Contribution à la méthode de Mahler : équations linéaires et automates finis

Colin Faverjon

Université Claude Bernard Lyon 1

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Opérée au sein de :
l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale 512
Info-Maths

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 24 septembre 2020, par :

Colin FAVERJON

Contribution à la méthode de Mahler

Équations linéaires et automates finis

Devant le jury composé de :

ADAMCZEWSKI Boris Directeur de Recherche CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1	**Directeur de thèse**
ALLOUCHE Jean-Paul Directeur de Recherche Émérite CNRS, IMJ-PRG	**Rapporteur**
CHECCOLI Sara Maîtresse de conférence, Université Grenoble Alpes	**Examinatrice**
DI VIZIO Lucia Directrice de Recherche, Université Versailles Saint-Quentin	**Examinatrice**
ROQUES Julien Professeur des Universités, Université Claude Bernard Lyon 1	**Examinateur**
WALDSCHMIDT Michel Professeur Émérite, Université Paris Sorbonne	**Rapporteur**

Remerciements

La rencontre avec Boris Adamczewski il y a 11 ans, alors que je n'étais qu'en deuxième année de licence, a été un merveilleux hasard. Toutes ces années pendant lesquelles nous avons travaillé ensemble ont été une source de stimulation intellectuelle. J'ai appris beaucoup de sa rigueur, de son savoir, et de son intuition. Ses conseils, et son exigence m'ont beaucoup aidé dans la rédaction de ce manuscrit. Je ne pourrais jamais trop le remercier de m'avoir soutenu lorsque j'ai décidé de faire de l'enseignement mon activité principale, et de n'avoir pas douté, même à ce moment-là, de la richesse de notre collaboration à venir.

Merci à Jean-Paul Allouche, Sara Checcoli, Lucia Di Vizio, Julien Roques et Michel Waldschmidt d'avoir accepté de former le jury de cette thèse. C'est un honneur pour moi de leur présenter ces travaux, à elles et eux dont les articles, les ouvrages, nourrissent mes recherches depuis tant d'années. Des remerciements tout particuliers à Jean-Paul Allouche et Michel Waldschmidt qui ont accepté de rapporter cette thèse, et dont les encouragements m'ont beaucoup touché.

Mes remerciements chaleureux à tou·te·s les chercheur·euse·s avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger pendant ces années. Parmi elles et eux, je pense notamment à Patrice Philippon pour nous avoir transmis en avance une version de son article [92], à Glawdys Fernandes pour m'avoir communiqué son manuscrit de thèse, à Julien Roques pour ses éclairages sur la théorie de Galois des équations mahlériennes, et à Jean-Paul Allouche pour ses conseils sur les questions de terminologie.

Tout au long de la rédaction de ce manuscrit je n'ai cessé de penser à tou·te·s ces ami·e·s rencontré·e·s pendant mes études de mathématiques. Parmi elles et eux, il y a, bien sûr, Océane, que je n'ai plus quittée depuis les cours d'Algèbre I ; Alice, dont l'amitié, la rigueur et les questionnements m'ont apporté énormément ; Coline, avec qui nous partageons bien plus que les cinq première lettres de nos prénoms ; et Tibo, avec qui, j'espère, nous continuerons longtemps à avoir d'interminables discussions.

Je n'aurais pas pris autant de plaisir à faire de la recherche en mathématiques si je n'avais eu, en parallèle, un métier qui me passionne, me stimule

et me challenge quotidiennement. Un grand merci à mes collègues du collège Jean-Moulin, des autres collèges de la ville d'Aubervilliers, ainsi qu'aux syndicalistes de Sud éducation 93, avec qui les discussions pédagogiques et militantes sont toujours vivantes et excitantes. Je tiens également à remercier mes élèves, sans qui l'enseignement n'aurait aucun sens et qui m'ont beaucoup apporté, professionnellement et humainement, notamment en cette période étrange qu'a été le printemps 2020.

De manière plus personnelle, j'ai une pensée affectueuse pour ma famille, qui continue à s'intéresser à mes travaux et les vulgarise à merveille : « il s'intéresse aux zéros derrière la virgule ». Je souhaite également remercier mes ami·e·s, avec qui je partage peu de mathématiques, mais tellement d'autre choses. Je pense notamment à Bastien, Sarah, Jessica, Claire, Vincent, Fanny, Yann, Alice, Esther, Perrine, Claire-Mathilde, Juliette, aux artistes de Boulevard des Allongés, de la Batucada, de la Magna Bestia et tant d'autres. Des remerciements tout particuliers à Manon, qui a été d'une grande aide et qui a mené une chasse sans merci aux virgules mal placées dans ce manuscrit. Enfin, je ne pourrais jamais remercier suffisamment Clémence, témoin quotidien de la progression souvent tortueuse de mes recherches, et qui, bien qu'elle me tance régulièrement sur le fait que huit ans après, je suis toujours incapable de résoudre ce *problème de matrices non inversibles en zéro*, est un soutien indispensable. Qu'elle ait le loisir de se moquer pendant encore de nombreuses années.

Résumé

Cette thèse se situe dans le domaine de la théorie des nombres. Nous y présentons les résultats obtenus dans [13, 14, 15, 16]. Nous étudions la transcendance et l'indépendance algébrique des valeurs de fonctions mahlériennes en des points algébriques. Ce sont des séries entières convergentes solutions d'équations de la forme

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,,$$

avec $p_0(z), \ldots, p_m(z)$ des polynômes à coefficients algébriques et $q \geq 2$ un entier. Pour étudier ces fonctions, on utilise une méthode appelée *méthode de Mahler*, laquelle s'inscrit dans la grande famille des méthodes de transcendance. En plus d'un intérêt théorique important quant aux techniques de transcendance, la méthode de Mahler a des applications liées à la complexité du développement des nombres réels. En effet, les fonctions mahlériennes dont les coefficients appartiennent à un ensemble fini sont précisément les séries génératrices des suites automatiques (voir [7]).

Nous élargissons le champ d'application de la méthode en parachevant l'étude, déjà bien entamée, de la transcendance des fonctions q-mahlériennes d'une variable, et des relations linéaires entre leurs valeurs, en un point algébrique. Nous démontrons notamment une conjecture de Cobham de 1968, énonçant le fait qu'une fonction mahlérienne à coefficients rationnels ne prend, aux points rationnels, que des valeurs rationnelles ou transcendantes. Nous montrons que les relations algébriques entre les valeurs de fonctions q-mahlériennes en un point algébrique proviennent, par spécialisation, d'une relation fonctionnelle *q-orbitale*, c'est-à-dire d'une relation entre ces fonctions et leurs images sous l'action répétée du morphisme $z \mapsto z^q$. Nous établissons également un algorithme permettant de déterminer si la valeur d'une fonction mahlérienne en un point algébrique donné est un nombre transcendant ou pas.

Nous développons ensuite la théorie des systèmes mahlériens *réguliers singuliers* de plusieurs variables, une classe générique de systèmes mahlériens. Nous en déduisons un critère général d'indépendance algébrique pour les valeurs de fonctions mahlériennes associées à de tels systèmes. Ce critère pourrait être résumé de la façon suivante : des valeurs transcendantes de

fonctions mahlériennes associées à des opérateurs ayant des rayons spectraux multiplicativement indépendants deux à deux, ou des points algébriques multiplicativement indépendants, sont toujours algébriquement indépendantes.

Abstract

In this thesis, we investigate topics belonging to number theory, and especially to transcendental number theory. We discuss the results we have obtained in the papers [13, 14, 15, 16]. Our main aim is to study the transcendence and algebraic independence of the values, at algebraic points, of the so-called Mahler functions. The latter are convergent power series satisfying equations of the form

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,,$$

where $p_0(z), \ldots, p_m(z)$ are polynomials with algebraic coefficients and $q \geq 2$ is an integer. In order to study these power series, we develop what is known as *Mahler's method*, a method initiated by Mahler in the late 1920's. Besides its theoretical interest, Mahler's method has applications regarding the complexity of expansions of real numbers in integer or algebraic bases. Indeed, Mahler functions whose coefficients belong to a finite set are precisely the generating series of automatic sequences (see [7]).

We broaden the scope of Mahler's method, completing the already well-advanced study of the transcendence and linear relations between q-Mahler functions evaluated at a given algebraic point. In particular, we prove a conjecture due to Cobham in 1968, stating that a Mahler function with rational coefficients cannot take algebraic irrational values at rational points. We also show that the algebraic relations between the values of q-Mahler functions at algebraic points all come from specializations of *q-orbital* functional relations, that is relations between these functions and their images under the iterated action of the map $z \mapsto z^q$. In addition, we establish an algorithm that allows us to determine whether or not an arbitrary Mahler function takes a transcendental value at a given algebraic point.

In the second part of the thesis, we develop the theory of multivariate *regular singular* Mahler systems, a generic class of linear Mahler systems. We obtain a general criterion of algebraic independence for the values at algebraic points of Mahler functions associated with such systems. We could summarize this criterion in the following way: transcendental values of Mahler functions associated with operators having pairwise multiplicatively in-

dependent spectral radius, or with multiplicatively independent algebraic points, are always algebraically independent.

Table des matières

Préambule

La théorie des fonctions mahlériennes, comme celle des E ou des G-fonctions, contribue au développement général des méthodes de transcendance. Les résultats obtenus dans le cadre de ces différentes théories se nourrissent réciproquement. Ainsi, le théorème de Siegel-Shidlovskii a son pendant en méthode de Mahler, un résultat connu sous le nom de *théorème de Nishioka*. Une des spécificités de la méthode de Mahler est la possibilité de travailler à la fois avec plusieurs variables et plusieurs opérateurs différents. Cet aspect de la méthode de Mahler permet d'obtenir de puissants résultats d'indépendance algébrique. À ce titre, son développement présente sans nul doute un intérêt épistémologique important.

Outre ses implications théoriques, la méthode de Mahler apporte un éclairage sur la complexité algorithmique des développements dans une base entière, ou algébrique, des nombres réels. Cela est dû au fait que les séries génératrices de suites automatiques s'inscrivent dans le champ d'application de cette méthode. Ainsi, cette méthode permet de démontrer la transcendance de tout nombre automatique irrationnel. De même, elle devrait permettre de résoudre des questions liées aux changements de base dans l'écriture d'un nombre réel irrationnel. Résoudre ces questions nécessite d'obtenir des résultats d'une grande généralité, *i.e.*, valables pour toute fonction mahlérienne à coefficients dans un ensemble fini, évaluée en tout inverse d'entier, voire en tout point algébrique non nul du disque unité. Ces résultats renforcent parallèlement l'apport théorique de la méthode.

Le travail présenté dans ce manuscrit contribue à développer simultanément ces deux aspects de la méthode de Mahler.

Introduction

1 La méthode de Mahler

Mahler [74] raconte que, un jour qu'il était malade et alité, il s'est intéressé aux valeurs de la fonction

$$\mathfrak{f}_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n},$$

aux points rationnels de l'intervalle $]0,1[$. Alors qu'il cherchait à démontrer leur irrationalité, il s'est retrouvé à démontrer le résultat suivant.

Proposition. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ un point algébrique non nul du disque unité. Le nombre $\mathfrak{f}_2(\alpha)$ est transcendant.*

Dans tout le manuscrit, $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. La démonstration de Mahler repose sur le constat selon lequel la fonction $\mathfrak{f}_2(z)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\mathfrak{f}_2(z^2) = \mathfrak{f}_2(z) - z\,. \tag{1}$$

Si le nombre $\mathfrak{f}_2(\alpha)$ était algébrique, ce serait le cas également de tous les nombres $\mathfrak{f}_2\left(\alpha^{2^k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Mahler réussit alors à obtenir une contradiction, en construisant un approximant de Padé simultané de type I des puissances de $\mathfrak{f}_2(z)$ et en substituant la fonction $\mathfrak{f}_2\left(z^{2^k}\right)$ à la fonction $\mathfrak{f}_2(z)$, à partir de l'équation (1). Mahler généralise alors le résultat obtenu pour $\mathfrak{f}_2(z)$ aux fonctions solutions d'équations rationnelles, de la forme

$$f(z^q) = \frac{P(z, f(z))}{Q(z, f(z))}\,, \tag{2}$$

où $P(z,x), Q(z,x) \in \overline{\mathbb{Q}}[z,x]$ sont des polynômes et $q \geq 2$ est un entier.

Théorème Ma29 (Mahler, 1929)**.** *Soit $f(z)$ une série entière transcendante, de rayon de convergence $R > 0$, solution d'une équation de la forme (2). Supposons que le degré en x des polynômes P et Q soit strictement inférieur à q et que les coefficients de la fonction $f(z)$ soient tous des entiers*

algébriques appartenant à un même corps de nombres. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ un nombre algébrique tel que $0 < |\alpha| < R$ et tel que le résultant des polynômes P et Q, vus comme des polynômes en x, ne s'annule en aucun des points α^{q^k}, $k \in \mathbb{N}$. Alors le nombre $f(\alpha)$ est transcendant.

Mahler publie alors une série de trois articles [70, 71, 72] posant les bases de ce que nous appelons aujourd'hui, selon la terminologie introduite par Loxton et van der Poorten [66], la *méthode de Mahler*. Le théorème Ma29 permet notamment de démontrer la transcendance des nombres $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{q^n}$ et des nombres $\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\alpha^{q^n}\right)$, où $q \geq 2$ est un entier et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ est tel que $0 < |\alpha| < 1$. Les résultats de Mahler permettent de considérer également des séries entières de plusieurs variables solutions d'équations fonctionnelles similaires à (2). Une des conséquences remarquables des résultats qu'il obtient pour les fonctions de plusieurs variables est la transcendance des valeurs des *séries de Hecke-Mahler*

$$f_\omega(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lfloor \omega n \rfloor z^n \,, \tag{3}$$

aux points algébriques non nuls du disque unité, quand ω est un nombre quadratique.

Une des motivations de Mahler était de démontrer la transcendance des valeurs de l'invariant modulaire $j(z)$ aux points de la forme $\frac{\log \alpha}{2\pi i}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$, ainsi que celle des valeurs de certaines fonctions Thêta aux points algébriques. En effet, la fonction $j\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)$ satisfait à une équation algébrique, de la forme

$$P(f(z), f(z^q), z) = 0 \,,$$

avec $P(x, y, z) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, y, z]$, tandis que la fonction $\theta(z, q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n} q^{n^2}$, par exemple, satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\theta(z, q) = z^2 q \theta(zq, q) + 1 \,.$$

Cependant, comme l'a plus tard indiqué Mahler [73] et comme nous l'expliquerons dans l'appendice A, la fonction $\theta(z, q)$ n'est pas accessible immédiatement par la méthode de Mahler. La transcendance des nombres $j\left(\frac{\log \alpha}{2\pi i}\right)$ sera finalement démontrée en 1996 par l'*équipe stéphanoise* [26] et celle des valeurs de la fonction $\theta(z, q)$ sera déduite par Bertrand [32] des travaux de Nesterenko [81], en 1997. Si les deux preuves s'en inspirent, les arguments utilisés par ces auteurs vont bien au-delà de la méthode introduite par Mahler.

Dans [72], Mahler montre comment la méthode qu'il développe permet également d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique. À titre d'illustration, si $q \geq 2$ est un entier et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ est tel que $0 < |\alpha| < 1$, Mahler

obtient l'indépendance algébrique des deux nombres

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{q^n} \text{ et } \prod_{n=0}^{\infty} \left(1-\alpha^{q^n}\right) .$$

1.1 Les années 70, un nouveau souffle pour la méthode de Mahler

Pour des raisons qui ne sont probablement pas sans lien avec le développement parallèle de la théorie des E-fonctions, la méthode de Mahler a été oubliée pendant une quarantaine d'années. En 1967, Schwartz [100] établit l'irrationalité et la transcendance d'une famille de nombres, dont le nombre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-2^{3^n}} .$$

Schwartz n'a pas conscience qu'elles découlent du théorème Ma29. En effet, on a

$$f(z^3) = \frac{f(z)(1-z)-z}{1-z} \text{ où } f(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-z^{-3^n}} .$$

Le théorème Ma29 implique alors la transcendance de $f(\alpha)$ en tout point algébrique non nul α, du disque unité ouvert, un résultat beaucoup plus fort que celui de Schwartz. Mahler [73] publie en réponse un article ayant pour but de promouvoir et d'axiomatiser la méthode qu'il a développée quarante années plus tôt.

À la fin des années 70 et au début des années 80, Kubota [57, 58], Loxton et van der Poorten [109, 61, 62, 63, 64, 65, 66], Masser [75], Ku. Nishioka [84] et d'autres arithméticien·ne·s reprennent les travaux de Mahler. Leurs résultats étendent sensiblement la portée de la méthode de Mahler, notamment, dans un premier temps, en ce qui concerne la théorie des fonctions de plusieurs variables. Ils permettent par exemple de démontrer la transcendance des valeurs de séries Hecke-Mahler $f_\omega(z)$ définies en (3), aux points algébriques, quand ω est un nombre irrationnel quelconque. Cependant, leurs résultats ne permettent pas d'établir la transcendance ou l'indépendance algébrique de nouvelles constantes majeures.

1.2 La méthode de Mahler et les systèmes d'équations linéaires

Cela aurait pu, après un court rebond, marquer un second coup d'arrêt au développement de la méthode de Mahler. Mais, en 1980, Mendès France [77] fait connaître à la communauté arithmétique l'existence d'un lien entre la théorie des automates finis et la méthode de Mahler. Il fait référence à un article de Cobham [42], tiré d'une conférence en informatique théorique de

1968, et de ce fait largement méconnu des théoricien·ne·s des nombres. Cet article met en évidence le fait que la série génératrice d'une suite automatique est une coordonnée d'un vecteur solution d'un système de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

avec $A(z)$ une matrice inversible à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Nous appellerons *q-mahlériens* ou simplement *mahlériens* de tels systèmes et, suivant Loxton et van der Poorten [67], *fonctions q-mahlériennes* les solutions de tels systèmes qui sont développables en séries entières. La méthode de Mahler a alors un nouveau but : obtenir des résultats de transcendance et d'indépendance algébrique pour les nombres automatiques. Nous détaillons cet aspect dans la section 2 de l'introduction.

Une des contraintes de la méthode de Mahler est qu'elle ne s'applique pas *a priori* aux *singularités* du système mahlérien considéré.

Définition 1. Considérons un système de la forme (4). On dit qu'un point α est *singulier*, ou que c'est une *singularité*, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que la matrice $A(z)$ ne soit pas définie ou ne soit pas inversible en α^{q^k}. On dit qu'un point est *régulier* s'il n'est pas singulier.

En 1990, Ku. Nishioka [85] démontre le résultat suivant, qui est l'analogue, dans le cadre mahlérien, du théorème de Siegel-Shidlovskii, que nous énoncerons dans la section 1.5 de l'introduction.

Théorème Ni90 (Ku. Nishioka, 1990)**.** *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z)$ des séries entières convergentes formant un vecteur solution d'un système de la forme (4). Soit α, $0 < |\alpha| < 1$, un point algébrique régulier. On a l'égalité*

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)). \tag{5}$$

Ce théorème semble apporter une réponse définitive et satisfaisante quant à la nature des valeurs des solutions d'un système mahlérien aux points algébriques. Pourtant, le théorème de Nishioka seul ne permet pas de démontrer la transcendance des nombres automatiques irrationnels. Il y a deux obstructions à cela, comme l'a noté Becker [28].

- Le théorème de Nishioka ne dit rien sur ce qu'il se passe aux singularités du système.
- Même aux points réguliers, la transcendance de la fonction $f_1(z)$ ne garantit pas la transcendance de $f_1(\alpha)$. Elle garantit seulement qu'au moins l'un des nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ est transcendant.

Vingt-cinq ans plus tard, Philippon [92] réalise une importante avancée sur la seconde obstruction. Son théorème montre que toute relation algébrique entre les valeurs des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien provient, par spécialisation, d'une relation de même degré entre les fonctions de ce système. Ce résultat est à rapprocher de celui de Beukers pour les E-fonctions, dont nous parlerons dans la section 1.5 de l'introduction.

Théorème Ph15 (Philippon, 2015)**.** *Sous les hypothèses du théorème Ni90, soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_m]$ tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$. Alors, il existe un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_m]$, de même degré que P en $X_1, \dots, X_m$, tel que*

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad \textit{et} \quad Q(\alpha, X_1, \dots, X_m) = P(X_1, \dots, X_m)\,.$$

Ainsi, si $f_1(z)$ est une fonction transcendante et que le système est choisi de telle sorte que $f_m(z) \equiv 1$ et que les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors, en tout point α régulier, le nombre $f_1(\alpha)$ est transcendant. En effet, dans le cas contraire, il existerait une relation linéaire entre $f_1(\alpha)$ et $f_m(\alpha) = 1$. D'après le théorème de Philippon, il existerait donc des polynômes $p_0(z), \dots, p_m(z)$ tels que

$$p_0(z) + p_1(z)f_1(z) + \cdots + p_m(z)f_m(z) = 0,\ p_1(\alpha) = 1,\ \text{et}\ p_m(\alpha) = -f_1(\alpha)\,.$$

Par indépendance linéaire, on aurait $p_1(z) = \cdots = p_{m-1}(z) = 0$, une contradiction.

1.3 Étudier les valeurs de fonctions en différents points : la méthode de Mahler en plusieurs variables

Dès ses premiers travaux, Mahler pose les bases de l'étude des fonctions de plusieurs variables solutions d'équations analogues à (2). Kubota [58] et van der Poorten [108, 109] ont remarqué qu'une telle théorie permet d'obtenir l'indépendance algébrique des valeurs d'une même fonction en différents points. En effet, étant donnés une fonction q-mahlérienne $f(z)$ et des nombres algébriques non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ du disque unité, on peut définir n fonctions $f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_n(\boldsymbol{z})$, où $\boldsymbol{z} := (z_1, \dots, z_n)$ est une famille d'indéterminées, en posant $f_i(\boldsymbol{z}) := f(z_i)$ pour chaque i. Étudier l'indépendance algébrique des nombres $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ revient donc à étudier l'indépendance algébrique des valeurs des fonctions $f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_n(\boldsymbol{z})$ au point $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On doit alors considérer des transformations de $(\mathbb{C}^\star)^n$, de la forme

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto T\boldsymbol{z} := \left(z_1^{t_{1,1}} \cdots z_n^{t_{1,n}}, \dots, z_n^{t_{n,1}} \cdots z_n^{t_{n,n}}\right)\,,$$

où $T := (t_{i,j})$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$. On s'intéresse alors aux solutions de systèmes de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = A(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} f_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où $A(\boldsymbol{z})$ est une matrice inversible à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Lorsque l'on cherche à appliquer la méthode de Mahler à des fonctions de plusieurs variables, certaines difficultés apparaissent. On doit tout d'abord garantir une certaine uniformité de convergence des coordonnées des points $T^k\boldsymbol{\alpha}$ vers 0. La principale difficulté est de produire un *lemme de zéros* pour les points de la forme $T^k\boldsymbol{\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, quand $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ est un point algébrique. Les travaux de Kubota [58], Loxton et van der Poorten [63, 64], et surtout ceux de Masser [74] permettent une caractérisation élémentaire des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$, où T est une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ est un point algébrique, pour lesquels la méthode de Mahler s'applique. On dira que de tels couples sont *admissibles* (voir la définition 7 au chapitre III et la discussion dans l'appendice A). Ces conditions imposent notamment à la matrice T d'avoir un rayon spectral strictement supérieur à 1 et un vecteur propre dont les coordonnées sont strictement positives associé à ce rayon spectral. Quand on souhaite évaluer des fonctions q-mahlériennes, en des points $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ distincts, la matrice T est alors diagonale, égale à $q\mathrm{I}_r$, et ces conditions imposent aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ d'être multiplicativement indépendants [1].

Bien que la possibilité de travailler avec plusieurs variables apparaisse dès les premiers travaux de Mahler, on ne savait jusque là établir l'égalité

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_m(\boldsymbol{z})) = \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\boldsymbol{\alpha}), \dots, f_m(\boldsymbol{\alpha})) \tag{7}$$

que quand la matrice $A(z)$ est de l'une des deux formes suivantes :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1(\boldsymbol{z}) & a_1(\boldsymbol{z}) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_m(\boldsymbol{z}) & & & a_m(\boldsymbol{z}) \end{array}\right) \text{ ou } \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1(\boldsymbol{z}) & & & \\ \vdots & & B & \\ b_m(\boldsymbol{z}) & & & \end{array}\right),$$

où $a_1(\boldsymbol{z}), \dots, a_m(\boldsymbol{z}), b_0(\boldsymbol{z}), \dots, b_m(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ n'ont pas de pôle en 0, où $a_i(0) \neq 0, 1 \leq i \leq m$ et où B est une matrice constante (voir, respectivement [58] et [88]).

1. Rappelons que des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sont dits *multiplicativement indépendants* si la seule solution $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ de l'équation $\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_n^{k_n} = 1$ est le vecteur nul.

1.4 Fonctions associées à des opérateurs différents

Une autre source de difficulté dans l'étude des fonctions mahlériennes vient du fait qu'il existe une infinité dénombrable d'opérateurs mahlériens, de la forme $z \mapsto z^q$, $q \geq 2$. Quand on considère plusieurs opérateurs de type $z \mapsto z^q$, q variant parmi les entiers supérieurs ou égaux à 2, la méthode de Mahler, même en plusieurs variables, ne s'applique plus. En effet, l'espace propre associé au rayon spectral de la matrice

$$T = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_r \end{pmatrix}$$

ne possède pas de vecteurs dont toutes les coordonnées sont strictement positives, si $q_1 \leq \ldots \leq q_r$ sont des entiers distincts. Kubota [58] et van der Poorten [109] avaient entrevu très tôt l'intérêt de généraliser la méthode de Mahler dans ce cadre. Nous y reviendrons aux chapitres III et IV. Les premiers résultats dans ce domaine n'ont cependant été obtenus qu'en 1994 par Ku. Nishioka [87] et ne concernent que certaines équations inhomogènes d'ordre 1.

Théorème Ni94 (Ku. Nishioka, 1994)**.** *Soient $T_1, \ldots, T_r$ des matrices dont les polynômes caractéristiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ et dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants. Pour chaque i, on considère des séries entières convergentes à coefficients algébriques $f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i)$, algébriquement indépendantes, chacune étant solution d'une équation de la forme*

$$f_{i,j}(\boldsymbol{z}_i) = a_{i,j}(\boldsymbol{z}_i) f_{i,j}(T_i \boldsymbol{z}_i) + b_{i,j}(\boldsymbol{z}_i)\,,$$

avec $a_{i,j}(\boldsymbol{z}_i), b_{i,j}(\boldsymbol{z}_i) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i)$ et $a_{i,j}(0) = 1$. Pour chaque i, se donne un point $\boldsymbol{\alpha}_i$, régulier pour chacune de ces équations. Supposons que les coordonnées des points $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ soient toutes des puissances entières d'un même nombre algébrique α, $0 < |\alpha| < 1$. Alors les nombres

$$f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{1,m_1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,1}(\boldsymbol{\alpha}_r), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)\,,$$

sont algébriquement indépendants.

1.5 E-fonctions et méthode de Mahler : deux théories miroirs

Les trois articles de Mahler sont publiés l'année où paraît l'article [105] de Siegel, qui devait faire naître la théorie des E-fonctions et dans lequel il démontre la transcendance et l'indépendance algébrique des valeurs aux points algébriques de certaines de ces fonctions. Une E-fonction est une série entière

à coefficients algébriques, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux et satisfaisant à certaines conditions de décroissance rapide des coefficients que nous n'expliciterons pas ici, mais qui garantissent notamment qu'une telle fonction est analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier. Les fonctions exponentielles $z \mapsto e^{\alpha z}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ forment une famille de E-fonctions. Les travaux de Siegel recouvrent en particulier le théorème de Hermite-Lindemann qui implique la transcendance de e et de π. Ils recouvrent également sa généralisation, le théorème de Lindemann-Weierstrass, indiquant que, étant donnés des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ linéairement indépendants, les nombres $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}$ sont algébriquement indépendants. Les travaux de Siegel s'appliquent aussi aux fonctions de Bessel, dont un exemple est la fonction

$$J_0(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} ,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$J_0''(z) + \frac{1}{z} J_0'(z) + J_0(z) = 0 .$$

Siegel montre la transcendance de $J_0(\alpha)$ en tout point α algébrique, ainsi que l'indépendance algébrique des nombres

$$J_0(\alpha_1), \ldots, J_0(\alpha_r) ,$$

dès que $\pm\alpha_1, \ldots, \pm\alpha_r$ sont des nombres algébriques non nuls distincts.

Les principes sur lesquels reposent les preuves de Mahler et de Siegel contiennent un certain nombre de similarités. Dans chaque cas, les auteurs construisent un approximant de Padé simultané de type I pour les puissances successives de la fonction. Ensuite, ils utilisent l'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction pour obtenir une infinité d'autres approximations. Une majoration analytique et une minoration arithmétique des quantités obtenues permettent alors d'aboutir à une contradiction. Notons que dans le cadre la méthode de Mahler, on n'a pas besoin de recourir au lemme de Siegel : la convergence rapide des points α^{q^k}, $k \in \mathbb{N}$, ne rend plus nécessaire le contrôle de la hauteur des coefficients de l'approximant de Padé.

Les deux théories, bien que développées simultanément et possédant un socle commun, ont fait l'objet d'un intérêt très différent. La théorie des E-fonctions de Siegel a connu un développement important durant la première partie du XX$^{\text{e}}$ siècle, car elle permettait d'atteindre des constantes comme π, e, ou les valeurs des fonctions de Bessel. En contraste, la méthode de Mahler a été laissée dans l'oubli pendant quarante ans et, même à partir de la fin des années 70, a connu un intérêt plus mitigé. La théorie des E-fonctions a connu son apogée en 1958 avec le théorème de Siegel-Shidlovskii, dont l'énoncé est à rapprocher du théorème de Nishioka, mais qui est de trente ans son aîné.

Théorème SSh58 (Siegel-Shidlovskii, 1958). *Considérons un vecteur colonne de E-fonctions* $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), \dots, f_m(z))^\top$, *tel que*

$$\boldsymbol{f}'(z) = A(z)\boldsymbol{f}(z)\,,$$

pour une certaine matrice $A(z)$ *à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. *Soient* $T(z)$ *le plus petit commun multiple des dénominateurs des coefficients de la matrice* $A(z)$ *et* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que* $\alpha T(\alpha) \neq 0$. *Alors*

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))\,.$$

En s'appuyant sur le théorème de Siegel-Shidlovskii, Beukers [33] a obtenu, en 2006, un résultat dont l'énoncé est proche du théorème de Philippon.

Théorème Be06 (Beukers, 2006). *Sous les hypothèses du théorème SSh58, soit* $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_m]$ *homogène tel que* $P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = 0$. *Alors, il existe* $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_m]$, *homogène en* $X_1, \dots, X_m$, *tel que*

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad \textit{et} \quad Q(\alpha, X_1, \dots, X_m) = P(X_1, \dots, X_m)\,.$$

Notons qu'à la différence du théorème de Philippon, le théorème de Beukers est homogène, ce qui s'avère être d'une grande utilité dans l'étude des relations linéaires.

Ces deux théories diffèrent dès que l'on souhaite étudier des fonctions en différents points algébriques. Pour les fonctions mahlériennes, on a besoin d'introduire de nouvelles variables, ce qui n'est pas nécessaire pour les E-fonctions. En effet, si $f(z)$ est une E-fonction, la fonction $f(\alpha z)$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, en est une également. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont des nombres algébriques non nuls, l'étude des relations algébriques entre les nombres $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ découle de l'étude des fonctions $f(\alpha_1 z), \dots, f(\alpha_n z)$ au point $z = 1$. Une telle astuce n'est pas possible avec la méthode de Mahler. Si $f(z)$ est une fonction mahlérienne irrationnelle et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, $f(\alpha z)$ n'est *jamais* une fonction mahlérienne. On doit alors développer une théorie en plusieurs variables, ce qui apporte son lot de complexités. Cela présente néanmoins un avantage. Dans le cadre des E-fonctions, montrer l'indépendance algébrique des nombres $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ nécessite de pouvoir montrer l'indépendance algébrique des fonctions $f(\alpha_1 z), \dots, f(\alpha_n z)$. Avec la méthode de Mahler, on étudie n copies de la même fonction, prises en des variables différentes $z_1, \dots, z_n$. L'indépendance algébrique des fonctions $f(z_1), \dots, f(z_n)$ est donc immédiate dès lors que la fonction $f(z)$ est transcendante.

2 Une motivation pour la méthode de Mahler : l'étude du développement des nombres réels

La méthode de Mahler ne permet donc pas d'atteindre des fonctions aussi classiques que la théorie des E-fonctions. Cela s'explique en partie par le fait

qu'une fonction mahlérienne ne satisfait à aucune équation différentielle linéaire [93], ni même algébrique [10]. L'intérêt de développer la méthode de Mahler pour étudier des valeurs de fonctions précises en des points donnés est donc limité. La méthode de Mahler prend en revanche toute son envergure quand il s'agit d'obtenir des résultats généraux concernant la complexité du développement des nombres algébriques dans une base entière, ou les effets d'un changement de base sur l'écriture d'un nombre réel. Une source importante de motivation à développer la méthode de Mahler pour les systèmes linéaires (4) est donc d'éclairer la combinatoire du développement des nombres réels dans une base entière.

Les nombres rationnels admettent une description combinatoire relativement simple : ils sont caractérisés par le fait que la suite des chiffres de leur développement dans une base entière est ultimement périodique. Ainsi, le développement décimal de $\frac{1}{3}$ est connu pour n'être composé que d'une infinité de 3. *A contrario*, la suite des chiffres du développement dans une base entière de la plupart des constantes irrationnelles connues, telles que $\sqrt{2}$, π ou e, reste source de beaucoup de mystères, bien qu'elle ait fait l'objet de nombreuses études depuis des décennies. En particulier, à l'inverse des nombres rationnels, le développement dans une base entière des nombres algébriques irrationnels semble n'admettre aucune description « simple ». L'*inégalité de Liouville* vient renforcer cette intuition.

Inégalité de Liouville. *Pour tout nombre algébrique ξ de degré $d \geq 2$ et pour tout couple d'entiers (p, q), $q > 0$, on a la minoration*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d},$$

où c est une constante ne dépendant que de ξ.

Ainsi, si le développement décimal d'un nombre réel ressemble de trop près à celui d'un nombre rationnel, on s'attend à ce que ce nombre ne soit pas algébrique. Considérons par exemple les nombres

$$\chi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^3}}, \quad \text{et } \theta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}. \tag{8}$$

Tous les chiffres de leur développement binaire valent 0, à l'exception de ceux dont le rang est, respectivement, un cube parfait ou une factorielle. Les développements binaires de ces deux nombres sont ce que l'on aimerait considérer comme des développements simples, puisque vingt mots suffisent à les décrire. Comme ces nombres sont irrationnels, on pense qu'ils ne peuvent être algébriques. Si la transcendance du nombre θ découle directement de l'inégalité de Liouville, on sait seulement démontrer que χ n'est ni rationnel, ni quadratique (c'est une conséquence des travaux de [24]).

De même, on connaît très peu l'effet d'un changement de base sur le développement des nombres réels irrationnels. Alors que le nombre χ a un développement binaire très simple, aucune description évidente de son écriture décimale n'apparaît à première vue :

$$(\chi)_{10} = 0.503\,906\,257\,450\,580\,596\,978\,038\,233\,624\,275\,221\,723\cdots .$$

On a l'intuition qu'il est impossible que le développement d'un nombre réel irrationnel soit simple simultanément dans deux bases entières multiplicativement indépendantes. C'est l'esprit de la conjecture de Furstenberg présentée ci-dessous.

Bien sûr, les résultats que nous pouvons espérer démontrer dépendent étroitement de la définition que nous donnons de la « simplicité » de l'écriture d'un nombre dans une base entière. Certains mathématiciens de renom ont cherché à en donner des définitions. En 1909, Borel [34] abordait cette question avec le langage des probabilités. Plus tard, en 1938, Morse et Hedlund [78] ont adopté le point de vue des systèmes dynamiques. En 1965, Hartmanis et Stearns [54] se sont, de leur côté, intéressés à la complexité algorithmique du développement d'un nombre dans une base entière.

Définition. Étant donné un nombre réel $\xi \in [0,1[$, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{-n}$, avec $0 \leq a_n < q$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n \neq q-1$ pour une infinité d'entiers n. Le mot infini

$$[\xi]_q := a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \cdots ,$$

est appelé *développement en base* q du nombre ξ.

2.1 L'approche probabiliste de Borel

Soient $\xi \in [0,1[$ un nombre réel, $q \geq 2$ et a, $0 \leq a < q$, deux entiers. La *fréquence* de a dans le développement en base q de ξ est, si elle existe, la limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Card}\{n \leq N \ : \ a_n = a\}}{N} ,$$

où $[\xi]_q =: (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, la fréquence de 0 dans l'écriture binaire du nombre χ défini en (8) est égale à 1, alors que la fréquence de 1 vaut 0. La fréquence des chiffres $1, 2, 4, 5, 7$ et 8 dans le nombre rationnel

$$\frac{4}{7} = 0.571\,428\,571\,428\,571\cdots$$

est égale à $\frac{1}{6}$, tandis que la fréquence des chiffres $0, 3, 6$ et 9 est égale à 0.

Un nombre $\xi \in [0,1[$ est dit *simplement normal* en base $q \geq 2$ si la fréquence de a vaut $1/q$, pour tout a, $0 \leq a \leq q-1$. On dit qu'il est *normal*

en base $q \geq 2$ s'il est simplement normal en base q^n, pour tout $n \geq 1$, et qu'il est *absolument normal* s'il est normal en base q, pour tout entier $q \geq 2$. Borel [34] montre qu'au sens de la mesure de Lebesgue, presque tout nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$ est absolument normal. Pour autant, il est difficile de construire un nombre absolument normal, dont on puisse obtenir un développement explicite. Champernowne [39] a démontré que le nombre

$$0.123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\cdots,$$

dont le développement décimal est la concaténation ordonnée de tous les nombres entiers, est normal en base 10. Rien ne garantit cependant qu'il soit absolument normal. Toutefois, à part des exemples construits de manière *ad hoc* comme la constante de Champernowne, il est très difficile de montrer qu'un nombre est normal dans une base donnée. On ne sait par exemple toujours pas démontrer si les constantes $\sqrt{2}$, π ou e sont normales dans certaines bases. On conjecture pourtant le résultat suivant [35].

Conjecture de Borel, 1950. *Tout nombre algébrique irrationnel est absolument normal.*

Il est clair qu'un nombre rationnel n'est normal dans aucune base. Cependant, même si des pas ont été faits dans la direction de cette conjecture, on est très loin d'être en mesure de la démontrer. À titre d'illustration, on ne connaît aucun nombre algébrique irrationnel dont on peut garantir que le développement dans une base $b \geq 3$ contient une infinité de fois un chiffre donné [2].

2.2 Étude des systèmes dynamiques

Dans [78], Morse et Hedlund posent les bases d'une étude du système dynamique engendré par le développement en base entière d'un nombre réel. Pour $q \geq 2$ un entier, on définit l'application

$$T_q : \begin{cases} [0,1[& \mapsto & [0,1[\\ \xi & \mapsto & \{q\xi\}, \end{cases}$$

où $\{\cdot\}$ désigne la *partie fractionnaire* d'un nombre. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est le développement en base q d'un réel $\xi \in [0, 1[$, le développement en base q de $T_q(\xi)$ est le mot

$$[T_q(\xi)]_q = a_2 a_3 a_4 a_5 \cdots .$$

Autrement dit, T_q opère une translation d'un rang dans le développement en base q de ξ. On définit l'orbite d'un nombre réel $\xi \in [0, 1[$ sous T_q par

$$\mathcal{O}_q(\xi) := \left\{\xi, T_q(\xi), T_q^2(\xi), T_q^3(\xi), \ldots\right\},$$

2. Waldschmidt, par exemple, le signale dans [112].

et on considère $\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}$ sa clôture dans $[0,1[$. Un nombre réel β appartient à $\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}$ si et seulement si le mot infini $[\xi]_q$ contient une infinité de préfixes du mot $[\beta]_q$. On définit alors l'*entropie* du système dynamique associé à un réel ξ en base q par

$$E(\xi, q) := \lim_{n\to\infty} \frac{\log_q(p(n,\xi,q))}{n},$$

où $p(n,\xi,q) := \mathrm{Card}\{(a_t, a_{t+1}, \ldots, a_{t+n-1}),\, t \geq 1\}$ est la *fonction de complexité* de ξ en base q. L'entropie d'un nombre réel dans une base entière peut être vue comme une mesure de la complexité du développement en base q de ce nombre. Un nombre dont l'entropie est égale à 1 est un nombre qui contient tous les mots finis dans son développement, c'est-à-dire un nombre dont l'orbite est dense dans $[0,1[$. En particulier, l'entropie d'un nombre normal ξ en base q est égale à 1. La réciproque n'est cependant pas vraie, puisque la normalité requiert, de plus, une condition d'*équirépartition*.

L'entropie ne permet pas de distinguer les nombres dont la complexité dans une base donnée est sous-exponentielle. Pour une plus grande précision, on doit s'intéresser à la fonction de complexité. Pour tout réel ξ, on a l'encadrement

$$1 \leq p(n,\xi,q) \leq q^n.$$

Si ξ est un nombre rationnel, le mot infini $[\xi]_q$ est ultimement périodique quel que soit $q \geq 2$ et la fonction $n \mapsto p(n,\xi,q)$ est bornée. Cela caractérise les nombres rationnels. D'autre part, Morse et Hedlund [78] ont montré que la fonction de complexité d'un nombre irrationnel ξ satisfait à la minoration suivante

$$p(n,\xi,q) \geq n+1, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

À la suite de Morse et Hedlund [79], les mathématicien·ne·s se sont particulièrement intéressé·e·s à la classe des nombres irrationnels dont le développement dans une base entière q est minimal. On les appelle les *nombres sturmiens*. En utilisant le *théorème de Ridout*, un énoncé d'approximation diophantienne qui généralise le théorème de Roth, Ferenczi et Mauduit [50] ont notamment démontré le résultat suivant.

Théorème FM97 (Ferenczi et Mauduit, 1997)**.** *Les nombres sturmiens sont transcendants.*

Dix ans plus tard, Adamczewski et Bugeaud [2] ont généralisé ce résultat à la classe des nombres dont la fonction de complexité dans une certaine base est en $\mathcal{O}(n)$.

Théorème AB07a (Adamczewski et Bugeaud, 2007)**.** *Soit ξ un nombre réel irrationnel tel que $p(n,\xi,q) = \mathcal{O}(n)$ pour un entier $q \geq 2$, alors ξ est un nombre transcendant.*

Leur preuve fait appel à un théorème d'approximation diophantienne appelé *théorème du sous-espace de Schmidt-Schlickewei*, un résultat plus puissant que les théorèmes de Roth et de Ridout.

Pour un ensemble $X \subset [0,1[$, on note $\dim_H(X)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble X et $\overline{X}$ sa clôture. Si un nombre ξ a une entropie nulle en base q, alors $\dim_H(\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}) = 0$. Inversement, si $\dim_H(\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}) = 1$, alors l'entropie de ξ en base q est égale à 1. Dans ce cadre, la conjecture de Borel implique la conjecture, plus faible, suivante.

Conjecture. *Soit ξ un nombre réel algébrique irrationnel. Pour tout entier $q \geq 2$, on a $\dim_H(\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}) = 1$.*

Cette formalisation permet également d'énoncer des problématiques liées aux changements de base. On s'attend par exemple à ce qu'un nombre irrationnel ayant une entropie nulle dans une certaine base ait une entropie égale à 1 dans toutes les autres bases multiplicativement indépendantes. Dans cet esprit, Furstenberg [52] a conjecturé le résultat suivant.

Conjecture de Furstenberg, 1970. *Soit ξ un nombre réel irrationnel. Si $p, q \geq 2$ sont deux entiers multiplicativement indépendants, alors*

$$\dim_H(\overline{\mathcal{O}_p(\xi)}) + \dim_H(\overline{\mathcal{O}_q(\xi)}) \geq 1\,.$$

En particulier, si $E(\xi, p) = 0$ pour un entier $p \geq 2$, alors on aurait $E(\xi, q) = 1$ pour tout entier q multiplicativement indépendant de p. La conjecture de Furstenberg semble toujours hors de portée. La plus importante avancée dans cette direction est un résultat prouvé de manière indépendante par Shmerkin [104] et Wu [113] montrant que la conjecture de Furstenberg est vraie en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff nulle. Malheureusement, ce résultat ne permet pas d'exhiber un seul nombre pour lequel la conjecture est vraie. Notons que la conjecture est optimale en un certain sens : Bugeaud [38] a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de nombres irrationnels dont l'entropie dans une certaine base est inférieure à ε et dont l'entropie dans toute autre base est strictement inférieure à 1.

2.3 Machines de Turing et complexité algorithmique

En 1936, Turing [96] propose de séparer les nombres en deux classes : les nombres *calculables*, dont le développement dans une base entière peut être calculé par une machine de Turing, et les autres. Les nombres calculables sont en quantité dénombrable. Ils contiennent tous les nombres algébriques, ainsi que les constantes transcendantes classiques, comme les nombres π et e. Ainsi un ordinateur bien programmé est capable de calculer les développements en base entière de $\sqrt{2}$, de π ou de e avec une précision arbitraire. La principale difficulté réside dans le temps de calcul nécessaire pour atteindre le n-ième chiffre du développement de ces nombres.

Le problème de Hartmanis et Stearns. Hartmanis et Stearns [54] ont été parmi les premiers, en 1965, à poser le problème du temps nécessaire pour obtenir le développement en base entière d'un nombre réel calculable. Ainsi, ils considèrent le nombre d'opérations nécessaires à une *machine de Turing déterministe à plusieurs rubans* (pour une définition voir l'introduction de [54]) pour produire les n premiers chiffres du développement d'un nombre réel dans une base donnée. Ils classent ainsi les nombres calculables selon l'ordre de grandeur de ce temps de calcul. Considérons $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante, que l'on appelle *fonction de complexité en temps*. On note $S(T)$ la classe de tous les nombres réels dont les n premiers chiffres du développement binaire peuvent être calculés en $\mathcal{O}(T(n))$ opérations par une machine de Turing déterministe à plusieurs rubans. On considère, en particulier, la classe $S(n)$, associée à la fonction $n \mapsto n$, des nombres calculables en *temps réel* et la classe $S(n^2)$, associée à la fonction $n \mapsto n^2$. Hartmanis et Stearns démontrent ainsi que les nombres rationnels sont calculables en temps réel et donc dans la classe $S(n)$. Cette classe contient également une infinité de nombre transcendants, dont, par exemple, les nombres χ et θ, définis en (8). Ils démontrent par ailleurs que tous les nombres algébriques appartiennent à la classe $S(n^2)$ [3]. Enfin, ils formulent le problème suivant, connu depuis sous le nom de *Problème de Hartmanis et Stearns*.

> « *It would be interesting to determine whether there are any irrational algebraic numbers which belong to $S(n)$. If this is not the case, we would have the strange result that in this classification some transcendental numbers are simpler than all irrational algebraic numbers.* » [4]

Ce problème reste aujourd'hui largement ouvert (voir la discussion dans [9]). Une réponse négative à ce problème permettrait par exemple de démontrer la transcendance du nombre χ défini en (8) et de tout nombre calculable en temps linéaire.

Restriction du problème aux automates finis. En 1968, Cobham [42] propose de restreindre le problème de Hartmanis et Stearns à une classe particulière de machines de Turing : les *automates finis déterministes avec fonction de sortie* (en anglais *deterministic finite automaton with output*), que l'on appellera par la suite pour faire court *automates finis*. Brièvement, un automate fini est une machine qui prend un mot fini en entrée. À chaque

3. On sait aujourd'hui qu'on peut faire bien mieux, et que tout nombre algébrique appartient à la classe $S(n \log^j n)$ pour un certain entier j [36].

4. Il serait intéressant de savoir si la classe $S(n)$ contient des nombres algébriques irrationnels. Dans le cas contraire, on serait, selon cette classification, dans la situation étrange où certains nombres transcendants seraient plus simples que n'importe quel nombre algébrique irrationnel. (Nous traduisons.)

fois que l'automate lit une lettre, il change éventuellement d'état, parmi un ensemble fini, selon une règle prédéterminée. La sortie de l'automate est le symbole associé à l'état dans lequel il se trouve en fin de lecture.

Définition 2. Soit $q \geq 2$ un entier. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *q-automatique* si elle peut être produite par un automate fini à partir de la représentation des nombres entiers en base q. Par extension, si $b \geq 2$ est un entier, on dit qu'un nombre réel est *(q,b)-automatique* si la suite de son développement en base b est q-automatique. Plus généralement, on dit qu'une suite est *automatique* si elle est q-automatique pour un certain q, et qu'un nombre réel est *automatique* s'il est (q,b)-automatique pour un certain couple (q,b).

Cobham [42] est le premier à remarquer que la série génératrice d'une suite q-automatique satisfait à une équation de la forme (4). Cobham n'a aucune connaissance à ce moment des travaux de Mahler. En s'appuyant sur l'équation (4) et sur sa connaissance de la théorie des E-fonctions, il énonce comme un théorème le résultat suivant.

Conjecture Co68 (Cobham, 1968)**.** *Soit $f(z)$ une coordonnée d'un vecteur de séries entières convergentes, à coefficients rationnels, solution d'un système de la forme (4). Soit α, $0 < \alpha < 1$, un nombre rationnel qui n'est pas un pôle de $f(z)$. Alors, le nombre $f(\alpha)$ est soit rationnel, soit transcendant.*

Cobham ne démontre pas cette conjecture, bien qu'il l'annonce comme un théorème. Il renvoie pour la preuve à l'article [41] dans lequel il ne démontre que le cas où $f(z)$ satisfait à une équation inhomogène d'ordre 1, c'est-à-dire une équation de la forme

$$f(z^q) = p(z)f(z) + r(z)\,,$$

avec $p(z), r(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Il est intéressant de noter à quel point la démonstration que donne Cobham, dans ce cas particulier, est proche de celle de Mahler dans [70], même si Cobham ignorait l'existence des travaux de ce dernier.

En énonçant son théorème, Cobham a en tête le corollaire suivant, dont la première démonstration ne découlera finalement pas de la méthode de Mahler, mais sera obtenue à l'aide du théorème du sous-espace, comme conséquence du théorème AB07a.

Théorème AB07b (Adamczewski, Bugeaud, 2007)**.** *Un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant.*

La conjecture de Furstenberg, énoncée plus haut, traduit le fait que la complexité du développement d'un nombre réel irrationnel ne peut pas être simple dans deux bases multiplicativement indépendantes. Dans un même ordre d'idée, on formule la conjecture suivante.

Conjecture A. *Un nombre réel irrationnel ne peut pas être automatique dans deux bases entières multiplicativement indépendantes.*

Dans une autre direction, Cobham [43] a montré qu'une suite qui n'est pas ultimement périodique ne peut être à la fois p et q-automatique si les entiers p et q sont multiplicativement indépendants. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cobham*. Le cadre mahlérien permet de conjecturer la généralisation suivante du théorème de Cobham.

Conjecture B. *Soient $q_1, \dots, q_r \geq 2$ des entiers deux à deux multiplicativement indépendants et, pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, une fonction q_i-mahlérienne irrationnelle $f_i(z)$. Alors, les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Dans le cas $r = 1$, cette conjecture a été démontrée par Randé [93], c'est le théorème Ra92 présenté au chapitre I. Dans le cas $r = 2$, cette conjecture a été tout récemment démontrée par Adamczewski, Dreyfus, Hardouin et Wibmer [11]. Leur démarche ne semble toutefois pas se généraliser au cas $r \geq 3$, qui reste aujourd'hui encore ouvert.

