



HAL
open science

Revêtements d'optique de transformation en hyperfréquences

Geoffroy Klotz

► **To cite this version:**

Geoffroy Klotz. Revêtements d'optique de transformation en hyperfréquences. Physique [physics]. Aix Marseille Université, 2020. Français. NNT: . tel-02991237

HAL Id: tel-02991237

<https://hal.science/tel-02991237>

Submitted on 5 Nov 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
ED 352 - Physique et Sciences de la Matière

Institut Fresnel - CEA DAM / Le Ripault
Direction Générale de l'Armement

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur
Spécialité : Énergie, rayonnement et plasma

Geoffroy KLOTZ

Revêtements d'optique de transformation en
hyperfréquences

Soutenue le 30/06/2020 devant le jury composé de :

E. LHEURETTE	Professeur - IEMN	Rapporteur
N. VUKADINOVIC	Docteur Ingénieur (HDR) - Dassault Aviation	Rapporteur
A.-Cl. TAROT	Enseignant chercheur (HDR) - IETR	Examineur
V. VIGNERAS	Professeur - ENSCBP	Examineur
Ph. POULIGUEN	Docteur Ingénieur (HDR) - DGA	Invité
S. ENOCH	Directeur de recherche (HDR) - Institut Fresnel	Directeur de thèse
N. MALLÉJAC	Docteur Ingénieur CEA DAM / Le Ripault	Co-directeur de thèse

Numéro national de thèse/suffixe local : 2017AIXM0001/001ED62



Cette œuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'optique transformationnelle et ses applications. Les capes et tapis d'invisibilité, ainsi que les revêtements mimétiques sont étudiés au travers de simulations dans les hyperfréquences à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics. Ces simulations permettent de comprendre les phénomènes en jeu et d'appréhender les difficultés de réalisation expérimentale. Nous abordons divers systèmes et discutons de leurs performances ainsi que de leur faisabilité. La réalisation de revêtements d'optique transformationnelle (OT) est un challenge important, pour lequel nous proposons une architecture des revêtements sous la forme d'une structuration multicouches. Les permittivités diélectriques et perméabilités magnétiques requises dans les revêtements d'OT étant peu communes, une part importante de ce travail s'est concentré sur les métamatériaux constitués de réseaux d'inclusions résonantes. Leur phénoménologie est abordée, ainsi que les techniques d'homogénéisation, permettant de leur affecter des propriétés effectives homogènes. Enfin, nous envisageons l'intégration de matériaux dispersifs en fréquence dans des capes, et proposons une méthodologie permettant aux revêtements de fonctionner sur une large bande fréquentielle.

Mots clés : métamatériaux, optique de transformation, cape d'invisibilité, tapis d'invisibilité, hyperfréquences, homogénéisation

Abstract

The present thesis work relates to transformational optics and its applications. Invisibility cloaks and carpets, as well as mimetic coatings, are studied using simulations with the commercial software COMSOL Multiphysics in the micro-wave domain. First, these simulations help in the understanding of the phenomena at stake and allow us to evaluate how challenging it would be to develop experimental devices. Based on objective criteria, we consider multiple systems and discuss their efficiency and feasibility. The realization of transformation optics coatings is a difficult challenge, so we suggest a multilayer design for the coatings. As dielectric permittivity and magnetic permeability required in the OT coatings are unusual among natural materials, we worked on resonant metamaterials composed of a lattice of small conducting structures. The physical origin of the phenomenon is investigated, as the homogenization technics allowing computation of effective homogeneous parameters. Finally, we consider the realization of invisibility cloaks using frequency dispersive metamaterials and developed a design allowing broadband operations.

Keywords: metamaterials, transformation optics, invisibility cloak, invisibility carpet, microwave, homogenization

Remerciements

Les trois années passées à réaliser ce travail de thèse ont été pour moi une expérience riche d'enseignements. Elles m'ont permis de mieux connaître le monde de la recherche et ses enjeux et de découvrir de l'intérieur ce qu'est un centre de recherche tel que celui du Ripault.

Je suis très heureux d'avoir pu rencontrer au sein de mon laboratoire au CEA des techniciens, ingénieurs, doctorants, stagiaires et alternants qui m'ont fait découvrir leurs métiers et m'ont communiqué leurs savoir-faire. En particulier, j'ai eu la chance de partager le bureau de Xavier Faget puis de Thomas Nussle avec qui j'ai eu des relations de travail enrichissantes et que je tiens à remercier. Merci également à Amira Guediche, Marie Darcheville, Julien Marchand et Romain Claveau, doctorants au CEA, pour leurs conseils avisés et leur soutien. J'ai également une pensée pour Isabelle Delpech, secrétaire du service, pour sa bienveillance et sa bonne humeur au quotidien. Enfin, je porte une attention particulière à Michaël Charles, ingénieur au CEA, qui m'a beaucoup aidé en me partageant son expertise et son expérience.

Merci à la DGA d'avoir été partenaire de ce projet de thèse, et à Philippe Pouliguen pour les discussions enrichissantes que nous avons eu.

Merci à Nicolas Malléjac et Stefan Enoch, mes encadrants, pour le temps qu'ils m'ont accordé durant ces trois années.

Merci à ma femme, Lucille, pour sa patience et son soutien.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Remerciements	5
Table des matières	6
Table des figures	9
Introduction	14
1 Optique de transformation et cloaking	15
1.1 Introduction	15
1.2 Description de l'optique de transformation	16
1.2.1 Déformation de l'espace	16
1.2.2 Propriétés matériau équivalentes	18
1.3 Point de vue mathématique	20
1.4 Applications de l'optique de transformation	24
1.4.1 Invisibilité	24
1.4.2 Mimétisme	35
1.5 Difficultés de réalisation d'un revêtement d'OT	36
1.5.1 Sensibilité de l'anisotropie	36
1.5.2 Sensibilité de la discrétisation	38
1.5.3 Sensibilité des valeurs extrêmes de permittivité et perméabilité	38
1.6 Métamatériaux	41
1.6.1 Introduction sur les métamatériaux	41
1.6.2 Métamatériaux à faible indice	42
1.6.3 Chiralité artificielle	43
1.6.4 Circuits maxwelliens	44
1.7 Conclusion	44
2 Applications de l'Optique transformationnelles	45
2.1 Introduction	45
2.2 Etat de l'art des réalisations	46
2.2.1 Capes d'invisibilité	46
2.2.2 Mapping conforme et quasi-conforme	46
2.2.3 Tapis par contrôle de phase	47
2.2.4 Capes par annulation de la diffusion	48
2.2.5 Conclusion	50

2.3	Notion de mimétisme, qualification des revêtements d'optique transformationnelle	50
2.3.1	Introduction	50
2.3.2	Vocabulaire	51
2.3.3	Critère de mimétisme	51
2.4	Revêtement mimétique : transformer les carrés en cercles	52
2.5	Tapis d'invisibilité par troncature de cape	55
2.5.1	Motivations et objectif	55
2.5.2	Description de l'approche	55
2.5.3	Simulations full-wave	59
2.6	Invisibilité d'un objet longiligne	63
2.6.1	Positionnement de l'étude	63
2.6.2	Résultats et écarts par rapport aux attentes	69
2.6.3	Cape par compression sphérique	71
2.7	Conclusion	74
3	Structuration des revêtements	75
3.1	Introduction	75
3.2	Homogénéisation, création d'anisotropie	77
3.2.1	Bornes de Wiener	77
3.2.2	Cape sphérique et structure multicouche	79
3.2.3	Cape cylindrique et structure multicouche	85
3.3	Vers un revêtement réaliste	93
3.3.1	Tapis d'invisibilité	93
3.3.2	Tapis de mimétisme	96
3.4	Intégration de matériaux anisotropes	99
3.5	Perspectives	100
3.5.1	Structuration en voxels	100
3.5.2	Conclusion	100
4	Métamatériaux conducteurs résonants	101
4.1	Introduction	101
4.2	Bibliographie	102
4.2.1	Étude de la diffraction d'un objet	102
4.2.2	Les circuits équivalents	104
4.3	Interface métal-diélectrique courbée	105
4.3.1	Description de la géométrie du fil métallique	105
4.3.2	Équations dans le repère de Frenet	109
4.3.3	Résolution par séparation des variables	111
4.3.4	Équation des modes de surface	112
4.3.5	Résonance de corde vibrante	113
4.4	Courants le long d'un SRR	114
4.5	Etude paramétrique d'un SRR	119
4.5.1	Impact de la longueur curviligne	120
4.5.2	Impact de la permittivité du substrat	120
4.5.3	Impact de la conductivité	122
4.6	Conclusion	126

5	Homogénéisation bi-anisotrope	127
5.1	Introduction	127
5.2	Homogénéisation	128
5.3	Décomposition du rayonnement lointain	130
5.3.1	Décomposition multipolaire des méta-atomes	131
5.3.2	Décomposition du premier ordre	132
5.3.3	Décomposition anisotrope du premier ordre	136
5.3.4	Décomposition d'ordre 2	143
5.3.5	Décomposition d'ordre n	146
5.4	Homogénéisation magnéto-diélectrique scalaire	148
5.4.1	Inversion de la relation de Clausius-Mossotti	149
5.4.2	Validation de la méthode	150
5.4.3	Limites du modèle	152
5.5	Homogénéisation bi-anisotrope	154
5.5.1	Méthode	154
5.5.2	Critère de chiralité	158
5.5.3	Application au cas de la spirale plate	159
5.5.4	Application du critère de chiralité	162
5.6	Conclusion	163
6	Adaptation fréquentielle d'une cape	164
6.1	Introduction	164
6.2	Impact de la dispersion fréquentielle sur la bande de fonctionnement	165
6.2.1	État de l'art	165
6.2.2	Définition du cas d'étude	165
6.2.3	Résultats de la simulation et analyse	169
6.3	Adaptation en fréquence de la cape	171
6.3.1	Équations d'état de la cape d'invisibilité sphérique	171
6.3.2	Conditions sur ϵ_r et ϵ_{\perp}	174
6.3.3	Dispersion en fréquence	175
6.3.4	Conception de la cape dispersive	177
6.3.5	Résultats et analyses	179
6.3.6	Limites de performances	183
6.4	Conclusion	184
	Conclusion	186
	Bibliographie	187

Table des figures

1.1	Déchirement d'espace et modification de métrique	16
1.2	Zone de déformation autour du point central	17
1.3	Equivalence entre milieu issu de l'OT et déformation d'espace	18
1.4	Tracé de rayon et front d'onde lors de la traversée d'une cape	18
1.5	Chemins optiques entre deux points	19
1.6	Problématique de l'homogénéisation : équivalence entre "bulk" et métama- tériaux	20
1.7	Géométrie de la cape sphérique sous COMSOL	26
1.8	Valeurs propres de permittivité dans la cape sphérique	27
1.9	Cartes du champ électrique, avec et sans cape sphérique	28
1.10	Valeurs propres de permittivité dans la cape cylindrique	31
1.11	Géométrie de la cape cylindrique sous COMSOL	32
1.12	Flux de puissance dans la cape cylindrique	32
1.13	Cartes de champ électrique, cape d'invisibilité cylindrique	33
1.14	Principe de fonctionnement des capes mimétiques	35
1.15	Sensibilité à l'anisotropie d'une cape cylindrique	37
1.16	Sensibilité aux valeurs extrêmes d'une cape cylindrique	39
1.17	Comparaison de la robustesse des capes sphérique et cylindrique	40
2.1	Snell généralisé	48
2.2	Scattering cancellation	49
2.3	Cas d'études mimétiques	52
2.4	Carte des champs de l'étude mimétique	53
2.5	Carte de champ lointain de l'étude mimétique	54
2.6	Demi-cape sphérique sur une surface métallisée	56
2.7	Image des plans de coupe sur une cape sphérique	57
2.8	Allure des défauts de surface pouvant être masqués par troncature de cape	58
2.9	Géométrie du cas COMSOL de tapis d'invisibilité par troncature de cape cylindrique	60
2.10	Résultat de la simulation de tapis d'invisibilité par troncature de cape cylindrique	61
2.11	Courbes de champ lointain pour la simulation de tapis d'invisibilité par troncature de cape cylindrique	62
2.12	Portion de cylindre aux extrémités arrondies	63
2.13	Propriétés électromagnétiques de la cape mimétique pseudo-cylindrique	66
2.14	Cas d'étude COMSOL, cape de mimétisme cylindrique	67
2.15	Plans de coupe, mimétisme cylindrique	68
2.16	Antécédents et images dans les capes classiques	69
2.17	SER dans la cape de mimétisme cylindrique	70
2.18	Mimétisme cylindrique	70

2.19	Cas d'étude COMSOL, cape de mimétisme sphérique	72
2.20	SER de la cape de mimétisme sphérique et du modèle	73
3.1	Exemple de maille hexagonale avec son axe optique	76
3.2	Schéma équivalent entre un multicouche diélectrique et des capacités en série.	78
3.3	Anisotropie et inhomogénéité dans les capes d'invisibilités sphériques.	80
3.4	Permittivités dans un cape sphérique multicouches à deux matériaux	83
3.5	Permittivités atteignables et in-atteignables dans une cape d'invisibilité sphérique	84
3.6	Architecture du code de calcul développé sur Livelink (COMSOL with Matlab) permettant de construire les revêtements multicouches	87
3.7	Bibliothèque des matériaux pour la cape d'invisibilité.	88
3.8	Permittivité et perméabilité dans une cape cylindrique muticouches	89
3.9	Structure du tapis d'invisibilité, composé d'un assemblage de six matériaux différents.	90
3.10	Simulation de la cape d'invisibilité cylindrique multicouches	91
3.11	Atténuation de la SER grâce à la cape cylindrique multicouches	92
3.12	Coupe du tapis multicouche cylindrique constitué d'une portion de cape cylindrique.	94
3.13	Résultats de la simulation du tapis d'invisibilité multicouches.	95
3.14	Bibliothèque matériaux pour le tapis de mimétisme	96
3.15	Coupe du tapis de mimétisme cylindrique constitué d'une portion de cape cylindrique.	97
3.16	Résultats de la simulation sur le tapis de mimétisme.	98
4.1	Repère de Frenet utilisé pour décrire l'espace le long du tube.	106
4.2	Représentation des deux repères de Frenet	108
4.3	Géométrie du SRR étudié	115
4.4	Maillage du SRR pour la simulation	116
4.5	Cartes des champs électriques et magnétiques issus de la simulation du SRR en espace libre	116
4.6	Problématique de l'extraction du courant	117
4.7	Courant linéique le long du SRR et projection sur la base des modes propres	118
4.8	Diffusion du courant dans l'épaisseur du métal	119
4.9	Norme du champ électrique en fonction de la fréquence pour différentes longueurs de SRR	121
4.10	Fréquence de résonance du SRR en fonction de sa longueur curviligne	122
4.11	Norme du champ électrique en fonction de la fréquence pour différentes permittivités de substrat	123
4.12	Fréquence de résonance du SRR en fonction de la permittivité du substrat	124
4.13	SER du SRR pour différentes valeurs de conductivité	124
4.14	Facteur de qualité de la résonance en fonction de la conductivité du SRR	125
5.1	Descriptif des différents méta-atomes étudiés par la méthode du développement dipolaire isotrope.	135
5.2	Cas d'étude de la spirale sous COMSOL.	135

5.3	Développement dipolaire isotrope de la spirale plate.	136
5.4	Indices de validité de l'approche dipolaire isotrope pour les différents méta-atomes étudiés.	137
5.5	Indices de validité donnés pour les différents méta-atomes étudiés.	139
5.6	Synthèse des résultats obtenus pour la décomposition dipolaire des diffé- rents méta-atomes.	141
5.7	Développement dipolaire du SRR.	142
5.8	Puissance développée par les dipôles électriques et magnétiques pour le SRR et indice de validité	143
5.9	Puissance développée par les dipôles et quadrapôles électriques et magné- tiques pour le SRR et indices de validité d'ordre 1 et 2	146
5.10	Indices de validité d'ordre 2 donnés pour les différents méta-atomes étudiés	147
5.11	Résultats de l'homogénéisation d'une spirale plate sous une polarisation naturelle	151
5.12	Moments dipolaires d'une spirale plate sous une polarisation non-naturelle	152
5.13	Résultats de l'homogénéisation d'une spirale plate sous une polarisation non-naturelle	153
5.14	Application de la méthode bianisotrope à la spirale plate : tenseurs de permittivité et de perméabilité	160
5.15	Application de la méthode bianisotrope à la spirale plate : tenseurs a et b	161
5.16	Comparaison entre le coefficient de chiralité pour la spirale monofilaire et la spirale bifilaire	163
6.1	Permittivités radiale et orthoradiale dans la cape d'invisibilité sphérique .	166
6.2	Permittivité de matériaux de type plasma	167
6.3	Permittivité de matériaux de type plasmas pour plusieurs valeurs de ω_0 .	168
6.4	Fréquence plasma en fonction de la position dans le revêtement d'invisibilité.	168
6.5	Cartes de champs électriques avec et sans revêtement d'invisibilité mono- fréquentiel	169
6.6	SER bistatique d'une cape monofréquentielle	170
6.7	Bande de fonctionnement de la cape dispersive	171
6.8	Illustration de la cape adaptée en fréquence	176
6.9	Permittivités radiale et orthoradiale dans la 10ème couche de la cape dispersive	178
6.10	Géométrie et maillage de la cape d'invisibilité sphérique	179
6.11	Permittivités radiale et orthoradiale dans la cape pour 4 fréquences différentes	180
6.12	Carte de norme du champ électrique, cape fréquentielle	181
6.13	Champ électrique instantané à 1GHz dans la cape d'invisibilité fréquentielle	182
6.14	Diagrammes de champ lointain, avec et sans cape sphérique	182
6.15	Atténuation de la surface radar avec cape fréquentielle	183

Introduction générale

Dans la littérature scientifique aussi bien que dans la fiction, l'invisibilité est une thématique récurrente qui a motivé de nombreux auteurs et fasciné le grand public. L'invisibilité électromagnétique ou "cloaking" a été théoriquement rendue possible en 2006 grâce aux travaux fondateurs des équipes de John Pendry et de Ulf Leonhardt. En s'inspirant des équations de Maxwell dans le cadre de la relativité générale, les conditions permettant de rendre un objet invisible aux hyperfréquences, dans l'infrarouge et dans le domaine optique ont été établies. Ces travaux ont inspiré la communauté de l'électromagnétisme et ont ouvert un nouveau champ de recherche, l'optique de transformation (OT), aboutissant à la réalisation de plusieurs démonstrateurs en laboratoire. Une multitude de dispositifs alternatifs à la cape d'invisibilité ont également émergé, comme les tapis d'invisibilité permettant de masquer des défauts de structure localisés sur des surfaces.

L'émergence de l'optique de transformation n'a été rendue possible que par le développement des métamatériaux, une famille de structures composites dont les propriétés électromagnétiques de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique atteignent des valeurs introuvables parmi les matériaux naturels. En particulier, le magnétisme artificiel a été imaginé autour des années 2000 et permet d'envisager la réalisation de matériaux magnétiques jusque dans le domaine optique, auparavant impensable. La réalisation de revêtements d'invisibilité étant très complexe de par la nature extrême des propriétés matériaux requises, seuls des métamatériaux peuvent convenir pour la conception de prototypes. Malgré les avancées rapides de ces dernières années dans ce domaine, il reste encore de nombreux verrous à lever avant de voir apparaître un revêtement d'invisibilité pleinement opérationnel.

Dès 2006, un premier démonstrateur de cape d'invisibilité dans le domaine hyperfréquence fut réalisé afin de valider par l'expérience les effets du revêtement. Ces travaux et ceux qui suivirent ont mis en lumière la validité de la théorie tout autant que les nombreuses difficultés de conception et leur impact sur les performances. Deux grands courants ont émergé ces dernières années dans la littérature concernant les revêtements d'OT : une première approche orientée optique transformationnelle, a pour objectif de diminuer les contraintes imposées par l'OT sur les propriétés matériaux requises dans les revêtements. La seconde approche est, quant à elle, orientée matériaux, et plus précisément métamatériaux. Les recherches visent à concevoir des métamatériaux aux propriétés les plus proches possibles de celles théoriquement requises. Les réalisations actuelles et celles à venir sont le fruit de compromis aboutissant à un revêtement le plus performant possible, tenant compte des métamatériaux à disposition.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'optique de transformation avec pour application des capes mais aussi des tapis d'invisibilité et de mimétisme. Nous cher-

chons à resserrer le lien existant entre les métamatériaux et les revêtements d'OT, en imaginant des structures fonctionnelles les plus efficaces possibles et dont la réalisation soit envisageable à l'aide des technologies actuelles. Le recours à la fabrication additive, la gravure ou encore à l'usinage plus conventionnel est envisageable. A l'instar des tout premiers travaux expérimentaux sur le sujet, le domaine fréquentiel considéré dans ce manuscrit est celui des hyperfréquences, prioritairement à l'infrarouge et à l'optique. La conception de métamatériaux dans la gamme hyperfréquence nécessite en effet des moyens bien moins onéreux que pour des domaines de plus hautes fréquences. En particulier, le magnétisme naturel existe dans les hyperfréquences, ce qui simplifie le travail de conception des revêtements. Cependant, les simulations, calculs et conclusions de ce manuscrit sont en grande partie transposables à toutes les gammes de fréquence. Les applications hyperfréquences envisagées sont nombreuses et variées, elles concernent en particulier les domaines des télécommunications, de la discrétion et de la compatibilité électromagnétique (CEM).

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous abordons l'optique de transformation et les revêtements d'invisibilité du point de vue théorique ainsi que du point de vue phénoménologique. Une démonstration partielle du principe est donnée, ainsi que des résultats de simulations de capes d'invisibilité réalisées sous le logiciel commercial COMSOL Multiphysics. Nous abordons ensuite la thématique des métamatériaux au travers d'une étude bibliographique en lien avec l'OT.

Dans le deuxième chapitre sont abordées diverses applications de l'OT, alternatives à la cape d'invisibilité. Nous définissons dans un premier temps la notion de mimétisme, faculté qu'a un objet de ressembler à un autre objet, permise par l'OT. Nous étudions ensuite, par la simulation, différents revêtements que nous avons imaginés et dont les fonctions sont susceptibles de mener à des systèmes présentant un intérêt industriel. L'efficacité de ces dispositifs est évaluée au moyen de critères objectifs chiffrés.

Le troisième chapitre du manuscrit aborde une méthode de structuration des revêtements d'OT requérant une anisotropie uniaxe. Nous présentons une approche de la conception en multicouches requérant un nombre raisonnable de matériaux magnéto-diélectriques. Un code de calcul permet de générer une simulation de la structure multicouche de la cape ou du tapis afin de valider son fonctionnement par le calcul. Nous proposons enfin un tapis de mimétisme dont la réalisation peut être envisagée exclusivement à l'aide de matériaux conventionnels.

Dans la suite du manuscrit, est abordée la thématique des métamatériaux constitués de réseaux d'inclusions conductrices résonantes. Ces métamatériaux sont indispensables à la réalisation de revêtements d'invisibilité, tandis que ceux de mimétisme n'en requièrent pas nécessairement. Dans le quatrième chapitre, une approche phénoménologique de la résonance de ce type de structure est proposée, mettant en avant des principes fondamentaux de la conception des métamatériaux. L'objectif est à la fois de comprendre la physique sous-jacente tout autant que de faciliter l'ingénierie des revêtements d'OT.

La très vaste problématique de l'homogénéisation des réseaux d'inclusions résonantes est abordée dans le cinquième chapitre. Nous proposons une méthodologie pratique et rapide permettant de calculer les propriétés effectives des métamatériaux au travers de l'étude d'une maille unitaire. Une généralisation de la formule de Clausius-Mossotti est étendue aux matériaux présentant un comportement bi-anisotrope : les effets complexes de couplages électro-magnétiques sont ainsi pris en compte et évalués.

La dispersion fréquentielle des métamatériaux, et des réseaux d'inclusions résonantes en particulier, réduit drastiquement la bande de fonctionnement des revêtements d'OT. Dans le sixième chapitre, nous mettons au point une méthode d'adaptation des capes à la dispersion des matériaux et montrons, à l'aide d'une simulation, son principe de fonctionnement. Le revêtement est donc dispersif mais présente malgré tout une efficacité de fonctionnement sur une bande de fréquence relativement large.

1 Optique de transformation et cloaking

Sommaire

1.1	Introduction	15
1.2	Description de l'optique de transformation	16
1.2.1	Déformation de l'espace	16
1.2.2	Propriétés matériau équivalentes	18
1.3	Point de vue mathématique	20
1.4	Applications de l'optique de transformation	24
1.4.1	Invisibilité	24
1.4.1.1	Transformation sphérique	24
1.4.1.2	Transformation cylindrique	29
1.4.2	Mimétisme	35
1.5	Difficultés de réalisation d'un revêtement d'OT	36
1.5.1	Sensibilité de l'anisotropie	36
1.5.2	Sensibilité de la discrétisation	38
1.5.3	Sensibilité des valeurs extrêmes de permittivité et perméabilité	38
1.6	Métamatériaux	41
1.6.1	Introduction sur les métamatériaux	41
1.6.2	Métamatériaux à faible indice	42
1.6.3	Chiralité artificielle	43
1.6.4	Circuits maxwelliens	44
1.7	Conclusion	44

1.1 Introduction

L'électromagnétisme est décrit depuis la fin du XIX^{ème} siècle grâce aux équations de Maxwell, du nom de James Clerk Maxwell qui les a établies en 1864. Dans le cadre de la relativité générale, dans lequel l'espace peut être courbe, ces équations sont toujours valides. Une approche par la géométrie différentielle montre en effet qu'il existe une invariance des équations par changement de repère inertiel.

La formulation des équations de Maxwell dans un système de coordonnées généralisées a permis à Ward et Pendry [1] de montrer en 1996 qu'il est possible à l'aide d'un maillage régulier de l'espace de simuler des géométries complexes, en introduisant une notion de métrique courbe dans les équations. En d'autres termes, plutôt que de mailler une géométrie complexe, on préférera partir d'un quadrillage régulier et lui faire subir une déformation de l'espace, mimée à l'aide de tenseurs de permittivité diélectrique $\bar{\epsilon}$ et de perméabilité magnétique $\bar{\mu}$.

Cette idée d'invariance des équations de Maxwell et d'équivalence avec des propriétés matériaux particulières amena John Pendry et al. [2] d'une part et Ulf Leonhardt et al. [3] d'autre part à publier en 2006 des articles posant les bases de l'optique de transformation (OT) et du "cloaking" ou invisibilité électromagnétique. L'idée de l'optique de transformation consiste à transposer expérimentalement les principes appliqués à la simulation dans [1] en créant des revêtement structurés mimant une transformation d'espace. Le cloaking, quant à lui, est une application particulière de l'OT cherchant à rendre invisible un objet vis à vis des ondes électromagnétiques en mimant un espace courbant les rayons autour des celui-ci. Du point de vue des ondes électromagnétiques, la matière classique peut se comporter dans l'espace de manière équivalente à un espace déformé.

Dans ce chapitre, nous verrons les principes de l'OT et de l'invisibilité électromagnétique. Nous montrerons par des simulations dans les hyperfréquences le fonctionnement de capes d'invisibilité. Ensuite, nous aborderons les difficultés de réalisation de ces revêtements et le recours aux méta-matériaux.

1.2 Description de l'optique de transformation

1.2.1 Déformation de l'espace

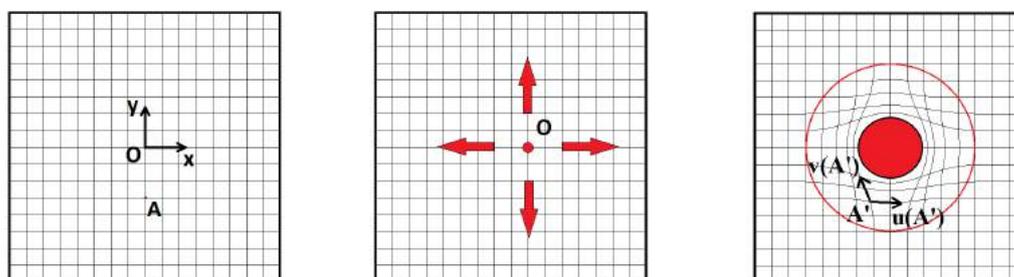


FIGURE 1.1 – Déchirement de l'espace autour d'un point. Par l'esprit, on modifie la structure de l'espace autour d'un point central afin de créer une zone "hors-espace", ignorée par la physique. La métrique à proximité de la déformation est modifiée et les longueurs ne sont par conséquent pas conservées.

Dans cette partie nous abordons de manière imagée le principe de l'optique de transformation au travers de son application la plus médiatisée, la cape d'invisibilité. On peut se figurer l'espace Ω tel une surface déformable et déchirable. Selon le type de transformations que l'on va réaliser, nous avons classiquement $\Omega = \mathbf{R}^2$ ou $\Omega = \mathbf{R}^3$. La première étape de l'optique de transformation consiste à chercher une fonction mathématique explicitant la manière dont on veut que l'espace se déforme : localement, les distances

entre deux points vont être comprimées ou au contraire s'étendre, les points vont se déplacer de sorte à ce qu'apparaisse une zone de vide, telle que sur la figure 1.1.

A partir d'un point origine O , on agrandit l'anse (au sens topologique) en comprimant localement la surface ou le volume. Dans les cas d'une cape d'invisibilité, il est tout à fait possible de choisir la manière dont l'espace va se déformer autour de la déchirure. On crée une anse aussi grande qu'on le souhaite, et on comprime progressivement ou rapidement aux abords de cette anse. La création d'une anse donnée peut amener à déformer l'espace de différentes manières : ce principe est montré sur la figure 1.2. Les dimensions de la zone perturbée peuvent par exemple varier. La transformation mathématique évoquée précédemment dans ce chapitre associe chaque point de la nappe intacte ($\Omega = \mathbf{R}^2$ ou $\Omega = \mathbf{R}^3$) à son point image sur la nappe déchirée et déformée. Mathématiquement, cette transformation doit être :

- bijective : on ne retire aucun morceau de nappe, on n'ajoute aucun morceau de nappe ;
- continue (hors origine) : on ne découpe pas de morceau de nappe pour les coller ailleurs.
- $f - Id$ à support compact (Id désignant l'identité) : la zone de déformation de la nappe est spatialement finie.

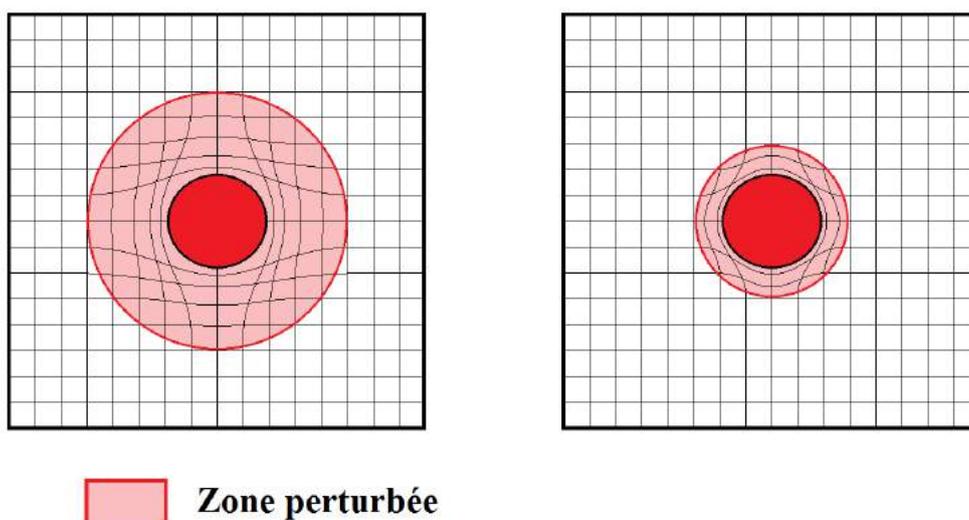


FIGURE 1.2 – Zone de déformation autour du point central. Selon la transformation d'espace choisie, la zone dont la métrique est perturbée peut être aussi grande que l'on veut.

Cette approche permet de reproduire à l'intérieur de la cape les perturbations de l'espace tandis qu'elle laisse totalement invariante la physique à l'extérieur. Un observateur à l'intérieur du revêtement se verra dans un espace courbe tandis qu'un observateur à l'extérieur ne sera pas en capacité de percevoir de différence avec l'espace libre. En procédant de la sorte, une zone ne pouvant voir aucune onde électromagnétique a été créée : c'est la zone centrale au coeur du revêtement. Il est ainsi possible de masquer un objet de n'importe quelle nature en le plaçant dans la zone rendue invisible. Sa géomé-

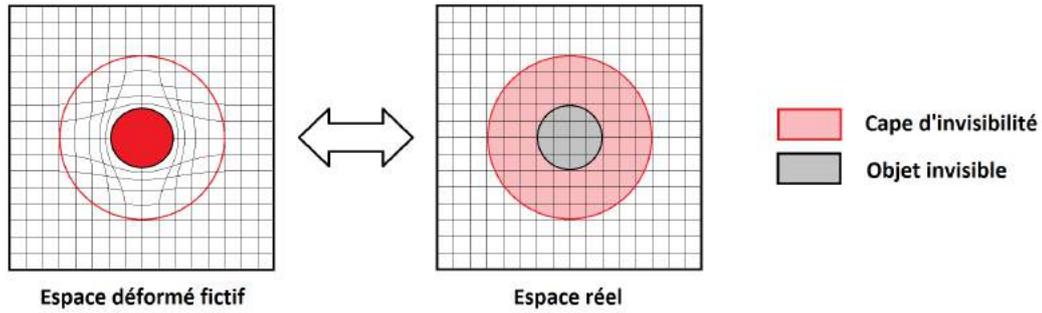


FIGURE 1.3 – Équivalence entre la cape et l’espace déformé. La cape est composée d’un milieu dont les propriétés sont dictées par l’OT. Du point de vue des champs électromagnétiques et par conséquent des ondes, ce milieu se comporte comme un espace dont on aurait modifié la métrique.

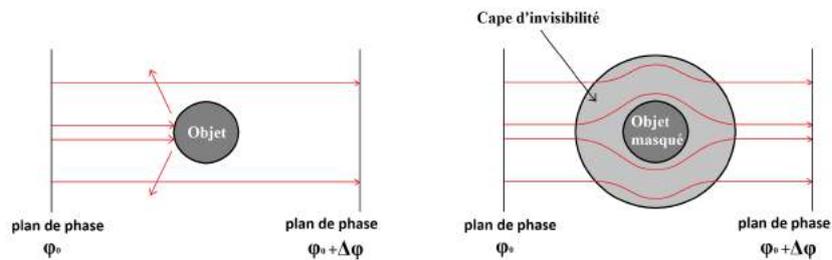


FIGURE 1.4 – Tracé de rayon et front d’onde lors de la traversée d’une cape d’invisibilité. Le front d’onde est restitué à l’identique après la traversée du milieu, sans perturbation apparente de la propagation.

trie, sa composition ou encore sa taille n’ont en théorie aucun impact sur le rayonnement électromagnétique.

1.2.2 Propriétés matériau équivalentes

Les tenseurs de permittivité diélectrique $\bar{\epsilon}$ et de perméabilité magnétique $\bar{\mu}$ du revêtement permettant la déformation de l’espace que nous venons de décrire, sont donnés par des formules que nous expliciterons plus loin. Ces tenseurs, qui dépendent de la transformation d’espace, ne correspondent en général à aucun matériau connu, et cumulent trois caractéristiques principales :

- anisotropie : $\bar{\epsilon}, \bar{\mu} \neq \lambda \bar{I}d$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) ;
- inhomogénéité : $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\vec{r})$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\vec{r})$;
- spectre de valeurs propres dans \mathbb{R}^+ .

La réalisation de telles propriétés au sein d’un revêtement est hautement non-triviale : les spécificités requises rendent insuffisante l’utilisation de matériaux conventionnels. On peut se convaincre de ces difficultés en observant les chemins optiques parcourus



FIGURE 1.5 – Chemins optiques entre deux points de l’espace. La longueur curviligne est plus longue si l’espace est courbé.

par les ondes dans le revêtement, sur la figure 1.4. A chaque chemin optique de l’espace régulier est associé un chemin optique de l’espace déformé : le chemin optique image est supposé conserver le long de son parcours la même phase que l’onde se propageant le long du chemin régulier. En effet, l’invariance des phénomènes électromagnétiques par déformation d’espace assure que la phase de l’onde à un point donné sera identique à la phase de l’onde en son point image dans l’espace déformé.

On observe que la déformation d’un espace dilate certaines longueurs et en comprime certaines autres. La dilatation de ces longueurs constitue un problème de taille : la distance réelle parcourue par les ondes peut être plus longue que la longueur parcourue par l’onde dans l’espace que l’on veut mimer. Si la distance réelle parcourue est plus grande, cela signifie que l’indice optique réel doit être inférieur à celui de l’espace que l’on mime, le plus souvent constitué d’air ou de vide. On devra en effet vérifier l’égalité suivante :

$$\int_{C_1} n_1 ds_1 = \int_{C_2} n_2(s_2) ds_2 \quad (1.1)$$

où $n_1 = 1$ et n_2 désignent les indices optiques respectivement dans l’air et du revêtement d’OT. Le chemin C_2 étant plus long que le chemin C_1 , nous nous apercevons que n_2 prend des valeurs sous l’unité. Cette propriété rend difficile l’utilisation de l’optique de transformation, car les matériaux naturels n’atteignent que rarement ce type de valeurs. De plus, la surface réelle est de genre 1 tandis que l’on cherche à mimer un espace continu de genre 0. La transformation mathématique appliquée entre ces deux espaces n’est donc pas homéomorphe : il existe une discontinuité qui peut sous certaines conditions se traduire par l’apparition d’indices tendant localement vers l’infini.

Obtenir un indice optique inférieur à 1 est techniquement possible mais présente de nombreuses limitations. En effet, il faut pour cela travailler avec des matériaux présentant des permittivités et perméabilités relatives inférieures à l’unité. Certains matériaux possèdent naturellement ce type de propriétés sur des plages fréquentielles restreintes. De nombreux travaux ont porté ces dernières années sur la réalisation de propriétés matériaux inférieures à l’unité grâce notamment à des méta-matériaux composés de structures métalliques résonantes. Cependant, l’obtention de propriétés effectives à l’aide d’une structure composite pose de très nombreuses questions et ce depuis le début du XX^e siècle. On peut citer par exemple Garnett en 1904 [4] et Bruggeman en 1935 [5] qui développèrent une théorie de l’homogénéisation des propriétés électromagnétiques dans les milieux composites. Cette question sera abordée ultérieurement dans ce chapitre.

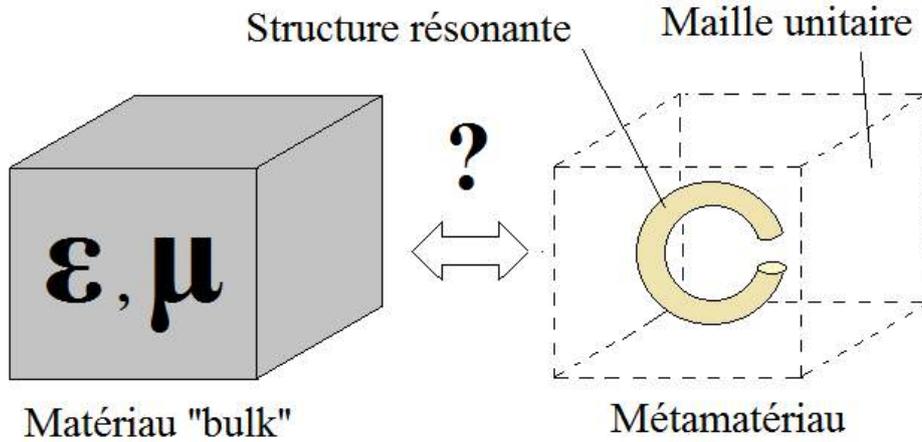


FIGURE 1.6 – Equivalence entre "bulk" et métamatériaux. L'homogénéisation est la discipline ayant pour objectif d'établir les principes d'équivalence entre métamatériaux et matériaux homogènes. Ici, une maille de métamatériau est représentée avec en son centre un résonateur à anneau fendu, ou Split-Ring Resonator (SRR).

1.3 Point de vue mathématique

Dans la section précédente nous avons abordé la transformation d'espace d'un point de vue général, sans prendre en considération l'aspect calculatoire. Ici, nous cherchons une justification mathématique des phénomènes en jeu dans l'OT. Les équations régissant le comportement des champs électromagnétiques dans la matière sont les quatre équations de Maxwell :

- Equation de Maxwell-Gauss, décrivant les charges ρ comme étant les sources du champ électrique E . Elle fait intervenir la permittivité relative ϵ_r^{ij} du matériau :

$$\partial_i \epsilon_0 \epsilon_r^{ij} E_j = \rho \quad (1.2)$$

- Équation de Maxwell-flux, permettant de décrire le champ magnétique B comme rotationnel d'un potentiel vecteur. Elle fait intervenir la perméabilité relative μ_r^{ij} du matériau :

$$\partial_i \mu_0 \mu_r^{ij} H_j = 0 \quad (1.3)$$

- Equation de Maxwell-Faraday, décrivant les variations temporelles de champ magnétique comme étant une source de champ électrique :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\mu_0 \frac{\partial \mu_r^{ij} H_j}{\partial t} \quad (1.4)$$

- Equation de Maxwell-Ampère, décrivant les deux types de sources du champ magnétique que sont les courants électriques J et les variations temporelles de champ

électrique :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = \epsilon_0 \frac{\partial \epsilon_r^{ij} E_j}{\partial t} + J^i \quad (1.5)$$

où ϵ^{ijk} est le symbole de Levi-Civita permettant ici d'écrire le rotationnel, ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

L'idée maîtresse de l'optique de transformation consiste à essayer de mimer un changement de métrique à l'aide d'une modification des propriétés matériaux, à savoir les tenseurs ϵ_r^{ij} et μ_r^{ij} qui décrivent respectivement la réaction à un champ électrique et la réaction à un champ magnétique. Si on applique un changement de coordonnées $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f} (x'_1, x'_2, x'_3)$, il est possible de réécrire dans la nouvelle base les équations en utilisant la matrice jacobienne de f .

Chaque composante des champs E et H , ainsi que du courant J se transforme comme une forme linéaire :

$$\begin{aligned} E_{j'} &= \partial_{j'}^j E_j \\ H_{j'} &= \partial_{j'}^j H_j \\ J^{j'} &= \partial_j^{j'} J_j \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec $\partial_i^{i'} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_i}$.

Le symbole de Lévi-Civita subit également une transformation, qui n'est pas celle d'une forme trilinéaire classique car ce n'est pas à proprement parler un tenseur. Le tenseur de Lévi-Civita $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ est lié aux coefficients de la jacobienne et au symbole de Lévi-Civita par la relation 1.7 :

$$\tilde{\epsilon}^{i'j'k'} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \partial_i^{i'} \partial_j^{j'} \partial_k^{k'} \epsilon^{ijk} \quad (1.7)$$

avec g' le déterminant du tenseur métrique $g_{i'j'} = \partial_i^k \partial_{j'}^k$. En notant J_f la matrice jacobienne de la transformation f , ceci nous permet de déduire la relation entre le déterminant du tenseur métrique et le jacobien de la transformation :

$$g' = \det(J_f)^2 \quad (1.8)$$

Les détails concernant le changement de coordonnées du rotationnel peuvent être trouvés dans [1], [3] ou [6]. En partant des équations de Maxwell 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5, on réalise des changements de coordonnées à l'aide des $\partial_i^{i'}$, et on obtient après simplification :

$$\partial_{i'} \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \epsilon_0 \epsilon_r^{ij} E_j' = \frac{\rho}{\det(J_f)} \quad (1.9)$$

$$\partial_{i'} \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \mu_0 \mu_r^{ij} H_j' = 0 \quad (1.10)$$

$$\tilde{\epsilon}^{i'j'k'} \partial_{j'} E_{k'} = - \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \mu_0 \mu_r^{ij} \frac{\partial H_{j'}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\tilde{\epsilon}^{i'j'k'} \partial_{j'} H_{k'} = \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \epsilon_0 \epsilon_r^{ij} \frac{\partial E_{j'}}{\partial t} + \frac{\partial_i^{i'}}{\det(J_f)} J^i \quad (1.12)$$

Nous obtenons alors les quatre équations de Maxwell dont les champs électriques et magnétiques ainsi que les opérateurs vectoriels sont exprimées dans les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) , tandis que les sources et propriétés matériaux sont exprimées dans les anciennes coordonnées (x_1, x_2, x_3) . On cherche donc à exprimer les propriétés matériaux ϵ_r et μ_r dans le nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \epsilon_r^{i'j'} &= \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \epsilon_r^{ij} \\ \mu_r^{i'j'} &= \frac{\partial_i^{i'} \partial_j^{j'}}{\det(J_f)} \mu_r^{ij} \end{aligned} \quad (1.13)$$

On obtient de manière analogue les sources ρ et J :

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\det(J_f)} \\ J^{i'} &= \frac{\partial_i^{i'}}{\det(J_f)} J^i \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dans la suite, nous ne nous intéresserons pas à ces sources, puisque nous travaillerons dans des milieux sans sources. Les nouveaux tenseurs ϵ_r et μ_r , exprimés dans l'équation 1.13 décrivent dans les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) les propriétés matériaux permettant au milieu d'être l'image exacte, d'un point de vue électromagnétique, du milieu $(\epsilon_r^{ij}, \mu_r^{ij})$ par la transformation d'espace. On peut alors réécrire 1.13 en écriture matricielle :

$$\begin{aligned} \epsilon_r' &= \frac{J_f \epsilon_r J_f^T}{\det(J_f)} \\ \mu_r' &= \frac{J_f \mu_r J_f^T}{\det(J_f)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dans un milieu présentant les tenseurs ϵ_r' et μ_r' , la propagation des ondes se produit de manière analogue à celle qui se produirait dans l'espace initial avec les tenseurs ϵ_r et μ_r . Cette propriété se vérifie en multipliant les équations 1.9, 1.10, 1.11 et 1.12 par les ∂_j^i adaptés. Les équations de Maxwell écrites sous cette forme nous montrent que l'on peut parler indifféremment de transformation d'espace ou de changement des propriétés de matériaux. Ainsi, dans l'espace décrit par les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) , un matériau présentant les propriétés décrites par l'équation 1.15 mimera l'espace (x_1, x_2, x_3) muni des propriétés matériaux ϵ_r et μ_r . A l'inverse, il est possible réciproquement de partir de l'espace (x_1, x_2, x_3) et d'appliquer des propriétés matériaux tel que l'on mime l'espace image par la transformation f :

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_r &= \frac{J_f^{-1} \epsilon'_r J_f^{-T}}{\det(J_f^{-1})} \\ \tilde{\mu}_r &= \frac{J_f^{-1} \mu'_r J_f^{-T}}{\det(J_f^{-1})}\end{aligned}\quad (1.16)$$

Les tenseurs $\tilde{\epsilon}_r$ et $\tilde{\mu}_r$, injectés dans les équations de Maxwell à la place de ϵ_r et μ_r respectivement permettent à l'espace (x_1, x_2, x_3) de mimer (x'_1, x'_2, x'_3) . Prenons pour démonstration l'équation de Maxwell Faraday dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) et injectons les nouvelles propriétés matériaux :

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \frac{\partial_i^i \partial_{j'}^j}{\det(J_f^{-1})} \mu_0 \mu_r^{i'j'} \frac{\partial H_j}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

On obtient alors, par opération inverse de celles permettant d'obtenir 1.11 :

$$\frac{\partial_i^{i'}}{\det(J_f)} \epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \frac{\partial_i^{i'}}{\det(J_f)} \frac{\partial_i^i \partial_{j'}^j}{\det(J_f^{-1})} \mu_0 \mu_r^{i'j'} \frac{\partial H_j}{\partial t} = 0$$

Ce qui donne après simplification, en utilisant le fait que $\det(J_f) \det(J_f^{-1}) = 1$ et que les indices j et k du premier terme peuvent être changés en j' et k' car ils forment des produits contractés :

$$\tilde{\epsilon}^{i'j'k'} \partial_{j'} E_{k'} + \mu_0 \mu_r^{i'j'} \frac{\partial H_{j'}}{\partial t} = 0$$

Notons MF l'expression de Maxwell Faraday avec comme arguments le champ électrique, le champ magnétique et le tenseur de perméabilité magnétique. L'équation précédente s'écrit alors de manière concise $MF(E', H', \mu') = 0$. Nous venons de montrer l'équivalence suivante :

$$MF(E, H, \tilde{\mu}_r) = 0 \iff MF(E', H', \mu'_r) = 0 \quad (1.18)$$

Cette équivalence se retrouve de manière analogue pour toutes les équations de Maxwell. La création d'un espace localement déformé à l'aide de propriétés matériaux particulières peut avoir de multiples applications. La plus répandue d'entre elles et celle qui nous intéresse particulièrement dans ce chapitre est la cape d'invisibilité. Pour réaliser cette dernière, il faut établir, comme expliqué en première partie du chapitre, une bijection entre l'espace tridimensionnel standard et un espace de genre 1, c'est à dire comportant une anse. Puisque les équations de Maxwell sont toujours valides dans un espace déformé et qu'il est possible de mimer ces déformations à l'aide de propriétés matériaux établies dans l'équation 1.16, on peut créer une zone de l'espace qui soit invisible du point de vue électromagnétique.

1.4 Applications de l'optique de transformation

1.4.1 Invisibilité

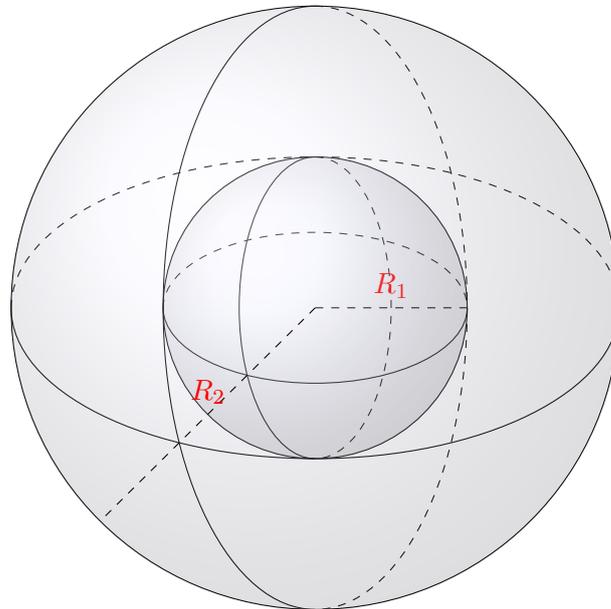
Dans la première section de ce chapitre, nous avons abordé l'optique de transformation à travers l'exemple le plus répandu dans la littérature, la cape d'invisibilité. Afin de masquer un objet vis à vis des ondes électromagnétiques, plusieurs types de transformations peuvent être utilisées. Nous aborderons dans cette partie les deux familles les plus courantes, les transformations sphériques et les transformations cylindriques.

1.4.1.1 Transformation sphérique

La transformation sphérique a été étudiée pour la première fois par Pendry dans son article fondateur du cloaking en 2006 [2]. Elle a fait l'objet de nombreuses recherches théoriques [7] [8], qui n'ont à ce jour abouti à aucune réalisation expérimentale. Cette transformation permet de rendre invisible une sphère de rayon R_1 à l'aide d'une *cloak* elle-même délimitée par une sphère concentrique de rayon R_2 . Il existe un nombre infini de transformations permettant de rendre invisible la sphère de rayon R_1 . La plus couramment utilisée est la transformation affine, qui est obtenue par simple interpolation linéaire en utilisant les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} f(R_1) &= 0 \\ f(R_2) &= R_2 \end{aligned} \tag{1.19}$$

La première condition permet la création d'une cavité invisible de rayon R_1 , tandis que la deuxième traduit la continuité spatiale de la transformation.



La transformation mathématique utilisée est la suivante, en notant S_1 la sphère de rayon R_1 et S_2 la sphère de rayon R_2 :

$$(r', \theta', \phi') = \begin{cases} (r, \theta, \phi) & \text{si } M(r, \theta, \phi) \notin S_2 \\ (R_1 + r \frac{R_2 - R_1}{R_2}, \theta, \phi) & \text{si } M(r, \theta, \phi) \in S_2 \end{cases} \quad (1.20)$$

Cette transformation est égale à l'identité dans $\{\mathbb{R}^3 - S_2\}$ et comprime l'espace dans S_2 . Il s'agit d'une compression radiale par laquelle l'image de la sphère S_2 est le domaine $\{S_2 - S_1\}$. Ainsi, \mathbb{R}^3 est en bijection avec $\{\mathbb{R}^3 - S_1\}$: la sphère S_1 est "masquée" par la transformation. En appliquant la méthode expliquée dans la partie précédente, on obtient dans le domaine $\{S_2 - S_1\}$, les tenseurs de permittivité et de perméabilité suivants en coordonnées sphériques :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{r,\theta,\phi} = \bar{\bar{\mu}}_{r,\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_2 - R_1} \frac{(r - R_1)^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{R_2 - R_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{R_2 - R_1} \end{pmatrix}_{r,\theta,\phi} \quad (1.21)$$

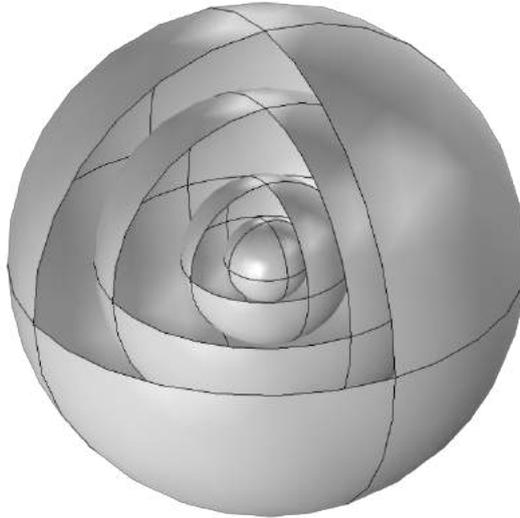
Ces tenseurs peuvent être exprimés en coordonnées cartésiennes par un changement de repère, grâce à J la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

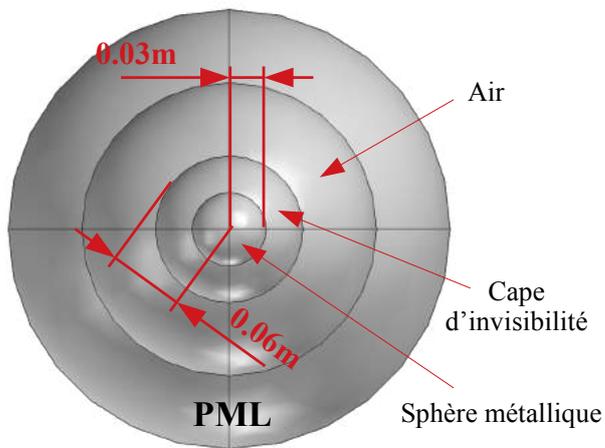
Ce qui donne après simplification :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [(\cos(\theta))^2 (\sin(\phi))^2 (r - R_1)^2 + (\sin(\theta))^2 r^2 + (\cos(\theta))^2 (\cos(\phi))^2 r^2] \\ \epsilon_{xy} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\cos(\theta) (\sin(\phi))^2 (r - R_1)^2 \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) r^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos(\phi))^2 r^2] \\ \epsilon_{xz} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\cos(\theta) \sin(\phi) (r - R_1)^2 \cos(\phi) - \cos(\theta) \cos(\phi) r^2 \sin(\phi)] \\ \epsilon_{yx} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\cos(\theta) (\sin(\phi))^2 (r - R_1)^2 \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) r^2 + \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos(\phi))^2 r^2] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [(\sin(\theta))^2 (\sin(\phi))^2 (r - R_1)^2 + (\cos(\theta))^2 r^2 + (\sin(\theta))^2 (\cos(\phi))^2 r^2] \\ \epsilon_{yz} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\sin(\theta) \sin(\phi) (r - R_1)^2 \cos(\phi) - \sin(\theta) \cos(\phi) r^2 \sin(\phi)] \\ \epsilon_{zx} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\cos(\theta) \sin(\phi) (r - R_1)^2 \cos(\phi) - \cos(\theta) \cos(\phi) r^2 \sin(\phi)] \\ \epsilon_{zy} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [\sin(\theta) \sin(\phi) (r - R_1)^2 \cos(\phi) - \sin(\theta) \cos(\phi) r^2 \sin(\phi)] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{R_2}{r^2(R_2 - R_1)} [(\cos(\phi))^2 (r - R_1)^2 + (\sin(\phi))^2 r^2] \end{aligned} \quad (1.23)$$

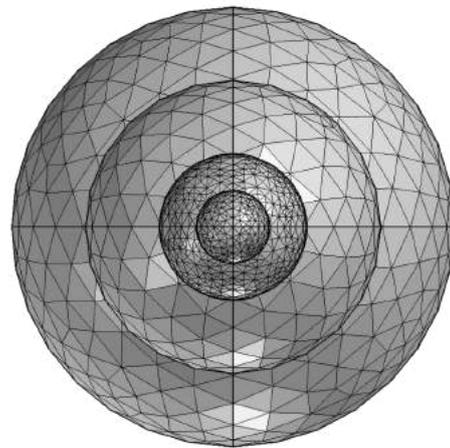
Cape d'invisibilité sphérique



Vue en 3D du cas d'étude



Géométrie du cas d'étude



Maillage des surface

FIGURE 1.7 – Géométrie de la cape sphérique sous COMSOL : une sphère métallique est recouverte d'une cape sphérique, baignant dans l'air. L'ensemble est entouré d'une PML (Perfectly Matched Layer) permettant de simuler l'espace infini.

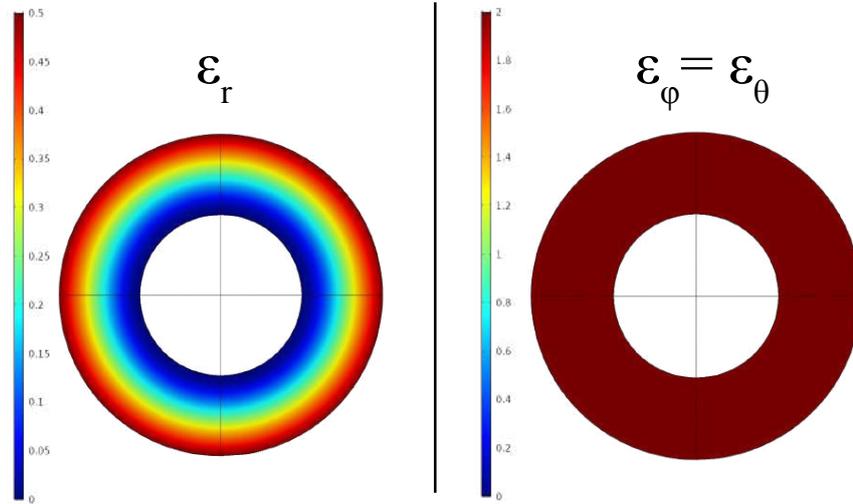


FIGURE 1.8 – Valeurs propres de permittivité dans la cape sphérique : on remarque que des valeurs très basses (tendant vers 0) sont présentes en composante radiale, à proximité de la frontière intérieure de la cape.

L'expression des tenseurs de permittivité et de perméabilité en coordonnées cartésienne n'est pas pratique du point de vue analytique mais permet de réaliser des simulations sous le logiciel commercial COMSOL Multiphysics. Afin de simuler l'effet de cloaking, il existe deux possibilités différentes mais équivalentes. La première consiste à créer un matériau vierge auquel on affecte trois propriétés : conductivité électrique, permittivité diélectrique et perméabilité magnétique. Ce matériau étant totalement fictif, il serait plus convenable de parler d'un milieu théorique plus que d'un matériau. La deuxième consiste à définir dans l'onglet décrivant l'électromagnétisme en domaine fréquentiel une équation d'onde modifiée. Dans cette équation d'onde il est possible de spécifier la nature des propriétés de permittivité et de perméabilité des zones sélectionnées. Ces propriétés peuvent être scalaires, anisotropes ou encore tensorielles.

Le cas d'étude est réalisé grâce à l'outil de conception 3D de COMSOL. La géométrie est donnée dans la figure 1.7, ainsi qu'un aperçu du maillage des surfaces permettant le calcul par éléments finis. Les propriétés matériaux calculées grâce à l'optique de transformation sont données dans la figure 1.8. Les vecteurs propres sont orientés selon les vecteurs de la base des coordonnées sphériques. On obtient donc une permittivité radiale, et deux permittivités orthoradiales selon les directions des angles θ et ϕ . Étant données les symétries du problème, on trouve que les deux composantes orthoradiales sont partout égales.

Une onde plane polarisée linéairement est envoyée sur la cape d'invisibilité. Les résultats de la simulation sont donnés à 3 GHz dans la figure 1.9 à titre d'exemple, mais la cape fonctionne théoriquement quelle que soit la fréquence d'excitation. On observe sur cette figure le phénomène de "cloaking". Tandis que la sphère métallique diffracte l'onde plane en réémettant une onde diffusée dans toutes les directions de l'espace, l'ajout d'une cape semble rendre parfaitement invisible la sphère. Les fronts d'ondes, visibles sur les

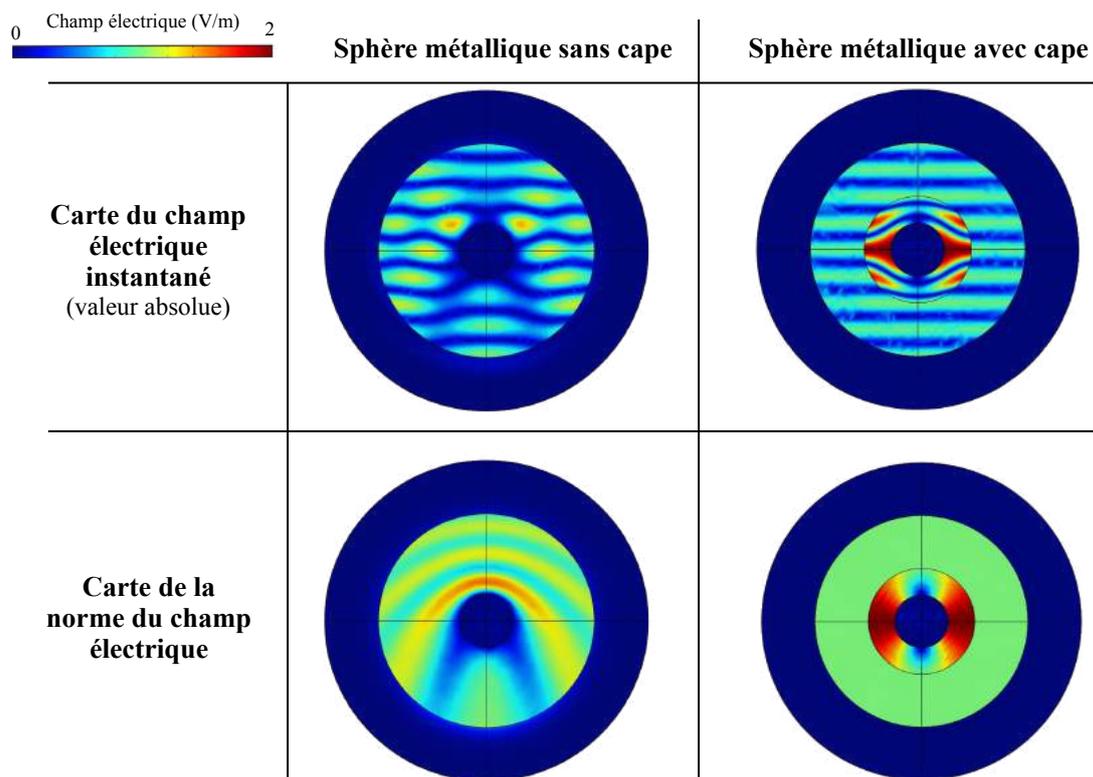


FIGURE 1.9 – Cartes de champ électrique avec et sans cape d’invisibilité sphérique, à 3 GHz. En haut, le champ électrique instantané, en bas sa norme. La sphère métallique sans cape perturbe les fronts d’ondes en diffusant une partie du champ : la norme du champ électrique, supposée spatialement constante en présence d’une onde plane est perturbée par la structure métallique. On remarque que l’ajout d’une cape permet de conserver le front d’onde incident sans aucune perturbation apparente : la norme du champ électrique est constante à l’extérieur de la cape.

cartes de champ électrique instantané, ne sont aucunement perturbés par la présence de la sphère métallique et de sa cape alors qu'une ombre importante apparaît lorsque la sphère métallique seule est éclairée. La norme du champ électrique est laissée invariante à l'extérieur de la cape.

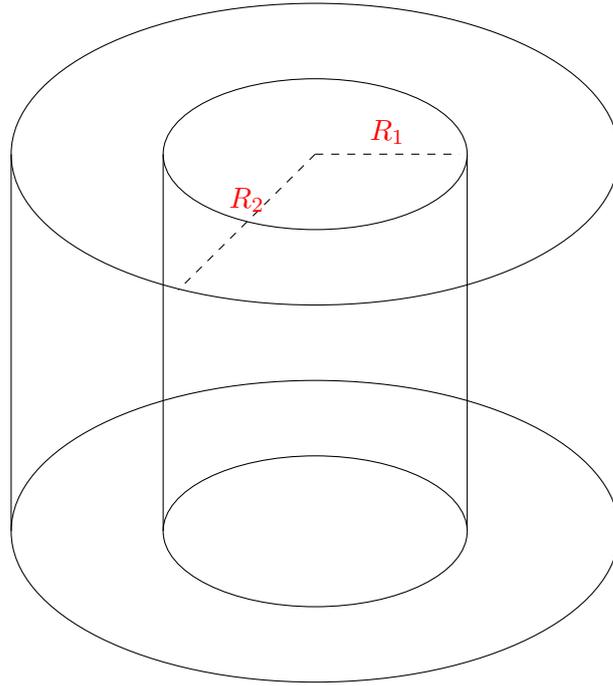
Ces observations basées sur une simulation en hyperfréquence illustrent l'approche théorique de l'optique transformationnelle. Il est donc possible de rendre invisible un objet au moyen d'un revêtement présentant des propriétés électromagnétiques particulières.

1.4.1.2 Transformation cylindrique

Dans le cas d'un problème en dimension 2, on réalise une transformation mathématique dans le plan et non plus dans l'espace : l'analogue de la cape sphérique est la cape cylindrique, décrite entre autres dans les travaux de l'Institut Fresnel [9] [10]. Cette cape permet de masquer non plus une sphère mais un cylindre, invariant selon la direction longitudinale. Elle a beaucoup été étudiée puisque sa réalisation est plus aisée que la cape sphérique. La majorité des expérimentations ont été réalisées sur des modèles de capes cylindriques [11] [12] [13] [14]. La transformation géométrique la plus simple à mettre en oeuvre est donnée par l'équation 1.24.

$$(r', \theta', z') = \begin{cases} (r, \theta, z) & \text{si } M(r, \theta, \phi) \notin C_2 \\ (R_1 + r \frac{R_2 - R_1}{R_2}, \theta, z) & \text{si } M(r, \theta, z) \in C_2 \end{cases} \quad (1.24)$$

Dans cette approche, nous tentons de masquer un cylindre de section circulaire par un revêtement dont la frontière extérieure est également un cylindre. Nous parlons ici de cylindres au sens mathématique du terme, c'est à dire des cylindres de hauteurs infinies. La section du cylindre à masquer C_1 est de rayon R_1 tandis que celui du cylindre délimitant la frontière extérieure C_2 de la cape est noté R_2 .



Les équations de l'optique de transformation nous donnent alors les tenseurs de permittivité et de perméabilité de la cape.

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{r,\theta,z} = \bar{\bar{\mu}}_{r,\theta,z} = \begin{pmatrix} \frac{r - R_1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{r - R_1} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^2 \frac{r - R_1}{r} \end{pmatrix}_{r,\theta,z} \quad (1.25)$$

Afin de pouvoir réaliser des simulations sous COMSOL, les tenseurs doivent être ici aussi exprimés en coordonnées cartésiennes. Nous effectuons donc, comme dans le cas sphérique, un changement de repère avec J la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

On obtient alors les coefficients des tenseurs de permittivité et de perméabilité :

Propriétés de la cape d'invisibilité cylindrique

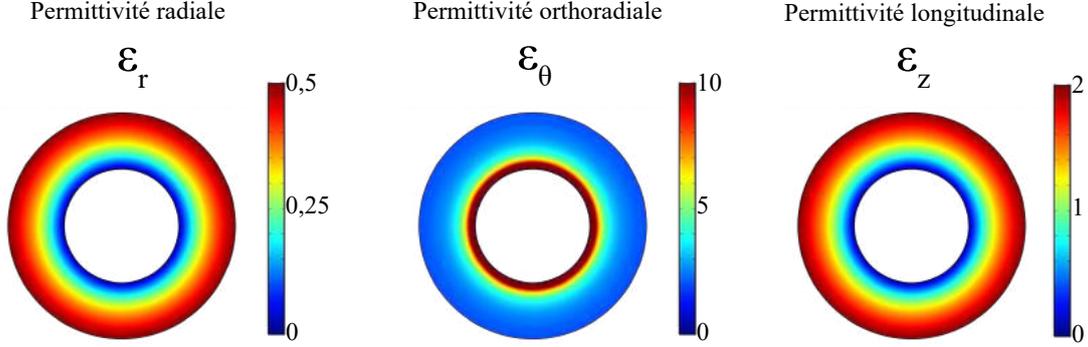


FIGURE 1.10 – Valeurs propres de permittivité dans la cape cylindrique : on remarque que des valeurs très hautes (tendant vers l'infini) et très basses (tendant vers 0) sont présentes, en particulier à proximité de la frontière intérieure de la cape.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{r - R_1}{r} \cos(\phi)^2 + \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^2 \frac{r - R_1}{r} \sin(\phi)^2 \\
 \epsilon_{xy} &= \left(\frac{r - R_1}{r} - \frac{r}{r - R_1} \right) \sin(\phi) \cos(\phi) \\
 \epsilon_{xz} &= 0 \\
 \epsilon_{yx} &= \left(\frac{r - R_1}{r} - \frac{r}{r - R_1} \right) \sin(\phi) \cos(\phi) \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{r - R_1}{r} \sin(\phi)^2 + \frac{r}{r - R_1} \cos(\phi)^2 \\
 \epsilon_{yz} &= 0 \\
 \epsilon_{zx} &= 0 \\
 \epsilon_{zy} &= 0 \\
 \epsilon_{zz} &= \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^2 \frac{r - R_1}{r}
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Connaissant l'expression dans une base cartésienne des tenseurs de permittivité et de perméabilité, on simule la cape cylindrique de la même manière que la cape sphérique. Il est inutile dans le cas présent de réaliser la simulation en 3D, puisque cette cape est invariante par translation selon l'axe z : le cas est donc bien plus simple à simuler. Les trois valeurs propres de permittivité de la cape d'invisibilité cylindrique sont représentées sur la figure 1.10. La géométrie du cas d'étude est donnée dans la figure 1.11.

