mathbf{grad} T) dV + \int_{S_\varphi} \delta T q_n dS - \int_V \delta T r dV = 0 \quad \forall \delta T \quad (1.58)$$

Dans la méthode des éléments finis le champ de température $T(\mathbf{x})$ dans le volume élémentaire e est exprimé par :

$$T(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) T^n \quad (1.59)$$

où $N(\mathbf{x})$ sont les fonctions d'interpolation élémentaires ou fonctions de forme et T^n est la température aux nœuds de l'élément e .

La fonction test δT est également interpolée à l'aide des même fonctions de forme. L'équation (1.58) s'écrit alors comme suit :

$$\delta T^n \left\{ \int_V N \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} \underline{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} dV + \int_{S_\varphi} N q_n dS - \int_V N r dV \right\} = 0 \quad (1.60)$$

Étant donné que δT^n est une fonction quelconque, l'équation (1.60) devient :

$$\int_V N \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial N}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dV + \int_{S_\phi} N q_n dS - \int_V N r dV = 0 \quad (1.61)$$

Le solveur Z-set utilisé dans ces travaux de thèse pour la résolution de la thermique dans le solide est un solveur incrémental capable de résoudre des problèmes non-linéaires. Ainsi, l'équation de la chaleur résolue est l'équation (1.61) écrite de façon incrémentale.

1.3.3 Discrétisation temporelle

Afin de suivre l'évolution de la diffusion thermique dans le solide, un schéma implicite est utilisé :

$$f_{t+\Delta t} = f_t + ((1 - \theta) \dot{f}_t + \theta \dot{f}_{t+\Delta t}) \Delta t \quad (1.62)$$

Pour la résolution d'un problème thermique en régime transitoire, le logiciel Z-set utilise par défaut la méthode d'intégration "Euler arrière" (*Backward Euler Method*), où $\theta = 1$. Ce schéma est inconditionnellement stable. Dans le cas d'un système non-linéaire, le système d'équation est résolu via la méthode de Newton-Raphson.

Le pas de temps Δt à utiliser pour la résolution du problème thermique en régime transitoire est calculé via le nombre de Fourier défini comme suit :

$$D = \frac{a \Delta t}{L^2} \quad (1.63)$$

où L est la longueur caractéristique du solide et a la diffusivité thermique (cf. Éq. (1.51)).

Ce nombre caractérise la part du flux de chaleur qui est transmise au corps dans l'intervalle de temps Δt par rapport à la chaleur qui est déjà stockée dans le corps. Physiquement, plus le nombre de Fourier est grand, plus la chaleur pénètre profondément à l'intérieur du corps dans le temps Δt .

1.3.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites thermiques appliquées, dans le cadre de cette thèse, au problème thermique solide sont les mêmes que celles décrites pour la mécanique des fluides dans la Section 1.2.4. Il s'agit des conditions de Dirichlet (1.40), de Neumann (1.41) et de Robin (1.42).

Lorsqu'un solide est en contact avec un écoulement fluide, le transfert à l'interface peut être décrit par une loi convective de type Robin :

$$\hat{q}_p = -\lambda_s \frac{\partial \hat{T}_p}{\partial n} = q_0 + h (T_0 - \hat{T}_p) \quad (1.64)$$

où $\alpha = h$ (coefficient d'échange thermique), T_0 une température caractéristique (typiquement la température du fluide loin de la paroi) et q_0 un flux de chaleur.

La condition de Robin, comme la condition Neumann, impacte l'intégrale surfacique dans la formulation intégrale faible (1.58) :

$$\int_{S_\varphi} \delta T q dS \quad (1.65)$$

En effet, en ajoutant la condition de Robin exprimée comme suit :

$$q + \alpha T = q_0 + \alpha T_0 = g \quad (1.66)$$

l'intégrale (1.65) devient :

$$\int_{S_\varphi} \delta T (g - \alpha T) dS = \int_{S_\varphi} g dS + \int_{S_\varphi} \alpha T dS \quad (1.67)$$

où la première intégrale s'ajoute à la contribution des forces externes et la deuxième modifie la matrice de conductivité thermique apparente. Cette deuxième contribution impacte la stabilité et la convergence de résolution du problème thermique.

1.4 RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Les sections précédentes ont permis d'explicitier les équations régissant les différentes physiques et leurs méthodes de résolution. L'intérêt est désormais porté sur la prise en compte de l'interaction entre les deux physiques.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, pour obtenir une bonne évaluation des quantités pariétales², il est nécessaire de coupler les équations qui dominent les physiques en interaction. Dans le cas d'un problème aérothermique, les équations à coupler sont les équations de Navier-Stokes qui décrivent le comportement du fluide et l'équation de la chaleur qui décrit la diffusion thermique dans le solide.

Pour assurer le couplage, l'égalité des flux de chaleur et de température à l'interface fluide-structure doit être vérifiée :

$$\begin{cases} T_f = T_s & \text{sur } \Gamma \\ \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial n_f} = -\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial n_s} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.68)$$

où Γ est l'interface de couplage représentant l'union de l'interface fluide Γ_f et de l'interface solide Γ_s et n le vecteur unitaire normal à la paroi (cf. Figure 1.1).

2. Quantités caractéristiques de l'interface fluide-structure

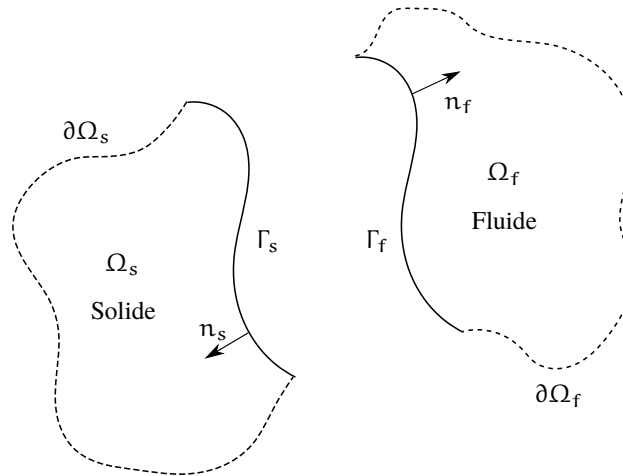


FIGURE 1.1 – Système couplé

1.4.1 Approches de résolution fluide-structure

Dans cette section, nous allons présenter une vue d'ensemble des principales approches utilisées dans la littérature pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure. Ces approches peuvent être employées pour tout type d'interaction fluide-structure : aérothermique, aéroélasticité, etc...

1.4.1.1 Approche monolithique et partitionnée

Il existe deux principales stratégies pour résoudre des problèmes d'interaction entre deux physiques :

- L'approche monolithique : le problème est traité dans son ensemble et toutes les équations sont résolues simultanément à travers un unique système d'équation.
- L'approche partitionnée : les problèmes associés aux différentes physiques sont résolus séparément et une troisième entité est chargée d'échanger les quantités pariétales d'un problème à l'autre afin d'assurer les conditions aux limites à l'interface.

Dans le cas monolithique, le système d'équations non-linéaires est généralement résolu avec une variante de la méthode de Newton. Le système d'équations intègre l'interface fluide-structure. Ainsi, aucune instabilité supplémentaire n'est ajoutée à ce système multi-physique déjà complexe (Heil et al., 2008). Cette approche est généralement difficile à mettre en place car il est nécessaire de découper les domaines fluide et solide avec la même discrétisation spatiale. Par exemple, Hübner et al., 2004 utilisent une discrétisation en éléments finis et Blom, 1998 opte pour la méthode des volumes finis. Cette tâche est difficile sur des géométries complexes telles que celles utilisées dans le secteur industriel.

Un autre grand inconvénient de l'approche monolithique est de devoir utiliser la même discrétisation temporelle pour les différentes physiques. Ceci est acceptable pour des problèmes où les temps caractéristiques des physiques en jeu sont du même ordre de grandeur (problèmes aéroélastiques par exemple), ce qui n'est pas le cas des problèmes aérothermiques. En effet, le temps caractéristique de la convection thermique dans le fluide et celui de la conduction thermique dans le solide peut différer de 3-4 ordres de grandeur. L'emploi de la même discrétisation temporelle dans tout le problème force à utiliser le plus petit pas de temps (celui du fluide) ce qui conduit à une sur-intégration inutile du problème associé au solide augmentant alors le temps de calcul.

Enfin, l'approche monolithique nécessite un solveur capable de résoudre différents problèmes physiques à la fois. En effet, le problème de mécanique du solide et celui de la mécanique des fluides sont résolus avec des méthodes différentes. Les éléments finis sont les plus utilisés pour la physique du solide. Les volumes finis sont quant à eux privilégiés pour la mécanique des fluides. Il n'est également pas facile de résoudre un système d'équations incluant plusieurs physiques. En effet, si les physiques ont des propriétés très différentes, les problèmes peuvent ne pas être bien conditionnés (Farhat, Lesoinne et Le Tallec, 1998).

L'approche partitionnée a, quant à elle, été développée afin d'accélérer et faciliter la résolution des problèmes couplés qui étaient traités via l'approche monolithique. L'avantage majeur est la modularité logicielle qui permet la réutilisation des codes existants spécifiques à chaque physique. Ainsi, l'utilisateur peut choisir des méthodes et modèles propres à la physique traitée. Cette résolution séparée n'impose pas de contraintes sur la discrétisation spatiale des différents domaines et permet une intégration temporelle optimale en utilisant des pas de temps appropriés à chaque phénomène. La résolution est généralement plus rapide (Felippa et Park, 1980; Felippa, Park et Farhat, 2001).

Toutefois, la résolution dissociée des physiques entraîne un décalage lors de l'intégration temporelle induisant une discontinuité à l'interface à chaque pas de temps (Farhat, Lesoinne et Le Tallec, 1998; Jaiman et al., 2011). L'équilibre des quantités à l'interface fluide-structure n'est pas respecté. Ce déséquilibre peut se réduire au fil des itérations de couplage ou augmenter en faisant diverger la solution. De nombreux auteurs ont constaté que ces instabilités sont produites par un déséquilibre entre les énergies transmises au travers de l'interface par chacune des physiques. Dans le cas d'un couplage aéroélastique, cette énergie $\Delta\epsilon$ représente le travail de l'effort à l'interface engendré par la différence des déplacements des surfaces fluide et solide. Parmi ces auteurs, Le Tallec, Gerbeau et al., 2005 proposent une estimation de cette énergie en utilisant l'algorithme CSS (*Conventional Sequential Staggered*, algorithme partitionné décrit au paragraphe 1.4.2) pour des problèmes aéroélastiques :

$$\Delta\epsilon = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_F^{n+1} (\mathbf{u}_S^{n+1} - \mathbf{u}_F^{n+1}) \quad (1.69)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_F^{n+1}$ est le tenseur des contraintes dans le fluide qui est égal à celui dans le solide par construction de l'algorithme de couplage, enfin $\mathbf{u}_S^{n+1}$ et $\mathbf{u}_F^{n+1}$ sont respectivement les déplacements de l'interface dans les domaines solide et fluide. Cet algorithme utilise une prédiction constante entre les temps n et $n+1$, ce qui donne $\mathbf{u}_F^{n+1} = \mathbf{u}_S^n$. L'équation 1.69 devient :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_F^{n+1} (\mathbf{u}_S^{n+1} - \mathbf{u}_S^n) \quad (1.70)$$

L'énergie artificiellement créée à l'interface fluide-structure ne peut pas être nulle car la position de l'interface solide varie d'une itération à l'autre. Ainsi, plus l'intervalle entre deux échanges est petit plus l'algorithme est stable.

La définition (1.69) a été formulée pour un problème aéroélastique mais elle peut être étendue par analogie à un problème aérothermique.

En conclusion, une attention particulière doit être portée à la formulation et l'implémentation des algorithmes partitionnés afin de réduire le déséquilibre à l'interface. Ces dernières décennies, de nombreuses études consacrées à la stabilité des algorithmes partitionnés ont tenté de comprendre la nature de cette instabilité et de trouver des moyens pour la prévenir. Nous allons présenter celles qui nous semblent les plus pertinentes pour notre étude dans le chapitre 2.

1.4.1.2 Couplage fort et faible

Dans le cadre de la résolution des problèmes multiphysiques, il est nécessaire de faire une distinction entre les algorithmes de couplage fort et ceux de couplage faible. Dans la littérature cette distinction est ambiguë, il peut s'agir :

- d'une distinction entre les algorithmes utilisant une approche monolithique et ceux utilisant une approche partitionnée ;
- d'une distinction entre les algorithmes utilisant une méthode implicite et ceux utilisant une méthode explicite ;
- d'une distinction entre les algorithmes qui respectent et ceux qui ne respectent pas la continuité du flux de chaleur et de la température (CFT) à l'interface à chaque itération de couplage.

La définition retenue est celle généralement utilisée à l'Onera depuis la thèse de [Garaud, 2008](#) qui relie ces termes *fort* et *faible* au respect ou non du critère CFT.

En résolvant un problème multiphysique avec l'approche monolithique, le critère CFT est toujours respecté car l'interface fait partie du domaine de résolution. Au contraire, pendant la résolution d'un problème via une approche partitionnée le critère CFT n'est généralement pas respecté, ce qui d'après la définition retenue voudrait dire qu'il s'agit d'un couplage faible. Cela justifie l'association faite par certains auteurs entre l'approche monolithique (respectivement l'approche partitionnée) et un couplage fort (respectivement un couplage faible). Cependant, dans la section suivante nous montrons qu'il existe des algorithmes partitionnés "forts".

1.4.2 Algorithmes de couplage partitionnés

Cette section permet de présenter les principaux algorithmes de couplage partitionnés proposés dans la littérature.

1.4.2.1 Algorithme partitionné séquentiel

Il s'agit de l'algorithme partitionné le plus connu et utilisé dans la littérature car il est le plus simple à mettre en place. Cependant, le couplage produit par cet algorithme est a priori faible.

Cet algorithme est mieux connu sous son acronyme *CSS* (*Conventional Serial Staggered*) (Piperno, 1995 ; Piperno et al., 1995). Il est composé de quatre étapes qui se poursuivent jusqu'à l'obtention de la convergence. L'algorithme est illustré sur la Figure 1.2 et détaillé via l'algorithme 1, où les numéros de ligne coïncident avec les quatre étapes indiquées dans la figure.

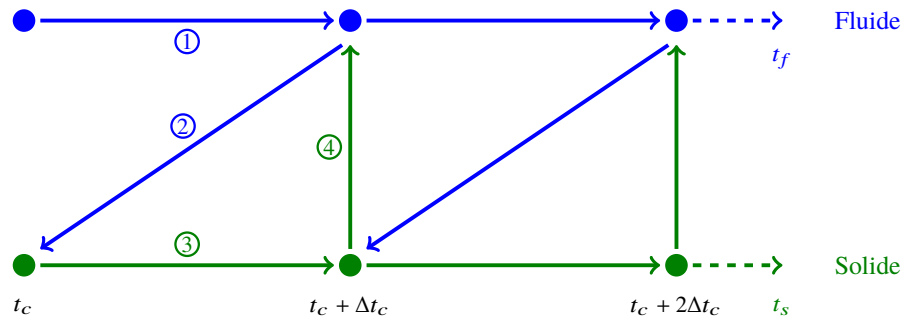


FIGURE 1.2 – Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel

Algorithme 1 : Algorithme partitionné séquentiel

tant que le critère de convergence n'est pas satisfait **faire**

- | | |
|---|--|
| 1 | Mise à jour de l'état de l'interface fluide à l'instant t_c ;
Prédiction de l'état de l'interface fluide à $t_c + \Delta t_c$;
Résolution du problème fluide à $t_c + \Delta t_c$; |
| 2 | Envoi des quantités pariétales du problème fluide au problème solide à $t_c + \Delta t_c$; |
| 3 | Mise à jour de l'interface solide à t_c ;
Résolution du problème solide de t_c à $t_c + \Delta t_c$; |
| 4 | Envoi des quantités pariétales du problème solide au problème fluide à $t_c + \Delta t_c$; |
-

L'algorithme CSS est appelé "Staggered" (*décalé* en français) car l'intégration temporelle des différents problèmes physiques est faite séparément et de façon décalée. En effet afin

de résoudre le problème fluide à $t + \Delta t$ (étape ①), il est nécessaire de connaître l'état de l'interface fluide à cet instant qui est généralement considéré inchangé par rapport à l'itération précédente.

1.4.2.2 Algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé

Afin de prendre en compte les différents temps caractéristiques des physiques couplées il est possible de sous-cycler la physique la plus rapide et de la coupler avec la physique la plus lente une fois son temps caractéristique atteint. Généralement dans le couplage fluide-structure le pas de temps caractéristique de l'écoulement fluide est plus petit que celui du solide, le fluide sera donc la physique sous-cyclée (voir la Figure 1.3). Cet algorithme, dit partitionné séquentiel sous-cyclé, est une légère variante de l'algorithme précédent qui permet d'utiliser des pas de temps optimaux pour chaque physique.

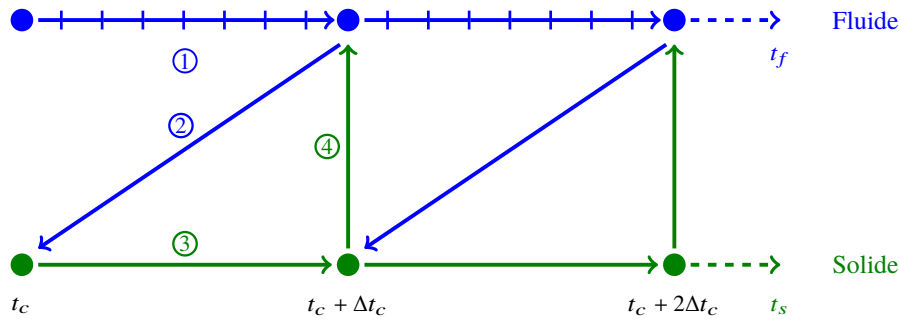


FIGURE 1.3 – Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel sous-cyclé

Cette variation consiste simplement à modifier la fréquence d'envoi et de réception des données de couplage pour le solveur fluide. En utilisant ce type d'algorithme il est possible d'utiliser des prédictions plus complexes à l'étape ① de l'algorithme permettant d'accélérer la convergence et d'améliorer la précision de la solution.

1.4.2.3 Algorithme partitionné parallèle

Dans les deux algorithmes précédents, une fois que le solveur associé à l'une des physiques a envoyé ses données il reste en attente jusqu'à l'obtention de nouvelles informations provenant du solveur associé à l'autre physique. Le temps d'attente peut être plus ou moins long en fonction de la taille et de la complexité des problèmes à résoudre pour chacune des physiques. Pour éviter tout gaspillage du temps de calcul, [Weeratunga et Pramono, 2013](#) proposent un algorithme où les deux physiques sont temporellement intégrées en parallèle et l'échange d'information est fait simultanément comme montré sur la Figure 1.4. L'algorithme obtenu est appelé "Algorithme partitionné parallèle" (*Conventional Parallel Staggered* en anglais). Cet algorithme a besoin de deux prédictions, une pour le solide et une pour le fluide comme décrit par l'algorithme 2.

L'algorithme partitionné parallèle peut aussi être sous-cyclé comme pour l'algorithme CSS.

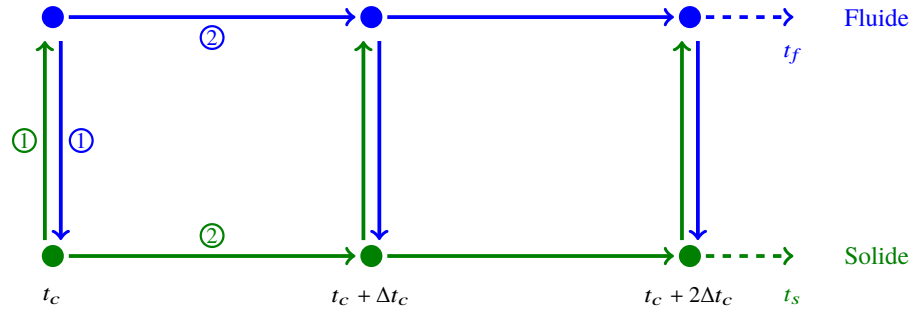


FIGURE 1.4 – Schématisation de l'algorithme partitionné parallèle

Algorithme 2 : Algorithme partitionné parallèle

tant que le critère de convergence n'est pas satisfait **faire**

- | | |
|---|--|
| 1 | Fluide : Envoi et reception des information à t_c et prédiction de l'état de l'interface fluide à $t_c + \Delta t_c$;
Solide : Envoi et reception des information à t_c et prédiction de l'état de l'interface solide à $t_c + \Delta t_c$;
2 Intégration du fluide du problème fluide d'un Δt_c ;
Intégration du problème solide d'un Δt_c ; |
|---|--|
-

Piperno et al., 1995 montrent sur un cas 1D que cet algorithme est moins précis que les deux précédents puisqu'il repose sur deux prédictions. Son utilisation est conseillée seulement dans le cas où les temps de calcul des deux physiques sont du même ordre de grandeur.

1.4.2.4 Variantes des algorithmes partitionnés afin d'en améliorer les performances

Piperno et al., 1995 ont montré que les algorithmes précédents peuvent atteindre au maximum une convergence du premier ordre en temps, même si les problèmes associés aux différentes physiques sont résolus avec des schémas du deuxième ordre en temps.

L'ordre en temps d'un schéma est l'exposante k dans l'expression théorique de l'erreur de discrétisation ϵ en fonction du pas de temps :

$$\epsilon = O(\Delta t_c^k) \quad (1.71)$$

Pour atteindre l'ordre 2, Farhat et Lesoinne, 2000 proposent une version de l'algorithme CSS où les échanges sont désynchronisés d'un demi pas de temps comme montré sur la Figure 1.5.

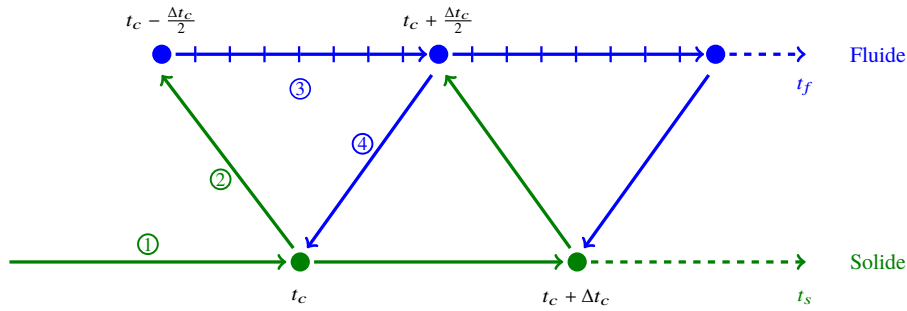


FIGURE 1.5 – Schématisation de l'algorithme partitionné séquentiel désynchronisé

De la même façon, ils proposent une variante de l'algorithme parallèle où les solveurs solide et fluide avancent ensemble, le solide d'un pas de temps de couplage et le fluide d'un demi-pas de temps de couplage. Les quantités pariétales calculées par le solide sont utilisées pour corriger la prédiction fluide au demi-pas de temps, alors que les informations calculées au demi-pas fluide sont utilisées pour re-calcule le pas de temps solide (cf. Figure 1.6).

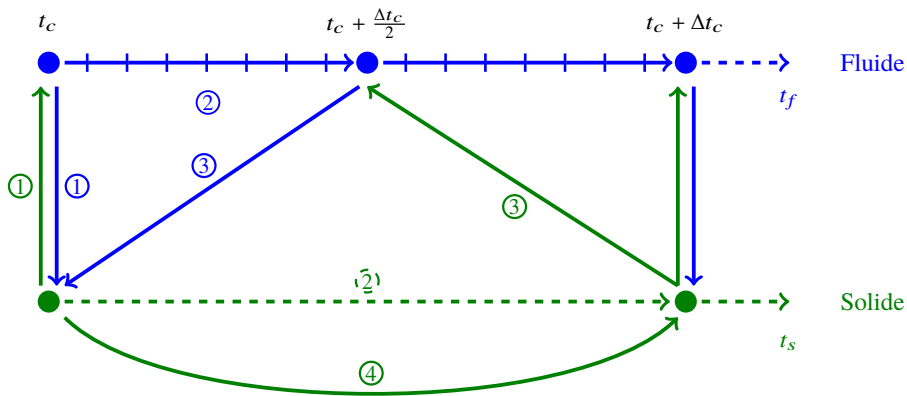


FIGURE 1.6 – Schématisation de l'algorithme partitionné parallèle amélioré

Ces derniers algorithmes sont essentiels pour assurer la conservativité à l'interface fluide-structure dans les problèmes aéroélastiques. Ils peuvent également être utiles pour des problèmes où les maillages restent fixes comme en aérothermique car ils augmentent la qualité de la prédiction.

D'autres techniques peuvent être employées afin d'améliorer les algorithmes de couplage : des techniques de correction, de substitution et de synchronisation (Felippa, Park et Farhat, 2001).

1.4.2.5 Algorithmes de couplage instationnaire-instationnaire

En régime permanent, la synchronisation des résolutions n'est pas obligatoire même si elle est conseillée pour des raisons de stabilité. En régime transitoire (ou instationnaire), il est crucial que les deux physiques soient couplées simultanément car l'objectif est de suivre l'évolution de l'échange thermique au cours du temps.

Tous les algorithmes décrits dans la section 1.4.2 peuvent être utilisés en régime transitoire à condition que le couplage soit effectué à $t_c = t_f = t_s$. Ces algorithmes sont adaptés aux problèmes d'interaction fluide-structure quel que soit le type d'interaction. Cependant, il s'agit d'algorithmes de couplage faible, le critère CFT n'est donc pas respecté et il est nécessaire d'employer des pas de temps de couplage infimes. Ainsi, l'état des deux physiques diffère peu entre deux couplages ce qui limite l'accumulation d'erreur à l'interface. En règle générale, le pas de temps de couplage doit coïncider avec le pas de temps de la physique la plus rapide (en l'occurrence, le fluide). Le temps de calcul de cet algorithme peut être du même ordre de grandeur que l'approche monolithique en étant toutefois plus facile à mettre en place. L'algorithme CSS instationnaire-instationnaire sera utilisé dans cette thèse pour calculer la solution de référence des différents cas test étudiés.

Comme mentionné dans le paragraphe 1.4.1.2, il est possible de transformer un algorithme partitionné faible en algorithme partitionné fort en ajoutant un processus itératif à chaque pas de temps de couplage afin que le critère CFT soit respecté pendant le régime transitoire. Le principe de ces algorithmes est de corriger à chaque itération la prédiction jusqu'à ce que cette dernière atteigne une solution qui respecte le critère de convergence choisi. Cette méthode permet d'augmenter le pas de temps de couplage.

Dans la littérature, le processus itératif peut être réalisé via une méthode de recherche du point fixe telle que les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel ou encore de Newton (Le Tallec et Mouro, 2001 ; Matthies et Steindorf, 2002 ; Gerbeau et Vidrascu, 2003 ; Mok et al., 2007). L'application de la méthode de Newton nécessite le calcul du Jacobien à chaque couplage ce qui peut être coûteux. C'est pour cela que d'autres techniques ont été employées : la méthode de quasi-Newton (Verdicchio et al., 2001) qui utilise une approximation du coefficient d'échange thermique, la méthode de GMRES interfaciale (Küttler et Wall, 2009), la méthode de Newton-Krylov (Knoll et Keyes, 2004) ou encore la méthode de mixage d'Anderson (Ganine, Hills et al., 2013).

Bien que ces derniers algorithmes respectent le critère CFT, dans certains cas une relaxation est nécessaire pour converger vers une solution stable (Le Tallec et Mouro, 2001 ; Nobile, 2001 ; Grandmont et al., 2002).

1.4.3 Algorithmes de couplage utilisés dans le cadre de la thèse

Dans cette section nous spécifions les algorithmes qui ont été utilisés dans le cadre de ces travaux. Le choix de l'algorithme de couplage dépend de la finalité de l'étude, c'est-à-dire de l'aspect de l'interaction thermique fluide-structure qui est étudié. De plus, pour choisir entre un algorithme séquentiel ou parallèle, il est nécessaire d'estimer le coût de résolution de chaque physique. Dans le cadre de cette thèse, nous allons d'abord travailler sur l'interaction thermique fluide-structure en régime permanent puis en régime transitoire. Nous rappelons que dans l'étude du régime transitoire, l'attention est portée exclusivement sur l'évolution de la charge thermique subie au cours du temps par la structure en interaction avec un écoulement fluide. Ces motivations ont déterminé le choix des algorithmes.

1.4.3.1 Étude du régime permanent

Lorsque seul le régime permanent du problème couplé aérothermique est recherché, il est possible de mettre en place des méthodes numériques qui permettent d'atteindre la solution sans passer par la résolution du problème en régime transitoire. Il n'est donc pas nécessaire d'assurer l'équilibre aérothermique pendant la résolution. Cette démarche suppose qu'il n'y ait pas de phénomènes dissipatifs irréversibles, c'est-à-dire dans le cas où le problème thermique est linéaire. Ainsi, le choix est porté vers un algorithme partitionné faible.

Par ailleurs, dans le cas du couplage aérothermique, le temps de calcul de la CFD est plus important que celui de la résolution du problème de conduction dans le solide. Ceci justifie le choix d'un algorithme séquentiel plutôt qu'un algorithme parallèle afin de privilégier la précision au temps de calcul. Dans ce cas, le temps consacré à la résolution du problème aérothermique complet est du même ordre de grandeur que celui nécessaire pour la résolution de la CFD. Ainsi, l'algorithme de couplage séquentiel CSS sous-cyclé est privilégié car il est le plus simple à mettre en œuvre et le plus adapté au contexte industriel.

Afin de trouver rapidement la solution du problème en régime permanent, il est possible de négliger le régime transitoire dans le solide en supposant que la conduction thermique dans le solide est instantanée (capacité thermique nulle). Cette hypothèse rend la thermique dans le solide linéaire et réversible. Nous allons donc utiliser une variante de l'algorithme CSS qui couple une résolution de l'écoulement fluide en régime transitoire (Éq. (1.9)) avec une séquence de résolutions de la conduction thermique dans le solide en régime stationnaire (Éq. (1.53)). L'algorithme résultant est présenté sur la Figure 1.7.

Les étapes de cet algorithme sont décrites dans l'Algorithme 3.

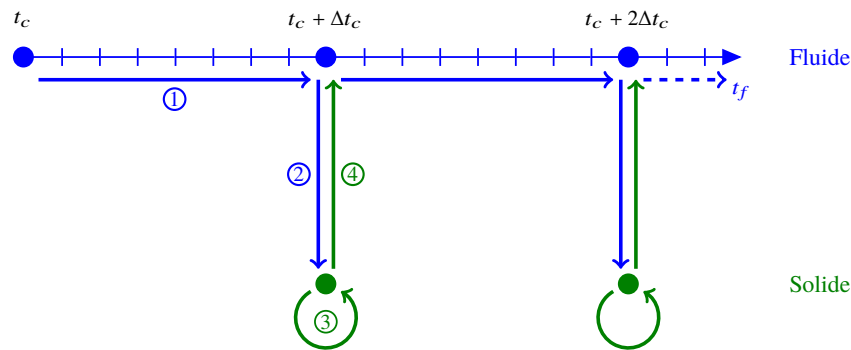


FIGURE 1.7 – Schématisation de l'algorithme de couplage séquentiel stationnaire

Algorithme 3 : Algorithme partitionné séquentiel stationnaire**tant que** le critère de convergence n'est pas satisfait **faire**

- 1 Mise à jour de l'état de l'interface fluide à l'instant t_c ;
Prédiction de l'état de l'interface fluide à $t_c + \Delta t_c$;
Résolution du problème fluide à $t_c + \Delta t_c$;
- 2 Envoi des quantités pariétales du problème fluide au problème solide à $t_c + \Delta t_c$;
- 3 Mise à jour de l'interface solide ;
Résolution du problème solide en régime stationnaire ;
- 4 Envoi des quantités pariétales du problème solide au problème fluide à $t_c + \Delta t_c$;

1.4.3.2 Étude du régime transitoire

Dans le cas de l'étude de l'interaction fluide-structure en régime transitoire, l'objectif est d'évaluer la charge thermique transitoire dans le solide. Il devient alors primordial de modéliser le phénomène conductif dans le solide en régime transitoire.

Dans le cas d'un couplage aérothermique, les temps caractéristiques des deux physiques (convection dans le fluide et conduction dans le solide) peuvent avoir des ordres de grandeur différents. L'utilisation d'un algorithme de couplage instationnaire-instationnaire avec un pas de temps de couplage égal au temps caractéristique du fluide peut se révéler très coûteux et inutile du point de vue de la résolution de la conduction solide qui ne varie pas dans un intervalle de temps si faible. En effet, l'instationnarité de l'écoulement est en général négligeable pendant le temps caractéristique de la conduction dans le solide. Il est alors légitime de représenter l'écoulement comme une suite d'états fluides stationnaires résolus à des instants spécifiques.

L'algorithme de couplage quasi-instationnaire est présenté sur la Figure 1.8. Il est basé sur le couplage fluide-structure à certains instants c choisis par l'utilisateur suivant les

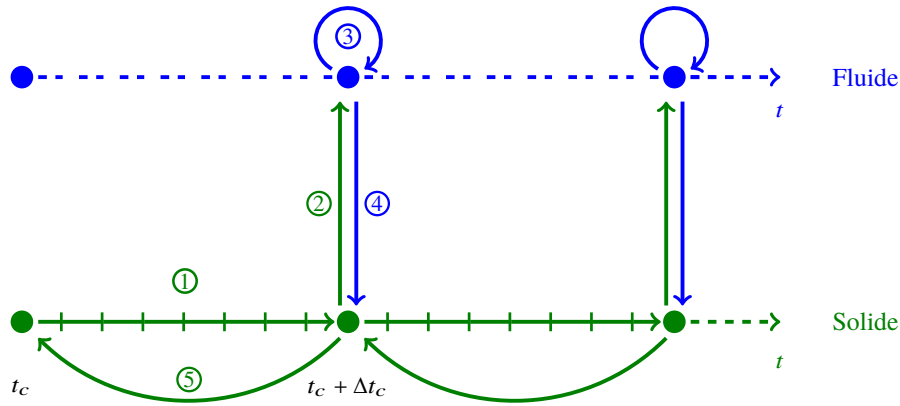


FIGURE 1.8 – Algorithme quasi-instationnaire

caractéristiques aérothermiques au cours d'une mission sur une longue durée. Entre deux instants de couplage un processus itératif est mis en place afin de respecter le critère CFT. L'algorithme de couplage devient fort, ce qui permet de suivre correctement le régime transitoire. L'algorithme quasi-instationnaire comprend cinq étapes, expliquées dans l'Algorithme 4. Ces étapes sont répétées jusqu'à la satisfaction du critère de convergence choisi.

Algorithme 4 : Algorithme quai-instationnaire

```

pour  $c = 1 \dots C$  faire                                     // nombre d'instants de couplage
    répéter
1      Prédiction de l'évolution de l'état fluide et avancement du problème solide
      de  $t_{c-1}$  à  $t_c$ ;
2      Envoi des quantités pariétales solide au solide à  $t = t_c$ ;
3      Mise à jour de l'interface fluide et calcul de l'écoulement fluide en régime
      permanent à  $t = t_c$ ;
4      Envoi des quantités pariétales fluide au solide;
5      Retour à  $t = t_{c-1}$  et mise à jours de la prédiction de l'évolution de l'état
      fluide;
    jusqu'à le critère de convergence est satisfait;

```

Dans le cadre de cette thèse, nous allons utiliser cet algorithme pour étudier l'interaction thermique entre un écoulement fluide et une structure en régime transitoire. Cet algorithme a souvent été utilisé pour le calcul du transitoire dans les problèmes aérothermiques. [Chemin, 2006](#), [Baqué, 2012](#), [Errera et Baqué, 2013](#) et [Errera, Lazareff et al., 2017](#) ont montré son efficacité sur une plaque plane. [Sun, Chew, Hills, Volkov et al., 2009](#) et [Ganine, Javiya et al., 2012](#) l'ont testée sur des configurations industrielles telles que des disques de turbine haute-pressure. Les auteurs ont montré la rapidité de

la méthode mais aussi ses limites concernant la précision et la stabilité. Ainsi, à partir du chapitre 7 l'attention sera portée sur l'étude de la précision et de la stabilité de l'algorithme quasi-instationnaire afin de réduire ces limites.

Il existe dans la littérature d'autres procédures qui permettent d'accélérer la résolution de l'interaction thermique fluide-structure en régime transitoire. Par exemple, [He et Fadl, 2017](#) mettent en place une résolution temporelle multi-échelle en prenant en compte le temps caractéristique du fluide par le biais d'un terme source inséré dans les équations gouvernant l'écoulement fluide. Alternativement, il est possible de négliger la disparité des temps caractéristiques entre la convection fluide et la conduction solide via une résolution de la conduction solide dans le domaine fréquentiel ([He et Oldfield, 2010](#)).

Afin de valider les résultats obtenus par l'algorithme quasi-instationnaire, nous les comparerons à une solution de référence obtenue en utilisant l'algorithme CSS instationnaire-instationnaire. Malgré que l'algorithme de couplage soit faible, il est possible de calculer une solution approximative très proche de la solution exacte en couplant fréquemment le fluide et la structure, afin de pouvoir calculer l'erreur induite par la méthode de couplage.

1.5 CONCLUSION

Ce chapitre a tout d'abord permis de présenter les équations qui régissent les différentes physiques étudiées (l'écoulement fluide et la conduction dans le solide) et les méthodes respectives employées pour les résoudre.

Ensuite les deux principales approches envisagées pour étudier l'interaction entre ces deux physiques ont été exposées. L'approche partitionnée a été sélectionnée pour sa modularité (couplage de codes de calculs existants) qui permet de faire interagir entre elles plusieurs physiques sur des configurations complexes. Ainsi différents algorithmes partitionnés couplant deux problèmes physiques ont été décrits.

L'algorithme de couplage séquentiel stationnaire (Figure 1.7) est retenu pour l'étude de l'interaction thermique en régime permanent. Dans ce cas, la thermique du solide est considérée en régime permanent, ce qui accélère la convergence du calcul même si cela engendre des instabilités à l'interface. Ces instabilités seront abordées dans le chapitre suivant. En ce qui concerne l'étude du problème aérothermique en régime transitoire, nous allons utiliser l'algorithme de couplage quasi-instationnaire qui permet de réduire les temps de calcul car le régime transitoire de l'écoulement fluide n'est pas recherché. La solution obtenue sera ensuite comparée à une solution de référence obtenue grâce à l'algorithme CSS instationnaire-instationnaire.

2

PANORAMA DES ÉTUDES DE STABILITÉ DES ALGORITHMES PARTITIONNÉS POUR L'AÉROTHERMIQUE

Ce chapitre présente les principaux travaux réalisés sur la stabilité des algorithmes partitionnés. Ces travaux ont été classés suivant l'approche utilisée.

La section 2.1 décrit les différentes analyses basées sur la théorie des modes normaux de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#) avec notamment l'étude de [Giles, 1997](#) qui est le premier à l'avoir appliquée aux problèmes aérothermiques. Dans cette première section, d'autres études de stabilité utilisant cette méthode sont décrites ([Roe et al., 2008](#); [Henshaw et Chand, 2009](#); [Joshi et Leyland, 2014](#); [Kazemi-Kamyab et al., 2014](#)).

Dans la section 2.2, les travaux de ([Lindström et Nordström, 2010](#)) sont présentés. Les auteurs ont employé une méthode basée sur l'équilibre énergétique (appelée méthode de l'énergie dans la suite du document) afin d'étudier la stabilité d'un problème aérothermique en régime permanent.

La section suivante 2.3 est dédiée à l'étude de [Roux et Garaud, 2009](#) qui analyse la stabilité d'un système d'interaction thermique fluide-structure via une approche matricielle basée sur la décomposition de domaine.

La section 2.4 décrit l'étude de stabilité de [Verstraete et Scholl, 2016](#) basée sur une approche physique.

Pour conclure ce panorama, la section 2.5 détaille les travaux récemment effectués à l'ONERA sur la stabilité des problèmes aérothermiques en régime permanent ([Errera et Chemin, 2013](#); [Errera et Duchaine, 2016](#)) et en régime transitoire ([Errera, Lazareff et al., 2017](#)). Bien que ces travaux soient basés sur la théorie des modes normaux de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#), nous avons décidé de leur dédier cette section. En effet, les travaux de l'ONERA ont mis en évidence une transition fondamentale dans le couplage aérothermique et sur cette base des résultats essentiels sur la stabilité et la rapidité de convergence ont été obtenus. Cette thèse s'inscrit dans la continuité de cette approche.

Il existe dans la littérature d'autres études très prometteuses qui sont appliquées à des problèmes d'interaction thermique fluide-structure ([Duchaine et al., 2009](#); [Jaure et al., 2013](#); [Koren et al., 2017](#)). Ces études sont essentiellement basées sur le couplage LES-Conduction, qui n'est pas abordé dans ces travaux de thèse.

2.1 ÉTUDES DE STABILITÉ BASÉES SUR LA THÉORIE DES MODES NORMAUX

Les principales études de stabilité basées sur la théorie des modes normaux de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#) sont décrites dans cette section. Les travaux de [Giles, 1997](#) sont tout d'abord présentés, ensuite l'intérêt est porté sur d'autres études jugées intéressantes dans le cadre de ce panorama.

2.1.1 Travaux de Giles

Comme mentionné précédemment, une des premières et des plus importantes analyses de stabilité des algorithmes monolithiques et partitionnés a été effectuée par [Giles, 1997](#). L'auteur a analysé ces deux algorithmes dans le cas d'intégration temporelle explicite ou implicite.

Cette analyse est basée sur une méthode 1D qui discrétise deux domaines (solide et fluide) dans la direction normale à l'interface. La discrétisation spatiale est faite par différences finies en utilisant une grille uniforme par domaine :

$$x_j = \begin{cases} j\Delta x_- & j \leq 0 \\ j\Delta x_+ & j \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec x , la coordonnée spatiale et $\Delta x_{\pm}$ les pas de la discrétisation dans chacun des domaines.

Ces domaines ne sont pas encore attribués au fluide ou au solide. L'attribution sera effectuée au cours de l'analyse de stabilité en fonction des critères obtenus. La résolution est instationnaire dans les deux domaines (utilisation de l'algorithme CSS instationnaire-instationnaire). Les limites de stabilité, qui constituent les principaux résultats de cette étude, sont listées ci-dessous :

2.1.1.1 Algorithme monolithique

- *Schéma explicite* : l'algorithme monolithique combiné avec une résolution explicite est stable si :

$$D_{\pm} < \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

où $D_{\pm}$ est le nombre de Fourier dans chacun des deux milieux, défini comme :

$$D_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm} \Delta t}{\rho_{\pm} C_{\pm} \Delta x_{\pm}^2} \quad (2.3)$$

Avec L'Eq. (2.2) on retrouve la limite de stabilité générale de l'équation de la chaleur en explicite.

- *Schéma implicite* : l'algorithme monolithique combiné avec une résolution temporelle implicite est inconditionnellement stable.

2.1.1.2 Algorithme partitionné

L'analyse de stabilité est basée sur la théorie des modes normaux de Godunov et Ryabenkii, 1964 ; Gustafsson, 2011. Étant donné que dans l'algorithme partitionné les deux domaines sont résolus séparément il faut définir la condition aux limites à l'interface pour chaque domaine. La condition de Neumann a été imposée au domaine de gauche ($j = 0_-$) et la condition de Dirichlet au domaine de droite ($j = 0_+$). Les résultats obtenus sont :

- *Schéma explicite* : l'algorithme partitionné couplant deux domaines résolus avec des schémas explicites en temps est stable si :

$$r < \frac{\sqrt{1-2D_-}}{1-\sqrt{1-2D_+}} \quad (2.4)$$

où r est défini comme :

$$r = \frac{\rho_+ C_+ \Delta x_+}{\rho_- C_- \Delta x_-} \quad (2.5)$$

Pour que le système couplé soit stable il faut que r soit le plus petit possible. Dans la plupart des cas, cela est possible en associant le domaine de droite (la condition de Dirichlet) au fluide et celui de gauche (la condition de Neumann) au solide. L'utilisation de la condition de Dirichlet sur l'interface du fluide et de la condition de Neumann sur celle du solide est appelée *Méthode Dirichlet-Neumann*.

- *Schéma implicite* : l'algorithme partitionné couplant deux domaines intégrés implicitement en temps est stable si :

$$r < \sqrt{\frac{D_-}{D_+}} \quad (2.6)$$

Dans ce cas également, le choix le plus approprié consiste à attribuer le domaine de droite au fluide et celui de gauche au solide.

En plus des contraintes de stabilité associées à chaque domaine (fluide et solide), la résolution via l'approche partitionnée ajoute des contraintes de stabilité supplémentaires à la frontière. Ces contraintes dépendent des propriétés thermiques, ainsi que de la taille des deux maillages. La limite de stabilité (2.6) est difficile à satisfaire dans le cas des problèmes aérothermiques sur des configurations industrielles pour les raisons détaillées ci-dessous :

- les matériaux sont de plus en plus résistants à la charge thermique ce qui induit un nombre de Fourier du solide D_s (où $D_s = D_-$) de plus en plus petit ;

- la croissance exponentielle de la capacité informatique permet d'utiliser des maillages plus fins afin de modéliser plus précisément la couche limite de l'écoulement fluide (augmentation du nombre de Fourier du fluide D_f , où $D_f = D_+$).

Ces deux raisons entraînent une réduction du rapport entre les deux nombres de Fourier de l'équation (2.6) ce qui induit une contrainte de stabilité plus forte.

2.1.2 Autres principales études de stabilité basées sur la théorie du mode normal

Roe et al., 2008 proposent une variation de l'algorithme CSS instationnaire-instationnaire en utilisant une intégration explicite et en ajoutant une équation supplémentaire pour le traitement de la stabilité à l'interface. Cette équation inclut un coefficient de relaxation pour la condition de Dirichlet imposée au domaine fluide. L'étude de stabilité basée sur la théorie de Godunov et Ryabenkii, 1964 montre qu'en utilisant un coefficient de relaxation approprié, il est possible d'éliminer la contrainte de stabilité imposée par le couplage. Ainsi, le système couplé est stable si les deux domaines séparés sont stables (c'est-à-dire si le CFL est respecté). Cependant, ce coefficient est fonction des gradients spatiaux et temporels de la température et du flux de chaleur en tout point de l'interface, or ces derniers ne sont pas forcément accessibles ou trop longs à calculer.

Henshaw et Chand, 2009 proposent d'améliorer la stabilité du calcul partitionné en utilisant des maillages composites recouvrants (*composite overlapping grid* en anglais), où un solveur multi-domaines s'occupe de l'intégration temporelle du système complet et de l'interpolation des variable thermiques à l'interface des deux maillages. Dans le cas d'un couplage couplant deux milieux intégrés explicitement il est possible d'atteindre la stabilité en ajoutant deux équations supplémentaires à l'interface. Dans le cas d'une intégration implicite, les auteurs ont obtenu un critère de stabilité similaire à celui obtenu par Giles, 1997 et ils ont montré que l'utilisation de la condition de Robin sur l'interface du solide peut avoir un impact positif sur la stabilité.

Joshi et Leyland, 2014 étudient la stabilité d'un problème aérothermique où les résolutions en régime transitoire des deux domaines sont couplées via l'algorithme partitionné parallèle CPS instationnaire-instationnaire (Figure 1.4). Cette analyse est basée sur le paramètre r défini par l'équation ci-dessous :

$$r = \frac{\rho_f C_{p,f} \Delta x_f}{\Delta t_f} \left(\frac{\rho_s C_{p,s} \Delta x_s}{\Delta t_s} \right)^{-1} \quad (2.7)$$

Les auteurs ont déduit l'expression de la valeur maximale $r^{\max}$ à partir de laquelle le système couplé est instable. Afin d'élargir le domaine de stabilité (c'est-à-dire augmenter la valeur de $r^{\max}$), il est possible de modifier les discrétisations spatiales et temporelles des deux domaines ou d'utiliser une condition de type Robin à l'interface du domaine solide. L'application d'une valeur optimale du coefficient de la condition de Robin permet à la fois de stabiliser le problème et d'accélérer la convergence.

Kazemi-Kamyab et al., 2014 étudient la convergence et la stabilité d'un problème couplé via la méthode Dirichlet-Robin où l'intégration temporelle est effectuée pour chaque domaine en utilisant la méthode de Crank-Nicolson (convergence du deuxième ordre). L'utilisation de l'algorithme CSS pour la résolution du système couplé limite la convergence au premier ordre. Pour se ramener à une convergence du deuxième ordre, Birken et al., 2010 propose d'ajouter des sous-itérations à chaque pas de temps physique augmentant alors les temps de calcul. Pour éviter d'impacter le temps de calcul à chaque itération, Kazemi-Kamyab et al., 2014 proposent d'utiliser une phase de correction. Concernant la stabilité, les auteurs obtiennent une limite maximale sur le pas de temps de résolution basée sur les caractéristiques physiques des deux domaines.

2.2 ÉTUDE DE STABILITÉ BASÉE SUR LA MÉTHODE DE L'ÉNERGIE

Lindström et Nordström, 2010 ont étudié un problème d'interaction thermique fluide-structure via une méthode basée sur l'équilibre énergétique du système afin d'obtenir la combinaison la plus stable des conditions aux limites à imposer à l'interface fluide-structure. Le système est discrétisé en utilisant la méthode des différences finies intégrées via la "Somme par partie" (en anglais *Summation-By-Parts (SBP)*), et les conditions à l'interface sont imposées faiblement via le "terme d'approximation simultané" (en anglais *Simultaneous Approximation Term (SAT)*). Étant donné que cette analyse est basée sur des méthodes de discrétisation qui n'ont pas été utilisées pendant la thèse, nous nous contentons de résumer ici les principaux résultats.

Les auteurs ont trouvé que le système couplé peut être stabilisé en utilisant des coefficients et des matrices de pénalisation appropriés. De plus, l'emploi de la condition de Robin sur l'interface du solide réduit la rigidité thermique de l'interface de couplage. Il est donc possible d'utiliser des pas de temps plus grands si une intégration explicite est utilisée. La condition Dirichlet-Robin a été jugée la plus appropriée.

2.3 ÉTUDES DE STABILITÉ BASÉES SUR UNE ANALYSE MATRICIELLE DU SYSTÈME COUPLÉ

Une autre analyse de stabilité intéressante est celle menée par Chemin, 2006 puis reprise par Roux et Garaud, 2009 en utilisant une analyse matricielle basée sur la méthode de décomposition de domaine (Roux, Magoulès et al., 2003). Cette méthode permet de résoudre un problème aux limites en décomposant ce dernier en plusieurs sous-problèmes associés à des sous-domaines. La résolution des sous-problèmes est répétée afin d'assurer la continuité de la solution à l'intersection entre les sous-domaines

adjacents. Les auteurs ont montré que le ratio entre les compléments de Schur des deux domaines (défini dans l'Éq. (2.10)) joue un rôle important dans la stabilité du système couplé. Pour obtenir ces résultats les auteurs se sont basés sur l'hypothèse d'une interaction purement conductive et en régime permanent entre le fluide et le solide. Le problème traité est le suivant :

$$\begin{cases} -\lambda_f \Delta T_f = F_f & \text{dans } \Omega_f \\ -\lambda_s \Delta T_s = F_s & \text{dans } \Omega_s \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système (2.8) peut être réécrit comme un système linéaire de type $KT = F$. En utilisant la méthode de décomposition de domaines il est possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{i3} \\ K_{3i} & K_{33}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_3^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_3^{(i)} + g_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

où l'index i représente le i -ème domaine ($i \in [1, 2]$), l'index 3 représente l'interface de couplage Γ et $g_3^{(i)}$ est le vecteur discrétisant les flux sur l'interface. La résolution du système mène à l'expression de $g_3^{(i)}$ ci-dessous :

$$g_3^{(i)} = \left(K_{33}^{(i)} - K_{3i} K_{ii}^{-1} K_{i3} \right) T_3^{(i)} - \left(F_3^{(i)} - K_{3i} K_{ii}^{-1} F_i \right) = S^{(i)} T_3^{(i)} - c_3^{(i)} \quad (2.10)$$

où $S^{(i)}$ est le complément de Schur pour le domaine i . Il correspond à la condensation de la matrice de conductivité $K^{(i)}$ sur les points de l'interface de couplage Γ . Le complément de Schur nous permet de résoudre le problème réduit sur l'interface Γ en éliminant les inconnues T_i . Le complément de Schur global du système peut être obtenu par superposition des solutions de chaque sous-domaine.

Les auteurs ont initialement étudié la méthode classique Dirichlet-Neumann en s'appuyant sur les résultats de l'analyse de [Giles, 1997](#) décrite dans la section 2.1.1. L'analyse est ensuite étendue à la méthode Dirichlet-Robin puis à la méthode Robin-Robin :

- *Dirichlet-Neumann* : La condition de Dirichlet est imposée au domaine 1 et la condition de Neumann est imposée au domaine 2. Le système converge si :

$$\left| \frac{S^{(1)}}{S^{(2)}} \right| < 1 \quad (2.11)$$

Il est possible de démontrer que le rapport des compléments de Schur coïncide avec le rapport des conductivités thermiques. Ainsi, afin de stabiliser le calcul les auteurs proposent d'utiliser la condition de Dirichlet sur le domaine à plus faible conductivité thermique (généralement le fluide) et la condition de Neumann au

domaine à forte conductivité thermique (généralement le solide). Ce résultat est similaire à celui obtenu par [Giles, 1997](#).

- *Dirichlet-Robin* : La condition de Robin est utilisée sur la paroi du domaine 2. L'utilisation de la condition de Robin modifie le complément de Schur de $A_{33}^{(i)}$:

$$g_3^{(i)} = \left(S^{(i)} + A_{33}^{(i)} \right) T_3^{(i)} - c_3^{(i)} \quad (2.12)$$

En effectuant l'analyse de stabilité, la nouvelle condition devient :

$$\left| \frac{S^{(1)} - A_{33}^{(2)}}{S^{(2)} + A_{33}^{(2)}} \right| < 1 \quad (2.13)$$

Ce résultat montre que si les deux milieux ont une conductivité thermique similaire, il est possible, via la condition de Robin, d'adapter $A_{33}^{(2)}$ afin de rendre le système stable. En prenant $A_{33}^{(2)} = S^{(1)}$ le système converge théoriquement en une itération.

- *Robin-Robin* : La condition de Robin est utilisée sur les deux domaines. Le problème est stable si :

$$\left| \frac{\left(S^{(1)} - A_{33}^{(1)} \right) \left(S^{(2)} - A_{33}^{(2)} \right)}{\left(S^{(2)} + A_{33}^{(1)} \right) \left(S^{(1)} + A_{33}^{(2)} \right)} \right| < 1 \quad (2.14)$$

Ce critère est équivalent à superposer le critère obtenu avec la méthode Dirichlet-Robin et celui obtenu avec la méthode Robin-Dirichlet.

Cette analyse apporte des informations supplémentaires sur la stabilité des algorithmes partitionnés. Cependant, le complément de Schur peut être calculé seulement si le problème est linéaire, et si tel est le cas, son calcul peut être très long. En effet le complément de Schur est un opérateur dense qui tient compte de toutes les interfaces. De plus, cette analyse ne s'est intéressée à l'interaction entre deux domaines fluide et solide qu'à l'état stationnaire.

2.4 ÉTUDE DE STABILITÉ BASÉE SUR UN APPROCHE PHYSIQUE

[Divo et al., 2002](#) proposent des méthodes de couplage pour résoudre les problèmes aérothermiques. Ces méthodes sont basées sur l'échange de la température et du flux de chaleur entre le fluide et le solide. Elles ont été décrites en fonction de la quantité que le solveur fluide envoie (*forward*) et reçoit (*back*). [Verstraete et Scholl, 2016](#) en ont étudié la stabilité en suivant un approche physique :

- *Flux forward temperature back method (FFTB)* : le solveur fluide envoie le flux de chaleur et reçoit la température de l'interface solide. Il s'agit de la méthode Dirichlet-Neumann. La stabilité de l'état d'équilibre du couplage est donnée par :

$$|Bi| = \left| \frac{h\Lambda_s}{\lambda_s} \right| < 1 \quad (2.15)$$

où Bi est le nombre de Biot, nombre adimensionnel qui indique le rapport entre la résistance conductive du solide et la résistance convective du fluide, h est le coefficient d'échange thermique et Λ_s est la taille caractéristique du solide. Cette méthode sera stable si la résistance convective est plus importante que la résistance conductive. Pour élargir le domaine de stabilité il est possible de relaxer la température entre deux couplages :

$$T_f^{i+1} = \beta T_f^i + (1 - \beta) T_s^i \quad (2.16)$$

Cela permet de définir une nouvelle limite de stabilité en fonction du coefficient de relaxation β :

$$Bi < \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (2.17)$$

Théoriquement pour $\beta = Bi / (1 + Bi)$ le couplage converge en une itération. Cette méthode a été utilisée par [Verdicchio et al., 2001](#) et par [Illingworth et al., 2008](#).

- *Temperature forward Flux back method (TFFB)* : le solveur fluide envoie la température et il reçoit le flux de chaleur. Il s'agit de la méthode Neumann-Dirichlet. La condition de stabilité est :

$$|Bi| > 1 \quad (2.18)$$

c'est-à-dire si la résistance conductive est plus importante que la résistance convective. Dans ce cas également il est possible d'élargir le domaine de stabilité avec un coefficient de relaxation :

$$Bi < \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (2.19)$$

Comme précédemment, la solution finale peut être théoriquement calculée en une itération en utilisant $\beta = 1 / (1 + Bi)$.

Afin de contourner les limites des deux précédentes méthodes (FFTB et TFFB), [Verstraete et Scholl, 2016](#) proposent deux variantes qui utilisent la condition de Robin à l'interface du solide :

- *Heat transfer coefficient forward temperature back method (hFTB)* : le solveur fluide envoie le flux de chaleur, la température à l'interface et le coefficient d'échange thermique h (nécessaires pour la condition de Robin) et il reçoit la température du solide. Cette méthode correspond à un cas spécifique de la *méthode Dirichlet-Robin*

où le coefficient de couplage est égal au coefficient d'échange thermique (condition convective) :

$$q_s = h (T_s - T_{ref}) \quad (2.20)$$

où il est nécessaire de définir h et T_{ref} (T_{ref} étant la température de référence de l'écoulement fluide). Verdicchio et al., 2001 supposent que la relation entre h et T_{ref} est linéaire. Pour définir cette relation, les auteurs réalisent deux simulations de l'écoulement avec des températures différentes à l'interface. Heselhans et al., 1992 suggèrent quant à eux d'utiliser la valeur de la température de la première maille fluide pour le calcul du coefficient d'échange thermique (proposition valide seulement pour des maillages de type O caractérisés par une distance orthogonale à la paroi constante).

La valeur de h influence la stabilité et la convergence du calcul. Une valeur trop faible peut conduire à la divergence du calcul. A contrario, un coefficient trop grand stabilise le calcul mais il peut ralentir considérablement la convergence. Le choix de ce coefficient est alors un compromis entre la stabilité et la rapidité de convergence du calcul. Étant donné que le coefficient d'échange thermique est très difficile à calculer avec exactitude, les auteurs proposent d'utiliser un coefficient d'échange thermique virtuel $\tilde{h}$ constant sur toute l'interface et choisi comme la valeur maximale de h ($\tilde{h} = \max(h)$). Le problème sera stable si :

$$\left| \frac{\tilde{Bi} - Bi}{\tilde{Bi} + 1} \right| < 1 \quad (2.21)$$

où $\tilde{Bi}$ est le nombre de Biot calculé avec $\tilde{h}$. Pour éviter que le problème soit instable, autrement dit que $Bi > \tilde{Bi}$, il faut imposer :

$$\tilde{h} > \frac{h}{2} \quad (2.22)$$

Comme mentionné précédemment, il faut veiller à ne pas considérer un $\tilde{h}$ trop grand pour ne pas ralentir la convergence du calcul.

- *Heat transfer coefficient forward flux back method (hFFB)* : le solveur fluide envoie le flux de chaleur, la température et le coefficient d'échange thermique h et il reçoit le flux de chaleur du solide. Cette fois, il s'agit de la méthode Neumann-Robin car une condition de flux imposé (Condition de Neumann) est utilisée à l'interface fluide.

Le système sera stable si :

$$\left| \frac{\tilde{Bi} - Bi}{Bi (\tilde{Bi} + 1)} \right| < 1 \quad (2.23)$$

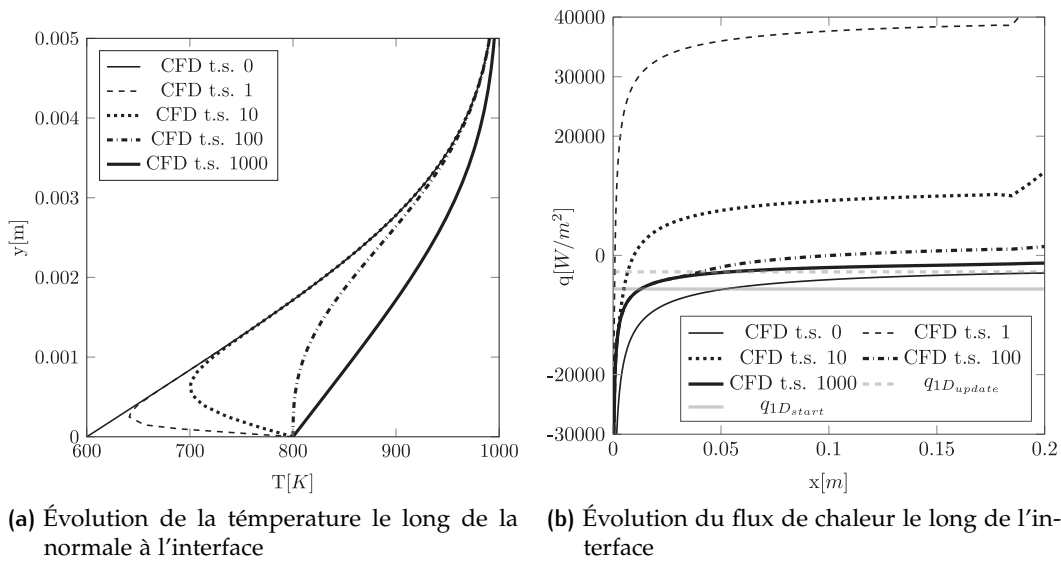


FIGURE 2.1 – Effet de la période du couplage sur la température et le flux de chaleur dans le fluide dans le cas d'une condition de température imposée (Verstraete et Scholl, 2016)

Pour éviter que le problème soit instable, autrement dit que $Bi < \tilde{Bi}$, il est nécessaire de respecter la condition suivante :

$$\tilde{h} < 2h \quad (2.24)$$

En veillant à ne pas prendre une valeur trop petite de $\tilde{h}$ pour ne pas trop ralentir la convergence du calcul.

Verstraete et Scholl, 2016 ont conduit une analyse physique intéressante sur l'influence de la période de couplage sur la stabilité. Dans le cas d'une condition de Dirichlet imposée sur l'interface fluide, une variation brutale de la température à l'interface peut déstabiliser fortement l'écoulement fluide. La Figure 2.1a présente l'évolution de la température le long de la normale à l'interface. Cette figure montre que, pour des faibles périodes de couplage, la couche limite n'a pas le temps de s'adapter à la nouvelle température de paroi et ainsi le calcul du flux de chaleur peut être erroné comme le montre la Figure 2.1b. Ainsi, si le couplage est effectué trop rapidement, le code fluide envoie au code solide un flux de chaleur qui ne correspond pas à la température initialement reçue par le code fluide ce qui déstabilise le problème couplé. Il est alors conseillé de laisser un certain temps à l'écoulement fluide pour s'adapter à la nouvelle température avant d'effectuer un nouveau couplage.

À l'inverse, dans le cas d'une condition de Neumann imposée au solveur fluide, un couplage fréquent favorise la stabilité du système couplé. En effet, l'impact engendré

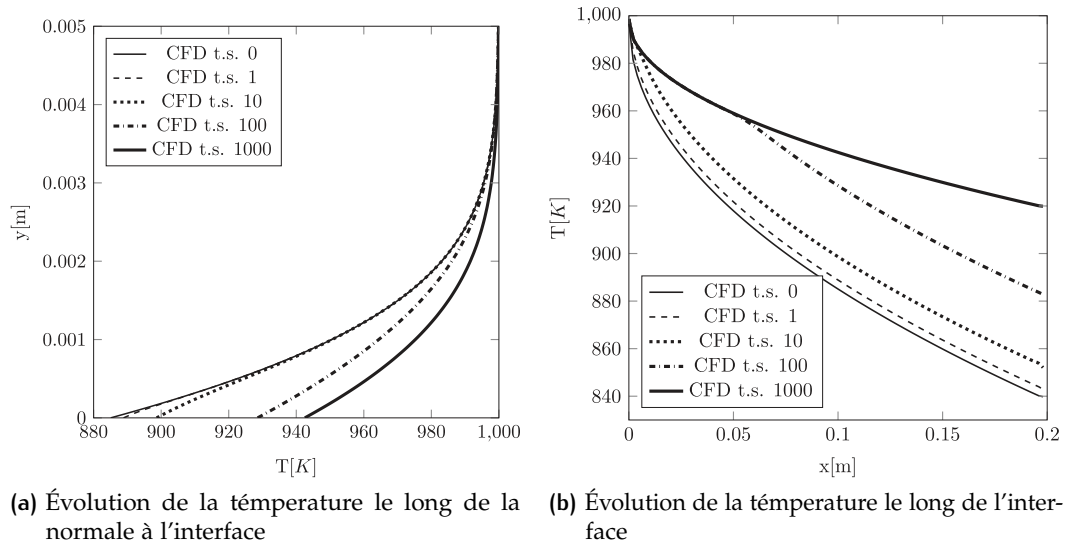


FIGURE 2.2 – Effet de la période du couplage sur la température dans le cas d’une condition de flux imposé (Verstraete et Scholl, 2016)

par un changement du flux de chaleur sur le profil de température de la couche limite est lent (voir les Figure 2.2). Alors l’écoulement fluide n’a pas le temps d’évoluer et, par conséquence, la température que le code fluide enverra au solide ne sera pas très différente de la précédente.

2.5 ANALYSE DE STABILITÉ DÉVELOPPÉE À L'ONERA

Au cours des dernières années, de nouvelles méthodologies obtenues par une analyse de stabilité basée sur le mode normal de Godunov et Ryabenkii, 1964 ont été développées à l'ONERA. Ces travaux de thèse s'inscrivent dans un programme d'amélioration continue de ces méthodologies. À ce titre, cette section est dédiée à l'analyse de stabilité qui en est à l'origine. L'étude de stabilité sur un problème aérothermique en régime permanent (Errera et Chemin, 2013) est tout d'abord présentée puis l'attention est portée sur l'étude de stabilité des problèmes aérothermiques en régime transitoire (Errera, Lazareff et al., 2017). Dans ce dernier cas, l'objectif est d'évaluer l'évolution des gradients thermiques dans le solide.

2.5.1 Étude de stabilité en régime permanent

Les précédentes études de stabilité ont mis en évidence que la méthode Dirichlet-Neumann a une limite de stabilité qui est rarement satisfaite dans les cas d'applications industrielles. La plupart d'entre elles ont montré que l'utilisation de la condition de Robin à l'interface du solide permet d'élargir la zone de stabilité du problème aérothermique.

La première partie de cette section traite l'analyse de stabilité en utilisant la méthode Dirichlet-Robin (condition de température imposée sur l'interface fluide et condition de Robin sur celle solide). La deuxième partie est consacrée à la méthode Robin-Robin.

2.5.1.1 Méthode Dirichlet-Robin

L'étude de stabilité via la méthode de décomposition de domaine (cf. §2.3) a montré le potentiel de l'utilisation de la condition de Robin sur l'interface du solide. Malheureusement, l'utilisation d'une valeur trop élevée du coefficient de couplage peut sur-stabiliser le problème numérique en ralentissant la convergence du calcul (*freezing* en anglais). Il est alors nécessaire de trouver une valeur optimale du coefficient de couplage qui assure la stabilité sans ralentir la convergence.

La méthode de décomposition de domaine propose :

$$A^{(1)} = S^{(1)} \quad (2.25)$$

mais comme mentionné précédemment, le complément de Schur est très difficile et long à calculer pour des configurations complexes.

L'étude de stabilité de [Verstraete et Scholl, 2016](#) a confirmé que la condition de Robin peut résoudre les problèmes d'instabilité si le coefficient est bien choisi. Cependant, les auteurs proposent d'utiliser sur toute l'interface un coefficient de couplage constant égal au maximum du coefficient d'échange thermique. Cette valeur est appropriée dans les zones où l'échange thermique est important mais il ne l'est pas dans des autres zones caractérisées par un échange thermique faible. En effet, un grand coefficient de couplage appliqué sur les zones à échange thermique faible surrelaxe le problème en ralentissant inutilement la résolution.

[Errera et Chemin, 2013](#) proposent une expression analytique du coefficient de couplage obtenue par une étude de stabilité basée sur la méthode des modes normaux de Godunov-Ryanbenkii ([Godunov et Ryabenkii, 1964](#) ; [Gustafsson, 2011](#)), en considérant un milieu à l'état stationnaire. Il est alors démontré, comme nous allons le rappeler, que le couplage présente une transition fondamentale pour un coefficient de couplage unique, appelé *coefficient optimal*. Ce coefficient de couplage est simple à mettre en œuvre car il dépend des quantités thermiques pariétales mais aussi de certaines quantités numériques globales (e.g. période de couplage) et locales (e.g. taille du maillage fluide proche paroi).

Joshi et Leyland, 2014 utilisent une approche similaire à celle employée par Errera et Chemin, 2013 mais, à la différence de ces derniers, les auteurs considèrent une résolution des deux domaines en régime transitoire.

La méthode optimale décrite par Errera et Chemin, 2013 a été employée pour la stabilisation de problèmes aérothermiques sur des configurations académiques (Errera et Duchaine, 2016) et industrielles (Gimenez et al., 2016 ; El Khoury et al., 2017). L'étude de stabilité est basée sur un modèle unidimensionnel discrétisant le système le long de la normale à l'interface fluide-structure comme présenté à la Figure 2.3. Les deux domaines sont discrétisés en différence finie avec espacement uniforme :

$$y_j = \begin{cases} j\Delta y_s & j \leq 0 \\ j\Delta y_f & j \geq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

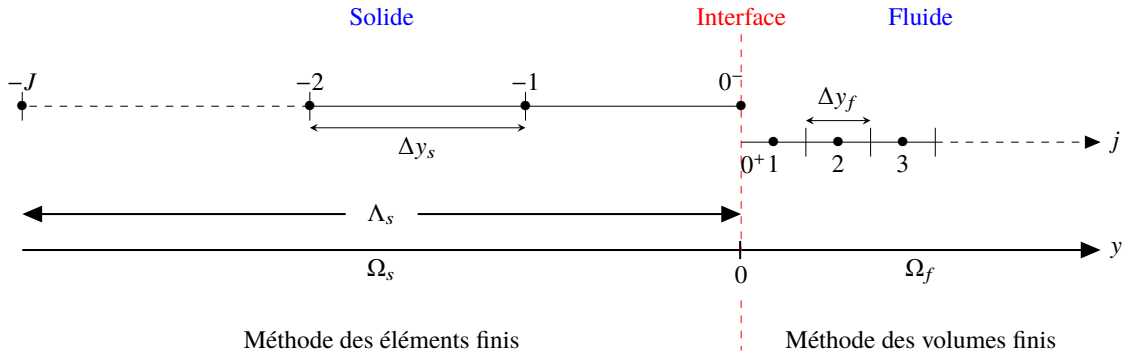


FIGURE 2.3 – Schéma unidimensionnel discrétisé des sous-domaines fluide Ω_f (MVF) et solide Ω_s (MEF).