Ces deux conjectures découlent de la conjecture générale suivante, portant sur les valeurs de fonctions mahlériennes. Celle-ci semble accessible par la méthode de Mahler, une fois qu'elle sera convenablement développée. Les résultats présentés dans ce manuscrit la démontrent pour une large classe de fonctions mahlériennes.

Conjecture C. *Soit $r \geq 1$ un entier. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère une fonction q_i-mahlérienne $f_i(z)$, $q_i \geq 2$, et un nombre algébrique non nul α_i appartenant au domaine de convergence de $f_i(z)$. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :*

(i) *les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants,*

(ii) *les nombres $q_1, \dots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants.*

Alors les nombres $f_1(\alpha_1), \dots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants si et seulement s'ils sont tous transcendants.

2.4 Méthode de Mahler et théorème du sous-espace : avantages et limites

Contrairement à ce qui était attendu dans les années 80, ce n'est finalement pas la méthode de Mahler qui a permis de démontrer en premier la transcendance des nombres automatiques irrationnels, mais une utilisation habile du *théorème du sous-espace*. Comme nous le verrons dans ce manuscrit, depuis les travaux de Philippon [92] et nos travaux [13], la méthode de Mahler fournit une nouvelle démonstration du théorème AB07b. Ces deux approches ont leurs avantages et leurs limites propres.

- *Sur la classe des nombres atteignables.* Quand il s'agit d'étudier le développement des nombres dans une base entière, le théorème du sous-espace permet de traiter une classe beaucoup plus large de nombres que la méthode de Mahler. En effet, il permet, par exemple, d'obtenir la transcendance de tous les nombres dont la complexité du développement dans une base entière est en $\mathcal{O}(n)$. La méthode de Mahler, quant à elle, ne s'applique que quand les séries génératrices satisfont à certaines équations fonctionnelles, ce qui restreint considérablement la classe de nombres. À titre d'illustration, les auteurs de [7] ont montré que, parmi les séries génératrices associées au développement d'un nombre réel, seules celles provenant de suites automatiques sont des fonctions mahlériennes d'une variable.

- *Étude des nombres dans une base non entière.* Lorsque la méthode de Mahler s'applique, elle permet d'étudier l'écriture de nombres dans des bases non entières, puisqu'elle est valable en tout point algébrique du disque unité. Le théorème du sous-espace ne permet pas autant de souplesse. Il est nécessaire pour pouvoir l'appliquer que la base étudiée ait une hauteur égale à son module. Nous détaillons cet aspect dans la section 4.5 du chapitre I.

- *Indépendance algébrique.* La méthode de Mahler permet naturellement d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique. En effet, un certain nombre des résultats de transcendance obtenus par la méthode de Mahler sont en réalité des cas particuliers de résultats d'indépendance algébrique. La possibilité de déduire des résultats d'indépendance algébrique à l'aide du théorème du sous-espace semble plus hypothétique.

Le cas des nombres sturmiens est une parfaite illustration de ces phénomènes. En effet, la suite des chiffres du développement de tout nombre sturmien a pour terme général

$$\lfloor (n+1)\omega + \rho \rfloor - \lfloor n\omega + \rho \rfloor \, ,$$

avec $0 < \omega < 1$ un réel irrationnel qu'on appelle la *pente* et $\rho \geq 0$ un réel qu'on appelle l'*intercept*. Un nombre sturmien d'intercept nul est donc la valeur en l'inverse d'un entier de la fonction $\frac{z+1}{z} f_\omega(z)$, où $f_\omega(z)$ est la série de Hecke-Mahler définie en (3). La méthode de Mahler ne dit rien des nombres sturmiens dont l'intercept n'est pas un entier, là où le théorème du sous-espace permet de montrer la transcendance de n'importe quel nombre sturmien (théorème FM97). En ce sens, le théorème du sous-espace permet d'obtenir la transcendance d'une classe beaucoup plus large de nombres. Cependant, quand l'intercept est nul, la méthode de Mahler permet de démontrer la transcendance de $f_\omega(z)$ en tout point algébrique non nul du disque unité (voir [65]) et non plus seulement aux inverses des entiers. Si, de plus, la

pente est un nombre quadratique, en reprenant les travaux de Ku. Nishioka [87] et Masser [76], nous avons obtenu dans [16] des résultats optimaux d'indépendance algébrique par la méthode de Mahler. Il est d'ailleurs raisonnable de penser que ces résultats se généralisent aux pentes ω irrationnelles, en adaptant la démarche de [65].

3 Résultats présentés dans ce manuscrit

Les résultats connus jusqu'alors en méthode de Mahler permettent de démontrer la transcendance et l'indépendance algébrique de larges familles de valeurs de fonctions mahlériennes. Cependant, si l'on souhaite montrer par la méthode de Mahler que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas automatique en base 10, un résultat général est nécessaire. On doit en effet être capable de montrer qu'aucune fonction mahlérienne dont les coefficients appartiennent à l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$ ne prend de valeur algébrique irrationnelle au point $\frac{1}{10}$, et ce, sans imposer aucune condition sur le système ou l'équation mahlérienne. De même, si l'on souhaite montrer qu'un nombre irrationnel 2-automatique ne peut pas également être 3-automatique, on doit montrer que l'intersection entre l'ensemble des valeurs des fonctions 2-mahlériennes et l'ensemble des valeurs des fonctions 3-mahlériennes, aux inverses des entiers, est égale à $\mathbb{Q}$.

Trois problèmes sont à la source des travaux que nous présentons dans cette thèse, lesquels requièrent une telle généralité.

(I) Démontrer la conjecture Co68.

(II) Démontrer qu'un réel irrationnel ne peut pas être automatique dans deux bases multiplicativement indépendantes (conjecture A).

(III) Montrer que les séries génératrices de suites automatiques, associées à des entiers deux à deux multiplicativement indépendants, sont algébriquement indépendantes (conjecture B).

Pour résoudre le problème (I), c'est la méthode de Mahler en une variable qu'il faut utiliser. Montrer la transcendance d'une fonction $f(z)$ en un point α revient à montrer qu'il n'existe pas de relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre 1 et $f(\alpha)$. Pour cela, le théorème de Nishioka ne suffit pas. Le théorème de Philippon nous montre qu'aux points réguliers, il suffit de savoir gérer les relations linéaires entre la fonction constante égale à 1 et les fonctions du système mahlérien. On peut toujours se ramener au cas où il n'y a pas de telles relations, en prenant un système minimal contenant les fonctions 1 et $f(z)$. Cette opération crée cependant, potentiellement, de nouvelles singularités et on ne peut pas obtenir la conjecture Co68 sans savoir les gérer. Nous déduisons des résultats des chapitres I et II le résultat suivant, qui démontre et renforce la conjecture Co68.

Théorème 1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $f(z)$ une fonction mahlérienne à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pas un pôle de f. On a l'alternative suivante : soit $f(\alpha)$ est transcendant, soit $f(\alpha) \in \mathbb{K}(\alpha)$. De plus, il existe un algorithme permettant de trancher cette alternative.*

Nous verrons que l'on ne peut se soustraire à cette alternative et qu'il existe des fonctions mahlériennes transcendantes prenant des valeurs algébriques en une infinité de points algébriques du disque unité.

La conjecture Co68 est un énoncé portant sur les relations linéaires entre une valeur de fonction mahlérienne et la constante égale à 1. On peut, de façon plus générale, se poser la question suivante :

> *À quelles conditions les valeurs en un point algébrique de fonctions q-mahlériennes, linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, sont-elles linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$?*

Le théorème de Philippon ne permet pas de répondre directement à la question, puisqu'une relation linéaire entre les valeurs des fonctions ne se relève qu'en une relation linéaire entre la fonction constante égale à 1 et les fonctions du système. On doit alors établir une version homogène du théorème de Philippon.

Théorème 2. *Dans la conclusion du théorème Ph15, si P est un polynôme homogène, alors on peut supposer que le polynôme Q est homogène en $X_1, \dots, X_m$.*

Le caractère homogène de cet énoncé en fait un analogue exact du théorème de Beukers. Deux limitations empêchent toutefois ce théorème de répondre à la question posée. Tout d'abord, il impose de regrouper les fonctions considérées dans un système mahlérien, faisant par là apparaître des fonctions additionnelles et donc, potentiellement, une multitude de relations linéaires. De plus, ce théorème ne s'applique pas aux singularités du système. Nos résultats permettent de venir à bout de ces deux difficultés.

Définition 3. On appelle *relation q-orbitale* entre des séries $f_1(z), \dots, f_r(z)$ la donnée d'un entier $m \geq 0$ et d'un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_{(m+1)r}]$ tels que

$$Q\left(z, f_1(z), \dots, f_r(z), f_1\left(z^q\right), \dots, f_r\left(z^{q^m}\right)\right) = 0\,.$$

On dit qu'une relation q-orbitale est *homogène* si Q est homogène en les variables $X_1, \dots, X_{(m+1)r}$, et qu'elle est *linéaire* si, de plus, Q est de degré 1.

Théorème 3. *Soient $f_1(z), \dots, f_r(z)$ des fonctions q-mahlériennes et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions. Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ un polynôme homogène tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) =$*

0. *Alors, il existe une relation q-orbitale homogène Q, entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$, telle que*

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_{(m+1)r}) = P(X_1, \dots, X_r)\,.$$

En particulier, toute relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les valeurs de fonctions q-mahlériennes quelconques, en *n'importe quel point* algébrique non nul du disque unité, provient, par spécialisation, d'une relation q-orbitale linéaire entre ces fonctions. Le théorème 3 est à mettre en perspective avec le théorème de Lindemann-Weierstrass, qui indique que, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres algébriques, les éventuelles relations algébriques entre les nombres $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_r}$ proviennent toutes de la relation fonctionnelle $e^x e^y = e^{x+y}$.

Le théorème 3 se démarque des résultats obtenus jusqu'à présent en méthode de Mahler, au sens où il n'impose aucune condition sur les systèmes mahlériens dans lesquels interviennent les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ et qu'il s'applique sans restrictions à tous les points algébriques non nuls de leur domaine d'holomorphie, et plus seulement aux points réguliers.

Quand on s'intéresse aux problèmes (II) et (III), la méthode de Mahler en une variable ne suffit plus. Comme nous en avons discuté dans la première partie de l'introduction, cela nécessite de développer une théorie des fonctions mahlériennes de plusieurs variables. On doit être également capable de considérer simultanément des fonctions mahlériennes associées à des opérateurs différents. Cette théorie était jusqu'ici très peu développée, en dehors des équations inhomogènes d'ordre 1. Répondre aux problèmes (II) et (III) nécessite *a contrario* d'être capable de traiter n'importe quels systèmes mahlériens, puisqu'on ne connaît *a priori* ni la taille, ni la forme des systèmes dans lesquels nos séries apparaissent. Les résultats que nous présentons dans les chapitres III et IV, s'ils ne répondent pas totalement aux problèmes (II) et (III), offrent un cadre général pour une telle théorie. Dans ces deux chapitres, nous développons la méthode de Mahler pour les fonctions *régulières singulières*. Sans définir ici précisément cette notion (nous renvoyons pour cela au chapitre III), signalons qu'une fonction q-mahlérienne est régulière singulière si elle est solution d'une équation de la forme

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f\left(z^q\right) + \cdots + p_m(z)f\left(z^{q^m}\right) = 0,$$

avec $p_0(z), \dots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, et $p_0(0)p_m(0) \neq 0$. En ce sens, les fonctions régulières singulières forment une classe générique de fonctions mahlériennes. Toutefois, cette restriction ne permet pas de traiter l'ensemble des séries génératrices de suites automatiques. À titre d'exemple, on peut montrer que la série génératrice de la suite de Rudin-Shapiro (voir exemple 22) n'est pas régulière singulière.

Théorème 4. *La conjecture C est vraie si chacune des fonctions est régulière singulière.*

En prenant alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r := \alpha$, pour un point α soigneusement choisi, on peut alors répondre au problème (III), dans le cadre régulier singulier.

Théorème 5. *La conjecture B est vraie si chacune des fonctions est régulière singulière.*

Note sur mon parcours de recherche. J'ai effectué en 2012 une année de pré-doctorat à l'Université Lyon 1, sous la direction de Boris Adamczewski. À cette occasion, je me suis intéressé à la méthode de Mahler, théorie qui, à ce moment, n'avait pas une actualité très importante. J'ai finalement choisi, l'année suivante, d'aller travailler dans un collège de région parisienne, établissement dans lequel j'enseigne toujours. Nous avons alors commencé un travail en collaboration avec Boris Adamczewski, reprenant les recherches que j'avais effectuées à l'occasion de cette année de pré-doctorat. Cette collaboration a donné lieu aux quatre articles [13, 14, 15, 16] dont nous présentons les résultats dans ce manuscrit. Le fait que la plupart de mon temps de recherche coïncide avec les vacances scolaires explique le temps long sur lequel s'étend le développement de nos travaux.

4 Organisation du manuscrit

Les deux premiers chapitres de ce manuscrit sont consacrés à l'étude des fonctions mahlériennes en une variable. Dans le chapitre I, après avoir exploré le lien entre automates et fonctions mahlériennes, nous démontrons le théorème 2. Nous nous attardons ensuite sur la gestion des singularités d'un système mahlérien, afin de démontrer la conjecture Co68 et le théorème 3. Le chapitre II est dédié aux questions algorithmiques. Nous expliquons comment déterminer si une fonction mahlérienne prend une valeur algébrique ou transcendante en un point algébrique non nul du disque unité. Nous montrons également comment, partant d'une fonction mahlérienne associée à un système mahlérien arbitraire, on peut obtenir l'équation mahlérienne minimale dont est solution cette fonction.

Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés à la méthode de Mahler pour des systèmes de plusieurs variables. Dans le chapitre III, nous établissons des résultats analogues au théorème de Nishioka et au théorème 2, nous permettant de traiter simultanément des systèmes mahlériens réguliers singuliers de plusieurs variables et associés à des transformations différentes. La preuve du théorème principal, qui est assez dense, contient notamment un lemme de zéros plus général que ceux existant jusque-là pour la méthode de Mahler. Ce résultat fait appel à des travaux de Corvaja et Zannier et des outils de la théorie de Ramsey. Le chapitre IV explore alors les conséquences des résultats du chapitre III sur l'étude des fonctions mahlériennes

associées à différents opérateurs et en différents points. Nous y démontrons notamment les théorèmes 4 et 5.

Notations

Dans tout ce manuscrit, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, l'anneau des entiers, le corps des nombres rationnels, le corps des nombres réels, le corps de nombres complexes. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, un corps, on note $\mathbb{K}^\star$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{K}$.

On note $|\xi|$ le module d'un élément $\xi \in \mathbb{C}$ et $D(0,1)$ le disque unité ouvert, c'est-à-dire l'ensemble des $\xi \in \mathbb{C}$ pour lesquels $|\xi| < 1$. La notation $\|\cdot\|$ désigne la *norme sup* d'un vecteur ou d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$, on note également $|\boldsymbol{\lambda}| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Notons $|\cdot|_\nu$, $\nu \in \mathcal{V}$ l'ensemble des classes d'équivalence de valeurs absolues sur $\mathbb{K}$. On les normalise de telle sorte que, pour tout $\xi \in \mathbb{K}$, on a :

$$\prod_{\nu \in \mathcal{V}} |\xi|_\nu = 1\,.$$

Bien sûr, le produit est fini, puisque ξ est de norme 1 sauf en un nombre fini de valeurs absolues. On définit alors la *hauteur* d'un élément non nul $\xi \in \mathbb{K}$ par

$$H(\xi) := \prod_{\nu \in \mathcal{V}} \max\{|\xi|_\nu, 1\}\,.$$

On vérifie que cette hauteur ne dépend pas du corps de nombres $\mathbb{K}$ contenant ξ. L'inégalité de Liouville affirme alors qu'il existe une constante c, ne dépendant que de $\mathbb{K}$, telle que

$$H(\xi) \geq |\xi|^{-c}\,.$$

Étant donnés $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ un corps et z une indéterminée, on note $\mathbb{K}\{z\}$ l'anneau des séries entières convergentes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On identifiera cet anneau à celui des germes de fonctions analytiques en 0. On appellera, par abus de langage, *fonctions analytiques* les éléments de $\mathbb{K}\{z\}$. Plus généralement, étant donnée une famille d'indéterminées $\boldsymbol{z} := (z_1, \ldots, z_n)$, on note $\mathbb{K}\{\boldsymbol{z}\}$ le sous-anneau de $\mathbb{K}[[z_1, \ldots, z_n]]$ formé des séries entières convergentes. On identifiera cet anneau à celui des germes de fonctions analytiques en zéro dans $\mathbb{K}^n$ et, perpétuant l'abus de langage, on appellera *fonctions analytiques*

les éléments de cet anneau. Soit $L \subset \mathbb{C}$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, on note $L\{\boldsymbol{z}\}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des fonctions analytiques à coefficients dans L.

Étant données $T := (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\boldsymbol{z} := (z_1, \ldots, z_n)$ une famille d'indéterminées, on pose :

$$T\boldsymbol{z} := \left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{t_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{n} z_j^{t_{r,j}} \right) .$$

La matrice T induit donc un homéomorphisme de $(\mathbb{C}^\star)^n$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, on notera $T(\boldsymbol{x})$ la multiplication classique entre la matrice T et le vecteur $\boldsymbol{x}^\top$, où $\boldsymbol{x}^\top$ désigne la transposée du vecteur $\boldsymbol{x}$.

Étant donnée T une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{N}$, on note $\rho(T)$ le *rayon spectral* de T, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de T. Comme la matrice est à coefficients dans $\mathbb{N}$, le rayon spectral est également une valeur propre de T [53].

Pour $M_1, \ldots, M_r$ des matrice carrées, on note $\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r)$ la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_r \end{pmatrix} .$$

On note également I_r la matrice identité de taille r, c'est-à-dire la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. Pour $\xi_1, \ldots, \xi_r$ des éléments de $\mathbb{L}$, on note

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$$

le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$,

$$\mathrm{deg.tr}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$$

le degré de transcendance du corps $\mathbb{K}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ et

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r) := \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ \sum_i \omega_i \xi_i = 0 \right\}$$

le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des relations linéaires sur $\mathbb{K}$ entre les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$. On note également

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r) := \{ P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r] \ : \ P(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 \} ,$$

l'idéal des relations algébriques entre les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$. On a la relation

$$\mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r)\right) = r - \mathrm{deg.tr}_{\mathbb{K}}(\xi_1, \ldots, \xi_r) ,$$

où $\mathrm{ht}(\cdot)$ désigne la hauteur d'un idéal.

Chapitre I

La méthode de Mahler en une variable

Quand on s'intéresse aux relations linéaires, le comportement des fonctions q-mahlériennes, pour un q fixé, et de leurs valeurs un point précis est maintenant parfaitement compris. Avant de présenter les résultats ayant permis d'achever cette étude, nous nous attarderons sur le lien entre nombres automatiques et équations mahlériennes linéaires, motivation principale de nos travaux. Après un rapide retour historique sur la méthode de Mahler en une variable, nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème de Philippon et démontrerons le théorème 2. Nous étudierons ensuite le comportement des fonctions mahlériennes aux singularités du système, ce qui nous permettra de démontrer la conjecture Co68 et le théorème 3. La dernière section de chapitre sera consacrée à l'étude des relations algébriques et linéaires entre les fonctions q-mahlériennes.

1 Des nombres automatiques aux équations mahlériennes linéaires

Nous avons donné dans l'introduction une idée de ce que sont les automates finis. Un automate fini est un sextuplet $(Q, \Sigma, \delta, q_0, \Delta, \tau)$ où

- Q est un ensemble fini d'*états*,
- Σ et Δ sont des alphabets finis, appelés respectivement *alphabet d'entrée* et *alphabet de sortie*,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est une application, appelée *fonction de transition*,
- q_0 est un élément de Q, appelé *état initial*,
- $\tau : Q \to \Delta$ est une application, appelée *fonction de sortie*.

Exemple 1. Considérons un ensemble $Q := \{A, B, C\}$, à trois états et posons $\Sigma = \Delta := \{0, 1\}$. On définit une fonction de transition δ de la manière suivante

δ	A	B	C
0	A	B	C
1	B	C	C

et, enfin on définit $\tau : Q \to \Delta$ par $\tau(A) = \tau(C) = 0$ et $\tau(B) = 1$. Cet automate possède la propriété suivante : la sortie vaut 1 si l'entier en entrée est une puissance de 2, la sortie vaut 0 dans les autres cas.

Exemple 2. Considérons l'automate qui renvoie 0 ou 1 selon la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de l'entier n. Cet automate engendre la suite

$$\mathfrak{tm} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} := 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

communément appelée *suite de Thue-Morse*.

Une caractérisation fondamentale des suites automatiques est donnée par la description de leur *q-noyau*. Le q-noyau d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble

$$\ker_q((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \{(a_{q^s n+t})_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{où} \quad s \geq 0,\, 0 \leq t \leq q^s - 1\}\,.$$

La propriété suivante est un résultat classique, dont on peut trouver une démonstration dans [19, Theorem 6.6.2].

Proposition. *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est q-automatique, si et seulement si son q-noyau est un ensemble fini.*

Exemple 3. Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrée par l'automate fini de l'exemple 1. On a les relations $a_{2n} = a_n$, pour tout n et $a_{2n+1} = 0$ si $n \geq 1$. Le 2-noyau de cette suite a donc 3 éléments : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même, la suite dont le premier terme vaut 1 et les autres sont nuls, et la suite identiquement nulle.

Exemple 4. Le 2-noyau de la suite de Thue-Morse $\mathfrak{tm}$, définie à l'exemple 2, possède deux éléments : les suites $\mathfrak{tm}$ et $\mathbf{1} - \mathfrak{tm}$. En effet, en notant $\mathfrak{tm} := (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Énumérons $\boldsymbol{a}_1 = (a_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{a}_2 = (a_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \boldsymbol{a}_m = (a_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, les éléments du q-noyau d'une suite q-automatique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\boldsymbol{a}_1 := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $f_i(z) := \sum_n a_{i,n} z^n$, $1 \leq i \leq m$, les séries génératrices de ces suites. Pour chaque t, $0 \leq t < q$, il existe σ_t, une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$, telle que $(a_{i,qn+t})_{n\in\mathbb{N}} = \boldsymbol{a}_{\sigma_t(i)}$. Pour tout i, $1 \leq i \leq m$, on obtient alors

$$f_i(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} z^n = \sum_{t=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,qn+t} z^{qn+t} = \sum_{t=0}^{q-1} z^t f_{\sigma_t(i)}(z^q)\,.$$

Autrement dit, en notant $\mathfrak{S}_t$ la matrice de la permutation σ_t et $\mathfrak{S}(z) := \mathfrak{S}_0 + z\mathfrak{S}_1 + \ldots + z^{q-1}\mathfrak{S}_{q-1}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \mathfrak{S}(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Exemple 5. Notons $\mathfrak{f}_2(z)$ la série génératrice de la suite 2-automatique de l'exemple 1. La construction ci-dessus nous permet d'obtenir le système

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f}_2(z) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1+z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_2(z^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6. Notons $f_{\mathfrak{tm}}(z)$ la série génératrice de la suite $\mathfrak{tm}$ définie à l'exemple 2. Posons $g(z) = \frac{1}{1-z} - f_{\mathfrak{tm}}(z)$. La construction (9) nous montre que les fonctions $f_{\mathfrak{tm}}(z)$ et $g(z)$ satisfont au système d'équations

$$\begin{pmatrix} f_{\mathfrak{tm}}(z) \\ g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathfrak{tm}}(z^2) \\ g(z^2) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

La construction présentée ci-dessus montre donc que la série génératrice d'une suite q-automatique satisfait à un système q-mahlérien. Ce n'est cependant pas la construction originale décrite par Cobham, que nous allons maintenant présenter.

Considérons un quintuplet $(\mathcal{A}, a_1, \sigma, b, \tau)$, où

- $\mathcal{A} := \{a_1, \ldots, a_m\}$ est un alphabet et $a_1 \in \mathcal{A}$,
- σ est une application, appelée *morphisme* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^\star$, l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\mathcal{A}$, pour laquelle $\sigma(a_1)$ est un mot de longueur supérieure ou égale à 2, dont la première lettre est a_1.
- $b \geq 2$ est un entier et τ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\{0, \ldots, b-1\}$, appelée *codage*.

Le morphisme σ s'étend bien sûr à l'ensemble $\mathcal{A}^\omega$ des mots finis ou infinis sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Il a un unique point fixe dans $\mathcal{A}^\omega$ commençant par la lettre a_1, dont on peut prendre l'image par τ. Une suite obtenue de cette manière est appelée *suite morphique*. Si les mots $\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)$ ont tous la même longueur $q \geq 2$, on dit que la suite est q-morphique. Cobham montre que les suites q-automatiques sont précisément les suites q-morphiques (voir [19, Theorem 6.3.2] pour une démonstration).

Exemple 7. Sur l'alphabet $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$, considérons un morphisme σ, défini par $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = bc$, $\sigma(c) = cc$ et un codage τ dans $\{0, 1\}$ défini

par $\tau(a) = \tau(c) = 0$, $\tau(b) = 1$. L'image par τ de l'unique point fixe de σ commençant par la lettre a est le mot

$$01101000100000001000\cdots$$

pour lequel le n-ième chiffre vaut 1 si est seulement si n est une puissance de 2, c'est-à-dire précisément la suite de l'exemple 1.

Exemple 8. Sur l'alphabet $\mathcal{A} := \{0, 1\}$, considérons le morphisme σ défini par $\sigma(0) = 01$ et $\sigma(1) = 10$. L'unique point fixe de σ commençant par la lettre 0 est la suite de Thue-Morse de l'exemple 4. Ici, le codage τ est l'identité.

Cobham [42] effectue alors la construction suivante. Dans le mot infini ω, unique point fixe de σ commençant par la lettre a_1, on considère les séries indicatrices $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ des lettres $a_1, \ldots, a_m$, respectivement. Pour chaque entier l, $0 \leq l < q$, on note S_l la matrice de l'application qui, à $a \in \mathcal{A}$, associe la l-ième lettre du mot $\sigma(a)$. On pose alors

$$S(z) := S_0 + zS_1 + \cdots + z^{q-1}S_{q-1}\,.$$

Comme ω est un point fixe pour σ, les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ satisfont au système d'équations fonctionnelles

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = S(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Posons $\lambda_i := \tau(a_i)$, pour $1 \leq i \leq m$. La fonction

$$f(z) := \lambda_1 f_1(z) + \cdots + \lambda_m f_m(z)$$

est la série génératrice de la suite $\tau(\omega)$.

Notons qu'avec cette construction, on n'obtient pas la fonction $f(z)$ dans un système mahlérien, mais uniquement comme combinaison linéaire à coefficients constants des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien. Pour obtenir un système mahlérien contenant directement la fonction $f(z)$, il faut procéder de manière suivante. On choisit un i tel que $\lambda_i \neq 0$, on considère la matrice Λ dont toutes les lignes sont égales à celle de la matrice identité, sauf la i-ième ligne qui est égale au vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. On pose $g_j(z) := f_j(z)$ quand $j \neq i$ et $g_i(z) = f(z)$. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} S(z) \Lambda \begin{pmatrix} g_1(z^q) \\ \vdots \\ g_m(z^q) \end{pmatrix},$$

dont la i-ième coordonnée est la fonction $f(z)$.

Exemple 9. Considérons le morphisme de l'exemple 7. Le point fixe de σ commençant par la lettre a est le mot infini

$$\omega := abbcbcccbcccccccbccc\cdots .$$

Notons $f_a(z), f_b(z), f_c(z)$ les séries indicatrices de chaque lettre dans ω. On a notamment

$$f_a(z) = 1,\ \ f_b(z) = \mathfrak{f}_2(z) \ \text{ et } f_a(z) + f_b(z) + f_c(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

où $f_2(z)$ est la fonction définie à l'exemple 3. La construction de Cobham nous donne alors le système

$$\begin{pmatrix} f_a(z) \\ f_b(z) \\ f_c(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & z & 1+z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a(z^2) \\ f_b(z^2) \\ f_c(z^2) \end{pmatrix} .$$

Exemple 10. Considérons le morphisme de l'exemple 8. La construction de Cobham donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} f_0(z) \\ f_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(z^2) \\ f_1(z^2) \end{pmatrix} .$$

Ici la fonction $f_1(z)$ est précisément la série $f_{\mathbf{tm}}(z)$ de l'exemple 6.

On notera la ressemblance entre les systèmes (9) et (11). On doit cependant être vigilant, tant les systèmes (9) et (11) ne se déduisent pas nécessairement l'un de l'autre. En effet, les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ intervenant dans (11) possèdent la propriété suivante :

$$f_1(z) + \cdots + f_m(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

puisqu'elles sont les séries indicatrices d'une partition de $\mathbb{N}$. Les fonctions génératrices des éléments du q-noyau d'une suite automatique n'ont aucune raison, *a priori*, de satisfaire à ce type de relation linéaire. Les systèmes (9) et (11) associés à une même suite automatique n'ont même pas forcément la même dimension, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 11. Considérons l'automate qui retourne 0 si le développement binaire d'un nombre entier contient au moins un bloc de 0 de taille impaire et 1 sinon. Cet automate engendre la suite

$$\mathfrak{bs} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := 1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,\ldots$$

connue sous le nom de *Baum-Sweet*. Le 2-noyau de cette suite est composé de trois éléments : les suites $\mathfrak{bs}$, $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite identiquement égale à 0. Si on note $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ les séries génératrices de ces suites, on trouve

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z^2) \\ f_2(z^2) \\ f_3(z^2) \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Considérons par ailleurs le morphisme σ sur l'alphabet $\mathcal{A} := \{a, b, c, d\}$ défini par

$$\sigma(a) := ab,\ \sigma(b) = cb,\ \sigma(c) = bd,\ \text{ et } \sigma(d) = dd\,,$$

ainsi que le codage $\tau : \mathcal{A} \mapsto \{0, 1\}$ défini par $\tau(a) = \tau(b) = 1$, $\tau(c) = \tau(d) = 0$. On obtient également la suite de Baum-Sweet quand on considère l'image par τ de ω, l'unique point fixe de σ commençant par la lettre a. Notons $f_a(z), f_b(z), f_c(z)$ et $f_d(z)$ les séries indicatrices des lettres a, b, c et d dans ω. On a le système

$$\begin{pmatrix} f_a(z) \\ f_b(z) \\ f_c(z) \\ f_d(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z & z & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 1+z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_a(z^2) \\ f_b(z^2) \\ f_c(z^2) \\ f_d(z^2) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Bien sûr, ce système « contient » en quelque sorte le système (12), puisque $f_1(z) = f_a(z) + f_b(z)$, $f_2(z) = f_a(z) + f_c(z)$ et $f_3(z) \equiv 0$. Pour autant, ces systèmes n'ont pas la même dimension. D'ailleurs, constate assez facilement que l'ensemble des vecteurs de $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}^3$, solutions du système (12), forme un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension 1, tandis que l'ensemble des vecteurs de $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}^4$, solutions du système (13), forme un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension 2.

2 Indépendance algébrique des valeurs de fonctions mahlériennes

Rappelons qu'on note $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ l'anneau des fonctions analytiques à coefficients algébriques.

Définition 4. Soit $q \geq 2$ un entier. Une fonction $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ est *q-mahlérienne* s'il existe un entier $m \geq 1$ et $p_0(z), \ldots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ des polynômes non tous nuls, tels que

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + p_2(z)f(z^{q^2}) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,. \tag{14}$$

On appelle *équation q-mahlérienne homogène d'ordre m*, ou tout simplement *équation homogène*, une équation de la forme (14). On dit qu'une fonction est *mahlérienne* si elle est q-mahlérienne pour un certain entier $q \geq 2$.

On montre sans difficulté (voir chapitre II) qu'une fonction est mahlérienne si et seulement si elle est l'une des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien de la forme (4). Dans la pratique, ces systèmes sont souvent plus pratiques à manier que les équations homogènes. De même, on montrera au chapitre II que les fonctions analytiques à coefficients algébriques, solutions d'équations de la forme

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,, \tag{15}$$

sont les fonctions mahlériennes. Les équations (15) seront appelées *équations inhomogènes d'ordre m*.

Exemple 12. Les séries

$$\mathfrak{f}_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{q^n},$$

$q \geq 2$, forment une famille de fonctions mahlériennes. En effet, elles satisfont à l'équation inhomogène d'ordre 1

$$\mathfrak{f}_q(z) - \mathfrak{f}_q(z^q) - z = 0.$$

En 1978, Loxton et van der Poorten [66], les exhibent comme archétypes de fonctions mahlériennes. Suivant Schneider [99, Satz 8], les auteurs de [66] leur donnent le nom de *séries de Fredholm*[1]. Ces séries ont par ailleurs un intérêt analytique particulier : elles forment le premier exemple de séries holomorphes sur le disque unité qui admettent le cercle unité comme coupure (c'est-à-dire qu'elle ne sont prolongeables en aucun point du cercle unité). Cela découle du fait qu'elles sont divergentes en tout point de la forme $e^{2i\pi/q^k}$. En réalité, comme l'a démontré Randé [93], c'est le cas de toute fonction mahlérienne irrationnelle. Ce fait a été récemment redémontré dans [31].

Exemple 13. En partant du système (10), on trouve que la série $f_{\mathbf{tm}}(z)$ de l'exemple 6 est solution de l'équation mahlérienne inhomogène

$$f_{\mathbf{tm}}(z) = (1-z) f_{\mathbf{tm}}(z^2) + \frac{z}{1-z^2}.$$

La série $f_{\mathbf{bs}}(z)$ associée à la suite de Baum-Sweet de l'exemple 11 satisfait quant à elle à l'équation mahlérienne homogène

$$f_{\mathbf{bs}}(z) - z f_{\mathbf{bs}}(z^2) - f_{\mathbf{bs}}(z^4) = 0. \tag{16}$$

2.1 Flottements et incertitudes autour de la méthode de Mahler

La méthode de Mahler est marquée par un développement laborieux, dans lequel des résultats ont été annoncés, mais n'ont pas été démontrés et où, de surcroît, un certain nombre de démonstrations publiées se sont révélées fausses ou incomplètes. Ce flou dans lequel a grandi la méthode de Mahler a probablement été l'une des causes des difficultés de son développement.

1. Notons que Shallit [102] fait remarquer que cette appellation est abusive. Il semble que Fredholm ne se soit jamais intéressé qu'à la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ et que l'erreur d'attribution soit due à la ressemblance typographique avec la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Suivant [1] on pourrait les appeler *séries de Kempner*, en référence au premier mathématicien ayant démontré la transcendance du nombre $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$.

En 1976, lors d'un exposé au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Kubota [57] annonce une série de nouveaux résultats concernant la méthode de Mahler. Les démonstrations de ces résultats sont contenues dans plusieurs pré-publications, qui, à l'exception de l'article [58], ne seront jamais publiées. Il énonce notamment le résultat suivant.

Soient $q_1, \dots, q_r \geq 2$ des entiers deux à deux multiplicativement indépendants. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres algébriques non nuls du disque unité et $f_{i,1}(z), \dots, f_{i,m_i}(z)$ des fonctions algébriquement indépendantes, solutions d'une équation de la forme

$$\begin{pmatrix} f_{i,1}(z) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(z) \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} f_{i,1}(z^{q_i}) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(z^{q_i}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{i,1}(z) \\ \vdots \\ b_{i,m_i}(z) \end{pmatrix}$$

avec A_i une matrice constante et $b_{i,1}(z), \dots, b_{i,m_i}(z)$ des fractions rationnelles définies au point α_i. Les $m_1 + \cdots + m_r$ nombres $f_{1,1}(\alpha_1), \dots, f_{r,m_r}(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants.

Le théorème 4 fournit la première démonstration de ce résultat.

En 1978, Loxton et van der Poorten [66] reprennent l'idée de Kubota, dans le cas particulier où les fonctions $f_i(z)$ sont les séries de Fredholm $\mathfrak{f}_{q_i}(z)$ de l'exemple 12. Ils énoncent notamment un cas particulier du théorème 5 pour les séries de Fredholm. Leur démonstration manque cependant de rigueur, comme le remarque Ku. Nishioka dans [87]. La preuve du premier point du théorème 1 de [66] n'est pas complète, puisqu'elle n'utilise pas le fait que les nombres $q_1, \dots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants. Les auteurs énoncent également un résultat que l'on peut reformuler de la façon suivante.

Soient $q_1, \dots, q_r \geq 2$ des entiers deux à deux multiplicativement indépendants et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des points algébriques non nuls du disque unité. On a l'égalité

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \ \{\mathfrak{f}_{q_1}(\alpha_1), \dots, \mathfrak{f}_{q_r}(\alpha_n)\} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}} \ \{\mathfrak{f}_{q_i}(\alpha_1), \dots, \mathfrak{f}_{q_i}(\alpha_n)\} \ .$$

Leur démonstration est uniquement esquissée et les auteurs invitent à adapter des preuves de lemmes similaires que l'on trouve dans [63] et [65]. La démonstration du lemme 4, permettant la construction du polynôme auxiliaire, est tronquée. Rien ne semble garantir que le polynôme $p_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})$ est non nul. Il s'agit d'ailleurs d'une difficulté importante lors de la construction du polynôme auxiliaire dans la méthode de Mahler. Nous y reviendrons au chapitre III, à l'occasion de la preuve du théorème 16. La preuve de leur lemme de zéros, le lemme 5, est elle aussi incomplète. Les auteurs renvoient à l'article [63] pour les détails de la démonstration, article dans lequel,

ils ne considèrent qu'une seule transformation mahlérienne. Les auteurs ne semblent pas prendre en compte les phénomènes de compensation qui pourraient apparaître du fait d'étudier une fonction de plusieurs variables en des points de la forme

$$\left(\alpha_1^{q_1^{k_1}}, \dots, \alpha_r^{q_r^{k_r}}\right)$$

où $k_i = \lfloor k/\log q_i \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$, pour chaque i. C'est finalement Masser [76] qui démontrera, en 1999, un premier lemme de zéros général dans ce cadre.

À plusieurs autres reprises, à l'occasion d'exposés, Loxton et van der Poorten annonceront être non loin de savoir appliquer la méthode de Mahler à des fonctions q_i-mahlériennes, pour des entiers $q_1, \dots, q_r$ deux à deux multiplicativement indépendants. Dans [110] et [69], ces auteurs annoncent qu'ils sont en voie de démontrer qu'une fonction $f(z)$ irrationnelle ne peut être à la fois q_1 et q_2 mahlérienne, si les nombres q_1 et q_2 sont multiplicativement indépendants. Ce résultat sera finalement démontré en 2017 par Adamczewski et Bell [6], par une méthode différente.

En 1982, Loxton et van der Poorten [67] énoncent un cas particulier de ce qui deviendra le théorème de Nishioka.

Considérons $(f_1(z), \dots, f_m(z))^\top$ un vecteur de fonctions analytiques à coefficients algébriques, solution d'un système mahlérien pour lequel la matrice $A(z)$ est définie et inversible en 0. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier pour le système. Alors

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}(z)}}(f_1(z), \dots, f_m(z)) \,.$$

Leur preuve est elle aussi incomplète, comme le note Ku. Nishioka dans [85] : « *The first sentence in the proof of Lemma 5 in [67]* (ici) *is not clear*[2]. » Un argument manque dans la construction de la fonction auxiliaire, la rendant incorrecte. Nous y reviendrons dans le chapitre III, quand nous proposerons une correction de leur preuve, dans le cadre de la méthode de Mahler en plusieurs variables.

En 1988, Loxton et van der Poorten [68] annoncent avoir démontré le théorème AB07b, à savoir le fait que le développement dans une base entière d'un nombre algébrique irrationnel ne peut pas être engendré par un automate fini. Les auteurs déduisent ce résultat d'un cas particulier du théorème de Nishioka, quand α est l'inverse d'un entier. Une telle déduction ne peut s'obtenir immédiatement, comme l'a noté Becker [28] pour les deux raisons citées dans l'introduction : rien ne garantit que le point α ne fait pas partie des singularités du système et, même quand c'est le cas, la transcendance

2. La première phrase de la preuve du lemme 5 de [67] n'est pas claire. (Nous traduisons.)

d'une fonction mahlérienne ne garantit pas la transcendance de chacune de ses valeurs. Par ailleurs, leur preuve du cas particulier du théorème de Nishioka contient elle aussi d'importantes zones d'ombre.

L'ensemble de ces hésitations font qu'il est parfois difficile de se repérer en méthode de Mahler, entre ce qui est démontré et ce qui ne l'est pas. Cela est d'autant plus vrai qu'un certain nombre de ces résultats dont la démonstration est incomplète ont été repris dans des articles ou des exposés ultérieurs. Par exemple le résultat de [67] est repris dans [68, 69, 110] et celui de [68] dans [36, 47]. L'ouvrage de Ku. Nishioka [89] a permis de faire le point sur l'état des connaissances à la fin du siècle dernier. L'autrice souligne en creux le fait que les preuves des résultats mentionnés ci-dessus sont incomplètes, en ne les mentionnant pas.

2.2 Le théorème de Nishioka

Dans les années 80, la mise au jour du lien entre automates finis et équations de la forme (14) a réorienté, en partie, les recherches en méthode de Mahler vers les équations linéaires. Les équations rationnelles (2) étudiées par Mahler ne recoupent les équations linéaires que dans le cadre des équations inhomogènes d'ordre 1. La plupart des automates finis passent en effet sous le radar de la méthode de Mahler lorsque l'on n'étudie que les équations rationnelles (2).

Le premier résultat obtenu pour des équations mahlériennes d'ordre supérieur à 2 est le *théorème de Nishioka*, qui permet de traiter de manière générale toutes les équations mahlériennes et que nous ré-énonçons ici.

Théorème Ni90. *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z)$ des fonctions analytiques formant un vecteur solution d'un système mahlérien. En tout point algébrique régulier α, $0 < |\alpha| < 1$, on a l'égalité*

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) .$$

Esquisse de démonstration. La démonstration que donne Ku. Nishioka de son théorème s'éloigne légèrement du schéma classique de la méthode de Mahler. En notant $t := \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z))$ et en supposant que les fonctions $f_1(z), \dots, f_t(z)$ sont algébriquement indépendantes, on construit un approximant de Padé de type I des fonctions $f_1(z), \dots, f_t(z)$. On substitue z^{q^k} à z dans cette approximant et on utilise l'équation (4) pour remplacer $f_1(z^{q^k}), \dots, f_t(z^{q^k})$ par $f_1(z), \dots, f_m(z)$. On obtient ainsi, pour chaque k, un polynôme $P_k(X_1, \dots, X_m)$, pour lequel on maîtrise le degré et la hauteur des coefficients et tel que $|P_k(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))|$ est très petit, mais non nul. De telles estimations nous permettent de minorer le degré de transcendance de l'ensemble $\{f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\}$, en utilisant des résultats de Nesterenko [80] en théorie de l'élimination. □

Notons que Fernandes [48] a simplifié l'exposition de cette dernière étape, en utilisant directement des critères d'indépendance algébrique établis par Philippon. Cela permet, par la même occasion, à l'autrice d'obtenir un analogue du théorème de Nishioka en caractéristique positive.

Contrairement à celles des E-fonctions, les singularités d'un système mahlérien sont, s'il y en a, en nombre infini. En effet, si α est un point singulier et si ξ est tel que $\xi^q = \alpha$, alors ξ est également une singularité. La matrice $A(z)$ ayant un nombre fini de pôles et son déterminant n'ayant qu'un nombre fini de zéros, l'ensemble des points singuliers du disque unité est une union finie d'ensembles de la forme

$$\mathcal{S}(\alpha) := \{\eta \in D(0,1) \ : \ \eta^{q^l} = \alpha \text{ pour un } l \in \mathbb{N}\}\,.$$

Notons que l'intersection de cet ensemble avec tout compact du disque unité ouvert est finie.

Remarquons que les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ d'un système mahlérien sont toutes définies aux points réguliers du système. En effet, si l'une des fonctions $f_i(z)$ n'était pas définie en un point α régulier, en itérant l'équation (4), on voit que pour chaque entier k, l'une des fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ ne serait pas définie au point α^{q^k}. Comme les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ sont analytiques, cela est impossible.

Dans le théorème de Nishioka, l'ensemble des fonctions du système est impliqué. Soit $n < m$ un entier, le théorème de Nishioka ne donne pas l'égalité entre $\text{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z))$ et $\text{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$. Cela est même faux, en général. Comme l'a fait remarqué Becker [28], la transcendance d'une fonction mahlérienne $f(z)$ n'implique pas la transcendance de $f(\alpha)$, même en un point α régulier. Illustrons ce phénomène par un exemple.

Exemple 14. Considérons la fonction mahlérienne $f(z)$ solution de

$$f(z) = (1-2z)f(z^2), \quad \text{et} \quad f(0) = 1\,.$$

Une récurrence sur les coefficients montre que $f(z)$ est une fonction analytique dont le domaine de convergence est le cercle unité ouvert. On voit facilement que $f(z)$ n'est pas rationnelle et, comme nous le verrons plus loin, cela implique que $f(z)$ est transcendante. Le point $\frac{1}{2}$ n'est pas régulier pour ce système et on ne peut donc pas appliquer le théorème de Nishioka en $\frac{1}{2}$. Pourtant, la fonction $f(z)$ est aussi la première coordonnée du système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & 1-2z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix},$$

pour lequel le point $\frac{1}{2}$ est régulier. D'après le théorème Ni90, on a donc

$$\text{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \text{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f(z), f(z^2)) = 1\,.$$

Mais $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ n'est pas transcendant, malgré le fait que la fonction $f(z)$ le soit.

Considérons une fonction mahlérienne $f(z)$ transcendante. L'exemple 14 nous pousse à nous intéresser à l'ensemble exceptionnel

$$\mathcal{E}(f) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}},\, 0 < |\alpha| < 1 \ : \ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

des points algébriques non nuls du disque unité pour lesquelles la fonction prend des valeurs algébriques. Comme nous l'avons vu avec l'exemple 14, le théorème de Nishioka ne permet pas de conclure que $\mathcal{E}(f)$ est inclus dans l'ensemble des points singuliers d'une équation mahlérienne dont $f(z)$ est solution. Pour autant, Becker [28] a déduit du théorème de Nishioka le résultat suivant.

Théorème Bec94 (Becker, 1994)**.** *Si $f(z)$ est une fonction mahlérienne transcendante, l'intersection de $\mathcal{E}(f)$ avec tout compact du disque unité est un ensemble fini. En particulier, il existe un voisinage épointé de 0 à l'intérieur duquel $f(z)$ ne prend que des valeurs transcendantes aux points algébriques.*

Si ce résultat précise le théorème de Nishioka, il ne permet toujours pas, en revanche, de prouver que tout nombre automatique irrationnel est transcendant. Pour cela, il faudrait pouvoir déterminer explicitement quels sont les points réguliers appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(f)$ et, dans un second temps, mettre en lumière ce qu'il se passe aux points singuliers. C'est l'objet de la section 4.

Il y a cependant un cadre au sein duquel le théorème de Nishioka permet de conclure immédiatement à la transcendance des valeurs de fonctions mahlériennes, c'est le cas où les fonctions considérées sont toutes algébriquement indépendantes.

Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème Ni90, si toutes les fonctions sont algébriquement indépendantes, alors les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ le sont également.*

Exemple 15. D'après (12), la série de Baum-Sweet $f_{\mathtt{bs}}(z)$ satisfait au système d'équations

$$\begin{pmatrix} f_{\mathtt{bs}}(z) \\ f_{\mathtt{bs}}(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathtt{bs}}(z^2) \\ f_{\mathtt{bs}}(z^4) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Ku. Nishioka [85] a montré que les séries $f_{\mathtt{bs}}(z)$ et $f_{\mathtt{bs}}(z^2)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. C'est également une conséquence des résultats obtenus en théorie de Galois des équations mahlériennes linéaires [95]. Comme tout point algébrique non nul α est régulier pour le système (17), on déduit du corollaire 2.2 que les nombres $f_{\mathtt{bs}}(\alpha)$ et $f_{\mathtt{bs}}(\alpha^2)$ sont algébriquement indépendants. En particulier, le nombre $f_{\mathtt{bs}}(\alpha)$ est transcendant, quel que soit le nombre algébrique α non nul du disque unité. Un tel résultat n'était pas accessible par le théorème Ma29.

Si ce résultat a une importance théorique majeure, montrer l'indépendance algébrique d'une famille de fonctions mahlériennes est, dans la pratique, souvent hors de portée des connaissances actuelles (voir section 5).

Pour résumer, on était, en 1990, confronté à deux difficultés pour démontrer la conjecture Co68.

- L'égalité des degrés de transcendance (5) n'implique la transcendance des valeurs que dans le cas où toutes les fonctions du système sont algébriquement indépendantes. Rien ne garantit que l'on puisse toujours se ramener à cette situation. Traiter cette difficulté est l'objet de la section 3.

- Le théorème de Nishioka ne s'applique qu'aux points réguliers du système. Il n'est donc d'aucun secours quand il s'agit de se prononcer sur la transcendance d'une fonction mahlérienne en un point singulier. Nous nous concentrons sur cette difficulté dans la section 4.

3 Relever les relations algébriques entre les valeurs de fonctions mahlériennes

3.1 Le théorème de Philippon

Afin de surmonter la première difficulté sans avoir à montrer l'indépendance algébrique de toutes les coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien, on doit être en mesure de préciser ce qui lie les éventuelles relations entre les valeurs des fonctions d'un système mahlérien aux relations entre les fonctions elles-mêmes. En effet, montrer la transcendance d'un nombre ξ revient à montrer l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre 1 et ξ. On aimerait donc pouvoir déduire du théorème de Nishioka que toute relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre 1 et les valeurs de fonctions, formant un vecteur solution d'un système mahlérien, provient, par spécialisation, d'une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre 1 et ces fonctions. Dans le cadre des E-fonctions, le théorème de Beukers (théorème Be06) apporte une réponse définitive : toute relation homogène entre les valeurs des E-fonctions d'un système différentiel est la spécialisation au point $z = \alpha$ d'une relation de même degré entre les fonctions. André [23] a fourni une autre preuve du théorème Be06, en développant une nouvelle théorie de Galois des équations différentielles. C'est en s'inspirant de la preuve que donne André du théorème Be06, ainsi que des méthodes utilisées par Nesterenko et Shidlovskii [82], que Philippon a démontré le théorème Ph15, qu'on appellera désormais *théorème de Philippon*.

Le théorème de Philippon traduit le fait que les seules relations algébriques entre les valeurs de fonctions formant un vecteur solution d'un sys-

tème mahlérien, en un point régulier, sont celles obtenues comme spécialisations de relations algébriques de même degré entre ces fonctions. Le point clé pour les applications est la conservation du degré de la relation. Ainsi, pour démontrer la transcendance du nombre $f_1(\alpha)$, pour α un point régulier, il suffit de connaître les relations linéaires entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ et 1. Comme nous le verrons dans la section 5, cela est bien plus élémentaire que de déterminer les relations algébriques entre ces fonctions. En particulier, en prenant un système minimal contenant 1 et $f_1(z)$, on peut toujours se ramener à une situation où ces fonctions sont linéairement indépendantes (mais le point α pourrait alors ne plus être régulier).