Les résultats de la simulation sont donnés à 5 et 10 GHz sur la figure 1.13. On peut observer le champ électrique diffusé par un cylindre métallique de rayon $R_1 = 5$ cm ainsi

Cape d'invisibilité cylindrique

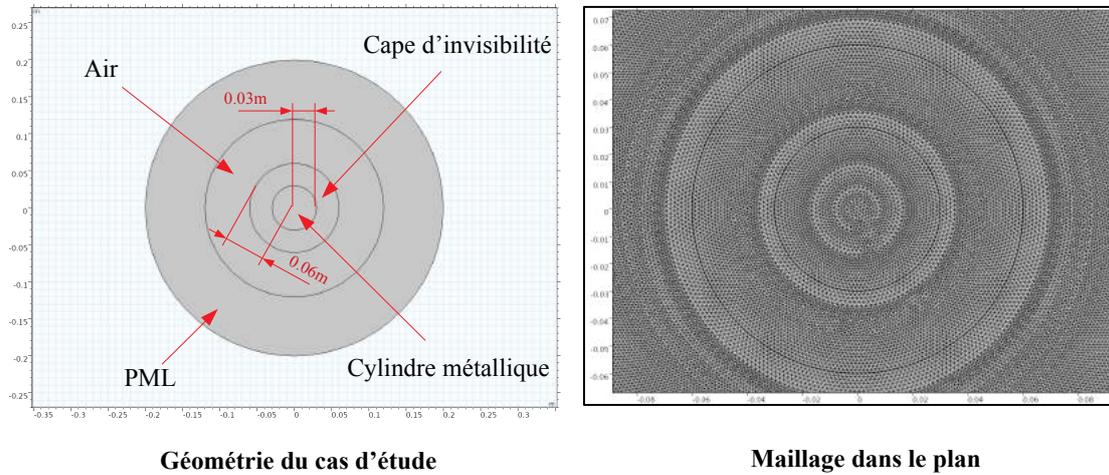


FIGURE 1.11 – Géométrie de la cape cylindrique sous COMSOL. De manière analogue au cas sphérique, nous avons ici un cylindre métallique recouvert d'une cape d'invisibilité cylindrique, baignant dans l'air. Une PML permet ici aussi de simuler l'espace infini.

Flux de puissance dans la cape cylindrique

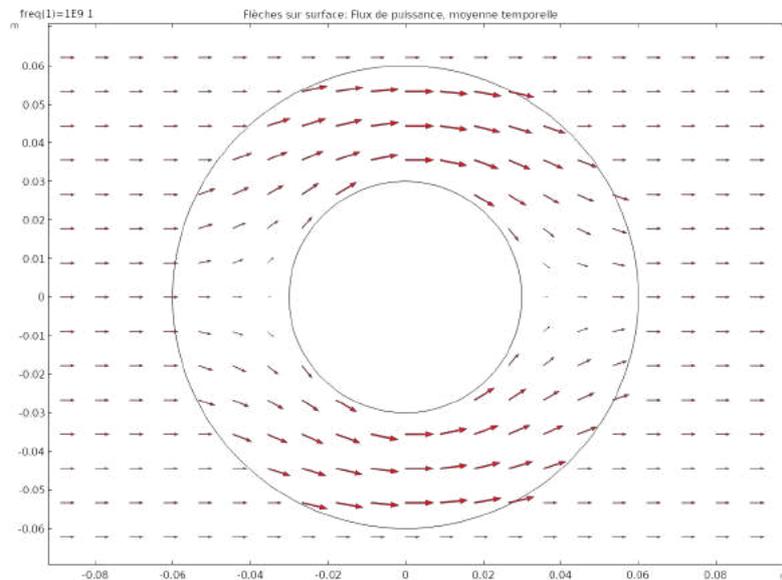


FIGURE 1.12 – Flux de puissance dans la cape cylindrique. On observe un mouvement de contournement de la puissance électromagnétique autour de la zone centrale de la cape.

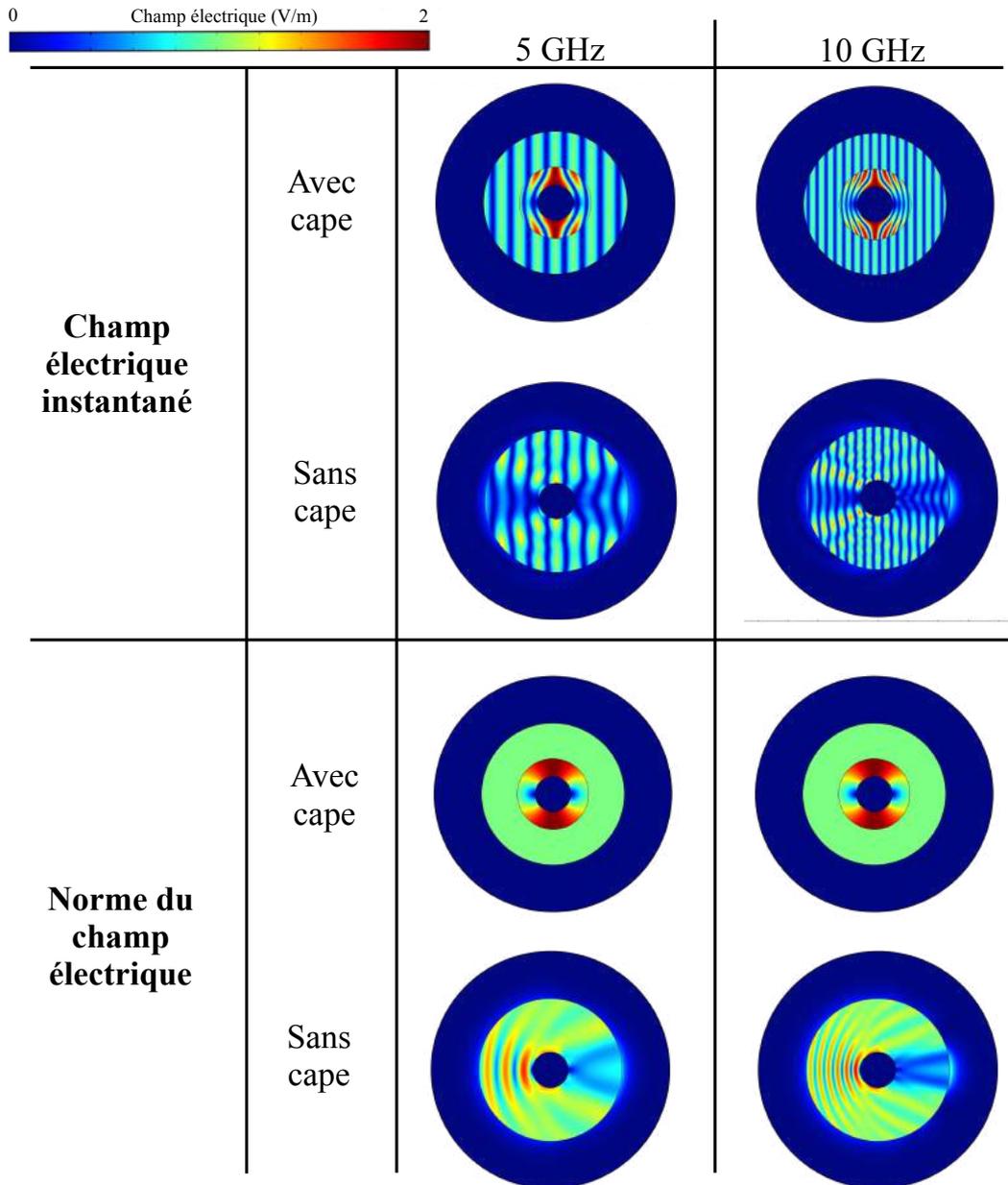


FIGURE 1.13 – Cartes de champ électrique avec et sans cape d’invisibilité cylindrique, à 5 GHz et 10 GHz. En haut, le champ électrique instantané, en bas sa norme. Le cylindre métallique sans cape perturbe les fronts d’ondes en diffusant une partie du champ : la norme du champ électrique, supposée spatialement constante en présence d’une onde plane est perturbée par la structure métallique. On remarque ici aussi qu’à 5 et à 10 GHz, l’ajout d’une cape permet de conserver le front d’onde incident sans aucune perturbation apparente : la norme du champ électrique est constante à l’extérieur de la cape.

que l'impact de l'ajout de la cape cylindrique de rayon R_2 . L'ajout de la cape permet de rétablir les fronts d'onde et de laisser la norme du champ électrique invariante : l'onde électromagnétique ne voit pas le cylindre métallique ni la cape. Nous avons vérifié sur un cas 2D le fonctionnement d'une cape d'invisibilité cylindrique. Le flux de puissance électromagnétique contournant le cylindre central est visible sur la figure 1.10. L'approche théorique formulée par Pendry et al. [2] et par Leonardt et al. [3] est donc encore une fois vérifiée par la simulation.

Les propriétés de permittivité et de perméabilité de la cape ne sont pas dépendantes de la fréquence, c'est pourquoi la cape théorique fonctionne aussi bien à 5 qu'à 10 GHz. Nous verrons plus loin que la dispersion fréquentielle des matériaux réels complique la réalisation de telles capes.

1.4.2 Mimétisme

Historiquement, l'invisibilité ou "cloaking" a été la première application envisagée de l'optique de transformation. Cependant, l'OT est un concept bien plus général et permet de modifier la métrique perçue par les champs électromagnétiques. Ainsi, il est théoriquement envisageable de faire ressembler n'importe quel objet en un autre objet à l'aide d'un revêtement spécifique. En pratique, très peu des applications sont réalisables expérimentalement et il est le plus souvent nécessaire de faire des approximations ou simplifications dans les réalisations pour mettre en oeuvre les concepts théoriques.

Le mimétisme est une notion permettant de regrouper une grande partie des applications de l'OT sous la même appellation. Il s'agit, dans un cadre très général, de mimer le comportement électromagnétique d'un objet à l'aide d'un système présentant une géométrie différente et des matériaux différents. Cette notion a été présentée dans un article fondateur par Lai et al. en 2009 [15]. Dans ce travail, l'optique de transformation nous est présentée non plus comme un moyen de rendre invisible les objets mais plutôt comme un outil bien plus général, permettant de faire ressembler un objet en n'importe quel autre objet.

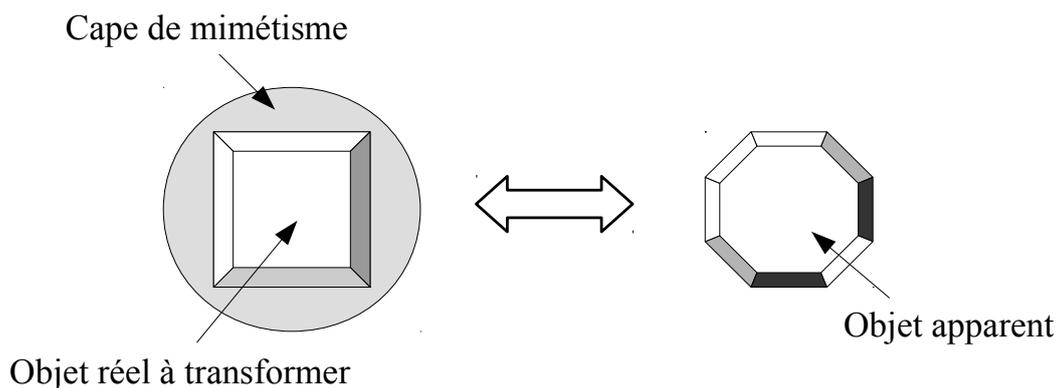


FIGURE 1.14 – Principe de fonctionnement des capes mimétiques : l'objectif consiste à transformer un objet réel en lui donnant une apparence choisie, à l'aide d'une cape de mimétisme.

Le mimétisme décrit en fait l'ensemble des possibilités offertes par l'optique de transformation. On peut voir le "cloaking" comme un cas particulier du mimétisme dans lequel l'objet auquel on veut ressembler est le vide. Des approches très exotiques apparaissent dans la littérature, permettant par exemple de réaliser du cloaking externe [15], [16]. Dans ce cas précis, on cherche à rendre invisible un objet, comme dans le cas classique du cloaking, mais l'objet est situé à l'extérieur de sa cape d'invisibilité. Cette approche, bien que très intéressante du point de vue théorique semble bien plus difficile à concevoir que les capes classiques étant données les propriétés matériaux requises. Nous ne nous attarderons donc pas sur ces sujets dans la suite de ce manuscrit.

1.5 Difficultés de réalisation d'un revêtement d'OT

Nous avons vu que l'optique de transformation permet de réaliser des capes d'invisibilité, en dimension 2 ou 3, et permet dans le cas général de faire ressembler un objet réel en un objet apparent fictif. Les applications potentielles de cette méthodologie sont nombreuses et des démonstrateurs de cape d'invisibilité ont été réalisés dès 2006. Avant de nous intéresser plus en détail aux réalisations expérimentales de revêtements d'OT, les simulations permettent de prendre conscience des difficultés soulevées.

Nous avons vu au travers des exemples de capes d'invisibilité cylindrique et sphérique que les propriétés requises dans les revêtements d'OT sont tensorielles et donc anisotropes dans le cas général. Elles sont également hétérogènes et atteignent des valeurs peu communes parmi les matériaux naturels : en particulier les permittivités et perméabilités relatives tendent localement vers 0. Nous essayons dans cette section de nous rendre compte de la sensibilité des capes vis à vis des propriétés matériaux : l'objectif est de pouvoir, qualitativement, se donner un ordre d'idée des précisions requises dans la conception, du point de vue de l'anisotropie, de l'hétérogénéité ainsi que des valeurs extrêmes de permittivité et perméabilité.

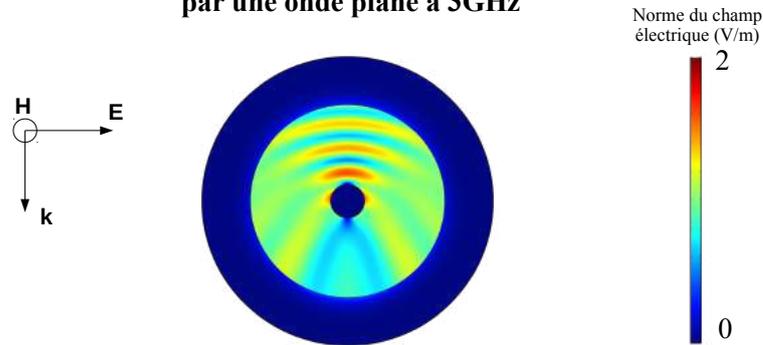
1.5.1 Sensibilité de l'anisotropie

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer l'impact sur les performances de la cape d'un écart à la consigne concernant l'anisotropie des propriétés du revêtement. Nous modifions pour cela dans la simulation COMSOL les paramètres de sorte à ce que l'anisotropie ne dépasse pas une valeur limite. Cette valeur limite d'anisotropie nous permet de nous faire une idée des valeurs à atteindre pour obtenir les effets du cloaking et de les confronter aux valeurs atteignables par la réalisation. Nous choisissons arbitrairement de conserver exacte la composante radiale de permittivité et de perméabilité et de modifier les deux autres composantes afin de borner l'anisotropie. Les nouvelles propriétés du revêtement d'optique transformationnelle sont donc données par :

$$\begin{aligned}\epsilon_{r,cape} &= \epsilon_{r,theorique} \\ \epsilon_{\theta,cape} &= \min(\epsilon_{\theta,theorique}, k_a \epsilon_{r,theorique}) \\ \epsilon_{z,cape} &= \min(\epsilon_{z,theorique}, k_a \epsilon_{r,theorique})\end{aligned}\tag{1.28}$$

avec k_a le coefficient d'anisotropie maximale, $\epsilon_{r,theorique}$, $\epsilon_{\theta,theorique}$ et $\epsilon_{z,theorique}$ correspondent aux permittivités respectivement selon r , θ et z de la cape cylindrique théorique. Nous réalisons une étude paramétrique en faisant varier k_a en tout point de la cape : ce paramètre varie de 3 à 100 avec un pas de 1. En nous basant sur une cape d'invisibilité cylindrique telle que celle décrite précédemment dans ce chapitre, nous analysons l'impact de cet écart par rapport à la théorie grâce à l'analyse des cartes de norme du champ électrique et à l'atténuation de la Surface Équivalente Radar (SER en français ou RCS en anglais). Les résultats sont présentés dans la figure 1.15.

(a) Carte de la norme du champ électrique d'un cylindre excité par une onde plane à 3GHz



(b) Impact de l'anisotropie maximale sur l'efficacité de la cape cylindrique : atténuation RCS et carte de champ électrique

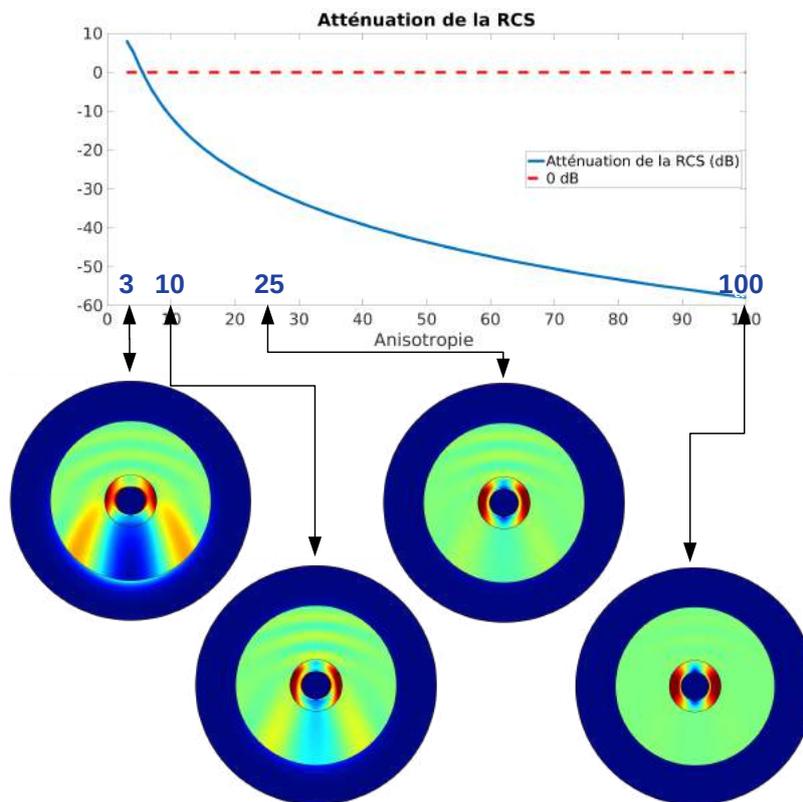


FIGURE 1.15 – Sensibilité à l'anisotropie d'une cape cylindrique. La figure (a) montre la carte de la norme du champ électrique d'un cylindre métallique de 3.5cm de diamètre éclairé à 3 GHz par une onde plane polarisée linéairement. La figure (b) montre l'apport de l'ajout d'une cape en fonction du paramètre d'anisotropie maximale. Des cartes du champ électrique sont également données pour certaines valeurs d'anisotropie afin de se figurer de l'impact qu'elle a sur le fonctionnement du revêtement.

Les résultats montrent qu'en deçà d'une anisotropie de 6, la cape d'invisibilité rend l'objet plus visible qu'il ne l'est sans la cape. La cape produit donc l'effet inverse de ce qui est recherché : pour une anisotropie de 25, une atténuation de 30dB est calculée par la simulation. On peut en conclure que des valeurs d'anisotropie au moins égales à 25 seront nécessaires afin de réaliser une cape fonctionnelle. Avec une anisotropie de 100, l'atténuation atteint près de 60dB, une très bonne performance en terme d'atténuation du champ diffusé.

1.5.2 Sensibilité de la discrétisation

Les revêtements étant hétérogènes, un gradient de propriétés est nécessairement présent dans les revêtements. En pratique, ce n'est pas un gradient parfaitement continu qui pourra être réalisé mais plutôt un revêtement discrétisé spatialement, tel un multicouche. Un article publié en 2010 par Ming-Ji et al. [17] propose une méthode de structure de cape d'invisibilité en multicouche. Il apparaît au regard de la littérature que l'atténuation de la SER est une fonction linéaire du nombre de couches présentes dans la cape.

Une étude détaillée de structures en multicouches est donnée dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

1.5.3 Sensibilité des valeurs extrêmes de permittivité et perméabilité

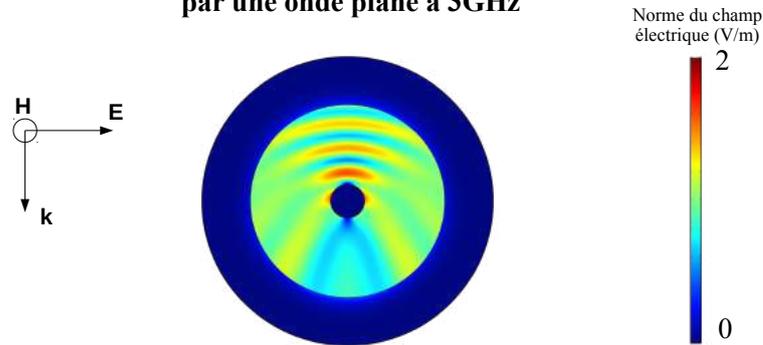
Dans l'étude de sensibilité de l'anisotropie, nous avons tronqué les valeurs "hautes" de permittivité et perméabilité dans la cape tout en conservant les valeurs basses, correspondant aux propriétés radiales. Ici, nous allons nous intéresser à la sensibilité vis à vis de ces valeurs basses. En effet, les valeurs requises tendent vers 0 à mesure que l'on se rapproche de la frontière interne de la cape cylindrique. Cependant, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre ainsi que dans le chapitre 5 de ce manuscrit, la réalisation de matériaux à permittivité proche de 0 (ou Epsilon-Near-Zero ENZ) et perméabilité proche de 0 (ou Mu-Near-Zero MNZ) constitue un défi technique important. Nous vérifions ici l'importance de ces valeurs proches de 0 au travers d'une étude paramétrique portant sur la valeur minimale atteignable en permittivité et perméabilité.

Les paramètres matériaux de la cape utilisés pour cette étude sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{r,cape} &= \max(\epsilon_{r,theorique} , \epsilon_{min}) \\
 \epsilon_{\theta,cape} &= \max(\epsilon_{\theta,theorique} , \epsilon_{min}) \\
 \epsilon_{z,cape} &= \max(\epsilon_{z,theorique} , \epsilon_{min})
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

avec ϵ_{min} la valeur minimale de permittivité. Dans l'étude que nous avons réalisée, ce paramètre prend des valeurs allant de 0.001 à 1. Les résultats de l'étude apparaissent dans la figure 1.16 : on observe une forte dégradation des propriétés de la cape pour une permittivité minimale autour de 0.3. Avec une permittivité minimale à 1, la cape

(a) Carte de la norme du champ électrique d'un cylindre excité par une onde plane à 3GHz



(b) Impact de la permittivité minimale sur l'efficacité de la cape cylindrique : atténuation RCS et carte de champ électrique

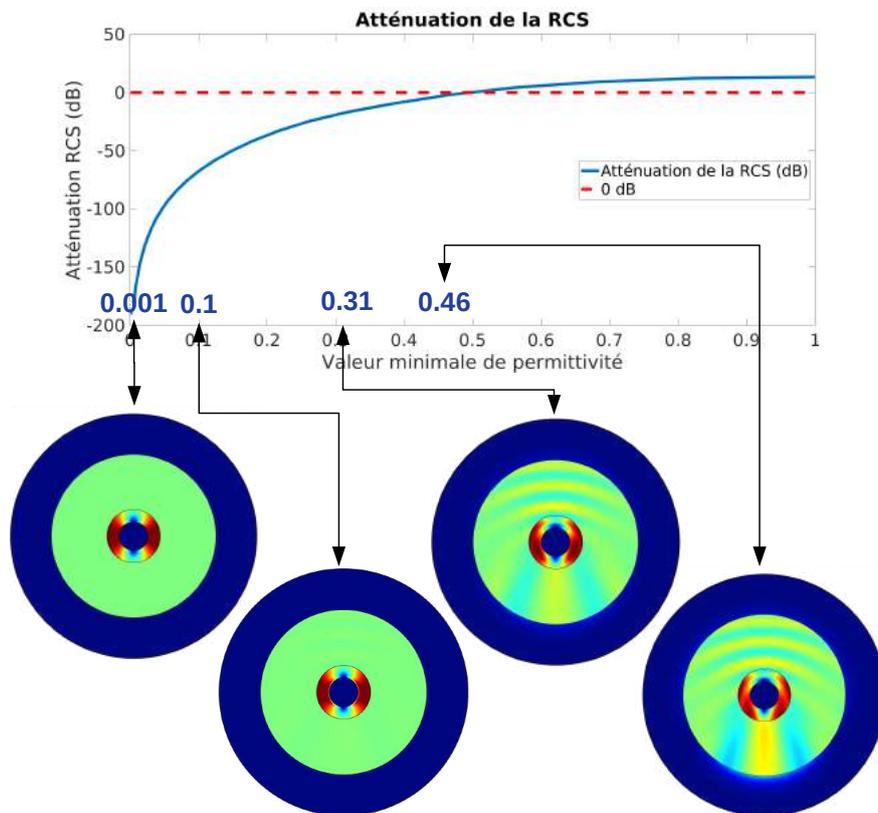


FIGURE 1.16 – Sensibilité aux valeurs extrêmes d'une cape cylindrique. La figure (a) montre la carte de la norme du champ électrique d'un cylindre métallique de 3.5cm de diamètre éclairé à 3 GHz par une onde plane polarisée linéairement. La figure (b) montre l'apport de l'ajout d'une cape en fonction de la valeur minimale de permittivité. Des cartes des champs électriques sont également données pour certaines valeurs du paramètre afin de se figurer l'impact qu'il a sur le fonctionnement du revêtement.

Capes avec valeurs minimales de permittivité et perméabilité à 0.1

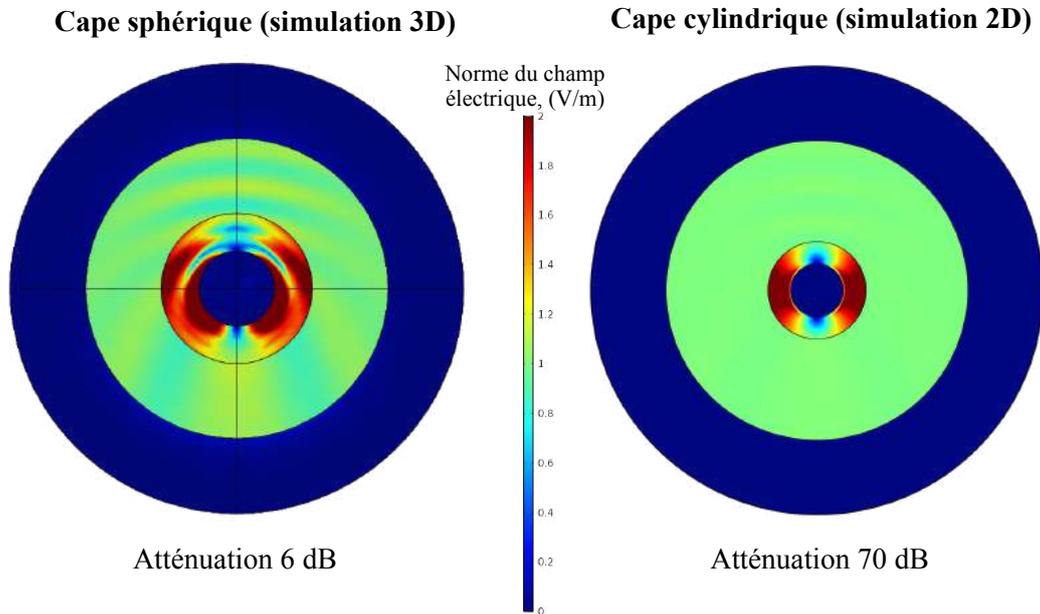


FIGURE 1.17 – Comparaison de la robustesse des capes sphériques et cylindriques. Les valeurs de permittivité et de perméabilité sont modifiées de sorte à être toujours supérieures à 0.1. Les effets de cette approximation sont beaucoup plus importants sur la cape sphérique que sur la cape cylindrique, car les permittivités et perméabilités tendent plus rapidement vers 0 dans le cas sphérique.

n'est plus fonctionnelle car la SER est amplifiée plutôt qu'atténuée.

Nous avons ici étudié une dégradation de la cape cylindrique : la même étude réalisée sur une cape sphérique aboutit à des résultats plus contraignants encore concernant les valeurs basses de permittivité et perméabilité. La figure 1.17 montre une carte de norme du champ électrique pour des conditions similaires d'éclairement mais dans le cas d'une cape sphérique. Dans cette étude, la valeur minimale acceptée pour les permittivités et perméabilités est de 0.1. Le résultat est très mitigé, le revêtement ne remplissant déjà plus son rôle de cape d'invisibilité. Ceci est dû au fait que dans le cas sphérique, les permittivités radiales décroissent bien plus rapidement à mesure que l'on s'approche de la frontière intérieure de la cape. Interdire les valeurs inférieures à 0.1 a donc bien plus d'impact en sphérique qu'en cylindrique.

En conclusion de cette dernière étude paramétrique de sensibilité, il apparaît que l'utilisation de matériaux ENZ et MNZ est indispensable à la réalisation de capes d'invisibilité. Il est impossible de se satisfaire uniquement de matériaux aux propriétés sur-unitaires. Les propriétés requises par l'OT doivent être respectées scrupuleusement car les capes semblent très sensibles à toute variations par rapport à la théorie. Une étude de la sensi-

bilité des capes d'invisibilité cylindriques peut également être trouvée dans [18].

1.6 Métamatériaux

1.6.1 Introduction sur les métamatériaux

Le terme métamatériau désigne l'ensemble des structures artificielles composites conçues dans le but d'obtenir des propriétés particulières, voire inédites, dans le domaine de l'électromagnétisme, de la thermique ou encore de la mécanique. L'étude des métamatériaux est ancienne puisque l'on retrouve dès le début du XX^{ème} siècle [19] [20] des références étudiant le comportement électromagnétiques de milieux composites. L'histoire des métamatériaux est étroitement liée à celle de l'homogénéisation, qui consiste à affecter des valeurs effectives homogénéisées à une structure inhomogène.

Winston Cock fut l'un des pionniers des métamatériaux dans les années 1940 et 1950 [21] [22] : il utilisa un réseau périodique de petits éléments métalliques sub-longueurs d'onde afin de créer un matériau diélectrique artificiel lui permettant de contrôler la phase sur une antenne. Veselago étudia en 1960 [23] le comportement des ondes dans un milieu dont la permittivité et la perméabilité seraient simultanément nulles. Il mentionne la possibilité d'utiliser un matériau structuré gyrotrope et magnétique afin de créer un matériau à indice négatif.

L'essor des métamatériaux ne prend réellement qu'à l'aube du XXI^{ème} siècle, lorsque John Pendry [24] développe le concept de super-lentille grâce à la réfraction négative de Veselago. La super-lentille est un dispositif à indice optique négatif permettant d'obtenir une focalisation parfaite d'un objet sans limite de diffraction ni d'angle d'incidence (stigmatisme rigoureux) ce qui constituerait une avancée majeure dans le domaine de l'imagerie. Un article a été publié en 2005 montrant une première réalisation expérimentale [25]. Ces matériaux à indice négatif sont également appelés matériaux "main gauche", car la propagation d'une onde dans un tel milieu se fait avec E , H et k formant un trièdre orienté dans une règle de la "main gauche".

John Pendry publie ensuite l'article fondateur du cloaking [2] en 2006, nécessitant également l'utilisation de méta-matériaux. Le cloaking est une application particulière de l'optique de transformation (OT), que nous avons abordé précédemment dans ce chapitre.

Pour ces deux applications que sont le cloaking et les superlentilles, les permittivités et perméabilités requises sont pratiquement introuvables dans la nature. De nombreuses dénominations sont apparues permettant de classer les métamatériaux en fonction de leurs propriétés. On a tout d'abord les matériaux main gauche ou matériaux à indice négatifs dont nous avons parlé précédemment concernant les superlentilles. Il y a ensuite les matériaux hyperboliques, dont le tenseur de permittivité admet une valeur propre négative [26] [27] [28] et dont la surface isofréquence est hyperbolique. Ces matériaux sont par conséquent très fortement anisotropes ce qui permet d'envisager leur utilisation

dans des systèmes d'imagerie ou encore des superlentilles.

On trouve aussi dans la littérature les matériaux epsilon-near-zero (ENZ) et mu-near-zero (MNZ) dont la permittivité et la perméabilité atteignent des valeurs comprises entre 0 et 1 sur une bande de fréquence donnée [29] [30]. Des matériaux à indice proche de zéro ou near-zero-index (NZI) font également l'objet d'études approfondies étant donnée leur importance dans la réalisation de capes d'invisibilité [31]. Ces matériaux offrent également des possibilités intéressantes concernant le contrôle de la phase et des fronts d'onde [32].

Les méta-matériaux sont à bien des égards proches des cristaux photoniques, si bien que ces derniers sont parfois considérés comme un genre à part de métamatériaux [33] [34] [35]. Des cristaux photoniques structurés en multicouches telles les miroirs de Bragg permettent de créer, pour une incidence donnée, un réflecteur par phénomène d'interférences constructives. Cependant, il est important de noter que les cristaux photoniques sont utilisés à une fréquence pour laquelle ils ne sont pas homogénéisables puisque la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la taille des inclusions. De manière plus générale, les empilements de couches minces constituent une classe de métamatériaux permettant de réaliser des propriétés anisotropes. Si, à la différence des miroirs de Bragg, les dimensions de structurations sont très inférieures aux longueurs d'ondes dans les couches, on peut alors envisager d'obtenir des propriétés homogénéisées. Ces matériaux ont de nombreuses applications et peuvent servir d'absorbants [36], constituer des matériaux hyperboliques [37] [38] ou encore créer des matériaux à indice négatif [39].

1.6.2 Métamatériaux à faible indice

Les métamatériaux les plus étudiés depuis le début des années 2000 sont certainement les réseaux de particules résonantes permettant de créer des ENZ, MNZ ou NZI. Ces matériaux sont constitués le plus souvent de fils conducteurs imprimés sur des matrices polymères. L'un des motifs les plus courants est le Split-Ring Resonator (SRR) étudié pour la première fois en 1981 par Hardy et Whitehead [40]. Leur objectif était d'obtenir dans la gamme hyperfréquence des résonateurs magnétiques dont les dimensions seraient inférieures aux cavités résonantes classiques. Le dispositif est constitué d'un anneau métallique fendu excité par une ligne coaxiale. Ces travaux ont ensuite été repris par Pendry [41] dans le but de fabriquer des métamatériaux magnétiques en disposant les SRR en réseau, non plus dans une ligne coaxiale mais dans l'espace libre. Il leur détermine alors analytiquement une perméabilité magnétique effective à partir des courants de surfaces. Une étude des SRR seuls et couplés dans différentes configurations a été réalisée afin de déterminer analytiquement le rôle de la réponse dipolaire magnétique dans le champ diffusé par la particule [42]. Il apparaît que la réponse magnétique semble avoir un rôle important dans les couplages entre SRR proches, validant le caractère magnétique des réseaux de SRR. Les couplages entre SRR en mode edge-coupled ou broadside-coupled ont également été abordés de manière analytique dans [43].

L'utilisation des SRR permet de créer à des fréquences au delà de la dizaine de GHz

des matériaux magnétiques artificiels. Tandis qu'à plus haute fréquence aucun matériau classique ne présente de propriétés magnétiques, les réseaux de SRR ont été validés autour de 100 THz [44], permettant d'envisager le magnétisme effectif jusque dans le domaine optique.

Par la suite, de nombreuses variantes du SRR ont été testées, en particulier le SRR-complémentaire ou CSRR [45] [46]. L'idée est de découper un réseau d'anneaux fendus dans une plaque métallique et de s'intéresser aux propriétés sélectives en fréquences de la surface obtenue. Par ce moyen, il est par exemple possible d'obtenir des filtres passe-bande ou passe-haut. Ce ne sont pas directement les surfaces sélectives en fréquence (frequency-selective-surface FSS) qui nous intéressent dans cette thèse mais plutôt les SRR en temps qu'inclusion unitaire d'un réseau 3D formant un métamatériau. Une étude a également été menée afin de rendre ajustable les propriétés d'un réseau de SRR grâce à l'utilisation de capacités variables [47].

Il est possible de diminuer les dimensions du résonateur afin de créer des structures très petites devant la longueur de résonance. Cette approche, développée dans [48], permet de diminuer la maille unitaire du réseau du métamatériau et ainsi de s'assurer de l'homogénéisabilité de celui-ci. Des métamatériaux à faible indice ont ainsi été utilisés dans la première réalisation expérimentale de cape d'invisibilité cylindrique en 2006 [14]. Une étude avait alors été réalisée sur des SRR afin de pouvoir contrôler, grâce à un paramètre géométrique, la perméabilité magnétique équivalente du métamatériau. Un gradient de propriété a ainsi été réalisé afin de satisfaire aux propriétés dictées par l'optique transformationnelle.

1.6.3 Chiralité artificielle

Nombre de métamatériaux constitués de réseaux d'inclusions résonantes présentent une chiralité issue de leur géométrie : il peut y avoir un ou plusieurs centres d'asymétrie, une forme en spirale ou encore un plan de chiralité. Cette chiralité n'est pas requise dans l'optique de transformation mais apparaît très fréquemment lors des tentatives de réalisation de matériaux à faible indices. Elle a pour conséquence de rendre fautive l'équation constitutive classique des magnéto-diélectriques car il devient nécessaire de prendre en compte des tenseurs de couplages électro-magnétiques :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\epsilon}} & \bar{\bar{a}} \\ \bar{\bar{b}} & \bar{\bar{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

De nombreux travaux traitent de ce sujet [49] [50] et décrivent le comportement des ondes dans de tels milieux. Certains travaux [51] [52] [53] ont même tenté de concevoir des milieux à faible indices ou à indice négatif effectif en tirant partie de la chiralité des métamatériaux. La thématique des métamatériaux chiraux est abordée plus en détail dans le chapitre 5 de ce manuscrit.

1.6.4 Circuits maxwelliens

Le comportement des méta-matériaux à réseaux d'inclusions métalliques peut être modélisé par des circuits électriques équivalents. On appelle parfois circuit maxwellien ce type d'inclusions. Les phénomènes en jeu dans un circuit maxwellien et dans un circuit électrique présentent de nombreuses similitudes. Des approches analytiques ont été développées afin d'établir des équivalences entre les circuits maxwelliens et les circuits électriques [54] [55] [56]. Ainsi, de nombreuses équivalences entre inclusions et circuits électriques sont données dans [57].

Cette approche permet dans une certaine mesure de prédire le comportement des résonances des inclusions métalliques vis à vis des excitations électromagnétiques, en déterminant les caractéristiques du circuit électrique équivalent. Nous évoquons les circuits Maxwelliens dans les chapitres 4 et 5 de ce manuscrit.

1.7 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons abordé l'optique de transformation et aperçu quelques-unes des applications théoriques des revêtements d'invisibilité. Nous avons également étudié la sensibilité des capes en fonction des paramètres constitutifs du revêtement. Les possibilités offertes par l'optique transformationnelle sont extrêmement vastes et permettent d'imaginer des applications très diverses.

Les capes d'invisibilité requièrent des propriétés matériaux peu conventionnelles et très exigeantes, qu'aucun matériau naturel ne saurait fournir. La recherche s'est donc concentrée depuis quelques années sur la création de méta-matériaux permettant de réaliser ces revêtements. Dans le chapitre 5 de ce manuscrit est abordée la thématique de l'homogénéisation des méta-matériaux, permettant de déterminer et de garantir la fiabilité des paramètres effectifs de permittivité et de perméabilité.

2 Applications de l'Optique transformationnelles

Sommaire

2.1	Introduction	45
2.2	Etat de l'art des réalisations	46
2.2.1	Capes d'invisibilité	46
2.2.2	Mapping conforme et quasi-conforme	46
2.2.3	Tapis par contrôle de phase	47
2.2.4	Capes par annulation de la diffusion	48
2.2.5	Conclusion	50
2.3	Notion de mimétisme, qualification des revêtements d'optique transformationnelle	50
2.3.1	Introduction	50
2.3.2	Vocabulaire	51
2.3.3	Critère de mimétisme	51
2.4	Revêtement mimétique : transformer les carrés en cercles	52
2.5	Tapis d'invisibilité par troncature de cape	55
2.5.1	Motivations et objectif	55
2.5.2	Description de l'approche	55
2.5.3	Simulations full-wave	59
2.6	Invisibilité d'un objet longiligne	63
2.6.1	Positionnement de l'étude	63
2.6.1.1	Définition du revêtement d'OT	64
2.6.1.2	Définition des cas de simulations	65
2.6.2	Résultats et écarts par rapport aux attentes	69
2.6.3	Cape par compression sphérique	71
2.7	Conclusion	74

2.1 Introduction

La réalisation de capes de mimétisme ou d'invisibilité telles que celles présentées dans le chapitre 1 constitue un défi de taille tant les propriétés électromagnétiques à obtenir sont spécifiques. Nous avons évoqué les métamatériaux et leurs propriétés électromagnétiques particulières comme piste privilégiée permettant de réaliser les revêtements d'optique transformationnelle.

Dans un premier temps, ce chapitre s'intéresse à l'état de l'art des réalisations de revêtements et aux stratégies mises en oeuvre pour satisfaire aux exigences de l'OT. Nous

proposerons, dans un second temps, des pistes d'approches permettant d'envisager la réalisation expérimentale de systèmes à l'aide de métamatériaux. L'objectif est double : trouver des applications à la fois utiles et réalistes. Afin de juger de l'utilité d'un revêtement, nous définirons des critères objectifs permettant de qualifier leur fonctionnement. Nous aborderons ensuite le cas des tapis d'invisibilité, des capes de mimétisme et des portions de cylindres masquées par compressions radiales sphériques et cylindriques.

2.2 Etat de l'art des réalisations

2.2.1 Capes d'invisibilité

La cape d'invisibilité, qu'elle soit cylindrique ou sphérique, présente une très grande difficulté de réalisation si bien que peu de systèmes expérimentaux ont actuellement vu le jour. La première cape d'invisibilité cylindrique a été développée par Schurig et al. [14] en 2006 dans le domaine des micro-ondes. Afin de simplifier la réalisation de la cape, les propriétés matériaux requises ont été modifiées de sorte à correspondre à leurs capacités de fabrications. En effet, en multipliant toutes les propriétés matériaux théoriquement requises par une fonction bien choisie de l'espace, les auteurs font en sorte de n'avoir qu'une seule composante de perméabilité sous-unitaire au lieu de deux requises normalement pour les capes cylindriques. En d'autres termes, les trajectoires des rayons sont conservées mais une réflexion apparaît à la surface de la cape. Ce revêtement n'est donc pas strictement une cape d'invisibilité, mais plutôt une version simplifiée.

Une autre démonstration expérimentale de cape cylindrique ne s'appuyant pas directement sur l'optique transformationnelle a été réalisée à l'aide de lignes de transmissions permettant de guider l'énergie électromagnétiques autour d'un objet à masquer [58] [11]. Cette application permet de rétablir un coefficient de transmission proche de 1, mais l'onde transmise n'a pas la phase qu'elle aurait avec une cape parfaite. L'objet est donc techniquement détectable, mais le dispositif permet néanmoins de diminuer fortement l'onde rétro-diffusée.

2.2.2 Mapping conforme et quasi-conforme

Devant la grande difficulté que représente la réalisation des capes d'invisibilité, les tapis se sont rapidement imposés comme une alternative bien plus réaliste et tout aussi utile. Le concept fut développé par Li et Pendry en 2008 [59]. Dans cet article est exposée une méthode permettant de masquer un défaut de surface à l'aide d'un tapis utilisant une transformation optique quasi-conforme. Trois idées majeures entrent en compte dans cette approche. Tout d'abord, l'OT n'est pas utilisée pour rendre invisible un objet mais plutôt pour le faire ressembler à un autre : on est donc dans une approche mimétique. Ensuite, la transformation utilisée est une transformation quasi-conforme, c'est à dire qu'elle respecte autant que possible localement la valeur des angles. Il est possible de montrer que l'utilisation d'une telle transformation minimise l'anisotropie dans le revêtement d'OT [59] [60], permettant ainsi de la négliger. Enfin, la troisième idée dans cet

article et que l'on retrouve déjà dans [14] consiste à ne s'intéresser qu'à l'indice optique dans le revêtement afin de ne pas être contraint d'utiliser des matériaux magnétiques. Ce choix se fait au prix d'un saut d'impédance à l'interface entre la cape et l'air, provoquant une réflexion à la surface. Il permet en revanche d'imaginer des designs de capes jusqu'aux fréquences optiques, grâce à une approche tout-diélectrique [61].

Les méthodes de mapping conforme ou quasi-conforme permettent donc de réaliser des transformations très douces et par conséquent simplifient grandement la réalisation en supprimant l'anisotropie dans le revêtement. Cependant, ces approches se font au prix d'une très grande épaisseur, ce qui réduit drastiquement les applications potentielles de ces dispositifs. Dans [59], le tapis d'invisibilité est près de dix fois plus épais que le défaut que l'on tente de masquer. Une réalisation expérimentale a été réalisée en 2009 par Liu et al. [62], dans laquelle le revêtement est cette fois-ci cinq fois plus épais que le défaut à masquer. Une cape d'invisibilité conforme a également été conçue en 2013 par Ma et al. [12], pour laquelle l'épaisseur de cape est là encore très grande au regard des dimensions de l'objet à masquer et l'invisibilité n'est obtenue que pour une direction d'incidence unique.

L'approche quasi-conforme ou conforme semble donc intéressante du point de vue des réalisations expérimentales et de la validation de la théorie de l'optique transformationnelle. Cependant, par la nature même des transformations, les revêtements obtenus sont très épais au regard des dimensions caractéristiques du problème : il semble difficile d'intégrer sur des systèmes existants de tels dispositifs tant leur encombrement est important.

2.2.3 Tapis par contrôle de phase

Afin de pallier ce problème d'épaisseur des revêtements, une approche alternative a été développée, celle des tapis ultra-minces par saut de phase. On ne s'intéresse plus ici aux techniques d'optique de transformation, l'idée consiste cette fois-ci à ne s'intéresser qu'au déphasage provoqué par le défaut [63] [64] que l'on souhaite masquer. L'objectif est de mettre au point un revêtement mince permettant de redresser le front de l'onde réfléchi et ainsi de recréer la réflexion spéculaire malgré un défaut. En se basant sur les lois de Snell-Descartes généralisées développées dans [65], il est possible de relier l'angle de réflexion, l'angle d'incidence ainsi que la phase de l'onde sur la surface :

$$\sin(\theta_r) - \sin(\theta_i) = \frac{1}{k_i} \frac{d\Phi(x)}{dx} \quad (2.1)$$

avec $\Phi(x)$ la distribution de phase en fonction de la position et k_i le nombre d'onde dans le milieu d'incidence. La loi de Snell-Descartes généralisée permet de lier la distribution de phase à réaliser à la surface dans le but de mimer un plan métallique, en fonction du profil $y(x)$ décrivant le défaut :

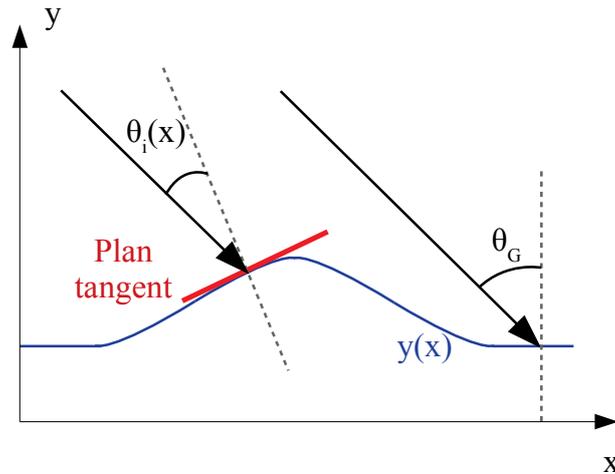


FIGURE 2.1 – Schéma d'un défaut de surface éclairé par une onde plane.

$$\Phi(x) = 2k_0 \cos(\theta_G) \int \frac{\frac{dy(x)}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}} dx \quad (2.2)$$

en écrivant θ_G l'angle d'incidence global de l'onde plane.

Il est possible de réaliser par la simulation ou expérimentalement des dispositifs minces basées sur des métasurfaces sélectives en fréquence permettant réaliser le saut de phase adapté à la géométrie du défaut, afin que pour tout x on ait $\theta_r = -\theta_G$. Les métasurfaces utilisées peuvent être constituées de diélectriques ou de réseaux d'inclusions métalliques dont le saut de phase est déterminé par un ou plusieurs paramètres géométriques de contrôle.

Cette approche a permis la réalisation de dispositifs expérimentaux jusqu'aux fréquences optiques [66]. Ces méthodes semblent efficaces mais sont limitées en bande fréquentielle et en bande angulaire : dans [66], le tapis ne fonctionne que pour une longueur d'onde de 730nm et en incidence normale. Avec un angle d'incidence de 15°, on distingue sur les cartes de champ électrique des lobes secondaires de diffusion. Des métasurfaces actives, dites Non-Foster, c'est à dire dont la réactance (partie imaginaire de l'impédance) ne croît pas de manière monotone avec la fréquence, peuvent être utilisées dans la fabrication de capes minces afin d'augmenter la bande de fréquence de fonctionnement [67].

2.2.4 Capes par annulation de la diffusion

Une dernière catégorie de cape et tapis fut développée parallèlement à cela, mais ne s'appuyant pas non plus sur les techniques d'optique transformationnelle : la "scattering

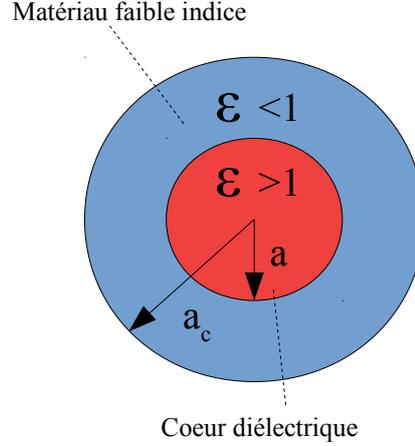


FIGURE 2.2 – Principe de fonctionnement de la technique de "scattering cancellation" : un coeur diélectrique est enveloppé dans un revêtement à faible indice. L'homogénéisation quasi-statique d'un tel objet garantit une surface équivalente radar nulle : l'ensemble est invisible pour un observateur extérieur.

cancellation", ou méthode d'annulation de la diffusion. Cette méthode a été décrite pour la première fois en 2005 par Alù et Engheta [68] avant même que les articles fondateurs du *cloaking* n'aient été publiés. On se concentre ici sur la minimisation des coefficients de la décomposition multipolaire d'un objet donné grâce à l'ajout à proximité d'un matériau complémentaire réalisant une diffusion opposée. L'exemple donné dans l'article fondateur d'Alù et Engheta concerne une petite sphère diélectrique que l'on recouvre d'un matériau de faible permittivité. La surface équivalente radar s'exprime en fonction des coefficients du développement multipolaire du rayonnement de l'ensemble, conformément à la théorie de Mie [69] :

$$Q = \frac{2\pi}{|k_0|^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) (|c_n^{TE}|^2 + |c_n^{TM}|^2) \quad (2.3)$$

avec c_n^{TE} et c_n^{TM} les amplitudes complexes des harmoniques pour les ondes sphériques TE et TM. La condition d'annulation des coefficients de Mie est donnée grâce à l'utilisation d'une loi d'homogénéisation quasi-statique des deux sphères concentriques :

$$a = {}^3 \sqrt{\frac{(\epsilon_c - \epsilon_0)(2\epsilon_c + \epsilon)}{(\epsilon_c - \epsilon)(2\epsilon_c + \epsilon_0)}} a_c \quad (2.4)$$

avec a le rayon de la sphère du diélectrique, a_c le rayon de la sphère de revêtement, ϵ_0 la permittivité du vide, ϵ_c la permittivité du revêtement et ϵ la permittivité du coeur diélectrique.

Cette méthode prometteuse a été testée par simulation jusque dans l'infrarouge en utilisant un revêtement en graphène [70]. Une approche consistant à doper le graphène

pour contrôler la fréquence de fonctionnement de la cape a été investiguée. Cette approche fournit sur des plages étroites de fréquences des résultats prometteurs sur des objets petits devant la longueur d'onde d'intérêt.

2.2.5 Conclusion

A l'heure actuelle, des réalisations expérimentales permettant de valider l'optique transformationnelle et le concept de cape d'invisibilité ont été réalisées. Cependant, le potentiel de cette méthode n'est pas totalement exploité puisque les réalisations concernent des versions amoindries de revêtements d'invisibilité ou de mimétisme. Ceci s'explique par la grande difficulté de réalisation des propriétés de permittivité et perméabilité requises dans les capes et décrites dans le premier chapitre de cette thèse.

Dans la suite de ce chapitre, nous cherchons à mettre au point des cas d'utilisation de revêtements d'optique transformationnelle qui soient à la fois utiles et réalisables. Afin de qualifier les performances des revêtements imaginés, nous définissons dans un premier temps des critères objectifs de mimétisme.

2.3 Notion de mimétisme, qualification des revêtements d'optique transformationnelle

2.3.1 Introduction

Nous avons vu que l'optique transformationnelle permet de mettre au point des revêtements permettant de modifier l'aspect d'un système afin de lui donner l'apparence d'un système différent. En théorie, aucune approximation n'est faite dans les équations, donc un revêtement respectant les propriétés requises respectera parfaitement sa fonction. Nous nous intéressons désormais à la réalisation expérimentale de ces revêtements d'optique transformationnelle : les spécificités requises ne seront pas parfaites. Une question d'importance à traiter est donc celle de l'objectivisation des performances d'un revêtement.

En ce qui concerne les capes d'invisibilité, les performances sont faciles à objectiver. Le but est de rendre un objet donné invisible aux ondes : autrement dit, le système doit diffuser le moins de puissance possible dans toutes les directions de l'espace. Ainsi, on peut se contenter de regarder la surface équivalente radar bistatique (SER) afin de se rendre compte du niveau d'atténuation du champ diffusé. Nous pouvons alors aisément, sur la base de l'atténuation de SER, juger de l'efficacité d'un modèle de cape sur une plage de fréquence et comparer les performances de différents dispositifs. Pour les revêtements de mimétisme en revanche, nous ne cherchons pas à supprimer le champ diffusé mais plutôt à le faire ressembler à celui d'un objet donné. La qualification de ces revêtements ne peut pas se faire par une simple étude de leur surface équivalente radar, car celle-ci n'apporte aucune information sur la nature du champ diffusé (polarisation, développement multipolaire). Afin de pallier à ce problème, nous avons donc cherché à mettre au

point un critère de mimétisme, permettant de juger plus précisément de l'efficacité de ces revêtements.

2.3.2 Vocabulaire

Pour traiter de la problématique du mimétisme ainsi que celui de l'atténuation de la diffusion, nous devons définir dans un premier temps les différents systèmes étudiés. Afin de simplifier le raisonnement, nous utilisons dans ce chapitre du vocabulaire issu du biomimétisme :

- *Le modèle* : système de référence imité par le mime.
- *Le mime* : système réel, imitant le comportement du modèle.
- *Le dupe* : observateur lointain ne possédant pas la capacité de différencier le mime du modèle.

A l'aide de ces définitions, nous cherchons à définir un critère permettant de quantifier le comportement mimétique du système recouvert d'un revêtement. Il est tout d'abord nécessaire de définir une surface Ω représentant le point de vue des dupes. Il peut s'agir d'une surface fermée si toutes les directions de l'espace nous intéressent. Cette surface peut également ne pas être fermée, si seules certaines directions de l'espace nous intéressent. L'exemple le plus naturel consiste à prendre une sphère centrée sur le mime et de rayon très grand devant la longueur d'onde de la source et devant les dimensions caractéristiques de la structure.

2.3.3 Critère de mimétisme

Nous définissons un critère $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}$, fonction de \vec{E}_{source} le champ électrique de la source et défini pour Ω et sources fixées, prenant comme variables le modèle *Mod* et le mime *Mim*. Ce critère permet de quantifier le mimétisme du revêtement de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(Mod, Mim) = \frac{\iint_{\Omega} \|\vec{E}_{diff}(\vec{E}_{source}, Mod) - \vec{E}_{diff}(\vec{E}_{source}, Mim)\| d\Omega}{\iint_{\Omega} \|\vec{E}_{diff}(\vec{E}_{source}, Mod)\| d\Omega} \quad (2.5)$$

Plusieurs définitions peuvent être données pour la norme : les conclusions tirées dépendront de ce choix. L'intégrale du numérateur quantifie la différence existant entre le champ électrique diffusé par le modèle et le champ électrique diffusé par le mime, du point de vue des dupes. On divise cette intégrale par l'intégrale de la norme du champ électrique diffusé par le modèle pour rendre $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}$ adimensionnel et ainsi pouvoir rendre comparables les valeurs de $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}$ prises pour des sources différentes. On remarque enfin que si $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(Mod, Mim)$ est nul, le mimétisme est parfait.

Afin de quantifier l'efficacité d'un revêtement, nous posons une nouvelle application $\mathcal{E}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ comparant les deux critères $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ et $\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_3)$:

$$\mathcal{E}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = 1 - \frac{\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_2)}{\mathcal{M}_{\Omega, \vec{E}_{source}}(\Sigma_1, \Sigma_3)} \quad (2.6)$$

Avec :

- Σ_1 le modèle ;
- Σ_2 le mime dont on veut quantifier l'efficacité ;
- Σ_3 le mime sans son revêtement.

L'efficacité $\mathcal{E}_{\Omega, \vec{E}_{source}}$ permet de quantifier le comportement mimétique du revêtement. Si l'efficacité est égale à 1, le revêtement joue parfaitement son rôle. Dans le cas général, ce critère sera compris entre 0 et 1 et fournit donc un pourcentage d'efficacité du revêtement. A l'aide de l'efficacité et du mimétisme, nous pouvons étudier avec précision les systèmes d'OT dans la suite de ce chapitre.

2.4 Revêtement mimétique : transformer les carrés en cercles

Afin de mettre en pratique la notion d'efficacité, nous avons réalisé un cas d'étude sous COMSOL permettant de transformer un cylindre métallique à section carrée en un cylindre métallique à section circulaire. Ceci permet de montrer les performances de l'optique transformationnelle dans un exemple non-canonique et de tester le critère de mimétisme.

L'étude de ce revêtement se fait à l'aide de 3 simulations différentes sous COMSOL : une première simulation permet de voir le comportement du cylindre à section carrée tandis qu'une deuxième montre le comportement du cylindre à section circulaire (modèle). La troisième simulation met en jeu le cylindre à section carrée et sa cape de mimétisme (mime) lui permettant de ressembler à un cercle.

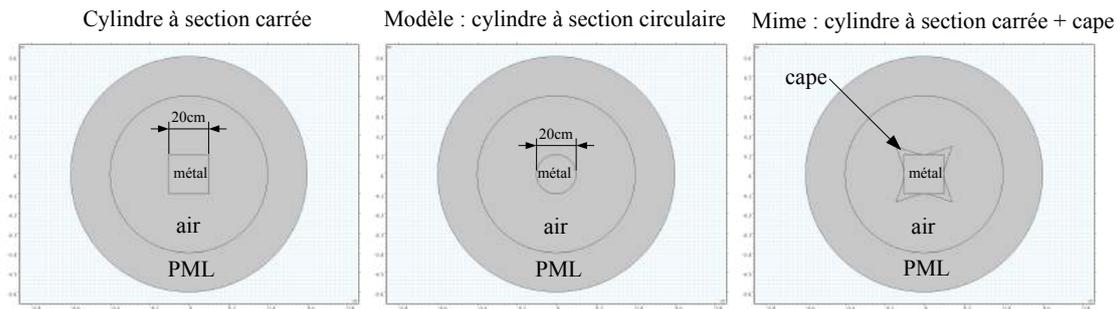


FIGURE 2.3 – Cas d'études mimétiques : les deux premiers cas sont le cylindre à section carrée et le cylindre à section circulaire. Le troisième représente le cylindre à section carrée revêtu d'une cape lui donnant l'apparence du cylindre à section circulaire.

Le revêtement mimétique utilisé dans ce cas d'étude est une simple compression radiale cylindrique. Posons $R_a(\theta)$ le rayon du modèle en fonction de l'angle, $R_b(\theta)$ le rayon du mime non revêtu et $R_c(\theta)$ le rayon du mime revêtu. Dans le cas général, on peut réaliser une cape mimétique en utilisant une fonction de compression radiale :

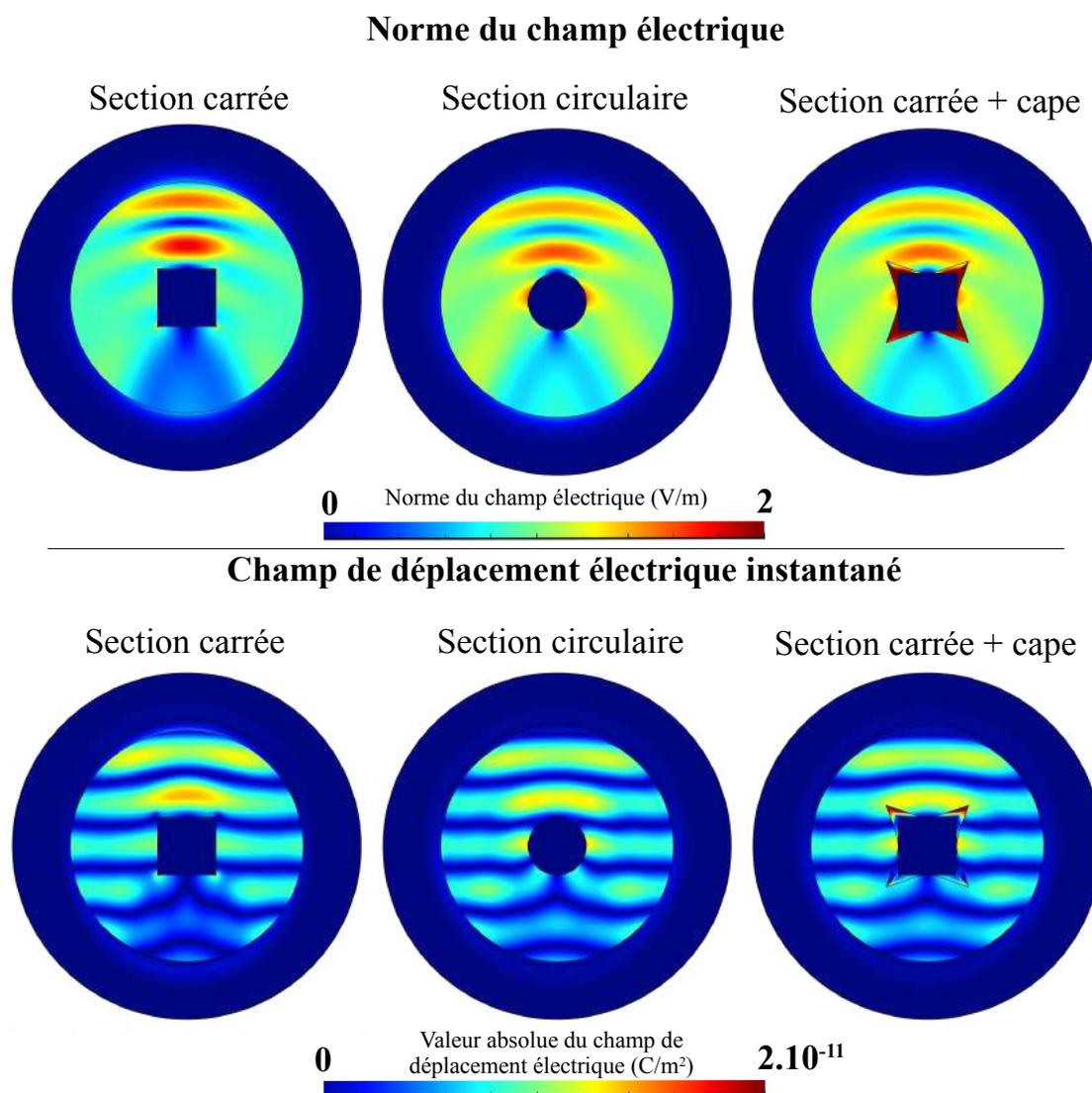


FIGURE 2.4 – Cartes des champs de l'étude mimétique. Les normes du champ électrique ainsi que la valeur absolue du champ de déplacement électrique instantané sont donnés pour chacune des configurations. On observe que l'ajout de la cape sur la section carrée permet de retrouver la même allure des champs proches que dans le cas circulaire.

$$r'(\theta) = \frac{R_c(\theta) - R_a(\theta)}{R_c(\theta) - R_b(\theta)} (r(\theta) - R_b(\theta)) + R_a(\theta) \quad (2.7)$$

$$\theta' = \theta$$

Dans le cas présent, $R_a(\theta)$ décrit un cercle, $R_b(\theta)$ décrit un carré et $R_c(\theta)$ décrit une forme étoilée permettant de réaliser le mimétisme. Cette forme étoilée a été choisie de sorte que la dérivée de r' en fonction de r soit spatialement constante. Nous avons créé sous COMSOL les cas d'études correspondants, visibles sur la figure 2.3.

Les simulations de ces différents systèmes sont réalisées à 1 GHz, l'excitation est une onde plane polarisée TE arrivant du haut de la figure. Les résultats sont donnés sous forme de cartes des champs dans la figure 2.4.

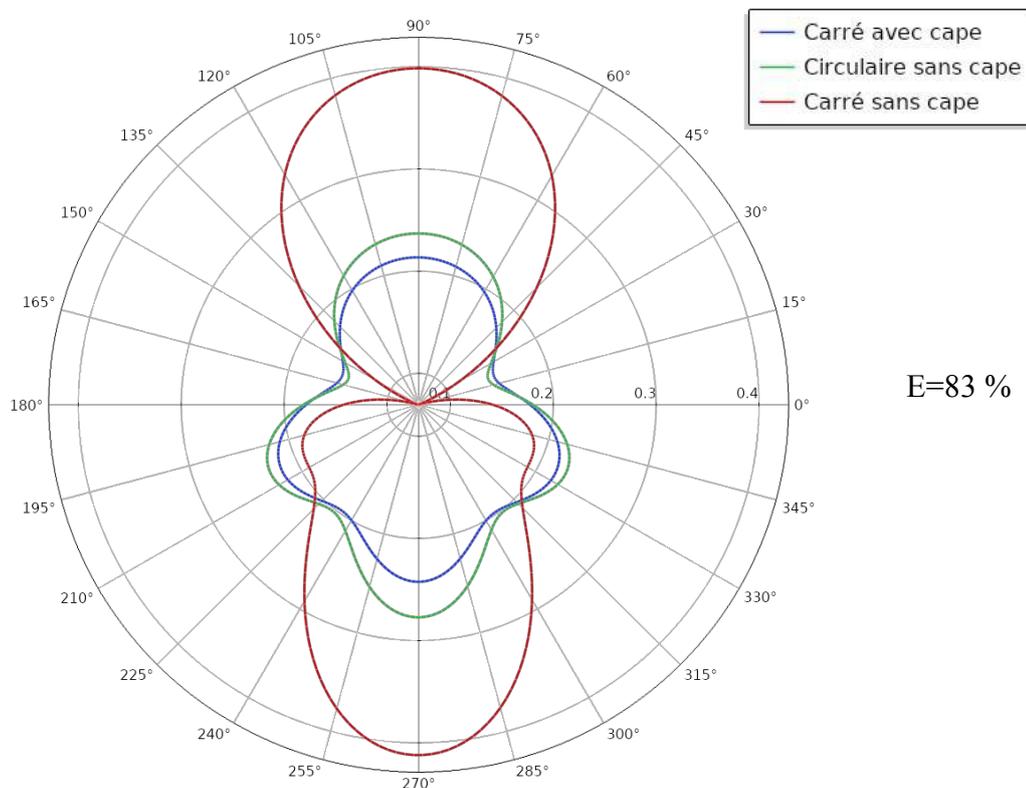


FIGURE 2.5 – Carte de champ lointain de l'étude mimétique. La norme du champ électrique est donnée en fonction de l'angle pour les différents cas d'étude. On remarque une grande similitude entre le mime et le modèle. L'efficacité du revêtement mimétique est évaluée à 83%. Cette efficacité n'est pas parfaite à cause des gradients très importants de propriétés au sein de la cape et au fait que le maillage ne permet pas de décrire parfaitement le revêtement. En théorie, cette cape permet d'atteindre 100% de mimétisme.

Nous observons sur toutes les configurations de la figure 2.4 que la norme du champ

électrique forme des franges d'interférence dans la direction d'incidence (backward), tandis qu'une ombre apparaît dans la direction opposée (forward). Cependant, l'allure de ces franges et de l'ombre ne sont pas identiques selon que le cylindre est à section carrée ou circulaire. On voit nettement que l'ajout du revêtement étoilé sur le cylindre à section carrée permet de retrouver une allure des champs très semblable à celle du cas circulaire. Afin d'obtenir une validation plus complète du fonctionnement de ce revêtement, nous avons également tracé la norme du champ lointain à la figure 2.5. D'autre part, le critère de mimétisme, appliqué à ce cas, donne une valeur de 83%. L'écart observé entre le mime et le modèle est dû aux insuffisances de la modélisation électromagnétique, en particulier du maillage.