Les conditions de raccord à l'interface, en considérant les normales aux deux domaines entrantes $\vec{n}_s = -\vec{n}_f$ (cf. Figure 1.1), sont :

$$\begin{cases} \hat{T}_f = T_s & \text{Condition de Dirichlet} \\ \hat{q}_s + \alpha_f \hat{T}_s = -q_f + \alpha_f T_f & \text{Condition de Robin} \end{cases} \quad (2.27)$$

L'analyse de stabilité est basée sur l'hypothèse que les transferts thermiques convectifs sont négligeables par rapport aux transferts thermiques conductifs. Le système à résoudre se ramène alors à l'équation de la chaleur en régime transitoire dans le fluide et en régime permanent dans le solide :

$$\begin{cases} \rho C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \lambda_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Les deux équations du système (2.28) sont couplées via l'algorithme CSS stationnaire (cf. Figure 1.7) en utilisant les conditions aux limites décrites à l'Équation 2.27. À chaque itération de couplage une résolution en régime transitoire de l'équation de la chaleur dans le fluide et une résolution en régime permanent de l'équation de la chaleur dans le solides sont réalisées.

En discrétisant les équations 2.27 et 2.28 avec un schéma spatial à trois points et en utilisant une intégration temporelle implicite, l'algorithme de couplage est le suivant :

- La température sur l'interface solide est envoyée au fluide et imposée comme condition aux limites de ce dernier :

$$T_{0+}^{n+1} = T_{0-}^n \quad (2.29)$$

- L'équation de conduction dans le fluide est résolue en régime transitoire de t^n à t^{n+1} , où $t^{n+1} = t^n + \Delta t_c$ avec, Δt_c , la période de couplage choisie. L'équation de conduction discrétisée à résoudre dans le fluide devient :

$$\frac{\rho C_p}{\delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{\lambda_f}{\Delta y_f^2} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) \quad j > 0 \quad (2.30)$$

- Au temps de couplage t^{n+1} , les quantités calculées à l'interface de couplage par le solveur fluide $(\alpha_f, q_{0+}, T_{0+})^{n+1}$ sont envoyées au solveur solide permettant de mettre à jour sa condition aux limites de Robin :

$$q_{0-}^{n+1} + \alpha_f T_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_f T_{0+}^{n+1} \quad (2.31)$$

- Le solveur solide résout l'équation de conduction en régime permanent :

$$T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} = 0 \quad j < 0 \quad (2.32)$$

La stabilité de ce système discret a été analysée via la théorie de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#) afin d'étudier les modes normaux qui peuvent causer la divergence temporelle. Cette théorie permet d'exprimer la température qui est linéaire et à coefficients constants, sous la forme ([Gustafsson et al., 1972](#)) :

$$T(x, t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{i(k_p x + \omega_p t)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_p e^{i k_p x} + e^{-k_p^2 t} \quad (2.33)$$

où k est le nombre d'onde, ω est la fréquence et C est l'amplitude complexe. ω est fonction de k via la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ et dans le cas de l'équation de la chaleur : $\omega = i k^2$.

En discrétisant l'équation (2.33) en différence finies et en considérant une seule harmonique, les solutions sont du type :

$$T_j^n = C e^{\imath(kx_j + \omega t_n)} = C e^{\imath(kj\Delta x + \omega n\Delta t)} = C \kappa^j z^n \quad (2.34)$$

avec $\kappa = e^{\imath k\Delta x}$ et $z = e^{\imath \omega\Delta t}$ qui sont respectivement le facteur d'amplification spatiale et le facteur d'amplification temporelle. L'étude de stabilité consiste à chercher l'existence des modes normaux de la forme $\kappa^j z^n$ tel que $\kappa^j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \pm\infty$ et pour lesquels $|z| > 1$. Ces derniers conduisent à une croissance exponentielle de la température et donc à l'instabilité.

En appliquant l'équation 2.34 à l'algorithme CSS stationnaire précédemment décrit, l'expression de la température devient :

$$T_j^n = \begin{cases} z^{n-1} \kappa_f^j & j > 0 \\ z^n \kappa_s^j & j \leq 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

En utilisant l'équation (2.35) dans l'expression de la condition de Robin sur l'interface solide (2.31) le facteur d'amplification temporelle $|z| = \left| \frac{T_j^{n+1}}{T_j^n} \right|$ et donc l'expression de z est donnée par la fonction complexe $g(z)$:

$$z = g(z) = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s}\right)} \kappa_f(D_f, z) + \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s}\right)} \quad (2.36)$$

où le facteur d'amplification spatiale fluide $\kappa_f(D_f, z)$ est défini comme suit :

$$\kappa_f(D_f, z) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{D_f z} - \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{D_f z} \right)^2 - 4} \right) \quad (2.37)$$

L'équation (2.36) est une équation complexe non linéaire. Dans (2.36) le paramètre β est un nombre adimensionnel caractérisant le domaine solide :

$$\beta = 1 - \frac{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{ext}} = \frac{\alpha_{ext}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{ext}} \quad (2.38)$$

Le paramètre β contrôle la condition aux limites à l'extrémité du domaine solide ($j = -J$) via le coefficient α_{ext} et il a un impact important sur la stabilité de problème couplé. Le paramètre β et les passages mathématiques pour obtenir les facteurs d'amplification temporelle et spatiale sont décrits dans l'annexe A.1.1.

Afin de simplifier la notation, les conductances thermiques pour le fluide et pour le solide peuvent être introduites. Elles sont respectivement définies comme suit :

$$K_f = \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}, \quad K_s = \frac{\lambda_s}{\Lambda_s} \quad (2.39)$$

L'équation 2.36 devient alors :

$$z = g(z, \alpha_f) = \frac{K_f}{(\alpha_f + \beta K_s)} \kappa_f(D_f, z) + \frac{(\alpha_f - K_f)}{(\alpha_f + \beta K_s)} \quad (2.40)$$

Selon la définition de stabilité de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#), le couplage est stable s'il n'existe aucune solution z de l'équation $z = g(z, \alpha_f)$ pour $|z| \geq 1$, autrement dit aucune solution de l'équation ci-dessous :

$$z = g(z) \quad (2.41)$$

existe pour $|z| \geq 1$. Cela est vérifiée pour $|z| \geq 1$, l'inégalité suivante est vraie :

$$|g(z, \alpha_f)| = \left| \frac{K_f}{(\alpha_f + \beta K_s)} \kappa_f(D_f, z) + \frac{(\alpha_f - K_f)}{(\alpha_f + \beta K_s)} \right| < 1 \quad (2.42)$$

ce qui implique en particulier :

$$\max |g(z, \alpha_f)| < 1 \quad (2.43)$$

[Chemin, 2006](#) démontre graphiquement que le maximum de la fonction $|g(z, \alpha_f)|$ se situe toujours en $|z| = 1$. Pour des petites valeurs du α_f , la valeur maximale de $|g(z, \alpha_f)|$ est atteinte lorsque $z = -1$. Pour des valeurs du coefficient de couplage plus grandes, le maximum de la fonction se déplace brusquement pour être atteint lorsque $z = 1$. [Errera et Chemin, 2013](#) l'ont ensuite validé mathématiquement à partir du principe du maximum en analyse complexe en étudiant le facteur d'amplification spatiale. Ce dernier résultat permet d'évaluer le facteur d'amplification spatiale dans les seuls points $|z| = 1$:

$$\begin{cases} \kappa_f(D_f, z = +1) &= 1 \\ \kappa_f(D_f, z = -1) &= \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \end{cases} \quad (2.44)$$

Pour visualiser le changement brutal de la position de $|g|$ (transition fondamentale), $|g|$ est montré en fonction de θ ($|z| = 1$) pour différentes valeurs de α_f sur la Fig. 2.4. Ce changement est visible lorsque $\alpha_f = 1902$, il s'agit de la valeur optimale de α_f dans ce cas particulier. En traçant le maximum de $|g|$ à $|z| = 1$ en fonction du coefficient de couplage il est possible de visualiser que son minimum est atteint pour la valeur optimale de α_f (Fig. 2.5). Nous pouvons voir que la fonction est composée de deux branches, la branche de gauche appelée "*branche de Neumann*" et la branche de droite nommée "*branche de Dirichlet*". Ces deux branches sont connectées par un point de rebroussement

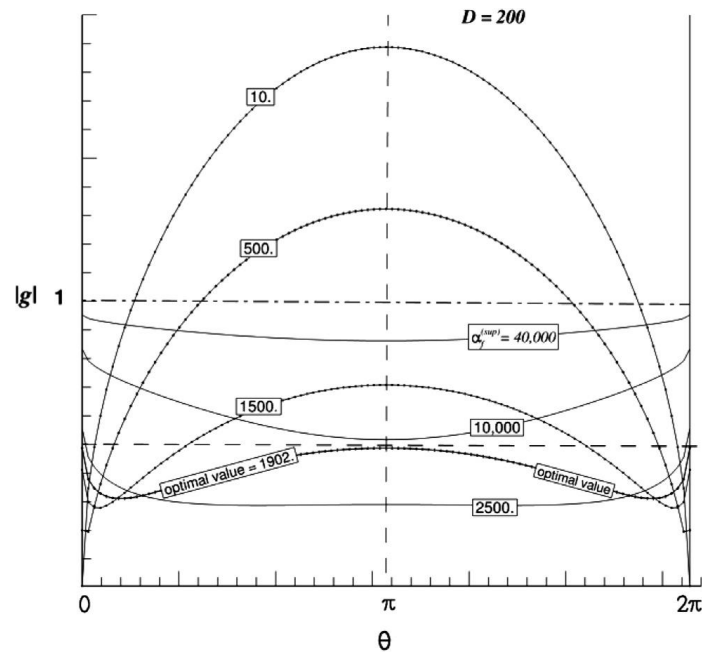


FIGURE 2.4 – $|g|$ en fonction de θ pour plusieurs α_f (Errera et Chemin, 2013)

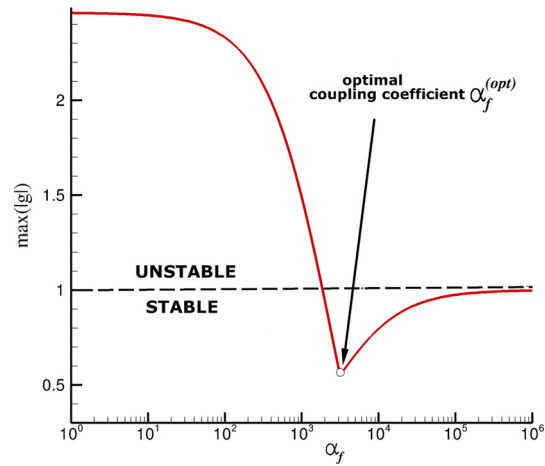


FIGURE 2.5 – $\max |g|$ en fonction du coefficient de couplage α_f (Errera et Duchaine, 2016)

qui correspond à la valeur optimale du coefficient de couplage. Ce point a été appelé *coefficient de couplage optimal* $\alpha_f^{(\text{opt})}$. Il est donc possible de décomposer la fonction $\max |g|$ en trois zones :

$$\max |g| = \begin{cases} |g(z = -1)| & \text{si } \alpha_f < \alpha_f^{(\text{opt})} \\ |g(z = -1)| = |g(z = 1)| & \text{si } \alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})} \\ |g(z = 1)| & \text{si } \alpha_f > \alpha_f^{(\text{opt})} \end{cases} \quad (2.45)$$

Si on combine les équations (2.40) et (2.44), la condition de stabilité $|g| < 1$ devient :

$$-1 < \frac{K_f}{(\alpha_f + \beta K_s)} \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} + \frac{(\alpha_f - K_f)}{(\alpha_f + \beta K_s)} < 1 \quad (2.46)$$

L'inégalité à droite est vérifiée pour toute valeur de D_f , ce qui correspond à la branche de Dirichlet (partie droite de la courbe sur la Figure 2.5) qui n'est jamais dans la zone instable. L'inégalité à gauche conduit à la limite de stabilité suivante :

$$\alpha_f > \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} - \frac{K_s}{2} \quad (2.47)$$

Ce résultat montre que la méthode Dirichlet-Robin rend le problème couplé stable lorsque le coefficient de couplage satisfait la relation (2.47). Cette limite de stabilité sera indiquée par la suite avec α_f^{min} .

Le coefficient de couplage optimal est donné par la résolution de l'égalité suivante :

$$|g(z = -1)| = |g(z = 1)| \quad (2.48)$$

qui a pour résultat :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} \quad (2.49)$$

Le détails de la résolution de l'équation (2.48) sont présentés dans l'annexe A.1.1.1. Le coefficient optimal correspond à la valeur minimale du facteur d'amplification temporelle qui, en pratique, est associée à une plus grande vitesse de convergence. En plus, l'utilisation de $\alpha_f^{(\text{opt})}$ assure théoriquement la stabilité du problème.

Démonstration. Si l'expression du coefficient de couplage optimal (2.49) est introduit dans l'expression du facteur d'amplification temporelle (2.40) la valeur de $\max |g(\alpha_f^{(\text{opt})})|$ est toujours dans la zone de stabilité :

$$\max |g(\alpha_f^{(\text{opt})})| = |g(z = -1, \alpha_f^{(\text{opt})})| = |g(z = 1, \alpha_f^{(\text{opt})})| = \frac{\alpha_f^{(\text{opt})}}{\beta K_s + \alpha_f^{(\text{opt})}} < 1 \quad (2.50)$$

car K_s et β sont toujours positifs. □

Errera et Chemin, 2013 ont montré qu'il n'y a pas de solution à l'équation $z = g(z)$ tel que $|z| \geq 1$ pour $\alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})}$.

Pour conclure, la méthode Dirichlet-Robin présente trois comportements :

- Pour $\alpha_f < \alpha_f^{(\text{opt})}$: $\max |g|$ est une fonction décroissante de α_f . Cette zone correspond à la branche de l'hyperbole qui dépend directement du nombre de Fourier. Cette branche se situe dans la zone instable pour $\alpha_f < \alpha_f^{\text{min}}$. Elle inclue $\alpha_f = 0$ qui est le point potentiellement le plus instable ;
- Pour $\alpha_f > \alpha_f^{(\text{opt})}$: $\max |g|$ est une fonction croissante de α_f . Cette zone correspond à la branche de l'hyperbole qui se situe entièrement dans la zone stable et elle est indépendante du nombre de Fourier. Pour $\alpha_f \rightarrow \infty$, $\max |g| \rightarrow 1$ qui correspond dans un problème "gelé" car la variation temporelle de la température est nulle ;
- Pour $\alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})}$: les deux branches se relient. Ce point est situé toujours dans la zone de stabilité et il correspond au point où $\max |g|$ prend la valeur plus petite. Ce point assure la stabilité et la plus grande vitesse de convergence du problème couplé.

2.5.1.2 Méthode Robin-Robin

Errera et Chemin, 2013 proposent d'utiliser la condition de Robin également sur l'interface fluide dans le cas où les deux domaines ont des propriétés physiques similaires. La condition de Robin sur l'interface fluide est définie de la manière suivante :

$$\hat{q}_f + \alpha_s \hat{T}_f = -q_s + \alpha_s T_s \quad (2.51)$$

Une étude de stabilité a précédemment été réalisée en utilisant cette nouvelle méthode. Dans ce cas, les deux conditions à l'interface (pour $j = 0_-, 0_+$) s'écrivent :

$$\begin{cases} q_{0_-}^{n+1} + \alpha_f T_{0_-}^{n+1} = -q_{0_+}^{n+1} + \alpha_f T_{0_+}^{n+1} \\ q_{0_+}^{n+1} + \alpha_s T_{0_+}^{n+1} = -q_{0_-}^{n+1} + \alpha_s T_{0_-}^{n+1} \end{cases} \quad (2.52)$$

La combinaison des ces deux équations avec les équations de la chaleur dans les deux domaines (Équations (2.30) et (2.32)) donne l'expression du facteur d'amplification temporelle ($z = g(z)$) :

$$g(z) = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (\alpha_s + \alpha_f) \kappa_f - \left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \alpha_f \right) \left(\alpha_s - \frac{\beta \lambda_s}{\lambda_s} \right)}{\left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} + \alpha_s \right) \left(\alpha_f + \frac{\beta \lambda_s}{\lambda_s} \right)} \quad (2.53)$$

Si on introduit les conductances thermique, l'expression du facteur d'amplification temporelle devient :

$$g(z) = \frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) \kappa_f - (K_f - \alpha_f) (\alpha_s - \beta K_s)}{(K_f + \alpha_s) (\alpha_f + \beta K_s)} \quad (2.54)$$

Comme pour la méthode Dirichlet-Robin, le coefficient de couplage optimal est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$|g(z = -1)| = |g(z = 1)| \quad (2.55)$$

L'expression en fonction des deux variables (α_f et α_s) est obtenue :

$$K_f (\alpha_f + \alpha_s) \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} - \frac{1}{D} - 2 \right] - (K_f - \alpha_f) (\beta K_s - \alpha_s) = 0 \quad (2.56)$$

Dans l'équation (2.56), il est possible mettre en évidence l'expression du coefficient de couplage optimal obtenu avec la méthode Dirichlet-Robin (équation 2.49) :

$$(\alpha_f + \alpha_s) [\alpha_f^{(\text{opt})} + \beta K_s] - (K_f + \alpha_f) (\beta K_s + \alpha_s) = 0 \quad (2.57)$$

Étant donné que l'équation 2.57 dépend de deux variables, il faut en fixer une pour déterminer la deuxième. En exprimant α_s en fonction de α_f on obtient :

$$\alpha_s (\alpha_f) = \frac{\alpha_f (K_f - \beta K_s - \alpha_f^{(\text{opt})}) + K_f \beta K_s}{\alpha_f^{(\text{opt})} - \alpha_f} \quad (2.58)$$

Dans le chapitre 5 une étude de l'influence du choix de ces coefficients sur la convergence du calcul est présentée.

Comme pour le cas Dirichlet-Robin, on peut démontrer que le maximum du facteur d'amplification temporelle est obtenu avec le coefficient de couplage optimal se situe toujours dans la zone stable ($\max |g(\alpha_f^{(\text{opt})})| < 1$) :

$$\max |g(\alpha_f^{(\text{opt})})| = |g(z = -1, \alpha_f^{(\text{opt})})| = |g(z = 1, \alpha_f^{(\text{opt})})| = \frac{(\alpha_s + \alpha_f) \alpha_f^{(\text{opt})}}{(K_f + \alpha_f) (\beta K_s + \alpha_s)} < 1 \quad (2.59)$$

En substituant l'équation 2.57, on obtient alors l'expression simplifiée suivante :

$$\max |g(\alpha_f^{(\text{opt})})| = \frac{(\alpha_s + \alpha_f) \alpha_f^{(\text{opt})}}{(\alpha_f + \alpha_s) [\alpha_f^{(\text{opt})} + \beta K_s]} = \frac{\alpha_f^{(\text{opt})}}{\alpha_f^{(\text{opt})} + \beta K_s} < 1 \quad (2.60)$$

L'équation (2.60) est identique à celle trouvée dans le cas de la méthode de Dirichlet-Robin et démontre la stabilité inconditionnelle de la méthode Robin-Robin.

Les démonstrations mathématiques pour obtenir les facteurs d'amplification temporelle et le coefficient optimal pour la méthode Robin-Robin sont décrits dans l'annexe A.1.2

2.5.2 Étude de stabilité en régime transitoire

Errera, Lazareff et al., 2017 ont analysé la stabilité des problèmes aérothermiques en régime transitoire où l'attention est portée sur le calcul de l'évolution de la charge thermique dans le solide. L'approche utilisée est la même que pour l'étude du régime permanent mais la résolution est différente car, cette fois, la conduction dans le solide est résolue en régime transitoire, alors que l'écoulement fluide est calculé en régime permanent. Afin d'appliquer une démarche similaire à celle réalisée dans le cas du régime permanent, la position des deux domaines a été inversée dans le modèle 1D (cf. Figure 2.6).

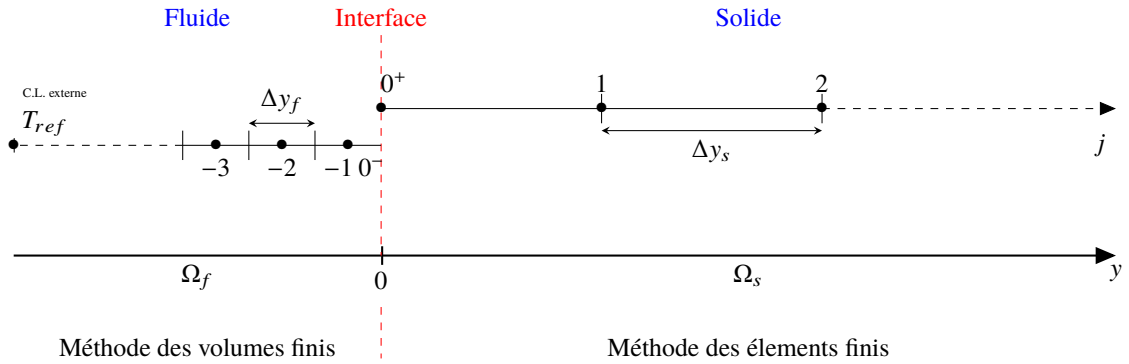


FIGURE 2.6 – Étude de stabilité du couplage en régime transitoire : discrétisation du modèle 1D

Afin d'être concis nous présentons directement l'analyse de stabilité en utilisant la condition de Robin sur les deux cotés de l'interface de couplage. Les conditions de raccord à l'interface, en considérant les normales aux deux domaines entrantes $\vec{n}_s = -\vec{n}_f$, sont :

$$\begin{cases} \hat{q}_f + \alpha_s \hat{T}_f = -q_s + \alpha_f T_s & \text{Condition de Robin dans le fluide} \\ \hat{q}_s + \alpha_f \hat{T}_s = -q_f + \alpha_s T_f & \text{Condition de Robin dans le solide} \end{cases} \quad (2.61)$$

L'application de ces équations au modèle discrétisé en 1D de la Figure 2.6 et l'utilisation de la décomposition de la température en produit du facteur d'amplification temporelle et spatiale ci-dessous :

$$T_j^n = \begin{cases} z^{n-1} \kappa_s^j & j > 0 \\ z^n \kappa_f^j & j \leq 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

permet d'obtenir l'expression du facteur d'amplification temporelle :

$$z = \frac{K_s (\alpha_f + \alpha_s)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} K_s - \frac{(K_s - \alpha_s) (h - \alpha_f)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (2.63)$$

Dans l'analyse de stabilité d'un problème aérothermique en régime transitoire il a été nécessaire de redéfinir la conductance du solide K_s car, cette fois, l'intérêt est porté sur l'évolution thermique dans le solide. K_s est alors défini comme suit :

$$K_s = \frac{\lambda_s}{\Delta y_s} \quad (2.64)$$

où Δy_s est la taille de la première maille solide.

De l'analyse de stabilité, la suivante contrainte sur le facteur d'amplification spatiale dans le domaine fluide a été obtenue :

$$h < 2K_f \quad (2.65)$$

Cette limite de stabilité impose la prédominance de la conduction thermique sur la convection dans la première maille fluide. Dans le cas d'un coefficient d'échange thermique extrêmement élevé (jet impactant, etc...) il est très important de raffiner le maillage du domaine fluide près de l'interface fluide-structure afin que cette condition soit respectée.

Les détails mathématiques de l'analyse de stabilité sont présentés dans l'annexe A.3.

Les facteurs d'amplification temporelle pour les deux méthodes les plus classiques (Dirichlet-Robin et Neumann-Robin) en découlent :

— Dirichlet-Robin, en imposant $\alpha_s = \infty$:

$$z = \frac{K_s K_s + \alpha_f - h}{K_s + \alpha_f} \quad (2.66)$$

Comme dans le cas en régime permanent, le coefficient de stabilité est donné par l'intersection de la branche de Neumann $|g(z = -1)|$ et celle de Dirichlet $|g(z = 1)|$:

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = h - \frac{K_s}{2} (1 + \overline{D}_s) \quad (2.67)$$

— Neumann-Robin, en imposant $\alpha_s = 0$:

$$z = \frac{K_s (\alpha_f K_s - \alpha_f + h)}{h (K_s + \alpha_f)} = \frac{\alpha_f K_s + h - \alpha_f}{(K_s + \alpha_f) Bi^\Delta} \quad (2.68)$$

où Bi^Δ est le nombre de Biot local en régime transitoire défini comme suit :

$$Bi^\Delta = \frac{h}{K_s} \quad (2.69)$$

En utilisant la même procédure que précédemment, le coefficient optimal dans le cas de la méthode Neumann-Robin est le suivant :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{2h}{1 - \overline{D}_s} \quad (2.70)$$

2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté un état de l'art des différentes analyses de stabilité et des méthodes à employer pour éviter l'instabilité d'un problème couplé. Cette revue concerne uniquement les problèmes aérothermiques qui seront abordés dans le cadre de cette thèse.

Les analyses basées sur la méthode des modes normaux de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#) ont été présentées. [Giles, 1997](#), dans une des premières études de stabilité, affirme que l'utilisation de la condition de Dirichlet sur l'interface fluide et de la condition de Neumann sur l'interface solide stabilise la plupart des problèmes aérothermiques. Différents auteurs ont par la suite montré que cette approche ne permet pas de stabiliser des problèmes couplés composés de physiques ayant des propriétés très différentes. Ainsi, une condition de Robin sur l'interface solide a été privilégiée. Cependant, l'utilisation non appropriée de cette condition peut amener à une convergence très lente. [Verstraete et Scholl, 2016](#) proposent d'utiliser la valeur maximale du coefficient d'échange thermique sur toute l'interface. [Roux et Garaud, 2009](#) proposent une méthode afin d'optimiser cette condition mais elle est coûteuse et applicable uniquement sur des cas simples.

[Errera et Chemin, 2013](#) proposent une méthode analytique basée sur un modèle 1D afin de calculer localement le coefficient de couplage. L'utilisation de ce coefficient "optimal", stabilise théoriquement le problème couplé en assurant la convergence la plus rapide possible. La méthode a été étendue par la suite aux problèmes aérothermiques en régime transitoire.

Un développement intéressant a été effectué par [Joshi et Leyland, 2014](#). Les auteurs traitent les deux physiques en interaction en régime transitoire et qui ont eux aussi remarqué l'existence d'une valeur optimale dans le facteur d'amplification temporelle. Ces méthodes peuvent être employées pour étudier l'interaction thermique en régime transitoire dans le cas où un algorithme partitionné parallèle instationnaire-instationnaire est utilisé.

Comme annoncé précédemment, dans le cadre de cette thèse l'étude est centrée sur la méthode optimale de [Errera et Chemin, 2013](#) pour la stabilité des problèmes aérothermiques en régime permanent et la méthode optimale proposée par [Errera, Lazareff et al., 2017](#) dans le cas de problèmes aérothermiques en régime transitoire.

3

ÉTUDE DU POTENTIEL DE LA MÉTHODE OPTIMALE DE DIRICHLET-ROBIN À STABILISER UN CALCUL DE COUPLAGE AÉROTHERMIQUE

Dans ce chapitre, nous étudions la capacité de la méthode optimale de Dirichlet-Robin proposée par [Errera et Chemin, 2013](#) à stabiliser des problèmes aérothermiques en régime permanent. Afin de mieux comprendre les enjeux liés à la stabilité d'un problème multiphysique comme celui-ci, les premiers travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont été consacrés à l'étude du problème en régime permanent. Les motivations de ce choix sont détaillées dans la section [3.1](#). L'efficacité théorique de la méthode optimale de Dirichlet-Robin à stabiliser le couplage aérothermique est présentée dans la section [3.2](#). L'attention a été portée sur l'identification des principaux paramètres impactant la stabilité du problème couplé. Ensuite, ces méthodes ont été testées numériquement sur un cas de plaque plane chauffée par un écoulement fluide. La description du cas test est présentée à la section [3.3](#) puis la section [3.4](#) permet de détailler le potentiel et les limites de la méthode de Dirichlet-Robin. Les deux dernières sections ([3.5](#) et [3.6](#)) sont respectivement dédiées à l'influence de la variation de l'initialisation du calcul couplé et de celle de la période de couplage Δt_c .

3.1 SIMPLIFICATION DU PROBLÈME

Quel que soit le domaine d'étude, la résolution d'un problème physique en régime permanent est plus simple que celle en régime transitoire. En effet, dans le premier cas, avec une discrétisation en éléments finis et en l'absence de non-linéarités géométriques ou thermiques, le régime permanent d'un problème de conduction solide peut être obtenu par la simple résolution d'un système d'équations linéaire via une méthode directe. Dans le second cas, il est nécessaire de calculer l'évolution au cours du temps du phénomène physique et pas uniquement l'état final.

Pour le calcul du régime transitoire une résolution de type "time marching", où la solution à l'instant t dépend de celle à l'instant $t - 1$, est nécessaire. Plus l'intégration temporelle est courte (utilisation de petits pas de temps) et plus la solution du problème en régime transitoire sera précise. Cela est particulièrement vrai pour un problème multiphysique résolu via une approche partitionnée. En effet, comme mentionné dans

le paragraphe 1.4.2.5, afin d'étudier le régime transitoire d'un problème couplé il faut coupler les résolutions en régime transitoire des deux physiques via un algorithme instationnaire-instationnaire. Cela consiste à utiliser une intégration temporelle synchrone des deux physiques couplées avec une période égale au temps caractéristique de la physique la plus rapide. Le temps de calcul en utilisant cette approche dépend de la différence de grandeur entre les temps caractéristiques des deux physiques. Avant d'aborder le régime transitoire, nous avons décidé de nous placer en régime permanent afin de vérifier si la méthode optimale Dirichlet-Robin permet d'améliorer la stabilité des problèmes aérothermiques.

Une variante de l'algorithme de couplage CSS, déjà décrite au paragraphe 1.4.3.1, a été utilisée pour l'étude du régime permanent. Cet algorithme couple une résolution de l'écoulement fluide en régime transitoire avec une séquence de résolutions de la conduction dans le solide en régime stationnaire (Figure 1.7). En effet, puisque le transitoire thermique du problème couplé n'est pas souhaité, la conduction solide est résolue en régime permanent afin d'accélérer la convergence, en revanche une résolution en régime transitoire de l'écoulement fluide est retenue. Le problème fluide est généralement résolu via une approche de type "*time-marching*" quel que soit le type d'étude à effectuer (régime permanent ou transitoire). La résolution de l'écoulement en régime permanent présente l'avantage de pouvoir utiliser un pas de temps local (à chaque cellule) permettant d'accélérer la convergence du calcul. Cependant, ce pas de temps local n'assure pas une cohérence physique pendant le régime transitoire. Malheureusement, l'utilisation d'un pas de temps local requiert la valeur du pas de temps de résolution pour chaque cellule du maillage fluide près de la paroi. Cependant, cette information n'est pas toujours disponible dans le solveur CFD comme dans elsA. Ainsi, un pas de temps global de résolution de l'écoulement a été jugé plus pratique à utiliser.

3.2 POTENTIEL THÉORIQUE DE LA MÉTHODE OPTIMALE DIRICHLET-ROBIN À STABILISER LE PROBLÈME

Dans cette section une analyse détaillée de la capacité de la méthode Dirichlet-Robin à stabiliser un couplage aérothermique est présentée. Plus particulièrement, l'objectif est d'analyser le comportement théorique de cette méthode face à la variation des principaux paramètres physiques et numériques.

3.2.1 Nombre de Biot numérique

Avant d'étudier la stabilité du couplage aérothermique, il est nécessaire d'introduire un nombre adimensionnel qui est appelé ici (comme dans [Moretti, Errera et al., 2018](#)), le *nombre de Biot numérique* :

$$Bi_\nu = Bi^\Delta (1 - \bar{D}_f) \quad (3.1)$$

où $\bar{D}_f$ est un nombre de Fourier normalisé. Ce nombre a été introduit pour la première fois par [Errera et Duchaine, 2016](#), il est défini comme suit :

$$\bar{D}_f = \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \quad (3.2)$$

Ce nombre de Fourier normalisé varie entre 0 et 1 lorsque D_f varie entre 0 et $+\infty$.

Le nombre de Biot numérique coïncide avec la valeur du facteur d'amplification temporelle (cf. Section 2.5) lorsque $\alpha_f = 0$ (méthode Dirichlet-Neumann), c'est-à-dire qu'il représente la plus grande valeur du facteur d'amplification temporelle en fonction de α_f comme indiqué à la Figure 3.1. Pour $Bi_\nu < 1$, le problème est stable pour toutes valeurs de α_f , par contre si le nombre de Biot numérique dépasse la limite de stabilité $Bi_\nu > 1$, la méthode Dirichlet-Neumann est instable et il est nécessaire de "relaxer" le problème via le coefficient de couplage.

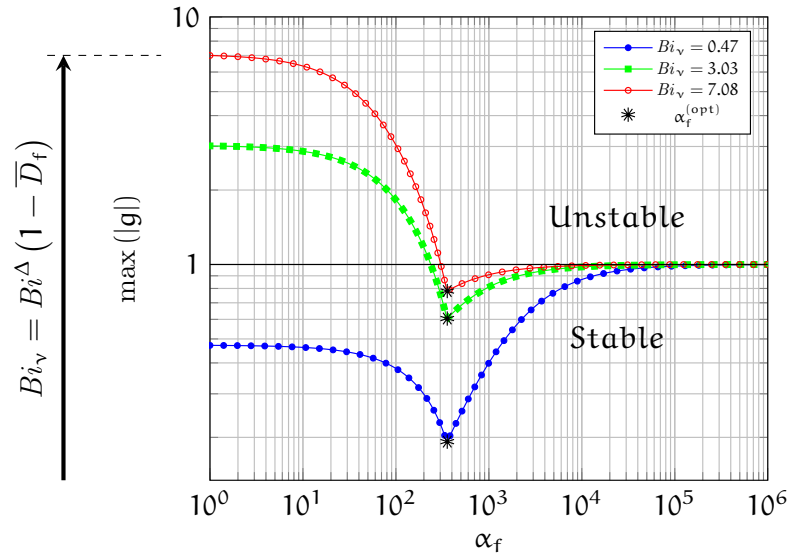


FIGURE 3.1 – Maximum du facteur d'amplification temporelle $\max |g|$ en fonction du coefficient de couplage α_f pour différentes valeurs du nombre de Biot numérique Bi_ν .

Il s'agit d'un résultat très important qui permet d'évaluer si le problème couplé est stable pour toutes valeurs du coefficient de couplage. Le nombre de Biot numérique Bi_ν

joue un rôle fondamental dans l'analyse de la stabilité et nous donne une estimation du degré de l'intensité de l'interaction fluide-solide. Nous allons étudier les cas où le nombre de Biot numérique est extrêmement élevé (problèmes à forte interaction thermique) et les cas où le nombre de Biot numérique est en dessous de la limite de stabilité, c'est-à-dire strictement inférieur à 1 (problèmes à faible interaction thermique).

3.2.2 Zones de stabilité

Le comportement de $\max |g|$ en fonction de α_f est présenté dans le Tableau 3.1. Il est montré que théoriquement il existe toujours une valeur du coefficient α_f pour laquelle il est possible de stabiliser un problème aérothermique couplé. Cette étude de stabilité montre la présence d'une zone d'instabilité lorsque l'interaction thermique est forte ($Bi_v > 1$). Le problème est instable si aucune (ou une trop faible) relaxation du flux de chaleur est appliquée sur l'interface solide. La condition de Dirichlet-Robin est toujours stable pour des problèmes où l'interaction thermique est faible ($Bi_v \leq 1$).

Grâce à la définition (3.2), on peut également récrire le facteur d'amplification spatiale de la branche de Neumann (2.44) comme suit :

$$\begin{cases} \kappa_f(D_f, z = +1) &= 1 \\ \kappa_f(D_f, z = -1) &= \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} = \bar{D}_f \end{cases} \quad (3.3)$$

qui nous permet de redéfinir l'expression du coefficient optimal (2.49) avec la suivante relation :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} = \frac{K_f}{2} (1 - \bar{D}_f) \quad (3.4)$$

Les expressions de g^0 et g^{opt} , qui correspondent respectivement aux valeurs du facteur d'amplification temporelle pour $\alpha_f = 0$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$ sont :

$$g^0 = Bi_v = Bi^\Delta (1 - \bar{D}_f) \quad (3.5)$$

$$g^{\text{opt}} = \frac{\frac{Bi^\Delta}{2} (1 - \bar{D}_f)}{1 + \frac{Bi^\Delta}{2} (1 - \bar{D}_f)} \quad (3.6)$$

g^0 correspond au nombre de Biot numérique Bi_v .

L'expression du coefficient minimal α_f^{min} , à partir duquel le problème couplé est stable, est la suivante :

$$\alpha_f^{\text{min}} = \frac{K_f}{2} (1 - \bar{D}_f) - \frac{K_s}{2} = \alpha_f^{(\text{opt})} - \frac{K_s}{2} \quad (3.7)$$

α_f	0		$\alpha_f^{\min}$		$\alpha_f^{(\text{opt})}$		∞	Condition
$ g $	g^0				g^{opt}		1	$Bi_v \leq 1$
$ g $	UNSTABLE		1		g^{opt}		1	$Bi_v > 1$

TABLEAU 3.1 – Comportement de la condition de Dirichlet-Robin en fonction de α_f

3.2.3 Stabilité en fonction du ratio des conductivités

Dans ce paragraphe, l'effet de la variation du ratio des conductivités fluide-solide est présenté :

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_s} \quad (3.8)$$

L'incrément du ratio des conductivités fluide-solide conduit à une augmentation du nombre de Biot local. Cela signifie que plus ce ratio est grand, plus le problème peut être instable. Ce résultat confirme les résultats obtenus par [Giles, 1997](#) ; [Roux et Garaud, 2009](#) et [Verstraete et Scholl, 2016](#), et détaillées dans le chapitre 2. Toutefois, comme nous le verrons ensuite et comme nous le suggère la définition du nombre de Biot numérique (3.1), la stabilité du problème couplé dépend aussi d'autres paramètres comme la taille de la première maille fluide et la longueur caractéristique du solide. Il est donc plus correct d'étudier l'effet sur la stabilité du ratio des conductances fluide-solide. Cela constitue donc l'objectif du paragraphe suivant.

3.2.4 Stabilité en fonction du ratio des conductances

La conductance thermique surfacique K correspond à la quantité de chaleur qui passe à travers une plaque d'épaisseur e , de surface unitaire et de conductivité λ pendant une seconde :

$$K = \frac{\lambda}{e} \quad (3.9)$$

Le ratio des conductances fluide-solide est défini comme suit :

$$\frac{K_f}{K_s} = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s}} = \frac{2\lambda_f \Lambda_s}{\lambda_s \Delta y_f} \quad (3.10)$$

où Δy_f est la taille de la première maille fluide et Λ_s est la dimension caractéristique du solide.

Comme dans le cas précédent (cf. §3.2.3) le nombre de Biot local augmente avec le ratio des conductances thermiques.

Ces deux valeurs extrêmes (0 et $+\infty$) peuvent être physiquement interprétées comme suit :

- $K_f/K_s \rightarrow 0$: ceci implique que les nombres de Biot sont nuls. Cette condition est réalisable en imposant pour le solide une conductivité très élevée ou une épaisseur nulle. Dans les deux cas la diffusion de la chaleur à travers le solide est instantanée. Cela revient à résoudre uniquement l'écoulement fluide avec une condition de température imposée à l'interface fluide-structure.
- $K_f/K_s \rightarrow \infty$: ceci implique que le nombre de Biot (local et numérique) soit infini. Cela peut se produire lorsque $\lambda_s \rightarrow 0$ ou dans le cas où la dimension caractéristique du solide est très grande. Autrement dit, la chaleur se diffuse peu ou elle n'arrive pas à atteindre l'interface fluide-structure. Cela revient à résoudre uniquement l'écoulement fluide où l'interface fluide-structure est traitée comme une paroi adiabatique.

Le rapports des conductivités (3.8) et des conductances (3.10) sont des paramètres "statiques" (définis par le problème). Or la stabilité va aussi dépendre dans large mesure du temps. Cet aspect "dynamique" sera abordé dans le paragraphe 3.2.6.

3.2.5 Stabilité en fonction de la taille de la première maille fluide

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'effet d'un maillage extrêmement raffiné sur le nombre de Biot numérique. Cette analyse a été publiée par la première fois par [Errera, Moretti, Salem et al., 2019](#) et détaillée dans l'Annexe B.

Lorsque la taille des mailles près de la paroi tend vers 0 ($\Delta y_f \rightarrow 0$), le nombre de Biot prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi_v &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta (1 - \bar{D}_f) = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta \left(1 - \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \right) = \\ &= \frac{2\lambda_f \Lambda_f}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2\rho C_p}{\lambda_f \Delta t}} = \frac{2\lambda_f \Lambda_f}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2}{a_f \Delta t}} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Ainsi, en raffinant le maillage, le nombre de Biot numérique prend une valeur constante qui dépend des paramètres physiques du problème. Une démarche similaire peut être réalisée pour le coefficient de couplage optimal ($\alpha_f^{(opt)}$) :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \alpha_f^{(opt)} = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{K_f}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{D_f} \right)^2} - 1 - \frac{1}{D_f} \right) = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} \quad (3.12)$$

qui, après des passages mathématiques décrits dans l'Annexe B, donne :

$$\alpha_{\text{lim}}^{(\text{opt})} = \frac{2\lambda_f}{\sqrt{2a_f\Delta t}} = \frac{2\lambda_f}{\sqrt{2\frac{\lambda_f}{\rho C_p}\Delta t}} = \frac{\sqrt{2\lambda_f\rho C_p}}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{\sqrt{2}E_f}{\sqrt{\Delta t}} \quad (3.13)$$

où $E_f = \sqrt{\lambda_f\rho C_p}$ est l'effusivité thermique du fluide.

Les expressions (3.11) et (3.13) montrent clairement l'importance du temps dans les analyses de stabilité. Car le rapport des conductances (3.10) tend vers l'infini lorsque $\Delta y_f \rightarrow 0$.

La première observation concerne le coefficient optimal qui est inversement proportionnel au terme $\sqrt{2a_f\Delta t}$. Ce dernier peut être interprété comme une distance de pénétration thermique. Pour des petites distances de pénétration de la chaleur dans le fluide il est nécessaire d'avoir un coefficient de couplage plus grand afin de stabiliser le problème. Au contraire, plus cette distance de pénétration est importante et plus la chaleur se diffuse dans le fluide. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une grande valeur du coefficient de couplage.

La deuxième observation est la dépendance entre la limite du coefficient de couplage $\alpha_{\text{lim}}^{(\text{opt})}$ et l'effusivité thermique. L'effusivité thermique décrit la rapidité avec laquelle un matériau absorbe la chaleur. Plus l'effusivité thermique est élevée et plus le matériau absorbe l'énergie sans se réchauffer notablement. Au contraire, plus elle est faible et plus le matériau se réchauffe rapidement. Cette relation montre bien que $\alpha_f^{(\text{opt})}$ prend en compte la capacité du fluide à échanger la chaleur avec le solide tout au long du processus de couplage.

La dernière observation concerne le fait que l'expression du coefficient de couplage optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est une fonction décroissante de la taille de la première maille fluide. Si le maillage proche-paroi est extrêmement raffiné, le problème sera moins stable et une valeur plus grande du coefficient de couplage sera alors nécessaire. Pour rappel, cette méthode a été développée en supposant la convection thermique négligeable dans la première maille du domaine fluide (cf. 2.5), c'est-à-dire dans le cas où le maillage fluide est suffisamment raffiné près de l'interface (maillage à Bas-Reynolds).

Quand des géométries complexes sont utilisées, la taille de la première maille fluide n'est pas forcément constante ou accessible pendant le processus de couplage, alors la limite du coefficient de couplage optimal $\alpha_{\text{lim}}^{(\text{opt})}$ peut se révéler utile. En effet, le calcul de $\alpha_{\text{lim}}^{(\text{opt})}$ ne nécessite pas de connaître la valeur de la taille de la première maille fluide. Cette valeur limite du coefficient de couplage est légèrement plus élevée que la valeur optimale $\alpha_f^{(\text{opt})}$ calculée avec la taille de la première maille fluide ($\alpha_{\text{lim}}^{(\text{opt})} \approx 1,1\alpha_f^{(\text{opt})}$), elle assurera alors la stabilité sans provoquer une détérioration importante de la vitesse de convergence.

Ces résultats ont été publiés pour la première fois dans [Moretti, Errera et al., 2018](#).

3.2.6 Stabilité en fonction de la période de couplage

Dans cette section l'effet de la période de couplage sur le nombre de Biot numérique Bi_v , ainsi que sur le coefficient de couplage optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$, est étudié. Plus particulièrement, le comportement de la méthode pour une période de couplage très faible ($\Delta t_c \rightarrow 0$) et celui pour des périodes de couplage très importantes ($\Delta t_c \rightarrow \infty$) sont présentés.

Pour $\Delta t_c \rightarrow 0$, le nombre de Fourier tend vers 0 et par conséquent $\overline{D}_f$ aussi. Or Bi^Δ est indépendant de Δt_c , ce qui implique :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} Bi_v = \lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} Bi^\Delta (1 - \overline{D}_f) = Bi^\Delta \quad (3.14)$$

Lorsque les deux problèmes sont couplés avec une période très courte, le nombre de Biot numérique augmente en tendant vers le Biot local Bi^Δ . Ce résultat montre l'importance de prendre en compte les paramètres numériques via le nombre de Fourier normalisé $\overline{D}_f$ lorsque l'échange thermique est réalisé avec une période non nulle ($\Delta t_c > 0$).

De même pour le coefficient de couplage optimal, la limite ci-dessous est obtenue :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \alpha_f^{(\text{opt})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \frac{K_f}{2} (1 - \overline{D}_f) = \frac{K_f}{2} \quad (3.15)$$

Réduire le pas de temps de couplage nécessite de relaxer le problème en utilisant une valeur plus importante du coefficient de couplage. Ce dernier tend vers la moitié de la conductance thermique de l'écoulement lorsque l'intervalle de couplage tend vers 0. Ces résultats concordent avec ceux trouvés par [Verstraete et Scholl, 2016](#) et présentés dans la section 2.4 (Figures 2.1).

Pour $\Delta t_c \rightarrow \infty$, le nombre de Fourier tend vers infini et par conséquent $\overline{D}_f \rightarrow 1$. Ainsi, le limite du nombre de Biot numérique Bi_v pour $\Delta t_c \rightarrow \infty$ est le suivant :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} Bi_v = \lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} Bi^\Delta (1 - \overline{D}_f) = 0 \quad (3.16)$$

De même, le coefficient de couplage optimal prend la forme ci-dessous :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \alpha_f^{(\text{opt})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \frac{K_f}{2} (1 - \overline{D}_f) = 0 \quad (3.17)$$

Avec une période de couplage plus grande, le système est théoriquement plus stable et le coefficient de couplage nécessaire pour le stabiliser est plus faible, voire nul. Dans la section 3.6, nous allons montrer que ceci n'est pas tout à fait vrai numériquement.

3.3 CAS TEST : PLAQUE PLANE

Le but de cette thèse est d'étudier la stabilité de la résolution d'un problème aérothermique via un schéma partitionné. Pour cela nous avons choisi d'étudier le cas académique de la plaque plane. La géométrie 2D et les principales conditions aux limites du problème sont représentées à la Figure 3.2. Les domaines fluide et solide sont décrits dans les sections suivantes.

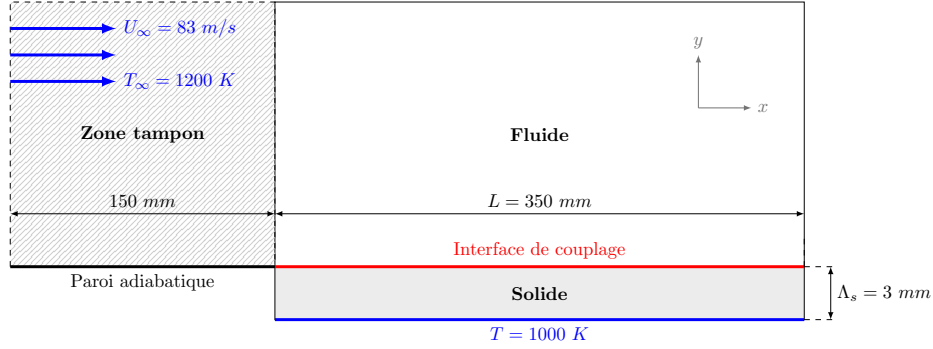


FIGURE 3.2 – Géométrie et conditions aux limites du cas test "Plaque Plane"

3.3.1 Discrétisation du domaine fluide

Le fluide, qui s'écoule de gauche à droite, interagit avec la paroi supérieure de la plaque plane. Les conditions aux limites utilisées dans le problème fluide sont une condition d'injection à l'entrée, une condition de pression externe à la sortie, une condition de symétrie sur la paroi supérieure et une condition de Dirichlet où la température provenant du solveur solide est imposée. Le calcul fluide est initialisé avec un champ uniforme, ce qui veut dire que la CFD n'a pas été initialisée en amont avec un calcul fluide.

La résolution du problème fluide est faite via la résolution des équations (Unsteady)RANS en utilisant un schéma de type "Jameson" (Jameson et al., 1981) et le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras (cf. Spalart et Allmaras, 1992). Avec ces conditions, le nombre de Reynolds s'élève à $2,6 \cdot 10^5$.

Le maillage fluide est suffisamment raffiné près de l'interface couplée pour avoir un $y^+ \approx 1$ ¹ afin d'avoir une bonne résolution de la couche limite sans recourir à une loi de paroi. Ceci nous permettra un calcul précis du flux de chaleur à l'interface. La taille de la première maille fluide est $\Delta y_f = 5,4 \cdot 10^{-5}$ m (Figure 3.3).

Il est important de noter que les deux maillages coïncident (Figure 3.3) afin d'éviter d'éventuelles erreurs provenant d'une mauvaise interpolation géométrique. En effet, les

1. y^+ est la distance à la paroi rendue adimensionnelle via la vitesse de frottement et la viscosité cinématique.

quantités pariétales envoyées et réceptionnées correspondent aux valeurs aux points situés au milieu de chaque élément de la surface de couplage. Cette localisation est propre à la méthode des volumes finis. Pour la méthode des éléments finis une interpolation des quantités nodales au centre des éléments de l'interface est nécessaire.

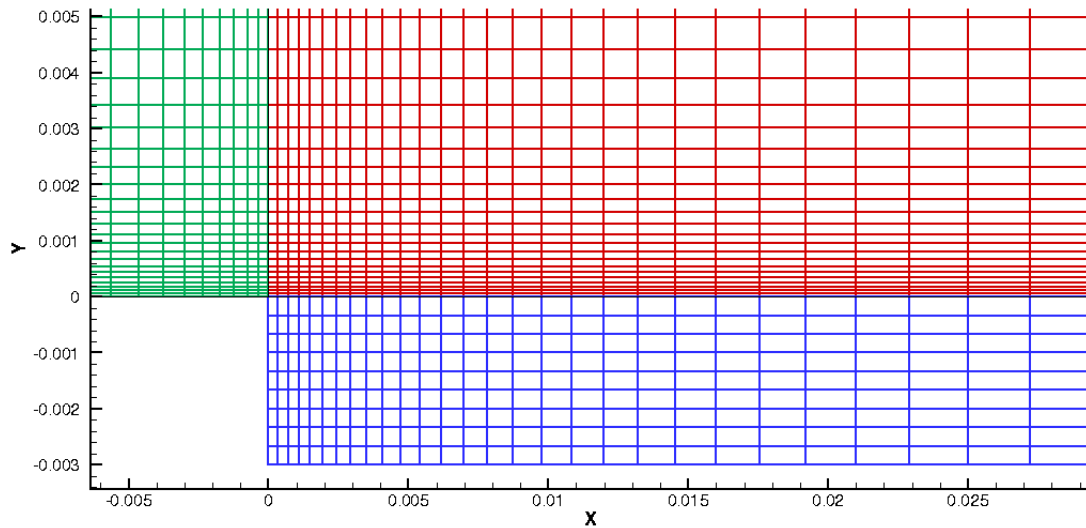


FIGURE 3.3 – Maillage fluide (en rouge et en vert) et solide (en bleu) près de l'interface

Pour tester les méthodes numériques associées à un problème de mécanique des fluides, le cas test de la "plaque plane" est généralement utilisé. Ce cas test présente une géométrie simple et par conséquent un maillage très régulier qui permet d'atteindre le régime permanent rapidement. Toutefois, il présente une singularité au niveau du bord d'attaque susceptible de causer des problèmes de convergence. Une zone "tampon" avec une paroi adiabatique a alors été ajoutée en amont de l'interface afin de repousser cette singularité loin de la surface de couplage.

La zone tampon ne permet pas de s'affranchir d'un bord d'attaque thermique présent au début de la surface couplée. En effet, dans cette zone, la paroi adiabatique devient brutalement une paroi isotherme avec un profil de température fourni par le solveur solide. La couche limite fluide, déjà établie, y sera perturbée par un brutal échange de chaleur entre le fluide et le solide. Ce point d'intersection entre la zone tampon, le reste du maillage fluide et le domaine solide sera considéré dorénavant comme le bord d'attaque du problème. Afin de mieux modéliser l'échange thermique, le maillage fluide a été suffisamment raffiné dans la direction de l'écoulement près du bord d'attaque de l'interface (cf. Figure 3.4). Théoriquement, le coefficient d'échange thermique sur une plaque plane a un profil hyperbolique; il prend une valeur infinie au bord d'attaque puis décroît rapidement vers une valeur asymptotique en s'approchant du bord de fuite. La Figure 3.5 montre le profil du coefficient d'échange thermique le long de l'interface de couplage calculé en imposant une température constante sur la paroi du fluide. Cette

évolution du coefficient d'échange thermique sera utilisée au paragraphe 3.4.1 comme valeur du coefficient de couplage α_f .

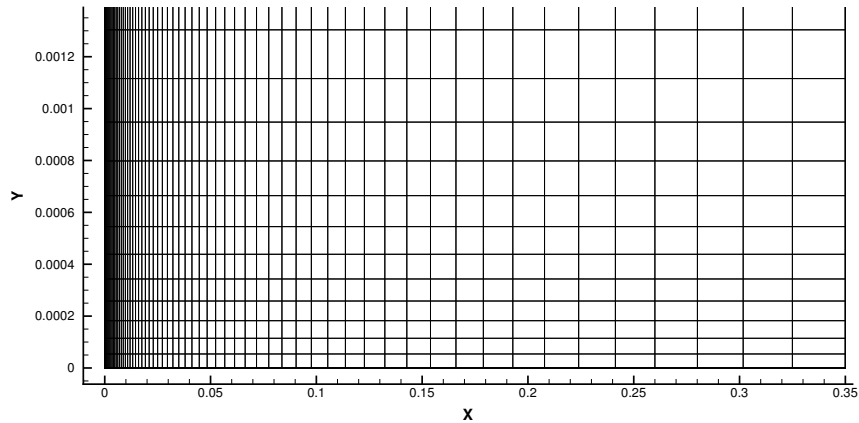


FIGURE 3.4 – Maillage fluide de la plaque plane (hors zone tampon)

3.3.2 Discrétisation du domaine solide

Le domaine solide est discrétisé avec un maillage structuré composé d'éléments linéaires hexaèdres (maillage en bleu sur la Figure 3.3). Dans la direction normale à l'interface le maillage est composé de dix éléments. Dans la direction tangentielle, le maillage a été créé avec la même progression géométrique utilisée pour le maillage fluide afin d'avoir les centres des éléments surfaciques fluides et solides qui coïncident à l'interface.

3.3.3 Interpolation spatiale entre les maillages

Dans ces travaux de thèse, l'échange des quantités pariétales entre les maillages fluide et solide est réalisé à l'aide de la librairie de couplage CWIPI (CWIPI, 2019). En effet, chaque physique utilise ses propres méthodes numériques ce qui entraîne des discrétisations spatiales différentes notamment au niveau de l'interface de couplage et a pour conséquence de devoir préalablement interpoler les données avant de les transmettre. Les interpolations spatiales employées par défaut sont les suivantes :

- Si le champ est défini aux sommets : une interpolation linéaire est réalisée à partir des valeurs aux sommets de l'élément dans lequel se trouve le point ;
- Si le champ est défini aux éléments : la valeur de l'élément dans lequel se trouve le point est transmise.

Dans ce cas en particulier, aucune interpolation n'est réalisée car les deux maillages sont coïncidents.

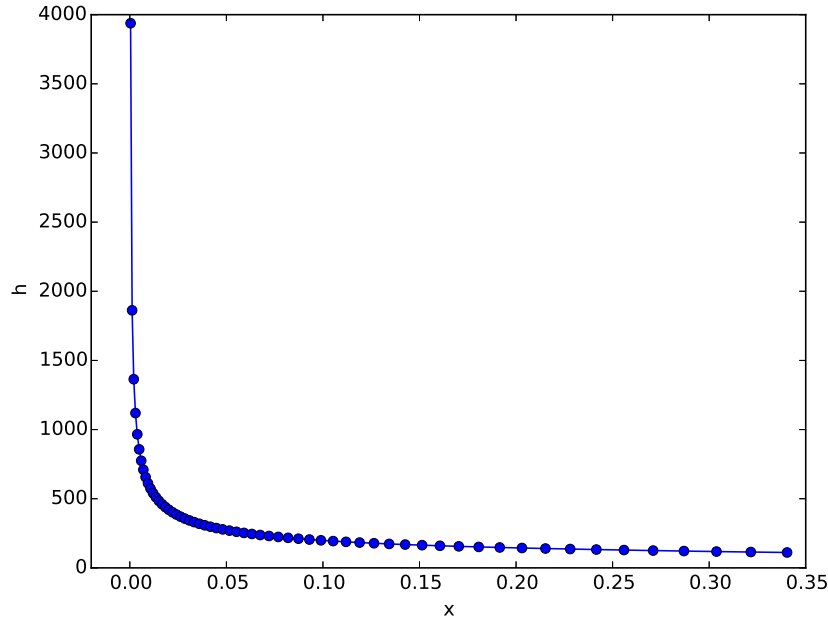


FIGURE 3.5 – Profil du coefficient d'échange thermique le long de l'interface

3.3.4 Critère de convergence

Dans toutes les simulations numériques il est nécessaire de choisir un critère de convergence (ou d'arrêt) permettant un niveau d'erreur satisfaisant. Pour ce cas test, le niveau de convergence est mesuré avec une *norme infinie* sur la température de l'interface solide. Cette norme mesure l'écart maximal de température entre deux itérations de couplage :

$$\Delta T_s = \max_{i=1, N_s} |T_i^n - T_i^{n-1}| \quad (3.18)$$

où n est l'itération de couplage et i représente le i -ème point de l'interface solide composée de N_s points. Le critère de convergence choisi est le suivant :

$$\Delta T_s < \epsilon \quad \epsilon = 10^{-3} \text{ K} \quad (3.19)$$

Le problème couplé a convergé lorsque la variation de la température à l'interface est inférieure au critère de convergence. En d'autre termes, la convergence a lieu lorsque la variation des quantités échangées est négligeable entre deux couplages.

3.4 CAPACITÉ NUMÉRIQUE DE LA MÉTHODE OPTIMALE DIRICHLET-ROBIN À STABILISER DES PROBLÈMES AÉROTHERMIQUES

Dans cette section, la méthode optimale de D-R développée par [Errera et Chemin, 2013](#) puis améliorée par [Errera et Duchaine, 2016](#) est appliquée au cas test de la plaque plane. L'objectif est de confronter les résultats théoriques aux résultats numériques concernant la stabilité des problèmes aérothermiques. Plusieurs cas d'études présentant des propriétés thermiques différentes sont abordés. L'intérêt est de traiter des problèmes aérothermiques avec des interactions thermiques d'intensité variable (variation du nombre de Biot numérique Bi_v). Ces différents tests nous permettront de déterminer s'il est effectivement possible de négliger l'impact des modes instables 2D/3D sur la stabilité du problème couplé.

Dans ces travaux, l'attention sera portée uniquement sur la stabilité et la rapidité de la convergence des calculs et non sur l'exactitude de la solution. En effet, ce dernier aspect a déjà été validé par des travaux antérieurs ([Chemin, 2006](#) ; [Baqué, 2012](#)).

3.4.1 Interactions thermiques faibles et modérées

Les études de stabilité du couplage aérothermique menées dans le département DAAA de l'ONERA ont mis en évidence l'importance du Biot numérique, à partir duquel on peut estimer l'intensité de l'interaction thermique fluide-structure. C'est à partir de ces études numériques ([Errera et Moretti, 2016](#) ; [Moretti, Errera et al., 2018](#)) que nous définissons le type d'interaction thermique dans ce travail.

L'interaction thermique faible est ainsi caractérisée par un nombre de Biot numérique Bi_v faible (Équation 3.1).

Pour bien comprendre les différents types d'interaction et leur complexité il faut observer l'évolution du facteur d'amplification temporelle $\max(|g|)$ en fonction du coefficient de couplage α_f . Nous avons choisi de faire varier Bi_v en changeant la conductivité thermique du solide λ_s . Cette approche est beaucoup plus simple à mettre en place que de modifier les conditions d'entrée de l'écoulement fluide ou la taille de la première maille fluide. La Figure 3.6 présente les résultats pour des conductivités de 0,5 W/(mK), 2,5 (interactions modérées) et 10 W/(mK) (interaction faible).

Comme mentionné précédemment, Bi_v correspond à la valeur de $\max(|g|)$ pour $\alpha_f = 0$. Ainsi, plus Bi_v est grand, plus une partie importante de la courbe (branche de "Neumann") se situe dans la zone instable ($\max(|g|) > 1$). Nous allons étudier l'interaction thermique dans les trois cas de Figure 3.6. En observant cette Figure, la théorie du modèle 1D montre que le calcul avec $\lambda_s = 10$ W/(mK) est théoriquement stable pour toute valeur du coefficient α_f . En revanche pour $\lambda_s = 2,5$ W/(mK) et $\lambda_s = 0,5$ W/(mK) le calcul est instable pour des faibles valeurs de α_f , autrement dit pour un échange thermique non suffisamment relaxé.

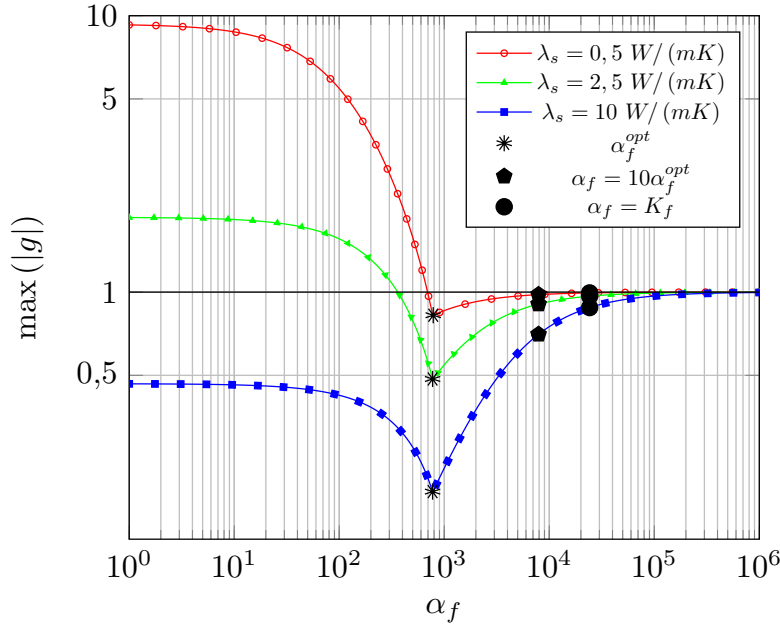


FIGURE 3.6 – Évolution du facteur d’amplification temporelle $\max(|g|)$ en fonction du coefficient de couplage α_f pour des interactions faibles et modérées

Pour chaque valeur de λ_s quatre valeurs du coefficient ont été testées :

- $\alpha_f = 0$ (correspondant à une condition de Dirichlet-Neumann)
- $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$
- $\alpha_f = 10\alpha_f^{(opt)}$
- $\alpha_f = K_f > \alpha_f^{(opt)}$

Pour chaque cas test étudié (différentes valeurs de λ_s), le Tableau 3.2 récapitule la valeur des nombres de Biot ainsi que le nombre d’itérations requis pour atteindre la convergence ($\Delta T_s \leq 10^{-3}$).

Comme prévu par la théorie, la simulation utilisant la condition de Dirichlet-Neumann est instable dans le cas où la conductivité du solide vaut $0,5 \text{ W/(mK)}$ (interaction thermique modérée). Cependant, contrairement à ce qui pouvait être attendu, lorsque $\lambda_s = 2,5 \text{ W/(mK)}$, la simulation converge bien que le facteur d’amplification temporelle lui correspondant se trouve dans la zone d’instabilité ($\max |g| > 1$). Cela peut être dû à un effet stabilisant de l’écoulement 2D car rappelons que le modèle théorique est basé sur une approche 1D.

Afin d’approfondir la compréhension des résultats obtenus avec les différentes valeurs de α_f , observons les Figures 3.7, 3.9 et 3.11.

La Figure 3.7 présente les courbes de convergence obtenues dans le cas où $\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$. Les quatre valeurs de α_f permettent d’atteindre la convergence de la simulation. Ce

λ_s	Bi^Δ	Bi_ν	$\alpha_f = 0$	$\alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})}$	$\alpha_f = 10 \cdot \alpha_f^{(\text{opt})}$	$\alpha_f = Kf$
0,5	141,5	9,4	Divergence à la 4ème itération de couplage	84	250	-
2,5	27,3	1,9	71	72	102	216
10	6,6	0,5	62	62	65	76

TABLEAU 3.2 – Récapitulatif des nombres de Biot et des nombre d'itérations de couplage à laquelle le critère de convergence à été atteint selon la valeur de λ_s (interactions faibles et modérées)

résultat coïncide avec la prévision théorique. Il n'y a pas d'écarts importants entre la vitesse de convergence obtenue avec la condition de Dirichlet-Neumann ($\alpha_f = 0$) et celle obtenue avec l'application du coefficient optimal dans la méthode Dirichlet-Robin. Ceci souligne que si l'interaction thermique est faible ($Bi_\nu < 1$) il n'y a pas de problèmes de stabilité. Malgré tout, on remarque de légères oscillations au début du calcul pour $\alpha_f = 0$. Ces oscillations ne sont pas présentes pour toutes valeurs égales ou supérieures à $\alpha_f^{(\text{opt})}$. En prenant un coefficient beaucoup plus grand que $\alpha_f^{(\text{opt})}$ une légère dégradation de la vitesse de convergence est observée, elle reste néanmoins acceptable.

Le champ de température près de l'interface fluide-structure pour ce cas test est affiché à la Figure 3.8 toujours dans le cas à $\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$.

Cependant lorsque l'interaction thermique augmente (augmentation du nombre de Biot numérique), des écarts plus importants sont visibles pour les différentes valeurs de α_f (cf. Figures 3.9 et 3.11).

Pour $\lambda_s = 2,5 \text{ W/(mK)}$ un comportement différent entre $\alpha_f = 0$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est observé (cf. Figure 3.9). Au début de la simulation le résidu pour $\alpha_f = 0$ décroît plus lentement que pour $\alpha_f^{(\text{opt})}$. Les deux courbes atteignent alors la même vitesse de convergence après environ 40 itérations de couplage. D'après la théorie, pour ce niveau d'interaction thermique ($\lambda_s = 2,5 \text{ W/(mK)}$, Figure 3.6) le coefficient optimal devrait aboutir à la convergence la plus rapide et la condition de Dirichlet-Neumann devrait être instable. Cependant, il s'avère que cette simulation conduit à un meilleur résultat en termes de convergence. Pour expliquer l'écart initial entre les deux courbes, la Figure 3.10 affiche la variation de la température au bord d'attaque pour les deux valeurs du coefficient de couplage ($\alpha_f = 0$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$). Dans le cas $\alpha_f = 0$, la température oscille fortement d'une itération à l'autre (amplitude d'environ 70 K) ce qui justifie le résidu plus élevé. Au contraire, l'évolution de la température obtenue avec le coefficient optimal est quasiment monotone. Seule une petite oscillation de 4 K est présente dans les premières itérations.