Nous allons montrer comment simplifier l'exposition de la démonstration du théorème Ph15, donnée par Philippon dans [92]. Sa démonstration se décompose en deux parties principales. Tout d'abord, une première étape consiste à montrer que le théorème est vrai pour tout point α appartenant à un certain voisinage de l'origine. C'est ce que nous appellerons ici le « théorème local » et qui correspond à la proposition 4.4 de [92]. La seconde étape est assez courte et correspond à la démonstration du corollaire 4.5 dans [92] ; il s'agit de montrer que le théorème local implique en fait le théorème global. L'idée astucieuse introduite par Philippon est la suivante. Si α n'est pas une singularité du système, une relation algébrique entre les fonctions f_i au point α se transporte naturellement, par itération du système (4), en une relation algébrique entre les fonctions f_i aux points α^{q^l}. Pour l suffisamment grand, α^{q^l} appartient au domaine de validité du théorème local, que l'on peut donc appliquer. Le fait que α ne soit pas une singularité permet finalement d'obtenir, par itération de la matrice inverse qui est bien définie, le théorème au point α.

Nous nous intéressons maintenant à la démonstration du théorème local. Philippon suit la démarche introduite par Nesterenko et Shidlovskii [82] dans le cadre des E-fonctions. Nous nous proposons d'axiomatiser un peu celle-ci en extrayant de [82] le résultat suivant qui ne requiert la présence d'aucune équation différentielle ou mahlérienne. La démonstration de la proposition 1 donnée ici reprend les arguments de [82] et [92]. Il s'agit simplement d'une égalité de dimension qui repose sur des principes de base d'algèbre commutative et un résultat de Krull [56]. Elle est également à rapprocher du corollaire 1.7.1 obtenu par André dans [23].

Proposition 1 (Théorème local)**.** *Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$. Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites.*

(i) *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout nombre algébrique α, $0 < |\alpha| < \rho$, on ait :*

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \,.$$

(ii) *L'extension* $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\dots,f_m(z))$ *est régulière, ce qui signifie que tout élément de* $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\dots,f(z))$ *algébrique sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ *est un élément de* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Alors, il existe $\rho'>0$ *tel que pour tout nombre algébrique* α, $0<|\alpha|<\rho'$ *et tout polynôme* $P\in\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{X}:=(X_1,\dots,X_m)$, *de degré total* d, *tel que* $P(f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha))=0$, *il existe* $Q\in\overline{\mathbb{Q}}[z,\boldsymbol{X}]$, *de degré total* d *en* $\boldsymbol{X}$, *tel que* $Q(z,f_1(z),\dots,f_m(z))=0$ *et* $Q(\alpha,\boldsymbol{X})=P(\boldsymbol{X})$.

Montrons par un exemple l'importance de la seconde condition.

Exemple 16. Considérons la solution $f(z)$ de l'équation $X^2=1+z$ pour laquelle $f(0)=1$. On voit sans difficulté que $f(z)\in\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ et que $f(z)$ est irrationnelle. Comme $f(z)$ est algébrique, l'extension $\overline{\mathbb{Q}}(z,f(z))$ n'est pas régulière sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. En tout point algébrique α du disque unité on a,

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f(\alpha))=\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f(z))=0\,.$$

Soit α un point algébrique du disque unité. Posons $P(X)=X-\sqrt{1+\alpha}$. On a $P(f(\alpha))=0$. Pour autant il n'existe aucun polynôme non nul $Q\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[X]$ de degré 1 tel que $Q(z,f(z))=0$, puisque $f(z)$ est irrationnel. On va voir que, même sans restriction de degré, on ne peut pas relever la relation $P(X)$ en une relation fonctionnelle. L'anneau $\overline{\mathbb{Q}}(z)[X]$ est un anneau principal. L'idéal des polynômes $Q\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[X]$ pour lesquels $Q(z,f(z))=0$ est engendré par le polynôme minimal de $f(z)$, le polynôme X^2-1-z. Supposons qu'il existe $Q\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[X]$ tel que $Q(z,f(z))=0$ et $Q(\alpha,X)=P(X)$. Alors, on peut écrire

$$Q(z,X)=(X^2-1-z)R(z,X)\,,$$

avec $R(z,X)\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[X]$. Comme $Q(z,X)$ est défini au point $z=\alpha$ et que $X^2-1-\alpha\neq 0$, c'est aussi le cas de $R(z,X)$. On a donc

$$X-\sqrt{1+\alpha}=P(X)=Q(\alpha,X)=(X^2-1-\alpha)R(\alpha,X)\,.$$

Mais ceci est impossible car le polynôme de droite est de degré supérieur à 2, tandis que le polynôme de gauche est de degré 1.

Démonstration de la proposition 1. On note $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\boldsymbol{X}]$ des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$. Étant donné α un nombre algébrique tel que les fonctions f_i sont toutes définies en α, on note également $\mathfrak{P}_\alpha$ l'idéal premier de $\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$ des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)$. Soient X_0 une nouvelle indéterminée et $\tilde{\boldsymbol{X}}:=(X_0,\dots,X_m)$. On note $\tilde{\mathfrak{P}}\subset\overline{\mathbb{Q}}(z)[\tilde{\boldsymbol{X}}]$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha\subset\overline{\mathbb{Q}}[\tilde{\boldsymbol{X}}]$) l'idéal homogénéisé en $X_0,\dots,X_m$ de $\mathfrak{P}$ (respectivement de $\mathfrak{P}_\alpha$). Rappelons

que l'homogénéisé d'un idéal premier est un idéal premier de même hauteur. La hauteur d'un idéal premier $\mathfrak{I}$, qui est parfois également appelé rang, est notée ici $\mathrm{ht}(\mathfrak{I})$. On note également $\dim A$, la dimension de Krull d'un anneau commutatif unitaire A. On note $\mathrm{ev}_\alpha : \overline{\mathbb{Q}}[z] \to \overline{\mathbb{Q}}$ l'application d'évaluation en $z = \alpha$.

Avec ces notations, on vérifie que la conclusion du théorème est équivalente à l'égalité

$$\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}]) = \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha\,, \tag{18}$$

quel que soit le nombre algébrique non nul α de module suffisamment petit. Comme l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}(z)[f_1(z), \ldots, f_m(z)]$ est de type fini et intègre, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) &= \dim \overline{\mathbb{Q}}(z)[f_1(z), \ldots, f_m(z)] \\
&= \dim(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\boldsymbol{X}]/\mathfrak{P}) \\
&= \dim(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\boldsymbol{X}]) - \mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \\
&= \dim \overline{\mathbb{Q}}[\tilde{\boldsymbol{X}}] - \mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}) - 1.
\end{aligned}$$

De façon totalement similaire, il vient :

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = \dim \overline{\mathbb{Q}}[\tilde{\boldsymbol{X}}] - \mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha) - 1\,.$$

D'après (i), on en déduit que pour tout nombre algébrique α tel que $0 < \alpha < \rho$, on a

$$\mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}) = \mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha)\,. \tag{19}$$

Compte tenu de (19) et comme $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, X_0, \boldsymbol{X}]) \subset \tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$, il suffit de montrer que, pour tout α suffisamment petit, l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}])$ est un idéal premier de même hauteur que $\tilde{\mathfrak{P}}$ pour obtenir (18) et conclure.

D'après (ii), l'extension $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z), \ldots, f_m(z))$ est régulière, ce qui implique que l'idéal $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}]$ est absolument premier (voir [114, Theorem 39]). Un résultat de Krull [56] implique alors que l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}])$ est premier pour tout α en dehors d'un ensemble fini. Lorsque l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}])$ est premier, on peut montrer l'égalité de hauteurs

$$\mathrm{ht}(\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, \tilde{\boldsymbol{X}}])) = \mathrm{ht}(\tilde{\mathfrak{P}})$$

comme dans [82] à l'aide d'un résultat de Hilbert. Cela conclut la démonstration. □

Ainsi, pour obtenir le théorème local, il suffit de disposer du théorème Ni90 (théorème de Nishioka) et du lemme 2, ci-dessous. Pour démontrer un résultat analogue à ce lemme, Philippon a recours à la théorie de Galois aux différences, notamment à l'utilisation des propositions 2.2, 3.2, 3.4 et du lemme 3.5 dans [92]. La démonstration que nous donnons ci-dessous raccourcit la preuve du théorème Ph15 et ne fait pas recours à la théorie de Galois aux différences, ce qui simplifie significativement l'exposition.

Lemme 2. *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions formant un vecteur solution d'un système du type (4). Alors l'extension de corps $L := \overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z), \dots, f_m(z))$ est régulière.*

Démonstration. Comme L est finiment engendré, toute sous-extension

$$\overline{\mathbb{Q}}(z) \subset L' \subset L$$

l'est également. Il s'agit d'un résultat classique (voir par exemple [59, Exercise 4, Chap. VIII]). Considérons L' la clôture algébrique de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dans L. Comme L' est algébrique et finiment engendrée, on en déduit que L' est de degré fini sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, disons d. Soit $f \in L'$. Comme f est dans L, la définition du système (4) implique que l'on a également $f(z^{q^l}) \in L$ pour tout $l \geq 0$. D'autre part, les fonctions $f(z^{q^l})$ sont algébriques puisque $f(z)$ l'est. Ainsi, les fonctions $f(z^{q^l})$, $l \geq 0$, sont toutes dans L' qui est de degré d sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et il existe donc une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f(z), f(z^q), \dots, f(z^{q^d})$, ce qui revient à dire que $f(z)$ est q-mahlérienne. Comme $f(z)$ est également algébrique, d'après le théorème Ra92 ci-dessous, $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, comme souhaité. □

Démonstration du théorème Ph15. D'après le théorème Ni90, la condition (i) de la proposition 1 est satisfaite. D'après le lemme 2, la condition (ii) de la proposition 1 est également satisfaite. Donc, d'après la proposition 1, il existe un $\rho' > 0$ tel que le théorème Ph15 est vrai dès que $0 < |\alpha| < \rho'$.

Considérons un entier l tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho'$. En itérant l fois le système (4), on trouve

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = A_l(\alpha)\boldsymbol{f}\left(\alpha^{q^l}\right), \tag{20}$$

où $A_l(z) = A(z)A(z^q)\cdots A\left(z^{q^{l-1}}\right)$. Soit $P(\boldsymbol{X}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$, de degré d, tel que $P(\boldsymbol{f}(\alpha)) = 0$. Notons

$$P_l(\boldsymbol{X}) = P(A_l(\alpha)\boldsymbol{X}).$$

D'après (20), on a $P_l\left(\boldsymbol{f}\left(\alpha^{q^l}\right)\right) = 0$. Comme $|\alpha^{q^l}| < \rho'$, le théorème Ph15 s'applique et il existe un polynôme $Q_l(z, \boldsymbol{X}) \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \boldsymbol{X}]$ tel que

$$Q_l(z, \boldsymbol{f}(z)) = 0, \text{ et } Q_l\left(\alpha^{q^l}, \boldsymbol{X}\right) = P_l(\boldsymbol{X}).$$

Comme α est un point régulier, la matrice $A_l(\alpha)$ est inversible. Posons alors $Q(z, \boldsymbol{X}) = Q_l\left(z^{q^l}, A_l(z)^{-1}\boldsymbol{X}\right)$. On a

$$Q(z, \boldsymbol{f}(z)) = Q_l\left(z^{q^l}, A_l(z)^{-1}\boldsymbol{f}(z)\right) = Q_l\left(z^{q^l}, \boldsymbol{f}\left(z^{q^l}\right)\right) = 0,$$

d'une part et,

$$Q(\alpha, \boldsymbol{X}) = Q_l\left(\alpha^{q^l}, A_l(\alpha)^{-1}\boldsymbol{X}\right) = P_l(A_l(\alpha)^{-1}\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X}),$$

d'autre part. □

Passer d'une égalité des degrés de transcendance, comme celle du théorème de Nishioka, à la possibilité de relever les relations n'est donc pas si immédiat. Comme l'illustre l'exemple 16, ce n'est pas vrai en général. D'après le lemme 1, on a besoin de la *régularité* de l'extension $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}, f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_m(\boldsymbol{z}))$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. C'est ce même argument de régularité qui permet à Nesterenko et Shidlovskii [82] de démontrer, à partir du théorème de Siegel-Shidlovskii, une version faible du théorème de Beukers. Notons que la régularité de l'extension n'est pas garantie dans tous les contextes. Dans [48], Fernandes a prouvé un analogue du théorème de Nishioka, pour les fonctions mahlériennes en caractéristique non nulle. Elle montre alors, dans [49], qu'on ne peut relever les relations entre valeurs des fonctions q-mahlériennes que si l'extension engendrée par ces fonctions est régulière, ce qui n'est pas forcément le cas si la caractéristique du corps divise q. Dans le cadre des fonctions mahlériennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, comme le montre la preuve de la proposition 1, la régularité de l'extension découle de l'alternative suivante, démontrée par Randé [93].

Théorème Ra92 (Randé 1992)**.** *Une fonction mahlérienne est rationnelle ou transcendante sur* $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$.

Dans son ouvrage, Ku. Nishioka [89] donne une autre démonstration de ce résultat, à partir d'un résultat de Ke. Nishioka [83]. Notons que l'alternative du théorème Ra92 existe aussi dans le cas des E-fonctions. Dans ce cas, elle découle simplement du fait qu'une E-fonction est entière. Dans la pratique, ce type d'alternative est très utile. En effet, démontrer l'irrationalité d'une série entière peut se faire simplement de façon combinatoire, puisqu'une fraction rationnelle est caractérisée par le fait que la suite de ses coefficients de Taylor est une suite récurrente linéaire.

Sur un corps de caractéristique positive, le théorème Ra92 n'est plus valable, comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 17. Notons $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments et considérons la série de Fredholm

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \in \mathbb{F}_2[[z]]\,.$$

Elle satisfait trivialement à l'équation mahlérienne inhomogène

$$f(z) = f(z^2) + z\,.$$

Cette fonction est algébrique car, dans $\mathbb{F}_2[[z]]$, $f(z^2) = f(z)^2$, mais elle n'est pas rationnelle.

Il existe toutefois une différence entre le théorème de Beukers et le théorème de Philippon : ce dernier n'est pas *homogène*. Il permet seulement de relever une relation linéaires entre les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$, en une relation linéaire entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ et la fonction constante égale à 1. Nous montrons à présent comment le rendre homogène.

3.2 Une version homogène du théorème de Philippon

Nous allons voir à présent comment déduire du théorème de Philippon, un résultat similaire, mais permettant de plus, quand la relation entre les valeurs des fonctions est homogène, de la relever en une relation homogène entre les fonctions. C'est le théorème 2, que nous ré-écrivons ici.

Théorème 2. *Sous les hypothèses du théorème de Philippon, si le polynôme $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_m]$ est homogène, alors on peut supposer que le polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \ldots, X_m]$ est lui aussi homogène en $X_1, \ldots, X_m$.*

Le théorème 2 implique le théorème de Philippon. En effet, on peut toujours transformer une relation inhomogène en une relation homogène en ajoutant au système la fonction f_{m+1} constante et égale à 1. Dans ce nouveau système, la matrice $A(z)$ est remplacée par la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A(z) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

et l'ensemble des point réguliers reste inchangé.

Disposer d'un énoncé homogène s'avère très utile pour l'étude des relations linéaires. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit α un point du disque unité ouvert tel que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont toutes définies en α, c'est-à-dire, tel que α n'est pôle d'aucune de ces fonctions. On définit le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des relations linéaires entre les valeurs des fonctions f_i au point α par

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \ : \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\alpha) = 0 \right\} .$$

On définit également le $\mathbb{K}(z)$-espace vectoriel des relations linéaires fonctionnelles entre les $f_i(z)$ par

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \ := \ \left\{ (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{K}(z)^m \ : \ \sum_{i=1}^{m} w_i f_i = 0 \right\} .$$

Enfin, on note ev_α l'application d'évaluation en $z = \alpha$. Dans le cas d'une relation linéaire, c'est-à-dire, d'un polynôme homogène de degré 1, le théorème 2 s'énonce de la façon suivante.

Théorème 6. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier pour le système (4). On a,*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \right) .$$

En particulier, si les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque 1. Une des limitations des théorèmes 2 et 6, comme des théorèmes de Nishioka et Philippon, ou du théorème de Beukers pour les E-fonctions, est qu'ils ne permettent pas d'isoler certaines coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien. Les relations, même entre les valeurs d'un nombre restreint de fonctions ne peuvent se relever qu'en une relation entre l'ensemble des fonctions formant le vecteur solution du système. Considérons par exemple la fonction $f(z) := \prod_{l\in\mathbb{N}} \left(1 - 2z^{2^l}\right)$ de l'exemple 14. Elle est solution du système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & 1-2z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix}.$$

Le point $\frac{1}{2}$ est régulier et on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Pourtant, la fonction $f(z)$ n'est pas nulle. Cette relation provient en fait de la relation linéaire

$$f(z) + (2z-1)f(z^q) = 0\,,$$

qui, elle, fait intervenir les deux fonctions du système.

Pour démontrer le théorème 2, nous allons commencer par prouver son corollaire, le théorème 6. Nous utiliserons pour la démonstration de ce résultat le lemme d'algèbre linéaire suivant, dont une démonstration est donnée dans [33, Lemma 3.1].

Lemme 3. *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z)$ appartenant à $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ et d la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z))$. Alors, on peut trouver des polynômes $\lambda_{i,j}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le m$, tels que les vecteurs $(\lambda_{i,1}(z), \dots, \lambda_{i,m}(z))$, $1 \le i \le d$, forment une base des $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-relations entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$, et tels que pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$, le rang de la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{1,m}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{d,m}(\xi) \end{pmatrix}$$

est égal à d.

Démonstration du théorème 6. Nous prouverons tout d'abord le résultat en supposant que les fonctions sont linéairement indépendantes. Nous montrerons ensuite comment l'on peut, dans le cas général, se ramener à cette première situation.

Supposons donc que $\dim \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0$, c'est-à-dire que les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ soient linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. On

va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un n-uplet de nombres algébriques $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, non tous nuls, tel que

$$\sum \lambda_i f_i(\alpha) = 0\,,$$

où α, $0 < |\alpha| < 1$, désigne un point algébrique régulier pour le système mahlérien associé aux fonctions $f_i(z)$. Dans ce cas, d'après le théorème Ph15, il existe des polynômes $p_1(z), \ldots, p_m(z), r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, premiers entre eux, tels que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(z) f_i(z) = r(z), \tag{21}$$

avec $p_i(\alpha) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq m$ et $r(\alpha) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $r(\alpha^q) \neq 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, il est toujours possible de considérer le plus petit entier l tel que $r(\alpha^{q^{l+1}}) \neq 0$. L'équation de dépendance affine (21) induit alors une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(\alpha^{q^l}) f_i(\alpha^{q^l}) = 0$$

et on applique le raisonnement qui suit à α^{q^l}.

On va construire à présent un nouveau système en remplaçant l'une des fonctions $f_i(z)$ par $r(z)$. Il existe un indice i pour lequel $p_i(\alpha^q)$ est non nul. En effet, si $p_i(\alpha^q) = 0$ pour chaque i, comme les fonctions $f_i(z)$ sont toutes définies en α^q car α est un point régulier, on obtiendrait que $r(\alpha^q) = 0$, ce qui serait contraire à notre hypothèse. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $p_m(\alpha^q) \neq 0$. On considère alors la matrice suivante

$$S(z) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ p_1(z) & p_2(z) & \cdots & p_m(z) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$S(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z) \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z) \\ r(z) \end{pmatrix}.$$

La matrice $S(z)$ n'a pas de pôles et a pour déterminant le polynôme $p_m(z)$. Par construction, le vecteur colonne $(f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z), r(z))^\top$ est solution du système associé à la matrice

$$B(z) := S(z) A(z) S(z^q)^{-1}\,.$$

Notons que B est bien définie en α. On a, par ailleurs, l'égalité suivante pour les déterminants :

$$\det(B(z)) := \det(S(z))\det(A(z))\det(S(z^q))^{-1} = \det(A(z))\frac{p_m(z)}{p_m(z^q)}\,.$$

Comme par hypothèse, les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et que la matrice $B(z)$ est inversible, on obtient que les fonctions $f_1(z^q),\dots,f_{m-1}(z^q)$ et $r(z^q)$ sont également linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Ainsi, la seule relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ liant $r(z)$ et $f_1(z^q),\dots,f_{m-1}(z^q),r(z^q)$ est, à multiplication par une constante près, la relation banale :

$$r(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}r(z^q)\,.$$

On en déduit que la m-ième ligne de la matrice $B(z)$ est, à multiplication par une constante près, égale à :

$$\left(0,\dots,0,\frac{r(z)}{r(z^q)}\right)\,.$$

Puisque $r(\alpha)=0$ et, par hypothèse, $r(\alpha^q)\neq 0$, on obtient que

$$(0,\dots,0,1)B(\alpha) = 0\,.$$

Cependant, on a

$$\begin{aligned}(0,\dots,0,1)B(\alpha) &= (0,\dots,0,1)S(\alpha)A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1}\\ &= (p_1(\alpha),\dots,p_m(\alpha))A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1}\\ &\neq 0\end{aligned}$$

car la matrice $A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1}$ est inversible et que les $p_i(\alpha)$ ne sont pas tous nuls. On obtient donc une contradiction, ce qui prouve le théorème dans le cas où $\dim \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z)) = 0$.

Supposons à présent que $\dim \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z)) = d \geq 1$. D'après le lemme 3, on peut choisir une famille de vecteurs

$$\boldsymbol{\lambda}_i(z) := (\lambda_{i,1}(z),\dots,\lambda_{i,m}(z)),\quad 1\leq i\leq d,$$

dont les coordonnées sont dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ et tels que le rang de la matrice

$$M(\xi) := \begin{pmatrix}\lambda_{1,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{1,m}(\xi)\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{d,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{d,m}(\xi)\end{pmatrix}$$

est égal à d pour tout ξ dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Quitte à renuméroter les fonctions f_i, on peut donc supposer que le mineur principal de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(\alpha) & \cdots & \lambda_{1,m}(\alpha) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(\alpha) & \cdots & \lambda_{d,m}(\alpha) \end{pmatrix}$$

est inversible. On considère alors la matrice suivante

$$S(z) := \begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{1,m}(z) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{d,m}(z) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est donc définie et inversible en $z = \alpha$. D'autre part, on a

$$S(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Fixons un entier l_0 tel que le déterminant de $S(z)$ ne s'annule en aucun des points α^{q^l}, pour $l \geq l_0$ et notons $q_0 = q^{l_0}$. Considérons enfin la matrice

$$B(z) = S(z)A(z)S(z^{q_0})^{-1}.$$

On a l'équation mahlérienne suivante

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q_0}) \end{pmatrix}$$

pour laquelle le point α est un point régulier. D'autre part, l'indépendance linéaire des fonctions $f_{d+1}(z), \ldots, f_m(z)$ nous garantit que la matrice $B(z)$

est triangulaire inférieure, de la forme suivante

$$B(z) = \left(\begin{array}{c|c} D(z) & 0 \\ \hline E(z) & C(z) \end{array}\right)$$

où $C(z)$ est une matrice carrée de taille $m-d$. On considère alors le sous-système

$$\begin{pmatrix} f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q_0}) \end{pmatrix}.$$

Le point α est encore régulier pour ce système. En effet, par construction, pour tout entier $\ell \geq 1$, $\alpha^{q_0^\ell}$ n'est pôle d'aucun des coefficients de $B(z)$ et donc *a fortiori* d'aucun des coefficients de $C(z)$. D'autre part

$$\det B(z) = \det C(z) \det D(z)\,,$$

et $\alpha^{q_0^\ell}$ n'étant ni un zéro de $\det B(z)$, ni un pôle de $\det D(z)$, $\alpha^{q_0^\ell}$ n'est pas un zéro de $\det C(z)$. Considérons maintenant un vecteur

$$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))\,.$$

La matrice $S(z)$ étant inversible en $z = \alpha$, on peut considérer le vecteur $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\lambda} S(\alpha)^{-1}$. D'après (22), on obtient que $\boldsymbol{\mu}$ appartient à l'ensemble

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(0, \ldots, 0, f_{d+1}(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))\,.$$

Notons $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, de sorte que

$$(\mu_{d+1}, \ldots, \mu_m) \in \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{d+1}(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))\,.$$

Par hypothèse, le système

$$\begin{pmatrix} f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q_0}) \end{pmatrix}$$

est formé de fonctions linéairement indépendantes et admet α comme point régulier. La première partie de la preuve montre donc que

$$\mu_{d+1} = \cdots = \mu_m = 0\,.$$

Posons

$$T(z) := \begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{1,m}(z) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{d,m}(z) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$T(z) = S(z) - \left(\begin{array}{c|c} 0_{d\times d} & 0_{d\times(m-d)} \\ \hline 0_{(m-d)\times d} & \mathrm{I}_{m-d} \end{array}\right).$$

On obtient alors

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} S(\alpha) = \boldsymbol{\mu} T(\alpha)\,. \tag{23}$$

Mais, par construction, chaque ligne de la matrice $T(z)$ appartient à l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))$ et donc le vecteur $\boldsymbol{\mu} T(z)$ appartient à $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))$. On déduit donc de (23) que

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))\right),$$

ce qui achève cette démonstration. □

Avant de démontrer le théorème 2, on a besoin des deux lemmes suivants, permettant, étant donné $(f_1(z),\dots,f_m(z))^\top$ un vecteur solution d'un système mahlérien, d'exhiber un système mahlérien pour les monômes de degré fixé en les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$. Nous rappelons tout d'abord quelques faits sur le produit de Kronecker de deux matrices.

Notation (Produit de Kronecker)**.** Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices, à coefficients dans un même anneau, de dimensions, respectivement, (m,n) et (p,q). Le produit de Kronecker de A et de B est la matrice $A \otimes B$, de taille (mp, nq) dont le coefficient (i,j) est le nombre

$$a_{\left\lfloor \frac{i-1}{p}\right\rfloor+1,\left\lfloor \frac{j-1}{q}\right\rfloor+1} \times b_{i-p\left\lfloor \frac{i-1}{p}\right\rfloor,j-q\left\lfloor \frac{j-1}{q}\right\rfloor}.$$

Autrement dit, on a la description par blocs

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,n}B \end{pmatrix}.$$

On note aussi, pour d, un entier

$$A^{\otimes d} = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{d \text{ fois}},$$

la puissance d-ième de Kronecker de la matrice A.

On a les propriétés suivantes, dont on trouvera les preuves, par exemple, dans [55].

Lemme 4. *i) Si A est une matrice carrée de taille m et $d \geq 1$ un entier, on a*

$$\det A^{\otimes d} = (\det A)^{md}.$$

ii) Si A, B, C et D, sont des matrices telles que les produits AB et CD sont définis, on a

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D).$$

On montre alors le lemme suivant.

Lemme 5. *Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ formant un vecteur solution d'un système q-mahlérien et soit $d \geq 1$ un entier. Notons $g_1(z), \ldots, g_N(z)$ une énumération des monômes de degré d en les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Les fonctions $g_1(z), \ldots, g_N(z)$ forment un vecteur solution d'un système q-mahlérien dont l'ensemble des singularités est inclus dans l'ensemble des singularités du système initial.*

Démonstration. Notons $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_m(z))^\top$. Le vecteur $\boldsymbol{f}(z)^{\otimes d}$ est constitué des monômes de degré d en $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, c'est-à-dire des fonctions $g_1(z), \ldots, g_N(z)$, avec plusieurs copies de chaque fonction. D'après le point *ii)* du lemme 4, on obtient

$$\boldsymbol{f}(z)^{\otimes d} = A(z)^{\otimes d} \boldsymbol{f}(z^q)^{\otimes d}.$$

Pour chaque j, $1 \leq j \leq N$, notons $\mathcal{I}_j \subset \{1, \ldots, md\}$ l'ensemble des entiers i pour lesquels la i-ième coordonnée de $\boldsymbol{f}(z)^{\otimes d}$ est égale à $g_j(z)$. Pour chaque j, notons i_j le plus petit élément de $\mathcal{I}_j$. Notons enfin $\mathcal{I}_0$ l'ensemble des i, $1 \leq i \leq md$, qui ne sont égaux à aucun des entiers $i_1, \ldots, i_N$. L'ensemble $\mathcal{I}_0$ correspond aux apparitions redondantes des fonctions $g_1(z), \ldots, g_N(z)$ dans le vecteur $\boldsymbol{f}(z)^{\otimes d}$. Notons $C_1, \ldots, C_{md}$ les colonnes de la matrice $A(z)^{\otimes d}$. On construit une matrice $B(z)$ de la manière suivante.

- On remplace chacune des colonnes C_{i_j}, $1 \leq j \leq N$, de la matrice $A(z)^{\otimes d}$, par la colonne $\sum_{i \in \mathcal{I}_j} C_i$.
- On supprime ensuite les lignes et les colonnes correspondant aux entiers $i \in \mathcal{I}_0$.

On obtient ainsi une matrice carrée $B(z)$, de taille N, telle que

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_N(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^q) \\ \vdots \\ g_N(z^q) \end{pmatrix} . \tag{24}$$

Soit α un point régulier pour le système associé à $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. La matrice $B(z)$ est obtenue en faisant des produits des coefficients de $A(z)$ et des sommes de ces produits. Comme aucun des points α^{q^k} n'est un pôle des coefficients de $A(z)$, ce n'est pas non plus un pôle des coefficients de $B(z)$. D'autres part, le déterminant de $B(z)$ divise le déterminant de $A(z)^{\otimes d}$ qui est, d'après le point *i)* du lemme 4, une puissance du déterminant de $A(z)$. Comme $\det A\left(\alpha^{q^k}\right) \neq 0$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a $\det B\left(\alpha^{q^k}\right) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le point α est donc régulier pour le système (24). □

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 2.

Preuve du théorème 2. Soient α, $0 < |\alpha| < 1$, un point algébrique régulier pour le système (4) et $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$, $\boldsymbol{X} := (X_1, \ldots, X_m)$, un polynôme homogène de degré $d \geq 1$ tel que

$$P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = 0 .$$

Notons $M_1(\boldsymbol{X}), \ldots, M_N(\boldsymbol{X})$ une énumération des monômes de degré d en les variables $X_1, \ldots, X_m$. On considère alors les fonctions

$$g_1(z) := M_1(\boldsymbol{f}(z)), \ldots, g_N(z) := M_N(\boldsymbol{f}(z)) .$$

D'après le lemme 5, celles-ci sont solutions d'un système mahlérien

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_N(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^k) \\ \vdots \\ g_N(z^k) \end{pmatrix} ,$$

pour lequel le point α est régulier. En appliquant le théorème 6 à ce système, on obtient l'existence de polynômes $v_1(z), \ldots, v_N(z)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} v_i(z) g_i(z) = 0 \quad \text{et} \quad P(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N} v_i(\alpha) M_i(\boldsymbol{X}) .$$

On pose alors $Q(z, \boldsymbol{X}) := \sum_{i=1}^{N} v_i(z) M_i(\boldsymbol{X})$, ce qui termine la démonstration. □

Le théorème 2, s'il précise la manière dont les relations entre les valeurs de fonctions mahlériennes se relèvent en des relations entre les fonctions, ne s'applique pas *a priori* aux singularités du système. Nous montrons à présent comment contourner cette difficulté et obtenir des résultats valables en tout point non nul du disque unité ouvert.

4 Contourner les singularités du système

Dans l'exemple 14, on a vu que la série $f(z) := \prod_{l\in\mathbb{N}} \left(1-2z^{2^l}\right)$ est solution de l'équation

$$f(z) = (1-2z)f(z^2)\,, \tag{25}$$

pour laquelle $\frac{1}{2}$ est une singularité. Par ailleurs, $f(z)$ est aussi solution du système

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z & 1-2z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix},$$

qui lui n'a pas de singularités. On a trivialement $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Dans la première équation, le théorème 6 ne s'applique pas car le point $\frac{1}{2}$ est singulier. Dans le second système, on peut appliquer le théorème 6. De l'équation $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on déduit du théorème 6 qu'il existe $p_1(z), p_2(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tels que $p_1(z)f(z) + p_2(z)f(z^2) = 0$, $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $p_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. On peut prendre en réalité $p_1(z) = 1$ et $p_2(z) = 2z-1$. Ainsi, en dédoublant le système (25), on a créé un système de taille 2 pour lequel le point $\frac{1}{2}$ n'est plus une singularité, mais avec une relation de dépendance linéaire entre les fonctions $f(z)$ et $f(z^2)$. Cet exemple nous apprend que, selon le système dans lequel on regarde une fonction q-mahlérienne, les relations linéaires entre les valeurs des fonctions du système peuvent provenir alternativement des singularités du système, ou des relations entre les fonctions elles-mêmes.

4.1 Énoncé des résultats

Théorème 7. *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z)$ des fonctions q-mahlériennes. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions et soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i.*

(i) *Si les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors ils sont linéairement dépendants sur $\mathbb{K}$.*

(ii) *Plus précisément, on a :*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\right) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left\{\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}\left(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)\right)\right\}.$$

Notons deux aspects remarquables de cet énoncé. Tout d'abord comme nous l'avons mentionné, il n'y figure aucune hypothèse de régularité sur le point α. Par ailleurs, il n'impose pas aux fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ de former un vecteur solution d'un système mahlérien. Les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ de ce théorème sont des fonctions q-mahlériennes, possiblement solutions de différents systèmes mahlériens, ou équations mahlériennes. Pour pouvoir appliquer le théorème 6 à ces fonctions, il faudra d'abord les regrouper toutes ensemble dans un grand système, avec potentiellement une multitude d'autres fonctions mahlériennes pour compléter ce système. Ces fonctions supplémentaires disparaissent lors de la conclusion du théorème.

Remarque 2. Notons que tous les coefficients du développement en série entière d'une fonction mahlérienne appartiennent à un même corps de nombres. C'est un résultat classique, dont nous donnons une preuve plus tard (corollaire 13). Ainsi, le théorème 7 s'applique bien à toute fonction mahlérienne, sans restrictions.

En utilisant le fait que la fonction $g \equiv 1$ est q-mahlérienne pour tout $q \geq 2$, on obtient immédiatement le théorème 1.

Théorème 1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $f(z)$ une fonction mahlérienne à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pas un pôle de f. On a l'alternative suivante : soit $f(\alpha)$ est transcendant, soit $f(\alpha) \in \mathbb{K}$.*

En prenant $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, cela démontre la conjecture Co68. En particulier, quand $f(z)$ est la série génératrice d'une suite automatique, on retrouve par la méthode de Mahler le théorème AB07b : un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant. Notons que Philippon [92] avait réussi à déduire directement du théorème Ph15 une démonstration du théorème AB07b, en utilisant le fait que les systèmes associés aux suites automatiques ont la propriété de n'avoir aucun pôle, et en gérant les singularités dans ce cas particulier. Comme l'auteur le rapporte, il semble que ce soit une discussion avec Adamczewski, sur les résultats que nous avions concernant la manière de contourner les singularités, qui lui ait permis de compléter sa preuve du théorème AB07b.

Le théorème 1 semble être le premier résultat de transcendance complètement général obtenu par la méthode de Mahler (*i.e.*, valable pour toute fonction mahlérienne et en tout point algébrique de son domaine de définition). D'autre part, l'exemple 14 montre que l'on ne peut se soustraire à l'alternative présente dans la conclusion du théorème 1, même en supposant que la fonction $f(z)$ est transcendante. Nous verrons au chapitre II que cette alternative peut être tranchée de façon effective.

En un point régulier d'un système mahlérien, le théorème 6 nous dit que l'espace $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))$, est isomorphe au $\mathbb{K}(z)$-espace vectoriel des relations linéaires entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$. Ainsi les relations linéaires entre les valeurs, en un point régulier, des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien, proviennent toutes, par spécialisation, des relations entre les fonctions elles-même. En un point singulier, nous allons voir que d'autres relations peuvent se produire. Étant donnés un système du type (4) et un entier $l \geq 1$, on pose

$$A_l(z) := A(z)A(z^q)\cdots A\left(z^{q^{l-1}}\right)$$

et

$$\ker_{\mathbb{K}} A_l(\alpha) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m)A_l(\alpha) = 0\} .$$

On fixe également un nombre réel ρ, $0 < \rho < 1$, strictement inférieur au minimum des modules des pôles (non nuls) de la matrice $A(z)$ et des racines (non nulles) de son déterminant. Ainsi, la matrice $A(z)$ est définie et inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$.

Théorème 8. *Soient $f_1(z),\dots,f_m(z)$ des fonctions formant un vecteur solution d'un système du type (4). Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, et $\mathbb{K}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i. Soit l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Si α n'est pas un pôle de $A_l(z)$, alors*

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)) = \ker_{\mathbb{K}} A_l(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))\right).$$

La seule restriction dans le théorème précédent vient du fait que l'on doit supposer que le nombre α n'est pas un pôle de $A_l(z)$. En complément, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 9. *Soient $f_1(z),\dots,f_m(z)$ des fonctions formant un vecteur solution d'un système du type (4). Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, et $\mathbb{K}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i. Supposons que les f_i soient définies au point α. Soit l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Alors, il existe une matrice $B(z) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}(z))$ satisfaisant aux conditions suivantes.*

(i) *On a :*
$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}.$$

(ii) *Le point α n'est pas un pôle de $B(z)$.*

(iii) *Le point α^{q^l} est régulier pour le système* (i).

En outre, si les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$, on a $B(z) = A_l(z)$.

Les théorèmes 8 et 9 décrivent totalement la structure des relations linéaires entre les valeurs des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien en un point algébrique α de leur domaine d'holomorphie. Il en existe de deux sortes : les relations d'origine « matricielle » et celles d'origine « fonctionnelle ». Les relations matricielles sont les éléments de l'espace $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_l(\alpha)$ et leur recherche se réduit donc au calcul du noyau d'une matrice explicite. Les relations d'origine fonctionnelle correspondent aux éléments de l'espace $\mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))\right)$. Nous verrons dans la section 5 que l'espace $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))$ a une description simple. Il est engendré

par des relations linéaires de « petits degrés », calculables de manière effective. Plus précisément, le théorème 11 montre que $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z))$ est isomorphe au noyau d'une matrice explicite.

En réalité, les deux situations coexistent toujours. En considérant un sous-système formé d'un ensemble maximal de fonctions linéairement indépendantes, on se ramène à une situation où il n'y a plus de relations d'origine fonctionnelle et donc où toutes les relations sont d'origine matricielle. Inversement, en une singularité du système, le lemme 7 présenté ci-dessous et le théorème 9 nous montrent que, quitte à ajouter des fonctions, à itérer le système et à en changer éventuellement la matrice, on peut se ramener à une situation où ce point n'est plus une singularité du système. Dans ce cas, le théorème 2 montre que toutes les relations en ce point ont une origine fonctionnelle.

Nous démontrerons le point (i) du théorème 7 de deux manières différentes, avant de démontrer totalement ce théorème. La première démonstration du point (i) du théorème 7 présente l'avantage de montrer comment - étant donnés une fonction mahlérienne $f(z)$ et un point singulier α - trouver autre fonction mahlérienne $g(z)$ dans un système pour lequel α est un point régulier et telle que $g(\alpha) = f(\alpha)$. Nous démontrerons ensuite les théorèmes 8, 9.

4.2 Une première démonstration du point (i) du théorème 7

Nous allons montrer comment obtenir le point (i) du théorème 7 à partir du théorème 2. Pour cela, nous aurons besoin de trois résultats auxiliaires.

Le lemme suivant est une adaptation directe d'une construction utilisée par Bell, Bugeaud et Coons dans [29]. Elle permet, étant donné un nombre algébrique α non nul, de plonger un système mahlérien dont les solutions sont définies au point α dans un méta-système pour lequel les points α^{q^l}, $l \geq 0$, ne sont jamais des pôles des coefficients de la matrice associée. Notons que cette astuce s'avère inutile dans le cas des séries automatiques puisque l'on peut alors se ramener à un système mahlérien dont la matrice est à coefficients polynômes.

Lemme 6. *Considérons un système du type (4) et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ qui ne soit pôle d'aucune des fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres contenant les coefficients des $f_i(z)$ ainsi que α. Alors, il existe un système mahlérien d'ordre $n \geq m$, ayant pour solution un vecteur colonne de fonctions analytiques $(g_1(z), \ldots, g_n(z))^\top$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et tel que :*

(i) *la matrice $B(z)$ associée à ce nouveau système n'a de pôle en aucun des points α^{q^l}, pour tout entier l,*

(ii) *$g_i(\alpha) = \lambda_i f_i(\alpha)$, où $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Démonstration. Notons $A_0(z)$ la matrice associée à notre système. La matrice $A_0(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{K}$. En effet si ce n'est pas le cas, il existe des nombres algébriques $\xi_1, \ldots, \xi_t$, linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$ et tels que les coefficients de $A_0(z)$ appartiennent à l'espace vectoriel

$$\mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \cdot \xi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K} \cdot \xi_t \,.$$

Alors, on peut décomposer $A_0(z) = A_{0,0}(z) + A_{0,1}(z)\xi_1 + \cdots + A_{0,t}(z)\xi_t$, avec $A_{0,0}(z), \ldots, A_{0,t}(z)$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\boldsymbol{f}(z)$ le vecteur colonne formé des fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. En identifiant les termes appartenant à $\mathbb{K}$ dans l'égalité

$$\boldsymbol{f}(z) = A_{0,0}(z)\boldsymbol{f}(z^q) + \xi_1 A_{0,1}(z)\boldsymbol{f}(z^q) + \cdots + \xi_t A_{0,t}(z)\boldsymbol{f}(z^q)$$

on trouve que $A_0(z) = A_{0,0}(z)$ et $A_{0,1}(z) = \cdots = A_{0,t}(z) = 0$.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il existe un entier l tel que la matrice $A_0(z)$ ne soit pas définie au point α^{q^l}. En effet, si ce n'est pas le cas, le système de départ jouit déjà des propriétés requises. Notons $b(z)$ le polynôme obtenu comme ppcm des dénominateurs des coefficients de la matrice $A_0(z)$. On a alors $A_0(z) = A(z)/b(z)$ pour une matrice $A(z)$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{K}[z]$. Notons qu'il existe un entier l_0 tel que

$$b(\alpha^{q^l}) \neq 0 \tag{26}$$

pour tout $l \geq l_0$. D'autre part, on peut écrire $b(z) = \gamma z^r \beta(z)$ où $r \geq 0$ est un entier, γ est un élément de $\mathbb{K}$ et $\beta(z)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $\beta(0) = 1$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on pose :

$$h_i(z) := f_i(z) \prod_{j \geq 0} \beta(z^{q^j}) \,.$$

Le vecteur colonne $(h_1(z), \ldots, h_m(z))^\top$ est ainsi solution du système mahlérien associé à la matrice $A(z)/\gamma z^r$. En dérivant, on obtient un nouveau système de la forme

$$\begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_m(z) \\ h_1'(z) \\ \vdots \\ h_m'(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma z^r} \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ \star & qz^{q-1}A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z^q) \\ \vdots \\ h_m(z^q) \\ h_1'(z^q) \\ \vdots \\ h_m'(z^q) \end{pmatrix},$$

où $\star$ désigne une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. En itérant ce procédé

t fois, on obtient un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_m(z) \\ h_1'(z) \\ \vdots \\ h_m'(z) \\ \vdots \\ h_1^{(t)}(z) \\ \vdots \\ h_m^{(t)}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma z^r} \begin{pmatrix} A(z) & 0 & \cdots & 0 \\ \star & q\frac{z^q}{z}A(z) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \dots & \star & q^t\frac{z^{tq}}{z^t}A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z^q) \\ \vdots \\ h_m(z^q) \\ h_1'(z^q) \\ \vdots \\ h_m'(z^q) \\ \vdots \\ h_1^{(t)}(z^q) \\ \vdots \\ h_m^{(t)}(z^q) \end{pmatrix}.$$

Notons s l'ordre de la racine α dans le polynôme $\prod_{j=0}^{l_0-1}\beta(z^{q^j})$ et $T(z)$ le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par l'égalité

$$\prod_{j=0}^{l_0-1}\beta(z^{k^j}) = (z-\alpha)^s T(z)\,.$$

Notons que $T(\alpha)\neq 0$. Un calcul montre alors que, pour tout i, $1\leq i\leq m$, on a

$$f_i(\alpha)s!T(\alpha) = \frac{h_i^{(s)}(\alpha)}{\prod_{j\geq l_0}\beta(\alpha^{q^j})}\,. \tag{27}$$

D'autre part, on peut vérifier que le vecteur colonne dont les coordonnées sont les fonctions

$$g_{i+mj}(z) := \frac{h_i^{(j)}(z)}{\prod_{l\geq l_0}\beta(z^{q^l})},\ i=1,\dots,m, j=0,\dots,s,$$

satisfont à un système mahlérien d'ordre $n := m(s+1)$ associé à la matrice

$$B(z) := \frac{1}{\gamma z^r \beta(z^{q^{l_0}})} \begin{pmatrix} A(z) & & & \\ \star & qz^{q-1}A(z) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \star & \dots & \star & q^s z^{s(q-1)}A(z) \end{pmatrix}.$$

Au vu de (26) et (27), et puisque les $\star$ désignent des sous-matrices à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$, ce système a toutes les propriétés requises. □

Le lemme suivant est la conséquence d'une autre construction permettant de plonger un système mahlérien pour lequel un point α est singulier (mais tel que α^{q^l} n'est jamais un pôle de la matrice associée) dans un plus grand système pour lequel α est un point régulier. Cette construction est à rapprocher de celle utilisée dans l'exemple 14.

Lemme 7. *Considérons un système du type (4) et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ qui ne soit pôle d'aucune des fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Supposons en outre que, pour tout entier l, α^{q^l} ne soit pas un pôle de la matrice $A(z)$. Alors, il existe un système mahlérien d'ordre $n \geq m$ admettant un vecteur colonne de fonctions analytiques $(h_1(z), \ldots, h_n(z))^\top$ comme solution et tel que :*

(i) *α est un point régulier pour ce système,*

(ii) *$h_i(z) = f_i(z)$ pour $i = 1 \ldots, m$.*

Démonstration. Plaçons-nous dans les conditions du théorème et supposons que le point α soit singulier (mais tel que la matrice $A(z)$ associée soit définie en tout point de la forme α^{q^l}, comme le permet l'hypothèse). L'idée est alors de « dédoubler le système » en remarquant que les $2n$ fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z), f_1(z^q), \ldots, f_m(z^q)$ satisfont à la relation

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \\ f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix} = B_1(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \\ f_1(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^2}) \end{pmatrix},$$

où $B_1(z)$ est donné par la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A(z) - \mathrm{I}_m & A(z^q) \\ \hline \mathrm{I}_m & 0 \end{array}\right).$$

Notons d'abord que par hypothèse la matrice $B_1(z)$ est bien définie en tout point de la forme α^{q^l}. Ainsi, si α est singulier, cela signifie nécessairement qu'il existe un entier l tel que $\det B_1(\alpha^{q^l}) = 0$. D'autre part, on a $\det B_1(z) = \det A(z^q)$. Comme les racines de $\det A(z)$ sont en nombre fini, il existe un entier l_0 tel que $\det A(\alpha^{q^l}) \neq 0$ pour tout $l \geq l_0$. En itérant l_0 fois la méthode

de dédoublement, on obtient un système du type :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \\ f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{l_0}}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^{l_0}}) \end{pmatrix} = B_{l_0}(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \\ f_1(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{l_0+1}}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^{l_0+1}}) \end{pmatrix},$$

où $B_{l_0}(z) \in \mathrm{GL}_{m2^{l_0}}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ est définie récursivement par :

$$B_j(z) := \left(\begin{array}{c|c} B_{j-1}(z) - \mathrm{I}_{m2^{j-1}} & B_{j-1}(z^q) \\ \hline \mathrm{I}_{m2^{j-1}} & 0 \end{array}\right)$$

et $B_0(z) := A(z)$. On obtient donc que $\det B_{l_0}(z) = \det A(z^{q^{l_0}})$, ce qui implique que le point α est régulier pour le système associé à la matrice $B_{l_0}(z)$. En posant $n = m2^{l_0}$ et $h_{am+i}(z) := f_i(z^{q^a})$ pour $1 \leq i \leq m$ et $0 \leq a < 2^{l_0}$, on obtient le résultat souhaité. □

Nous aurons également besoin du lemme de descente suivant.

Lemme 8. *Soient $h_1(z), \ldots, h_m(z)$ des fonctions analytiques et à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ dans le domaine de convergence de ces fonctions. Supposons qu'il existe $w_1(z), \ldots, w_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tels que*

$$w_1(z)h_1(z) + \ldots + w_m(z)h_m(z) = 0\,, \tag{28}$$

avec $w_i(\alpha) = 0$ pour tout i dans un ensemble $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, m\}$ et $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$ pour un certain indice $i_0 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \mathcal{I}$. Alors il existe $v_1(z), \ldots, v_m(z) \in \mathbb{K}[z]$ tels que

$$v_1(z)h_1(z) + \ldots + v_m(z)h_m(z) = 0\,,$$

avec $v_i(\alpha) = 0$ pour tout i dans $\mathcal{I}$ et $v_{i_0}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Les polynômes $w_1(z), \ldots, w_m(z)$ étant en nombre fini et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, leurs coefficients engendrent une extension de corps de

degré fini, disons h, sur $\mathbb{K}$. Notons $\mathbb{K}_0 \subset \overline{\mathbb{Q}}$ une telle extension et δ le maximum des degrés des $w_i(z)$. Soit φ tel que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(\varphi)$. Chaque polynôme $w_i(z)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$w_i(z) = \sum_{k=0}^{\delta} \left(\sum_{l=0}^{h-1} \lambda(i,k,l)\varphi^l \right) z^k \,,$$

où les coefficients $\lambda(i,k,l)$ sont tous dans $\mathbb{K}$.

Soit i_0 comme dans l'énoncé. Comme $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$, il existe un indice l_0 tel que

$$\sum_{k=0}^{\delta} \lambda(i_0,k,l_0)\alpha^k \neq 0. \tag{29}$$

La relation (28) donne une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{K}_0$ entre les fonctions $z^k h_i(z)$, $k = 0, 1, \ldots \delta$, $i = 1, \ldots, m$, à savoir :

$$\sum_{l=0}^{h-1} \left(\sum_{k=0}^{\delta} \sum_{i=1}^{m} \lambda(i,k,l) z^k h_i(z) \right) \varphi^l = 0 \,.$$

Comme l'indéterminée z est transcendante sur $\mathbb{C}$, que les coefficients des $h_i(z)$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et que $1, \varphi, \ldots, \varphi^{h-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$, on en déduit que pour tout l :

$$\sum_{k=0}^{\delta} \sum_{i=1}^{m} \lambda(i,k,l) z^k h_i(z) = 0 \,.$$

On obtient notamment la relation de dépendance linéaire suivante sur $\mathbb{K}[z]$ entre les $h_i(z)$:

$$v_1(z)h_1(z) + \cdots + v_m(z)h_m(z) = 0 \,,$$

où $v_i(z) := \sum_{k=0}^{\delta} \lambda(i,k,l_0) z^k \in \mathbb{K}[z]$. Notons que d'après (29), $v_{i_0}(\alpha) \neq 0$. Cela implique au passage que $v_{i_0}(z) \neq 0$ et donc que la relation est non triviale.

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à vérifier que $v_i(\alpha) = 0$ pour $i \in \mathcal{I}$. Pour un tel i, nous savons que $w_i(\alpha) = 0$, ce qui signifie que

$$\sum_{k=0}^{\delta} \left(\sum_{l=0}^{h-1} \lambda(i,k,l)\varphi^l \right) \alpha^k = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{l=0}^{h-1} \left(\sum_{k=0}^{\delta} \lambda(i,k,l)\alpha^k \right) \varphi^l = 0 \,.$$

Comme $\alpha \in \mathbb{K}$ et que $1, \varphi, \ldots, \varphi^{h-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$, on obtient que pour tout l :

$$\sum_{k=0}^{\delta} \lambda(i,k,l)\alpha^k = 0\,.$$

Le choix $l = l_0$ donne l'égalité $v_i(\alpha) = 0$, ce qui conclut la démonstration. □

Nous pouvons à présent démontrer le point (i) du théorème 7.