Cette étude n'est qu'un exemple permettant de mettre en application les notions de biomimétisme définies précédemment. Nous remarquons que malgré les singularités géométriques du cas d'étude, le mimétisme est réalisé numériquement à hauteur de 83% dans ce cas de figure pour une fréquence d'excitation de 1GHz. Transformer des carrés en cercle n'est à priori pas très utile pour des applications concrètes mais le principe peut être repris pour tout autre type de géométrie. Un article de Diatta et Guenneau [71] propose une étude des revêtements mimétiques, donnant un aperçu de ce qui est réalisable par ce type de méthodes.

2.5 Tapis d'invisibilité par troncature de cape

2.5.1 Motivations et objectif

Les tapis d'invisibilité, évoqués précédemment dans ce chapitre, permettent de masquer des défauts ou des changements d'inclinaisons de plans, le plus souvent métalliques. Ils permettent en particulier de restaurer une réflexion spéculaire parfaite à l'arrivée d'une onde incidente, sans lobes de diffraction. Dans ce type de système, le modèle est donc le plan métallique, mimé par un plan déformé sur lequel on ajoute la cape. Parmi les méthodes citées précédemment, aucune ne permet de masquer des objets dont les dimensions seraient de l'ordre de grandeur de l'onde incidente dans le vide à l'aide d'un revêtement d'épaisseur raisonnable. Les approches utilisant des méta-surfaces sont très dispersives en fréquence et peuvent être sensibles en incidence [66] tandis que l'approche quasi-conforme aboutit à des revêtements très épais [12].

Nous nous plaçons ici dans le cas où nous souhaitons, à l'aide de l'optique transformationnelle, masquer un défaut de surface à l'aide d'un tapis fonctionnant quelle que soit l'incidence. Nous développons une idée originale consistant à utiliser des portions de capes cylindriques ou sphériques à cet effet.

2.5.2 Description de l'approche

Considérons une demi-cape sphérique classique placée à la surface d'un plan métallique. Si le défaut de surface est contenu dans la demi-sphère intérieure masquée par la cape, alors il sera invisible aux ondes. Ce phénomène est illustré à la figure 2.6.

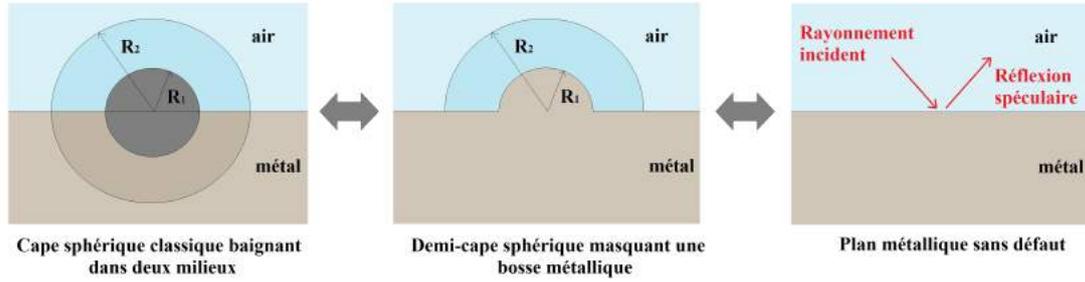


FIGURE 2.6 – Demi-cape sphérique sur une surface métallisée.

Une démonstration de ce phénomène relativement simple consiste à imaginer par l'esprit une cape sphérique complète. Dans la moitié supérieure de la cape, le milieu de référence est l'air : dans cette moitié la cape se comporte de manière classique. Dans la moitié inférieure, le milieu de référence est un conducteur parfait. Dans les deux parties de la cape, les permittivités s'écrivent en fonction des données du problème : la permittivité du métal ϵ_{metal} et la permittivité de l'air ϵ_{air} .

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_1(r, \theta, \phi) &= \epsilon_{air} \bar{\epsilon}'(r, \theta, \phi) \\ \bar{\epsilon}_2(r, \theta, \phi) &= \epsilon_{metal} \bar{\epsilon}'(r, \theta, \phi)\end{aligned}\tag{2.8}$$

avec $\bar{\epsilon}'$ le produit de la jacobienne de la transformation d'espace avec son inverse, tel que définie dans le premier chapitre. $\bar{\epsilon}_1$ et $\bar{\epsilon}_2$ décrivent respectivement la permittivité de la cape dans la demi-sphère supérieure et la demi-sphère inférieure. $\bar{\epsilon}_1$ est similaire à la permittivité d'une cape d'invisibilité classique, tandis que $\bar{\epsilon}_2$ est plus singulière. La permittivité du métal entrant dans la demi-sphère inférieure, est donnée en fonction de sa conductivité.

$$\epsilon_{metal} = \epsilon_\infty - i \frac{\sigma_{metal}}{\omega \epsilon_0}\tag{2.9}$$

Dans le domaine des hyperfréquences, les métaux courants sont très conducteurs et la norme de la partie imaginaire de leur permittivité très grande devant 1 de plusieurs ordres de grandeur. Si on se place dans l'approximation du conducteur parfait, satisfaite dans le domaine hyperfréquence, alors on peut considérer que la conductivité est infinie. Cette hypothèse simplifie l'équation 2.8 et on obtient les permittivités données par l'équation 2.10.

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_1(r, \theta, \phi) &= \bar{\epsilon}'(r, \theta, \phi) \\ \bar{\epsilon}_2(r, \theta, \phi) &= \epsilon_{metal} \bar{\bar{I}}_3\end{aligned}\tag{2.10}$$

avec $\bar{\bar{I}}_3$ la matrice unité en dimension 3. L'idée sous-jacente derrière ces équations est que l'image d'un métal par une transformation d'espace sera un métal. Aux basses fréquences devant les fréquences plasma (vers le visible en général), le métal repousse les champs électromagnétiques et stoppe à sa surface la propagation des ondes : l'épais-

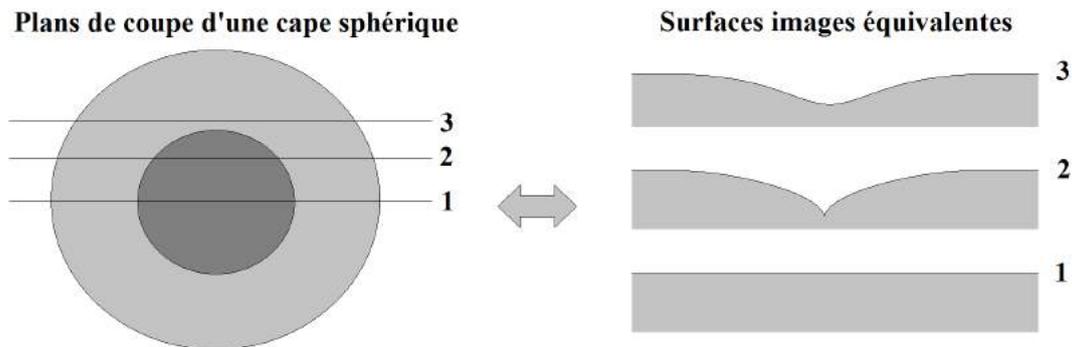


FIGURE 2.7 – Image des plans de coupe sur une cape sphérique. Les surfaces images des plans de coupes ne sont pas nécessairement des plans. Seule la coupe médiane a pour image elle-même. Dans le cas général, on crée une surface courbée en creux ou en bosse selon la hauteur de la coupe.

seur de peau, de l'ordre du micron, est négligeable devant la longueur d'onde. Ainsi, un revêtement d'OT supposée mimer un conducteur parfait est lui-même équivalent à un conducteur parfait. La seconde moitié de la cape, dans le métal, n'a donc en réalité pas besoin d'être réalisée, le conducteur parfait étant image de lui-même.

La demi-cape cylindrique constitue donc, lorsqu'elle est placée en surface d'un plan métallique, un tapis d'invisibilité pouvant cacher un défaut de surface. Les propriétés matériaux du milieu constituant la cape sont les mêmes que pour une cape sphérique classique. La réalisation d'un tel système se révèle donc être de même difficulté qu'une cape d'invisibilité complète.

La figure 2.7 nous montre différentes possibilités de troncature de cape. Si on coupe le revêtement en 2 au niveau du plan 1, on obtient le tapis d'invisibilité évoqué précédemment, la zone invisible est alors une demi-sphère de rayon R_1 . Ce plan de coupe n'est pas le seul possible et on peut choisir de tronquer la cape à une hauteur différente, comme pour le plan 2 et le plan 3. En plaçant le plan métallique à ces niveaux, on obtient alors des objets images particuliers. Ces surfaces correspondent simplement à l'image du plan de coupe par la transformation géométrique et représentent ce que les ondes perçoivent, elles ne sont pas un objet physique réel. En conclusion, si on ne coupe pas la cape en son plan médian, alors l'image du plan métallique frontière ne sera pas lui-même.

On peut alors raisonner avec la logique inverse en se posant la question : quelles antécédents géométriques ont pour image un plan ? En métallisant l'antécédent du plan métallique, on réalise une géométrie qui sera vue par un observateur comme le plan lui-même. Un exemple de troncature adaptée est donné sur la figure 2.8 : on remarque que les coupes 2 et 3 passent au dessus du cercle de rayon R_1 et que par conséquent la partie de la cape présentant des valeurs propres de permittivité et perméabilité tendant vers 0 a été tronquée intégralement. Les valeurs minimales à atteindre sont donc strictement supérieures à 0 et dépendant de la hauteur à laquelle on réalise la troncature. La bosse métallique dont l'image par la transformation géométrique donne le plan constitue donc

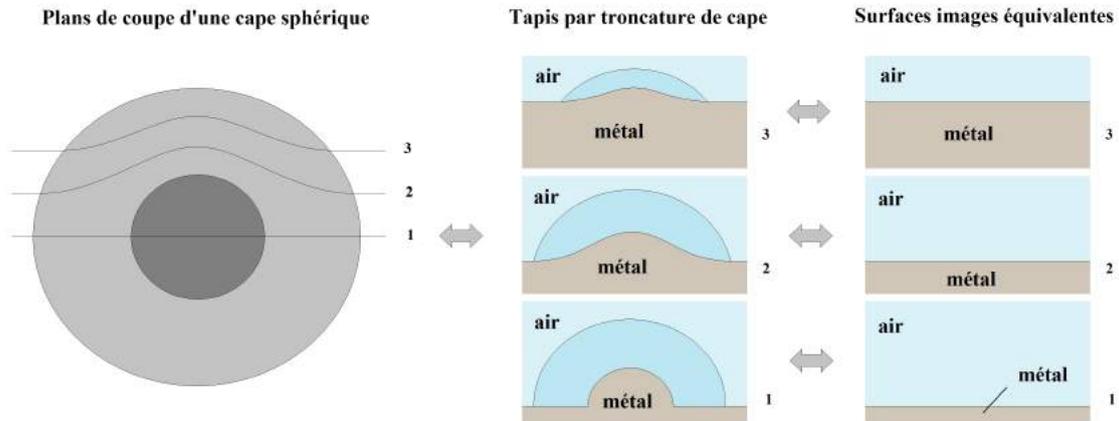


FIGURE 2.8 – Allure des défauts de surface pouvant être masqués par troncature de cape. Pour chacune des trois coupes, l'image par la transformation optique donne un plan métallique.

un défaut de structure dissimulable par ce tapis.

Il ne s'agit donc ici pas de *cloaking* à proprement parler, ni d'invisibilité, puisqu'aucune zone de l'espace n'est rendue inatteignable par manipulation de la métrique apparente. Cette technique s'apparente d'avantage à du mimétisme puisqu'on transforme l'apparence extérieure d'un objet pour le faire ressembler à un autre. Ces bosses permettant de mimer des plans doivent être bien évidemment métallisées pour ressembler in fine à un plan lui-même métallique. Il est important de préciser que cette méthode ne peut pas fonctionner en l'état avec une surface de base magnéto-diélectrique, puisque dans ce cas l'onde peut traverser l'interface et perçoit non pas seulement la géométrie de la surface mais bien l'ensemble de l'objet.

D'un point de vue mathématique, si on note P le plan, f la transformation d'espace réalisée par le mime et B la surface bossue, on a alors :

$$B = f^{-1}(P) \quad (2.11)$$

B dépend donc de la transformation utilisée ainsi que du plan que l'on veut mimer. Il existe donc toute une classe de défauts en forme de bosse que l'on peut dissimuler sous un revêtement afin de le faire ressembler à un plan. Nous cherchons donc à définir l'équation de la surface bossue B , en choisissant f la transformation linéaire sphérique classique et P le plan $z = z_0$. La surface B peut être paramétrée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2} - R_1}{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2}} \frac{R_2}{R_2 - R_1} u \\
y &= \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2} - R_1}{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2}} \frac{R_2}{R_2 - R_1} v \\
z &= \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2} - R_1}{\sqrt{u^2 + v^2 + z_0^2}} \frac{R_2}{R_2 - R_1} z_0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

avec les deux paramètres u et v définis tels que : $-R_2 < u < R_2$ et $-\sqrt{R_2^2 - u^2} - z_0^2 < v < \sqrt{R_2^2 - u^2} - z_0^2$. Cette surface est donc représentable sur des logiciels tels que COMSOL, permettant ainsi de réaliser des simulations. Un analogue peut être fourni en dimension 2, permettant de réaliser un tapis par troncature de cape cylindrique :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{u^2 + y_0^2} - R_1}{\sqrt{u^2 + y_0^2}} \frac{R_2}{R_2 - R_1} u \\
y &= \frac{\sqrt{u^2 + y_0^2} - R_1}{\sqrt{u^2 + y_0^2}} \frac{R_2}{R_2 - R_1} y_0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

avec le paramètre u tel que $-R_2 < u < R_2$.

2.5.3 Simulations full-wave

Nous nous plaçons désormais en dimension 2 afin de réaliser plus aisément les simulations électromagnétiques grâce à la méthode de troncature de cape décrite ci-dessus. La figure 2.9 montre les trois cas d'études simulés sous COMSOL permettant d'évaluer la méthode. Cette figure montre également la géométrie de la bosse, avec comme paramètre $y_0 = 3\text{cm}$. Les dimensions de la cape cylindrique de base sont avec $R_1 = 5\text{cm}$ et $R_2 = 6.5\text{cm}$. La première simulation est donc une simulation de plaque seule, constituant le modèle. La deuxième représente la plaque avec son défaut de surface, la bosse. Enfin, la troisième représente le mime, constitué du système avec la bosse et son tapis d'invisibilité.

Nous définissons une onde plane polarisée linéairement avec le champ électrique perpendiculaire au plan de la simulation. L'étude est réalisée à une fréquence de 5 GHz et avec différents angles d'incidence explicités avec les résultats dans la figure 2.10. Ces résultats sont présentés sous forme de cartes des normes de champ électrique : on remarque que l'ajout du tapis d'invisibilité permet de masquer totalement la contribution de la bosse et rétablit une réflexion spéculaire identique à celle obtenue avec la plaque

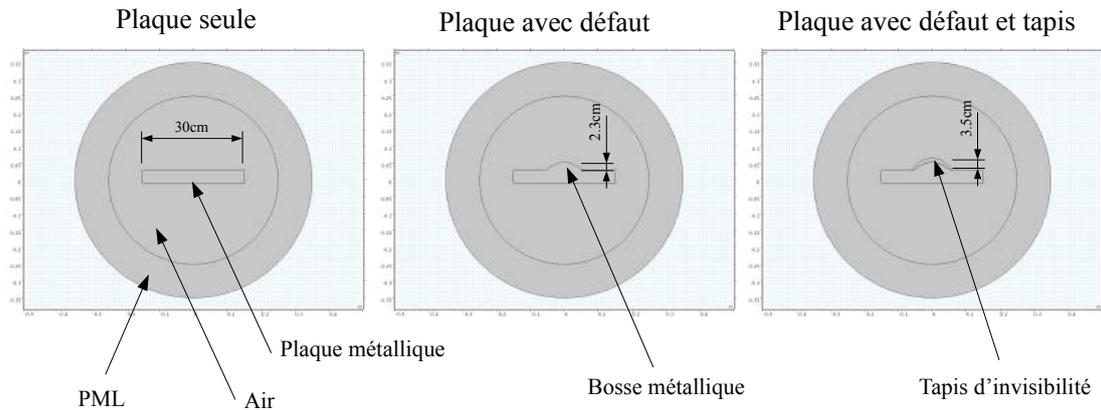


FIGURE 2.9 – Géométries des cas COMSOL permettant d’évaluer l’efficacité du tapis d’invisibilité par troncature de cape cylindrique. Sont représentées les géométries de la plaque seule (à gauche), de la plaque avec défaut (au centre) et de la plaque avec défaut et tapis (à droite). L’étude est réalisée en 2D, des PML permettent ici encore de simuler l’espace libre. La hauteur de la bosse est de 2.3 cm à son sommet, tandis que celui de la cape culmine à 3.5 cm au dessus du plan de la plaque.

métallique seule.

Afin de calculer le critère d’efficacité du tapis, nous nous intéressons au champ électrique lointain diffusé par le modèle ainsi que le mime avec et sans le tapis. Les résultats sont visibles sur la figure 2.11 et montrent une très grande similitude entre le modèle et le mime, et ce pour chaque incidence d’étude.

Nous avons donc mis en évidence le fonctionnement des tapis par troncature de cape cylindrique, permettant de masquer un défaut de surface métallisé présentant une forme particulière. Cette méthode valide une application potentiellement utile de l’optique transformationnelle et plus réaliste que la cape d’invisibilité classique. En effet, le processus de troncature de la cape permet de mettre de côté les valeurs extrêmes requises normalement à proximité de la frontière intérieure. Nous verrons dans le chapitre 3 une approche détaillée de la structuration d’un tel dispositif à l’aide de matériaux les plus réalistes possible.

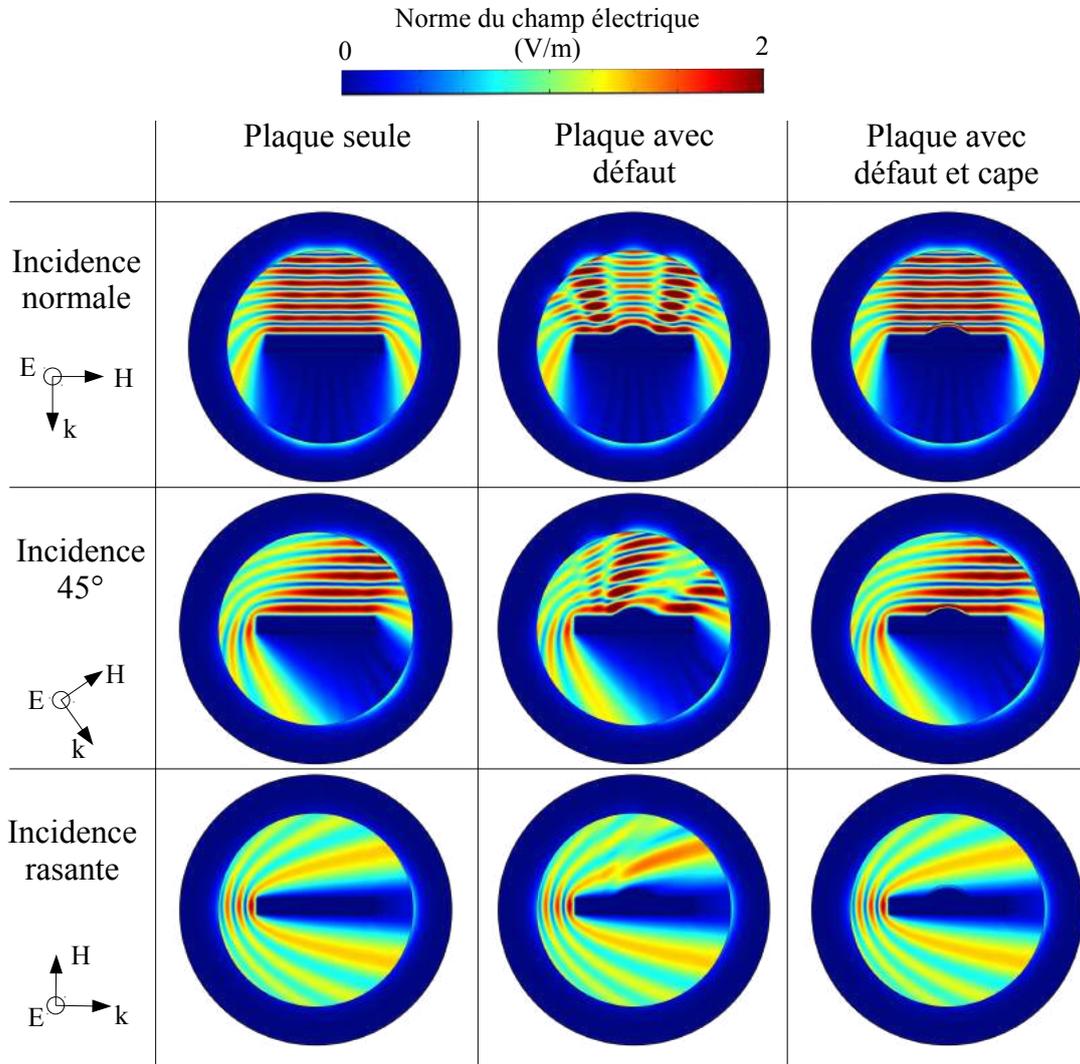


FIGURE 2.10 – Résultats de la simulation de la plaque seule, de la plaque avec défaut et de la plaque avec défaut et tapis d'invisibilité. Sont représentées les cartes de norme du champ électrique pour différentes incidences : incidence normale à la plaque (90°), oblique (45°) et rasante (0°). Les franges horizontales observées sur la plaque seule traduisent une réflexion spéculaire pour les incidences de 90° et 45°, tandis que la présence de la bosse affecte fortement ces franges. Finalement, on remarque que l'allure du champ électrique est totalement rétablie grâce à l'ajout du tapis d'invisibilité, qui semble au premier abord jouer parfaitement son rôle.

Cartes de champ électrique lointain, norme

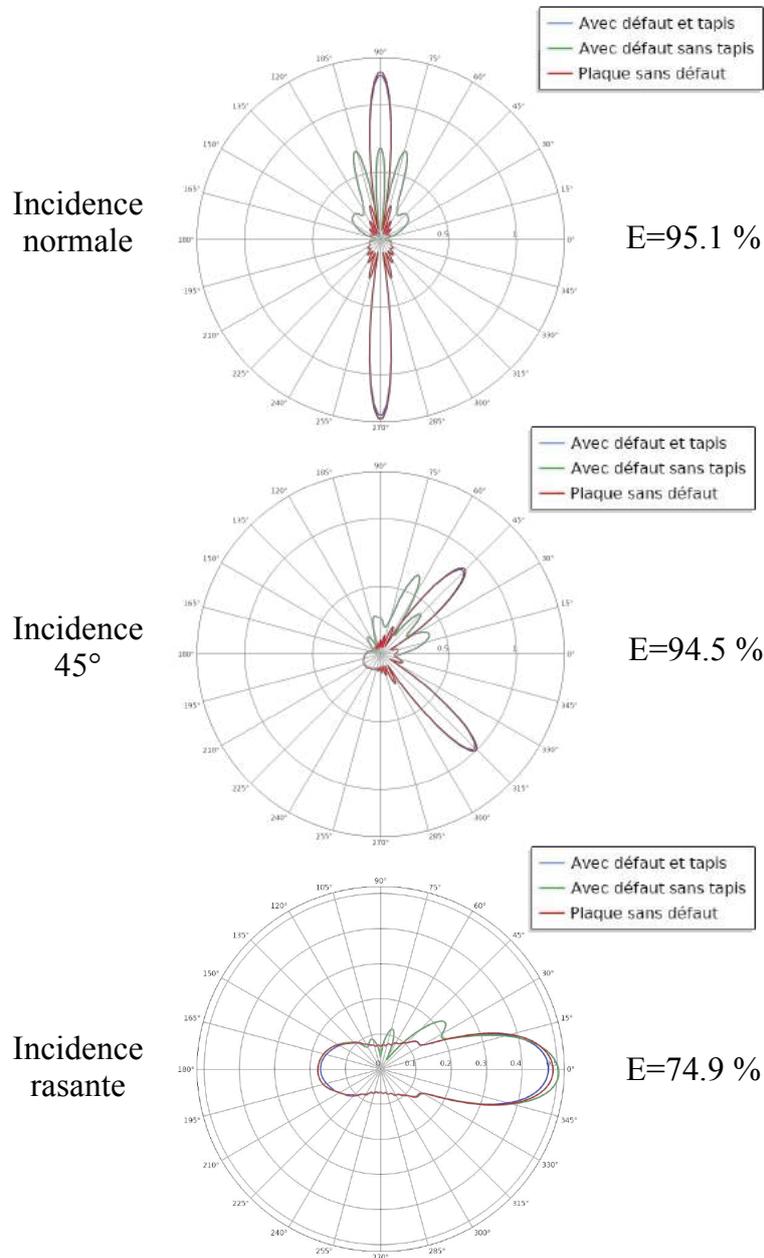


FIGURE 2.11 – Courbes de champ lointain pour le tapis par troncature de cape cylindrique. Est représentée pour chaque cas de simulation la courbe de norme du champ lointain électrique. On visualise une grande similitude entre le modèle et le mime pour chacune des incidences. L'efficacité mimétique du tapis est évaluée à 95.1% en incidence normale, 94.5% en incidence oblique et 74.9% en incidence rasante.

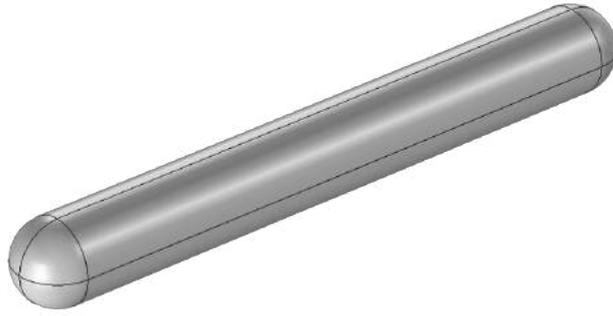


FIGURE 2.12 – L’objet que l’on cherche à masquer est constitué d’une portion de cylindre fermé aux deux extrémités par deux demi-sphères de même rayon que le cylindre.

2.6 Invisibilité d’un objet longiligne

2.6.1 Positionnement de l’étude

Dans le chapitre 1 ont été abordées les capes d’invisibilité les plus couramment mentionnées dans la littérature que sont les capes à compression radiale sphérique et cylindrique. Les capes cylindriques sont privilégiées expérimentalement car plus facile à concevoir qu’une structure sphérique. En pratique, les réalisations concernent des capes cylindriques de longueur faible au regard du diamètre de la section : la structure de la cape est donc quasi-plane, rendant plus aisée sa réalisation. Dans cette partie, nous étudions le comportement de cylindres métalliques longs recouverts de revêtements d’OT.

Dans la littérature, l’invisibilité de cylindre métalliques longs a été réalisée expérimentalement grâce à la méthode réseau de ligne de transmission [72]. Cette méthode, déjà évoquée au début de ce chapitre, permet de diminuer le coefficient de réflexion mais ne permet pas à proprement parler de diminuer la SER bistatique. L’onde transmise après avoir traversé la cape ne possède pas la phase qu’aurait l’onde traversant du vide. Nous cherchons dans cette partie à diminuer la SER bistatique de l’objet, prenant ainsi en compte le champ diffusé dans toutes les directions de l’espace.

La réalisation d’une cape cylindrique en espace libre est une tâche très difficile notamment du point de vue de la faisabilité technique, point sur lequel nous porterons tout particulièrement notre attention. Précédemment, nous avons tronqué des capes d’invisibilité afin de réaliser des tapis de mimétisme. Cette approche permet de s’affranchir des valeurs de permittivité et perméabilité les plus problématiques (proches de 0), mais ne dispense toutefois pas des valeurs sous-unitaires. Nous cherchons ici à nous affranchir totalement de ces valeurs sous-unitaires en ne mimant plus de l’air mais un magnéto-diélectrique donné.

Cette idée de mimer un matériau plutôt que de l’air nous provient des travaux de Schurig et al. [14]. Dans cet article cependant, la cape d’invisibilité cylindrique réalisée expérimentalement n’est pas parfaite puisque les valeurs requises de permittivité et per-

méabilité ont été modifiées par rapport à la théorie. Afin de simplifier la réalisation, les expérimentateurs ont en effet sacrifié l'impédance en prenant soin de conserver l'indice optique $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Ainsi, cette cape ne mime pas parfaitement l'air mais plutôt un matériau hétérogène. De même, nous nous inspirons de cette méthode pour agir sur les valeurs sous-unitaires en décidant de mimer non pas de l'air mais un magnéto-diélectrique donné.

En tentant de mimer un matériau à indice plutôt que de l'air, les propriétés requises dans le revêtement se trouvent modifiées, conformément aux équations de l'OT développées dans le chapitre 1 : un choix judicieux de matériau à mimer permet de s'affranchir d'une grande partie des valeurs sous-unitaires de permittivité et perméabilité.

Nous définissons un cas d'étude dans lequel un barreau métallique est revêtu d'un revêtement à relativement fort indice. Sa géométrie est simple, il s'agit d'un cylindre terminé en ses deux extrémités par une demi-sphère, comme présenté sur la figure 2.12. L'objectif que nous nous fixons consiste, à l'aide de l'OT, à minimiser tant que possible la SER de cet objet de base. Pour ce faire, nous proposons de remplacer le revêtement du barreau métallique par un revêtement d'OT permettant de masquer la partie métallique au profit de la partie magnéto-diélectrique. En d'autres termes, plutôt que de voir un barreau métallique revêtu, un dupe ne devra distinguer qu'un simple barreau magnéto-diélectrique. Ceci permet en particulier d'éviter les phénomènes de résonance dipolaire de la structure métallique, visible lorsque la longueur d'onde d'excitation est égale au double de la longueur du cylindre. L'objectif ici est donc d'obtenir un système présentant sur une bande de fréquence donnée une SER bien inférieure à celle d'un cylindre métallique.

2.6.1.1 Définition du revêtement d'OT

L'objet géométrique à masquer étant constitué d'une portion de cylindre terminée à chaque extrémité par une demi-sphère, il est naturel de réaliser sur la portion cylindrique une cape par compression radiale cylindrique, et sur les deux portions sphériques des capes à compression radiales sphériques. La permittivité et la perméabilité du matériau magnéto-diélectrique du revêtement sont prises égales à 10. Ce faisant, les propriétés requises dans la cape se trouvent toutes rehaussées d'un facteur 10, diminuant fortement la présence de valeurs de permittivité et perméabilité sous-unitaires dans le revêtement. Les propriétés électromagnétiques de la cape sont récapitulées dans le tableau 2.1. Les exposants c et s indiquent respectivement qu'on se situe dans la zone cylindrique et sphérique. En indice, les coordonnées sont (r^c, θ^c, z) en cylindrique et (r^s, θ^s, ϕ) en sphérique. Enfin, on note ϵ_m et μ_m les valeurs de permittivité et perméabilité du magnéto-diélectrique que l'on souhaite mimer, 10 dans notre cas.

Dans la figure 2.13, nous représentons les valeurs de permittivité et perméabilité en fonction de la position dans le revêtement. Pour d'avantage de réalisme, nous imposons comme valeur minimale 1 et comme valeur maximale 100. En utilisant les fonctions max et min de COMSOL, il est possible de fixer les valeurs de permittivités dans les couches de revêtements en les bornant à la plage de valeurs acceptables que nous avons choisie.

Zone cylindrique (r^c, θ^c, z)	Zone sphérique (r^s, θ^s, ϕ)
$\epsilon_r^c(r^c) = \mu_r^c(r^c) = \epsilon_m \frac{r^c - R_1}{r^c}$	$\epsilon_r^s(r^s) = \mu_r^s(r^s) = \epsilon_m \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r^s - R_1}{r^s} \right)^2$
$\epsilon_\theta^c(r^c) = \mu_\theta^c(r^c) = \epsilon_m \frac{r^c}{r^c - R_1}$	$\epsilon_\theta^s(r^s) = \mu_\theta^s(r^s) = \epsilon_m \frac{R_2}{R_2 - R_1}$
$\epsilon_z^c(r^c) = \mu_z^c(r^c) = \epsilon_m \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)^2 \frac{(r^c - R_1)}{r^c}$	$\epsilon_\phi^s(r^s) = \mu_\phi^s(r^s) = \epsilon_m \frac{R_2}{R_2 - R_1}$

TABLE 2.1 – Permittivités dans les zones sphériques et cylindrique de la cape masquant l’objet longiligne

Par exemple, la composante radiale sphérique de permittivité, qui devraient théoriquement prendre des valeurs tendant vers 0, s’écrit de la manière suivante :

$$\epsilon_r^s(r^s) = \max \left(\epsilon_m \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r^s - R_1}{r^s} \right)^2, \epsilon_{\min} \right) \quad (2.14)$$

2.6.1.2 Définition des cas de simulations

Trois cas de simulations sont réalisés sous COMSOL. Ces cas sont répertoriés dans la figure 2.14 : le barreau métallique et son revêtement de magnéto-diélectrique, le même barreau revêtu cette fois-ci de la cape de mimétisme, enfin le barreau entièrement constitué du matériau magnéto-diélectrique.

L’étude est réalisée aux abords de la première fréquence de résonance du barreau métallique revêtu, avec comme excitation une onde plane polarisée linéairement dont le champ électrique est orienté selon la longueur du cylindre. La réalisation de simulations pour le deuxième système est une tâche beaucoup plus délicate à cause des valeurs propres élevées du tenseur de permittivité et du tenseur de perméabilité. En effet, plus ces grandeurs sont élevées, plus l’indice optique équivalent $n_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}\mu_{eff}}$ l’est également. Ceci a pour conséquence immédiate de diminuer la longueur locale des ondes dans le milieu. Ainsi, si on souhaite obtenir une simulation valide, il est nécessaire de réaliser un maillage suffisamment fin pour décrire correctement la propagation dans ces zones. L’affinage du maillage et la réalisation de maillages spécifiques pour l’étude des couches limites alourdit très fortement le cas d’étude et rend sa convergence plus difficile. Nous avons donc cherché un compromis entre justesse de simulation et coût de calcul.

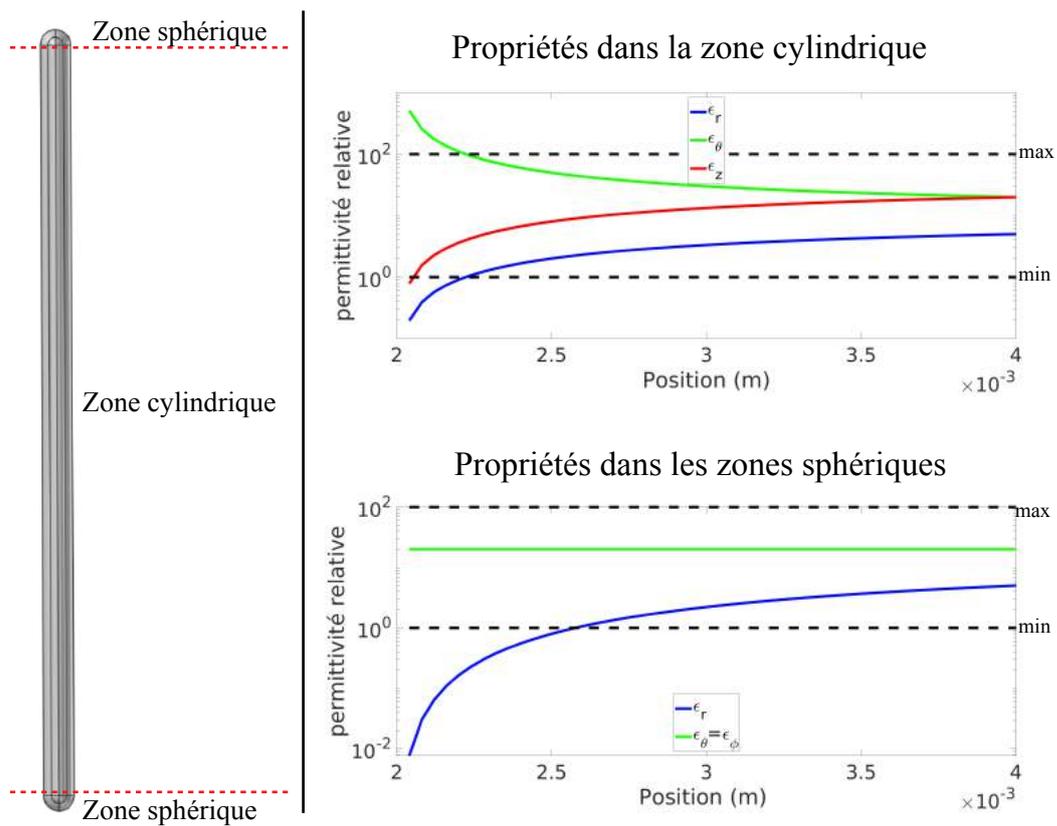
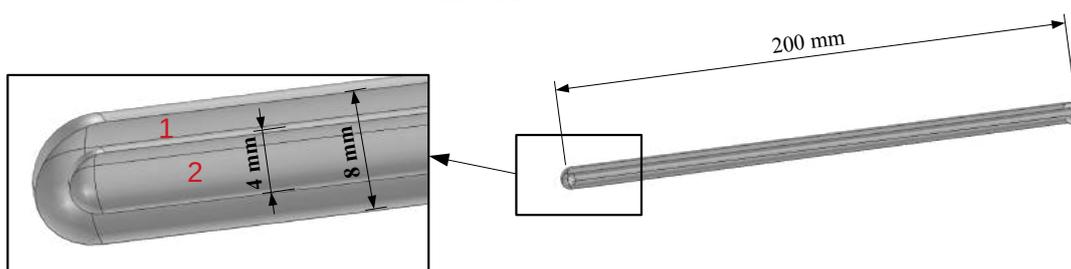


FIGURE 2.13 – Propriétés électromagnétiques dans les différentes zones de la cape pseudo-cylindrique. Les valeurs théoriquement requises qui sortent localement de l'intervalle acceptable de valeurs, ont été ramenées aux bornes définies par les frontières min et max.

Géométrie des cas d'études



Matériaux des cas d'études

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Dénomination	Référence	Mime	Modèle
Zone 2	Magnéto-diélectrique	Cape de mimétisme magnéto-diélectrique	Magnéto-diélectrique
Zone 1	Cuivre	Cuivre	Magnéto-diélectrique
Description	Cylindre métallique revêtu d'un matériau magnéto-diélectrique.	Cylindre métallique entouré d'un revêtement mimant un magnéto-diélectrique	Cylindre intégralement constitué d'un matériau magnéto-diélectrique

FIGURE 2.14 – Définition des trois cas d'étude COMSOL. Le cas 1 correspond à l'objet initial, le cas 2 est le mime tandis que le troisième cas correspond au modèle, un simple barreau de magnéto-diélectrique.

Plan de coupe des différents systèmes, simulation à 200MHz

Cas 1 : mime sans sa cape

0 Norme du champ électrique (V/m) 200



Cas 2 : mime avec sa cape

0 Norme du champ électrique (V/m) 150



Cas 3 : modèle supposé

0 Norme du champ électrique (V/m) 2

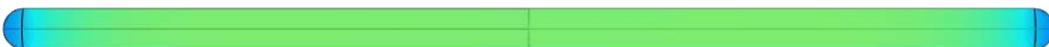


FIGURE 2.15 – Plans de coupe des différents systèmes étudiés, à 200MHz. Est représentée la norme du champ électrique : on remarque une grande similitude entre les systèmes 1 et 2, tandis que le système 2 était supposé ressembler d'avantage au système 3, le modèle.

2.6.2 Résultats et écarts par rapport aux attentes

Nous montrons sur la figure 2.15 les cartes de champs des différentes simulations. Nous remarquons que le champ électrique dans le système avec cape ne ressemble pas au modèle qu'il est supposé mimer. Au contraire, il semble que son comportement reste globalement assez similaire à celui du système de base, non revêtu de la cape. Partant de ce constat, nous avons cherché à trouver une explication concernant l'écart entre l'attente et la réalité pour cette cape de mimétisme.

Le faible effet de la cape peut s'expliquer de façon relativement simple : la compression radiale cylindrique transforme le cercle frontière intérieur de la cape en un point. Le problème étant invariant par translation selon la normale au plan de ce point, l'image de la portion de cylindre métallique est donc un segment de droite, lui même métallique. L'image mathématique du barreau métallique est représenté à droite sur la figure 2.16.

Le seul effet de la cape d'OT que nous venons de simuler est de diminuer la section apparente du cylindre. Cependant, la section du cylindre, tant qu'elle est petite devant la hauteur, n'a qu'un impact secondaire sur la SER. La SER de l'objet de référence et celle de l'objet revêtu de la cape sont donc très similaires, comme le montrent les courbes bleues et noires de la figure 2.17.

Plutôt que de masquer totalement la partie métallique de l'objet, la cape de mimétisme a eu pour seul effet de minimiser sa section apparente du point de vue des dupes. Cependant, étant donné que nous cherchions à réduire la SER sur la bande de fréquence d'étude, ce mimétisme n'est pas convenable. Nous pouvons conclure que les revêtements d'OT en deux dimensions sont à utiliser avec beaucoup de précautions. L'image du mime par la transformation peut, sous certaines conditions, être elle-même un objet présentant une grande signature radar.

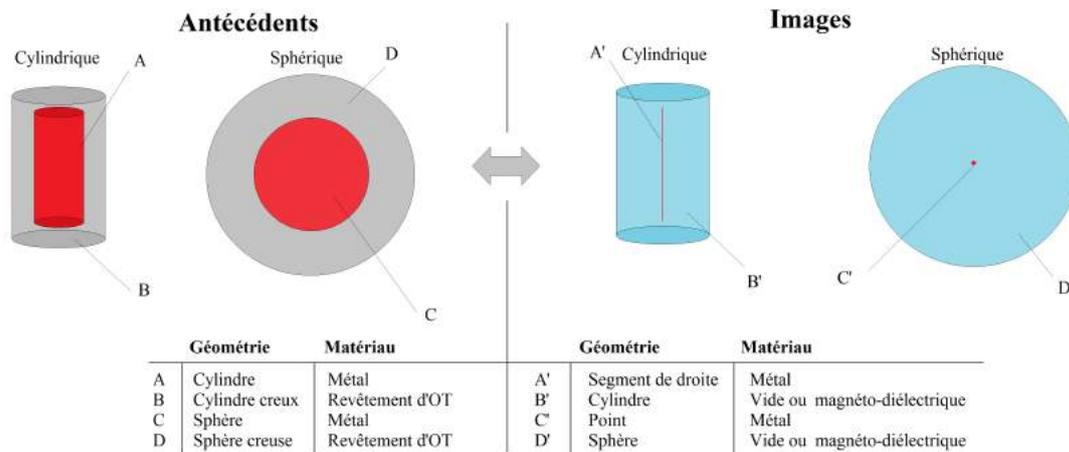


FIGURE 2.16 – Antécédents et images dans les capes classiques. L'image d'un cylindre intérieur est un objet de dimension 1, tandis que l'image de la sphère métallique intérieure est un objet de dimension 0.

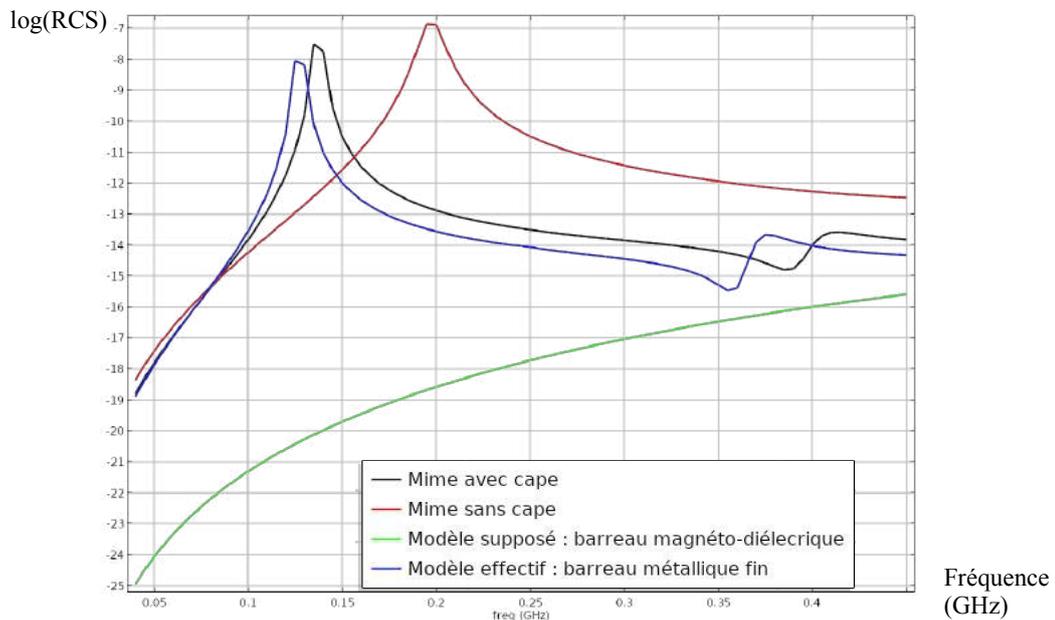


FIGURE 2.17 – SER des différents cas de simulations étudiés. Le mime avec sa cape (en rouge) ressemble d’avantage à un fin barreau métallique (en bleu) qu’au cylindre magnéto-diélectrique (en vert). Le mimétisme n’est pas celui attendu et ne permet pas de minimiser la SER de l’objet comme prévu.

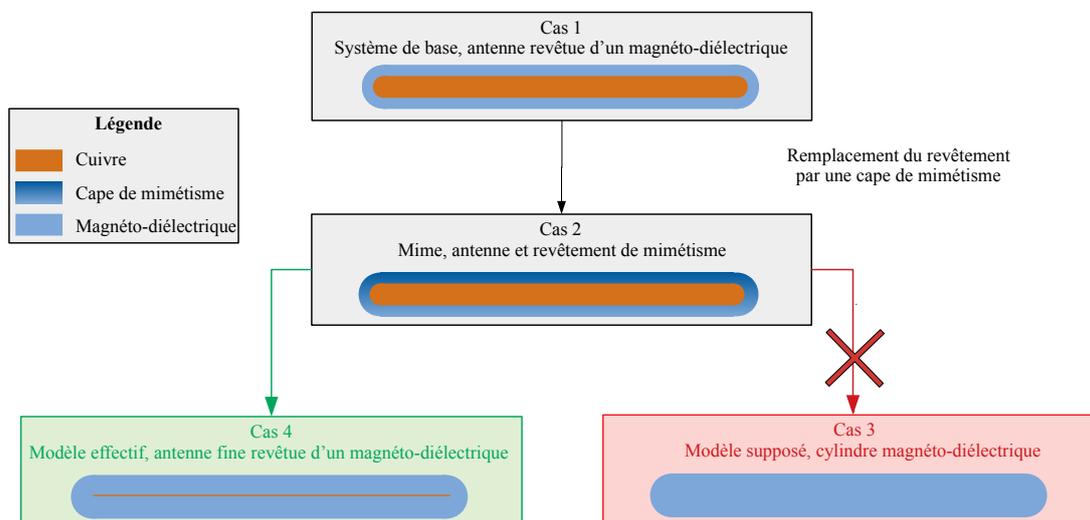


FIGURE 2.18 – Mimétisme cylindrique : cette figure résume les observations issues des simulations réalisées sur la cape de mimétisme cylindrique. Au lieu de ressembler au modèle attendu, signant peu dans la gamme de fréquence d’étude, le mime est toujours très visible.

2.6.3 Cape par compression sphérique

Afin de minimiser la contribution de l'objet métallique longiligne de cette étude, une compression sphérique peut être envisagée. En procédant de la sorte, l'image du cylindre métallique ne sera plus une ligne mais au contraire un point. L'approche consiste à utiliser la compression radiale en coordonnées sphériques sur l'objet longiligne à masquer. La transformation géométrique utilisée est alors donnée par l'équation 2.15, en notant (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques.

$$r'(r, \theta, \phi) = \frac{r - R_i(\theta, \phi)}{R_e(\theta, \phi) - R_i(\theta, \phi)} R_e(\theta, \phi) \quad (2.15)$$

$R_i(\theta, \phi)$ est le paramétrage en coordonnées sphériques du cylindre métallique à masquer tandis que $R_e(\theta, \phi)$ est un paramétrage analogue décrivant la surface extérieure de la cape. En d'autres termes, cette transformation est similaire à celle d'une cape sphérique classique, à la différence près que les rayons R_1 et R_2 normalement utilisés sont ici remplacés respectivement par $R_i(\theta, \phi)$ et $R_e(\theta, \phi)$. On comprime l'espace de sorte à ce que le cylindre intérieur soit masqué par le revêtement. Afin de simplifier les calculs dans la suite du développement, nous définissons la grandeur k par l'équation 2.16. Cette quantité est assimilable à un coefficient de compression des longueurs dans la cape d'invisibilité.

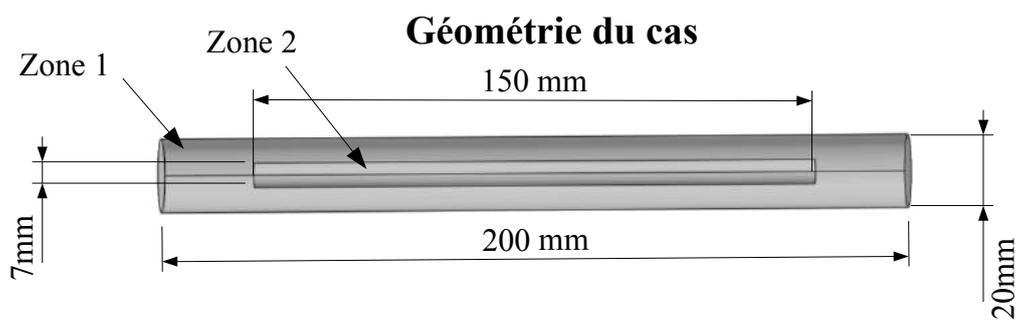
$$k(r, \theta, \phi) = \frac{r'(\theta, \phi)}{r - R_i(\theta, \phi)} = \frac{R_e(\theta, \phi)}{R_e(\theta, \phi) - R_i(\theta, \phi)} \quad (2.16)$$

On peut alors appliquer les formules de l'optique transformationnelle permettant ainsi de déterminer les valeurs de permittivité et de perméabilité requises dans la cape. Les éléments diagonaux du tenseur de permittivité sont donnés par l'équation 2.17.

$$\begin{aligned} \epsilon_r(r, \theta, \phi) &= \frac{\left(\frac{r - R_i(\theta, \phi)}{r} k(\theta, \phi) \right)^2}{\sqrt{k(\theta, \phi)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right)^2}} \\ \epsilon_\theta(r, \theta, \phi) &= \sqrt{k(\theta, \phi)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right)^2} \\ \epsilon_\phi(r, \theta, \phi) &= \sqrt{k(\theta, \phi)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial r'(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les éléments hors de la diagonale ne sont pas nuls et doivent également être pris en compte dans la simulation. Nous ne les explicitons pas pour des raisons de lisibilité du paragraphe.

Afin de d'obtenir dans le revêtement des propriétés raisonnables, nous devons limiter



Matériaux des cas d'études

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
Dénomination	Référence	Mime	Modèle
Zone 1	Magnéto-diélectrique	Cape de mimétisme magnéto-diélectrique	Magnéto-diélectrique
Zone 2	Cuivre	Cuivre	Magnéto-diélectrique
Description	Cylindre métallique revêtu d'un matériau magnéto-diélectrique.	Cylindre métallique entouré d'un revêtement mimant un magnéto-diélectrique	Cylindre intégralement constitué d'un matériau magnéto-diélectrique

FIGURE 2.19 – Définition des trois cas d'étude COMSOL. Le cas 1 correspond au mime dépourvu de sa cape, le cas 2 est le mime avec sa cape tandis que le troisième cas correspond au modèle, un simple barreau de magnéto-diélectrique.

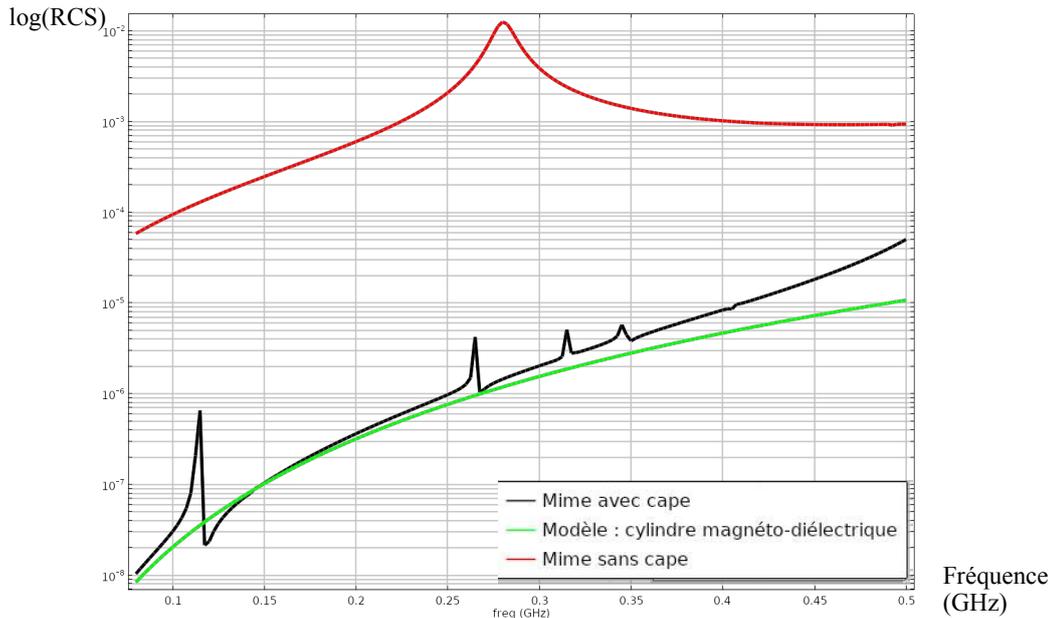


FIGURE 2.20 – SER des différents cas de simulations étudiés. Dans le cas d’une cape sphérique, le modèle est correctement mimé. Le système avec cape (en noir) ressemble bien au cylindre diélectrique (en vert), aucune résonance n’est visible sur la bande d’étude.

tant que possible la valeur du coefficient k en tout point de la cape. Si nous reprenions exactement la même géométrie externe que précédemment, à savoir un revêtement d’OT d’épaisseur constante, le taux de compression k dans la direction longitudinale du cylindre serait très importante. Une compression des longueurs trop forte dans certaines directions de l’espace conduit à des propriétés électromagnétiques déraisonnables. Ainsi, il est préférable d’allonger la cape aux extrémités, de sorte à rendre k spatialement constant.

Nous avons réalisé une étude mettant en oeuvre cette idée sur un cylindre métallique dont les données géométriques sont visibles sur la figure 2.19. Les résultats sont donnés sous forme de SER sur la figure 2.20. On observe une importante réduction de la SER grâce à l’ajout de la cape à compression sphérique. Cette étude valide notre approche car le mimétisme est ici correctement réalisé par le revêtement d’OT : un observateur extérieur ne voit qu’un cylindre magnéto-diélectrique.

En conclusion, la compression sphérique semble être plus efficace que la compression cylindrique dans le cas d’objets longilignes tel que le barreau métallique que nous avons étudié.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une définition du mimétisme à l'aide de notions issues du biomimétisme : le mime, le modèle et le dupe. Nous avons ensuite proposé des critères permettant d'évaluer le fonctionnement d'un revêtement d'OT. En particulier, le critère d'efficacité mimétique donne une évaluation sous forme de pourcentage de ressemblance au système que l'on souhaite mimer. Ces définitions nous ont permis d'appréhender avec plus de facilité l'étude de cas spécifiques d'utilisation de l'OT. A travers trois exemples concrets, nous avons cherché à montrer diverses possibilités d'utilisation de l'OT présentant un intérêt expérimental.

Le premier exemple a donné une démonstration de la transformation d'un cylindre à section carrée en un cylindre à section circulaire. Pour le deuxième cas, nous avons proposé une structure de tapis d'invisibilité basé sur la troncature d'une cape d'invisibilité cylindrique ou sphérique. Les résultats sont encourageants et prédisent qu'une bosse métallique peut être masquée efficacement par ce procédé. Cela nous permettra par la suite de proposer une structuration de tapis de mimétisme et de tapis d'invisibilité.

Enfin, nous avons cherché à masquer un contributeur métallique de forme longiligne, d'abord grâce à une transformation 2D puis grâce à une transformation 3D. Nous avons mis en évidence les limites des transformations 2D dans le cas précis d'une résonance mettant en jeu des déplacements de charges dans la direction d'invariance de la transformation. L'approche utilisant une transformation 3D donne une alternative permettant malgré tout de masquer ce type de résonance.

3 Structuration des revêtements

Sommaire

3.1	Introduction	75
3.2	Homogénéisation, création d'anisotropie	77
3.2.1	Bornes de Wiener	77
3.2.2	Cape sphérique et structure multicouche	79
3.2.2.1	Axe optique	79
3.2.2.2	Equation du multicouche	80
3.2.2.3	Choix du nombre de matériaux par étage	81
3.2.2.4	Structuration par contrôle des propriétés matériaux	82
3.2.2.5	Structuration par contrôle de l'épaisseur	84
3.2.3	Cape cylindrique et structure multicouche	85
3.3	Vers un revêtement réaliste	93
3.3.1	Tapis d'invisibilité	93
3.3.2	Tapis de mimétisme	96
3.4	Intégration de matériaux anisotropes	99
3.5	Perspectives	100
3.5.1	Structuration en voxels	100
3.5.2	Conclusion	100

3.1 Introduction

Nous avons déterminé dans le chapitre 2 que le défi majeur des revêtements d'optique de transformation, qu'ils soient mimétiques ou d'invisibilité, réside dans leurs propriétés électromagnétiques, permittivité et perméabilité. Nous nous intéressons dans ce chapitre à un point en particulier, l'anisotropie. La plupart des matériaux naturels tels que les métaux, céramiques ou polymères sont isotropes tant du point de vue de leur permittivité et perméabilité que de leur conductivité.

En optique, les phénomènes de biréfringence sont une manifestation de l'anisotropie diélectrique naturelle présente dans certains cristaux. Cette biréfringence qui peut être uniaxe ou biaxe, traduit à l'échelle macroscopique les effets de la structure cristalline. Une anisotropie uniaxe correspond par exemple à un système cristallin hexagonal comme le quartz (voir figure 3.1) tandis qu'une anisotropie biaxe correspondra à une structure monoclinique, triclinique ou orthorombique. Dans le cas uniaxe, deux indices optiques sont nécessaires pour décrire le comportement du cristal alors que trois sont nécessaires dans le cas biaxe.

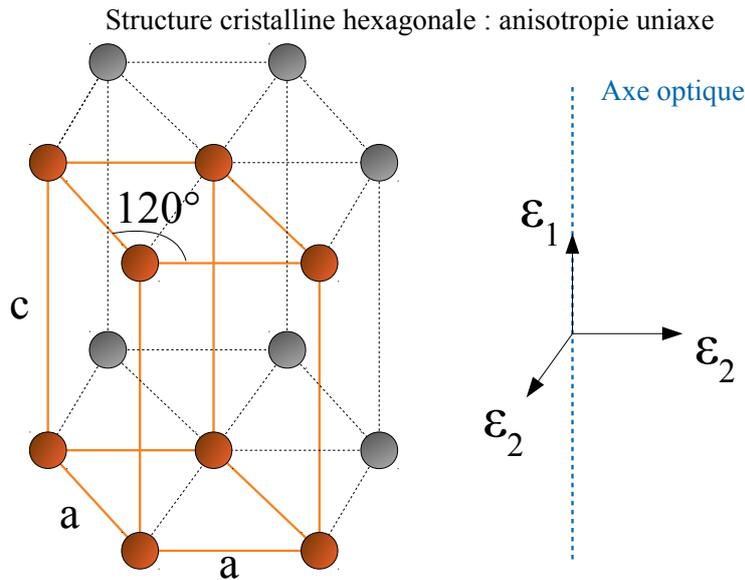


FIGURE 3.1 – Exemple de maille hexagonale avec son axe optique. Une telle structure peut présenter une anisotropie, la différence entre ϵ_1 et ϵ_2 étant de l'ordre de quelques pourcents.

Dans le cas des cristaux uniaxes et biaxes, l'anisotropie est une conséquence directe de la structure cristalline et donc de la disposition relative des atomes au sein du réseau. Cette structuration est naturelle et se produit à l'échelle inter-atomique. En exagérant la différence entre le paramètre c et le paramètre a sur la figure 3.1, on peut par l'esprit se figurer que c est beaucoup plus grand que a . Dans ce cas, la structure cristalline hexagonale est constituée de plans successifs densément chargés d'atomes, empilés dans la direction de l'axe optique. On obtient une structure multicouche non-invariante par rotation autour d'un axe et responsable de l'anisotropie de permittivité. Les valeurs naturelles de biréfringence cristalline se chiffrent en quelques pourcents de différences pour l'indice optique. Les matériaux naturellement anisotropes ne peuvent donc en aucun cas convenir à la création de revêtements d'invisibilité, pour lesquels l'anisotropie doit être beaucoup plus importante.

Afin de créer des propriétés fortement anisotropes, il est possible de s'inspirer de la biréfringence naturelle dans la structuration de composites. La création de propriétés anisotropes peut alors se faire par structuration de la matière à la manière du quartz, structuré en feuillets multicouches.

Les cristaux photoniques constituent une catégorie de matériaux structurés artificiellement et dont l'objectif consiste, entre autre, à recréer une anisotropie. La structuration des cristaux photoniques peut être unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel selon les besoins de l'expérience. Dans les miroirs de Bragg par exemple, des couches diélectriques d'indices différents sont empilées de sorte à créer un réflecteur. Les cristaux photoniques, qui sont le plus souvent assimilés aux structures à bande interdite photonique ou électromagnétique, tirent profit des phénomènes d'interférences constructives

et destructives des ondes. Il est impossible d'affecter des valeurs de permittivité et perméabilité effectives homogènes à de tels systèmes. En effet, lorsqu'on essaie d'affecter des propriétés effectives à un matériau structuré, la notion d'homogénéisabilité de la structure doit être prise en compte. La thématique de l'homogénéisabilité est abordée plus en détail dans le chapitre 5 de ce manuscrit. Dans le cadre de l'optique de transformation, la permittivité et la perméabilité sont le coeur du problème : dans ce chapitre, nous verrons comment il est possible de structurer la matière de sorte à obtenir l'anisotropie forte requise par l'OT.

3.2 Homogénéisation, création d'anisotropie

3.2.1 Bornes de Wiener

Nous avons vu dans le chapitre 1 que de nombreuses lois ont été établies dans la littérature afin de déterminer les propriétés effectives des mélanges de matériaux diélectriques. Une loi établie en 1913 par Wiener et Préault [73] [74] permet de donner un encadrement de la permittivité effective d'un mélange dans l'équation 3.1. Cet encadrement n'est cependant pas valide pour les structures conductrices résonantes, les effets d'interface étant prépondérants dans ce cas.

$$\langle \epsilon^{-1} \rangle^{-1} \leq \tilde{\epsilon} \leq \langle \epsilon \rangle \quad (3.1)$$

où le symbole $\langle \rangle$ désigne la moyenne spatiale sur l'échantillon étudié et $\tilde{\epsilon}$ correspond à la valeur effective de permittivité. Ces bornes nous permettent de définir l'anisotropie maximale atteignable dans un matériau : en effet, elles sont calculées indépendamment de toute notion d'incidence ou de polarisation des ondes. Ce sont simplement des moyennes spatiales, vraies pour toute excitation. La valeur effective $\tilde{\epsilon}$ de permittivité, en revanche, peut potentiellement dépendre de l'orientation du champ électrique.

ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 étant les valeurs de permittivité selon les vecteurs propres du tenseur des permittivités, l'anisotropie A est définie comme le rapport maximal entre deux permittivités :

$$A = \max_{i,j \in \{1,2,3\}} \left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} \right) \quad (3.2)$$

En utilisant les bornes définies dans 3.1, on peut donner un encadrement de A :

$$1 \leq A \leq \frac{\langle \epsilon \rangle}{\langle \epsilon^{-1} \rangle^{-1}} \quad (3.3)$$

Nous cherchons dans cette partie à comprendre à quoi correspondent ces bornes, afin de réaliser des structures maximisant l'anisotropie. On peut comprendre ces bornes par analogie avec des éléments de circuits électriques, dans l'approximation des régimes statiques. Cette dernière hypothèse revient à dire que la phase de l'onde électromagnétique incidente reste constante sur la géométrie d'étude. La figure 3.2 donne le schéma équivalent d'un multicouche de diélectrique éclairé par un champ électrique orthogonal aux

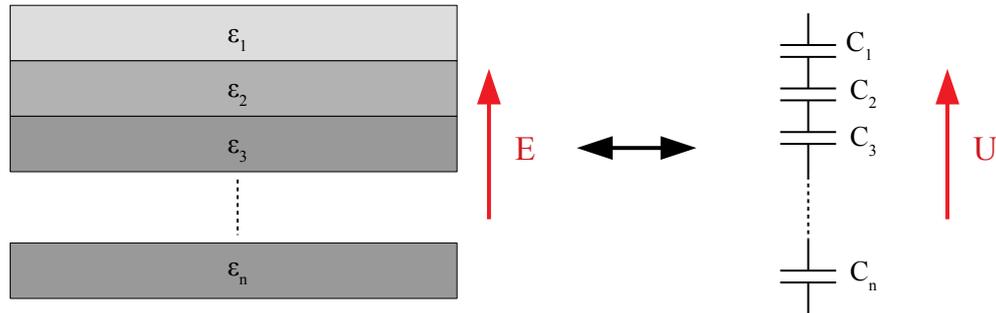


FIGURE 3.2 – Schéma équivalent entre un multicouche diélectrique et des capacités en série.

couches.

Nous cherchons à déterminer dans ces conditions la valeur de la permittivité diélectrique équivalente à l'empilement des n couches. La capacité équivalente du circuit électrique est obtenue par loi de sommation des capacités en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (3.4)$$

La capacité de chaque couche s'exprime en fonction de la permittivité ϵ_i , de l'épaisseur e_i et de la surface S de la couche :

$$C_i = \frac{\epsilon_i S}{e_i} \quad (3.5)$$

S est indépendante de la couche dans le problème étudié. La capacité équivalente que nous cherchons s'écrit de manière analogue, faisant intervenir la permittivité équivalente que nous cherchons :

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_{serie} S}{\sum_{i=1}^n e_i} \quad (3.6)$$

En combinant les équations 3.4 3.5 et 3.6 on obtient une relation liant ϵ_{eq} et les ϵ_i :

$$\begin{aligned} \epsilon_{serie} &= \left(\sum_{i=1}^n q_i \epsilon_i^{-1} \right)^{-1} \\ &= \langle \epsilon^{-1} \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $q_i = e_i / \sum_{i=1}^n e_i$ est le taux de charge relatif de la couche i .

Nous venons de déterminer que l'association série des couches diélectriques corres-

pond à la valeur minimale de permittivité. De manière tout à fait analogue on peut montrer que l'association parallèle des couches diélectriques, qui correspond à une polarisation électrique dans le plan des couches revient à maximiser la permittivité équivalente.

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{parallele}} &= \sum_{i=1}^n q_i \epsilon_i \\ &= \langle \epsilon \rangle\end{aligned}\tag{3.8}$$

Par analogie avec des circuits électriques il est donc possible dans le cas d'un multicouche structuré à une échelle petite devant la longueur d'onde, d'atteindre facilement les bornes de Wiener. A plus haute fréquence, des termes correctifs doivent être ajoutés en raison de la non-localité de la réponse [75]. Ce type de structure, anisotrope par excellence, semble donc particulièrement appropriée pour la création de propriétés anisotropes nécessaires aux revêtements d'optique transformationnelle. Ces lois d'homogénéisation série et parallèle sont communément utilisées pour le design de métamatériaux [36] [17].

3.2.2 Cape sphérique et structure multicouche

L'exemple de la cape d'invisibilité sphérique permettant de masquer un objet lui-même sphérique a été présenté dans le chapitre 1. L'anisotropie requise dans ce type de structure est très importante et tend localement vers l'infini en théorie. La permittivité radiale requise dans ces capes prend des valeurs plus faibles que l'unité, tandis qu'elle est supérieure à l'unité pour ce qui est des deux composantes orthoradiales. Nous proposons ici d'utiliser la structuration multicouche et ses lois d'homogénéisation afin de concevoir par simulation une cape d'invisibilité sphérique. Cette approche fait suite aux travaux de Huang et al [76] qui le premier a proposé une structuration des capes sphériques en multicouche, utilisant des matériaux intrinsèquement isotropes. Ces travaux furent repris par Qiu et al [8], qui proposa en 2009 une analyse des capes multicouches par la théorie de Mie.