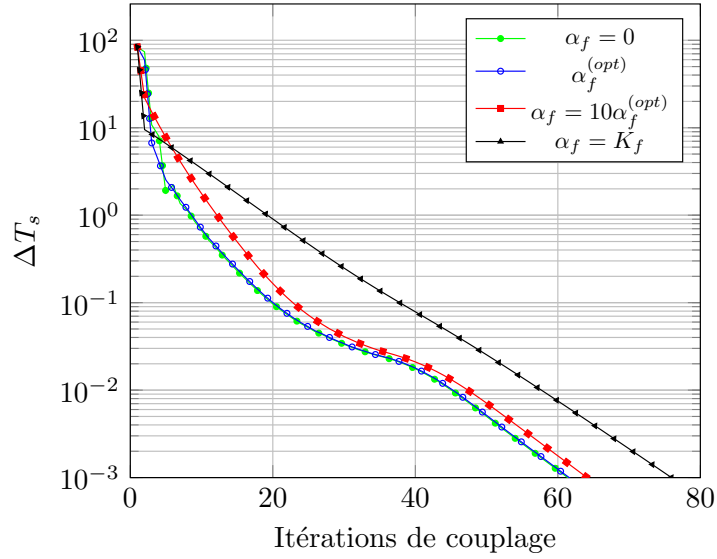


FIGURE 3.7 – Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$, $Bi_v = 0,5$)

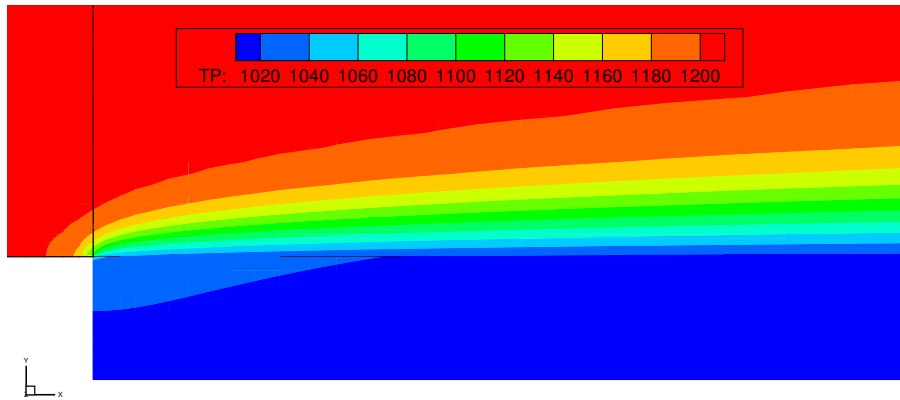


FIGURE 3.8 – Champs de température fluide et solide (cas $\lambda_s = 10 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 0,5$)

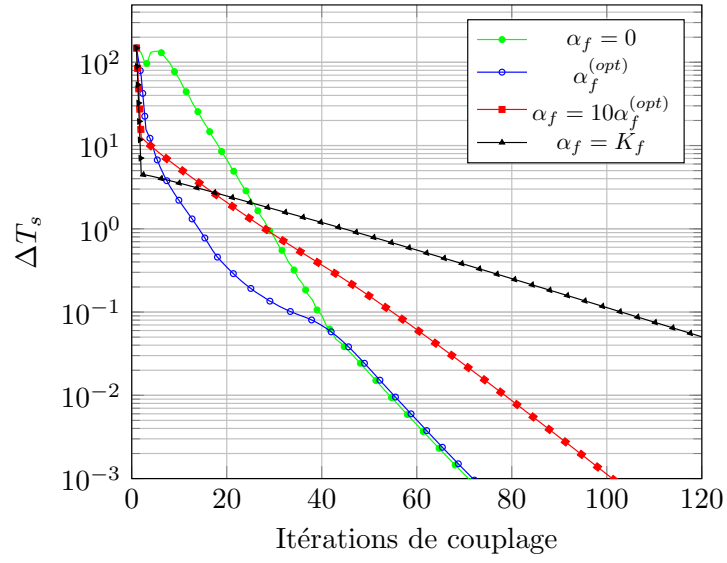


FIGURE 3.9 – Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 2,5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $Bi_v = 1,9$)

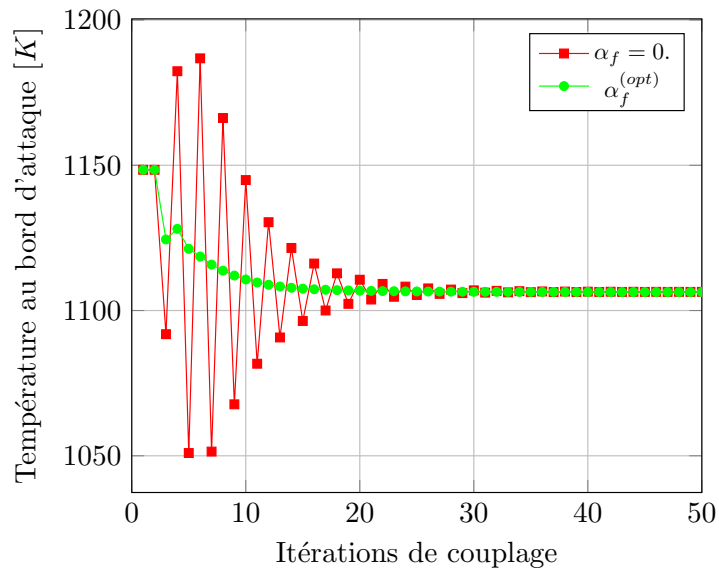


FIGURE 3.10 – Évolution de la température au bord d'attaque pour $\alpha_f = 0$ et pour $\alpha_f^{(opt)}$ ($\lambda_s = 2,5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $Bi_v = 9,4$)

La Figure 3.11 montre l'importance du choix du coefficient de couplage quand le nombre de Biot numérique est grand. En effet, dans le cas où $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ trois comportements différents peuvent être observés :

- divergence de la simulation pour $\alpha_f = 0$ (condition de Dirichlet-Neumann) ;
- stabilité et rapidité de la simulation en utilisant $\alpha_f^{(\text{opt})}$;
- une grande stabilité mais une convergence très lente en utilisant une valeur trop élevée du coefficient de couplage ($\alpha_f = 10 \cdot \alpha_f^{(\text{opt})}$ et $\alpha_f = K_f$).

Le critère de convergence dans le cas où $\alpha_f = K_f$ n'a pas été atteint car le temps d'exécution requis dépasse la durée limite admise par le serveur. Le champ de température près de l'interface fluide-structure pour ce cas test ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$) est tracé à la Figure 3.12.

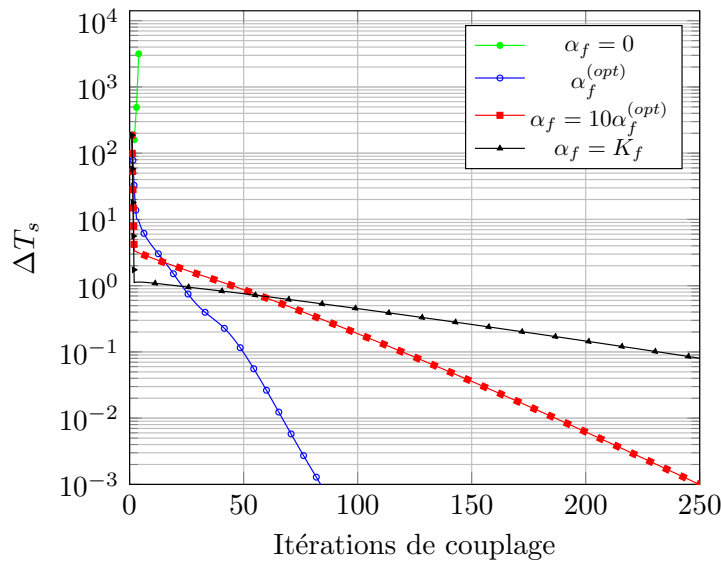


FIGURE 3.11 – Résidu de la température en norme infini au fils des itérations de couplage ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 9,4$)

Dorénavant, l'attention est portée sur ce dernier cas test ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$) afin d'étudier l'évolution de la température autour de la limite de stabilité α_f^{min} qui se trouve sur la branche de Neumann (entre $\alpha_f = 0$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$). $\alpha_f^{(\text{min})}$ est la valeur la plus petite du coefficient de couplage pour laquelle le problème couplé est stable ($\max |g(\alpha_f^{(\text{min})})| = 1$). Plusieurs coefficients de couplage ont été testés et pour $\alpha_f \lesssim 380$ le couplage s'avère instable (le résidu diverge ou il reste très grand). Ces coefficients de couplage ont été appliqués sur toute la longueur de l'interface de couplage. Il s'agit d'un traitement global et non plus local de la stabilité à la différence de la recherche du coefficient optimal. Pour des valeurs plus élevées du coefficient de couplage, en s'approchant de $\alpha_f^{(\text{opt})}$, nous avons constaté que la simulation converge très lentement à cause du comportement oscillant de la température à l'interface. Pour montrer ceci, nous présentons les résultats

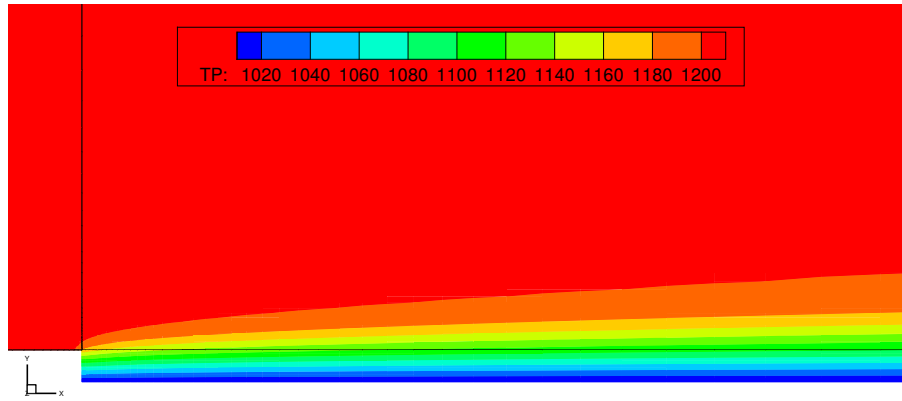


FIGURE 3.12 – Champs de température fluide et solide le long de la plaque plane (cas $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 9,4$)

obtenus avec deux valeurs du coefficient de couplage : $\alpha_f = 380$ et $\alpha_f = 400$. La position de ces valeurs sur le tracé du facteur d'amplification temporelle est affichée sur la Figure 3.13.

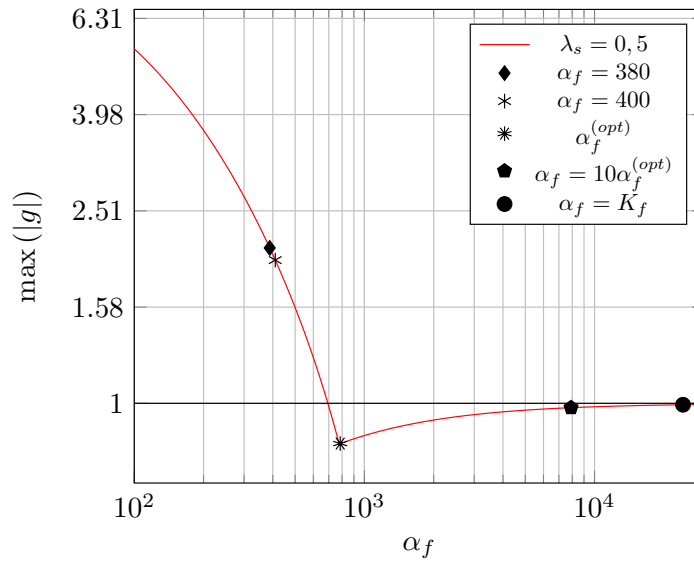


FIGURE 3.13 – Position des coefficient de couplage α_f étudiés sur le tracé du facteur d'amplification temporelle ($\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$, $Bi_v = 9,4$)

La Figure 3.14 présente les résultats de la simulation toujours dans le cas où $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$, avec à gauche (Figure 3.14a) le résidu en norme infini de la température et à droite (Figure 3.14b) l'évolution de la température au fil des itérations de couplage pour trois points (le bord d'attaque, le milieu et le bord de fuite de l'interface de couplage).

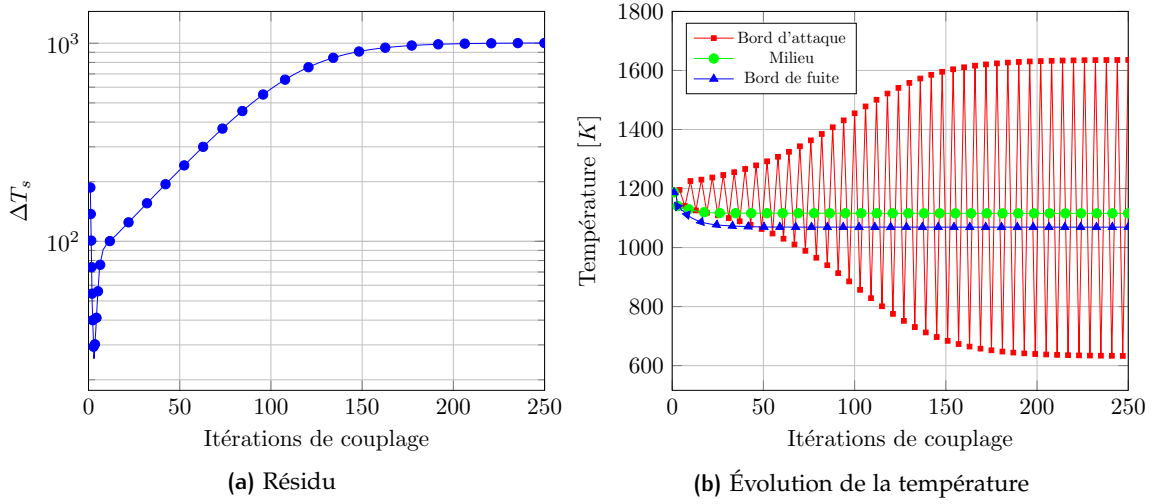


FIGURE 3.14 – Résultats de la simulation pour $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ($Bi_v = 9,4$), utilisant $\alpha_f = 380$.
 (a) Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage.
 (b) Évolution de la température au fil des itérations de couplage aux trois points étudiés (bord d'attaque, milieu et bord de fuite de l'interface de couplage).

La Figure 3.14a montre que le résidu en norme infinie de la température stagne aux alentours de 10^3 ce qui correspond exactement à l'amplitude de l'oscillation de la température au bord d'attaque (Figure 3.14b). Pour cette valeur de α_f la simulation ne converge pas mais elle ne diverge pas non plus. Ainsi, cette valeur du coefficient de couplage est encore trop petite pour stabiliser les points situés au début de la plaque caractérisés par un échange thermique important, mais elle est suffisante pour les autres points de l'interface (voir le point au milieu de la plaque et le bord de fuite). En augmentant légèrement le coefficient de couplage ($\alpha_f = 400$) nous observons un comportement différent : la simulation converge (même si la convergence est très lente) et les oscillations de la température sont plus amorties (cf. Figure 3.15). Ces deux valeurs sont un très bon exemple du besoin d'avoir un coefficient de couplage α_f local puisque l'intensité de l'interaction thermique peut changer de façon significative le long de la surface couplée. Nous avons également tenté d'appliquer comme valeur du coefficient de couplage la valeur locale du coefficient d'échange thermique ($\alpha_f(x) = h(x)$), définie comme suit :

$$\alpha_f = h_i^n = \frac{q_i^n}{T_i^n - T_{ref}} \quad (3.20)$$

où q est le flux de chaleur, T est la température de l'interface et T_{ref} est une température de référence (généralement la température de l'écoulement loin de l'interface). L'indice i indique l' i -ème point de la surface et l'indice n l'itération de couplage. h est alors calculé à chaque itération de couplage et son profil est similaire à celui déjà décrit à la Figure 3.5. La valeur du coefficient d'échange thermique est très grand au bord d'attaque et très

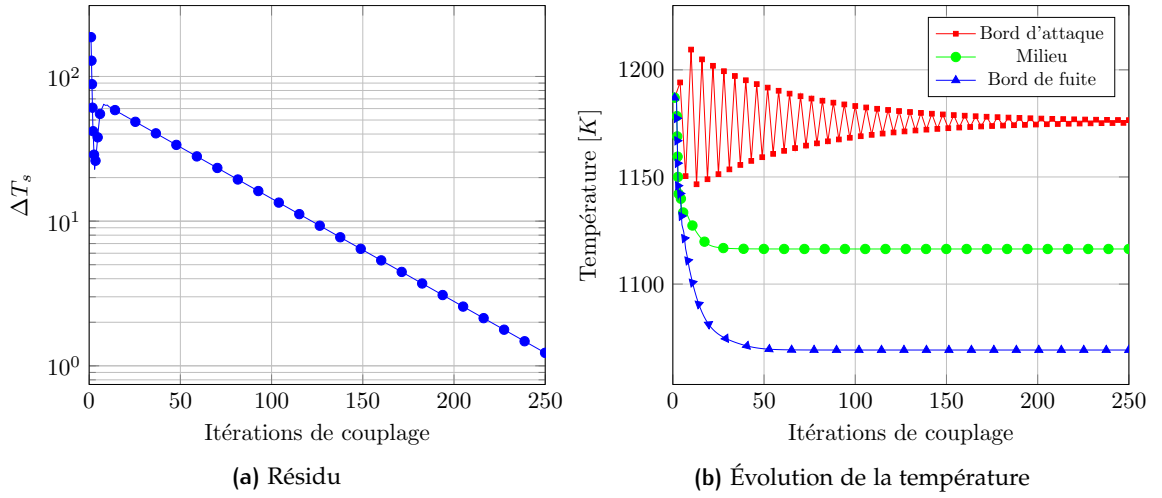


FIGURE 3.15 – Résultats de la simulation pour $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ($Bi_V = 9,4$), utilisant $\alpha_f = 400$.
 (a) Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage.
 (b) Évolution de la température au fil des itérations de couplage aux trois points étudiés (bord d'attaque, milieu et bord de fuite de l'interface de couplage).

faible au bord de fuite. Les résultats de la simulation $\alpha_f = h$ sont montrés sur la Figure 3.16. Nous pouvons constater, en regardant la Figure 3.16a, que la simulation ne converge pas. Cette fois l'instabilité n'est pas située au bord d'attaque mais sur la partie centrale et finale de la plaque. L'instabilité est liée à la variation importante du coefficient de couplage α_f le long de l'interface. En effet, la valeur de h au bord d'attaque ($\alpha_f = 3938$) est suffisante pour stabiliser l'interaction thermique (quoique trop élevée) mais celle au bord de fuite ($\alpha_f = 111$) est trop faible. Ce résultat montre que l'utilisation du coefficient d'échange thermique h comme coefficient de couplage n'est pas adapté pour stabiliser les problèmes aérothermiques.

En revanche, si le coefficient optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est utilisé, l'évolution de la température est stable en tous points de l'interface et la simulation converge rapidement vers la solution du problème en régime permanent (Figure 3.17). Cette valeur de α_f , calculée analytiquement pour chaque point de l'interface, stabilise le calcul couplé en évitant toute oscillation de température.

3.4.1.1 Comparaison des performances du calcul CHT et de la CFD seule

La Figure 3.18 compare la convergence (en termes de résidu sur la résolution de l'équation de conservation de la masse) d'un calcul aérothermique couplé (CHT) avec une résolution isolée de l'écoulement fluide en utilisant une condition de Dirichlet à l'interface. Le cas étudié est celui où $\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$. Une condition de Dirichlet imposée dans un calcul CFD correspond à supposer que le solide ait une épaisseur nul

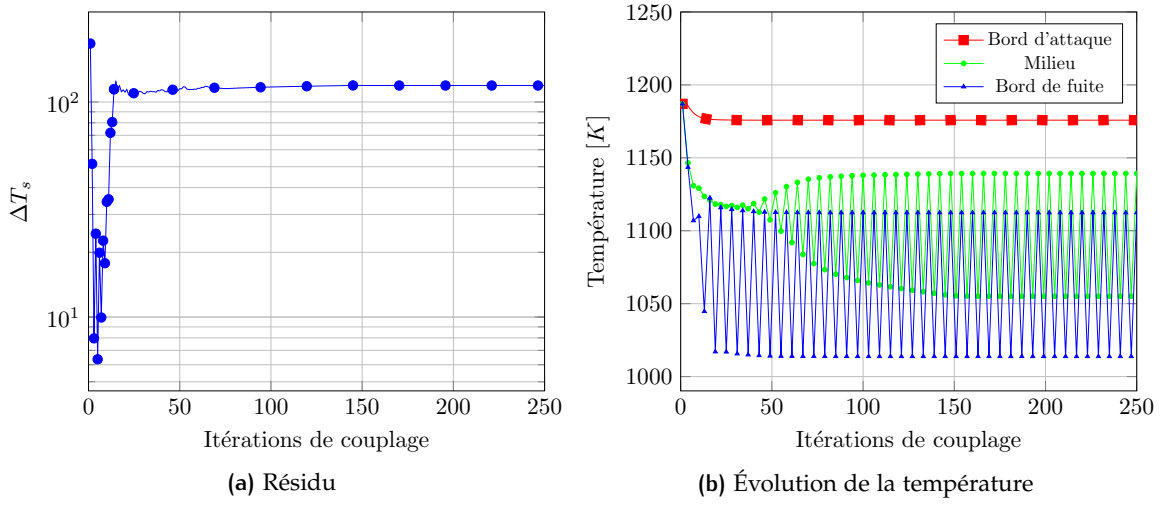


FIGURE 3.16 – Résultats de la simulation pour $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ($Bi_v = 9,4$), utilisant $\alpha_f = h(x)$.
 (a) Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage.
 (b) Évolution de la température au fil des itérations de couplage aux trois points étudiés (bord d'attaque, milieu et bord de fuite de l'interface de couplage).

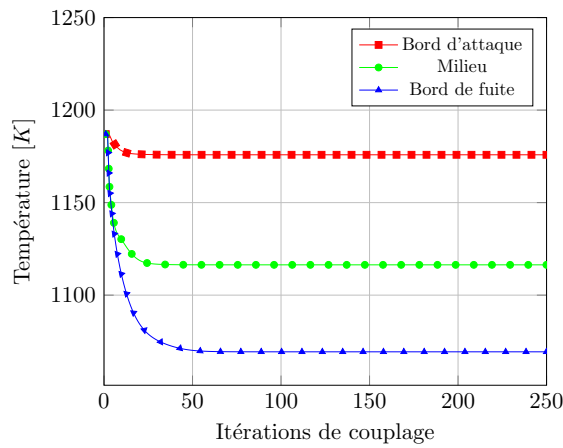


FIGURE 3.17 – Évolution de la température au fil des itérations de couplage aux trois points étudiés (bord d'attaque, milieu et bord de fuite de l'interface de couplage) pour $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ($Bi_v = 9,4$), utilisant $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$.

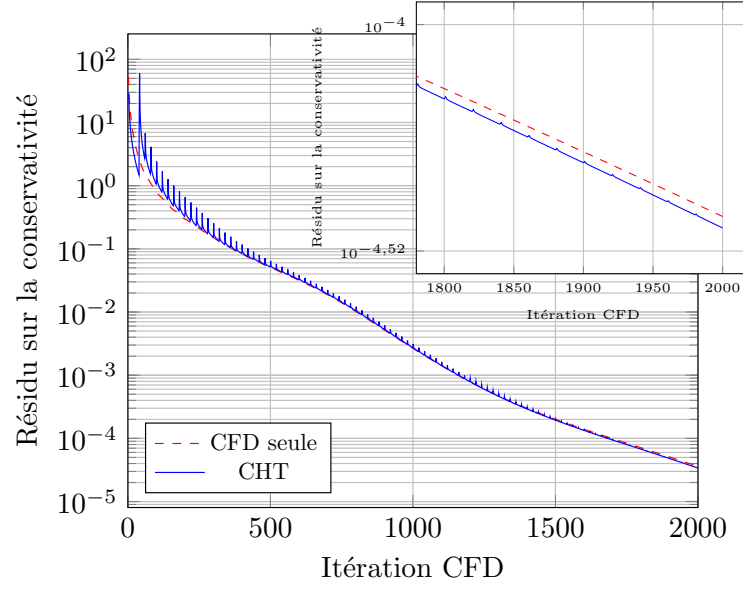


FIGURE 3.18 – Résidu de la densité pour la CFD seule et le calcul CHT ($\lambda_s = 10 \text{ W/(mK)}$, $Bi_v = 0,5$)

($\Lambda_s = 0$), ce qui donne un $K_s \rightarrow \infty$ et donc $Bi^\Delta = 0$. Un nombre de Biot local nul signifie que la résistance thermique du solide est nulle et que la conduction y est parfaite. La convergence du calcul CHT utilisant le coefficient optimal est légèrement meilleure que la convergence du calcul CFD seul. Les petits pics présents sur la courbe de la Figure 3.18 associée au calcul CHT correspondent à la mise à jour des conditions aux limites toutes les 20 itérations CFD ($\Delta t_c = 20\Delta t_f$). L'amplitude de ces pointes diminue au cours des itérations car la température sur l'interface est en train de converger.

3.4.1.2 Utilisation de $\alpha_f = h$ à l'approche de la convergence

L'application de h (coefficient d'échange thermique utilisé précédemment) lorsque le calcul couplé s'approche de la convergence est testée dans cette section. Le coefficient optimal est utilisé au début de la simulation puis remplacé par h lorsque le résidu à l'interface devient très faible ($\Delta T_f = 10^{-4}$ qui est inférieur au critère de convergence utilisé jusqu'à présent).

La Figure 3.19 montre le résidu sur la température à l'interface dans le cas où $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est appliqué pendant tout le calcul et celui où $\alpha_f = h$ à partir de $\Delta T_s = 10^{-4}$. Dans le second cas, des oscillations dont l'amplitude varie entre 10^{-4} et 1 apparaissent lorsque l'on passe de $\alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})}$ à $\alpha_f = h$. L'utilisation du coefficient d'échange thermique à l'approche de la convergence n'est alors pas valide. En effet, comme vu précédemment, la valeur de h aux nœuds situés au bord de fuite est trop faible et en utilisant cette valeur

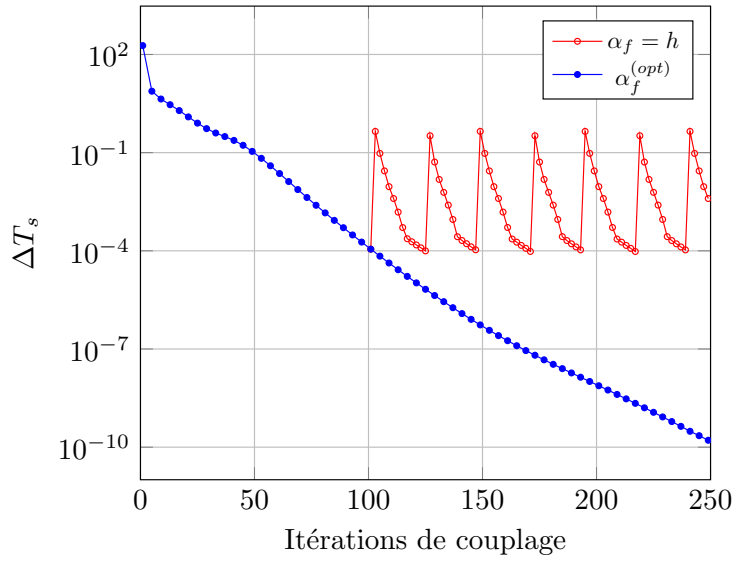


FIGURE 3.19 – Résidu en norme infini sur la température en fonction des itérations de couplage en utilisant $\alpha_f^{(opt)}$ et, à partir de $\Delta T_s = 10^{-4}$, $\alpha_f = h(x)$ (cas où $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ($Bi_v = 9,4$)).

pour α_f le flux de chaleur est sous-relaxé. L'instabilité peut donc apparaître près de la convergence. En plus, la méthode d'estimation du coefficient d'échange thermique est ambiguë car elle dépend du choix de la température de référence (cf. Éq. (3.20)).

Ceci montre que la stabilité du problème couplé ne dépend pas du niveau de convergence à l'interface. Un problème proche de la convergence peut devenir instable ou osciller.

3.4.2 Interactions thermiques fortes

La méthode optimale Dirichlet-Robin est efficace pour stabiliser des problèmes aérothermiques caractérisés par une interaction thermique faible et modérée (cf. §3.4.1). Nous allons à présent nous intéresser à des cas où l'interaction thermique est forte. La méthode optimale Dirichlet-Robin a été testée sur trois cas à forte interaction thermique dont les courbes du facteur d'amplification temporelle sont représentés sur la Figure 3.20. Les résultats obtenus pour $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$ ont également été reportés dans cette analyse de manière à situer ces nouveaux résultats par rapport à ceux de l'étude précédente. La Figure 3.20a montre qu'en prenant de petites valeurs de la conduction thermique dans le solide le nombre de Biot numérique Bi_v augmente fortement et que la quasi-totalité de la branche de Neumann est située dans la zone d'instabilité ($\max |g| > 1$). Même lorsque $\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$ la limite de stabilité est presque atteinte. Ceci est d'avantage visible sur la

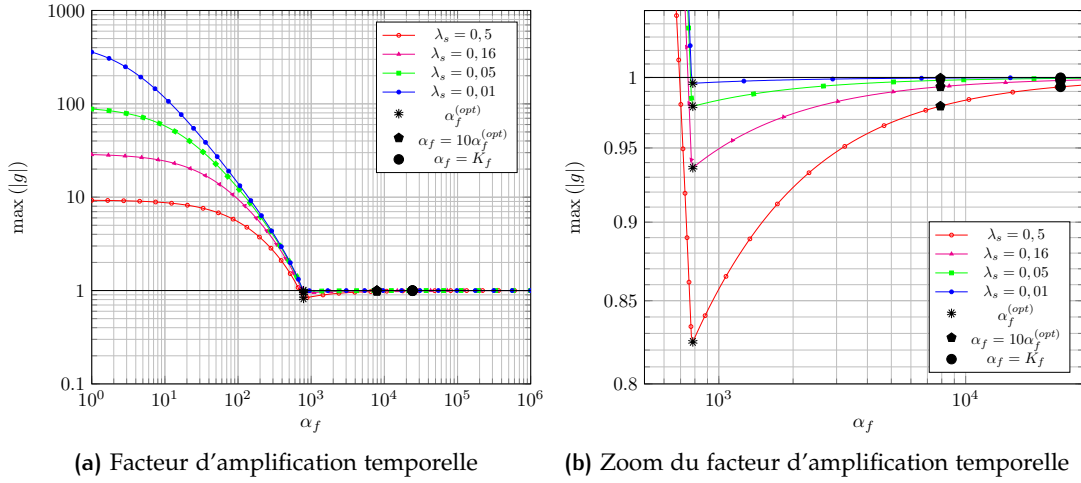


FIGURE 3.20 – Facteur d'amplification temporelle en fonction du coefficient de couplage α_f pour des interactions thermiques fortes

Figure 3.20b, où les points correspondants aux coefficients optimaux sont représentés par des étoiles, plus λ_s est petit et plus le facteur d'amplification temporelle s'approche de 1.

Nous rappelons que la valeur du facteur d'amplification temporelle pour $\alpha_f = \alpha_f^{(\text{opt})}$, c'est-à-dire sa valeur minimale, peut être calculée via l'équation suivante :

$$g^{\text{opt}} = \frac{\frac{Bi_\Delta}{2} (1 - \overline{D}_f)}{1 + \frac{Bi_\Delta}{2} (1 - \overline{D}_f)} = \frac{Bi_\nu}{2 + Bi_\nu} < 1 \quad (3.21)$$

Le facteur d'amplification temporelle correspondant à $\alpha_f^{(\text{opt})}$ se rapproche de la limite de stabilité ($\max |g| = 1$) lorsque le nombre de Biot numérique augmente. En outre, cette expression nous informe qu'en utilisant le coefficient optimal la simulation sera en théorie toujours stable, mais en pratique, - nous appliquons un modèle 1D sur des simulation 2D ou 3D -, une légère instabilité sur les modes 2D ou 3D peut déplacer le point optimal dans la zone instable. Afin d'améliorer la stabilité il est possible de réduire le terme $(1 - \overline{D}_f)$. Pour cela le choix le plus simple est d'augmenter la période de couplage même si cela implique une augmentation du temps de calcul.

La convergence de la méthode optimale Dirichlet-Robin sur les problèmes aérothermiques à forte interaction thermique est montrée à la Figure 3.21. La convergence se dégrade au fur et à mesure que le nombre de Biot numérique Bi_ν augmente. En imposant $\lambda_s = 0,16 \text{ W/(mK)}$ (qui correspond à $Bi_\nu = 28,9$), la convergence est très lente. Le résidu atteint le critère de convergence après 273 itérations de couplage, ce qui est trois fois plus élevé que dans le cas où $\lambda_s = 0,5 \text{ W/(mK)}$. Plus l'interaction thermique est forte et plus la convergence est ralentie et lorsque l'interaction devient trop forte le problème diverge. Pour $Bi_\nu = 86,8$, obtenu en imposant $\lambda_s = 0,05 \text{ W/(mK)}$, le résidu se stabilise

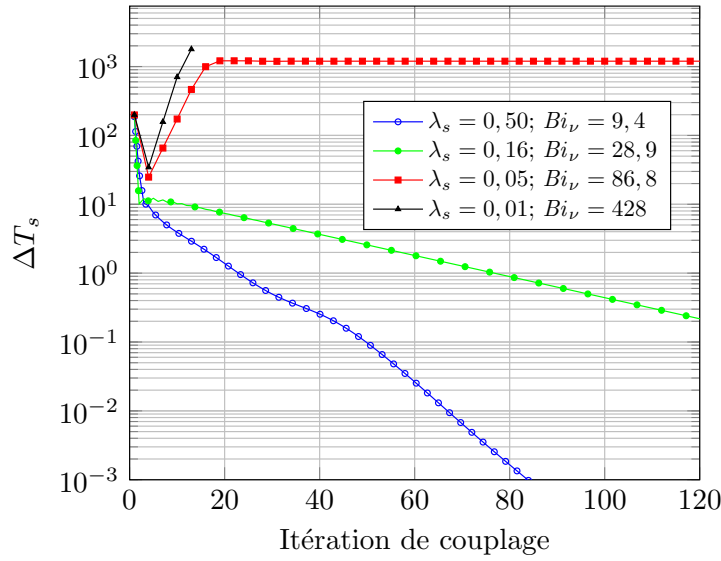


FIGURE 3.21 – Évolution du résidu sur la température pour les simulations à forte interaction thermique

autour de 1000 K. En effet, pour ce cas, la température au bord d'attaque de la plaque oscille avec une amplitude de 1000 K pendant toute la durée du calcul. Ce résultat est similaire à celui de la Figure 3.14 obtenu dans le cas où $\lambda_s = 0,5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ en utilisant un coefficient de relaxation plus petit que $\alpha_f^{(\min)}$ ($\alpha_f = 380$). Pour des valeurs plus grandes du nombre de Biot numérique (cas test caractérisé par $\lambda_s = 0,01 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$), le calcul couplé diverge autour de la 10^e itération de couplage.

Nous allons désormais porter notre attention sur ce dernier cas test qui ne converge pas et pour lequel $\lambda_s = 0,01 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Plusieurs valeurs du coefficient de couplage ont été testées afin d'étudier la stabilité. La convergence de ces calculs est présentée sur la Figure 3.22. Nous sommes parvenus à stabiliser le problème à partir de $\alpha_f = 1,7\alpha_f^{(\text{opt})}$. Pour des valeurs supérieures le problème est stable mais la convergence est plus lente. La vitesse de convergence reste acceptable tant que le coefficient de couplage reste du même ordre de grandeur que $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est utilisée. En effet, en imposant $\alpha_f = K_f$ la convergence est extrêmement lente. Cette dernière simulation converge après 500 itérations de couplage, soit 5 fois plus que $\alpha_f = 1,7\alpha_f^{(\text{opt})}$. Dans un papier récent (Errera, Moretti, Salem et al., 2019), un "plateau" est mis en évidence, ce qui explique pourquoi la valeur de stabilité $1,7\alpha_f^{(\text{opt})}$ peut stabiliser des interactions thermiques très fortes.

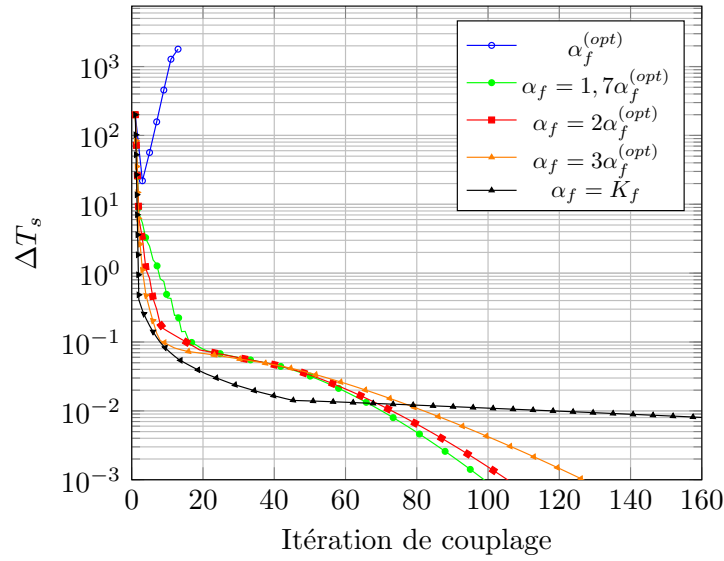


FIGURE 3.22 – Évolution du résidu sur la température au fil des itérations de couplage pour différentes valeurs du coefficient de couplage α_f (cas à $\lambda_s = 0,01 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $Bi_v = 428$)

3.5 ÉTUDE DE L'INITIALISATION DE LA MÉTHODE

Cette section présente une étude sur l'influence de l'initialisation de la méthode Dirichlet-Robin sur la stabilité du problème. L'objectif est de tester s'il vaut mieux appliquer le coefficient optimal dès la première itération de couplage ou utiliser une valeur assez grande de ce dernier pendant les premières itérations afin de ne pas trop perturber le problème couplé pendant cette phase délicate. Les cas tests montrés jusqu'ici ont été effectués en appliquant la condition de Dirichlet-Dirichlet (DD) à la première itération de couplage, de manière à initialiser les deux interfaces avec le même profil de température mais aussi pour laisser à l'écoulement plus de temps (deux fois la période de couplage) pour s'établir.

Le premier objectif de cette étude a été de voir jusqu'à quelle itération de couplage il est nécessaire d'employer la méthode Dirichlet-Dirichlet. La Figure 3.23 montre la convergence des calculs menés pour cette étude. Nous pouvons voir sur la Figure 3.23a que les différentes initialisations n'impactent pas la convergence de la simulation même si des différences sont visibles pour les premières itérations (cf. Figure 3.23b). En utilisant la méthode Dirichlet-Dirichlet pendant plus d'une itération, le résidu sur la température chute brutalement parce que le DD "gèle" (*freeze* en anglais) le couplage et la température des deux parois ne change pas. Malgré tout, lorsque cette méthode est remplacée par celle de Dirichlet-Robin avec coefficient optimal, la chaleur traverse subitement l'interface ce qui cause une augmentation du résidu sur la température supérieure à cinq ordres de grandeur. Le même saut est présent aussi pour le "DD jusqu'à la 1^{re} itération" (courbe

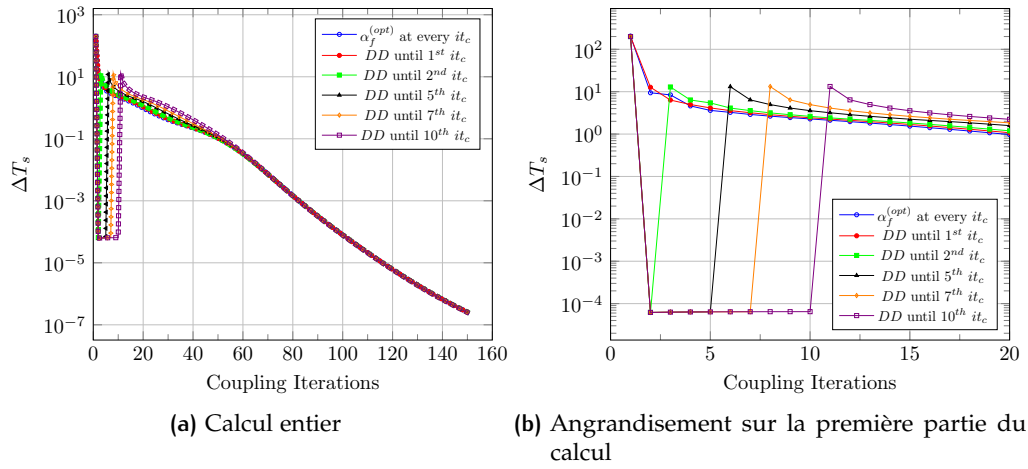


FIGURE 3.23 – Résidu en norme infini sur la température en fonction des itérations de couplage. Résultats des simulations utilisant une initialisation Dirichlet-Dirichlet (cas avec $Bi_v = 27$).

rouge) mais elle n'est pas visible car le résidu à la première itération de couplage est initialisé à 200 K ($T_f - T_s = 200$ K à l'instant zéro). L'utilisation du coefficient optimal dès la première itération permet une décroissance plus nette du résidu même si de petites oscillations sont présentes entre la 2^e et la 4^e itération. Ce résultat montre qu'il est conseillé d'appliquer la méthode Dirichlet-Dirichlet à la première itération de couplage uniquement car, au-delà, la perturbation du système est seulement retardée et n'améliore pas la convergence. De plus cette méthode peut être à l'origine de problèmes si le critère de convergence n'est pas très contraignant car ce dernier peut être atteint avant qu'un échange thermique entre les deux physiques n'ait lieu. Par exemple, dans le cas où un critère de convergence de $\Delta T_f < 10^{-3}$ ² est choisi, la simulation se termine après deux itérations de couplage alors qu'en fait le problème n'est pas convergé. Pour éviter que cela puisse se produire, l'utilisateur doit être attentif ce qui n'est pas forcément possible lorsque des codes commerciaux sont utilisés.

L'étude réalisée ci-dessus a été refaite dans le cas où le calcul couplé est initialisé avec un coefficient de couplage égal à K_f (valeur la plus utilisée dans la littérature concernant la méthode Dirichlet-Robin). La Figure 3.24 montre un comportement similaire à celui de la méthode Dirichlet-Dirichlet avec cependant une augmentation plus petite du résidu car $K_f \ll \infty$. Il faut noter que, à la différence du cas précédent, le résidu décroît dès lors que K_f est utilisé. L'application tardive du coefficient de couplage optimal n'influence quasiment pas l'augmentation du résidu de température. Dans ce cas également l'utilisation d'un grand coefficient au début de la simulation n'a pas d'effet positif sur la stabilité du calcul couplé.

2. critère déjà très bas pour le standard industriel

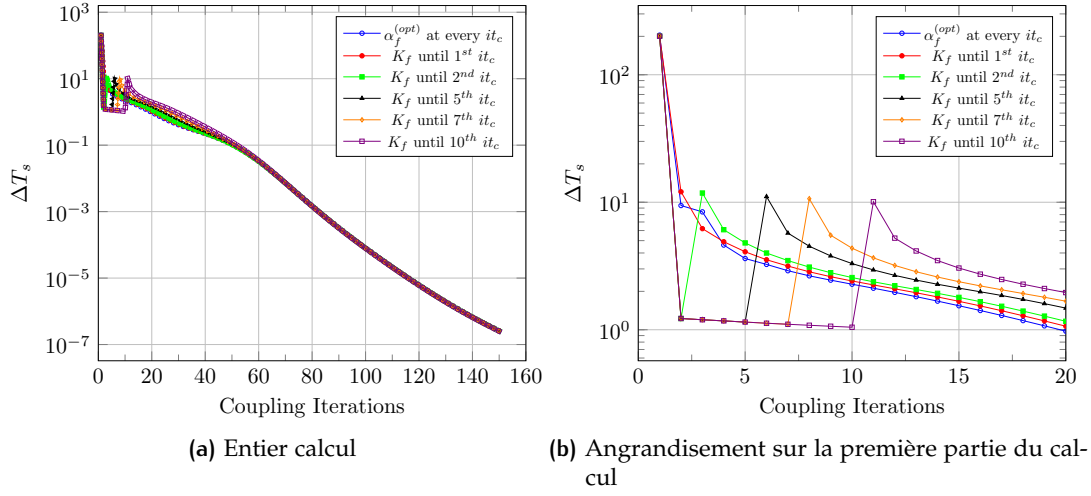


FIGURE 3.24 – Résidu en norme infini sur la température en fonction des itérations de couplage. Résultats des simulations utilisant K_f comme coefficient de couplage pour initialiser le calcul (cas avec $Bi_v = 27$).

Pour conclure, l'initialisation utilisée jusqu'à présent est conservée pour le reste des calculs couplés effectués dans la suite de cette thèse, c'est-à-dire que la méthode de Dirichlet-Dirichlet est utilisée pour la première itération de couplage et puis la méthode Dirichlet-Robin avec le coefficient optimal pour la suite de la simulation.

3.6 ÉTUDE DE LA PÉRIODE DE COUPLAGE

Cette section s'intéresse à l'effet de la période de couplage sur la stabilité du problème couplé. La section 3.2.6 a montré que le problème aérothermique est plus stable si l'échange d'informations entre les deux solveurs est fait avec une petite fréquence de couplage :

$$\begin{cases} Bi_v \rightarrow Bi^\Delta & \text{pour } \Delta t_c \rightarrow 0 \\ Bi_v \rightarrow 0 & \text{pour } \Delta t_c \rightarrow \infty \quad (\text{problème découplé}) \end{cases} \quad (3.22)$$

De même, pour le coefficient de couplage optimal :

$$\begin{cases} \alpha_f^{(\text{opt})} \rightarrow \frac{K_f}{2} & \text{pour } \Delta t_c \rightarrow 0 \\ \alpha_f^{(\text{opt})} \rightarrow 0 & \text{pour } \Delta t_c \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.23)$$

Afin de vérifier ce comportement, différents calculs utilisant différentes périodes de couplage ont été mis en place.

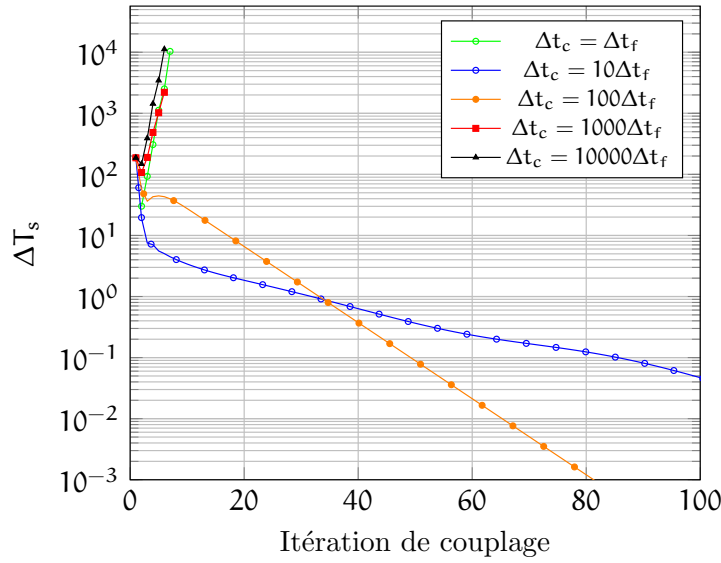


FIGURE 3.25 – Évolution du résidu sur la température pour des simulations utilisant différentes périodes de couplage Δt_c

La Figure 3.25 représente l'historique de convergence de ces différents calculs. En couplant le solide et l'écoulement fluide à chaque itération ($\Delta t_c = \Delta t_f$), le calcul est instable. Effectuer le couplage à chaque itération du solveur fluide est généralement déconseillé (Verstraete et Scholl, 2016), car la couche limite n'a pas le temps de s'adapter à la nouvelle température imposée à la paroi (cf. Figures 2.1, Chapitre 2). De plus, comme nous l'avons vu théoriquement, lorsque le couplage est fait très fréquemment le coefficient optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ s'approche dangereusement du coefficient de couplage minimal nécessaire à stabiliser le problème couplé. Pour des périodes de couplage plus importantes ($10\Delta t_f$ et $100\Delta t_f$), le calcul couplé converge comme prévu. Un comportement étrange se produit pour des fréquences de couplage très faibles ($1000\Delta t_f$ et $10000\Delta t_f$) caractérisé par la divergence des calculs. Afin de comprendre ce phénomène nous avons effectué une étude paramétrique en changeant la valeur du coefficient de couplage sur ces deux problèmes (période de couplage égal à $1000\Delta t_f$ et $10000\Delta t_f$) qui n'ont pas abouti à la solution.

Afin que ces calculs convergent, des valeurs plus grands du coefficient de couplage ont été testées. Sur la Figure 3.26, les courbes de convergence pour ces calculs à $\Delta t_c = 1000\Delta t_f$ et $\Delta t_c = 10000\Delta t_f$ sont affichées. Seules les courbes les plus significatives sont montrées. Pour le cas $\Delta t_c = 1000\Delta t_f$ (Figure 3.26a), le calcul converge seulement pour un coefficient de couplage supérieur ou égal à $3\alpha_f^{(\text{opt})}$. La meilleure convergence est obtenue pour $\alpha_f = 5\alpha_f^{(\text{opt})}$. Afin de stabiliser le calcul où le couplage est effectué avec une période $\Delta t_c = 10000\Delta t_f$, des valeurs plus importantes du coefficient de couplage sont nécessaires ($\alpha_f = 10\alpha_f^{(\text{opt})}$). Cette fois la meilleure convergence est obtenue lorsque $\alpha_f = 15,5\alpha_f^{(\text{opt})}$.

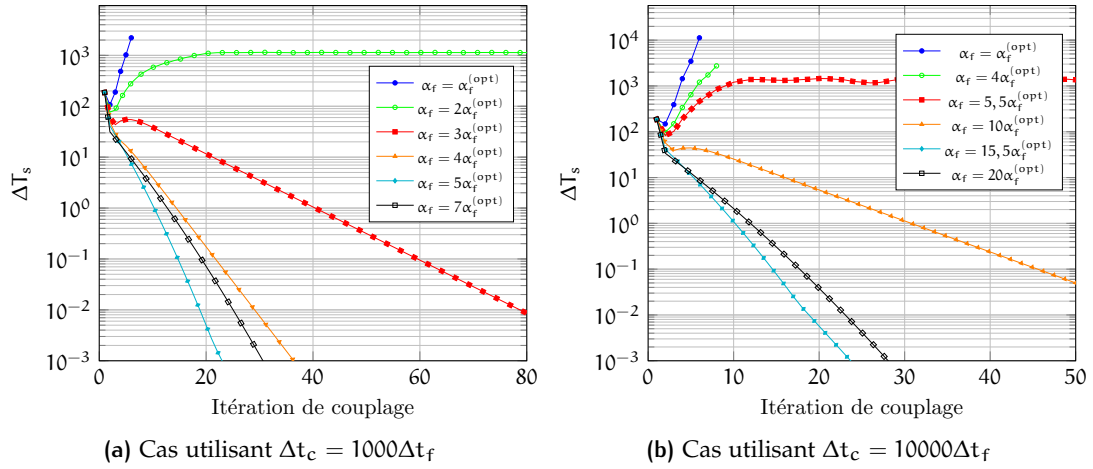


FIGURE 3.26 – Étude paramétrique sur α_f pour les calculs à faible fréquence de couplage ($1000\Delta t_f$ et $10000\Delta t_f$)

L'analyse de ces résultats montre que la valeur du coefficient de couplage nécessaire pour stabiliser les deux problèmes ($\alpha_f = 3\alpha_f^{(\text{opt})}$ dans le cas $\Delta t_c = 1000\Delta t_f$ et $\alpha_f = 10\alpha_f^{(\text{opt})}$ dans le cas $\Delta t_c = 10000\Delta t_f$) est similaire. Le tableau 3.3 résume ces résultats en affichant les valeurs de $\alpha_f^{\min}$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$ calculées par la théorie et celles nécessaires pour stabiliser numériquement le calcul. Le coefficient de couplage $\alpha_f^{(\min)}$ est donc supposé suivre un comportement asymptotique. Le même comportement est visible concernant l'évolution du coefficient de couplage optimal.

Période de couplage Δt_c	Théorie		Numérique	
	$\alpha_f^{\min}$	$\alpha_f^{(\text{opt})}$	$\alpha_f^{\min}$	$\alpha_f^{(\text{opt})}$
$1000\Delta t_f$	32	115	$3\alpha_f^{(\text{opt})} = 345$	$5\alpha_f^{(\text{opt})} = 575$
$10000\Delta t_f$	0	32	$10\alpha_f^{(\text{opt})} = 320$	$15,5\alpha_f^{(\text{opt})} = 495$

TABLEAU 3.3 – Valeurs des coefficients de couplage minimal $\alpha_f^{(\min)}$ et optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ théorique et numériques pour les périodes de couplage $\Delta t_c = 1000\Delta t_f$ et $\Delta t_c = 10000\Delta t_f$

La Figure 3.27 montre ce comportement en traçant l'évolution du facteur d'amplification temporelle en fonction du coefficient de couplage α_f et de la période de couplage ($\Delta t_c/\Delta t_f$).

L'écart entre le comportement théorique et celui numérique provient du fait que le nombre d'itérations nécessaire pour la convergence du problème fluide est inférieure à la période de couplage. En effet, lorsque l'écoulement converge les variables pariétales

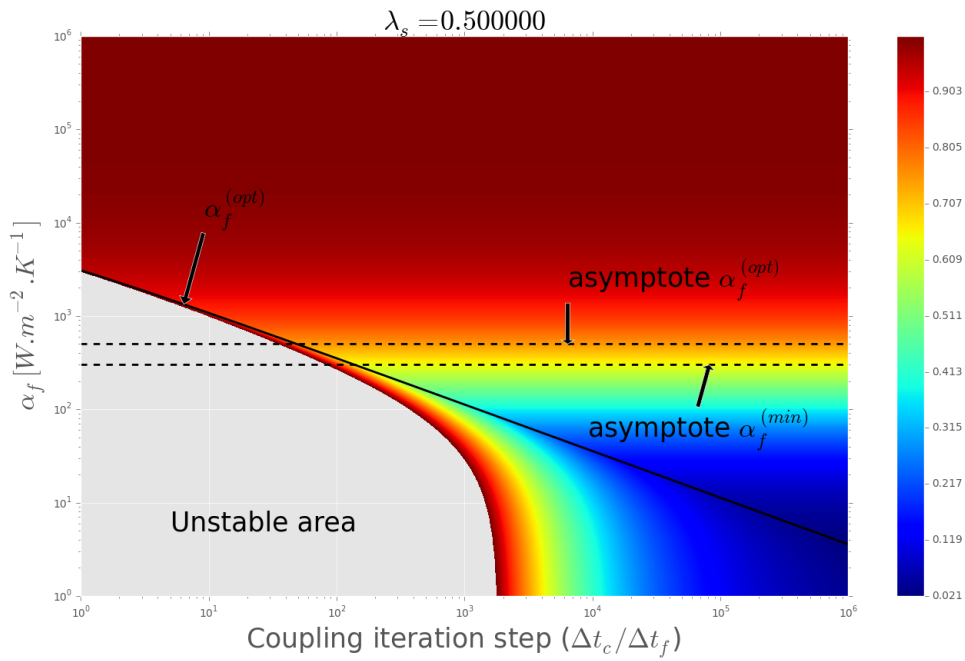


FIGURE 3.27 – Évolution du facteur d'amplification temporelle max ($|g|$) en fonction du coefficient de couplage α_f pour des simulations à différentes périodes de couplage

sont établies et ne changeront pas même si le calcul est prolongé. Le modèle 1D prévoit une réduction du coefficient optimal en augmentant la période de couplage alors que les quantités pariétales ne varient plus. On peut donc supposer que le coefficient minimal et par conséquent, le coefficient optimal, doivent suivre un comportement similaire à celui des quantités pariétales, c'est-à-dire converger vers une valeur qui ne varie plus lorsque la fréquence de couplage augmente. Dans le cas où l'écoulement fluide a besoin d'un nombre d'itérations plus important pour converger, la valeur asymptotique du coefficient de couplage est plus petite. Dans le modèle 1D, on considère un transitoire dans le milieu fluide, autrement dit, la convergence n'est pas atteinte tant qu'on couple.

3.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre la méthode Dirichlet-Robin optimale (Errera et Chemin, 2013) a été analysée dans un premier temps sur le plan théorique puis sur le plan numérique. Ces analyses nous ont permis d'obtenir des résultats très importants qui ont été publiés dans Moretti, Errera et al., 2018.

Sur le plan théorique, le comportement de la méthode dans des cas extrêmes a été étudié. Pour la première fois dans cette thèse nous avons défini le nombre de Biot numérique Bi_v , nombre adimensionnel qui mesure le niveau de l'intensité de l'interaction thermique entre l'écoulement et le solide en prenant en compte à la fois des paramètres physiques et des paramètres numériques. Ce nombre a été également publié dans Moretti, Errera et al., 2018.

L'étude théorique a mis en lumière l'effet déstabilisant du maillage extrêmement raffiné sur la stabilité du problème couplé. De plus, pour ce type de maillage, la dépendance de la stabilité du problème à la distance de pénétration a été montrée. Plus la distance de pénétration est faible, plus une valeur importante du coefficient de couplage est nécessaire pour stabiliser le problème. Ces résultats ont été récemment publiés dans Errera, Moretti, Salem et al., 2019.

L'effet déstabilisant d'un maillage raffiné peut être compensé par le choix du pas de temps de couplage. En effet, la période de couplage a un impact très important sur la stabilité du problème couplé grâce au terme $(1 - \overline{D}_f)$. Plus la période de couplage est grande, plus l'interaction thermique devient faible et, par conséquent, le problème plus stable.

Sur le plan numérique, la méthode a été testée sur le cas d'une plaque plane chauffée par un écoulement fluide. Plusieurs combinaisons des paramètres thermiques ont été testées permettant ainsi de faire varier l'intensité de l'interaction thermique. Pour des interactions thermiques faibles ou modérées, la méthode de Dirichlet-Robin qui utilise le coefficient optimal permet de stabiliser le problème couplé et d'assurer une convergence rapide. L'utilisation de valeurs du coefficient de couplage plus grand que le coefficient

optimal stabilise le problème mais la convergence est extrêmement lente. À l'inverse, en utilisant des valeurs plus faibles du coefficient de couplage le problème peut être instable (cas d'une interaction thermique modérée). Ainsi, le comportement numérique de la méthode Dirichlet-Robin coïncide avec la théorie.

Pour une interaction thermique forte, la capacité de stabilisation de la méthode Dirichlet-Robin se réduit fortement jusqu'à conduire à la divergence des calculs dans les cas où l'interaction thermique est extrêmement forte. En effet, dans ce dernier cas, la valeur du facteur d'amplification temporelle pour $\alpha_f^{(\text{opt})}$ calculée par la méthode se rapproche dangereusement de la limite de stabilité. L'application de cette méthode, basée sur un modèle 1D, à des configurations multidimensionnelles peut conduire à l'instabilité du problème couplé due à la contribution des modes 2D et/ou 3D. Pour éviter l'apparition d'instabilités, un coefficient de couplage légèrement plus important que $\alpha_f^{(\text{opt})}$, peut être employé mais ce dernier a tendance à ralentir la convergence du calcul (Errera, Moretti, Salem et al., 2019). Une deuxième solution consiste à changer la condition aux limites appliquée à l'écoulement fluide. Cette dernière solution est traitée dans le chapitre suivant.

À noter tout de même que dans un travail publié très récemment, Salem et al., 2019 se sont intéressés à des interactions très fortes dues à la présence de barrières thermiques. La méthode proposée, basée sur la méthode Dirichlet-Robin, stabilise le problème en introduisant un pas de temps adaptatif diffusif dans l'expression du coefficient optimal.

4

DÉVELOPPEMENT ET VALIDATION DE LA MÉTHODE NEUMANN-ROBIN POUR LA STABILISATION DES CALCULS AÉROTHERMIQUES À FORTE INTERACTION THERMIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la méthode Dirichlet-Robin optimale tend à être de moins en moins stable à mesure que l'interaction thermique s'amplifie (cf. §3.4.2). Ce chapitre a pour objectif de vérifier si l'utilisation de la condition aux limites de Neumann (flux de chaleur imposé) à l'interface fluide à la place de la condition de Dirichlet (température imposé) est plus appropriée pour les interactions fortes comme on peut logiquement le penser. Cette méthode est appelée méthode Neumann-Robin.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, une analyse de stabilité permet de mettre en place les équations nécessaires pour implémenter la méthode (cf. Section 4.1). Puis, la capacité théorique de cette méthode à stabiliser les problèmes aérothermique à forte interaction est étudiée (cf. Section 4.2). Enfin, la section 4.3 permet de comparer numériquement la convergence de la méthode Neumann-Robin avec celle de la méthode Dirichlet-Robin.

4.1 DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE NEUMANN-ROBIN

La méthode Neumann-Robin est mise en place en suivant la même procédure que celle utilisée pour la méthode Dirichlet-Robin. Cependant, dans le cas de la méthode Neumann-Robin les conditions de raccord à l'interface sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{q}_f = q_s & \text{Condition de Neumann} \\ \hat{q}_s + \alpha_f \hat{T}_s = -q_f + \alpha_f T_f & \text{Condition de Robin} \end{cases} \quad (4.1)$$

Comme pour la méthode Dirichlet-Robin, la température peut être décomposée en un produit des facteurs d'amplification temporelle et spatiale :

$$T_j^n = \begin{cases} z^{n-1} \kappa_f^j & j > 0 \\ z^n \kappa_s^j & j \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

L'expression du module du facteur d'amplification temporelle $|z|$ est obtenue grâce à la combinaison des équations (4.1) et (4.2). On a ainsi :

$$|z| = |g(z)| = \left| \frac{K_f \alpha_f}{K_f (K_s + \alpha_f)} \kappa_f(z, D_f) + \frac{(K_f - \alpha_f) K_s}{K_f (K_s + \alpha_f)} \right| \quad (4.3)$$

où le facteur d'amplification spatiale $\kappa_f(D_f, z)$ est défini comme suit :

$$\kappa_f(D_f, z) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{D_f z} - \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{D_f z} \right)^2 - 4} \right) \quad (4.4)$$

On peut noter que l'équation (4.3) correspond au cas où $\alpha_s = 0$ dans la méthode Robin-Robin (cf. § 2.5).

Afin d'obtenir l'expression analytique du coefficient de couplage optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ il est nécessaire de résoudre l'égalité suivante :

$$|g(z=1)| = |g(z=-1)| \quad (4.5)$$

L'expression suivante est alors obtenue :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{2K_s K_f}{2K_s - K_f (1 + \overline{D}_f)} = \frac{2K_f}{2 - Bi^\Delta (1 + \overline{D}_f)} \quad (4.6)$$

La figure 4.1 montre l'évolution du maximum du facteur d'amplification temporelle ($\max |g|$) pour la méthode Neumann-Robin (cf. Équation (4.3)) en fonction de α_f . Cette fois-ci la partie à gauche de la courbe tend vers la limite de stabilité $\max |g(z)| = 1$ et se situe toujours dans la zone stable, alors que la partie droite peut se trouver dans la zone instable. Ce comportement correspond à l'inverse de celui obtenu avec la méthode Dirichlet-Robin.

4.2 ÉTUDE THÉORIQUE DU POTENTIEL DE STABILISATION DE LA MÉTHODE

Dans cette section, une étude théorique du potentiel de la méthode Neumann-Robin à stabiliser les problèmes aérothermiques est conduite. Comme pour la méthode Dirichlet-Robin (cf. § 3.2) l'intérêt est tout d'abord porté sur la recherche des différents comportements du modèle (stable ou instable) en fonction de la valeur du coefficient de couplage α_f . Ensuite, l'impact des principaux paramètres physiques et numériques (ratio des conductances, taille de la première maille fluide, période de couplage) sur ces comportements est étudié.

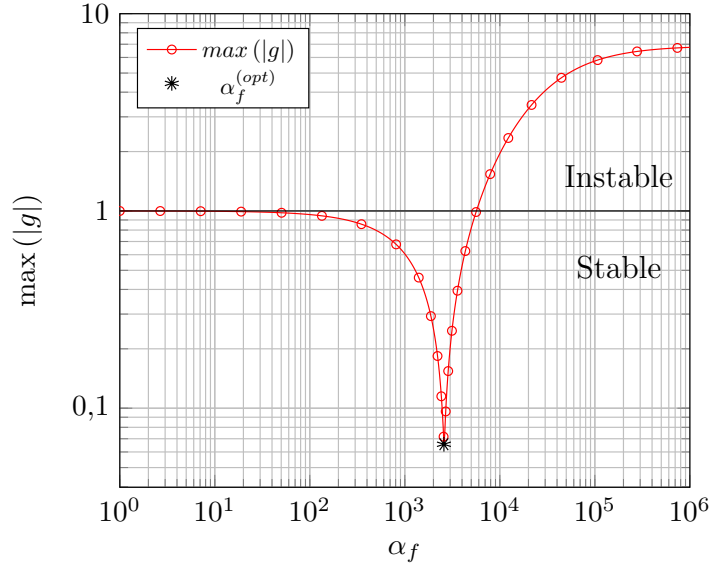


FIGURE 4.1 – Maximum du facteur d’amplification temporelle $\max |g|$ en fonction du coefficient de couplage α_f dans le cas de la méthode Neumann-Robin

4.2.1 Recherche des différents comportements du modèle en fonction du coefficient de couplage

Dans cette section, la courbe $\max |g|$ en fonction de α_f est analysée afin d’explorer les différents comportements de la méthode et les cas pour lesquels il existe une zone d’instabilité. Pour cela nous allons calculer l’expression de $|g(\infty)|$ qui représente le point potentiellement le plus instable (cf. Figure 4.1). Il faut donc chercher la limite de $|g(z = -1)|$ lorsque $\alpha_f \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\alpha_f \rightarrow \infty} |g(z = -1)| = \lim_{\alpha_f \rightarrow \infty} \left| \frac{K_f \alpha_f}{K_f (K_s + \alpha_f)} \bar{D}_f - \frac{(K_f - \alpha_f) K_s}{K_f (K_s + \alpha_f)} \right| = \left| \bar{D}_f - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| \quad (4.7)$$

La valeur de $\max |g|$ diminue avec l’augmentation du nombre de Biot local Bi^Δ et diminue aussi lorsque $\bar{D}_f$ diminue. Ce comportement est inverse de celui observé avec la méthode Dirichlet-Robin.

La Figure 4.2 montre l’évolution de $\max(|g|)$ en fonction de α_f pour trois valeurs de $Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)$ (terme qui apparaît au dénominateur de l’équation (4.6)). Chaque courbe présente un comportement différent qui est détaillé à travers un tableau de variation (cf. Tableau 4.1).

Ce tableau met en avant une zone d’instabilité pour des interactions thermiques faibles (Bi^Δ faible, 1^{re} ligne du tableau). Pour ce niveau d’interaction thermique l’utilisation d’une valeur élevée de α_f ou d’une valeur infinie (qui correspond à la méthode Neumann-

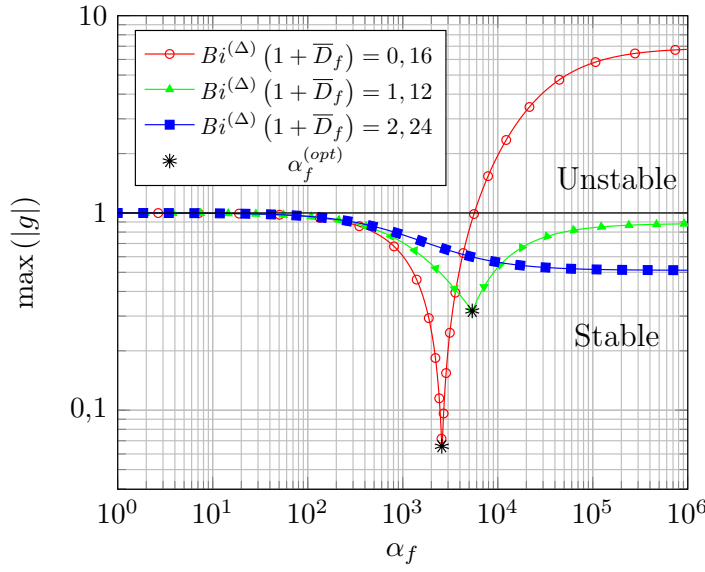


FIGURE 4.2 – Maximum du facteur d’amplification temporelle $\max |g|$ de la méthode Neumann-Robin en fonction de α_f pour différents $Bi^\Delta (1 + \overline{D}_f)$.

Dirichlet) conduit à l’instabilité du problème. Il existe également une valeur maximale de α_f au-delà de laquelle le problème couplé est instable. Son expression est présentée ci-dessous :

$$\alpha_f^{(\max)} = \frac{2K_s K_f}{K_s - K_f (1 + \overline{D}_f)} = \frac{2K_f}{1 - Bi^\Delta (1 + \overline{D}_f)} \quad (4.8)$$

Les expressions du coefficient optimal (4.6), du coefficient (4.8) et les conditions du Tableau 4.1 montrent que le terme temporel a la forme $(1 + \overline{D}_f)$. Ainsi, il varie de 1 ($\Delta t_c = 0$) à 2 ($\Delta t_c \rightarrow \infty \Rightarrow \overline{D}_f = 1$). Son impact sur la stabilité est ainsi mineur contrairement à la méthode de Dirichlet-Robin.

α_f	0		$\alpha_f^{(\text{opt})}$		$\alpha_f^{(\text{max})}$		∞	Condition
$ g $	1	$\searrow$	$g^{(\text{opt})}$	$\nearrow$	1	INSTABLE		$Bi^\Delta \left(1 + \overline{D}_f\right) \leqslant 1$
$ g $	1	$\searrow$	$g^{(\text{opt})}$	$\nearrow$			$ g(\infty) $	$1 \leqslant Bi^\Delta \left(1 + \overline{D}_f\right) \leqslant 2$
$ g $	1	$\nearrow$					$ g(\infty) $	$Bi^\Delta \left(1 + \overline{D}_f\right) \geqslant 2$

TABLEAU 4.1 – Zones de stabilité de la méthode Neumann-Robin en fonction du coefficient de couplage α_f et de la condition $Bi^\Delta (1 + \overline{D}_f)$.

Pour des interactions thermiques fortes, le problème est inconditionnellement stable (deuxième et troisième ligne du Tableau 4.1). Dans le cas où $Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f) \geq 2$, $\max |g|$ est une fonction de α_f monotone et décroissante. Il n'existe alors aucun coefficient de couplage optimal. La résolution du problème couplé sera plus rapide en utilisant $\alpha_f \rightarrow \infty$, qui correspond à imposer la température calculée par la CFD directement à l'interface solide (méthode Neumann-Dirichlet).

En comparant le domaine de stabilité de la méthode Neumann-Robin avec celui de la méthode Dirichlet-Robin (voir Tableau 3.1) étudiée dans le chapitre 3, il existe une zone où les deux méthodes sont stables :

$$\frac{1}{1 + \bar{D}_f} \leq Bi^\Delta \leq \frac{1}{1 - \bar{D}_f} \quad (4.9)$$

Cette zone est plus étroite ou plus large lorsque $\bar{D}_f$ tend respectivement vers 0 ou 1. En effet en faisant varier $\bar{D}_f$ on peut élargir le domaine de stabilité de chaque méthode en rendant stable certains problèmes précédemment instables. La condition (4.9) montre ainsi qu'il existe une zone de stabilité commune aux méthodes Dirichlet-Robin et Neumann-Robin. Ce résultat intéressant a été publié dans [Moretti, Errera et al., 2018](#).

4.2.2 Stabilité en fonction du ratio des conductances

Comme pour la méthode Dirichlet-Robin, la stabilité en fonction du ratio des conductances a été étudiée. Le rapport des conductances (fluide et solide) correspond au nombre de Biot local Bi^Δ :

$$Bi^\Delta = \frac{K_f}{K_s} = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{\frac{\lambda_s}{\Delta y_s}} = \frac{2\lambda_f \Delta y_s}{\lambda_s \Delta y_f} \quad (4.10)$$

Dans ce cas, comme annoncé précédemment, $|g(\infty)|$ augmente lorsque le ratio des conductances thermiques diminue. Ainsi, plus le ratio des conductances thermiques diminue plus le problème est enclin à être instable.

4.2.3 Stabilité en fonction de la taille de la première maille fluide

L'effet d'un maillage raffiné sur la stabilité du domaine fluide à l'interface ($\Delta y_f \rightarrow 0$) est étudié. L'étude de la stabilité requiert la connaissance du comportement de $|g|$ en fonction de α_f . Les limites de $|g(\infty)|$, $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et $\alpha_f^{(\text{max})}$ sont alors recherchées.