Démonstration du point (i) du théorème 7. Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ des fonctions q-mahlériennes. Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions et $\mathbb{K}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i.

Comme les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont q-mahlériennes, on peut trouver un système du type (4) d'ordre $m_0 \geq m$, associé à une matrice $B(z)$ et admettant des solutions $f_1(z), \ldots, f_{m_0}(z)$ où, pour $m+1 \leq i \leq m_0$, les fonctions $f_i(z)$ sont de nouvelles fonctions q-mahlériennes, toutes définies en α. En utilisant le lemme 6, on obtient un plus grand système mahlérien, disons d'ordre $m_1 \geq m_0$, pour lequel aucun des α^{q^l} n'est pôle d'un des coefficients de la matrice $B_1(z)$ associée à ce système. Notons que ce changement de système conduit à remplacer les fonctions $f_1(z), \ldots, f_{m_0}(z)$ par des fonctions $g_1(z), \ldots, g_{m_1}(z)$ telles que, pour tout $i = 1, \ldots, m_0$, on ait $g_i(\alpha) = \lambda_i f_i(\alpha)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \neq 0$. Une fois cette première étape réalisée, on utilise le lemme 7. Il nous permet d'obtenir un système mahlérien encore plus gros, disons d'ordre $m_2 \geq m_1$, pour lequel le point α est régulier et dont les solutions $h_1(z), \ldots, h_{m_2}(z)$ vérifient $h_i(z) = g_i(z)$ pour $i = 1 \ldots, m_1$. Comme les λ_i sont tous non nuls et dans $\mathbb{K}$, la dépendance linéaire sur $\mathbb{K}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$) des $f_i(\alpha)$ est équivalente à celle des $g_i(\alpha)$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $f_i(z) = g_i(z)$ pour $i = 1, \ldots, m_0$.

En résumé, nous pouvons donc supposer sans perte de généralité qu'il existe un système mahlérien, d'ordre disons $n \geq m$, pour lequel les solutions $h_1(z), \ldots, h_n(z)$ vérifient $h_i(z) = f_i(z)$ pour $i = 1, \ldots, m$ et tel que α est un point régulier pour ce système. Supposons à présent qu'il existe $w_1, \ldots, w_m \in \overline{\mathbb{Q}}$, non tous nuls, tels que

$$w_1 f_1(\alpha) + \ldots + w_m f_m(\alpha) = 0\,.$$

En appliquant le théorème 2 à notre système, on obtient l'existence de polynômes $w_1(z), \ldots, w_n(z)$, non tous nuls et appartenant à $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, tels que

$$w_1(z)h_1(z) + \cdots + w_n(z)h_n(z) = 0,$$

avec $w_i(\alpha) = w_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $w_i(\alpha) = 0$ pour $i = m+1, \ldots, n$. Puisque les w_i sont non tous nuls, on peut choisir un indice i_0, $1 \leq i_0 \leq m$,

tel que $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$. Le lemme 8 nous donne alors l'existence de polynômes $v_1(z), \ldots, v_n(z)$, non tous nuls et appartenant à $\mathbb{K}[z]$, tels que

$$v_1(z)h_1(z) + \cdots + v_n(z)h_n(z) = 0\,,$$

où $v_i(\alpha) = 0$ pour $i = m+1, \ldots, n$ et $v_{i_0}(\alpha) \neq 0$. En spécialisant au point α, il vient :

$$v_1(\alpha)f_1(\alpha) + \cdots + v_m(\alpha)f_m(\alpha) = 0\,. \tag{30}$$

Puisque les $v_i(z)$ sont à coefficients dans $\mathbb{K}$ et que $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $v_i(\alpha) \in \mathbb{K}$ pour tout i. Comme $v_{i_0}(\alpha) \neq 0$, la relation (30) est non triviale et les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ sont donc linéairement dépendants sur $\mathbb{K}$, ce qui termine la démonstration. □

L'exemple suivant illustre bien l'alternative décrite dans le théorème 1.

Exemple 18. On définit une suite binaire $(a_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $a_n = 0$ si le développement en base 3 de l'entier n a un nombre pair de chiffres égaux à 2 et $a_n = 1$ si ce nombre est impair. Il s'agit d'une variante de la suite de Thue-Morse définie à l'exemple 2. Notons $f_{\mathbf{tm_3}}(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}\{z\}$ la série génératrice associée. Elle est analytique dans le disque unité ouvert. Par définition, il s'agit d'une série 3-automatique. Comme la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières et qu'elle n'est pas ultimement périodique, on obtient facilement que $f_{\mathbf{tm_3}}(z)$ est irrationnelle. D'après le théorème Ra92, elle est transcendante. Pour α algébrique, $0 < |\alpha| < 1$, on se propose d'étudier la transcendance du nombre automatique $f_{\mathbf{tm_3}}(\alpha)$. Posons $f_1(z) := f_{\mathbf{tm_3}}(z)$ et $f_2(z) := \sum_{n\geq 0}(1-a_n)z^n$. On vérifie sans peine que ces deux fonctions sont solutions du système 3-mahlérien suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix},$$

où

$$A(z) := \begin{pmatrix} 1+z & z^2 \\ z^2 & 1+z \end{pmatrix}.$$

Ces deux fonctions satisfont également à la relation linéaire $f_1(z) + f_2(z) = 1/(1-z)$.

Le déterminant de $A(z)$ n'a qu'une racine dans le disque unité ouvert, il s'agit du point $\phi := (1-\sqrt{5})/2$. On peut donc déterminer explicitement l'ensemble des points singuliers de notre système. C'est l'ensemble

$$\mathcal{S} := \left\{ \phi^{1/3^l} \mid l \geq 1 \right\}.$$

Au point ϕ, on a

$$\begin{pmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\phi & 1+\phi \\ 1+\phi & 1+\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\phi^3) \\ f_2(\phi^3) \end{pmatrix}$$

et en particulier $f_1(\phi) = f_2(\phi)$. Comme $f_1(z) + f_2(z) = 1/(1-z)$, on en déduit que $f_1(\phi) = -\phi/2 \in \mathbb{Q}(\phi)$, en dépit du fait que les coefficients de $f_1(z)$ soient des entiers et que $f_1(z)$ soit transcendante. En raisonnant par récurrence, on obtient que $f_{\mathbf{tm_3}}(\phi^{1/3^l}) \in \mathbb{Q}\left(\phi^{1/3l}\right)$ pour tout entier $l \geq 1$.

Comme nous le verrons dans la section 5.3, les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. À l'image de la relation $f_1(\phi) = f_2(\phi)$, les relations de dépendance linéaire entre les valeurs des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ apparaissent toutes comme ayant une origine matricielle : elles sont données par le noyau des matrices $A_l(\phi)$. Cette origine des relations dépend en fait du système choisi pour les étudier et on assiste à un principe des vases communicants, comme l'illustre la remarque suivante. En appliquant l'astuce de dédoublement du lemme 7, on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \\ f_1(z^9) \\ f_2(z^9) \end{pmatrix},$$

avec

$$B(z) := \begin{pmatrix} z & z^2 & 1+z^3 & z^6 \\ z^2 & z & z^6 & 1+z^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ϕ est à présent un point régulier pour ce nouveau système. Évidemment, le dédoublement du système a créé deux relations de dépendance linéaire entre les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z) := f_1(z^3)$ et $f_4(z) := f_2(z^3)$, à savoir,

$$f_1(z) - (1+z)f_3(z) - z^2 f_4(z) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(z) - z^2 f_3(z) - (1+z)f_4(z) = 0\,.$$

Les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ et $f_4(z)$ sont donc à présent linéairement dépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ et il n'y a pas de contradiction. La relation linéaire $f_1(\phi) = f_2(\phi)$ apparaît dans ce nouveau système comme ayant une origine fonctionnelle. Elle est la spécialisation au point $z = \phi$ de la relation 2-orbitale

$$f_1(z) - f_2(z) - (1+z-z^2)f_1(z^3) + (1+z-z^2)f_2(z^3) = 0\,.$$

4.3 Démonstrations des théorèmes 7, 8 et 9

Dans cette partie, nous utilisons le théorème 2, pour en déduire les théorèmes 9, 8, puis 7.

Preuve du Théorème 9. Fixons un entier l comme donné dans l'énoncé. On a

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

et l'hypothèse faite sur l assure que le point α^{q^l} est régulier pour ce système. Dans la suite, quitte à remplacer q par q^l et A par A_l, on supposera que $l = 1$ et donc que α^q est un point régulier pour le système de départ.

Notons d l'ordre maximal des pôles des coefficients de la matrice $A(z)$ au point α. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier d.

Si $d = 0$, alors α n'est pas un pôle de $A(z)$ et il n'y a rien à faire.

On suppose à présent que la propriété est vraie jusqu'à l'entier $d-1$ et que α est un pôle d'ordre $d \geq 1$ pour $A(z)$. Notons que chaque coefficient de $A(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)(z-\alpha)^k},$$

où P et Q sont des polynômes, $Q(\alpha)P(\alpha) \neq 0$ et $k \leq d$. À multiplication par une constante près, les polynômes P et Q sont uniques. En notant $T(z)$ le plus petit commun multiple de ces polynômes Q, on peut décomposer la matrice $A(z)$ de la manière suivante :

$$A(z) = T(z)^{-1}\left(A_0(z) + \frac{A_1}{z-\alpha} + \cdots + \frac{A_d}{(z-\alpha)^d}\right),$$

où $A_0(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$ et où les A_i, $1 \leq i \leq d$, sont des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $A_d \neq 0$. En multipliant la relation (31) par $(z-\alpha)^d$ et en évaluant en α, on trouve

$$A_d \begin{pmatrix} f_1(\alpha^q) \\ \vdots \\ f_m(\alpha^q) \end{pmatrix} = 0,$$

puisque les fonctions f_i sont toutes définies en α. Comme α^q est un point régulier pour le système mahlérien associé à $A(z)$, le théorème 2 implique l'existence d'une matrice $C(z)$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, telle que

$$C(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad C(\alpha) = A_d. \tag{32}$$

L'argument de descente que l'on a déjà utilisé dans la démonstration du lemme 8 montre alors que l'on peut en fait choisir $C(z)$ à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. On peut donc écrire

$$A_d = C(z) + (z-\alpha)D(z),$$

où $D(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. Posons alors

$$B_0(z) := A(z) - T(z)^{-1}\frac{C(z)}{(z-\alpha)^d}.$$

Pour $B_0(z)$, α est un pôle d'ordre $d-1$ et on a

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B_0(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix} .$$

Pour l'instant, rien ne garantit que la matrice $B_0(z)$ est régulière en α^q, ni même qu'elle est inversible. On montre à présent que l'on peut modifier légèrement la matrice $B_0(z)$ pour que ce soit le cas. Par hypothèse la matrice $A(z)$ est inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Le déterminant de cette matrice est ainsi une fraction rationnelle ne s'annulant pas sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Notons $\|\cdot\|$ la norme infinie sur l'espace des matrices. Il existe un entier N_0 tel que toute matrice E de $\mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ pour laquelle il existe $\xi \in D(0,\rho)^\star$ tel que

$$\|A(\xi) - E\| < |\xi|^{N_0} ,$$

est inversible. D'autre part, la matrice $C(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. Il existe donc un entier M tel que

$$\|C(\xi)\| < M$$

pour tout $\xi \in \overline{D(0,\rho)}$. On s'intéresse maintenant au développement en série de Laurent de la fraction rationnelle $(T(z)(z-\alpha)^d)^{-1}$

$$\frac{1}{T(z)(z-\alpha)^d} = \sum_{l=-r}^{\infty} c_l z^l .$$

La série $z^{-N_0} \sum_{l \geq N_0} c_l z^l$ converge absolument sur le compact $\overline{D(0,\rho)}$. Il existe donc un entier $N_1 \geq N_0$ tel que, pour tout $\xi \in \overline{D(0,\rho)}$,

$$\left| z^{-N_0} \sum_{l \geq N_1} c_l z^l \right| < \frac{1}{M} .$$

Notons alors

$$Q(z) := \sum_{l=-r}^{N_1-1} c_l z^l \in \mathbb{K}[z, z^{-1}]$$

et posons

$$B_1(z) := B_0(z) + Q(z)C(z) = A(z) + \left(Q(z) - \frac{1}{T(z)(z-\alpha)^d} \right) C(z) .$$

Par construction on a, pour tout $\xi \in D(0,\rho)^\star$,

$$\begin{aligned}\|B_1(\xi) - A(\xi)\| &\leq \left\| \left(Q(\xi) - \frac{1}{T(\xi)(\xi-\alpha)^d} \right) C(\xi) \right\| \\ &\leq \left| \sum_{l \geq N_1} c_l \xi^l \right| \times \|C(\xi)\| \\ &< |\xi|^{N_0}\end{aligned}$$

La matrice B_1 est donc inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Par construction de la matrice $C(z)$, la matrice $B_1(z)$ satisfait elle aussi au système

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B_1(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix},$$

et le point α^q est régulier pour ce système. Enfin, α est un pôle d'ordre au maximum $d-1$, pour la matrice $B_1(z)$, comme souhaité. [3]

En appliquant l'hypothèse de récurrence à ce système, on obtient l'existence d'une matrice $B(z)$ satisfaisant aux propriétés voulues. Cela conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Supposons à présent que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. D'après ce que l'on vient de démontrer, on peut trouver une matrice $B(z)$ de sorte que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}$$

et que α ne soit pas un pôle de $B(z)$. D'autre part, on a également :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}.$$

Par différence, on obtient donc

$$\left(B(z)^{-1} - A_l(z)^{-1}\right) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = 0\,.$$

3. On montrera plus tard que cette démonstration fournit une méthode permettant de déterminer une telle matrice $B_1(z)$. En effet, le théorème 11 énoncé ci-dessous permet de calculer une matrice $C(z)$ comme en (32). Il suffit ensuite de déterminer de façon explicite un entier N_1 convenable afin d'en déduire $B_1(z)$.

Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ étant linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$, cela implique que

$$A_l(z) = B(z)\,,$$

comme voulu. □

Remarque 3. Notons *a contrario* que si les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}(z)$, on peut toujours les obtenir comme solution d'un système mahlérien ayant un pôle au point α. En effet, la dépendance linéaire des fonctions f_i implique l'existence d'une matrice non nulle $C(z)$ telle que

$$C(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont alors solutions du système mahlérien associé à la matrice

$$B(z) := A(z) + \frac{1}{(z-\alpha)^r} C(z)\,.$$

En choisissant l'entier r assez grand, on peut toujours garantir que $B(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}(z))$ et que α est un pôle de $B(z)$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 8.

Preuve du Théorème 8. Soient α un nombre algébrique non nul et l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Supposons que α ne soit pas un pôle de $A_l(z)$. Rappelons que notre objectif est de montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = \ker_{\mathbb{K}} A_l(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \right)\,.$$

Notons tout d'abord que l'inclusion $\supset$ est banale. Pour démontrer l'inclusion inverse, fixons $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))$. Posons également $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_m(z))^\top$. En itérant le système mahlérien, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\alpha) \\ &= \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}(\alpha) \\ &= \boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha) \boldsymbol{f}(\alpha^{q^l})\,. \end{aligned}$$

Le point α^{q^l} étant par hypothèse régulier, le théorème 2 implique que

$$\boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha) \in \mathrm{ev}_{\alpha^{q^l}} \left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z)) \right)\,. \tag{33}$$

Nous allons montrer l'inclusion d'espaces vectoriels suivante :

$$\mathrm{ev}_{\alpha^{q^l}} \left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z)) \right) \subset \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z)) \right) A_l(\alpha)\,. \tag{34}$$

En effet, si $\boldsymbol{v}(z) = (v_1(z), \dots, v_n(z)) \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z))$, alors, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m} v_i(z^{q^l}) f_i(z^{q^l}) \\ &= \boldsymbol{v}(z^{q^l}) \boldsymbol{f}(z^{q^l}) \\ &= \boldsymbol{v}(z^{q^l}) A_l(z)^{-1} \boldsymbol{f}(z)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boldsymbol{v}(z^{q^l}) A_l(z)^{-1} \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z))$, ou encore que

$$\boldsymbol{v}(z^{q^l}) \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z)) A_l(z)\,.$$

En évaluant en α, il vient

$$\boldsymbol{v}(\alpha^{q^l}) = \mathrm{ev}_\alpha(\boldsymbol{v}(z^{q^l})) \in \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z))\right) A_l(\alpha)\,,$$

ce qui montre l'inclusion (34).

D'après (33) et (34), il existe un vecteur $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z))\right)$ tel que

$$\boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha) = \boldsymbol{\mu} A_l(\alpha)\,.$$

Ainsi, on obtient bien le résultat souhaité, à savoir : $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\mu}$, où $(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}) \in \ker_{\mathbb{K}} A_l(\alpha)$ et $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z))\right)$. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 7.

Démonstration du théorème 7. Comme les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ sont q-mahlériennes, on peut trouver des fonctions $f_{m+1}(z), \dots, f_n(z)$ et une matrice $A(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}(z))$ telles que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 9, quitte à changer q en q^l et à modifier la matrice $A(z)$, on peut supposer que α n'est pas un pôle de $A(z)$ et que α^q est un point régulier pour ce système. Étant donné un corps $\mathbb{K}_0$, on note

$$E_{\mathbb{K}_0} := \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}_0^n \;\mid\; w_{m+1} = \cdots = w_n = 0\}\,.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, (\alpha), \dots, f_m(\alpha)) & = & \pi\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \cap E_{\overline{\mathbb{Q}}}\right), \\ & \text{et} & \\ \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1, (\alpha), \dots, f_m(\alpha)) & = & \pi\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) \cap E_{\mathbb{K}}\right), \end{array} \tag{35}$$

où π désigne la projection des m premières coordonnées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$. Le théorème 8 implique alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1,(\alpha),\dots,f_n(\alpha)) = \ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z)\right) .$$

Comme la matrice $A(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$, on a :

$$\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\alpha) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\ker_{\mathbb{K}} A(\alpha)\right) .$$

D'autre part, les fonctions f_i étant à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a également que :

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z)) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z))\right) .$$

Enfin, on a $E_{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}(E_{\mathbb{K}})$. On a donc

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1,(\alpha),\dots,f_n(\alpha)) \cap E_{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}\left(f_1,(\alpha),\dots,f_n(\alpha)\right) \cap E_{\mathbb{K}}\right)$$

et l'égalité (35) entraîne alors que

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f_1,(\alpha),\dots,f_m(\alpha)\right) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}}(f_1,(\alpha),\dots,f_m(\alpha))\right) ,$$

comme souhaité. □

4.4 Relations algébriques orbitales

Les théorèmes 8 et 9 montrent qu'en tout point algébrique non nul, les relations entre valeurs de fonctions mahlériennes sont de deux types : celles qui proviennent de la matrice du système et celles qui proviennent des fonctions, par spécialisation. Le théorème 9 et le lemme 7, montrent alors que, quitte à itérer et à grossir le système, on peut toujours se ramener à un cas où les relations, en tous points, proviennent de relations fonctionnelles. On est contraint cependant de considérer simultanément *toutes* les fonctions intervenant dans ce dernier système mahlérien et plus seulement les fonctions de départ. Si on considère des fonctions q-mahlériennes $f_1(z),\dots,f_r(z)$ quelconques, provenant éventuellement de systèmes différents, les relations entre les valeurs aux points algébriques de ces fonctions peuvent donc provenir de relations fonctionnelles entre beaucoup plus de fonctions. En réalité, on va voir que l'on peut toujours faire en sorte que ces fonctions supplémentaires soient les fonctions $f_i(z^{q^k})$, $k\in\mathbb{N}$, $1\le i\le r$. Autrement dit, les seules relations algébriques entre les valeurs de fonctions q-mahlériennes en un point algébrique non nul, sont des spécialisations des relations q-orbitales entre ces fonctions. C'est l'esprit du théorème 3 énoncé dans l'introduction, que nous ré-écrivons ici. Notons que, bien qu'il soit une conséquence immédiate des résultats énoncés dans [13], ce théorème n'avait pas été écrit jusque-là.

Théorème 3. *Soient $f_1(z), \dots, f_r(z)$ des fonctions q-mahlériennes. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions. Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ un polynôme homogène tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = 0$. Alors, il existe un entier m et un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_{r(m+1)}]$ homogène, tel que*

$$Q\left(z, f_1(z), \dots, f_r(z), f_1(z^q), \dots, f_r(z^q), \dots, f_1(z^{q^m}), \dots, f_r(z^{q^m})\right) = 0\,,$$

et

$$Q(\alpha, X_1, \dots, X_{r(m+1)}) = P(\alpha, X_1, \dots, X_r)\,.$$

Insistons bien sur les deux différences entre les hypothèses de ce théorème et celles du théorème 2 : le théorème 3 ne requiert la donnée d'aucune équation mahlérienne et aucune restriction n'est imposée quant au choix du point α.

Démonstration. On considère une équation q-mahlérienne homogène pour chacune des fonction $f_i(z)$. En regroupant ces équations dans un seul système, on trouve un système q-mahlérien dont les coordonnées sont les fonctions $f_i(z^{q^k})$, $1 \leq i \leq m$, $k \leq t$, pour un certain entier t. Quitte à changer q en q^ℓ, pour un certain entier ℓ, on peut supposer, que les fonctions $f_i(z^{q^k})$, $1 \leq i \leq m$, $k \leq t$, sont toutes définies au point α. Quitte à changer q en q^ℓ, pour un certain entier ℓ, et la matrice du système, on peut supposer, grâce au théorème 9 que α n'est pas un pôle du système et que le point α^q est régulier. Alors, en utilisant la construction du lemme 7, on peut trouver un système plus gros, contenant uniquement des fonctions de la forme $f_i(z^{q^k})$, $k \leq n$, pour un certain entier n, pour lequel le point α est régulier. En appliquant le théorème 2 on trouve le résultat souhaité. □

En somme, les seules relations pouvant exister entre les valeurs de fonctions q-mahlériennes sont les relations qui étaient déjà codées par les fonctions elles-même et l'opérateur $z \mapsto z^q$.

L'entier m du théorème 3 dépend bien sûr de l'ordre de l'équation q-mahlérienne homogène minimale de chacune des fonctions. Il dépend également de l'entier l à partir duquel on a $\alpha^{q^l} < \rho$, où ρ est choisi comme dans les théorèmes 8 et 9. Il dépend enfin, du nombre de fois que l'on doit appliquer l'astuce du dédoublement de la matrice du lemme 7, afin que le point α ne soit plus une singularité du système. En particulier, l'entier m dépend du point α choisi et n'est pas borné *a priori*, quand α parcourt le disque unité épointé.

Exemple 19. L'exemple 14 illustre bien ce phénomène. On voit que la relation $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ est une spécialisation en $z = \frac{1}{2}$ de la relation orbitale

$$f(z) = (1 - 2z) f(z^2)$$

Exemple 20. Modifions légèrement l'exemple 14 et regardons la solution analytique de l'équation inhomogène d'ordre 1

$$f(z) = \left(\frac{1}{2} - z\right) f(z^2) + \left(\frac{1}{2} - z\right) . \tag{36}$$

Le fait qu'une telle solution existe et est unique est une conséquence du lemme 18, que nous présenterons au chapitre II. On a, bien sûr $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Cependant, la relation (36) n'est pas une relation orbitale. Pour exhiber une relation orbitale, on construit d'abord une équation mahlérienne homogène satisfaite par $f(z)$:

$$(2-4z^2)f(z) = (3-6z-2z^2+4z^3)f(z^2) - (1-2z-2z^3+4z^3)f(z^4) . \tag{37}$$

Comme les polynômes $(3-6z-2z^2+4z^3)$ et $(1-2z-2z^3+4z^3)$ s'annulent au point $\frac{1}{2}$, la relation $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ est bien une spécialisation en $z = \frac{1}{2}$ de la relation orbitale (37).

4.5 Conséquences sur le développement des nombres algébriques dans une base non entière

Un aspect important du théorème 1 est le fait qu'il fournit une démonstration de la conjecture Co68, qui elle-même permet de redémontrer le théorème AB07b, établissant la transcendance des nombres automatiques irrationnels. Dans la première preuve du théorème AB07b, Adamczewski et Bugeaud [2] avaient pu élargir leur résultat au développement des nombres algébriques dans certaines bases non entières.

Soit $\beta > 1$ un nombre réel non entier. On définit l'application T_β sur $[0,1]$ par $T_\beta : x \longmapsto \beta x \bmod 1$. Le β-développement d'un nombre $x \in [0,1[$, est alors défini par :

$$(x)_\beta := 0.x_1x_2\cdots ,$$

où $x_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$. Ce développement coïncide avec celui obtenu en utlisant l'algorithme glouton. Les chiffres x_i appartiennent à $\{0,1,\ldots,\lfloor\beta\rfloor\}$. Un exemple classique est le développement en base φ (le nombre d'or), où le corps $\mathbb{Q}(\varphi)$ est précisément le corps des nombres ayant un développement périodique en base φ. Dans ce cas précis, la différence avec une base entière n'est pas flagrante. Cependant, de façon générale, l'étude des bases algébriques est bien plus complexe que celle des bases entières. Le plus souvent, on ne sait par exemple même pas caractériser les nombres ayant un β-développement ultimement périodique. Certaines bases, comme la base $3/2$, semblent particulièrement retorses et nos connaissances sont alors très limitées.

Soit β un nombre de Pisot (*resp.* de Salem), *i.e.*, un entier algébrique de module strictement plus grand que 1, dont les conjugués sont de module

strictement inférieur à 1 (*resp.* inférieur ou égal à 1). Adamczewski et Bugeaud [2], ont montré que si un nombre algébrique a un β-développement automatique, alors ce nombre appartient à $\overline{\mathbb{Q}}(\beta)$. Leur preuve, qui repose sur l'utilisation du théorème du sous-espace, ne permet pas d'étendre leur résultat au delà des nombres de Pisot ou de Salem. En effet, ces nombres, avec les entiers, sont caractérisés par le fait que leur *hauteur* est égale à leur module. Cette propriété s'avère être indispensable dans l'utilisation du théorème du sous-espace. Quand on considère le β-développement, pour un réel $\beta > 1$ algébrique quelconque, le théorème du sous-espace permet uniquement d'obtenir le résultat suivant [5].

Théorème ABL07 (Adamczewski, Bugeaud, Luca, 2007)**.** *Soient α, $0 < |\alpha| < 1$ un nombre algébrique et $\mathbb{K}$ un corps contenant α et tous ses conjugués. Notons $|\cdot|_1 := |\cdot|, |\cdot|_2, \ldots, |\cdot|_s$ l'ensemble des normes sur $\mathbb{K}$ pour lesquelles α est de module inférieur à 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite automatique. Notons $\xi_1, \ldots, \xi_s$ les limites de la somme partielle*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^n$$

pour chacune des normes $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_s$. Alors, on a l'alternative suivante : soit $\xi_1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, soit l'un des nombres $\xi_1, \ldots, \xi_s$ est transcendant.

Ainsi, par exemple, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite automatique et si la somme $\sum_{n\leq N} a_n \left(\frac{3}{2}\right)^n$ converge à la fois vers un nombre algébrique ξ dans $\mathbb{C}$, pour la norme usuelle, et vers un nombre algébrique dans $\mathbb{Q}_3$, pour la norme 3-adique, alors, ξ est un nombre rationnel.

La classe des séries $f(z)$ auxquelles on peut appliquer la méthode de Mahler est plus restreinte, car elle requiert la présence d'une équation fonctionnelle. Cependant, lorsqu'elle s'applique, elle permet d'obtenir des résultats de transcendance pour toutes les bases algébriques et pas seulement celles qui sont des nombres de Pisot ou de Salem. Le théorème 1 donne directement le résultat suivant.

Corollaire 10. *Soient $\beta > 1$ un nombre algébrique réel et α un nombre réel algébrique n'appartenant pas à $\mathbb{Q}(\beta)$. Alors le β-développement de α ne peut être engendré par un automate fini.*

Ainsi, par exemple, le développement de $\sqrt{2}$ en base 3/2 ne peut être engendré par un automate fini. De manière générale, quand $\beta \in \mathbb{Q}$, le β-développement d'un nombre algébrique irrationnel ne peut pas être engendré par un automate fini.

5 Relations entre fonctions q-mahlériennes

Le théorème 3 montre que les seules relations entre les valeurs de fonctions q-mahlériennes, en un point algébrique non nul, sont les spécialisations des relations algébriques entre les fonctions elles-mêmes et leurs itérées q-mahlériens. Déterminer la nature de ces relations algébriques fonctionnelles est une tâche délicate. On ne sait pas aujourd'hui les décrire en toute généralité, bien que les développements récents de la théorie de Galois des systèmes mahlériens aient permis d'effectuer des progrès dans ce domaine. Par contraste, nous avons montré que la détermination des relations linéaires entre fonctions q-mahlériennes (ou de manière équivalente la détermination des relations algébriques de degré fixé) peut se faire de manière totalement effective.

5.1 Relations algébriques entre fonctions q-mahlériennes

Il n'existe pas à l'heure actuelle de résultats généraux permettant de déterminer les relations algébriques entre fonctions q-mahlériennes. Dans les années 70, ce sont principalement les relations algébriques entre les fonctions mahlériennes satisfaisant à une équation inhomogène d'ordre 1 qui ont été étudiées. La théorie de Galois permet aujourd'hui de traiter les systèmes de taille 2. Il n'existe cependant aucun résultat général pour les systèmes de taille supérieure.

Le cas des équations inhomogènes d'ordre 1. Dans les années 70, plusieurs résultats ont été établis concernant l'indépendance algébrique de fonctions mahlériennes solutions d'une équation inhomogène d'ordre 1. Le plus général d'entre eux a été obtenu par Kubota [58].

Théorème Ku77 (Kubota, 1977). *Notons* $\mathcal{H} := \left\{ \frac{p(z^q)}{p(z)} \ : \ p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \right\}$. *Soient* $f_{i,j}(z)$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq n_i$, *des fonctions satisfaisant à des équations de la forme*

$$f_{i,j}(z) = a_i(z) f_{i,j}(z^q) + b_{i,j}(z)\,,$$

où

- $a_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, $b_{i,j}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq n_i$,
- $a_i(z) \neq 0$, $1 \leq i \leq h$,
- $\frac{a_i(z)}{a_{i'}(z)} \notin \mathcal{H}$, *quel que soit* $i \neq i'$, $1 \leq i, i' \leq h$.

Supposons que les fonctions $f_{i,j}(z)$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq n_i$, *soient algébriquement dépendantes sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. *Alors, il existe des nombres algébriques non*

tous nuls $\theta_{i,j}$, $1 \leq j \leq n_i$, *des fractions rationnelles* $p_1(z), \ldots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ *et des entiers relatifs non tous nuls* $m_1, \ldots m_h$, *tels que*

$$a_i(z)p_i(z^q) - p_i(z) = \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{i,j} b_{i,j}(z)\,,$$

et

$$\prod_{i=1}^{h} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \theta_{i,j} f_{i,j}(z) - p_i(z) \right)^{m_i} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,.$$

Ce théorème de Kubota donne un critère efficace pour démontrer l'indépendance algébrique de fonctions mahlériennes satisfaisant à des équations inhomogènes d'ordre 1.

Exemple 21. On considère la série de Thue-Morse $f_{\mathbf{tm}}(z)$ définie à l'exemple 6 et la série de Fredholm $\mathfrak{f}_2(z)$ définie à l'exemple 12. Elles satisfont aux équations suivantes

$$f_{\mathbf{tm}}(z) = (1-z)f_{\mathbf{tm}}(z^2) + \frac{z}{1-z^2}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}_2(z) = \mathfrak{f}_2(z^2) + z\,.$$

Pour prouver leur indépendance algébrique, il suffit de démontrer que le dernier point du théorème Ku77 ne peut être satisfait. On peut montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $p(z)$ telle que

$$p(z) - p(z^2) = z\,.$$

En effet, pour une telle fraction rationnelle on aurait :

$$p(z) - \mathfrak{f}_2(z) = p(z^2) - \mathfrak{f}_2(z^2)\,.$$

Les seuls éléments de $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ invariants par la transformation $z \mapsto z^2$ étant les éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$, on aurait $p(z) = \mathfrak{f}_2(z) + \theta$, $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$, ce qui est impossible si $p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$, puisque $\mathfrak{f}_2(z)$ est transcendante. Comme $f_{\mathbf{tm}}(z)$ est également transcendante, la dernière égalité du théorème Ku77 ne peut être satisfaite et les fonctions $f_{\mathbf{tm}}(z)$ et $\mathfrak{f}_2(z)$ sont donc algébriquement indépendantes.

Systèmes d'ordres supérieurs. En 1990, Ku. Nishioka [85] a établi un premier critère d'indépendance algébrique pour les systèmes mahlériens de taille 2, lui permettant notamment d'obtenir l'indépendance algébrique des fonctions $f_{\mathfrak{bs}}(z)$ et $f_{\mathfrak{bs}}(z^2)$, de l'exemple 13. En 2012, dans [90], elle étend son critère afin de pouvoir considérer simultanément plusieurs systèmes mahlériens de taille 2. Nous ne détaillerons pas les résultats qu'elle obtient ici, ceux-ci étant relativement techniques, mais donnerons seulement un exemple de leurs conséquences.

Exemple 22. La suite de Rudin-Shapiro est la suite dont le n-ième terme vaut 1 si le nombre d'occurrences du facteur 11 dans l'écriture binaire de n est paire et -1 sinon. Sa série génératrice $f_{\mathfrak{rs}}(z)$ satisfait au système suivant

$$\begin{pmatrix} f_{\mathfrak{rs}}(z) \\ f_{\mathfrak{rs}}(-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathfrak{rs}}(z^2) \\ f_{\mathfrak{rs}}(-z^2) \end{pmatrix}.$$

D'après [90], les fonctions $f_{\mathfrak{rs}}(z)$, $f_{\mathfrak{rs}}(-z)$, et les fonctions $f_{\mathfrak{bs}}(z)$ et $f_{\mathfrak{bs}}(z^2)$ de l'exemple 11 sont algébriquement indépendantes. Les systèmes associés à $f_{\mathfrak{rs}}(z)$ et $f_{\mathfrak{bs}}(z)$ n'ont aucune singularité. D'après le théorème de Nishioka, en tout point algébrique α du disque unité épointé, les nombres

$$f_{\mathfrak{rs}}(\alpha),\ f_{\mathfrak{rs}}(-\alpha),\ f_{\mathfrak{bs}}(\alpha),\ f_{\mathfrak{bs}}(\alpha^2)\,,$$

sont algébriquement indépendants.

Plus récemment, les travaux sur la théorie de Galois des équations aux différences ont permis d'établir de nouveaux critères d'indépendance algébrique entre les coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien. On peut résumer l'esprit de ces critères de la façon suivante.

Principe (Indépendance algébrique et groupe de Galois)**.** *Le* groupe de Galois *d'un système mahlérien code l'ensemble des relations algébriques entre les coordonnées d'un vecteur solution du système.*

Nous ne définirons ici ni ce qu'est le groupe de Galois d'un système mahlérien, ni la manière dont celui-ci code les relations algébriques entre les solutions du système. Nous renvoyons la lectrice et le lecteur à la littérature sur le sujet, notamment l'article [94], mais aussi [111] et [46]. Actuellement, on ne sait calculer systématiquement le groupe de Galois que pour les systèmes de taille 2 (voir [95]).

5.2 Relations linéaires entre solutions d'un système mahlérien

Jusqu'aux travaux présentés ici, à notre connaissance, aucun résultat ne porte spécifiquement sur les relations linéaires entre fonctions mahlériennes. La raison en est probablement qu'avant 2015 et les résultats de Philippon [92], les énoncés portant sur les valeurs de fonctions mahlériennes ne s'exprimaient qu'en termes de relations algébriques. À l'inverse des relations algébriques, la détermination des relations de dépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien, est une tâche que l'on peut réaliser de manière à la fois élémentaire et effective.

Fixons, pour toute cette section, les notations suivantes. Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \mathbb{K}\{z\}$ des fonctions analytiques. Rappelons que l'on note

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \dots, f_m(z)) := \left\{ (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{K}(z)^m \ : \ \sum_{i=1}^{m} w_i f_i = 0 \right\}$$

le $\mathbb{K}(z)$-espace vectoriel des relations linéaires sur $\mathbb{K}(z)$ entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Notons $\boldsymbol{f}(z)$ le vecteur colonne dont les coordonnées sont les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ et décomposons

$$\boldsymbol{f}(z) =: \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{f}_i z^i \in \mathbb{K}^m[[z]]\,,$$

où $\boldsymbol{f}_i$ désigne le vecteur colonne de $\mathbb{K}^m$ dont les coordonnées correspondent aux i-èmes coefficients des fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Notons $\mathbb{K}[z]_h$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus h et

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) = (\mathbb{K}[z]_h)^m \cap \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z))\,,$$

le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des relations linéaires entre $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égale à h. Étant donnés deux entiers c et h, on définit la matrice

$$\mathcal{S}(h, c, \boldsymbol{f}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_0 & \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \boldsymbol{f}_h & \cdots & \boldsymbol{f}_c \\ 0 & \boldsymbol{f}_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{f}_{c-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{f}_0 & \cdots & \boldsymbol{f}_{c-h} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\ker_{\mathbb{K}} \mathcal{S}(h, c, \boldsymbol{f}) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{K}^m)^{h+1} \mid \boldsymbol{\lambda}\mathcal{S}(h, c, \boldsymbol{f}) = 0 \right\}.$$

On définit également l'isomorphisme $\varphi_h : (\mathbb{K}^m)^{h+1} \to (\mathbb{K}[z]_h)^m$ par

$$\varphi_h(\boldsymbol{w}_0, \ldots, \boldsymbol{w}_h) = \sum_{i=0}^{h} \boldsymbol{w}_i z^i\,.$$

On omettra la dépendance en h dans la suite, le notant simplement φ. Le résultat suivant permet alors de déterminer de façon effective l'espace $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z))$ quand $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_m(z))^\top$ est un vecteur solution d'un système mahlérien.

Théorème 11. *Supposons que $\boldsymbol{f}(z)$ soit solution d'un système du type (4). Notons $b(z)$ le plus petit multiple commun aux dénominateurs des coefficients de $A(z)$, d le maximum des degrés des coefficients de la matrice $b(z)A(z)$ et ν la valuation en 0 du polynôme $b(z)$. Soient $h := 4^m d$ et*

$$c := \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z), \ldots f_m(z))\right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\varphi\left(\ker_{\mathbb{K}} \mathcal{S}(h, c, \boldsymbol{f})\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, une base de $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z))$ est composée de relations dont le degré est inférieur à h. On peut calculer effectivement ces relations en exhibant une base du noyau de la matrice $\mathcal{S}(h,c,\boldsymbol{f})$. Si l'on souhaite seulement déterminer si les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$ sont linéairement indépendantes on peut le faire de façon moins coûteuse en temps de calculs, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 12. *Soient $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $b(z)$, $A(z)$, d et ν choisis comme dans le théorème 11. Soient $h := \lfloor d/(q-1) \rfloor$ et*

$$c := \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q)+\nu-\frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil .$$

On a les équivalences suivantes :

(i) $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\dots,f_m(z)) \neq \{0\}$,

(ii) $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z),\dots,f_m(z)) \neq \{0\}$,

(iii) $\ker_{\mathbb{K}} \mathcal{S}(h,c,\boldsymbol{f}) \neq \{0\}$.

Autrement dit, si les fonctions $f_1(z),\dots,f_m(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}[z]$, il existe une relation de petit degré. Le reste de cette section est consacré aux démonstrations des théorèmes 11 et 12. On montre d'abord le lemme de zéro suivant.

Lemme 9. *Soient $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $b(z)$, $A(z)$, d et ν choisis comme dans le théorème 11. Soient h un entier et $\boldsymbol{w}(z) = (w_1(z),\dots,w_m(z)) \in (\mathbb{K}[z]_h)^m$. Si la valuation en $z=0$ de la série*

$$s(z) := \sum_{i=1}^{m} w_i(z) f_i(z)$$

est strictement supérieure à

$$\left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q)+\nu-\frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil$$

alors la série $s(z)$ est identiquement nulle.

Démonstration. Supposons par l'absurde que la valuation en $z=0$ de la série $s(z)$ soit finie et égale à

$$M > \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q)+\nu-\frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil . \tag{38}$$

On montre tout d'abord qu'on peut se ramener au cas où $b(z) = z^\nu$. En effet, écrivons $b(z) = \gamma z^\nu \beta(z)$, avec $\gamma \in \mathbb{K}$, $\beta(z) \in \mathbb{K}[z]$ et $\beta(0) = 1$, et posons

$$u(z) := \prod_{i=0}^{\infty} \beta(z^{q^i}) .$$

On a alors $u(z) = \gamma^{-1} z^{-\nu} b(z) u(z^q)$ et, en posant $\tilde{\boldsymbol{f}}(z) := u(z)\boldsymbol{f}(z)$, on vérifie que $\tilde{\boldsymbol{f}}(z)$ est solution du système

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = z^{-\nu} \tilde{A}(z) \tilde{\boldsymbol{f}}(z^q),$$

où $\tilde{A}(z) = \gamma^{-1} b(z) A(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. Comme la valuation en $z = 0$ de la série u est nulle, celle de $\tilde{s}(z) := \boldsymbol{w}(z)\tilde{\boldsymbol{f}}(z)$ reste égale à M. Dans la suite, nous supposerons donc que $b(z) = z^\nu$ et nous noterons

$$\tilde{A}(z) = z^\nu A(z) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}[z]) .$$

Pour tout entier i, on considère le vecteur suivant :

$$\boldsymbol{g}_i := \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{i-h} \end{pmatrix} \in (\mathbb{K}^m)^{h+1} .$$

On pose également $\boldsymbol{v} := \varphi^{-1}(\boldsymbol{w}(z))$. L'égalité (38) se ré-écrit

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}\boldsymbol{g}_i &= 0 \quad \forall i < M , \\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{g}_M &\neq 0 , \end{cases} \tag{39}$$

où $\boldsymbol{v}\boldsymbol{g}_i$ représente la multiplication matricielle usuelle entre le vecteur ligne $\boldsymbol{v}$ et le vecteur colonne $\boldsymbol{g}_i$. Notons $\boldsymbol{g}(z) := \sum \boldsymbol{g}_i z^i$ et considérons la matrice par blocs suivante :

$$B(z) := \begin{pmatrix} \tilde{A}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ z\tilde{A}(z) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^h \tilde{A}(z) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m(h+1)}(\mathbb{K}[z]) .$$

On obtient ainsi une nouvelle équation mahlérienne :

$$\boldsymbol{g}(z) = z^{-\nu} B(z) \boldsymbol{g}(z^q) . \tag{40}$$

Remarquons au passage que $\deg B \leq \deg \tilde{A} + h \leq d + h$. On peut alors décomposer la matrice $B(z)$ selon les puissances de z

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\deg B} B_i z^i ,$$

où les matrices B_i appartiennent à $\mathcal{M}_{m(h+1)}(\mathbb{K})$. Notons alors

$$e := \left\lfloor \frac{\deg B}{q} \right\rfloor + 1 \,.$$

Soit i un entier. On considère l'unique couple d'entiers (s, j) tel que $i = qs + j - \nu$ et $0 \leq j < q$. L'identification des termes en z^i dans l'équation (40) induit la relation suivante :

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_{qs+j-\nu} = \sum_{r=0}^{e-1} B_{qr+j} \boldsymbol{g}_{s-r} \,,$$

où l'on a posé $B_l = 0$, pour $l > \deg B$, et $\boldsymbol{g}_l = 0$, pour $l < 0$. Fixons $n > 0$ et choisissons alors i' un entier tel que $i \leq i' < i + qn$. Si $i' = qs' + j' - \nu$, avec $j' < q$, on a nécessairement $s \leq s' < s + n$. On a également

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \sum_{r=0}^{e-1} B_{qr+j'} \boldsymbol{g}_{s'-r} \,. \tag{41}$$

Le couple (i, n) étant fixé, Les vecteurs colonne intervenant dans le membre de droite de (41), quand i' parcourt l'ensemble $\{i, \ldots, i + qn - 1\}$, sont donc les $e + n$ vecteurs $\boldsymbol{g}_{s-e+1}, \cdots, \boldsymbol{g}_{s+n}$. Définissons alors l'entier n de la manière suivante :

$$n := \left\lfloor \frac{e}{q-1} \right\rfloor + 1 \,.$$

Il est choisi de sorte que $qn > e + n$. On considère alors, pour chaque entier i, le vecteur

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{i+qn-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m(h+1)qn} \,.$$

Remarquons que par définition des $\boldsymbol{g}_i$, on a

$$\mathbf{G}_i := \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{i+qn-1} \\ \boldsymbol{f}_{i+qn-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{i+qn-h} \\ \boldsymbol{f}_{i+qn-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{i-h+1} \end{pmatrix} .$$

Les vecteurs $\mathbf{G}_i$ appartiennent donc tous au sous-espace vectoriel W de $\mathbb{K}^{m(h+1)qn}$ formé des vecteurs de la forme

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_h, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \cdots, \boldsymbol{x}_{h+1}, \boldsymbol{x}_3, \cdots, \boldsymbol{x}_{qn+h})^\top \,,$$

où $\boldsymbol{x}_l \in \mathbb{K}^m$ pour tout l. L'identité (41) assure l'existence de q matrices $C_0, \ldots, C_{q-1} \in \mathcal{M}_{m(h+1)qn}(\mathbb{K})$ telles que, pour tout entier i, on a :

$$\mathbf{G}_i = C_j \mathbf{G}_{s-e+1}\,, \tag{42}$$

où $i = qs + j - \nu$. On considère à présent la suite d'espaces emboîtés

$$V_l := \mathrm{Vect}\,\{\mathbf{G}_0, \ldots, \mathbf{G}_l\} \subset W\,.$$

Pour conclure cette démonstration on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 10. *Soit $a \geq (\nu - d)/(q-1)$ un entier. Si*

$$V_a = V_{q(a+e)-\nu-1}\,,$$

alors la suite $(V_l)_{l\geq 0}$ est constante à partir du rang a.

Démonstration du lemme 10. Choisissons un entier $j < q$. Pour tout r, l'égalité (42) implique que

$$C_j \mathbf{G}_r = \mathbf{G}_{q(r+e-1)+j-\nu}\,.$$

Si $r \leq a$, alors $q(r+e-1)+j-\nu \leq q(a+e)-\nu-1$ et donc

$$C_j \mathbf{G}_r \in V_{q(a+e)-\nu-1} = V_a\,.$$

L'action du monoïde engendré par les matrices $C_0, \ldots, C_{q-1}$ stabilise donc l'espace V_a. Prenons maintenant un entier $b > a$. Comme $a \geq (\nu-d)/(q-1)$, l'égalité (42) assure l'existence d'indices $j_1, \ldots, j_r$ et d'un entier $l \leq a$ tels que

$$\mathbf{G}_b = C_{j_1} \cdots C_{j_r} \mathbf{G}_l\,.$$

Donc $\mathbf{G}_b \in V_a$, ce qui termine la démonstration. □

Nous sommes à présent en mesure d'achever la preuve du lemme 9. Les vecteurs $\mathbf{G}_i$ appartiennent tous à l'espace W. Un calcul rapide montre que la dimension de cet espace n'excède pas $m(h+qn)$. Partant de

$$a = \left\lceil (\nu - d)(q-1)^{-1} \right\rceil\,,$$

et en appliquant $m(h+qn)$ fois, de façon récursive, le lemme 10, on obtient que la suite d'espaces vectoriels emboîtés V_l est nécessairement constante à partir du rang

$$\left\lceil \frac{q^{m(h+qn)}(qe-d) + \nu - qe}{q-1} \right\rceil\,.$$

En remplaçant e et n par leurs valeurs respectives, on obtient que

$$\begin{aligned} M &> \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q)+\nu-\frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{q^{m(h+qn)}(qe-d)+\nu-qe}{q-1} \right\rceil . \end{aligned}$$

La suite $(V_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est donc constante à partir du rang $M-1$ et donc $\mathbf{G}_M \in V_{M-1}$.

D'après (39), le vecteur $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{w}_0, \ldots, \boldsymbol{w}_h) \in (\mathbb{K}^m)^{h+1}$ est tel que

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{g}_i = 0\,,$$

pour tout entier $i < M$. Posons $\mathbf{u} := (\boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^{m(h+1)qn}$. Il vient alors que

$$\mathbf{u}\mathbf{G}_i = 0\,,$$

pour tout $i < M$. Le vecteur $\mathbf{u}$ appartient donc à l'orthogonal de V_{M-1}. Mais comme $\mathbf{G}_M \in V_{M-1}$, le vecteur $\mathbf{u}$ est aussi orthogonal au vecteur $\mathbf{G}_M$ et donc $\mathbf{u}\mathbf{G}_M = 0$. En considérant les $n(h+1)$ dernières coordonnées des vecteurs $\mathbf{G}_M$ et $\mathbf{u}$, on voit que cette dernière égalité implique

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{g}_M = 0\,,$$

ce qui contredit (39). Cela termine la démonstration. □

Le lemme suivant assure l'existence, lorsque les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}(z)$, d'une relation de dépendance linéaire de petit degré.

Lemme 11. *Soient $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $b(z)$, $A(z)$ et d choisis comme dans le théorème 11. Supposons que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ soient linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. Soit $h := \lfloor d/(q-1) \rfloor$. Alors, il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{w}(z) := (w_0(z), \ldots, w_m(z)) \in (\mathbb{K}[z]_h)^m$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} w_i(z) f_i(z) = 0\,.$$

Démonstration. Soient h le degré de la plus petite relation linéaire non triviale sur $\mathbb{K}[z]$ entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ et $\boldsymbol{w}(z)$ le vecteur des coefficients d'une telle relation. Posons $\tilde{A}(z) = b(z)A(z)$, de sorte que $\tilde{A}(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$. En utilisant la relation fonctionnelle (4), on écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{w}(z)\boldsymbol{f}(z) \\ &= \boldsymbol{w}(z)A(z)\boldsymbol{f}(z^q) \\ &= \boldsymbol{w}(z)\tilde{A}(z)\boldsymbol{f}(z^q)\,. \end{aligned}$$

On peut décomposer le vecteur $\boldsymbol{w}(z)\tilde{A}(z) \in \mathbb{K}[z]^n$ selon les restes de puissances de z modulo q. On obtient alors la décomposition unique suivante :

$$\boldsymbol{w}(z)\tilde{A}(z) = \sum_{i=0}^{q-1} z^i \boldsymbol{v}_i(z^q)\,.$$

L'identité $\boldsymbol{w}(z)\tilde{A}(z)\boldsymbol{f}(z^q) = 0$ implique alors que

$$\boldsymbol{v}_i(z)\boldsymbol{f}(z) = 0\,,$$

pour tout i, $0 \leq i \leq q-1$. Comme par hypothèse $\boldsymbol{w}(z)$ est non nul, il existe un indice i_0 tel que le vecteur $\boldsymbol{v}_{i_0}(z)$ soit non nul. Notons l le degré maximal des coefficients de $\boldsymbol{v}_{i_0}$. Par minimalité de h, on a $l \geq h$. D'autre part, comme le degré de $\boldsymbol{w}(z)\tilde{A}(z)$ est inférieur à $h+d$, on a

$$ql + i_0 \leq h + d\,.$$

On en déduit que $qh \leq h + d$, ce qui permet de conclure. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver les théorèmes 11 et 12.