3.2.2.1 Axe optique

Pour une cape d'invisibilité sphérique, la symétrie centrale du problème permet de n'avoir à considérer pour les tenseurs de permittivité et perméabilité que deux valeurs propres distinctes : une valeur radiale et une valeur orthoradiale. En se plaçant dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , on a donc $\epsilon_\phi = \epsilon_\theta$. Le revêtement est localement un matériau biréfringent uniaxe, dont l'axe optique est orienté dans la direction radiale. De plus, on sait par le calcul que les permittivités radiales requises dans les capes sphériques sont toujours plus faibles que les permittivités orthoradiales (voir figure 3.3). On peut résumer la morphologie du revêtement par l'inégalité :

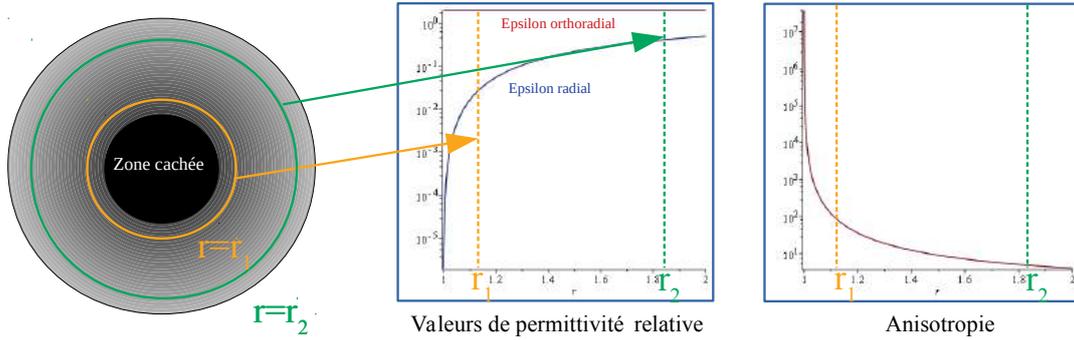


FIGURE 3.3 – Anisotropie et inhomogénéité dans les capes d’invisibilités sphériques.

$$\epsilon_r < \epsilon_\theta = \epsilon_\phi \quad (3.9)$$

Les métamatériaux multicouches constitués de matériaux isotropes sont par leur structure des matériaux également biréfringents uniaxe dont l’axe optique est orthogonal au plan des couches. En se plaçant dans un repère (u, v, n) , avec u et v les directions tangentielles et n la normale au plan, on a $\epsilon_u = \epsilon_v$. La morphologie d’un matériau multicouche peut donc se résumer par l’inégalité :

$$\epsilon_n < \epsilon_u = \epsilon_v \quad (3.10)$$

La comparaison des équations 3.9 et 3.10 incite donc à concevoir une cape sphérique à l’aide de matériaux multicouches. L’idée d’une cape sphérique multicouche consiste donc à faire localement coïncider les directions (θ, ϕ) avec les directions (u, v) , et la direction n avec la direction r . De cette manière, l’axe optique local de la cape est confondu avec l’axe optique du multicouche. On va rechercher à créer en tout point de la cape les égalités suivantes de l’équation 3.11. Nous faisons implicitement l’hypothèse que le rayon de courbure des couches est grand au regard de leurs épaisseurs.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_n \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_u \\ \epsilon_\phi &= \epsilon_v \end{aligned} \quad (3.11)$$

Par cette structuration, on obtient un revêtement constitué d’un assemblage de couches concentriques sphériques. Il reste à déterminer si en tout point de la cape une composition multicouche permet d’atteindre les valeurs cibles requises dans la cape sphérique.

3.2.2.2 Equation du multicouche

On envisage dans cette section une structuration multi-échelles pour la confection de la cape : on la découpe en étage de discrétisation et au sein de chaque étage on divise en plusieurs couches matériaux permettant de créer l’anisotropie. Les lois d’association série et parallèle développées précédemment nous permettent d’écrire l’équation matricielle du multicouche à n matériaux au sein du k^{ieme} étage :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_n \\ \frac{1}{\epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_n} \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \frac{1}{\mu_1} & \frac{1}{\mu_2} & \dots & \frac{1}{\mu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\theta(k) \\ \frac{1}{\epsilon_r(k)} \\ \mu_\theta(k) \\ \frac{1}{\mu_r(k)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Le vecteur de droite correspond au vecteur des propriétés requises par l'optique transformationnelle dans l'étage k , tandis qu'à gauche la matrice des propriétés matériaux multiplie le vecteur des taux de charges. Cette équation ne prend cependant pas en compte le fait que la somme des q_i doit être égale à 1 afin que la solution soit valide et décrive la composition complète du $k^{\text{ième}}$ étage. On peut prendre en compte cette condition en écrivant une égalité supplémentaire sur les q_i , permettant de considérer une couche d'air dont le taux de charge est donné par 3.13 :

$$q_{air} = 1 - \sum_{i=1}^n q_i \quad (3.13)$$

En incorporant cette hypothèse dans l'équation 3.12, on s'assure du fait que la somme des taux de charges sera bien égale à 1.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 - 1 & \epsilon_2 - 1 & \dots & \epsilon_n - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_1} - 1 & \frac{1}{\epsilon_2} - 1 & \dots & \frac{1}{\epsilon_n} - 1 \\ \mu_1 - 1 & \mu_2 - 1 & \dots & \mu_n - 1 \\ \frac{1}{\mu_1} - 1 & \frac{1}{\mu_2} - 1 & \dots & \frac{1}{\mu_n} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\theta(k) - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_r(k)} - 1 \\ \mu_\theta(k) - 1 \\ \frac{1}{\mu_r(k)} - 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Afin de simplifier la résolution du problème on fixe deux approches différentes pour la conception de l'architecture :

- Soit on fixe les épaisseurs de couche q_i et on cherche pour chaque étage les propriétés matériaux nécessaires ϵ_i et μ_i .
- Soit on fixe les ϵ_i et μ_i et on joue sur les épaisseurs relatives q_i .

La première méthode sera désignée sous le nom de "structuration par contrôle des propriétés matériaux" tandis que la deuxième portera le nom de "structuration par contrôle de l'épaisseur".

3.2.2.3 Choix du nombre de matériaux par étage

La structure de la cape sphérique peut être composée d'un nombre illimité de couches et de matériaux dans chaque étage. Cependant, nous cherchons à rendre réaliste la fa-

brication d'une cape d'invisibilité et devons donc poser des contraintes afin d'obtenir une structure fonctionnelle la plus simple possible. La première question à laquelle il est nécessaire de répondre est celle du nombre minimal de matériaux à utiliser. Pour ce faire, un raisonnement simple se basant sur les lois d'homogénéisation de Wiener nous apporte la réponse.

Considérons une famille de matériaux caractérisés par leur permittivité et leur perméabilité (ϵ_i, μ_i) . La permittivité orthoradiale est la somme des permittivités de chaque couche pondérée par leurs taux de charge tandis que l'inverse de la permittivité radiale est une somme des inverses de permittivités de chaque couche pondérée par leurs taux de charge. On peut donc donner des encadrements évidents de la permittivité orthoradiale et de la permittivité radiale du multicouche.

$$\begin{aligned} \min_{i=1,n} \epsilon_i < \epsilon_r < \max_{i=1,n} \epsilon_i \\ \min_{i=1,n} \epsilon_i < \epsilon_\theta = \epsilon_\phi < \max_{i=1,n} \epsilon_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par conséquent, il est nécessaire de disposer à minima d'un matériau plus fort que la valeur maximale requise pour ϵ_θ et d'un matériau de permittivité plus faible que la plus faible valeur requise pour ϵ_r . En d'autres termes, un matériau au moins doit jouer le rôle de diélectrique fort tandis qu'un autre doit être le diélectrique faible. De même pour les perméabilités, on doit avoir un matériau magnétique faible et un matériau magnétique fort afin de s'assurer en première approche qu'on pourra atteindre toute la plage de propriétés requises pour la confection d'une cape. Cette condition est nécessaire mais non suffisante puisqu'il faut prendre en compte le détail des lois de mélange afin de s'assurer de l'atteignabilité des valeurs cibles pour une bibliothèque matériau donnée.

Dans la suite de cette partie, nous allons chercher à structurer les étages à l'aide de quatre couches matériaux.

3.2.2.4 Structuration par contrôle des propriétés matériaux

Dans cette approche nous fixons les épaisseurs des couches et cherchons à déterminer les propriétés des quatre matériaux constituant l'étage. Chaque matériau étant caractérisé par sa permittivité et sa perméabilité que nous supposons ici réelles, nous avons huit inconnues au problème pour quatre équations données par l'équation matricielle 3.14. Afin de rendre ce problème soluble, on doit fixer certaines des inconnues.

Nous choisissons de considérer que les matériaux jouant le rôle de diélectrique fort et de diélectrique faible ne sont pas magnétiques, leur perméabilité relative est donc l'unité. Ce choix nous permet d'écartier deux inconnues du problème en faisant une hypothèse très vraisemblable. De même, nous faisons l'hypothèse que le matériau magnétique fort et le matériau magnétique faible ne sont pas diélectriques, leurs permittivité relatives sont donc égales à l'unité. Cette hypothèse est bien plus discutable car les matériaux magnétiques sont aussi diélectriques : elle ne sert ici qu'à simplifier l'approche dans l'exemple.

On obtient ainsi un problème à quatre équations et quatre inconnues. Dans le cas d'une cape d'invisibilité, les valeurs requises pour la permittivité et la perméabilité sont égales : le système est donc parfaitement symétrique en ϵ et en μ . On peut se restreindre à résoudre le problème sur les deux équations de la permittivité et déduire les mêmes solutions en perméabilité. Fixons comme condition que tous les q_i soient égaux et cherchons les valeurs matériaux requises.

Nous avons un système de deux équations à deux inconnues 3.16, l'indice 1 se référant au matériau diélectrique fort et l'indice 2 au diélectrique faible. Les permittivités ϵ_3 et ϵ_4 sont égales à 1, conformément aux hypothèses.

$$\frac{1}{\epsilon_r} = \frac{1}{4\epsilon_1} + \frac{1}{4\epsilon_2} + \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{4}\epsilon_1 + \frac{1}{4}\epsilon_2 + \frac{1}{2}$$

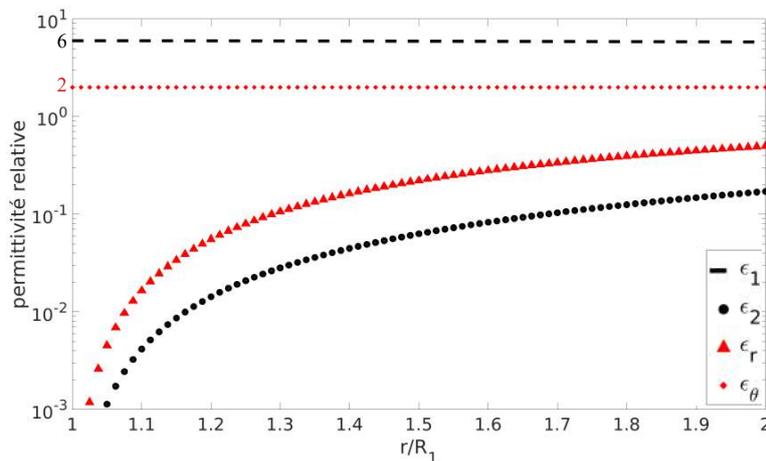


FIGURE 3.4 – Cape sphérique à compression radiale linéaire avec $R_2 = 2R_1$. En noir, les permittivités des matériaux 1 et 2 en fonction de la position radiale de l'étage k . En rouge, les permittivités radiales et orthoradiales des étages en fonction de leur position (cibles à atteindre dans le système 3.16). On remarque bien que le matériau fort est toujours plus fort que les permittivités requises dans la cape, et le matériau faible est toujours plus faible.

On peut alors résoudre ce système en ϵ_1 et ϵ_2 : les résultats sont donnés pour un exemple de cape sphérique à la figure 3.4 en fonction de la position de la couche k dans la cape. La permittivité du matériau à faible indice est en deçà de la valeur de permittivité radiale, elle est partout très proche de 0. Le matériau diélectrique fort reste pratiquement égal à 6 quelle que soit la position de l'étage dans la cape. Etant donnée la symétrie du problème, les résultats sont les mêmes concernant la perméabilité magnétique. Cette approche nous permet de trouver pour chaque étage de la cape les valeurs de permittivité et de perméabilité des différents matériaux entrant dans la composition des couches.

Le principal inconvénient de cette méthode réside dans le fait que chaque étage est composé de matériaux différents, en particulier en ce qui concerne les permittivités et perméabilités faibles (courbe ronds noirs sur la figure 3.4). Si on construit une cape à n étages, on aura besoin de $4n$ matériaux différents, ce qui est considérable. L'approche par contrôle de l'épaisseur permet de pallier ce problème.

3.2.2.5 Structuration par contrôle de l'épaisseur

Il n'est pas raisonnable de prendre comme inconnue de l'équation 3.14 du multicouche les propriétés matériaux, car cela implique l'utilisation d'une quantité très importante de matériaux différents. Dans l'approche par contrôle de l'épaisseur, on considère au contraire que les propriétés matériaux sont imposées et que seules leurs épaisseurs relatives permettent de contrôler les paramètres effectifs de chaque étage.

Afin de pouvoir couvrir une étendue la plus large possible de paramètres effectifs de permittivité et de perméabilité, la plage de propriétés des matériaux de la bibliothèque doit être la plus large possible. En effet, l'étendue des valeurs atteignables par un assemblage de deux matériaux diélectriques est d'autant plus grande que le diélectrique faible est faible et que le diélectrique fort est fort.

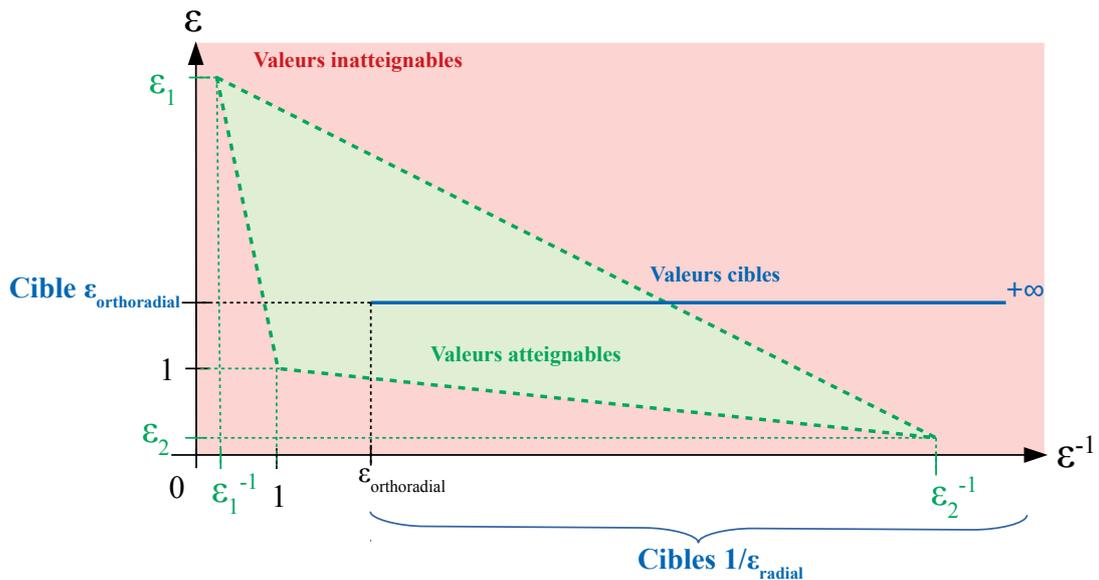


FIGURE 3.5 – En bleu, permittivités cibles pour une cape d'invisibilité sphérique à compression radiale linéaire. Sont superposées les zones atteignables (vert) et inatteignables (rouge) de permittivités pour un système à deux matériaux de valeurs respectives ϵ_1 et ϵ_2 .

La figure 3.5 nous donne un aperçu des valeurs à atteindre ainsi que les zones atteignables pour un matériau constitué de deux diélectriques de permittivités relatives ϵ_1 et ϵ_2 . Les permittivités radiales et orthoradiales sont données en fonction des taux de

charges q_1 et q_2 par les formules suivantes :

$$\frac{1}{\epsilon_r} = q_1 \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right) + q_2 \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) + 1 \quad (3.17)$$

$$\epsilon_\theta = q_1 (\epsilon_1 - 1) + q_2 (\epsilon_2 - 1) + 1$$

Pour un multicouche composé de deux matériaux, nous obtenons un système à deux variables de contrôle, q_1 et q_2 , avec comme condition $q_1 + q_2 \leq 1$. Deux matériaux par couche ϵ_{faible} et ϵ_{fort} sont suffisants afin de réaliser les propriétés radiales et orthoradiales requises. Les perméabilités magnétiques effectives du multicouche suivent des lois parfaitement analogues à celles des diélectriques.

Les taux de charges étant directement liés aux épaisseurs, ces dernières sont alors obtenues par inversion dans l'équation 3.14 de la matrice des propriétés électromagnétiques des quatre matériaux. Si on se réfère au même exemple de cape que dans la section précédente, on obtient en fonction de la position de l'étage dans la cape les épaisseurs relatives des différentes couches matériaux.

Nous avons donc la méthode de calcul des propriétés matériaux nécessaires à la confection d'une cape sphérique. L'architecture de la cape étant ainsi définie, il reste à évaluer sa performance à l'aide d'un calcul électromagnétique. Cependant, les simulations en 3D de multicouches aussi complexes est un vrai challenge numérique. Pour une cape constituée de 80 couches, on estime que le maillage nécessaire serait constitué de 25 à 100 millions de mailles pour un total d'environ 500 millions de degrés de liberté, tandis que nos machines nous permettent de monter jusqu'à environ 10 millions de degrés de liberté. Cette estimation est basée sur les maillages réalisés sur les capes sphériques à gradient continu présentées dans le premier chapitre du manuscrit. Afin de montrer les performances des structures multicouches, nous avons donc développé une approche similaire sur des capes et tapis cylindriques, et moins coûteuse du point de vue du calcul.

3.2.3 Cape cylindrique et structure multicouche

Une cape cylindrique est un peu plus complexe à réaliser qu'une cape sphérique, mais le calcul qui en résulte est plus raisonnable. En effet, la cape cylindrique ne possède pas la symétrie centrale permettant d'avoir un revêtement localement uniaxe. Au contraire, les trois composantes de permittivité (et de perméabilité) $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z)$ sont différentes dans le cas général. L'approche multicouche étant uniaxe, elle ne peut pas être directement utilisée pour la conception des capes cylindriques.

Afin d'adapter la structuration multicouche aux capes cylindriques, il est nécessaire de sacrifier une polarisation afin de n'avoir par exemple plus qu'une composante de perméabilité sur trois et deux composantes de permittivité sur trois à réaliser dans le revêtement. Si on ne considère que la polarisation avec le champ magnétique dans la direction z (axe du cylindre) et le champ électrique dans le plan de coupe, seuls les paramètres μ_z, ϵ_r et ϵ_θ jouent un rôle. Afin de pouvoir inverser la matrice des propriétés

matériaux, celle-ci doit être de dimension 3 par 3. Ceci conduit à une nouvelle équation matricielle décrivant le multicouche cylindrique dans les composantes d'intérêt :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 - 1 & \epsilon_2 - 1 & \epsilon_3 - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_1} - 1 & \frac{1}{\epsilon_2} - 1 & \frac{1}{\epsilon_3} - 1 \\ \mu_1 - 1 & \mu_2 - 1 & \mu_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\theta(k) - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_r(k)} - 1 \\ \mu_z(k) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

De manière analogue au cas sphérique, une inversion du tenseur des propriétés matériaux nous permet alors de déterminer les épaisseurs de couches relatives q_i au sein de chaque étage. Tant que la matrice des propriétés est inversible, il existera un vecteur solution pour les q_i . Un critère indispensable n'est cependant pas pris en compte dans cette équation : il est impératif que les q_i soient des grandeurs positives, pour que la solution ait un sens physique. Dans le cas d'un choix de matériaux inadaptés étant données les propriétés effectives à atteindre, la résolution de l'équation 3.18 donne des solutions non physique. Il est donc nécessaire de corriger ces solutions non physiques d'une part, et de minimiser leur occurrence d'autre part. Deux types de problèmes peuvent apparaître lors du calcul des couches : soit une couche matériau peut voir son taux de charge q_i dépasser 1, auquel cas son épaisseur empiète sur les autres étages, soit son épaisseur est trop faible pour être réaliste. Dans le cas où l'épaisseur est trop faible, on la réduit de sorte à ce qu'elle ne dépasse pas l'épaisseur de l'étage tandis que si elle est trop faible voire négative, on la maintient à une valeur fixe de 1%. Ces valeurs de 99% et 1% sont bien évidemment arbitraires et peuvent être ajustées aux contraintes de conception du revêtement.

Afin de minimiser le nombre d'occurrences de ces résultats non physiques, il faut faire dans chaque étage un choix de matériaux rendant possible l'obtention des valeurs cibles de permittivité et perméabilité. Ce choix doit se faire au regard des valeurs à atteindre et suit une logique très simple : dans les zones où les permittivités (resp. perméabilité) sont hautes on utilisera davantage les matériaux de hautes permittivité (resp. perméabilité) et réciproquement pour les valeurs basses. Ce choix permet d'ajuster la zone des valeurs atteignables telle que celle représentée sur la figure 3.5. Pour la cape cylindrique, certains des paramètres tendent vers 0 ou l'infini à mesure qu'on se rapproche de la frontière interne de la cape : ces valeurs extrêmes ne sont donc pas atteignables et une approximation doit dans tout les cas être réalisée dans les couches les plus profondes.

En utilisant l'outil Livelink de COMSOL nous avons mis au point un code de calcul permettant de réaliser les simulations des capes d'invisibilité 2D. L'architecture globale du code est décrite dans la figure 3.6. L'utilisateur peut définir les propriétés de son revêtement d'optique transformationnelle ainsi que les matériaux dont il dispose. Un calcul basé sur l'inversion du tenseur des propriétés matériaux de l'équation 3.18 permet de déterminer étage par étage les épaisseurs relatives de couches matériaux. Lorsque les matériaux de la bibliothèque ont des valeurs trop hautes ou trop basses qui ne permettent pas d'obtenir les propriétés effectives de l'étage, des approximations sont nécessaires afin d'obtenir les propriétés les plus proches possible des valeurs de consigne. Nous pre-

Architecture du code de calcul des multicouches avec « COMSOL with Matlab »

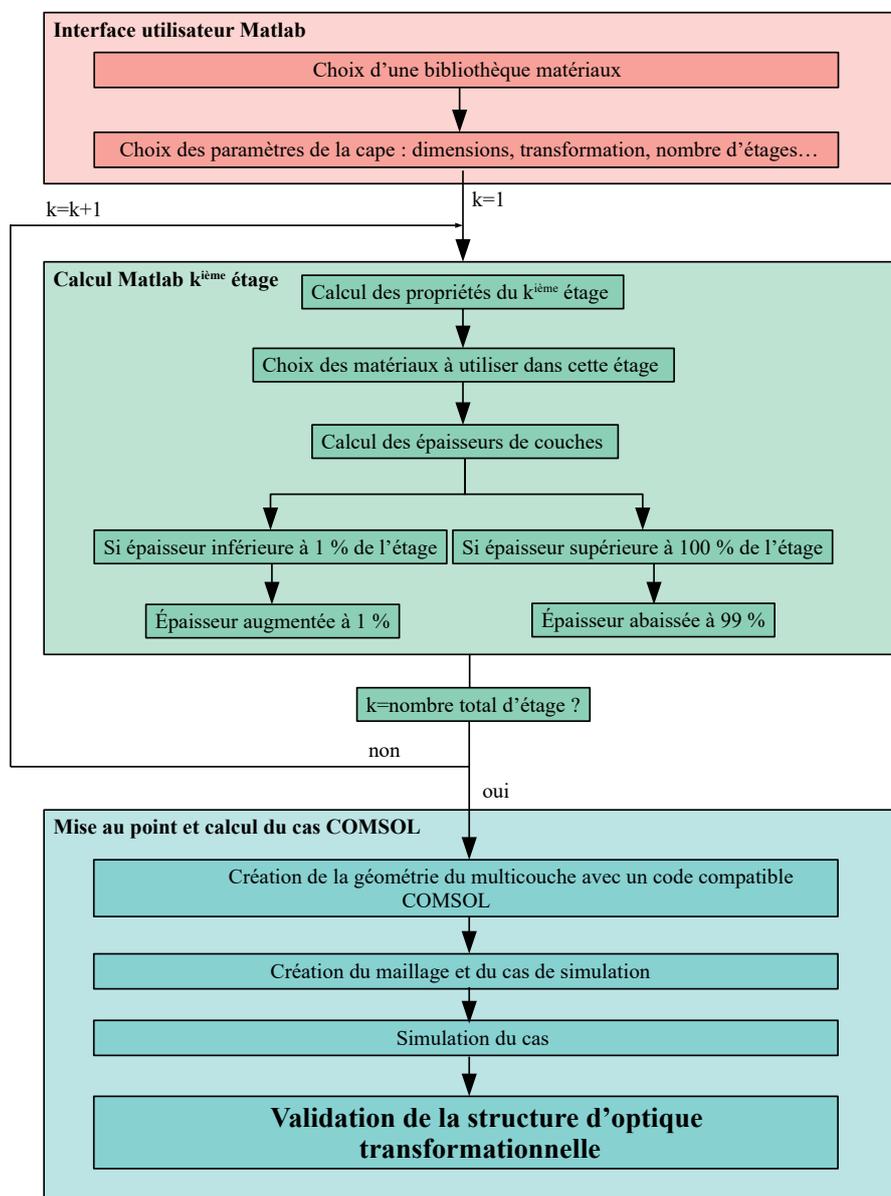


FIGURE 3.6 – Architecture du code de calcul développé sur Livelink (COMSOL with Matlab). En utilisant l’interface de développement de Matlab, un fichier COMSOL est généré avec la géométrie complète du revêtement et les propriétés matériaux adaptées. La simulation électromagnétique COMSOL permet alors de valider les performances du revêtement.

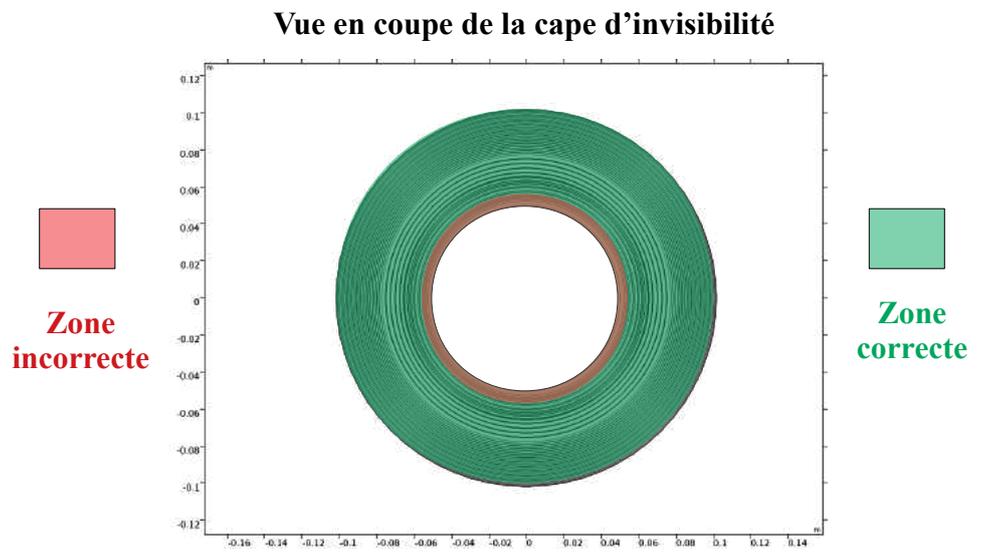
Description	Matériau	Permittivité ϵ_r	Perméabilité μ_r
Diélectrique	Matériau 1	6	1
Diélectrique fort	Matériau 2	80	1
Magnétique faible (MNZ)	Matériau 3	1	0.05
Magnétique	Matériau 4	1	10
Diélectrique faible (ENZ)	Matériau 5	0.02	1
Diélectrique faible (ENZ)	Matériau 6	0.15	1

FIGURE 3.7 – Liste des matériaux utilisés dans la bibliothèque pour constituer une cape d'invisibilité. Certains de ces matériaux sont conventionnels tandis que d'autres sont des ENZ et MNZ. On néglige pour l'exemple les pertes dans tous ces matériaux.

nous comme exemple le cas d'une cape cylindrique à compression radiale linéaire, avec $R_2 = 2R_1$. Les propriétés des matériaux de la bibliothèque sont données dans le tableau de la figure 3.7 .

L'algorithme de calcul que nous avons mis au point nous donne une répartition permettant de réaliser les propriétés requises dans la cape. Cependant, si les solutions trouvées sont non-physiques (taux de charges négatifs ou supérieurs à 1 dans une couche), alors les valeurs sont corrigées de manière à retrouver un sens physique. Par conséquent, nous nous écartons de la valeurs cible effective que l'on cherchait à obtenir. Les graphiques de la figure 3.8 nous donnent pour chaque valeur de permittivité et de perméabilité d'intérêt les valeurs cibles théoriques ainsi que les valeurs d'après l'homogénéisation de Wiener obtenues à partir de l'algorithme. On remarque que dans les couches les plus profondes, qui sont les plus exigeantes en termes de propriété matériaux, un écart important apparaît entre valeur théorique et valeur effective. Dans l'ensemble des autres couches, les propriétés cibles sont obtenues sans difficulté, cela nous permet de considérer que les propriétés théoriques à obtenir pour le revêtement sont globalement respectées. Ces écarts avec la théorie auront toutefois des répercussions mesurables sur l'efficacité de la cape.

Un aperçu de la géométrie du cas d'étude est donné figure 3.9, et permet de visualiser les différentes couches matériau et leurs propriétés de permittivité et perméabilité. Les épaisseurs relatives des différentes couches forment un gradient bien visible. Les changements brusques d'épaisseurs coïncident avec les changements de matériaux d'un étage à l'autre. Une fois la structure déterminée et la géométrie réalisée sous COMSOL, la simulation peut être réalisée.



Propriétés de la cape d'après l'homogénéisation de Wiener

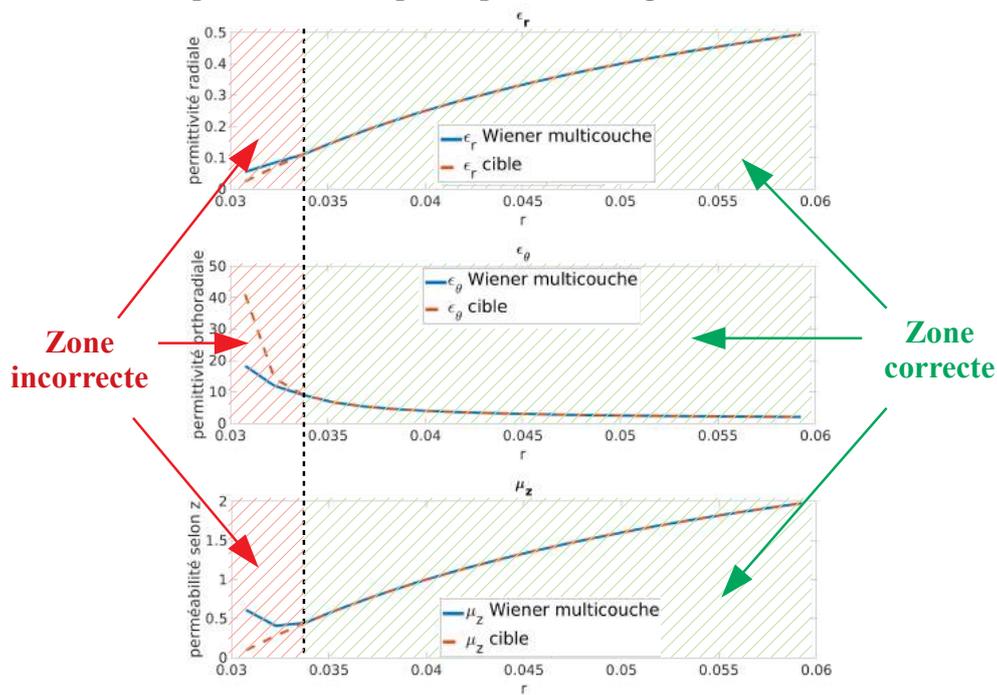


FIGURE 3.8 – Valeurs des permittivités et perméabilités dans la cape cylindrique d'après les lois d'homogénéisation de Wiener. On peut voir que dans les couches les plus profondes les propriétés exigeantes requises ne sont pas atteintes dans le multicouche. On a donc une zone correcte (en vert) et une zone incorrecte (en rouge) du point de vue des propriétés EM.

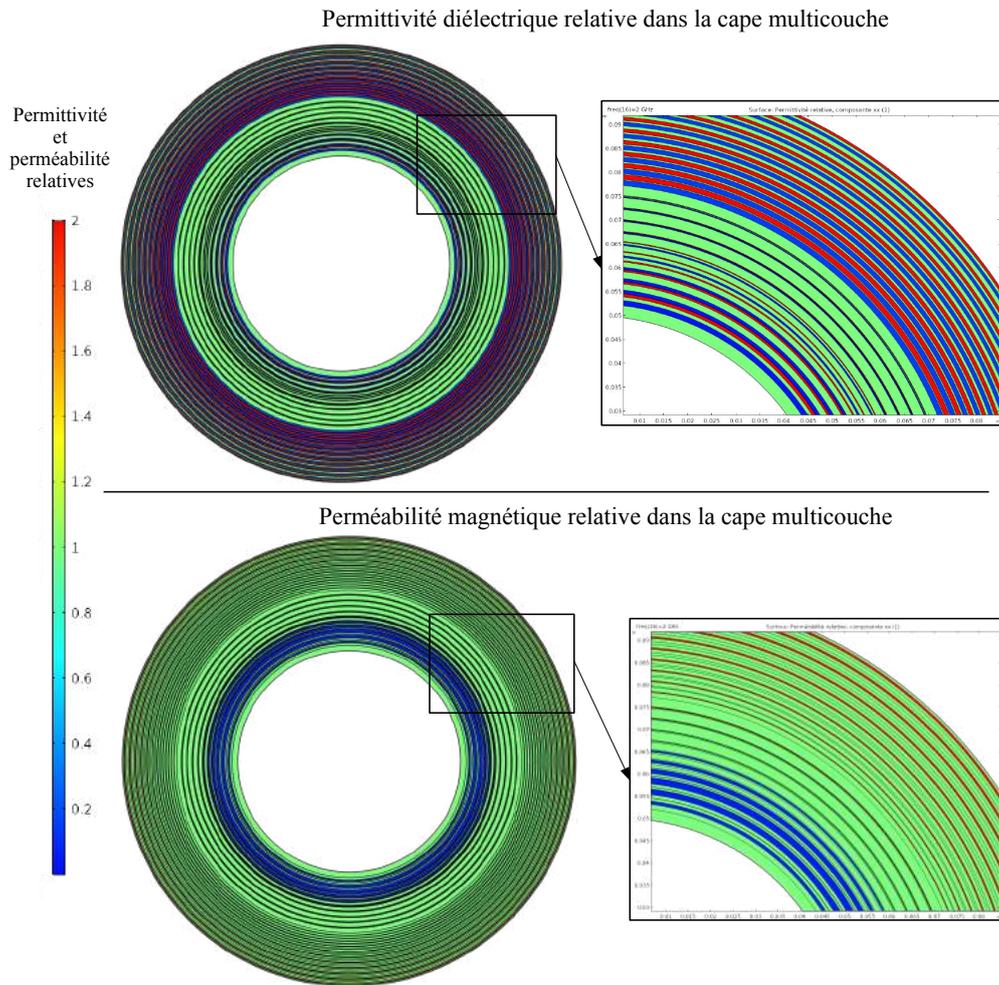
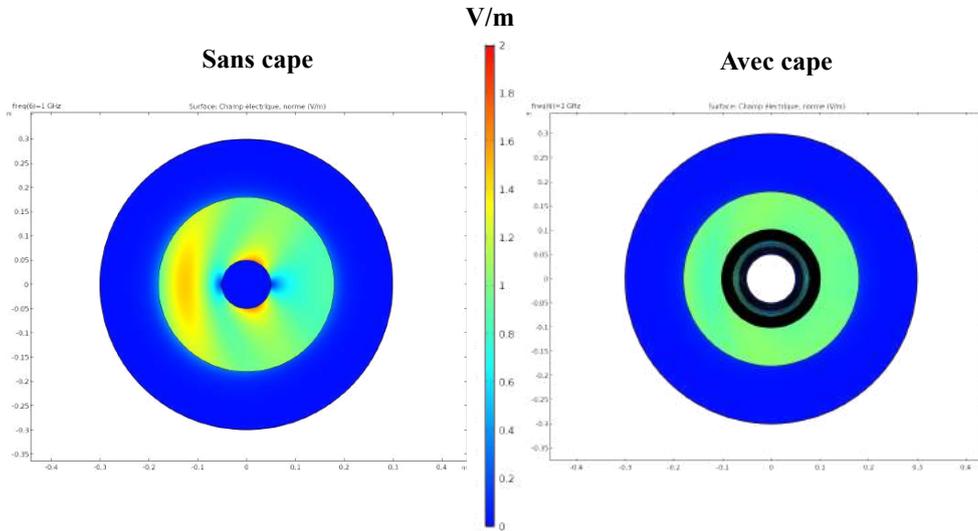


FIGURE 3.9 – Structure du tapis d’invisibilité, composé d’un assemblage de six matériaux différents. Un aperçu de la répartition des propriétés matériaux est donné sur cette figure. Tous les matériaux sont isotropes, l’anisotropie est obtenue grâce à la structuration.

Norme du champ électrique, 1 GHz



Carte de champ diffusé

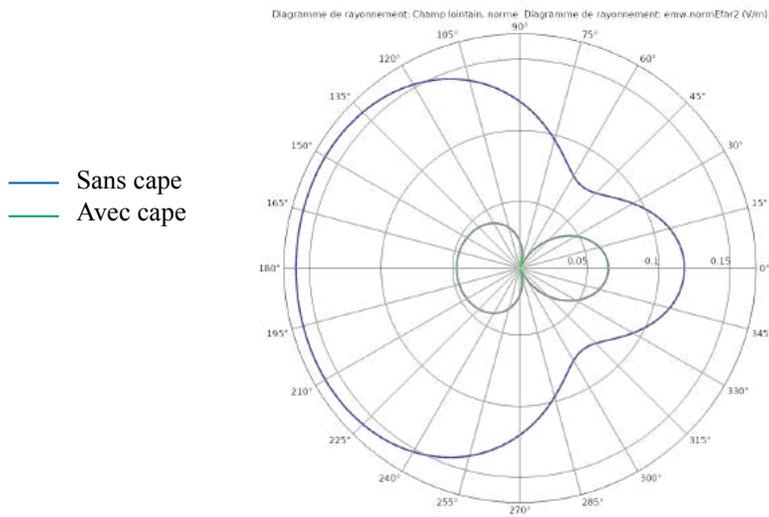


FIGURE 3.10 – Résultats de la simulation à 1GHz. On observe en haut de la figure les cartes de norme du champ électrique : avec l'ajout d'une cape, la norme reste quasi-constante à l'extérieur du système. Une comparaison des diagrammes de champ lointain nous montre la norme du champ diffusé est réduite dans toutes les directions grâce à l'ajout de la cape.

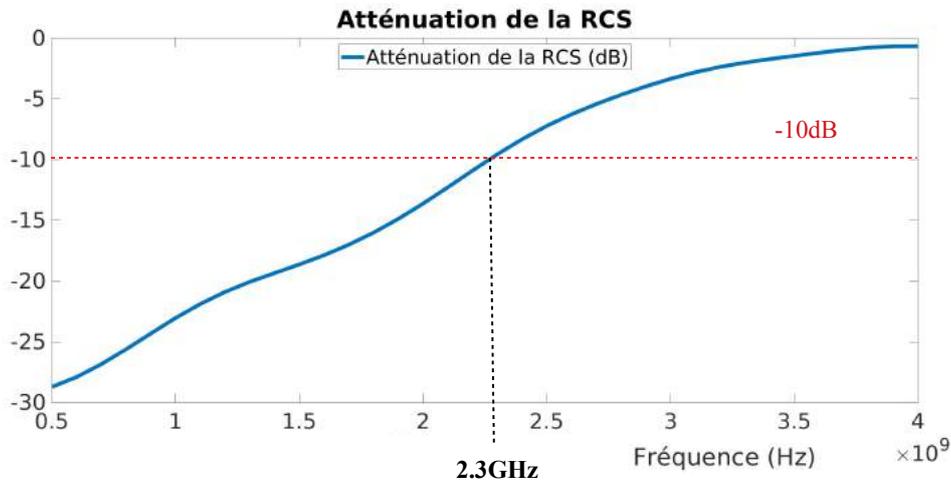


FIGURE 3.11 – Atténuation de la Surface Equivalente Radar (SER) intégrée sur toutes les directions de l'espace (bistatique) sur la gamme de fréquence [0.5,4] GHz. On voit très nettement une dégradation des propriétés de la cape à mesure que la fréquence augmente. On sort du domaine de validité des lois de Wiener, ce qui affecte les propriétés effectives de permittivité et de perméabilité dans la cape. Notre objet, de diamètre 6 cm, peut être masqué par le revêtement jusqu'à une fréquence de 2.3GHz environ.

Les résultats de la simulation sont donnés sous la forme de cartes des champs et d'un diagramme de champ lointain à 1GHz sur la figure 3.10 : les performances de la cape sont globalement très satisfaisantes malgré l'écart entre les propriétés effectives et les propriétés théoriques. On observe sur la carte de champ électrique que l'onde plane semble se reconstruire correctement après avoir parcouru la cape. La norme du champ électrique est constante autour de la cape, ce qui montre que les champs ne sont pas perturbés par la présence du dispositif. Enfin, les diagrammes de champ lointain nous renseignent précisément sur le rayonnement diffusé par la structure : il est très inférieur au rayonnement du cylindre sans cape d'invisibilité.

L'étude a été menée dans le domaine fréquentiel entre 0.5 et 4 GHz afin de vérifier le comportement en fréquence de la cape : l'approximation quasi-statique, hypothèse des lois de Wiener n'est plus vraie à mesure que la fréquence augmente. L'atténuation de la Surface équivalente Radar (SER) est donnée sur la figure 3.11 en fonction de la fréquence. On observe un comportement très efficace à basse fréquence et une détérioration à mesure que la fréquence augmente.

3.3 Vers un revêtement réaliste

Les capes d'invisibilité présentées sont constituées de matériaux présentant des permittivités et perméabilités relatives sous-unitaires, dont les valeurs sont très proches de 0 : à titre d'exemple, dans la cape cylindrique il est nécessaire de descendre jusqu'à une permittivité relative de 0.01 pour réaliser une cape fonctionnelle. Ces valeurs ne sont pas réalistes du point de vue de la conception des matériaux : non seulement un matériau sous unitaire est toujours dispersif en fréquence, mais il semble également irréaliste de garantir un tel degré de précision sur la valeur de permittivité effective de celui-ci.

Afin d'utiliser la structuration multicouche pour réaliser des revêtements d'optique transformationnelle, nous devons trouver un moyen de nous affranchir de ces valeurs de paramètres proches de 0. Pour ce faire, deux solutions ont été envisagées : soit on se place dans un milieu à indice plus fort que l'air, soit on tronque les capes d'invisibilité de sorte à ne plus avoir besoin des étages les plus problématiques. Nous verrons également qu'il est possible de coupler ces deux approches afin de ne plus avoir aucune propriété matériau sous-unitaire dans la structure de la cape. La présence ou l'absence de propriétés sous-unitaire est enjeu important. En effet, si aucun matériau de ce type n'est requis, les matériaux des bibliothèques peuvent être des céramiques et polymères conventionnels, dont la dispersion fréquentielle sera en outre généralement moindre que celle d'un métamatériau ENZ ou MNZ. Une telle démarche permet donc non seulement de faciliter la création des revêtements en évitant d'avoir à intégrer des inclusions miniaturisées au sein des couches minces, mais également de garantir un fonctionnement bien plus large bande des dispositifs d'invisibilité.

3.3.1 Tapis d'invisibilité

Le principe du tapis d'invisibilité a été développé dans le chapitre 2 de ce manuscrit. L'idée consiste à tronquer une portion de la cape cylindrique de sorte à créer une surface courbe dont l'image par la transformation optique donnera un plan. L'objectif consiste donc à masquer une protubérance, une cavité, ou tout autre défaut de planéité afin de reconstituer en apparence une surface plane. On s'intéresse exclusivement ici à l'application de ce type de revêtement d'invisibilité sur des surfaces métalliques.

Le tapis d'invisibilité ne permet donc pas, contrairement à la cape, d'empêcher les champs électriques et magnétiques de voir l'objet, mais lui donne au contraire un aspect différent de ce qu'il est réellement. La méthode de troncature de cape présentée dans le chapitre 2 peut être appliquée aux revêtements multicouches : elle permet de sélectionner une portion de la cape cylindrique ou sphérique, qui, disposée sur un ressaut métallisé, réalisera le tapis. En procédant ainsi, on s'affranchit des étages les plus profonds du multicouche, ceux qui sont les plus exigeants du point de vue des propriétés effectives. En particulier, les couches de cape cylindrique qui n'étaient pas réalisables dans le paragraphe précédent peuvent ne plus apparaître dans le tapis.

On contrôle par les paramètres géométriques du ressaut et de la cape les couches qui apparaîtront ou non dans le revêtement. Étant donné que les couches les plus difficiles

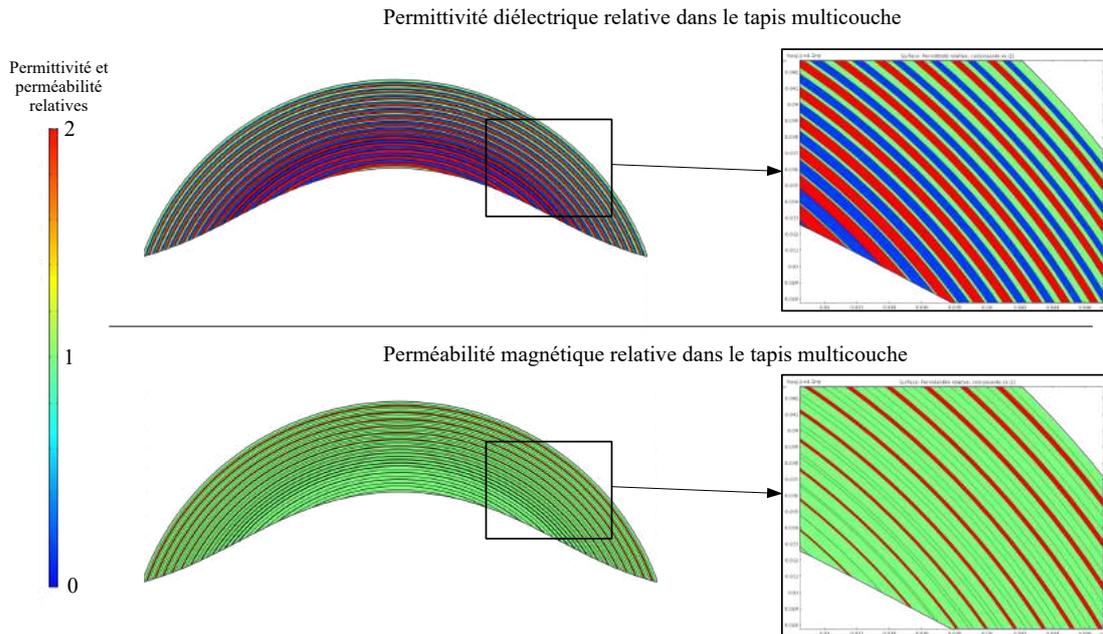


FIGURE 3.12 – Coupe du tapis multicouche cylindrique constitué d’une portion de cape cylindrique. Un défaut métallique sur un plan doit être masquée par le revêtement d’optique de transformation afin de ressembler au plan métallique seul. Une alternance de couches de différentes épaisseurs et valeurs de permittivité et perméabilité permet par homogénéisation de Wiener de créer les propriétés attendues.

n’ont plus à être réalisées, il est possible de réduire les contraintes sur les propriétés des matériaux de la bibliothèque. Nous utilisons ici encore la bibliothèque décrite dans la figure 3.7 à l’exception du matériau 5.

Une fois cette troncature réalisée, la géométrie doit être réalisée sous COMSOL pour permettre une validation par un calcul électromagnétique. Nous avons développé un code Livelink (COMSOL with Matlab) adapté et basé sur le même modèle que celui présenté dans la figure 3.6. Il permet de créer le fichier COMSOL du cas d’étude, qui ensuite peut être simulé. Le maillage de ce type de structure est souvent délicat, il est donc systématiquement nécessaire de le réaliser "à la main" en adaptant les propriétés du maillage à chaque domaine géométrique en fonction de ses caractéristiques.

Une coupe du tapis d’invisibilité est donnée figure 3.12 et permet de voir les propriétés de permittivité et de perméabilité relatives présentes dans chacune des couches. Ce tapis cylindrique épouse la forme du défaut à masquer. Les simulations sont ensuite réalisées à l’aide de COMSOL et les résultats sont donnés dans la figure 3.13 : on observe une très bonne correspondance entre le rayonnement diffusé par le modèle et celui diffusé par le mime. Le coefficient d’efficacité est de 98%, nous pouvons donc conclure que le défaut est correctement masqué .

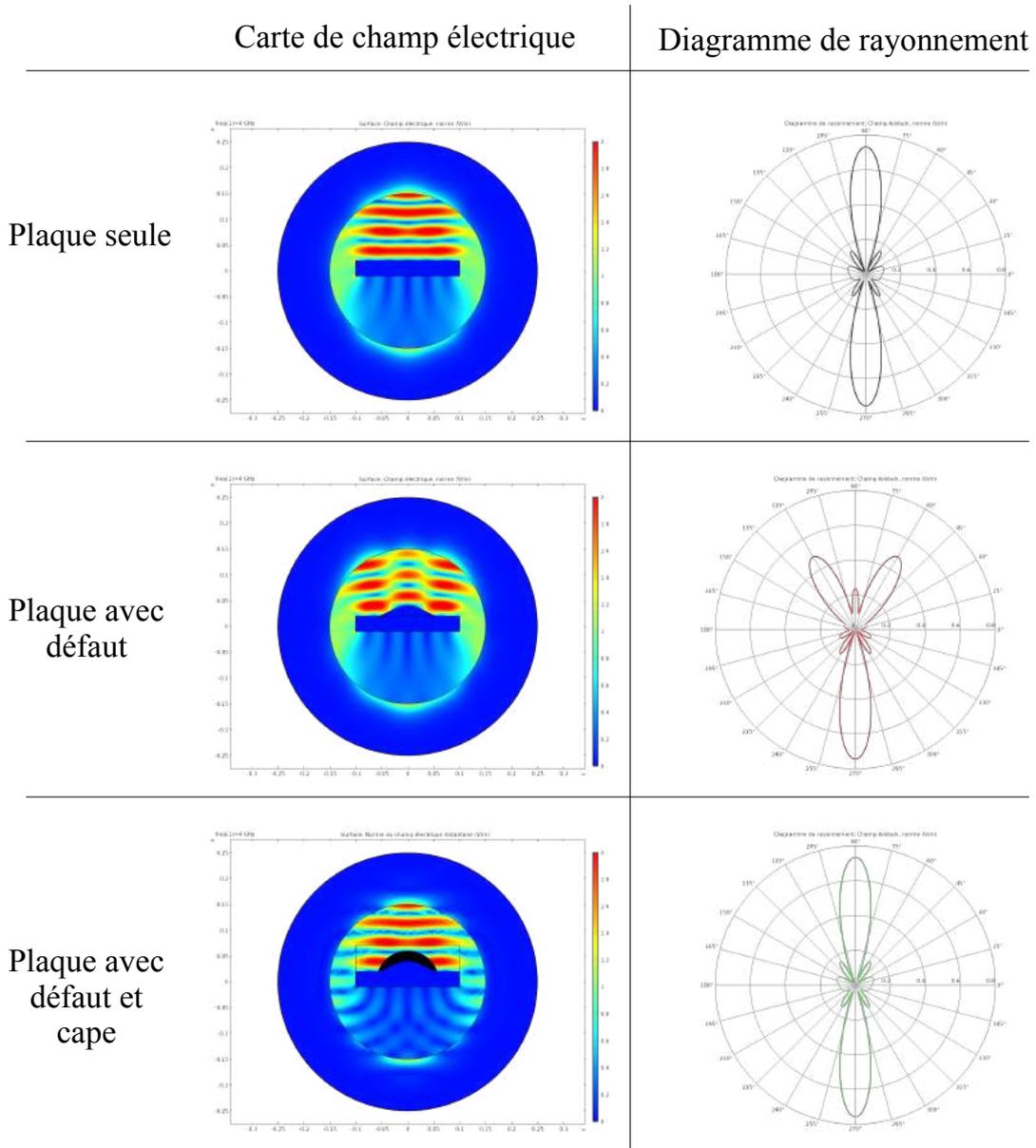


FIGURE 3.13 – Résultats de la simulation du tapis d'invisibilité. Sont données les cartes de champ électrique ainsi que le champ électrique lointain diffusé pour trois cas de figure : plaque seule, plaque avec défaut, plaque avec défaut et cape. L'ajout de la cape rétablit parfaitement le champ lointain, l'invisibilité du ressaut est totale.

3.3.2 Tapis de mimétisme

En réalisant la troncature de cape dans un milieu à indice, on peut s'affranchir complètement de tous les paramètres sous-unitaires : en effet, les couches les plus profondes de la cape cylindrique sont tronquées car non-nécessaires à l'élaboration du tapis.

Description	Matériau	Permittivité ϵ_r	Perméabilité μ_r
Diélectrique	Matériau 1	60	1
Diélectrique fort	Matériau 2	100	1
Magnéto-diélectrique	Matériau 3	15	15
Magnétique fort	Matériau 4	10	100
Magnéto-diélectrique	Matériau 5	20	15
Magnéto-diélectrique	Matériau 6	30	15

FIGURE 3.14 – Liste des matériaux utilisés dans la bibliothèque pour constituer le tapis de mimétisme. Tous les matériaux sont conventionnels : il n'y a pas de propriétés sous-unitaires.

Considérons une cape de mimétisme réalisée uniquement des matériaux conventionnels, ne présentant aucune valeur sous-unitaire. L'application de notre algorithme de conception ne parvient pas dans ce cas à réaliser totalement les valeurs requises dans le revêtement, en particulier dans les couches les plus profondes. Le tableau de la figure 3.14 nous donne les différents matériaux utilisés. Dans la zone externe de la cape, on est capable de réaliser parfaitement les valeurs requises par l'optique transformationnelle sous la seule hypothèse quasi-statique. Si on décide de tronquer cette cape pour en faire un tapis analogue au tapis présenté dans la section précédente, alors on décrit un dispositif réalisable en utilisant exclusivement des matériaux conventionnels.

Une coupe du tapis de mimétisme est donnée figure 3.15 avec un aperçu des différentes couches et de leur propriétés. Ce tapis est composé de 60 couches d'épaisseurs comprises entre 100 μm et 1 mm. Cinq matériaux sur les six de la bibliothèque sont requis pour la création du revêtement. Les simulations sont ensuite réalisées sous COMSOL dans les mêmes conditions que précédemment : les résultats sont donnés à la figure 3.16. Le coefficient d'efficacité est ici supérieur à 99%.

Le fonctionnement de ce tapis ne dépend pas de la fréquence, dans la mesure où les propriétés intrinsèques des matériaux ne dépendent elles-même pas de la fréquence. Le tapis fonctionne quelle que soit l'incidence tant qu'elle reste dans le plan. Un analogue sphérique peut être imaginé sur le même modèle, et permettrait de masquer un défaut

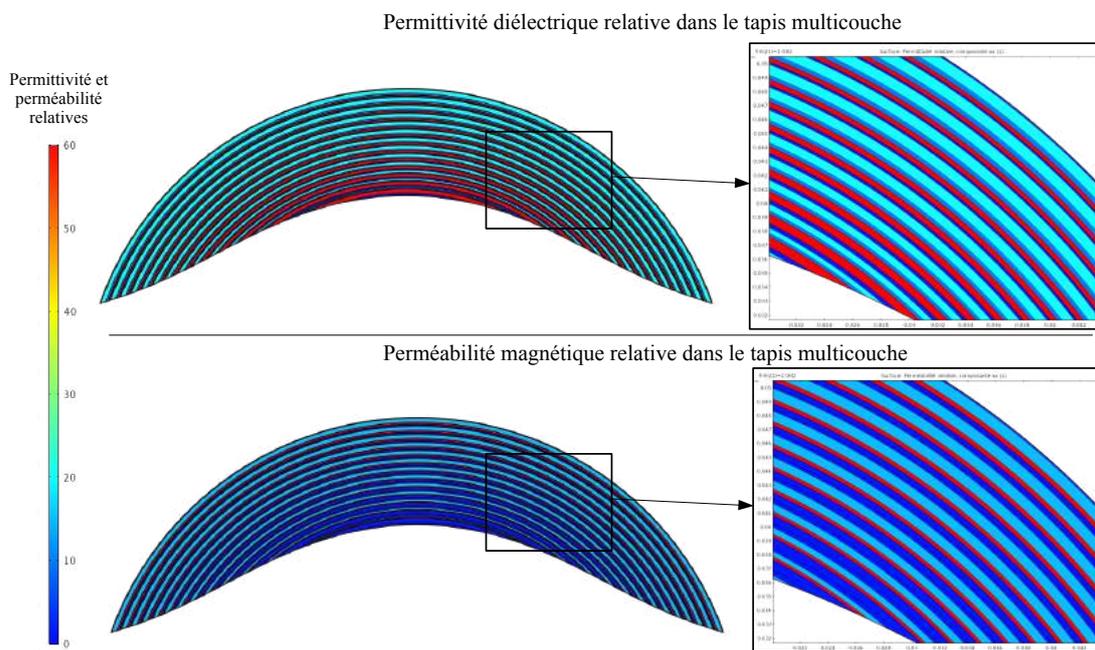


FIGURE 3.15 – Coupe du tapis de mimétisme cylindrique constitué d’une portion de cape cylindrique. Ce multicouche n’est constitué d’aucun matériau aux propriétés sous-unitaires. Les valeurs de permittivité et de perméabilités sont comprises entre 1 et 100. On fait l’hypothèse qu’il n’y a aucune perte dans les matériaux.

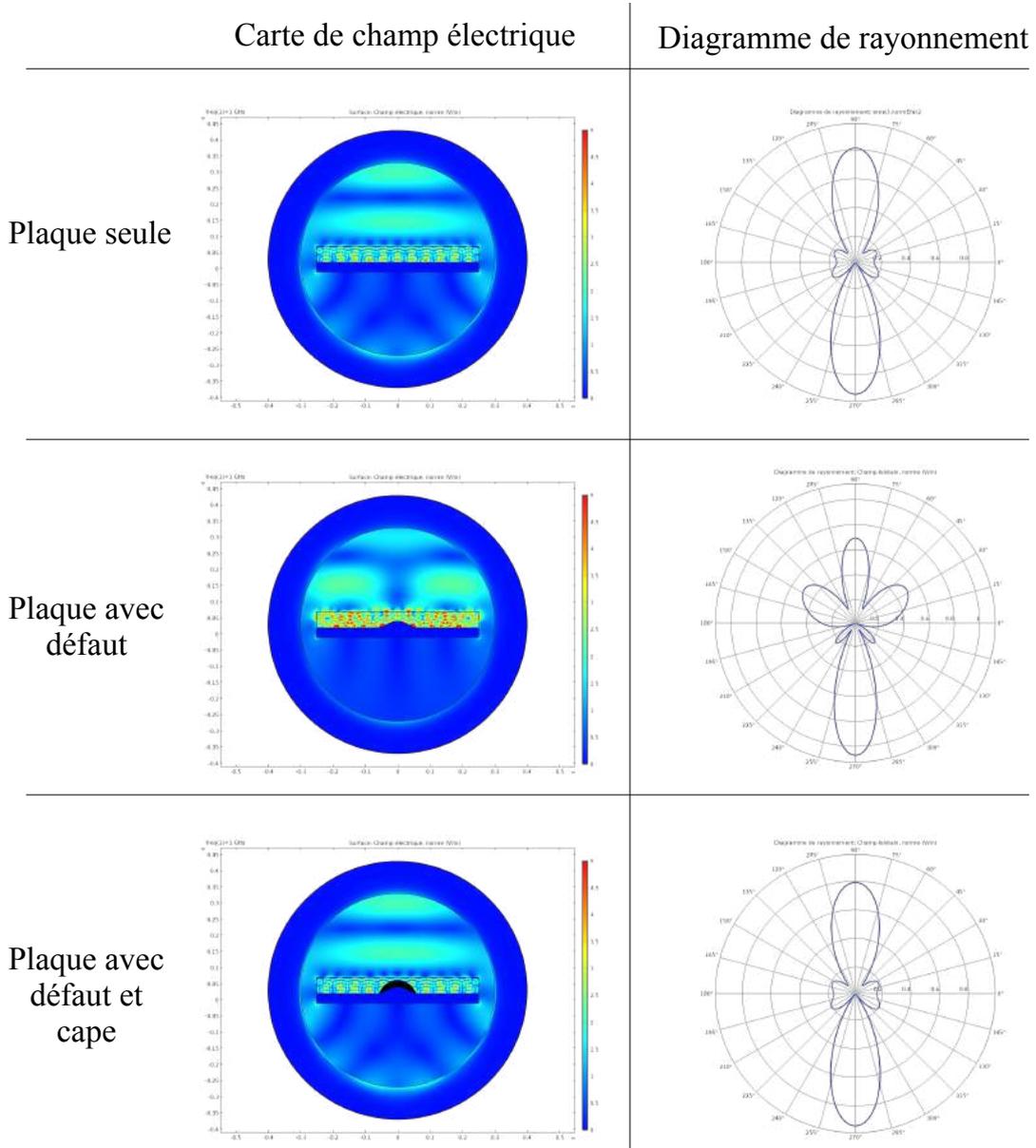


FIGURE 3.16 – Résultats de la simulation sur le tapis de mimétisme. Sont données les cartes de champ électrique ainsi que le champ électrique lointain diffusé pour trois configurations : plaque seule, plaque avec défaut, plaque avec défaut et cape.

de symétrie axiale quelle que soit l'incidence et la polarisation de l'onde.

3.4 Intégration de matériaux anisotropes

La méthode présentée jusqu'à maintenant ne considère dans les différentes couches du revêtement que des matériaux intrinsèquement isotropes. En faisant cette hypothèse, on peut faire appel dans les bibliothèques utilisées à une grande majorité des matériaux existants naturellement ou des métamatériaux. Nous avons vu dans les exemples précédents qu'il est indispensable d'avoir pour les capes et tapis d'invisibilité, contrairement à ceux de mimétisme, des couches à indice sous-unitaire ENZ ou MNZ. Considérer l'existence de matériaux ENZ et MNZ dans la bibliothèque n'est donc pas nécessairement compatible avec l'hypothèse d'isotropie intrinsèque des couches. Il faut au contraire considérer que ces couches de matériaux ont une anisotropie intrinsèque pour déterminer les propriétés effectives du multicouche. Les matériaux ENZ et MNZ disposent le plus souvent d'un paramètre ϵ_r ou μ_r sous unitaire dans une direction de l'espace. Les paramètres effectifs dans les deux autres directions étant alors supérieurs à l'unité. Un exemple de méta-matériau présenté dans le chapitre 5 de ce manuscrit permet par exemple de réaliser un MNZ selon une direction de l'espace en conservant dans le plan orthogonal une valeur proche de 1.

Ce constat permet d'imaginer des structures dans lesquelles l'anisotropie est réalisée grâce à une structuration multi-échelles : le revêtement est constitué d'un multicouche, dans lequel certaines des couches sont elles-même structurées, constituées de réseaux d'inclusions dans une matrice. Dans ce cas de figure, l'équation du multicouche sphérique devient par exemple :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{u,1} - 1 & \epsilon_{u,2} - 1 & \epsilon_{u,3} - 1 & \epsilon_{u,4} - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_{n,1}} - 1 & \frac{1}{\epsilon_{n,2}} - 1 & \frac{1}{\epsilon_{n,3}} - 1 & \frac{1}{\epsilon_{n,4}} - 1 \\ \mu_{u,1} - 1 & \mu_{u,2} - 1 & \mu_{u,3} - 1 & \mu_{u,4} - 1 \\ \frac{1}{\mu_{n,1}} - 1 & \frac{1}{\mu_{n,2}} - 1 & \frac{1}{\mu_{n,3}} - 1 & \frac{1}{\mu_{n,4}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\theta(k) - 1 \\ \frac{1}{\epsilon_r(k)} - 1 \\ \mu_\theta(k) - 1 \\ \frac{1}{\mu_r(k)} - 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

où u est une direction unitaire dans le plan du multicouche et n la normale au multicouche. Intégrer des réseaux d'inclusions résonantes dans ce type de structure, dont les épaisseurs caractéristiques de couches sont très faibles (de l'ordre de $\lambda_0/100$), constitue cependant un challenge. La miniaturisation des métamatériaux constitués de réseaux de structures résonantes métalliques sera abordée dans les chapitres 4 et 5 de ce manuscrit. La prise en compte de leur dispersion fréquentielle est quant à elle abordée dans le chapitre 6.

3.5 Perspectives

3.5.1 Structuration en voxels

Nous avons travaillé sur des capes de géométrie sphérique ou cylindrique en mono-polarisation, requérant une anisotropie uniaxe en tout point du revêtement. Cette anisotropie a donc pu être réalisée par un assemblage multicouche de matériaux isotropes. Dans le cas général, les revêtements d'optique de transformation ne sont pas uniaxes mais biaxes. Trois valeurs propres distinctes apparaissent donc dans les tenseurs de permittivité et de perméabilité, ce qui complexifie la structuration.

Les vecteurs propres des tenseurs de permittivité et de perméabilité d'un revêtement d'optique transformationnelle sont toujours orthogonaux. On peut se convaincre de cette particularité en analysant les équations de l'OT. Les permittivités des revêtements sont le produit d'une matrice jacobienne et de sa transposée. Les matrices de permittivités sont donc diagonales réelles et par conséquent diagonalisables dans une base orthonormée.

La géométrie de la cape peut donc être définie comme un assemblage de cellules unités, assimilées à des cubes de taille suffisamment petite devant la longueur dans le vide de l'onde d'excitation. Ces cubes peuvent être appelés "voxel", l'analogie tridimensionnel du pixel. Le voxel est l'unité de discrétisation choisie et sur laquelle la structuration va reposer. Chaque voxel doit exhiber un tenseur de permittivité et de perméabilité effectives correspondant à ceux requis par la théorie de l'optique transformationnelle.

3.5.2 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point une méthode de structuration des revêtements d'OT uniaxes à l'aide d'une superposition de couches minces. Cette méthode permet de concevoir les gradients de propriétés et l'anisotropie requises dans les capes et tapis d'invisibilité et de mimétisme, uniquement à partir de matériaux isotropes.

Dans le cas des revêtements d'invisibilité, certains des matériaux requis sont des ENZ et MNZ, tandis que les revêtements de mimétisme ne requièrent que des matériaux conventionnels, dont les propriétés sont toutes sur-unitaires. Il est donc possible d'imaginer à l'aide de moyens technologiques avancées de fabrication additive la réalisation d'un tel dispositif à partir de polymères et de céramiques magnétiques et diélectriques.

Concernant les revêtements d'invisibilité, une étude approfondie des ENZ et MNZ est nécessaire avant de pouvoir imaginer une réalisation. Cette thématique est étudiée dans les chapitres 4, 5 et 6 de ce manuscrit. L'intégration de matériaux ENZ et MNZ dans une structure multicouche doit prendre en compte la potentielle anisotropie des métamatériaux utilisés. Nous pouvons également imaginer une généralisation de la structuration des revêtements d'OT aux cas biaxes, par une décomposition en voxels plutôt qu'en multicouches.

4 Métamatériaux conducteurs résonants

Sommaire

4.1	Introduction	101
4.2	Bibliographie	102
4.2.1	Étude de la diffraction d'un objet	102
4.2.2	Les circuits équivalents	104
4.3	Interface métal-diélectrique courbée	105
4.3.1	Description de la géométrie du fil métallique	105
4.3.2	Équations dans le repère de Frenet	109
4.3.3	Résolution par séparation des variables	111
4.3.4	Équation des modes de surface	112
4.3.5	Résonance de corde vibrante	113
4.4	Courants le long d'un SRR	114
4.5	Etude paramétrique d'un SRR	119
4.5.1	Impact de la longueur curviligne	120
4.5.2	Impact de la permittivité du substrat	120
4.5.3	Impact de la conductivité	122
4.6	Conclusion	126

4.1 Introduction

Nous avons évoqué dès le chapitre 1 l'utilisation de métamatériaux constitués de réseaux d'inclusions résonantes pour la conception de revêtements d'OT. Dans ce chapitre, nous abordons plus en détails cette thématique et cherchons à expliquer les raisons physiques des comportements observés. Dans le cadre de la réalisation de revêtements d'OT, la connaissance des principes physiques sous-jacents pourrait permettre de guider la conception des métamatériaux en fonction des besoins requis. En particulier, la question principale que l'on est amené à se poser dans ce contexte concernent la réalisation, sans bi-anisotropie, de permittivités et perméabilités proches de 0. De nombreuses questions secondaires se posent également, concernant par exemple le facteur de qualité des résonances, la fréquence de résonance ou encore l'homogénéisabilité des structures.

Nous abordons dans ce chapitre le phénomène de résonance apparaissant dans les méta-atomes, qui a été abondamment étudié dans la littérature. Nous proposons ensuite une approche phénoménologique de la résonance de particule basée sur l'étude des modes de surface. L'idée consiste à prévoir et justifier l'impact du substrat, du métal et de la géométrie globale de la particule élémentaire sur la réponse de celui-ci à une excitation électromagnétique.

4.2 Bibliographie

L'étude des structures métalliques est très diversifiée dans la littérature, en particulier dans le cadre de l'étude des antennes. En effet, il est primordial de connaître la répartition des courants le long de la structure afin de pouvoir déterminer l'allure des champs diffusés et ainsi déduire les performances du dispositif au regard de la fonction qu'il doit remplir. Dans cette étude bibliographique, nous nous intéressons en particulier aux méthodes intégrales de surface, qui sont privilégiées dans la littérature pour l'étude de géométries complexes. Nous aborderons ensuite les modèles de circuits électriques équivalents, utilisés pour la description des résonances de métamatériaux.

Nous n'utiliserons pas dans le cadre de cette thèse les méthodes intégrales pour l'étude des métamatériaux mais proposons une approche simplifiée permettant de décrire la phénoménologie des structures métalliques tubulaires. Nous validons cette approche dans l'exemple des SRR en la confrontant à des simulations par éléments finis. Des résultats analogues peuvent être obtenus par les méthodes intégrales dans des références que nous citons.