En ce qui concerne $|g(\infty)|$ (facteur d'amplification temporelle pour la méthode Neumann-Dirichlet), la limite suivante est obtenue :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} |g(\infty)| = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \left| \bar{D}_f - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \left| \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| \quad (4.11)$$

Afin de simplifier la notation, on pose :

$$Bi^\Delta = \frac{2\lambda_f \Lambda_s}{\lambda_s} \frac{1}{\Delta y} = \frac{B}{\Delta y} \quad (4.12)$$

et

$$D_f = \frac{\lambda_f \Delta t}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{C}{\Delta y^2} \quad (4.13)$$

L'Équation (4.11) devient alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \left| \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{C}{\Delta y^2}}{1 + \frac{C}{\Delta y^2} + \sqrt{1 + 2\frac{C}{\Delta y^2}}} - \frac{1}{\frac{B}{\Delta y_f}} \right| = \\ \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \left| \frac{C}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} - \frac{\Delta y_f}{B} \right| &= 1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Plus la taille de la première maille fluide est petite et plus $|g(\infty)|$ s'approche de la limite de stabilité $|g| = 1$.

La même procédure est appliquée pour le coefficient optimal, la limite ci-dessous est obtenue :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \alpha_f^{(\text{opt})} = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{2K_f}{2 - Bi^\Delta (1 + \overline{D}_f)} \quad (4.15)$$

Comme précédemment, on pose :

$$Bi^\Delta = \frac{2\lambda_f \Lambda_s}{\lambda_s} \frac{1}{\Delta y} = \frac{B}{\Delta y} \quad (4.16)$$

et

$$D_f = \frac{\lambda_f \Delta t}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{C}{\Delta y^2} \quad (4.17)$$

Alors l'Équation (4.15) devient :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{1 - \frac{B}{\Delta y_f} \left(1 + \frac{C}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} \right)} &= \\ = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{4\lambda_f}{\Delta y_f - B \left(1 + \frac{C}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} \right)} &= -\frac{4\lambda_f}{2B} = -2K_s \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pour des tailles infimes de la première maille fluide, aucune valeur optimale du coefficient n'existe.

La procédure utilisée pour $|g(\infty)|$ et $\alpha_f^{(\text{opt})}$ est une dernière fois employée pour étudier la limite de la valeur maximale du coefficient de couplage $\alpha_f^{(\text{max})}$, le résultat est le suivant :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \alpha_f^{(\text{max})} = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{2K_f}{1 - Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)} = -2K_s \quad (4.19)$$

L'équation (4.19) montre que pour des tailles infimes de la première maille fluide, le problème couplé est stable quelle que soit la valeur de α_f .

Pour conclure, à la lumière de ces derniers résultats, on déduit que le $|g|$ de la méthode Neumann-Robin, dans le cas où la taille de la première maille fluide tend à zéro, tend vers 1, quel que soit α_f :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} |g(\alpha_f)| = 1 \quad \forall \alpha_f \quad (4.20)$$

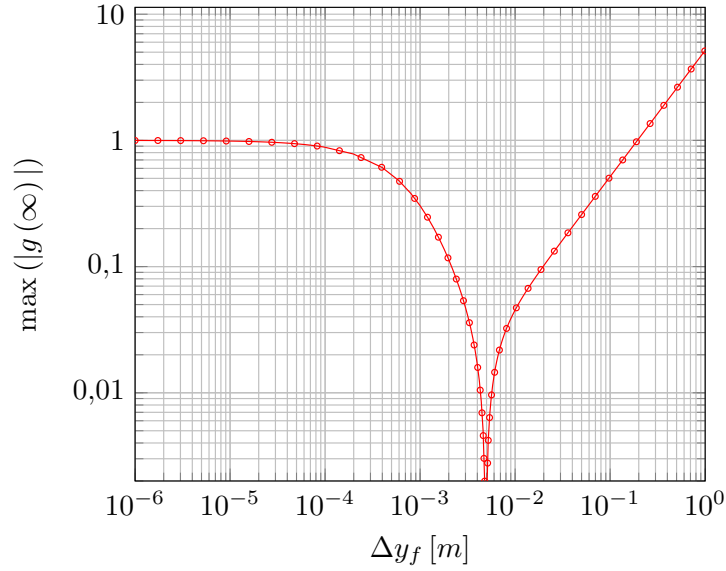


FIGURE 4.3 – Évolution de $\max |g(\infty)|$ en fonction de la taille de la première maille fluide Δy_f .

La Figure 4.3 présente le tracé de $\max |g(\infty)|$ en fonction de la taille de la première maille fluide. $\max |g(\infty)|$ représente le point de la courbe $\max |g(\alpha_f)|$ potentiellement le plus instable (cf. Figure 4.1). Deux comportements sont visibles. En partant d'un maillage grossier (partie droite de la courbe), $\max |g(\infty)|$ décroît avec la diminution de la taille de la première maille jusqu'à atteindre 0. Pour un raffinement encore plus fin, $\max |g(\infty)|$ augmente pour atteindre 1, la limite de stabilité (partie gauche de la courbe).

$\max |g(\infty)|$ s'annule pour :

$$\bar{D}_f = \frac{1}{Bi^\Delta} \quad (4.21)$$

ce qui correspond à un comportement idéal. Cependant, comme le montre la courbe de la Figure 4.3, en raffinant encore plus le maillage à la paroi, la convergence peut être fortement affectée lorsque une condition de flux est imposée à la paroi. À notre connaissance, ce résultat n'a jamais été publié.

4.2.4 Stabilité en fonction de la période de couplage

Dans cette section, l'impact de la variation de la période de couplage sur la stabilité de la méthode Neumann-Robin est étudié. Deux comportements opposés sont privilégiés : une période de couplage très faible ($\Delta t_c \rightarrow 0$) et une période de couplage très grande ($\Delta t_c \rightarrow \infty$).

Comme nous avons vu dans la section 3.2.6, la variation de la période impacte uniquement le nombre de Fourier normalisé $\bar{D}_f$. Une période de couplage nulle ($\Delta t_c = 0$) implique $\bar{D}_f = 0$ alors qu'une grande période de couplage ($\Delta t_c \rightarrow \infty$) implique $\bar{D}_f = 1$.

Ainsi, pour $\Delta t_c \rightarrow 0$, $|g(\alpha_f = \infty)|$ (point potentiellement le plus instable) devient :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} |g(\infty)| = \lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \left| \bar{D}_f - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| = \left| -\frac{1}{Bi^\Delta} \right| = \frac{1}{Bi^\Delta} \quad (4.22)$$

L'Équation 4.22 montre qu'avec une période de couplage très petite, la méthode Neumann-Robin pour $\alpha_f \rightarrow \infty$ (équivalent à la méthode de Neumann-Dirichlet) est stable seulement si $Bi^\Delta > 1$. Ce résultat est conforme à ce que l'on attendait car il montre que pour des grands nombres de Biot une condition de flux est naturellement appropriée.

De même, pour le coefficient de couplage optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et pour la valeur maximale du coefficient de couplage $\alpha_f^{(\text{max})}$, les équations suivantes sont obtenues :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \alpha_f^{(\text{opt})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \frac{2K_f}{2 - Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)} = \frac{2K_f}{2 - Bi^\Delta} \quad (4.23)$$

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \alpha_f^{(\text{max})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow 0} \frac{2K_f}{1 - Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)} = \frac{2K_f}{1 - Bi^\Delta} \quad (4.24)$$

La méthode Neumann-Robin est donc stable quel que soit α_f pour $Bi^\Delta > 1$ et le coefficient optimal n'existe pas pour $Bi^\Delta > 2$. Ces derniers résultats coïncident avec la condition du tableau 4.1 dans le cas où $\bar{D}_f = 0$.

Désormais, le comportement de la méthode est analysé pour une période de couplage très grande ($\Delta t_c \rightarrow \infty$) :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} |g(\infty)| = \lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \left| \bar{D}_f - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| = \left| 1 - \frac{1}{Bi^\Delta} \right| \quad (4.25)$$

Pour $Bi^\Delta > 1$, la méthode Neumann-Robin pour $\alpha_f \rightarrow \infty$ (équivalent à la méthode de Neumann-Dirichlet) est toujours stable. Cependant, pour des interactions thermiques élevées ($Bi^\Delta \rightarrow \infty$), le facteur d'amplification temporelle tend vers la limite de stabilité ($|g(\infty)| = 1$) si le couplage est rarement effectué ($\Delta t_c \rightarrow \infty$).

Le comportement des coefficients de couplage optimal et maximal est étudié. Dans le cas d'une période de couplage élevée, les limites de $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et de $\alpha_f^{(\text{max})}$ sont les suivantes :

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \alpha_f^{(\text{opt})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \frac{2K_f}{2 - Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)} = \frac{K_f}{1 - Bi^\Delta} \quad (4.26)$$

$$\lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \alpha_f^{(\text{max})} = \lim_{\Delta t_c \rightarrow \infty} \frac{2K_f}{1 - Bi^\Delta (1 + \bar{D}_f)} = \frac{2K_f}{1 - 2Bi^\Delta} \quad (4.27)$$

La méthode Neumann-Robin est stable quel que soit α_f si $Bi^\Delta > 1/2$ et, de plus, il n'y a pas de valeur optimale pour $Bi^\Delta > 1$.

Afin de mieux comprendre la stabilité de la méthode Neumann-Robin pour $\alpha_f \rightarrow \infty$ en fonction de la période de couplage, la Figure 4.4 montre $|g(\infty)|$ en fonction de Bi^Δ pour plusieurs valeurs de $\bar{D}_f$. Pour des valeurs du nombre de Bi^Δ très élevées, coupler le fluide avec le solide fréquemment ($\bar{D}_f = 0$) permet une plus grande stabilité et donc une convergence plus rapide (faibles valeurs de $|g(\infty)|$). Au contraire, pour des valeurs de Bi^Δ plus faibles, le système couplé est plus stable lorsque la période de couplage est importante ($\bar{D}_f = 1$). Cependant, pour $Bi^\Delta < 0.5$ la méthode Neumann-Robin pour $\alpha_f \rightarrow \infty$ est instable quelle que soit la période de couplage.

Les courbes associées à des valeurs de $\bar{D}_f$ non nulles tracées en rouge et en bleu sur la Figure 4.4 présentent un point d'intersection avec la courbe associée à $\bar{D}_f = 0$ (courbe verte). Ce point correspond à :

$$Bi^\Delta = \frac{2}{\bar{D}_f} \quad (4.28)$$

Pour des valeurs de Bi^Δ plus grandes que celle obtenue avec (4.28), il est préférable d'utiliser une fréquence de couplage plus élevée pour accélérer la convergence.

L'étude effectuée ci-dessus peut également être réalisée pour une valeur de α_f quelconque.

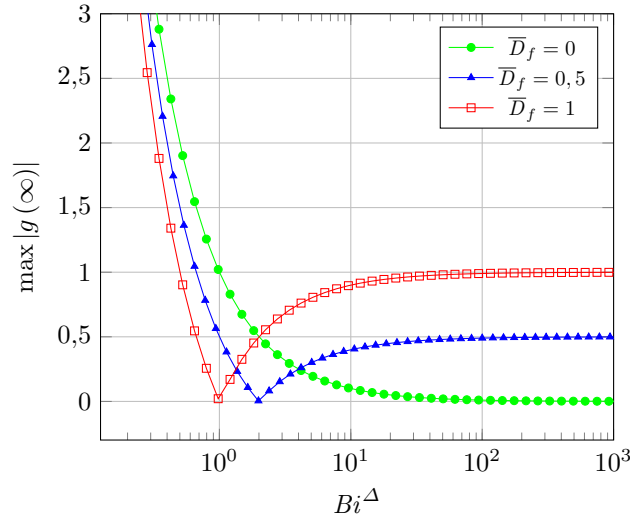


FIGURE 4.4 – $|g(\infty)|$ en fonction du nombre de Biot local Bi^Δ pour plusieurs valeurs du nombre de Fourier normalisé $\bar{D}_f$

4.3 ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans cette section les cas tests à interaction thermique forte utilisés dans la Section 3.4.2 sont repris pour l'application de la méthode Neumann-Robin optimale. Les résultats obtenus en terme de convergence du couplage ont été comparés à ceux de la méthode Dirichlet-Robin optimale pour quatre valeurs différentes de l'interaction thermique. La Figure 4.5 présente le facteur d'amplification temporelle en fonction du coefficient de couplage pour chaque cas test analysé.

En ce qui concerne la méthode Neumann-Robin, le coefficient optimal n'existe pas pour les valeurs du nombre de Biot numérique utilisées. En effet, ces cas test se positionnent tous dans la troisième ligne du tableau 4.1. La condition Neumann-Dirichlet (Neumann-Robin avec $\alpha_f^{(\text{opt})} = \infty$) a alors été utilisée.

La tableau 4.2 présente les résultats de convergence ainsi que les propriétés numériques des deux méthodes étudiées. Les propriétés numériques utilisées permettent d'évaluer l'intensité de l'interaction thermique.

Ce tableau montre que dans les cas où l'interaction thermique est forte ($Bi_v \gg 1$) la condition Neumann-Dirichlet est toujours stable et rapide alors que, comme mentionné précédemment, la méthode Dirichlet-Robin optimal rencontre des difficultés pour stabiliser ces problèmes.

Les graphiques de la Figure 4.6 présentent les résultats obtenus. Dans le cas où l'interaction thermique fluide-structure est modérément forte (voir Fig. 4.6a) la condition Dirichlet-Robin optimale permet une convergence plus rapide que la condition Neumann-Dirichlet. Nous remarquons que pour cette valeur du Biot numérique les deux conditions

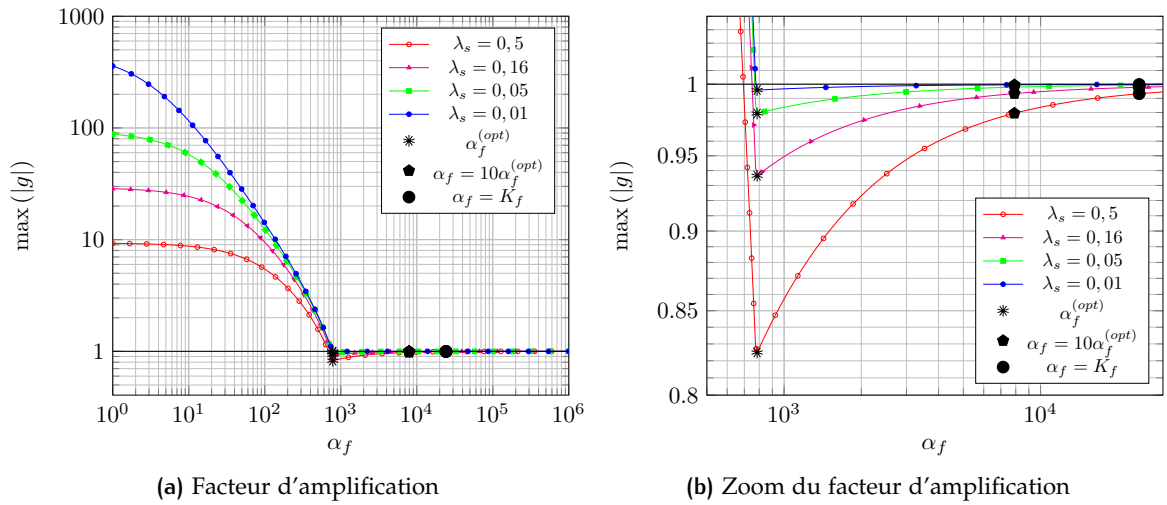


FIGURE 4.5 – Facteur d'amplifications pour des interaction fortes $\max |g|$ en fonction du coefficient de couplage α_f pour les quatre cas test analysés.

Paramètres			Itérations nécessaires à la convergence ($\epsilon = 10^{-3}$)		
			Dirichlet-Robin ($\alpha_s = \infty$)	Neumann-Dirichlet ($\alpha_s = 0$)	
λ_s	Bi^Δ	Bi_v	$\alpha_f = \alpha_f^{(opt)}$	$\alpha_f = K_f$	$\alpha_f = \infty$
0,5	141,5	9,4	84	591	103
0,16	446	28,9	273	815	105
0,05	1645	86,8	oscillations	830	109
0,01	7161	428	divergence à partir de la 13 ^{ème} itération	516	104

TABLEAU 4.2 – Valeurs numériques et nombre d'itérations de couplage nécessaires à la convergence ($\epsilon = 10^{-3}$) pour les cas test à interaction forte

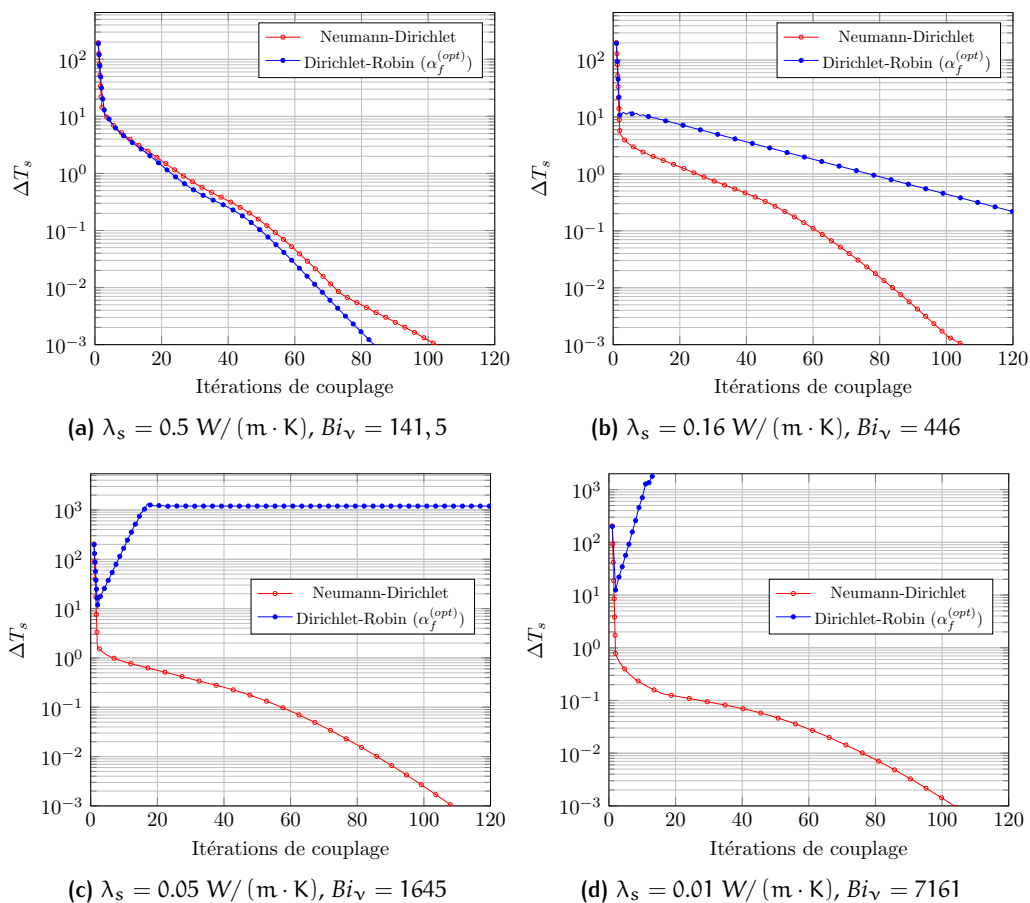


FIGURE 4.6 – Résidu en norme infini sur la température en fonction des itérations de couplage pour des cas à forte interaction thermique.

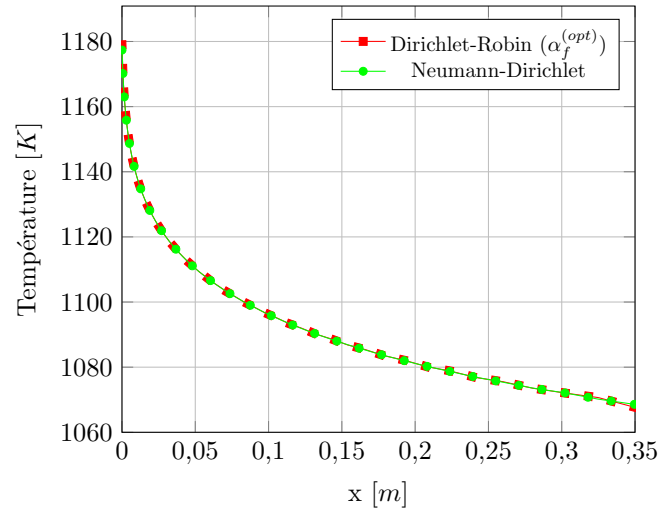


FIGURE 4.7 – Profil de température le long de l’interface dans le cas de la méthode Dirichlet-Robin ($\alpha_f^{(opt)}$) et celle de Neumann-Dirichlet (cas $\lambda_s = 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $Bi_v = 141,5$)

stabilisent le problème comme prévu par l’Eq. (4.9). Nous avons vérifié que ces deux méthodes mènent à la même solution. La Figure 4.7 montre que les profils de température à l’interface sont similaires quelle que soit la méthode utilisée.

Pour des nombres de Biot plus importants la convergence de la méthode Dirichlet-Robin optimale se détériore alors que celle de la méthode Neumann-Dirichlet reste quasi constante (cf. Figure 4.6b). Pour des interactions thermiques plus fortes, la condition Dirichlet-Robin optimale ne converge plus. En effet, des oscillations d’une amplitude d’environ 1000 K sont observables à la Figure 4.6c. De plus, une divergence des calculs est visible à la Figure 4.6d. La nécessité d’imposer une condition de Dirichlet à l’interface solide dans le cas d’interactions thermiques fortes résulte d’un problème purement numérique. En effet, pour des conductivités du solide faibles, le flux de chaleur reçu par le fluide doit être le plus précis possible afin d’éviter l’utilisation de gradients de température incorrects dans le solide. Cela aurait pour conséquence d’éloigner la solution de l’algorithme CSS de la solution finale à chaque itération de couplage.

4.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, la méthode Neumann-Robin a été mise en place puis étudiée théoriquement et numériquement. Des nombreux résultats y ont été présentés. Certains sont déjà connus depuis longtemps, d’autres ont été mis en évidence dans le cadre de cette thèse et on fait l’objet de publications (Moretti et Errera, 2018; Moretti, Errera et al., 2018;

Errera, Moretti, Bachelier et al., 2019) ou pas. Nous proposons une petite synthèse des résultats de ce chapitre.

La méthode Neumann-Robin est propice à la stabilisation des problèmes aérothermiques dans le cas où l'interaction thermique est forte, à savoir $Bi_v \gg 1$. Ce résultat logique avait déjà été souligné dans la littérature (Errera et Duchaine, 2016; Verstraete et Scholl, 2016).

Il existe cependant une zone commune où ces deux méthodes sont stables et cette zone ne dépend que du nombre de Fourier de maille. Ce résultat a été présenté pour la première fois dans Moretti, Errera et al., 2018.

Le pas de temps n'a que très peu d'impact sur la stabilité du processus couplé. Ce résultat a été présenté pour la première fois et quantifié dans Moretti, Errera et al., 2018.

Dans le cas des interactions fortes, il n'existe pas de coefficient optimal. Ce dernier ne peut être défini que pour les interactions faibles, ce qui n'a alors que bien peu d'intérêt puisque la condition Dirichlet-Robin est alors idéal.

La condition de Neumann est très sensible au raffinement en proche paroi. Il existe une valeur "idéale" de raffinement que nous avons fournie (4.21), mais des raffinements extrêmes conduisent à une convergence très lente. Ce résultat a été mis en lumière pour la première fois dans le cadre de cette thèse et n'a encore jamais été publié. Il est à noter que les raffinements extrêmes ($\Delta y_f \rightarrow 0$) sont au contraire tout à fait tolérés et acceptés par une condition Dirichlet-Robin comme il a été montré dans le chapitre 3.

Ainsi, bien que la méthode Neumann-Robin soit a priori bien adaptée aux interactions fortes, souvent caractérisées par des gradients thermiques importants dans le solide, elle présente tout de même quelques désavantages majeurs dans certains cas. De plus, des travaux très récents menés à l'ONERA-DAAA ont montré que la condition Dirichlet-Robin pouvait être étendue à des interactions fortes par une surévaluation du coefficient optimal (Errera, Moretti, Salem et al., 2019), ou par une définition appropriée du pas de temps (Salem et al., 2019). Cependant, avant de conclure, il est nécessaire de regarder la famille des schémas intermédiaires entre les conditions extrêmes Neumann-Robin ($\alpha_s = 0$) et Dirichlet-Robin ($\alpha_s \rightarrow \infty$), soit les conditions d'interface Robin-Robin. C'est ce que nous présentons dans le chapitre suivant.

5

DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE ROBIN-ROBIN POUR LA STABILISATION DE L'ENSEMBLE DES CALCULS AÉROTHERMIQUES STATIONNAIRES

Le Chapitre 3 a montré que pour assurer la stabilité et la rapidité de la résolution d'un problème couplé à faible nombre de Biot numérique Bi_v , la méthode Dirichlet-Robin est la plus adaptée. À l'inverse, pour Bi_v élevé, nous avons prouvé dans le Chapitre 4 que la méthode Neumann-Robin est la plus appropriée.

Dans ce chapitre, on suppose qu'il n'est pas possible, en amont du calcul, de se positionner sur la méthode à utiliser. Plus précisément, on envisage le cas où Bi_v peut prendre des valeurs élevées et faibles (ce cas peut être largement rencontré dans des problèmes industriels).

La condition de Robin appliquée à l'interface fluide permet de laisser à l'algorithme le choix de la méthode à utiliser en fonction de Bi_v .

Dans la littérature, la méthode Robin-Robin a été généralement appliquée aux problèmes aéroélastiques (Badia et al., 2008, 2009). Concernant les problèmes aérothermiques, Scholl et al., 2018 ont très récemment étudié la stabilité de la méthode Robin-Robin, à partir des méthodes proposées par Verstraete et Scholl, 2016 (cf. Chapitre 2). Il en ont déduit un critère de stabilité basé sur le nombre de Biot conventionnel Bi .

La méthode Robin-Robin est également intéressante dans le cas où deux milieux adjacents possèdent des caractéristiques thermiques très différentes. En effet, elle permettrait d'éviter d'imposer deux conditions très différentes (Dirichlet et Neumann) sur deux cellules adjacentes, évitant alors un mauvais conditionnement du système à résoudre (Salem et al., 2019).

La section 5.1 est dédiée à la description de la méthode Robin-Robin. L'implémentation de la condition de Robin dans le solveur elsA est ensuite détaillée à la section 5.2. En effet, nous avons collaboré avec l'équipe développant elsA pour la mise en œuvre de cette nouvelle condition. Enfin, dans la section 5.3 la stabilité numérique de la méthode est analysée.

5.1 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE ROBIN-ROBIN

Dans cette section, le développement de la méthode Robin-Robin est décrit à partir du modèle 1D. La méthode Robin-Robin est basée sur l'application de la condition aux limites de Robin aux interfaces fluide et solide. Ainsi, à chaque échange de données fluide-solide on impose à l'interface les conditions suivantes :

$$q_f = -q_s + \alpha_s (T_s - T_f) \quad \text{coté fluide} \quad (5.1)$$

$$q_s = -q_f + \alpha_f (T_f - T_s) \quad \text{coté solide} \quad (5.2)$$

où α_s , q_s et T_s sont respectivement le coefficient de couplage, le flux de chaleur et la température envoyés par le solveur solide au solveur fluide et inversement pour α_f , q_f et T_f .

Le travaux de [Errera et Chemin, 2013](#) ont permis de déterminer la relation optimale entre les coefficient de couplage α_s et α_f (pour plus de détails, cf. Annexe [A.1.2](#)) :

$$\alpha_f = \frac{K_s (\alpha_s + K_f) - \alpha_s (\alpha_{DR}^{(opt)} + K_s)}{\alpha_{DR}^{(opt)} + K_s - K_f - \alpha_s} \quad (5.3)$$

$$\alpha_s = \frac{\alpha_f (K_f - K_s - \alpha_{DR}^{(opt)}) + K_s K_f}{\alpha_{DR}^{(opt)} - \alpha_f} \quad (5.4)$$

où, pour rappel, K_s et K_f sont respectivement la conductivité du solide et celle du fluide. Dans les équation (5.3) et (5.4) on retrouve l'expression du coefficient optimal $\alpha_{DR}^{(opt)}$ précédemment obtenu dans le cas de l'application de la méthode Dirichlet-Robin (cf. Éq. (2.49)) et on vérifie aisément que $\alpha_f (\alpha_s \rightarrow \infty) = \alpha_{DR}^{(opt)}$.

Il existe une infinité de couples optimaux de coefficients de couplage qui sont solution des équations (5.3) et (5.4).

5.2 IMPLÉMENTATION DE LA CONDITION DE ROBIN DANS LE SOLVEUR ELSA

Dans elsA, il existe plusieurs façons de modéliser une paroi. Si on se limite aux aspects thermiques, la température pariétale et le flux de chaleur sont les grandeurs à considérer. Avec un maillage structuré, il est possible d'imposer à la paroi soit un profil de température (condition de Dirichlet) soit un profil de flux de chaleur (condition de Neumann).

La méthode des volumes finis utilisée dans elsA n'est pas pourvue d'éléments surfaciques, il n'est donc pas possible d'imposer directement une condition aux limites de Dirichlet. Ainsi, il est nécessaire de transformer la température en un flux de chaleur équivalent qui sera ensuite appliqué à la paroi (condition de Neumann).

Une nouvelle condition de Robin a été créée en s'appuyant sur cette procédure. La densité surfacique de flux de chaleur est donnée par :

$$q_w = K \frac{\partial T}{\partial n} \quad (5.5)$$

où w caractérise la paroi considérée, q_w est le flux de chaleur normal à la paroi exprimé en W/m^2 , K est la conductivité thermique et T est la température. En négligeant les phénomènes de convection, l'équation de l'enthalpie est donnée, dans le repère local s où n est la direction normale à la paroi, par :

$$\frac{\partial}{\partial n} (u_s \tau_{s,n} - q_n) = 0 \quad (5.6)$$

En considérant que le frottement est constant au voisinage de la paroi, on peut écrire $\tau_{s,n} = \tau_n$, ce qui donne l'évolution du flux de chaleur au voisinage de la paroi :

$$q_n = q_w + u_s \tau_w \quad (5.7)$$

Le frottement et le flux de chaleur à la paroi peuvent être exprimés en fonction des viscosités (laminaire μ et turbulente μ_t) et des nombres de Prandlt (laminaire Pr et turbulent Pr_t) comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_w &= (\mu + m u_t) \frac{\partial u}{\partial n} \\ q_n &= -c_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned} \quad (5.8)$$

En intégrant l'équation (5.8), la température pariétale T_w est calculée à partir du flux de chaleur q_w , de la contrainte pariétale τ_w , de la température T_1 et de la vitesse u_1 de la cellule 1 adjacente à la paroi.

$$q_w = \frac{\tau_w}{A u_1} \left(T_w - T_1 - A \frac{u_1^2}{2} \right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{(\mu + m u_t)}{c_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)} \quad (5.9)$$

La condition mixte de Robin impose une relation linéaire entre le flux de chaleur et la température de paroi :

$$q_w = q_{ref} + \alpha (T_{ref} - T_w) \quad (5.10)$$

où q_{ref} , T_{ref} et α sont respectivement un flux de chaleur de référence, une température de référence et un coefficient de relaxation numérique assimilable à une conductance thermique.

En combinant (5.9) et (5.10), on exprime la température de paroi en fonction de la contrainte pariétale τ_w , de la température T_1 et de la vitesse u_1 de la cellule 1 adjacente à la paroi et des données q_{ref} , T_{ref} et α propres à la condition aux limites de Robin. La température pariétale s'exprime ainsi :

$$T_w = \frac{1}{1 + A\alpha\frac{u_1}{\tau_w}} \left[T_1 - A\frac{u_1^2}{2} + A\frac{u_1}{\tau_w} (q_{ref} + \alpha T_{ref}) \right] \quad (5.11)$$

Cette implémentation de la condition de Robin est sous forme "explicite" car le coefficient de couplage est traité comme un simple coefficient de relaxation. En effet, il impacte seulement le deuxième membre du système linéaire à résoudre. Ce dernier peut être simplifié comme suit :

$$KT = q \quad (5.12)$$

où K est la matrice de conductivité, T est le vecteur contenant la température de chaque cellule du domaine et q est la matrice des flux de chaleur agissant sur le domaine considéré.

La condition de Robin dans sa forme "implicite" contribue à rendre le système plus stable en renforçant la diagonale de la matrice K avec le coefficient de relaxation (cf. § 1.3.4).

Des essais numériques ont permis de vérifier que l'utilisation de la condition aux limites de Robin avec une grande valeur du coefficient de couplage ($\alpha_s \rightarrow \infty$) donne bien le même résultat que l'utilisation directe de la condition de Dirichlet. De même, pour $\alpha_s = 0$, le résultat obtenu est identique à celui atteint en utilisant la condition de Neumann.

5.3 ÉTUDE PARAMÉTRIQUE SUR LA STABILITÉ DE LA MÉTHODE ROBIN-ROBIN

Dans cette section, la stabilité de la méthode Robin-Robin est analysée. Le cas test utilisé pour l'application de la méthode Robin-Robin est celui de la plaque plane décrite dans la section 3.3. Les maillages et les conditions aux limites des domaines fluide et solide sont inchangés. La différence réside dans la condition limite du fluide à l'interface (condition de Robin) et dans la conductivité du solide qui a été modifiée pour pouvoir faire varier le nombre de Biot numérique Bi_v du problème couplé.

Des études paramétriques sur les deux coefficients de couplage (α_f et α_s) ont été effectuées afin d'étudier l'effet de leur variation sur la stabilité et la convergence. Les

résultats de ces études ont été comparés avec ceux obtenus par un couplage CEDRE-Zset de manière à valider la nouvelle condition de Robin dans elsA. En effet, le solveur fluide CEDRE dispose, à différence d'elsA, de la condition de Robin implémentée en mode "implicite". La comparaison, détaillée dans l'annexe C, a montré des résultats similaires. Ainsi, l'implémentation "explicite" de la condition de Robin dans le solveur elsA n'influence pas l'analyse de stabilité de la condition de Robin présentée dans cette section.

L'objectif de cette étude est de vérifier la correspondance entre les résultats numériques et le modèle théorique développé par Errera et Chemin, 2013. De plus, cette étude nous permet d'explorer la convergence et la stabilité de la méthode Robin-Robin pour un nombre important de couples de coefficients de couplage (α_f, α_s) . La robustesse de la méthode a été analysée en adoptant deux valeurs de Bi_v .

5.3.1 Cas test avec interaction thermique modérée

Un balayage des deux coefficients de couplage utilisant 42 valeurs pour α_s et 32 valeurs de α_f , pour un total de 1344 calculs, a été réalisé (chaque calcul a été mené à bien jusqu'à la convergence du problème fluide-structure). Ces calculs ont été réalisés avec un nombre de Biot local de 35, 35 et un nombre de Biot numérique de 6, 85 ce qui correspond à une interaction thermique modérée.

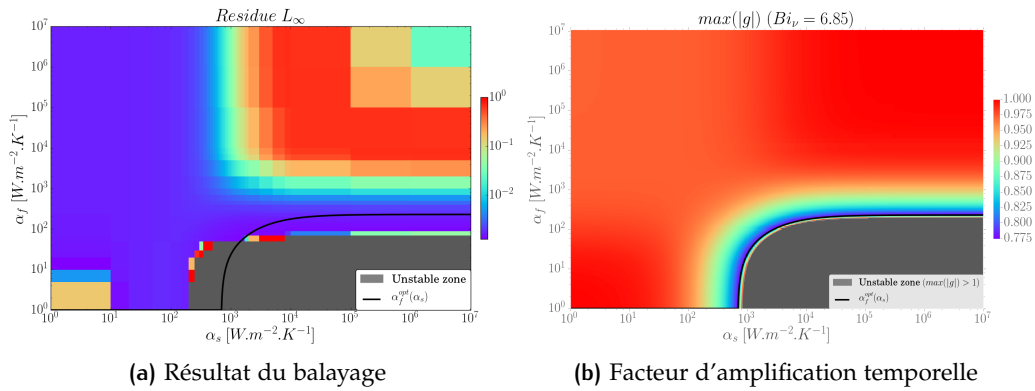


FIGURE 5.1 – Résultat du balayage des coefficients α_f et α_s à gauche. Facteur d'amplification temporelle théorique à droite (cas avec $Bi_v = 6, 85$)

La Figure 5.1a montre le résultat du balayage en terme de résidu en norme infinie de la température pariétale (cf. Éq 3.18) à nombre de couplages fixé. Le critère d'arrêt est ainsi déterminé par le nombre de couplages et non par la norme infinie sur la température. Chaque point de la figure représente un calcul effectué avec un couple de coefficients de couplage. On précise que la partie gauche de la figure ($\alpha_s = 0$) correspond à la méthode Neumann-Robin, la partie droite ($\alpha_s \rightarrow \infty$) à la méthode Dirichlet-Robin.

Ces résultats numériques sont comparés au modèle théorique (cf. Figure 5.1b). Les échelles des deux graphiques de la Figure 5.1 ne sont pas comparables car nous avons représenté deux quantités différentes : une différence de température $L_\infty = T^{n+1} - T^n$ et un rapport de température $\max|g| = T^{n+1}/T^n$. Ces deux graphiques permettent néanmoins de mettre en évidence l'analogie entre les deux comportements de la méthode (théorique et numérique) en termes de convergence ou divergence des calculs. En effet, l'observation de ces graphiques indique que la méthode numérique présente une zone d'instabilité proche de celle identifiée théoriquement. Toutefois, la zone d'instabilité numérique débute à partir de valeurs plus faibles de α_s . Cette différence peut être liée à l'utilisation d'un modèle théorique 1D alors que le cas test est 2D.

Le point correspondant à la méthode Dirichlet-Robin optimale ($\alpha_f^{(\text{opt})}$ ($\alpha_s \rightarrow \infty$)) et celui correspondant à la méthode de Neumann-Dirichlet ($\alpha_s = 0$, $\alpha_f \rightarrow \infty$) sont stables et rapides comme prévu théoriquement. Dans les zones situées en bas à gauche et en haut à droite de la Figure 5.1a, la convergence s'avère plus lente. Ce résultat coïncide également avec la prévision théorique (cf. Figure 5.1b).

Le résidu obtenu dans la partie en haut à droite de la Figure 5.1a ne doit pas être pris en considération dans la comparaison des deux graphiques. Cette zone correspond à la méthode Dirichlet-Dirichlet, ce qui signifie qu'aucun échange de chaleur a lieu à la paroi. En effet, les deux problèmes (fluide et solide) restent alors figés à l'état initial en donnant comme résultat un résidu faible dès le début du calcul. Ce résultat est dû à la définition du résidu (cf. Équation 3.18) qui prend seulement en considération la variation de la température sur la surface solide entre deux couplages, sans vérifier la continuité à l'interface.

Pour conclure, bien que l'on observe de légères différences entre les résultats numériques et théoriques, de manière globale il y a une correspondance satisfaisante des résultats. Les temps de calcul obtenus pour chaque simulation numérique couplée sont quasiment similaires à ceux obtenus avec la méthode Dirichlet-Robin ou celle de Neumann-Robin suivant le cas considéré. En effet, la méthode Robin-Robin montre un gain infime à condition de choisir les 2 coefficients les plus adaptés. Ainsi, d'un point de vue du temps de calcul et facilité de mise en œuvre, la méthode Robin-Robin ne présente pas d'avantages majeurs.

5.3.2 Cas test avec interaction thermique forte

Afin de confirmer les résultats décrits dans la section précédente, nous avons répété la même analyse sur un cas test à forte interaction thermique ($Bi_v = 273,98$) obtenu en imposant une conductivité thermique du solide égale à 0.005 W/K/m^2 . Ce balayage est composé de 1700 calculs (34 valeurs de α_s et 50 de α_f).

La Figure 5.2a montre les résultats de ce dernier balayage en terme de résidu en norme infinie. Dans ce cas également, une correspondance satisfaisante entre les résultats

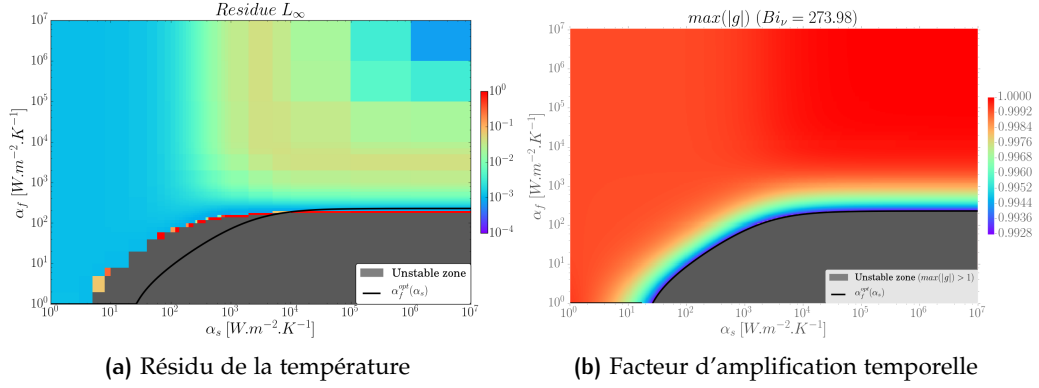


FIGURE 5.2 – Résidu en norme infini de la température de l’interface solide résultant du balayage en fonction des coefficients de couplage α_f et α_s à gauche. Facteur d’amplification temporelle en fonction des coefficients de couplage α_f et α_s à droite (cas avec $Bi_v = 273,98$)

numériques et le modèle théorique (cf. Figure 5.2b). Toutefois, comme dans le cas précédent, la zone d’instabilité est un peu plus étendue vers des faibles valeurs de α_s par rapport à la zone d’instabilité théorique.

La partie en haut à droite (méthode Dirichlet-Dirichlet) est également à exclure pour les raisons exposées dans le paragraphe précédent.

La tendance générale des deux comportements (théorique et numérique) est similaire. Une bonne convergence peut être obtenue en utilisant la méthode Dirichlet-Robin optimale (extrémité droite de la courbe noire $\alpha_f^{(opt)} (\alpha_s \rightarrow \infty)$). Cependant, l’utilisation de cette méthode peut se révéler dangereuse car ce point est situé à proximité de la zone d’instabilité. Pour s’en éloigner, un coefficient de sécurité peut être appliqué au coefficient optimal de la méthode Dirichlet-Robin (Errera, Moretti, Salem et al., 2019). Une autre alternative consiste à modifier le pas de temps dans l’expression du coefficient de couplage optimal, comme l’ont suggéré Salem et al., 2019 dans le cas d’applications à très forte interaction aérothermique. Ou encore, on peut employer la méthode Neumann-Dirichlet (partie en haut à gauche). Cette dernière permet d’atteindre une convergence rapide tout en restant loin de la zone d’instabilité comme déjà montré dans le Chapitre 4.

Dans ce cas également, les temps de calcul obtenus pour chaque simulation numérique sont similaires à ceux obtenus avec la méthode Dirichlet-Robin ou celle de Neumann-Robin.

5.4 CONCLUSION

Les résultats numériques obtenus avec la méthode Robin-Robin correspondent globalement à la théorie du modèle 1D du point de vue de la stabilité et de la rapidité des calculs. Mise à part l'intérêt de pouvoir passer d'une méthode à une autre en ajustant les valeurs des deux coefficients de couplage (α_f et α_s), la méthode Robin-Robin ne présente pas d'avantages significatifs (temps de calcul identiques aux méthodes Dirichlet-Robin et Neumann-Robin, complexité de la mise en œuvre).

De plus, la méthode Robin-Robin fournit une relation optimale entre les deux coefficients de couplage ayant un nombre infini de solutions. Il est alors nécessaire d'en fixer un pour calculer le deuxième (cf. Éq. (5.3) et (5.4)). Ainsi, un critère basé sur le nombre de Biot numérique Bi_v peut être obtenu. Ce critère permet à la méthode Robin-Robin de calculer les coefficients de couplage les plus appropriés pour la stabilisation du problème couplé.

Nous proposons ici une fonction empirique qui tend vers la méthode Dirichlet-Robin optimale lors d'une faible valeur de Bi_v et tend vers la méthode Neumann-Dirichlet dans le cas d'une valeur de Bi_v élevée. Cette fonction est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_s &= \frac{10^8}{Bi_v \Delta^2} \\ \alpha_f &= \frac{\alpha_{NR}^{(opt)}}{\alpha_s^4} + a \alpha_{DR}^{(opt)} \end{cases} \quad (5.13)$$

où a est le coefficient de sécurité pour la méthode Dirichlet-Robin optimale et $\alpha_{NR}^{(opt)}$ est le coefficient optimal de la méthode Neumann-Robin (cf. Éq. (4.6)). Nous conseillons d'utiliser ($a = 1$) car cette loi a été déjà conçue pour choisir un couple de coefficients de couplage situé loin de la zone d'instabilité. Le calcul de ce couple est fait ici localement, car le nombre de Biot numérique peut varier de façon significative d'une cellule à l'autre de l'interface.

La Figure 5.3 montre le couple de coefficients de couplage obtenu avec le système d'équations (5.13) pour six différentes valeurs de Bi_v . Nous pouvons observer que le point optimal se situe toujours bien loin de la zone instable et a priori il permet d'avoir une bonne vitesse de convergence.

Nous tenons à préciser que la fonction empirique (5.13) est simplement une proposition résultante des nombreux calculs que nous avons effectués. Il est possible que cette proposition ne soit pas idéale dans d'autres configurations couplées.

Comme déjà annoncé précédemment, la méthode Dirichlet-Robin semble être la plus adaptée quelle que soit l'intensité de l'interaction thermique. En effet, même si le coefficient optimal ne réussit pas à stabiliser certains problèmes à très forte interaction thermique, une légère surévaluation de ce paramètre via un coefficient de sécurité permet d'accomplir cette tâche. Cette approche est plus simple à mettre en place et plus

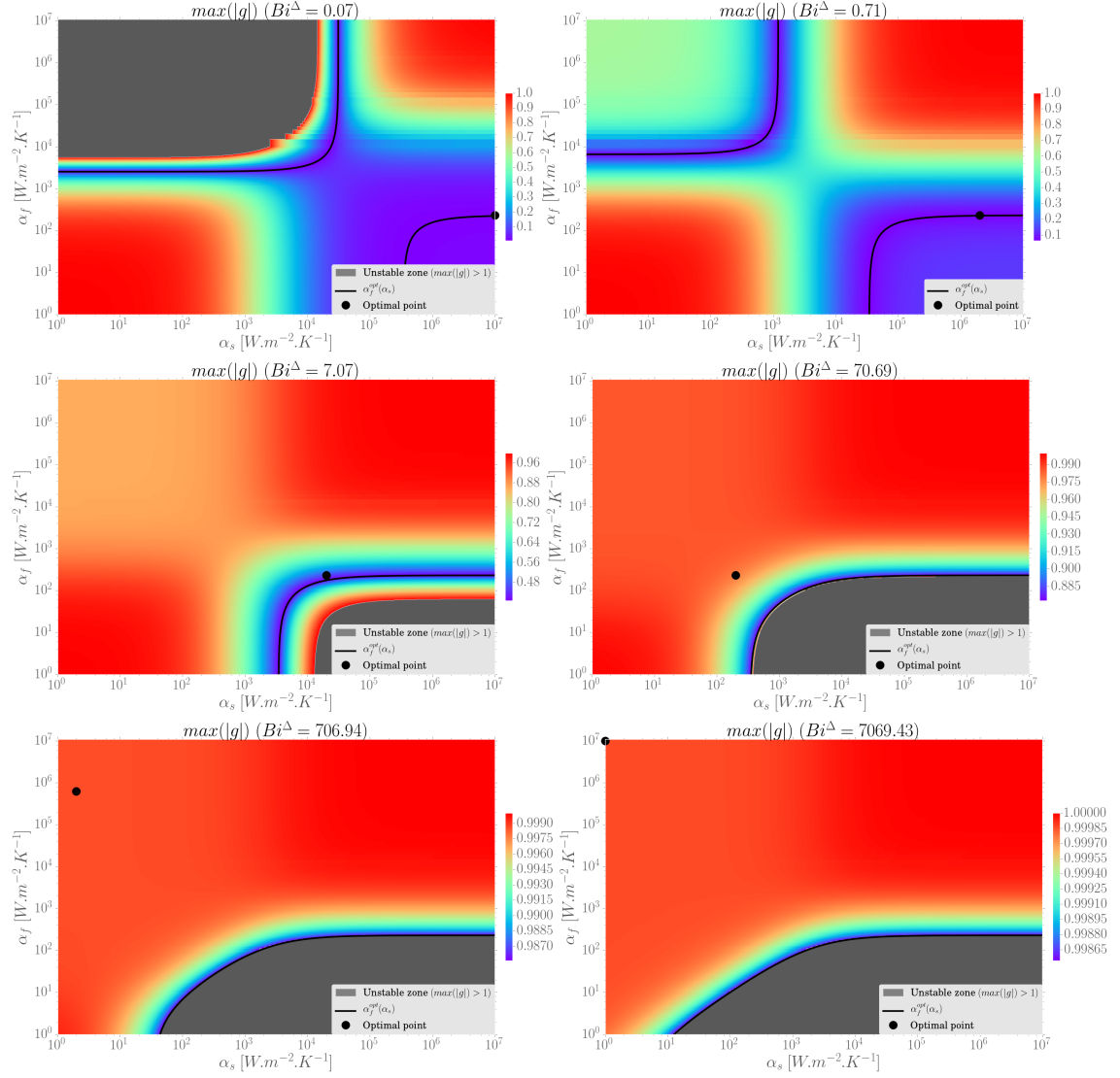


FIGURE 5.3 – Robin-Robin : proposition d’une solution empirique. Facteur d’amplification temporelle et couple optimal des coefficients de couplage (cf. Eq. 5.13) pour six valeurs de Bi^Δ .

robuste qu'un changement des conditions aux limites suivant une fonction empirique (comme l'Éq. (5.13)).

6

PRISE EN COMPTE DU RAYONNEMENT DANS LE COUPLAGE AÉROTHERMIQUE ET ÉTUDE DE LA STABILITÉ

Jusqu'à présent, nous avons traité la résolution et la stabilité des problèmes aérothermiques en prenant en compte les échanges conductif et convectif entre l'écoulement et le solide.

Le rayonnement peut également jouer un rôle clé, car il s'agit du mode dominant de transfert de chaleur des applications à température élevée. Par exemple, il est important dans les chambres de combustion, les réacteurs nucléaires, les fours, les turbines, les moteurs, etc... La modélisation du rayonnement thermique, associée à celles de la convection et de la conduction, est requise dans les applications nécessitant des prévisions précises des transferts de chaleur.

La combinaison du transfert de chaleur d'origine radiative, convective et conductive a été étudiée pendant longtemps par des procédures analytiques dans des cas simples. Par exemple, [R. Goulard et M. Goulard, 1959](#) ont étudié l'interaction du rayonnement et de la conduction dans un écoulement de Couette. Les effets du rayonnement couplés à ceux de la conduction et de la convection ont également été traités par [Einstein, 1969](#) dans le cas d'un écoulement entre plaques parallèles. [Desoto, 1968](#) a mis au point une procédure analytique pour étudier l'interaction du rayonnement avec les mécanismes de conduction et de convection dans un tube. Au cours des dernières années, une autre approche combinant la CFD, le CHT et le transfert radiatif est devenue de plus en plus attrayante. Ces calculs couplés, avec des maillages fins capables de résoudre les couches limites, produisent des résultats qui donnent une connaissance approfondie des phénomènes aérothermiques. Par exemple, [Amaya et al., 2010](#) ont étudié les applications de combustion sur des ordinateurs parallèles. Une stratégie de couplage partitionné a été adoptée par [Koren et al., 2018](#) pour prédire le champ de température pariétale d'une chambre de combustion contenant une flamme turbulente pré-mélangée, en utilisant une période de couplage adaptative.

L'objectif de ce chapitre est de vérifier l'impact de la prise en compte du rayonnement dans la stabilité du problème couplé en utilisant la méthode Dirichlet-Robin optimale et, par conséquent, de l'adapter aux nouvelles contraintes de stabilité.

Sur le plan informatique, le rayonnement a été ajouté en incluant le code ASTRE (code pour le transfert radiatif) au couplage elsA-Zset existant. Une brève description du transfert radiatif et du calcul des flux radiatifs dans le solveur ASTRE est présentée dans la Section [6.1](#). La Section [6.2](#) décrit l'algorithme de couplage (à 3 codes) développé

permettant de prendre en compte le rayonnement dans les problèmes aérothermiques. Ensuite la méthode de stabilisation Dirichlet-Robin avec rayonnement est développée et détaillée dans la Section 6.3. Enfin, dans la Section 6.4 la méthode Dirichlet-Robin avec rayonnement est validée sur un cas académique (canal 2D).

6.1 TRANSFERT DE CHALEUR RADIATIF

6.1.1 Formulation

Dans cette section, la formulation du flux radiatif pariétal en milieu transparent est présentée. En effet, dans les applications visées dans cette étude, le milieu sera considéré comme n'interagissant pas avec le rayonnement et les transferts radiatifs auront lieu uniquement entre corps opaques.

En un point F de la surface d'un corps opaque, le flux radiatif $q_R(F)$ peut s'écrire comme la différence du flux absorbé $q^a(F)$ et du flux émis $q^e(F)$:

$$q_R(F) = q^a(F) - q^e(F) \quad (6.1)$$

Ces deux flux sont donnés par les relations suivantes :

$$q^a(F) = \int_0^{+\infty} \int_{2\pi(\cos\theta < 0)} \epsilon_\nu(F, \mathbf{u}) I_\nu(F, \mathbf{u}) |\cos\theta| d\Omega d\nu \quad (6.2)$$

$$q^e(F) = \int_0^{+\infty} I_\nu^0(T_F) \int_{2\pi(\cos\theta > 0)} \epsilon_\nu(F, \mathbf{u}) \cos\theta d\Omega d\nu \quad (6.3)$$

où $\epsilon_\nu(F, \mathbf{u})$ est l'émissivité monochromatique directionnelle au point F dans la direction $\mathbf{u}$, $I_\nu(F, \mathbf{u})$ la luminance monochromatique directionnelle incidente (en $W/m^2/Sr/m^{-1}$), $I_\nu^0(T_F)$ la luminance monochromatique isotrope du rayonnement d'équilibre dans le vide (en $W/m^2/Sr/m^{-1}$) à la température T_F au point F . θ est l'angle entre la direction $\mathbf{u}$ et la normale $\mathbf{n}$, $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire (en Sr) et ν le nombre d'onde (en m^{-1}). $I_\nu^0(T_F)$ est également appelée fonction de Planck et elle est définie par l'équation suivante :

$$I_\nu^0(T_F) = \frac{2h_p c_0^2 \nu^3}{\exp\left(\frac{h_p \nu c_0}{k_B T}\right) - 1} \quad (6.4)$$

où $h_p = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js est la constante de Planck, c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide et $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann.

Dans ces travaux de thèse, les parois sont considérées grises et isotropes, ce qui implique que l'émissivité est indépendante du nombre d'onde et de la direction. Dans ces conditions, les Équations (6.2) et (6.3) peuvent être écrites comme suit :

$$q^a(F) = \epsilon(F) \int_{2\pi(\cos\theta < 0)} I(F, \mathbf{u}) |\cos\theta| d\Omega \quad (6.5)$$

$$q^e(F) = \epsilon(F) \pi \int_0^{+\infty} I_v^0(T_F) dv = \epsilon(F) \sigma T_F^4 \quad (6.6)$$

où $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c_0^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Il est possible d'approximer le flux radiatif en l'écrivant sous la forme :

$$q_R = \epsilon \sigma (T_{ref}^4 - T^4) \quad (6.7)$$

où T_{ref} est une température de référence, typiquement la température de l'environnement entourant le corps.

Le flux radiatif (6.7) peut être exprimé par la relation suivante :

$$q_R = h^R (T_{ref} - T) \quad (6.8)$$

où h^R peut être obtenu par :

— Décomposition (formulation exacte) :

$$h^R = \epsilon \sigma (T + T_{ref}) (T^2 + T_{ref}^2) \quad (6.9)$$

— Linéarisation autour de T_{ref} (formulation approximée) :

$$h^R = 4\epsilon \sigma T_{ref}^3 \quad (6.10)$$

car le développement de Taylor au premier ordre de T^4 autour de T_{ref} est égal à :

$$T^4 = T_{ref}^4 + 4T_{ref}^3 (T - T_{ref}) \quad (6.11)$$

La relation (6.8) sera utilisée dans ces travaux pour l'étude de la stabilité du problème couplé, mais le calcul des flux radiatifs dans ASTRE est réalisé à partir des relations (6.5) et (6.6).

6.1.2 Calcul des flux radiatifs

Dans ces travaux de thèse, le rayonnement est pris en compte par le code ASTRE, développé à l'ONERA.

ASTRE est fondé sur une méthode de Monte Carlo. Appliquée aux transferts radiatifs, cette approche statistique consiste à simuler de façon stochastique un grand nombre de trajectoires de paquets d'énergie, depuis leur émission jusqu'à leur disparition (absorption par les parois ou sortie du domaine de calcul). Ces paquets sont des quantités macroscopiques d'énergie, que l'on peut voir comme des groupes de photons identiques. Le caractère stochastique de la méthode de Monte Carlo réside dans la détermination des caractéristiques d'un paquet lors de son émission (point et direction d'émission, nombre d'onde) ainsi que dans le traitement des événements physiques le long de sa trajectoire (uniquement des rebonds sur des parois dans un milieu transparent). En effet, ces caractéristiques et événements sont tirés au sort suivant des fonctions densité de probabilité adaptées. La méthode de Monte Carlo a une convergence en $N^{-1/2}$ où N désigne le nombre de paquets d'énergie suivis dans la simulation, ce qui signifie qu'il faut multiplier par 100 le nombre de paquets à suivre si on souhaite diviser par 10 la convergence d'une simulation.

Plusieurs méthodes de Monte Carlo sont disponibles dans ASTRE (Tessé et al., 2002). Dans cette étude, la méthode ERM (Emission Reciprocity Method) a été utilisée pour calculer les flux radiatifs sur les parois. Cette méthode utilise le principe de réciprocité pour calculer le flux absorbé et permet donc de calculer le flux radiatif en un point uniquement à partir des paquets d'énergie émis depuis ce point. Par conséquent, elle présente l'avantage de pouvoir effectuer des calculs locaux (calcul des flux radiatifs uniquement en un point, sur certaines faces limites ou sur certaines conditions aux limites) en affectant des paquets d'énergie à émettre uniquement de certaines faces du maillage contrairement à la méthode de Monte Carlo classique qui calcule les flux radiatifs sur toutes les frontières du domaine de calcul après avoir suivi des paquets d'énergie partant de toutes les frontières.

À partir de l'équation (14) établie par Tessé et al., 2002, on peut en déduire l'expression du flux radiatif, sur une paroi grise entourée par un milieu transparent, calculé avec la méthode ERM :

$$q_i^R = \frac{q_i^e}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_{rn}} \left[\left(\frac{T_{j_m}}{T_i} \right)^4 - 1 \right] \tau_n(i \rightarrow j_m) \epsilon_{j_m} \quad (6.12)$$

où q_i^e est le flux émis par la facette numéro i , N_i le nombre de paquets d'énergie émis par la facette numéro i , N_{rn} le nombre de réflexions sur des parois subies par le $n^{\text{ième}}$ paquet d'énergie émis par la facette numéro i , j_m le numéro de la facette rencontrée lors de la $m^{\text{ième}}$ réflexion, ϵ_{j_m} l'émissivité de la facette numéro j_m et $\tau_n(i \rightarrow j_m)$ la transmittivité entre les facettes i et j_m le long de la trajectoire du $n^{\text{ième}}$ paquet d'énergie émis par la facette numéro i . La transmittivité s'écrit sous la forme :

$$\tau_n(i \rightarrow j_m) = \tau_n(i \rightarrow j_{m-1}) \cdot (1 - \epsilon_{j_{m-1}}) \quad (6.13)$$

$$\tau_n(i \rightarrow j_1) = 1 \quad (6.14)$$

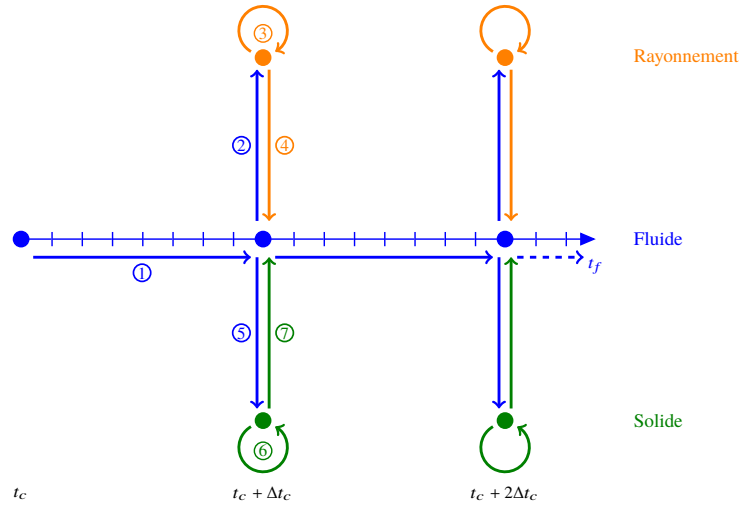


FIGURE 6.1 – Algorithme de couplage aérothermique avec prise en compte du rayonnement.

Le flux radiatif calculé par l'équation (6.12) est d'autant plus précis lorsque le nombre de faisceaux d'énergie émis N_i est important.

Concernant la distribution spatiale des faisceaux d'énergie N_i , deux techniques sont disponibles : la *Non-Uniform spatial Distribution* (NUD) et la *Uniform spatial Distribution* (UD). La première distribue le nombre de faisceaux d'énergie par facette en fonction de la puissance émise $P_i^e = q_i^e S_i$ (en W), où S_i est la surface de la facette. En utilisant la deuxième distribution, un nombre constant de faisceaux d'énergie est émis par chaque facette i . Dans ces travaux de thèse, la distribution uniforme (UD) est employée. N_i est donc fixé par l'utilisateur.

Les détails des calculs des flux radiatifs par une approche Monte Carlo sont décrits dans Tessé et al., 2002; Zhang et al., 2012.

6.2 ALGORITHME DE COUPLAGE

Dans cette section, l'algorithme développé afin de prendre en compte le rayonnement est décrit. Cet algorithme couple trois solveurs :

- elsA, le solveur fluide pour le calcul de l'écoulement et des flux convectifs ;
- Z-set, le solveur solide pour le calcul des températures et flux conductifs dans les parties solides ;
- ASTRE, le solveur radiatif pour le calcul des flux radiatifs échangés entre les parois.

L'algorithme est schématisé sur la Figure 6.1 et les différentes étapes qui le constituent sont décrites dans l'Algorithme 5.

Algorithme 5 : Algorithme partitionné séquentiel stationnaire pour la résolution du problème aérothermique avec prise en compte du rayonnement

tant que le critère de convergence n'est pas satisfait **faire**

- | | |
|---|--|
| 1 | Mise à jour de l'état de l'interface fluide à l'instant t_c (Condition de Dirichlet);
Prédiction de l'état de l'interface fluide de t_c à $t_c + \Delta t_c$;
Résolution du problème fluide de t_c à $t_c + \Delta t_c$; |
| 2 | Envoi de la température pariétale fluide T_f au solveur radiatif à $t_c + \Delta t_c$; |
| 3 | Mise à jour de la température des parois rayonnantes à $t_c + \Delta t_c$;
Calcul du flux radiatif q_R à $t_c + \Delta t_c$; |
| 4 | Envoi du flux radiatif au solveur fluide à $t_c + \Delta t_c$; |
| 5 | Envoi de $q = q_f + q_R$ du solveur fluide au solveur solide à $t_c + \Delta t_c$; |
| 6 | Mise à jour de l'interface solide à $t_c + \Delta t_c$;
Résolution du problème solide en régime stationnaire à $t_c + \Delta t_c$; |
| 7 | Envoi de la température pariétale solide au problème fluide à $t_c + \Delta t_c$; |
-

Il ne s'agit pas d'un couplage à trois codes mais plutôt à 2,5 codes. En effet, les solveurs solide et radiatif ne sont pas connectés. C'est le code fluide qui gère les envois des informations entre ces deux autres codes. Ce choix d'algorithme a été fait pour deux raisons :

- Le solveur radiatif a besoin des seules champs de température aux parois pour le calcul des flux radiatifs;
- La conduction solide dans le cas d'une méthode Dirichlet-Robin nécessite un flux de chaleur qui comprend le flux convectif q_f et les flux radiatifs q_R . Il est alors nécessaire d'additionner q_f et q_R avant d'appliquer la condition aux limites sur l'interface solide.

6.3 DÉVELOPPEMENT DES MÉTHODES DE COUPLAGE AVEC PRISE EN COMPTE DU RAYONNEMENT

Dans cette section, les méthodes de couplage optimales ont été développées afin de prendre en compte le rayonnement dans la stabilité du couplage aérothermique. Pour être aussi général que possible, nous allons traiter la méthode Robin-Robin pour ensuite détailler la méthode Dirichlet-Robin. En effet, seule cette dernière sera mise en œuvre dans le cadre de cette thèse.

Comme déjà fait pour le développement des précédentes méthodes de stabilisation, on écrit les conditions de Robin aux interfaces fluide et solide selon le modèle 1D présenté sur la Figure 2.3 qui a été déjà utilisé pour la méthode Dirichlet-Robin sans rayonnement :

$$q_{0+}^{n+1} = -q_{0-}^n + \alpha_{s-R}^n (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^n) + h^R (T_{0+}^{n+1} - T_{ref}) \quad j = 0+ \quad (6.15)$$

$$q_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_{f-R}^{n+1} (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + h^R (T_{0-}^{n+1} - T_{ref}) \quad j = 0- \quad (6.16)$$

où α_{f-R} et α_{s-R} représentent les coefficients de couplage pour le problème aérothermique avec prise en compte du rayonnement par opposition à α_f et α_s qui sont les coefficients de couplage dans le cas où la contribution du rayonnement n'est pas prise en compte.

En appliquant la théorie du mode normal de [Godunov et Ryabenkii, 1964](#), le facteur d'amplification temporelle pour la méthode Robin-Robin est exprimé par la relation suivante (cf. Annexe A.2 pour plus de détails) :

$$z = \frac{(\alpha_{f-R} + \alpha_{s-R}) K_f}{(K_f + \alpha_{s-R} + h^R)(K_s + \alpha_{f-R})} K_f + \frac{(K_s - \alpha_{s-R})(K_f - \alpha_{f-R} + h^R)}{(K_f + \alpha_{s-R} + h^R)(K_s + \alpha_{f-R})} \quad (6.17)$$

Le facteur d'amplification temporelle pour la méthode Dirichlet-Robin, étudiée dans le cadre de cette thèse, peut être obtenu en imposant $\alpha_{s-R} \rightarrow \infty$ dans l'Équation (6.17) :

$$z = \frac{K_f}{(K_s + \alpha_{f-R})} K_f - \frac{(K_f - \alpha_{f-R} + h^R)}{(K_s + \alpha_{f-R})} \quad (6.18)$$

Le coefficient optimal est situé à l'intersection de la branche de Neumann avec celle de Dirichlet (cf. Section 2.5), son expression est la suivante (cf. Annexe A.2 pour plus de détails) :

$$\alpha_{f-R}^{(opt)} = \alpha_f^{(opt)} + h^R \quad (6.19)$$

où $\alpha_f^{(opt)}$ est le coefficient optimal de la méthode Dirichlet-Robin sans prise en compte du rayonnement (cf. Équation (2.49)).

La valeur du facteur d'amplification temporelle correspondant à $\alpha_{f-R}^{(opt)}$ peut être obtenue de la façon suivante :

$$\left| g(z=1, \alpha_{f-R}^{(opt)}) \right| = \left| \frac{K_f}{(K_s + \alpha_{f-R})} - \frac{(K_f - \alpha_{f-R} + h^R)}{(K_s + \alpha_{f-R})} \right| = \frac{\alpha_{f-R}^{(opt)} - h^R}{K_s + \alpha_{f-R}^{(opt)}} \quad (6.20)$$

En utilisant l'Équation (6.19) et la définition du nombre de Biot numérique Bi_v (cf. Éq. 3.1), on obtient :

$$\left| g \left(z = 1, \alpha_{f-R}^{(opt)} \right) \right| = \frac{\alpha_f^{(opt)}}{K_s + \alpha_f^{(opt)} + h^R} = \frac{Bi_v}{2 + Bi_v + 2 \frac{h^R}{K_s}} \leq 1 \quad (6.21)$$

qui est toujours inférieur à 1 et, par conséquent, toujours dans la zone de stabilité.

Il peut être également démontré que la relation suivante est toujours valide :

$$\left| g \left(\alpha_f^{(opt)} \right) \right| \geq \left| g \left(\alpha_{f-R}^{(opt)} \right) \right| \quad \forall h^R \geq 0 \quad (6.22)$$

où $\left| g \left(\alpha_f^{(opt)} \right) \right|$ est le facteur d'amplification temporelle obtenu avec $\alpha_f^{(opt)}$ dont l'expression est :

$$g \left(\alpha_f^{(opt)} \right) = \frac{\alpha_f^{(opt)} - h^R}{K_s + \alpha_f^{(opt)}} = \frac{Bi_v - 2 \frac{h^R}{K_s}}{2 + Bi_v} \quad (6.23)$$

L'Équation (6.22) montre que l'utilisation du coefficient optimal calculé sans prendre en compte le rayonnement $\alpha_f^{(opt)}$ peut placer le problème aérothermique avec rayonnement dans la zone instable ($g \left(\alpha_f^{(opt)} \right) > 1$).

6.4 VALIDATION

Dans cette section, nous allons valider l'efficacité de la méthode Dirichlet-Robin optimale développée dans le paragraphe précédent et montrer qu'elle peut stabiliser des problèmes aérothermiques incluant l'échange radiatif entre deux surfaces. En particulier, cette méthode est comparée avec la méthode Dirichlet-Robin optimale qui ne prend pas en compte le rayonnement et qui a été étudiée au cours du chapitre 3.

6.4.1 Description du cas test

L'étude a été réalisée sur un cas académique d'un canal 2D où un écoulement fluide est chauffé par deux parois à température différente qui rayonnent. Cette configuration est montrée sur la Figure 6.2.