Démonstration du théorème 11. Posons $h := 4^m d$ et

$$c := \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil\,.$$

Les inclusions

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_m(z)\right) \subset \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z))$$

et

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_m(z)) \subset \varphi\left(\ker_{\mathbb{K}} \mathcal{S}(h,c,\boldsymbol{f})\right)$$

sont immédiates. L'inclusion $\varphi\left(\ker_{\mathbb{K}} \mathcal{S}(h,c,\boldsymbol{f})\right) \subset \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_m(z))$ est quant à elle une reformulation directe du lemme 9. Il ne reste donc plus qu'à prouver l'inclusion

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_m(z)\right)\,.$$

Montrer cette inclusion revient à montrer l'existence d'une base de relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur à $4^m d$. Soit r la dimension de l'espace $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z))$. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur l'entier r.

Si $r = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons alors l'égalité vraie pour tout système de la forme (4) lorsque la dimension de l'espace des relations linéaires entre les fonctions vaut $r-1$. Supposons que

$$\dim \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z)) = r\,.$$

On va réduire le système pour se ramener à un système de taille $m-1$. D'après le lemme 11, il existe un vecteur $\boldsymbol{w}(z) \in (\mathbb{K}[z]_{h_0})^m$, où $h_0 = \left\lfloor \frac{d}{q-1} \right\rfloor$, tel que

$$\boldsymbol{w}(z)\boldsymbol{f}(z) = w_1(z)f_1(z) + \cdots + w_m(z)f_m(z) = 0\,.$$

On peut supposer, quitte à renuméroter les fonctions, que $w_m(z) \neq 0$. On fait alors un changement de jauge dans l'équation (4) par la matrice

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ w_1(z) & w_2(z) & \cdots & w_{m-1}(z) & w_m(z) \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z) \\ 0 \end{pmatrix} = S(z)A(z)S(z^q)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z^q) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $B(z)$ le mineur principal de la matrice $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$, de taille $m-1$. On obtient alors le système mahlérien de taille $(m-1)$ suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_{m-1}(z^q) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Par construction, le polynôme $w_m(z^q)b(z)$ est un multiple commun aux dénominateurs des coefficients de la matrice $B(z)$. La matrice $w_m(z^q)b(z)B(z)$ est donc à coefficients polynomiaux. On peut majorer le degré de ces polynômes par

$$h_0 q + d \leq \frac{d}{q-1}q + d \leq d\frac{2q}{q-1} \leq 4d\,.$$

Comme $w_m(z) \neq 0$, on a

$$\dim \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)) = r-1$$

et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au système (43). On obtient :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z))\right),$$

car $4^{m-1}4d = 4^m d = h$. D'autre part, on a

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) = \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)) \oplus_{\mathbb{K}(z)} \mathbb{K}(z).\boldsymbol{w}(z)\,,$$

et par hypothèse $\boldsymbol{w}(z) \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_m(z))$. On en déduit

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_m(z))\right) ,$$

comme voulu. Cela conclut la démonstration. □

Démonstration du théorème 12. Le théorème 12 découle immédiatement des lemmes 9 et 11. □

Avec le théorème 8 le calcul des relations de dépendance linéaire entre fonctions mahlériennes se réduit donc au calcul du noyau d'une matrice bien définie.

5.3 Deux exemples

Étant donnée une fonction mahlérienne $f(z)$ à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$, on a à présent tous les outils en main pour trancher explicitement l'alternative $f(\alpha) \in \mathbb{K}(\alpha)$ ou $f(\alpha)$ est transcendant. Illustrons cela par deux exemples.

Retour sur l'exemple 18. On considère la fonction $f_{\mathbf{tm_3}}(z) = \sum_n a_n z^n$ définie dans l'exemple 18. En posant $f_1(z) = f_{\mathbf{tm_3}}(z)$ et $f_2(z) = \sum_n (1 - a_n) z^n$, on avait

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix} ,$$

où

$$A(z) := \begin{pmatrix} 1+z & z^2 \\ z^2 & 1+z \end{pmatrix} .$$

Le théorème 12 va nous permettre de montrer facilement que les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$. Avec les notations du théorème 12, on a ici $m = 2$, $d = 2$, $q = 3$ et $\nu = 0$. On en déduit que $h = 1$ et $c = \lceil (3^{14} \times 8 - 3)/4 \rceil$. On vérifie alors que les quatre premières colonnes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la matrice $\mathcal{S}(1, \lceil (3^{14} \times 8 - 3)/4 \rceil, \boldsymbol{f})$ sont linéairement indépendantes, où $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), f_2(z))^\top$. Il suit que $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1, \lceil (3^{14} \times 8 - 3)/4 \rceil, \boldsymbol{f}) = \{0\}$, et ainsi, d'après le théorème 12, les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. On a cependant, par définition, la relation affine suivante :

$$f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{1-z} .$$

Rappelons que l'ensemble des points singuliers du système est

$$\mathcal{E} := \left\{ \phi^{1/3^l} \mid l \geq 1 \right\} .$$

où $\phi := (1-\sqrt{5})/2$. En un point algébrique α qui n'est pas dans $\mathcal{E}$, le théorème 2 implique directement que $f(\alpha)$ est transcendant. En effet, dans le cas contraire $f_2(\alpha)$ serait également algébrique, car $f_1(z)+f_2(z) = 1/(1-z)$, et on en déduirait donc une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$, ce qui est impossible puisque $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Combiné avec les résultats obtenus dans l'exemple 18, on obtient le résultat suivant.

Proposition 12. *Soit α un nombre algébrique, $0 < |\alpha| < 1$. On a l'alternative suivante : soit il existe $l \geq 1$ tel que $\alpha^{3^l} = \phi$ et alors $f(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$, soit $f(\alpha)$ est transcendant.*

Combinaisons linéaires de valeurs de fonctions mahlériennes. On considère les quatre suites binaires $\mathbf{a}_1 := (a_{1,n})_{n\geq 0}, \mathbf{a}_2 := (a_{2,n})_{n\geq 0}, \mathbf{a}_3 := (a_{3,n})_{n\geq 0}$ et $\mathbf{a}_4 := (a_{4,n})_{n\geq 0}$, définies comme suit :

$$\begin{cases} a_{1,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre pair de 1 et de 2} \\ a_{2,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre impair de 1 et pair de 2} \\ a_{3,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre impair de 1 et de 2} \\ a_{4,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre pair de 1 et impair de 2} \end{cases}$$

Les suites $\mathbf{a}_i$, $1 \leq i \leq 4$ sont 3-automatiques. On considère les séries génératrices associées à ces suites, à savoir :

$$g_i(z) := \sum_{n\geq 0} a_{i,n} z^n, \quad 1 \leq i \leq 4 .$$

Étant donné un nombre algébrique α, $0 < |\alpha| < 1$, on se propose de décrire les vecteurs $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \overline{\mathbb{Q}}^4$ pour lesquels le nombre

$$\omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha)$$

est transcendant.

Les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \\ g_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & z^2 \\ z & 1 & z^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 1 & z \\ z^2 & 0 & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(z^3) \\ g_2(z^3) \\ g_3(z^3) \\ g_4(z^3) \end{pmatrix} .$$

Dans la suite, on notera

$$\boldsymbol{g}(z) := \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \\ g_4(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(z) := \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & z^2 \\ z & 1 & z^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 1 & z \\ z^2 & 0 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition des suites $\mathbf{a}_i$, on a la relation affine

$$g_1(z) + g_2(z) + g_3(z) + g_4(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Nous allons montrer qu'il n'existe par contre pas de relation linéaire non triviale entre les $g_i(z)$.

Lemme 13. *Les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Démonstration. Comme dans l'exemple précédent, cela découle directement du théorème 12. Avec les notations du théorème 12, on a ici $m = 4$, $d = 2$, $q = 3$ et $\nu = 0$. On en déduit que $h = 1$ et $c = \lceil (3^{28} \times 8 - 3)/4 \rceil$. Ainsi, l'indépendance linéaire des fonctions $g_i(z)$ est équivalente à la nullité de l'espace $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1, \lceil (3^{28} \times 8 - 3)/4 \rceil, \boldsymbol{g})$. La définition des fonctions $g_i(z)$ nous permet de calculer explicitement les premières colonnes de cette matrice. Il vient pour les huit premières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ces huit vecteurs sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On en déduit que $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1, \lceil (3^{28} \times 8 - 3)/4 \rceil, \boldsymbol{g}) = \{0\}$. Le théorème 12 implique alors que les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z), g_4(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. □

Comme dans l'exemple précédent, on voit facilement que le déterminant de la matrice $A(z)$ a une unique racine dans le disque unité ouvert qui est, cette fois-ci encore, le nombre $\phi := (1 - \sqrt{5})/2$. Les autres racines sont le nombre d'or et les deux racines cubiques primitives de l'unité. L'ensemble des points singuliers de notre système est donc à nouveau l'ensemble

$$\left\{ \phi^{1/3^l} \mid l \geq 1 \right\}.$$

Le théorème 8 permet alors de montrer le résultat suivant.

Proposition 14. *Soient α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique et $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \overline{\mathbb{Q}}^4$ un vecteur de nombres algébriques non tous égaux. Alors, le nombre*

$$\omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha)$$

est algébrique si et seulement si, il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\alpha^{3^l} = \phi$ et $\boldsymbol{\omega}$ est de la forme $\boldsymbol{\mu} + \lambda(1,1,1,1)$ avec $\boldsymbol{\mu} \in \ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_{l+1}(\alpha)$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque 4. Si au contraire on a $\boldsymbol{\omega} = (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ pour un $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$, alors

$$\omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha) = \frac{\lambda}{1-\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}\,,$$

pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$.

Démonstration. Posons $\beta := \omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. En utilisant la relation $g_1(z) + g_2(z) + g_3(z) + g_4(z) = 1/(1-z)$, il vient :

$$(\omega_1 - \beta(1-\alpha))\, g_1(\alpha) + \cdots + (\omega_4 - \beta(1-\alpha))\, g_4(\alpha) = 0\,.$$

Par hypothèse, les nombres $\omega_i - \beta(1-\alpha)$ ne sont pas tous nuls. D'autre part, les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont linéairement indépendantes d'après le lemme 13. Donc, d'après le théorème 2, le nombre α ne peut pas être un point régulier du système. Il existe donc $l \geq 1$ tel que $\alpha^{3^l} = \phi$. Le théorème 8 montre alors que le vecteur

$$\boldsymbol{\mu} := (\omega_1 - \beta(1-\alpha), \omega_2 - \beta(1-\alpha), \omega_3 - \beta(1-\alpha), \omega_4 - \beta(1-\alpha))$$

appartient nécessairement à $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_{l+1}(\alpha)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 5. Si l'on choisit $l = 1$, c'est-à-dire si $\alpha = \phi$, on obtient que $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\phi)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $(1, 1, -1, -1)$. On en déduit facilement que les nombres $g_1(\phi), g_2(\phi), g_3(\phi)$ et $g_4(\phi)$ sont tous transcendants, bien que ϕ soit une singularité du système. Ce comportement est donc très différent du précédent exemple. En effet, nous avons vu dans ce cas que les deux nombres $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ sont algébriques pour toute singularité α.

Ces deux exemples illustrent comment l'alternative d'être transcendant ou dans un corps de nombres fixé, pour une valeur de fonction mahlérienne, peut être tranchée de manière effective. Nous nous proposons à présent de détailler les algorithmes permettant de trancher en toute généralité cette alternative.

Chapitre II

Aspects algorithmiques de la méthode de Mahler en une variable

On a vu dans la section 3 du chapitre I que les relations linéaires entre valeurs de fonctions mahlériennes, en des points algébriques, proviennent soit du noyau de la matrice du système, soit des relations linéaires entre les fonctions elles-mêmes. On a par ailleurs établi l'alternative suivante, pour une fonction mahlérienne $f(z)$ à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$: si $f(z)$ est définie en $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, alors $f(\alpha)$ est transcendant, ou appartient au corps de nombres $\mathbb{K}(\alpha)$. Nous allons voir à présent comment trancher cette alternative. De manière plus générale, nous montrons comment le $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-espace vectoriel des relations linéaires entre fonctions mahlériennes et le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des relations linéaires entre les valeurs de ces fonctions, peuvent être calculés effectivement.

1 Un point sur les équations mahlériennes

Dans un premier temps, nous faisons un point sur les différentes formes que peuvent prendre les équations dont les solutions sont des fonctions mahlériennes et sur la manière de passer des unes aux autres.

Proposition 15. *Considérons une équation mahlérienne homogène. On peut construire un système mahlérien tel que toute solution de l'équation mahlérienne homogène est la première coordonnée d'une solution de ce système mahlérien. Inversement, étant donné un système mahlérien, on peut toujours construire une équation mahlérienne homogène telle que la première coordonnée de n'importe quel vecteur solution du système mahlérien est solution de cette équation mahlérienne homogène.*

Démonstration. Prenons une équation homogène, de la forme (14). On considère la matrice compagnon

$$A(z) := \begin{pmatrix} -\frac{p_1(z)}{p_0(z)} & \cdots & \cdots & -\frac{p_m(z)}{p_0(z)} \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix},$$

de cette équation. Si $f(z)$ est une solution de (14) on a

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^{m-1}}) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f(z^q) \\ f(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f(z^{q^m}) \end{pmatrix}.$$

Inversement, considérons un vecteur colonne $(f_1(z), \ldots, f_m(z))^\top$, solution d'un système de la forme (4) et notons $f(z) = f_1(z)$. En itérant et en inversant le système (4), on obtient pour chaque entier l, $0 \leq l \leq m$,

$$\begin{pmatrix} f(z^{q^l}) \\ f_2(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_m(z^{q^l}) \end{pmatrix} = A_l(z)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix},$$

avec la convention $A_0(z) := \mathrm{I}_m$. Notons pour chaque l, $0 \leq l \leq m$, $\boldsymbol{\lambda}_l(z)$ la première ligne de $A_l(z)^{-1}$ et notons $\Lambda(z)$ la matrice dont les lignes sont les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}_0(z), \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m(z)$. Par construction, on a

$$\Lambda(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^m}) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

D'autre part, la matrice $\Lambda(z)$ possédant $m+1$ lignes et m colonnes, il existe un vecteur ligne $\boldsymbol{p}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]^{m+1}$ tel que $\boldsymbol{p}(z)\Lambda(z) = \mathbf{0}$. En notant $\boldsymbol{p}(z) =: (p_0(z), \ldots, p_m(z))$, on déduit de (44) que

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_m(z)f(z^{q^m}) = 0\,.$$

□

Comme on l'a vu avec les séries de Fredholm $\mathfrak{f}_q(z)$ de l'exemple 12, ou avec la série de Thue-Morse de l'exemple 2, il est parfois plus naturel de considérer des équations linéaires inhomogènes. Toute équation mahlérienne homogène est en particulier une équation inhomogène, pour laquelle $p_{-1}(z) = 0$.

Proposition 16. *Étant donnée une équation mahlérienne inhomogène, on peut construire une équation mahlérienne homogène telle que toute solution de l'équation inhomogène est solution de l'équation homogène.*

Démonstration. On peut supposer que $p_{-1}(z) \neq 0$, sinon il n'y a rien à faire. Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ une solution de l'équation inhomogène (15). En substituant z^q à z dans cette équation, on obtient

$$p_{-1}(z^q) + p_0(z^q)f(z^q) + p_1(z^q)f(z^{q^2}) + \cdots + p_m(z^q)f(z^{q^{m+1}}) = 0\,.$$

Alors en multipliant cette équation par $p_{-1}(z)$, en multipliant (15) par $p_{-1}(z^q)$ et en prenant la différence, on obtient une équation homogène

$$\begin{aligned} p_{-1}(z^q)p_0(z)f(z) &+ (p_{-1}(z^q)p_1(z) - p_{-1}(z)p_0(z^q))f(z^q) \\ &+ \cdots \\ &+ (p_{-1}(z^q)p_m(z) - p_{-1}(z)p_{m-1}(z^q))f(z^{q^m}) \\ &- p_{-1}(z)p_m(z^q)f(z^{q^{m+1}}) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

□

Remarquons qu'à chaque équation inhomogène on peut associé directement un système mahlérien :

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^{m-1}}) \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{p_1(z)}{p_0(z)} & \cdots & \cdots & -\frac{p_m(z)}{p_0(z)} & -\frac{p_{-1}(z)}{p_0(z)} \\ 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} f(z^q) \\ f(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f(z^{q^m}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5. Soit $f(z)$ une fonction mahlérienne. On appelle *équation inhomogène minimale* l'équation inhomogène satisfaite par $f(z)$, pour laquelle l'entier m est minimal et les polynômes $p_{-1}(z), p_0(z), \ldots, p_m(z)$ sont globalement premiers entre eux.

L'équation inhomogène minimale d'une fonction mahlérienne est unique, à multiplication par une constante près. La notion d'équation inhomogène minimale est cependant relative à la solution de l'équation que l'on considère. L'exemple suivant illustre ce fait en exhibant une équation mahlérienne qui est minimale par rapport à l'une de ses solutions, tout en admettant également une solution qui est une fraction rationnelle.

Exemple 23. Considérons l'équation

$$zf(z) - f(z^2) + (1-z)f(z^4) = 0\,. \tag{45}$$

On vérifie que la fonction identiquement égale à 1, dont l'équation minimale est $f(z) - 1 = 0$, est solution de cette équation. On vérifie par ailleurs que la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - z^{2^{n+l}}\right) ,$$

est solution de (45). Pour prouver que (45) est bien l'équation inhomogène minimale de $f(z)$ (bien que ce soit également une équation homogène), il suffit de vérifier que les fonctions 1, $f(z)$ et $f(z^2)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Les premiers coefficients du développement de Taylor de $f(z)$ sont

$$f(z) = z - z^3 + z^4 - z^5 + z^7 - z^8 - z^9 + \cdots .$$

D'après le théorème 12, il suffit de montrer que la matrice

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 9. On vérifie que c'est le cas en calculant le déterminant de la matrice obtenue en retirant la 8-ième colonne de $\mathcal{S}$. L'équation (45) est donc bien l'équation inhomogène minimale de $f(z)$, bien qu'elle ne soit pas minimale pour une autre de ses solutions : la fonction identiquement égale à 1.

L'un des intérêts de l'équation inhomogène minimale, c'est qu'elle garantit que les fonctions $1, f(z), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$, sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. En effet, une relation entre ces fonctions nous donnerait une équation de plus petit ordre, contredisant ainsi la minimalité de m. Les théorèmes 6 et 8 montrent bien l'intérêt qu'il peut y avoir à travailler dans des systèmes où les fonctions sont toutes linéairement indépendantes. Dans de tels systèmes, les seules relations linéaires possibles entre les valeurs sont celles provenant du noyau de la matrice aux singularités.

Par minimalité, on a $p_m(z) \neq 0$ dans l'équation inhomogène minimale. La proposition ci-dessous montre que l'on a également $p_0(z) \neq 0$. Le polynôme $p_{-1}(z)$ peut, lui, être nul, comme l'illustre l'exemple 23.

Proposition 17. *On considère une équation de la forme (15). Il existe des polynômes $q_{-1}(z), q_0(z), \ldots, q_{m'}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, avec $m' \leq m$, pour lesquels*

$q_0(z)q_{m'}(z) \neq 0$ *et tels que toute solution* $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ *de l'équation* (15) *satisfait également à l'équation*

$$q_{-1}(z) + q_0(z)f(z) + q_1(z)f(z^q) + \cdots + q_{m'}(z)f(z^{q^{m'}}) = 0\,.$$

Démonstration. On dit que deux équations de la forme (15) sont *équivalentes* si toute fonction $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ solution de l'une est solution de l'autre. On considère une équation non nulle de la forme (15) pour laquelle l'entier m est minimal parmi toutes les équations équivalentes. Supposons que $p_0(z) = 0$. On considère les opérateurs $\Delta_{q,i}$ [1], $0 \leq i < q$, définis par

$$\Delta_{q,i}\left(\sum_n a_n z^n\right) = \sum_n a_{qn+i} z^n\,.$$

Notons σ_q l'endomorphisme $z \mapsto z^q$ de $\mathbb{C}[[z]]$. Les opérateurs $\Delta_{q,i}$ sont $\mathbb{C}$-linéaires et satisfont aux relations suivantes :

$$g = \sum_{i=0}^{q-1} \sigma_q\left(\Delta_{q,i}(g)\right) z^i\,, \quad \text{pour tout } g \in \mathbb{C}[[z]]\,, \tag{46}$$

et

$$\Delta_{q,i}\left(gh\right) = \sum_{\substack{0\leq k,l<q-1\\ k+l\equiv i \bmod q}} \Delta_{q,k}(g)\Delta_{q,l}(h)\,, \quad \text{pour tout } g,h \in \mathbb{C}[[z]]\,.$$

De cette seconde relation, on déduit

$$\Delta_{q,i}(g\sigma_q(h)) = \Delta_{q,i}(g)h\,, \quad \text{pour tout } g,h \in \mathbb{C}[[z]]\,. \tag{47}$$

Appliquons l'équation (47) à l'équation (15) pour laquelle $p_0(z) = 0$. On trouve pour tout i, tel que $0 \leq i \leq q-1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{q,i}\left(p_{-1} + \sum_{j=1}^{m} p_j \sigma_q^j(f)\right) \\ &= \Delta_{q,i}(p_{-1}) + \sum_{j=1}^{m} \Delta_{q,i}(p_j)\sigma_q^{j-1}(f) \\ &= \Delta_{q,i}(p_{-1}) + \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_{q,i}(p_{j+1})\sigma_q^{j}(f)\,. \end{aligned}$$

Comme m est minimal, on a $\Delta_{q,i}(p_j) = 0$ pour tout couple (i,j), avec $0 \leq i \leq q-1$ et $-1 \leq j \leq m$. Alors, d'après (46), $p_j = 0$ pour tout j, ce qui contredit la non nullité de l'équation (14). □

1. Ces opérateurs portent différents noms dans la littérature. Ils sont appelés *opérateurs de section* dans [45, 40]. Dans le cadre des suites automatiques, on les appelle *opérateurs de décimation* [25, 103]. Dans [14], nous les avions appelés *opérateurs de Cartier*, par analogie avec les opérateurs du même nom agissant sur des séries entières à coefficients dans un corps de caractéristique positive.

2 Coefficients d'une fonction mahlérienne

En utilisant le théorème 11, on peut calculer une base de l'ensemble des relations linéaires sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les coordonnées $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ d'un vecteur solution d'un système mahlérien en calculant le noyau d'une matrice explicite. Les coefficients de cette matrice sont obtenus à partir des coefficients du développement de Taylor des fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. On doit donc être en mesure de calculer les coefficients de ces fonctions. Étant donnée une équation inhomogène pour laquelle $p_0(z) \neq 0$, posons ν_i la valuation de $p_i(z)$ en 0, $0 \leq i \leq m$, et,

$$d := \max\left\{ \left\lfloor \frac{\nu_0 - \nu_i}{q^i - 1} \right\rfloor,\ 1 \leq i \leq m \right\},$$

l'*entier critique* de l'équation. Le résultat ci-dessus est une réécriture de [45, Theorem 5] pour les équations mahlériennes inhomogènes.

Lemme 18. *Toute solution $f(z)$ d'une équation mahlérienne inhomogène, pour laquelle $p_0(z) \neq 0$ est déterminée de manière unique par les $d+1$ premiers coefficients de son développement de Taylor, où d est l'entier critique de l'équation inhomogène.*

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une solution de l'équation inhomogène (14). Pour $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ on pose $a_n := 0$. On décompose, par ailleurs

$$p_i(z) = \sum_{j=\nu_i}^{\delta_i} p_{i,j} z^j,\ -1 \leq i \leq n\,,$$

où, pour chaque i, δ_i est le degré de $p_i(z)$ et où $p_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}$, pour $\nu_i \leq j \leq \delta_i$. En identifiant les termes en z^n dans l'équation (14), on trouve

$$p_{-1,n} + \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=\nu_i}^{\delta_i} p_{i,j} a_{\frac{n-j}{q^i}} = 0\,,$$

où l'on s'accorde sur le fait que $p_{-1,n} = 0$ si $n > \delta_{-1}$. En regardant cette égalité en $n + \nu_0$, il vient

$$-p_{0,\nu_0} a_n = p_{-1,n+\nu_0} + \sum_{j=\nu_0+1}^{\delta_0} p_{0,j} a_{n+\nu_0-j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=\nu_i}^{\delta_i} p_{i,j} a_{\frac{n+\nu_0-j}{q^i}}\,. \tag{48}$$

Si n est un entier strictement supérieur à l'entier critique d, on a également

$$n > \max\left\{ \frac{\nu_0 - \nu_i}{q^i - 1} \,:\, 1 \leq i \leq m \right\},$$

et donc, pour tout i, $1 \leq i \leq m$, et tout j, $j \geq \nu_i$,

$$n > \frac{n + \nu_0 - j}{q^i}\,.$$

Si $n > d$, l'équation (48) donne le coefficient a_n comme combinaison linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres $1, a_0, \ldots, a_{n-1}$. □

Ainsi, connaissant les $d+1$ premiers coefficients du développement en série entière d'une fonction mahlérienne, l'égalité (48) permet récursivement de les calculer tous. Notons que Chyzak, Dreyfus, Dumas et Mezzarobba [40] ont récemment exploré précisément le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'un nombre arbitraire de coefficients d'une fonction mahlérienne.

Exemple 24. Considérons l'équation

$$zf(z) - (1+2z)f(z^2) + (1+z)f(z^4) = 0\,.$$

Pour cette équation, l'entier critique d vaut 1. Notons $\sum_n a_n z^n$ le développement en série entière d'une solution. L'équation (48) induit la relation de récurrence

$$a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n-1}{2}} - a_{\frac{n}{4}} - a_{\frac{n-1}{4}}\,.$$

En posant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, on trouve $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Inversement, en posant $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on peut calculer les premiers coefficients du développement de Taylor de $f(z)$:

$$a_2 = 2a_1 = 2,\ a_3 = a_2 - a_1 = 1,\ a_4 = 2a_2 - a_1 = 3,\ a_5 = a_3 = 1,\ \ldots\,.$$

Exemple 25. L'équation

$$qf(z) - f(z^q) = 0$$

n'a pas de solution non nulle dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$. En effet, son entier critique vaut 0 et en $n = 0$, l'équation (48) s'écrit $qa_0 = a_0$. On a donc $a_0 = 0$, et toute solution analytique de cette équation est donc identiquement nulle. Toutefois, la fonction $\log(z)$ est une solution de cette équation, mais elle n'est pas analytique en 0.

Exemple 26. La série de Fredholm $\mathfrak{f}_q(z) = \sum_n z^{q^n}$ de l'exemple 12 est solution de l'équation

$$z - f(z) + f(z^q) = 0\,. \tag{49}$$

Pour cette équation, l'entier critique vaut 0. L'ensemble des solutions dans $\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ de (49) est donc l'espace affine

$$\mathfrak{f}_q(z) + \overline{\mathbb{Q}}\,.$$

En particulier, $\mathfrak{f}_q(z)$ est la seule solution de (49) qui soit nulle en 0.

L'équation (48) a une conséquence majeure quant à la nature des coefficients d'une série mahlérienne.

Corollaire 13. *Les coefficients d'une fonction mahlérienne sont tous compris dans un même corps de nombre.*

Démonstration. Ce corps de nombres est celui contenant les coefficients des polynômes $p_{-1}(z), p_0(z), \dots, p_m(z)$, ainsi que les nombres $a_0, \dots, a_d$. □

3 Déterminer le système ou l'équation minimale

Démontrer la transcendance d'une valeur en un point α d'une fonction mahlérienne $f(z)$ revient à prouver que $f(\alpha)$ et 1 sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. En un point régulier α pour le système associé à l'équation inhomogène minimale de $f(z)$, la transcendance de $f(\alpha)$ découle du théorème de Philippon. Pour utiliser ce constat, on doit donc être en capacité de déterminer l'équation inhomogène minimale de $f(z)$.

Algorithme 1. *Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne. Il existe un algorithme permettant de déterminer l'équation inhomogène minimale de $f(z)$.*

Le déroulement de l'algorithme 1 repose sur l'algorithme suivant, qui a un intérêt indépendant.

Algorithme 2. *Soient $f_1(z), \dots, f_m(z)$ des fonctions mahlériennes, formant un vecteur solution d'un système de type (4), à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$. On peut calculer explicitement la dimension r de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{K}(z)$ par les fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ et, pour chaque r-uplet de fonctions $f_{i_1}(z), \dots, f_{i_r}(z)$, tester si ces dernières sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. Le cas échéant, on peut déterminer un système de la forme (4) contenant uniquement ces r fonctions.*

Dans ces algorithmes, on considère que la donnée d'une fonction mahlérienne est la donnée d'une équation mahlérienne, ainsi que d'un nombre suffisant de coefficients du développement de Taylor, permettant, d'après le lemme 18, d'identifier la fonction de manière unique et de calculer n'importe lequel des coefficients à l'aide de la récurrence (48).

Description de l'algorithme 2. Notons de manière compacte $\boldsymbol{f}(z)$ le vecteur colonne formé des fonctions $f_1(z), \dots, f_m(z)$. Développant chaque coordonnée en séries entières, on note

$$\boldsymbol{f}(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{f}_i z^i \,,$$

avec $\boldsymbol{f}_i \in \mathbb{K}^m$. Soient $b(z)$ le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients de $A(z)$, d le maximum des degrés des coefficients de

la matrice $b(z)A(z)$ et ν la valuation en $z=0$ du polynôme $b(z)$. On pose $h := 4^m d$ et

$$c := \left\lceil \frac{q^{m\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil .$$

Associée à $\boldsymbol{f}(z)$, on définit alors la matrice suivante

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{f}) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_0 & \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \boldsymbol{f}_h & \cdots & \boldsymbol{f}_c \\ 0 & \boldsymbol{f}_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{f}_{c-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{f}_0 & \cdots & \boldsymbol{f}_{c-h} \end{pmatrix} .$$

Comme dans la démonstration du théorème 11, on pose

$$\ker \mathcal{S}(\boldsymbol{f}) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{K}^m)^{h+1} \mid \boldsymbol{\lambda}\mathcal{S}(\boldsymbol{f}) = 0 \right\} .$$

Si $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_0, \ldots, \boldsymbol{w}_h)$ appartient à $\ker \mathcal{S}(\boldsymbol{f})$, on définit le vecteur de polynômes

$$\boldsymbol{w}(z) := \sum_{i=0}^{h} \boldsymbol{w}_i z^i .$$

D'après le théorème 11,

$$\boldsymbol{w}(z)\boldsymbol{f}(z) = 0 ,$$

et toutes les relations linéaires entre les fonctions $f_i(z)$, $1 \leq i \leq m$, s'obtiennent de cette manière-là. On peut calculer de manière explicite la dimension s du noyau $\ker\mathcal{S}(\mathbf{f})$, ainsi qu'une base $\boldsymbol{w}_1(z), \ldots, \boldsymbol{w}_s(z)$ de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) := \{\boldsymbol{w}(z) \in \mathbb{K}(z)^m : \boldsymbol{w}(z)\boldsymbol{f}(z) = 0\}$$

en déterminant une base de $\ker \mathcal{S}(\boldsymbol{f})$. La dimension du $\mathbb{K}(z)$-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ vaut donc $r = n - s$ et la matrice

$$\Lambda(z) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1(z) \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_s(z) \end{pmatrix}$$

est de rang s. L'étude des mineurs non nuls de cette matrice nous permet de déterminer les parties $\{f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_r}(z)\}$ formées de fonctions linéairement indépendantes. En effet, fixons $i_1, \ldots, i_r$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$, des entiers distincts. Notons $J := \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ et Δ_J le mineur de Λ associé à l'ensemble J. On montre qu'on a l'équivalence

$$\Delta_J = 0 \Leftrightarrow f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_r}(z) \text{ sont linéairement dépendantes sur } \mathbb{K}(z). \quad (50)$$

Supposons que $\Delta_J = 0$. Il existe un vecteur $\boldsymbol{\mu}(z) \in \mathbb{K}[z]^s$ non nul tel que $\boldsymbol{\kappa}(z) := \boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z)$ est nul sur J, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\kappa}(z) := (\kappa_1(z), \ldots, \kappa_m(z)) \in \mathbb{K}[z]^m$ avec $\kappa_i(z) = 0$ pour tout i dans J. D'autre part, la matrice Λ étant de rang s, le vecteur $\boldsymbol{\kappa}(z)$ est nécessairement non nul. Il vient par ailleurs

$$\sum_{l=1}^{r} \kappa_{i_l}(z) f_{i_l}(z) = \boldsymbol{\kappa}(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = 0\,,$$

ce qui montre que les fonctions $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_r}(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}(z)$.

Réciproquement, supposons que les fonctions $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_r}(z)$ soient linéairement dépendantes sur $\mathbb{K}(z)$. Il existe alors un vecteur non nul $\boldsymbol{\kappa}(z) := (\kappa_1(z), \ldots, \kappa_m(z)) \in \mathbb{K}[z]^m$ tel que $\sum_{i=1}^{m} \kappa_i(z) f_i(z) = 0$ et $\kappa_i(z) = 0$ pour tout i dans J. Comme les vecteurs $\boldsymbol{w}_1(z), \ldots, \boldsymbol{w}_s(z)$ forment une base de $\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z))$, il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{\mu}(z) \in \mathbb{K}[z]^s$ tel que $\boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z) = \boldsymbol{\kappa}(z)$. Ainsi $\Delta_J = 0$.

On peut donc tester algorithmiquement, pour toute sélection d'entiers $i_1, \ldots, i_r$, si les r fonctions $f_{i_1}(z), \ldots, f_{i_r}(z)$ sont linéairement indépendantes. Supposons à présent que ce soit le cas. Quitte à renuméroter, on peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit des fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$. Considérons alors la matrice

$$S(z) := \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \Lambda(z) & & & \end{array}\right).$$

D'après (50) cette matrice est inversible et on a

$$S(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $B(z)$ le bloc principal $r \times r$ de la matrice $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$. On obtient

par construction que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_r(z^q) \end{pmatrix}.$$

□

Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne. L'espace vectoriel

$$V(f) := \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\{1, f(z), f(z^q), f(z^{q^2}), \cdots\}$$

est donc de dimension finie. Le lemme suivant montre que la dimension de V_f est déterminée par l'ordre de l'équation inhomogène minimale de f.

Lemme 19. *Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne dont l'équation inhomogène minimale est d'ordre m. La dimension de l'espace $V(f)$ vaut $m+1$.*

Démonstration. Notons $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite d'espaces emboîtés, définie par

$$V_n := \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\{1, f(z), f(z^q), f(z^{q^2}), \ldots, f(z^{q^n})\}.$$

Nous montrons que si $V_{n_0+1} = V_{n_0}$ pour un n_0 fixé, alors $V_n = V_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Il suffit en fait de montrer que dans un tel cas, $V_{n_0+2} = V_{n_0+1}$.

Soit n_0 un entier tel que $V_{n_0+1} = V_{n_0}$. On peut trouver des fractions rationnelles $q_{-1}(z), \ldots q_{n_0}(z)$, telles que

$$f(z^{n_0+1}) = q_{-1}(z) + q_0(z)f(z) + \cdots + q_{n_0}(z)f(z^{q^{n_0}}).$$

En appliquant cette égalité en z^q, on trouve

$$f(z^{n_0+2}) = q_{-1}(z^q) + q_0(z^q)f(z^q) + \cdots + q_{n_0}(z^q)f(z^{q^{n_0+1}}) \in V_{n_0+1}.$$

On en déduit que $V_{n_0+2} = V_{n_0+1}$.

Comme l'équation inhomogène minimale de $f(z)$ est d'ordre m, on a $V_n \subsetneq V_{n+1}$ pour tout $n < m-1$. D'autre part, on a $V_m = V_{m-1}$. On a donc, par stationnarité, $V(f) = V_{m-1}$ et $\dim V_{m-1} = m+1$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Nous sommes à présent en mesure de décrire l'algorithme 1.

Description de l'algorithme 1. On peut supposer sans perte de généralité que f est la première coordonnée d'un vecteur solution d'un système de type (4). On note $\boldsymbol{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_m(z))^\top$ un tel vecteur solution. Quitte à

éventuellement ajouter la fonction identiquement égale à 1, en changeant la matrice $A(z)$ en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A(z) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

on supposera désormais que $f_m(z) = 1$.

Comme dans l'algorithme 2, le théorème 11 permet de déterminer si la fonction $f(z)$ est rationnelle ou non et le cas échéant, de trouver deux polynômes $A(z)$ et $B(z)$ premiers entre eux tels que $f(z) = A(z)/B(z)$. En effet, la fonction $f(z)$ est rationnelle si et seulement si l'intersection d'espaces vectoriels

$$\mathrm{Rel}_{\mathbb{K}(z)}(\boldsymbol{f}(z)) \cap \{(B(z), 0, \ldots, 0, A(z)) \in \mathbb{K}[z]^m\}$$

est non nulle. Si c'est le cas, le théorème 11 permet de trouver un tel vecteur $(B(z), 0, \ldots, 0, A(z))$, et dans ce cas $f(z) = A(z)/B(z)$. L'équation minimale inhomogène est alors $A(z) - B(z)f(z) = 0$.

On supposera donc à présent que $f(z)$ n'est pas une fraction rationnelle. Dans ce cas, $f(z)$ est nécessairement transcendante sur $\mathbb{K}(z)$, de sorte que 1 et $f(z)$ sont linéairement indépendantes. En appliquant l'algorithme 2, on trouve une matrice $B(z)$ inversible et des fonctions

$$g_1(z) := f(z), g_2(z), \ldots, g_s(z), g_{s+1}(z) := 1$$

linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}(z)$ telles que

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} := B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^q) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z^q) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

En inversant le système, on obtient $f(z^q)$ en fonction de $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$,

$$f(z^q) = g_1(z^q) = \boldsymbol{\lambda}_1(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix}.$$

En itérant le système (51) s fois et en inversant les matrices $B_l(z) := B(z)B(z^q)\cdots B(z^{q^{l-1}})$, on trouve, pour chaque $l \leq s$, un vecteur $\boldsymbol{\lambda}_l(z)$ tel que

$$f(z^{q^l}) = g_1(z^{q^l}) = \boldsymbol{\lambda}_l(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix}.$$

On notera aussi, $\boldsymbol{\lambda}_0 := (0, \ldots, 0, 1)$ de sorte que

$$1 = \boldsymbol{\lambda}_0 \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

Considérons alors la matrice $C(z)$, dont les lignes sont les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}_l(z)$, $l = 0 \ldots s$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^s}) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

Les fonctions $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$ étant linéairement indépendantes, le rang r de $C(z)$ est égal à la dimension de l'espace engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ par les fonctions $1, f(z^q), \ldots, f(z^{q^s})$, c'est à dire, de l'espace $V_g \subset V_f$ où $g(z) := f(z^q)$. Ainsi $\dim V_f \geq r$. Montrons maintenant que $\dim V_f = r$. En effet, d'après le lemme 19, il existe $r+1$ polynômes $q_{-1}(z), q_1(z), \ldots, q_r(z)$ tels que

$$q_{-1}(z) + q_1(z) f(z^q) + \cdots + q_r(z) f(z^{q^r}) = 0 .$$

Pour $f(z)$ cette équation est une équation inhomogène pour laquelle $q_0(z) = 0$. D'après la proposition 17 il existe r polynômes $\tilde{q}_{-1}(z), \cdots, \tilde{q}_{r-1}(z)$ tels que

$$\tilde{q}_{-1}(z) + \tilde{q}_0(z) f(z) + \cdots + \tilde{q}_{r-1}(z) f(z^{q^{r-1}}) = 0 \tag{52}$$

et $\tilde{q}_0(z) \neq 0$. D'après le lemme 19, il vient $\dim V_f \leq r$ et donc $\dim V_f = r$. L'entier r se calcule explicitement puisque c'est simplement le rang de la matrice $C(z)$.

L'équation (52) donne alors l'existence d'un vecteur non nul $\boldsymbol{\mu}(z) := (\mu_1(z), \ldots, \mu_r(z), 0, \ldots, 0)$ tel que

$$\boldsymbol{\mu}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^s}) \end{pmatrix} = f(z) \ \ (= g_1(z)) .$$

L'indépendance linéaire des fonctions $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$ entraîne que

$$\boldsymbol{\mu}(z) C(z) = (1, 0, \ldots, 0) .$$

Un tel vecteur $\boldsymbol{\mu}(z)$ se calcule donc explicitement en résolvant un système linéaire. On obtient alors :

$$\mu_1(z) + \mu_2(z) f(z^q) + \cdots + \mu_r(z) f(z^{q^{r-1}}) = f(z) .$$

On note $p_0(z)$ le ppcm des dénominateurs des fractions rationnelles $\mu_i(z)$, puis on pose :

$$p_{-1}(z) := -p_0(z)\mu_1(z) \text{ et } p_i(z) := -p_0(z)\mu_{i-1}(z)\,, \quad \text{pour } i \in \{1,\ldots,r\}\,.$$

En vertu du lemme 19, l'équation

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_{r-1}(z)f(z^{q^{r-1}}) \;=\; 0$$

est bien l'équation inhomogène minimale de $f(z)$. □

Exemple 27. Montrons que l'équation (16)

$$f_{\mathbf{bs}}(z) - zf_{\mathbf{bs}}(z^2) - f_{\mathbf{bs}}(z^4) = 0\,,$$

satisfaite par la série génératrice $f_{\mathbf{bs}}(z)$ de la suite de Baum-Sweet est l'équation *inhomogène* minimale de $f_{\mathbf{bs}}(z)$. Bien sûr ce résultat découle du fait que, comme l'a montré Ku. Nishioka [85], les fonctions $f_{\mathbf{bs}}(z)$ et $f_{\mathbf{bs}}(z^2)$ sont algébriquement indépendantes. Mais la démonstration que nous allons donner de la minimalité de l'équation est plus élémentaire. Suivant l'algorithme 1, on écrit le système compagnon inhomogène associé à l'équation (16). On a

$$\begin{pmatrix} f_{\mathbf{bs}}(z) \\ f_{\mathbf{bs}}(z^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\mathbf{bs}}(z^2) \\ f_{\mathbf{bs}}(z^4) \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Suivant l'algorithme 2, on regarde si les trois fonctions sont linéairement indépendantes ou non. En utilisant les notations du théorème 12, on a $h := 1$. D'après le théorème 12 les fonctions $1, f_{\mathbf{bs}}(z)$ et $f_{\mathbf{bs}}(z^2)$ sont linéairement indépendantes si la matrice

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas puisque son déterminant vaut -1. L'équation (16) est donc l'équation *inhomogène* minimale de $f_{\mathbf{bs}}(z)$ (et donc également l'équation *homogène* minimale de $f_{\mathbf{bs}}(z)$).

Exemple 28. Considérons la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vaut 1 si le nombre d'occurrences du facteur 11 dans l'écriture binaire de l'entier n est impaire et 0 sinon. Cette suite est une variante additive de la suite de Rudin-Shapiro définie à l'exemple 22. On veut calculer l'équation inhomogène minimale de sa série génératrice. Le 2-noyau de cette suite est composé des suites

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}},\ (r_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}},\ \text{ et } (r_{8n+3})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

En effet, la définition implique que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rclrclrcl}
r_{16n} & = & r_n\,, & r_{16n+6} & = & r_{8n+3}\,, & r_{16n+11} & = & r_{4n+3}\,,\\
r_{16n+1} & = & r_n\,, & r_{16n+7} & = & r_n\,, & r_{16n+12} & = & r_{4n+3}\,,\\
r_{16n+2} & = & r_n\,, & r_{16n+8} & = & r_{2n+1}\,, & r_{16n+13} & = & r_{4n+3}\,,\\
r_{16n+3} & = & r_{8n+3}\,, & r_{16n+9} & = & r_{2n+1}\,, & r_{16n+14} & = & r_{2n+1}\,,\\
r_{16n+4} & = & r_n\,, & r_{16n+10} & = & r_{2n+1}\,, & r_{16n+15} & = & r_{4n+3}\,.\\
r_{16n+5} & = & r_n\,, & & & & & &
\end{array}$$

Notons alors $f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)$ les séries génératrices respectivement des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, (r_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{8n+3})_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} f_1(z)\\ f_2(z)\\ f_3(z)\\ f_4(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & 0\\ 1 & 0 & z & 0\\ 0 & z & 0 & 1\\ 0 & 0 & z & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(z^2)\\ f_2(z^2)\\ f_3(z^2)\\ f_4(z^2)\end{pmatrix}.$$

Par définition de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a également pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_{8n+3} = 1 - r_n, \text{ et } r_{4n+3} = 1 - r_{2n+1}\,.$$

La série génératrice de la suite identiquement égale à 1 étant la fraction $\frac{1}{1-z}$, on obtient les relations

$$f_4(z) = \frac{1}{1-z} - f_1(z), \text{ et } f_3(z) = \frac{1}{1-z} - f_2(z)\,.$$

Finalement, on tire de ces relations un nouveau système

$$\begin{pmatrix} f_1(z)\\ f_2(z)\\ \frac{1}{1-z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0\\ 1 & -z & z\\ 0 & 0 & 1+z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(z^2)\\ f_2(z^2)\\ \frac{1}{1-z^2}\end{pmatrix}. \tag{53}$$

D'après le théorème 12, une condition suffisante pour que ces trois fonctions soient linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est que la matrice

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

soit de rang maximal. On vérifie que c'est le cas, en calculant le déterminant formé des colonnes 1, 2, 3, 4, 5 et 7, par exemple. En inversant le système (53) on trouve alors

$$\begin{pmatrix} f_1(z^2)\\ f_2(z^2)\\ \frac{1}{1-z^2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-z}{1+z}\\ \frac{1}{z} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{1+z}\\ 0 & 0 & \frac{2}{1+z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(z)\\ f_2(z)\\ \frac{1}{1-z}\end{pmatrix}.$$

Puis en itérant le système (53) et en l'inversant de nouveau, on trouve

$$\begin{pmatrix} f_1(z^4) \\ f_2(z^4) \\ \frac{1}{1-z^4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1+z}{z} & \frac{-1+z}{z} & \frac{1-z-z^2-z^3}{1+z+z^2+z^3} \\ \frac{1-z}{z^3} & \frac{1+z}{z^3} & \frac{-1-z+z^2-z^3}{z^2(1+z+z^2+z^3)} \\ 0 & 0 & \frac{4}{1+z+z^2+z^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \frac{1}{1-z} \end{pmatrix} .$$

Considérons la matrice

$$C(z) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-z \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-z}{2(1+z)} \\ \frac{1+z}{4z} & \frac{-1+z}{4z} & \frac{1-z-z^2-z^3}{4(1+z+z^2+z^3)} \end{pmatrix} ,$$

construite de sorte que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^2) \\ f_1(z^4) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \frac{1}{1-z} \end{pmatrix} . \tag{54}$$

Comme $C(z)$ est inversible et comme les fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ et $\frac{1}{1-z}$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, la dimension de V_{f_1} est égale à 3. D'après le lemme 19, l'ordre de l'équation inhomogène minimale de $f(z)$ est égal à 2. En résolvant dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)^3$ l'équation $\boldsymbol{\mu}(z)C(z) = (1,0,0)$, on trouve

$$\boldsymbol{\mu}(z) := \left(\frac{z^3}{1-z^4}, 1-z, 2z \right) .$$

Alors, en multipliant (54) à gauche par $(1-z^4)\boldsymbol{\mu}(z)$, on trouve

$$z^3 - (1-z^4)f_1(z) + (1-z-z^4+z^5)f_1(z^2) + 2z(1-z^4)f_1(z^4) = 0 ,$$

qui, d'après le calcul de dimension effectué ci-dessus, est l'équation inhomogène minimale de $f_1(z)$.

Un autre intérêt de la détermination de l'équation minimale est qu'elle permet de savoir si une fonction mahlérienne donnée est rationnelle ou transcendante.

Proposition 20. *Une fonction mahlérienne dont l'équation inhomogène minimale est d'ordre m est*

- *rationnelle, si $m = 0$,*
- *transcendante, si $m > 0$.*

Démonstration. Soient $p(z), q(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $q(z) \neq 0$. La fraction rationnelle $f(z) = p(z)/q(z)$ satisfait à l'équation inhomogène d'ordre 0 :

$$p(z) - q(z)f(z) = 0 .$$

Si l'équation inhomogène minimale d'une fonction mahlérienne est d'ordre strictement supérieur à 0, cette fonction est donc irrationnelle. D'après le théorème Ra92, cette fonction est transcendante. Réciproquement, soit $f(z)$ une fonction mahlérienne solution d'une équation de la forme

$$p(z) - q(z)f(z) = 0\,,$$

avec $p(z), q(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $q(z) \neq 0$. On a $f(z) = p(z)/q(z)$ et $f(z)$ est rationnelle. □

L'algorithme 1 permet donc de déterminer si une fonction est rationnelle ou transcendante. Notons que Bell et Coons [30] ont proposé récemment un test similaire. Quand il s'agit uniquement de déterminer la transcendance d'une fonction mahlérienne, leur test semble plus efficace que celui présenté ici.

Exemple 29. Considérons l'équation 2-mahlérienne

$$zf(z) - (1+2z)f(z^2) + (1+z)f(z^4) = 0\,. \tag{55}$$

On voit rapidement que la fonction identiquement égale à 1 est solution. Comme nous l'avons vu dans l'exemple 24, cette équation admet une solution non constante dont les premiers coefficients sont

$$\begin{aligned} f(z) \;= z \;& +2z^2 + z^3 + 3z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + 4z^8 + z^9 + 2z^{10} \\ & +z^{11} + 3z^{12} + z^{13} + 2z^{14} + z^{15} + 5z^{16} + z^{17} + \cdots . \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 23, le fait qu'une des solutions de l'équation (55) soit rationnelle ne permet pas de déduire que toute solution de cette équation l'est. Pour déterminer si $f(z)$ est rationnelle ou transcendante, on va calculer son équation minimale. Écrivons le système compagnon inhomogène associé à cette équation :

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2z}{z} & -\frac{1+z}{z} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$\mathcal{S}(3, 16, \boldsymbol{f}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 7. Le vecteur colonne $(1,-1,0,-1,1,-1,0,0,0)$ est un élément de son noyau à gauche. On a donc l'intuition qu'on a la relation

$$(1-z)f(z)-(1-z)f(z^2)-z=0\,.$$

Pour que le théorème 12 permette de confirmer cette relation, il suffit de vérifier que le vecteur $(1,-1,0,-1,1,-1,0,0,0)$ appartient au noyau à gauche de la matrice $\mathcal{S}(3,4\,294\,967\,293,\boldsymbol{f})$. On pourrait faire cela à l'aide d'un ordinateur, mais cela demanderait une certaine puissance de calcul. On va voir qu'on peut toutefois vérifier cela à la main. Comme on l'a vu dans l'exemple 24, si $f(z)=:\sum_n a_n z^n$ on a la relation de récurrence,

$$a_n=2a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n-1}{2}}-a_{\frac{n}{4}}-a_{\frac{n-1}{4}}\,.$$

D'autre part, les vecteurs colonnes de la matrice $\mathcal{S}(3,4\,294\,967\,293,\boldsymbol{f})$ sont de la forme $(a_n,a_{n/2},0,a_{n-1},a_{(n-1)/2},0,a_{n-2},a_{(n-2)/2},0)^\top$ dès que $n\geq 3$. Le vecteur $(1,-1,0,-1,1,-1,0,0,0)$ se trouve donc dans le noyau de la matrice $\mathcal{S}(3,4\,294\,967\,293,\boldsymbol{f})$ si on a pour tout $n\geq 3$,

$$a_n-a_{\frac{n}{2}}-a_{n-1}+a_{\frac{n-1}{2}}=0\,.$$

Montrons par récurrence que c'est le cas. On sait que c'est vrai pour tout $n\leq 15$. Soit $n>15$ un entier. Supposons que cette relation soit vraie pour tous les entiers plus petits. En utilisant l'équation de récurrence sur les coefficients, on a

$$\begin{aligned}
a_n-a_{\frac{n}{2}}-a_{n-1}+a_{\frac{n-1}{2}} &= 2a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n-1}{2}}-a_{\frac{n}{4}}-a_{\frac{n-1}{4}}\\
&\quad -a_{\frac{n}{2}}\\
&\quad -2a_{\frac{n-1}{2}}-a_{\frac{n-2}{2}}+a_{\frac{n-1}{4}}+a_{\frac{n-2}{4}}\\
&\quad +a_{\frac{n-1}{2}}\\
&= a_{\frac{n}{2}}-a_{\frac{n}{4}}-a_{\frac{n-2}{2}}+a_{\frac{n-2}{4}}\,.
\end{aligned}$$

Si n est pair, cette dernière somme est égale à 0, par hypothèse de récurrence. Si n est impair, elle est égale à 0 car tous ses termes sont nuls. D'après le théorème 12, on a donc bien la relation

$$(1-z)f(z)-(1-z)f(z^2)-z=0\,.$$

On regarde maintenant si cette équation est bien l'équation minimale de $f(z)$. On écrit le système

$$\begin{pmatrix} f(z)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{z}{1-z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(z^2)\\ 1\end{pmatrix}\,.$$

D'après le théorème 12, il suffit de montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui est le cas. L'équation inhomogène minimale de $f(z)$ est donc d'ordre 1. D'après la proposition 20, la fonction $f(z)$ est transcendante.