4.2.1 Étude de la diffraction d'un objet

Dans un réseau de particules résonantes, chaque élément unitaire diffracte le rayonnement incident ainsi que le rayonnement de ses voisins. Le calcul de la diffraction des ondes sur un diffuseur peut se faire par l'utilisation de méthodes basées sur des équations intégrales, en particulier les méthodes EFIE (Electric Field Integral Equation) et MFIE (Magnetic Field Integral Equation). La combinaison de ces deux méthodes, développée pour résoudre des problèmes de stabilité dans les calculs, s'appelle la méthode CFIE (Combined Field Integral Equation). MFIE et CFIE sont réputées plus robustes mais ne peuvent être utilisées que sur des surfaces fermées, contrairement à l'EFIE. Bien que convergeant plus difficilement, l'EFIE est quant à elle réputée donner de meilleurs résultats. Une discussion concernant les avantages et inconvénients de chaque méthode peut être trouvée dans Chew et al. [77].

L'équation 4.1 est la forme dyadique de l'EFIE, liant le champ électrique \mathbf{E} au courant \mathbf{J} .

$$\mathbf{E}_{diff} = -j\omega\mu \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (4.1)$$

avec $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la fonction de Green donnée par l'équation 4.2.

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{I} + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.2)$$

G est la fonction de Green de l'équation de Helmholtz homogène en dimension 3, \mathbf{I} le tenseur identité et ∇ l'opérateur nabla. Ces équations, très utilisées dans l'étude des antennes, permettent de connaître le champ diffusé connaissant la répartition de courant le long d'une surface. L'utilisation de conditions de bord permet de déterminer le courant \mathbf{J} . Pour un conducteur parfait, on considère que le champ électrique \mathbf{E} tangentiel

est nul à l'interface avec le métal tandis que le rotationnel de l'induction magnétique \mathbf{H} est égale au courant de surface.

Le calcul de la diffraction au moyen des équations EFIE ou MFIE se fait ensuite généralement soit par méthode des moments [78] [79], soit par discrétisation en éléments finis [80] [81]. Ces méthodes de résolution sont assez coûteuses, si bien qu'il est souvent nécessaire de paralléliser massivement le calcul pour obtenir la diffraction d'objets complexes. Dans la méthode des moments, on construit un système d'équations linéaires en projetant l'EFIE sur une base de fonctions orthogonales, permettant ainsi de paralléliser le calcul. L'utilisation de la méthode des moments permet d'obtenir des résultats pertinents aussi bien pour des objets canoniques (sphères, cylindres...) que sur des surfaces arbitraires [82]. Il n'est donc pas nécessaire de calculer la propagation des ondes dans tout l'espace, les équations de surface sont suffisantes pour déterminer l'allure du champ diffracté.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des structures composées de fils métalliques. Dans ce contexte, l'EFIE prend une forme simplifiée appelée équation de Pocklington. Cette équation s'établit en prenant en fait l'hypothèse que le fil est un conducteur parfait.

$$E_s^i = \frac{-j}{\omega\epsilon} \int_{s'} J_s(s') \left[k^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \right] \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' \quad (4.3)$$

avec s la coordonnée curviligne le long du fil métallique, J_s le courant longitudinal et E_s^i le champ électrique incident selon s . Pour déterminer le courant le long du fil, on doit dans un premier temps estimer le champ électrique source et dans un second temps inverser le noyau de l'intégrale. Cette équation peut s'appliquer à n'importe quelle géométrie de fils métalliques fins bien que l'on trouve principalement traité le cas des barreaux droits dans la littérature [83]. Les métamatériaux peuvent également être étudiés via l'équation de Pocklington [84].

En ajoutant comme condition que le rayon du fil est très petit devant sa longueur curviligne et devant la longueur d'onde dans le vide de l'excitation, nous pouvons simplifier la fonction de Green dans l'équation de Pocklington. En considérant que les courants dans le fil sont symétriques $J(s) = J(-s)$, on obtient alors l'équation intégrale de Hallén :

$$\int_{-l/2}^{l/2} J_s(s') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds' = -j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [B_1 \cos(ks) + C_1 \sin(k|s|)] \quad (4.4)$$

avec B_1 et C_1 des constantes. La résolution de l'équation de Hallén est un problème ancien mais toujours d'actualité : elle n'admet pas de solution exacte sous cette forme à cause de l'approximation faite sur le noyau [85] [86]. Des solutions approchées sont également envisagées [87].

Avec les moyens informatiques actuels, le calcul de la diffusion d'un objet peut se faire au moyen d'une simulation aux éléments finis, dans laquelle on réalise une discrétisation de l'espace que l'on souhaite simuler. C'est le cas par exemple du logiciel COMSOL Multiphysics que nous utilisons dans cette thèse pour réaliser les simulations : les équations

tions de Maxwell sont alors résolues soit par une méthode directe soit par une méthode itérative en fonction du cas d'étude. Ces moyens permettent d'avoir une connaissance du champ diffracté par un objet sans avoir à passer par une mesure. Les simulations n'étant pas parfaitement exactes et reposant sur une idéalisation des géométries par rapport aux objets réels, la validation expérimentale demeure in fine le moyen ultime d'évaluation de la diffraction.

4.2.2 Les circuits équivalents

Les inclusions résonantes ont été d'abord étudiées via des modèles effectifs de permittivité et de perméabilité équivalentes. Pendry et al. [41], dans l'article présentant le magnétisme artificiel, propose une méthode d'étude des réseaux de particules résonantes. En partant d'une définition de la perméabilité magnétique reposant sur une intégrale des champs, les auteurs calculent le rapport entre le champ magnétique \mathbf{B} moyen et l'induction magnétique \mathbf{H} moyenne dans la cellule unité.

$$\mu_{eff} = \frac{\langle B \rangle}{\mu_0 \langle H \rangle} \quad (4.5)$$

avec μ_{eff} la perméabilité magnétique effective du métamatériau et $\langle \rangle$ le symbole désignant la moyenne sur la cellule unité. L'induction magnétique est déterminée par le calcul des courants dans la structure métallique. Dans le cas simple d'un réseau de cylindre conducteur, l'équation 4.6 fournit l'induction magnétique \mathbf{H} en fonction du courant par unité de longueur.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{j} - \frac{\pi r^2}{a^2} \mathbf{j} \quad (4.6)$$

avec a le paramètre de maille du matériau, r le rayon des cylindres et \mathbf{j} le courant par unité de longueur. Afin de déterminer les courants de surface et de déduire ainsi l'induction magnétique, il est nécessaire de s'intéresser à la structure de la particule : des capacités et inductances sont calculées à partir des données géométriques et de la conductivité du métal utilisé. Ces calculs sont à adapter à chaque type de géométries et dépendent de plusieurs paramètres et approximations. Par exemple, en considérant que le rayon du fil métallique est très petit devant sa longueur, on aboutit pour le SRR à une équation de type lorentzienne pour sa perméabilité magnétique [88].

$$\mu_{SRR} = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad (4.7)$$

avec F le taux de remplissage ou taux de charge du SRR, ω_0 une pulsation plasma dépendant des données géométriques du problème et Γ le facteur d'amortissement, dépendant du rayon du SRR et de la conductivité du métal. Ce type de loi de comportement est phénoménologiquement en accord avec les simulations et observations expérimentales, bien qu'il soit très difficile d'estimer avec précision les différents paramètres du modèle lorentzien. On peut citer comme principale limite la répartition non homogène du courant le long du fil métallique, rendant très ardue l'estimation des pertes Joules et

du facteur d'amortissement [89].

Afin d'obtenir une plus fine description des courants le long de la structure, la théorie des circuits Maxwelliens a été développée en 2003 par Mei [54] en se basant sur l'équation de Hallén. Cette méthode consiste à analyser les structures métalliques des métamatériaux de manière analogue à des circuits électriques en construisant une équation différentielle vérifiée par le courant. L'approche est appliquée à de nombreuses géométries de SRR et CSRR (Complementary Split-Ring Resonators) dans Baena et al. [57], qui donne également les schémas électriques équivalents. L'utilisation de cette méthode par Shen et al. [56] a permis de montrer dans le cas de SRR et d'anneaux conducteurs que le courant vérifie une équation de Helmholtz à une dimension. Les solutions prennent donc des formes simples qui dépendent des conditions aux limites.

Les différentes méthodes évoquées permettent de comprendre la phénoménologie de la résonance des métamatériaux en exploitant des analogies avec les circuits électriques dans l'approximation des régimes quasi-statiques. Pour chaque géométrie de résonateur, il est possible de développer, à la manière de Baena et al. [57], un modèle de circuit équivalent. Cependant, chaque géométrie doit être analysée indépendamment et il n'existe pas de principe universel régissant le comportement des particules résonantes. Nous tentons dans ce chapitre de développer une approche phénoménologique de la résonance des métamatériaux permettant de déduire des principes de bases de leur conception, quelle que soit la géométrie.

4.3 Interface métal-diélectrique courbée

Dans cette partie, l'objectif consiste à étudier la propagation des courants et des champs le long d'un tube métallique. Nous allons expliciter les équations de Maxwell dans un repère adapté, prenant en compte la géométrie du tube. Finalement, nous établirons des équations de propagation du courant le long du tube métallique. Ces équations nous permettront de mieux appréhender la physique sous-jacente et d'expliquer le comportement des méta-matériaux.

4.3.1 Description de la géométrie du fil métallique

Afin d'établir des équations portant sur les fils métalliques, nous devons dans un premier temps spécifier précisément le type de géométries que nous souhaitons traiter. Mathématiquement parlant, un fil métallique enroulé de sorte à former une spirale, un Split-Ring Resonator (SRR) ou une particule Omega constitue un tube. Ce type de géométrie est créée par l'extrusion d'une section circulaire de rayon R_1 le long d'une courbe dans l'espace.

Considérons une courbe $c(s)$ dans un paramétrage normal, le long de laquelle est réalisée l'extrusion. Dans le cas d'un SRR, la courbe $c(s)$ est un arc de cercle, tandis que

c'est une hélicoïde dans le cas du ressort, etc... Le vecteur tangentiel unitaire est défini par :

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{c}(s)}{ds} \quad (4.8)$$

Le plan normal à $\mathbf{c}(s)$ est le plan vectoriel engendré par la normale unitaire $\boldsymbol{\nu}(s)$ et le vecteur binormal $\mathbf{b}(s)$:

$$\boldsymbol{\nu}(s) = \frac{1}{\gamma(s)} \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{b}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \wedge \boldsymbol{\nu}(s)$$

avec $\gamma(s)$ la courbure de la courbe $\mathbf{c}(s)$. L'inverse de cette courbure est appelé rayon de courbure. Une paramétrisation possible du tube est donnée par :

$$\mathbf{X}(u, s, r) = \mathbf{c}(s) + r\cos(u)\boldsymbol{\nu}(s) + r\sin(u)\mathbf{b}(s) \quad (4.10)$$

Cette équation paramétrique est constituée de deux inconnues si on s'intéresse à la surface du tube : u et s . Cependant, les équations de Maxwell sont données dans un espace de dimension 3 et les opérateurs de dérivation spatiale ne peuvent être valides en l'état si on se restreint à une surface. Nous devons donc prendre en compte le rayon r comme un paramètre et non une constante. Ainsi, en faisant varier u , v et r nous sommes capable de décrire le volume inclus dans le tube et d'y écrire les équations de Maxwell. Le repère $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \mathbf{b}(s))$ constitue donc une base orthonormée directe naturelle pour la géométrie du tube.

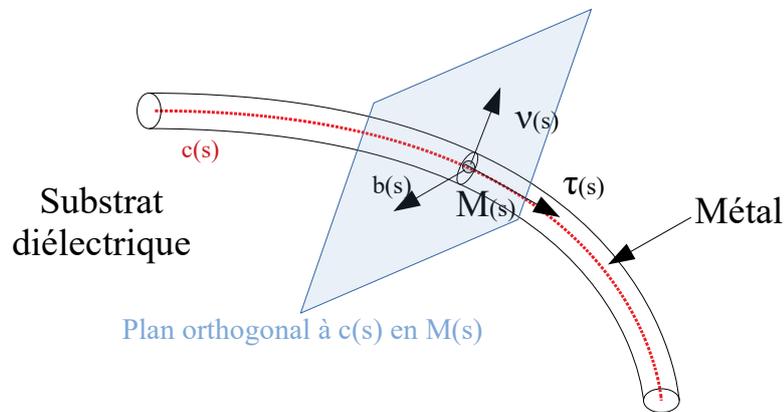


FIGURE 4.1 – Repère $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \mathbf{b}(s))$ utilisé pour décrire l'espace le long du tube.

Les métamatériaux les plus utilisés sont assimilables à des tubes métalliques : les courants qui produisent leur réponse électromagnétique se développent principalement en surface. Il nous faut déterminer un repère qui convienne à la description de cette surface. Nous cherchons donc à définir un repère de Frenet sur la surface du tube, permettant de définir une base composée de deux vecteurs tangentiels et d'un vecteur normal à la surface extérieure. On obtient ce repère en dérivant l'équation 4.10 par les différents paramètres.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s &= \frac{\partial \mathbf{X}(u, s, r)}{\partial s} = \boldsymbol{\tau}(s) + r \cos(u) \frac{\partial \boldsymbol{\nu}(s)}{\partial s} + r \sin(u) \frac{\partial \mathbf{b}(s)}{\partial s} \\
\mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{X}(u, s, r)}{\partial u} = -r \sin(u) \boldsymbol{\nu}(s) + r \cos(u) \mathbf{b}(s) \\
\mathbf{x}_r &= \frac{\partial \mathbf{X}(u, s, r)}{\partial r} = \cos(u) \boldsymbol{\nu}(s) + \sin(u) \mathbf{b}(s)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Nous venons de construire $(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_r)$ le repère de Frenet du tube dans l'espace. Ce repère nous permet d'écrire les équations dans un repère adapté au problème. Les vecteurs \mathbf{x}_s et \mathbf{x}_u sont tangents à la surface tandis que \mathbf{x}_r est normal. Afin de calculer les opérateurs gradients et divergence dans cette nouvelle base, nous devons être capables de calculer les dérivées spatiales. Pour ce faire, nous devons calculer les coefficients h_s , h_u et h_r définis par :

$$\begin{aligned}
h_s &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} \\
h_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \\
h_r &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ces coefficients peuvent être déterminés à condition de définir de manière plus précise la géométrie du système. Dans le cas général, $c(s)$ peut désigner n'importe quelle courbe dans l'espace, mais nous allons ici faire une hypothèse largement vérifiée dans la plupart des motifs d'inclusions métalliques : nous considérons que le rayon R_1 de la section circulaire est très inférieur à $\gamma(s)$, le rayon de courbure de $c(s)$, et ce sur toute sa longueur. Cette hypothèse nous permet de traiter une portion du tube en l'assimilant localement à une portion de tore de grand rayon R_2 . L'approximation nous sert uniquement à déterminer les coefficients h_i , nécessaires pour les calculs dans la base $(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_r)$.

En considérant la portion de tore présentée sur la figure 4.2, nous pouvons écrire $c(s)$ dans une base (x, y, z) adaptée où la courbe se trouve dans le plan (x, y) :

$$c(s) = R_2 \cos(s/R_2) \mathbf{x} + R_2 \sin(s/R_2) \mathbf{y} \tag{4.13}$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons déterminer le repère $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \mathbf{b}(s))$, repère de Frenet associé à $c(s)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}(s) &= -\sin(s/R_2) \mathbf{x} + \cos(s/R_2) \mathbf{y} \\
\boldsymbol{\nu}(s) &= -\cos(s/R_2) \mathbf{x} - \sin(s/R_2) \mathbf{y} \\
\mathbf{b}(s) &= \mathbf{z}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

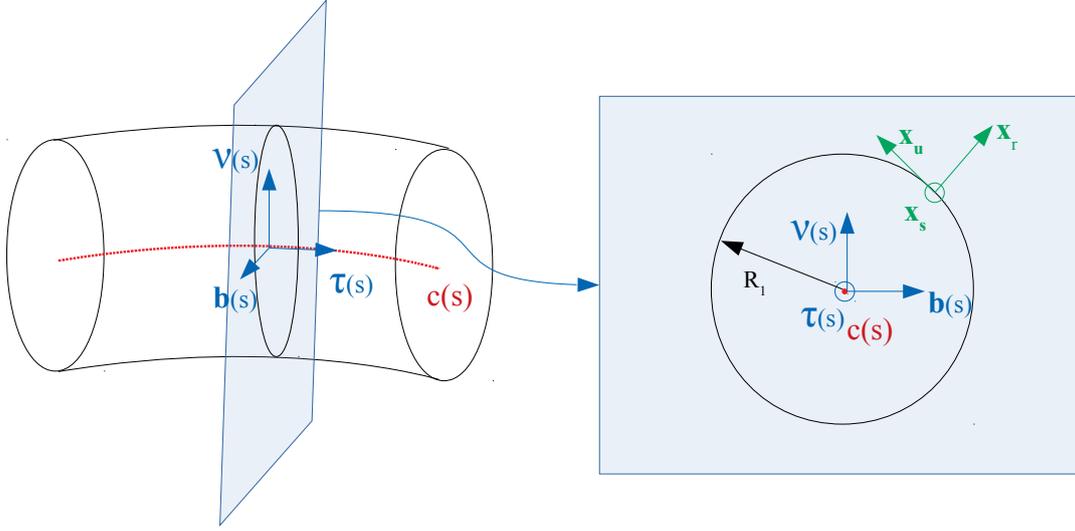


FIGURE 4.2 – Représentation des repères $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{\nu}(s), \mathbf{b}(s))$ et $(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_r)$ dans le cadre de l'approximation $R_1 \ll R_2$, (ie) on considère localement notre tube comme une portion de tore. Le repère en vert est une base pratique pour projeter les équations de l'électromagnétisme.

Nous pouvons alors définir notre repère de Frenet surfacique en fonction de x, y et z :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \left(\frac{r \cos(u)}{R_2} \sin(s/R_2) - \sin(s/R_2) \right) \mathbf{x} + \left(\cos(s/R_2) - \frac{r \cos(u)}{R_2} \cos(s/R_2) \right) \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_u &= r \sin(u) \cos(s/R_2) \mathbf{x} + r \sin(u) \sin(s/R_2) \mathbf{y} + r \cos(u) \mathbf{z} \\ \mathbf{x}_r &= \cos(u) \cos(s/R_2) \mathbf{x} + \cos(u) \sin(s/R_2) \mathbf{y} + \sin(u) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous disposons désormais du repère de Frenet exprimé dans un repère fixe. On remarque que dans l'expression du vecteur \mathbf{x}_s apparaissent des termes en r/R_2 : nous avons déterminé précédemment que le rayon R_1 de la section du tube est très petite devant R_2 . Les valeurs de r d'intérêt étant proches de R_1 , ces termes seront par conséquent négligés dans la suite des calculs. Nous nous ramenons ainsi à un repère cylindrique avec s l'analogie de z , u l'analogie de θ et r . Les coordonnées du repère de Frenet s'écrivent également dans la base (x, y, z) au moyen de dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial s} \mathbf{z} \\ \mathbf{x}_u &= \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{z} \\ \mathbf{x}_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial r} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nous pouvons donc par association entre les équations 4.15 et 4.16 déterminer chacune des dérivées partielles en jeu. Connaissant les dérivées partielles de (x, y, z) selon les coordonnées (s, u, r) , nous pouvons calculer les h_i sous l'hypothèse que $r \ll R_2$:

$$\begin{aligned} h_s &= 1 \\ h_u &= r \\ h_r &= 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les h_i sont donc les mêmes que ceux issus des coordonnées cylindriques sous l'hypothèse que R_1 est petit devant R_2 . Les paramètres s et r sont des longueurs exprimées en mètres tandis que u est un angle, d'où les unités obtenues pour les h_i . Nous avons donc défini un repère pratique permettant d'exprimer les équations de Maxwell le long du tube. Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel et laplacien scalaire peuvent alors être définis dans le repère $(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_r)$. Soient ϕ un champ scalaire et \mathbf{F} un champ vectoriel :

$$\text{grad}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial s} \mathbf{x}_s + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial u} \mathbf{x}_u + \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{x}_r \quad (4.18)$$

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_s}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} \quad (4.19)$$

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r F_u}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial u} \right) \mathbf{x}_s + \left(\frac{\partial F_r}{\partial s} - \frac{\partial F_s}{\partial r} \right) \mathbf{x}_u + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_s}{\partial u} - \frac{\partial F_u}{\partial s} \right) \mathbf{x}_r \quad (4.20)$$

$$\Delta(\phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (4.21)$$

4.3.2 Équations dans le repère de Frenet

L'objectif de cette section consiste à décrire le comportement d'une particule tubulaire dans une matrice diélectrique. Nous cherchons à obtenir des lois phénoménologiques universelles concernant cette classe de structure, et ne ferons donc pas intervenir d'autres hypothèses que celle d'une structure tubulaire. Nous avons mis en place un repère permettant aux abords de l'interface métal-diélectrique de décrire l'espace le long du tube. Nous considérons donc que les phénomènes d'intérêts que sont les apparitions de sources, courants et charges, sont confinés à cette zone.

Nous avons mis en évidence dans la section précédente que le repère de Frenet tubulaire est localement identique à un repère en coordonnées cylindriques, sous l'hypothèse que le rayon de la section est très petit devant les rayons de courbures principaux du tube. L'utilisation d'un tel repère nous permet de développer des équations similaires à celles établies pour les cylindres conducteurs de longueur finie.

Nous prenons comme relations constitutives l'équation 4.22.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$$

Nous intégrons les sources libres en régime harmonique et les sources liées dans les coefficients ϵ et μ et nous considérons qu'il n'y a pas de source libre statique. Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

A partir des équations écrites sous cette forme, on établit l'équation de propagation du champ d'induction électrique \mathbf{D} . Pour ce faire, on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.24)$$

En utilisant les relations constitutives, l'équation de Maxwell-Ampère peut se réécrire en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.25)$$

En combinant 4.25 avec 4.24, on obtient l'équation de propagation du champ électrique, dont les sources sont prises en compte dans ϵ et μ .

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.26)$$

Nous nous intéressons particulièrement à la composante de champ électrique selon \mathbf{x}_s , car c'est la composante qui traduit le déplacement de charges longitudinalement. En développant le laplacien scalaire de la composante selon \mathbf{x}_s grâce à l'équation 4.21, nous obtenons l'équation 4.27.

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial s^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_s}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_s}{\partial r} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_s}{\partial t^2} = 0 \quad (4.27)$$

Nous aboutissons à une équation de propagation dépendant des trois variables spatiales et du temps. L'équation est similaire à celle d'un cylindre conducteur infini, mais nous ne pouvons pas, dans le cas présent, supposer une invariance du champ dans la direction de \mathbf{x}_s . Aucun des termes de l'équation 4.27 ne peut donc être négligé. Nous allons maintenant chercher à résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables.

4.3.3 Résolution par séparation des variables

Nous cherchons une solution à E_s en postulant que les courants s'écrivent comme le produit de trois fonctions spatiales et d'une fonction temporelle :

$$E_s(s, u, r, t) = S(s)U(u)R(r)T(t) \quad (4.28)$$

On remplace E_s dans l'équation 4.27 à l'aide du produit de fonctions décorréllées, puis nous procédons à une séparation des variables. Nous obtenons l'équation 4.29 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{S(s)} \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} + \frac{1}{R(r)U(u)} \left(\frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} + U(u) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{U(u)}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) \\ - \frac{1}{T(t)} \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Nous avons regroupé en trois termes l'équation de propagation du champ électrique. Le premier terme dépend uniquement de s , le second dépend de r et de u , tandis que le dernier ne dépend que du temps. Chacun de ces termes est constant, nous posons donc k , k_r et k_s des constantes telles que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{S(s)} \frac{\partial^2 S(s)}{\partial s^2} &= -k_s^2 \\ \frac{1}{R(r)U(u)} \left(\frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} + U(u) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{U(u)}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) &= -k_r^2 \\ - \frac{1}{T(t)} \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= -k^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

La deuxième équation de 4.30 permet d'obtenir une équation de Helmholtz cylindrique :

$$\frac{1}{U(u)} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} + \frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + r^2 k_r^2 = 0 \quad (4.31)$$

Ayant isolé un terme dépendant de u , nous pouvons ensuite poser n tel que :

$$\frac{1}{U(u)} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} = -n^2 \quad (4.32)$$

La constante n est un entier relatif étant donnée la périodicité spatiale de la fonction U [90]. Finalement, l'équation de Helmholtz cylindrique prend la forme d'une équation de Bessel :

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + R(r) (r^2 k_r^2 - n^2) = 0 \quad (4.33)$$

La résolution de cette équation de Bessel se fait traditionnellement en distinguant le milieu dans lequel on se trouve. Afin d'obtenir une dérivée nulle au coeur du brin métallique en $r = 0$, la solution se met sous la forme d'une fonction de Bessel de première espèce J_n dans le métal. Dans le diélectrique, les conditions d'annulation à l'infini permettent d'écrire la solution comme une fonction de Hankel. Le détail des solutions ne nous intéresse pas ici, nous pouvons cependant retenir que la propagation existe dans la direction radiale du brin. Les constantes de propagation dans le métal $k_{r,m}$ et dans le diélectrique $k_{r,d}$ dépendent des propriétés des milieux respectifs. La partie imaginaire négative de la permittivité dans le métal induit des pertes importantes et donc une diffusion de l'énergie sur une longueur caractéristique courte. Dans un diélectrique ayant des pertes plus raisonnables, les ondes peuvent se propager sur des longueurs caractéristiques bien plus grandes.

$$\begin{aligned} R_m(r) &= J_n(ik_{r,m}r) \\ R_d(r) &= H_n(k_{r,d}r) \end{aligned} \quad (4.34)$$

avec R_d la fonction R dans le diélectrique, R_m la fonction R dans le métal, H_n la fonction de Hankel, représentant une onde se propageant radialement dans le diélectrique. Cette fonction s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce.

Dans la direction longitudinale, l'équation 4.30 est une équation de Helmholtz qui nous permet d'écrire la fonction S dans le métal et dans le diélectrique comme la somme d'une onde se propageant dans le sens des s croissants et d'une onde se propageant dans le sens des s décroissants.

$$\begin{aligned} S_m(s) &= S_m^+ e^{-jk_{s,m}s} + S_m^- e^{+jk_{s,m}s} \\ S_d(s) &= S_d^+ e^{-jk_{s,d}s} + S_d^- e^{+jk_{s,d}s} \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec ici encore les indices d et m désignant respectivement métal et diélectrique.

4.3.4 Équation des modes de surface

A l'interface entre le métal et le diélectrique, la condition de continuité du champ électrique nous impose :

$$S_m^+ e^{-jk_{s,m}s} + S_m^- e^{+jk_{s,m}s} = S_d^+ e^{-jk_{s,d}s} + S_d^- e^{+jk_{s,d}s} \quad (4.36)$$

On en déduit l'égalité entre les constantes des deux milieux :

$$k_{s,m} = k_{s,d} = k_s \quad (4.37)$$

A l'aide de la relation 4.30 dans le diélectrique, nous pouvons alors écrire :

$$k_s^2 + k_{r,d}^2 = k_0^2 \epsilon_d \quad (4.38)$$

Nous cherchons à déterminer des modes se propageant à l'interface métal-diélectrique :

ainsi, dans ces conditions, nous faisons l'hypothèse que la constante de propagation radiale $k_{r,d}$ est négligeable dans le diélectrique devant la constante de propagation longitudinale k_s . Cette hypothèse nous conduit à une relation de dispersion simple :

$$k_s = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_d} \quad (4.39)$$

Dans le métal, nous pouvons faire l'approximation classique consistant à considérer que les variations normales à la surface sont très grandes devant les variations tangentielles [91]. Ceci est dû à l'absorption très rapide des champs à l'interface. L'équation 4.30 appliquée dans le métal donne :

$$k_{r,m} = k_0 \sqrt{\epsilon_m} \quad (4.40)$$

Ayant intégré les sources libres dans la permittivité du métal, nous pouvons lier la conductivité σ_m à la permittivité ϵ_m :

$$\epsilon_m = -\frac{j\sigma_m}{\epsilon_0\omega} \quad (4.41)$$

Dans l'équation 4.41, nous avons considéré que les effets des charges liées sont négligeables au regard des charges libres. Nous obtenons donc $k_{r,m}$:

$$k_{r,m} = \frac{i-1}{\delta} \quad (4.42)$$

où δ est l'épaisseur de peau définie dans l'équation 4.43.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} \quad (4.43)$$

4.3.5 Résonance de corde vibrante

Nous avons déterminé l'allure du champ électrique se propageant le long de la structure métallique. Dans le métal, nous considérons que le courant et le champ électrique sont proportionnels et que le lien de l'un à l'autre se fait grâce à la conductivité, dans l'équation 4.44.

$$\mathbf{J} = \sigma_m \mathbf{E} \quad (4.44)$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous écrivons J_s le courant longitudinal dans le métal. A partir de la solution S_m dans l'équation 4.35, nous pouvons écrire J_s grâce à l'équation 4.44 comme la somme d'une onde se propageant dans le sens des s croissants et d'une onde se propageant dans le sens des s décroissants, :

$$J_s = J_s^+ e^{-jk_s s} + J_s^- e^{jk_s s} \quad (4.45)$$

Nous faisons maintenant l'hypothèse communément faite dans l'étude des antennes [92], que le courant s'annule aux extrémités. Les conditions limites en $s = 0$ et en $s = L$ permettent de déterminer une relation entre les constantes J_s^+ et J_s^- .

$$J_s^- = J_s^+ \quad (4.46)$$

Le courant J_s peut alors s'écrire comme une somme de modes stationnaires :

$$J_s = \sum_{n=1}^{+\infty} J_n \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \quad (4.47)$$

avec J_n l'amplitude du n^{eme} mode. L'existence de ce mode stationnaire est vérifiée sous la condition d'égalité entre la constante de propagation k_s et la constante des modes propres :

$$k_s = \frac{n\pi}{L} \quad (4.48)$$

L'équation 4.48 nous permet finalement de trouver la pulsation d'apparition du n^{eme} mode propre :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L\sqrt{\epsilon_d}} \quad (4.49)$$

Une condition similaire est trouvée pour la longueur d'onde $\lambda_{n,0}$ dans le vide du n^{eme} mode propre :

$$\lambda_{0,n} = \frac{2L\sqrt{\epsilon_d}}{n} \quad (4.50)$$

Dans l'air, avec une permittivité relative égale à 1, ce modèle prédit l'apparition d'une première résonance pour une longueur d'onde deux fois supérieure à la longueur curviligne du tube. Des résonances peuvent apparaître pour tous les multiples entiers de la première pulsation de résonance.

En conclusion de cette section, nous pouvons résumer les différents modes selon les directions du repère de Frenet. Dans la direction radiale, nous avons des modes propagatifs dans le diélectrique et diffusifs dans le métal tandis que dans la direction longitudinale, nous avons des modes stationnaires pouvant faire apparaître des résonances. La validité de ce modèle dépend des conditions aux limites : nous avons considéré le courant nul aux extrémités du tube. Des écarts à ce modèle peuvent également apparaître si le rayon de la section n'est plus négligeable devant les rayons de courbure du tube.

4.4 Courants le long d'un SRR

Dans cette section, nous étudions les courants linéiques parcourant la surface d'une structure de type Split-Ring Resonator(SRR) au moyen de simulations réalisées sous COMSOL. Un SRR type constitué de cuivre est simulé en espace libre. La figure 4.3 nous donne la géométrie du SRR étudié, constitué d'une portion de tore. Afin de décrire correctement les courants à la surface du métal, un maillage de couche limite très précis a été réalisé. Une représentation de ce maillage est donnée sur la figure 4.4.

Nous avons réalisé une simulation à 2.1GHz, une fréquence proche de la première fréquence de résonance du SRR. Nous envoyons une onde plane progressive polarisée linéairement, dans une polarisation naturelle d'excitation : le champ électrique est orienté

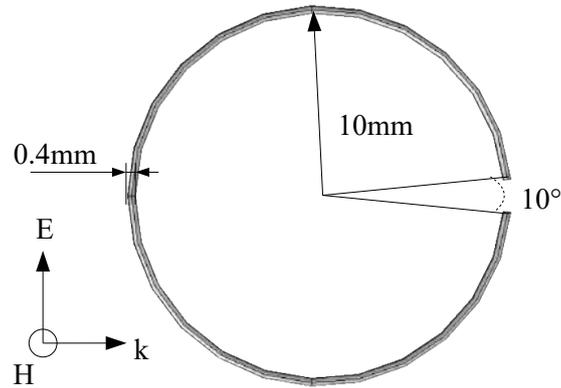


FIGURE 4.3 – Géométrie du SRR utilisé dans cette étude : il est constitué d’une portion de tore couvrant un secteur angulaire de 350° , de grand rayon 10mm et de petit rayon 0.2mm. Afin de vérifier l’hypothèse faite sur les courbures dans le début du chapitre, le rapport du grand rayon sur le petit rayon est très important.

dans la direction du gap, le champ magnétique est orienté selon la normale au plan du tore. Des cartes de champ sont données à la figure 4.5, montrant l’intensité du champ électrique et du champ magnétique. On observe que le champ électrique est à son maximum autour du gap tandis que le champ magnétique est maximal à l’opposé. Les champs électrique et magnétique traduisent la présence respectivement des charges et des courants sur le SRR. Les charges s’accumulent aux extrémités du tube, tandis que le courant semble plus fort au milieu du tube.

L’extraction du courant est une opération délicate car le maillage ne collant pas parfaitement à la géométrie, de très fortes fluctuations qui ne sont que des artefacts de simulations apparaissent. Ces fluctuations sont visibles sur la figure 4.6 et rendent impossible l’extraction du courant sur des lignes géométriques. Lors d’une extraction le long d’une arête du SRR ou le long d’une courbe paramétrée en 3D, de très faibles imprécisions spatiales ont un impact très important sur la valeur des courants. En effet, à proximité de l’interface entre l’air et le métal, les gradients de courant sont extrêmement élevés.

Afin de pallier ce problème, nous avons développé une approche permettant une extraction du courant sans avoir recours à une estimation point à point le long d’une arête géométrique ou d’une courbe paramétrée dans l’espace. Nous avons décidé de réaliser une évaluation indirecte du courant basée sur l’extraction du champ magnétique et l’utilisation du théorème d’Ampère :

$$\int_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \quad (4.51)$$

Avec \vec{B} le champ magnétique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et I_{enl} le courant enlacé par le contour fermé C . En réalisant des extractions du champ magnétique sur

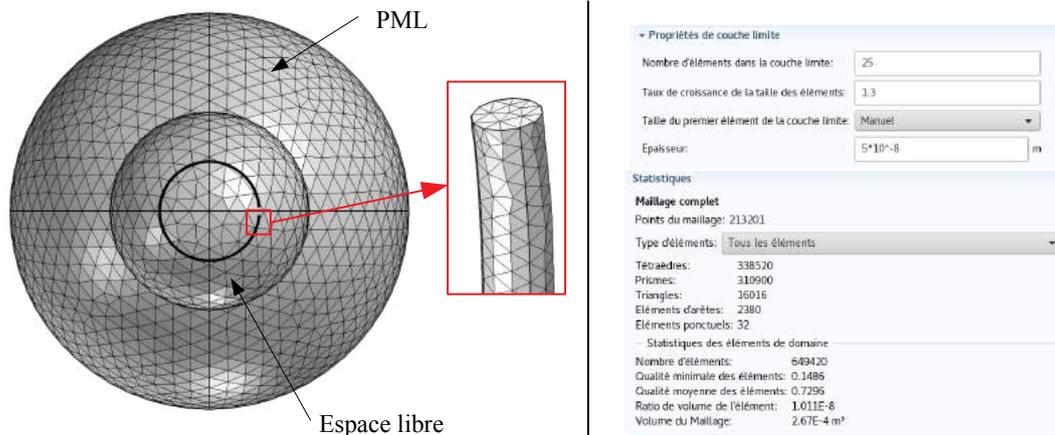


FIGURE 4.4 – Maillage du SRR utilisé pour le cas d'étude. L'épaisseur de peau est maillée très finement afin de rendre compte des phénomènes de diffusion sur de très courte distance dans le conducteur.

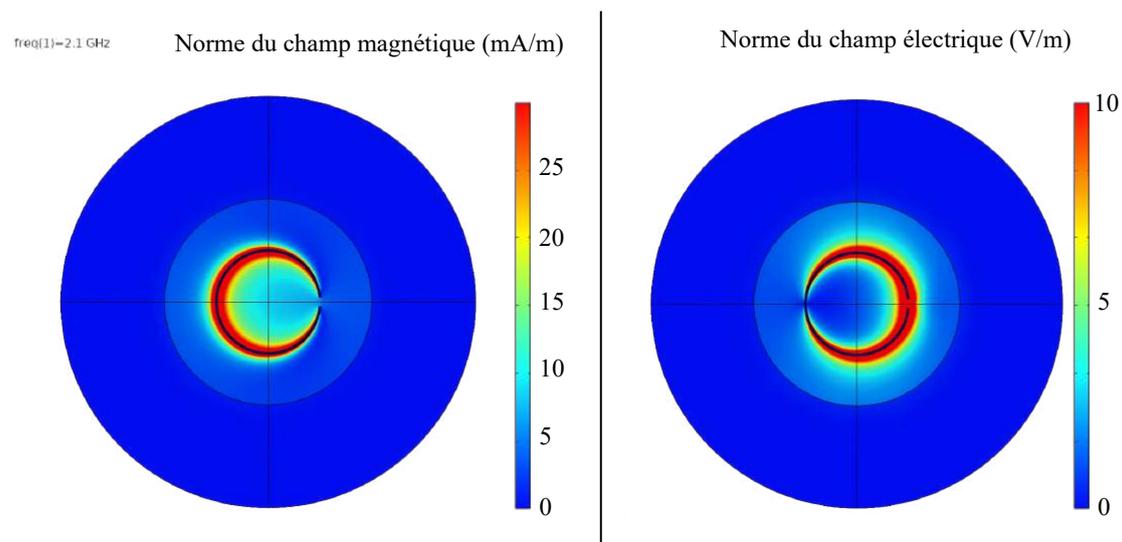


FIGURE 4.5 – Cartes des champs électriques et magnétiques issus de la simulation d'un SRR en espace libre soumis à une onde plane polarisée rectiligne à 2.1GHz. Les zones à forte intensité de champ trahissent la présence des sources.

des contours proches du SRR, il est possible de remonter avec précision à la valeur du courant longitudinal parcourant le fil métallique sur toute sa longueur. Nous choisissons 4 courbes 3D d'extraction du champ magnétique, constituées chacune de 1000 points de mesure. Nous travaillerons donc par la suite avec un courant non pas volumique mais intégré dans les directions radiale (paramètre r) et orthoradiale (paramètre u). Les courbes le long desquelles est extrait le champ magnétique sont disposées à une distance

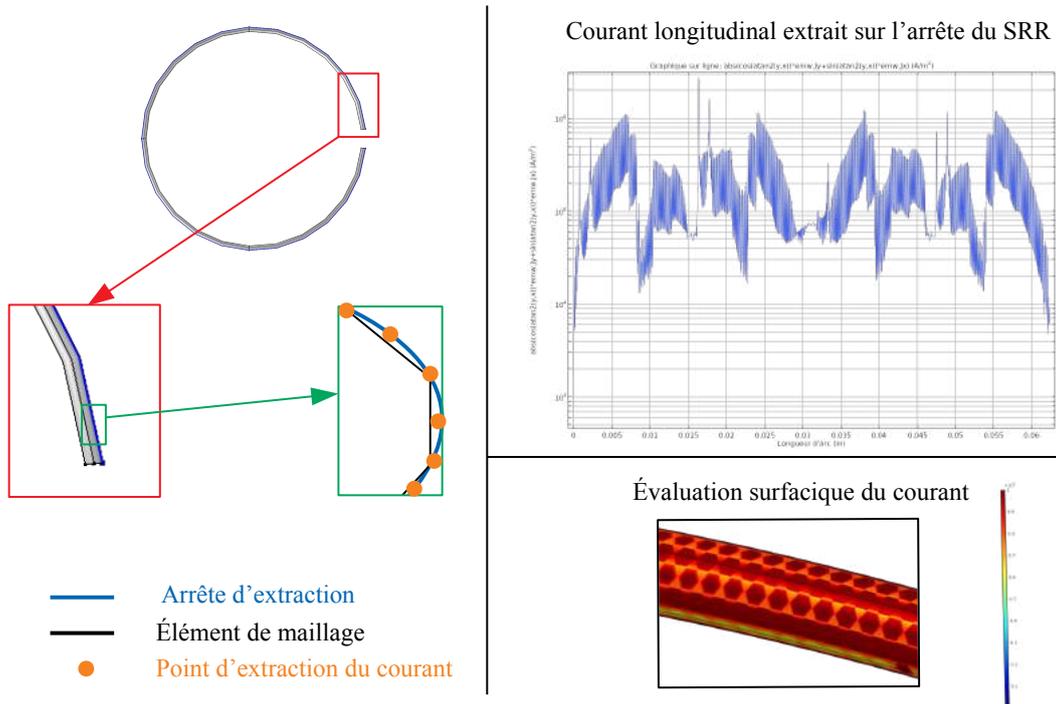


FIGURE 4.6 – L'extraction du courant est problématique avec les outils COMSOL. Le maillage n'étant qu'une approximation de la géométrie, les évaluations sur courbes paramétrées et arêtes sont très bruitées. Les cartes de champ sur la surface font apparaître des taches correspondant aux points du maillage.

de 0.1mm de la surface métallique afin de ne pas trop subir le bruit dû à la discrétisation du maillage.

Nous discrétisons l'intégrale de l'équation 4.51 afin de calculer le courant :

$$I_{enl}(s) = \frac{\pi r_{ext}}{2\mu_0} \sum_{i=1}^4 B_i(s) \quad (4.52)$$

avec r_{ext} le rayon du cercle décrit par les points d'extraction et $B_i(s)$ la valeur du champ magnétique extraite sur la i^{eme} courbe d'extraction. Connaissant la valeur linéique du courant en fonction de l'abscisse curviligne, nous réalisons la décomposition en modes propres, grâce à une projection sur la base des sinus. Il faut cependant noter que l'hypothèse faite sur les conditions limites du courant aux extrémités n'est pas tout à fait exacte, le résultat présenté figure 4.7 issu du calcul par le théorème d'Am-père donne une valeur non nulle en 0 et en 1. Un résultat similaire peut être trouvé en utilisant les méthodes d'intégrales de surface [93]. Afin de ne pas perturber la décomposition en modes propres basée sur l'hypothèse de nullité de courant aux extrémités, nous avons soustrait la valeur en 0 à l'ensemble du courant. Cette valeur représente 2.5% de l'amplitude maximale du courant, l'approximation semble donc raisonnable. L'allure du courant linéique est donnée en fonction de l'abscisse curviligne réduite dans la figure

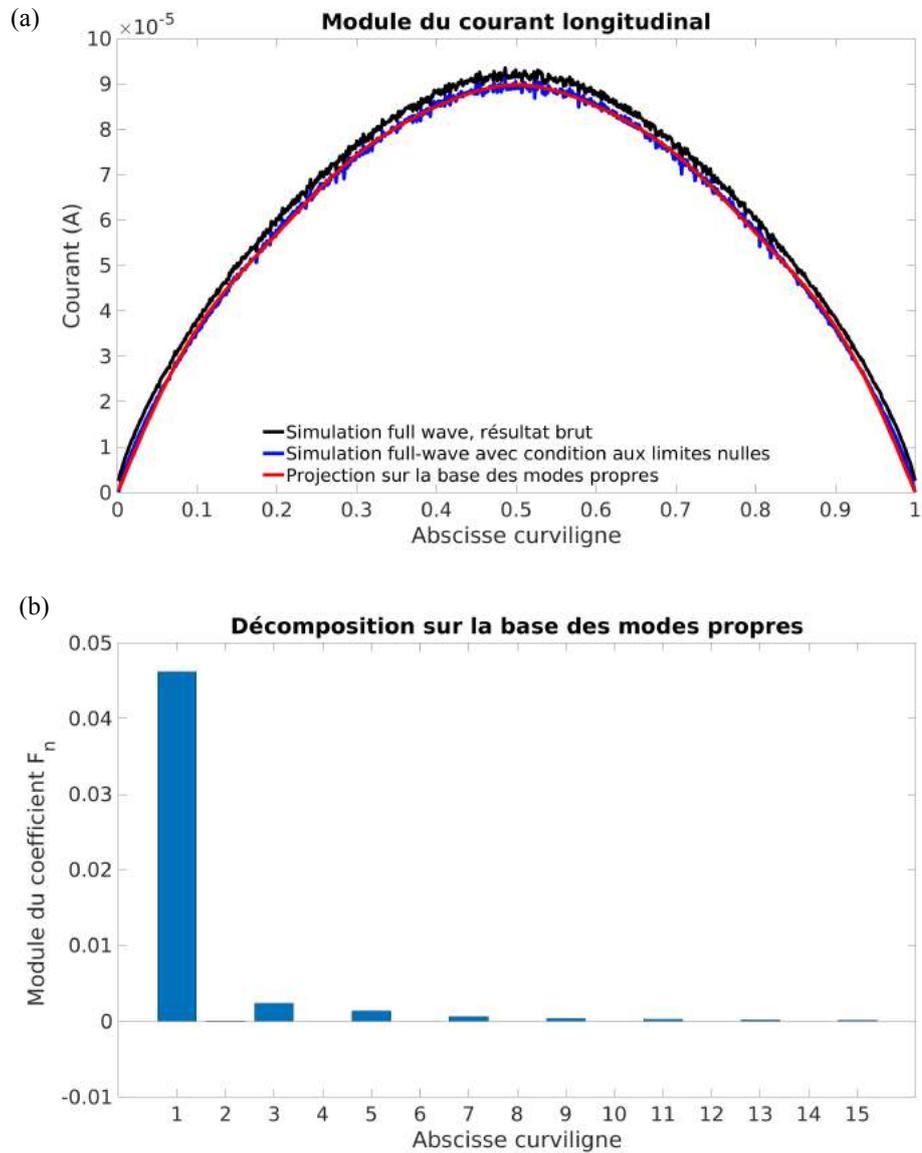


FIGURE 4.7 – (a) Courant linéique évalué à l’aide du théorème d’Ampère en extrayant les valeurs du champ magnétique à proximité du SRR. Le courant n’étant pas tout à fait nul aux extrémités, nous avons soustrait la valeur aux extrémités à l’ensemble des valeurs avant de réaliser la projection sur la base des modes propres. (b) Coefficients associés au poids relatif de chacun des modes propres du courant sur le SRR. On remarque que 2.1GHz, est une valeur proche de la première résonance théorique du SRR, le premier mode est donc prépondérant. Les modes d’ordres pairs sont nuls en raison de la symétrie de la géométrie.

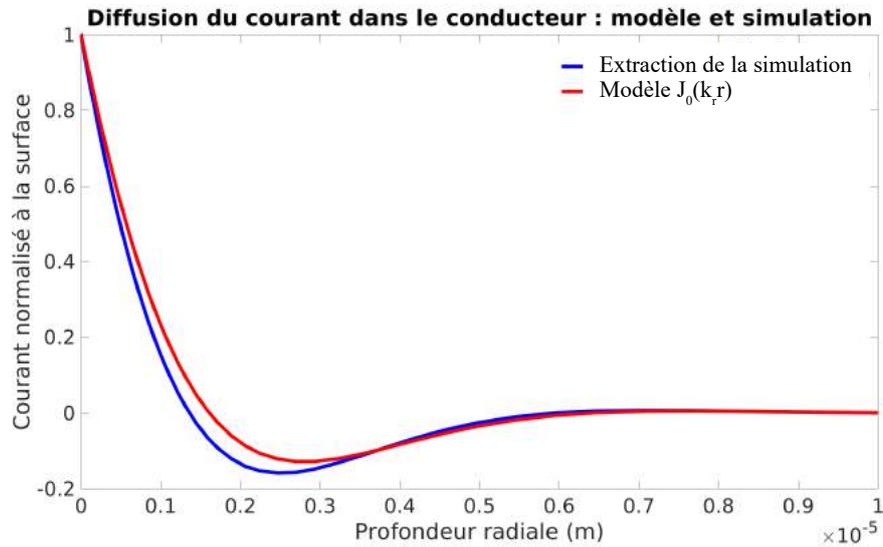


FIGURE 4.8 – Courant J_s extrait de la simulation dans la profondeur du tube métallique (en bleu). En rouge, allure du courant tel que décrit par l'équation de la diffusion. Le deux courants sont normalisés à la surface.

4.7 (a) ainsi que son modèle basé sur la décomposition en modes propres. Le module des coefficients issus de la décomposition en modes propres sont donnés dans la figure 4.7 (b).

On remarque qu'à cette fréquence de 2.1GHz, le premier mode est prépondérant, on se situe à proximité de la première résonance du SRR. Son poids relatif est de 94% tandis que celle du troisième mode est d'environ 3%. La contribution des autres modes est négligeable : en particulier, les modes d'ordre pairs sont tous nuls, traduisant un effet de la symétrie centrale du SRR. Cette observation valide dans le cas du SRR l'hypothèse de symétrie des courants permettant d'obtenir l'équation de Hallén à partir de l'équation de Pocklington.

Il convient maintenant de vérifier que la dépendance radiale du courant est bien en accord avec le modèle que nous avons développé. Dans la figure 4.8, une extraction du courant le long de la direction radiale est comparée à son allure théorique telle qu'établie dans ce chapitre. On remarque dans la figure 4.8 une bonne correspondance entre l'allure théorique issue de l'équation de l'équation de Bessel 4.33 et le courant extrait de la simulation.

4.5 Etude paramétrique d'un SRR

Nous réalisons dans cette partie une étude paramétrique du SRR afin de tester la validité du modèle phénoménologique que nous avons établi.

4.5.1 Impact de la longueur curviligne

Nous avons établi dans notre modèle que la longueur curviligne L du résonateur est un paramètre influant sur la pulsation de résonance. Afin de vérifier la validité de ce modèle, nous réalisons la simulation d'un SRR en espace libre et cherchons à déterminer l'impact de L sur sa première résonance.

Si nous prenons comme substrat l'air, la relation liant L à la première pulsation de résonance est donnée par l'équation 4.53.

$$\omega_0 = \frac{c\pi}{L} \quad (4.53)$$

Qui peut être réécrite :

$$\lambda_0 = \frac{L}{2} \quad (4.54)$$

avec λ_0 la longueur d'onde dans le vide de l'excitation. Nous avons simulé le SRR décrit par la figure 4.3 en appliquant un coefficient de mise à l'échelle que nous faisons varier dans une étude paramétrique. Nous réalisons un balayage de ce coefficient entre les valeurs 0.5 et 1.5. Une étude en fréquence est alors menée entre 0.7 et 2.8GHz afin de repérer pour chaque dimension de SRR la fréquence de résonance.

La norme du champ électrique diffusé est extraite au niveau d'un point à proximité du SRR, critère neutre permettant de distinguer la fréquence à laquelle chaque structure sera la plus visible. Sur la figure 4.9, ces extractions sont données pour les différentes valeurs du coefficient d'homothétie. Les longueurs curvilignes L correspondant à chaque valeur du coefficient sont indiquées pour chaque courbe.

La figure 4.10 donne pour chaque cas d'étude la fréquence de résonance obtenue par simulation ainsi que la fréquence attendue par notre modèle. La correspondance entre les deux courbes est bonne pour le SRR. Des observations similaires ont été rapportées par Serdyukov et al. [50] concernant la longueur d'onde à la résonance pour des Omega-particules. Il semble donc valide dans cette configuration de considérer la résonance de SRR de manière analogue à une résonance de corde vibrante.

4.5.2 Impact de la permittivité du substrat

Nous avons déterminé l'impact de la longueur curviligne sur la fréquence de résonance avec l'air comme substrat. Nous vérifions désormais l'impact d'une permittivité non-unitaire sur la résonance. D'après l'équation 4.49 et en considérant que la permittivité du métal est très grande devant celle du substrat, nous avons comme condition à la résonance :

$$\omega_0 = \frac{c\pi}{L\sqrt{\epsilon_d}} \quad (4.55)$$

avec ϵ_d la permittivité relative du diélectrique utilisé comme substrat. L'équation peut

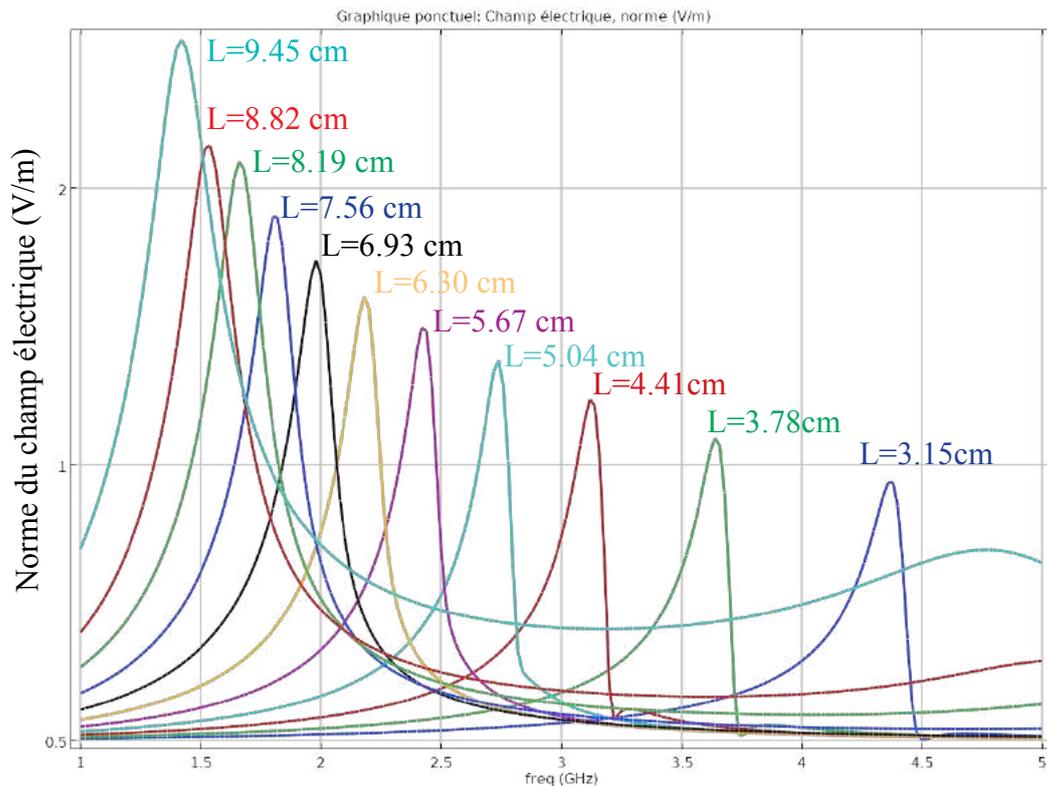


FIGURE 4.9 – Norme du champ électrique diffusé extrait en un point à proximité du SRR. La valeur de ce champ permet de discerner la fréquence de résonance pour les différentes géométries de SRR. Pour chaque courbe est indiquée la longueur curviligne du SRR correspondant. On remarque que la fréquence de résonance croît à mesure que la longueur curviligne du SRR diminue, comme attendu.

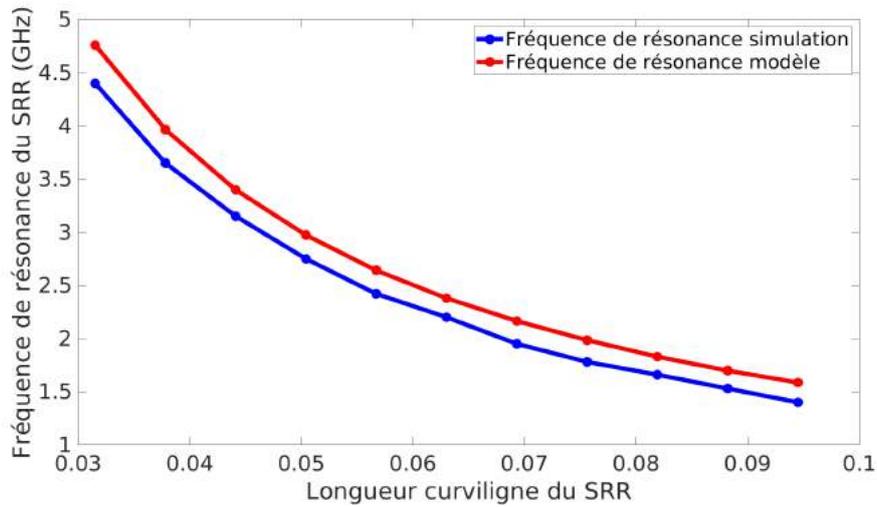


FIGURE 4.10 – Fréquence de résonance du SRR en fonction de sa longueur curviligne. On observe une bonne corrélation entre la fréquence de résonance prédite par l’approche phénoménologique et la fréquence issue de la simulation. Dans les deux cas, cette fréquence est inversement proportionnelle à la longueur curviligne.

être réécrite du point de vue de la longueur d’onde :

$$\lambda_0 = \frac{L\sqrt{\epsilon_d}}{2} \quad (4.56)$$

Afin de vérifier le modèle, nous réalisons à partir du SRR décrit par la figure 4.3 une étude paramétrique sur la valeur de la permittivité du substrat. La valeur de ϵ_d varie de 1 à 5 par pas de 0.5. La norme du champ électrique diffusé, extraite pour chaque valeur de permittivité étudiée, est montrée à la figure 4.11 et fait apparaître les résonances.

Nous relevons pour chaque permittivité la fréquence de résonance issue de la simulation afin de la comparer avec la fréquence calculée par le modèle. Les différentes valeurs sont comparées à la figure 4.12. Nous constatons ici encore une bonne correspondance entre la simulation et le modèle, avec une fréquence de résonance inversement proportionnelle à la racine de la permittivité relative du substrat.

4.5.3 Impact de la conductivité

L’impact de la conductivité sur les résonances de SRR a été étudié par Pendry et al. [41] dans son article présentant le magnétisme artificiel. La conductivité du métal utilisé dans la structure a un impact sur les pertes induites dans celle-ci. Une approche développée par Cummer et al. [89] s’intéresse à l’impact de la conductivité dans les SRR sur le facteur de qualité de la résonance.

Nous vérifions dans cette section l’impact qualitatif de la conductivité sur le facteur de

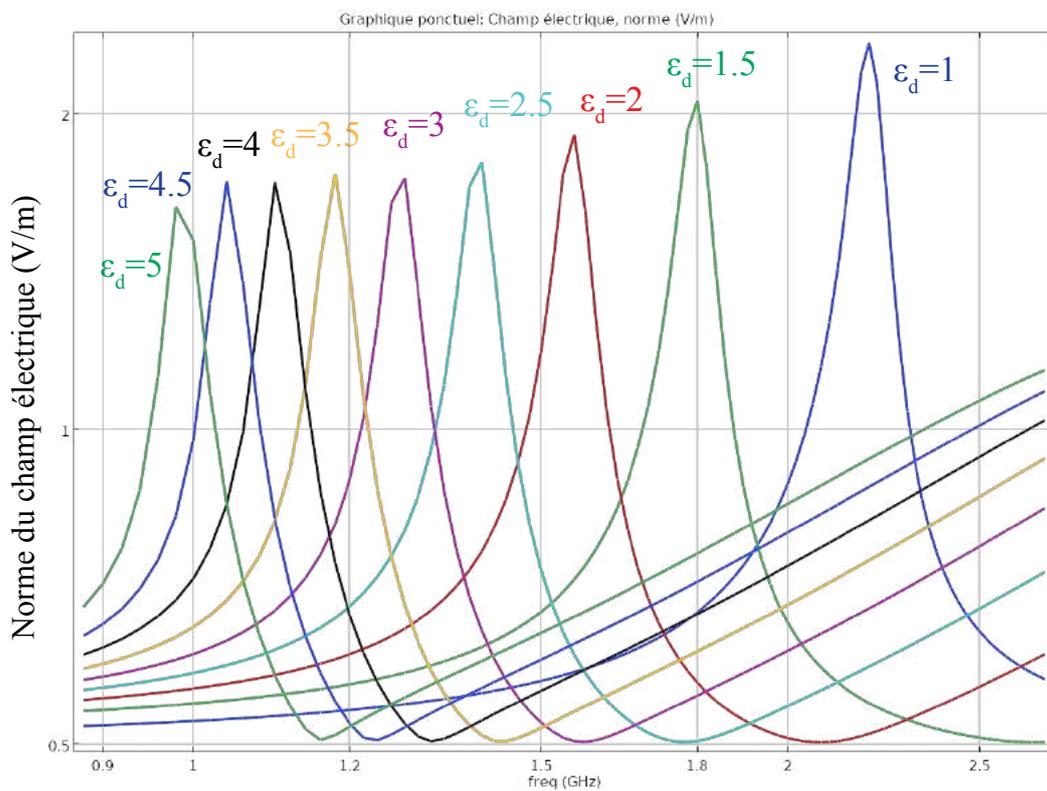


FIGURE 4.11 – Norme du champ électrique diffusé extrait en un point à proximité du SRR. La valeur de ce champ permet de discerner la fréquence de résonance pour les différentes valeurs de permittivité du substrat. La permittivité du substrat est indiquée pour chaque courbe. A mesure que la permittivité augmente, la fréquence de résonance diminue.

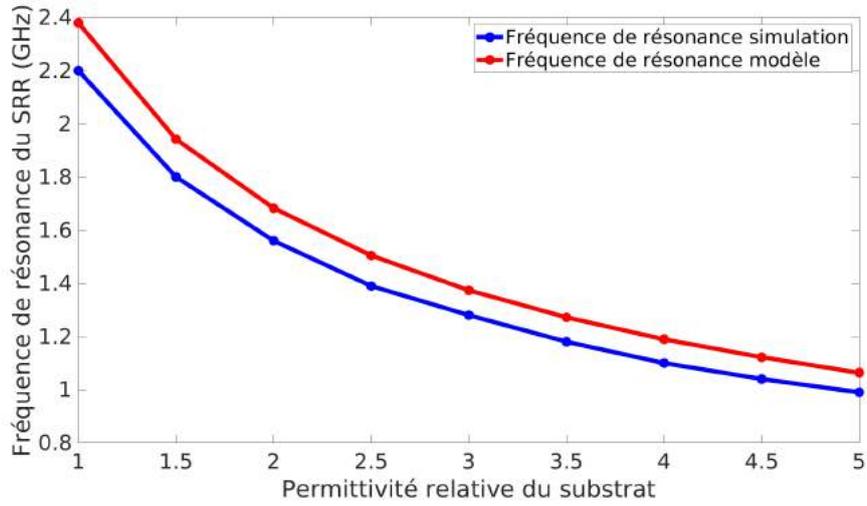


FIGURE 4.12 – Fréquence de résonance du SRR en fonction de la permittivité du substrat. On observe ici aussi une bonne corrélation entre la fréquence de résonance prédite par l’approche phénoménologique et la fréquence issue de la simulation. Dans les deux cas, cette fréquence est inversement proportionnelle à la racine de la permittivité relative.

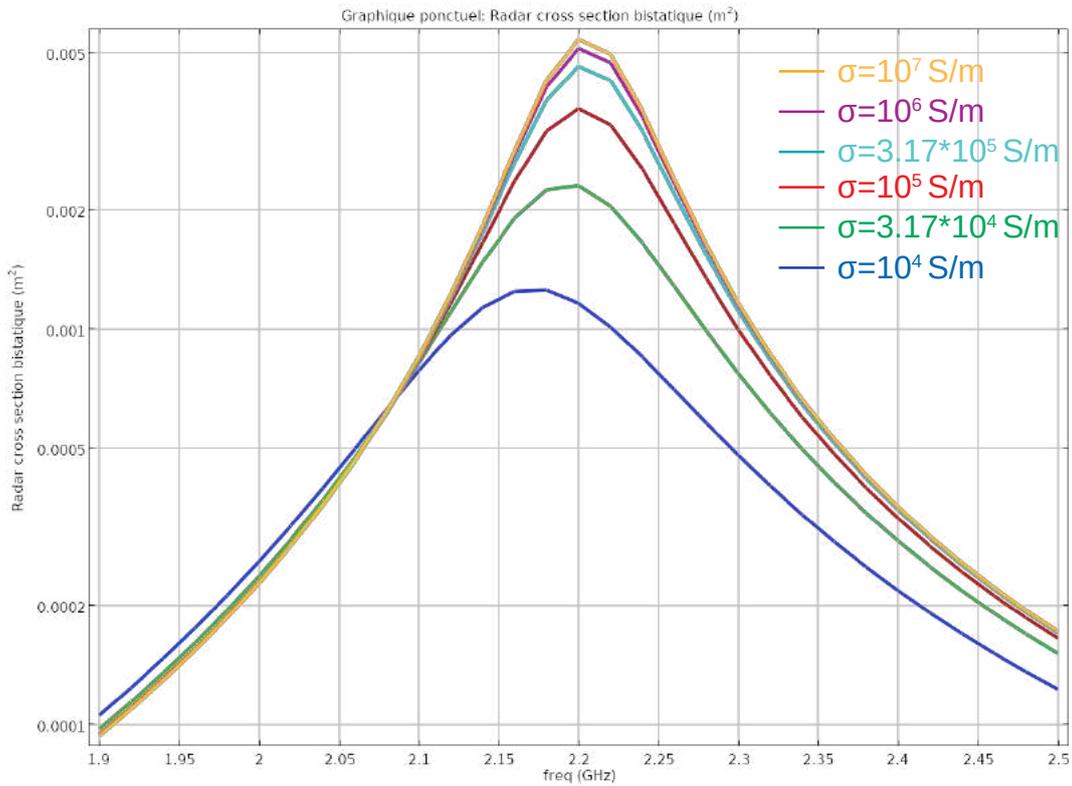


FIGURE 4.13 – Surface équivalente radar du SRR pour différentes valeurs de conductivité.

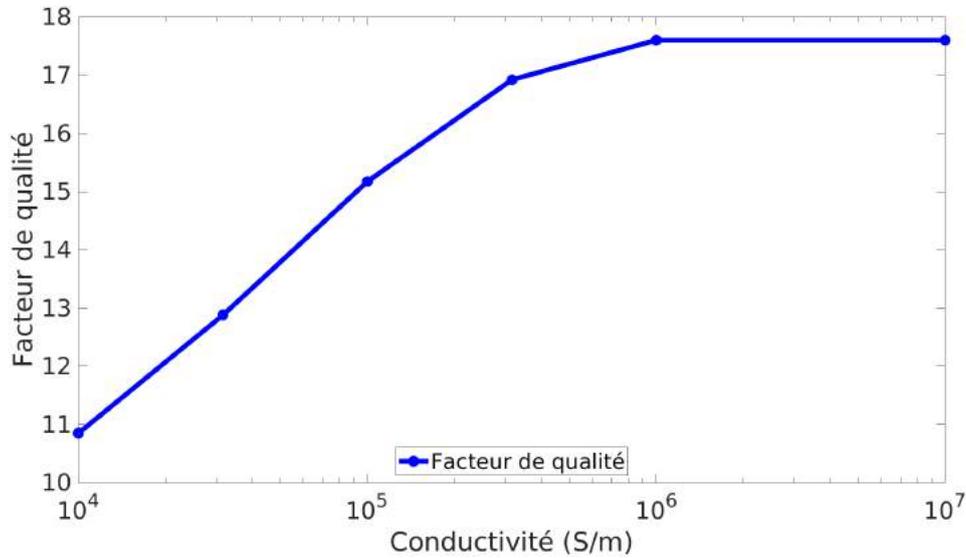


FIGURE 4.14 – Facteur de qualité de la résonance du SRR en fonction de la conductivité du fil. On observe une croissance du facteur de qualité à mesure que la conductivité augmente. A partir de $10^6 S/m$, il atteint un plateau.

qualité de la résonance sur les SRR. En utilisant à nouveau la géométrie de base décrite dans la figure 4.3, nous réalisons un changement dans le matériau utilisé. Plutôt que d'utiliser du cuivre, nous affectons un matériau vierge dont nous paramétrons la conductivité. Les simulations sont réalisées pour 6 valeurs distinctes de conductivité allant de 10^4 à 10^7 S/m. La surface équivalente radar est représentée sur la figure 4.13. Nous nous intéressons ici à la SER et non à une simple extraction de champ électrique pour avoir une mesure objective de l'amplitude de la résonance et de son facteur de qualité.

Nous constatons que le pic de résonance diminue avec la conductivité. Cette dernière n'a en revanche qu'un faible impact sur la fréquence de résonance, conformément à ce qui était attendu. Les facteurs de qualité sont représentés sur la figure 4.14 en fonction de la conductivité. Une baisse de la conductivité a pour conséquence l'augmentation des pertes dans le métal, et donc une diminution du facteur de qualité. Au delà d'une valeur seuil d'environ $10^6 S/m$, la conductivité n'impacte plus la réponse du SRR.

Le facteur de qualité d'une résonance traduit le rapport des puissances totales et dissipées dans le système :

$$Q = \frac{\text{Energie totale contenue dans le système}}{\text{Energie dissipée}} \quad (4.57)$$

Les pertes au sein de la structure du SRR peuvent être décomposées en deux catégories : les pertes joules, dues à la conductivité, et les pertes radiatives, dues au rayonnement. Des pertes diélectriques provenant du substrat peuvent également être observées si ϵ_d n'est pas réel.

Le palier observé sur la figure 4.14 à partir de $10^6 S/m$ correspond au facteur de qualité du SRR réalisé à partir d'un conducteur parfait. A partir de cette valeur de conductivité, on peut considérer que les pertes radiatives du SRR sont prépondérantes devant les pertes joules, négligeables. Ainsi, la conductivité n'a plus aucun impact au dessus de cette valeur. Cette valeur de $10^6 S/m$ est vraie dans cet exemple mais dépend des données géométriques du problème. Pour un autre type de résonateur, elle serait différente.

La conductivité présente donc un grand intérêt dans le design de métamatériaux. En effet, nous avons vu qu'elle permet de contrôler le facteur de qualité en ne modifiant que peu les caractéristiques de la résonance de la structure. Dans le cas de la réalisation d'ENZ et de MNZ, il peut être intéressant d'avoir des propriétés matériaux ne présentant pas de résonances très sélectives en fréquence. Un comportement plus doux peut permettre d'une part d'élargir la bande de fréquence d'intérêt de ce type de matériaux et d'autre part d'éviter les couplages trop importants entre particules voisines. Une discussion sur le sujet peut être trouvée dans Lerat et al. [94].