Le canal mesure 520 mm de long et 100 mm d'hauteur. Deux surfaces couplées de 350 mm mettent en relation l'écoulement fluide avec le solide, la première avec la plaque située au-dessus et la deuxième avec la plaque située au-dessous. Les plaques solides ont une épaisseur de 3 mm. Sur la surface supérieure de la plaque du dessus, une

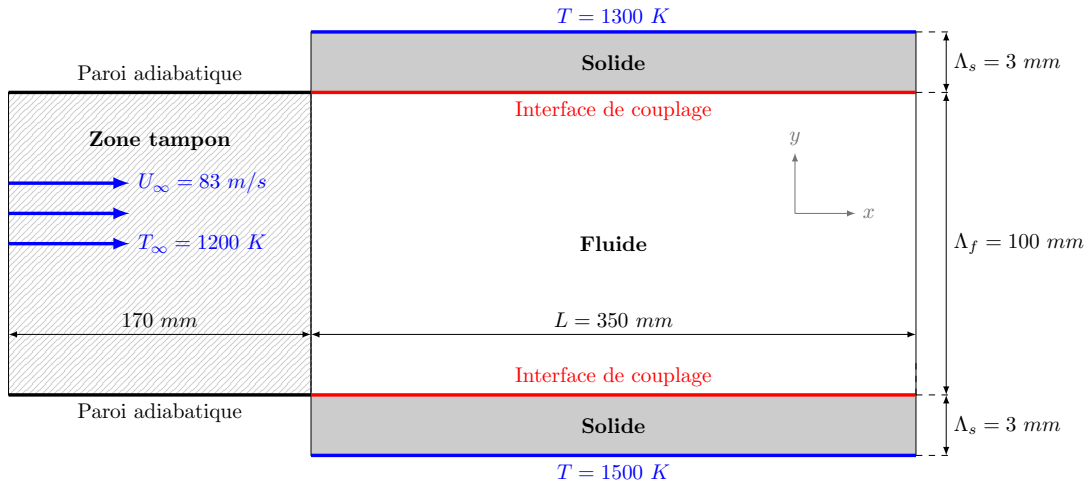


FIGURE 6.2 – Schématisation du cas test du canal. Les conditions aux limites fluides et solides sont incluses.

température de 1300 K a été imposée, tandis que sur la surface inférieure de la plaque du dessous la température imposée est de 1500 K.

Dans ce cas test, afin d'éviter que les points singuliers affectent l'échange thermique, une zone tampon a été ajoutée en amont du domaine fluide étudié (cf. Figure 6.2). Les parois supérieure et inférieure de la zone tampon sont supposées adiabatiques.

Le fluide entre dans le canal avec une vitesse de 83 m/s et avec une température de 1200 K. En sortie du canal une pression atmosphérique égale à 101325 Pa est imposée. Avec ces conditions, le nombre de Reynolds est de $5,15 \cdot 10^4$.

La résolution du problème fluide est faite via une simulation (Unsteady)RANS en utilisant un schéma de type Jameson (Jameson et al., 1981) et le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras (cf. Spalart et Allmaras, 1992). Le pas de temps de résolution de l'écoulement fluide est de $3 \cdot 10^{-5}$ s.

Comme dans le cas test de la plaque plane (cf. §3.3), les maillages ont été suffisamment raffinés à l'entrée du canal (cf. Figure 6.3) afin de mieux modéliser l'échange thermique dans cette zone ("bord d'attaque thermique"). Les trois maillages (fluide, solide et radiatif) sont coïncidents à l'interface afin d'éviter toute erreur d'interpolation entre les maillages lors des échanges des quantités thermiques.

Le maillage fluide a été suffisamment raffiné près de la paroi afin d'atteindre $y^+ \approx 1$, ce qui permet de bien modéliser l'écoulement fluide dans la couche limite. La taille de la première maille fluide vaut $4 \cdot 10^{-5}$ m.

Les domaines solides sont composés d'hexaèdres. Chaque domaine a été divisé dans la direction normale à l'interface de couplage en 19 cellules en utilisant une progression géométrique (cf. Figure 6.3).

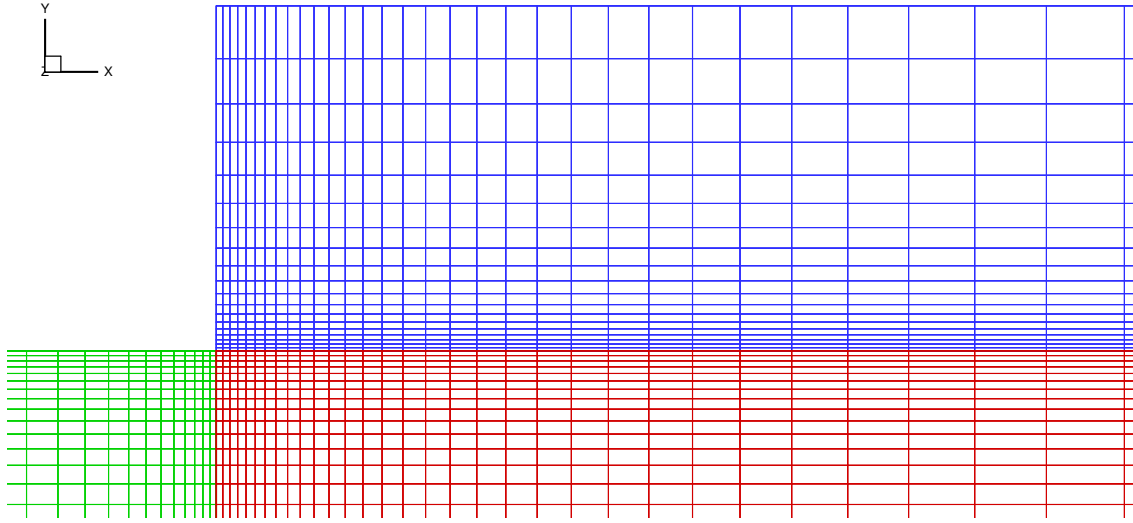


FIGURE 6.3 – Maillages des domaines fluide (en rouge avec la zone tampon en vert) et solide (en bleu) près du bord d’attaque de l’interface de couplage supérieure.

La conductivité thermique des deux plaques solides vaut $0,5 \text{ W/(mK)}$. Cette très faible valeur a été choisie à dessein pour se placer dans des conditions aérothermiques difficiles, à nombre de Biot élevé, ce qui rend la stabilisation du calcul délicate.

Concernant le calcul des flux radiatifs, les parois orthogonales aux directions x et z sont des symétries. Le nombre de faisceaux d’énergie émis par chaque élément N_i a été choisi égal à 1000. Le nombre total de faisceaux émis N est alors 152000, ce qui assure une convergence à $0,01\%$.

Deux valeurs de l’émissivité ont été analysées ($0,5$ et $0,8$).

Le critère de convergence choisi pour ce cas test est le suivant :

$$\Delta T_s < \xi, \quad \xi = 10^{-3} \text{ K} \quad (6.24)$$

6.4.2 Résultats de la validation

La comparaison a été effectuée sur le problème aérothermique avec différents niveaux d’échange radiatif déterminés au travers du coefficient d’émissivité ϵ .

La Figure 6.4 montre le facteur d’amplification temporelle pour le problème sans et avec rayonnement en prenant deux valeurs de ϵ ($0,5$ et $0,8$). Le rayonnement contribue négativement à la stabilité du problème couplé. En effet, plus l’échange radiatif est important (ϵ élevé) et plus une plus grande partie de la courbe se situe dans la zone instable. Le coefficient optimal dans le cas sans rayonnement $\alpha_f^{(\text{opt})}$ pourrait ne plus stabiliser le même cas avec rayonnement car $\max \left| g \left(\alpha_f^{(\text{opt})}, \epsilon \right) \right| > 1$. En prenant en

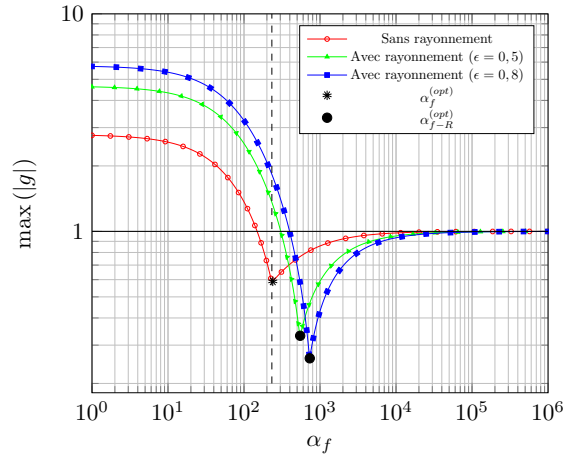


FIGURE 6.4 – Résidu en norme infini sur la température pour le cas de couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,5$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$, respectivement sans et avec la prise en compte du rayonnement.

compte le rayonnement, les nouvelles expressions des nombres de Biot local Bi_R^Δ et numérique Bi_V^R sont les suivantes :

$$Bi_R^\Delta = Bi^\Delta + \frac{h^R}{K_s} \quad (6.25)$$

$$Bi_V^R = Bi_V + \frac{h^R}{K_s} \quad (6.26)$$

où Bi^Δ et Bi_V sont respectivement les nombres de Biot local et numérique pour un problème aérothermique sans rayonnement.

ϵ	h^R [W/(m ² K)]	Bi_R^Δ	Bi_V^R	$\max g(\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}) $	$\max g(\alpha_f^{(\text{opt})}) $
0	0	19,4	2,78	0,58	0,58
0,5	311	21,3	4,65	0,35	1,34
0,8	498	22,4	5,77	0,26	1,83

TABLEAU 6.1 – Paramètres de la méthode Dirichlet-Robin caractérisant les problèmes étudiés avec rayonnement ($\epsilon > 0$) et sans rayonnement ($\epsilon = 0$).

Le Tableau 6.1 montre les principaux paramètres de la méthode Dirichlet-Robin avec rayonnement. Le cas avec $\epsilon = 0$ représente le cas sans rayonnement. h^R a été calculé avec l'équation (6.10). Comme le tableau le précise, les nombres de Biot augmentent avec l'aug-

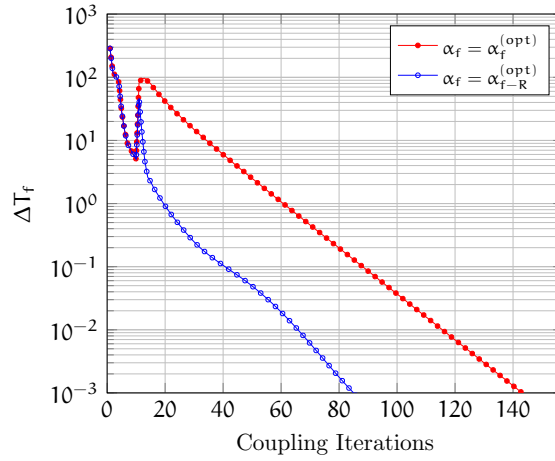


FIGURE 6.5 – Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage pour le cas du couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,5$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$, i.e. respectivement sans et avec prise en compte du rayonnement.

mentation de l'échange radiatif. On observe aussi l'augmentation de $\max \left| g \left(\alpha_f^{(\text{opt})} \right) \right|$ et la diminution de $\max \left| g \left(\alpha_{f-R}^{(\text{opt})} \right) \right|$ avec l'intensification de l'échange radiatif.

La Figure 6.5 montre l'évolution des résidus en norme infini sur la température à l'interface au fil des itérations de couplage. Les deux calculs convergent. À l'itération de couplage 11, une augmentation du résidu se produit. Elle correspond à l'injection de l'échange radiatif dans le problème aérothermique. En effet, pendant les 10 premières itérations de couplage, seuls les problèmes fluide et solide sont couplés sans prendre en considération le flux radiatif afin d'éviter de perturber l'établissement de l'écoulement dans la phase initiale du calcul qui est toujours délicate. Pendant ces 10 premières itérations les deux courbes des résidus sont donc superposées car $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})} = \alpha_f^{(\text{opt})}$.

Après la prise en compte du rayonnement ($\alpha_{f-R}^{(\text{opt})} > \alpha_f^{(\text{opt})}$), les deux courbes présentent des comportements différents. Le résidu avec $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$ diminue rapidement en prenant la vitesse de convergence existante avant l'injection du rayonnement dans le système. Le critère de convergence est atteint après 84 itérations de couplage. Au contraire, le résidu avec $\alpha_f^{(\text{opt})}$ diminue moins rapidement après l'injection du rayonnement en gardant une vitesse de convergence quasiment constante pour le reste du calcul. Cette simulation converge après 142 itération de couplage, soit une augmentation de 69% du nombre d'itérations de couplage par rapport au calcul précédent (avec $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$).

Par ailleurs, le modèle théorique prédit l'instabilité pour le problème couplé avec $\alpha_f^{(\text{opt})}$ (cf. Figure 6.4) car $\max \left| g \left(\alpha_f^{(\text{opt})}, \epsilon = 0,5 \right) \right| = 1,34$ et donc supérieure à la limite de stabilité. Cependant, il est probable que les modes 2D, non pris en compte par le

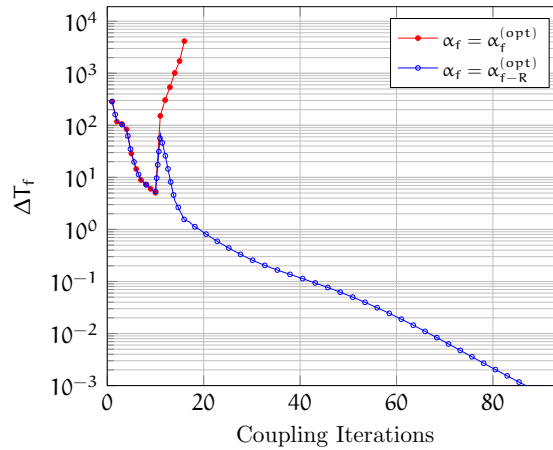


FIGURE 6.6 – Résidu en norme infini sur la température au fil des itérations de couplage pour le cas du couplage aérothermique avec rayonnement ($\epsilon = 0,8$) en utilisant les coefficients optimaux $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$, i.e. respectivement sans et avec la prise en compte du rayonnement.

modèle, stabilisent ce problème dont le facteur d'amplification temporelle n'est que très légèrement supérieure à 1.

Pour un problème avec une contribution majeure du rayonnement ($\epsilon = 0,8$), le comportement est différent (cf. Figure 6.6). Le calcul avec $\alpha_f^{(\text{opt})}$ diverge quelques itérations après l'injection du rayonnement dans le système comme le prévoit le modèle théorique. Au contraire, l'utilisation de $\alpha_{f-R}^{(\text{opt})}$ stabilise rapidement le problème et le calcul converge après 87 itérations de couplage.

Les graphiques sur la Figure 6.7 montrent les profils de température sur les deux parois de couplage avec et sans rayonnement. L'effet du rayonnement sur la température de la paroi peut être très important et non négligeable dans le dimensionnement thermique du système étudié. Par exemple, dans ce cas ($\epsilon = 0,8$) la paroi supérieure reçoit une plus grande quantité de chaleur ce qui implique une augmentation de plus que 60 K par rapport à la température calculée sans prendre en compte le rayonnement.

6.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié l'effet du rayonnement sur la stabilité d'un problème aérothermique couplé. Le rayonnement a été pris en compte en ajoutant le solveur radiatif ASTRE au couplage aérothermique elsA-Zset.

Cet algorithme de couplage à 2,5 codes (car ASTRE a été mis en communication avec le seul solveur fluide elsA) a été développé et implémenté informatiquement.

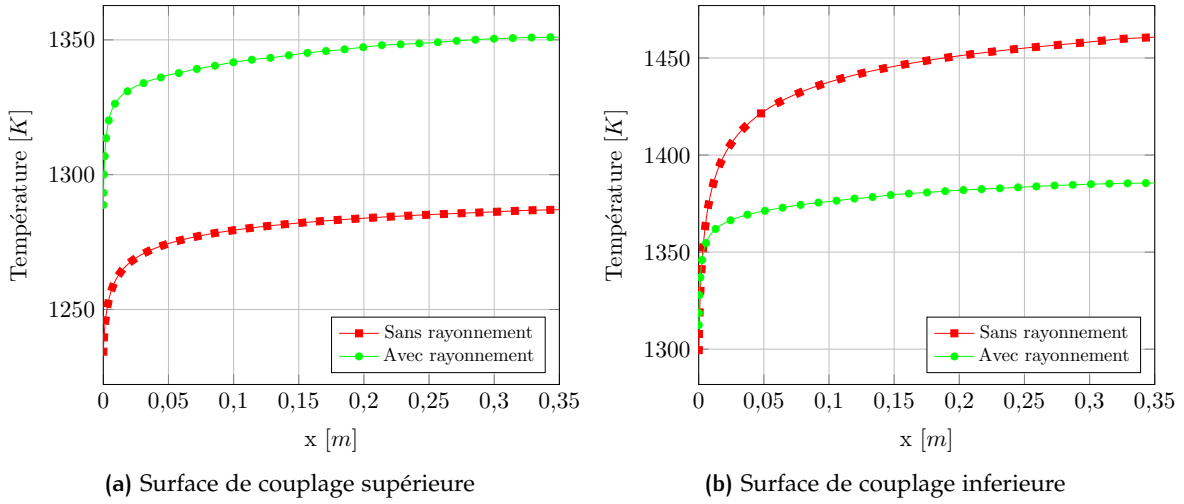


FIGURE 6.7 – Profils de température sur les surfaces de couplage lorsqu’aucun échange radiatif a lieu et lorsqu’il y a de l’échange radiatif (cas avec $\epsilon = 0,8$).

La validation de ce couplage avec une solution de référence n’a pas été réalisée car elle n’est pas l’objectif de cette étude. En effet, seul l’effet du rayonnement sur la stabilité du problème couplé a été recherché.

Grâce à une étude de stabilité, nous avons déterminé que la prise en compte du rayonnement implique un plus grand échange thermique et donc une interaction thermique plus importante. En effet, plus l’échange radiatif est important et plus les nombres de Biot local et numérique sont élevés. Les expressions analytiques de ces deux nombres ont été fournies dans ce chapitre.

On a montré que le coefficient optimal $\alpha_f^{(opt)}$, étudié au chapitre 3, ne parvient plus à stabiliser un problème aérothermique couplé avec rayonnement. Il est alors nécessaire d’utiliser un nouveau coefficient optimal $\alpha_{f-R}^{(opt)}$, issu de l’analyse de stabilité, supérieur au précédent et dont l’expression analytique a été fournie pour la première fois.

La nouvelle méthode Dirichlet-Robin avec la prise en compte du rayonnement a été testée sur un cas test d’un écoulement dans un canal chauffé par deux plaques à différentes températures qui échangent de la chaleur par radiation.

Les simulations numériques réalisées sur ce cas test ont permis de valider la méthode et de démontrer que des calculs couplés avec rayonnement peuvent être menés à bien, en conservant les bonnes propriétés numériques des schémas optimaux, à savoir des conditions de stabilité inconditionnelle et une convergence rapide.

7

IMPLÉMENTATION ET ÉTUDE DU COUPLAGE AÉROTHERMIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Les chapitres précédents ont été dédiés à l'étude de la stabilité du couplage aérothermique en régime permanent. Plus précisément, les principaux paramètres et leur effet sur la stabilité ont été analysés. De plus, une stratégie générale de stabilisation des couplages aérothermiques efficace, quelle que soit l'intensité thermique, a été proposée et testée.

Le couplage aérothermique en régime transitoire est abordé dans ce mémoire à partir de ce chapitre. L'objectif du couplage aérothermique transitoire est d'évaluer l'évolution de la charge thermique transmise par l'écoulement sur le solide au cours d'une mission de longue durée. Par exemple, la mission d'une turbine haute pression (HP) d'un moteur aéronautique comprenant toutes les phases de vol entre le décollage et l'atterrissage. La connaissance de l'évolution de la charge thermique est indispensable pour estimer avec une bonne précision la durée de vie de la pièce. Une bonne estimation de la durée de vie permet d'optimiser le dimensionnement de la pièce afin d'optimiser la masse globale du moteur et, par conséquent, d'en améliorer son efficacité.

Comme déjà annoncé au Chapitre 1, le couplage aérothermique en régime transitoire a été réalisé en utilisant l'algorithme quasi-instationnaire (cf. Figure 1.8) qui a été décrit dans la section 1.4.3.2. Lorsque cet algorithme est utilisé, l'influence des effets instationnaires de l'écoulement fluide sur l'évolution de la thermique dans le solide est négligée. Cette hypothèse est pertinente car généralement le temps caractéristique du fluide est plus petit de plusieurs ordres de grandeur que le temps caractéristique de la diffusion dans le solide.

L'algorithme de couplage quasi-instationnaire a été d'abord implémenté. Une brève description de cette implémentation est fournie dans l'Annexe D. Ensuite, les méthodes optimales de stabilisation pour le couplage aérothermique en régime transitoire sont développées et détaillées dans la section 7.1. Ces méthodes incluent la méthode Robin-Robin et ses deux cas particuliers, i.e. la méthode Dirichlet-Robin et la méthode Neumann-Robin. Enfin, le couplage en régime transitoire est examiné sur le cas académique de la plaque plane 2D à la section 7.2. Seule la méthode Dirichlet-Robin est testée car, comme nous avons vu précédemment, elle est la plus utilisée dans le milieu industriel et la plus fiable pour stabiliser l'ensemble des calculs couplés aérothermiques, à la condition toutefois que des conditions d'interface optimales soient mises en œuvre.

7.1 DESCRIPTION ET ANALYSE DES MÉTHODES OPTIMALES DE STABILISATION DES COUPLAGES AÉROTHERMIQUES EN RÉGIME TRANSITOIRE

Les méthodes optimales pour la stabilisation des problèmes aérothermiques en régime transitoire ont été déjà présentées à la section 2.5.2 et détaillées dans l'annexe A.3. Plus particulièrement, la méthode Robin-Robin a été présentée et, à partir de cette dernière, les limites de stabilité et les coefficients optimaux des méthodes Dirichlet-Robin et Neumann-Robin ont été obtenus.

Dans cette section, nous présentons plus en détail le potentiel de stabilisation de ces deux méthodes (Dirichlet-Robin et Neumann-Robin) en régime transitoire.

7.1.1 Méthode Dirichlet-Robin

La méthode Dirichlet-Robin pour le régime transitoire est présentée ici. Une variante plus robuste de la méthode est également présentée. Cette dernière est construite en considérant la valeur la plus pénalisant de la distance de pénétration (distance parcourue par la chaleur dans le solide pendant un pas de temps solide Δt). Cette distance, introduite dans le Chapitre 3, est définie comme suit :

$$d_{pen} = \sqrt{2a\Delta t} \quad (7.1)$$

avec a la diffusivité thermique.

7.1.1.1 Méthode Dirichlet-Robin classique

Le facteur d'amplification temporelle pour la méthode Dirichlet-Robin peut être obtenu en imposant $\alpha_s \rightarrow \infty$ dans l'expression du facteur d'amplification temporelle de la méthode Robin-Robin (cf. Éq. (2.63)) :

$$z = g(z, \alpha_f) = \frac{K_s \kappa_s + \alpha_f - h}{K_s + \alpha_f} \quad (7.2)$$

En posant $\kappa_s(z = -1, D_s) = \bar{D}_s$ de la même manière que pour l'Équation (3.3), la condition de stabilité ($|g| < 1$) devient alors :

$$-1 < \frac{K_s \bar{D}_s + \alpha_f - h}{K_s + \alpha_f} < 1 \quad (7.3)$$

Cette inégalité donne la valeur du coefficient de couplage à partir de laquelle le problème couplé est stable :

$$\alpha_f^{(\min)} = \frac{h}{2} - \frac{K_s}{2} (1 + \overline{D}_s) \quad (7.4)$$

Introduisons à présent le nombre de Biot local Bi^Δ pour un problème aérothermique en régime transitoire. Il est défini comme suit :

$$Bi^\Delta = \frac{h}{K_s} \quad (7.5)$$

En effet, étant donné que le problème fluide est résolu en régime permanent, la conductance thermique du fluide peut être représentée par le coefficient d'échange thermique h .

En utilisant l'expression de Bi^Δ (cf. Éq. (7.5)), l'Équation (7.4) devient :

$$\alpha_f^{(\min)} = \frac{K_s}{2} [Bi^\Delta - (1 + \overline{D}_s)] \quad (7.6)$$

Le coefficient de stabilité optimal est situé à l'intersection de la branche de Neumann $|g(z = -1)|$ et de celle de Dirichlet $|g(z = 1)|$. Son expression est alors la suivante :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = h - \frac{K_s}{2} (1 + \overline{D}_s) \quad (7.7)$$

Le Tableau 7.1 résume le comportement de la méthode Dirichlet-Robin en fonction du coefficient de couplage α_f et du nombre de Biot local Bi^Δ . Il existe trois zones de stabilité :

- Lorsque l'interaction thermique est faible ($Bi^\Delta \leq (1 + \overline{D}_s)/2$) le problème couplé est stable quel que soit α_f . De plus, le coefficient optimal n'est pas présent dans cette zone de stabilité. La convergence la plus rapide est donnée théoriquement par la méthode Dirichlet-Neumann ($\alpha_f = 0$).
- Lorsque l'interaction thermique est modérée ($(1 + \overline{D}_s)/2 \leq Bi^\Delta \leq (1 + \overline{D}_s)$) le problème est également stable pour toutes valeurs de α_f mais, cette fois, le coefficient optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ existe. Pour cette valeur du coefficient de couplage, le problème est théoriquement le plus stable et la convergence la plus rapide.
- Lorsque l'interaction thermique est forte ($Bi^\Delta \geq (1 + \overline{D}_s)$) une zone d'instabilité apparaît pour des faibles valeurs de α_f . Le problème couplé est stable pour des valeurs du coefficient de couplage supérieures à $\alpha_f^{(\min)}$. Dans ce cas, $\alpha_f^{(\text{opt})}$ existe et représente la valeur pour laquelle la convergence est la plus rapide.

α_f	0		$\alpha_f^{(\min)}$		$\alpha_f^{(\text{opt})}$		∞	Condition
$ g $	$ g^0 $	$\nearrow$					1	$Bi^\Delta \leq (1 + \overline{D}_s)/2$
$ g $	$ g^0 $	$\searrow$			$ g^{(\text{opt})} $	$\nearrow$	1	$(1 + \overline{D}_s)/2 \leq Bi^\Delta \leq (1 + \overline{D}_s)$
$ g $	INSTABLE	1	$\searrow$	$ g^{(\text{opt})} $	$\nearrow$		1	$Bi^\Delta \geq (1 + \overline{D}_s)$

TABLEAU 7.1 – Comportement de la condition de Dirichlet-Robin en régime transitoire en fonction du coefficient de couplage α_f

Dans le Tableau 7.1, g^0 et $g^{(\text{opt})}$ sont respectivement les expressions du facteur d'amplification temporelle pour $\alpha_f = 0$ et pour $\alpha_f^{(\text{opt})}$ qui sont définies comme suit :

$$|g^0| = |\overline{D}_s - Bi^\Delta| \quad (7.8)$$

$$|g^{(\text{opt})}| = \frac{(1 - \overline{D}_s)}{(1 - \overline{D}_s) + 2Bi^\Delta} \quad (7.9)$$

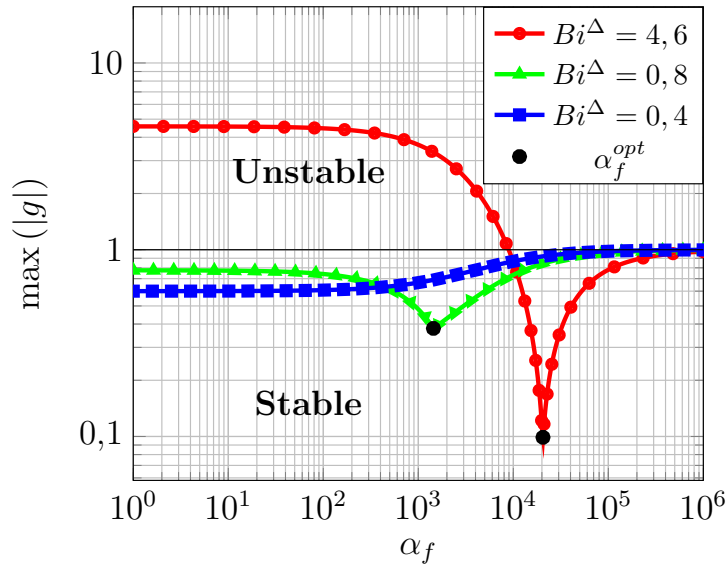


FIGURE 7.1 – Maximum du facteur d'amplification temporelle $\max |g|$ en fonction du coefficient de couplage α_f pour différentes valeurs du nombre de Biot local Bi^Δ .

Les trois différentes zones de stabilité sont également montrées graphiquement sur la Figure 7.1.

7.1.1.2 Variante de la méthode Dirichlet-Robin plus robuste

En analysant l'équation (7.4), on remarque que la limite de stabilité $\alpha_f^{(\min)}$ est une fonction croissante de la distance de pénétration (prise en compte dans K_s). On retrouve alors :

$$\alpha_f^{(\min)}(\Delta y_f) < \alpha_f^{(\min)}(2\Delta y_f) < \dots < \alpha_f^{(\min)}(\Lambda_s) \quad (7.10)$$

où Λ_s est l'épaisseur caractéristique du solide (normal à l'interface de couplage).

Par conséquent, la limite de stabilité obtenue avec une certaine valeur de la distance de pénétration peut stabiliser seulement des problèmes à distance de pénétration plus petite. En choisissant comme distance de pénétration l'épaisseur caractéristique Λ_s , le problème couplé est stable pour des valeurs inférieures à cette dernière.

Le résultat précédent (cf. Éq. (7.10)) nous permet de pouvoir développer une variante de la méthode Dirichlet-Robin plus robuste.

Cette méthode donne la possibilité de s'en franchir d'une bonne évaluation de la distance de pénétration nécessaire pour la définition de K_s . Ainsi, cette méthode stabilise théoriquement le problème quelle que soit la distance de pénétration dans le solide. En effet, l'adoption de Λ_s comme distance de pénétration correspond à une diffusion instantanée de la chaleur dans le solide (régime stationnaire) et, en conséquence, le nombre de Biot local Bi^Δ devient naturellement le nombre de Biot "traditionnel" Bi (cf. Éq. (2.15)). Cela entraîne alors les changements suivants dans la définition du problème thermique dans le solide :

$$\overline{D}_s = 0 \quad \text{et} \quad K_s^\Lambda = \frac{\lambda_s}{\Lambda_s} \quad (7.11)$$

En prenant en considération l'Équation (7.11) dans la définition de $\alpha_f^{(\min)}$ (7.4), la nouvelle limite de stabilité est :

$$\alpha_f^{(\min)} = \frac{h}{2} - \frac{K_s^\Lambda}{2} \quad (7.12)$$

Cette nouvelle limite stabilise des problèmes à distance de pénétration plus importante que la limite de stabilité pour le régime transitoire (7.4) et n'a que un faible impact sur la vitesse de convergence. Le nouveau coefficient $\alpha_f^{(\min)}$ peut être encore simplifié :

$$\alpha_f^{(\min)} = \frac{h}{2} - \frac{K_s^\Lambda}{2} \approx \frac{h}{2} \quad (7.13)$$

car, à nombre de Biot élevés, on a $h \gg K_s^\Lambda$. Pour des nombres de Biot faible, le problème couplé est toujours stable et l'utilisation d'un coefficient de couplage un peu plus grand ne peut que détériorer légèrement la vitesse de convergence. Le même raisonnement

peut être appliqué au coefficient optimal (cf. Éq. 7.7). Ce dernier, en prenant en compte les définitions (7.11), devient :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = h - \frac{K_s^\wedge}{2} = \frac{K_s^\wedge}{2} (2Bi - 1) \quad (7.14)$$

Une fois encore, lorsque le nombre de Biot est important on peut négliger le terme en $K_s^\wedge$ et, par conséquent, l'expression de $\alpha_f^{(\text{opt})}$ devient :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = h \quad (7.15)$$

Cette dernière expression du coefficient optimal (7.15) est retenue afin de stabiliser les problèmes aérothermiques en régime transitoires étudiés dans la suite de la thèse.

7.1.2 Méthode Neumann-Robin

Comme cela a été précédemment réalisé avec la méthode Dirichlet-Robin, nous décrivons dans ce paragraphe la méthode Neumann-Robin et sa variante plus robuste qui prend en compte la valeur la plus pénalisant de la distance de pénétration.

7.1.2.1 Méthode Neumann-Robin classique

Le facteur d'amplification temporelle pour la méthode Neumann-Robin peut être obtenu en imposant $\alpha_s = 0$ dans l'équation (2.63) :

$$z = \frac{\alpha_f K_s + h - \alpha_f}{(K_s + \alpha_f) Bi^\Delta} \quad (7.16)$$

Comme $\kappa_s(z = -1, D_s) = \overline{D}_s$, la condition de stabilité ($|g| < 1$) devient alors :

$$-1 < \frac{\alpha_f K_s + h - \alpha_f}{(K_s + \alpha_f) Bi^\Delta} < 1 \quad (7.17)$$

Cette inégalité donne la valeur du coefficient de couplage au-dessous de laquelle le problème couplé est stable :

$$\alpha_f^{(\text{max})} = \frac{2h}{(1 - \overline{D}_s) - Bi^\Delta} \quad (7.18)$$

Le coefficient de stabilité optimale est obtenu par l'intersection de la branche de Neumann $|g(z = -1)|$ avec celle de Dirichlet $|g(z = 1)|$. Son expression est alors la suivante :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{2h}{1 - \overline{D}_s} \quad (7.19)$$

Le tableau 7.2 illustre les différents comportements de la méthode Neumann-Robin en fonction du coefficient de couplage α_f et du nombre de Biot local Bi^Δ . Il existe deux zones de stabilité :

- Lorsque l'interaction thermique est faible ($Bi^\Delta < (1 - \overline{D}_s)$), le problème est instable pour $\alpha_f > \alpha_f^{(\text{max})}$. En utilisant le coefficient optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ le système est toujours stable et la convergence est rapide $g^{(\text{opt})} < 1$.
- Lorsque l'interaction thermique est forte ($Bi^\Delta \geq (1 - \overline{D}_s)$), le problème est stable quel que soit α_f . De nouveau, une convergence rapide est assurée en utilisant $\alpha_f^{(\text{opt})}$.

α_f	0		$\alpha_f^{(\text{opt})}$		$\alpha_f^{(\text{max})}$		∞	Condition
$ g $	1	$\searrow$	$ g^{(\text{opt})} $	$\nearrow$	1	INSTABLE		$Bi^\Delta < (1 - \overline{D}_s)$
$ g $	1	$\searrow$	$ g^{(\text{opt})} $	$\longrightarrow$			$ g(\infty) $	$Bi^\Delta \geq (1 - \overline{D}_s)$

TABLEAU 7.2 – Comportement de la condition de Neumann-Robin en régime transitoire en fonction du coefficient de couplage α_f

Dans le Tableau 7.2, $|g^{(\text{opt})}|$ et $|g(\infty)|$ sont respectivement les expressions du facteur d'amplification temporelle pour $\alpha_f^{(\text{opt})}$ et pour $\alpha_f \rightarrow \infty$, définies comme suit :

$$|g^{(\text{opt})}| = \frac{1 - \overline{D}_s}{(1 - \overline{D}_s) + 2Bi^\Delta} \quad (7.20)$$

$$|g(\infty)| = \frac{1 - \overline{D}_s}{Bi^\Delta} \quad (7.21)$$

7.1.2.2 Variante de la méthode Neumann-Robin plus robuste

En suivant le même démarche que celle décrite précédemment pour la méthode Dirichlet-Robin, nous allons développer une méthode permettant de stabiliser le problème aérothermique quelle que soit la distance de pénétration de la chaleur dans le solide.

Ainsi, en considérant une diffusion instantanée de la chaleur dans le solide (cf. Éq. 7.11), les équations (7.18) et (7.19) deviennent :

$$\alpha_f^{(\max)} = \frac{2h}{1 - Bi^\Delta} \quad (7.22)$$

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = 2h \quad (7.23)$$

On remarque que l'Équation (7.23) coïncide avec la limite de stabilité obtenue par Verstraete et Scholl, 2016 (cf. Éq. (2.24)).

Dans la méthode Neumann-Robin on retrouve également que la limite de stabilité est une fonction croissante de la distance de pénétration, c'est-à-dire :

$$\alpha_f^{(\max)}(\Delta y_f) < \alpha_f^{(\max)}(2\Delta y_f) < \dots < \alpha_f^{(\max)}(\Lambda_s) \quad (7.24)$$

Toutefois, pour la méthode Neumann-Robin, l'interprétation de ce résultat est différente car la limite de stabilité obtenue avec une certaine valeur de la distance de pénétration stabilise seulement des problèmes caractérisés par une distance de pénétration plus grande. En effet, en combinant l'équation (7.24) avec l'évolution croissante de $|g(\alpha_f)|$ (cf. Tableau 7.2), l'inégalité suivante est obtenue :

$$\left| g\left(\alpha_f^{(\max)}(\Delta y_f)\right) \right| < \left| g\left(\alpha_f^{(\max)}(\Lambda_s)\right) \right| \quad (7.25)$$

Il est ainsi préférable d'utiliser les coefficients de stabilité calculés avec une distance de pénétration égale à Δy_f (cf. Éq. (7.18) et (7.19)) qui sont aptes à stabiliser tous les problèmes couplés quelle que soit la distance de pénétration.

En conclusion, pour des problèmes à interaction thermique faible ou modérée la méthode Dirichlet-Robin est préférable à la méthode Neumann-Robin qui est plus adaptée à la stabilisation des problèmes à interaction thermique forte. Afin d'assurer ultérieurement la stabilité du problème couplé l'utilisation de leur variantes plus robustes est conseillée.

Dans le cas de ces travaux de thèse, la variante de la méthode Dirichlet-Robin plus robuste est employée.

7.2 VALIDATION DU COUPLAGE AÉROTHERMIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Dans cette section, l'algorithme de couplage quasi-instationnaire est testé en utilisant différentes valeurs du coefficient de couplage α_f . L'objectif est de vérifier l'effet du

coefficient de couplage sur la solution du problème. La méthode employée à l'interface est la méthode Dirichlet-Robin.

7.2.1 Description du cas test

Le cas test utilisé pour la validation est un cas test de plaque plane où on étudie le transitoire thermique pendant une période d'une seconde. La géométrie et les maillages des deux domaines (fluide et solide) sont identiques au cas test décrit à la Section 3.3.

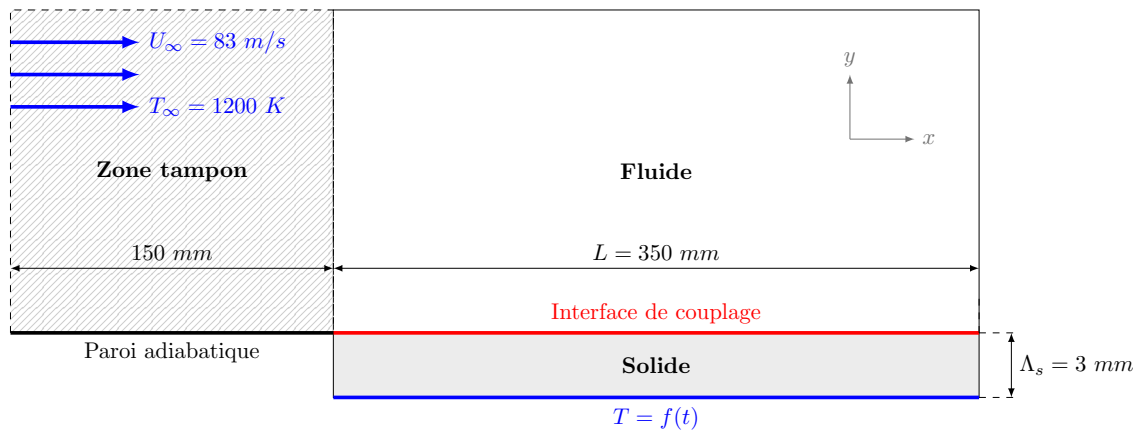


FIGURE 7.2 – Schématisation du cas test de la plaque plane. La température imposée sur la surface inférieure du domaine solide évolue dans le temps.

Cependant, à la différence de ce dernier, la température imposée sur la surface inférieure du domaine solide évolue dans le temps afin de simuler une variation des conditions opérationnelles du système aérothermique.

La Figure 7.3 montre l'évolution temporelle de la température imposée sur cette surface. Trois points de fonctionnement du système ont été imposés. Le premier point (premier instant) est l'état initial du problème ($t_s = 0$ s) où la température vaut 1000 K, le deuxième se trouve à $t_s = 0,5$ s et correspond à la température la plus élevée (1120 K) et le dernier correspond à l'état final ($t_s = 1$ s) où la température vaut à nouveau 1000 K. Entre ces trois points de fonctionnement, l'évolution temporelle de la température est supposée linéaire.

Pour ce qui concerne l'interface fluide-structure, au temps initial ($t_s = 0$ s) elle est initialisée à la température de 1000 K car l'écoulement fluide et la diffusion dans le solide sont considérés déjà en équilibre. Les instants de couplage choisis sont les deux points de fonctionnement à 0,5 s et à 1 s, où l'état fluide est connu. Entre l'état initial et ces deux instants de couplage, l'état fluide est imposé via une prédiction linéaire en temps des états fluides connus. Cette prédiction linéaire est la plus utilisée dans la littérature lorsque le transitoire thermique est résolu via l'algorithme quasi-stationnaire. La Figure

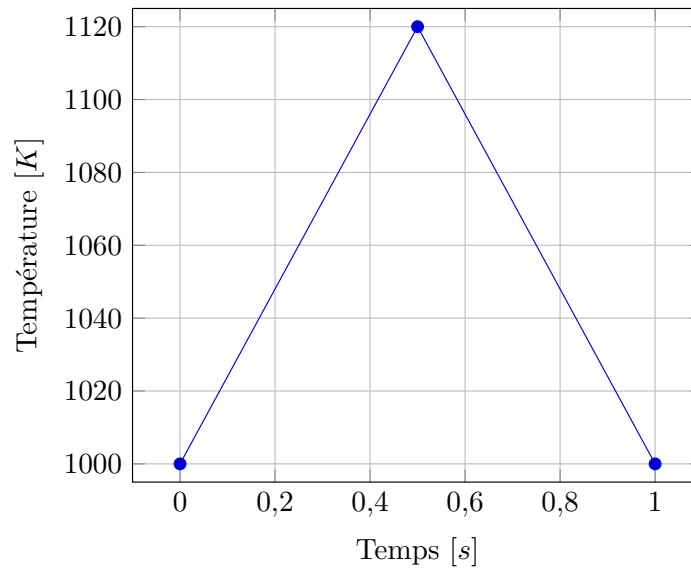


FIGURE 7.3 – Variation temporelle de la température imposée sur la surface inférieure du domaine solide.

k [W/(m K)]	ρC_p [J/(K m ³)]	Δy_s [m]	Δt_s [s]	D_s	Bi
13,6	$1,36 \cdot 10^6$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	0,5	0,1

TABLEAU 7.3 – Paramètres caractérisant le problème thermique

7.4 montre l'échange "fictif" entre les états fluides prédits en correspondance de chaque résolution de la diffusion solide entre deux instants de couplage. En effet, les échanges aux itérations solides entre deux couplages n'ont pas lieu car la prédiction linéaire des états fluides est réalisée par le solveur solide qui connaît les états fluides résolus aux instants de couplage t_c et $t_c + \Delta t_c$.

Les principaux paramètres caractérisant le problème thermique sont indiqués dans le Tableau 7.3. Le nombre de Biot vaut 0,1, l'interaction thermique est alors faible. Ainsi, ce problème aérothermique est stable quel que soit le coefficient de couplage α_f .

Le pas de temps de la diffusion solide ($\Delta t_s = 0,001$ s) est inférieur au pas de temps calculé en imposant le nombre de Fourier de la première maille solide égal à 0,5. Cette valeur représente la limite de stabilité d'une résolution explicite du problème de diffusion thermique dans le solide. En effet, un tel pas de temps permet une intégration temporelle suffisamment précise.

Le critère de convergence choisi pour ce cas test est le suivant :

$$\Delta T_s < \epsilon \quad \epsilon = 10^{-3} \text{ K} \quad (7.26)$$

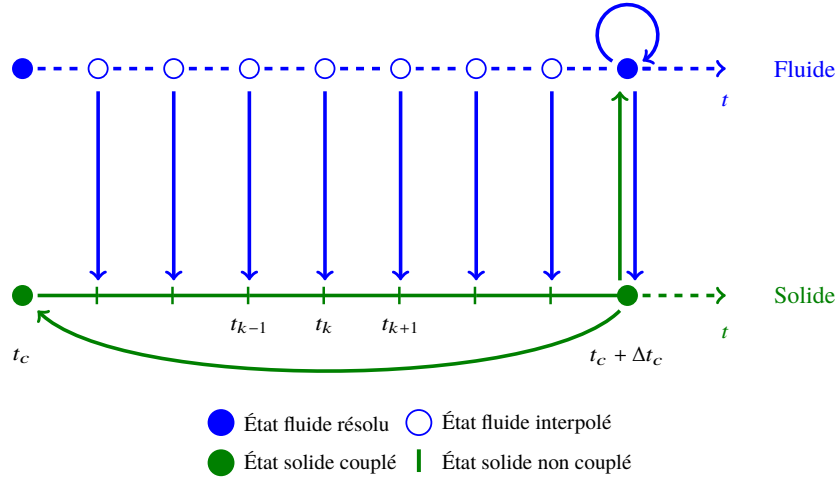


FIGURE 7.4 – Schématisation de l'algorithme quasi-stationnaire avec mise en évidence des états fluides interpolés.

7.2.2 Résultats

Pour le traitement de l'interface fluide-structure la méthode Dirichlet-Robin a été employée. Comme déjà démontré précédemment, cette méthode est la plus robuste et la plus utilisée dans la littérature. Ainsi, les conditions aux limites appliquées à l'interface fluide-structure sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{q}_s^n + \alpha_f^{n-1} \hat{T}_s^n = -inter_t(q_f^{n-1}) + \alpha_f^{n-1} inter_t(T_f^{n-1}) & \text{sur } \Gamma_s \text{ à } t_k \\ \hat{T}_f^n = T_s^n & \text{sur } \Gamma_f \text{ à } t_c \end{cases} \quad (7.27)$$

où $inter_t(x)$ représente l'interpolation linéaire en temps de la variable x décrite par l'équation suivante :

$$x - x_0 = a(t - t_0) \quad \text{où } x_0 = x(t_0), \quad a = \text{const} \quad (7.28)$$

L'équation (7.27) est appliquée aux fluides aux seuls instants de couplage, alors qu'elle est appliquée à chaque itération solide t_k située entre deux instants de couplage comme montré sur la Figure 7.4. Pour la prédiction des états fluides, une interpolation est réalisée en utilisant les valeurs extrêmes (à t_c et à $t_c + \Delta t_c$ calculée à l'itération de couplage précédente $n - 1$). Les quantités pariétales à t_c ne varient pas dans le temps car cet état fluide est l'état convergé du processus itératif précédent où on a atteint l'équilibre fluide-structure. En revanche, l'état fluide final à $t_c + \Delta t_c$ est mis à jour à chaque itération n du processus itératif courant jusqu'à atteindre l'équilibre thermique de l'interface. À la première itération de couplage ($n = 1$) une prédiction constante est employée.

Afin de valider le couplage en régime transitoire, nous avons comparé les solutions obtenues avec les trois valeurs du coefficient du couplage. Ces trois valeurs sont les suivantes :

- $\alpha_f = 0$ (Dirichlet-Neumann);
- $\alpha_f^{(\text{opt})}$ (cf. Éq. (7.15)) calculé en supposant que la diffusion de la chaleur dans le solide est instantanée;
- $\alpha_f = 10^5$.

La Figure 7.5 montre les résultats de cette comparaison au bord d'attaque en termes d'évolution de la température (Figure 7.5a) et du flux de chaleur (Figure 7.5b). Une dépendance importante de la solution en α_f est observée. Dans le paragraphe 1.2.4, nous avons vu que le coefficient de la condition de Robin n'impacte pas la solution car le terme de relaxation (cf. Éq. (1.43)) s'annule une fois l'équilibre de l'interface atteint. Cependant, le terme de relaxation ne s'annule pas dans ce cas. Le terme de relaxation apparaît en écrivant la première équation de (7.27) comme suit :

$$\hat{q}_s^n = -\text{inter}_t(q_f^{n-1}) + \alpha_f^{n-1} (\text{inter}_t(T_f^{n-1}) - \hat{T}_s^n) \quad \text{sur } \Gamma_s \text{ à } t_k \quad (7.29)$$

L'Équation (7.29) montre clairement que la différence entre les deux courbes peut être uniquement générée que par le terme de relaxation $\alpha_f^{n-1} (\text{inter}_t(T_f^{n-1}) - \hat{T}_s^n)$ car pour $\alpha_f = 0$ ce dernier est nul.

Sur la Figure 7.5b on observe que les deux courbes prennent des valeurs similaires autour des instants de couplage seulement (à 0,5 s et à 1 s). En effet, aux instants de couplage, l'équilibre de l'interface est atteint ($T_f \approx T_s$ hormis d'éventuelles erreurs d'interpolation spatiale entre les deux maillages).

Entre les instants de couplage le terme de relaxation ne s'annule pas car la variation linéaire de la température fluide ($\text{inter}_t(T_f^{n-1})$) ne coïncide pas avec l'évolution de la température de l'interface solide ($\hat{T}_s^n$) calculée par le solveur solide. En effet, pour des grandes valeur du coefficient de couplage ($\alpha_f^{(\text{opt})}$ et 10^5), le terme de relaxation devient plus important que le terme représentant le flux de chaleur, ce qui engendre une évolution de la température quasi-linéaire.

La Figure 7.6 montre l'évolution temporelle de la température et du flux de chaleur au bord de fuite de l'interface. Un comportement similaire est observé.

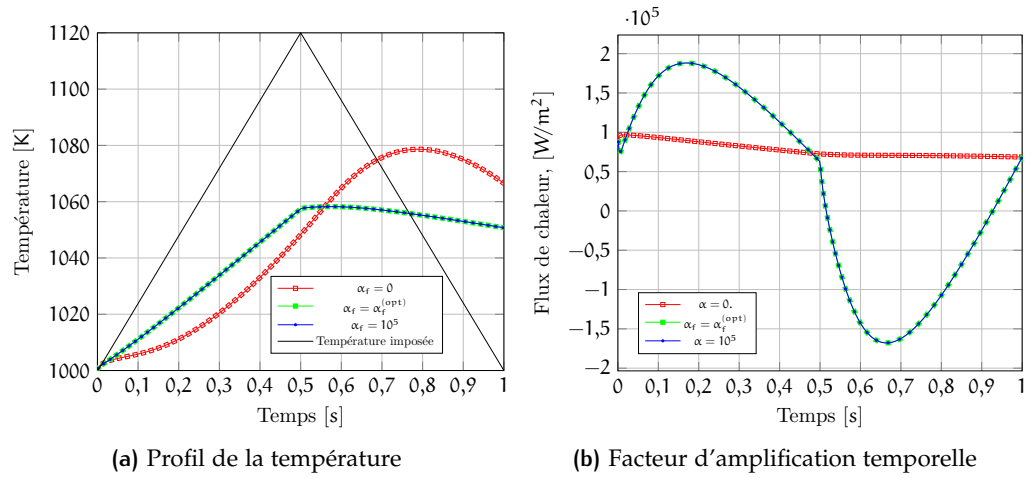


FIGURE 7.5 – Profils de la température et du flux de chaleur au bord d'attaque de l'interface pour trois valeurs du coefficient de couplage α_f (0 , $\alpha_f^{(opt)}$ et 10^5) obtenus avec la prédiction linéaire classique.

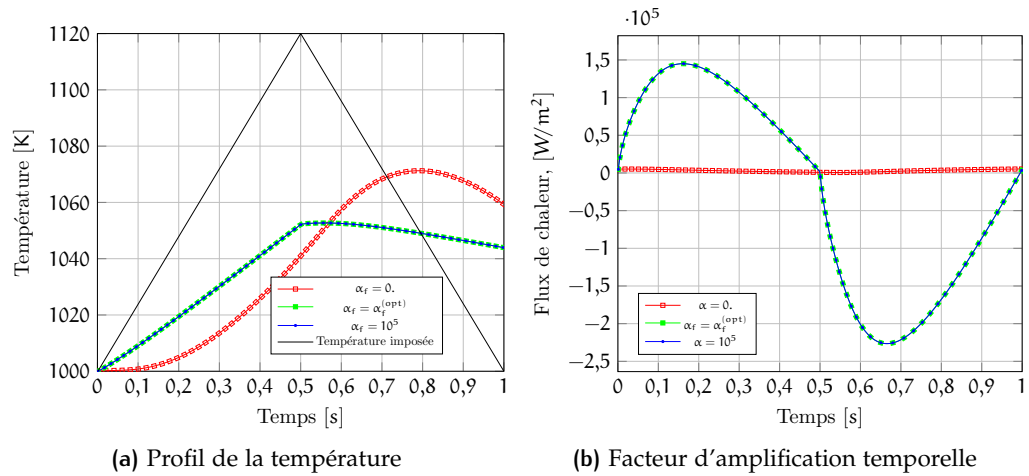


FIGURE 7.6 – Profils de la température et du flux de chaleur au bord de fuite de l'interface pour trois valeurs du coefficient de couplage α_f (0 , $\alpha_f^{(opt)}$ et 10^5) obtenus avec la prédiction linéaire classique.

7.3 CONCLUSION

Dans cette section nous avons abordé le problème de l'évolution de l'interaction thermique le long d'un intervalle de temps via l'algorithme quasi-instationnaire. Cet algorithme a été d'abord implémenté dans un plugin du solveur solide Z-set puis validé. De plus, nous avons présenté et analysé les méthodes optimales de stabilisation des problèmes d'interaction thermique fluide-structure en régime transitoire. Cette discussion a mené à la proposition d'une approche unifiée qui permet de stabiliser un problème aérothermique en régime transitoire quelle que soit la distance de pénétration de la chaleur dans le solide.

Lors de la validation de l'algorithme quasi-instationnaire, une dépendance de la solution au coefficient de couplage est observée. Cette dépendance est due à l'écart entre la prédiction linéaire de la température fluide et l'évolution de la température du solide. Cet écart rend le poids du terme de relaxation de la condition de Robin prépondérant même à convergence. Le traitement de ce phénomène indésirable sera traité dans le chapitre suivant.

8

AMÉLIORATION DE LA PRÉCISION DES CALCULS AÉROTHERMIQUES TRANSITOIRES

Le chapitre précédent a abordé la résolution des problèmes aérothermiques en régime transitoire via l'algorithme quasi-instationnaire qui permet de réduire le temps de calcul (en comparaison avec l'algorithme instationnaire-instationnaire qui couple les deux physiques systématiquement). Cette diminution du temps de calcul résulte du fait que l'écoulement fluide peut être résolu seulement à certains instants (instants de couplage). Cependant, nous avons montré que la solution dépend du coefficient de couplage du fait d'une prédiction linéaire en temps des états fluides (méthode classique).

Ainsi, l'objectif de ce chapitre consiste à proposer une correction de la prédiction afin de garantir une solution indépendante du coefficient de couplage. Les développements sont réalisés avec la méthode Dirichlet-Robin mais ils peuvent être étendus à la méthode Neumann-Robin.

Dans la Section 8.1, la prédiction linéaire est corrigée afin de supprimer la dépendance de la solution au coefficient de couplage. Une comparaison avec une solution de référence est réalisée afin de valider la précision de la solution obtenue.

Dans la section 8.2, une autre prédiction basée sur la loi de Newton (relation linéaire entre la température et le flux de chaleur) est développée et comparée à la solution de référence et à la prédiction linéaire. Enfin, deux autres cas test sont menés à bien pour tester la robustesse des deux nouvelles méthodes.

8.1 CORRECTION DE LA PRÉDICTION LINÉAIRE AFIN DE SUPPRIMER LA DÉPENDANCE DE LA SOLUTION AU COEFFICIENT DE COUPLAGE

Dans cette section, nous proposons une correction de la prédiction linéaire classique afin de supprimer la dépendance de la solution au coefficient de couplage. Par souci de simplicité, nous indiquons dans le reste de ce mémoire la prédiction linéaire classique par DR1 (Dirichlet-Robin version 1) et la modification de cette dernière par DR2 (Dirichlet-Robin version 2).

8.1.1 Interpolation du seul flux de chaleur

La prédiction DR1 est basée sur l'interpolation linéaire en temps des deux principales quantités thermiques pariétales (la température et le flux de chaleur).

L'évolution de la température dans le solide due à la diffusion thermique n'est pas linéaire en temps. Ainsi, le terme de relaxation dans la condition de Robin (cf. Éq. (7.29)) n'est pas nul entre deux instants de couplage. Toutefois, sur l'interface fluide une condition de température imposée (condition de Dirichlet) est appliquée, ce qui implique la relation suivante :

$$T_f^{n-1} = T_s^{n-1} \quad (8.1)$$

Il en résulte la définition suivante de la prédiction DR2 :

$$\begin{cases} \hat{q}_s^n + \alpha_f^{n-1} \hat{T}_s^n = -inter_t(q_f^{n-1}) + \alpha_f^{n-1} T_s^{n-1} & \text{sur } \Gamma_s \text{ à } t_k \\ \hat{T}_f^n = T_s^n & \text{sur } \Gamma_f \text{ à } t_c \end{cases} \quad (8.2)$$

Et, en conséquence, afin de mettre en évidence le terme de relaxation, la première équation de (8.2) peut être réécrite comme suit :

$$\hat{q}_s^n = -inter_t(q_f^{n-1}) + \alpha_f^{n-1} (T_s^{n-1} - \hat{T}_s^n) \quad \text{sur } \Gamma_s \text{ à } t_k \quad (8.3)$$

La Figure 8.1 montre la solution du problème aérothermique en régime transitoire décrit dans §7.2.1 en utilisant la prédiction DR2. Sur la Figure 8.1a les deux courbes sont superposées mais, un zoom permet de remarquer un léger écart des deux courbes de 0,02% en erreur relative. En effet, le terme de relaxation $\alpha_f^{n-1} (T_s^{n-1} - \hat{T}_s^n)$ de la prédiction DR2 est quasi-négligeable lorsque la convergence est atteinte car l'évolution de la température de l'interface ne varie plus au cours des itérations de couplage.

Concernant le profil du flux de chaleur (cf. 8.1b), un écart plus important est remarqué. Cet écart est de 16% en erreur relative ce qui correspond à un écart absolu de 3682 W/m². Cet écart est largement supérieur à l'erreur maximale due au choix du critère de convergence ϵ , c'est à dire :

$$\alpha_f (T_s^{n-1} - \hat{T}_s^n) = \alpha_f \cdot \epsilon = 10^5 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2 = 10^2 \text{ W/m}^2 \quad (8.4)$$

Cela veut dire que la différence $T_s^{n-1} - \hat{T}_s^n$ du terme de relaxation de la prédiction DR2 (8.3), ne suffit pas à expliquer l'écart enregistré par une convergence ϵ .

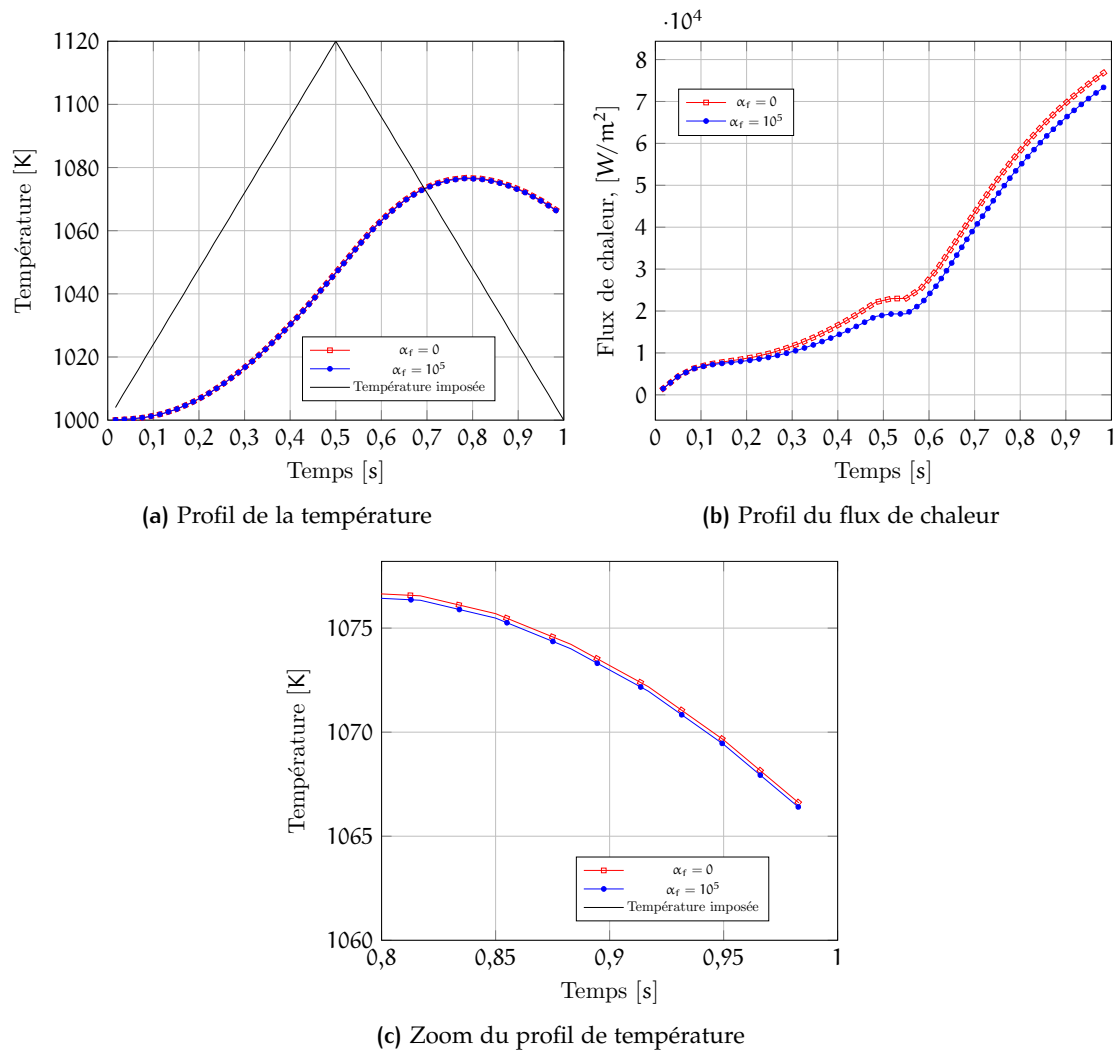


FIGURE 8.1 – Profils de la température et du flux de chaleur au bord d’attaque de l’interface pour deux valeurs du coefficient de couplage α_f (0 et 10^5) obtenus avec la méthode DR2.

8.1.2 Évaluation des quantités pariétales aux points de Gauss

Un problème d'interaction thermique fluide-structure est généralement caractérisé par l'interfaçage de deux méthodes de discrétisations différentes (MVF pour le fluide et MEF pour le solide).

La résolution du problème de diffusion thermique dans solide via la méthode des éléments finis (MEF) donne une précision de la solution au moins d'ordre 1 en espace (la solution dans chaque élément est au moins linéaire). Au contraire, l'écoulement fluide est modélisé avec la méthode des volumes finis (MVF) qui donne une solution d'ordre 0 en espace (solution constante dans le volume élémentaire).

Afin de simplifier l'interfaçage de ces deux méthodes de discrétisation, l'échange des quantités pariétales est généralement réalisé au centre des éléments surfaciques de l'interface de couplage. Ainsi, la localisation des points d'échange sur la surface de l'élément est alors d'autant plus importante pour le problème solide que pour le problème fluide.

Dans ce paragraphe, nous montrons qu'une localisation correcte des points d'échange permet de réduire ultérieurement la dépendance en α_f de la solution.

Dans la méthode des éléments finis l'application des conditions aux limites est réalisée par intégration sur la surface d'application. L'intégration est effectuée au travers de formules de quadrature qui approximent l'intégrale définie I d'une fonction générique $f(x)$ par une somme pondérée (de poids $\bar{w}(x)$) prise en un certain nombre n de points du domaine d'intégration $[a, b]$. Dans MEF, la quadrature de Gauss, définie ci-dessous, est généralement la plus utilisée :

$$I = \int_a^b \bar{w}(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \bar{w}_i f(x_i)$$

Cette quadrature assure l'approximation exacte d'une fonction polynomiale d'ordre $2n - 1$ ou moins en utilisant n points de Gauss (Ern et Guermond, 2004). Ainsi, afin d'améliorer la précision du couplage la réception des quantités fluides aux points de Gauss des éléments surfaciques de l'interface fluide-structure a été implémentée.

De plus, concernant l'application de la condition de Robin dans la prédiction DR2 (cf. Éq. (8.3)) non seulement le flux de chaleur q_f^{n-1} mais aussi le terme de relaxation, et donc la température solide T_s^{n-1} , doivent être évaluées aux points de Gauss afin de calculer avec précision l'intégrale de la condition de Robin. La température solide peut être évaluée aux points de Gauss à partir des valeurs de la température aux nœuds en utilisant les fonctions de forme propres aux éléments finis. Il est alors nécessaire de stocker cette température pour pouvoir l'utiliser à l'itération de couplage suivante.

La Figure 8.2 compare les résultats obtenus avec la méthode DR2 en utilisant les valeurs aux centres des éléments (pratique classique) avec ceux obtenus en utilisant les valeurs aux points de Gauss (approche proposée dans ce chapitre). Une réduction supplémentaire

de la dépendance de la solution au coefficient de couplage est obtenue. Sur la Figure 8.2a, les profils de température semblent superposés et même en zoomant (cf. Figure 8.2c) la différence entre la courbe à $\alpha_f = 0$ et celle à $\alpha_f = 10^5$ avec utilisation des points de Gauss est infime. En effet, l'écart est seulement de 0,0002% en erreur relative. Ainsi, la correcte application des quantités échangées et donc une correcte intégration de la condition aux limites permet d'avoir une précision meilleure. Concernant le flux de chaleur (cf. Figures 8.2b et 8.2d), l'écart a été réduit à 0,08%, ce qui correspond à une différence de 22 W/m². Cette dernière est inférieure à l'erreur minimale imposée par le choix du critère de convergence de 100 W/m² (cf. Éq. (8.4)). La dépendance de la solution au coefficient de couplage a ainsi été supprimée.

8.1.3 Importance du raffinement du maillage solide (près de l'interface de couplage)

Dans cette section, l'impact du raffinement du maillage solide près de l'interface de couplage est analysé.

Cette étude a été réalisée en analysant les profils des flux de chaleur. Les profils qui ont été comparés sont les suivants :

- le flux de chaleur reçu par le solide au point de Gauss le plus proche au bord d'attaque ;
- le flux de chaleur calculé par le solveur solide au centre de l'élément surfacique du bord d'attaque ;
- le flux envoyé par le solveur solide depuis au centre de l'élément surfacique du bord d'attaque.

Étant donné que la taille de la maille solide contenant le bord d'attaque est infime ($\Delta x_s = 3,3 \cdot 10^{-4}$ mm), l'erreur dans la comparaison du flux de chaleur évalué aux points de Gauss avec ceux évalués aux centres des éléments est négligeable. Les calculs ont été réalisés en utilisant $\alpha_f = 0$ afin de comparer les seuls flux de chaleur.

La Figure 8.3 montre cette comparaison pour le maillage solide utilisé jusqu'à présent ($\Delta y_s = 3,3 \cdot 10^{-4}$ mm). L'écart entre le flux de chaleur reçu et envoyé est considérable alors que cet écart est sensé être petit lorsque la convergence est atteinte.

Nous avons vérifié que cet écart n'est pas dû à la présence d'une erreur dans la routine qui s'occupe de l'extraction et de l'envoi du flux de chaleur en comparant le flux envoyé et le flux de chaleur calculé au même point (respectivement la courbe verte et bleue sur la Figure 8.3). L'écart résulte alors d'une évaluation inexacte du flux de chaleur à partir du champ de température calculé.

La Figure 8.4 montre qu'en raffinant le maillage solide ($\Delta y_s = 2,7 \cdot 10^{-5}$ mm, soit un resserrement 10 fois plus grand que la précédente taille de maille) l'écart entre le flux de chaleur reçu et envoyé se réduit. Cette taille de maille est plus appropriée au problème thermique traité.

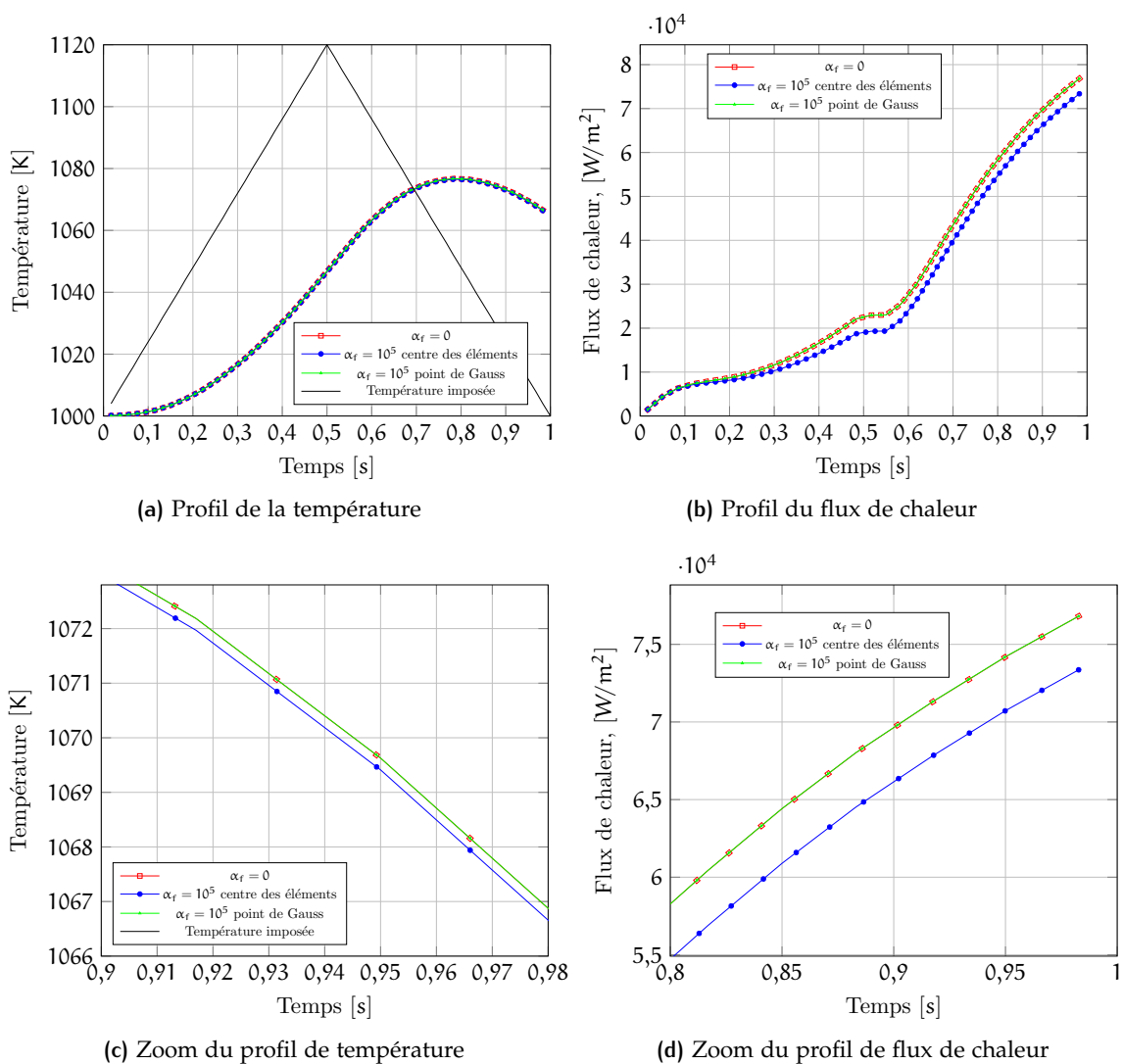


FIGURE 8.2 – Profils de la température et du flux de chaleur au bord d’attaque de l’interface pour deux valeurs du coefficient de couplage α_f (0 et 10^5) obtenus avec la méthode DR2 et avec la méthode DR2 utilisant les points de Gauss.