Remarque 6. Dans l'ensemble des exemples que nous avons présentés, on arrive à calculer une base de l'espace des relations linéaires entre les coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien, en calculant le noyau à gauche d'une matrice ayant un nombre de colonnes bien moins important que la constante c donnée dans les théorèmes 11 et 12. Ainsi, dans l'exemple 29, le théorème 11 donnait $c := 4\,294\,967\,293$, alors qu'en pratique, prendre $c := 9$ aurait suffit. Il est très probable que la constante c donnée dans les théorèmes 11 et 12 soit loin d'être optimale. Des calculs plus fins dans la démonstration de ces théorèmes permettraient certainement un gain qualitatif quant à la valeur cette constante.

4 Déterminer si une valeur de fonction mahlérienne est transcendante

Le théorème 1 montre qu'en tout point algébrique du disque unité ouvert, une fonction mahlérienne à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$ prend des valeurs qui sont soit transcendantes, soit dans $\mathbb{K}(\alpha)$. Cette alternative peut être tranchée de manière effective.

Algorithme 3. *Soient $f(z)$ une fonction q-mahlérienne donnée par une équation inhomogène ou un système de type (4) et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique. On peut déterminer de manière algorithmique si la fonction f est définie au point α et, le cas échéant, si $f(\alpha)$ est algébrique ou transcendant.*

Soulignons le fait que l'algorithme 3 ne permet pas de calculer l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{\alpha \in D(0,1) \cap \overline{\mathbb{Q}}^{\star} \ : \ f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

des points algébriques auxquels une fonction mahlérienne prend des valeurs algébriques. En effet, pour cela il faudrait pouvoir se ramener à un système qui ne possède aucune singularité. Si le théorème 9 et le lemme 7 permettent d'effacer une singularité donnée, ils ne permettent pas en revanche de les effacer toutes. L'algorithme 3 permet donc seulement, étant donné un compact $\mathcal{C} \subset D(0,1)$, de déterminer l'ensemble $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}$.

Plus généralement, on peut déterminer l'espace des relations de dépendance linéaire entre les valeurs de plusieurs fonctions mahlériennes.

Algorithme 4. *Soient $f_1(z), \cdots, f_r(z)$ des fonctions q-mahlériennes, chacune étant donnée par une équation inhomogène ou un système de type (4), et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique. On peut déterminer de manière algorithmique si les fonctions $f_i(z)$ sont toutes définies au point α et, le cas échéant, déterminer une base de l'espace vectoriel*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \overline{\mathbb{Q}}^r : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(\alpha) = 0 \right\}.$$

Notons que l'on n'exige pas, dans l'algorithme 4, de considérer l'ensemble des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien. On s'autorise au contraire à considérer des fonctions appartenant *a priori* à des systèmes différents.

L'algorithme 3 est bien sûr un cas particulier de l'algorithme 4, mais, pour la clarté de l'exposition, il nous semble préférable de présenter ces deux algorithmes de manière distincte. Nous commençons par décrire l'algorithme 3.

Description de l'algorithme 3. Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne donnée dans un système inhomogène ou un système de type (4). On applique d'abord l'algorithme 1 pour déterminer l'équation inhomogène minimale associée à la fonction f. En écrivant cette équation sous forme d'un système, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(z^{q^{m-1}}) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^m}) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

où

$$A(z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{p_{-1}(z)}{p_0(z)} & -\frac{p_1(z)}{p_0(z)} & \cdots & \cdots & -\frac{p_m(z)}{p_0(z)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit ρ, $0 < \rho < 1$, un nombre réel strictement inférieur aux modules des pôles non nuls des coefficients de $A(z)$ et des racines non nulles du déterminant de $A(z)$. La matrice $A(z)$ étant inversible et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, un tel ρ se calcule de manière effective.

Nous montrons dans un premier temps comment déterminer si α est ou non un pôle de f. Observons d'abord que la fonction $f(z)$ est définie sur le disque $D(0,\rho)$. En effet, dans le cas contraire choisissons ξ un pôle de module minimal pour la fonction f, de sorte que $|\xi| \leq \rho$. Par définition de ρ, le nombre ξ ne serait pas un pôle de la matrice $A(z)$. L'équation (56) impliquerait alors que ξ serait pôle d'une des fonctions $f(z^q), \ldots, f(z^{q^m})$, ce qui contredirait la minimalité de ξ.

On choisit maintenant un entier l tel que $|\alpha^{q^l}| \leq \rho$. En itérant le système (56), on a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ f(z^{q^{m-1}}) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f(z^{q^{l+m-1}}) \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, la minimalité du système (56) implique de plus que les fonctions $1, f(z), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$ sont linéairement indépendantes. D'après le théorème 9, chaque pôle de $A_l(z)$ est pôle d'au moins une des fonctions $1, f(z), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$. D'autre part, par choix de l'entier l, α n'est pôle d'aucune des fonctions $f(z^{q^l}), \ldots, f(z^{q^{l+m-1}})$. Par conséquent, α est un pôle de $f(z)$ si et seulement si c'est un pôle d'un des coefficients de la deuxième ligne de la matrice $A_l(z)$. Comme $A_l(z)$ se calcule explicitement, on peut déterminer de façon effective si la fonction f est définie ou non au point α.

Supposons à présent que la fonction $f(z)$ soit bien définie en α. Si α n'est pas une racine du déterminant de $A_l(z)$, alors c'est un point régulier pour la matrice $A_l(z)$, par choix de l'entier l. D'après le théorème de Philippon, les fonctions $1, f(z), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$ étant linéairement indépendantes, le nombre $f(\alpha)$ est transcendant.

Il reste à traiter le cas où α est une racine du déterminant de $A_l(z)$. Le nombre $f(\alpha)$ est algébrique si et seulement si, il existe deux nombres algébriques ω_1 et ω_2, non tous nuls, tels que

$$\omega_1 + \omega_2 f(\alpha) = 0\,.$$

D'après le théorème 8, cela est équivalent à l'existence d'un vecteur non nul de la forme $(\omega_1, \omega_2, 0, \ldots, 0)$ dans le noyau à gauche de la matrice $A_l(\alpha)$. L'existence d'un tel vecteur peut se déterminer de manière élémentaire. □

Exemple 30. Considérons le morphisme σ sur l'alphabet $\{0,1\}$ défini par $\sigma(0) = 1100$ et $\sigma(1) = 0111$. Considérons alors le point fixe de σ commençant par la lettre 1,

$$\sigma^\infty(1) = 1100110001110111110011000111\cdots\,.$$

Notons $f(z)$ la série génératrice de ce mot infini. Elle satisfait à l'équation

$$f(z) = (1 - z^2 - z^3)f(z^4) + \frac{z + z^2 + z^3}{1 - z^4}\,.$$

Comme le mot n'est pas périodique, c'est bien l'équation inhomogène minimale de $f(z)$. On obtient donc le système

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z+z^2+z^3}{1-z^4} & 1 - z^2 - z^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^4) \end{pmatrix}. \tag{57}$$

La matrice du système n'a pas de pôle et son déterminant possède un seul 0 dans le disque unité, le nombre réel

$$\theta := \frac{1}{3}\left(-1 + \left(\frac{1}{2}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\left(25 + 3\sqrt{69}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

L'ensemble des singularités du système est donc l'ensemble

$$\mathcal{S} := \left\{\alpha \in \mathbb{C} \ : \ \alpha^{4^l} = \theta, \ \text{ pour un certain } l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si α est un nombre algébrique du disque unité n'appartenant pas à $\mathcal{S}$, le nombre $f(\alpha)$ est transcendant. Inversement, au point θ on a :

$$f(\theta) = \frac{\theta + \theta^2 + \theta^3}{1 - \theta^4} \in \mathbb{Q}(\theta)\,.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{S}$ et $l \in \mathbb{N}$, tel que $\alpha^{4^l} = \theta$. En itérant l fois le système (57), on obtient la relation

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(\alpha) \end{pmatrix} = A_l(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ f(\theta) \end{pmatrix},$$

avec $A_l(z)$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}[z]$. Comme le membre de droite de l'égalité est dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, il en est de même du membre de gauche, et $f(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Décrivons à présent l'algorithme 4.

Description de l'algorithme 4. Pour chaque fonction $f_i(z)$, $1 \leq i \leq r$, on dispose d'un système de la forme (4). L'algorithme 1 nous permet de trouver le système inhomogène minimal associé à chaque fonction $f_i(z)$, $1 \leq i \leq r$. Soient ρ un réel positif tel que les matrices des systèmes sont définies et inversibles sur le disque fermé épointé $D(0,\rho)^\star$ et l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| \leq \rho$. Comme dans la preuve de l'algorithme 3, on itère l fois chaque système pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_i(z) \\ \vdots \\ f_i(z^{q^{m_i-1}}) \end{pmatrix} = A_{i,l}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f_i(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_i(z^{q^{l+m_i-1}}) \end{pmatrix}$$

puis déterminer si chaque fonction $f_i(z)$ est définie en α.

On supposera dans la suite que les fonctions $f_i(z)$ sont toutes définies en α. Chaque fonction $f_i(z)$ étant également q^l-mahlérienne, l'algorithme 1 permet de déterminer l'équation inhomogène minimale associée :

$$p_{i,-1}(z) + p_{i,0}(z)f_i(z) + p_{i,1}(z)f_i(z^{q^l}) + \cdots + p_{i,n_i}f_i(z^{q^{ln_i}}) = 0\,.$$

Ainsi, toutes les fonctions $f_i(z), f_i(z^{q^l}), \ldots, f_i(z^{q^{ln_i}})$ sont définies au point α. En mettant bout à bout les systèmes compagnons associés à ces équations, on obtient un système diagonal par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{l(n_1-1)}}) \\ 1 \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_r(z^{q^{l(n_r-1)}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & B_r(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{ln_1}}) \\ 1 \\ f_2(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_r(z^{q^{ln_r}}) \end{pmatrix}.$$

Le théorème 11, nous permet d'obtenir une base $\mathcal{B}$ de l'espace

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(1, f_1(z), \cdots, f_1(z^{q^{l(n_1-1)}}), \ldots, f_r(z^{q^{l(n_r-1)}}))\,,$$

en calculant le noyau d'une matrice explicite. Soient S la codimension de cet espace et s la dimension de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$. On choisit, parmi les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$, des fonctions $g_1(z), \ldots, g_s(z)$ linéairement indépendantes telles que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \end{pmatrix} = \Gamma(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_s(z) \end{pmatrix}$$

où la matrice $\Gamma(z)$ est définie au point α. Un tel choix de $\Gamma(z)$ se calcule explicitement, comme expliqué ci-après. On construit à partir de $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \cdots, f_r(z))$, on considère un premier vecteur $\mathbf{q}_1(z) := (q_{1,1}(z), \ldots, q_{1,r}(z))$ dans $\mathcal{B}'$ de sorte que

$$q_{1,1}(z)f_1(z) + \cdots + q_{1,r}(z)f_r(z) = 0\ ,$$

où les $q_{1,i}(z)$ sont des polynômes premiers entre eux, et on choisit un indice i_1 pour lequel $q_{1,i_1}(\alpha) \neq 0$. On a

$$f_{i_1}(z) = \sum_{i \neq i_1} \frac{-q_{1,i}(z)}{q_{1,i_1}(z)} f_i(z)\,.$$

On choisit alors un second vecteur $\mathbf{q}_2(z)$ dans $\mathcal{B}'$. On peut toujours supposer que $q_{2,i_1}(z) = 0$, quitte à remplacer $\mathbf{q}_2(z)$ par une combinaison linéaire de $\mathbf{q}_2(z)$ et $\mathbf{q}_1(z)$. Il vient

$$\sum_{i \neq i_1} q_{2,i}(z) f_i(z) = 0 \ .$$

On fixe ensuite i_2, tel que $q_{2,i_2}(\alpha) \neq 0$ et on écrit

$$f_{i_2}(z) = \sum_{i \neq i_1, i_2} \frac{-q_{2,i}(z)}{q_{2,i_2}(z)} f_i(z) \ .$$

En itérant ce procédé, on obtient des entiers distincts $i_1, i_2, \ldots, i_{r-s}$ tels que :

$$f_{i_k}(z) = \sum_{i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k} \frac{-q_{k,i}(z)}{q_{k,i_k}(z)} f_i(z) \tag{58}$$

et $q_{k,i_k}(\alpha) \neq 0$ pour tout k, $1 \leq k \leq r-s$. On choisit $g_1, \ldots, g_s$ de sorte que $\{g_1, \ldots, g_s\} = \{f_i : i \neq i_1, i_2, \ldots, i_{r-s}\}$. Les équations (58) permettent d'exprimer chaque f_{i_k} comme une combinaison linéaire définie en α des fonctions $g_1, \ldots, g_s$, d'où l'on tire $\Gamma(z)$.

On a alors l'inclusion suivante entre l'ensemble $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha))$ et l'ensemble $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha))$:

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) \cdot \Gamma(\alpha) \subset \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)) \, .$$

En appliquant l'algorithme 2, on complète les fonctions $g_1(z), \ldots, g_s(z)$ en un système

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_S(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} g_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ g_S(z^{q^l}) \end{pmatrix}$$

dans lequel les fonctions $g_1(z), \ldots, g_S(z)$ sont linéairement indépendantes. Comme les fonctions $g_1, \ldots, g_S$ sont définies en α, le théorème 9 implique que la matrice $A(z)$ est bien définie en α. D'après le théorème 8, on a l'égalité

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_S(\alpha)) = \ker_g A(\alpha),$$

où $\ker_g A(\alpha)$ désigne le noyau à gauche de $A(\alpha)$. En ne considérant que les vecteurs de $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_S(\alpha))$ nuls sur les $S-s$ dernières coordonnées, on peut déterminer une base $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_t$ de l'espace $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha))$. On peut alors calculer de manière explicite une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha))$, en résolvant dans $\overline{\mathbb{Q}}^r$ les systèmes linéaires

$$(x_1, \ldots, x_r).\Gamma(\alpha) = \boldsymbol{\mu}_i \ ,$$

ce qui termine cette démonstration. □

Chapitre III

Systèmes mahlériens de plusieurs variables

Rappelons que, pour $T := (t_{i,j})$ une matrice de taille n à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\boldsymbol{z} := (z_1, \dots, z_n)$ une famille d'indéterminées, on note

$$T\boldsymbol{z} := \left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{t_{1,j}}, \dots, \prod_{j=1}^{n} z_j^{t_{n,j}} \right) .$$

On s'intéresse dans ce chapitre aux systèmes mahlériens de plusieurs variables, de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = A(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} f_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} , \tag{59}$$

où $A(\boldsymbol{z})$ est une matrice inversible à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Comme pour les fonctions d'une variable, la méthode de Mahler en plusieurs variables ne peut fonctionner qu'en un point algébrique qui ne soit pas une singularité du système. On étendra alors la terminologie définie dans l'introduction.

Définition 6. Considérons un système T-mahlérien (59). On dit qu'un point $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ est *singulier*, ou que c'est une *singularité*, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que la matrice $A(\boldsymbol{z})$ n'est pas définie ou n'est pas inversible au point $T^k\boldsymbol{\alpha}$. On dit que le point est *régulier* s'il n'est pas singulier.

Dans le cadre de la méthode de Mahler en plusieurs variables, des conditions supplémentaires doivent être imposées à la matrice T et au point α afin de garantir, d'une part, une convergence uniforme des coordonnées des points $T^k\boldsymbol{\alpha}$ vers 0 et, d'autre part, la non nullité de certaines quantités aux points $T^k\boldsymbol{\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$.

Définition 7. Soient T une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$. On dit que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est *admissible* s'il existe deux réels $\rho > 1$ et $c > 0$ tels que les trois conditions suivantes sont satisfaites.

(a) Les entrées de la matrice T^k sont en $\mathcal{O}(\rho^k)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\log ||T^k \boldsymbol{\alpha}|| \leq -c\rho^k$.

(c) Si $g(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ est une fonction analytique non nulle, il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $g(T^k \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$.

Ces conditions sont indispensables pour faire fonctionner la méthode de Mahler. Elles sont présentes dès les premiers travaux de Mahler, qui les a axiomatisées dans [73]. Nous discutons de ces trois conditions d'admissibilité dans l'appendice A. Notons seulement, pour l'instant, que cela impose à la matrice T d'avoir un rayon spectral strictement supérieur à 1.

Dans ce chapitre, nous développons la méthode de Mahler pour les systèmes *réguliers singuliers*. Notons $\widehat{\mathbf{K}}_1$ le corps des fractions de $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$, l'anneau des fonctions *analytiques* à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On appellera *fonctions méromorphes* les éléments de $\widehat{\mathbf{K}}_1$. Étant donné un entier $d \geq 1$, on notera $\widehat{\mathbf{K}}_d$ le corps des fractions de l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}^{1/d}\}$, où $\boldsymbol{z}^{1/d} = (z_1^{1/d}, \ldots, z_n^{1/d})$. Les éléments du corps $\widehat{\mathbf{K}} := \cup_{d \geq 1} \widehat{\mathbf{K}}_d$ seront appelée *fonctions méromorphes ramifiées*.

Définition 8. On dit qu'un système T-mahlérien est *régulier singulier* s'il existe une matrice $\Phi(\boldsymbol{z}) \in \mathrm{GL}_m(\widehat{\mathbf{K}})$ telle que $\Phi(\boldsymbol{z})^{-1} A(\boldsymbol{z}) \Phi(T\boldsymbol{z}) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}})$. Par extension, on dira qu'une fonction mahlérienne solution d'un système régulier singulier, est *régulière singulière*.

Autrement dit, un système régulier singulier est un système qui est conjugué à un système constant, via un changement de jauge méromorphe ramifié. L'étude des propriétés des systèmes réguliers singuliers est l'objet de la section 1 du chapitre IV. Notons que la définition donnée ci-dessus est une généralisation de celle de Roques [95] pour les systèmes mahlériens d'une variable.

Nous obtenons alors un analogue du théorème de Nishioka, pour les systèmes réguliers singuliers.

Théorème 14. *Soient $f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$ des fonctions formant un vecteur solution d'un système T-mahlérien régulier singulier et soit $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ un point régulier pour ce système tel que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible. On a*

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z})) = \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, f_m(\boldsymbol{\alpha}))\,. \tag{60}$$

Le théorème 14 représente une avancée importante sur la théorie des systèmes mahlériens de plusieurs variables. Il ne permet cependant pas de considérer des fonctions mahlériennes associées à différentes transformations. Dans ce cadre, on établit le résultat suivant.

Théorème 15. *Soit $r \geq 1$ un entier. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère un système mahlérien régulier singulier*

$$\begin{pmatrix} f_{i,1}(T_i \boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(T_i \boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} = A_i(\boldsymbol{z}_i) \begin{pmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} \tag{61.i}$$

où $A_i(\boldsymbol{z}_i)$ est une matrice de $\mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i))$, T_i est une matrice à coefficients entiers naturels, de rayon spectral $\rho(T_i)$. Supposons que

(i) *pour chaque i, $\boldsymbol{\alpha}_i \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^{n_i}$ soit un point régulier pour le système (61.i) et le couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ soit admissible,*

(ii) *pour chaque paire (i,j), $i \neq j$, on ait $\log \rho(T_i)/\log \rho(T_j) \notin \mathbb{Q}$.*

Alors

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)) = \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) \,.$$

Le théorème 14 découle alors du théorème 15, quand $r = 1$.

Remarque 7. Supposons que certaines matrices aient des rayons spectraux deux à deux multiplicativement dépendants. On peut supposer, pour simplifier les notations, que c'est le cas des matrices $T_1, \ldots, T_s$, $s \leq r$. Alors il existe des entiers $d_1, \ldots, d_s$ tels que les matrices $T_i^{d_i}$, $1 \leq i \leq s$, ont toutes le même rayon spectral. Itérons d_i fois chacun des systèmes (71.i), pour $1 \leq i \leq s$. On peut regrouper ces s systèmes en un seul grand système T-mahlérien diagonal par blocs, où $T := \mathrm{diag}(T_1, \ldots, T_s)$. Comme nous le verrons au chapitre IV, ce système reste régulier singulier et le point $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ est encore régulier pour ce système. Le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait aux conditions (a) et (b) de la définition 7. On peut alors appliquer le théorème 15, en remplaçant les s systèmes (71.i), $1 \leq i \leq s$, par ce nouveau système, à la condition supplémentaire que la condition (c) de la définition 7 soit satisfaite pour le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$.

En une variable, le théorème de Nishioka sert de base à la démonstration du théorème de Philippon et du théorème 2. De même, pour les E-fonctions, le théorème de Beukers est basé sur le théorème de Siegel-Shidlovskii. Dans le cadre de la méthode de Mahler en plusieurs variables, on va voir qu'à l'inverse, on obtient le théorème 15 de manière concomitante à un théorème de permanence des relations entre les fonctions T-mahlériennes.

Notation. Étant donné $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$, on désigne par $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}$ l'ensemble des éléments de l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$ qui sont algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, et dont le domaine de convergence contient le point $\boldsymbol{\alpha}$.

Théorème 16. *Sous les hypothèses du théorème 15, donnons-nous pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, une famille d'indéterminées $\boldsymbol{X}_i := (X_{i,1}, \ldots, X_{i,m_i})$, et posons $\boldsymbol{z} := (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_r)$ et $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$. Alors, pour tout polynôme $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r]$, homogène en chacune des familles de variables $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r$, et tel que*

$$P(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)) = 0\,,$$

il existe un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}[\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r]$, homogène en chacune des familles de variables $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r$, tel que

$$Q(\boldsymbol{z}, f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) = 0\,,$$

et

$$Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r) = P(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r)\,.$$

Si de plus $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}, f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r))$ est une extension régulière de $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, alors, on peut choisir Q dans $\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r]$.

Ce résultat est à rapprocher du théorème 2. Étant donnée une relation algébrique homogène entre les valeurs de fonctions formant un vecteur solution d'un système mahlérien, il montre que ces relations proviennent, par spécialisation, de relations algébriques de même degré entre les fonctions. Cependant, à la différence du théorème 2, dans le théorème 16, les relations sont relevées sur $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}$ et non sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Obtenir une relation entre les fonctions sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ nécessiterait d'augmenter le degré de la relation. Si l'on souhaite obtenir une relation entre les fonctions sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, sans augmenter le degré de la relation, on doit pouvoir démontrer la régularité du corps $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}, f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}))$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$.

Après un survol des résultats existant autour la méthode de Mahler pour les systèmes de plusieurs variables, nous établirons, dans la section 2, les lemmes de zéros nécessaires à la démonstration du théorème 16, qui sera démontré dans la section 3. La section 4 est, quant à elle, consacrée à la démonstration du théorème 15.

1 Aperçu historique de la méthode de Mahler en plusieurs variables

Dès ses premiers travaux, Mahler introduit la possibilité de travailler avec des fonctions de plusieurs variables. Un exemple cher à Mahler est celui des *séries de Hecke-Mahler*.

Exemple 31. Étant donné ω un nombre réel quadratique, la *série de Hecke-Mahler* associée à ω est la série

$$f_\omega(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \lfloor n\omega \rfloor z^n .$$

Cette série n'est pas mahlérienne *a priori*. Mahler [70] a eu l'idée de considérer la fonction

$$F_\omega(z_1, z_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\lfloor n_1\omega \rfloor} z_1^{n_1} z_2^{n_2} .$$

Le développement en fractions continues de ω étant ultimement périodique, Mahler [70] a montré que la fonction $F_\omega(z_1, z_2)$ satisfait à une équation T-mahlérienne inhomogène d'ordre 1, où T est une matrice donnée par les convergents de la partie purement périodique du développement en fractions continues de ω.

Comme l'a noté Mahler lui-même [73], la méthode de Mahler ne peut s'appliquer directement pour la fonction Thêta dont l'équation fonctionnelle est $\theta(z, q) = z^2 q\theta(zq, q) + 1$. En effet, la matrice de la transformation serait la matrice

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

pour laquelle il n'existe aucun point tel que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible.

Une des difficultés quand on souhaite appliquer la méthode de Mahler en plusieurs variables, c'est notre capacité à garantir qu'un couple donné $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait à la condition (c) de la définition d'admissibilité. Après des résultats partiels de Mahler [70, 71, 72], Kubota [58], Loxton et van der Poorten [63, 64], Masser [75] a donné un lemme de zéros permettant de vérifier simplement cette condition.

Théorème Mas82 (Masser, 1982)**.** *Soit T une matrice de taille n à coefficients dans $\mathbb{N}$ et soit $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ tel que $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

- *Il n'existe pas de vecteur d'entiers $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n$ et pas d'entiers positifs a et b tels que $(T^{ak+b}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}} = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
- *Le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait à la condition (c) de la définition 7.*

En particulier, sous ces conditions, la matrice T est inversible et ne possède pas de racines de l'unité parmi ses valeurs propres.

Jusqu'aux théorèmes 14, 15 et 16, on ne disposait que de très peu de résultats pour les fonctions mahlériennes de plusieurs variables. Dans [67], Loxton et van der Poorten affirmaient avoir démontré le théorème 14 pour les

systèmes pour lesquels la matrice $A(\boldsymbol{z})$ est définie et inversible en 0. Comme nous l'avons mentionné au chapitre I, leur démonstration était incomplète et n'a jamais pu être comblée. Jusqu'à présent, on ne savait démontrer le théorème 14 que dans deux cas.

- En 1977, Kubota [58] montre qu'il est valable pour les systèmes de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1(\boldsymbol{z}) & a_1(\boldsymbol{z}) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_m(\boldsymbol{z}) & & & a_m(\boldsymbol{z}) \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \tag{62}$$

  où $a_1(\boldsymbol{z}), \dots, a_m(\boldsymbol{z}), b_1(\boldsymbol{z}), \dots, b_m(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ n'ont pas de pôle en 0 et où $a_i(0) \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.

- En 1996, Ku. Nishioka [88] le démontre pour les systèmes de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1(\boldsymbol{z}) & & & \\ \vdots & & B & \\ b_m(\boldsymbol{z}) & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \tag{63}$$

  où $b_1(\boldsymbol{z}), \dots, b_m(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ n'ont pas de pôle en 0 et B est une matrice constante inversible.

Nous verrons que dans ces deux cas les systèmes sont réguliers singuliers et donc couverts par le théorème 14.

Dès 1976, Kubota [57] suggérait que la méthode de Mahler pouvait être généralisée de telle sorte qu'il deviendrait possible de considérer simultanément plusieurs système mahlériens associés à des transformations de rayons spectraux multiplicativement indépendants. Même si le sujet a été régulièrement abordé depuis l'article de Kubota (voir [69, 109, 110]), le premier résultat dans cette direction est le théorème Ni94, obtenu en 1994 par Ku. Nishioka [87]. La principale difficulté quand on considère plusieurs systèmes associés à des transformations différentes, vient du fait qu'on ne peut pas regrouper tout ces systèmes en un seul grand système mahlérien. En effet, étant donnés des entiers $q_1, \dots, q_r$ distincts et des points $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ du disque unité, les suites de termes généraux

$$-\log\left|\alpha_1^{q_1^k}\right|, \dots, -\log\left|\alpha_r^{q_r^k}\right|$$

ont des vitesses de croissance non comparables. Si les entiers $q_1, \dots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants, alors, remplacer chacun des q_i par un $q_i^{\ell_i}$ ne change rien à ce constat. L'idée introduite par Kubota [58]

est de garder les systèmes séparés et de considérer à chaque étape des points de la forme

$$\alpha_1^{q_1^{\left\lfloor \frac{k}{\log q_1} \right\rfloor}}, \dots, \alpha_r^{q_r^{\left\lfloor \frac{k}{\log q_r} \right\rfloor}}.$$

quand k parcourt $\mathbb{N}$. Plus généralement, si $T_1, \dots, T_r$ sont des matrices et $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ sont des points algébriques, on peut itérer chaque système de sorte à considérer des points de la forme

$$\left(T_1^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_1)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_r)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_r \right), \tag{64}$$

pour $k \in \mathbb{N}$. La principale difficulté consiste à prouver un lemme de zéros pour ces suites de points. Précisément, on souhaite montrer qu'étant donnée une fonction analytique non nulle $f(\boldsymbol{z})$, on a

$$f\left(T_1^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_1)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_r)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_r \right) \neq 0$$

pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$. Après un résultat partiel de Ku. Nishioka [87], Masser [76] a démontré un premier lemme de zéros pour ces points.

Théorème Mas99 (Masser, 1999). *Soient $T_1, \dots, T_r$ des matrices dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants et dont les polynômes caractéristiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère un point $\boldsymbol{\alpha}_i$ tel que $T_i^k \boldsymbol{\alpha}_i \to 0$, quand $k \to \infty$. Soit $f(\boldsymbol{z})$ une fonction analytique non nulle, alors le nombre*

$$f\left(T_1^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_1)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{\left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_r)} \right\rfloor} \boldsymbol{\alpha}_r \right)$$

est non nul pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$.

Son théorème permet notamment d'élargir le théorème Ni94 à des points $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ algébriques quelconques. La limitation de ce théorème aux matrices dont les polynômes caractéristiques sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ n'est cependant pas anecdotique. Elle empêche par exemple de considérer des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

En particulier, elle nous interdit de considérer plusieurs copies de la même fonction, en des points différents. L'objet de la prochaine section est d'établir un nouveau lemme de zéros, plus général que le théorème Mas99.

2 Lemme de zéros pour différentes transformations mahlériennes

2.1 Itération de chacune des transformations

Afin d'appliquer la méthode de Mahler à plusieurs systèmes associés à des transformations indépendantes, on va itérer les systèmes à des puissances $k_1, \dots, k_r$ différentes, qui garantissent une uniformité de la convergence des nombres

$$T_1^{k_1}\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{k_r}\boldsymbol{\alpha}_r\,.$$

On quitte alors la méthode de Mahler classique, qui s'intéresse à l'action de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{C}^n$ induite par une unique transformation T, pour une action de $\mathbb{N}^r$ sur $\mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_r}$ induite par plusieurs transformations $T_1, \dots, T_r$. On a en effet besoin de pouvoir garantir des conditions analogues aux conditions (a) et (b) de la définition d'admissibilité. Kubota [58] suggérait de prendre des entiers k_i de la forme

$$k_i := \left\lfloor \frac{k}{\log \rho(T_i)} \right\rfloor,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Un tel choix permet d'obtenir les majorations

$$\max_{1\le i\le r}\left(\left\|T_i^{k_{i,l}}\right\|\right) = \mathcal{O}(e^l) \text{ et } \log\left\|\left(T_1^{k_{1,l}}\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{k_{r,l}}\boldsymbol{\alpha}_r\right)\right\| \le -ce^l\,.$$

Par la suite, pour $\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$, on notera $T_{\boldsymbol{k}} := \operatorname{diag}(T_1^{k_1}, \dots, T_r^{k_r})$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont les matrices $T_1^{k_1}, \dots, T_r^{k_r}$. Ainsi, en notant $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r)$, on a

$$T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha} = (T_1^{k_1}\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, T_r^{k_r}\boldsymbol{\alpha}_r)\,.$$

En réalité, on peut choisir les r-uplets $\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_r)$ avec un peu plus de liberté que ce que suggérait Kubota. Il suffit de les prendre dans un sous-ensemble de $\mathbb{N}^r$ restant à distance bornée de la demi-droite réelle $\mathbb{R}_+\Theta \subset \mathbb{R}^n$, où

$$\Theta := \left(\frac{1}{\log \rho(T_1)}, \dots, \frac{1}{\log \rho(T_r)}\right)\,. \tag{65}$$

Le lemme suivant montre que l'on est obligé de choisir les r-uplets $\boldsymbol{k}$ de la sorte, afin d'avoir une convergence à la même vitesse en norme et en hauteur.

Lemme 21. *Soient $T_1, \dots, T_r$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$ et pour chaque i, $1 \le i \le r$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ un point algébrique tel que le couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible. On pose $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r)$, et on considère une suite $(\boldsymbol{k}_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^r$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- *Il existe un réel $\rho > 1$ et un réel $c > 0$ tels que*

$$\|T_{\boldsymbol{k}_l}\| = \mathcal{O}(\rho^l) \text{ et } \log\|T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}\| \le -c\rho^l\,.$$

- *Il existe un réel λ tel que $\|\boldsymbol{k}_l - \lambda l\Theta\| = \mathcal{O}(1)$, où Θ est défini par (65).*

Dans ce cas, on a $\rho = e^\lambda$. En particulier, si $\lambda = 1$, on a $\rho = e$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un λ tel que $\|\boldsymbol{k}_l - \lambda l\Theta\| = \mathcal{O}(1)$. Pour chaque $l \in \mathbb{N}$ et chaque i, $1 \leq i \leq r$, on écrit $\boldsymbol{k}_l =: \lambda l/\log(\rho(T_i)) + \epsilon(i,l)$, où $|\epsilon(i,l)| \leq B$, pour un certain nombre réel $B > 0$. Pour chaque i le réel ρ donné par les conditions (a) et (b) de la définition d'admissibilité est égal à $\rho(T_i)$. On peut donc écrire pour chaque i, d'une part

$$\left\|T_i^{k_{i,l}}\right\| = \mathcal{O}\left(\rho(T_i)^{k_{i_l}}\right) = \mathcal{O}\left(\rho(T_i)^{\lambda l/\log(\rho(T_i))}\right) = \mathcal{O}\left(e^{\lambda l}\right),$$

et d'autre part,

$$\log\left\|T_i^{k_{i,l}}\boldsymbol{\alpha}_i\right\| \leq -c_i\rho(T_i)^{k_{i_l}} \leq -c_i' e^{\lambda l},$$

où c_i, c_i' sont des réels positifs. En posant $c := \min_i\{c_1', \ldots, c_r'\}$, on obtient le résultat souhaité. Supposons inversement que l'on ait

$$\|T_{\boldsymbol{k}_l}\| = \mathcal{O}(\rho^l) \text{ et } \log\|T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}\| \leq -c\rho^l.$$

Posons $\lambda := \log(\rho)$ et fixons un i, $1 \leq i \leq r$. Comme les couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ satisfont aux conditions (a) et (b) de la définition d'admissibilité on a également

$$\left\|T_i^{k_{i,l}}\right\| = \mathcal{O}\left(\rho(T_i)^{k_{i,l}}\right) \text{ et } \log\left\|T_i^{k_{i,l}}\boldsymbol{\alpha}_i\right\| \leq -c_i\rho(T_i)^{k_{i,l}},$$

pour un réel $c_i > 0$. Il existe donc deux réels $\kappa_i, \gamma_i > 0$ tels que

$$\kappa_i e^{\lambda l} \leq \rho(T_i)^{k_{i,l}} \leq \gamma_i e^{\lambda l},$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$. En passant au logarithme, on obtient

$$\log(\kappa_i) + \lambda l \leq \log(\rho(T_i))k_{i,l} \leq \log(\gamma_i) + \lambda l.$$

Ainsi, en divisant par $\log(\rho(T_i))$ on voit que $k_{i,l}$ est à distance bornée de $\lambda l/\log(\rho(T_i))$. □

2.2 Un lemme de zéros de Corvaja et Zannier

Le théorème Mas99 impose une condition contraignante sur les matrices T_i, celle d'avoir un polynôme caractéristique irréductible sur $\mathbb{Q}$. Cette condition nous empêche donc d'avoir dans un même système, plusieurs copies de la même fonction, évaluée en des points différents. Il nous faut donc élargir le résultat de Masser à des matrices $T_1, \ldots, T_r$ quelconques, telles que les couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ sont admissibles.

En 2005, Corvaja et Zannier [44] ont établi, à partir du théorème du sous-espace, un lemme de zéros pour certaines suites de *$\mathcal{S}$-unités*. Ces auteurs

mentionnent le fait que leur résultat peut avoir des applications en méthode de Mahler. À notre connaissance, avant nos travaux, cette piste là n'avait pas été explorée. Rappelons qu'étant donnés $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $\mathcal{S}$ un ensemble fini de valuations sur $\mathbb{K}$, on dit qu'un point $\alpha \in \mathbb{K}$ est une *$\mathcal{S}$-unité* si toute valuation sur $\mathbb{K}$ qui n'est pas dans $\mathcal{S}$ est nulle au point α. Le théorème 3 de [44] s'énonce de la façon suivante.

Théorème CZ05 (Corvaja et Zannier, 2005)**.** *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $\mathcal{S}$ un ensemble fini de valuations sur $\mathbb{K}$ et $f(\boldsymbol{z})$ une fonction analytique non nulle à coefficients algébriques. Considérons une suite de nombres algébriques $(\boldsymbol{\alpha}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ telle que*

- *$\boldsymbol{\alpha}_k$ est une $\mathcal{S}$-unité pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
- *$f(\boldsymbol{\alpha}_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
- *$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_k = 0$,*
- *$\log H(\boldsymbol{\alpha}_k) = \mathcal{O}(-\log ||\boldsymbol{\alpha}_k||)$.*

Alors, il existe des n-uplets d'entiers $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_s \in \mathbb{Z}^n$ et des nombres algébriques $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ tels que,

$$\prod_{i=1}^{s} (\boldsymbol{\alpha}_k^{\boldsymbol{\mu}_i} - \gamma_i) = 0\,,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ce résultat permet une grande souplesse quant à la suite de points $\boldsymbol{\alpha}_k$ que l'on regarde. C'est cette souplesse qui va nous permettre de considérer des matrices générales. On remarquera cependant, qu'à l'inverse du théorème Mas99, il ne s'applique que pour les fonctions à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Dans le cadre de la méthode de Mahler, cette restriction n'est pas gênante, toutes les fonctions mahlériennes étant à coefficients algébriques. Notons qu'on aura toutefois besoin de considérer des fonctions analytiques ayant des coefficients dans un espace vectoriel $L \subset \mathbb{C}$ de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous montrerons comment le théorème CZ05 nous permet d'atteindre ces fonctions.

2.3 Ensembles syndétiques par morceaux

Dans le cadre de la méthode de Mahler pour une seule transformation T, le théorème Mas82 énonce qu'une série non nulle ne peut pas s'annuler en tout point de certains ensembles bien structurés de points algébriques. Ce sont des ensembles de la forme $\{T^k\boldsymbol{\alpha} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, où $\boldsymbol{\alpha}$ est un point algébrique, qui sont naturellement indexés par $\mathbb{N}$. Quand on considère simultanément plusieurs transformations indépendantes, on a vu que chacune des matrices $T_1, \dots, T_r$ doit être itérée à une puissance différente, de manière à garantir

une certaine uniformité dans la vitesse de convergence des points vers 0. Notre ensemble de points n'est plus un ensemble « bien structuré », indexé par $\mathbb{N}$, mais une partie d'un ensemble indexé par $\mathbb{N}^r$. Bien sûr, cet ensemble de points peut toujours être indexé par $\mathbb{N}$, mais on ne peut plus s'appuyer sur la structure additive de $\mathbb{N}$. Pour faire face à cette difficulté, on introduit la notion d'*ensemble syndétique par morceaux*, une notion classique en théorie de Ramsey. Cette notion qualifie une certaine forme de « largeur » pour les sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Comme nous le verrons, le lemme de Brown montre que ces ensembles sont stables par partitionnement et bien plus robustes que les suites récurrentes linéaires.

Définition 9. On dit qu'un ensemble $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ est *syndétique par morceaux* s'il existe un entier B tel que, quel que soit l'entier $M \geq 2$, il existe des nombres $l_1 < \cdots < l_M$ dans $\mathcal{L}$ tels que :

$$l_{i+1} - l_i \leq B, \qquad 1 \leq i < M\,.$$

Dans ce cas, on dit que l'entier B est une *borne* pour l'ensemble $\mathcal{L}$.

Rappelons qu'on dit qu'une partie de $\mathbb{N}$ est *syndétique*, ou parfois *relativement dense*, si ses trous sont des intervalles bornés. D'autre part, on dit qu'une partie de $\mathbb{N}$ est *épaisse*[1] si elle contient des intervalles de longueur arbitrairement grande. Les ensembles syndétiques par morceaux sont donc les ensembles que l'on peut obtenir comme intersection d'un ensemble syndétique et d'un ensemble épais. Les propriétés énoncées dans le lemme 22 ci-dessous sont fondamentales et justifient le fait que les ensembles syndétiques par morceaux sont la notion dont nous avons besoin pour démontrer notre lemme de zéros.

Lemme 22. *Soit $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ un ensemble syndétique par morceaux, de borne B. On a les propriétés suivantes*

(i) *Si $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \subset \mathbb{N}$, alors $\mathcal{L}'$ est aussi syndétique par morceaux.*

(ii) *Si $\mathcal{L} \subset \cup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_i$, alors, au moins l'un des ensembles $\mathcal{L}_i$ est syndétique par morceaux.*

(iii) *Soit l_0 un entier naturel. L'ensemble*

$$\mathcal{L}_0 := \{l \in \mathcal{L} : (l + \{l_0, \ldots, l_0 + B\}) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset\}$$

est syndétique par morceaux.

(iv) *L'ensemble $\mathcal{L}$ contient des progressions arithmétiques de taille arbitrairement grande.*

1. En anglais, on dit « *thick* »

Démonstration. Le premier point découle immédiatement de la définition. Les points (ii) et (iv) sont des résultats classiques, connus respectivement sous les noms de *Lemme de Brown* (voir [37]) et *Théorème de Szemerédi* (voir [106]). Démontrons alors le point (iii). Soient l_0 et M deux entiers naturels. Soit a le plus petit entier tel que $aB \geq l_0$. Comme $\mathcal{L}$ est syndétique par morceaux, on peut trouver des éléments $l_1 < l_2 < \cdots < l_{(a+M)B}$ de $\mathcal{L}$ tels que $l_{i+1} - l_i < B$, pour chaque i, $1 \leq i < (a+M)B$. Prenons un entier i, $1 \leq i \leq M$, on a $l_{i+aB} \geq l_0$, donc il existe un entier $j \leq aB$ tel que $l_0 \leq l_{i+j} \leq l_0 + B$. Ainsi, $l_i \in \mathcal{L}_0$. Les nombres $l_1, \ldots, l_M$ appartiennent donc tous à l'ensemble $\mathcal{L}_0$ qui, par définition, est donc syndétique par morceaux. □

2.4 Lemme de zéros principal

En nous appuyant sur le théorème de Corvaja et Zannier, on est en mesure de démontrer le résultat suivant.

Théorème 17. *Soient $T_1, \ldots, T_r$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{N}$, dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants. Notons n_i la taille de la matrice T_i et posons $N := \sum_{i=1}^{r} n_i$. Soit $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ un point algébrique de $(\overline{\mathbb{Q}}^\star)^N$ tel que chacun des couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible. Soit $(\boldsymbol{k}_l := (k_{l,1}, \ldots, k_{l,r}))_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^r$ une suite de r-uplets d'entiers telle que*

$$\boldsymbol{k}_l - l\Theta = \mathcal{O}(1)\,. \tag{66}$$

Soit $g \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ une fonction analytique non nulle, dont les coefficients appartiennent tous à un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $L \subset \mathbb{C}$ de dimension finie. Alors l'ensemble

$$\left\{ l \in \mathbb{N} : g\left(T_1^{k_{l,1}}\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, T_r^{k_{l,r}}\boldsymbol{\alpha}_r\right) = 0 \right\}$$

n'est pas syndétique par morceaux.

On établit tout d'abord deux lemmes.

Lemme 23. *Sous les hypothèses du théorème 17, pour tout N-uplet non nul d'entiers $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^N$, l'ensemble*

$$\mathcal{L}_0 := \{ l \in \mathbb{N} : (T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}} = 1 \}$$

n'est pas syndétique par morceaux.

Démonstration. On raisonne par contradiction, en supposant que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ est syndétique par morceaux. Pour chaque paire d'entiers naturels (l, e), avec $e > 0$, on définit un r-uplet $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{e}(l, e) = (e_1, \ldots, e_r)$ par

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}_{l+e} - \boldsymbol{k}_l\,, \tag{67}$$

et on pose $\mathcal{E} := \{\boldsymbol{e}(l, e),\ l,\ e \in \mathbb{N}\}$. D'après (66), on a

$$\boldsymbol{e}(l, e) = e\Theta + \mathcal{O}(1)\,, \tag{68}$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini. Cependant, pour tout entier e_0, l'ensemble $\{\boldsymbol{e}(l, e_0) : \ l \in \mathbb{N}\}$ est fini.

Remarquons que pour toute paire (β_1, β_2) de nombres complexes non nuls, qui ne sont pas des racines de l'unité, et pour toute paire d'entiers (i, j), $1 \leq i < j \leq r$, l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_r) \in \mathcal{E}$ tels que $\beta_1^{e_i} = \beta_2^{e_j}$ est fini. En effet, l'ensemble des entiers u tels qu'il existe un entier v pour lequel $\beta_1^u = \beta_2^v$ est un idéal de $\mathbb{Z}$. Soit $u_0 \geq 0$ un générateur de cet idéal et $v_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_1^{u_0} = \beta_2^{v_0}$. Pour tout $(e_1, \ldots, e_r) \in \mathcal{E}_1$, il existe un entier a tel que $e_i = au_0$. On a alors,

$$\beta_2^{e_j} = \beta_1^{e_i} = \beta_1^{au_0} = \beta_2^{av_0} \, .$$

Comme β_2 n'est pas nul et n'est pas une racine de l'unité, on a $e_j = av_0$. On a donc $e_i/e_j = u_0/v_0 \in \mathbb{Q}$. Comme $e_i = k_{i,l+e} - k_{i,l}$ et $e_j = k_{j,l+e} - k_{j,l}$, on a

$$\frac{k_{j,l+e} - k_{j,l}}{k_{i,l+e} - k_{i,l}} \in \mathbb{Q} \, .$$

Comme $\mathcal{E}_1$ est infini, l'entier e peut être choisi arbitrairement grand. En le faisant tendre vers l'infini, d'après (68) on a $\log \rho(T_i)/\log \rho(T_j) \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit le fait que $\rho(T_i)$ et $\rho(T_j)$ sont multiplicativement indépendants.

Rappelons qu'aucune des valeurs propres des matrices T_i n'est égale à zéro ou à une racine de l'unité. Il existe donc un entier e_0 tel que, pour tout $e \geq e_0$, tout $l \in \mathbb{N}$, toute valeur propre λ_i de T_i et toute valeur propre λ_j de T_j, $i \neq j$, on a

$$\lambda_i^{e_i} \neq \lambda_j^{e_j} \, ,$$

où $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(l, e) = (e_1, \ldots, e_r) \in \mathcal{E}$. En particulier, pour un tel r-uplet $\boldsymbol{e}$, chaque sous-espace V de $\mathbb{C}^N$ qui est stable sous l'action de la matrice diagonale par blocs

$$T_{\boldsymbol{e}} := \operatorname{diag}\left(T_1^{e_1}, \cdots, T_r^{e_r}\right) \tag{69}$$

se décompose sous la forme

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \pi_i^{-1}(V_i) \, ,$$

où chaque $V_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$ est un sous-espace stable par $T_i^{e_i}$, et où $\pi_i : \mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{n_1 + \cdots + n_r} \to \mathbb{C}^{n_i}$ est la projection sur le bloc correspondant à la matrice T_i.