Cette étude de l'impact de la conductivité nous a amené à considérer des conducteurs moins bons que le cuivre et l'or dans nos travaux en général et dans le chapitre 5 en particulier.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché à établir une loi phénoménologique permettant de prévoir les fréquences de résonances des structures métalliques tubulaires. En nous basant sur une équation de Helmholtz dans des coordonnées de Frenet adaptées à l'étude d'un tube, nous avons décrit les modes propagatifs dans le substrat diélectrique, les modes diffusifs dans le métal ainsi que les modes stationnaires le long de la structure.

L'existence de modes stationnaires longitudinaux permet de prédire les phénomènes de résonance. Nous avons vérifié par une étude paramétrique la validité de notre approche phénoménologique. Elle prend bien en compte l'impact du substrat et de la longueur du tube. Nous avons également réalisé une étude portant sur la conductivité du métal constituant le résonateur. La diminution de cette conductivité entraîne une augmentation des pertes et donc une diminution du facteur de qualité de la résonance. Toutefois, ce paramètre permet de contrôler l'allure de la résonance sans en modifier significativement la fréquence.

La résonance de plus basse fréquence apparaît lorsque la longueur d'onde de l'excitation dans le substrat est égale au double de la longueur curviligne du résonateur. Ce principe permet d'envisager la miniaturisation des résonateurs en enroulant du fil métallique pour former des structures spirales. De telles structures ont été étudiées par Bilotti et al. [48]. La miniaturisation permet en particulier d'obtenir une meilleure homogénéisabilité du métamatériau. La problématique de l'homogénéisation est abordée dans le chapitre 5 de ce manuscrit.

5 Homogénéisation bi-anisotrope

Sommaire

5.1	Introduction	127
5.2	Homogénéisation	128
5.3	Décomposition du rayonnement lointain	130
5.3.1	Décomposition multipolaire des méta-atomes	131
5.3.2	Décomposition du premier ordre	132
5.3.2.1	Méthode	132
5.3.2.2	Application aux méta-atomes	134
5.3.3	Décomposition anisotrope du premier ordre	136
5.3.3.1	Application aux méta-atomes	138
5.3.3.2	Le cas du SRR	141
5.3.4	Décomposition d'ordre 2	143
5.3.5	Décomposition d'ordre n	146
5.4	Homogénéisation magnéto-diélectrique scalaire	148
5.4.1	Inversion de la relation de Clausius-Mossotti	149
5.4.2	Validation de la méthode	150
5.4.3	Limites du modèle	152
5.5	Homogénéisation bi-anisotrope	154
5.5.1	Méthode	154
5.5.2	Critère de chiralité	158
5.5.3	Application au cas de la spirale plate	159
5.5.4	Application du critère de chiralité	162
5.6	Conclusion	163

5.1 Introduction

L'obtention de propriétés de permittivité et de perméabilité sous-unitaires ne peut se faire qu'à l'aide de méta-matériaux résonants. La réalisation technique de ces réseaux peut être compliquée : en fonction de la fréquence de résonance recherchée et du degré de miniaturisation souhaité pour le méta-atome, des technologies de fabrication très avancées peuvent être nécessaires. Cependant, nous nous intéressons dans ce chapitre plutôt à la compatibilité de ces métamatériaux avec la structuration de revêtements d'OT. En effet, l'utilisation de tels matériaux complexifie grandement la structuration d'un revêtement d'invisibilité.

5.2 Homogénéisation

Nous avons vu dans le chapitre 1 de ce manuscrit que l'histoire des méta-matériaux est très liée à celle de l'homogénéisation. L'objectif de cette dernière consiste à affecter à un milieu composite, périodique ou amorphe, des propriétés électromagnétiques effectives. Les premières études de matériaux composites remontent à la seconde moitié du XIXème siècle, avec les travaux de Clausius et Mossotti, déterminant la constante diélectrique d'un milieu composite constitué de sphères métalliques en suspension à l'intérieur d'un diélectrique [95]. Cette loi permet d'établir un lien entre la polarisabilité des particules et la susceptibilité du matériau. En d'autres termes, la loi de Clausius-Mossotti permet de rendre compte du comportement microscopique des inclusions à partir du comportement macroscopique du métamatériau. Sous sa forme la plus classique, l'équation de Clausius-Mossotti s'écrit :

$$N\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_{CM} - 1}{\epsilon_{CM} + 2} \quad (5.1)$$

avec N la densité de particules, α la polarisabilité d'une particule et ϵ_{CM} la permittivité effective du milieu.

Lorentz et Lorenz déterminèrent quelques années plus tard une loi donnant l'indice optique d'un milieu en fonction de la polarisabilité des molécules qui le composent. La loi de Lorentz-Lorenz et la loi de Clausius-Mossotti sont équivalente et le lien entre les deux est aisé. Maxwell étudia également vers la fin du XIXème siècle le comportement de particules en suspension dans un milieu en cherchant à déterminer la conductivité d'un matériau constitué de particules conductrices dans un matériau également conducteur.

Ce n'est qu'au début du XXème siècle avec les travaux de Maxwell-Garnett [96], puis de Bruggeman [5] qu'apparaissent véritablement les premières lois d'homogénéisation. Ils mirent au point la théorie des milieux effectifs, permettant sous certaines hypothèses de déterminer les propriétés d'un ensemble de sphères métalliques réparties de manière aléatoire dans un milieu magnéto-diélectrique. La loi d'homogénéisation de Maxwell-Garnett, sous l'hypothèse que le milieu est faiblement chargé en particules, est donnée par :

$$\epsilon_{MG} = \frac{1 + \frac{1+2f}{3}(\epsilon - 1)}{1 + \frac{1-f}{3}(\epsilon - 1)} \quad (5.2)$$

avec f la fraction volumique de l'inclusion et ϵ la permittivité de l'inclusion. Cette loi est valide dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes, lorsque rapportés à l'échelle d'une particule, les champs électromagnétiques peuvent être considérés comme quasi-statiques. Si le milieu hôte des inclusions n'est pas constitué de vide mais d'un matériau diélectrique, la substitution $\epsilon \rightarrow \epsilon/\epsilon_h$ permet de retrouver à partir de l'équation 5.2 la permittivité équivalente, avec ϵ_h la permittivité du milieu hôte. Cette expression est démontrée en utilisant, entre autres, les théories de Lorentz-Lorenz et Clausius-Mossotti mentionnées précédemment.

La formule de Bruggeman est une généralisation de la loi de Maxwell-Garnett permettant de prendre en compte un mélange de plusieurs matériaux, quels que soient leurs taux de charge relatifs dans le milieu. On considère dans cette approche, souvent appelée estimation auto-cohérente, qu'il est possible de remplacer le milieu dans lequel se trouve la cellule représentative du matériau par le matériau de permittivité effective ϵ_{BG} . On traite donc le cas d'une sphère constituée de la cellule représentative diluée dans un milieu composé d'un diélectrique de permittivité effective. La permittivité de Bruggeman est donc donnée en résolvant l'équation suivante :

$$\sum_{n=1}^N f_n \frac{\epsilon_n - \epsilon_{BG}}{\epsilon_n + 2\epsilon_{BG}} = 0 \quad (5.3)$$

avec ϵ_{BG} la permittivité effective de Bruggeman, ϵ_n la permittivité intrinsèque du matériau n et f_n sa fraction volumique. D'autres méthodes basées sur des approches similaires ont émergé pendant le XX^{ème} siècle, telle que celle de Böttcher [97] et celle de Looyenga [98]. Il existe de très nombreuses lois de mélange permettant en fonction du cas d'étude de déterminer les propriétés effective du composite que l'on peut diviser en deux grandes catégories [99] : les approches directes (DSA) et indirectes (ISA) de la diffusion. Dans le cas de l'approche indirecte, on considère le champ diffusé par une particule comme une surintensité par rapport au champ local tandis que dans l'approche directe on traite le problème de diffusion comme un problème aux limites. Les approches de Maxwell-Garnett et Bruggeman sont des exemples de méthodes ISA, tandis que d'autres travaux [100] [101] [102] présentent des méthodes basées sur la résolution des équations de Maxwell dans le matériau composite. Ce calcul est le plus souvent numérique car il porte sur des géométries complexes.

Des approches spécifiques ont été développées avec l'avènement des méta-matériaux. En effet, la diversité de structures et de matériaux utilisés pour la création de composites électromagnétiques a contraint les chercheurs à se tourner vers des méthodes adaptées leur permettant d'extraire expérimentalement ou par la simulation des paramètres effectifs [103]. Parmi les méthodes les plus couramment rencontrées dans la littérature, on peut citer les méthodes par intégrale des champs [103] [94] ou encore la méthode de Nicolson-Ross-Weir et ses dérivées [104] [105] [106] [107]. Cette dernière méthode s'appuie sur l'utilisation des paramètres S afin de retrouver une permittivité et une perméabilité équivalente au matériau. Cette approche est très répandue et relativement facile à mettre en oeuvre tant expérimentalement que par la simulation.

Les méthodes basées sur les intégrales des champs ont été développées dans le but de définir des propriétés effectives ne dépendant pas de la géométrie ou de la composition des méta-matériaux. Avec le développement des Split-Ring Resonators et des inclusions résonantes abordées au chapitre 1, il a été nécessaire de s'affranchir des hypothèses faites par l'ensemble des méthodes classiques d'homogénéisation. On ne peut bien souvent plus considérer que l'on se trouve dans l'approximation quasi-statique car on est en présence de structures métalliques suffisamment longues pour entrer en résonance.

La méthode de Smith et Pendry [103] s'appuie sur les équations constitutives des

matériaux : la permittivité est définie comme le rapport de la moyenne du champ de déplacement électrique divisée par la moyenne volumique du champ électrique.

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{\overline{D}_i(0, d, d)}{\overline{E}_i(0, d, d)} \quad (5.4)$$

avec ϵ_i la permittivité dans la direction i et d le demi-paramètre de maille de la cellule unitaire. Le symbole barre au dessus des grandeurs vectorielles signifie que l'on fait la moyenne sur le volume de la cellule unitaire de matériau. Cette égalité se réécrit sous forme intégrale :

$$\bar{\epsilon}_i = \epsilon_0 \frac{\int_0^{2d} \mathbf{E}_i dx_j}{2dE_0} \quad (5.5)$$

Avec i la direction d'intérêt et j la direction de propagation de l'onde incidente. Un développement en série de Fourier permet ensuite d'aboutir à une forme plus simple au premier ordre :

$$\bar{\epsilon}_i = \epsilon_0 \bar{\epsilon}'_i \frac{\sin(q_j d)}{q_j d} \quad (5.6)$$

avec $\bar{\epsilon}'_i$ la moyenne de permittivité calculée sur une face de la cellule unitaire et q_j la constante de propagation dans la direction j . De manière analogue, il est possible par intégrale des champs de retrouver la perméabilité magnétique ainsi que les coefficients de chiralité de la structure étudiée.

Des approches plus analytiques permettent de déterminer le comportement des inclusions métalliques résonantes en étudiant les courants et charges à la surface de la structure métallique [108]. Il est alors possible de calculer en fonction de paramètres dépendant de la géométrie de l'inclusion, les polarisabilités électrique et magnétique de la structure.

Nous avons vu dans cette partie un bref aperçu des méthodes d'homogénéisation de composites électromagnétiques. Elles permettent de rendre compte du comportement des méta-matériaux mais présentent des limitations : on ne s'intéresse le plus souvent pas au comportement microscopique des méta-atomes ni au lien entre l'échelle microscopique et le comportement effectif global. Enfin, il est nécessaire de s'assurer de la pertinence même de l'homogénéisation, qui requièrent une différence d'échelle conséquente entre la micro-structure et la longueur d'onde dans le matériau.

5.3 Décomposition du rayonnement lointain

L'homogénéisation des métamatériaux peut être réalisée par simulation ou expérimentalement. Dans une démarche itérative d'ingénierie des métamatériaux, il est pratique de pouvoir en premier lieu valider la conception par la simulation plutôt que par la mesure. Elle permet de tester à moindre coût un grand nombre de structures, afin d'affiner au mieux les performances. Cependant, les réseaux d'inclusions résonantes sont des

problèmes multi-échelles nécessitant un maillage fin le long de chaque élément de la structure. Il est toujours difficile de simuler sur un logiciel commercial tel que COMSOL un réseau 3D comprenant un grand nombre de résonateurs. Pour pallier ce challenge de simulation, nous nous sommes intéressés à des approches basées sur l'étude du rayonnement des méta-atomes.

5.3.1 Décomposition multipolaire des méta-atomes

La théorie de la diffusion de Mie [109], montre qu'il est possible de décomposer le rayonnement d'une particule en une somme de contributions d'harmoniques sphériques. On peut ensuite à partir des contributions harmoniques retrouver la décomposition en moments multipolaires de la source ponctuelle équivalente du diffuseur. Cette méthodologie est décrite par Jackson [91] et permet d'obtenir une description équivalente de la distribution de charges et de courants du diffuseur.

L'étude du rayonnement des particules unitaires est la clé permettant la compréhension du comportement macroscopique d'un méta-matériau. Zeng et al. [42] ont ainsi calculé la contribution des moments dipolaires magnétiques et électriques dans le rayonnement de Split-Ring Resonator (SRR) couplés. La contribution des moments d'ordres supérieurs est également au coeur des préoccupations, et fut étudiée par Cho et al. dans le cas de métamatériaux optiques [110]. Dans son étude visant à restaurer la signification des paramètres homogénéisés des métamatériaux, Alù [111] se base également sur une décomposition multipolaire d'une particule unitaire pour déterminer les paramètres macroscopiques du réseau.

Une approche développée en 2011 par Mülhig [112] consiste à étudier le constituant unitaire du méta-matériau de manière indépendante en réalisant une décomposition multipolaire de son rayonnement diffusé. L'étude de la maille unitaire a pour principal intérêt une bien plus grande légèreté des calculs par rapport à la simulation d'un réseau. Mülhig et al. ont ainsi décomposé en moments dipolaires et quadrupolaires le rayonnement de structures telles que le SRR.

Dans notre recherche d'outils d'ingénierie des métamatériaux, nous sommes partis d'une approche similaire à celle de Mülhig, en établissant une méthode rapide de décomposition multipolaire. Cette méthode a donné lieu à la publication d'un article au congrès ICEAA IEEE à Grenade en 2019 [113]. Cette décomposition multipolaire est ensuite utilisée afin d'établir, à l'aide de l'équation de Clausius-Mossotti des paramètres équivalents macroscopiques du réseau de méta-atomes. Enfin, nous avons généralisé cette méthode aux matériaux bi-anisotropes en considérant qu'il n'y a pas de couplage entre les particules voisines.

5.3.2 Décomposition du premier ordre

5.3.2.1 Méthode

Les méta-atomes constituant la structure de base des métamatériaux sont l'analogie des atomes dans la matière. Autrement dit, le rôle de dipôle microscopique joué dans la matière par les atomes et molécules sont remplacé dans les méta-atomes par les inclusions dont l'échelle est typiquement millimétrique voire centimétrique dans le domaine des hyperfréquences. Ainsi, il est légitime de s'intéresser aux moments dipolaires des méta-atomes, comme dans les travaux cités dans la section précédente.

Le méta-atome étant l'analogie de l'atome, faisons l'hypothèse que sous l'action d'un champ électromagnétique extérieur il se polarise en étant assimilable à la somme d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique. Cette hypothèse revient à négliger les contributions d'ordres supérieurs [114] [115] : l'approximation est vérifiée en première approche dans le cas d'inclusions suffisamment petites devant la longueur d'onde incidente [112] mais nécessite d'être approfondie par la suite.

Les champs électriques et magnétiques produits par un dipôle électrique sont définis dans [91] par :

$$\mathbf{H} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} \frac{e^{ikr}}{r} + (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \right)$$

avec c la célérité de la lumière dans le vide, k le nombre d'onde dans le vide, \mathbf{p} le moment dipolaire électrique, \mathbf{n} le vecteur unitaire dans la direction du point d'observation et r la distance entre le point d'observation et la source. Dans l'approximation du champ lointain, en considérant que le produit kr est très grand devant 1, on obtient les champs radiatifs :

$$\mathbf{H}_{r,e} = \frac{ck^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{E}_{r,e} = \frac{ck^2 Z_0}{4\pi} ((\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

en notant $\mathbf{E}_{r,e}$ et $\mathbf{H}_{r,e}$ respectivement le champ électrique et le champ magnétique radiatif du dipôle électrique. De manière analogue, on peut écrire le champ lointain d'un dipôle magnétique :

$$\mathbf{E}_{r,m} = -\frac{Z_0 k^2}{4\pi} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{H}_{r,m} = \frac{k^2}{4\pi} ((\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{n}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

en notant \mathbf{m} le dipôle magnétique, $\mathbf{E}_{r,m}$ et $\mathbf{H}_{r,m}$ respectivement le champ électrique

et le champ magnétique radiatif du dipôle magnétique. D'après l'hypothèse de dipolarité du méta-atome, on peut écrire son champ électrique lointain :

$$\mathbf{E}_{r,ma} = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} ((\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{m}/c) \quad (5.10)$$

avec $\mathbf{E}_{r,ma}$ le champ électrique diffusé par le méta-atome, supposé dipolaire. A partir de l'équation 5.10 il est possible de déterminer l'orientation des champs en fonction de l'orientation des dipôles et de \mathbf{n} , la direction d'observation.

En faisant des hypothèses sur l'orientation de \mathbf{p} et \mathbf{m} , cohérentes avec la géométrie et les conditions d'éclairement du méta-atome, des informations concernant leurs normes peuvent être déduites de l'extraction du champ électrique dans des directions choisies. Supposons pour l'exemple qu'on traite le cas d'un Split-Ring Resonator éclairé par une onde TEM en espace libre dans sa polarisation naturelle. Le dipôle électrique résultant est orienté dans la direction du champ électrique de l'onde incidente, il en est de même pour le dipôle magnétique avec le champ magnétique incident. Cette hypothèse, dont nous discuterons plus loin le domaine de validité, nous permet de considérer que les dipôles électriques et magnétiques sont orthogonaux. Ainsi, une extraction du champ électrique en un point A dans la direction du dipôle électrique nous donnera un champ total ne dépendant que de \mathbf{m} , car le produit $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$ est nul :

$$\mathbf{E}_{r,ma}(A) = -\mathbf{m} \frac{Z_0 k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sin(\widehat{\mathbf{p} \mathbf{m}}) \quad (5.11)$$

avec $\widehat{\mathbf{p} \mathbf{m}}$ l'angle orienté entre \mathbf{p} et \mathbf{m} prenant les valeurs $-\pi/2$ étant donné les hypothèses faites sur l'orientation des dipôles par rapport aux champs incidents. Ainsi, on peut réécrire l'équation 5.11 de sorte à isoler le moment magnétique :

$$m = E_{r,ma}(A) \frac{4\pi r}{Z_0 k^2 e^{ikr}} \quad (5.12)$$

Ainsi l'extraction du champ électrique dans une direction bien choisie nous permet de remonter directement à la valeur du dipôle magnétique. De manière analogue, en s'intéressant à un point B dans la direction de \mathbf{m} , on obtient le lien entre le champ électrique mesuré et le dipôle électrique :

$$p = E_{r,ma}(B) \frac{4\pi r}{Z_0 c k^2 e^{ikr}} \quad (5.13)$$

Les équations 5.12 et 5.13 sont valides en considérant que les moments d'ordres supérieurs ne contribuent pas au rayonnement de manière significative et que les réactions électriques et magnétiques sont orientées dans les directions des excitations respectivement électriques et magnétiques.

Cette approche permet de réaliser une décomposition dipolaire rapide du rayonnement émis par le méta-atome sans avoir à réaliser une extraction complète des champs que nécessiterait une décomposition multipolaire. Par sa simplicité, elle représente un gain significatif en temps de calcul. Il est possible de vérifier la pertinence de cette approche en comparant le champ rayonné par le modèle dipolaire dont l'expression est

donnée par 5.10 et le rayonnement réel, expérimental ou simulé, du méta-atome. Afin de tracer cette comparaison, nous avons défini un critère de validité du modèle :

$$I_d = \frac{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi) - \mathbf{E}_{r,md}(\theta, \phi)\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi)\| d\Omega} \quad (5.14)$$

avec Ω le domaine d'angle solide et $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$ sa différentielle. La méthode a été testée sur plusieurs géométries de méta-atome et nous avons appliqué le critère de comparaison afin de juger de la pertinence du modèle dipolaire pour décrire le rayonnement diffusé.

5.3.2.2 Application aux méta-atomes

La figure 5.1 recense les différentes géométries étudiées, avec leur diamètre et leur longueur curviligne. Ces géométries sont pour la plupart des cas classiques que l'on retrouve abondamment dans la littérature, comme le Split Ring Resonator (SRR) [41] [50]. Les conditions d'excitation de ces méta-atomes en espace libre correspondent à la polarisation « naturelle », c'est-à-dire une polarisation susceptible d'offrir une réponse la plus importante possible. Dans le cas du SRR par exemple, le champ magnétique incident est orienté selon la normale à la boucle métallique, tandis que le champ électrique est orienté tangentiellement au fil métallique au niveau du gap, de sorte à créer un effet capacitif.

Les simulations sont réalisées sous COMSOL Multiphysics à l'aide du module RF : le méta-atome est simulé dans une sphère d'espace libre entourée d'une PML sphérique (voir figure 5.2). Un maillage 3D est ensuite réalisé, comportant en moyenne 100 000 éléments de domaine. Une onde plane polarisée linéairement conformément aux données de la figure 5.1 est alors définie grâce au module d'étude dans le domaine fréquentiel. On procède à un balayage en fréquence autour de la première fréquence de résonance de chaque méta-atome qui est la bande d'intérêt pour la plupart des applications envisagées. On extrait enfin de chaque simulation le champ électrique diffusé par la particule afin d'appliquer la méthode de développement dipolaire isotrope.

La figure 5.3 donne le développement pour la spirale plate, en partie réelle et imaginaire. On remarque bien la résonance des moments dipolaires électriques et magnétique, pour une longueur d'onde d'excitation d'environ 3 fois la longueur curviligne. Le rapport de la longueur d'onde de résonance sur la longueur curviligne de la spirale n'est pas de 2 comme dans le cas du SRR présenté dans le chapitre 4 : une analyse des courants que nous ne détaillerons pas ici nous montre que l'extrémité intérieure de la spirale ne correspond pas à un nœud de courant. Ainsi l'hypothèse de nullité de courant aux extrémités n'est pas valide dans le cas des spirales. Avec des spirales très compactes telles que celles développées dans [48], nous avons observé des résonances à $\lambda/4$: dans ce cas, l'extrémité intérieure de la spirale correspond à un ventre de courant : c'est une résonance quart d'onde. Dans le cas présent, nous sommes en présence d'un intermédiaire entre une résonance quart d'onde et une résonance demi-onde.

Nom du méta-atome	Diamètre (plus grande dimension)	Longueur curviligne métallique	Géométrie	Orientation « naturelle » d'excitation	Conductivité du matériau
SRR	0.02	0.06			$6 \cdot 10^6$
Wire	0.02	0.02			$6 \cdot 10^6$
Omega	0.02	0.04			$6 \cdot 10^6$
Hélice	0.02	0.65			10^6
Spirale plate	0.02	0.25			10^5

FIGURE 5.1 – Descriptif des différents méta-atomes étudiés par la méthode du développement dipolaire isotrope. Nous avons choisi différentes valeurs de conductivités permettant d'obtenir des facteurs de qualités similaires pour les résonances.

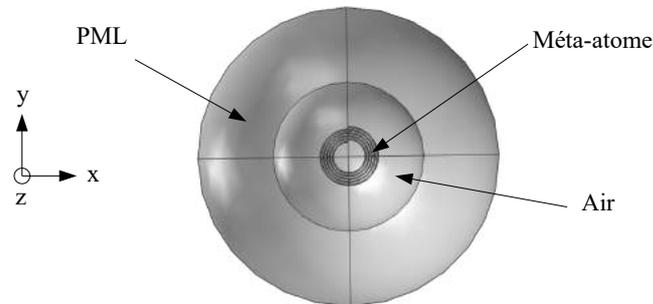


FIGURE 5.2 – Cas d'étude de la spirale sous COMSOL. La particule est simulée dans l'espace libre infini. Une PML sphérique permet d'absorber le rayonnement émis au loin.

L'allure des courbes de la figure 5.3 révèle plusieurs informations concernant le comportement de la spirale plate vis à vis de l'excitation électromagnétique. Tout d'abord, nous pouvons noter qu'en dehors de la zone de résonance, le moment dipolaire magnétique est quasi-nul : ce constat est rassurant étant donné qu'aucun matériau intrinsèquement magnétique n'intervient ici. Ce n'est pas le cas du dipole électrique, qui en dehors de la plage de résonance n'est pas nul : la polarisation électrique du méta-atome est due à une accumulation de charges à ses extrémités. Enfin, on remarque une parfaite

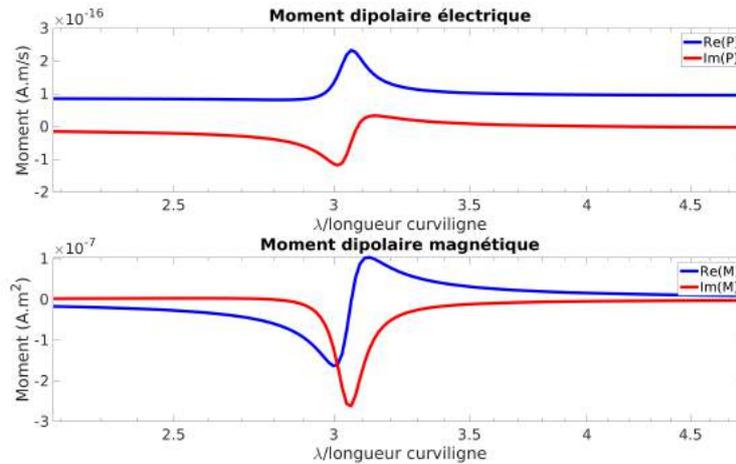


FIGURE 5.3 – Développement dipolaire isotrope de la spirale plate. On observe le phénomène de résonance pour une longueur d’onde d’excitation 3 fois supérieure à la longueur curviligne.

opposition de phase entre le dipôle électrique et le dipôle magnétique. A un facteur i près, les courbes décrivant p et m sont similaires. Par analogie avec un circuit électrique, nous pouvons en déduire que le méta-atome ne possède aucune puissance active tandis que la puissance totale est purement réactive. Électriquement parlant, la source qu’est l’onde plane d’excitation n’est pas adaptée à la charge.

La figure 5.4 montre les indices de validité du modèle dipolaire isotrope pour les différentes géométries étudiées. Cet indice est donné en fonction du rapport de la longueur d’onde sur la longueur curviligne. On remarque que cette approche donne une description correcte à environ 10% près pour la plupart des méta-atomes autour de leur première fréquence de résonance. La seule exception est le cas de l’hélice, qui est très mal décrite par cette approximation isotrope et dont l’écart entre le modèle et le rayonnement du méta-atome se situe autour de 100% sur toute la gamme étudiée.

Au regard de ces résultats, il semble que l’approche soit prometteuse et permette de décrire correctement le rayonnement de la plupart des méta-atomes. Cependant, l’hypothèse d’isotropie semble contredite par le cas de l’hélice, dont l’indice I_d est très élevé. Ce constat nous a conduit à développer une approche plus complète en prenant en compte l’anisotropie de la réponse dipolaire.

5.3.3 Décomposition anisotrope du premier ordre

Les suppositions faites concernant la direction des dipôles p et m ne sont pas vérifiées dans le cas général. En effet, elles ne permettent pas de prendre en compte une réponse anisotrope de la particule à une excitation externe. Il est possible de mettre en place une méthode un peu plus générale permettant de prendre en compte cette anisotropie et ne nécessitant donc pas d’hypothèses quant à la direction des dipôles. On a donc un problème à 6 inconnues, les trois composantes du vecteur p et les trois composantes du

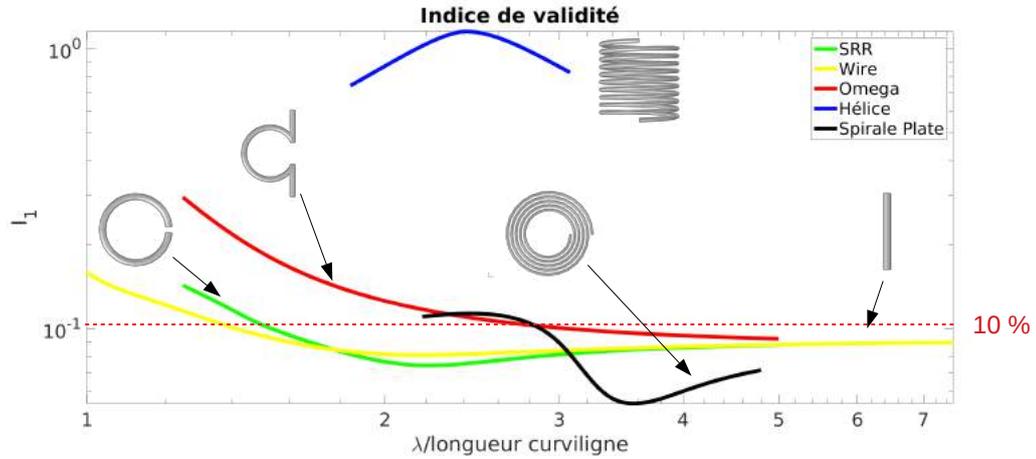


FIGURE 5.4 – Indices de validité de l’approche dipolaire isotrope donnés pour les différents méta-atomes étudiés.

vecteur \mathbf{m} .

Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire d’obtenir d’avantages d’équations liant le champ électrique diffusé et les inconnues du problème. En procédant à une extraction du champ dans la direction $(\theta, \phi) = (0, 0)$, une projection selon les directions x , y et z donne le système d’équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).x = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (p_x - m_y/c) \\ \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).y = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (p_y + m_x/c) \\ \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).z = 0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

On obtient alors deux équations non-triviales faisant intervenir quatre des grandeurs inconnues. La projection selon z ne nous apporte aucune information puisque le champ électrique lointain est orthogonal à sa direction de propagation. En procédant de manière analogue dans la direction $(\theta, \phi) = (\pi/2, 0)$ et dans la direction $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/2)$ on obtient un système de six équations liant les six inconnues du problème. Ce système peut alors s’écrire sous forme matricielle :

$$\frac{4\pi r e^{-ikr}}{Z_0 k^2} \begin{pmatrix} E_y(\pi/2, 0) \\ E_z(\pi/2, 0) \\ E_x(\pi/2, \pi/2) \\ E_z(\pi/2, \pi/2) \\ E_x(0, 0) \\ E_y(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ m_x/c \\ m_y/c \\ m_z/c \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Une inversion de la matrice 6*6 permet d'obtenir les p_i et le m_j en fonction des composantes du champ électrique extrait de la simulation ou de l'expérience. On vérifie informatiquement que cette matrice est inversible.

Une extraction du champ électrique dans les trois directions d'intérêt provenant des simulations nous permet d'appliquer la méthode aux différents méta-atomes présentés dans le tableau 5.6. On observe que contrairement à l'hypothèse qui avait été faite précédemment, la réponse dipolaire des méta-atome n'est pas toujours isotrope. En effet, les dipôles électriques et magnétiques ne sont pas nécessairement alignés dans le sens des excitations électriques et magnétiques.

On définit le critère I_1 comme l'analogie du critère I_d pour le modèle anisotrope du premier ordre :

$$I_1 = \frac{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi) - \mathbf{E}_{r,1}(\theta, \phi)\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi)\| d\Omega} \quad (5.17)$$

avec $E_{r,1}$ le champ rayonné par le modèle anisotrope d'ordre 1.

5.3.3.1 Application aux méta-atomes

En nous basant sur les simulations réalisées dans la partie précédente, nous avons extrait le champ électrique diffusé en trois points de l'espace. La figure 5.5 donne les indices de validité du modèle dipolaire pour les différentes géométries étudiées. Cet indice est donné avec deux abscisses différentes : la première représentation donne I_1 en fonction de la longueur d'onde ramenée à la longueur curviligne, tandis que la seconde montre I_1 en fonction de la longueur d'onde ramenée au diamètre. En comparant les critères I_1 aux critères I_d , on observe que pour plusieurs méta-atomes, l'approche anisotrope est bien plus précise que l'approche isotrope. On remarque cependant toujours des écarts entre le modèle au premier ordre et le champ total rayonné par le méta-atome, en particulier pour les hautes fréquences. Ces écarts traduisent de manière plus que probable la présence d'ordres supérieurs contribuant au rayonnement de la particule.

L'observation de ces graphes permet de tirer plusieurs conclusions. Tout d'abord, la validité du modèle dépend avant tout du rapport entre la longueur d'onde dans le vide

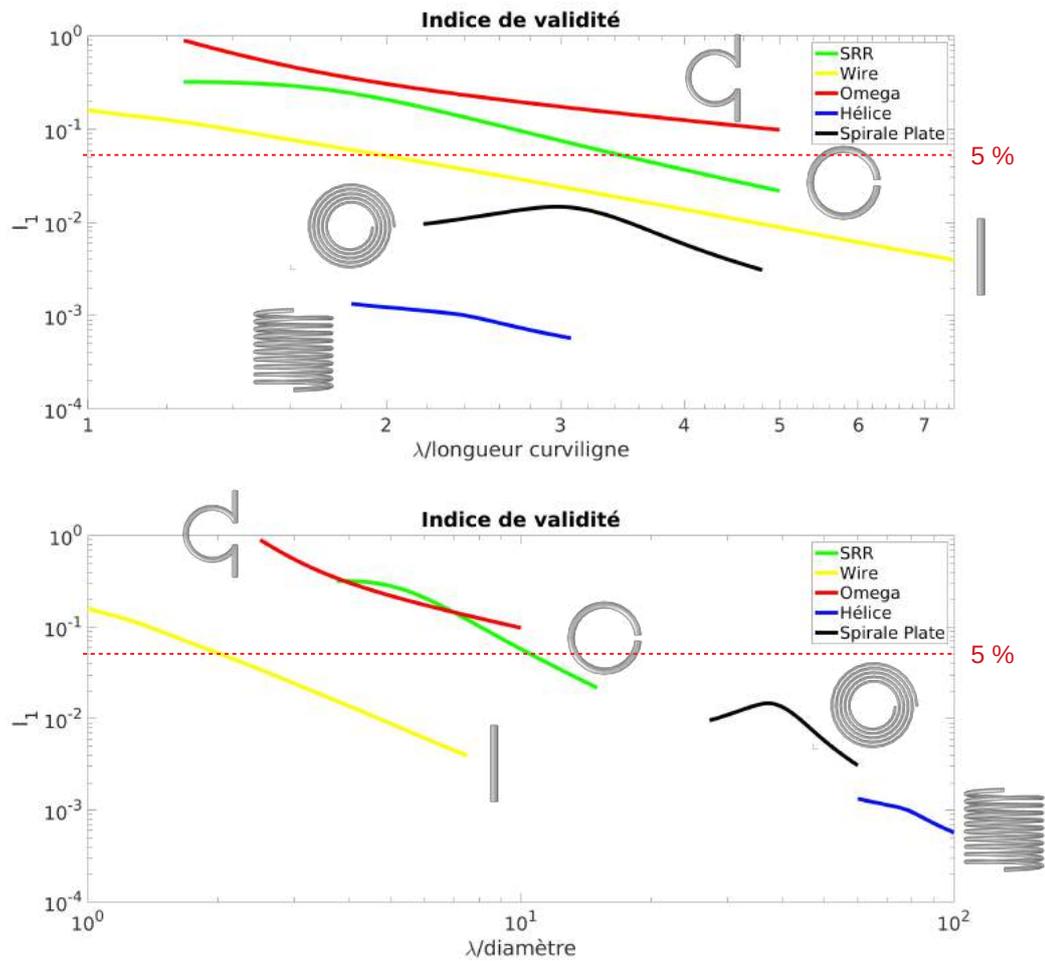


FIGURE 5.5 – Indices de validité donnés pour les différents méta-atomes étudiés. Cet indice est donné en fonction de la longueur d’onde ramenée à la longueur curviligne de chaque méta-atome (en haut) et ramené au diamètre de chaque méta-atome (en bas). On remarque que les méta-atomes pour lesquels la description dipolaire est la plus fiable sont les méta-atomes dont la longueur curviligne est la plus grande au regard du diamètre. Est représentée la limite arbitraire des 5% définie comme le critère de validité du modèle.

de l'onde incidente et le diamètre de la particule. En effet à la première fréquence de résonance de la spirale plate et de l'hélice, le rapport $\lambda/\text{diamètre}$ est très élevé, supérieur à 10. Or, ces deux méta-atomes sont les seuls à ne pas dépasser la limite des 5% fixée arbitrairement comme critère de validité du modèle dipolaire.

La résonance étant avant tout déterminée par la longueur curviligne des méta-atomes [48] [116], les particules qui présentent une grande longueur curviligne au regard de leur diamètre apparent sont susceptibles de voir apparaître des phénomènes de résonance tout en étant petites devant la longueur d'onde. Ceci permet d'obtenir des méta-matériaux dont les éléments unitaires sont petits devant la longueur d'onde, critère indispensable à leur homogénéisation. De plus, nous venons de vérifier que les particules de petites tailles rayonnant principalement de façon dipolaire contrairement à celles dont la taille est comparable à la longueur d'onde et dont le rayonnement devient multipolaire. Ce constat s'explique par le fait qu'une particule petite devant la longueur d'onde incidente peut être étudiée sous l'approximation électrostatique [109]. Ainsi, les charges et les courants peuvent être approximés par des contributions dipolaires électriques et magnétiques. Ceci n'est plus vrai à mesure que la longueur d'onde diminue par rapport à la taille de la particule. La répartition spatiale des charges ne peut plus être approximée par une unique contribution dipolaire et les multipôles sont alors nécessaires pour décrire le rayonnement.

Afin de déterminer si le comportement des méta-atomes est principalement électrique ou magnétique, il est nécessaire de s'intéresser aux puissances développées par les deux dipôles, électriques et magnétiques. La puissance rayonnée par un dipôle électrique est donnée par :

$$P_e = \frac{c^2 Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{p}|^2 \quad (5.18)$$

La puissance rayonnée par un dipôle magnétique est quant à elle donnée par :

$$P_m = \frac{Z_0 k^4}{12\pi} |\mathbf{m}|^2 \quad (5.19)$$

Le calcul de ces puissances permet de déterminer si la résonance est davantage électrique ou magnétique.

Les principaux résultats des développements dipolaires de méta-atomes sont synthétisés dans le tableau 5.6. Plusieurs informations y sont compilées, telles que la longueur d'onde adimensionnée à la résonance, la direction des dipôles électriques et magnétiques ainsi que l'écart entre le modèle et le rayonnement du méta-atome. Les informations provenant de ce tableau nous permettent d'analyser le comportement des méta-atomes :

- La longueur d'onde à la résonance ramenée au diamètre permet de se figurer la dimension apparente du méta-atome : plus le méta-atome est petit au regard de la longueur d'onde, plus le paramètre de maille du réseau le sera également, ce qui est un facteur favorable à l'homogénéisabilité d'un réseau constitué de telles inclusions.
- La longueur d'onde ramenée à la longueur curviligne de la particule nous permet

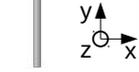
Nom du méta-atome	Géométrie	λ / diamètre (à la résonance)	λ / longueur curviligne (à la résonance)	Direction E incident	Direction p induit	Direction H incident	Direction m induit	Prépondérance à la résonance	Écart à la résonance avec le modèle dipolaire
SRR		7.05	2.35	y	y	z	z	Aucune	6.5 %
Wire		2.5	2.5	y	y	z	x,y,z	Électrique	4 %
Omega		4.2	2.1	y	y	z	x,z	Aucune	28 %
Hélice		78	2.4	y	z	z	z	Aucune	0.11 %
Spirale plate		37.5	3.0	y	y	z	z	Magnétique	1.6 %

FIGURE 5.6 – Synthèse des résultats obtenus pour la décomposition dipolaire des différents méta-atomes.

de vérifier que la résonance se produit à une longueur d'onde deux à trois fois supérieure à la longueur du fil métallique. C'est donc ce paramètre qui est le plus déterminant pour le contrôle de la fréquence de résonance.

- La direction des champs incidents et des dipôles induits nous permet d'analyser l'isotropie de la réponse du méta-atome. En vert sont données les directions d'excitation similaires aux directions des dipôles induits, et en rouge les directions d'excitation et de réponse orientées dans des directions différentes.
- La prépondérance électrique ou magnétique nous permet d'imaginer des métamatériaux présentant un comportement respectivement diélectrique ou magnétique, tandis que ceux ne présentant aucune prépondérance marquée auront un comportement à la fois électrique et magnétique.
- L'écart entre le modèle dipolaire et le rayonnement du méta-atome à la résonance nous donne un indicateur sur la validité de la méthode.

La figure 5.5 montre l'indice de validité de la décomposition dipolaire en fonction de la longueur d'onde réduite pour les différents méta-atomes présentés dans le tableau 5.6.

5.3.3.2 Le cas du SRR

Le développement dipolaire du SRR est donné à la figure 5.7 : on observe une réponse dipolaire à la fois électrique et magnétique forte aux abords de sa première fréquence de résonance, pour une longueur d'onde dans le vide égale à 2.4 fois à sa longueur curviligne. La réponse électrique s'explique par l'accumulation de charges aux extrémités du SRR, créant un effet capacitif important au niveau du gap. Par la loi de conservation de la charge, l'apparition de charges à la surface d'un conducteur indique la présence de courants électriques. Ainsi, cette réponse électrique est accompagnée d'une réponse

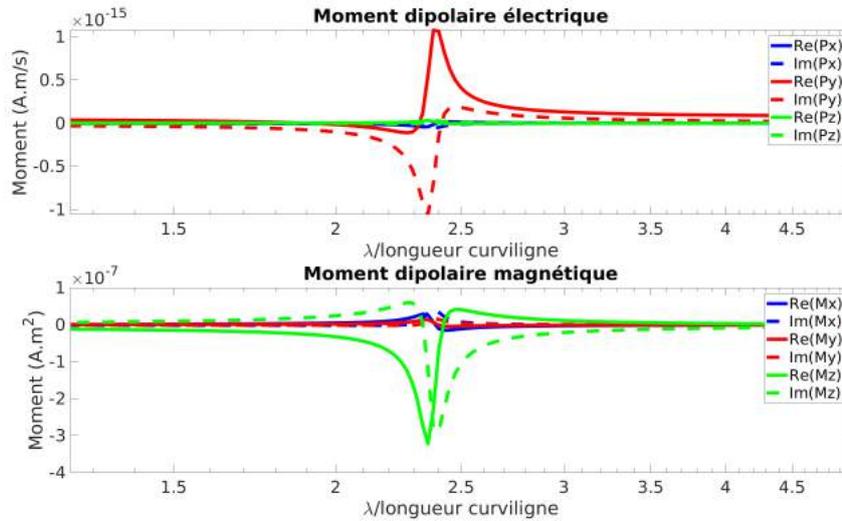


FIGURE 5.7 – Résultats du développement dipolaire du SRR. Les moments dipolaires électriques et magnétiques sont donnés en fonction de la longueur d’onde adimensionnée par la longueur curviligne. On observe une réponse électrique principalement selon y et une réponse magnétique principalement selon z .

dipolaire magnétique également, car les courants créés le long de la structure du méta-atome tournent globalement tous dans la même direction. Cette rotation de courants créée par le théorème d’Ampère un dipôle magnétique résultant.

La figure 5.8 nous montre que le SRR de présente pas un comportement prépondérant magnétique ou électrique à sa résonance mais correspond plutôt à la somme d’un dipôle électrique et d’un dipôle magnétique. A des fréquences supérieures à la fréquence de résonance, le dipôle magnétique devient prépondérant tandis qu’à plus basse fréquence c’est le dipôle électrique qui rayonne une plus grande puissance. Il est intéressant de noter l’analogie entre le comportement du SRR et le comportement d’un circuit RLC série : à haute fréquence, l’énergie est stockée sous forme de courants dans la bobine tandis qu’à plus basse fréquence, l’énergie est stockées sous forme de charges dans le condensateur. Les courants sont responsables du comportement dipolaire magnétique et les charges du comportement dipolaire électrique.

L’indice d’évaluation élevé observé pour le SRR sur la figure 5.5 traduit le fait qu’une contribution multipolaire non négligeable est présente dans le rayonnement lointain. A basse fréquence, le modèle dipolaire est représentatif puisque I_1 est inférieur à 2%. A mesure que la fréquence augmente, l’écart entre le modèle dipolaire et le rayonnement du méta-atome croît fortement, pour atteindre 6.5% à la résonance et 20% à la plus haute fréquence de l’étude. Nous ne sommes alors plus dans le cadre de l’approximation dipolaire et la prise en compte des moments d’ordre supérieurs devient nécessaire pour obtenir une description correct du rayonnement. Ainsi, la projection dipolaire est insuffisante pour décrire la particule et une analyse plus approfondie du rayonnement permettrait de comprendre plus en détail la phénoménologie.

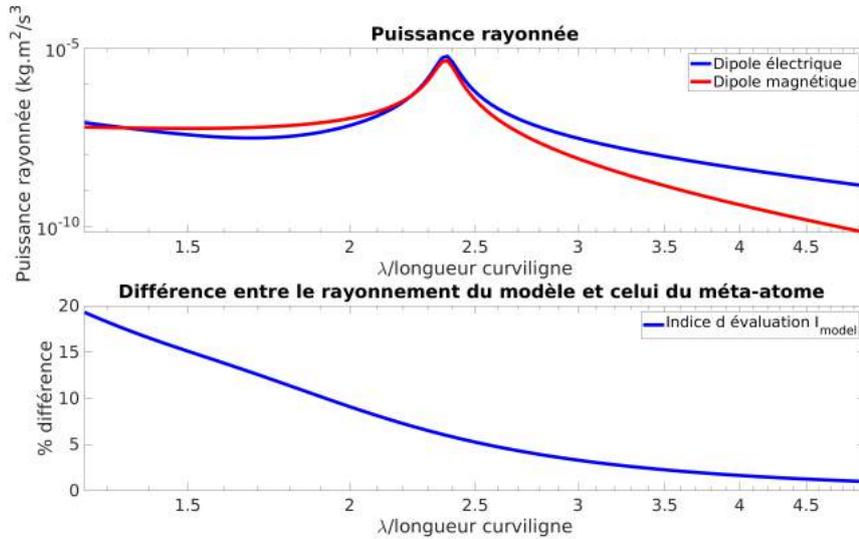


FIGURE 5.8 – Courbe du dessus : Puissance développée par les dipôles électriques et magnétiques pour le SRR. Courbe du dessous : indice de validité I_1 du modèle dipolaire. A basse fréquence le modèle est inférieur à 2% tandis qu'à la résonance il est déjà à 6.5%.

5.3.4 Décomposition d'ordre 2

La décomposition dipolaire permet de comprendre qualitativement le comportement globale d'un méta-atome vis à vis d'une onde électromagnétique incidente. Cependant, nous avons vu que l'hypothèse de dipolarité de la réponse est souvent mise à mal, en particulier lorsque la longueur d'onde dans le vide est de dimension comparable au diamètre apparent de la particule. Lorsqu'on perd l'hypothèse de quasi-staticité, des ordres supérieurs semblent intervenir dans le rayonnement et doivent être pris en compte.

Afin d'affiner notre modèle, nous avons choisi de prendre en compte l'ordre deux dans la décomposition du rayonnement des méta-atomes. Cet ordre deux ne nous permet pas d'affiner le modèle du point de vue des paramètres effectifs, puisque la permittivité et la perméabilité d'un matériau homogène sont intrinsèquement liés à une réponse collective dipolaire. Au contraire, la prise en compte de l'ordre deux nous permet de nous rendre compte de manière plus précise de la prépondérance ou non des dipôles électriques et magnétiques dans le champ diffusé.

Réécrivons l'équation 5.10 en prenant en compte le deuxième ordre électrique et magnétique :

$$\mathbf{E}_{r,ma} = \mathbf{E}_{r,2} = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\left(\mathbf{n} \times \left(\mathbf{p} - \frac{ik}{6} \mathbf{Q}_e(n) \right) \right) \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \left(\mathbf{m} - \frac{ik}{6} \mathbf{Q}_m(n) \right) / c \right) \quad (5.20)$$

avec $\mathbf{E}_{r,2}$ le champ lointain diffusé par le modèle d'ordre deux, $\mathbf{Q}_e(n)$ et $\mathbf{Q}_m(n)$ des vecteurs dépendant respectivement du tenseur des moments quadrupolaires électriques $Qe_{\alpha,\beta}$ et magnétiques $Qm_{\alpha,\beta}$, ainsi que de la direction d'observation \mathbf{n} :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_e(n) &= \sum_{\beta} Qe_{\alpha\beta} n_{\beta} \\ \mathbf{Q}_m(n) &= \sum_{\beta} Qm_{\alpha\beta} n_{\beta}\end{aligned}\quad (5.21)$$

Nous cherchons à déterminer les moments dipolaires et quadrupolaires, électriques et magnétiques, par décomposition du rayonnement lointain. Les tenseurs de moments quadrupolaires sont des matrices 3*3 symétriques et de diagonales nulles. Ainsi, on a cinq inconnues pour chaque tenseur quadrupolaire. Les dipôles sont quant à eux des vecteurs dans un espace de dimension 3, il en résulte donc un total de 16 inconnues nécessaires pour caractériser entièrement notre diffuseur d'ordre 2.

Afin de déterminer les coefficients de dipôles et quadrupôles, il n'est plus possible comme dans le cas du modèle d'ordre 1 de se restreindre à une extraction du champ lointain en deux directions de l'espace. Le problème est désormais plus complexe que précédemment : nous ne pouvons pas non plus présager par avance de la direction des réponses quadrupolaires. En procédant à une extraction du champ électrique dans une direction arbitraire de l'espace $(\theta, \phi) = (0, 0)$, il est possible grâce à une projection selon les vecteurs unitaires dans les directions x,y et z d'associer les composantes du champ électrique à certaines des inconnues du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).x = \frac{-Z_0 k^2 e^{ikr}}{4\pi r} \left(m_y - \frac{ik}{6} Qm_{xz} \right) \\ \quad + \frac{Z_0 c k^2 e^{ikr}}{4\pi r} \left(p_x - \frac{ik}{6} Qe_{xz} \right) \\ \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).y = \frac{-Z_0 k^2 e^{ikr}}{4\pi r} \left(-m_x + \frac{ik}{6} Qm_{yz} \right) \\ \quad + \frac{Z_0 c k^2 e^{ikr}}{4\pi r} \left(p_y - \frac{ik}{6} Qe_{yz} \right) \\ \mathbf{E}_{scat, far}(0, 0).z = 0 \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Nous obtenons dans l'équation 5.22 deux équations non-triviales correspondant aux projections dans les directions x et y. Le champ diffusé lointain selon z est nul car la propagation des champs électromagnétiques se fait orthogonalement au champ électrique (et magnétique) en espace libre. Les projections du champ en un point d'évaluation arbitraire nous permet donc d'obtenir deux équations non-triviales liant huit variables d'intérêt. Nous disposons dans ce problème de 16 variables à déterminer, ce qui correspond donc à 8 directions d'évaluations différentes et indépendantes.

A l'aide d'un ensemble de 8 points d'évaluation, nous obtenons un système de 16 équations liant les 16 inconnues du système aux composantes du champ électrique lointain diffusé par le méta-atome. Ce système d'équation peut être écrit de manière concise dans

une équation matricielle :

$$\frac{4\pi r e^{-ikr}}{Z_0 c k^2} \mathbf{E} = M \cdot \mathbf{X} \quad (5.23)$$

où :

- \mathbf{E} est un vecteur dans un espace de dimension 16 donnant les projections selon x , y et z du champ électrique complexe diffusé par le méta-atome (2 projections par direction d'observation) ;
- M est une matrice inversible de 16 par 16 dépendant de l'ensemble des 8 directions d'observations choisies. On vérifie informatiquement que cette matrice est inversible ;
- \mathbf{X} est un vecteur dans un espace de dimension 16, composé des 16 variables du système : $p_{\mu, m_{\nu}}/c$, $-\frac{ik}{6} Q e_{\mu\nu}$ et $-\frac{ik}{6c} Q m_{\mu\nu}$.

Afin de résoudre le système, une inversion de la matrice M permet de déterminer les inconnues du système. Cette méthode de décomposition multipolaire est applicable quelle que soit la géométrie du méta-atome et quelle que soit la polarisation de l'onde incidente. Le champ électrique peut être obtenu aussi bien par simulation numérique que par des mesures expérimentales.

Le modèle d'ordre 2 est plus précis que le modèle d'ordre 1 puisque ses hypothèses sur le champ diffusé sont moins contraignantes : on considère en effet que la puissance rayonnée par les moments quadripolaires n'est pas nécessairement négligeable par rapport à celle rayonnée par les moments dipolaires. Cependant, nous supposons toujours que les ordres supérieurs à deux contribuent de manière négligeable. Cette hypothèse se doit d'être vérifiée, à l'aide d'un critère de comparaison entre le champ rayonné par le modèle et le champ du méta-atome, provenant de la simulation ou de l'expérience.

En prenant un critère analogue à celui présenté précédemment dans l'équation 5.14, on définit le critère de validité du modèle d'ordre 2 :

$$I_2 = \frac{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi) - \mathbf{E}_{r,2}(\theta, \phi)\| d\Omega}{\int_{\Omega} \|\mathbf{E}_{r,ma}(\theta, \phi)\| d\Omega} \quad (5.24)$$

A partir du calcul numérique du champ électrique diffusé par les différents méta-atomes du tableau 5.6, nous avons déterminé le critère de validité du modèle d'ordre 2. La figure 5.10, donnant pour le SRR le critère de validité d'ordre 1, le critère de validité d'ordre 2 ainsi que les puissances comparées entre les dipôles et quadripôles, nous renseigne quant à la validité du modèle d'ordre 2. On observe que le modèle d'ordre 2 est globalement meilleur que le modèle d'ordre 1 grâce à la comparaison entre I_1 et I_2 . Ce résultat permet de conclure que la prise en compte des moments quadripolaires permet une description plus fidèle du rayonnement des méta-atomes, en particulier aux abords de la première fréquence de résonance.

Les résultats pour les autres méta-atomes sont donnés dans la figure 5.10 et confirment la tendance observée avec le SRR : l'ordre 2 permet d'obtenir une meilleure description

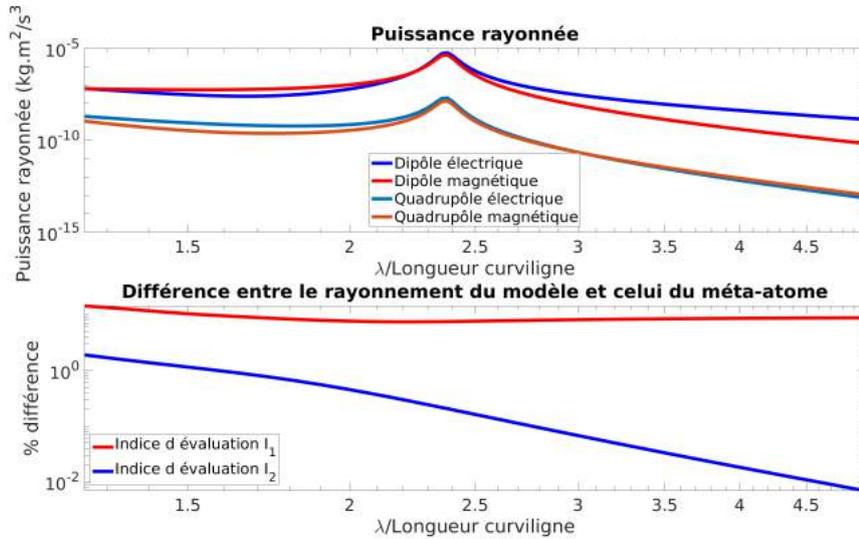


FIGURE 5.9 – Courbe en haut : Puissance développée par les dipôles et quadrapôles électriques et magnétiques pour le SRR. Courbe en bas : indices de validité I_1 et I_2 du modèle dipolaire et quadrapolaire. Nous constatons une précision accrue dans le modèle d'ordre 2.

que l'ordre 1. Cette précision accrue est intéressante pour les "gros" méta-atomes, ceux dont les dimensions apparentes sont non-négligeables au regard de la longueur d'onde de l'excitation. Pour les particules comme la spirale, dont la longueur d'onde de résonance est très grande devant le diamètre apparent, il n'est pas nécessaire de considérer l'ordre 2.

5.3.5 Décomposition d'ordre n

Lorsque l'on décompose une répartition de charges en moments multipolaires cartésiens, on obtient pour tout n entier, 3^n moments d'ordre n. On a donc pour une description jusqu'à l'ordre n :

$$\begin{aligned}
 N_{moments}(n) &= 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n \\
 &= \frac{3}{2}(3^n - 1) \\
 &= O(3^n)
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

avec le symbole grand O signifiant que l'on croit asymptotiquement de manière similaire à 3^n .

Cependant, cette formule s'appuie uniquement sur la méthode de décomposition en coordonnées cartésiennes : elle permet de retrouver les moments multipolaires permettant une compréhension physique des phénomènes. Il existe des relations reliant les différents moments : par exemple, le tenseur de moments quadrapolaires à l'ordre 2 est constitué de 9 paramètres mais la condition de symétrie et la condition de trace nulle portent en réalité à 5 et non à 9 le nombre d'inconnues. La décomposition mul-

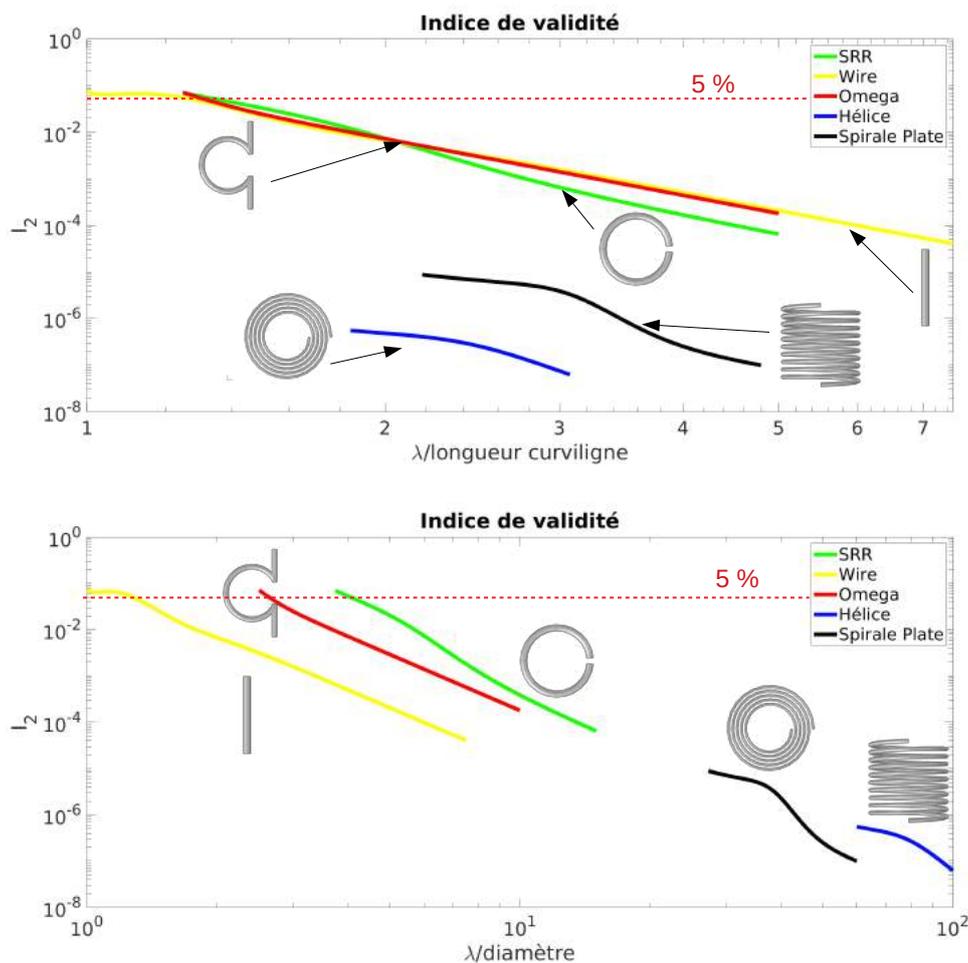


FIGURE 5.10 – Indices de validité d'ordre 2 donnés pour les différents méta-atomes étudiés. Cet indice est donné en fonction de la longueur d'onde ramenée à la longueur curviligne de chaque méta-atome puis par le diamètre de chaque méta-atome. L'indice d'ordre 2 donne de meilleurs résultats que l'indice d'ordre 1, les méta-atomes étudiés sont représentés correctement sur toute la bande d'étude.

tipolaire en harmonique sphériques d'un rayonnement ne nécessite quant à elle pas la connaissance d'autant de variables et se fait à l'aide de seulement $2n + 1$ coefficients à l'ordre n . Les harmoniques sphériques constituent ainsi une base naturelle pour décrire le rayonnement. Ainsi, on obtient pour un développement à l'ordre n :

$$\begin{aligned} N_{spherique}(n) &= 3 + 5 + 7 + \dots + 2n + 1 \\ &= n(n + 2) \\ &= O(n^2) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Étant donné que l'on a des moments électriques et magnétiques à prendre en compte, le nombre d'inconnues du système est égal à $2N_{moments}(n)$ dans notre décomposition du champ à l'ordre n . On a donc un nombre d'inconnues variant rapidement avec l'ordre de décomposition : cette formule nous donne bien 6 inconnues à l'ordre 1 et 16 à l'ordre 2.

Il est donc possible de réaliser une décomposition rapide à des ordres supérieurs, en augmentant le nombre de points d'extraction du champ électrique. Si on désirait passer à l'ordre 3, une méthode analogue à celle présentée aux ordres 1 et 2 nécessiterait 15 points d'évaluation et l'inversion d'une matrice 30×30 . A l'ordre 4, on aurait besoin de 24 points et de l'inversion d'une matrice 48×48 . L'inversion d'une matrice de taille $m \times m$ est une opération de complexité $O(m^3)$ par élimination de Gauss-Jordan. Ainsi, étant donné que la résolution de l'ordre n génère une matrice de taille $m \times m$ avec $m = 2n(n + 2)$ on peut évaluer la complexité globale de la méthode à un $O(n^6)$.

Cette complexité est donc polynomiale mais l'ordre étant relativement élevé, son coût serait toutefois trop important pour un développement d'ordre élevé.

5.4 Homogénéisation magnéto-diélectrique scalaire

La décomposition du champ d'un méta-atome permet de connaître ses moments multipolaires jusqu'à l'ordre n . Cependant, nous avons vu pour les méta-atomes étudiés, qu'aux abords de la première fréquence de résonance le champ diffusé est très majoritairement dipolaire. Les ordres supérieurs ne contribuent que de manière marginale. Il est donc possible d'approximer le rayonnement de la particule par la contribution d'un moment dipolaire électrique et d'un moment dipolaire magnétique. Cette hypothèse nous permet de réaliser une analogie entre les méta-atomes constituant un métamatériau et les atomes constituant la matière classique. En effet, la notion de matériau magnéto-diélectrique repose sur l'hypothèse que la matière est constituée à l'échelle microscopique d'un ensemble de dipôles électriques et magnétiques. On considère donc que chaque atome ou que chaque molécule possède une polarisabilité, traduisant le fait que l'action d'un champ électrique ou magnétique extérieur génère un moment dipolaire électrique ou magnétique en réaction.

5.4.1 Inversion de la relation de Clausius-Mossotti

A l'image des atomes et molécules dans le modèle du matériau magnéto-diélectrique, une assemblée de méta-atomes se comporte comme une assemblée de dipôles. On essaie dans cette partie de pousser le plus loin possible le parallèle entre la matière classique et les méta-matériaux constitués d'un réseau d'inclusions résonantes en assimilant le rayonnement des méta-atomes à ceux de dipôles électriques et magnétiques.

Nous supposons par la suite que la réponse électrique \mathbf{p} est orientée dans la même direction que l'excitation électrique locale \mathbf{E}_l et que la réponse magnétique \mathbf{m} est orientée dans la même direction que l'excitation magnétique locale \mathbf{H}_l . Cette hypothèse n'est pas anodine et sa validité sera discutée plus tard dans ce manuscrit. Cette hypothèse revient à dire que l'on éclaire le méta-atome avec des champs électriques et magnétiques orientés respectivement dans les directions des vecteurs propres des tenseurs de permittivité et de perméabilité. L'équation constitutive du matériau peut donc être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{r,xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r,zz} \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{r,xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{r,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{r,zz} \end{pmatrix} \mathbf{H}\end{aligned}\tag{5.27}$$

Une hypothèse plus forte mais rarement vérifiée pour les méta-atomes consisterait à considérer que la réponse est isotrope. Par ailleurs, nous négligeons pour l'instant les couplages potentiels entre les réponses électriques et magnétiques, hypothèse qui sera également discutée plus loin.

En considérant que les dipôles sont orientés dans les directions des champs locaux, on ne s'intéresse alors plus qu'à leurs normes. Puisque nous sommes capable d'extraire ces moments dipolaires, nous pouvons déduire la polarisabilité électrique et la polarisabilité magnétique.

$$\alpha_e = \frac{p}{\epsilon_0 E_l} \quad ; \quad \alpha_m = \frac{m}{H_l}\tag{5.28}$$

avec α_e la polarisabilité électrique et α_m la polarisabilité magnétique. Le lien entre moment dipolaire et polarisabilité fait intervenir E_l et H_l , les champs locaux électriques et magnétiques. Dans le cas présent, le méta-atome est simulé en espace libre, le champ local est donc égal au champ de l'onde plane d'excitation. Il est donc possible de définir pour un méta-atome une polarisabilité, qui va fortement dépendre des conditions d'excitation.

Nous disposons grâce à la formule 5.28 de la polarisabilité des méta-atomes dans les conditions d'excitation de la simulation. Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que des formules ont été développées permettant de relier la réponse lo-

cale d'un atome à la réponse globale d'une assemblée constituée d'un grand nombre de cet atome. En particulier, la relation de Clausius-Mossotti nous intéresse ici particulièrement, car elle permet de relier la polarisabilité à la permittivité du matériau. Il est possible de poursuivre l'analogie entre méta-atomes et atomes en appliquant la formule de Clausius-Mossotti 5.1 à une assemblée de méta-atomes. On utilise un analogue de Clausius-Mossotti décrit dans [117] pour déterminer la perméabilité magnétique à partir du dipôle magnétique.

$$\frac{\epsilon_r(\omega) - 1}{\epsilon_r(\omega) + 2} = \frac{p(\omega)}{3V\epsilon_0 E_l} \quad ; \quad \frac{\mu_r(\omega) - 1}{\mu_r(\omega) + 2} = \frac{m(\omega)}{3V H_l} \quad (5.29)$$

avec V le volume de la maille unitaire du méta-matériau. On a remplacé dans 5.1 la densité de particule N par le volume de la maille unitaire en considérant $V = 1/N$. Une inversion de ces relations nous permet de déterminer les permittivités et perméabilités en fonction des moments dipolaires.

$$\epsilon(\omega) = \frac{1 + \frac{2p(\omega)}{3V\epsilon_0 E_l}}{1 - \frac{p(\omega)}{3\epsilon_0 V E_l}} \quad ; \quad \mu(\omega) = \frac{1 + \frac{2m(\omega)}{3V H_l}}{1 - \frac{m(\omega)}{3V H_l}} \quad (5.30)$$

A partir d'une simulation d'un méta-atome en espace libre excité par une onde plane, on propose par cette méthode de déterminer des propriétés effectives d'un métamatériau constitué de ce méta-atome. Les extractions de moments dipolaires réalisées précédemment dans ce chapitre sont donc exploitables pour réaliser une homogénéisation.

5.4.2 Validation de la méthode

Afin de s'assurer de la validité de la méthode, nous l'avons comparée à une technique plus classique d'extraction de paramètres équivalents, la méthode de Nicolson et Ross [104] [106]. Pour cela, nous avons réalisé des simulations d'un réseau complet du méta-atome en 3D sous le logiciel COMSOL.

La simulation sous COMSOL du réseau de méta-atome est réalisée à l'aide de l'outil de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) du logiciel. Notre méthode reposant sur l'hypothèse que le champ proche d'un méta-atome est constitué de la contribution d'un matériau environnant homogène, la simulation devrait idéalement porter sur un réseau 3-D de taille infinie. Des conditions périodiques sur les bords permettent d'étendre à l'infini selon les directions transverses un réseau 1-D : notre réseau 1-D est ainsi constitué de 6 méta-atomes dans la direction de propagation de l'onde, ce qui nous a permis d'obtenir à partir d'un réseau $1 \times 1 \times 6$ un équivalent de $\infty \times \infty \times 6$. Il serait intéressant d'augmenter le nombre de méta-atomes dans la direction de propagation afin de nous rapprocher d'un milieu 3d infini mais cela devient trop coûteux en termes de calcul.