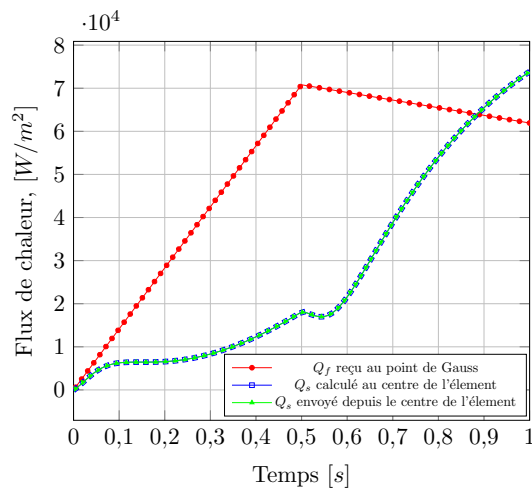


FIGURE 8.3 – Profils des flux de chaleur au bord d’attaque de l’interface obtenus avec la méthode DR2 aux points de Gauss pour le maillage solide utilisé jusqu’à présent ($\Delta y_s = 3,3 \cdot 10^{-4}$ mm). La comparaison est réalisée entre le flux de chaleur reçu aux points des Gauss, le flux calculé aux centres des éléments surfaciques et celui envoyé de ce dernier point.

En conclusion, le maillage solide utilisé pour l’étude du problème aérothermique en régime permanent n’est pas adapté au problème en régime transitoire. Il est alors nécessaire de raffiner le maillage solide afin de capturer correctement les gradients de la solution. Une autre solution est d’utiliser des éléments avec fonctions de forme polynômiales à ordre élevé qui permettent d’augmenter le degré de résolution sans augmenter énormément le nombre d’éléments.

Le maillage plus raffiné est utilisé dans la suite du mémoire.

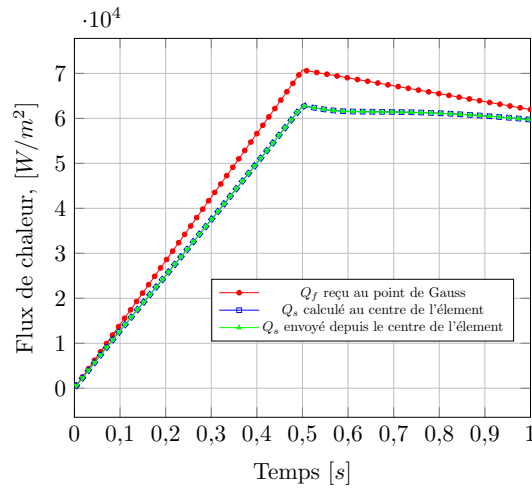


FIGURE 8.4 – Profils des flux de chaleur au bord d’attaque de l’interface obtenus avec la méthode DR2 aux points de Gauss pour un maillage solide plus raffiné ($\Delta y_s = 2,7 \cdot 10^{-5}$ mm). La comparaison est réalisée entre le flux de chaleur reçu aux points des Gauss, le flux calculé aux centres des éléments surfaciques et celui envoyé de ce dernier point.

8.1.4 Validation de la méthode DR2 en comparant les résultats obtenus avec une solution de référence

Dans cette sous-section les résultats obtenus en utilisant la méthode DR2 sont comparés avec une solution de référence afin de vérifier la précision de la méthode.

8.1.4.1 Solution de référence

Comme nous l’avons déjà écrit, la solution de référence a été obtenue via l’algorithme de couplage instationnaire-instationnaire en couplant les deux physiques à chaque itération fluide ($\Delta t_f = 5 \cdot 10^{-5}$). Le couplage à chaque itération fluide permet d’éviter l’utilisation d’une prédiction des états fluides car, à chaque instant de résolution de la diffusion solide, un calcul CFD lui correspondant est réalisé. De plus, cette très petite période de couplage permet de supprimer le processus itératif car l’erreur dans le respect du critère de continuité flux-température CFT est négligeable. Ce calcul de référence est bien évidemment extrêmement coûteux et n’est réalisé que pour valider les méthodes d’interpolation proposées dans ce chapitre. Par ailleurs, l’utilisation d’un pas de temps très petit peut engendrer des oscillations parasites associées aux conditions de profondeur de pénétration (*penetration depth condition* en anglais). Pour éviter leur apparition, il est nécessaire d’appliquer une agglomération (*lumping* en anglais) de la matrice de capacité thermique qui transforme cette dernière dans une M-matrice ¹ (Fachinotti et Bellet, 2006).

1. Matrice carrée réelle ayant tous ses mineurs principaux strictement positifs et ses éléments extra-diagonaux négatifs.

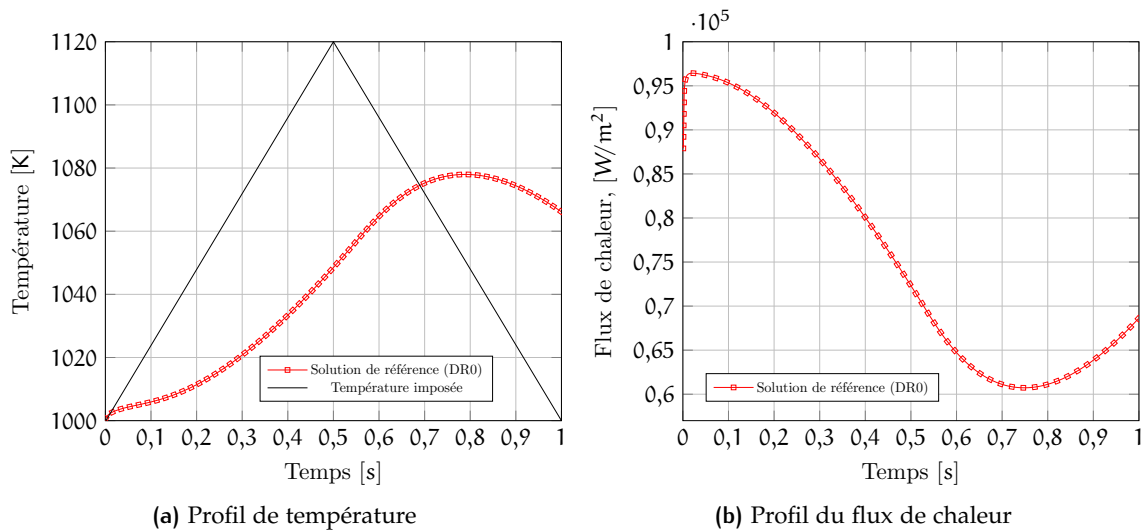


FIGURE 8.5 – Profils de la température et du flux de chaleur de la solution de référence au bord d'attaque de l'interface

La Figure 8.5 montre les profils de température et flux de chaleur de la solution de référence. Afin d'obtenir la solution de référence, il a été nécessaire de changer l'initialisation de l'interface de couplage, ce qui explique le profil du flux de chaleur (cf. Figure 8.5b) différent de celui obtenu dans les études précédemment réalisées. Dans ce paragraphe, cette solution de référence est comparée à la solution obtenue en couplant l'écoulement fluide et la diffusion solide à chaque itération solide. Le pas de temps de la diffusion solide ($\Delta t_s = 0,001$ s) est inférieur au pas de temps calculé en imposant le nombre de Fourier de la première maille solide égal à 0,5, ce qui représente la limite de stabilité d'une résolution explicite du problème de diffusion thermique dans le solide. L'objectif de cette comparaison est d'analyser si des couplages un peu moins fréquents (à chaque itération solide) permettent d'obtenir une solution suffisamment précise. En effet, cela permet de réduire de 20 fois le nombre de couplages et, par conséquent, le nombre de résolutions de la conduction solide. On passe ainsi de 20000 à 1000 itérations de couplage.

La Figure 8.6 compare les résultats en termes de température et flux de chaleur de ces deux simulations. Concernant la température, les deux courbes de Figure 8.6a sont superposées, l'erreur relative est infime (0,01%). De même pour les profils de flux de chaleur présentés sur la Figure 8.6b, l'erreur relative est petite (0,12%). Ainsi, les résultats obtenus dans la suite de la thèse seront comparés avec la solution de référence réalisée en couplant à chaque itération solide afin d'accélérer l'étude.

Dans la suite, on appellera DR0 la solution de référence.

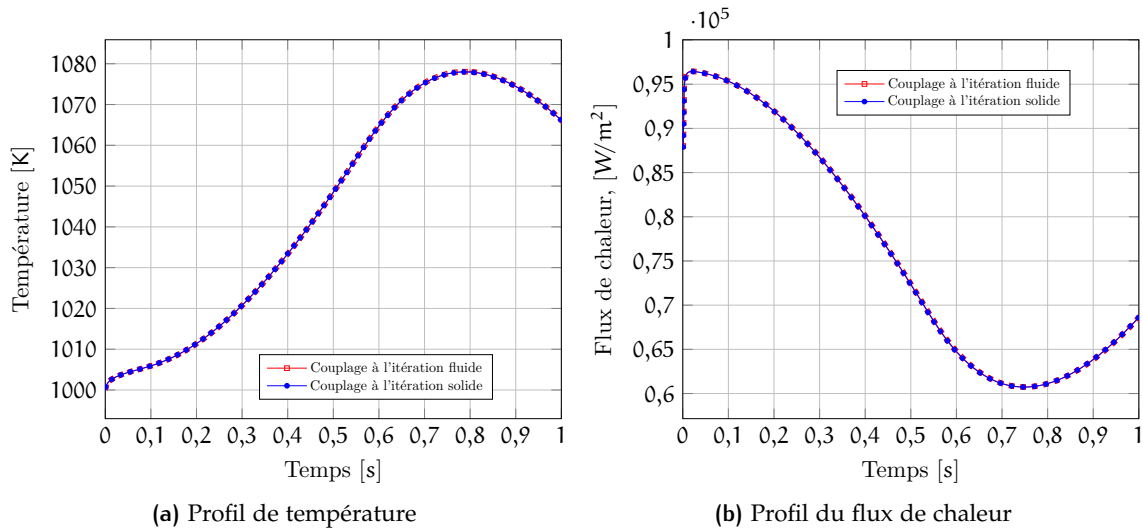


FIGURE 8.6 – Comparaison de la solution de référence obtenue en couplant à chaque itération fluide avec celle obtenue en couplant à chaque itération solide au bord d'attaque de l'interface.

8.1.4.2 Comparaison des résultats avec la solution de référence

La comparaison entre la solution calculée par la méthode DR2 et la solution de référence (DR0) est présentée sur les graphiques de la Figure 8.7.

Les profils de température de la Figure 8.7a sont quasi superposés, un petit écart relatif de 0,06% est visible en agrandissant la vue (cf. Figure 8.7b). Au contraire, l'erreur est importante (16,1%) sur le flux de chaleur (cf. Figure 8.7c). En effet, l'évolution linéaire du flux de chaleur imposée par la méthode DR2 ne correspond pas à l'évolution non-linéaire du flux de chaleur de la solution de référence. Cette erreur n'a pas eu d'impact sur la température car les points de couplage sont proches ($\Delta t_c = 0,5$ s). Dans le cas contraire, le profil de température s'éloignerait davantage de la solution de référence sous l'effet d'un apport inexact de chaleur au système.

Dans la section suivante, la prédiction linéaire en temps est remise en question et une nouvelle prédiction basée sur des principes physiques va être présentée, discutée et analysée.

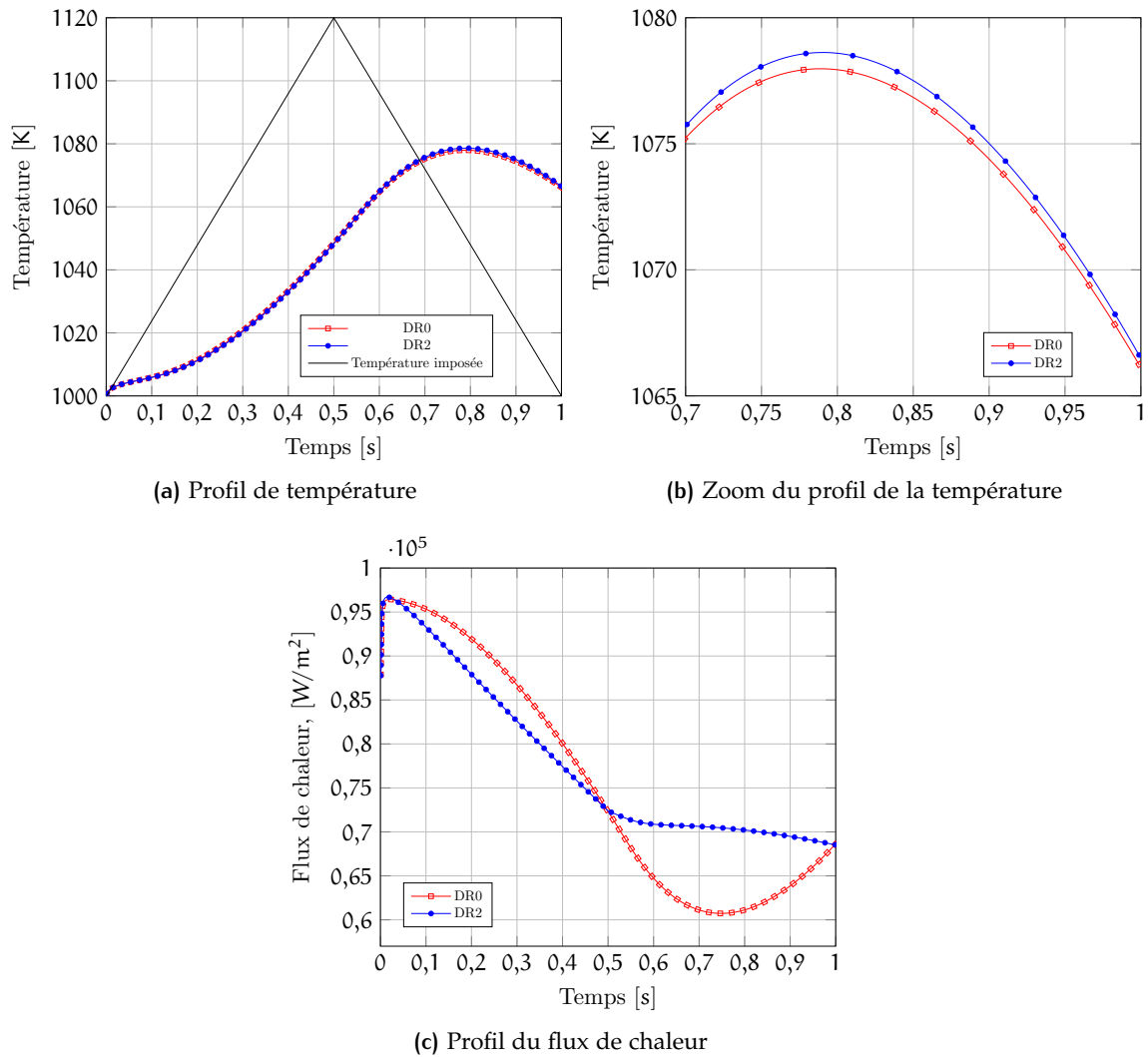


FIGURE 8.7 – Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface.

8.2 AMÉLIORATION DE LA PRÉCISION EN MODIFIANT LA PRÉ- DICTION DU FLUX DE CHALEUR

Cette section est dédiée à l'amélioration de la précision de la résolution des problèmes aérothermiques en régime transitoire via l'algorithme quasi-instationnaire. Il s'agit notamment de développer une prédiction des états fluides entre deux instants de couplage qui soit plus proche de la réalité et qui ne s'appuie pas sur une simple interpolation temporelle qui, physiquement, ne se justifie pas. Cette méthode a été testée sur le cas test de la plaque plane utilisé jusqu'à présent, puis validée sur un cas test à forte interaction thermique. Une validation ultérieure a été réalisée sur un cas test où l'instationnarité vient des conditions de fonctionnement de l'écoulement fluide et non plus d'une paroi du solide.

8.2.1 Développement de la prédiction flux-température

Une prédiction linéaire en temps est acceptable lorsque les instants de couplage sont rapprochés. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, la prédiction linéaire en temps n'est plus pertinente et n'est pas justifiée physiquement. Au contraire, la loi de refroidissement de Newton stipule que le flux de chaleur est directement proportionnel à la différence de température entre le solide et le milieu qui l'entoure. Elle est décrite par la relation suivante :

$$q = h (T - T_{ref}) \quad (8.5)$$

où h est le coefficient d'échange thermique, T la température de l'interface solide et T_{ref} une température de référence, typiquement la température caractéristique du fluide loin de la paroi.

Cependant, la relation (8.5) est valide seulement sous certaines conditions qui ne sont pas respectées dans la plupart des cas. En effet, elle présuppose que les deux milieux fluide et solide sont homogènes, ainsi que le milieu fluide est à température constante T_{ref} et la différence de température $(T - T_{ref})$ est petite (Davidzon, 2012). De plus, h dépend des conditions aux limites et des propriétés thermiques du solide (Degiovanni et Remy, 2016).

Sur la base de l'Équation (8.5) et en supposant que la température du fluide T_{ref} ne change pas au cours du temps, on peut écrire la relation linéaire flux-température suivante :

$$q(T(t)) = q(T(t_1)) + \frac{q(T(t_2)) - q(T(t_1))}{T(t_2) - T(t_1)} (T(t) - T(t_1)) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (8.6)$$

Afin de simplifier la notation, $T(t_x)$ sera indiquée par la suite avec T_x , aussi bien que $q(T(t_x)) \Rightarrow q_x$ et $T_{ref}(t_x) \Rightarrow T_{ref_x}$, où $x = \{1, 2\}$.

Dans le cas où la température du fluide T_{ref} varie au cours du temps ($T_{ref}(t)$), la prédiction linéaire flux-température s'écrit comme suit :

$$q(T(t)) = \frac{(q_2 - q_1)[T(t) - T_{ref}(t)] + (T_2 - T_{ref_2})q_1 - (T_1 - T_{ref_1})q_2}{T_2 - T_{ref_2} + T_{ref_1} - T_1} \quad (8.7)$$

Cette nouvelle méthode sera indiquée par la suite par DR3. Elle est caractérisée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \hat{q}_s^n + \alpha_f^{n-1} \hat{T}_s^n = -inter_T(q_f^{n-1}) + \alpha_f^{n-1} T_s^{n-1} & \text{on } \Gamma_s \text{ at } t_k \\ \hat{T}_f^n = T_s^n & \text{on } \Gamma_f \text{ at } t_c \end{cases} \quad (8.8)$$

où $inter_T(q_f^{n-1})$ indique la prédiction flux-température décrite par (8.6) ou par (8.7).

8.2.2 Validation de la méthode DR3 en comparant les résultats obtenus avec la solution de référence

Dans ce paragraphe, la méthode DR3 est validée en comparant les résultats obtenus avec la solution de référence sur le cas test précédemment utilisé et décrit dans la section 7.2.1. Une comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode DR2 est également réalisée. Les graphiques sur la Figure 8.8 présentent cette comparaison.

Concernant la température (cf. Figure 8.8a), les profils calculés par les méthodes DR2 et DR3 sont superposés. Cependant, en agrandissant la vue (cf. Figure 8.8b), on n'observe pas un écart entre la courbe DR3 et la solution de référence (DR0), ce qui n'est pas le cas pour la courbe DR2. Ainsi, l'écart relatif entre les courbe DR3 et DR0 est infime (0,0008%).

La Figure 8.8c montre la comparaison en termes de flux de chaleur. Le profil de flux de chaleur calculé par la méthode DR3 est superposé à la solution de référence. L'écart relatif est à nouveau infime (0,16%).

Le Tableau 8.1 résume les résultats de cette comparaison en termes d'erreur relative sur la précision. La méthode DR3 basée sur une prédiction linéaire flux-température permet d'améliorer la précision de deux ordres de grandeur sur l'évolution de la température et du flux de chaleur. En effet, elle réussit à capturer fidèlement la non-linéarité du flux de chaleur. Cependant, elle est moins robuste que la méthode DR2. Les dénominateurs de la prédiction flux-température (cf. Équations (8.6) et (8.7)) peuvent effectivement s'annuler si les températures aux instants de couplage sont similaires ($T_2 \simeq T_1$), contrairement à la prédiction linéaire en temps utilisée dans la méthode DR2 où le temps est toujours une fonction croissante ($t_2 > t_1$). Un dénominateur nul ou très petit entraîne un calcul du flux de chaleur infini ou très grand qui déstabilisera le problème couplé. Afin d'éviter que cela ne se produise, un critère sur le dénominateur a été établi qui déclenche l'utilisation de la méthode DR2 : le résultat est moins précis mais on garantit au moins la stabilité.

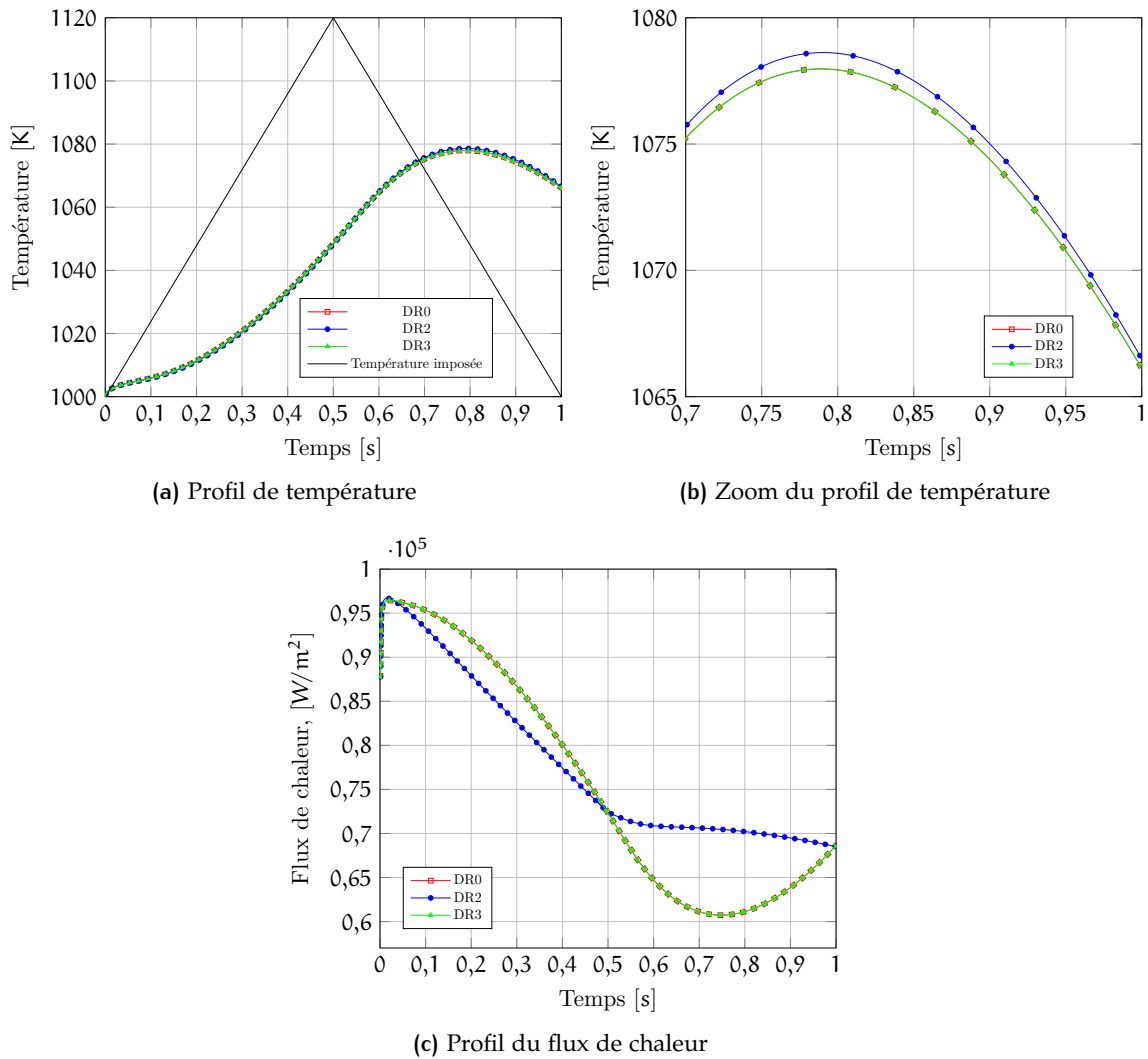


FIGURE 8.8 – Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface.

Méthode	Température	Flux de chaleur
DR2	0.06%	16.1%
DR3	0.0008%	0.16%

TABLEAU 8.1 – Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3

8.2.3 Validation de la méthode DR3 sur un cas test à forte interaction thermique

Dans ce paragraphe, la méthode DR3 est testée afin de vérifier que cette méthode réussit à résoudre le régime transitoire lorsque les interactions thermiques sont fortes. Les résultats obtenus avec la méthode DR3 sont comparés avec la solution de référence et également avec les résultats obtenus en utilisant la méthode DR2.

8.2.3.1 Description du cas test

Le cas test utilisé est similaire à celui décrit à la section 7.2.1 et utilisé jusqu'à présent. Le maillage solide est le maillage raffiné ($\Delta y_s = 2,7 \cdot 10^{-5}$ m) traité dans la section 8.1.3. Afin de modifier l'interaction thermique, les propriétés thermiques du problème solide ont été changées. Ces dernières sont résumées dans le Tableau 8.2. Pour ce cas test le nombre de Biot Bi s'élève à 3, ce qui le classifie comme un cas test à forte interaction thermique.

k [W/(mK)]	ρC_p [J/(Km ³)]	Δy_s [m]	Δt_s [s]	D_s	Bi
0,5	$1,36 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	0,5	3

TABLEAU 8.2 – Paramètres caractérisant le problème à forte interaction thermique

8.2.3.2 Comparaison des résultats avec la solution de référence

Les graphiques de la Figure 8.9 présentent les résultats obtenus avec les méthodes DR2 et DR3 en les comparant avec la solution de référence. La solution de référence a été cette fois obtenue en couplant les problèmes fluide et solide à tous les pas de temps solides.

En observant les profils de température (cf. Figure 8.9a), un écart entre les courbes DR2 et DR0 émerge (erreur relative de 0.41%, correspondant à une erreur absolue de 4.3 K) alors que la courbe DR3 reproduit fidèlement la solution de référence. L'écart entre ces deux courbes est infime (0.006%) et n'est pas visible sur la vue agrandie de Figure 8.9b.

Concernant le profil de flux de chaleur, la précision de la méthode DR3 est encore plus remarquable. En effet, la méthode DR2 ne parvient pas à calculer le flux de chaleur exact alors que ce dernier est quasi-linéaire (en excluant les premières fractions de seconde où

Méthode	Température	Flux de chaleur
DR2	0.41%	10.8%
DR3	0.006%	0.05%

TABLEAU 8.3 – Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 pour le cas test à forte interaction thermique

l'effet transitoire est trop important). Au contraire, la méthode DR3 calcule un flux de chaleur qui diffère de la solution de référence de 0,05% seulement en erreur relative. Par ailleurs, le profil du flux de chaleur calculé par la méthode DR2 présente une cassure brutale à $t = 0,5$ s qui, cette fois-ci, se répercute également sur le profil de température comme la Figure 8.8a le montre. En effet, l'imposition d'un flux de chaleur linéaire en temps n'assure pas la dérivabilité de ce dernier aux points de couplage.

Le Tableau 8.1 résume les résultats de la comparaison réalisée pour ce cas test en termes d'erreur relative sur la précision. Dans ce cas également, la méthode DR3 permet d'améliorer la précision sur le calcul de la température d'environ deux ordres de grandeur et de plus de deux ordres de grandeur sur l'évaluation du flux de chaleur.

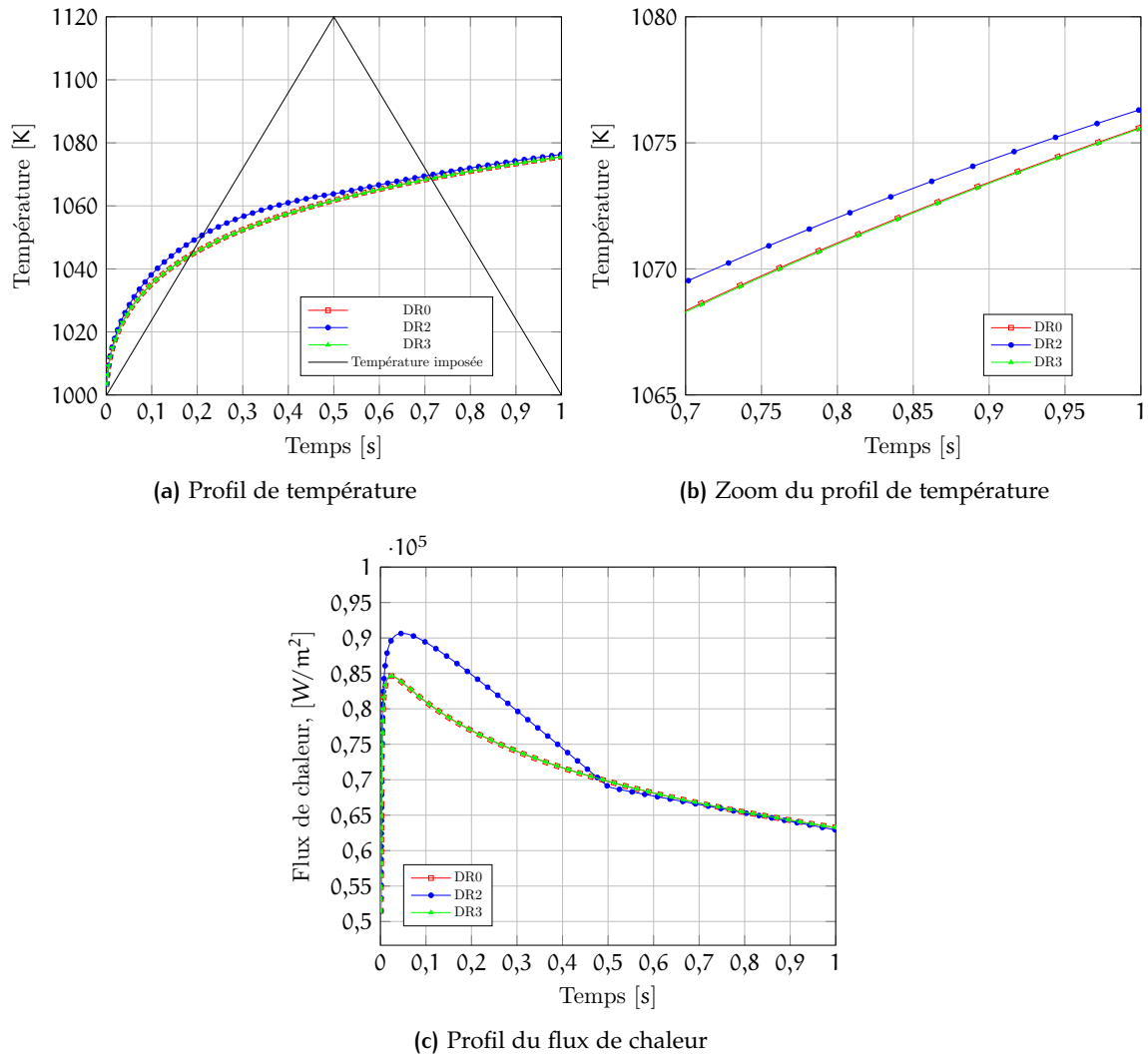


FIGURE 8.9 – Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface pour le cas test à forte interaction thermique.

8.2.4 Validation de la méthode DR3 sur un cas test où l'instationnarité provient du changement de la condition d'injection de l'écoulement fluide

Dans cette sous-section, la méthode DR3 est testée sur le cas test de la plaque plane où, cette fois-ci, l'instationnarité du problème thermique est engendrée par le changement de la condition d'injection de l'écoulement fluide. L'objectif est de valider la prédiction flux-température utilisée par la méthode DR3 dans le cas où la température de référence du fluide T_{ref} varie au cours du temps.

8.2.4.1 Description du cas test

La géométrie et les maillages du cas test précédent (cf. section 8.2.3) ont été réutilisés pour cette validation. Le cas test est illustré sur la Figure 8.10.

Une température constante de 1000 K est imposée le long de la surface inférieure du domaine solide. Des profils de température et vitesse variant en temps sont appliqués à l'injection du domaine fluide. Ils sont présentés sur la Figure 8.11. Quatre points de fonctionnement du système ont été choisis :

- $t = 0$ s : $T_{\infty} = 1000$ K et $V_{\infty} = 100$ m/s ;
- $t = 0,6$ s : $T_{\infty} = 1200$ K et $V_{\infty} = 120$ m/s ;
- $t = 0,9$ s : $T_{\infty} = 1200$ K et $V_{\infty} = 120$ m/s ;
- $t = 3$ s : $T_{\infty} = 1100$ K et $V_{\infty} = 110$ m/s.

Ces points de fonctionnement coïncident avec les instants de couplage où les problèmes fluide et solide sont couplés dans les calculs utilisant les méthodes DR2 et DR3. Entre ces points de fonctionnement la variation temporelle des conditions de fonctionnement entre les instants de couplage est considérée comme linéaire. Cette hypothèse est utilisée pour la réalisation du calcul de référence et pour la variation de la température de référence T_{ref} lorsque la prédiction linéaire flux-température (cf. Équation (8.7)) de la méthode DR3 est employée.

Les principaux paramètres caractérisant le problème thermique sont indiqués dans le Tableau 8.4. Les valeurs des paramètres thermiques choisies élèvent le nombre de Biot à 17,1. Il s'agit donc d'un calcul à forte interaction thermique.

k [W/(mK)]	ρC_p [J/(Km ³)]	Δy_s [m]	Δt_s [s]	D_s	Bi
0,1	$1,7 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	0,48	17,1

TABLEAU 8.4 – Paramètres caractérisant le problème à forte interaction thermique

8.2.4.2 Comparaison des résultats avec la solution de référence

Les graphiques sur la Figure 8.12 montrent la comparaison des résultats obtenus en utilisant les méthodes DR2 et DR3 avec la solution de référence DR0.

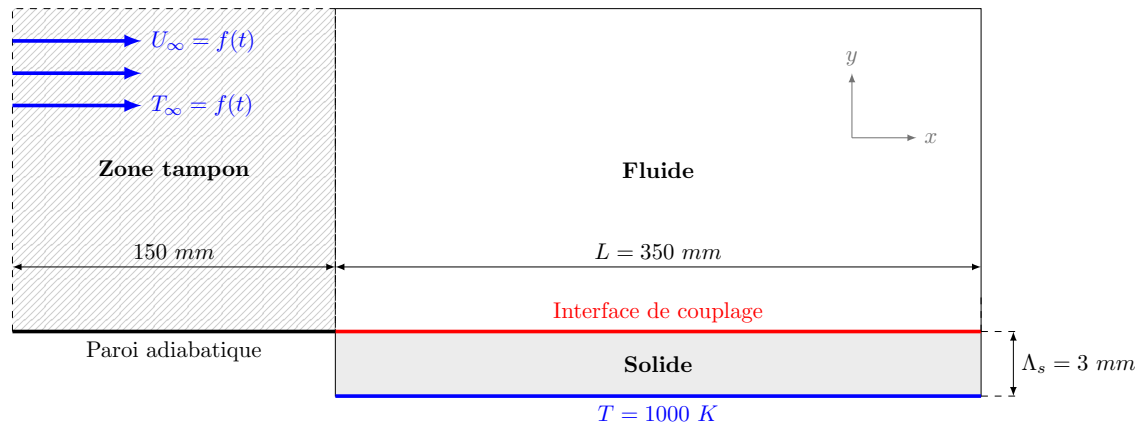


FIGURE 8.10 – Schématisation du cas test de la plaque plane. La température et la vitesse caractérisant l'injection de l'écoulement fluide évoluent dans le temps.

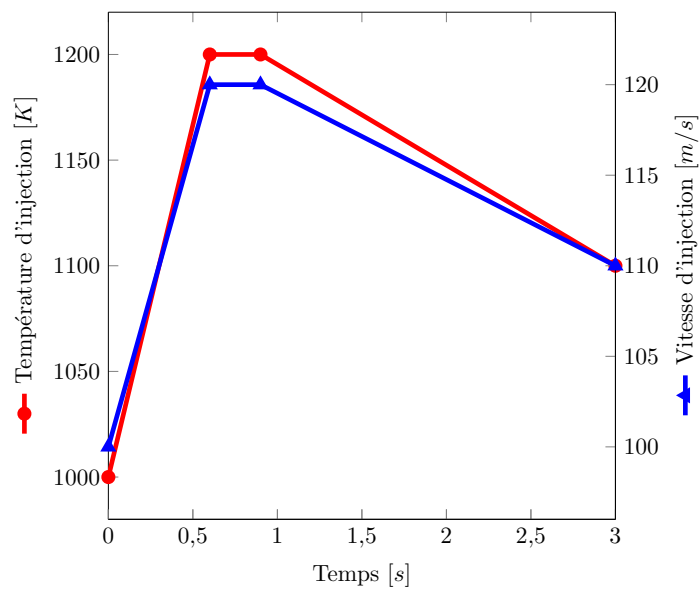


FIGURE 8.11 – Variation temporelle de la température et de la vitesse imposées dans la condition d'injection du domaine fluide.

Méthode	Température	Flux de chaleur
DR2	1,21%	35.65%
DR3	0.36%	19.65%

TABLEAU 8.5 – Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 pour le cas test où l’instationnarité vient de la condition d’injection.

Concernant l’évolution de la température (cf. Figure 8.9a), les trois profils sont similaires jusqu’au troisième point de fonctionnement ($t = 0,9$ s). À partir de cet instant, le profil de température calculé par la méthode DR2 s’éloigne de la solution de référence, alors que le profil de référence et celui calculé par la méthode DR3 restent superposés. L’écart entre les courbes DR2 et DR0 est de 1,21% en erreur relative qui correspond à un écart absolu de 13,5 K. L’écart relatif entre les courbes DR3 et DR0 est de 0,36% (3,8 K).

Un comportement similaire se vérifie sur le calcul du flux de chaleur comme la Figure 8.12b le montre. L’écart entre le profil du flux de chaleur calculé avec la méthode DR2 et la solution de référence augmente à partir de $t = 0,9$ s, alors que celui entre DR3 et DR0 reste faible. En effet, la méthode DR2 donne une solution satisfaisante dans la première partie du calcul car le profil de référence du flux de chaleur est quasi-linéaire. Au contraire, dans la deuxième partie du calcul où la non-linéarité du profil du flux de chaleur est plus marquée, la méthode DR2 s’éloigne de la solution de référence, alors que la méthode DR3 réussit à bien capturer cette non-linéarité.

En zoomant le graphique du flux de chaleur vers la première partie du calcul (cf. Figure 8.12c), les profils calculés par les deux méthodes ne sont pas superposés avec la solution de référence. En effet, la méthode DR3 surestime le flux de chaleur, alors que la méthode DR2 le sous-estime. Cela montre les limites de la méthode DR3 lorsque la température de référence n’est pas aisément accessible. Dans cette partie du calcul, la variation de T_{ref} est considérable (200 K en 0,6 s).

Le Tableau 8.5 résume les résultats de la comparaison réalisée pour ce cas test en terme d’erreur relative sur la précision. La méthode DR3 permet d’améliorer la précision sur la température d’au moins un ordre de grandeur, tandis que la précision est deux fois meilleure sur le flux de chaleur. Ce gain limité de la méthode DR3 sur la méthode DR2 est dû à la variation de la température du fluide au cours du temps qui remet en cause l’utilisation de la prédiction linéaire flux-température basée sur la loi de refroidissement de Newton.

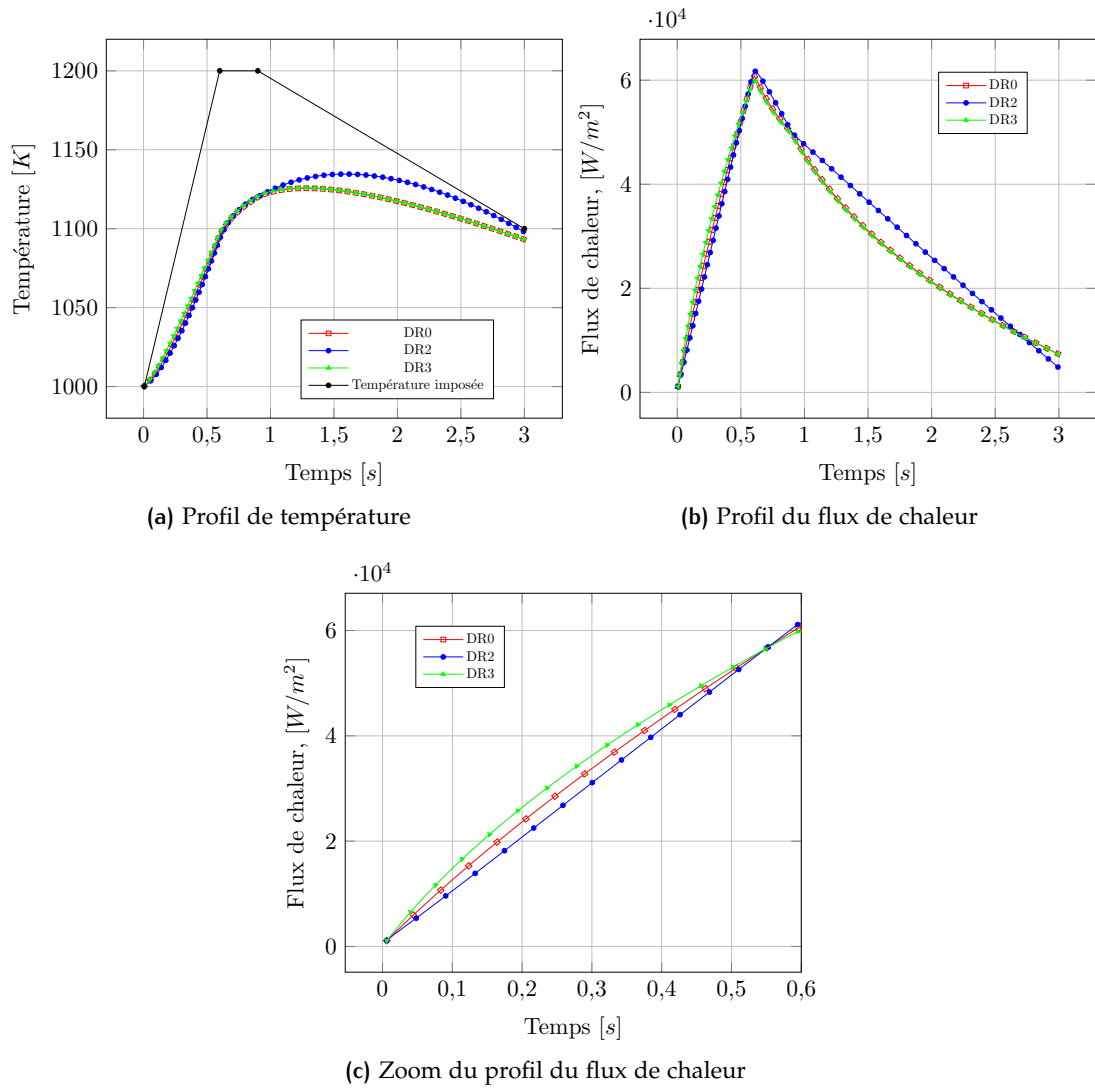


FIGURE 8.12 – Comparaison entre les résultats obtenus avec la méthode DR3 et avec la méthode DR2 et la solution de référence DR0 au bord d'attaque de l'interface pour le cas test où l'instationnarité vient de la condition d'injection.

8.3 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, la précision des différentes méthodes de prédiction a été analysée en la comparant à une solution de référence.

Les principales caractéristiques de chaque méthode étudiée sont résumées dans le Tableau 8.6.

La méthode DR0 est utilisée afin de produire la solution de référence. Elle couple les problèmes fluide et solide à chaque itération solide via l'algorithme instationnaire-instationnaire, ce qui élimine la nécessité de prédire les états fluides et le besoin de mettre en œuvre une méthode itérative. En effet, l'utilisation de la méthode de couplage Dirichlet-Neumann et d'une très petite période de couplage assure le respect du critère CFT (Continuité Flux-Température) à l'interface.

La méthode DR1 est la méthode classique de prédiction utilisée dans la littérature lorsque le régime transitoire aérothermique est résolu à l'aide de l'algorithme quasi-instationnaire. Cet algorithme emploie une prédiction linéaire en temps du flux de chaleur et de la température provenant du solveur fluide. Cette combinaison engendre une dépendance de la solution ($T_s(t)$ et $q_s(t)$) à la valeur du coefficient de couplage α_f (cf. Chapitre 7).

La méthode DR2 a été développée afin de supprimer la dépendance au coefficient de couplage. Cette méthode se base sur l'utilisation du profil de température calculé par le solveur solide à l'itération de couplage précédente au lieu d'employer une prédiction linéaire en temps de la température fluide. De plus, afin de réduire davantage cette dépendance, il faut faire attention à appliquer la quadrature de Gauss aux valeurs aux points de Gauss et non aux centres des éléments, pratique commune dans le couplage fluide-structure. Ainsi, la méthode DR2 ne présente pas une dépendance de la solution au coefficient de couplage mais elle est inexacte car elle ne parvient pas à capturer la non-linéarité du flux de chaleur.

La méthode DR3 a donc été développée afin d'améliorer la précision dans la prédiction du flux de chaleur fluide. Cette méthode se base sur une prédiction linéaire flux-température mise en place à partir de la loi de refroidissement de Newton. La méthode DR3 réussit à améliorer notablement la précision dans la résolution du régime transitoire des problèmes couplés aérothermiques. Cependant, cette méthode est moins robuste que la méthode DR2 lorsque les températures aux deux instants de couplage sont proches, ce qui peut déstabiliser le problème couplé.

La méthode DR3 a été étudiée et comparée avec la méthode DR2 sur trois cas test : deux caractérisés par la provenance de l'instationnarité d'une surface du domaine solide et un caractérisé par l'instationnarité provenant de l'injection de l'écoulement. Sur les premiers deux cas test, la méthode DR3 a donné des résultats d'au moins deux ordres de grandeur plus précis que la méthode DR2. Sur le troisième cas test, la méthode DR3 fournit également des résultats plus précis que la méthode DR2. Cependant, dans ce cas,

Méthode	Δt_c	Sous- itérations	q_f	T_f	Méthode à l'interface
DR0	Δt_s	Non	q_f	-	Dirichlet- Neumann
DR1	Δt_c	Oui	$inter_t(q_f)$	$inter_t(T_f)$	Dirichlet- Robin
DR2	Δt_c	Oui	$inter_t(q_f)$	T_s	Dirichlet- Robin
DR3	Δt_c	Oui	$inter_T(q_f)$	T_s	Dirichlet- Robin

TABLEAU 8.6 – Résumé des principales caractéristiques des méthodes de prédiction étudiées

le gain en précision est limité par l'omission de la condition ($T_{ref} = \text{const}$) requise par la loi de refroidissement de Newton sur laquelle la prédiction linéaire flux-température de la méthode DR3 se base.

9

COUPLAGE AÉROTHERMIQUE TRANSITOIRE SUR DES CONFIGURATIONS QUASI-INDUSTRIELLES

Dans ce chapitre, la méthode de résolution des problèmes couplés aérothermiques en régime transitoire, développée dans le chapitre 7 puis améliorée au chapitre 8, est testée sur des configurations quasi-industrielles. Dans la littérature plusieurs études du régime transitoire de disques de turbine ou de compresseur aéronautiques au cours d'un vol complet ont été réalisées (Sun, Chew, Hills, Volkov et al., 2010 ; Ganine, Javiya et al., 2012 ; Sun, Chew, Hills, Lewis et al., 2012). La plupart de ces études ont montré la nécessité de coupler les problèmes fluide et solide sur une période de temps faible (typiquement le temps caractéristique du solide) afin de calculer avec une précision acceptable le régime transitoire.

L'objectif de ce chapitre est de vérifier si la méthode développée pendant cette thèse présente autant de précision sur des configurations plus complexes par rapport au cas académique de la plaque plane analysé jusqu'à présent. En particulier, nous voulons vérifier si l'utilisation d'une meilleure prédiction des états fluides (méthode DR3 introduite dans le chapitre 8), permet de réduire le nombre d'instantanés de couplage nécessaire pour atteindre une solution suffisamment précise.

La première configuration quasi-industrielle est celle d'un disque de turbine haute-pression (HP) refroidi par un écoulement d'air (cf. Section 9.1). La Section 9.2 est dédiée à la validation de la méthode de couplage sur un circuit de refroidissement d'un tambour de compresseur axial à haute pression chauffé au niveau du carter extérieur.

9.1 VALIDATION SUR UN CAS DE DISQUE DE TURBINE AÉRO- NAUTIQUE HP REFROIDI PAR UN ÉCOULEMENT D'AIR

Cette section est dédiée à la validation de la méthode DR3 sur un cas test quasi-industriel. Il s'agit d'un disque de turbine HP refroidi par un écoulement d'air pendant environ 30 minutes (1700 s). Dans ce système, la présence d'un circuit de refroidissement est essentiel afin de limiter la diffusion dans le disque d'une quantité considérable de chaleur provenant des aubes en contact avec le circuit primaire du moteur. Les aubes de turbine de nouvelle génération sont composées d'un superalliage à base de nickel et revêtues d'une barrière thermique comme la zircone : elles sont donc très résistantes aux

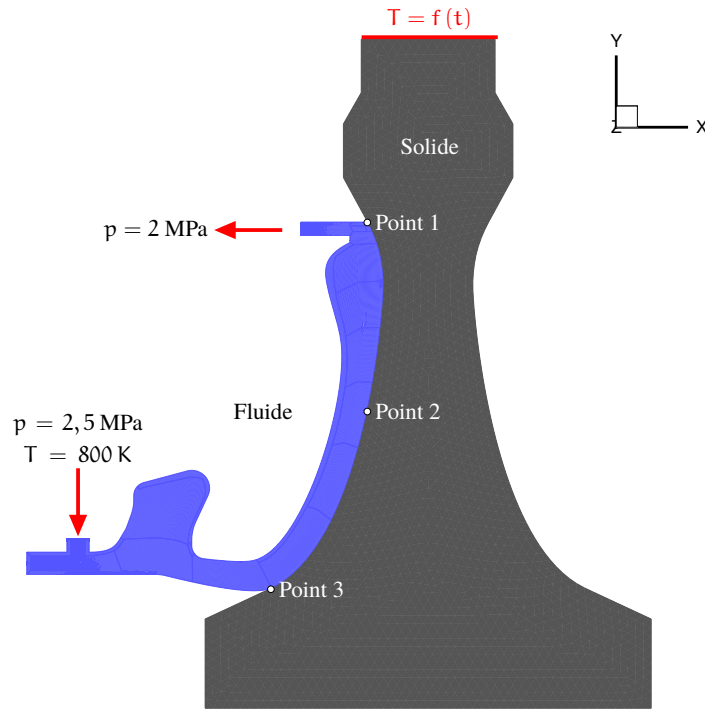


FIGURE 9.1 – Schéma du cas test du disque de turbine HP. La température imposée à la surface supérieure du domaine solide évolue dans le temps.

hautes températures ($T \approx 1800$ K). De plus, elles sont généralement refroidies par de l'air froid qui circule dans de petits canaux internes. En revanche, le disque de turbine sous-adjacent est moins protégé thermiquement et généralement fabriqué en titane ou en superalliage moins résistant afin de réduire son coût de production.

9.1.1 Description du cas test

Le cas test est présenté sur la Figure 9.1. L'écoulement fluide est représenté en bleu et le domaine solide en gris. Cette configuration a déjà été utilisée à l'ONERA dans le cadre d'une collaboration avec l'entreprise Andheo. Cependant, les maillages ont été modifiés car ils ne répondaient pas aux critères requis par la méthode de couplage. En particulier, le maillages fluide a été raffiné près des parois ($\Delta y_f = 1,6 \cdot 10^{-5}$) pour atteindre une taille de la première maille fluide satisfaisante ($y^+ \approx 1$).

Le problème fluide a été traité via une résolution antisymétrique. Une différence de pression égal à 0,5 MPa a été imposée entre l'entrée et la sortie de l'écoulement fluide. Ce dernier est injecté dans le système à la température de 800 K. Ces conditions de fonctionnement engendrent un nombre de Mach qui varie entre 0 et 0,65 comme le montre la Figure 9.2. Le nombre de Reynolds caractérisant le cas test est égal à $2,3 \cdot 10^4$.

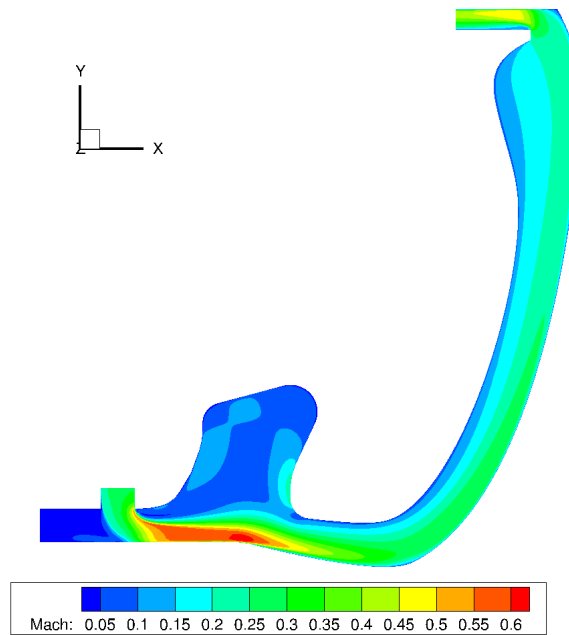


FIGURE 9.2 – Champ du nombre de Mach dans le domaine fluide.

Le domaine solide est composé d'un maillage non structuré avec une taille de maille à l'interface d'environ 0,001 m. La conductivité thermique du solide vaut 13,6 W/(mK) et la capacité thermique volumique est égale à $1,36 \cdot 10^6$ J/(Km³). Ces valeurs rentrent dans la plage des propriétés thermiques d'un superalliage.

Sur la surface supérieure du disque (cf. Figure 9.1), un profil de température qui varie au cours du temps est imposé. Ce profil est représenté sur la Figure 9.3. Sur cette figure, les 11 points de fonctionnement sont indiqués par des petits cercles. Entre ces instants, la température varie linéairement en temps. Le profil de température présente un large éventail de fonctionnement du système thermique, allant de rampes raides croissantes et décroissantes de température (régimes de décollage et d'atterrissage) à des longues périodes où la température est maintenue constante (plateaux représentant un régime de croisière).

Le Tableau 9.1 résume les principaux paramètres caractérisant le cas test. Le pas de temps utilisé pour l'intégration temporelle de la diffusion solide ($\Delta t_s = 0,001$ s) a été calculé en imposant le nombre de Fourier égal à 50. Le nombre de Biot caractérisant l'interaction thermique est de 2,5, il s'agit alors d'une interaction modérée-forte.

Le critère de convergence choisi pour ce cas test est le suivant :

$$\Delta T_s < \epsilon \quad \epsilon = 0,1 \text{ K} \quad (9.1)$$

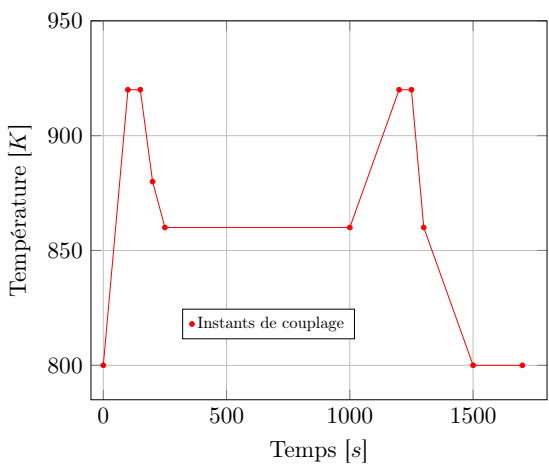


FIGURE 9.3 – Variation temporelle de la température imposée à la surface supérieure du disque. Les instants de couplage sont représentés par des petits cercles.

k [W/(mK)]	ρC_p [J/(Km ³)]	Δy_s [m]	Δt_s [s]	D_s	Bi
13,6	$1,36 \cdot 10^6$	0,001	5	50	2,5

TABLEAU 9.1 – Paramètres caractérisant le problème thermique pour le cas du disque de turbine HP

9.1.2 Validation de la méthode de couplage

Les méthodes présentées dans le chapitre 7 et améliorées dans le chapitre 8 sont testées dans cette section sur le disque de turbine HP présenté dans le paragraphe précédent. L'évolution de la température est étudiée aux trois points de l'interface fluide-structure indiqués sur la Figure 9.1.

9.1.2.1 Solution de référence

Afin de valider les calculs il est nécessaire de comparer les résultats obtenus avec une solution de référence. Cependant, nous n'avons pas pu calculer cette solution de référence via un algorithme instationnaire-instationnaire comme nous l'avons fait dans les chapitres 7 et 8 à cause du temps de calcul considérable nécessaire pour la réaliser. À cela s'ajoute le temps limité de calcul permis par le calculateur et l'absence d'un système fiable de reprise des calculs couplés. Ainsi, en l'absence d'une solution de référence nous avons opté pour la réalisation d'une quasi solution de référence obtenue en couplant le plus souvent possible les problèmes fluide et solide via l'algorithme quasi-instationnaire associé à la méthode DR3. En effet, cette méthode s'est avérée très précise pour le calcul de l'évolution de la charge thermique lorsque des périodes de couplage Δt_c faibles sont

utilisées. Dans la section 8.2 une période de couplage égale à 0,5 s a été employée, ce qui correspond à un nombre de Fourier de 250.

Dans un premier temps nous avons utilisé une période de couplage égale à 1 s. En une semaine de calcul (temps maximal à disposition), cette simulation a permis de simuler seulement 950 secondes sur les 1700 secondes requises. Afin de terminer le calcul de la solution de référence (1700 secondes), la période de couplage a été augmenté à 10 s.

Les graphiques de la Figure 9.4 comparent l'évolution de la température obtenue par les deux calculs aux trois points de l'interface (cf. Figure 9.1). Les courbes sont superposées pour chacun des points étudiés. Le Tableau 9.2 montre l'erreur relative entre les deux courbes. L'erreur maximale n'est que de 0,008% et se produit au Point 2.

Ce résultat nous permet d'accepter la solution obtenue avec la période de couplage de 10 s comme solution de référence. Les temps de calcul que nous venons de mentionner montrent l'impossibilité de réaliser des calculs transitoires sur une longue période de temps si l'on dispose pas d'un algorithme fiable et d'une stratégie adéquate. Insistons également sur le fait que cette solution de référence a été calculée via l'algorithme quasi-stationnaire. En particulier, nous soulignons le fait que ce dernier néglige l'effet du régime transitoire de l'écoulement fluide sur le calcul de l'évolution temporelle de la charge thermique dans le solide.

Point	Erreur relative
Point 1	0,004%
Point 2	0.008%
Point 3	0,004%

TABLEAU 9.2 – Erreur relative entre les deux profils de température obtenus avec des périodes de couplage égales à 1 s et 10 s.

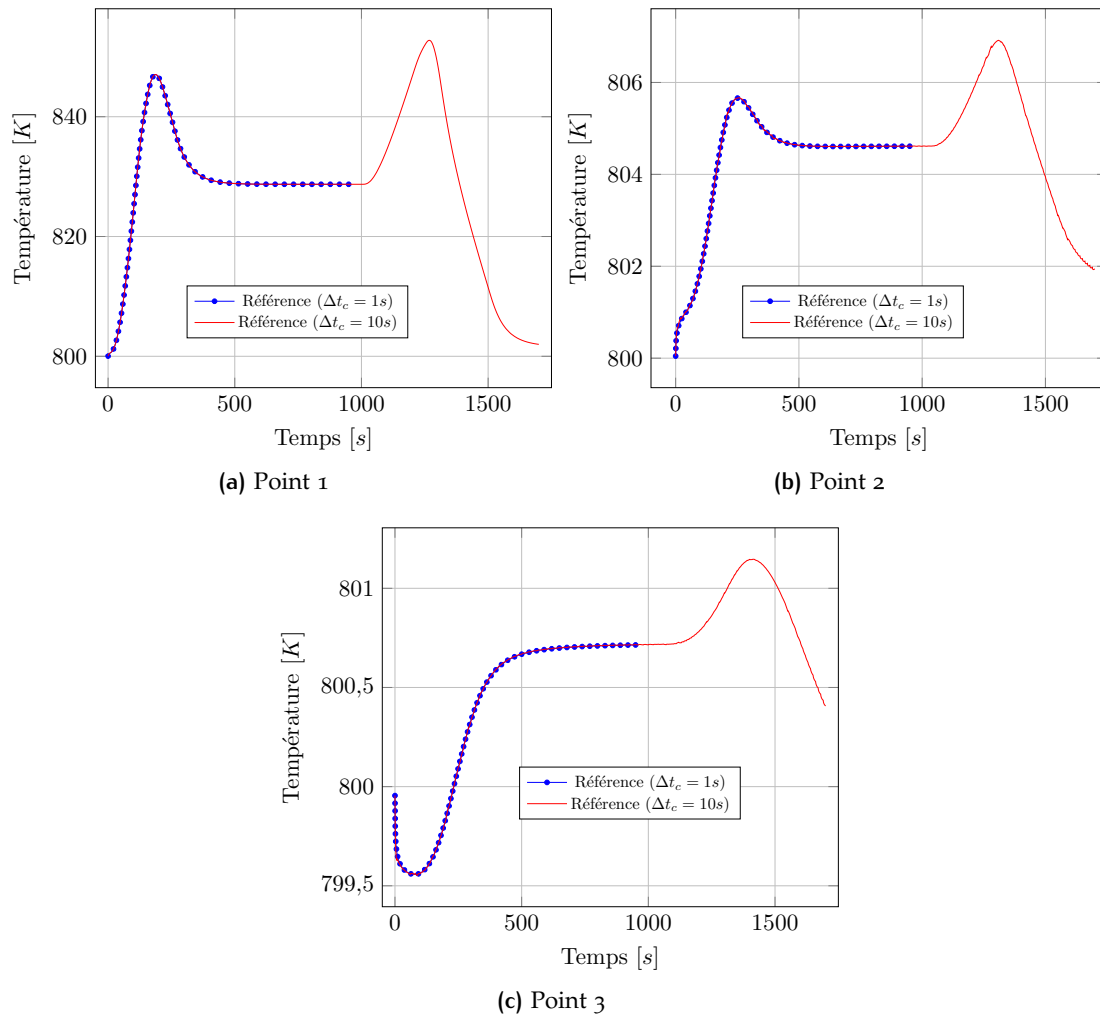


FIGURE 9.4 – Comparaison des profils de température obtenus avec des périodes de couplage égales à 1 s et 10 s.

9.1.2.2 Comparaison des résultats obtenus par la méthode avec la solution de référence

Les graphiques de la Figure 9.5 montrent la comparaison des profils de température calculés par les méthodes DR2 et DR3 avec la solution de référence présentée dans le paragraphe précédent. Le comportement des deux méthodes est différent suivant le point de l'interface étudié.

Au Point 1 (cf. Figure 9.5a) la méthode DR3 réussit à reproduire suffisamment bien le profil de température de référence. Cependant, dans la zone du plateau où la température imposée sur la surface supérieure du disque est constante (entre 250 s et 1000 s) la méthode DR3 s'éloigne de la référence. En effet, cette zone (plateau) est caractérisée par une très longue période de couplage (750 s). La méthode DR2 présente un profil de température encore plus éloigné de la solution de référence, en particulier à hauteur du plateau.

Au contraire, au Point 2 (cf. Figure 9.5b), la méthode DR2 s'avère plus précise que la méthode DR3. Cependant, aucune des deux méthodes ne réussit à calculer une évolution de température similaire à celle de la solution de référence.

Au Point 3 (cf. Figure 9.5c) le comportement est similaire à celui du Point 2. La solution de référence n'est atteinte par aucune des deux méthodes.

Le Tableau 9.3 résume ces résultats en terme d'erreur relative vis-à-vis de la solution de référence. On peut remarquer qu'aux Points 2 et 3 la méthode DR3 est plus précise dans les zones de rampe (variation de la température entre deux instants de couplage, cf. Figure 9.3) alors que la méthode DR2 l'est sur le plateau. Ainsi, nous avons supposé que ce comportement peut être dû au terme de relaxation de la condition de Robin utilisée dans les deux méthodes (cf. Équations (8.3) et (8.8)) qui devient prédominant sur le flux de chaleur. En effet, aux Points 2 et 3, l'échange thermique entre le fluide et le solide est plus faible qu'au Point 1 qui est le plus proche de la source de chaleur (surface supérieure du disque). Afin de vérifier cette supposition, nous avons réduit le critère de convergence de 0,1 K à 0,01 K, ce qui implique une réduction du terme de relaxation d'un ordre de grandeur entraînant une augmentation du temps de calcul.

La Figure 9.6 montre les résultats obtenus aux point 2 et 3 avec ce critère de convergence en les comparant aux résultats précédents et à la solution de référence. Avec un critère de convergence 10 fois plus petit, l'écart entre le profil de température obtenu et la solution

Méthode	Point 1	Point 2	Point 3
DR2	0,55%	0,55%	0,12%
DR3	0,14%	1,21%	0,17%

TABLEAU 9.3 – Erreur relative sur la précision des méthodes DR2 et DR3 aux trois points de l'interface étudiés.

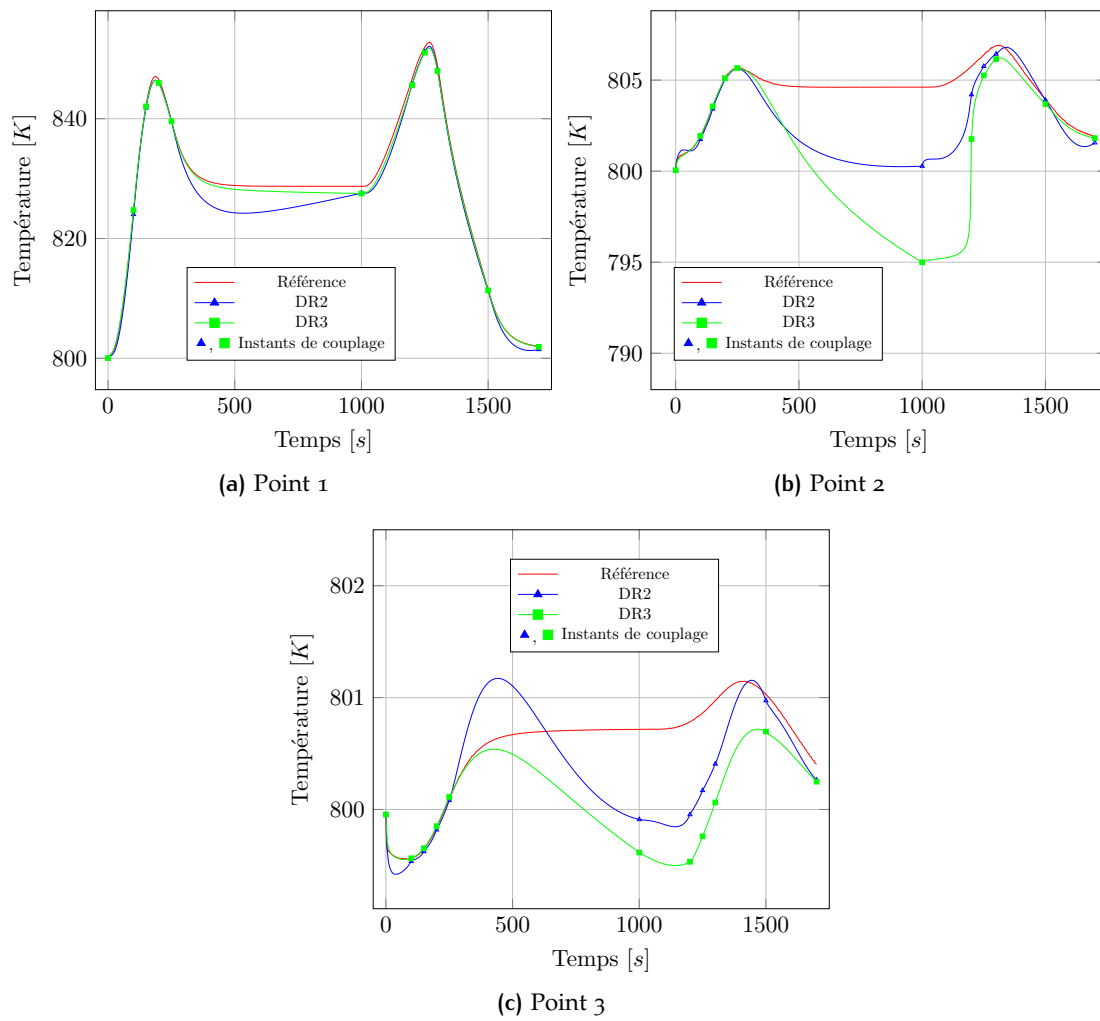


FIGURE 9.5 – Comparaison entre les profils de températures obtenus avec les méthodes DR2 et DR3 et la solution de référence.

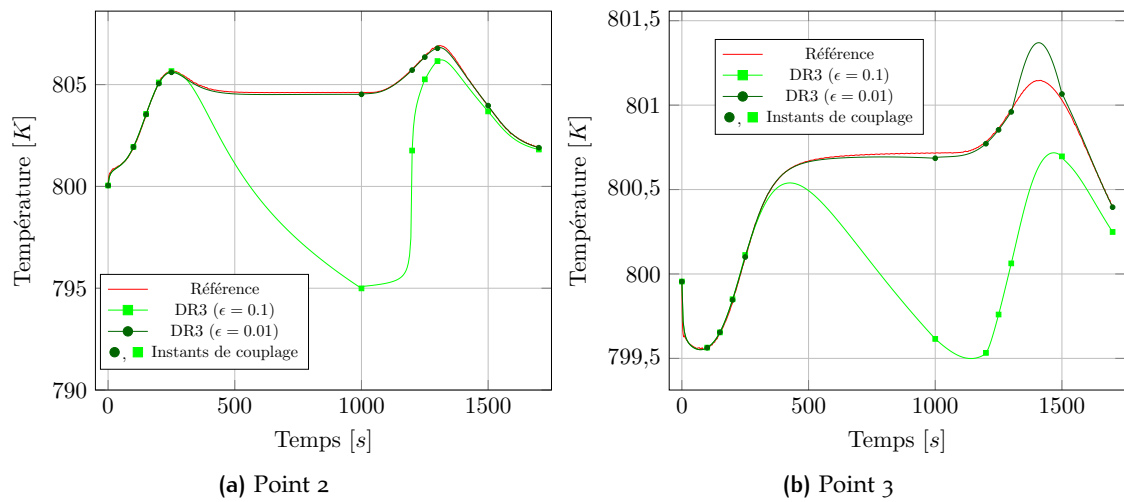


FIGURE 9.6 – Comparaison entre les profils de température obtenus par la méthode DR3 avec deux valeurs du critère de convergence (0,1 K et 0,01 K) et la solution de référence.