On peut alors prouver le lemme. Considérons le vecteur

$$\boldsymbol{x} := (\log \alpha_{1,1}, \log \alpha_{1,2}, \ldots, \log \alpha_{1,n_1}, \log \alpha_{2,1}, \ldots, \log \alpha_{r,n_r})^\top \, .$$

Par hypothèse, on a

$$\langle \boldsymbol{\mu} \, , \, T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x}) \rangle = 0 \, ,$$

pour tout $l \in \mathcal{L}_0$. Notons U l'orthogonal au vecteur $\boldsymbol{\mu}$ dans $\mathbb{C}^N$. C'est un espace propre $\mathbb{C}^N$, défini sur $\mathbb{Q}$, qui contient tous les vecteurs $T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x})$, $l \in \mathcal{L}_0$. Pour un ensemble $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_0$, on note $U(\mathcal{L}')$ le plus petit sous-espace de $\mathbb{C}^N$ défini sur $\mathbb{Q}$ et contenant tous les points $T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x})$, $l \in \mathcal{L}'$. On a, en particulier, $U(\mathcal{L}_0) \subset U$. De plus, si $\mathcal{L}'' \subset \mathcal{L}'$ alors, $U(\mathcal{L}'') \subset U(\mathcal{L}')$. Puisque l'espace $U(\mathcal{L}_0)$ est de dimension finie, il existe un ensemble syndétique par morceaux $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$ tel que, pour chaque ensemble syndétique par morceaux $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_1$, on a $U(\mathcal{L}') = U(\mathcal{L}_1)$. Soit B une borne pour l'ensemble syndétique par morceaux $\mathcal{L}_1$. Posons

$$\mathcal{E}_0 := \{\boldsymbol{e}(l, e) : e \in [e_0, e_0 + B], l \in \mathcal{L}_1, l + e \in \mathcal{L}_1\},$$

où e_0 est défini comme dans la première partie de la preuve. C'est un ensemble fini. Soit

$$\mathcal{L}_2 := \{l \in \mathcal{L}_1 : \exists e \in [e_0, e_0 + B] \text{ tel que } l + e \in \mathcal{L}_1\}.$$

D'après le lemme 22, l'ensemble $\mathcal{L}_2$ est syndétique par morceaux. Pour chaque $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_0$, on pose

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}} := \{l \in \mathcal{L}_2 : T_{\boldsymbol{e}}(T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x})) = T_{\boldsymbol{k}_{l+e}}(\boldsymbol{x}) \in U(\mathcal{L}_1) \text{ où } \boldsymbol{e} := \boldsymbol{e}(l, e)\}.$$

Pour chaque $l \in \mathcal{L}_2$, il existe un $e \in [e_0, e_0 + B]$ tel que $l \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$ où $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(l, e)$. On a donc l'inclusion $\mathcal{L}_2 \subset \cup_{\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_0} \mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$. Comme $\mathcal{L}_2$ est syndétique par morceaux, d'après le lemme 22 l'un des ensembles $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$, $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_0$, est syndétique par morceaux. De plus, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}} \subset \mathcal{L}_1$. Par définition de $\mathcal{L}_1$, on a donc

$$U(\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}) = U(\mathcal{L}_1).$$

L'ensemble $U(\mathcal{L}_1)$ est donc invariant par l'action de la matrice $T_{\boldsymbol{e}}$, puisque si $T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x}) \in U(\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}) = U(\mathcal{L}_1)$, alors $T_{\boldsymbol{e}}(T_{\boldsymbol{k}_l}(\boldsymbol{x})) \in U(\mathcal{L}_1)$. D'après la première partie de la preuve, on a une décomposition

$$U(\mathcal{L}_1) = \bigoplus_{i=1}^{r} \pi_i^{-1}(U_i),$$

où, pour chaque i, $U_i = \pi_i(U(\mathcal{L}_1)) \subset \mathbb{C}^{n_i}$ est un sous-espace invariant $T_i^{e_i}$. Comme $U(\mathcal{L}_1)$ est un sous-espace propre de $\mathbb{C}^N$, il existe un entier i, $1 \leq i \leq r$, tel que U_i est un sous-espace propre $\mathbb{C}^{n_i}$. Comme cet espace est défini sur $\mathbb{Q}$, il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{\nu}_0 \in \mathbb{Z}^{n_i}$ dans son orthogonal. On a donc

$$\left\langle \boldsymbol{\nu}_0 , T_i^{e_i k_{i,l}}(\boldsymbol{x}_i) \right\rangle = 0, \tag{70}$$

pour tout $l \in \mathcal{L}_1$, où $\boldsymbol{x}_i := \pi_i(\boldsymbol{x})$. D'après (66), l'ensemble $\mathcal{L}_2 := (e_i k_{i,l})_{l \in \mathcal{L}_1}$ est infini. Notons $\boldsymbol{\nu}_0 := \boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2$, avec $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2 \in \mathbb{N}^{n_i}$, et

$$g(\boldsymbol{z}_i) := \boldsymbol{z}_i^{\boldsymbol{\nu}_1} - \boldsymbol{z}_i^{\boldsymbol{\nu}_2}.$$

D'après (70), on a pour tout $k \in \mathcal{L}_2$.

$$g\left(T_i^k \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{\nu}_1 T_i^k} - \boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{\nu}_2 T_i^k} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{\nu}_0 T_i^k} - 1}{\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{\nu}_2 T_i^k}} = \frac{e^{\left\langle \boldsymbol{\nu}_0 T_i^k(\boldsymbol{x}_i)\right\rangle} - 1}{\boldsymbol{\alpha}_i^{\boldsymbol{\nu}_2 T_i^k}} = 0\,.$$

Cela contredit l'hypothèse (c) de la définition d'admissibilité pour le couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$. □

Lemme 24. *Sous les hypothèses du théorème 17, pour tout N-uplet non nul d'entiers $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^N$ et tout $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}^\star$, l'ensemble*

$$\mathcal{L}_0 := \{l \in \mathbb{N} : (T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}} = \gamma\}$$

n'est pas syndétique par morceaux.

Démonstration. Supposons au contraire que $\mathcal{L}_0$ soit syndétique par morceaux, de borne B. Posons

$$\mathcal{E} := \{\boldsymbol{e}(l,e) : l \in \mathcal{L}_0, l+e \in \mathcal{L}_0, e \leq B\}\,.$$

C'est un ensemble fini. Pour chaque $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}$, on pose

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}} := \left\{l \in \mathbb{N} : (T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}T_{\boldsymbol{e}}} = 1\right\}\,,$$

et

$$\mathcal{L}_1 := \{l \in \mathcal{L}_0 : \exists e \leq B \text{ tels que } l+e \in \mathcal{L}_0\}\,.$$

D'après le lemme 22, l'ensemble $\mathcal{L}_1$ est syndétique par morceaux. Pour chaque $l \in \mathcal{L}_1$, il existe un r-uplet $\boldsymbol{e} = e(l,e) \in \mathcal{E}$ tel que $e \leq B$ et $l+e \in \mathcal{L}_0$. On a donc

$$(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}T_{\boldsymbol{e}}} = \gamma/\gamma = 1\,.$$

et, par conséquent, $\mathcal{L}_1 \subset \cup_{\boldsymbol{e}\in\mathcal{E}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$. D'après le lemme 22, l'un des ensembles $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$, $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}$ est syndétique par morceaux. D'après le lemme 23, on a $\boldsymbol{\mu} - T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{\mu} = 0$ pour un tel $\boldsymbol{e}$, ce qui contredit le fait qu'aucune des matrices T_i ne possède de racines de l'unité parmi ses valeurs propres. L'ensemble $\mathcal{L}_0$ ne peut donc pas être syndétique par morceaux. □

On peut alors démontrer le théorème 17.

Démonstration du théorème 17. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension t du $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel L.

Supposons tout d'abord que $t = 1$. Alors, en divisant g par une constante, si nécessaire, on peut supposer sans perte de généralité que $g \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$. Posons

$$\mathcal{L}_0 := \{l \in \mathbb{N} : g(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\}\,.$$

Comme les points $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ sont admissibles, on peut appliquer le théorème CZ05 aux points $T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}$. Pour ce faire, on doit vérifier les trois conditions suivantes.

(i) Il existe un ensemble fini de valuations $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{Q}(\boldsymbol{\alpha})$, tel que les points $T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}$ sont des $\mathcal{S}$-unités.

(ii) La suite $(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})_{l\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(iii) On a $\log H(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O}(-\log\|T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}\|)$.

La condition (i) est automatiquement satisfaite. En effet, tout ensemble fini de nombres algébriques forme un ensemble de $\mathcal{S}$-unités pour un ensemble fini de valuations $\mathcal{S}$ bien choisi. Les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ sont donc des $\mathcal{S}$-unités, pour un certain ensemble fini $\mathcal{S}$, et il vient immédiatement que les nombres $T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}$ sont alors également des $\mathcal{S}$-unités.

Les couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ étant admissibles, on a $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{U}(T_i)$ pour chaque i et d'après le lemme 56, la suite $(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})_{l\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ce qui prouve que la condition (ii) est satisfaite.

Vérifions à présent la condition (iii). D'après le lemme 21 on a les estimations

$$||T_{\boldsymbol{k}_l}|| = \mathcal{O}(e^l), \quad \text{et} \quad \log||T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}|| \geq -ce^l\,,$$

où $c > 0$ est un réel. Or $\log H(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O}(||T_{\boldsymbol{k}_l}||)$. On a donc bien

$$\log H(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O}(e^l) = \mathcal{O}(-\log||T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}||)\,,$$

et la condition (iii) est satisfaite. D'après le théorème CZ05, il existe donc des N-uplets $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_s$ et des nombres algébriques $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, tels que

$$\mathcal{L}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_i$$

où

$$\mathcal{L}_i := \{l \in \mathbb{N} : (T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}_i} = \gamma_i\}\ .$$

D'après le lemme 24, aucun des ensembles $\mathcal{L}_i$ n'est syndétique par morceaux. Il découle du lemme 22 que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ n'est pas syndétique par morceaux. Cela termine la preuve du théorème quand $t = 1$.

Supposons à présent que $t \geq 2$ et que le théorème soit vrai dès que la dimension de L est strictement inférieure à t. Soit $a_1, \ldots, a_t$ une base de L sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On considère la décomposition

$$g(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{t} a_i g_i(\boldsymbol{z})\,,$$

où $g_i(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$, $1 \leq i \leq t$. Posons à présent $\mathcal{L}_0 := \{l \in \mathbb{N} : g(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$ et supposons que $\mathcal{L}_0$ soit syndétique par morceaux, de borne B. On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{\boldsymbol{e}(l, e) : l \in \mathcal{L}_0, l + e \in \mathcal{L}_0, e \leq B\}\,.$$

Pour chaque $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}$, on définit une série analytique

$$h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{z}) := \sum_{i=1}^{t-1} a_i(g_i(\boldsymbol{z})g_t(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) - g_i(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g_t(\boldsymbol{z}))\,.$$

On pose également $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}} := \{l \in \mathbb{N} : h_{\boldsymbol{e}}(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$ et

$$\mathcal{L}_1 := \{l \in \mathcal{L}_0 : \exists e \leq B \text{ tel que } l + e \in \mathcal{L}_0\}\,.$$

Alors, pour tout $l \in \mathcal{L}_1$, on a $h_{\boldsymbol{e}}(T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0$, pour l'un des $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}$. On a donc l'inclusion $\mathcal{L}_1 \subset \cup_{\boldsymbol{e}\in\mathcal{E}}\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$. Comme $\mathcal{L}_1$ est syndétique par morceaux et $\mathcal{E}$ est un ensemble fini, d'après le lemme 22 l'un des ensembles $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$, $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}$, est syndétique par morceaux. Par induction, on obtient $h_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{z}) = 0$ pour un tel $\boldsymbol{e}$. Comme les a_i sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants, on a

$$g_i(\boldsymbol{z})g_t(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) = g_i(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g_t(\boldsymbol{z})$$

pour tout i, $1 \leq i \leq t-1$. On utilise alors un résultat de Ku. Nishioka [89, Theorem 3.1] que nous rappelons ici. Si une série $h(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}((\boldsymbol{z}))$ satisfait à une équation de la forme $h(T\boldsymbol{z}) = ch(\boldsymbol{z}) + d$, avec $c, d \in \mathbb{C}$, pour une matrice inversible T, n'ayant aucune racine de l'unité comme valeur propre, alors $h \in \mathbb{C}$. La matrice $T_{\boldsymbol{e}}$ est inversible et n'a pas de racine de l'unité parmi ses valeurs propres. On peut donc appliquer le résultat de Ku. Nishioka aux séries $h_i(\boldsymbol{z}) = g_i(\boldsymbol{z})/g_t(\boldsymbol{z})$. On en déduit que, pour chaque i, $1 \leq i \leq t$, il existe un complexe $\gamma_i \in \mathbb{C}$ tel que $g_i(\boldsymbol{z}) = \gamma_i g_t(\boldsymbol{z})$. On a donc $g(\boldsymbol{z}) = ag_t(\boldsymbol{z})$ avec $a = \sum a_i\gamma_i$, ce qui correspond au cas $t = 1$. Dans ce cas, on a déjà prouvé que $\mathcal{L}_0$ ne peut être syndétique par morceaux, une contradiction. □

2.5 Lemme de zéros pour les polynômes multi-exponentiels

Notons

$$\begin{pmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} := A_i(\boldsymbol{z}_i) \begin{pmatrix} f_{i,1}(T_i\boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(T_i\boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix}. \tag{71.i}$$

chacun des r systèmes mahlériens du théorème 16. Comme les systèmes sont réguliers singuliers, chacune des matrices $A_i(\boldsymbol{z}_i)$ est conjuguée, via un changement de jauge méromorphe ramifié, à une matrice constante $B_i \in \mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}})$. Notons $\Gamma \subset \mathbb{C}^\star$ le groupe multiplicatif engendré par toutes les valeurs propres des matrices B_i. En itérant k fois le système (71.i), on obtient un système

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{z}_i) = A_{i,k}(\boldsymbol{z}_i)\boldsymbol{f}_i(T_i^k\boldsymbol{z}_i)\,,$$

où $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{z}_i)$ est le vecteur colonne formé des fonctions $f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i)$ et $A_{i,k}$ est la k-ième itération de la matrice A_i sous l'action de T_i, c'est-à-dire, la matrice

$$A_{i,k}(\boldsymbol{z}_i) := A_i(\boldsymbol{z}_i)A_i(T_i\boldsymbol{z}_i)\cdots A_i(T_i^{k-1}\boldsymbol{z}_i)\,.$$

Pour ce nouveau système, la matrice B_i est transformée en la matrice B_i^k. En itérant chacun des systèmes un nombre approprié de fois, on peut supposer que le groupe Γ est sans torsion. On note alors $\mathcal{R}_{\Gamma,r}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre engendrée par les applications de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N}^r & \to & \mathbb{Z}(\Gamma) \\ \boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_r) & \mapsto & \prod_{i=1}^r \left(\gamma_i^{k_i} k_i^{j_i}\right) \end{array}$$

où $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$ et $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{N}$. On appelle *polynômes* (Γ, r)-*exponentiels*, ou simplement *polynômes multi-exponentiels*, les éléments de $\mathcal{R}_{\Gamma,r}$. Étant donné $\mathcal{A}$ un anneau de caractéristique nulle, on définit la $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$ des polynômes (Γ, r)-exponentiels sur $\mathcal{A}$, par extension des scalaires à $\mathcal{A}$. De la même manière, pour tout $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $L \subset \mathbb{C}$, on définit $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des polynômes exponentiels, dont les coefficients sont des fonctions analytiques à coefficients de L.

Afin de pouvoir traiter les coefficients des matrices $A_{i,k}(\boldsymbol{z}_i)$, on a besoin d'un lemme de zéros plus général que le théorème 17, valable pour les polynômes multi-exponentiels.

Proposition 25. *Soient $T_1, \dots, T_r$ des matrices dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants, $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ des points tels que les couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ sont tous admissibles. Il existe un ensemble infini $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}^r$ restant à une distance bornée de la droite $\mathcal{R}_+\Theta$ et tel que, si $L \subset \mathbb{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie et $\psi \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ est tel que la suite $(\psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}))_{\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}}$ n'est pas nulle, alors $\psi(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ pour une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$.*

Pour chaque entier $s \leq r$, on note $\pi_s : \mathbb{Z}^r \mapsto \mathbb{Z}^s$ la projection sur les s premières coordonnées. On prouve tout d'abord la proposition 25 dans le cas où les inverses des log des rayons spectraux sont linéairement indépendants.

Lemme 26. *Soit s un entier tel que $1 \leq s \leq r$. Supposons que les nombres $1/\log \rho(T_1), \dots, 1/\log \rho(T_s)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Soient $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ un ensemble syndétique par morceaux et $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{k}_l : l \in \mathcal{L}\}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^r$ telle que*

$$\boldsymbol{k}_l = l\Theta + \mathcal{O}(1)\,.$$

Considérons un polynôme multi-exponentiel $\psi \in \mathcal{R}_{\Gamma,s} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ non nul. Alors, l'ensemble

$$\mathcal{L}_0 := \{l \in \mathcal{L} : \psi(\pi_s(\boldsymbol{k}_l), T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$$

n'est pas syndétique par morceaux.

Notre preuve du lemme 26 suit les grandes lignes de celle du lemme 3.3.1 dans [89]. Toutefois, le cadre dans lequel nous travaillons ici est plus général et nous avons besoin notamment d'introduire des ensembles syndétiques par morceaux. Cela rend la preuve du lemme 26 plus technique. Ainsi, lire en amont la preuve du lemme 3.3.1 de [89] permet de rendre la preuve que nous présentons ici, plus transparente.

Démonstration. Pour simplifier les notations, notons $\overline{\boldsymbol{k}} := \pi_s(\boldsymbol{k})$ pour $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^r$. On raisonne par l'absurde, en supposant que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ est syndétique par morceaux, de borne B. On écrit

$$\psi(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{\eta}_i^{\overline{\boldsymbol{k}}} \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq \delta_i} \overline{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\mu}} g_{i,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) \,, \tag{72}$$

où les r-uplets $\boldsymbol{\eta}_i = (\eta_{i,1}, \ldots, \eta_{i,s})$ sont tous distincts, $g_{i,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) \in L\{\boldsymbol{z}\}$, où q est minimal et où les nombres δ_i, $1 \leq i \leq q$ sont minimaux. La décomposition (72) est unique, à permutation près des indices (voir par exemple [60, Théorème 1]). Soit $\Delta(\psi)$ le cardinal de l'ensemble

$$\{(i, \boldsymbol{\mu}), 1 \leq i \leq q, \text{ tels que, soit } |\boldsymbol{\mu}| < \delta_i, \text{ soit } |\boldsymbol{\mu}| = \delta_i \text{ et } g_{i,\boldsymbol{\mu}} \neq 0\} \,.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $\delta_q \geq \delta_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$.

On raisonne alors par récurrence sur $\Delta(\psi)$. Si $\Delta(\psi) = 1$, alors $\psi(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\eta}^{\overline{\boldsymbol{k}}} g(\boldsymbol{z})$ et on déduit du théorème 17 une contradiction. On suppose alors que $\Delta(\psi) := \Delta > 1$ et que le lemme est vrai dès que $\Delta(\psi) < \Delta$. On peut supposer sans perte de généralité que $\boldsymbol{\eta}_q = (1, \ldots, 1)$. Soit $\boldsymbol{\nu}$ un s-uplet d'entiers positifs ou nuls tel que $|\boldsymbol{\nu}| = \delta_q$. On pose $g(z) := g_{q,\boldsymbol{\nu}}(z) \neq 0$. Pour chaque $\boldsymbol{e} \in \mathbb{N}^r$, on définit une application

$$\xi_{\boldsymbol{e}}(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) := \psi(\overline{\boldsymbol{k}} + \overline{\boldsymbol{e}}, T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) g(\boldsymbol{z}) - \psi(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) \,,$$

où, $T_{\boldsymbol{e}}$ est définie en (69). Alors $\xi_{\boldsymbol{e}}(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}_{\Gamma,s} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ et on a une décomposition de la forme

$$\xi_{\boldsymbol{e}}(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{q-1} \left(\boldsymbol{\eta}_i^{\overline{\boldsymbol{k}}} \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq \delta_i} \overline{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\mu}} h_{\boldsymbol{e},i,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) \right) + \sum_{|\boldsymbol{\mu}| \leq \delta_q,\, \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\nu}} \overline{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\mu}} h_{\boldsymbol{e},q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) \,,$$

où les $h_{\boldsymbol{e},i,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z})$ sans dans $L\{\boldsymbol{z}\}$. Par construction, $\Delta(\xi_{\boldsymbol{e}}) < \Delta(\psi)$ pour chaque $\boldsymbol{e}$. Posons

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}} := \{l \in \mathbb{N} : \xi_{\boldsymbol{e}}(\overline{\boldsymbol{k}}_l, T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\} \,.$$

Étant donné un entier $e_1 \geq B$, on note $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des entiers $l \in \mathcal{L}_0$ pour lesquels il existe un entier e, $e_1 \leq e \leq e_1 + B$ tel que $l + e \in \mathcal{L}_0$. D'après le lemme 22, l'ensemble $\mathcal{L}_1$ est syndétique par morceaux. Pour un tel couple

(l,e), on pose $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{e}(l,e) = \boldsymbol{k}_{l+e} - \boldsymbol{k}_l$ et on note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble (fini) des r-uplets $\boldsymbol{e}$ obtenus de cette façon. Pour chaque $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_1$, on a

$$\xi_{\boldsymbol{e}}(\overline{\boldsymbol{k}}_l, T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = \psi(\overline{\boldsymbol{k}}_{l+e}, T_{\boldsymbol{k}_{l+e}}\boldsymbol{\alpha})g(\boldsymbol{\alpha}) - \psi(\overline{\boldsymbol{k}}_l, T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha})g(T_{\boldsymbol{k}_{l+e}}\boldsymbol{\alpha}) = 0\,.$$

On a donc

$$\mathcal{L}_1 \subset \bigcup_{\boldsymbol{e}\in\mathcal{E}_1} \mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}\,.$$

D'après le lemme 22, il existe un $\boldsymbol{e}(l,e) \in \mathcal{E}_1$ tel que l'ensemble $\mathcal{L}_{\boldsymbol{e}}$ est syndétique par morceaux. Pour un tel $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(l,e)$, par hypothèse de récurrence, on a $\xi_{\boldsymbol{e}} \equiv 0$. Quand e_1 parcourt l'ensemble des entiers plus grands que B, on trouve une infinité de r-uplets $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(l,e)$ pour lesquels $\xi_{\boldsymbol{e}} \equiv 0$. Notons $\mathcal{E}_2$ cet ensemble infini. Pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_2$, on a donc $h_{\boldsymbol{e},i,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) = 0$ quels que soient les indices $(i,\boldsymbol{\mu})$. Si $\boldsymbol{\mu}$ est un s-uplet tel que $|\boldsymbol{\mu}| = \delta_q$, on trouve

$$0 = h_{\boldsymbol{e},q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) = g_{q,\boldsymbol{\mu}}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z}) - g_{q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z})g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})\,.$$

En divisant par $g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z})$, on a

$$\frac{g_{q,\boldsymbol{\mu}}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})}{g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})} = \frac{g_{q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z})}{g(\boldsymbol{z})}\,.$$

Comme la matrice $T_{\boldsymbol{e}}$ est inversible et n'a pas de racines de l'unité parmi ses valeurs propres, on peut appliquer le théorème 3.1 de [89]. Il existe donc un nombre complexe $\gamma_{\boldsymbol{\mu}}$ tel que

$$g_{q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) = \gamma_{\boldsymbol{\mu}} g(\boldsymbol{z})\,. \tag{73}$$

Remarquons, qu'en particulier, $\gamma_{\boldsymbol{\nu}} = 1$. Considérons à présent un s-uplet $\boldsymbol{\mu}_0$ tel que $\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{N}^s$ et $|\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\mu}_0| = 1$. On obtient

$$\begin{aligned}
0 &= h_{\boldsymbol{e},q,\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{z}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{\mu}_0} \overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_0} g_{q,\boldsymbol{\mu}}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z}) + g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z}) - g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{z})g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) \\
&= \left(\sum_{\boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{\mu}_0} \overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_0} \gamma_{\boldsymbol{\mu}}\right) g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z}) \\
&\qquad\qquad + g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z}) - g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{z})g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})\,.
\end{aligned}$$

En effet, si $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\mu}_0$ alors $|\boldsymbol{\mu}| = \delta_q$ et, d'après (73), on a $g_{q,\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{z}) = \gamma_{\boldsymbol{\mu}} g(\boldsymbol{z})$. En divisant par $g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z})$, on trouve

$$\frac{g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})}{g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})} = \frac{g_{q,\boldsymbol{\mu}_0}(\boldsymbol{z})}{g(\boldsymbol{z})} - \sum_{\boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{\mu}_0} \overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_0} \gamma_{\boldsymbol{\mu}}\,.$$

D'après [89, Theorem 3.1], on a donc

$$\sum_{\boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{\mu}_0} \overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}_0} \binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_0} \gamma_{\boldsymbol{\mu}} = 0\,. \tag{74}$$

Mais, si $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\mu}_0$, par hypothèse, $\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^s$. Ainsi, pour chaque $i \leq s$, il existe un unique s-uplet $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\mu}(i)$ tel que $\overline{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\mu}(i)-\boldsymbol{\mu}_0} = e_i$. Rappelons que $\overline{\boldsymbol{e}} = \overline{\boldsymbol{e}(l,e)} = \overline{\boldsymbol{k}}_{l+e} - \overline{\boldsymbol{k}}_l$, avec l et $l+e$ dans $\mathcal{L}_0$. Comme $\mathcal{E}_2$ est infini, il existe des $\boldsymbol{e}(l,e) \in \mathcal{E}_2$ pour des entiers e arbitrairement grands. Mais

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\overline{\boldsymbol{k}}_{l+e} - \overline{\boldsymbol{k}}_l}{e} = \left(\frac{1}{\log\rho(T_1)}, \dots, \frac{1}{\log\rho(T_s)}\right).$$

En divisant (74) par e et en prenant la limite quand e tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\log\rho(T_i)} \binom{\boldsymbol{\mu}(i)}{\boldsymbol{\mu}_0} \gamma_{\boldsymbol{\mu}(i)} = 0\,.$$

Comme, par hypothèse, les nombres $1/\log\rho(T_1), \dots, 1/\log\rho(T_s)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on a

$$\binom{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}_0} \gamma_{\boldsymbol{\mu}} = 0\,,$$

pour chaque $\boldsymbol{\mu}$. En prenant $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}$, on trouve $\delta_q = \binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\mu}_0} = 0$, puisque $\gamma_{\boldsymbol{\nu}} = 1$. Comme $\delta_q \geq \delta_i$ pour chaque i, on a $\delta_i = 0$, $1 \leq i \leq q$. On peut alors écrire

$$\psi(\overline{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{\eta}_i^{\overline{\boldsymbol{k}}} g_i(\boldsymbol{z})\,.$$

Pour $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_2$, on a donc

$$0 = h_{\boldsymbol{e},1,\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\eta}_1^{\overline{\boldsymbol{e}}} g_1(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z}) g(\boldsymbol{z}) - g_1(\boldsymbol{z}) g(T_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{z})\,.$$

Par minimalité de q, on a $g_1(\boldsymbol{z}) \neq 0$. Alors, d'après [89, Theorem 3.1], $\boldsymbol{\eta}_1^{\overline{\boldsymbol{e}}} = 1$ pour tout $\boldsymbol{e} \in \mathcal{E}_2$. En prenant le logarithme, pour toute paire (l,e) telle que $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(l,e) = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{E}_2$, on obtient

$$e_1 \log\eta_{1,1} + \cdots + e_s \log\eta_{1,s} = 0\,.$$

Supposons que le vecteur $(\log\eta_{1,1}, \dots, \log\eta_{1,s})$ soit non nul. Comme $\overline{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{N}^s$, il existe $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Z}^s$ tel que $e_1\mu_1 + \cdots + e_s\mu_s = 0$. En divisant par e et en faisant tendre e vers l'infini, on trouve

$$\frac{\mu_1}{\log\rho(T_1)} + \cdots + \frac{\mu_s}{\log\rho(T_s)} = 0\,,$$

une contradiction. On a donc $\log\eta_{1,1} = \cdots = \log\eta_{1,s} = 0$ et, comme, par hypothèse, le groupe Γ est sans torsion, on trouve $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, \dots, 1) = \boldsymbol{\eta}_q$, ce qui contredit la minimalité de q. □

Si on ne suppose plus que les nombres $1/\log\rho(T_1), \dots, 1/\log\rho(T_r)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, on ne peut plus prendre n'importe quel ensemble $\mathcal{K}$ à distance bornée de la demi-droite $\mathbb{R}_+\Theta$. On a besoin alors du lemme suivant pour choisir l'ensemble $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{k}_l,\ l \in \mathcal{L}\}$ de manière adéquate.

Lemme 27. *Soit $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_t \in \mathbb{Z}^r$ une base de l'orthogonal à Θ dans $\overline{\mathbb{Q}}^r$. Il existe un ensemble syndétique par morceaux $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$ et une suite de vecteurs $(\boldsymbol{k}_l)_{l\in\mathcal{L}} \in \mathbb{Z}^r$ orthogonaux à chacun des $\boldsymbol{\mu}_i$, $1 \le i \le t$, tels que*

$$\boldsymbol{k}_l = l\Theta + \mathcal{O}(1)\,. \tag{75}$$

Remarque 8. Si $t = 0$, c'est-à-dire, si les nombres $1/\log\rho(T_1), \dots, 1/\log\rho(T_r)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, la situation est simple et on peut prendre

$$\mathcal{K} = \left\{ \left(\left\lfloor \frac{l}{\log\rho(T_1)} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{l}{\log\rho(T_r)} \right\rfloor \right) : l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Comme $\log\rho(T_1)$ et $\log\rho(T_2)$ sont multiplicativement indépendants, cette condition est automatiquement satisfaite quand $r = 2$. Cependant, quand $r \ge 3$, démontrer l'indépendance linéaire des nombres

$$\frac{1}{\log\rho(T_1)}, \dots, \frac{1}{\log\rho(T_r)}\,,$$

est un problème diophantien difficile.

Démonstration du lemme 27. On part d'une suite $(\boldsymbol{k}_l^0)_{l\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\boldsymbol{k}_l^0 := \left(\left\lfloor \frac{l}{\log\rho(T_1)} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{l}{\log\rho(T_r)} \right\rfloor \right).$$

Comme $\boldsymbol{\mu}_1$ est orthogonal à Θ, le produit scalaire $\langle \boldsymbol{\mu}_1\,,\, \boldsymbol{k}_l^0 \rangle$ reste borné, quand l parcourt $\mathbb{N}$. D'après la propriété (ii) du lemme 22, il existe un entier c_1 tel que

$$\mathcal{L}_1 = \{l \in \mathbb{N} : \langle \boldsymbol{\mu}_1\,,\, \boldsymbol{k}_l \rangle = c_1\}$$

est syndétique par morceaux. Soit $\boldsymbol{\nu}_1 \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\langle \boldsymbol{\mu}_1\,,\, \boldsymbol{\nu}_1 \rangle = c_1$. Alors, pour tout $l \in \mathcal{L}_1$, le vecteur $\boldsymbol{k}_l^1 := \boldsymbol{k}_l^0 - \boldsymbol{\nu}_1$ est orthogonal à $\boldsymbol{\mu}_1$ et on a par ailleurs $\boldsymbol{k}_l^1 = l\Theta + \mathcal{O}(1)$.

Comme $\boldsymbol{\mu}_2$ est orthogonal à Θ, le produit scalaire $\langle \boldsymbol{\mu}_2\,,\, \boldsymbol{k}_l^1 \rangle$ est également borné, quand l parcourt $\mathcal{L}_1$. Il existe donc un entier c_2 pour lequel l'ensemble

$$\mathcal{L}_2 = \{l \in \mathcal{L}_1 : \langle \boldsymbol{\mu}_2\,,\, \boldsymbol{k}_l^1 \rangle = c_2\}$$

est syndétique par morceaux. Prenons un r-uplet $\boldsymbol{\nu}_2 \in \mathbb{Z}^r$ tel que $\langle \boldsymbol{\mu}_2\,,\, \boldsymbol{\nu}_2 \rangle = c_2$ et $\langle \boldsymbol{\mu}_1\,,\, \boldsymbol{\nu}_2 \rangle = 0$. On peut, par exemple, prendre $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{k}_{l_0}^1$ pour un $l_0 \in \mathcal{L}_2$. Alors, pour chaque $l \in \mathcal{L}_2$, le vecteur $\boldsymbol{k}_l^2 = \boldsymbol{k}_l^1 - \boldsymbol{\nu}_2$ est orthogonal à $\boldsymbol{\mu}_1$ et $\boldsymbol{\mu}_2$, et on a $\boldsymbol{k}_l^2 = l\Theta + \mathcal{O}(1)$.

En continuant ainsi, on trouve un ensemble syndétique par morceaux $\mathcal{L} := \mathcal{L}_t$ et une suite de vecteurs $(\boldsymbol{k}_l^t)_{l\in\mathcal{L}} := (\boldsymbol{k}_l)_{l\in\mathcal{L}}$ avec les bonnes propriétés. □

Fixons $\mathcal{L}$ et $(\boldsymbol{k}_l)_{l\in\mathcal{L}} \subset \mathbb{N}^r$ comme dans le lemme 27. On peut à présent démontrer la proposition 25.

Démonstration de la proposition 25. Posons $s := r - t$. Sans perte de généralité, on peut supposer que les nombres $1/\log\rho(T_1), \dots, 1/\log\rho(T_s)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. On définit la matrice

$$S := \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \boldsymbol{\mu}_1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \boldsymbol{\mu}_t & & & \end{array}\right).$$

Par hypothèse, S est inversible et à coefficients entiers. Par construction, on a $S\boldsymbol{k}_l = (k_{l,1}, \dots, k_{l,s}, 0, \dots, 0)$ pour tout $l \in \mathcal{L}$. Soit $\psi \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$. Notons E l'application de $\mathbb{Z}^s$ dans $\mathbb{Z}^r$ définie par $E(k_1, \dots, k_s) = (k_1, \dots, k_s, 0 \dots, 0)$. On définit une application $\overline{\psi}$ de $\mathbb{Z}^s$ dans $L\{\boldsymbol{z}\}$ en posant

$$\overline{\psi}((k_1, \dots, k_s), \boldsymbol{z}) = \psi(S^{-1}E(k_1, \dots, k_s), \boldsymbol{z}).$$

Le vecteur $S^{-1}E(k_1, \dots, k_s)$ pourrait avoir des coefficients rationnels, mais avec des dénominateurs bornés, par un certain entier d. Comme $\psi \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$, on peut l'étendre sans problèmes à $\mathbb{Q}^r$. L'application $\overline{\psi}$ est donc bien définie et appartient à $\mathcal{R}_{\Gamma',s} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, où Γ' est un groupe sans torsion tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout entier $a \leq d$, il existe un $\eta \in \Gamma'$ tel que $\eta^a = \gamma$. Pour tout $l \in \mathcal{L}$, on a $E(\overline{\boldsymbol{k}_l}) = S\boldsymbol{k}_l$ et donc

$$\overline{\psi}(\overline{\boldsymbol{k}}_l, \boldsymbol{z}) = \psi(\boldsymbol{k}_l, \boldsymbol{z}). \tag{76}$$

Maintenant, si $\psi(\boldsymbol{k}_l, T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0$ pour tout $l \in \mathcal{L}$, sauf éventuellement un nombre fini, d'après (76) l'ensemble

$$\mathcal{L}_0 = \{l \in \mathcal{L} : \overline{\psi}(\overline{\boldsymbol{k}}_l, T_{\boldsymbol{k}_l}\boldsymbol{\alpha}) = 0\}$$

est syndétique par morceaux. Comme $\overline{\psi} \in \mathcal{R}_{\Gamma',s} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, d'après le lemme 26 on a $\overline{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^s$ et, en particulier, $\overline{\psi}(\overline{\boldsymbol{k}}_l, \boldsymbol{z}) = 0$ pour tout $l \in \mathcal{L}$. D'après (76), on a $\psi(\boldsymbol{k}_l, \boldsymbol{z}) = 0$, pour tout $l \in \mathcal{L}$. □

3 Démonstration du théorème 16

Notre preuve du théorème 16 suit la même stratégie que la preuve du théorème principal dans [67]. Cependant, la preuve du lemme 5 de [67] est incomplète et il n'est pas clair que l'*indice* défini par les auteurs de [67] ait les propriétés multiplicatives requises. Ce manque a déjà été souligné par Ku. Nishioka [85] et nous l'avons mentionné au chapitre I. Notre preuve permet de surmonter cette difficulté.

Tout d'abord, supposons que pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, la matrice $A_i(\boldsymbol{z}_i)$ soit conjuguée à une matrice inversible constante, par un changement de jauge analytique. On suppose donc que, pour chaque entier i, $1 \leq i \leq r$, il existe une matrice $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i) \in \mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_i\})$ telle que

$$\Phi_i(\boldsymbol{z}_i)^{-1} A_i(\boldsymbol{z}_i) \Phi_i(T_i \boldsymbol{z}_i) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}})\,. \tag{77.i}$$

Commençons par démontrer le théorème 16 dans ce cas. Dans la sous-section 3.8 nous expliquerons comment la preuve s'étend au cas général.

Tout au long de la preuve, on fixe $\mathcal{K}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}^r$ satisfaisant aux propriétés de la proposition 25. On note $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ le vecteur colonne formé de toutes les fonctions $f_{i,j}(\boldsymbol{z}_i)$ et, pour $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r)$, on note $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ la matrice diagonale par blocs, formées des matrices $A_{1,k_1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, A_{r,k_r}(\boldsymbol{z}_r)$. On peut écrire de manière compacte

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{f}(T_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z})\,. \tag{78}$$

On considère le vecteur $\boldsymbol{X} := (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_r)$, où $\boldsymbol{X}_i = (X_{i,1}, \ldots, X_{i,m_i})$ et on pose $M := \sum m_i$. Supposons que le polynôme $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$ soit homogène de degré d_i en chacune des familles $\boldsymbol{X}_i$. Notons s le nombre de monômes de degré d_i en $\boldsymbol{X}_i$, pour chaque i, et énumérons $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\mu}_1}, \ldots, \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\mu}_s}$ ces monômes, où les $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_s$ sont des M-uplets d'entiers positifs ou nuls. On décompose $P(\boldsymbol{X})$ de la façon suivante

$$P(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{s} \tau_j \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\mu}_j}\,,$$

avec $\tau_j \in \overline{\mathbb{Q}}$. Posons $\boldsymbol{\tau} := (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ et, étant données s indéterminées $t_1, \ldots, t_s$, $\boldsymbol{t} := (t_1, \ldots, t_s)$. On définit

$$F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) := \sum_{j=1}^{s} t_j \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\mu}_j}\,, \tag{79}$$

une forme linéaire en $\boldsymbol{t}$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$. Par hypothèse, on a

$$F(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) = 0\,. \tag{80}$$

3.1 Relations itérées

Pour $1 \leq i \leq r$, on note Z_i une matrice de taille m_i à coefficient dans un anneau $\mathcal{A}$ et on note Z la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(Z_1, \ldots, Z_r)$. Notons $Z(\boldsymbol{X})$ la multiplication entre la matrice Z et le vecteur colonne $\boldsymbol{X}$. Pour chaque j, $(Z(\boldsymbol{X}))^{\boldsymbol{\mu}_j} \in \mathcal{A}[\boldsymbol{X}]$ est un polynôme homogène de degré d_i en chacune des familles de variables $\boldsymbol{X}_i$. On définit $R_{j,l}(Z)$, des éléments $\mathcal{A}$, par

$$(Z(\boldsymbol{X}))^{\boldsymbol{\mu}_j} = \sum_{l=1}^{s} R_{j,l}(Z)\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\mu}_l}\,.$$

Pour chaque couple (j,l), $R_{j,l}$ est un polynôme de degré $d := \max\{d_1, \ldots, d_r\}$ en les coefficients de la matrice Z. Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$, d'après (78) et (79), on a

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) &= \sum_{j=1}^{s} t_j \left(A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{f}(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z})\right)^{\boldsymbol{\mu}_j} \\ &= F\left(\left(\sum_{j=1}^{s} t_j R_{j,l}\left(A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})\right)\right)_{l\leq s}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z}\right)\,. \end{aligned}$$

Posons

$$\tau_{l,\boldsymbol{k}} := \sum_{j=1}^{s} \tau_j R_{j,l}\left(A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\alpha})\right) \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ et } \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}} := (\tau_{1,\boldsymbol{k}}, \ldots, \tau_{s,\boldsymbol{k}})\,. \tag{81}$$

D'après (80) on a

$$F(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0\,,\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r\,. \tag{82}$$

3.2 Structure des nombres $\tau_{j,\boldsymbol{k}}$

C'est dans cette partie que l'on utilise essentiellement la restriction aux systèmes réguliers singuliers. Elle permet d'obtenir les nombres $\tau_{j,\boldsymbol{k}}$ comme valeurs en $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ de polynômes multi-exponentiels.

Lemme 28. *Pour chaque j, $1 \leq j \leq s$, il existe un polynôme multi-exponentiel $\psi_j \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ tel que*

$$\tau_{j,\boldsymbol{k}} = \psi_j(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})\,,$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. Par ailleurs, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel L_0 tel que, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$ et tout j, $1 \leq j \leq s$, les coefficients de $\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$ appartiennent à L_0.

D'après (77.*i*), pour tout i, $1 \leq i \leq r$, il existe une matrice $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i) \in \mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_i\})$ et une matrice $B_i \in \mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}})$ telles que

$$B_i = \Phi_i(\boldsymbol{z}_i)^{-1} A_i(\boldsymbol{z}_i)\Phi_i(T_i\boldsymbol{z}_i)\,.$$

En itérant l'équation, on obtient

$$B_i^k = \Phi_i(\boldsymbol{z}_i)^{-1} A_{i,k}(\boldsymbol{z}_i)\Phi_i(T_i^k \boldsymbol{z}_i)\,,$$

d'où l'on tire

$$A_{i,k}(\boldsymbol{z}_i) = \Phi_i(\boldsymbol{z}_i) B_i^k \Phi_i^{-1}(T_i^k \boldsymbol{z}_i)\,.$$

Étant donné un r-uplet d'entiers, $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r)$, on écrit alors

$$A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \Phi(\boldsymbol{z}) B_{\boldsymbol{k}} \Phi(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z})^{-1}\,,$$

où $\Phi(\boldsymbol{z}) := \operatorname{diag}\left(\Phi_1(\boldsymbol{z}_1), \cdots, \Phi_r(\boldsymbol{z}_r)\right)$ et $B_{\boldsymbol{k}} := \operatorname{diag}\left(B_1^{k_1}, \cdots, B_r^{k_r}\right)$ sont des matrices diagonales par blocs.

Lemme 29. *Pour tout r-uplet $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$, la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie et inversible au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$.*

Démonstration. Par hypothèse, $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie et inversible dans un voisinage de l'origine. Les conditions d'admissibilité garantissent donc que, pour $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, suffisamment grand, la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$. Par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$, on a

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})\Phi(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z})B_{\boldsymbol{k}}^{-1} \tag{83}$$

et comme les points $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ sont réguliers pour leurs systèmes respectifs, la matrice $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ est définie et inversible au point $\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. En regardant (83) pour $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ assez grand, on obtient que la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie au point $\boldsymbol{\alpha}$. En inversant (83), on trouve

$$\Phi(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{z}) = A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})^{-1}\Phi(\boldsymbol{z})B_{\boldsymbol{k}}\,, \tag{84}$$

et comme $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ est inversible en $\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$, on voit que $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie en $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$.

Par hypothèse, $\det \Phi(\boldsymbol{z}) \neq 0$. D'après le théorème 17, il existe un $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$ tel que $\det \Phi(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$. D'après (83), la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est inversible en $\boldsymbol{\alpha}$. D'après (84), la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est inversible en $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. □

Démonstration du lemme 28. D'après le lemme 29, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$ la matrice

$$B(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) := \Phi(\boldsymbol{\alpha})B_{\boldsymbol{k}}\Phi(\boldsymbol{z})^{-1}$$

est une matrice diagonale par bloc, définie au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$, et on a

$$B(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{85}$$

Pour $1 \leq l \leq s$, posons

$$\psi_l(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) := \sum_{j=1}^{s} \tau_j R_{j,l}\left(B(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})\right)\,, \tag{86}$$

où les polynômes $R_{j,l}$ sont définis en (81). D'après (81), (85) et (86), on a

$$\psi_l(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = \tau_{l,\boldsymbol{k}}\,.$$

En utilisant la décomposition de Jordan des matrices B_i, on voit que les applications $\boldsymbol{k} \mapsto \psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$, $1 \le j \le s$, appartiennent à $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{L}$, où

$$\mathbb{L} := \mathbb{C}\,(\boldsymbol{z}, \Phi(\boldsymbol{z}))$$

est le corps engendré sur $\mathbb{C}$ par les indéterminées $\boldsymbol{z}$ et les coefficients de la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ et Γ est le groupe engendré par les valeurs propres des matrices B_i, supposé sans torsion. Par ailleurs, les séries $\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$ sont analytiques et ont leurs coefficients dans le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie L_0 engendré par les monômes de degré au plus d en les coefficients de la matrice $\Phi(\boldsymbol{\alpha})$. □

Par la suite, nous utiliserons la notation compacte

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) := (\psi_1(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \ldots, \psi_s(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}))\,.$$

3.3 Valuations

Cette partie de la preuve est nouvelle par rapport à la stratégie de [67]. Dans [67], les auteurs définissent l'*indice* d'un élément de $E \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}][[\boldsymbol{z}]]$ comme étant le plus petit entier h pour lequel il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]$ dont les coefficients coïncident avec ceux de E pour tous les monômes $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\mu}}$, avec $|\boldsymbol{\mu}| \le h$, et tel que $P(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. Le lemme 5 de [67] affirme que

$$\text{indice}\,(E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})) = \text{indice}\;E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) + \text{indice}\;E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})\,,$$

pour tout $E_1, E_2 \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}][[\boldsymbol{z}]]$. En particulier, l'inégalité

$$\text{indice}\,(E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})) \le \text{indice}\;E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) + \text{indice}\;E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})\,,$$

est un ingrédient clé de la preuve de [67]. Il n'est toutefois pas clair que quelque chose, même s'approchant de cela, soit vrai. Il semblerait que les auteurs aient fait l'erreur suivante. Ils affirment que si $P_1(\boldsymbol{z})$ est une approximation polynomiale de $E_1(\boldsymbol{z})$ à l'ordre r_1 et $P_2(\boldsymbol{z})$ est une approximation polynomiale de $E_2(\boldsymbol{z})$ à l'ordre r_2, le polynôme $P_1(\boldsymbol{z})P_2(\boldsymbol{z})$ est une approximation polynomial de $E_1(\boldsymbol{z})E_2(\boldsymbol{z})$ à l'ordre $r_1 + r_2$. Ce n'est clairement pas le cas. Bien sûr on peut montrer que

$$\text{indice}\,(E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})) \ge \min\{\text{indice}\;E_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}), \text{indice}\;E_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})\}$$

Mais ce n'est pas l'inégalité qui sert dans le reste de la preuve. Afin de surmonter cette difficulté, nous allons travailler avec des valuations sur le corps $\mathbb{L}$.

3.3.1 L'anneau $\mathcal{A}$

Remarquons que $\mathbb{L}$ a un degré de transcendance fini sur $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$, disons ℓ. Parmi les coefficients de la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$, on peut choisir $\phi_1(\boldsymbol{z}), \ldots, \phi_\ell(\boldsymbol{z})$, des fonctions algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$. Le lemme 29 nous assure que les fonctions $\phi_i(\boldsymbol{z})$ sont définies aux points $T^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. Le corps $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell)$, de degré, disons d_0. Soit φ un élément primitif de $\mathbb{L}$, c'est-à-dire, tel que φ engendre $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{C}(\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell)$. En multipliant φ par un élément de $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell]$ si nécessaire, on peut supposer que φ est entier sur l'anneau $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell]$. L'anneau

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell][\varphi]$$

est donc un $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell]$-module libre, engendré par $1, \varphi, \ldots, \varphi^{d_0-1}$. C'est également un sous-anneau de $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$. D'après le lemme 29, la série $\varphi(\boldsymbol{z})$ est définie aux points $T^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$.

3.3.2 Valuations sur le corps $\mathbb{L}$

Soient $\mathbb{K}$ la clôture algébrique de $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$ dans $\mathbb{L}$ et $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cap \mathbb{K}$. On a une tour d'extensions d'anneaux

$$\mathbb{C}[\boldsymbol{z}] \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}[\phi_1, \ldots, \phi_\ell] \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}\,,$$

dont les corps de fractions forment une tour d'extensions de corps

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{z}) \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{K}(\phi_1, \ldots, \phi_\ell) \subset \mathbb{L} \subset \mathrm{Frac}(\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\})\,.$$

Chaque élément de $\mathcal{R}$ est un élément de $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$. Définissons une application $\nu : \mathcal{R} \to \mathbb{N} \cup \infty$ en posant

$$\nu\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} a_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}}\right) := \min\left\{|\boldsymbol{\lambda}| \ : \ a_{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0\right\}\,,$$

dès que $\sum_{\boldsymbol{\lambda}} a_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{R}$. On vérifie facilement que cela forme une valuation sur $\mathcal{R}$.

Soit $P(\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell) \in \mathcal{R}[\phi_1, \ldots, \phi_\ell]$. Les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_\ell$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$ et donc également sur $\mathcal{R}$. On peut donc écrire de manière unique

$$P(\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell) = \sum_{\boldsymbol{\kappa}} p_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{z}) \phi_1^{\kappa_1} \cdots \phi_\ell^{\kappa_\ell}\,,$$

où $p_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}$ pour chaque $\boldsymbol{\kappa} := (\kappa_1, \ldots, \kappa_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$. La valuation ν s'étend alors à l'anneau $\mathcal{R}[\phi_1, \ldots, \phi_\ell]$, en posant

$$\nu\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}} p_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{z}) \phi_1^{\kappa_1} \cdots \phi_\ell^{\kappa_\ell}\right) = \min_{\boldsymbol{\kappa}}\left\{\nu(p_{\boldsymbol{\kappa}})\right\}\,.$$

On l'étend également au corps des fractions $\mathbb{K}(\phi_1, \ldots, \phi_\ell)$.

Le corps $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}(\phi_1, \ldots, \phi_\ell)$ de degré, disons, $d_1 \leq d_0$. Les valuations sur $\mathbb{L}$ qui prolongent ν forment un ensemble fini $\{\nu_1, \ldots, \nu_h\}$, $h \geq 1$.

3.3.3 Valuations sur l'anneau $\mathcal{A}$

Le lemme suivant montre qu'un élément de $\mathcal{A}$ de grande valuation pour chacune des ν_i, appartient à une grande puissance de l'idéal $(\boldsymbol{z})_{\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}}$ engendré par $z_{1,1}, \ldots, z_{r,n_r}$ dans $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$.

Lemme 30. *Il existe un réel $c \geq 0$ tel que, pour tout $P \in \mathcal{A}$,*

$$P \in (\boldsymbol{z})_{\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}}^{\max\{v-c,0\}},$$

où $v := \min\{\nu_1(P), \ldots, \nu_h(P)\}$.

C'est une conséquence du lemme ci-dessous, sur les corps valués. Rappelons qu'étant donné un corps $\mathbb{F}$ muni d'une valuation μ, le groupe de valuations de $\mathbb{F}$ est l'image de $\mathbb{F}$ par μ.

Lemme 31. *Soit $\mathbb{F}$ un corps valué, de valuation μ et dont le groupe de valuations est $\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{F}_1$ une extension finie de $\mathbb{F}$ de degré δ. Notons $\{\mu_1, \ldots, \mu_t\}$ l'ensemble des valuations de $\mathbb{F}_1$, qui étendent la valuation μ. Soit $\eta_1, \ldots, \eta_\delta$ une base du $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\mathbb{F}_1$. Il existe un réel $c \geq 0$ tel que, pour tout $a_1, \ldots, a_\delta \in \mathbb{F}$, on a*

$$\min\{\mu(a_1), \ldots, \mu(a_\delta)\} \geq -c + \min\{\mu_1(a), \ldots, \mu_t(a)\},$$

où $a := \sum_{i=1}^{\delta} a_i \eta_i \in \mathbb{F}_1$.

Démonstration. La preuve se déroule en quatre étapes. Tout d'abord, nous verrons qu'il suffit de montrer le lemme pour une base en particulier. Nous démontrerons ensuite le lemme quand la valuation μ s'étend de manière unique à $\mathbb{F}_1$, tout d'abord quand le groupe de valuations de $\mathbb{F}_1$ est $\mathbb{Z}$ puis quand le groupe de valuations est quelconque. Nous démontrerons enfin le lemme dans le cas général.

Supposons que la conclusion du lemme 31 soit satisfaite pour une base $\eta_1, \ldots, \eta_\delta$ de $\mathbb{F}_1$. Considérons $\theta_1, \ldots, \theta_\delta$ une autre base. On a donc deux décompositions

$$a =: \sum_{i=1}^{\delta} a_i \eta_i = \sum_{i=1}^{\delta} b_i \theta_i \in \mathbb{F}_1$$

où $a_1, \ldots, a_\delta, b_1, \ldots, b_\delta \in \mathbb{F}$. Posons $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_\delta)^\top$ et $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_\delta)^\top$. Soit W la matrice à coefficients dans $\mathbb{F}$ telle que

$$(\eta_1, \ldots, \eta_\delta) = (\theta_1, \ldots, \theta_\delta) W .$$

On a

$$\mathbf{b} = W\mathbf{a}\,.$$

Alors, $\mu(\mathbf{b}) \geq \mu(W) + \mu(\mathbf{a})$ et le lemme est vrai pour la base $\theta_1, \ldots, \theta_\delta$, quand c est remplacé par $\mu(W) + c$.

Supposons que $\mathbb{F}_1$ ne possède qu'une valuation qui étende μ et que le groupe de valuations de $\mathbb{F}_1$ soit $\mathbb{Z}$. Dans ce cas, le lemme découle immédiatement de [59, Chap. XII, Cor. 6.3, p. 490] et de [98, Lemma 17, p. 20], avec $c := 0$.