L'extraction des paramètres de réflexion et de transmission permet par inversion de Nicolson-Ross de retrouver la permittivité et la perméabilité complexes effectives de l'échantillon de métamatériau. Cependant, cette méthode a pour inconvénient l'appari-

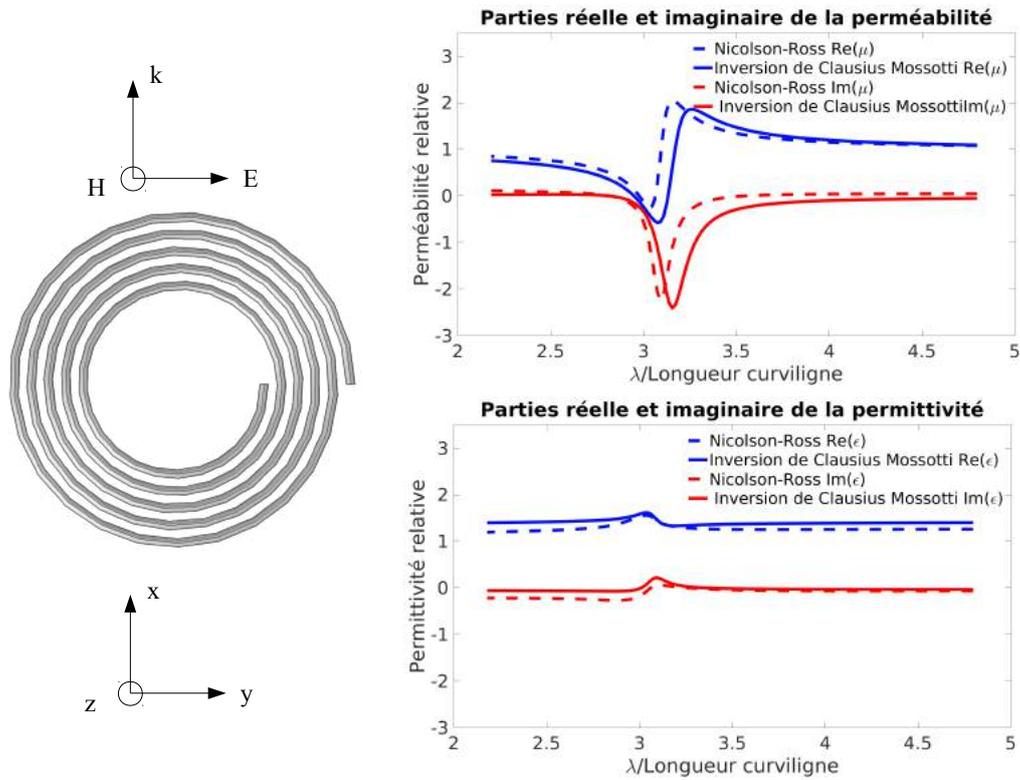


FIGURE 5.11 – Résultats de l’homogénéisation d’une spirale plate éclairé sous une polarisation naturelle. Les deux méthodes d’homogénéisations trouvent des résultats similaires : une résonance magnétique.

tion de sauts de propriétés, en particulier à haute fréquence et lorsqu’il y a des résonances. Ces sauts de propriétés sont des artefacts de calculs dus à une indétermination dans la phase de l’onde à 2π près. Ainsi, il n’est pas possible par seule analyse des coefficients de Fresnel de connaître avec certitude la phase de l’onde dans le matériau, ce qui empêche la détermination de l’indice optique équivalent et de la permittivité et la perméabilité effectives. Afin de conserver l’unicité de la solution après inversion des relations de Fresnel, une méthode pas-à-pas de [105] a été utilisée. Par cette méthode on permet à l’algorithme de prendre en compte le fait que la phase de l’onde peut avoir changé d’un angle supérieur à π au cours de sa propagation dans l’échantillon étudié. Pour mettre en oeuvre cette méthode, il est nécessaire de réaliser un balayage en fréquence commençant à suffisamment basse fréquence pour ne pas être confronté à l’indétermination. On incrémente ensuite la phase de l’onde en comparant la phase à la fréquence f_n à la phase à la fréquence f_{n+1} . En procédant ainsi avec des pas de fréquence suffisamment petits, on lève l’indétermination en prenant en compte la phase réelle de l’onde et non sa valeur modulo 2π .

Nous avons comparé les deux méthodes pour la spirale plate décrite dans le tableau 5.6 et représentée à la figure 5.11. Elle nous permet de dresser plusieurs constats. On observe tout d’abord que les résultats concordent plutôt bien : la méthode par analyse du

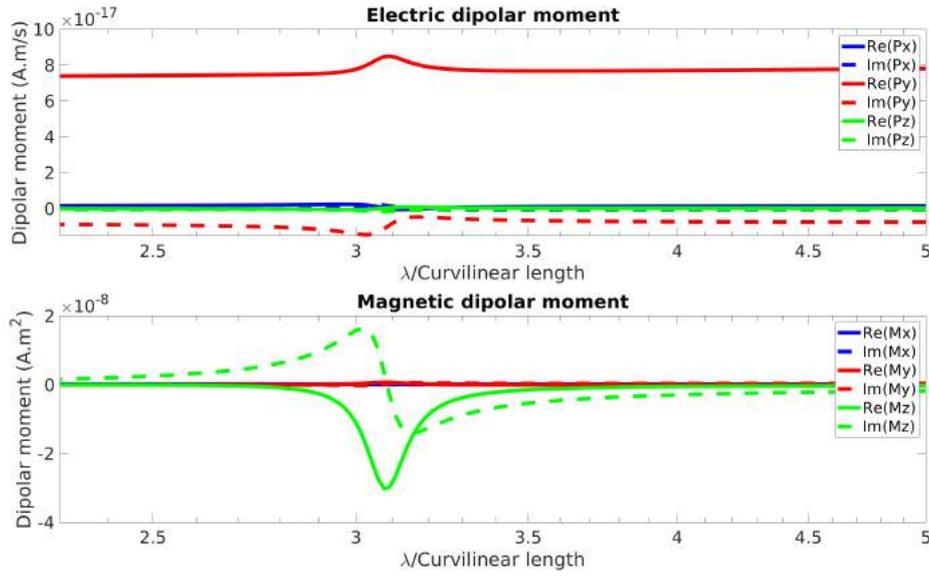


FIGURE 5.12 – Moments dipolaires d’une spirale plate éclairé sous une polarisation non-naturelle. On observe une réponse magnétique orientée selon l’axe z tandis que la méthode d’homogénéisation scalaire requière une réponse selon l’axe y, colinéaire à l’excitation magnétique.

rayonnement prédisait un comportement principalement magnétique que l’on retrouve effectivement par la méthode de Nicolson et Ross. On observe de faibles fluctuations de permittivité tandis qu’une résonance importante est bien visible en perméabilité, à la fréquence prédite par l’étude multipolaire.

D’autres approches prennent en compte la contribution des proches voisins de manière analytique par intégration des fonctions de Green permettant de déduire des coefficients de couplages [111] [118]. Une approche similaire pourrait permettre d’obtenir de meilleurs résultats pour des paramètres de maille faible en prenant en compte de manière plus précise les couplages entre méta-atomes.

5.4.3 Limites du modèle

Afin de mettre en évidence les limites du modèle scalaire, nous avons mis au point un cas d’étude pour lequel la méthode ne fonctionne pas. Dans ce cas d’étude, la spirale est éclairée par une polarisation non "naturelle". Ainsi la réponse électrique et la réponse magnétique ne sont pas orientées selon les champs électriques et magnétiques incidents. Les résultats comparant la méthode scalaire et la méthode de Nicolson-Ross sont données pour la spirale plate à la figure 5.13. La décomposition multipolaire donnée dans la figure 5.12 met en évidence un effet de bianisotropie qui n’est prise en compte ni dans la méthode de Nicolson-Ross ni dans la méthode d’inversion de Clausius-Mossotti scalaire. Afin de déterminer les propriétés effectives de particules à comportement dipolaire dans le cas général, il est nécessaire de prendre en compte une équation constitutive plus

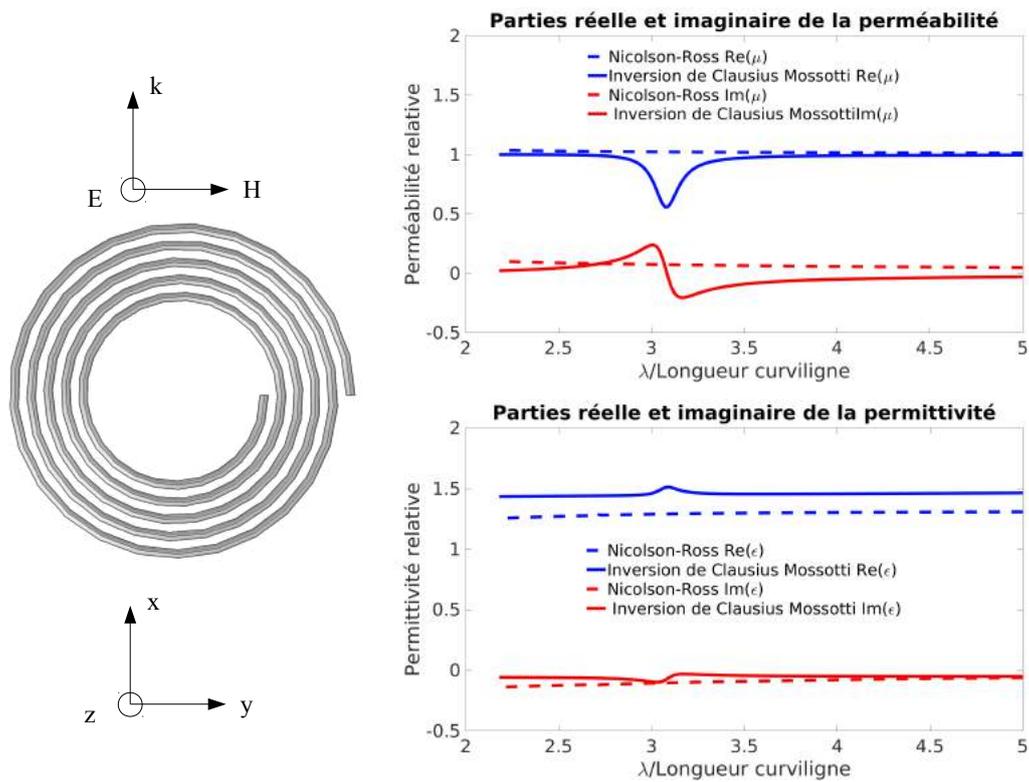


FIGURE 5.13 – Résultats de l’homogénéisation d’une spirale plate éclairé sous une polarisation non-naturelle. On observe une mauvaise concordance entre les méthodes d’homogénéisation, car les hypothèses faites sur les orientations des dipôles induits ne sont pas valides.

générale que celle donnée par l'équation 5.27.

5.5 Homogénéisation bi-anisotrope

5.5.1 Méthode

Dans cette partie l'objectif consiste à prendre en compte une équation constitutive très générale permettant de décrire n'importe quel réseau de méta-atome. Prenons l'équation générale des matériaux bi-anisotropes telle que décrite dans [50] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\epsilon}} & \bar{\bar{a}} \\ \bar{\bar{b}} & \bar{\bar{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Dans cette équation matricielle, 36 paramètres sont à déterminer pour connaître parfaitement le comportement du matériau. La polarisabilité d'un méta-atome dans ces conditions prend une forme similaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\alpha}}_e & \bar{\bar{\alpha}}_{em} \\ \bar{\bar{\alpha}}_{me} & \bar{\bar{\alpha}}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{loc} \\ \mathbf{B}_{loc} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Le vecteur de gauche est constitué des moments dipolaires électriques et magnétiques, tandis que le vecteur de droite est constitué des champs locaux. La matrice centrale est composée de 36 coefficients de polarisabilité décrivant la réponse du méta-atome aux champs extérieurs appliqués. Comme pour la méthode scalaire, il est nécessaire de réaliser la simulation d'un méta-atome en espace libre pour pouvoir déterminer ses coefficients de polarisabilité. Cependant, avec une seule condition d'éclairage il n'est pas possible de déterminer l'ensemble des paramètres. Ainsi, des simulations sous différentes polarisations et incidences seront nécessaires pour acquérir suffisamment d'informations pour déterminer tous les paramètres de la matrice.

En réalisant 6 simulations différentes impliquant des ondes planes de différentes polarisations et incidences, on peut construire l'équation matricielle suivante à partir de l'équation 5.32 :

$$\bar{\bar{R}} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\alpha}}_e & \bar{\bar{\alpha}}_{em} \\ \bar{\bar{\alpha}}_{me} & \bar{\bar{\alpha}}_m \end{pmatrix} \cdot \bar{\bar{S}} \quad (5.33)$$

avec

$$\bar{\bar{R}} = \begin{pmatrix} p_x^1 & p_x^2 & p_x^3 & p_x^4 & p_x^5 & p_x^6 \\ p_y^1 & p_y^2 & p_y^3 & p_y^4 & p_y^5 & p_y^6 \\ p_z^1 & p_z^2 & p_z^3 & p_z^4 & p_z^5 & p_z^6 \\ m_x^1 & m_x^2 & m_x^3 & m_x^4 & m_x^5 & m_x^6 \\ m_y^1 & m_y^2 & m_y^3 & m_y^4 & m_y^5 & m_y^6 \\ m_z^1 & m_z^2 & m_z^3 & m_z^4 & m_z^5 & m_z^6 \end{pmatrix} ; \quad \bar{\bar{S}} = \begin{pmatrix} E_x^1 & E_x^2 & E_x^3 & E_x^4 & E_x^5 & E_x^6 \\ E_y^1 & E_y^2 & E_y^3 & E_y^4 & E_y^5 & E_y^6 \\ E_z^1 & E_z^2 & E_z^3 & E_z^4 & E_z^5 & E_z^6 \\ B_x^1 & B_x^2 & B_x^3 & B_x^4 & B_x^5 & B_x^6 \\ B_y^1 & B_y^2 & B_y^3 & B_y^4 & B_y^5 & B_y^6 \\ B_z^1 & B_z^2 & B_z^3 & B_z^4 & B_z^5 & B_z^6 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Les matrices R et S sont obtenues par concaténation des vecteurs des 6 différentes simulations :

- R la matrice de réaction, définie pour $i=1$ à 3 par $R_{ij} = p_j^i$ et pour $i=4$ à 6 par $R_{ij} = m_j^i$, en notant p_j^i et m_j^i la j^{eme} composante du dipôle électrique et magnétique pour la i^{eme} simulation.
- S la matrice source définie pour $i=1$ à 3 par $R_{ij} = E_j^i$ et pour $i=4$ à 6 par $R_{ij} = B_j^i$, en notant E_j^i et B_j^i la j^{eme} composante du champ local électrique et magnétique pour la i^{eme} simulation.

Les simulations sont réalisées en espace libre, on fait donc l'hypothèse comme précédemment que le champ local correspond au champ de l'onde plane d'excitation. On définit un jeu de 6 ondes planes indépendantes polarisées linéairement, ce qui nous permet d'obtenir une matrice S inversible. Pour la suite de cette partie, nous avons choisi les ondes planes définies dans la matrice S suivante :

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & E \\ 0 & 0 & E/c & 0 & E/c & 0 \\ E/c & 0 & 0 & 0 & 0 & -E/c \\ 0 & -E/c & 0 & -E/c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Avec E l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente, identique dans tous les cas de figure et c la vitesse de la lumière dans le vide. On vérifie informatiquement que la matrice S est bien inversible, ce qui signifie que les ondes planes choisies n'apportent aucune information redondante et qu'aucune configuration ne peut être obtenue par combinaison linéaire des autres. La matrice R, quant à elle, est déterminée par extraction des moments dipolaires électriques et magnétiques dans les 6 simulations. On détermine les polarisabilités grâce à une inversion de la matrice S dans l'équation 5.33. Nous poursuivons alors notre raisonnement en cherchant à lier ce tenseur de polarisabilité anisotrope au tenseur des propriétés homogénéisées de l'équation constitutive 5.31.

En poursuivant l'analogie avec la méthode scalaire, il est nécessaire de construire un analogue bi-anisotrope de la relation de Clausius-Mossotti, permettant de lier les coefficients de polarisabilité aux coefficients de l'équation 5.31. Dans un premier temps on cherche à établir un lien entre les moments dipolaires et les champs électrique et magnétique, à l'aide des coefficients de polarisabilité. En considérant un réseau de méta-atomes, le champ local ne sera plus égal au seul champ de l'onde incidente mais au contraire la contribution des voisins est impactante. En prenant des hypothèses similaires à celles faites dans le paragraphe précédent, on peut écrire le champ local électrique.

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (5.36)$$

avec \mathbf{P} la polarisation électrique du milieu. L'analogie magnétique tel que défini dans la référence [117] nous donne :

$$\mathbf{B}_{loc} = \mathbf{B} - \frac{2\mu_0\mathbf{M}}{3} \quad (5.37)$$

Il est possible de lier les polarisations électrique et magnétique aux moments dipolaires des méta-atomes en faisant intervenir le volume V d'une maille unitaire :

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V}$$

Le champ local peut alors être remplacé dans l'équation 5.32 en utilisant les équations 5.36 et 5.37 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_e & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{3V\epsilon_0} \\ \mathbf{B} - \frac{2\mu_0\mathbf{m}}{3V} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Après quelques manipulations de l'équation 5.39 on obtient l'équation liant les moments dipolaires au champs électrique \mathbf{E}_b et magnétique \mathbf{B}_b de l'onde plane.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \left[\bar{I}_6 - \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_e & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3V\epsilon_0}\bar{I}_3 & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu_0}{3V}\bar{I}_3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_e & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{B}_b \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Nous avons donc obtenu tel que nous le souhaitions, l'équation liant les moments dipolaires au champs électrique et magnétique en utilisant la polarisabilité des méta-atomes. Afin de manipuler plus simplement cette équation par la suite, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}'_e & \bar{\alpha}'_{em} \\ \bar{\alpha}'_{me} & \bar{\alpha}'_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{B}_b \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Les coefficients α' sont déduits par identification avec l'équation 5.40. On peut alors vérifier que si le volume V de la cellule unité augmente, alors les nouvelles pseudo-polarisabilités définies dans 5.41 tendent vers les polarisabilités de l'équation 5.32.

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}'_e & \bar{\alpha}'_{em} \\ \bar{\alpha}'_{me} & \bar{\alpha}'_m \end{pmatrix} \xrightarrow{V \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_e & \bar{\alpha}_{em} \\ \bar{\alpha}_{me} & \bar{\alpha}_m \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

L'équation 5.42 exprime le fait que si la densité de méta-atome est très faible dans le méta-matériau, alors l'effet des voisins sur le champ local de l'une des particules sera négligeable. Dans ce cas, le champ local est égal au champ de l'onde plane incidente.

Il nous reste désormais à manipuler l'équation 5.31 afin d'obtenir une équation similaire à 5.40 utilisant des susceptibilités plutôt que les polarisabilités. Définissons les tenseurs de susceptibilités bi-anisotropes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \epsilon_0 \bar{\chi}_e \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \bar{\chi}_{em} \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \bar{\chi}_m \cdot \mathbf{H} + \bar{\chi}_{me} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Cette définition fait intervenir les champs de l'onde incidente et les vecteurs polarisation \mathbf{P} et \mathbf{M} que l'on peut facilement relier aux moments dipolaires grâce à l'équation

5.38. Il nous reste maintenant à changer le champ H en un champ B pour pouvoir procéder à une identification avec l'équation 5.40. Le lien entre ces deux grandeurs est obtenu grâce à l'équation constitutive 5.31 :

$$\mathbf{B} = \bar{b} \cdot \mathbf{E} + \bar{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (5.44)$$

Cette équation peut être réécrite :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \bar{\chi}_{me} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m) \cdot \mathbf{H} \quad (5.45)$$

Il est alors possible d'isoler \mathbf{H} et de l'écrire en fonction de \mathbf{B} et \mathbf{E} :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1} \cdot (\mathbf{B} - \mu_0 \bar{\chi}_{me} \mathbf{E}) \quad (5.46)$$

On peut remplacer \mathbf{H} avec l'expression 5.46 dans l'équation 5.43, le système peut être écrit sous forme matricielle :

$$\frac{1}{V} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 (\bar{\chi}_e - \bar{\chi}_{em} (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1} \bar{\chi}_{me}) & \frac{\epsilon_0 \bar{\chi}_{em} (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1}}{\mu_0} \\ \bar{\chi}_{me} - \bar{\chi}_m (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1} \bar{\chi}_{me} & \frac{\bar{\chi}_m (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1}}{\mu_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Les équations 5.40 et 5.47 lient toutes les deux la réponse microscopique dipolaire d'un méta-atome avec les champs extérieurs. On peut alors effectuer une identification bloc par bloc afin de lier les grandeurs microscopiques aux grandeurs macroscopiques.

$$\begin{aligned} \text{Bloc 22 : } \bar{\chi}_m &= \left(\bar{I}_3 - \frac{\mu_0 \bar{\alpha}'_m}{V} \right)^{-1} \frac{\mu_0 \bar{\alpha}'_m}{V} \\ \text{Bloc 12 : } \bar{\chi}_{em} &= \frac{\mu_0}{\epsilon_0 V} \bar{\alpha}'_{em} (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m) \\ \text{Bloc 21 : } \bar{\chi}_{me} &= \left[\bar{I}_3 - \bar{\chi}_m (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1} \right]^{-1} \frac{\bar{\alpha}'_{me}}{V} \\ \text{Bloc 11 : } \bar{\chi}_e &= \frac{\bar{\alpha}'_e}{V \epsilon_0} + \bar{\chi}_{em} (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m)^{-1} \bar{\chi}_{me} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Le premier bloc à calculer est le bloc 22 permettant d'obtenir la susceptibilité $\bar{\chi}_m$ nécessaire au calcul des autres blocs. Ensuite, les blocs 12 et 21 peuvent être calculés afin d'obtenir $\bar{\chi}_{em}$ et $\bar{\chi}_{me}$. Enfin, le bloc 11 permet de trouver $\bar{\chi}_e$. Une fois les susceptibilités calculées, il ne reste plus qu'à calculer les tenseurs de permittivité, perméabilité et de couplage électrique-magnétique grâce à l'équation 5.49 :

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon} &= \epsilon_0 (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_e) \\
\bar{\mu} &= \mu_0 (\bar{I}_3 + \bar{\chi}_m) \\
\bar{a} &= \epsilon_0 \bar{\chi}_{em} \\
\bar{b} &= \mu_0 \bar{\chi}_{me}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Dans cette partie nous avons donc trouvé un analogue de la relation de Clausius-Mossotti qui est valide pour tous les matériaux bi-anisotropes qui vérifient l'équation constitutive 5.31. A l'aide des équations développées ici, il devient possible pour tout méta-matériau bi-anisotrope de calculer des paramètres homogénéisés. Afin de réaliser ce calcul, des simulations sous différentes conditions d'excitations sont nécessaires, contrairement à la méthode scalaire qui n'a besoin que d'une seule simulation.

5.5.2 Critère de chiralité

La mise au point de cette méthode d'analyse bi-anisotrope est motivée par la nécessité de connaître correctement le comportement des métamatériaux, quelle que soit l'excitation électromagnétique. En particulier, cet aspect est primordial lorsque l'on s'intéresse à l'intégration de métamatériaux dans des systèmes complexes tels que les capes d'invisibilité ou les super-lentilles. Pour toutes ces applications, la bi-anisotropie n'est pas recherchée bien qu'elle soit parfois utilisée pour créer des permittivités et perméabilités effectives proches de zéro [53] [51]. Dans le cas général, un revêtement d'optique transformationnelle est supposé être fonctionnel pour toute incidence et toute polarisation. Nous ne pouvons donc pas nous appuyer sur ces approches car elles ne sont pas robustes en incidence. En outre, nous sommes à la recherche de métamatériaux présentant une chiralité la plus faible possible. Afin de pouvoir juger de la pertinence des méta-atomes, nous avons mis au point un indicateur de chiralité, construit comme le rapport des réponses chirales et non-chirales :

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_0} \frac{\|\bar{\chi}_{em}\|}{\|\bar{\chi}_e\|} + Z_0 \frac{\|\bar{\chi}_{me}\|}{\|\bar{\chi}_m\|} \right) \tag{5.50}$$

L'impédance du vide Z_0 intervient car il est égal au rapport entre le champ \mathbf{E} et le champ \mathbf{H} d'excitation. Le premier terme de 5.50 est le rapport de susceptibilité chirale et non chirale en réaction à une excitation électrique, tandis que le deuxième terme est ce même rapport de susceptibilité en réaction à une excitation magnétique. Nous avons construit le critère comme étant une moyenne arithmétique de ces deux termes. La norme matricielle utilisée dans cette définition pour les tenseurs de susceptibilité est la norme de Frobenius explicitée dans 5.51

$$\|A\| = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} \tag{5.51}$$

avec A^* la transposée de la matrice conjuguée.

5.5.3 Application au cas de la spirale plate

Afin de valider notre méthodologie bi-anisotrope, nous l'avons appliquée au cas de la spirale plate présentée dans le tableau 5.1. Les simulations sont réalisées dans des conditions analogues à celle présentées dans la partie précédente, dans laquelle le méta-atome est simulé en espace libre et est entouré de PML pour simuler l'espace infini. On réalise la simulation pour 6 conditions d'excitation différentes et on extrait le champ électrique vectoriel en 8 points pour chacune d'entre elles.

Il est alors possible de déterminer les moments dipolaires électriques et magnétiques à chaque fréquence d'étude et pour chaque condition d'éclairage du méta-atome, puis d'en déduire les tenseurs de polarisabilité grâce à l'équation 5.33. Ensuite on calcule les pseudo-tenseurs de polarisabilité à l'aide des formules 5.40 et 5.41. Finalement, on trouve grâce aux équations de 5.48 les tenseurs de susceptibilité, puis la permittivité, la perméabilité et les tenseurs de couplage à l'aide de 5.49.

Les résultats du calcul avec la spirale plate comme méta-atome sont donnés sur la figure 5.14 pour la perméabilité et la permittivité et sur la figure 5.15 pour les tenseurs de couplage. Nous avons à nouveau pris comme paramètre de maille 2.8 cm, ce qui est relativement faible au regard des dimensions du méta-atome. Ce choix nous permet d'obtenir une densité élevée de particules dans le méta-matériau et ainsi espérer une réponse forte de celui-ci. Les données des figures 5.14 et 5.15 sont exposées sous forme tensorielle sur toute la plage de fréquence d'étude.

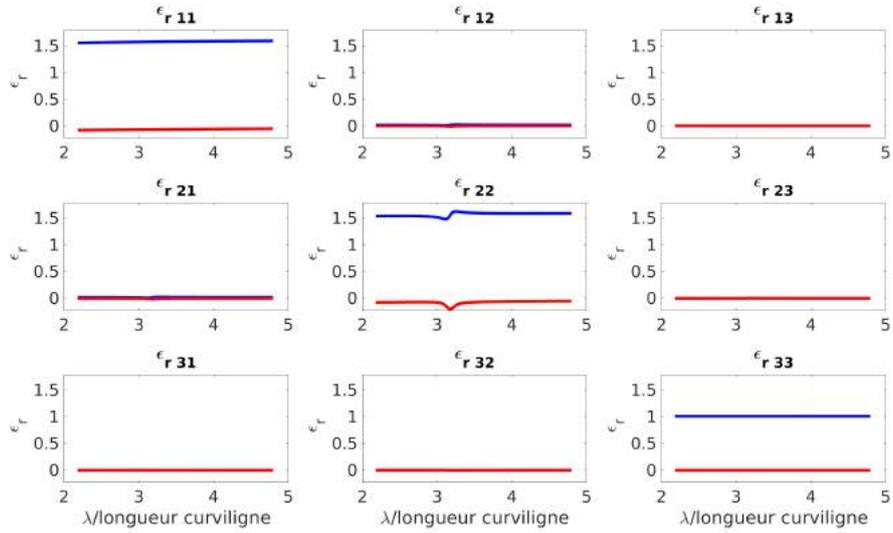
On observe tout d'abord que les tenseurs de permittivité et de perméabilité sont nuls en dehors de la diagonale sur toute la plage de fréquence d'étude. Ceci signifie que les vecteurs x , y et z sont les vecteurs propres de ces tenseurs. C'est un constat plutôt rassurant étant donné que la géométrie a été réalisée en prenant comme repère ces trois vecteurs.

La réponse diélectrique est relativement stable en fréquence, au dessus de l'unité en x et en y , à environ 1.5, tandis qu'elle est à 1 selon z . Il est facile d'expliquer ce phénomène par une analyse géométrique de la spirale : la dimension selon x et y est de l'ordre de 2 cm, tandis qu'elle n'est que de 1 mm, soit 20 fois moins, selon z . Il est donc possible de générer un moment dipolaire électrique plus élevé dans les directions x et y que dans la direction z .

Le tenseur de perméabilité possède des propriétés plus intéressantes que le tenseur de permittivité. Les composantes selon x et y sont stables en fréquences et proches de l'unité tandis que la composante selon z voit apparaître une résonance de type lorentzienne. Grâce à cette résonance, la perméabilité μ_{zz} prend des valeurs proches de zéros, voire négatives, sur une plage de fréquence autour de la fréquence de résonance. Ceci permet d'imaginer des potentielles applications de ce méta-atome pour la réalisation de matériaux à μ faible (Mu Near Zero) ou de matériau à μ négatif.

Les tenseurs de couplage a et b donnés dans la figure 5.15 sont nuls partout sauf en position 13 et 23 pour le tenseur a et en position 31 et 32 pour le tenseur b . Cela montre

Permittivités



Perméabilités

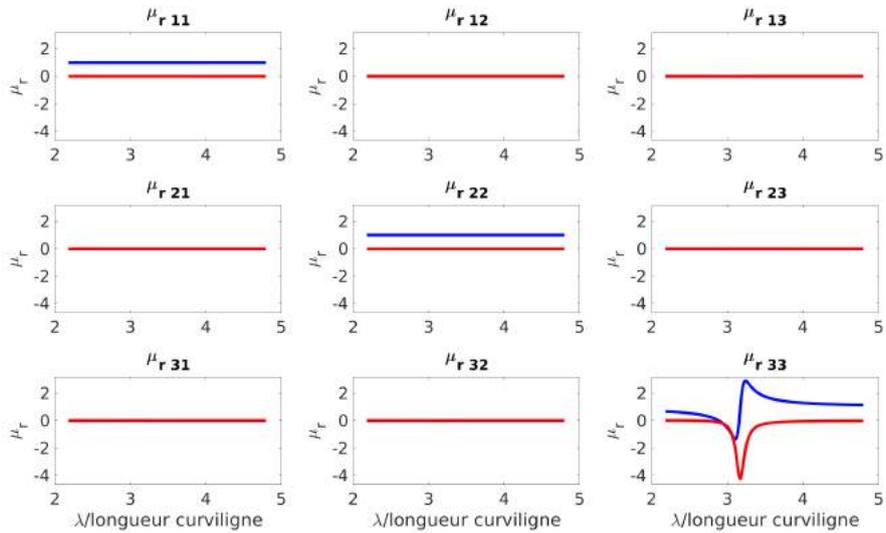
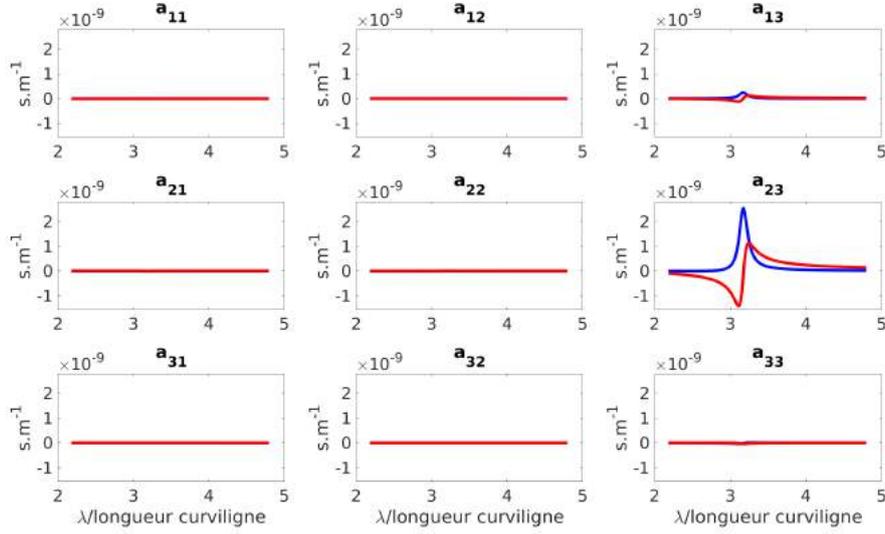


FIGURE 5.14 – Application de la méthode bianisotrope à la spirale plate : tenseurs de permittivités (en haut) et perméabilités (en bas). On observe que seuls les éléments diagonaux sont non-nuls.

Tenseur a



Tenseur b

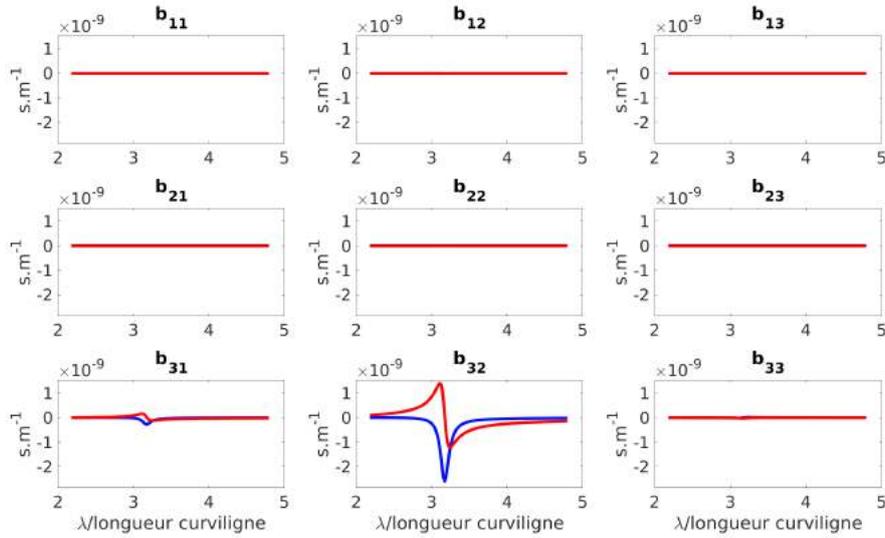


FIGURE 5.15 – Application de la méthode bi-anisotrope à la spirale plate : tenseur a (en haut) et tenseur b (en bas). Seuls les coefficients a_{13} et a_{23} sont non nuls pour le tenseur a de même pour le tenseur b avec les coefficients b_{31} et b_{32} . On remarque également que $a_{13} = -b_{31}$ et $a_{23} = -b_{32}$, ce qui nous permet de vérifier pour ce matériau la relation d’Onsager Casimir : ce matériau est donc réciproque, conformément à ce qui pouvait être attendu.

bien que cette particule présente une certaine chiralité que notre méthode d'extraction permet de déceler et de quantifier.

Il est difficile de comparer ces résultats à la méthode de Nicolson et Ross puisqu'il ne semble pas au premier abord que le méta-matériau puisse être assimilé à un magnéto-diélectrique classique étant donné les tenseurs de couplage a et b . Pour valider nos résultats, nous pouvons cependant nous tourner vers des études analytiques et en particulier nous nous intéressons à l'étude d'Isik et Esselle [119] décrivant le comportement bi-anisotrope de spirales monofilaires, bifilaires, trifilaires et quadrifilaires. Nous étudions ici une spirale monofilaire et nos résultats peuvent être confrontés à leurs calculs théoriques pour validation. D'après [119], le tenseur des propriétés effectives d'un méta-matériau constitué d'un réseau cubique de spirales monofilaires est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon} & \bar{a} \\ \bar{b} & \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \epsilon_{r11} & \epsilon_0 \epsilon_{r12} & 0 & 0 & 0 & a_{13} \\ \epsilon_0 \epsilon_{r21} & \epsilon_0 \epsilon_{r22} & 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \epsilon_{r33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \mu_{r11} & \mu_0 \mu_{r12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \mu_{r21} & \mu_0 \mu_{r22} & 0 \\ b_{31} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & \mu_0 \mu_{r33} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Nous pouvons constater que nos résultats semblent en accord avec la théorie sur ce point. Les composantes nulles selon Isik et Esselle le sont aussi pour nous d'après la figure 5.15. De plus, le principe d'Onsager-Casimir [120] [121] [122] prédit une relation liant les tenseurs a et b :

$$\bar{a} = -\bar{b}^T \quad (5.53)$$

On observe bien les égalités $a_{13} = -b_{31}$ et $a_{23} = -b_{32}$ sur toute la bande fréquentielle, tandis que toutes les autres composantes sont nulles. Les résultats obtenus par notre méthode ne présupposaient pas de la réciprocité du méta-matériau, mais le fait de satisfaire au principe de réciprocité d'Onsager-Casimir est une validation supplémentaire puisqu'aucun matériau non-réciproque n'est ici utilisé.

5.5.4 Application du critère de chiralité

D'après [119], la spirale monofilaire est chirale tandis que les spirales bifilaires, trifilaires et quadrifilaires ne le sont pas. Afin de tester la validité de notre approche ainsi que celle de notre critère de chiralité, nous calculons le critère de chiralité sur la spirale plate monofilaire présentée précédemment et sur une spirale bifilaire. Nous nous attendons à trouver un critère de chiralité plus élevé dans le cas monofilaire tandis qu'il doit être négligeable au premier ordre dans le cas bifilaire.

Les résultats du calcul de chiralité sont présentés à la figure 5.16 et confirment les calculs réalisés par Isik et Esselle [119] : on observe une chiralité non nulle dans le cas de la spirale monofilaire, tandis que la spirale bifilaire ne l'est pratiquement pas. Ce constat avait été prédit en considérant la symétrie de la structure bifilaire que ne possède pas la structure monofilaire. La chiralité représente selon notre critère jusqu'à 60% de la

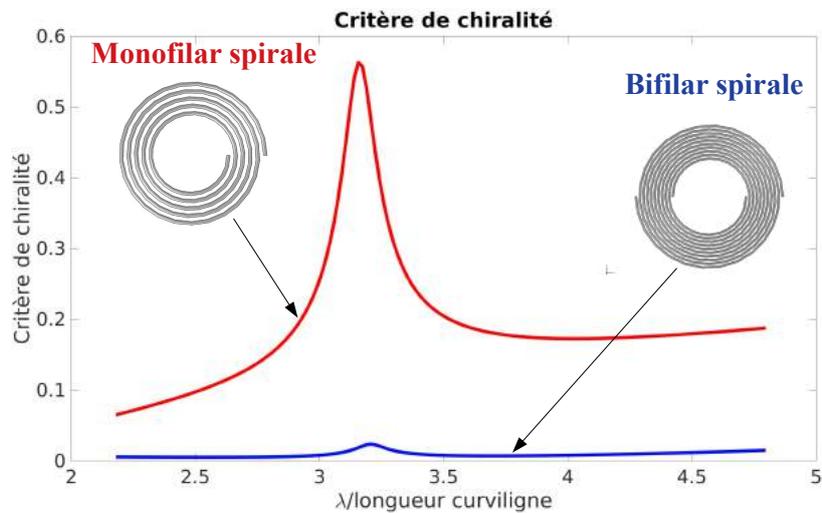


FIGURE 5.16 – Comparaison entre le coefficient de chiralité pour la spirale monofilaire et la spirale bifilaire. On remarque que la réponse chirale de la spirale monofilaire atteint jusqu'à 60% de la réponse totale du méta-matériau à la fréquence de résonance tandis qu'il n'est que d'environ 3% à cette même fréquence pour la spirale bifilaire.

puissance rayonnée dans le cas monofilaire tandis qu'elle n'excède pas 3% dans le cas bifilaire.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé les méthodes d'homogénéisation de matériaux composites électromagnétiques. Diverses lois de mélanges ont été développées depuis le XX^{ème} siècle afin de définir des paramètres effectifs traduisant le comportement homogénéisé. Nous avons cherché à mettre au point une méthode d'étude des métamatériaux se basant sur la décomposition multipolaire de leur champ lointain. La mise en place d'une équation matricielle nous a permis de réaliser à l'aide de seulement quelques points d'extraction une décomposition du champ à l'ordre 1 et à l'ordre 2. Cette approche peut se généraliser à l'ordre n .

A l'aide de cette décomposition multipolaire, nous avons, par inversion de la relation de Clausius-Mossotti, déterminé les permittivités et perméabilités équivalentes d'un réseau de la particule unitaire. Ces équations permettent de faire le lien entre le comportement microscopique de la particule et la réponse macroscopique du matériau. Cette méthode d'homogénéisation est ensuite généralisée aux matériaux bi-anisotropes, ce qui élargit considérablement son domaine de validité et permet d'affiner la compréhension physique du comportement des méta-atomes.

6 Adaptation fréquentielle d'une cape

Sommaire

6.1	Introduction	164
6.2	Impact de la dispersion fréquentielle sur la bande de fonctionnement . . .	165
6.2.1	État de l'art	165
6.2.2	Définition du cas d'étude	165
6.2.3	Résultats de la simulation et analyse	169
6.3	Adaptation en fréquence de la cape	171
6.3.1	Équations d'état de la cape d'invisibilité sphérique	171
6.3.2	Conditions sur ϵ_r et ϵ_{\perp}	174
6.3.3	Dispersion en fréquence	175
6.3.4	Conception de la cape dispersive	177
6.3.5	Résultats et analyses	179
6.3.6	Limites de performances	183
6.4	Conclusion	184

6.1 Introduction

Nous avons vu dès le premier chapitre que des permittivités et perméabilités relatives proches de 0 sont requises dans la réalisation de capes d'invisibilité. Nous avons par la suite évoqué dans les chapitres 4 et 5 un moyen permettant d'obtenir ces valeurs inférieures à l'unité via l'utilisation de réseaux d'inclusions résonantes. Cependant, la dispersion en fréquence de ces méta-matériaux réduit considérablement la bande de fonctionnement que l'on peut espérer obtenir sur une cape qui en serait composée. En effet, il n'est à priori pas possible d'obtenir ces valeurs sur une large bande de fréquences puisque ces comportements n'apparaissent que lorsque la structure est résonante, et donc très dispersive par définition. Nous subissons par conséquent la dispersion des méta-matériaux ENZ et MNZ dans les capes d'invisibilité.

Nous montrons dans ce chapitre l'impact de la dispersion des méta-matériaux constituant une cape sphérique sur le fonctionnement de cette dernière. Nous proposons ensuite une méthodologie permettant, de concevoir une cape d'invisibilité sphérique modifiée de sorte à ce qu'elle fonctionne sur une large bande de fréquences, et ce malgré la dispersion fréquentielle du revêtement. Cette méthodologie a fait l'objet en 2019 d'une publication dans Nature Scientific Reports [123].

6.2 Impact de la dispersion fréquentielle sur la bande de fonctionnement

6.2.1 État de l'art

Dans cette partie nous cherchons à évaluer l'impact de la dispersion fréquentielle des ENZ et MNZ sur la bande de fonctionnement d'une cape d'invisibilité sphérique. Des travaux semblables ont été réalisés sur ce sujet [124] [125] et mettent en évidence le fait que les revêtements d'OT ne fonctionnent de ce fait que sur des bandes très étroites.

Kildishev et al. ont publié une étude en 2009 [126] dans laquelle est traitée la problématique de l'ingénierie de la dispersion. Sous condition d'une approximation d'ordre 1 de la dispersion fréquentielle du revêtement d'invisibilité, les auteurs donnent une formule permettant de lier la transformation d'espace à la fréquence d'excitation. Ils parviennent ainsi à une condition sur la dispersion permettant le fonctionnement de la cape sur une bande de fréquences, mais concluent cependant par la suite qu'il est très improbable de parvenir à satisfaire cette condition. Par ailleurs, Rajput et Srivastava [127] ont réalisé une simulation d'une cape cylindrique ayant une bande de fonctionnement élargie grâce à une approche perturbative similaire.

Nous cherchons dans ce chapitre à élargir la bande de fonctionnement d'une cape d'invisibilité sphérique en prenant en compte dès le départ que les permittivités et perméabilités sous-unitaires seront dispersives en fréquence.

6.2.2 Définition du cas d'étude

Afin d'évaluer les effets de la dispersion des matériaux sur l'efficacité d'un revêtement d'OT, nous avons réalisé une étude en fréquence d'un revêtement d'invisibilité sphérique dont les propriétés électromagnétiques dans les directions radiales sont dispersives. L'objectif de cette étude consiste à comprendre la sensibilité en fréquence d'une cape d'invisibilité et de répondre aux interrogations concernant la largeur de la bande de fonctionnement. Ce type de simulation peut nous permettre d'illustrer le fait qu'une permittivité ou une perméabilité sous-unitaire ne peuvent être obtenues que sur une bande de fréquences très étroite par des matériaux ou des méta-matériaux.

Considérons une cape d'invisibilité sphérique dont la transformation géométrique est donnée par une compression radiale :

$$f(r) = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} R_2 \quad (6.1)$$

Le profil de permittivité à réaliser dépend de la position dans le revêtement : étant données la géométrie et la transformation utilisée, ce profil présente une symétrie centrale, nous pouvons donc l'exprimer en fonction du rayon, comme indiqué sur la figure 6.1. On note que la permittivité radiale dans ce revêtement est inférieure à l'unité dans toute la cape. Afin de réaliser de telles propriétés dans le revêtement, nous faisons l'hypothèse d'avoir recours à des métamatériaux résonants, tels que ceux développés dans les

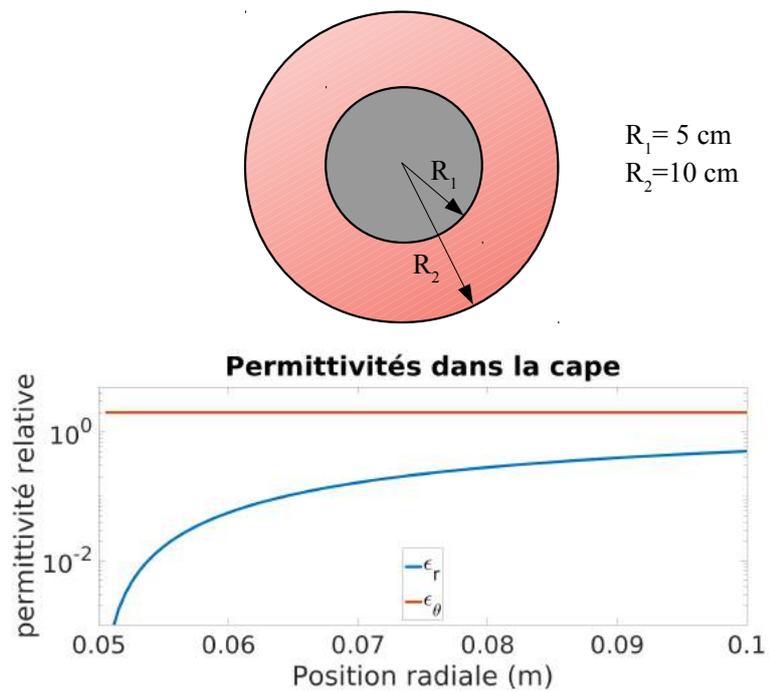


FIGURE 6.1 – Permittivités radiale et orthoradiale dans la cape d’invisibilité sphérique. Dans cet exemple, la valeur du rayon de la sphère cachée vaut 5cm, tandis que le rayon externe du revêtement vaut 10cm. La permittivité orthoradiale est constante égale à 2 et la permittivité radiale tend vers 0 à mesure que l’on se rapproche de la zone cachée.

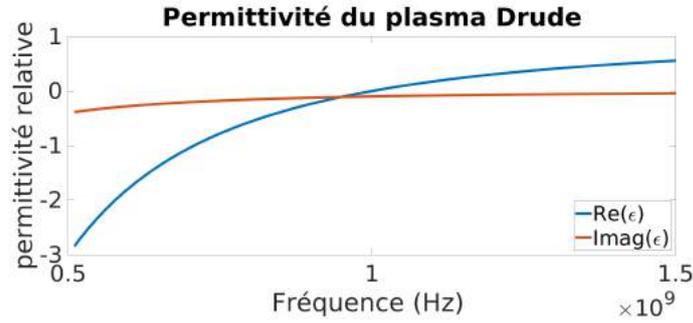


FIGURE 6.2 – Représentation de la permittivité d’un matériau de type plasma aux abords de sa fréquence de coupure. Dans ce graphe, nous avons représenté un plasma dont le produit $\omega_p\tau$ est égal à 10. Dans la suite de l’étude, nous ferons comme approximation que le produit $\omega_p\tau$ est très grand devant 1. Ainsi, les pertes sont négligées et la permittivité est réelle.

chapitres 3 et 4 de ce manuscrit. Nous pouvons imaginer, sans en détailler la structure, qu’une cape d’invisibilité sphérique soit constituée d’un réseau de particules résonantes permettant de réaliser les propriétés ENZ et MNZ requises. Nous n’allons pas ici lister tous les différents profils de dispersions envisageables : prenons pour l’exemple une permittivité et une perméabilité radiale dont le profil de dispersion se comporte comme un plasma près de sa fréquence de résonance, tel que celui présenté sur la figure 6.2. Après la fréquence plasma, la remontée entre 0 et 1 de la permittivité et/ou de la perméabilité dans ce type de profil permet de créer localement les valeurs comprises entre 0 et 1, recherchées pour la fabrication du revêtement.

Nous définissons un profil de permittivité et perméabilité sans pertes, ce qui correspond par exemple à un métal de Drude dont le produit entre la pulsation plasma et le temps de relaxation $\omega_p\tau$ est très grand devant l’unité. Bien que non-physique, cette hypothèse nous permet de nous affranchir l’influence des pertes sur l’efficacité du revêtement. Pour une étude plus poussée concernant l’utilisation d’un matériau réel, la prise en compte des pertes serait bien entendu nécessaire à l’évaluation des performances. L’équation 6.2 donne la partie réelle de la permittivité et de la perméabilité à proximité de la pulsation plasma.

$$\epsilon_{\text{plasma}}(\omega) = \mu_{\text{plasma}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.2)$$

La permittivité radiale dépend de l’éloignement par rapport au centre du système : l’idée consiste à faire correspondre à chaque valeur de r une pulsation plasma donnée afin que la valeur cible soit atteinte à la fréquence f_0 . La figure Fig.6.3 montre le profil de dispersion pour quelques matériaux présentant cette dispersion fréquentielle. A la frontière entre le revêtement d’invisibilité et la zone masquée, la valeur cible pour la permittivité radiale est de 0 : le matériau approprié est donc celui dont la fréquence plasma est égale à la fréquence cible. En s’éloignant du bord interne vers le bord externe du revêtement, on ajuste la valeur cible de permittivité en faisant diminuer progressive-

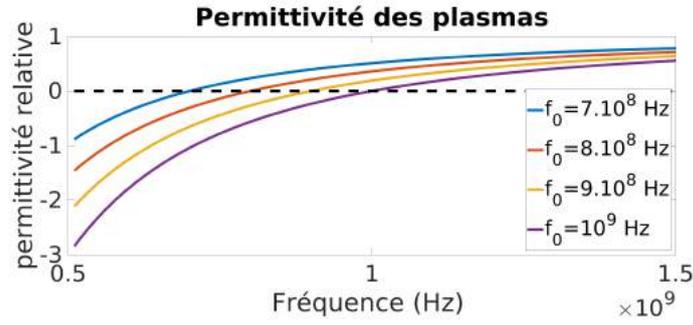


FIGURE 6.3 – Permittivité de plusieurs matériaux de type plasma, en fonction de la fréquence. Il est possible en jouant sur la pulsation plasma des matériaux dans le revêtement, d’obtenir n’importe quelle valeur de permittivité radiale entre 0 et 1 à une fréquence donnée. Ici, les matériaux représentés prennent des valeurs de 0 à 0.5 à la fréquence nominale de 1GHz.

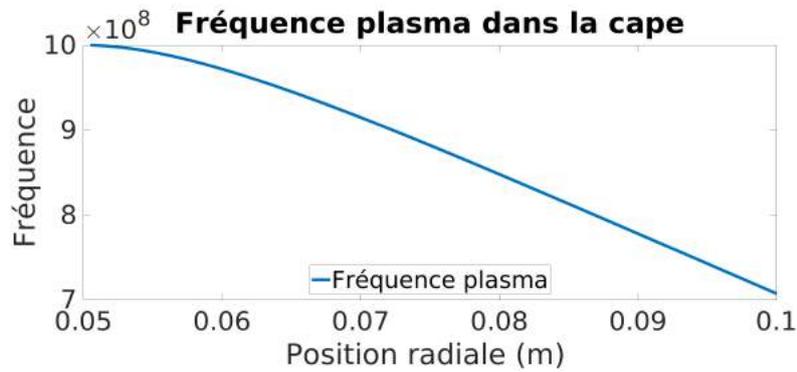


FIGURE 6.4 – Fréquence plasma en fonction de la position dans le revêtement d’invisibilité. Cette fréquence est imposée de sorte à ce que l’invisibilité soit effective à une fréquence de 1GHz.

ment la pulsation plasma locale du revêtement.

On obtient donc la relation entre le rayon et la fréquence plasma du pseudo-matériau décrivant la permittivité radiale en égalisant l’équation 6.2 avec la permittivité radiale à atteindre.

$$1 - \frac{\omega_p(r)^2}{\omega_0^2} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r - R_1}{r} \right)^2 \quad (6.3)$$

On résout cette équation en ω_p , ce qui nous donne la relation entre pulsation plasma et position dans le revêtement :

$$\omega_p(r) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left(\frac{r - R_1}{r} \right)^2} \quad (6.4)$$

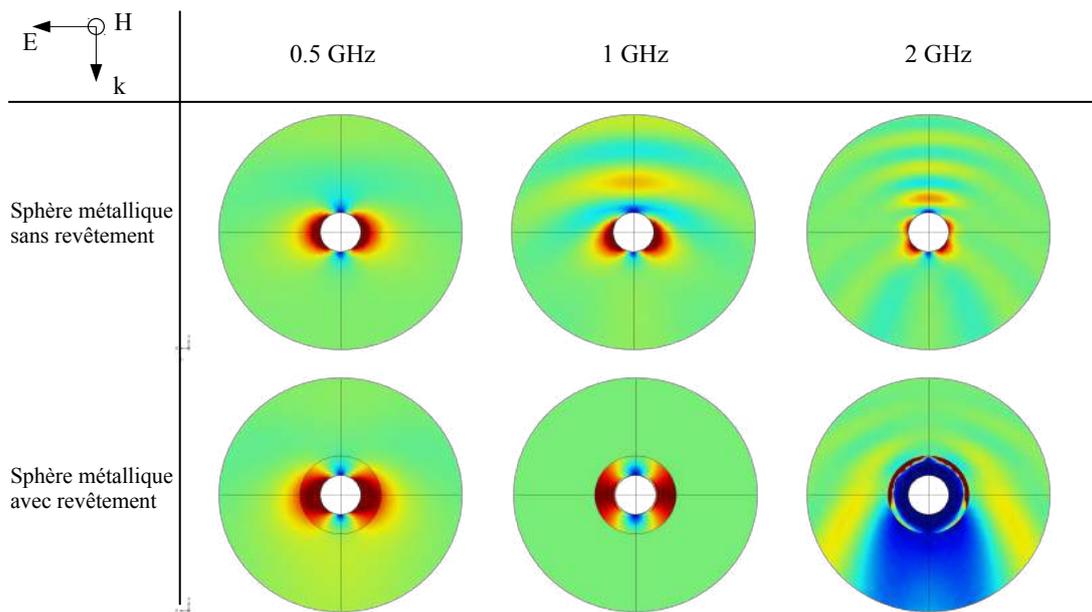


FIGURE 6.5 – Cartes de champs électrique à 0.5, 1 et 2 GHz d’une sphère métallique avec et sans revêtement d’invisibilité. Le revêtement est conçu pour fonctionner à 1GHz. Sa permittivité radiale est dispersive en fréquence, ce qui rend le système fonctionnel sur une bande fréquentielle très étroite.

6.2.3 Résultats de la simulation et analyse

Les simulations du revêtement dispersif en fréquence sont réalisées sous COMSOL Multiphysics à l’aide du module RF. Deux simulations différentes sont réalisées : une simulation de la sphère métallique seule, sans revêtement ainsi qu’une simulation de cette même sphère avec le revêtement d’invisibilité conçu pour fonctionner à 1GHz. L’excitation électromagnétique est une onde plane progressive se propageant dans l’espace libre. Une PML à géométrie sphérique (Perfectly Matched Layer) modélise l’espace libre à l’infini.

Les résultats de la simulation sont donnés pour trois valeurs de fréquence à la figure 6.5. On remarque qu’à 1GHz, fréquence pour laquelle le revêtement a été réalisé, le phénomène de cloaking est bien présent : la carte de champ électrique correspond à ce que l’on retrouve habituellement pour les capes sphériques. A 0.5 et 2 GHz, la cape d’invisibilité ne semble plus jouer correctement son rôle. En effet, on remarque que la norme du champ électrique n’est pas constante égale à 1 en dehors du revêtement, comme elle devrait l’être. Ici, les variations importantes dans l’intensité du champ proche sont la conséquence de la dispersion des matériaux présents dans le revêtement. A 0.5 ou 2GHz, la cape ne joue plus correctement son rôle puisque les valeurs cibles de permittivité et perméabilité radiales données par la figure 6.1 ne sont pas respectées. On observe à 2GHz une zone d’ombre importante en "forward", c’est-à-dire derrière le système en suivant la direction d’éclairement. Cette ombre importante traduit le fait que le revêtement d’invisibilité non-adapté constitue un obstacle plus volumineux, qui perturbe davantage

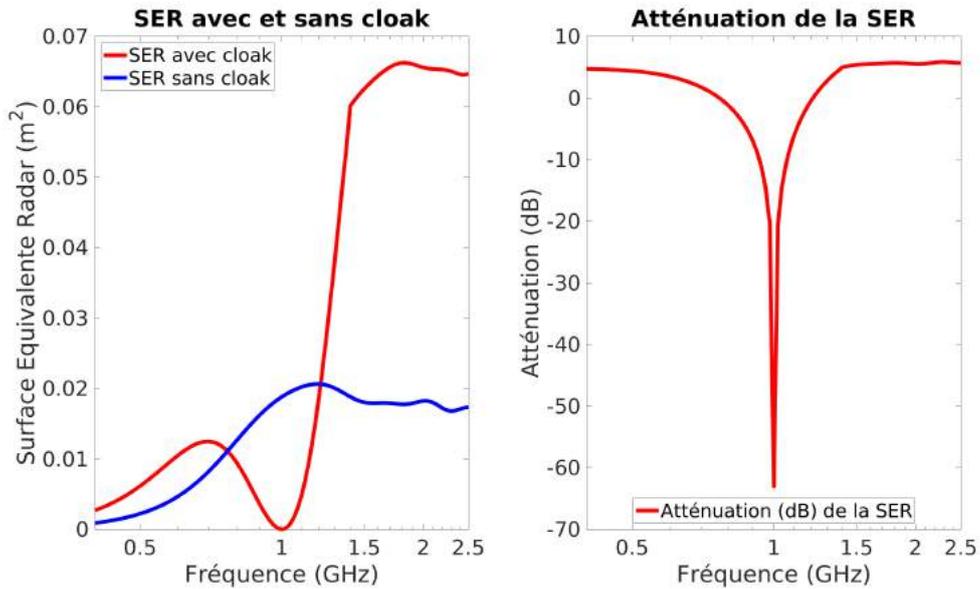


FIGURE 6.6 – SER bistatique et atténuation en dB d’une sphère avec et sans cape d’invisibilité. Les propriétés du revêtement sont dispersives dans la direction radiale et la fréquence de fonctionnement est de 1GHz. L’atténuation à cette fréquence est de -15dB.

la propagation des ondes que ne le fait la sphère métallique seule.

Les surfaces équivalentes radar des dispositifs avec et sans cape sont données dans la figure 6.6. On note une très faible SER pour le dispositif revêtu autour de 1 GHz, la fréquence nominale de fonctionnement. Autour de cette fréquence, la SER augmente très rapidement et dépasse très largement celle de l’objet non revêtu. On valide donc le constat fait à haute fréquence sur les cartes des champs de la figure 6.5.

D’après la figure 6.7, la bande d’atténuation à -10dB est comprise entre 0.93 et 1.06 GHz : la largeur d’intérêt potentiel de ce système n’excède donc pas 10% de largeur de bande. En dehors de la bande [0.73 GHz ; 1.24 GHz] , la SER du système avec revêtement est supérieure à celle du système sans revêtement. Ce phénomène est principalement dû au fait que les dimensions de la sphère revêtu sont supérieures à celles de la sphère métallique, ce qui lui confère une SER plus importante. La réalisation d’une cape d’invisibilité à l’aide de matériaux ou méta-matériaux dispersifs en fréquence semble donc fortement limitée en termes de bande de fonctionnement. Le cas simplifié que nous venons d’étudier, dans lequel la permittivité et la perméabilité radiale suivent des profils de type plasma, montre un cas pour lequel la bande d’utilisation n’excède pas les 10% autour de la fréquence centrale.

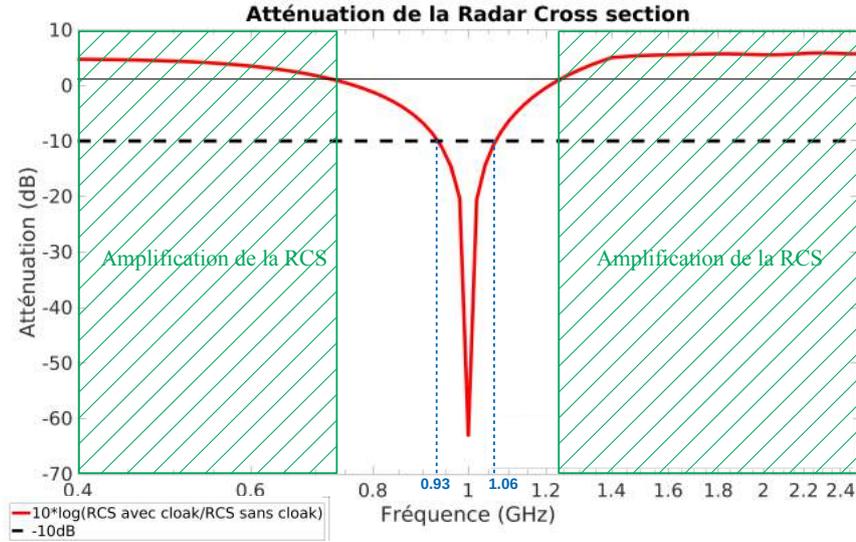


FIGURE 6.7 – Bande de fonctionnement de la cape d’invisibilité sphérique dispersive en fréquence. L’atténuation à 1GHz est de -65dB.

6.3 Adaptation en fréquence de la cape

6.3.1 Équations d’état de la cape d’invisibilité sphérique

Nous avons vu dans le chapitre 1 qu’une déformation géométrique de l’espace décrite par une fonction T est équivalente à un revêtement présentant les propriétés décrites dans les équations 6.5 et 6.6.

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{\bar{\bar{J}}_T^{-1} \bar{\bar{\epsilon}}_{milieu} \bar{\bar{J}}_T^{-T}}{\det(\bar{\bar{J}}_T^{-1})} \quad (6.5)$$

$$\bar{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\bar{J}}_T^{-1} \bar{\bar{\mu}}_{milieu} \bar{\bar{J}}_T^{-T}}{\det(\bar{\bar{J}}_T^{-1})} \quad (6.6)$$

$\bar{\bar{J}}_T^{-1}$ est la matrice jacobienne inverse de la transformation d’espace utilisée et $\bar{\bar{J}}_T^{-T}$ sa transposée, tandis que $\bar{\bar{\epsilon}}_{milieu}$ et $\bar{\bar{\mu}}_{milieu}$ représentent les tenseurs de permittivité et de perméabilité du milieu que l’on veut mimer. Dans le cas classique où l’on souhaite rendre invisible l’objet placé sous le revêtement, les propriétés du milieu sont données par les équation 6.7 et 6.8.

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{milieu} = \epsilon_0 \bar{\bar{I}}_3 \quad (6.7)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{milieu} = \mu_0 \bar{\bar{I}}_3 \quad (6.8)$$

avec ϵ_0 et μ_0 respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique

du vide et $\bar{\bar{I}}_3$ la matrice identité en dimension 3. Considérons maintenant une transformation d'espace par compression radiale en coordonnées sphériques : elle rend invariante l'orientation angulaire (θ, ϕ) du point image mais modifie son éloignement par rapport au point d'origine du repère. On écrit cette transformation comme suit :

$$T(r, \theta, \phi) = (f(r), \theta, \phi) \quad (6.9)$$

avec f une fonction C^1 nécessairement, et réalisant une bijection du segment $[R_1, R_2]$ sur le segment $[0, R_2]$ tandis qu'en dehors de la sphère de rayon R_2 la fonction f est la fonction identité. R_1 et R_2 désignent respectivement le rayon de la sphère que l'on veut rendre invisible et le rayon de la sphère de revêtement. Les éléments de longueurs sont également transformés par T :

$$(dr, r d\theta, r \sin(\theta) d\phi) \xrightarrow{T} (df(r), f(r) d\theta, f(r) \sin(\theta) d\phi) \quad (6.10)$$

La matrice jacobienne de la transformation s'écrit donc :

$$\bar{\bar{J}}_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f(r)}{r} \end{pmatrix} = \bar{\bar{J}}_T^T \quad (6.11)$$

Dans le cas de figure où le milieu ambiant est constitué d'air ou de vide, on obtient donc les tenseurs de permittivité et de perméabilité suivants en injectant la jacobienne dans l'équation 6.5 :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{f(r)^2}{r^2} & \frac{1}{\frac{\partial f(r)}{\partial r}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(r)}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f(r)}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

On remarque que ce tenseur est diagonal, nous pouvons donc introduire les notations ϵ_r et ϵ_\perp , désignant respectivement la composante radiale et les composantes orthoradiales de la permittivité relative, telles qu'on ait :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\perp(r) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\perp(r) \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Par identification des composantes des matrices dans les équations 6.12 et 6.13, on écrit le système 6.14 liant les permittivités du système à la fonction de compression radiale f :

$$\begin{cases} \epsilon_r(r) = \frac{f(r)^2}{r^2} \frac{1}{\frac{\partial f(r)}{\partial r}} \\ \epsilon_{\perp}(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \end{cases} \quad (6.14)$$

On remarque qu'il existe dans le cas des transformations par compression radiale sphérique un lien très direct entre ϵ_{\perp} et f , puisque ces grandeurs sont égales, à une dérivée près selon la variable r . En remplaçant la dérivée de f par ϵ_{\perp} , le système 6.14 devient :

$$\begin{cases} \epsilon_r(r) \epsilon_{\perp}(r) = \frac{f(r)^2}{r^2} \\ \epsilon_{\perp}(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \end{cases} \quad (6.15)$$

Nous cherchons à déterminer ϵ_{\perp} en fonction de ϵ_r et réciproquement, sans l'intervention de la transformation mathématique T . Pour cela, nous intégrons la seconde équation de 6.15 pour déterminer $f(r)$ en fonction de ϵ_{\perp} , puis nous exprimons à l'aide de la première équation de 6.15 ϵ_r en fonction de ϵ_{\perp} uniquement.

$$\epsilon_r(r) = \frac{1}{\epsilon_{\perp}(r)} \frac{\left(\int_{R_1}^r \epsilon_{\perp}(s) ds \right)^2}{r^2} \quad (6.16)$$

L'équation 6.16 nous permet, connaissant ϵ_{\perp} de déterminer ϵ_r . Cette équation suppose toutefois une conditions 6.23 portant sur l'intégrale de ϵ_{\perp} que nous discutons dans la section suivante. Ainsi, si ϵ_{\perp} vérifie 6.23, la permittivité radiale calculée par cette formule convient à la réalisation d'un revêtement d'invisibilité. Cependant, dans l'exemple de la cape basée sur un matériau de type plasma que nous traitons, c'est ϵ_r que nous imposons, et ϵ_{\perp} que nous cherchons à déterminer. Pour obtenir une équation similaire donnant ϵ_{\perp} en fonction de ϵ_r , quelques calculs doivent être réalisés.

Posons la fonction α définie de la manière suivante :

$$\alpha(r) = \sqrt{\epsilon_r(r) \epsilon_{\perp}(r)} \quad (6.17)$$

Considérons maintenant la relation suivante, issue du système 6.15, ainsi que sa dérivée selon r :

$$\begin{aligned} f(r) &= r \sqrt{\epsilon_r(r) \epsilon_{\perp}(r)} \\ \frac{\partial f(r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{\epsilon_r(r) \epsilon_{\perp}(r)} \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Les calculs nous mènent alors à une équation différentielle en α :

$$\frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} + \frac{\alpha(r)}{r} = \frac{\alpha(r)^2}{\epsilon_r(r) r} \quad (6.19)$$

Cette équation différentielle est une équation de Bernouilli qui peut se résoudre connaissant la condition limite en α , à $r = R_2$. On obtient alors l'expression pour α :

$$\alpha(r) = \frac{1}{r \left(\frac{1}{R_2} + \int_{R_2}^r \frac{-1}{s^2 \epsilon_r(s)} ds \right)} \quad (6.20)$$

Nous obtenons finalement ϵ_{\perp} comme fonction de ϵ_r :

$$\epsilon_{\perp}(r) = \frac{1}{\epsilon_r(r) r^2 \left(\frac{1}{R_2} + \int_{R_2}^r \frac{-1}{s^2 \epsilon_r(s)} ds \right)^2} \quad (6.21)$$

Nous venons d'écrire des relations permettant d'obtenir la permittivité radiale en fonction de la permittivité orthoradiale et réciproquement, sans que n'intervienne la fonction de transformation d'espace. En d'autres termes, la connaissance d'une seule composante de permittivité permet de déduire directement la structure entière de la cape.

6.3.2 Conditions sur ϵ_r et ϵ_{\perp}

Il reste cependant préciser certaines conditions que doit respecter la fonction f qui ne sont jusqu'à présent pas intervenues. En effet, la fonction de transformation f doit réaliser une bijection du segment $[R_1, R_2]$ sur le segment $[0, R_2]$, de sorte à ce que l'espace compris entre $r = R_1$ et $r = R_2$ soit vu comme l'espace libre entre $r = 0$ et $r = R_2$ du point de vue des champs électromagnétiques. Les conditions sur f , telles qu'établies dans le premier chapitre, sont donc :

$$\begin{cases} f(R_2) = R_2 \\ f(R_1) = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Nous cherchons donc à traduire du point de vue des permittivités ces conditions nécessaires à la réalisation d'une cape fonctionnelle. D'après la deuxième équation du système 6.15, nous pouvons écrire l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \epsilon_{\perp}(r) dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial f(r)}{\partial r} dr \\ &= f(R_2) - f(R_1) \end{aligned}$$

On déduit alors une condition intégrale sur ϵ_{\perp} en utilisant les égalités de 6.22 :

$$\int_{R_1}^{R_2} \epsilon_{\perp}(r) dr = R_2 \quad (6.23)$$

L'équation 6.23 est une condition nécessaire sur ϵ_{\perp} pour pouvoir réaliser un revêtement d'invisibilité entre $r = R_1$ et $r = R_2$. Remarquons au passage que l'on peut déduire de cette condition intégrale la valeur moyenne de la fonction ϵ_{\perp} sur le segment $[R_1, R_2]$:

$$\langle \epsilon_{\perp}(r) \rangle_{[R_1, R_2]} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad (6.24)$$

La valeur moyenne de ϵ_{\perp} est égale au rapport entre le rayon extérieur de la cloak et son épaisseur. L'égalité 6.24 nous donne une indication sur l'ordre de grandeur des valeurs à atteindre en termes de permittivité relative orthoradiale dans un revêtement d'invisibilité sphérique. En effet, pour une sphère de rayon R_1 fixé, plus le revêtement de cloaking sera fin, autrement dit plus $R_2 - R_1$ sera petit, plus la valeur moyenne de ϵ_{\perp} sera grande. A titre d'exemple, si l'on souhaite réaliser un revêtement mince, dont l'épaisseur soit 100 fois plus petite que le rayon de l'objet à masquer, alors la valeur moyenne de permittivité relative orthoradiale se situera autours de 100, de même que la perméabilité relative. Dans le cas d'une cape sphérique classique, à compression linéaire comme évoquée dans le premier chapitre, la valeur de $\epsilon_{\perp}(r)$ est constante et égale à la valeur moyenne $\frac{R_2}{R_2 - R_1}$.