Méthode	Critère de convergence ϵ	Point 1	Point 2	Point 3
DR3	0,1 K	0,14%	1,21%	0,17%
DR3	0,01 K	0,07%	0,02%	0,02%

TABLEAU 9.4 – Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux trois points de l'interface étudiés pour deux valeurs du critère de convergence (0,1 K et 0,01 K).

de référence se réduit considérablement, en particulier au Point 2 (cf. Figure 9.6a). Au Point 3 (cf. Figure 9.6b), un comportement étrange se présente sur la deuxième pointe du profil de température (autour de 1400 s). Cependant cette erreur reste modique (0,2 K en erreur absolue).

Le Tableau 9.4 résume ces nouveaux résultats en terme d'erreur relative vis-à-vis de la solution de référence. En réduisant le critère de convergence à 0,01 K, l'erreur relative maximale (0,07%) se situe cette fois-ci au Point 1, ce qui est logique car c'est le point où l'échange thermique est le plus important.

La méthode DR3 s'est avérée suffisamment précise pour le calcul du régime transitoire d'un problème aérothermique, alors que seuls 11 instants sur les 170 instants de couplage de la solution de référence ont été utilisés. Cependant, lorsque l'échange thermique est faible, le terme de relaxation de la condition de Robin peut entraîner des erreurs numériques. Ces erreurs peuvent être limitées en réduisant le critère de convergence, ce qui n'est pas toujours envisageable lorsqu'on traite des problèmes complexes.

Une autre solution possible est d'augmenter les instants de couplage. Cette solution est présentée ci-dessous. Jusqu'à présent, nous avons choisi comme instants de couplage, les instants où un changement de pente du profil de température se vérifie (*points temporelles de cassure*, cf. Figure 9.3). Ici, des instants de couplage supplémentaires sont ajoutés afin d'en étudier l'effet sur la précision.

Dans un premier temps, nous avons placé ces instants de couplage entre deux points temporels de cassure suivant une distribution arbitraire où la période de couplage est calculée comme suit :

$$\Delta t_i = i \cdot 2^i \Delta t_{\min} \quad (9.2)$$

avec i l'index de l'instant de couplage ajouté à l'exception du premier qui est placé à une distance temporelle de $\Delta t_{\min} = 0,05$ s, c'est-à-dire 100 fois plus petit que celui utilisé jusqu'à présent (5 s). Cette période a été calculée en imposant $D_s = 0,5$. Cette relation permet de couvrir un long intervalle de temps avec moins d'instants de couplage tout en assurant de faibles périodes de couplage dans la premier partie de l'intervalle. Le pas de temps de la résolution du régime transitoire solide augmente au fur à mesure que la période de couplage augmente jusqu'à atteindre la limite supérieure de 5 s, correspondant à un nombre de Fourier de 50. Avec l'application de cette distribution, le nombre total d'instants de couplage est 48 au lieu des 11 instants utilisés dans les calculs précédents. Le critère de convergence utilisé reste inchangé (0,1 K).

Les graphiques sur la Figure 9.7 montrent les résultats de cette simulation utilisant la méthode DR3 comparés avec ceux obtenus précédemment (cf. Figure 9.5) et avec la solution de référence. Les profils de température calculés avec 48 instants de couplage sont très similaires à ceux de la solution de référence. L'ajout d'instants de couplage supplémentaires permet ainsi d'obtenir une solution nettement plus précise. Ce choix permet également d'éviter les erreurs survenues aux points 2 et 3 suite au choix d'un critère de convergence élevé (cf. Figures 9.7b et 9.5c). Par ailleurs, le profil de température au Point 2 ne présente pas la pointe de température produite lorsque le critère de convergence est réduit (cf. Figure 9.6b).

Toutefois, l'application de cette distribution arbitraire engendre l'ajout de nombreux instants de couplage dans un intervalle de temps plutôt petit. Dans ce cas particulier, 4 instants de couplage ont été ajoutés à seulement 50 s au-delà des points temporels de cassure. À ce titre, nous avons testé deux autres distributions permettant de réduire le nombre d'instants de couplage :

- Distribution arbitraire décrite par l'Éq. (9.2) avec le premier instant de couplage situé à une distance temporelle plus grande ($\Delta t_{\min} = 50$ s) calculée en imposant $D_s = 500$ (16 instants de couplage);
- Distribution linéaire de raison 2. Le premier instant de couplage est situé à la distance temporelle de 50 s également calculée en imposant $D_s = 500$ (21 instants de couplage).

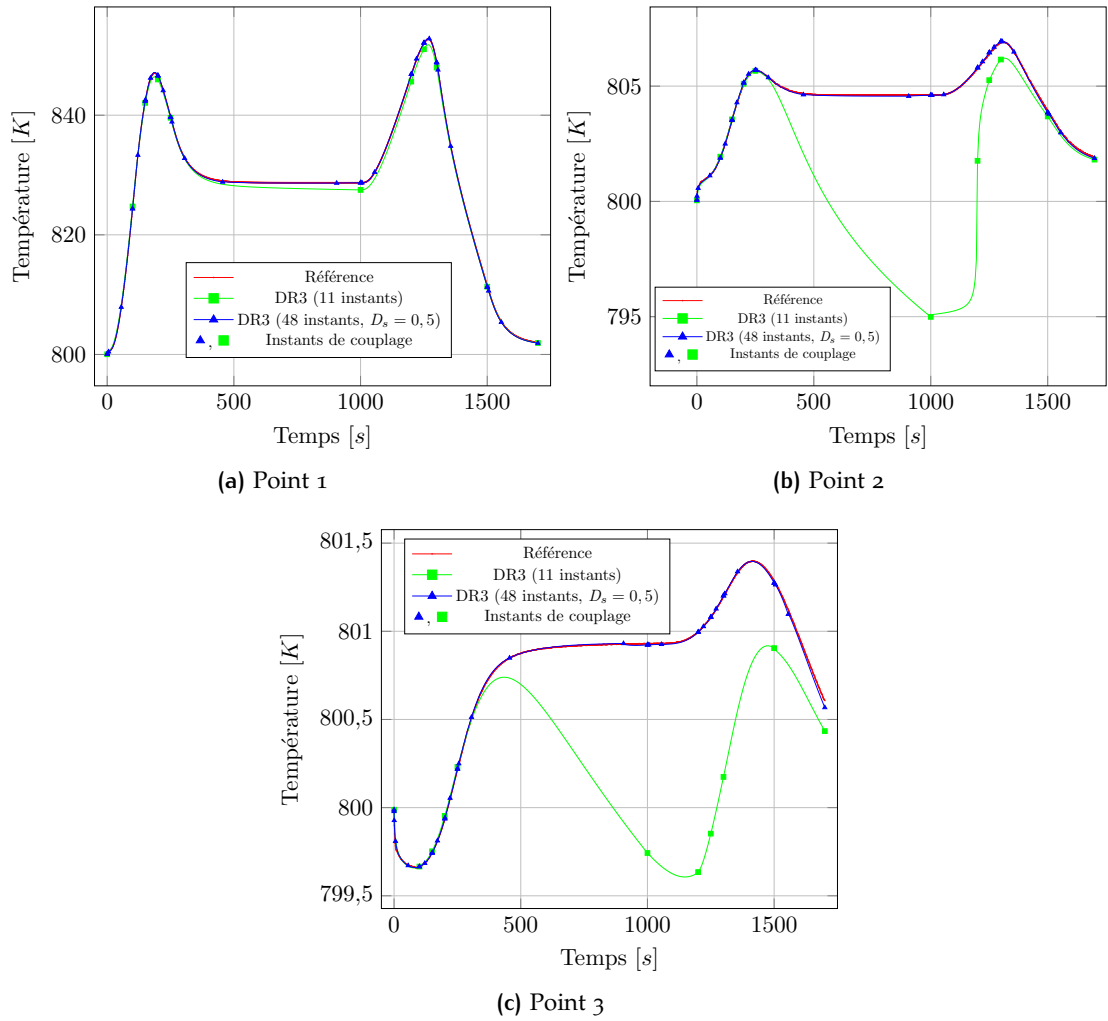


FIGURE 9.7 – Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant 48 et 11 instants de couplage et la solution de référence.

Les graphiques de la Figure 9.8 montrent les profils de température calculés avec ces dernières distributions des instants de couplage en les comparant avec les résultats précédents (11 et 48 instants de couplages) et avec la solution de référence. Ces deux distributions permettent de calculer des profils de température assez précis aux trois points de l'interface étudiés. Au point 3 (cf. Figure 9.8c), l'écart des deux nouveaux profils (16 et 21 instants de couplage) avec la solution de référence est plus remarqué. La distribution arbitraire à 16 instants de couplage sous-estime la température sur le plateau (entre 250 s et 1000 s), alors que la distribution linéaire (21 instants) la surestime. Cependant, cet écart n'est que de 0,1 K, ce qui correspond au critère de convergence utilisé. L'écart est alors acceptable pour le niveau de précision requis.

Afin de comparer les différentes distributions étudiées, la Figure 9.9 présente un zoom sur les profils de température au Point 1 de la Figure 9.8 au niveau du plateau de température. Le profil calculé avec la distribution arbitraire initiale (48 instants de couplage) reste le plus précis. Cependant, la distribution linéaire avec $D_s = 500$ (21 instants) permet d'atteindre une précision suffisante avec moins de la moitié des instants de couplage. Au contraire, la distribution arbitraire avec $D_s = 500$ (16 instants de couplage) ne permet pas d'obtenir le niveau de précision requis. En effet, cette dernière distribution place un seul instant de couplage à 300 s sur le plateau allant de 250 s à 1000 s, ce qui conduit à une précision satisfaisante dans la première partie du plateau mais à un écart croissant dans la deuxième partie. Dans cette zone, la période de couplage est égale à 600 s. Toutefois, l'ajout d'un seul instant de couplage sur le plateau a permis de réduire de plus de la moitié l'écart avec la solution de référence par rapport au profil obtenu sans le point supplémentaire (11 instants de couplage).

Le Tableau 9.5 et la Figure 9.10 résument la comparaison précédente respectivement en termes d'erreur relative et de temps de calcul. Le meilleur niveau de précision est obtenu avec la distribution caractérisée par un nombre majeur d'instants de couplage (48 instants). Le calcul avec la distribution linéaire s'avère deux fois moins précis mais la solution est obtenue 3 heures avant (19 heures de calcul). Ce temps de calcul coïncide avec le temps de calcul nécessaire à la méthode DR3 sans instants de couplage supplémentaires (11 instants). Ainsi, l'ajout de 10 instants de couplage n'a pas impacté le temps de calcul qui est resté environ le même. Par ailleurs, le calcul avec 16 instants de couplage a été plus rapide que le calcul à 11 instants de couplage. Ceci est dû à la convergence plus rapide des processus itératifs liée à une meilleure prédiction des états fluides lorsque la période de couplage est petite. En effet, la Figure 9.11, présentant le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence à chaque instant de couplage, montre que la méthode DR3 sans instants de couplage supplémentaires rencontre plus de difficultés à converger qu'en utilisant plus d'instants de couplage.

En conclusion, la combinaison de l'algorithme quasi-instationnaire avec la méthode DR3 permet d'atteindre une solution suffisamment précise en réduisant d'au moins 63% le temps de calcul par rapport à la solution de référence avec $\Delta t_c = 10$ s et de 93% par rapport à celle avec $\Delta t_c = 1$ s.

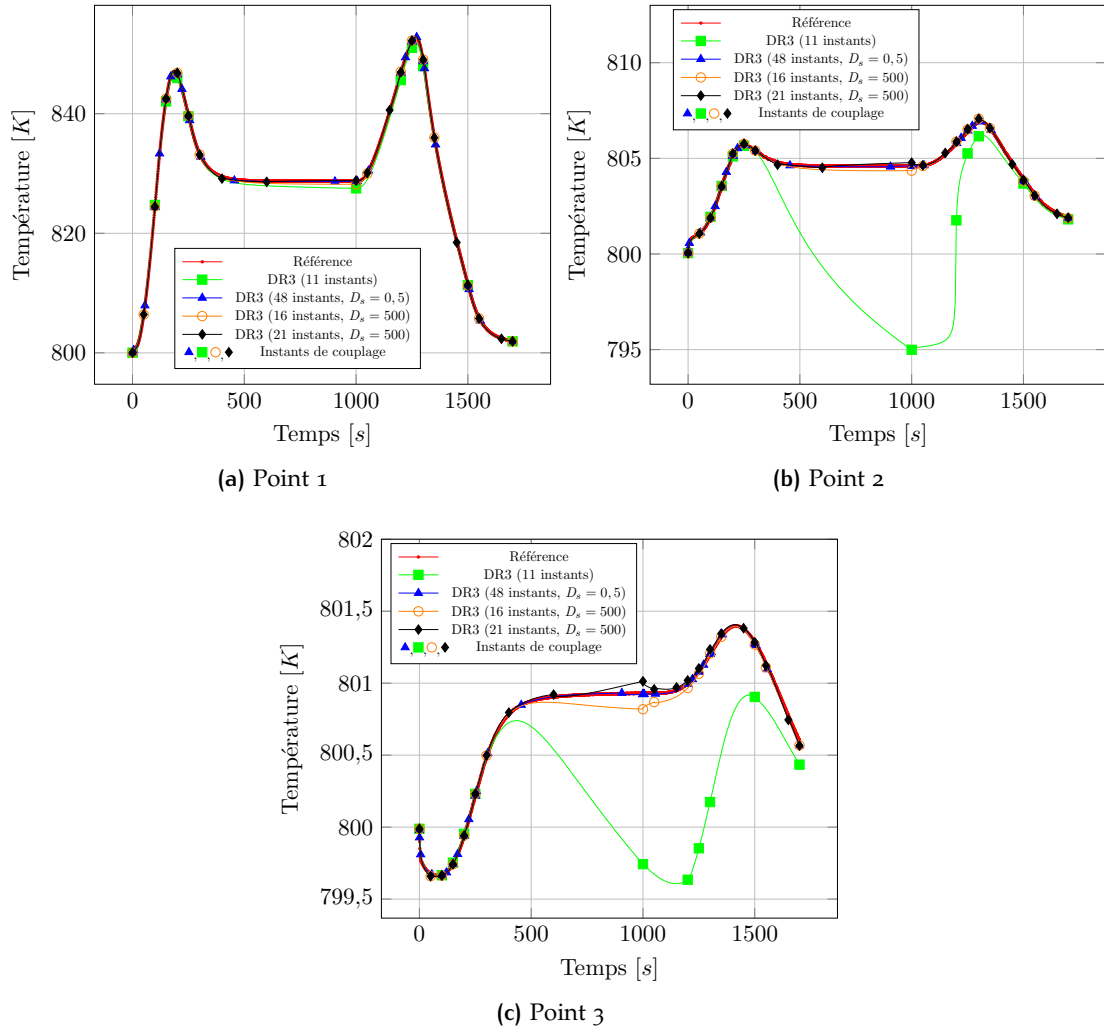


FIGURE 9.8 – Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d’instant de couplage et la solution de référence.

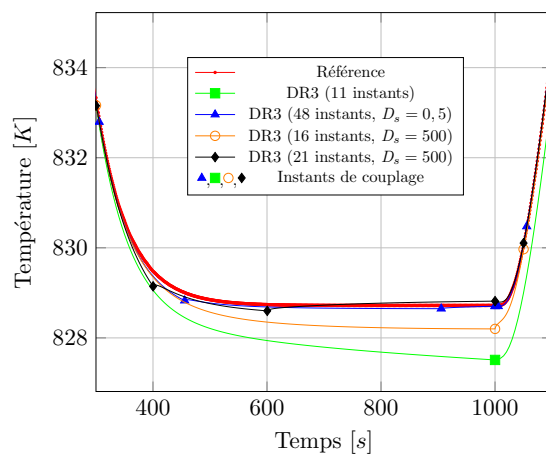


FIGURE 9.9 – Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d’instant de couplage et la solution de référence. Zoom sur le plateau de température au Point 1.

Distribution	Position du premier instant de couplage supplémentaire	Nombre d’instant de couplage	Point 1	Point 2	Point 3
-	-	11	0,14%	1,21%	0,17%
arbitraire	0,5 s ($D_s = 0,5$)	48	0.02%	0.01%	0.005%
arbitraire	50 s ($D_s = 500$)	16	0.06%	0.03%	0.013%
linéaire	50 s ($D_s = 500$)	21	0,04%	0,02%	0,01%

TABLEAU 9.5 – Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux trois points de l’interface étudiés pour différentes distributions d’instant de couplage.

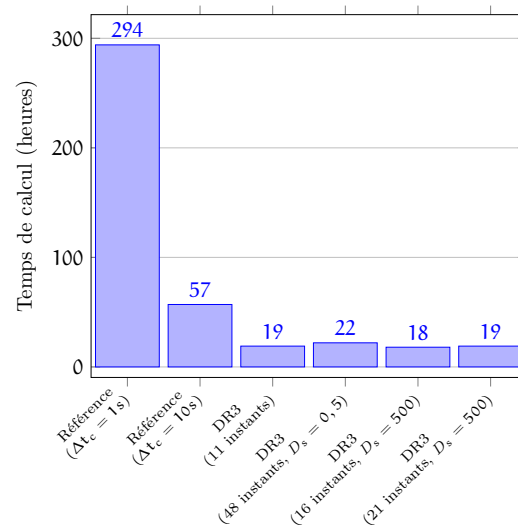


FIGURE 9.10 – Comparaison entre les temps de calcul (en heures) pour chaque calcul effectué en incluant les calculs de référence. Le temps nécessaire afin de terminer le calcul de référence ($\Delta t_c = 1s$) a été calculé par extrapolation linéaire.

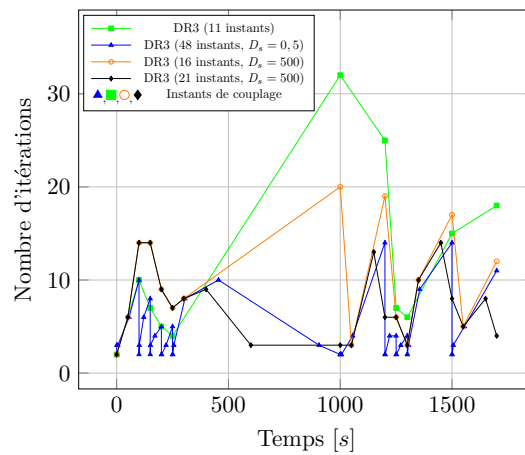


FIGURE 9.11 – Comparaison entre les nombres d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence du processus itératif pour chaque distribution d'instant de couplage étudiée.

9.2 VALIDATION SUR UN CAS DE TAMBOUR D'UN COMPRESSEUR AÉRONAUTIQUE HP REFROIDI PAR UN ÉCOULEMENT D'AIR

Dans cette section, la méthode de couplage est validée sur un cas de tambour de compresseur haute-pression (HP) aéronautique. Cette configuration a été construite à l'Université de Sussex dans le cadre d'un projet européen (ICAS-GT), détaillé dans [Smout et al., 2002](#), avec deux arbres coaxiaux à entraînement indépendant (cf. Figure 9.12). L'installation expérimentale a été décrite en détail dans [Alexiou et Mathioudakis, 2009](#). L'arbre extérieur comprend deux disques et un cône d'entraînement pour représenter la partie arrière d'un disque de compresseur axial à haute pression. Ce dernier est chauffé au niveau du carter extérieur.

9.2.1 Description du cas test

La Figure 9.12 montre une représentation schématique de l'installation expérimentale incluant les sondes et les capteurs utilisés pour mesurer le régime transitoire thermique du système. Toutefois, ces mesures ne sont pas publiques, ce qui nous a conduit à définir nous-même les points de fonctionnement du système.

La Figure 9.13 présente la configuration ainsi que les conditions de fonctionnement. Ce problème 2D en rotation a été résolu en axisymétrie. Les deux disques et le carter extérieur sont en titane et l'arbre en acier. Entre ces deux parties solides, un écoulement fluide a la fonction de les refroidir. L'écoulement d'air entre dans le système avec un débit de 0,2 Kg/s et une température de 400 K. L'air quitte le système par deux sorties situées à l'extrémité opposée de l'injection. Le solveur fluide utilisé pour résoudre ce problème est Fluent ([Fluent, 2019](#)). Afin de mettre en communication le solveur Fluent avec Z-set, la librairie de couplage OpenPalm ([OpenPalm, 2019](#)), développée au Cerfacs, est utilisée. L'interpolation spatiale entre les interfaces fluide et solide est réalisée par la librairie CWIPI. Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport) qui emploie la formulation $k - \omega$ dans la couche limite et la formulation $k - \epsilon$ à l'extérieur ([Menter, 1993](#)) est mis en œuvre. Pour la discrétisation des flux un schéma du deuxième ordre a été utilisé.

La vitesse de rotation du système varie au cours du temps (cf. Figure 9.14a). La Figure 9.14b montre l'évolution temporelle de la température imposée au carter (surface supérieure en titane) et à l'arbre de rotation (surface inférieure en acier). Sur ces graphiques (cf. Figure 9.14) les points représentent les points de fonctionnement du système disponibles correspondant aux instants de couplage. Entre ces instants l'évolution de la condition aux limites est supposée linéaire.

Les deux surfaces couplées de la configuration sont représentées sur la Figure 9.15a. L'implémentation de l'algorithme de couplage, décrite dans l'Annexe D, a été modifiée

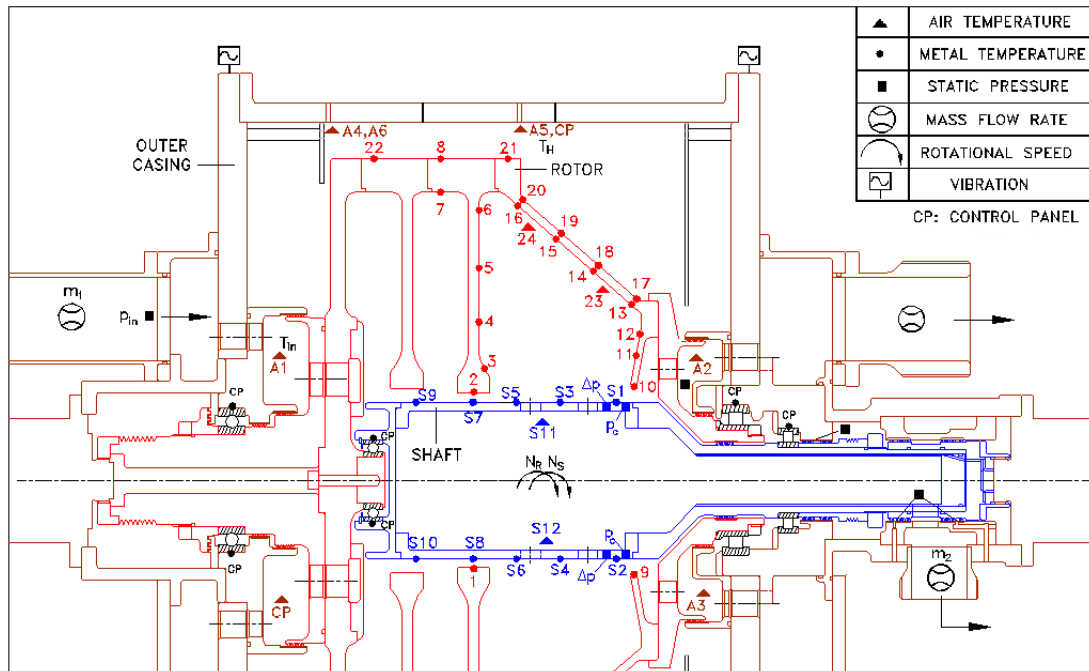


FIGURE 9.12 – Représentation schématique du tambour du compresseur HP utilisé dans le projet ICAS-GT (Smout et al., 2002)

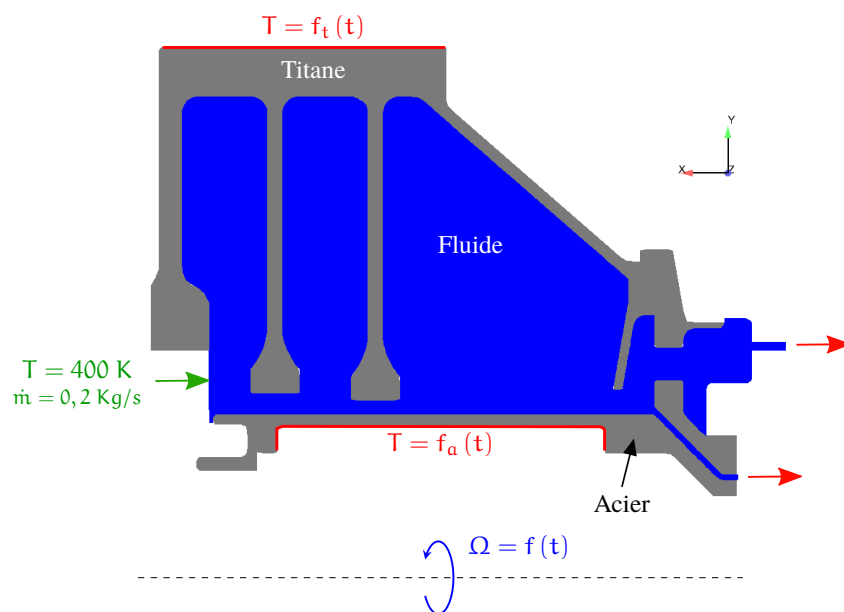


FIGURE 9.13 – Schématisation du cas test du tambour de compresseur HP. La température imposée à la surface supérieure et inférieure du domaine solide évolue dans le temps. La vitesse de rotation du système évolue également dans le temps.

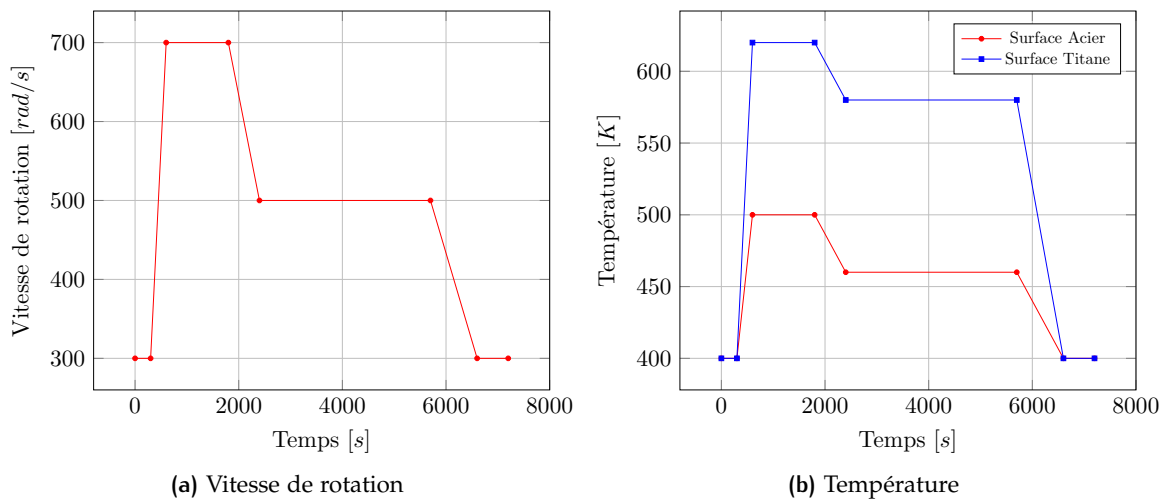


FIGURE 9.14 – Évolution des conditions aux limites imposées au système : vitesse de rotation et températures sur les surfaces en titane et en acier.

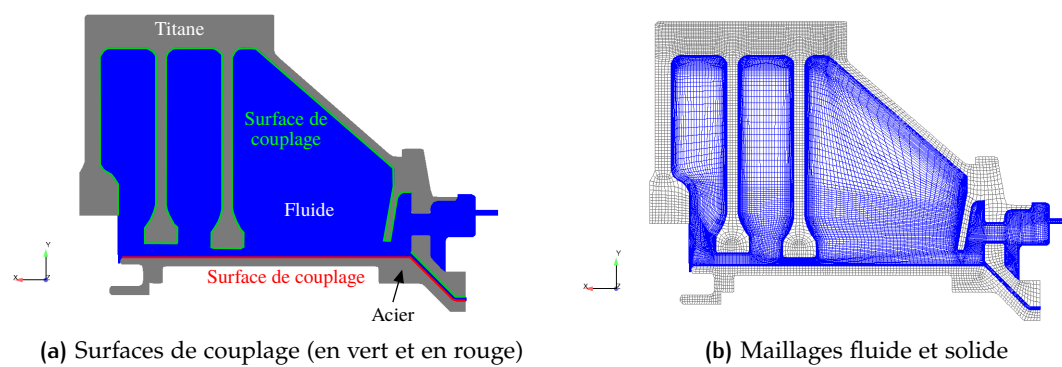


FIGURE 9.15 – Surfaces de couplage et maillages fluide et solide du cas test du tambour de compresseur HP.

afin de pouvoir prendre en compte plusieurs surfaces couplées. Les autres surfaces du problème sont adiabatiques.

Les maillages solide et fluide sont présentés sur la Figure 9.15b. Le maillage fluide a été raffiné à la paroi afin d'obtenir $y^+ \approx 1$.

Le Tableau 9.6 affiche les principaux paramètres thermiques caractérisant le problème aérothermique. La présence de deux matériaux différents composant le solide donnent lieu à des nombres de Biot et des nombres de Fourier différents. En effet, le pas de temps choisi permet de suivre rigoureusement l'évolution thermique dans la partie en titane, alors qu'il est moins adapté à la diffusion thermique dans l'acier qui est plus rapide.

Matériau	k [W/(mK)]	ρC_p [J/(Km ³)]	Δy_s [m]	Δt_s [s]	D_s	Bi
Titane	7,72	$2,64 \cdot 10^6$	0,001	4	0,17	9
Acier	50	$3,9 \cdot 10^6$	0,001	4	50	1,3

TABLEAU 9.6 – Paramètres caractérisant le problème thermique sur le cas du tambour de compresseur HP.

Le critère de convergence choisi pour ce cas test est le suivant :

$$\Delta T_s < \epsilon \quad \epsilon = 0,3 \text{ K} \quad (9.3)$$

9.2.2 Validation de la méthode de couplage

La précision obtenue par la méthode DR3 avec les différentes distributions de points étudiées pour le cas test précédent (cf. §9.1) a été comparée à la solution de référence. Comme dans le cas précédent, la solution de référence a été obtenue en couplant les problèmes fluide et solide toutes les 10 secondes.

La Figure 9.16 montre le champ de température de la solution de référence aux instants de couplage. À $t = 300$ s, les domaines fluide et solide sont à la température initiale d'équilibre d'environ 400 K (température d'injection du fluide). À partir de cet instant, la température imposée aux surfaces solides (disque et arbre) augmente jusqu'à atteindre la température maximale en injectant de la chaleur dans le système. Ainsi, l'écoulement près des parois commence à se chauffer ($t = 600$ s, cf. Figure 9.16b). Les conditions aux limites ne varient pas pendant 1300 secondes (1^{er} plateau) et ensuite le régime du compresseur baisse. Après cette étape, pendant 3300 secondes (2^{ème} plateau) les conditions aux limites ne changent pas. Cette zone correspond à la phase de croisière. Pendant cette période, l'écoulement fluide réussit à contenir la diffusion thermique dans les deux disques immergés. Enfin, une réduction rapide du régime du système permet de revenir aux conditions initiales. Pendant cette période (entre $t = 6600$ s et $t = 7200$ s), la chaleur stagne dans les deux premières cavités ce qui montre que la circulation d'air est

insuffisante pour refroidir correctement le système (cf. Figures 9.16f et 9.16g). Par ailleurs, cette stagnation est marquée dans le calcul par la présence de parois adiabatiques qui empêchent l'évacuation de la chaleur.

Les graphiques sur la Figure 9.17 présentent la comparaison des résultats de la méthode DR3 en utilisant différentes distributions des instants de couplage avec la solution de référence. La comparaison a été réalisée sur 4 points montrés sur la Figure 9.12 :

- Point situé à l'extrémité du deuxième disque (Point 2);
- Point situé dans la deuxième cavité (Point 7);
- Point situé sur l'extrémité du cône (Point 12);
- Point situé sur l'arbre en acier (Point S3).

Les distributions des instants de couplage étudiées sont les suivantes :

- Couplage aux seuls points temporels de fonctionnement ou de cassure (8 instants de couplage);
- Distribution arbitraire (94 instants de couplage) définie par l'équation (9.2). Le premier instant de couplage est situé à 0,04 s du point de fonctionnement. Cette période de couplage a été calculée en imposant $D_s = 0,5$.
- Distribution linéaire de raison 2 (30 instants de couplage). Le premier instant de couplage t_1 est situé à 40 s du point de fonctionnement. Cette période de couplage a été calculée en imposant $D_s = 500$.

La Figure 9.17a présente la comparaison des profils de température calculés avec les précédentes distributions à l'extrémité du deuxième disque (Point 2 de Figure 9.12). Le calcul couplant les problèmes fluide et solide aux seuls points de fonctionnement (8 instants de couplage) ne réussit pas à capturer l'évolution de l'interaction aérothermique. L'écart est très important sur les plateaux de température (périodes où les conditions aux limites ne varient pas). En particulier, la température calculée pendant le deuxième plateau (entre 2400 s et 5700 s) est sous-estimée, ce qui engendre une surestimation de la durée de vie du système et donc sa possible rupture anticipée. L'utilisation des deux autres distributions permet de calculer un profil de température similaire à celui de référence. De plus, la distribution linéaire emploie trois fois moins d'instants de couplage que la distribution arbitraire.

Concernant le Point 7 (cf. Figure 9.17b), les différents profils de température sont très similaires. En effet, ce point se situe sur la paroi de la deuxième cavité et il est situé à proximité de la surface supérieure du disque, où une condition aux limites de température imposée est appliquée. Dans cet endroit, la circulation d'air est limitée, ce qui implique un effet prépondérant de la diffusion solide sur l'échange thermique entre le solide et le fluide. La Figure 9.18 présente un zoom de cette comparaison entre 5500 s et 5750 s. Les distributions à 30 et 94 instants de couplage maintiennent une erreur absolue inférieure au critère de convergence (0,3 K). La Figure 9.18 nous permet également de visualiser les plusieurs instants de couplage ajoutés par la distribution arbitraire en proximité du point de fonctionnement à $t = 5700$ s.

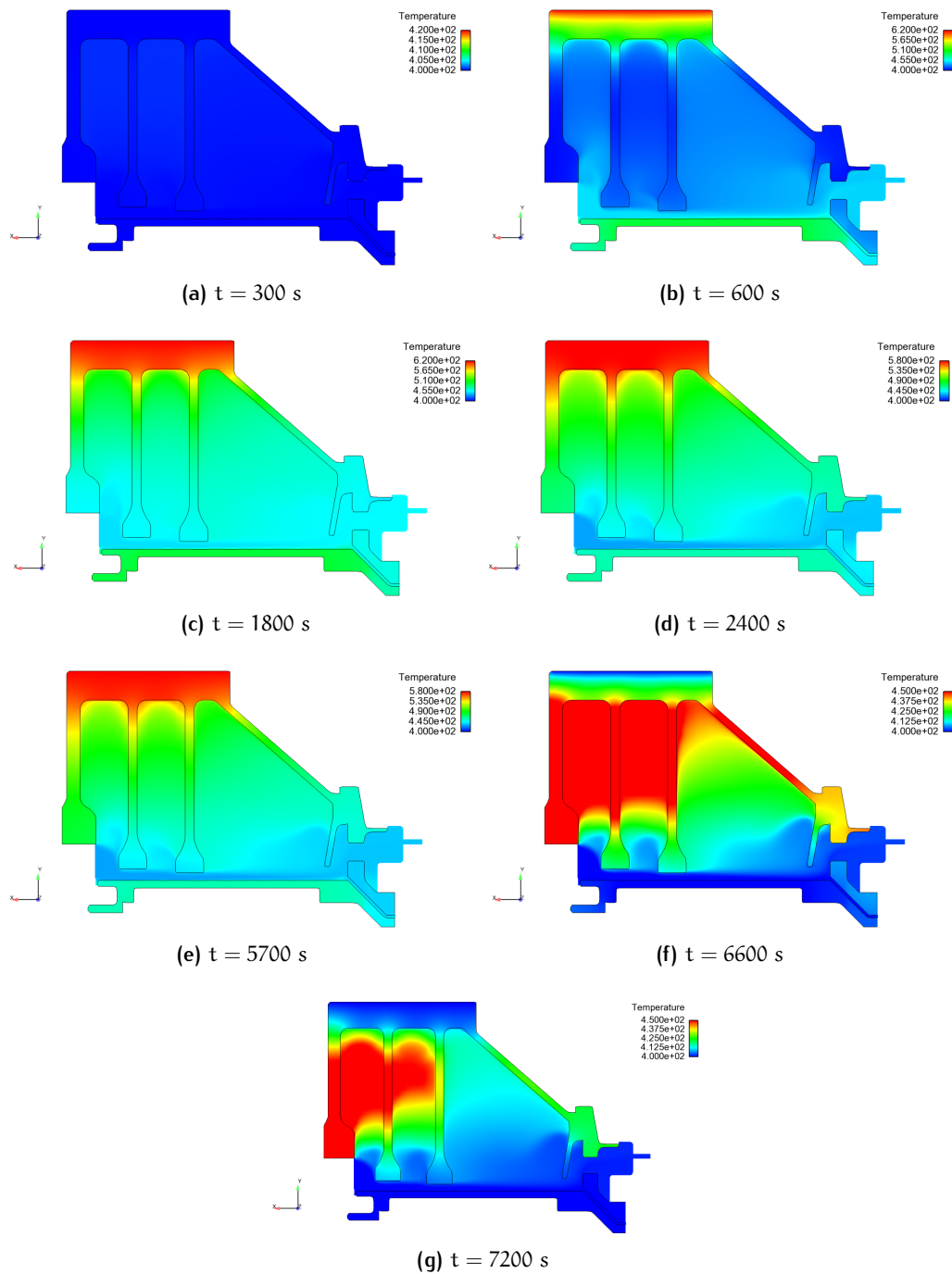


FIGURE 9.16 – Champs de température dans le fluide et dans les solides aux différents instants de couplage.

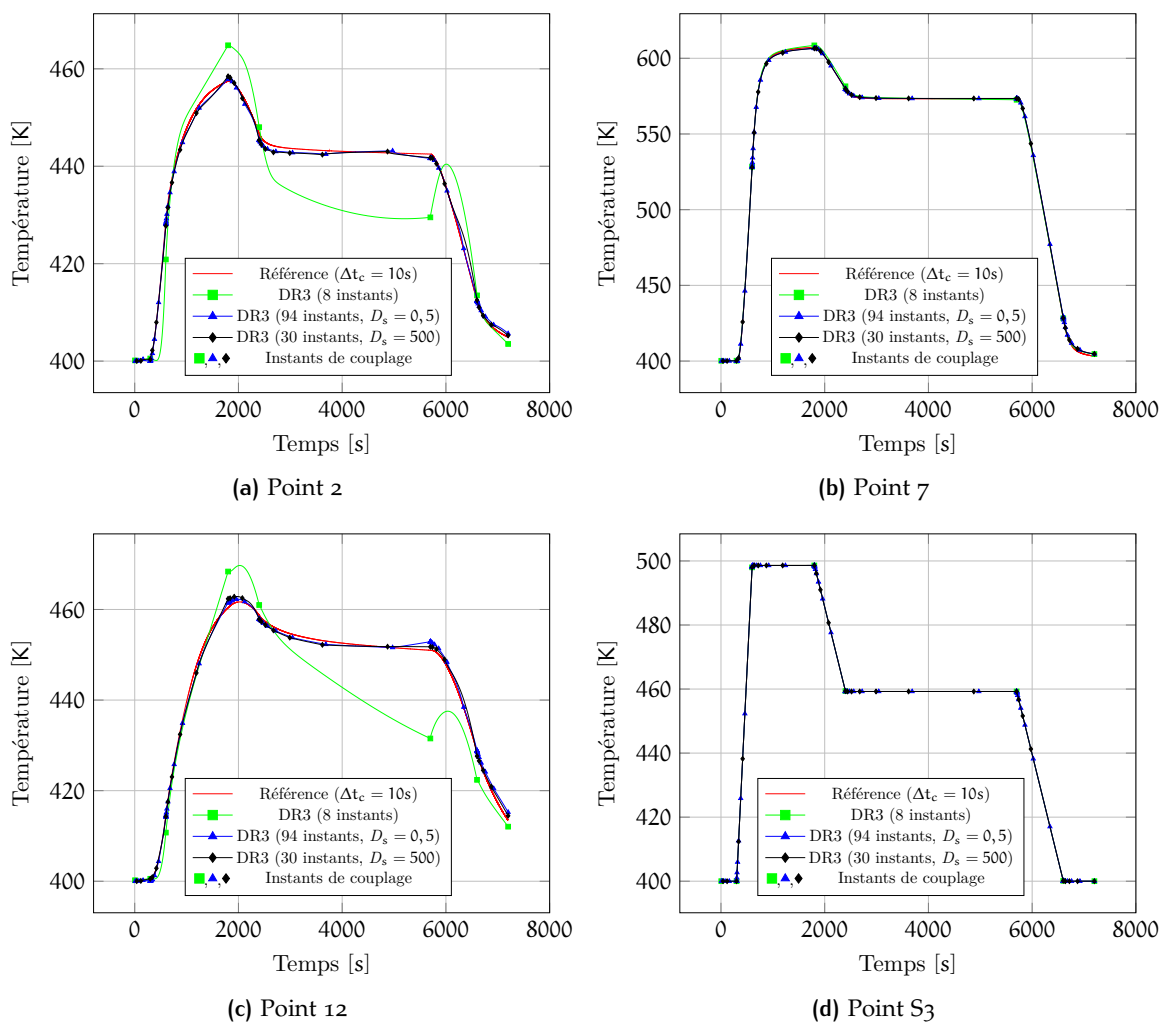


FIGURE 9.17 – Comparaison entre les profils de températures obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d’instant de couplage et la solution de référence sur le cas du tambour de compresseur HP.

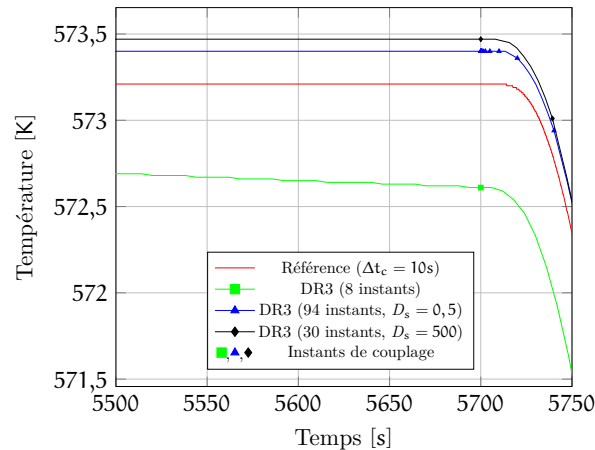


FIGURE 9.18 – Comparaison entre les profils de température obtenus avec DR3 en utilisant différentes distributions d’instant de couplage et la solution de référence. Zoom sur le plateau de température au Point 7

La Figure 9.17c montre les profils de température calculés au Point 12 qui est situé dans le cône du compresseur. Le résultat obtenu en utilisant 11 instants de couplage est incorrect. Comme pour le Point 2, la température à partir du deuxième plateau est sous-estimée. Au contraire, les distributions arbitraires (94 instants) et linéaire (30 instants) donnent des profils de température suffisamment précis. En particulier, la distribution linéaire conduit à une précision supérieure pendant certaines périodes à celle de la distribution arbitraire, alors qu’elle utilise un nombre inférieur d’instant de couplage.

Les profils de température calculés au Point S3, situé sur l’arbre de rotation en acier, sont présentés sur la Figure 9.17d. Ici, les différents profils sont équivalents car il s’agit du même phénomène vu pour le Point 7. En effet, l’arbre de rotation est en acier qui est caractérisé par une diffusion thermique très rapide. Ainsi, l’évolution de la température en ce point est similaire à l’évolution de la température imposée sur la surface inférieure de l’arbre (cf. 9.14b).

Le Tableau 9.7 montre l’erreur relative sur la précision du calcul du profil de température obtenue avec les différentes distributions d’instant de couplage. L’erreur relative est présentée pour les quatre points étudiés. La méthode DR3 sans distribution d’instant de couplage supplémentaires (8 instants) présente des erreurs relatives importants aux points 2 et 12, où on a une erreur absolue respectivement de 14 K et 19,5 K. Au contraire, les deux distributions (arbitraire et linéaire) montrent de meilleurs résultats. L’erreur relative est inférieure à 1% en tous points. Par exemple, avec la distribution arbitraire le profil de température calculé au Point 2 diffère de la solution de référence de seulement 0,29% en erreur relative, ce qui correspond à un écart absolu de 1,3 K. À ce même point, l’utilisation de la distribution linéaire engendre une erreur relative légèrement

Distribution	Position du premier instant de couplage supplémentaire	Nombre d'instants de couplage	Point 2	Point 7	Point 12	Point S ₃
-	-	8	3,5%	0,5%	4,3%	0.04%
arbitraire	0,4 s ($D_s = 0,5$)	94	0,29%	0,44%	0.46%	0.04%
linéaire	40 s ($D_s = 500$)	30	0,67%	0.41%	0.43%	0.04%

TABLEAU 9.7 – Erreur relative sur la précision de la méthode DR3 par rapport à la solution de référence aux quatre points étudiés pour différentes distributions d'instants de couplage.

plus importante (0,67%), donc un écart absolu de 2,8 K. Au point 12, la distribution linéaire s'avère légèrement plus précise que la distribution arbitraire. Aux Points 7 et S₃, les différents calculs montrent une précision suffisante dans le calcul de l'évolution thermique.

Les écarts de température entre la solution calculée par la méthode DR3 et la solution de référence est plus importante sur ce cas test que sur le cas du disque de turbine HP (cf. Tableau 9.5 dans la Section 9.1). Dans le cas test du disque de turbine HP, l'instationnairité provient seulement de l'évolution de la température imposée sur une surface du domaine solide, alors que dans le cas du tambour de compresseur HP, l'instationnairité provient du solide et du fluide. En effet, dans ce dernier cas, l'instationnairité provient de la variation de la température imposée sur le deux parois solides (cf. Figure 9.14b), mais également du changement de la vitesse de rotation du système (cf. Figure 9.14a), ce qui impacte évidemment l'écoulement. Cette réduction de la précision a été déjà mise en évidence dans le cas de la plaque plane (cf. Chapitre 8), où la géométrie était plus simple et le régime transitoire étudié largement plus petit (1 s).

Par ailleurs, dans l'application de la méthode DR3 (cf. Éq. (8.7)) sur le cas du tambour de compresseur HP, nous avons supposé une température de référence T_{ref} constante, alors qu'elle ne l'est pas. En effet, sa variation est engendrée par le changement de la vitesse de rotation mais avant tout par sa géométrie complexe. Par exemple, la température de référence dans les deux premières cavités n'est pas égale à la température de la veine fluide à proximité des extrémités des deux disques.

La mauvaise estimation de la température de référence engendre aussi une mauvaise estimation du coefficient d'échange thermique h utilisé comme coefficient optimal de couplage (cf. Éq. 7.15). Dans la littérature, plusieurs approches pour mieux estimer le coefficient d'échange thermique ont été proposées. Degiovanni et Remy, 2016 proposent une impédance généralisée qui a l'avantage d'être intrinsèque au problème convectif (indépendance des conditions aux limites et propriétés thermiques du solide). Cependant, cette impédance est difficile à calculer pour des géométries complexes. Afin de stabiliser

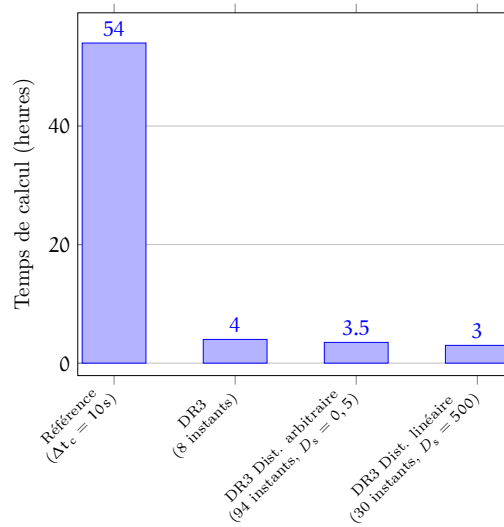


FIGURE 9.19 – Comparaison entre les temps de calcul (en heures) pour chaque calcul effectué en incluant les calcul de référence.

ce problème aérothermique, il a été alors nécessaire d'utiliser un coefficient de couplage qui est un multiple de h :

$$\alpha_f = 10\alpha_f^{(\text{opt})} = 10h \quad (9.4)$$

La Figure 9.19 compare le temps de calcul (en heures) de chaque simulation. La réalisation de la solution de référence en couplant les problèmes fluide et solide toutes les 10 secondes a pris 54 heures. La réalisation des autres calculs qui couplent les deux problèmes avec une fréquence plus faible ont eu besoin de nettement moins de temps. La méthode DR3 sans instants de couplage supplémentaires (8 instants) a utilisée 4 heures de calculs, alors que l'utilisation des distributions arbitraire et linéaire ont eu besoin respectivement de 3,5 et 3 heures de calcul. L'ajout d'instants de couplage supplémentaires, en plus d'améliorer la précision du calcul, permet aussi de réduire le temps de calcul. Comme déjà dit précédemment pour le disque de turbine (cf. Section 9.1), l'état fluide est plus simple à prédire sur une courte période de couplage que sur une période très longue. Ainsi, le processus itératif converge en moins d'itérations et ce d'autant plus que la période de couplage est courte comme le montre la Figure 9.20. En comparant les distributions arbitraire et linéaire, l'ajout de trois fois plus d'instants de couplage comporte une augmentation du temps de calcul de 30 minutes seulement en contrepartie d'une meilleur précision.

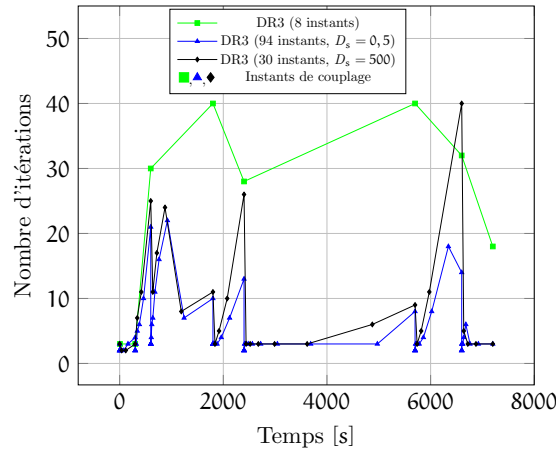


FIGURE 9.20 – Comparaison entre les nombre d’itérations nécessaires à atteindre la convergence du processus itératif pour chaque distribution d’instant de couplage étudiée.

9.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons analysé l’efficacité de la méthode DR3, en termes de précision et de temps de calcul, à simuler le régime transitoire thermique pendant une longue période de temps sur des configurations quasi-industrielles.

Deux configurations ont été étudiées : un disque de turbine HP et un tambour de compresseur HP. Sur les deux configurations, la méthode DR3 couplant seulement aux points de cassure (instants où les conditions aux limites changent) a montré une précision limitée vis-à-vis de la solution de référence surtout lorsque la période de couplage était longue (plateau - régime de croisière).

Afin d’augmenter le degré de précision, il est possible de réduire le critère de convergence, ce qui malheureusement entraîne une augmentation notable du temps du calcul.

Nous avons montré que cet objectif (l’augmentation de la précision) peut être accompli en ajoutant des instants de couplage supplémentaires. Cette approche n’impacte pas de façon significative le temps de calcul. On a d’ailleurs prouvé que l’ajout d’instant de couplage, répartis de façon appropriée, peut même le réduire. Cette réduction est due à la convergence plus rapide des processus itératifs grâce à une meilleure efficacité de la prédiction flux-température sur une faible période de couplage.

Dans ce chapitre, nous avons testé plusieurs distributions d’instant de couplage. Une distribution arbitraire (cf. Éq. (9.2)) avec le premier instant de couplage très près du dernier point temporel de fonctionnement ($D_s = 0,5$) est très précise mais légèrement plus coûteuse en temps de calcul. En revanche, une distribution linéaire de raison 2 avec le premier instant de couplage supplémentaire situé après une période calculée en imposant $D_s = 500$ se relève suffisamment précise, avec un temps de calcul égal ou

inférieur à celui consacré au calcul sans aucune distribution (couplage aux seuls points de fonctionnement).

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent, lorsque la condition d'injection de l'écoulement varie dans le temps ou dans le cas d'une géométrie complexe (le tambour de compresseur HP par exemple), la méthode DR3 est moins précise. La principale difficulté dans l'application de cette méthode est l'identification d'une température de référence qui soit adaptée pour tous les points de l'interface fluide-structure pendant toute la durée du calcul. En effet, un choix pertinent de la température de référence est essentiel dans l'application de la prédiction flux-température basée sur la loi de refroidissement de Newton.

Une mauvaise estimation de la température de référence engendre aussi un calcul imprécis du coefficient d'échange thermique nécessaire à la stabilisation du calcul couplé. Il a fallu alors augmenter cette valeur afin de pouvoir stabiliser les calculs.

CONCLUSIONS

Ce travail de thèse a permis d'analyser des problèmes multiphysiques complexes tels que les interactions thermiques fluide-structure. Plus particulièrement, l'objectif de ce travail a été d'étudier la précision et la stabilité des méthodologies de couplage aérothermique.

Une étude bibliographique a permis de lister les approches de résolution des problèmes multiphysiques et de mettre en avant leurs avantages et leurs inconvénients. L'approche partitionnée a été retenue. Cette approche consiste dans un premier temps à résoudre les différentes physiques de manière indépendante puis à réaliser des échanges de quantités pariétales de manière à garantir la continuité à l'interface. Cette approche est la plus utilisée de part sa modularité qui permet la réutilisation de solveurs préexistants. Cependant, des nombreuses instabilités numériques peuvent apparaître. En effet, une accumulation d'énergie due au décalage temporel entre la résolution des différentes physiques a lieu au niveau de l'interface. Ce décalage peut être très important dans le cas de l'interaction thermique fluide-structure puisque les constantes de temps associées à chacune des physique diffèrent de plusieurs ordres de grandeur.

La première partie de la thèse a été dédiée à la stabilité de la résolution des problèmes aérothermiques sur la base d'une approche partitionnée. Dans la littérature, plusieurs études de stabilité soulignent le bon comportement numérique de la condition de Robin à l'interface fluide-structure. En particulier, une méthode optimale, basée sur un modèle 1D, a été développée récemment à l'ONERA. Cette méthode définit avec précision la stabilité d'un problème aérothermique couplé à partir des principaux paramètres physiques et numériques en jeu. Elle fournit notamment l'expression analytique du coefficient optimal $\alpha_f^{(\text{opt})}$ à utiliser dans la condition de Robin pour stabiliser le problème couplé et assurer une convergence rapide.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, la méthode optimale développée à l'ONERA a été analysée pour la première fois pour différentes intensités de l'interaction thermique entre l'écoulement et le solide. L'intensité de l'interaction thermique peut être évaluée via le nombre de Biot numérique Bi_v , nombre adimensionnel qui a été défini pour la première fois dans cette thèse. Une étude théorique de la méthode a mis en évidence l'effet des principaux paramètres physiques et numériques sur la stabilité. Plus particulièrement, l'effet déstabilisant d'un maillage raffiné et l'effet stabilisant d'une longue période de couplage ont été montrés et quantifiés.

D'un point de vue numérique, la méthode a été testée sur le cas d'une plaque plane chauffée par un écoulement fluide. L'utilisation de la méthode Dirichlet-Robin optimale s'est avérée appropriée pour la stabilisation des problèmes à intensité thermique faible et

modérée. Elle ne parvient cependant pas à stabiliser les problèmes aérothermiques où l'interaction thermique est élevée. En effet, l'application de cette méthode, basée sur un modèle 1D, sur des configurations multidimensionnelles peut conduire à l'instabilité du problème couplé.

Pour éviter l'apparition d'instabilités, une première solution a consisté à utiliser un coefficient de sécurité (Errera, Moretti, Salem et al., 2019). Une deuxième solution a consisté à mettre en place une autre condition d'interface (Moretti, Errera et al., 2018). Ce changement conduit à la condition d'interface Neumann-Robin pour les interactions fortes.

Cette condition a été ainsi analysée sur les plan théorique et numérique. Sur le plan théorique, il a été démontré que la période de couplage n'a que très peu d'impact sur la stabilité du problème couplé. De plus, une valeur "idéale" du raffinement est observée, mais des raffinements extrêmes conduisent à une convergence très lente. Ce résultat a été mis en lumière pour la première fois dans le cadre de cette thèse et n'a encore jamais été publié. Sur le plan numérique, la méthode Neumann-Robin a également été testée sur le cas test de la plaque plane. Cela a confirmé qu'elle est appropriée pour la stabilisation des problèmes aérothermiques à forte interaction thermique. Pour des valeurs plus faibles du nombre de Biot numérique, elle a cependant montré un potentiel de stabilisation moins important qu'avec la condition Dirichlet-Robin.

Les méthodes Dirichlet-Robin et Neumann-Robin sont ainsi complémentaires. Ainsi, en choisissant la méthode adéquate, on peut stabiliser un problème aérothermique quelle que soit l'intensité de l'interaction thermique. Toutefois, l'identification préalable de l'intensité de l'interaction thermique peut s'avérer difficile lorsqu'on traite des problèmes complexes telles que les configurations industrielles. Il a alors été nécessaire d'examiner la famille des schémas intermédiaires entre les conditions extrêmes Neumann-Robin et Dirichlet-Robin, soit les conditions d'interface Robin-Robin. Cette méthode (Robin-Robin) consiste à appliquer la condition de Robin aux deux cotés de l'interface fluide-structure. Toutefois, la condition de Robin n'est pas forcément présente dans les solveurs de mécanique des fluides. Nous avons alors développé et validé la condition de Robin dans le solveur elsA en collaboration avec l'équipe qui s'occupe de son développement.

L'étude de stabilité de la méthode Robin-Robin aboutit à une relation optimale entre les deux coefficients de couplage. Cependant, cette relation contient deux variables et il existe alors un nombre infini de couples de coefficients optimaux. Une relation empirique a été proposée permettant d'assurer une résolution stable et rapide du problème couplé. Cependant, cette relation a été testée sur un cas particulier et rien ne garantit qu'elle soit généralisable.

Sur le plan numérique, le résultat d'un balayage des coefficients de couplage a été comparé au modèle de stabilité théorique pour deux valeurs différentes de l'intensité thermique. Dans les deux cas, les résultats numériques s'accordent parfaitement avec le modèle théorique. Toutefois, à part le potentiel de cette méthode à s'adapter au problème

thermique étudié en choisissant convenablement les valeurs des deux coefficients de couplage, le gain sur la rapidité est infime.

En conclusion, la méthode Dirichlet-Robin optimale, avec un éventuel coefficient de sécurité, se révèle la méthode la plus fiable et la plus simple à mettre en place au niveau industriel.

Ensuite, nous avons voulu étudier l'effet de la prise en compte du rayonnement dans la stabilité du problème aérothermique. En effet, le rayonnement joue un rôle important dans l'échange thermique des conduits internes à haute température.

Une analyse de stabilité a montré que le rayonnement contribue négativement à la stabilité. Une nouvelle expression du coefficient de couplage capable de stabiliser un problème aérothermique avec rayonnement a été recherchée. Cette nouvelle méthode de couplage a été testée sur un cas de canal 2D avec des résultats en accord avec le modèle théorique. Nous avons notamment montré que le coefficient optimal calculé sans prendre en compte le rayonnement peut ne pas stabiliser un problème aérothermique incluant le rayonnement. Cependant, nous n'avons pas comparé le résultat de ce couplage avec une solution de référence car la précision de ce type de calcul ne fait pas partie des objectifs de la thèse.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous nous sommes intéressés à la résolution des problèmes aérothermiques en régime transitoire via l'algorithme quasi-stationnaire. Concernant la stabilité, seule la méthode Dirichlet-Robin a été étudiée de manière à mettre en évidence les zones de stabilité et le coefficient optimal. Ces derniers sont fonction du coefficient d'échange thermique h souvent difficile à estimer. En effet, il est obtenu à partir de la loi de refroidissement de Newton qui requiert certaines conditions qui ne sont généralement pas vérifiées dans la plupart des systèmes réels.

Après avoir implémenté l'algorithme quasi-stationnaire, ce dernier a été analysé sur le cas test de la plaque plane. Une dépendance de la solution avec le coefficient de couplage a été observée. Elle est liée au terme de relaxation de la condition de Robin dans la prédiction linéaire (méthode classique) des états fluides qui ne s'annule pas lorsque la convergence est atteinte.

Ainsi, des modifications dans la prédiction des états fluides ont été réalisées. Elles ont conduit à une réduction de la dépendance de la solution au coefficient de couplage. Une réduction supplémentaire est possible grâce à la correcte intégration de la condition de Robin sur l'interface solide. La méthode résultante, appelée DR2, a ensuite été validée en comparant le résultat obtenu à une solution de référence (très coûteuse). Elle a montré l'inaptitude de la prédiction linéaire à reproduire le caractère non-linéaire de la charge thermique.

Nous avons ainsi développé une prédiction flux-température basée sur la loi de refroidissement de Newton, qui a permis d'atteindre une précision satisfaisante. Cependant, cette méthode, nommée DR3, est moins robuste que la méthode DR2 et, par ailleurs, le degré de précision se réduit lorsque la température de référence (température fluide loin

de l'interface) varie en espace et en temps, ce qui invalide les hypothèses de la loi de Newton. Ces résultats sur la précision du couplage aérothermique en régime transitoire ont été soumis au *Journal of Computational Physics*.

Enfin, l'algorithme quasi-stationnaire combiné à la méthode DR3 a été appliqué à deux configurations quasi-industrielles dans le cadre de l'étude de l'interaction thermique sur des longues périodes de temps. Les deux configurations sont un disque de turbine HP (1700 s) et un tambour de compresseur HP (7200 s). Dans les deux cas, le calcul de l'évolution de l'échange thermique est suffisamment précis lorsque la période de couplage est faible. Il a donc été nécessaire d'ajouter des points de couplage supplémentaires. Ces points ont été distribués en fonction de la valeur du nombre de Fourier.

L'ajout de points de couplage a permis d'améliorer la précision sans augmenter le temps de calcul. En effet, le processus itératif converge plus rapidement lorsque la période de couplage est faible car la prédiction flux-température est alors plus précise. Dans le cas du tambour de compresseur HP, le calcul de l'évolution thermique s'est cependant avéré moins précis. En effet, ce cas test est caractérisé par une température du fluide (température de référence) qui varie considérablement en espace et en temps, ce qui invalide la loi de refroidissement de Newton dans la prédiction flux-température.

PERSPECTIVES

Dans ce travaux de thèse nous avons choisi de retenir la méthode Dirichlet-Robin pour la stabilité de problèmes aérothermiques, en utilisant un coefficient de sécurité dans le cas d'une interaction thermique forte. Ce choix a été adopté face à la difficulté de la mise en place de la méthode Robin-Robin qui nécessite la détermination d'un couple de coefficients optimaux. Cependant, nous considérons que cette méthode pourrait devenir intéressante dans un avenir proche lorsque la condition de Robin sera plus répandue dans les solveurs CFD. Des études supplémentaires peuvent ainsi être conduites sur la détermination automatisée d'un couple de coefficients optimaux basée sur des critères physiques et non plus sur une loi empirique.

Une autre voie à explorer est l'extension du couplage de codes à d'autres phénomènes physiques. Au cours de ces travaux nous avons commencé à étudier des problèmes aérothermiques de plus en plus complexes insérant le rayonnement et on devrait poursuivre dans cette voie en prenant en compte de plus en plus de phénomènes complexes et en premier lieu, la déformation de la structure. Toutefois, la complexité du problème doit être justifiée physiquement. En effet, l'effet de la déformation des structures raides, comme par exemple les aubes des turbines aéronautiques, sur l'échange thermique est négligeable. De même, il ne semble pas nécessaire d'étudier l'effet du rayonnement sur des cas caractérisés par des températures modérées.

L'effet de la prise en compte du rayonnement a été étudié avec la méthode Dirichlet-Robin. Il serait également intéressant d'analyser son impact sur la stabilité des méthodes Neumann-Robin et Robin-Robin. Par ailleurs, la précision du couplage aérothermique avec rayonnement devrait à l'avenir être analysée par comparaison avec une solution de référence.

Concernant la résolution des problèmes aérothermiques via l'algorithme quasi-stationnaire, les principaux problèmes rencontrés (de stabilité et de précision) sont dus à la mauvaise estimation du coefficient d'échange thermique. Cette mauvaise estimation est liée au non-respect de la condition ($T_{ref} = \text{const}$) requise par la loi de refroidissement de Newton. Des études peuvent alors être conduites concernant l'identification locale et automatisée de la température de référence la plus appropriée quel que soit le point de l'interface de couplage. On pourrait aussi substituer à la loi de Newton d'autres approches, plus complexes mais plus prometteuses.

Enfin, dans un futur un peu plus lointain, on peut imaginer de modéliser une ou plusieurs physiques avec des modèles réduits permettant de réduire considérablement le temps de calcul des problèmes aérothermiques.

Dans cette annexe, les études de stabilité (pour le couplage stationnaire et transitoire) sur lesquelles le modèle 1-D est basé sont détaillées.

Ces études ont déjà été présentées par [Errera et Chemin, 2013](#) dans le cas du régime stationnaire. Cependant, nous les reproduisons à nouveau car elles nous permettent d'introduire alors aisément le terme de rayonnement.

Pour le régime transitoire, nous reproduisons aussi l'étude déjà menée à bien par [Errera, Lazareff et al., 2017](#) de manière à souligner les différences entre les deux approches. Dans ce dernier cas, le rayonnement n'est pas pris en compte.

A.1 COUPLAGE STATIONNAIRE

A.1.1 Dirichlet-Robin

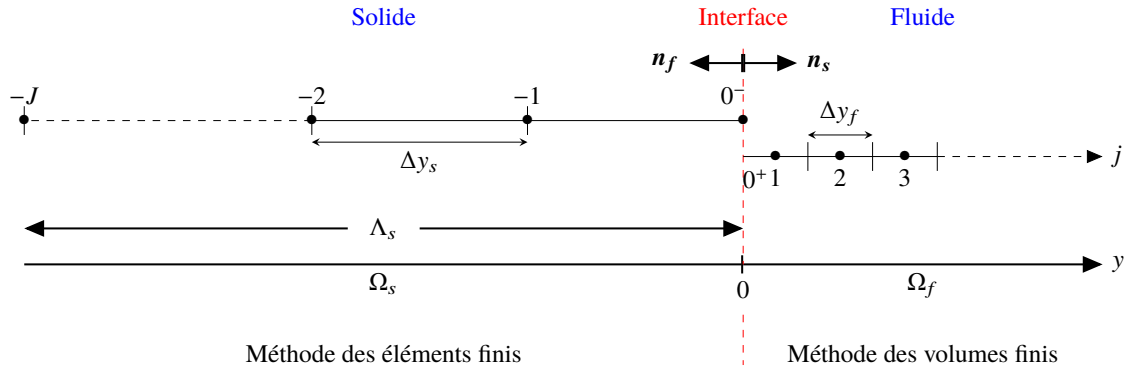


FIGURE A.1 – Étude de stabilité pour le couplage stationnaire : discrétisation pour le modèle 1-D

La figure A.1 montre la discrétisation des domaines fluide et solide sur laquelle est basée l'étude de stabilité. Nous considérons que les domaines fluide et solide sont couplés via l'algorithme CSS. Soit $[t^n, t^{n+1}]$ l'intervalle de temps, une condition de Dirichlet (température imposée) est appliquée sur l'interface de couplage fluide :

$$T_{0+}^{n+1} = T_{0-}^n \quad j = 0+ \quad (\text{A.1})$$

Coté solide, la condition de Robin est employée :

$$q_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_f^{n+1} (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) \quad j = 0- \quad (\text{A.2})$$

En adoptant les notations et les normales de la Figure A.1, les flux s'écrivent :

$$q_{0+} = -\frac{\lambda_f}{\Delta y_f/2} (T_{0+} - T_1) \quad (\text{A.3})$$

$$q_{0-} = -\frac{\lambda_s}{\Delta y_s} (T_{0-} - T_{-1}) = -\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} (T_{0-} - T_{-J}) \quad (\text{A.4})$$

L'équation A.4 est valide seulement dans le cas d'une résolution stationnaire du problème thermique dans le solide. Pour avoir une étude de stabilité plus générale et complète, il est possible de prendre en considération le type de condition aux limites imposé à la surface du solide loin de l'interface ($j = -J$) en supposant qu'une condition de Robin y est appliquée :

$$q_{-J} = q_{\text{ext}} + \alpha_{\text{ext}} (T_{\text{ext}} - T_{-J}) \quad (\text{A.5})$$

où l'indice "ext" indique les quantités externes imposées au système. La typologie de la condition limite est donnée par le coefficient de couplage α_{ext} :

- La condition de Dirichlet est obtenue avec $\alpha_{\text{ext}} = \infty$ qui implique $T_{-J} = T_{\text{ext}}$;
- La condition de Neumann est obtenue avec $\alpha_{\text{ext}} = 0$ qui implique $q_{-J} = q_{\text{ext}}$;
- Une condition mixte est obtenue avec $\alpha_{\text{ext}} > 0$. Ceci est utile dans le cas où un flux convectif est imposé (comme $-q_{-J} = h (T_{-J} - T_{\text{ext}})$ qui est obtenu en imposant $(q_{\text{ext}}, \alpha_{\text{ext}}) = (0, h)$).