De manière similaire, on peut repartir de 6.15 afin de trouver un critère sur ϵ_r permettant de réaliser un revêtement d'invisibilité :

$$\frac{1}{r^2 \epsilon_r(r)} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{1}{f^2} \quad (6.25)$$

Cette équation peut s'intégrer entre $r = R_1$ et $r = R_2$, ce qui nous permet d'obtenir une condition analogue de 6.23 pour la permittivité radiale :

$$\lim_{r \rightarrow R_1} \left(\int_r^{R_2} \frac{dx}{x^2 \epsilon_r(x)} \right) \rightarrow +\infty \quad (6.26)$$

Les équations 6.23 et 6.26 traduisent du point de vue des permittivités les conditions aux limites de la fonction de transformation. Ces équations doivent donc être toujours vérifiées pour que la cape d'invisibilité soit fonctionnelle. Toute fonction ϵ_{\perp} vérifiant 6.23 permet de réaliser une cape en utilisant l'équation d'état 6.16 pour déterminer ϵ_r . Réciproquement, toute fonction ϵ_r vérifiant 6.26 permet de réaliser une cape en utilisant l'équation d'état 6.21 pour déterminer ϵ_{\perp} .

6.3.3 Dispersion en fréquence

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les matériaux permettant de réaliser les propriétés sous-unitaires de permittivité et de perméabilité sont dispersifs en fréquences. Considérant les matériaux existants, la permittivité radiale d'une cape ne peut donc pas être stable en fréquence. Elle est très dispersive, rendant à priori impossible le fonctionnement de la cape sur une large bande. Cependant, les relations que nous avons établies sur les permittivités sont valides quelle que soit la fréquence. Ainsi, nous devons reconsidérer l'enjeu de cette dispersion en tenant compte des équations d'état que nous avons établies pour la cape d'invisibilité.

Aucune hypothèse particulière n'a été faite jusqu'à présent sur la dispersion fréquentielle des permittivités pour aboutir aux équations développées ci-dessus. Ainsi, nous pouvons simplement considérer la pulsation ω comme une variable supplémentaire, nous donnant alors les nouvelles équations d'état de la cape d'invisibilité.

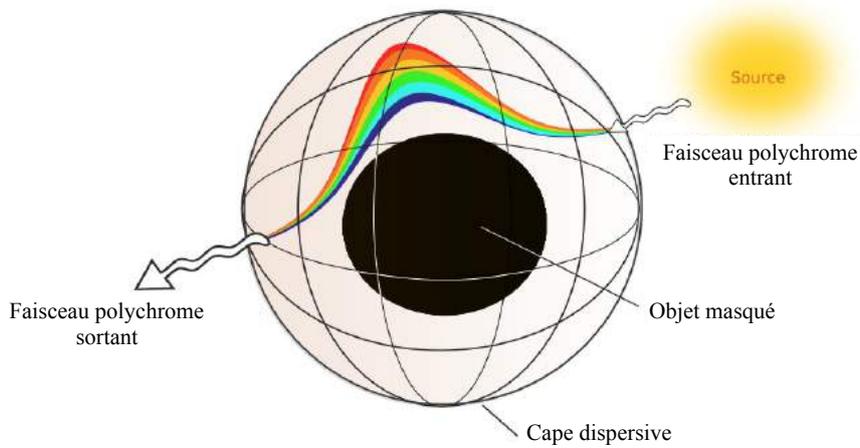


FIGURE 6.8 – Illustration de la cape adaptée en fréquence : le revêtement disperse les différentes fréquences composant un signal entrant pour ensuite le reconstituer dans le faisceau de sortie. On observe au sein de la cape un effet arc-en-ciel.

Le système 6.27 permet de partir d'une dispersion spatiale et fréquentielle de ϵ_{\perp} afin de trouver la fonction $\epsilon_r(r, \omega)$ associée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists R_1(\omega) / \int_{R_1(\omega)}^{R_2} \epsilon_{\perp}(r, \omega) dr = R_2 \\ \epsilon_r(r, \omega) = \frac{1}{\epsilon_{\perp}(r, \omega)} \left(\frac{R_2 - \int_r^{R_2} \epsilon_{\perp}(s, \omega) ds}{r} \right)^2 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Le système 6.28 permet de partir d'une dispersion spatiale et fréquentielle de ϵ_r afin de trouver la fonction $\epsilon_{\perp}(r, \omega)$ associée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists R_1(\omega) / \lim_{r \rightarrow R_1(\omega)} \left(\int_r^{R_2} \frac{dx}{x^2 \epsilon_r(x, \omega)} \right) = +\infty \\ \epsilon_{\perp}(r, \omega) = \frac{1}{\epsilon_r(r, \omega) r^2 \left(\frac{1}{R_2} + \int_{R_2}^r \frac{-1}{s^2 \epsilon_r(s, \omega)} ds \right)^2} \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Dans ce second système, l'existence à une pulsation donnée d'une frontière interne R_1 , pour laquelle l'intégrale de la première équation de 6.28 diverge, permet de respec-

ter la condition sur ϵ_r . Il n'est par conséquent pas nécessaire d'avoir un R_1 constant en fréquence : la zone de fonctionnement effective de la cape varie donc en fonction de la fréquence d'excitation. La seule condition étant que $R_1(\omega)$ soit compris entre $R_{1,0}$ la frontière interne du revêtement physique et R_2 . En nous basant donc sur le système 6.28, nous sommes capables d'associer à un profil de dispersion radial le profil de dispersion orthoradial associé. En procédant de la sorte, nous créons une cape d'invisibilité adaptée en fréquence.

Dans un dispositif tel que celui que nous décrivons, la trajectoire des ondes au sein du revêtement dépend de leur fréquence : on s'attend ainsi à observer un effet arc-en-ciel. Un faisceau polychromatique incident se retrouve dispersé dans la cape pour ensuite se reformer en ressortant dans l'espace libre. Ce phénomène est représenté sur la figure 6.8 et permet de reconstituer le signal du faisceau à l'identique après avoir traversé la cape.

6.3.4 Conception de la cape dispersive

Nous venons de trouver une méthode pratique permettant à partir d'un profil de dispersion d'une permittivité de déduire le profil de dispersion complémentaire permettant de réaliser une cape sur une bande fréquentielle. En pratique, les profils de dispersions sont à déterminer en fonction des méta-matériaux que nous sommes capables de concevoir. Pour l'exemple, nous allons ici considérer que la dispersion en fréquence de la permittivité radiale suit une loi similaire à celle d'un plasma.

$$\epsilon_{radial}(r, \omega) = \mu_{radial}(r, \omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right)^2 \quad (6.29)$$

Afin de faciliter la réalisation des simulations et pour limiter le nombre de matériaux plasmas, nous discrétisons la cape d'invisibilité sphérique en 20 étages. Il n'est pas absolument nécessaire de procéder de la sorte, nous pourrions définir un unique milieu pour le revêtement d'invisibilité. Cependant, la présence de sphères concentriques successives constituant le revêtement permet de créer des points d'accroche réguliers pour le maillage, le rendant ainsi plus robuste pour les simulations. En outre, cette discrétisation est plutôt réaliste du point de vue des technologies de réalisation. Les différentes itérations de simulation nous ont montré que le calcul est meilleur lorsque le maillage est contraint par les sphères. Chaque étage est constitué d'un matériau anisotrope dont la composante radiale est définie par une pulsation plasma. La pulsation plasma dans chaque étage est donnée par l'équation 6.30.

$$\omega_{p,etage} = \omega_p(r_{etage}) = \frac{R_2 - r_{etage}}{R_2 - R_1} \omega_0 \quad (6.30)$$

Nous pouvons alors déduire les tenseurs de permittivité et de perméabilité à affecter dans chaque couche de la cape d'invisibilité.

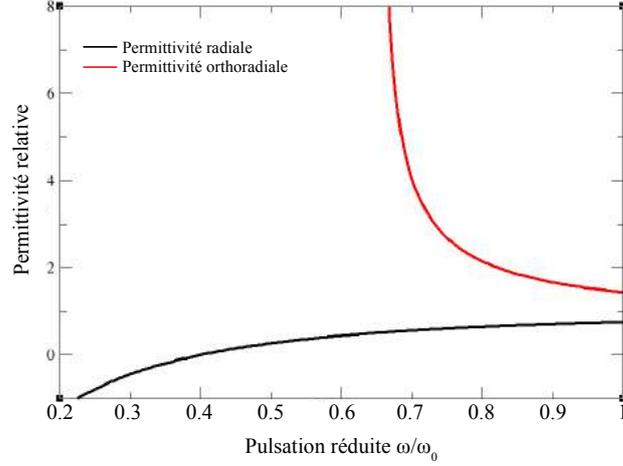


FIGURE 6.9 – Permittivités radiale et orthoradiale dans la dixième couche de la cape dispersive. La pulsation plasma radiale est d’environ $0.4 \omega_0$.

$$\bar{\epsilon}_{etage}(\omega) = \bar{\mu}_{etage}(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_{p,etage}^2}{\omega^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{etage}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{etage}(\omega) \end{pmatrix}_{(r,\theta,\phi)} \quad (6.31)$$

avec α_{layer} une fonction de la fréquence donnant l’anisotropie pour chaque étage :

$$\alpha_{etage}(\omega) = \left(1 - \frac{\omega_{p,etage}^2}{\omega^2}\right)^{-2} \left(\frac{r_{etage}}{R_2} + \int_{R_2}^{r_{etage}} \frac{-r_{etage}}{s^2 \left(1 - \frac{\omega_p(s)^2}{\omega^2}\right)} ds \right)^{-2} \quad (6.32)$$

Nous obtenons donc deux profils de dispersion fréquentielle différents pour chaque couche. Tout d’abord, un profil que nous avons imposé de type plasma dans la direction radiale. Nous en avons ensuite déduit un profil de dispersion orthoradiale permettant d’assurer le fonctionnement du revêtement.

La géométrie du cas d’étude ainsi que le maillage utilisé sont représentés sur la figure 6.10. La sphère à masquer est de rayon 5cm tandis que le revêtement d’OT est une sphère de rayon 10cm. Dans chacune des 20 couches, un matériau théorique est créé, avec le profil de dispersion radial de type plasma et le profil de dispersion orthoradial donné grâce à la fonction α_{etage} définie dans l’équation 6.32. On choisit comme fréquence $f_0 = \omega_0/2\pi$ la fréquence 1GHz. Le balayage en fréquence se fait entre 200 MHz et 1GHz avec un pas de 100 MHz, de sorte à tester le fonctionnement de la cape sur une large bande. Afin de réaliser la simulation, une PML est définie, de rayon interne 15 cm et de rayon externe 30 cm. Elle est très épaisse au regard des dimensions caractéristiques de la géométrie, afin de permettre l’absorption des ondes dans les fréquences

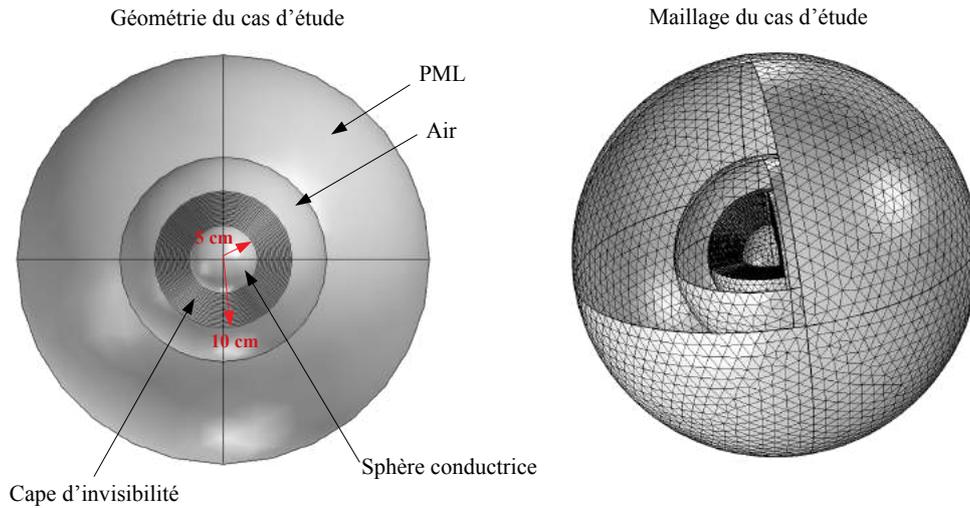


FIGURE 6.10 – Géométrie et maillage de la cape d’invisibilité sphérique. La structure est composée de 20 couches minces délimitées par des sphères concentriques. Le maillage réalisé pour ce cas d’étude s’appuie sur les sphères concentriques.

les plus basses.

6.3.5 Résultats et analyses

Nous réalisons à nouveau les simulations sous COMSOL, en prenant en considération les différentes propriétés matériaux calculées grâce à notre méthodologie. Les profils de dispersion sont donnés à titre d’exemple dans la figure 6.9 pour le dixième étage de la cape. Chaque couche a son profil de dispersion propre pour sa composante radiale et sa composante orthoradiale, dépendant de sa position au sein du revêtement d’optique transformationnelle. La figure 6.11 recense pour quatre valeurs de fréquences différentes les cartes de propriétés au sein de la cape.

La sphère de rayon R_1 disposée dans la cape est un conducteur parfait, présentant une SER importante dans la gamme de fréquence de l’étude. Un maillage de la géométrie est défini en prenant soin de n’avoir aucun élément de dimension supérieur à $\lambda_0/10$, avec λ_0 la longueur d’onde d’excitation dans le vide. Nous réalisons également une simulation de la sphère métallique sans la cape multicouche afin de pouvoir calculer l’atténuation de la SER due à la cape.

Les résultats de simulations sont donnés sur la figure 6.12 pour quatre valeurs de fréquence différentes : $0.2f_0$, $0.4f_0$, $0.7f_0$ et f_0 . Une décade complète est ainsi presque décrite. Le vecteur d’onde étant orienté verticalement, nous constatons le bon fonctionnement de la cape d’invisibilité. Nous ne discernons en effet aucune ombre dans la direction de propagation de l’onde ni de franges d’interférence dans la direction de la

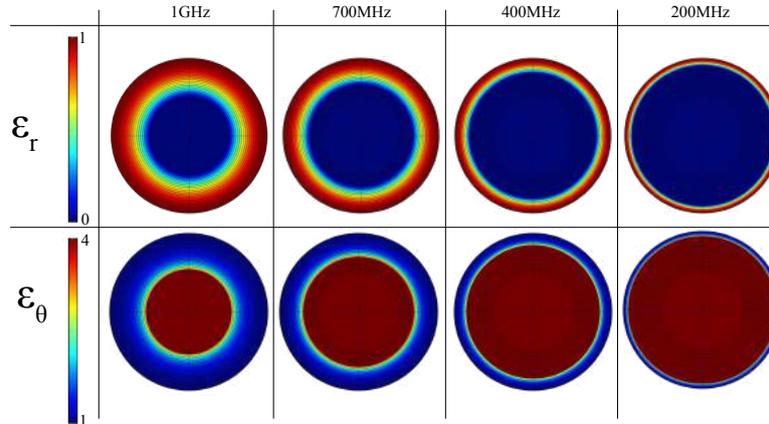


FIGURE 6.11 – Permittivités radiale et orthoradiale dans la cape dispersive pour 4 valeurs de fréquences.

source : la norme du champ électrique semble globalement constante à l’extérieur de la cape. On observe une zone d’ombre englobant progressivement les couches internes de la cape à mesure que la fréquence décroît. Ce phénomène est dû à notre méthode de conception : à mesure que la fréquence décroît, la zone masquée par la cape grandit. En effet, la fonction $R_1(\omega)$ n’est pas constante comme sur une cape classique. Au contraire, c’est une variable qui dépend de la fréquence d’excitation. La zone bleue observée sur la figure 6.12 au centre de la cape est donc la zone d’invisibilité, dont la taille dépend de la fréquence.

Les cartes de champ électrique instantané nous permettent de constater le bon rétablissement du front d’onde dans la direction de propagation. La figure 6.13 nous montre à une fréquence de 1GHz le champ électrique instantané avec et sans cape d’invisibilité. On constate l’effet de cloaking par la présence d’un front d’onde correctement rétabli dans et à l’extérieur de la cape. Les résultats à plus basse fréquence n’apportent visuellement que peu d’informations étant donné que les fronts d’onde successifs sont très éloignés car la longueur d’onde est plus grande.

Afin de se faire une idée plus objective du fonctionnement de cette cape, nous nous intéressons à la norme du champ électrique lointain. La figure 6.14 donne à la fréquence f_0 et à la fréquence $0.4f_0$ la norme du champ électrique diffusé avec et sans la cape d’invisibilité. A la fréquence nominale, le champ diffusé par la cape est inférieur de plusieurs ordres de grandeurs au champ diffusé par la sphère seule. A la fréquence de $0.4f_0$, le fonctionnement de la cape est en revanche moins bon : le champ diffusé est moins atténué. Afin d’évaluer la performance sur toute la bande fréquentielle de l’étude, les résultats de l’atténuation de la SER sont donnés dans la figure 6.15. Nous observons un fonctionnement globalement bon sur une large bande de fréquences en dessous de $f_0 = 1GHz$. A la fréquence nominale, l’atténuation est de l’ordre de -26 dB, tandis que cette atténuation est moins forte à mesure qu’on s’approche des plus basses fréquences. Ce phénomène s’explique par le nombre réduit de couches contribuant au cloaking pour les fréquences les plus basses. En effet, plus le revêtement est fin au regard de la zone à

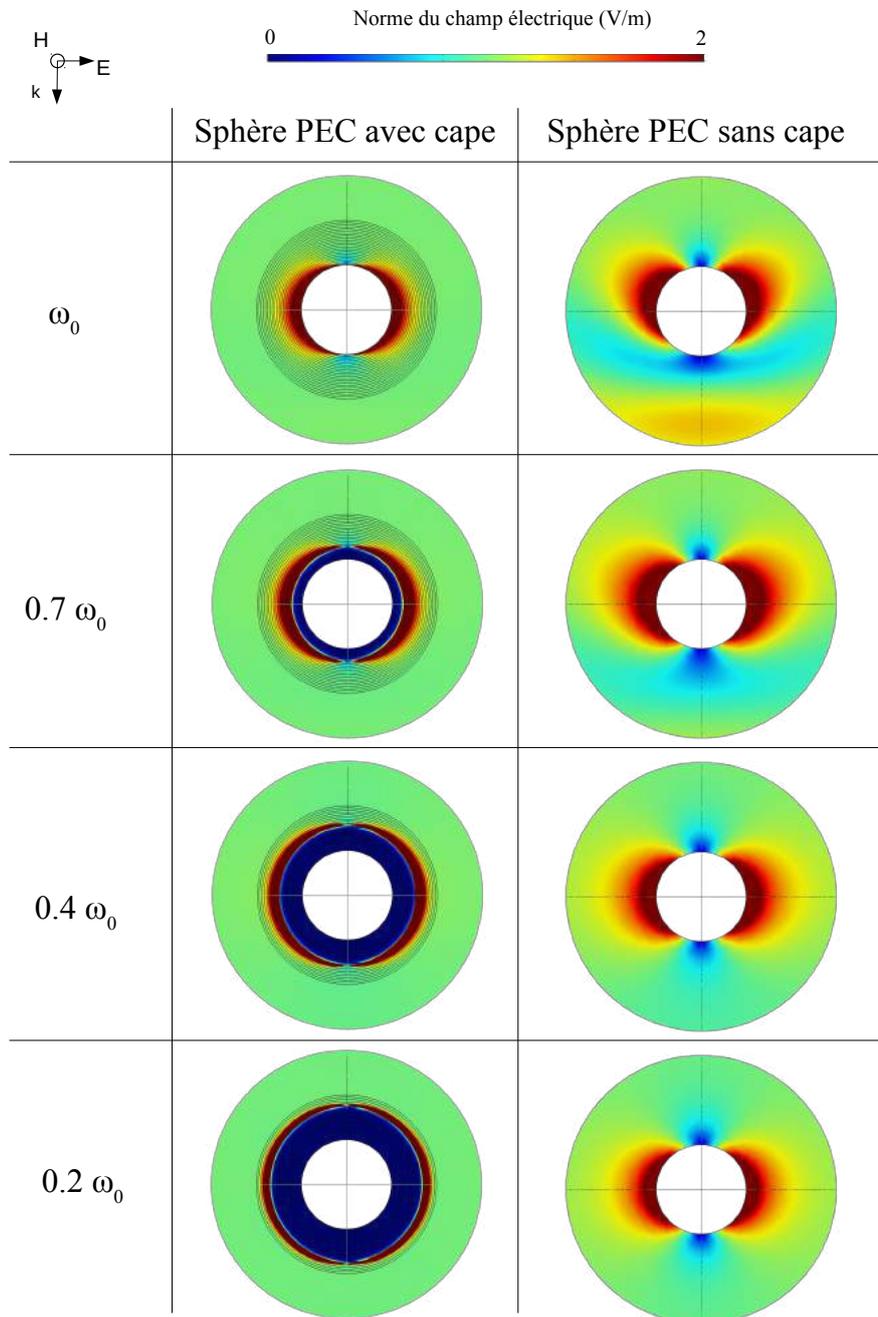


FIGURE 6.12 – Cartes de norme du champ électrique pour la cape adaptée en fréquence. La norme du champ est donnée pour quatre pulsations différentes : ω_0 , $0.7\omega_0$, $0.4\omega_0$ et $0.2\omega_0$. La zone masquée par la cape comprend la sphère de conducteur parfait ainsi qu'une portion du multicouches qui croît à mesure que la pulsation décroît. La zone masquée par la cape dépend de la fréquence.

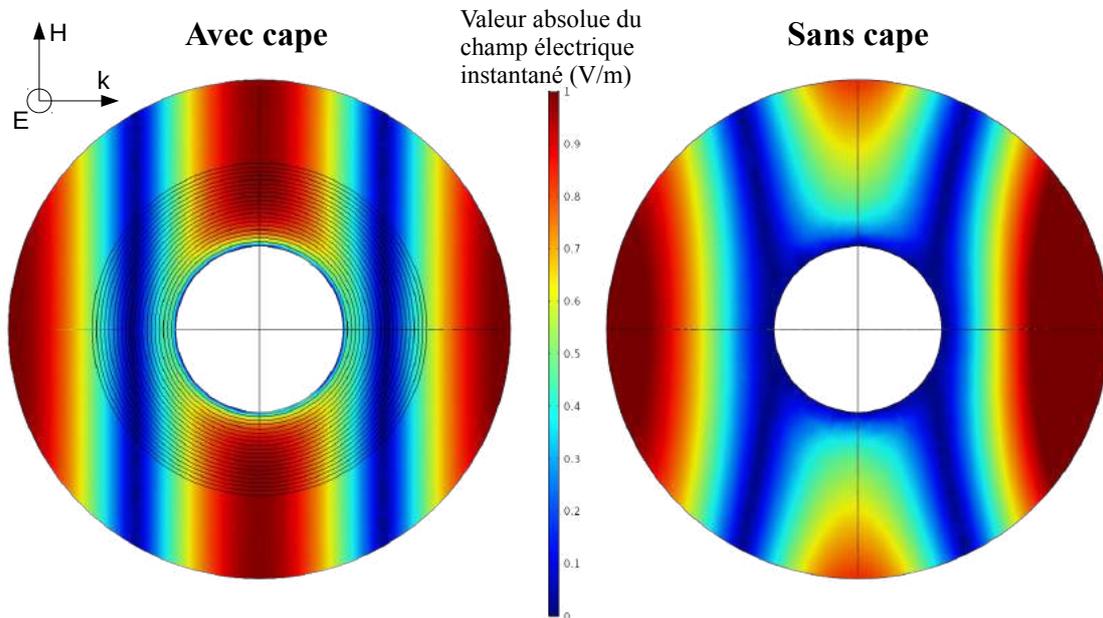


FIGURE 6.13 – Champ électrique instantané à 1GHz pour la sphère conductrice avec et sans sa cape d’invisibilité. On constate avec la cape un rétablissement du front d’onde après propagation au travers du revêtement.

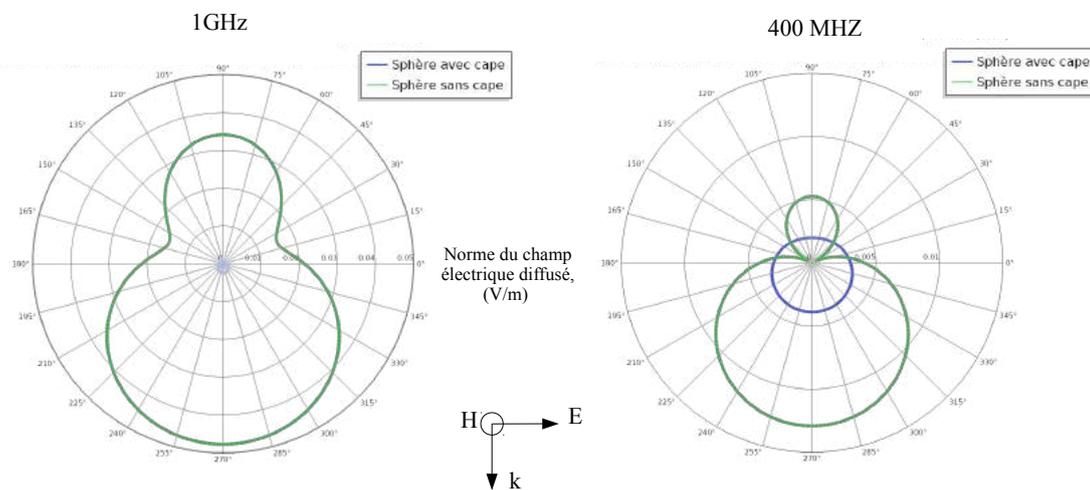


FIGURE 6.14 – Diagramme de champ lointain à 1GHz et à 400 MHz, avec et sans cape d’invisibilité. On remarque à 1GHz, fréquence nominale de la cape, une atténuation de plusieurs ordres de grandeur de la norme du champ diffusé. A 400 MHz, le champ est toujours atténué grâce à la cape mais elle semble moins performante.

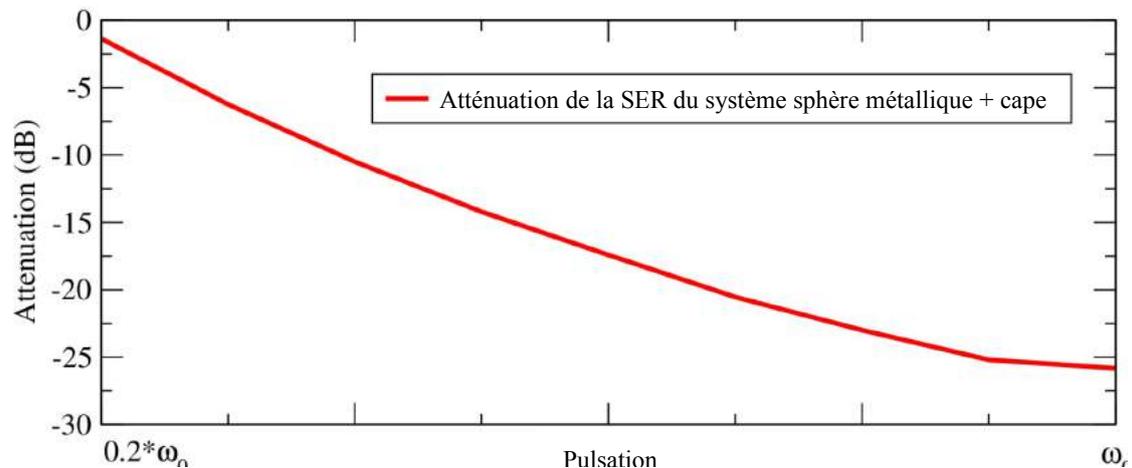


FIGURE 6.15 – Atténuation de la Surface Equivalente Radar à l’aide de la cape d’invisibilité adaptée en fréquence. On observe sur cette figure une bande de fonctionnement large, malgré l’utilisation de métamatériaux résonants. La faible atténuation à basse fréquence est due au nombre réduit de couches contribuant à la réalisation du cloaking.

masquer, plus les propriétés nécessaires au bon fonctionnement sont extrêmes.

Contrairement à la cape dispersive non-adaptée présentée dans la figure 6.7, nous disposons ici d’un revêtement fonctionnel sur une large bande.

6.3.6 Limites de performances

L’utilisation de métamatériaux présentant des profils de dispersion conduit à se poser la question des pertes. Dans l’article posant les bases de la méthode [123], nous avons déterminé grâce aux relations de Kramers-Krönig les parties imaginaires de permittivité et de perméabilité. Ces relations permettent de respecter le principe de causalité que doit vérifier tout matériau soumis à une onde électromagnétique. De ce fait, le fonctionnement d’une cape réelle réalisée à l’aide matériaux dispersifs sera nécessairement altérée par la présence de pertes.

Par ailleurs, le profil de dispersion orthoradial que nous avons calculé après avoir imposé le profil radial n’est pas un profil classique. En pratique, il est difficile de le réaliser parfaitement à l’aide d’un matériau ou métamatériau existant. La réalisation expérimentale de revêtements d’OT tirant parti de notre méthode de conception devra prendre en compte la réalité des profils de dispersion, afin d’aboutir à des solutions les plus proches possibles des profils existants. Pour le profil orthoradial déterminé dans le cas étudié, on peut imaginer utiliser des T-circuits [46] ou des CSRR (complementary split-ring resonators) [45], dont les profils de résonance disposent de la bonne allure fréquentielle.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de la dispersion fréquentielle provenant d'un métamatériau sur la bande de fonctionnement d'une cape sphérique. Les propriétés de permittivité et de perméabilité fortement dépendantes de la fréquence, les propriétés requises dans le revêtement, supposées être identiques sur toute la bande de fréquences, ne peuvent être correctement réalisées qu'à une fréquence nominale. Dès que l'excitation s'écarte de cette fréquence nominale, les performances du revêtement s'effondrent.

Nous avons dans un deuxième temps défini pour la cape d'invisibilité sphérique des équations d'état, permettant de lier entre elles les composantes radiales et orthoradiales de permittivité, indépendamment de la transformation géométrique utilisée. Ces équations permettent de définir arbitrairement une fonction de répartition de permittivité et d'en déduire la répartition de l'autre composante. Ces équations d'état peuvent s'appliquer à n'importe quelle fréquence. On peut donc subir la dispersion fréquentielle d'une composante de permittivité et en déduire une dispersion fréquentielle pour la seconde composante.

Nous avons mis au point un cas de simulation permettant de valider cette méthode de conception sur une large bande de fréquences. Cette cape d'invisibilité sphérique disperse le signal polychromatique d'un faisceau pour le reconstituer dans la direction de propagation, sans perturbation apparente dans le domaine fréquentiel. L'intégration de permittivités et perméabilités dispersives fréquentiellement permet d'envisager la mise au point de revêtements d'OT fonctionnant sur de larges bandes de fréquence et utilisant des réseaux d'inclusions résonantes.

Conclusion générale

L'invisibilité aux ondes électromagnétiques a suscité au début du XXIème siècle beaucoup d'engouement. Cet espoir se heurte aujourd'hui à des challenges essentiellement liés aux propriétés des matériaux et aux technologies nécessaires pour réaliser les dispositifs d'optique transformationnelle. A cet égard, les différents axes de recherches abordés au cours de cette thèse ont pour objectif de concilier les métamatériaux et les revêtements d'optique transformationnelle. Grâce aux moyens technologiques modernes de prototypage et d'usinage, des structururations complexes de revêtements peuvent émerger dans les années à venir. Les différents chapitres tentent de faire le lien entre la théorie et la réalité expérimentale et industrielle par le biais de simulations réalisées à l'aide d'un logiciel commercial basé sur la méthode des éléments finis, COMSOL Multiphysics.

Les équations de l'optique de transformation nous permettent d'imaginer une grande variété d'architectures pour des revêtements d'invisibilité ou de mimétisme, présentant plus ou moins de difficultés à la réalisation. La théorie de l'OT a été validée à l'aide de simulations dans le domaine des hyperfréquences sur plusieurs types de revêtements, capes et tapis d'invisibilité. Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse ouvre la voie à la réalisation de dispositifs présentant de très bonnes performances. En ce qui concerne les capes d'invisibilité, le critère d'intérêt est l'atténuation de la diffusion, tandis que le critère de mimétisme défini dans le deuxième chapitre évalue quantitativement les performances des autres systèmes. Plusieurs problèmes se posent concernant la réalisation de ces revêtements. Les permittivités et perméabilités sont, dans le cas général, inhomogènes, anisotropes et atteignent des valeurs extrêmes. L'inhomogénéité ne peut être réalisée au moyen de gradients continus de propriétés dans la cape : nous opérons une discrétisation spatiale des revêtements, fine devant la longueur d'onde d'excitation dans le vide. Dans chaque élément volumique issu de la discrétisation, une structuration en multicouches permet de réaliser une anisotropie uniaxe. Dans le cas plus général d'une anisotropie bi-axe, une structuration en voxels, plus complexe, est à envisager dans de futurs travaux.

Le principal critère permettant de juger de la difficulté de réalisation d'un dispositif d'OT est celui de la présence de valeurs de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique inférieures à l'unité. Les propriétés sous-unitaires requises dans les capes et tapis d'invisibilité font des métamatériaux des candidats d'intérêt, voire indispensables, pour la réalisation de ces capes. Malheureusement, leurs propriétés de permittivité et de perméabilité sont fortement dispersives en fréquence, rendant très étroite la bande de fonctionnement d'un dispositif qui en serait constitué. Dans le quatrième chapitre de cette thèse, nous étudions le comportement des inclusions conductrices résonantes afin de dresser quelques principes utiles à la fois à la compréhension des phénomènes et à l'ingénierie des métamatériaux. Leur homogénéisation et miniaturisation sont ensuite traités dans le chapitre 5, permettant d'envisager leur intégration dans les revêtements

d'OT. La bi-anisotropie, ainsi que les pertes issues de ces réseaux, peuvent être évaluées par la simulation à l'aide de critères objectifs. La conception des métamatériaux au moyen des méthodes proposées permet à moindre coût d'évaluer les caractéristiques d'un design ainsi que sa compatibilité avec le revêtement d'OT dans lequel il doit être intégré.

Le dernier chapitre de ce manuscrit montre le principe de fonctionnement d'une cape s'adaptant à la dispersion fréquentielle des métamatériaux la constituant. Cela nous a conduit à déterminer l'équation d'état des capes d'invisibilité sphériques à compression radiale. Cette méthode permet de tirer parti des propriétés dispersives des matériaux, transformant ainsi cette contrainte réelle en un avantage pour élargir la bande de fonctionnement. Une approche similaire peut être envisagée dans un cadre plus général regroupant tous les dispositifs d'OT.

Ainsi, ce travail a permis d'explicitier les contraintes liées à l'optique de transformation et des métamatériaux dans une vision d'application aux problèmes de discrétion. En perspective de ce travail de thèse, la réalisation de prototypes peut être envisagée, offrant une démonstration expérimentale des méthodes et résultats présentés. Une étude approfondie des matériaux hyperfréquences et des technologies associées à leur conception et mise en forme permettra d'évaluer les possibilités de dispositifs expérimentaux de capes, tapis et autres revêtements mimétiques.

Bibliographie

1. WARD, A. J. & PENDRY, B. Refraction and geometry in Maxwell's equations. en, 21 (cf. p. 15, 16, 21).
2. PENDRY, J. B., SCHURIG, D. & SMITH, D. R. Controlling Electromagnetic Fields. en. *Science* **312**, 1780-1782. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <http://science.sciencemag.org/content/312/5781/1780> (2018) (juin 2006) (cf. p. 16, 24, 34, 41).
3. LEONHARDT, U. & PHILBIN, T. G. General relativity in electrical engineering. en. *New Journal of Physics* **8**, 247-247. ISSN : 1367-2630. <http://stacks.iop.org/1367-2630/8/i=10/a=247?key=crossref.4e433b9506a5936770423817211714f3> (2018) (oct. 2006) (cf. p. 16, 21, 34).
4. J. C. MAXWELL GARNETT & LARMOR JOSEPH. Colours in metal glasses and in metallic films. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **203**, 385-420. <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.1904.0024> (2019) (jan. 1904) (cf. p. 19).
5. BRUGGEMAN, D. a. G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen. de. *Annalen der Physik* **416**, 636-664. ISSN : 1521-3889. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19354160705> (2019) (1935) (cf. p. 19, 128).
6. ZHANG, P. *Theory of transformation optics and invisibility cloak design* en. ISBN : 978-91-7415-947-9. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-31673urn:nbn:se:kth:diva-31673> (2019) (Electrical Engineering, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, 2011) (cf. p. 21).
7. CHEN, H., WU, B.-I., ZHANG, B. *et al.* Electromagnetic Wave Interactions with a Metamaterial Cloak. en. *Physical Review Letters* **99**. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.063903> (2018) (août 2007) (cf. p. 24).
8. QIU, C.-W., HU, L., XU, X. *et al.* Spherical cloaking with homogeneous isotropic multilayered structures. en. *Physical Review E* **79**. ISSN : 1539-3755, 1550-2376. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.79.047602> (2018) (avr. 2009) (cf. p. 24, 79).
9. ZOLLA, F., GUENNEAU, S., NICOLET, A. *et al.* Electromagnetic analysis of cylindrical invisibility cloaks and the mirage effect. EN. *Optics Letters* **32**, 1069-1071. ISSN : 1539-4794. <https://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?uri=ol-32-9-1069> (2018) (mai 2007) (cf. p. 29).

10. NICOLET, A., ZOLLA, F. & GUENNEAU, S. Electromagnetic analysis of cylindrical cloaks of an arbitrary cross section. EN. *Optics Letters* **33**, 1584-1586. ISSN : 1539-4794. <https://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?uri=ol-33-14-1584> (2019) (juil. 2008) (cf. p. 29).
11. ALITALO, P., BONGARD, F., ZÜRCHER, J.-F. *et al.* Experimental verification of broadband cloaking using a volumetric cloak composed of periodically stacked cylindrical transmission-line networks. en. *Applied Physics Letters* **94**, 014103. ISSN : 0003-6951, 1077-3118. <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3068749> (2018) (jan. 2009) (cf. p. 29, 46).
12. MA, Y., LIU, Y., LAN, L. *et al.* First experimental demonstration of an isotropic electromagnetic cloak with strict conformal mapping. en. *Scientific Reports* **3**, 2182. ISSN : 2045-2322. <https://www.nature.com/articles/srep02182> (2019) (juil. 2013) (cf. p. 29, 47, 55).
13. SELVANAYAGAM, M. & ELEFThERIADES, G. V. Experimental Demonstration of Active Electromagnetic Cloaking. en. *Physical Review X* **3**. ISSN : 2160-3308. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.3.041011> (2018) (nov. 2013) (cf. p. 29).
14. SCHURIG, D., MOCK, J. J., JUSTICE, B. J. *et al.* Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies. en. *Science* **314**, 977-980. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <http://science.sciencemag.org/content/314/5801/977> (2018) (nov. 2006) (cf. p. 29, 43, 46, 47, 63).
15. LAI, Y., NG, J., CHEN, H. *et al.* Illusion Optics : The Optical Transformation of an Object into Another Object. en. *Physical Review Letters* **102**. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.253902> (2018) (juin 2009) (cf. p. 35).
16. LIU, Y., GRALAK, B., MCPHEDRAN, R. C. *et al.* Finite frequency external cloaking with complementary bianisotropic media. EN. *Optics Express* **22**, 17387-17402. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-22-14-17387> (2020) (juil. 2014) (cf. p. 35).
17. MING-JI, C., YONG-MAO, P. & DAI-NING, F. An Improved Method of Designing Isotropic Multilayered Spherical Cloak for Electromagnetic Invisibility. en. *Chinese Physics Letters* **27**, 034102. ISSN : 0256-307X, 1741-3540. <http://stacks.iop.org/0256-307X/27/i=3/a=034102?key=crossref.7ee5e31e8e1e68f1b5c5b8537a4756f0> (2018) (mar. 2010) (cf. p. 38, 79).
18. RUAN, Z., YAN, M., NEFF, C. W. *et al.* Ideal Cylindrical Cloak : Perfect but Sensitive to Tiny Perturbations. en. *Physical Review Letters* **99**, 113903. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.113903> (2020) (sept. 2007) (cf. p. 41).
19. LINDELL, I., SIHVOLA, A. & KURKIJARVI, J. Karl F. Lindman : the last Hertzian, and a harbinger of electromagnetic chirality. *IEEE Antennas and Propagation Magazine* **34**, 24-30. ISSN : 1045-9243, 1558-4143 (juin 1992) (cf. p. 41).
20. ELEFThERIADES, G. V. EM transmission-line metamaterials. en. *Materials Today* **12**, 30-41. ISSN : 13697021. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1369702109700732> (2019) (mar. 2009) (cf. p. 41).

21. KOCK, W. Metal-Lens Antennas. *Proceedings of the IRE* **34**, 828-836. ISSN : 0096-8390, 2162-6634 (nov. 1946) (cf. p. 41).
22. KOCK, W. E. Metallic delay lenses. *The Bell System Technical Journal* **27**, 58-82. ISSN : 0005-8580 (jan. 1948) (cf. p. 41).
23. VESELAGO, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu. en. *Soviet Physics Uspekhi* **10**, 509. ISSN : 0038-5670. <http://iopscience.iop.org/article/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699/meta> (2019) (1968) (cf. p. 41).
24. PENDRY, J. B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. en. *Physical Review Letters* **85**, 3966-3969. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.3966> (2018) (oct. 2000) (cf. p. 41).
25. FANG, N., LEE, H., SUN, C. *et al.* Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens. en. *Science* **308**, 534-537. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <https://science.sciencemag.org/content/308/5721/534> (2019) (avr. 2005) (cf. p. 41).
26. NOGINOV, M., LAPINE, M., PODOLSKIY, V. *et al.* Focus issue : hyperbolic metamaterials. en. *Optics Express* **21**, 14895. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-21-12-14895> (2019) (juin 2013) (cf. p. 41).
27. DRACHEV, V. P., PODOLSKIY, V. A. & KILDISHEV, A. V. Hyperbolic metamaterials : new physics behind a classical problem. EN. *Optics Express* **21**, 15048-15064. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-21-12-15048> (2019) (juin 2013) (cf. p. 41).
28. FERRARI, L., WU, C., LEPAGE, D. *et al.* Hyperbolic metamaterials and their applications. en. *Progress in Quantum Electronics* **40**, 1-40. ISSN : 00796727. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0079672714000408> (2019) (mar. 2015) (cf. p. 41).
29. ALU, A., SILVEIRINHA, M., SALANDRINO, A. *et al.* Epsilon-Near-Zero (ENZ) Metamaterials and Electromagnetic Sources : Tailoring the Radiation Phase Pattern. *arXiv :cond-mat/0609220*. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0609220> (2018) (sept. 2006) (cf. p. 42).
30. ZHONG, S. & HE, S. Ultrathin and lightweight microwave absorbers made of mu-near-zero metamaterials. en. *Scientific Reports* **3**, 2083. ISSN : 2045-2322. <https://www.nature.com/articles/srep02083> (2018) (juin 2013) (cf. p. 42).
31. KONSTANTINIDIS, K. & FERESIDIS, A. P. Broadband near-zero index metamaterials. en. *Journal of Optics* **17**, 105104. ISSN : 2040-8986. <http://stacks.iop.org/2040-8986/17/i=10/a=105104> (2018) (2015) (cf. p. 42).
32. SILVEIRINHA, M. & ENGHETA, N. Tunneling of Electromagnetic Energy through Subwavelength Channels and Bends using Epsilon-Near-Zero Materials. *Physical Review Letters* **97**, 157403. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.157403> (2019) (oct. 2006) (cf. p. 42).

33. POVINELLI, M. L., JOHNSON, S. G., JOANNOPOULOS, J. D. *et al.* Toward photonic-crystal metamaterials : Creating magnetic emitters in photonic crystals. *Applied Physics Letters* **82**, 1069-1071. ISSN : 0003-6951. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1544428> (2019) (fév. 2003) (cf. p. 42).
34. SEGAL, N., KEREN-ZUR, S., HENDLER, N. *et al.* Controlling light with metamaterial-based nonlinear photonic crystals. en. *Nature Photonics* **9**, 180-184. ISSN : 1749-4893. <https://www.nature.com/articles/nphoton.2015.17> (2019) (mar. 2015) (cf. p. 42).
35. VASIĆ, B., ISIĆ, G., GAJIĆ, R. *et al.* Controlling electromagnetic fields with graded photonic crystals in metamaterial regime. EN. *Optics Express* **18**, 20321-20333. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-18-19-20321> (2019) (sept. 2010) (cf. p. 42).
36. DING, F., JIN, Y., LI, B. *et al.* Ultrabroadband strong light absorption based on thin multilayered metamaterials. *Laser & Photonics Reviews* **8**, 946-953. ISSN : 1863-8899. <https://www.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.201400157> (2019) (2014) (cf. p. 42, 79).
37. IORSH, I. V., MUKHIN, I. S., SHADRIVOV, I. V. *et al.* Hyperbolic metamaterials based on multilayer graphene structures. *Physical Review B* **87**, 075416. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.87.075416> (2019) (fév. 2013) (cf. p. 42).
38. KIDWAI, O., ZHUKOVSKY, S. V. & SIPE, J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials : Strengths and limitations. *Physical Review A* **85**, 053842. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.053842> (2019) (mai 2012) (cf. p. 42).
39. GARCÍA-MECA, C., HURTADO, J., MARTÍ, J. *et al.* Low-Loss Multilayered Metamaterial Exhibiting a Negative Index of Refraction at Visible Wavelengths. *Physical Review Letters* **106**, 067402. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.067402> (2019) (fév. 2011) (cf. p. 42).
40. HARDY, W. N. & WHITEHEAD, L. A. Splitring resonator for use in magnetic resonance from 200–2000 MHz. *Review of Scientific Instruments* **52**, 213-216. ISSN : 0034-6748. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1136574> (2019) (fév. 1981) (cf. p. 42).
41. PENDRY, J. B., HOLDEN, A. J., ROBBINS, D. J. *et al.* Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **47**, 2075-2084. ISSN : 0018-9480 (nov. 1999) (cf. p. 42, 104, 122, 134).
42. ZENG, Y., DINEEN, C. & MOLONEY, J. V. Magnetic dipole moments in single and coupled split-ring resonators. *Physical Review B* **81**, 075116. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.075116> (2019) (fév. 2010) (cf. p. 42, 131).
43. MARQUES, R., MESA, F., MARTEL, J. *et al.* Comparative analysis of edge- and broadside- coupled split ring resonators for metamaterial design - theory and experiments. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **51**, 2572-2581. ISSN : 0018-926X (oct. 2003) (cf. p. 42).

44. LINDEN, S., ENKRICH, C., WEGENER, M. *et al.* Magnetic Response of Metamaterials at 100 Terahertz. en. *Science* **306**, 1351-1353. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <http://science.sciencemag.org/content/306/5700/1351> (2018) (nov. 2004) (cf. p. 43).
45. BAHRAMI, H, HAKKAK, M & PIRHADI, A. Analysis and design of highly compact bandpass waveguide filter using complementary split ring resonators (CSRR). en. *Progress In Electromagnetics Research*, 16 (2008) (cf. p. 43, 183).
46. GIL, M., BONACHE, J., SELGA, J. *et al.* High-pass Filters Implemented by Composite Right/Left Handed (CRLH) Transmission Lines Based on Complementary Split Rings Resonators (CSRRs). en. *PIERS Online* **3**, 251-253. ISSN : 1931-7360. <http://piers.mit.edu/piersonline/piers.php?year=2007&volume=3&number=3&page=251> (2018) (2007) (cf. p. 43, 183).
47. AYDIN, K. & OZBAY, E. Capacitor-loaded split ring resonators as tunable metamaterial components. *Journal of Applied Physics* **101**, 024911. ISSN : 0021-8979. <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.2427110> (2019) (jan. 2007) (cf. p. 43).
48. BILOTTI, F., TOSCANO, A. & VEGNI, L. Design of Spiral and Multiple Split-Ring Resonators for the Realization of Miniaturized Metamaterial Samples. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **55**, 2258-2267. ISSN : 0018-926X (août 2007) (cf. p. 43, 126, 134, 140).
49. ALÙ, A. Restoring the physical meaning of metamaterial constitutive parameters. en. *Physical Review B* **83**. ISSN : 1098-0121, 1550-235X. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.83.081102> (2018) (fév. 2011) (cf. p. 43).
50. SERDYUKOV, A., SEMCHENKO, I., TRETYAKOV, S. *et al.* Electromagnetics of bi-anisotropic materials : Theory and applications. English. [https://research.aalto.fi/en/publications/electromagnetics-of-bianisotropic-materials-theory-and-applications\(463d1844-4148-452e-a4bc-91b24b1d7c65\)/export.html](https://research.aalto.fi/en/publications/electromagnetics-of-bianisotropic-materials-theory-and-applications(463d1844-4148-452e-a4bc-91b24b1d7c65)/export.html) (2019) (2001) (cf. p. 43, 120, 134, 154).
51. WILTSHIRE, M. C. K., PENDRY, J. B. & HAJNAL, J. V. Chiral Swiss rolls show a negative refractive index. en. *Journal of Physics : Condensed Matter* **21**, 292201. ISSN : 0953-8984. <https://doi.org/10.1088%2F0953-8984%2F21%2F29%2F292201> (2019) (juin 2009) (cf. p. 43, 158).
52. MACKAY, T. G. & LAKHTAKIA, A. Negatively refracting chiral metamaterials : a review. *SPIE Reviews* **1**, 018003. ISSN : 1946-3251. <https://www.spiedigitallibrary.org/journals/SPIE-Reviews/volume-1/issue-1/018003/Negatively-refracting-chiral-metamaterials-a-review/10.1117/6.0000003.short> (2019) (jan. 2010) (cf. p. 43).
53. ZHANG, S., PARK, Y.-S., LI, J. *et al.* Negative Refractive Index in Chiral Metamaterials. *Physical Review Letters* **102**, 023901. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.023901> (2019) (jan. 2009) (cf. p. 43, 158).
54. MEI, K. K. Theory of Maxwellian circuits. *URSI Radio Science Bulletin* **2003**, 6-13. ISSN : 1024-4530 (sept. 2003) (cf. p. 44, 105).

55. ABOU-KHOUSA, M. & ZOUGHI, R. Maxwellian Circuits-Based Analysis of Loaded Wire Antennas and Scatterers. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 318-320. http://scholarsmine.mst.edu/ele_comeng_facwork/1711 (mar. 2008) (cf. p. 44).
56. SHEN, W., XUE, C., MEI, K. K. *et al.* Maxwellian Circuits of Conducting Circular Loops. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **59**, 3848-3854. ISSN : 0018-926X (oct. 2011) (cf. p. 44, 105).
57. BAENA, J. D., BONACHE, J., MARTIN, F. *et al.* Equivalent-circuit models for split-ring resonators and complementary split-ring resonators coupled to planar transmission lines. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **53**, 1451-1461. ISSN : 0018-9480 (avr. 2005) (cf. p. 44, 105).
58. ALITALO, P. & TRETAKOV, S. A. Electromagnetic cloaking of strongly scattering cylindrical objects by a volumetric structure composed of conical metal plates. en. *Physical Review B* **82**, 245111. ISSN : 1098-0121, 1550-235X. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.245111> (2020) (déc. 2010) (cf. p. 46).
59. LI, J. & PENDRY, J. B. Hiding under the Carpet : A New Strategy for Cloaking. en. *Physical Review Letters* **101**. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.203901> (2018) (nov. 2008) (cf. p. 46, 47).
60. *Handbook of grid generation* en (éd. THOMPSON, J. F. & COMPANY, C. R.) ISBN : 978-0-8493-2687-5 (CRC Press, Boca Raton, 1999) (cf. p. 46).
61. VALENTINE, J., LI, J., ZENTGRAF, T. *et al.* Dielectric Optical Cloak. *arXiv :0904.3602 [physics]*. <http://arxiv.org/abs/0904.3602> (2018) (avr. 2009) (cf. p. 47).
62. LIU, R., JI, C., MOCK, J. J. *et al.* Broadband Ground-Plane Cloak. en. *Science* **323**, 366-369. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <http://science.sciencemag.org/content/323/5912/366> (2018) (jan. 2009) (cf. p. 47).
63. HSU, L., LEPETIT, T. & KANTÉ, B. Extremely Thin Dielectric Metasurface for Carpet Cloaking. *arXiv :1503.08486 [physics]*. <http://arxiv.org/abs/1503.08486> (2019) (mar. 2015) (cf. p. 47).
64. YU, N. & CAPASSO, F. Flat optics with designer metasurfaces. en. *Nature Materials* **13**, 139-150. ISSN : 1476-1122, 1476-4660. <http://www.nature.com/articles/nmat3839> (2018) (fév. 2014) (cf. p. 47).
65. YU, N., GENEVET, P., KATS, M. A. *et al.* Light Propagation with Phase Discontinuities : Generalized Laws of Reflection and Refraction. en. *Science* **334**, 333-337. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <https://science.sciencemag.org/content/334/6054/333> (2020) (oct. 2011) (cf. p. 47).
66. NI, X., WONG, Z. J., MREJEN, M. *et al.* An ultrathin invisibility skin cloak for visible light. en. *Science* **349**, 1310-1314. ISSN : 0036-8075, 1095-9203. <https://science.sciencemag.org/content/349/6254/1310> (2019) (sept. 2015) (cf. p. 48, 55).
67. CHEN, P.-Y., ARGYROPOULOS, C. & ALÙ, A. Broadening the Cloaking Bandwidth with Non-Foster Metasurfaces. en. *Physical Review Letters* **111**. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.233001> (2018) (déc. 2013) (cf. p. 48).

68. ALÙ, A. & ENGHETA, N. Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings. *Physical Review E* **72**, 016623. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.016623> (2020) (juil. 2005) (cf. p. 49).
69. ADAMS STRATTON JULIUS. *Electromagnetic Theory* eng. <http://archive.org/details/electromagnetic031016mbp> (2020) (Mcgraw Hill Book Company, 1941) (cf. p. 49).
70. FARHAT, M., ROCKSTUHL, C. & BAĞCI, H. A 3D tunable and multi-frequency graphene plasmonic cloak. en. *Optics Express* **21**, 12592. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-21-10-12592> (2019) (mai 2013) (cf. p. 49).
71. DIATTA, A. & GUENNEAU, S. Non-singular cloaks allow mimesis. en. *Journal of Optics* **13**, 024012. ISSN : 2040-8978, 2040-8986. <http://arxiv.org/abs/1006.0682> (2020) (fév. 2011) (cf. p. 55).
72. TRETYAKOV, S., ALITALO, P., LUUKKONEN, O. *et al.* Broadband Electromagnetic Cloaking of Long Cylindrical Objects. *Physical Review Letters* **103**, 103905. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.103905> (2019) (sept. 2009) (cf. p. 63).
73. WIENER, O. *Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung : Die Mittelwertsätze für Kraft, Polarisation und Energie / von Otto Wiener* de (Teubner, 1913) (cf. p. 77).
74. PRÉAULT, V. Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites. Application au blindage de boîtiers d'équipement électronique. fr, 165 (cf. p. 77).
75. CHEBYKIN, A. V., ORLOV, A. A., SIMOVSKI, C. R. *et al.* Nonlocal effective parameters of multilayered metal-dielectric metamaterials. *Physical Review B* **86**, 115420. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.115420> (2019) (sept. 2012) (cf. p. 79).
76. HUANG, Y., FENG, Y. & JIANG, T. Electromagnetic cloaking by layered structure of homogeneous isotropic materials. EN. *Optics Express* **15**, 11133-11141. ISSN : 1094-4087. <https://www.osapublishing.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-15-18-11133> (2019) (sept. 2007) (cf. p. 79).
77. CHEW, W., DAVIS, C., WARNICK, K. *et al.* *EFIE and MFIE, why the difference ?* en. in *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium* (IEEE, San Diego, CA, juil. 2008), 1-2. ISBN : 978-1-4244-2041-4. <http://ieeexplore.ieee.org/document/4619724/> (2020) (cf. p. 102).
78. RICHMOND, J. A wire-grid model for scattering by conducting bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **14**, 782-786. ISSN : 1558-2221 (nov. 1966) (cf. p. 103).
79. SONG, J. M. & CHEW, W. C. Moment method solutions using parametric geometry. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* **9**, 71-83. ISSN : 0920-5071. <https://doi.org/10.1163/156939395X00253> (2020) (jan. 1995) (cf. p. 103).

80. INGBER, M. & OTT, R. An application of the boundary element method to the magnetic field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **39**, 606-611. ISSN : 1558-2221 (mai 1991) (cf. p. 103).
81. VECCHI, G. Loop-star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **47**, 339-346. ISSN : 1558-2221 (fév. 1999) (cf. p. 103).
82. RAO, S., WILTON, D. & GLISSON, A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **30**, 409-418. ISSN : 1558-2221 (mai 1982) (cf. p. 103).
83. BARRERA-FIGUEROA, V, SOSA-PEDROZA, J & LÓPEZ-BONILLA, J. Simplification of Pocklington's integral equation for arbitrary bent thin wires. en. *WIT Transactions on Modelling and Simulation* **39**, 12 (2005) (cf. p. 103).
84. YAKUBOV, V. P., MIRON'CHEV, A. S., ANDREITSOV, A. G. *et al.* Artificial metamaterials and radio tomography. en. *Russian Physics Journal* **53**, 895-899. ISSN : 1064-8887, 1573-9228. <http://link.springer.com/10.1007/s11182-011-9507-5> (2020) (fév. 2011) (cf. p. 103).
85. DUNCAN, R. & HINCHEY, F. Cylindrical antenna theory. en. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section D : Radio Propagation* **64D**, 569. ISSN : 1060-1783. https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/64D/jresv64Dn5p569_A1b.pdf (2020) (sept. 1960) (cf. p. 103).
86. FIKIORIS, G. & WU, T. T. On the application of numerical methods to Hallen's equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **49**, 383-392. ISSN : 1558-2221 (mar. 2001) (cf. p. 103).
87. SHAMSI, M. & RAZZAGHI, M. Solution of Hallen's integral equation using multi-wavelets. en. *Computer Physics Communications* **168**, 187-197. ISSN : 0010-4655. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465505002298> (2020) (juin 2005) (cf. p. 103).
88. RANI, R., KAUR, P. & VERMA, N. Metamaterials and Their Applications in Patch Antenna : A Review. en. *International Journal of Hybrid Information Technology* **8**, 199-212. ISSN : 17389968, 17389968. http://gvpress.com/journals/IJHIT/vol8_no11/17.pdf (2020) (nov. 2015) (cf. p. 104).
89. CUMMER, S. A., POPA, B.-I. & HAND, T. H. Q-Based Design Equations and Loss Limits for Resonant Metamaterials and Experimental Validation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **56**, 127-132. ISSN : 1558-2221 (jan. 2008) (cf. p. 105, 122).
90. TCHOFO DINDA, P. & MATHEY, P. *Electromagnétisme : ondes et propagation guidée* French. ISBN : 978-2-10-076001-5 (Dunod, Malakoff, 2017) (cf. p. 111).
91. JACKSON, J. D. Classical Electrodynamics. en (1962) (cf. p. 113, 131, 132).
92. BALANIS, C. A. *Antenna theory analysis and design* in (2005) (cf. p. 113).

93. GUIDA, G., MAYSTRE, D., TAYEB, G. *et al.* Electromagnetic Modelling of Three-Dimensional Metallic Photonic Crystals. en. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* **12**, 1153-1179. ISSN : 0920-5071, 1569-3937. <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1163/156939398X00241> (2020) (jan. 1998) (cf. p. 117).
94. LERAT, J.-M., MALLÉJAC, N. & ACHER, O. Determination of the effective parameters of a metamaterial by field summation method. en. *Journal of Applied Physics* **100**, 084908. ISSN : 0021-8979, 1089-7550. <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2355427> (2018) (oct. 2006) (cf. p. 126, 129).
95. MILTON, G. W. *The Theory of Composites* en. ISBN : 978-0-511-61335-7. <http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CB09780511613357> (2019) (Cambridge University Press, Cambridge, 2002) (cf. p. 128).
96. MARKEL, V. A. Introduction to the Maxwell Garnett approximation : tutorial. en. *Journal of the Optical Society of America A* **33**, 1244. ISSN : 1084-7529, 1520-8532. <https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josaa-33-7-1244> (2019) (juil. 2016) (cf. p. 128).
97. BÖTTCHER, C. J. F., BELLE, O. C. v., BORDEWIJK, P. *et al.* Theory of Electric Polarization. en. *Journal of The Electrochemical Society* **121**, 211C-211C. ISSN : 0013-4651, 1945-7111. <http://jes.ecsdl.org/content/121/6/211C.2> (2019) (jan. 1974) (cf. p. 129).
98. LOOYENGA, H. Dielectric constants of heterogeneous mixtures. en. *Physica* **31**, 401-406. ISSN : 0031-8914. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031891465900455> (2019) (mar. 1965) (cf. p. 129).
99. LAKHTAKIA, A. On direct and indirect scattering approaches for the homogenization of particulate composites. en. *Microwave and Optical Technology Letters* **25**, 53-56. ISSN : 1098-2760. [https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1098-2760\(20000405\)25:1<53::AID-MOP16>3.0.CO;2-5](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1098-2760(20000405)25:1<53::AID-MOP16>3.0.CO;2-5) (2019) (avr. 2000) (cf. p. 129).
100. WATERMAN, P. C. & TRUPELL, R. Multiple Scattering of Waves. en. *Journal of Mathematical Physics* **2**, 512. ISSN : [1527-2427]. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1961JMP....2..512W/abstract> (2019) (juil. 1961) (cf. p. 129).
101. LAX, M. Multiple Scattering of Waves. *Reviews of Modern Physics* **23**, 287-310. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.23.287> (2019) (oct. 1951) (cf. p. 129).
102. OUCHETTO, O., QIU, C., ZOUHDI, S. *et al.* Homogenization of 3-D Periodic Bianisotropic Metamaterials. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **54**, 3893-3898. ISSN : 0018-9480 (nov. 2006) (cf. p. 129).
103. SMITH, D. R. & PENDRY, J. B. Homogenization of metamaterials by field averaging (invited paper). EN. *JOSA B* **23**, 391-403. ISSN : 1520-8540. <https://www.osapublishing.org/josab/abstract.cfm?uri=josab-23-3-391> (2018) (mar. 2006) (cf. p. 129).

104. NICOLSON, A. M. & ROSS, G. F. Measurement of the Intrinsic Properties of Materials by Time-Domain Techniques. en. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **19**, 377-382. ISSN : 0018-9456, 1557-9662. <http://ieeexplore.ieee.org/document/4313932/> (2018) (nov. 1970) (cf. p. 129, 150).
105. LUUKKONEN, O., MASLOVSKI, S. I. & TRETAKOV, S. A. A Stepwise Nicolson–Ross–Weir-Based Material Parameter Extraction Method. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* **10**, 1295-1298. ISSN : 1536-1225 (2011) (cf. p. 129, 151).
106. ROTHWELL, E. J., FRASCH, J. L., ELLISON, S. M. *et al.* Analysis of the Nicolson-Ross-Weir Method for Characterizing the Electromagnetic Properties of Engineered Materials. English. *Progress In Electromagnetics Research* **157**, 31-48. ISSN : 10704698. <https://go.gale.com/ps/i.do?p=AONE&sw=w&issn=10704698&v=2.1&it=r&id=GALE%7CA554689027&sid=googleScholar&linkaccess=abs> (2020) (nov. 2016) (cf. p. 129, 150).
107. PAULA, A. L. d., REZENDE, M. C. & BARROSO, J. J. *Modified Nicolson-Ross-Weir (NRW) method to retrieve the constitutive parameters of low-loss materials in 2011 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 2011)* (oct. 2011), 488-492 (cf. p. 129).
108. MARQUÉS, R., MEDINA, F. & RAFII-EL-IDRISSI, R. Role of bianisotropy in negative permeability and left-handed metamaterials. en. *Physical Review B* **65**. ISSN : 0163-1829, 1095-3795. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.144440> (2018) (avr. 2002) (cf. p. 130).
109. BOHREN, C. F. & HUFFMAN, D. R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* en. ISBN : 978-0-471-29340-8 (Wiley, 1983) (cf. p. 131, 140).
110. CHO, D. J., WANG, F., ZHANG, X. *et al.* Contribution of the electric quadrupole resonance in optical metamaterials. *Physical Review B* **78**, 121101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.121101> (2019) (sept. 2008) (cf. p. 131).
111. ALÙ, A. First-principles homogenization theory for periodic metamaterials. en. *Physical Review B* **84**. ISSN : 1098-0121, 1550-235X. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.075153> (2018) (août 2011) (cf. p. 131, 152).
112. MÜHLIG, S., MENZEL, C., ROCKSTUHL, C. *et al.* Multipole analysis of meta-atoms. *Metamaterials. Metamaterials Congress - 2010* **5**, 64-73. ISSN : 1873-1988. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1873198811000168> (2019) (juin 2011) (cf. p. 131, 132).
113. KLOTZ, G., MALLEJAC, N. & ENOCH, S. Two-orders fast multipole analysis of meta-atoms. *ICEAA 2019*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02273852> (2019) (sept. 2019) (cf. p. 131).
114. PURCELL, E. M. & PENNYPACKER, C. R. Scattering and Absorption of Light by Nonspherical Dielectric Grains. en. *ApJ* **186**, 705-714. ISSN : 0004-637X. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973ApJ...186..705P/abstract> (2019) (déc. 1973) (cf. p. 132).
115. DRAINE, B. T. The discrete-dipole approximation and its application to interstellar graphite grains. en. *The Astrophysical Journal* **333**, 848. ISSN : 0004-637X, 1538-4357. <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/166795> (2018) (oct. 1988) (cf. p. 132).

116. ZARIFI, D., SOLEIMANI, M., NAYYERI, V. *et al.* On the Miniaturization of Semi-planar Chiral Metamaterial Structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **60**, 5768-5776. ISSN : 0018-926X (déc. 2012) (cf. p. 140).
117. NIRANJAN, A. & K. PADHI, B. On Magnetic analogue of Clausius-Mossotti equation. en. *Physics Education* **30**, 7 (2014) (cf. p. 150, 155).
118. KARAMANOS, T. D., ASSIMONIS, S. D., DIMITRIADIS, A. I. *et al.* Effective parameter extraction of 3D metamaterial arrays via first-principles homogenization theory. en. *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications. Metamaterials-2013 Congress* **12**, 291-297. ISSN : 1569-4410. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S156944101400042X> (2019) (août 2014) (cf. p. 152).
119. ISIK, O. & ESSELLE, K. P. Analysis of spiral metamaterials by use of group theory. *Metamaterials* **3**, 33-43. ISSN : 1873-1988. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1873198808000558> (2019) (mar. 2009) (cf. p. 162).
120. ONSAGER, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review* **37**, 405-426. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.37.405> (2019) (fév. 1931) (cf. p. 162).
121. RADO, G. T. Reciprocity Relations for Susceptibilities and Fields in Magnetolectric Antiferromagnets. en. *Physical Review B* **8**, 5239-5242. ISSN : 0556-2805. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.8.5239> (2019) (déc. 1973) (cf. p. 162).
122. TRETYAKOV, S., SIHVOLA, A. & JANCEWICZ, B. Onsager-Casimir Principle and the Constitutive Relations of Bi-Anisotropic Media. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* **16**, 573-587. ISSN : 0920-5071. <https://doi.org/10.1163/156939302X00453> (2019) (jan. 2002) (cf. p. 162).
123. KLOTZ, G., MALLÉJAC, N., GUENNEAU, S. *et al.* Controlling frequency dispersion in electromagnetic invisibility cloaks. en. *Scientific Reports* **9**, 1-7. ISSN : 2045-2322. <https://www.nature.com/articles/s41598-019-42481-7> (2019) (avr. 2019) (cf. p. 164, 183).
124. ZHANG, B., WU, B.-I., CHEN, H. *et al.* Rainbow and Blueshift Effect of a Dispersive Spherical Invisibility Cloak Impinged On by a Nonmonochromatic Plane Wave. *Physical Review Letters* **101**, 063902. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.063902> (2019) (août 2008) (cf. p. 165).
125. YAO, P., LIANG, Z. & JIANG, X. Limitation of the electromagnetic cloak with dispersive material. en. *Applied Physics Letters* **92**, 031111. ISSN : 0003-6951, 1077-3118. <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2814039> (2018) (jan. 2008) (cf. p. 165).
126. KILDISHEV, A. V., CAI, W., CHETTIAR, U. K. *et al.* Transformation optics : approaching broadband electromagnetic cloaking. en. *New Journal of Physics* **10**, 115029. ISSN : 1367-2630. <http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=11/a=115029> (2018) (2008) (cf. p. 165).
127. RAJPUT, A. & SRIVASTAVA, K. V. Bandwidth enhancement of transformation optics-based cloak with reduced parameters. en. *Applied Physics A* **120**, 663-668. ISSN : 0947-8396, 1432-0630. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00339-015-9235-8> (2018) (août 2015) (cf. p. 165).