L'équation précédente peut être réécrite de la manière suivante :

$$-\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} (T_{0-} - T_{-J}) + \alpha_{\text{ext}} (T_{-J} - T_{\text{ext}}) = q_{\text{ext}} \quad (\text{A.6})$$

En explicitant T_{-J} nous obtenons :

$$T_{-J} = \frac{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} T_{0-} + \alpha_{\text{ext}} T_{\text{ext}} + q_{\text{ext}}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{\text{ext}}} \quad (\text{A.7})$$

En substituant l'Eq. A.7 dans A.4, cette dernière devient :

$$\begin{aligned} q_{0-} &= -\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} (T_{0-} - T_{-J}) = -\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} \left(T_{0-} - \frac{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} T_{0-} + \alpha_{\text{ext}} T_{\text{ext}} + q_{\text{ext}}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{\text{ext}}} \right) \\ &= \frac{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} \alpha_{\text{ext}}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{\text{ext}}} T_{0-} + \text{const} \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Nous avons rassemblé les termes qui ne sont pas fonction des variables internes au système dans une constante car ils n'entrent pas en jeu dans l'analyse modale. Afin de simplifier la lecture des équations, on introduit le paramètre β :

$$\beta = \frac{\alpha_{ext}}{\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} + \alpha_{ext}} \quad (A.9)$$

et on obtient :

$$q_{0-} = \frac{\beta \lambda_s}{\Lambda_s} T_{0-} + \text{const} \quad (A.10)$$

Maintenant que nous avons défini une nouvelle expression du flux de chaleur à l'interface du domaine solide, nous pouvons revenir au système d'équations initiales. Nous allons combiner les équations A.2 et A.4 (pour simplifier la notation les indices temporels des coefficients de couplage m'apparaissent pas dans les équations suivantes).

$$-\frac{\beta \lambda_s}{\Lambda_s} T_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_f (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + \text{const} \quad (A.11)$$

En ajoutant l'équation A.3 et en explicitant T_{0-}^{n+1} nous pouvons écrire :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) T_{0+}^{n+1} + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} T_1^{n+1}}{\alpha_f + \frac{\beta \lambda_s}{\Lambda_s}} + \text{const} \quad (A.12)$$

Enfin, en combinant les équations A.1 et A.12 nous obtenons :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) T_{0-}^n + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} T_1^{n+1}}{\left(\alpha_f + \frac{\beta \lambda_s}{\Lambda_s}\right)} + \text{const} \quad (A.13)$$

Afin de mener une analyse de stabilité de l'interface couplée nous avons employé la théorie de Godunov-Ryabenkii qui introduit la solution du mode normal à l'interface en considérant les valeurs propres de la forme :

$$T_j^n \begin{cases} z^{n-1} \kappa_f^j & j > 0 \\ z^n \kappa_s^j & j \leq 0 \end{cases} \quad (A.14)$$

où z et κ sont respectivement les facteurs d'amplification temporelle et spatiale.

Dans le domaine fluide la solution est calculée dans le temps en utilisant l'équation discrétisée suivante. Une méthode de différences finies centrées est utilisée pour la discrétisation spatiale et une formulation implicite pour la discrétisation temporelle :

$$\frac{\rho C_f}{\Delta t} (T_j^{n+1} - T_j^n) = \frac{\lambda_f}{\Delta x_f^2} (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) \quad (\text{A.15})$$

$$(T_j^{n+1} - T_j^n) = D_f (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) \quad (\text{A.16})$$

$$(\text{A.17})$$

avec D_f le nombre de Fourier défini par la relation suivante :

$$D_f = \frac{\lambda_f \Delta t}{\rho C_p \Delta y_f^2} \quad (\text{A.18})$$

En substituant l'Équation A.14, nous obtenons :

$$(z - 1) \kappa_f = z D_f (\kappa_f^2 - 2\kappa_f + 1) \quad (\text{A.19})$$

$$\kappa_f^2 - \left(2 + \frac{z-1}{z D_f}\right) \kappa_f + 1 = 0 \quad (\text{A.20})$$

La résolution de cette équation quadratique nous donne deux racines complexes :

$$\kappa_f^{\pm} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{Dz}\right)^2 - 4} \right) \quad (\text{A.21})$$

Afin d'éviter une croissance exponentielle de la solution lorsque $j \rightarrow \infty$, il est nécessaire que $\kappa_f(D_f, z) \leq 1$ pour toutes les valeurs réelles de D_f et complexes de z . L'équation caractérisée par le signe moins satisfait toujours cette condition. Alors nous avons :

$$\kappa_f(D_f, z) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{Dz} - \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{Dz}\right)^2 - 4} \right) \quad (\text{A.22})$$

Dans le domaine solide nous considérons l'état stationnaire :

$$(T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (\text{A.23})$$

En substituant comme précédemment les définitions de l'Équation A.14 :

$$\kappa_s^2 - 2\kappa_s + 1 = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$(\kappa_s - 1)^2 = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\kappa_s = 1 \quad (\text{A.26})$$

Maintenant pour obtenir l'expression du facteur d'amplification temporelle z , nous allons substituer la nouvelle définition de la température (cf. Éq. A.14) dans l'Équation A.13 :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} T_1^{n+1} + \left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \right) T_{0-}^n}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} + \text{const} \quad (\text{A.27})$$

$$z^{n+1} \kappa_s^0 = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} z^n \kappa_f + \left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \right) z^n \kappa_s^0}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} \quad (\text{A.28})$$

Finalement, on obtient l'expression du facteur d'amplification temporelle pour un problème stationnaire dans le cas où la méthode Dirichlet-Robin est utilisée :

$$z = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} \kappa_f + \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \right)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} \quad (\text{A.29})$$

A.1.1.1 Coefficient de couplage optimal

Pour avoir l'expression du coefficient de couplage optimal il est nécessaire de résoudre l'équation suivante :

$$|g(z = -1)| = |g(z = 1)| \quad (\text{A.30})$$

En effet, au coefficient optimal, les deux branches (Neumann et Dirichlet) prennent la même valeur. En substituant l'expression du facteur d'amplification temporelle (cf. Éq. A.29) dans l'équation précédente, on obtient :

$$\left| \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \kappa_f (-1) - \left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \alpha_f^{(\text{opt})} \right)}{\left(\alpha_f^{(\text{opt})} + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} \right| = \left| \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \kappa_f (1) - \left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \alpha_f^{(\text{opt})} \right)}{\left(\alpha_f^{(\text{opt})} + \frac{\beta\lambda_s}{\lambda_s} \right)} \right| \quad (\text{A.31})$$

À partir de l'Équation A.21 il est facile d'obtenir les expressions de $\kappa_f(-1)$ et $\kappa_f(1)$ et donc l'équation devient :

$$\left| \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \left[1 + \frac{1}{D_f} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D_f}\right)^2 - 1} \right] - \left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \alpha_f^{(\text{opt})} \right) \right| = \left| \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - \alpha_f^{(\text{opt})} \right) \right| \quad (\text{A.32})$$

$$\left| \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \left[\frac{1}{D_f} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D_f}\right)^2 - 1} \right] + \alpha_f^{(\text{opt})} \right| = |\alpha_f^{(\text{opt})}| \quad (\text{A.33})$$

Le terme entre crochets est strictement négatif, alors l'expression du coefficient de couplage optimal pour la méthode Dirichlet-Robin est :

$$\alpha_f^{(\text{opt})} = \frac{\lambda_f}{\Delta y_f} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{D_f}\right)^2 - 1} - \frac{1}{D_f} \right) \quad (\text{A.34})$$

A.1.2 Robin-Robin

Dans cette section nous allons développer l'étude de stabilité pour la méthode de Robin-Robin. Pour cela nous reprenons l'étude de stabilité réalisée pour la méthode Dirichlet-Robin dans la Section A.1.1 mais en remplaçant la condition de Dirichlet coté fluide (cf. Éq. A.1) par la condition de Robin :

$$q_{0+}^{n+1} = -q_{0-}^{n+1} + \alpha_s^{n+1} (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^{n+1}) \quad j = 0+ \quad (\text{A.35})$$

La nouvelle expression de l'Équation A.13, qui est maintenant la combinaison de l'Équation A.12 avec la nouvelle Équation A.35, devient :

$$\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) = -q_{0-}^n + \alpha_s^n (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^n) \quad (\text{A.36})$$

En ajoutant l'Équation A.3 et en explicitant T_{0-}^{n+1} nous pouvons écrire :

$$T_{0+}^{n+1} = \frac{\left(\alpha_s - \frac{\beta \lambda_s}{\lambda_s} \right) T_{0-}^n + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} T_1^{n+1}}{\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}} + \text{const} \quad (\text{A.37})$$

Enfin, en combinant les Équations A.12 et A.37 nous obtenons :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) \left(\alpha_s - \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) T_{0-}^n + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (\alpha_f + \alpha_s) T_1^{n+1}}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} + \text{const} \quad (\text{A.38})$$

En utilisant la décomposition de la température en produit des facteurs d'amplification temporelle et spatiale décrite à l'Équation A.14, on obtient l'expression du facteur d'amplification temporelle :

$$z^{n+1} \kappa_s^0 = \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) \left(\alpha_s - \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} z^n \kappa_s^0 + \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (\alpha_f + \alpha_s)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} z^n \kappa_f \quad (\text{A.39})$$

$$z = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (\alpha_f + \alpha_s)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} \kappa_f + \frac{\left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) \left(\alpha_s - \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} \quad (\text{A.40})$$

$$z = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (\alpha_f + \alpha_s) \kappa_f + \left(\alpha_f - \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right) \left(\alpha_s - \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right)}{\left(\alpha_f + \frac{\beta\lambda_s}{\Lambda_s}\right) \left(\alpha_s + \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}\right)} \quad (\text{A.41})$$

En introduisant les définitions de K_f et K_s (cf. Éq. (2.39)), l'expression du facteur d'amplification temporelle devient le suivant :

$$g(z) = \frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) \kappa_f - (K_f - \alpha_f) (\alpha_s - K_s)}{(K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.42})$$

A.1.2.1 Coefficient de couplage optimal

Le coefficient optimal est l'intersection entre la *branche de Neumann* et la *branche de Dirichlet* :

$$|g(z = -1)| = |g(z = 1)| \quad (\text{A.43})$$

où

$$|g(z = -1)| = -\frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) \left(1 + \frac{1}{D} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1}\right) + (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s)}{(K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.44a})$$

$$|g(z = 1)| = \frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) + (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s)}{(K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.44b})$$

Dans (A.44a) nous retrouvons l'expression du nombre de Fourier normalisé :

$$\overline{D}_f = 1 + \frac{1}{D} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{D}\right)^2 - 1} \quad (\text{A.45})$$

L'Équation (A.43) est une équation à deux variables :

$$-\frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) \overline{D}_f + (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s)}{(K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} = \frac{K_f (\alpha_s + \alpha_f) + (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s)}{(K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.46})$$

$$K_f (\alpha_s + \alpha_f) (-\overline{D}_f - 1) - 2 (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s) = 0 \quad (\text{A.47})$$

Il est possible de faire apparaître dans cette équation le coefficient optimal pour la condition de Dirichlet-Robin (cf. Équation (2.49)) qui sera noté $\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})}$:

$$\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} = \frac{K_f}{2} (1 - \overline{D}_f) \quad (\text{A.48})$$

Alors, l'Équation (A.47) devient :

$$(\alpha_s + \alpha_f) \left(\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} - K_f \right) - (K_f - \alpha_f) (K_s - \alpha_s) = 0 \quad (\text{A.49})$$

ou (cf. Annexe A.1.2.1 pour plus de détails) :

$$(\alpha_s + \alpha_f) \left(\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} + K_s \right) - (K_f + \alpha_s) (K_s + \alpha_f) = 0 \quad (\text{A.50})$$

qui donne les relations entre $\alpha_f = f(\alpha_s)$ et $\alpha_s = f(\alpha_f)$:

$$\alpha_f = \frac{K_s (\alpha_s + K_f) - \alpha_s \left(\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} + K_s \right)}{\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} + K_s - K_f - \alpha_s} \quad (\text{A.51})$$

$$\alpha_s = \frac{\alpha_f \left(K_f - K_s - \alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} \right) + K_s K_f}{\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} - \alpha_f} \quad (\text{A.52})$$

Dans le chapitre 5 nous avons étudié l'influence du choix de ces coefficients sur la convergence du calcul.

Il est possible de démontrer aisément que si l'Équation (A.50) est respectée, le facteur d'amplification temporelle est toujours inférieur à 1. En effet, soit $g^{(\text{opt})}$ le facteur d'am-

plification temporelle calculé en respectant l'Équation (A.50), alors, en combinant les Équations (A.49) et (A.44b), nous obtenons :

$$|g^{(\text{opt})}(z=1)| = \frac{K_f(\alpha_s + \alpha_f) + (\alpha_s + \alpha_f)(\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} - K_f)}{(K_f + \alpha_s)(K_s + \alpha_f)} = \frac{(\alpha_s + \alpha_f)\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})}}{(K_f + \alpha_s)(K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.53})$$

Enfin, en combinant l'Équation (A.53) avec (A.50), $|g^{(\text{opt})}(z=1)|$ devient :

$$|g^{(\text{opt})}(z=1)| = \frac{(\alpha_s + \alpha_f)\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})}}{(\alpha_s + \alpha_f)(\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} + K_s)} = \frac{\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})}}{\alpha_{\text{DR}}^{(\text{opt})} + K_s} < 1 \quad (\text{A.54})$$

qui est toujours inférieur à 1 car la conductance du solide K_s est toujours positive.

A.2 COUPLAGE STATIONNAIRE AVEC RAYONNEMENT

Dans cette section, la méthode Robin-Robin optimale pour stabiliser un problème aérothermique avec rayonnement est développée. La condition de Robin discrétisée selon le schéma 1D de la Figure A.1 est exprimée pour le fluide comme suit :

$$q_{0+}^{n+1} = -q_{0-}^n + \alpha_{s-R}^n (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^n) + h^R (T_{0+}^{n+1} - T_{\text{ref}}) \quad j = 0+ \quad (\text{A.55})$$

et sur le coté solide :

$$q_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_{f-R}^{n+1} (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + h^R (T_{0+}^{n+1} - T_{\text{ref}}) \quad j = 0- \quad (\text{A.56})$$

Supposons que les flux de chaleur q sont de signe opposé à l'interface :

$$q_{0+} = \frac{\lambda_f}{\Delta y_f/2} (T_1 - T_{0+}) = K_f (T_1 - T_{0+}) \quad (\text{A.57})$$

$$q_{0-} = -\frac{\lambda_s}{\Lambda_s} (T_{0-} - T_{-1}) = -K_s (T_{0-} - T_{-1}) = \beta K_s T_{0-} + \text{const} \quad (\text{A.58})$$

Nous avons appliqué le même raisonnement fait dans la section A.1.1 pour T_{-1} .

En combinant les équations (A.57) et (A.58) dans (A.55), on obtient :

$$K_f (T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) = \beta K_s T_{0-}^n + \alpha_{s-R}^n (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^n) + h^R (T_{0+}^{n+1} - T_{\text{ref}}) + \text{const} \quad (\text{A.59})$$

$$T_{0+}^{n+1} = \frac{1}{K_f + \alpha_{s-R} + h^R} [(\alpha_{s-R} - \beta K_s) T_{0-}^n + K_f T_1^{n+1} + h^R T_{\text{ref}}] + \text{const} \quad (\text{A.60})$$

De même, pour l'Équation (A.56) on obtient :

$$\beta K_s T_{0-}^n = -K_f (T_1^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + \alpha_{f-R} (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) + h^R (T_{0+}^{n+1} - T_{ref}) + \text{const} \quad (\text{A.61})$$

$$T_{0-}^{n+1} = -\frac{1}{\beta K_s + \alpha_{f-R}} [(K_f - \alpha_{f-R} + h^R) T_{0+}^{n+1} - K_f T_1^{n+1} - h^R T_{ref}] + \text{const} \quad (\text{A.62})$$

En combinant les Équations (A.60) et (A.62) la relation suivante est obtenue :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{(\beta K_s - \alpha_{s-R}) (K_f - \alpha_{f-R} + h^R)}{(K_s + \alpha_{f-R}) (K_f + \alpha_{s-R} + h^R)} T_{0-}^n + \frac{(\alpha_{s-R} + \alpha_{f-R}) K_f}{(\beta K_s + \alpha_{f-R}) (K_f + \alpha_{s-R} + h^R)} \quad (\text{A.63})$$

Enfin, en décomposant la température en modes propres (cf. Équation (A.14)) on parvient à l'expression du facteur d'amplification temporelle suivante :

$$z = \frac{(\alpha_{f-R} + \alpha_{s-R}) K_f}{(K_f + \alpha_{s-R} + h) (K_s + \alpha_{f-R})} \kappa_f + \frac{(K_s - \alpha_{s-R}) (K_f - \alpha_{f-R} + h)}{(K_f + \alpha_{s-R} + h) (K_s + \alpha_{f-R})} \quad (\text{A.64})$$

À partir de l'Équation A.64, les expressions du facteur d'amplification temporelle pour les méthodes Dirichlet-Robin et Neumann-Robin sont :

— Dirichlet-Robin ($\alpha_{s-R} \rightarrow \infty$) :

$$z = \frac{K_f}{(K_s + \alpha_{f-R})} \kappa_f - \frac{(K_f - \alpha_{f-R} + h)}{(K_s + \alpha_{f-R})} \quad (\text{A.65})$$

— Neumann-Robin ($\alpha_{s-R} = 0$) :

$$z = \frac{\alpha_{f-R} K_f}{(K_f + h) (K_s + \alpha_{f-R})} \kappa_f + \frac{K_s (K_f - \alpha_{f-R} + h)}{(K_f + h) (K_s + \alpha_{f-R})} \quad (\text{A.66})$$

Dans ces travaux de thèse, seule la méthode Dirichlet-Robin a été analysée. Le coefficient optimal de la méthode Dirichlet-Robin est situé à l'intersection de la branche de Neumann avec celle de Dirichlet. Cette intersection est obtenue en résolvant l'égalité suivante :

$$|g(z = -1)| = |g(z = 1)| \quad (\text{A.67})$$

En combinant l'Équation (A.65) avec l'Équation (3.3), l'équation précédente (A.67) devient :

$$\left| \frac{K_f}{(K_s + \alpha_{f-R})} \bar{D}_f - \frac{(K_f - \alpha_{f-R} + h)}{(K_s + \alpha_{f-R})} \right| = \left| \frac{K_f}{(K_s + \alpha_{f-R})} - \frac{(K_f - \alpha_{f-R} + h)}{(K_s + \alpha_{f-R})} \right| \quad (A.68)$$

$$K_f (\bar{D}_f - 1) - h^R + \alpha_{f-R}^{(opt)} = h^R - \alpha_{f-R}^{(opt)} \quad (A.69)$$

$$\alpha_{f-R}^{(opt)} = h + \frac{K_f}{2} (1 - \bar{D}_f) \alpha_{f-R}^{(opt)} = h + \alpha_f^{(opt)} \quad (A.70)$$

où $\alpha_f^{(opt)}$ est le coefficient optimal de la méthode Dirichlet-Robin sans prise en compte du rayonnement (cf. Équation (2.49)).

A.3 COUPLAGE TRANSITOIRE

L'étude de stabilité pour le couplage transitoire présenté par Errera, Lazareff et al., 2017 est très similaire à celle réalisée pour le couplage stationnaire. Cette fois nous résolvons le problème de thermique transitoire dans le solide et l'état stationnaire pour l'écoulement fluide.

La figure A.2 montre la discrétisation des deux domaines avec laquelle nous allons tirer les équations nécessaires pour l'étude de stabilité.

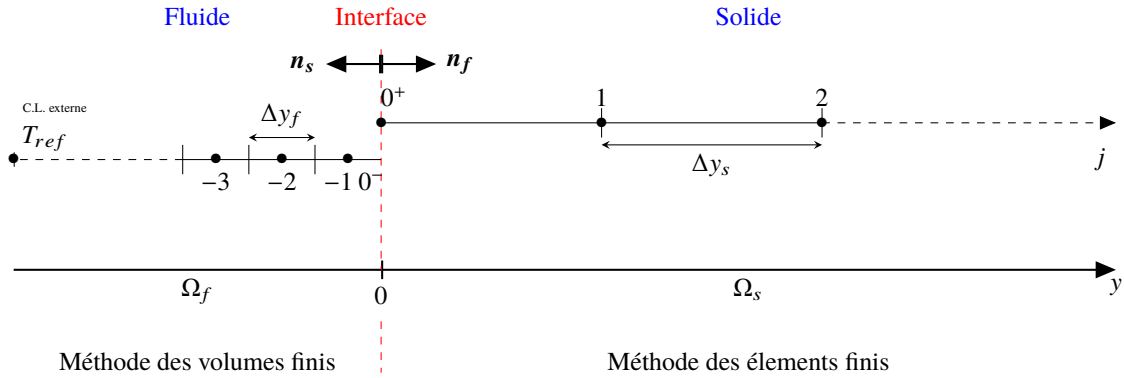


FIGURE A.2 – Étude de stabilité pour le couplage transitoire : discrétisation pour le modèle 1-D

Dans le cas d'une condition de Robin imposée sur les deux domaines on obtient la formulation générale suivante :

$$\begin{cases} \hat{q}_f - \alpha_s \hat{T}_f = -q_s - \alpha_f T_s & \text{Condition de Robin dans le fluide} \\ \hat{q}_s - \alpha_f \hat{T}_s = -q_f - \alpha_s T_f & \text{Condition de Robin dans le solide} \end{cases} \quad (A.71)$$

$$q_{0+}^{n+1} = -q_{0-}^n + \alpha_f^n (T_{0+}^{n+1} - T_{0-}^n) \quad \text{sur } j = 0+ \quad (\text{A.72a})$$

$$q_{0-}^{n+1} = -q_{0+}^{n+1} + \alpha_s^{n+1} (T_{0-}^{n+1} - T_{0+}^{n+1}) \quad \text{sur } j = 0- \quad (\text{A.72b})$$

avec les définitions des flux de chaleur suivantes :

$$q_{0+} = -\frac{\lambda_s}{\Delta y_s} (T_{0+} - T_1) = -K_s (T_{0+} - T_1) \quad (\text{A.73a})$$

$$q_{0-} = \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} (T_{-1/2} - T_{0-}) = h (T_{\text{ref}} - T_{0-}) \quad (\text{A.73b})$$

En combinant les Équations A.72b et A.73a et en négligeant l'exposant temporel des coefficients de couplage par souci de simplicité, nous obtenons :

$$(K_s + \alpha_f) T_{0+}^{n+1} = q_{0-}^n + K_s T_1^{n+1} + \alpha_f T_{0-}^n \quad (\text{A.74})$$

En remplaçant q_{0-}^n (cf. Éq. A.73b) nous obtenons l'expression de T_{0+}^{n+1} :

$$T_{0+}^{n+1} = \frac{K_s T_1^{n+1} + (\alpha_f - h) T_{0-}^n + h T_{\text{ref}}}{K_s + \alpha_f} \quad (\text{A.75})$$

Maintenant nous allons combiner les équations A.72a et A.73b :

$$(h + \alpha_s) T_{0-}^{n+1} = q_{0+}^{n+1} + \alpha_s T_{0+}^{n+1} + h T_{\text{ref}} \quad (\text{A.76})$$

En remplaçant la définition de q_{0+}^{n+1} (Éq. A.73a) nous parvenons à l'expression de T_{0-}^{n+1} :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{-(K_s - \alpha_s) T_{0+}^{n+1} + K_s T_1^{n+1} + h T_{\text{ref}}}{h + \alpha_s} \quad (\text{A.77})$$

Ceci nous permet de remplacer la définition de T_{0+}^{n+1} (Éq. A.75) dans l'expression de T_{0-}^{n+1} (Éq. A.77) afin d'obtenir l'équation définissant le facteur d'amplification temporelle :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{-(K_s - \alpha_s)}{h + \alpha_s} \left[\frac{K_s T_1^{n+1} + (\alpha_f - h) T_{0-}^n + h T_{\text{ref}}}{K_s + \alpha_f} \right] + \frac{K_s T_1^{n+1} + h T_{\text{ref}}}{h + \alpha_s} \quad (\text{A.78})$$

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{K_s (\alpha_f + \alpha_s)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} T_1^{n+1} - \frac{(K_s - \alpha_s) (\alpha_f - h)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} T_{0-}^n + \frac{h (\alpha_f + \alpha_s) T_{\text{ref}}}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (\text{A.79})$$

Comme pour l'étude de stabilité stationnaire, nous avons employé la théorie de Godunov-Ryabenkii qui introduit la solution du mode normal à l'interface en considérant les valeurs propres de la forme :

$$T_j^n \begin{cases} z^{n-1} \kappa_s^j & j > 0 \\ z^n \kappa_f^j & j \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

où z et κ sont respectivement les facteur d'amplification temporelle et spatiale.

Cette fois, la solution solide est calculée temporellement en utilisant une différences finies centrées pour la discrétisation spatiale et une formulation implicite pour la discrétisation temporelle :

$$(T_j^{n+1} - T_j^n) = D_s (T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) \quad (\text{A.81})$$

où D_s est nombre de Fourier défini par :

$$D_s = \frac{\lambda_s \Delta t_s}{\rho C_p \Delta y_s^2} \quad (\text{A.82})$$

avec Δt_s le pas de temps de résolution de la diffusion dans le solide, ρ la densité du solide et C_p la capacité thermique solide.

En substituant la définition de la température définie à Équation A.80, nous obtenons :

$$(z-1) \kappa_s = z D_s (\kappa_s^2 - 2\kappa_s + 1) \quad (\text{A.83})$$

$$\kappa_s^2 - \left(2 + \frac{z-1}{z D_s}\right) \kappa_s + 1 = 0 \quad (\text{A.84})$$

La résolution de cette équation quadratique nous donne deux racines complexes :

$$\kappa_s^\pm = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{D_s z} \pm \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{D_s z}\right)^2 - 4} \right) \quad (\text{A.85})$$

Afin d'éviter une croissance exponentielle de la solution lorsque $j \rightarrow \infty$, il est nécessaire que $\kappa_s(D_s, z) \leq 1$ pour toutes les valeurs réelles de D_f et complexes de z . L'expression caractérisé par le signe moins satisfait toujours cette condition. Alors nous avons :

$$\kappa_f(D_s, z) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{z-1}{D_s z} - \sqrt{\left(2 + \frac{z-1}{D_s z}\right)^2 - 4} \right) \quad (\text{A.86})$$

Dans le domaine fluide nous considérons des états stationnaires :

$$\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} \left(T_{-1/2}^{n+1} - T_{0-}^{n+1} \right) = h \left(T_{ref} - T_{0-}^{n+1} \right) \quad (A.87)$$

$$\left(\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - h \right) T_{0-}^{n+1} = \frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} T_{-1/2}^{n+1} - h T_{ref} \quad (A.88)$$

En substituant comme précédemment les définitions de l'Équation A.80 :

$$\sqrt{\kappa_f} = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f} - h}{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}} = 1 - \frac{h}{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}} \quad (A.89)$$

Nous arrivons à la définition du facteur amplification spatiale pour le fluide :

$$\kappa_f = \frac{1}{\left(1 - \frac{h}{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}} \right)^2} \quad (A.90)$$

Maintenant pour obtenir l'expression du facteur d'amplification temporelle z , nous allons substituer la nouvelle définition de la température (cf. Éq. A.80) dans l'Équation A.79 :

$$T_{0-}^{n+1} = \frac{K_s (\alpha_f + \alpha_s)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} T_1^{n+1} + \frac{(K_s - \alpha_s) (h - \alpha_f)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} T_{0-}^n + \text{const} \quad (A.91)$$

$$z^{n+1} \kappa_f^0 = \frac{K_s (\alpha_f + \alpha_s)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} z^n \kappa_s - \frac{(K_s - \alpha_s) (h - \alpha_f)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} z^n \kappa_f^0 + \text{const} \quad (A.92)$$

Finalement, on obtient l'expression du facteur d'amplification temporelle pour un problème transitoire dans le cas où la méthode Robin-Robin est utilisée :

$$z = \frac{K_s (\alpha_f + \alpha_s)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \kappa_s - \frac{(K_s - \alpha_s) (h - \alpha_f)}{(h + \alpha_s) (K_s + \alpha_f)} \quad (A.93)$$

B | DÉMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES

Dans cette annexe, les différentes démonstrations faites au cours de la thèse sont détaillées.

B.1 ÉTUDE THÉORIQUE DE LA MÉTHODE DIRICHLET-ROBIN

B.1.1 Effet de la taille de la première maille fluide sur la stabilité

Ici nous montrons l'effet de la résolution de la couche limite sur le nombre de Biot numérique, c'est-à-dire pour $\Delta y_f \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi_v = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta (1 - \bar{D}_f) = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta \left(1 - \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \right) \quad (B.1)$$

où $Bi^\Delta = \frac{K_f}{K_s} = \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y_f}}{\frac{\lambda_s}{\Delta y_s}}$ et $D_f = \frac{\alpha_f \Delta t}{\Delta y^2} = \frac{\lambda_f \Delta t}{\rho c_p \Delta y^2}$. Si nous prenons $Bi^\Delta = \frac{2\lambda_f \Delta y_s}{\lambda_s} \frac{1}{\Delta y} = \frac{B}{\Delta y}$ et $D_f = \frac{\lambda_f \Delta t}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{C}{\Delta y^2}$, nous obtenons :

$$\lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi_v = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta \left(1 - \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \right) = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta y} \left(1 - \frac{\frac{C}{\Delta y^2}}{1 + \frac{C}{\Delta y^2} + \sqrt{1 + 2\frac{C}{\Delta y^2}}} \right) \quad (B.2)$$

La limite de $\bar{D}_f$ est dans un premier temps recherchée :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \bar{D}_f &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} = \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{\frac{C}{\Delta y^2}}{1 + \frac{C}{\Delta y^2} + \sqrt{1 + 2\frac{C}{\Delta y^2}}} = \\ &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{C}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} = 1 \quad (B.3) \end{aligned}$$

Ensuite, la limite du nombre de Biot numérique Bi_v est calculée :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi_v &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} Bi^\Delta \left(1 - \frac{D_f}{1 + D_f + \sqrt{1 + 2D_f}} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta y} \left(1 - \frac{C}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta y} \left(\frac{\Delta y^2 + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta y_f \rightarrow 0} B \left(\frac{\Delta y + \sqrt{\Delta y^2 + 2C}}{\Delta y^2 + C + \sqrt{\Delta y^4 + 2C\Delta y^2}} \right) = \\
 &= B \frac{2}{C} = \frac{2\lambda_f \Lambda_f}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2\rho c_p}{\lambda_f \Delta t}} = \frac{2\lambda_f \Lambda_f}{\lambda_s} \sqrt{\frac{2}{a_f \Delta t}} \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

Avec un raisonnement similaire l'expression de $\alpha_f^{(opt)}$ dans le cas de Dirichlet-Robin est :

$$\alpha_f^{(opt)} = \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} \quad (B.5)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_f^{(opt)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} \quad (B.6)$$

où $K_f = \frac{2\lambda_f}{\Delta y}$ et $D_f = \frac{a_f \Delta t}{\Delta y^2}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{K_f}{1 + \sqrt{1 + 2D_f}} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{2\lambda_f}{\Delta y}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2a_f \Delta t}{\Delta y^2}}} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 2\lambda_f \frac{1}{\Delta y + \sqrt{\Delta y^2 + 2a_f \Delta t}} = \\
 &= 2\lambda_f \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y + \sqrt{\Delta y^2 + 2a_f \Delta t}} = 2\lambda_f \frac{1}{\sqrt{2a_f \Delta t}} = \frac{2\lambda_f}{\sqrt{2a_f \Delta t}} \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

Cette formule peut être également écrite de la façon suivante :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_f^{(opt)} = \frac{2\lambda_f}{\sqrt{2a_f \Delta t}} = \frac{2\lambda_f}{\sqrt{2 \frac{\lambda_f}{\rho C_p} \Delta t}} = \frac{\sqrt{2\lambda_f \rho C_p}}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{\sqrt{2}E_f}{\sqrt{\Delta t}} \quad (B.8)$$

où $E_f = \sqrt{\lambda_f \rho C_p}$ est l'efficacité thermique, c'est-à-dire la capacité à échanger de l'énergie thermique avec son environnement (Errera, Moretti, Salem et al., 2019).

C

VALIDATION DE LA CONDITION DE ROBIN
DANS ELSA VIA UNE COMPARAISON
AVEC LE COUPLAGE CEDRE-ZSET

Dans cette annexe, nous allons réaliser la même étude paramétrique que celle présentée à la section 5.3 mais cette fois-ci, l'écoulement fluide est modélisé avec le logiciel CEDRE (Calcul d'Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique).

CEDRE est la plateforme de simulation numérique pour l'énergétique de l'ONERA. Cette plateforme a été conçue pour traiter les écoulements complexes rencontrés dans le domaine de l'énergétique et de la propulsion en prenant en compte une grande variété de phénomènes physico-chimiques et les mécanismes de couplage associés. CEDRE est un solveur d'équation LES ou RANS et il utilise des maillages non-structurés généraux, qui permettent une grande souplesse dans la prise en compte des effets technologiques les plus complexes.

Cette étude a été réalisée pour valider l'implémentation en forme "explicite" dans elsA lors d'un couplage aérothermique. En effet, le solveur fluide CEDRE possède une condition aux limites Robin implémentée en forme "implicite" car il est doté, à la différence d'elsA, d'éléments surfaciques aptes à l'application directe d'une condition aux limites de type Dirichlet.

L'étude paramétrique a été réalisée sur le cas test décrit au paragraphe 3.3 avec les conditions thermiques utilisées dans l'étude avec elsA (cf. §5.3). Nous avons traité le cas où $Bi_v = 6, 85$ et ensuite le cas où $Bi_v = 127$.

La Figure C.1 montre la comparaison entre l'étude paramétrique réalisée avec un couplage CEDRE-Zset (Figure C.1a) et celle effectuée via le couplage elsA-Zset (Figure C.1b). La première est composée de 304 calculs (16 valeurs de α_s et 19 de α_f) au lieu de 1344 qui est le nombre de calculs effectué avec le couplage elsA-Zset. Malgré le nombre de calculs nettement inférieur de l'étude paramétrique CEDRE-Zset, cette étude présente des résultats proches de ceux obtenus avec elsA (en termes de stabilité de la méthode Robin-Robin). Les deux études présentent également une zone d'instabilité déformée lorsque α_s est plus faible. En effet, théoriquement la zone instable est délimitée par la courbe $\alpha_f^{(opt)}(\alpha_s)$ (cf. Figure 5.1b). Des valeurs du résidu en norme infini de la température à l'interface solide (cf. Éq 3.18) sont présentes en haut à droite (méthode Dirichlet-Dirichlet) et en bas à gauche (méthode Neumann-Neumann) de la Figure C.1a.

Cette étude montre que l'utilisation de la condition de Robin "explicite" et l'utilisation de la condition de Robin "implicite" ont un effet similaire sur la stabilité du problème

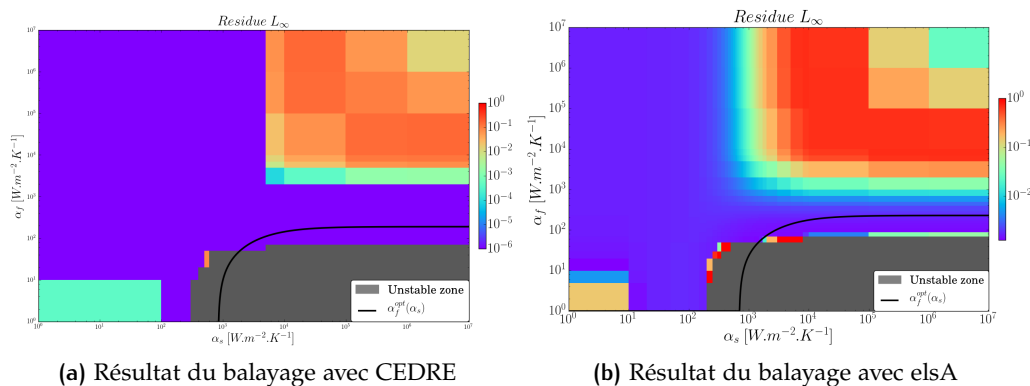


FIGURE C.1 – Comparaison du comportement de la méthode Dirichlet-Robin vis-à-vis de la variation des coefficients de couplage α_f et α_s dans le cas d'un couplage CEDRE-Zset (à gauche) et dans le cas d'un couplage elsA-Zset (à droite). Cas test à $Bi_\gamma = 6, 85$.

couplé. La condition de Robin dans elsA a alors été également validée en terme de stabilité.

Pour aller plus loin dans cette validation, la même étude a été menée sur un cas à interaction thermique forte ($Bi_\gamma = 127$). La Figure C.2 montre la comparaison des deux études paramétriques. Dans ce cas également l'étude paramétrique effectuée via le couplage CEDRE-Zset est constituée de 475 calculs (25 valeurs de α_s et 19 de α_f) au lieu de 1700 pour le couplage elsA-Zset.

La similitude des deux études paramétriques est nette. Les deux exhibent une zone instable plus marquée pour α_s faible et des résidus plus élevés vers le coin nord-est de la figure (méthode Dirichlet-Dirichlet).

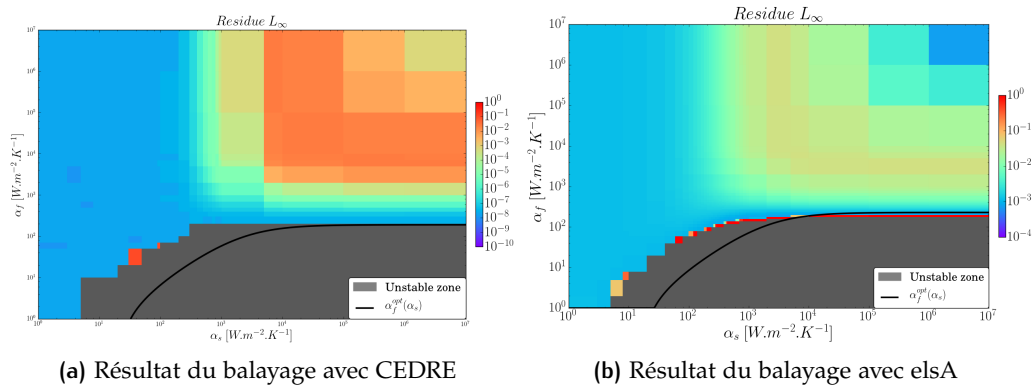


FIGURE C.2 – Comparaison du comportement de la méthode Dirichlet-Robin vis-à-vis de la variation des coefficients de couplage α_f et α_s dans le cas d'un couplage CEDRE-Zset (à gauche) et dans le cas d'un couplage elsA-Zset (à droite). Cas test à $Bi_v = 127$.

D

IMPLÉMENTATION DE L'ALGORITHME DE COUPLAGE QUASI-INSTATIONNAIRE DANS LE SOLVEUR Z-SET

L'algorithme de couplage a été implémenté dans un plugin du code solide Z-set. Dans Z-set il est possible d'ajouter des nouvelles fonctionnalités à l'aide de *plugins*, ce qui évite de modifier le cœur du logiciel.

La Figure D.1 schématise les principales étapes d'un calcul générique réalisé par Z-set. Le schéma a été réalisé pour un calcul de mécanique du solide mais il est également utilisable pour un calcul thermique.

Dans Z-set, il est possible d'implémenter un algorithme de couplage via l'objet `COUPLED_PROBLEM_COMPONENT` qui régit les différentes étapes du calcul. Cet objet permet, par exemple, de modifier les actions à réaliser avant et après chaque incrément (*start_increment* et *end_increment*) mais aussi l'écriture des fichiers contenant les champs résultants ou encore les fichiers de reprise du calcul.

Pour l'implémentation de l'algorithme quasi-stationnaire (cf. Figure 1.8), la plupart des modifications ont été effectuées dans la fonction *end_increment*. Dans cette fonction, si $t = t_c + \Delta t_c$, on vérifie d'abord si le critère de convergence a été atteint et, ensuite, si ce dernier n'a pas été atteint, on appelle le moteur de couplage. Z-set envoie alors la température à l'interface au solveur fluide et il attend de recevoir les nouveaux champs thermiques (température et flux de chaleur). Une fois ces nouveaux champs reçus, ils sont stockés dans un objet (`STACK_OF_TIMED_VECTOR_FIELD`) qui permet d'ordonner temporellement les champs et de pouvoir faire des opérations élémentaires avec (interpolation linéaire, quadratique, etc...). Si le critère de convergence n'a pas été atteint, il est nécessaire d'informer le code solide pour qu'il recommence le calcul à partir du dernier instant où le couplage a convergé, c'est-à-dire lorsque $t = t_c$. Puisque le code Z-set ne dispose pas d'une telle fonction, il a été nécessaire de contourner cette carence en modifiant le résultat de la vérification du résidu $\|R\|$ pendant la résolution du processus itératif réalisée dans l'incrément (cf. Fig. D.1). En effet, si le processus itératif n'a pas convergé, Z-set refait le calcul à partir du dernier incrément enregistré dans le fichier de reprise. En résumé, cette démarche est composée de deux étapes :

- Écriture dans le fichier de reprise des instants où l'algorithme a convergé, le dernier est $t = t_c$ (fonction *manage_restart*);
- Si le critère de convergence du couplage est atteint, le processus itératif a convergé. Dans le cas contraire, le calcul doit être refait à partir du dernier instant présent dans le fichier de reprise ($t = t_c$). Ceci a été codé dans la fonction *reset*.

Dans l'objet `COUPLED_PROBLEM_COMPONENT`, nous avons également implémenté les fonctions permettant de calculer les coefficients de couplage de la méthode générale Robin-Robin (α_f et α_s). Ces coefficients, qui sont traités dans la section 7.1 sont calculés en fonction des quantités pariétales reçues du solveur fluide.

Concernant l'application des conditions aux limites, elles sont gérées par l'objet `BC`. Cet objet est unique à chaque surface où la condition limite est imposée. C'est dans cet objet que les différentes prédictions traitées au cours des chapitres 7 et 8 sont implémentées.

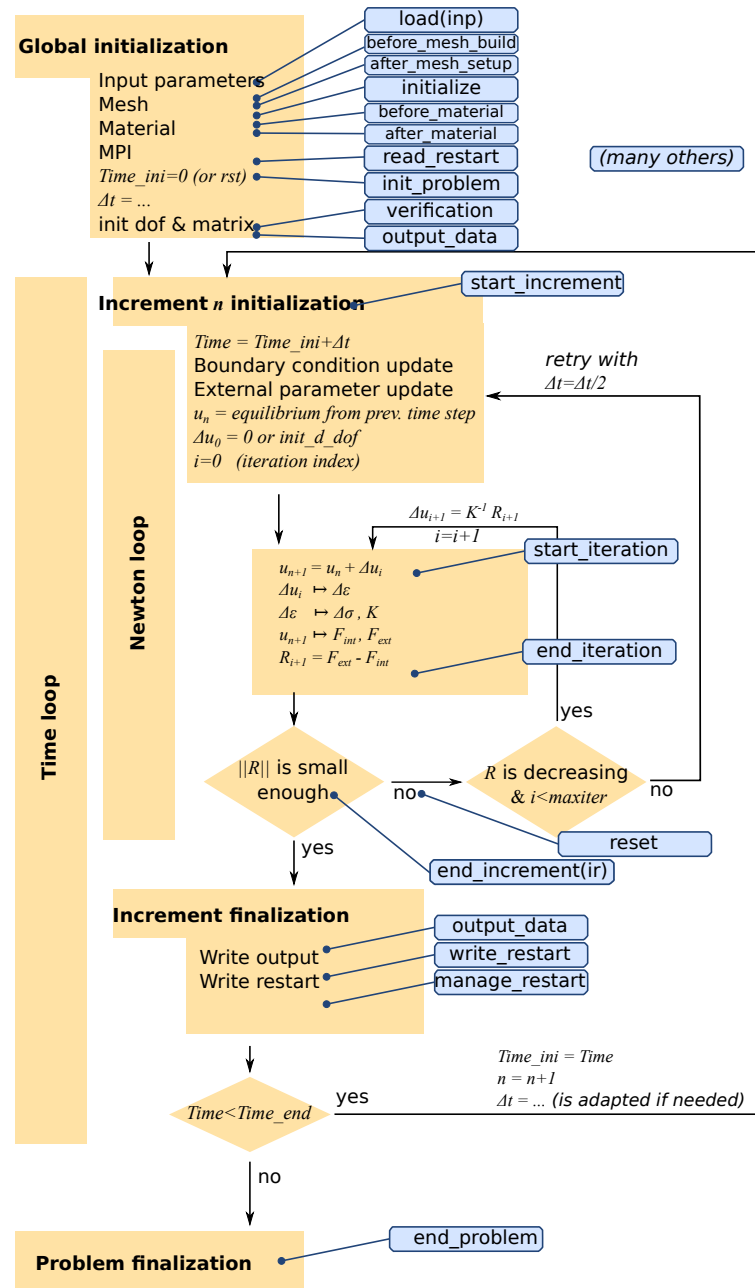


FIGURE D.1 – Schématisation des principales étapes du code Z-set parcourues afin de réaliser un calcul générique.

BIBLIOGRAPHIE

Alexiou, A. et K. Mathioudakis

- 2009 "Secondary Air System Component Modeling for Engine Performance Simulations", en, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 131, 3, p. 031202, ISSN : 07424795, DOI : [10.1115/1.3030878](https://doi.org/10.1115/1.3030878).

Amaya, Jorge, E Collado, B Cuenot + A N et D T Poinso

- 2010 "Coupling LES, radiation and structure in gas turbine simulations", in *Center for Turbulence Research*, Proceedings of the Summer Program 2010.

Badia, Santiago, Fabio Nobile et Christian Vergara

- 2008 "Fluid-structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions", en, *Journal of Computational Physics*, 227, 14 (juil. 2008), p. 7027-7051, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2008.04.006](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.04.006).
- 2009 "Robin-Robin preconditioned Krylov methods for fluid-structure interaction problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 33-36 (juil. 2009), p. 2768-2784, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/j.cma.2009.04.004](https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.04.004).

Baqu , Bénédicte

- 2012 *Couplage a ro-thermo-mécanique pour la prédiction de la déformation d'une plaque soumise à une flamme*, fr, thèse de doct.

Birken, Philipp, Karsten J. Quint, Stefan Hartmann et Andreas Meister

- 2010 "A time-adaptive fluid-structure interaction method for thermal coupling", *Computing and Visualization in Science*, 13, 7 (oct. 2010), p. 331-340, ISSN : 1432-9360, DOI : [10.1007/s00791-010-0150-4](https://doi.org/10.1007/s00791-010-0150-4).

Blom, Frederic J.

- 1998 "A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem", en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167, 3-4 (d c. 1998), p. 369-391, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00151-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00151-0).

Boukhris, Y., L. Gharbi et N. Ghrab-Morcos

- 2008 "Simulating Air Flow, with a Zonal Model, for Natural Convection", *International Journal of Ventilation*, 7, 3 (d c. 2008), p. 207-219, ISSN : 1473-3315, DOI : [10.1080/14733315.2008.11683813](https://doi.org/10.1080/14733315.2008.11683813).

Cambier, Laurent, Sébastien Heib et Sylvie Plot

- 2013 "The Onera elsA CFD software : input from research and feedback from industry", *Mechanics & Industry*, 14, 3, p. 159-174, ISSN : 2257-7777, DOI : [10.1051/meca/2013056](https://doi.org/10.1051/meca/2013056).

Chemin, Sébastien

- 2006 *Etude des interactions thermiques fluide-structure par un couplage de codes de calcul*, thèse de doct., 182f.

CWIPi

- 2019 *La bibliothèque de couplage CWIPi | Coupling With Interpolation Parallel Interface*, <https://w3.onera.fr/cwipi/> (visité le 02/10/2019).

Davidzon, Michael I.

- 2012 "Newton's law of cooling and its interpretation", en, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 21-22 (oct. 2012), p. 5397-5402, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.03.035](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.03.035).

Degiovanni, A. et B. Remy

- 2016 "An alternative to heat transfer coefficient : A relevant model of heat transfer between a developed fluid flow and a non-isothermal wall in the transient regime", *International Journal of Thermal Sciences*, 102 (avr. 2016), p. 62-77, ISSN : 1290-0729, DOI : [10.1016/J.IJTHEMALSCI.2015.10.036](https://doi.org/10.1016/J.IJTHEMALSCI.2015.10.036).

Desoto, Simon

- 1968 "Coupled radiation, conduction and convection in entrance region flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 11, 1 (jan. 1968), p. 39-53, ISSN : 0017-9310, DOI : [10.1016/0017-9310\(68\)90062-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(68)90062-8).

Divo, E., Erlendur Steinthorsson, A. J. Kassab et R. Bialecki

- 2002 "An iterative BEM/FVM protocol for steady-state multi-dimensional conjugate heat transfer in compressible flows", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, 5, p. 447-454, ISSN : 09557997, DOI : [10.1016/S0955-7997\(01\)00106-0](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(01)00106-0).

Duchaine, Florent, A. Corpron, L. Pons, V. Moureau, F. Nicoud et T. Poinsot

- 2009 "Development and assessment of a coupled strategy for conjugate heat transfer with Large Eddy Simulation : Application to a cooled turbine blade", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30, 6 (déc. 2009), p. 1129-1141, ISSN : 0142727X, DOI : [10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.07.004](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.07.004).

Einstein, Thomas H

- 1969 *Radiant heat transfer to absorbing gases enclosed between parallel flat plates with flow and conduction*, rapp. tech., NASA.

El Khoury, Roch R., Marc Errera, Khalil El Khoury et Maroun Nemer

- 2017 "Efficiency of coupling schemes for the treatment of steady state fluid-structure thermal interactions", *International Journal of Thermal Sciences*, 115, Supplement C (mai 2017), p. 225-235, ISSN : 12900729, DOI : [10.1016/j.ijthermalsci.2017.02.001](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.02.001).

elsA

- 2019 *elsA - Aerodynamics simulation software*, <http://elsa.onera.fr/> (visité le 03/10/2019).

Ern, Alexandre et Jean-Luc Guermond

- 2004 *Theory and Practice of Finite Elements*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, t. 159, ISBN : 978-1-4419-1918-2, DOI : [10.1007/978-1-4757-4355-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4355-5).

Errera, Marc et Bénédicte Baqué

- 2013 "A quasi-dynamic procedure for coupled thermal simulations", en, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72, 11 (août 2013), p. 1183-1206, ISSN : 02712091, DOI : [10.1002/flid.3782](https://doi.org/10.1002/flid.3782).

Errera, Marc et Sébastien Chemin

- 2013 "Optimal solutions of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis", *Journal of Computational Physics*, 245, Supplement C (juil. 2013), p. 431-455, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2013.03.004](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.03.004).

Errera, Marc et Florent Duchaine

- 2016 "Comparative study of coupling coefficients in Dirichlet-Robin procedure for fluid-structure aerothermal simulations", *Journal of Computational Physics*, 312, Supplement C (mai 2016), p. 218-234, ISSN : 10902716, DOI : [10.1016/j.jcp.2016.02.022](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.022).

Errera, Marc, M. Lazareff, Jean-Didier Garaud, T. Soubrié, C. Douta et T. Federici

- 2017 "A coupling approach to modeling heat transfer during a full transient flight cycle", en, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 110 (juil. 2017), p. 587-605, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.03.048](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.03.048).

Errera, Marc et Rocco Moretti

- 2016 "Numerical Interface Treatments for Weak and Strong Interaction in Conjugate Heat Transfer Problems", in *VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering*.

Errera, Marc, Rocco Moretti, Yohann Bachelier et Tristan Soubrié

- 2019 "Stable and Optimal Interface Treatment for Partitioned Conjugate Heat Transfer Problems", en, in *American Institute of Aeronautics et Astronautics*, San Diego, California, ISBN : 978-1-62410-578-4, DOI : [10.2514/6.2019-1561](https://doi.org/10.2514/6.2019-1561).

Errera, Marc, Rocco Moretti, Rami Salem, Yohann Bachelier, Thomas Arrivé et Minh Nguyen

- 2019 "A single stable scheme for steady conjugate heat transfer problems", *Journal of Computational Physics*, 394, p. 491-502, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2019.05.036](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.05.036).

Fachinotti, Víctor D. et Michel Bellet

- 2006 "Linear tetrahedral finite elements for thermal shock problems", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 16, 5 (juil. 2006), sous la dir. de Vaughan Voller, p. 590-601, ISSN : 0961-5539, DOI : [10.1108/09615530610669120](https://doi.org/10.1108/09615530610669120).

Farhat, Charbel et M. Lesoinne

- 2000 "Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems", en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182, 3-4, p. 499-515, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/S0045-7825\(99\)00206-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00206-6).

Farhat, Charbel, M. Lesoinne et Patrick Le Tallec

- 1998 "Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces : Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity", en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157, 1-2 (avr. 1998), p. 95-114, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/S0045-7825\(97\)00216-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00216-8).

Felippa, Carlos A. et K. C. Park

- 1980 "Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems : Formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 24, 1, p. 61-111, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/0045-7825\(80\)90040-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(80)90040-7).

Felippa, Carlos A., K. C. Park et Charbel Farhat

- 2001 "Partitioned analysis of coupled mechanical systems", en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 24-25 (mar. 2001), p. 3247-3270, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/S0045-7825\(00\)00391-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00391-1).

Fluent

- 2019 *ANSYS Fluent Software | CFD Simulation*, <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent> (visité le 27/09/2019).

Ganine, Vlad, Nicholas J. Hills et B. L. Lapworth

- 2013 "Nonlinear acceleration of coupled fluid-structure transient thermal problems by Anderson mixing", en, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71, 8 (mar. 2013), p. 939-959, ISSN : 10970363, DOI : [10.1002/flid.3689](https://doi.org/10.1002/flid.3689).

Ganine, Vlad, Umesh Javiya, Nicholas J. Hills et John Chew

- 2012 "Coupled Fluid-Structure Transient Thermal Analysis of a Gas Turbine Internal Air System With Multiple Cavities", en, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 134, 10, p. 102508, ISSN : 07424795, DOI : [10.1115/1.4007060](https://doi.org/10.1115/1.4007060).

Garaud, Jean-Didier

- 2008 *Développement de méthodes de couplage aéro-thermo-mécanique pour la prédiction d'instabilités dans les structures aérospatiales chaudes*, Français, thèse de doct., UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE.

Gerbeau, Jean-Frédéric et Marina Vidrascu

- 2003 "A Quasi-Newton Algorithm Based on a Reduced Model for Fluid-Structure Interaction Problems in Blood Flows", *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, ISSN : 0764-583X, DOI : [10.1051/m2an:2003049](https://doi.org/10.1051/m2an:2003049).

Giles, M. B.

- 1997 *Stability analysis of numerical interface conditions in fluid-structure thermal analysis*, Oxford University Computing Laboratory, Wolfson Building, Parks Road, Oxford OX1 3QD, U.K., DOI : [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19970830\)25:4<421::AID-FLD557>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19970830)25:4<421::AID-FLD557>3.0.CO;2-J).

Gimenez, G., Marc Errera, D. Baillis, Y. Smith et F. Pardo

- 2016 "A coupling numerical methodology for weakly transient conjugate heat transfer problems", en, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 97 (juin 2016), p. 975-989, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.037](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.037).

Godunov et Ryabenkii

- 1964 "Theory of difference schemes-an introduction", *Amsterdam : North Holland*, 1964.

Goulard, Robert et Madeline Goulard

- 1959 "Energy transfer in the Couette flow of a radiant and chemically reacting gas", in *Proceedings of the 1959 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*, p. 126-139.

Grandmont, C., V. Guimet et Yvon Maday

- 2002 "Numerical analysis of some decoupling techniques for the approximation of the unsteady fluid structure interaction", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, ISSN : 0218-2025, DOI : [10.1142/s0218202501001367](https://doi.org/10.1142/s0218202501001367).

Gustafsson, Bertil

- 2011 "The Godunov-Ryabenkii Condition : The Beginning of a New Stability Theory", in *Godunov Methods*, November, Springer US, Boston, MA, p. 425-443, ISBN : 978-1-4615-0663-8, DOI : [10.1007/978-1-4615-0663-8_42](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0663-8_42).

Gustafsson, Bertil, Heinz-Otto Kreiss et Arne Sundstrom

- 1972 "Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial Boundary Value Problems. II", *Mathematics of Computation*, 26, 119 (juil. 1972), p. 649, ISSN : 00255718, DOI : [10.2307/2005093](https://doi.org/10.2307/2005093).

He, L. et M. Fadl

- 2017 "Multi-scale time integration for transient conjugate heat transfer", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 83, 12 (avr. 2017), p. 887-904, ISSN : 02712091, DOI : [10.1002/flid.4295](https://doi.org/10.1002/flid.4295).

He, L. et M. L. G. Oldfield

- 2010 "Unsteady Conjugate Heat Transfer Modeling", en, in *Journal of Turbomachinery*, 3, ASME, t. 133, p. 031022, ISBN : 978-0-7918-4884-5, DOI : [10.1115/1.4001245](https://doi.org/10.1115/1.4001245).

Heil, Matthias, Andrew L. Hazel et Jonathan Boyle

- 2008 "Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems : Segregated versus monolithic approaches", en, *Computational Mechanics*, 43, 1 (déc. 2008), p. 91-101, ISSN : 01787675, DOI : [10.1007/s00466-008-0270-6](https://doi.org/10.1007/s00466-008-0270-6).

Henshaw, William D. et Kyle K. Chand

- 2009 "A composite grid solver for conjugate heat transfer in fluid-structure systems", en, *Journal of Computational Physics*, 228, 10 (juin 2009), p. 3708-3741, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2009.02.007](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.007).

Heselhaus, Andreas, D T Vogel et H Karain

- 1992 "Coupling of 3D NS external flow calculations and internal 3D heat conduction calculations for cooled turbine blades", in *Proc. Propulsion Energetics Panel 80th Symp., Antalya, Turkey. AGARD CP*, t. 527, p. 40.

Hübner, Björn, Elmar Walhorn et Dieter Dinkler

- 2004 "A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements", en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 23-26 (juin 2004), p. 2087-2104, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/j.cma.2004.01.024](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.024).

Illingworth, Justin B., Nicholas J. Hills et Christopher J. Barnes

- 2008 "3D Fluid-Solid Heat Transfer Coupling of an Aero Engine Pre-Swirl System", en, in ASME, Reno, Nevada, USA, p. 801-811, ISBN : 978-0-7918-4726-8, DOI : [10.1115/gt2005-68939](https://doi.org/10.1115/gt2005-68939).

Jaiman, R. K., Philippe Geubelle, Eric Loth et X. Jiao

- 2011 "Transient fluid-structure interaction with non-matching spatial and temporal discretizations", en, *Computers and Fluids*, 50, 1 (nov. 2011), p. 120-135, ISSN : 00457930, DOI : [10.1016/j.compfluid.2011.07.001](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.07.001).

Jameson, A., W. Schmidt et E. Turkel

- 1981 “Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes”, in *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, American Institute of Aeronautics et Astronautics, Reston, Virigina, DOI : [10.2514/6.1981-1259](https://doi.org/10.2514/6.1981-1259).

Jaure, S, Florent Duchaine, G Staffebach et Olivier Gicquel

- 2013 “Massively parallel conjugate heat transfer methods relying on large eddy simulation applied to an aeronautical combustor”, *Computational Science & Discovery*, 6, 1 (oct. 2013), p. 015008, ISSN : 1749-4699, DOI : [10.1088/1749-4699/6/1/015008](https://doi.org/10.1088/1749-4699/6/1/015008).

Joshi, Ojas et Pénélope Leyland

- 2014 “Stability Analysis of a Partitioned Fluid–Structure Thermal Coupling Algorithm”, en, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 28, 1 (jan. 2014), p. 59-67, ISSN : 0887-8722, DOI : [10.2514/1.t4032](https://doi.org/10.2514/1.t4032).

Kazemi-Kamyab, V., A. H. Van Zuijlen et H. Bijl

- 2014 “Accuracy and stability analysis of a second-order time-accurate loosely coupled partitioned algorithm for transient conjugate heat transfer problems”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74, 2, p. 113-133, ISSN : 02712091, DOI : [10.1002/flid.3842](https://doi.org/10.1002/flid.3842).

Knoll, D.A. et D.E. Keyes

- 2004 “Jacobian-free Newton–Krylov methods : a survey of approaches and applications”, *Journal of Computational Physics*, 193, 2 (jan. 2004), p. 357-397, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2003.08.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.010).

Koren, Chaï, Ronan Vicquelin et Olivier Gicquel

- 2017 “Self-adaptive coupling frequency for unsteady coupled conjugate heat transfer simulations”, en, *International Journal of Thermal Sciences*, 118 (août 2017), p. 340-354, ISSN : 12900729, DOI : [10.1016/j.ijthermalsci.2017.04.023](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.04.023).
- 2018 “Multiphysics Simulation Combining Large-Eddy Simulation, Wall Heat Conduction and Radiative Energy Transfer to Predict Wall Temperature Induced by a Confined Premixed Swirling Flame”, *Flow, Turbulence and Combustion*, 101, 1 (juil. 2018), p. 77-102, ISSN : 1386-6184, DOI : [10.1007/s10494-018-9895-5](https://doi.org/10.1007/s10494-018-9895-5).

Küttler, Ulrich et Wolfgang A. Wall

- 2009 “Vector Extrapolation for Strong Coupling Fluid-Structure Interaction Solvers”, *Journal of Applied Mechanics*, 76, 2, p. 021205, ISSN : 00218936, DOI : [10.1115/1.3057468](https://doi.org/10.1115/1.3057468).

Le Tallec, Patrick, Jean-Frédéric Gerbeau, Patrice Hauret et Marina Vidrascu

- 2005 "Fluid structure interaction problems in large deformation", en, *Comptes Rendus - Mécanique*, 333, 12 (déc. 2005), p. 910-922, ISSN : 16310721, DOI : [10.1016/j.crme.2005.10.009](https://doi.org/10.1016/j.crme.2005.10.009).

Le Tallec, Patrick et J. Mouro

- 2001 "Fluid structure interaction with large structural displacements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/S0045-7825\(00\)00381-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00381-9).

Lindström, Jens et Jan Nordström

- 2010 "A stable and high-order accurate conjugate heat transfer problem", en, *Journal of Computational Physics*, 229, 14 (juil. 2010), p. 5440-5456, ISSN : 00219991, DOI : [10.1016/j.jcp.2010.04.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.04.010).

Matthies, Hermann G. et Jan Steindorf

- 2002 "Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction", in *Computers and Structures*, DOI : [10.1016/S0045-7949\(02\)00259-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00259-6).

Menter, F. R.

- 1993 "Zonal two equation κ - ω turbulence models for aerodynamic flows", in *AIAA 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*, 1993.

Mok, Daniel P., Wolfgang A. Wall et Ekkehard Ramm

- 2007 "Accelerated iterative substructuring schemes for instationary fluid-structure interaction", in *Computational Fluid and Solid Mechanics*, DOI : [10.1016/b978-008043944-0/50907-0](https://doi.org/10.1016/b978-008043944-0/50907-0).

Moretti, Rocco et Marc Errera

- 2018 "Comparison between Dirichlet-Robin and Neumann-Robin Interface Conditions in CHT Problems", in *5th International Conference of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer (FFHMT'18)*, Niagara Falls, Canada, DOI : [10.11159/ffhmt18.112](https://doi.org/10.11159/ffhmt18.112).

Moretti, Rocco, Marc Errera, Vincent Couaillier et Frédéric Feyel

- 2018 "Stability, convergence and optimization of interface treatments in weak and strong thermal fluid-structure interaction", *International Journal of Thermal Sciences*, 126, May 2017, p. 23-37, ISSN : 12900729, DOI : [10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.014](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.014).

Nobile, Fabio

- 2001 *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics*, eng, thèse de doct., DOI : [10.5075/epfl-thesis-2458](https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-2458).

OpenPalm

- 2019 *OpenPALM, a dynamic parallel code coupler*, https://www.cerfacs.fr/globc/PALM%7B%5C_%7DWEB/index.html (visité le 27/09/2019).

Piperno, Serge

- 1995 *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*, thèse de doct., 1 vol. (237 p.)

Piperno, Serge, Charbel Farhat et Bernard Larrouturnou

- 1995 "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I : Model problem, theory and two-dimensional application", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124, 1-2, p. 79-112, ISSN : 00457825, DOI : [10.1016/0045-7825\(95\)92707-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)92707-9).

Roe, B., R. K. Jaiman, A. Haselbacher et Philippe Geubelle

- 2008 "Combined interface boundary condition method for coupled thermal simulations", en, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57, 3 (mai 2008), p. 329-354, ISSN : 02712091, DOI : [10.1002/flid.1637](https://doi.org/10.1002/flid.1637).

Roux, François-Xavier et Jean-Didier Garaud

- 2009 "Domain Decomposition Methodology with Robin Interface Matching Conditions for Solving Strongly Coupled Fluid-Structure Problems", en, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 7, 1, p. 29-38, ISSN : 1543-1649, DOI : [10.1615/intjmultcompeng.v7.i1.50](https://doi.org/10.1615/intjmultcompeng.v7.i1.50).

Roux, François-Xavier, Frédéric Magoulès, Stéphanie Salmon et Laurent Series

- 2003 "Optimization of interface operator based on algebraic approach", *Domain decomposition methods in science and engineering*, 1, 297-304 (electronic).

Salem, Rami, Marc Errera et Julien Marty

- 2019 "Adaptive diffusive time-step in conjugate heat transfer interface conditions for thermal-barrier-coated applications", *International Journal of Thermal Sciences*, 145 (nov. 2019), p. 106048, ISSN : 12900729, DOI : [10.1016/j.ijthermalsci.2019.106048](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106048).

Scholl, Sebastian, Bart Janssens et Tom Verstraete

- 2018 "Stability of static conjugate heat transfer coupling approaches using Robin interface conditions", en, *Computers and Fluids*, 172 (juin 2018), p. 209-225, ISSN : 00457930, DOI : [10.1016/j.compfluid.2018.06.016](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.06.016).

Smout, Peter D., John Chew et P. R. N. Childs

- 2002 "Internal Cooling Air Systems for Gas Turbines.", in *Proceedings of ASME TURBO EXPO 2002*, Amsterdam, Netherlands, p. 1-8.

Spalart, P. et S. Allmaras

- 1992 "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows", in *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, American Institute of Aeronautics et Astronautics, Reston, Virigina, DOI : [10.2514/6.1992-439](https://doi.org/10.2514/6.1992-439).

Sun, Zixiang, John Chew, Nicholas J. Hills, Leo Lewis et Christophe Mabilat

- 2012 *Coupled Aerothermomechanical Simulation for a Turbine Disk Through a Full Transient Cycle*, DOI : [10.1115/1.4003242](https://doi.org/10.1115/1.4003242), <http://turbomachinery.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1468675>.

Sun, Zixiang, John Chew, Nicholas J. Hills, Konstantin N. Volkov et Christopher J. Barnes

- 2009 "Efficient FEA/CFD Thermal Coupling for Engineering Applications", en, in ASME, p. 1505-1515, ISBN : 978-0-7918-4314-7, DOI : [10.1115/gt2008-50638](https://doi.org/10.1115/gt2008-50638).
 2010 "Efficient Finite Element Analysis/Computational Fluid Dynamics Thermal Coupling for Engineering Applications", en, *Journal of Turbomachinery*, 132, 3, p. 031016, ISSN : 0889504X, DOI : [10.1115/1.3147105](https://doi.org/10.1115/1.3147105).

Tessé, Lionel, Francis Dupoirieux, Bernard Zamuner et Jean Taine

- 2002 "Radiative transfer in real gases using reciprocal and forward Monte Carlo methods and a correlated-k approach", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 13 (juin 2002), p. 2797-2814, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/S0017-9310\(02\)00009-1](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00009-1).

Verdicchio, John A., John Chew et Nicholas J. Hills

- 2001 "Coupled fluid/solid heat transfer computation for turbine discs", in *ASME TURBO EXPO 2001*, New Orleans, Louisiana.

Verstraete, Tom et Sebastian Scholl

- 2016 "Stability analysis of partitioned methods for predicting conjugate heat transfer", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 101, Supplement C (oct. 2016), p. 852-869, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.041](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.041).

Weeratunga, Sisira et Eddy Pramono

- 2013 "Direct coupled aeroelastic analysis through concurrent implicit time integration on a parallel computer", in *35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, DOI : [10.2514/6.1994-1550](https://doi.org/10.2514/6.1994-1550).

Zhang, Y.F., O. Gicquel et J. Taine

- 2012 "Optimized Emission-based Reciprocity Monte Carlo Method to speed up computation in complex systems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 25-26 (déc. 2012), p. 8172-8177, ISSN : 00179310, DOI : [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.028](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.028).

RÉSUMÉ

Ces travaux s'inscrivent dans la résolution de problèmes couplés aérothermiques. Il s'agit notamment d'améliorer les méthodes de couplage en termes de précision et de robustesse. La stabilité du couplage aérothermique en régime permanent a été d'abord étudiée (couplage faible). Un nombre de Biot numérique a été défini ce qui permet d'évaluer l'intensité de l'interaction thermique fluide-structure. Plusieurs méthodes (Dirichlet-Robin, Neumann-Robin et Robin-Robin) ont été étudiées et leur domaine de validité a été défini. La méthode Dirichlet-Robin avec un coefficient de sécurité s'est avérée la plus robuste et simple à mettre en œuvre. La prise en compte du rayonnement implique une déstabilisation majeure du problème aérothermique. La méthode de stabilisation a donc été modifiée afin de pouvoir stabiliser ce type de calcul. Dans un deuxième temps, la résolution de problèmes couplés aérothermiques en régime transitoire a été étudiée via l'algorithme partitionné quasi-instationnaire. Il s'agit d'une procédure itérative (couplage fort) entre le solide en régime transitoire et des état fluides en régime stationnaire, assurant ainsi l'égalité des flux de chaleur et de la température à chaque instant de couplage. La précision de cet algorithme a été analysée et améliorée. Enfin, l'algorithme quasi-instationnaire a été analysé sur des problèmes aérothermiques quasi-industriels de disques de turbine et compresseur aéronautiques.

MOTS CLÉS

Couplage aérothermique, interaction fluide-structure, stabilité, précision, conditions aux limites, turbomachines.

ABSTRACT

This work deals with the solution of coupled aerothermal problems. The aim of the work is to improve the accuracy and robustness of the coupling techniques. The stability of the aerothermal coupling for steady state problems is first studied (weak coupling). A numerical Biot number is defined, which allows to evaluate the intensity of the fluid-structure thermal interaction. Several methods (Dirichlet-Robin, Neumann-Robin and Robin-Robin) are studied and their ranges of validity are defined. The Dirichlet-Robin method with a safety coefficient, which presents the easiest implementation, proves to be the most robust. Taking radiation into account implies a major destabilization of the aerothermal problem. Thus, the stabilization method is modified in order to be able to stabilize this type of calculation. In the second part, the solution of coupled aerothermal problems in the transient regime is studied using the quasidynamic partitioned algorithm. This is an iterative procedure (strong coupling) between the thermal problem in the solid solved in the transient regime and the flow field at the steady state, thus ensuring equal heat flux and temperature at each coupling time. The accuracy of this algorithm is analysed and improved. Finally, the quasi-dynamic algorithm is analysed on quasi-industrial aerothermal problems of aeronautical compressor and turbine discs.

KEYWORDS

Aerothermal coupling (CHT), fluid-structure interaction, stability, precision, boundary conditions, turbomachinery.