Supposons maintenant que $\mathbb{F}_1$ ne possède qu'une valuation qui étende μ, mais que le groupe de valuations de $\mathbb{F}_1$ soit d'ordre e sur $\mathbb{Z}$. Notons encore μ l'unique prolongement de la valuation à $\mathbb{F}_1$ et posons $\mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}} := \mu^{-1}(\mathbb{Z})$. D'après [59, Chap. XII, Cor. 6.3, p. 490], $\mathbb{F}_1$ est une extension de $\mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}}$ de degré e. Soit θ un élément de $\mathbb{F}_1$, dont la valuation $\mu(\theta)$ est de degré e sur $\mathbb{Z}$. Alors, $1, \theta, \ldots, \theta^{e-1}$ est une base de $\mathbb{F}_1$ en tant que $\mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}}$-espace vectoriel. On peut donc écrire

$$a := \sum_{i=0}^{e-1} b_i \theta^i\,,$$

avec $b_0, \ldots, b_{e-1} \in \mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}}$. Comme aucun des nombres $b_i\theta^i$ n'a la même valuation, on a

$$\mu(a) = \min_i\{\mu(b_i\theta^i)\} = \min_i\{\mu(b_i) + i\mu(\theta)\}$$

Alors $\mu(b_i) \geq \mu(a) - i\mu(\theta)$ pour tout i, $0 \leq i \leq e-1$. Comme $\mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}}$ est une extension de $\mathbb{F}$ dont le groupe de valuations est $\mathbb{Z}$, on peut appliquer la première partie de la preuve aux éléments $b_0, \ldots, b_{e-1} \in \mathbb{F}_1^{\mathbb{Z}}$, terminant la preuve du lemme dans ce cas.

On peut à présent considérer le cas général. Soit G le groupe de Galois de $\mathbb{F}_1$ sur $\mathbb{F}$. Posons $\mathbb{F}_1^G$ le corps formé des éléments de $\mathbb{F}_1$ invariants sous l'action de G. Alors, le groupe de Galois de $\mathbb{F}_1^G$ sur $\mathbb{F}$, est trivial. Comme d'après [59, Chap. XII, Cor. 4.10, p. 485], le groupe de Galois d'une extension séparable agit transitivement sur les valuations qui prolongent celles du corps de base, la valuation μ se prolonge de manière unique à $\mathbb{F}_1^G$. On la notera encore μ. D'après le lemme d'Artin (voir par exemple [59, Chap. VI, Theorem 1.8, p. 264]), $\mathbb{F}_1$ est une extension galoisienne de $\mathbb{F}_1^G$, de degré, disons, δ_1. Le groupe G agit transitivement sur l'ensemble de valuations $\{\mu_1, \ldots, \mu_t\}$. Soit θ un élément primitif de $\mathbb{F}_1$ sur le corps $\mathbb{F}_1^G$ et soient $\sigma_1 := \mathrm{Id}, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\delta_1} \in G$, tels que les nombres $\sigma_1(\theta), \ldots, \sigma_{\delta_1}(\theta)$ sont tous distincts (c'est possible puisque l'extension est galoisienne de degré δ_1 et donc séparable). Écrivons

$$a =: \sum_{i=0}^{\delta_1-1} b_i \theta^i\,,$$

avec $b_0, \ldots, b_{\delta_1 - 1} \in \mathbb{F}_1^G$. Pour chaque i, $1 \leq i \leq t$, et chaque j, $1 \leq j \leq \delta_1$, on a,

$$\mu_i(\sigma_j(a)) \geq \min_k \{\mu_k(a)\}\,.$$

Notons alors $\boldsymbol{a} := (\sigma_1(a), \ldots, \sigma_{\delta_1}(a))^\top$ et $\mathbf{b} := (b_0, \ldots, b_{\delta_1 - 1})^\top$. On peut écrire

$$\boldsymbol{a} = V\mathbf{b}\,,$$

où V, est la matrice de Vandermonde

$$V := \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1(\theta) & \cdots & \sigma_1(\theta)^{\delta_1 - 1} \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & \sigma_{\delta_1}(\theta) & \cdots & \sigma_{\delta_1}(\theta)^{\delta_1 - 1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de V est non nul et la matrice V est donc inversible. On peut donc trouver des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{\delta_1} \in \mathbb{F}_1^{\delta_1}$, tels que

$$\boldsymbol{v}_i V = \boldsymbol{e}_i\,,$$

le i-ième vecteur de la base canonique. On a alors

$$\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}_i V \mathbf{b} = \boldsymbol{e}_i \mathbf{b} = b_{i-1}\,.$$

Posons à présent

$$c = -\min\{\mu_j(\boldsymbol{v}_i),\, 1 \leq j \leq s,\, 1 \leq i \leq \delta_1\}\,,$$

alors, pour toute paire (i, j), on a

$$\mu(b_{i-1}) = \mu_j(\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{a}) \geq \mu_j(\boldsymbol{v}_i) + \mu_j(\boldsymbol{a}) \geq \min_k \{\mu_k(a)\} - c\,.$$

Comme le corps $\mathbb{F}_1^G$ est une extension de $\mathbb{F}$ pour laquelle la valuation μ se prolonge de manière unique, on peut appliquer la partie précédente de la preuve aux b_i. Cela termine la preuve. □

Démonstration du lemme 30. On décompose

$$P := \sum_{j=0}^{\delta_1 - 1} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} p_{\boldsymbol{\kappa}, j} \phi_1^{\kappa_1} \cdots \phi_\ell^{\kappa_\ell} \varphi^j\,,$$

où $p_{\boldsymbol{\kappa}, j} \in \mathcal{R}$. D'après le lemme 31, on peut trouver un réel $c \geq 0$ tel que

$$\nu\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}} p_{\boldsymbol{\kappa}, j} \phi_1^{\kappa_1} \cdots \phi_\ell^{\kappa_\ell}\right) \geq v - c\,,$$

où $v := \min\{\nu_1(P), \ldots, \nu_h(P)\}$, pour tout j, $0 \leq j \leq \delta_1 - 1$. Alors, par construction de ν sur le corps $\mathbb{K}(\phi_1, \ldots, \phi_\ell)$ on a pour toute paire $(\boldsymbol{\kappa}, j)$,

$$\nu(p_{\boldsymbol{\kappa}, j}) \geq v - c\,.$$

La définition de ν sur $\mathcal{R}$ implique que

$$p_{\boldsymbol{\kappa},j} \in (\boldsymbol{z})^{\max\{v-c,0\}}_{\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}} .$$

Comme les fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_\ell, \varphi$ sont des éléments de $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, on a la conclusion souhaitée. □

Le lemme 33 ci-dessous s'intéresse maintenant à la décomposition sur $\mathcal{R}$ des éléments de $\mathcal{A}$ qui ne sont grands que pour l'une des valuations. On a tout d'abord besoin d'un résultat basique sur les corps résiduels. Rappelons que le corps résiduel, noté $\overline{\mathbb{F}}^{\mu}$, d'une valuation μ sur un corps $\mathbb{F}$ est le corps obtenu en faisant le quotient de l'anneau de valuation $\mathcal{O} := \{\theta \in \mathbb{F} \ : \ \mu(\theta) \geq 0\}$ par son unique idéal maximal $\mathfrak{m} := \{\theta \in \mathbb{F} \ : \ \mu(\theta) > 0\}$.

Lemme 32. *Soient $\mathbb{F}$ un corps et $\mathbb{F}_1$ une extension de corps, de degré de transcendance t, équipée d'une valuation μ. Alors, le degré de transcendance du corps résiduel $\overline{\mathbb{F}_1}^{\mu}$ sur le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}^{\mu}$ est inférieur ou égal à t.*

Démonstration. Supposons que le degré de transcendance de $\overline{\mathbb{F}_1}^{\mu}$ sur $\overline{\mathbb{F}}^{\mu}$ soit strictement supérieur à t. Prenons $t+1$ éléments $\theta_1, \ldots, \theta_{t+1}$ dans $\mathbb{F}_1$, dont les images $\overline{\mathbb{F}_1}^{\mu}$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{F}}^{\mu}$. Alors, d'après [98, Lemma 17, p. 20] [2], pour tout entier S, les nombres

$$\prod_{i=1}^{t+1} \theta_i^{s_i}, \quad 0 \leq s_1, \ldots, s_{t+1} \leq S \, ,$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{F}$. Cela contredit le fait que le degré de transcendance de $\mathbb{F}_1$ sur $\mathbb{F}$ est t. □

Lemme 33. *Considérons un ensemble fini $\{p_{\boldsymbol{\kappa},j}\} \subset \mathcal{R}$, où $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{N}^\ell$, et $0 \leq j \leq d_1 - 1$. Alors, pour chaque i, $1 \leq i \leq h$, on a*

$$\nu_i \left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}} \sum_{j=0}^{d_1-1} p_{\boldsymbol{\kappa},j} \boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{\kappa}} \varphi^j \right) = \min_{\boldsymbol{\kappa},j} \{\nu(p_{\boldsymbol{\kappa},j})\} \, .$$

Démonstration. Fixons un entier i, $1 \leq i \leq h$. Comme $\nu_i(z_{j,l}) > 0$ pour chaque (j,l), le corps résiduel de $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$ est le corps

$$\overline{\mathbb{C}(\boldsymbol{z})}^{\nu_i} = \mathbb{C} \, .$$

Comme $\mathbb{K}$ est une extension finie de $\mathbb{C}(\boldsymbol{z})$, d'après [98, Corollary 1, p. 20], son corps résiduel $\overline{\mathbb{K}}^{\nu_i}$ est une extension finie de $\overline{\mathbb{C}(\boldsymbol{z})}^{\nu_i} = \mathbb{C}$. On a donc $\overline{\mathbb{K}}^{\nu_i} = \mathbb{C}$. Par construction le corps résiduel $\overline{\mathbb{K}(\boldsymbol{\phi})}^{\nu_i}$ de $\mathbb{K}(\boldsymbol{\phi})$ est donc $\mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$. C'est donc

2. Dans le lemme 17 de [98] l'auteur suppose que l'extension est algébrique. Sa preuve reste toutefois vraie dans le cas général.

une extension purement transcendante de $\mathbb{C}$, de degré ℓ. On va montrer que le corps résiduel $\overline{\mathbb{L}}^{\nu_i}$ de $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$ de degré d_1. Supposons que ce ne soit pas le cas. D'après [59, Chap. XII, Prop. 4.6, p. 483] c'est forcément une extension de degré strictement inférieur à d_1. On a, en particulier, $d_1 > 1$. Les images de $1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{d_1-1}$ dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{L}}^{\nu_i}$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$. Notons $\overline{\varphi}$ l'image de φ dans $\overline{\mathbb{L}}^{\nu_i}$. On peut trouver $q_1(\boldsymbol{\phi}), \ldots, q_{d_1-1}(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$, telles que

$$q_1(\boldsymbol{\phi})\overline{\varphi} + q_2(\boldsymbol{\phi})\overline{\varphi}^2 + \cdots + q_{d_1-1}(\boldsymbol{\phi})\overline{\varphi}^{d_1-1} = 1\,. \tag{87}$$

Posons alors $\pi := q_1(\boldsymbol{\phi})\varphi + q_2(\boldsymbol{\phi})\varphi^2 + \cdots + q_{d_1-1}(\boldsymbol{\phi})\varphi^{d_1-1}$. Le corps $\mathbb{K}(\pi)$ est une extension transcendante de $\mathbb{K}$, de degré de transcendance égal à 1. Mais, d'après (87), $\nu_i(\pi - 1) > 0$. Ainsi, π et 1 ont la même image dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{K}(\pi)}^{\nu_i}$ de $\mathbb{K}(\pi)$. On a donc $\overline{\mathbb{K}(\pi)}^{\nu_i} = \overline{\mathbb{K}}^{\nu_i} = \mathbb{C}$. Alors, d'une part, le corps $\mathbb{L}$ est de degré de transcendance $\ell - 1$ sur $\mathbb{K}(\pi)$, mais, d'autre part, son corps résiduel $\overline{\mathbb{L}}^{\nu_i}$ a un degré de transcendance égal à ℓ, sur le corps résiduel $\overline{\mathbb{K}(\pi)}^{\nu_i} = \mathbb{C}$ de $\mathbb{K}(\pi)$. C'est impossible d'après le lemme 32. Le corps résiduel $\overline{\mathbb{L}}^{\nu_i}$ est donc une extension algébrique de $\mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$, de degré d_1. Les éléments $1, \overline{\varphi}, \ldots, \overline{\varphi}^{d_1-1}$ sont donc linéairement indépendants sur $\mathbb{C}(\boldsymbol{\phi})$. Les produits $\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{\kappa}}\overline{\varphi}^j$, $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{N}^l$, $0 \leq j \leq d_1 - 1$, sont donc linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{K}}^{\nu_i} = \mathbb{C}$. Alors, d'après [98, Lemma 17, p. 20], pour tout $p_{\boldsymbol{\kappa},j} \in \mathcal{R}$ on a

$$\nu_i\left(\sum_{\boldsymbol{\kappa}}\sum_{j=0}^{d_1} p_{\boldsymbol{\kappa},j}\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{\kappa}}\varphi^j\right) = \min_{\boldsymbol{\kappa},j}\{\nu(p_{\boldsymbol{\kappa},j})\}\,.$$

□

3.3.4 Le polynôme multi-exponentiel $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z})$ et l'anneau $\mathcal{A}$

Le corps $\mathbb{L}$ est le corps des fractions de $\mathcal{A} = \mathbb{C}[\boldsymbol{z}, \phi_1, \ldots, \phi_\ell][\varphi]$. Comme la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est à coefficients dans $\mathbb{L}$, on peut trouver $Q \in \mathcal{A}$ tel que la matrice $Q\Phi(\boldsymbol{z})^{-1}$ est à coefficients dans $\mathcal{A}$. Remarquons que, comme $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, Q est également une fonction analytique. On notera $Q(\boldsymbol{z})$ quand nous regardons Q comme un élément de $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$. Posons

$$\chi_j(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}) := Q\psi_j(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}) \in \mathcal{A}\,.$$

Les applications $\boldsymbol{k} \mapsto \chi_j(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z})$, $1 \leq j \leq s$ sont des éléments de $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}$. On utilisera la notation compacte

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}) := (\chi_1(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}), \ldots, \chi_s(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}))\,. \tag{88}$$

3.4 Annulation des polynômes aux points $(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$

Dans cette section, on décrit le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des polynômes $\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}]$, homogènes en $\boldsymbol{t}$, qui s'annulent aux points $(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$.

3.4.1 Un lemme de zéros

Notons V_0 l'ensemble des polynômes $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]$ homogènes en les variables $\boldsymbol{t}$, et tels que

$$P(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0\,,\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}\,.$$

Lemme 34. *Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]$ un polynôme homogène en les variables $\boldsymbol{t}$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(i) *Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, sauf éventuellement un nombre fini, $P(\boldsymbol{\tau_k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$.*

(ii) *Pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, $P(\boldsymbol{\tau_k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$.*

(iii) *$P \in V_0$.*

Démonstration. (ii) $\implies$ (i). Immédiat.

(iii) $\implies$ (ii). Supposons que $P \in V_0$, de telle sorte que $P(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$. Comme P est homogène en $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) = Q\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$, on a également $P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0$, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. Mais, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$, $\psi(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\tau_k}$, donc $P(\boldsymbol{\tau_k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$.

(i) $\implies$ (iii). Supposons que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, sauf éventuellement un nombre fini, on ait $P(\boldsymbol{\tau_k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$. L'application

$$\boldsymbol{k} \mapsto P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$$

appartient à $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$. De plus, on peut trouver un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie L tel que $P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ puisqu'on avait déjà observé que $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L_0\{\boldsymbol{z}\}$, où L_0 est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. En prenant $\boldsymbol{z} = T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$, on a $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\tau_k}$ et donc

$$P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, sauf éventuellement un nombre fini. Alors, d'après la proposition 25,

$$P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}\,.$$

Comme P est homogène en $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) = Q\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, z)$, on a $P \in V_0$. □

3.4.2 Estimation de la dimension de certains espaces vectoriels

Nos lemmes 35 et 36 correspondent globalement aux théorème 3 et lemme 4 de [67]. La preuve du lemme 36 est quasiment la même que celle du lemme 4 de [67]. La seule petite différence c'est que nos polynômes sont homogènes en $\boldsymbol{t}$. Cependant, l'espace vectoriel V_0 étant différent de celui considéré dans [67], nous ré-écrivons ici la preuve du lemme 35.

Étant donnés deux entiers positifs δ_1 et δ_2, on note $V(\delta_1,\delta_2)$ le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel des polynômes $P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t},\boldsymbol{z}]$ homogènes de degré δ_1 en $\boldsymbol{t}$ et dont le degré total en $\boldsymbol{z}$ est au plus δ_2. On pose également

$$V_0(\delta_1,\delta_2) := V_0 \cap V(\delta_1,\delta_2)\,,$$

et on considère l'espace quotient

$$\overline{V}(\delta_1,\delta_2) := V(\delta_1,\delta_2)/V_0(\delta_1,\delta_2)\,.$$

D'après le lemme 34, la valeur d'un polynôme au point $(\boldsymbol{\tau_k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, ne dépend que de sa classe dans $\overline{V}$.

Lemme 35. *La dimension $v(\delta_1,\delta_2)$ du $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $\overline{V}(\delta_1,\delta_2)$ satisfait à l'estimation*

$$v(\delta_1,\delta_2) \sim c_1(\delta_1)\delta_2^N\,,$$

où $c_1(\delta_1)$ est un réel strictement positif, indépendant de δ_2.

Démonstration. Soit

$$P := \sum_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1,|\boldsymbol{\mu}|\le\delta_2} p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\mu}}$$

un élément $V(\delta_1,\delta_2)$. Rappelons que d_0 est le degré de φ dans $\mathcal{A}$. Ainsi, pour chaque $\boldsymbol{\nu}$ tel que $|\boldsymbol{\nu}| = \delta_1$, on peut écrire

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{|\boldsymbol{\omega}|\le\delta_1',0\le j<d_0,|\boldsymbol{\kappa}|\le\delta_1''} S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\omega}}\varphi^j\phi_1^{\kappa_1}\cdots\phi_\ell^{\kappa_\ell} \in \mathcal{A}\,,$$

où $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1,\dots,\kappa_\ell)$, δ_1' et δ_1'' ne dépendent que de δ_1 et où les applications $\boldsymbol{k} \mapsto S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{k})$ sont des éléments de $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On a alors

$$P(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda},j,|\boldsymbol{\kappa}|\le\delta_1''} \left(\sum_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1,|\boldsymbol{\omega}|\le\delta_1'} S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{k}) p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}} \right) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}}\varphi^j\phi_1^{\kappa_1}\cdots\phi_\ell^{\kappa_\ell}\,,$$

où $|\boldsymbol{\lambda}| \le \delta_2 + \delta_1'$ et où $p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}} := 0$ quand $\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega} \notin \mathbb{N}^N$. Un polynôme $P \in V(\delta_1,\delta_2)$ est dans V_0 si et seulement si, pour tout $(N+\ell+1)$-uplet $(\boldsymbol{\lambda}, j, \boldsymbol{\kappa})$, on a

$$\sum_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1,|\boldsymbol{\omega}|\le\delta_1'} S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{k}) p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}} = 0\,,\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}\,. \tag{89}$$

D'après la proposition 25, l'égalité (89) est équivalente à

$$\sum_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1,|\boldsymbol{\omega}|\le\delta_1'} S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(.) p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}} = 0 \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\,.$$

Pour chaque $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, j, \boldsymbol{\kappa})$, on écrit

$$S_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{\eta}_i^{\boldsymbol{k}} \sum_{|\boldsymbol{\gamma}|\leq u} s_{\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},i,\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{\gamma}}\,,$$

où $\boldsymbol{\eta}_i = (\eta_{i,1}, \ldots, \eta_{i,r}) \in \Gamma^r$ et $s_{\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},i,\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{C}$. Ainsi, $P \in V_0$ si et seulement si les coefficients $p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}$ satisfont au système d'équations linéaires

$$\sum_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1} \sum_{\substack{|\boldsymbol{\mu}|\leq\delta_2, |\boldsymbol{\omega}|\leq\delta_1' \\ \boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\lambda}}} s_{\boldsymbol{\omega},j,\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},i,\boldsymbol{\gamma}} p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}} = 0\,,\ \forall(\boldsymbol{\lambda}, j, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}, i)\,. \tag{90}$$

Pour chaque $\boldsymbol{\lambda} \leq \delta_2 + \delta_1'$, l'équation (90) définit un certain nombre de formes linéaires indépendantes, sur $V(\delta_1, \delta_2)$, disons $L_{\boldsymbol{\lambda},1}, \ldots, L_{\boldsymbol{\lambda},c_{\boldsymbol{\lambda}}}$. De plus, $c_{\boldsymbol{\lambda}}$ ne dépend pas de δ_2 puisque les supports de $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ de dépendent que de δ_1 et, d'autre part, i et j parcourent des ensembles, respectivement, de taille q et δ_0. Notons $V(\delta_1, \delta_2)^\star$ le dual de $V(\delta_1, \delta_2)$ et $(e_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}})_{|\boldsymbol{\nu}|=\delta_1, |\boldsymbol{\mu}|\leq\delta_2}$ sa base canonique, définie par

$$e_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}(P) = p_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}\,.$$

Étant donné un N-uplet d'entiers $\boldsymbol{\eta}$, on définit un *shift* sur $V(\delta_1, \delta_2)^\star$ en posant

$$\sigma_{\boldsymbol{\eta}}(e_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}) = e_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\eta}}\,,$$

quand $|\boldsymbol{\nu}| = \delta_1$, $|\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\eta}| \leq \delta_2$ et $\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\eta} \geq 0$, et en posant

$$\sigma_{\boldsymbol{\eta}}(e_{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu}}) = 0 \ \text{ dans les autres cas.}$$

Notons $\Lambda(\delta_1, \delta_2)$ l'ensemble des $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^N$ dont les coordonnées sont toutes supérieures ou égales à δ_1' et dont la norme est au plus δ_2. Pour chaque paire $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}') \in \Lambda(\delta_1, \delta_2)^2$, le shift $\sigma_{\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda}}$ définit un isomorphisme entre les $\overline{\mathbb{Q}}$-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}(L_{\boldsymbol{\lambda},1}, \ldots, L_{\boldsymbol{\lambda},c_{\boldsymbol{\lambda}}})$ et $\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}(L_{\boldsymbol{\lambda}',1}, \ldots, L_{\boldsymbol{\lambda}',c_{\boldsymbol{\lambda}'}})$. Ainsi $c_{\boldsymbol{\lambda}} = c_{\boldsymbol{\lambda}'}$ et il existe un réel strictement positif $c_1(\delta_1)$, ne dépendant que de δ_1, tel que la dimension du $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}(L_{\boldsymbol{\lambda},i} \ :\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\delta_1, \delta_2) \ \text{ et } \ 1 \leq i \leq c_{\boldsymbol{\lambda}})$$

est équivalente à $c_1(\delta_1)\delta_2^N$, quand δ_2 tend vers l'infini. Le nombre de formes linéaires $L_{\boldsymbol{\lambda},i}$ pour lesquelles $\boldsymbol{\lambda} \notin \Lambda(\delta_1, \delta_2)$ est au plus $c_2(\delta_1)\delta_2^{N-1}$, pour un réel positif $c_2(\delta_1)$ ne dépendant que de δ_1. Ainsi la dimension $v(\delta_1, \delta_2)$ de $\overline{V}(\delta_1, \delta_2)$, qui est égale au nombre de formes linéaires indépendantes $L_{\boldsymbol{\lambda},i}$, est également équivalente à $c_1(\delta_1)\delta_2^N$ quand δ_2 tend vers l'infini. □

Lemme 36. *Pour tout couple (δ_1, δ_2), on a*

$$v(2\delta_1, \delta_2) \leq (s+1)v(\delta_1, \delta_2)\,.$$

3.5 Annulation de $F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})$ et troncations

Rappelons que

$$F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) := \sum_{i=1}^{s} t_i \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\mu}_i}.$$

Par définition $F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}][[\boldsymbol{z}]]$ et on peut écrire

$$F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^N} l_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}},$$

où les $l_{\boldsymbol{\lambda}}$ sont linéaires en $\boldsymbol{t}$. Pour $q \geq 0$ un entier, on pose

$$F_q(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) := \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^N \,:\, |\boldsymbol{\lambda}| < q} l_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}}$$

la somme partielle de $F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})$ à l'ordre q par rapport aux variables $\boldsymbol{z}$. De manière générale, pour $E(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}][[\boldsymbol{z}]]$, on écrit

$$E_q(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}) := \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^N \,:\, |\boldsymbol{\lambda}| < q} e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{t}) z^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]\,.$$

Notre but est de démontrer le lemme suivant, qui remplace [67, Lemma 6].

Lemme 37. *Il existe un $\boldsymbol{k}_0 \in \mathcal{K}$ et un entier i_0, $1 \leq i_0 \leq h$, tels que*

$$\nu_{i_0}(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \geq q\,,$$

pour tout entier $q \geq 0$. On peut par ailleurs choisir $\boldsymbol{k}_0$ de telle sorte que $Q(\boldsymbol{z})$ ne s'annule pas en $T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{\alpha}$.

3.6 Démonstration du lemme 37

La démonstration du lemme 37 suit les étapes classiques de la méthode de Mahler. On construit une fonction auxiliaire, en prenant des approximants de Padé de type I des puissance de $F_q(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})$. En supposant, par l'absurde, que le lemme 37 n'est pas vrai, on garantit à cette fonction auxiliaire un grand ordre d'annulation en $\boldsymbol{z} = 0$. En majorant et en minorant les valeurs de cette fonction auxiliaire aux points $(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$ on obtient une contradiction.

3.6.1 La fonction auxiliaire

Pour chaque couple (δ_1, δ_2), prenons $V_1(\delta_1, \delta_2)$ un supplémentaire de l'espace vectoriel $V_0(\delta_1, \delta_2)$ dans $V(\delta_1, \delta_2)$. On définit également l'espace vectoriel $V_2(\delta_1, \delta_2)$ en posant $V_2(\delta_1, \delta_2) := \bigoplus_{i=1}^{\delta_1} V_1(i, \delta_2)$.

Lemme 38. *Pour tout δ_1 assez grand et δ_2 suffisamment grand par rapport à δ_1, il existe des polynômes $P_0, \ldots, P_{\delta_1} \in V_2(2\delta_1, \delta_2)$, et un réel positif c_3, tels que, pour tout q suffisamment grand,*

(i) $P_0 \neq 0$,

(ii) $E := \sum_{j=0}^{\delta_1} P_j F_q^j \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]$ *satisfait à*

$$\nu_i(E(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \geq c_3 \delta_1^{1/N} \delta_2 - \delta_1 \nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}))\,,$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ *et tout* i, $1 \leq i \leq h$,

où c_3 *est indépendant de* δ_1, δ_2, q *et* $\boldsymbol{k}$.

Notons que la fonctions auxiliaire E dépend de q, mais pas les polynômes $P_0, \ldots, P_{\delta_1}$.

Démonstration. Notre preuve suit celle de [67], mais nous substituons les valuations à l'*indice* utilisé dans [67].

Soient q et p deux entiers positifs. On considère les formes applications suivantes

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{c} \prod_{j=0}^{\delta_1} V_1(2\delta_1 - j, \delta_2) \\ (P_0, \ldots, P_{\delta_1}) \end{array} \right. & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}] \\ E' := \sum_{j=0}^{\delta_1} P_j F_q^j \end{array} \right. \\
 & & \downarrow \\
\left\{ \begin{array}{c} \overline{V}(2\delta_1, p-1) \\ E'_p \mod V_0 \end{array} \right. & \leftarrow & \left\{ \begin{array}{c} V(2\delta_1, p-1) \\ E'_p \end{array} \right.
\end{array}$$

On vérifie qu'elles sont bien définies. En effet, les polynômes P_j sont homogènes de degré $2\delta_1 - j$ en $\boldsymbol{t}$, alors que F est homogène de degré 1 en $\boldsymbol{t}$, E' est donc homogène de degré $2\delta_1$ en $\boldsymbol{t}$ et $E'_p \in V(2\delta_1, p-1)$. Il est donc correct de considérer $E'_p \bmod V_0(2\delta_1, p-1)$. De plus, si q est suffisamment grand par rapport à p et δ_2, l'application $(P_0, \ldots, P_{\delta_1}) \mapsto E'_p \bmod V_0(2\delta_1, p-1)$ ne dépend pas de q.

D'après le lemme 35, l'espace vectoriel $\prod_{j=0}^{\delta_1} V_1(2\delta_1 - j, \delta_2)$ est de dimension supérieure à $c_1(\delta_1)\delta_1\delta_2^N/2$ pour δ_2 assez grand. D'après le lemme 36, l'espace vectoriel $\overline{V}(2\delta_1, p-1)$ est de dimension inférieure à $(s+1)v(\delta_1, p-1)$. Si p est assez grand, le lemme 35 nous garantit que $v(\delta_1, p-1) \leq 2c_1(\delta_1)\delta_1 p^N$. Pour un tel p, l'espace vectoriel $\overline{V}(2\delta_1, p-1)$ est de dimension inférieure à $2(s+1)c_1(\delta_1)p^N$. Posons

$$p := \left\lfloor \frac{\delta_1^{1/N}\delta_2}{5(s+1))^{1/N}} \right\rfloor ,$$

de telle sorte que

$$2(s+1)c_1(\delta_1)p^N < c_1(\delta_1)\delta_1\delta_2^N/2\,.$$

En comparant les dimensions, on voit que, pour δ_2 assez grand, l'application linéaire $(P_0, \ldots, P_{\delta_1}) \mapsto E'_p(P_0, \ldots, P_{\delta_1}) \mod V_0$ a un noyau non trivial. On peut donc trouver des polynômes $P_0, \ldots, P_{\delta_1}$, non tous nuls, tels que $E'_p \in V_0(2\delta_1, q-1)$. On déduit de $E'_p(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0$ que $E'(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \in (\boldsymbol{z})^p$, où $(\boldsymbol{z})$ désigne l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par $z_{1,1}, \ldots, z_{r,n_r}$. On a donc

$$\nu_i(E'(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \geq p \geq c_3 \delta_1^{1/N} \delta_2 \,, \forall i,\, 1 \leq i \leq h,$$

où c_3 est indépendant de δ_1, δ_2, $\boldsymbol{k}$, i et de q. Soit v le plus petit entier tel que $P_v \neq 0$. On pose

$$E := \sum_{j \geq v} P_j F_q^{j-v} \,,$$

de telle sorte que $EF_q^v = E'$. Pour $1 \leq i \leq h$, on trouve

$$\nu_i(E'(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) = \nu_i(E(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) + v\nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \,.$$

Ainsi, pour δ_1 et δ_2 suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \nu_i(E(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) &= \nu_i(E'(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) - v\nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \\ &\geq c_3 \delta_1^{1/N} \delta_2 - \delta_1 \nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})), \end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ et tout i, $1 \leq i \leq h$. □

3.6.2 Choix d'un sous-ensemble infini de $\mathcal{K}$

Notons $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ pour lesquels $Q(\boldsymbol{z})$ ne s'annule pas au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$. À partir de maintenant et pour le reste de la preuve du lemme 37, on raisonne par l'absurde, en supposant que pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_0$ et tout i, $1 \leq i \leq h$, il existe un entier $q(\boldsymbol{k}, i)$ tel que

$$\nu_i(F_{q(\boldsymbol{k},i)}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q(\boldsymbol{k}, i) \,. \tag{91}$$

Lemme 39. *Supposons que l'inégalité (91) soit vraie. Alors, il existe un entier q_0 et un ensemble infini $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_0$ tel que, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$, i, $1 \leq i \leq h$ et $q \geq q_0$, on a*

(i) $P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$.

(ii) $\nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q_0$,

où P_0 est le polynôme du lemme 38.

Démonstration. Comme $P_0 \notin V_0$, l'application $\boldsymbol{k} \mapsto P_0(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{K}$. Ainsi, l'application

$$\boldsymbol{k} \mapsto P_0(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) Q(\boldsymbol{z})$$

n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{K}$. D'après la proposition 25 il existe une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ tels que

$$P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0, \text{ et } Q(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0\,.$$

Ainsi, tous ces $\boldsymbol{k}$ appartiennent $\mathcal{K}_0$. Choisissons un tel élément $\boldsymbol{k}_0$. On écrit

$$\chi_l(.) = \sum_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa},j} s_{l,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa},j}(.)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{\kappa}}\varphi^j,$$

où $1 \leq l \leq M$, $j < d_0$ et où $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{N}^N$ et $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{N}^\ell$ parcourent un ensemble fini. Ré-indexons les applications $s_{l,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\kappa},j}(.)$ en $s_{l,u}(.)$, $1 \leq u \leq \Lambda$, avec Λ un entier positif. Fixons un entier i, $1 \leq i \leq h$ et posons $q_i := q(\boldsymbol{k}_0, i)$. Comme $F_q(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})$ est linéaire en $\boldsymbol{t}$, $F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ est linéaire en la famille $(s_{l,u}(\boldsymbol{k}))_{1\leq u\leq\Lambda}$. Il existe donc des formes linéaires de $\mathbb{C}^\Lambda$ dans $\mathbb{C}$, disons $\epsilon_{i,1}, \ldots, \epsilon_{i,\Omega}$, telles que

$$\nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \geq q_i \iff \epsilon_{i,v}((s_{l,u}(\boldsymbol{k}))_{1\leq u\leq\Lambda}) = 0 \ \ \forall v,\ 1 \leq v \leq \Omega\,.$$

D'après (91), $\nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q$. Il existe donc un entier $v(i)$, $1 \leq v(i) \leq \Omega$ tel que

$$\epsilon_{i,v(i)}((s_{l,u}(\boldsymbol{k}_0))_{1\leq u\leq\Lambda}) \neq 0\,.$$

En faisant la même chose pour chaque i, $1 \leq i \leq h$, on trouve une application

$$\epsilon(.) := \prod_{i=1}^{h} \epsilon_{i,v(i)}((s_{l,u}(.))_{1\leq u\leq\Lambda}) \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

telle que $\epsilon(\boldsymbol{k}_0) \neq 0$ et telle que, pour chaque i, $1 \leq i \leq h$,

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) \neq 0 \Rightarrow \nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q_i\,. \tag{92}$$

L'application

$$\boldsymbol{k} \mapsto P_0(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})Q(\boldsymbol{z}) \prod_{i=1}^{l} \epsilon_i(\boldsymbol{k})$$

appartient à $\mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ pour un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel L de dimension finie. Par ailleurs, elle ne s'annule pas en $\boldsymbol{k}_0$. D'après la proposition 25, il existe un ensemble infini $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_0$ tel que

$$P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0 \text{ et } \epsilon_i(\boldsymbol{k}) \neq 0\,, \tag{93}$$

pour tout i, $1 \leq i \leq l$, et tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$. Pour $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$, d'après (92) et (93), on a

$$\nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q_i\,.$$

Fixons un i, $1 \leq i \leq h$, et considérons un entier $q > q_i$. On, a par définition, $\nu_i(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) - F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \geq q_i$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathcal{K}'$, on a $\nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q_i$. On a donc

$$\nu_i(F_{q_i}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) < q_i$$

pour tout $q > q_i$ et tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$. On prend alors $q_0 := \max\{q_1, \ldots, q_h\}$. □

La fin de la preuve du lemme 37 consiste à fournir une majoration et une minoration pour la fonction auxiliaire E aux points $(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$ et d'obtenir un contradiction quand $|\boldsymbol{k}|$ est suffisamment grand. Ces calculs sont classiques en méthode de Mahler. On en trouve de similaires dans [67]. Soit $q \geq q_0$ un entier, où q_0 est donné par le lemme 39, et soit $E \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z}]$ la fonction du lemme 38 associée à l'entier q.

3.6.3 Majoration de $|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|$

D'après les lemmes 38 et 39, on a

$$\nu_i(E(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \geq c_3 \delta_1^{1/N} \delta_2 - \delta_1 q_0 \,,$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ et tout i, $1 \leq i \leq h$.

Comme $\delta_2 \geq \delta_1$, pour δ_1 assez grand, d'après le lemme 30 il existe une réel positif c_4 tel que

$$E(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \in (\boldsymbol{z})_{\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}}^{\left\lfloor c_4 \delta_1^{1/N} \delta_2 \right\rfloor} , \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}' \,.$$

Comme E est homogène en $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) = Q(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$, on a

$$E(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) \in (\boldsymbol{z})_{\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}}^{\left\lfloor c_5 \delta_1^{1/N} \delta_2 \right\rfloor} , \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}' \,.$$

pour un réel positif c_5.

Notons que les rayons de convergence des séries analytiques définissant l'application $\boldsymbol{k} \mapsto \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$ ne dépendent pas de $\boldsymbol{k}$. Alors, en décomposant $E(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}}$, il existe des réels positifs $c_6(\delta_1, \delta_2, q)$, c_7 et c_8 tels que

$$|e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{k})| \leq c_6(\delta_1, \delta_2, q) c_7^{|\boldsymbol{k}|} c_8^{|\boldsymbol{\lambda}|} \,.$$

D'après le lemme 21, on a $\|T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}\| \leq e^{-c_9 \rho^{|\boldsymbol{k}|}}$ pour un réel positif c_9 et par conséquent,

$$\begin{aligned} |E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| &= |E(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \\ &\leq \sum_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq p} |e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{k})| \times \|T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}\|^{\boldsymbol{\lambda}} \\ &\leq \sum_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq p} c_6(\delta_1, \delta_2, q) c_7^{|\boldsymbol{k}|} c_8^{|\boldsymbol{\lambda}|} e^{-|\boldsymbol{\lambda}| c_9 \rho^{|\boldsymbol{k}|}} , \forall \boldsymbol{k} \in \mathcal{K}' \,. \end{aligned}$$

Il existe donc un réel positif c_{10} tel que,

$$|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \leq e^{-c_{10} \delta_1^{1/N} \delta_2 \rho^{|\boldsymbol{k}|}} \,, \tag{94}$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ suffisamment grand par rapport à δ_1, δ_2 et q.

3.6.4 Minoration pour $|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|$

D'après (82), on a

$$F(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0\,,$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. La série entière $F(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) - F_q(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})$ est de valuation supérieure à q en $\boldsymbol{z}$. En raisonnant comme dans la section 3.6.3, on peut trouver un réel c_{11} tel que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{\delta_1} P_j(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) F_q(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})^j\right| &= \left|\sum_{j=1}^{\delta_1} P_j(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})(F - F_q)(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})^j\right| \\ &\leq e^{-c_{11}\rho^{|\boldsymbol{k}|}q}\,,\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ suffisamment grand par rapport à δ_1, δ_2 et q.

Par ailleurs, les nombres complexes $P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$, appartiennent tous au même corps de nombres. D'après l'inégalité de Liouville (pour les corps de nombres), il existe un réel $c_{12} > 0$, indépendant de $\boldsymbol{k}$, tel que

$$|P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \geq H(P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}))^{-c_{12}}\,. \tag{95}$$

Les nombres complexes $\tau_j(\boldsymbol{k})$ sont des polynômes de degré d en les coefficients de la matrice $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\alpha})$. D'après le lemme 21, les numérateurs et les dénominateurs des fractions rationnelles qui forment les coefficients de la matrice $A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ sont de degré inférieur à $c_{13}\rho^{|\boldsymbol{k}|}$ et les coefficients de ces fractions rationnelles ont une hauteur logarithmique inférieure à $c_{14}\rho^{|\boldsymbol{k}|}$, où c_{13} et c_{14} sont des réels positifs. Il existe donc un réel c_{15} tel que

$$\log H(\tau_j(\boldsymbol{k})) \leq c_{15}\rho^{|\boldsymbol{k}|}\,.$$

Le polynôme P_0 est de degré inférieur à $2\delta_1$ en $\boldsymbol{t}$ et inférieur à δ_2 en $\boldsymbol{z}$. Comme $\delta_2 \geq \delta_1$, on peut majorer la hauteur logarithmique de $P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$ par

$$\log H(P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})) \leq c_{16} + c_{17}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}\,,$$

pour des réels positifs c_{16} et c_{17}. D'après (95), on trouve

$$|P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \geq c_{18}e^{-c_{12}c_{17}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}}\,,$$

pour un réel positif c_{18}, et ainsi

$$\begin{aligned}|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| &\geq |P_0(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| - \left|\sum_{i=1}^{\delta_1} P_i(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) F_q(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})\right| \\ &\geq c_{18}e^{-c_{12}c_{17}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}} - e^{-c_{11}\rho^{|\boldsymbol{k}|}q}\,.\end{aligned}$$

Quand q est suffisamment grand par rapport à δ_2 et $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ est suffisamment grand par rapport à q, on obtient

$$|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \geq e^{-c_{19}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}}\,, \tag{96}$$

pour un réel positif c_{19}.

3.6.5 Contradiction

D'après (94) et (96) on a

$$e^{-c_{19}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}} \le |E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \le e^{-c_{10}\delta_1^{1/N}\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}},$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ suffisamment grand par rapport à q et tout q suffisamment grand par rapport à δ_2. En prenant le logarithme, en divisant par $\delta_2\rho^{|\boldsymbol{k}|}$ et en faisant tendre $|\boldsymbol{k}|$ vers l'infini dans $\mathcal{K}'$, on trouve

$$c_{19} \ge c_{10}\delta_1^{1/N}.$$

On obtient donc une contradiction, dès que δ_1 est suffisamment grand. Cela termine la preuve du lemme 37.

3.7 Fin de la preuve du théorème 16 dans le cas d'un changement de jauge analytique

Dans cette section, on fixe le $\boldsymbol{k}_0 \in \mathcal{K}$ du lemme 37. Pour tout entier q, on a

$$\nu_{i_0}(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \ge q. \tag{97}$$

Pour tout entier i, $1 \le i \le s$, on écrit

$$\chi_i(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\lambda},j} \chi_{i,\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z})\phi_1^{\kappa_1}\cdots\phi_\ell^{\kappa_\ell}\varphi^j \in \mathcal{A},$$

où les indices $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ appartiennent à un ensemble fini, où $0 \le j < d_1$ et où $\chi_{i,\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{R}$ pour chaque $(\boldsymbol{\kappa}, j)$. Dans le reste de cette section, pour chaque somme, $\boldsymbol{\kappa}$ est un élément d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^\ell$, et j est un élément $\{0, \ldots, d_1 - 1\}$. On pose également $\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j} := (\chi_{i,\boldsymbol{\kappa},j})_{i\le s}$. On a la décomposition suivante

$$F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\kappa},j} F_q(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})\phi_1^{\kappa_1}\cdots\phi_\ell^{\kappa_\ell}\varphi^j.$$

Notons que l'on peut évaluer $F(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{z})$ aux points $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z})$ et que la somme $F(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})$ est dans $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$.

Lemme 40. *Pour chaque couple $(\boldsymbol{\kappa}, j)$, on a*

$$F(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z}) = 0.$$

Démonstration. D'après (97), on a $\nu_{i_0}(F_q(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \ge q$. Alors, d'après 33, pour chaque couple $(\boldsymbol{\kappa}, j)$, on a

$$\nu(F_q(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})) \ge q.$$

Prolongeons la valuation ν à tout $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ de la façon naturelle. En prenant la limite $q \to \infty$, pour la topologie induite par ν sur $\mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, on a d'un côté

$$\lim_{q\to\infty} F_q(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})) = F(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})\,,$$

et d'un autre côté

$$\lim_{q\to\infty} F_q(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})) = 0\,.$$

Ainsi $F(\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) = 0$. □

On peut alors conclure la preuve du théorème 16 dans le cas d'un changement de jauge analytique. Posons $\boldsymbol{\beta} := T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{\alpha}$. D'après le lemme 37, ce choix de $\boldsymbol{k}_0$ nous permet d'évaluer la série $Q(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$ en $\boldsymbol{\beta}$. Posons

$$\eta_i(\boldsymbol{z}) := Q(\boldsymbol{\beta})^{-1} \sum_{\boldsymbol{\kappa},j} \phi_1(\boldsymbol{\beta})^{\kappa_1}\cdots\phi_\ell(\boldsymbol{\beta})^{\kappa_\ell}\varphi(\boldsymbol{\beta})^j \chi_{i,\boldsymbol{\kappa},j}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{R},$$

et $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{z}) = (\eta_i(\boldsymbol{z}))_{i\le s}$. Les séries $\eta_i(\boldsymbol{z})$ sont définies en $\boldsymbol{\beta}$ pour chaque i. En utilisant la linéarité de F en $\boldsymbol{t}$, on déduit du lemme 40 que

$$F(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) \quad = \quad 0\,.$$

En évaluant cette égalité en $T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{z}$, par définition de F on a

$$\sum_{i\le s} \eta_i(T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{z})\boldsymbol{f}(T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\mu}_i} = 0\,. \tag{98}$$

Alors, en utilisant l'identité

$$\boldsymbol{f}(T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{z}) = A_{\boldsymbol{k}_0}(\boldsymbol{z})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,,$$

et en remplaçant $\boldsymbol{f}(T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{z})$ par $A_{\boldsymbol{k}_0}(\boldsymbol{z})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ dans (98), on trouve un vecteur de fonctions algébriques $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{z}) = (\widetilde{\eta}_1(\boldsymbol{z}),\ldots,\widetilde{\eta}_s(\boldsymbol{z}))$, telles que

$$\sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(\boldsymbol{z})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{\mu}_i} = 0\,.$$

Par ailleurs, en évaluant $\boldsymbol{\eta}$ en $\boldsymbol{\beta}$, on a

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}_0, T_{\boldsymbol{k}_0}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}_0}\,. \tag{99}$$

D'après (99) et par définition des $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}$ on a $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\tau}$. Le polynôme $Q \in \mathcal{R}[\boldsymbol{X}]$, défini par

$$Q(\boldsymbol{z}, X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,m1}, X_{2,1}, \ldots, X_{r,m_r}) := \sum_{i\le s} \widetilde{\eta}_i(\boldsymbol{z})\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\mu}_i}$$

a donc les propriétés suivantes :

$$Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\,,$$

comme souhaité.

Il ne reste qu'un détail à traiter. On veut construire un polynôme ayant les même propriétés, mais appartenant à $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}[\boldsymbol{X}]$ et pas seulement $\overline{\mathbb{C}(\boldsymbol{z})}[\boldsymbol{X}]$. Posons $\mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \cap \overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}$. On a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \otimes \mathbb{C}$. Par ailleurs, comme $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, les éléments de $\mathcal{R}_1$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$.

Soit $V \subset \mathbb{C}$ le plus petit $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel contenant 1 et tel que Q appartient au $\mathcal{R}_1$-module engendré par V. Ainsi, V est de dimension finie. Soit $1, \pi_1, \ldots, \pi_t$ une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On peut décomposer Q en

$$Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}) = Q_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}) + \pi_1 Q_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}) + \cdots + \pi_t Q_t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})\,,$$

où $Q_i \in \mathcal{R}_1$, $1 \leq i \leq t$. Les fonctions analytiques $f_{i,j}(\boldsymbol{z}_i)$ et les $Q_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})$ ayant leurs coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des π_i implique que

$$Q_i(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})) = 0\,,$$

pour chaque i, $0 \leq i \leq t$. Par ailleurs, le polynôme P étant à coefficients algébriques, on a

$$Q_0(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X}) \;\text{ et }\; Q_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}) = 0 \;\text{ pour } 1 \leq i \leq d\,.$$

Ainsi, le polynôme Q_0 a les propriétés requises. Cela termine la preuve de la première partie du théorème 16 quand $\Phi(\boldsymbol{z})$ appartient à $\mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\})$.

Supposons à présent que $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{f}(z))$ soit une extension régulière de $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Notons $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}$ la plus petite extension de $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ contenant les coefficients de $Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})$. D'après [59, Chapter VIII], les corps $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})(f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}))$ et $\mathbb{K}$ sont linéairement disjoints sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Notons δ le degré de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ et considérons $\theta(\boldsymbol{z})$ un élément primitif de $\mathbb{K}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. On peut, sans perte de généralité, supposer que $\theta(\boldsymbol{z})$ est entier sur $\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{z}]$ et, par conséquent, que $\theta(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\} \cap \overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\}$. Comme les fonctions $\theta(\boldsymbol{z})^j$, $0 \leq j \leq \delta - 1$, sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, elles restent donc linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})(f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z}))$. En décomposant le polynôme Q sous la forme

$$Q = \sum_{j=0}^{\delta-1} Q_j(\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m)\theta(\boldsymbol{z})^j\,,$$

où $Q_j(\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m) \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m]$, on obtient donc que

$$Q_j(\boldsymbol{z}, f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z})) = 0$$

pour tout j, $0 \leq j \leq \delta - 1$. Finalement, en posant

$$R(\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m) := \sum_{j=0}^{\delta-1} Q_j(\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m)\theta(\boldsymbol{\alpha})^j \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{z}, X_1, \ldots, X_m]\,,$$

on obtient à la fois

$$R(\boldsymbol{z}, f_1(\boldsymbol{z}), \ldots, f_m(\boldsymbol{z})) = 0 \;\text{ et }\; R(\boldsymbol{\alpha}, X_1, \ldots, X_m) = P(X_1, \ldots, X_m)\,,$$

comme souhaité. □

3.8 Démonstration du théorème 16 dans le cas général

Dans cette section, on montre comment modifier la preuve du théorème 16 pour l'étendre au cas où les changements de jauge $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i)$ ne sont plus nécessairement analytiques, mais ramifiés. Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, on note $\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,d}$ le corps de fractions de $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_i^{1/d}\}$, où $\boldsymbol{z}_i^{1/d} = (z_{i,1}^{1/d}, \ldots, z_{i,n_i}^{1/d})$. On pose $\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i} := \cup_{d\geq 1}\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,d}$. On pose également $\widehat{\mathbf{K}}_d$ le corps des fractions de $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}^{1/d}\}$ et $\widehat{\mathbf{K}} = \cup_{d\geq 1}\widehat{\mathbf{K}}_d$.

On montre tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i) \in \mathrm{GL}_{m_i}(\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,1})$. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ tel que chaque couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible et tel que chacun des points $\boldsymbol{\alpha}_i$ est régulier pour (71.*i*). Par hypothèse, il existe un entier j tel que $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i^j)$ appartienne $\mathrm{GL}_{m_i}(\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,1})$. Soit $\boldsymbol{\alpha}' := (\boldsymbol{\alpha}'_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}'_r)$ tel que $(\boldsymbol{\alpha}'_i)^j = \boldsymbol{\alpha}_i$ pour chaque i, $1 \leq i \leq r$. Ainsi, l'étude de (78) au point $\boldsymbol{\alpha}$ est équivalente à l'étude du système mahlérien par blocs

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_r(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(\boldsymbol{z}_1^j) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r(\boldsymbol{z}_r^j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_r(T\boldsymbol{z}) \end{pmatrix},$$

au point $\boldsymbol{\alpha}'$, où $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{z}) := \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{z}^j)$. Les points $\boldsymbol{\alpha}'_i$ sont réguliers pour ces nouveaux systèmes et chaque $(T_i, \boldsymbol{\alpha}'_i)$ reste admissible. Par ailleurs, les matrices $A_i(\boldsymbol{z}^j)$ sont conjuguées à une matrice constante via le changement de jauge $\Phi_i(\boldsymbol{z}^j) \in \mathrm{GL}_m(\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,1})$. On peut donc supposer que pour tout i, $1 \leq i \leq r$, la matrice $\Phi_i(\boldsymbol{z}_i)$ est dans $\mathrm{GL}_m(\widehat{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{z}_i,1})$ Pour chaque entier i, $1 \leq i \leq r$, soit $\Delta_i(\boldsymbol{z}_i)$ une fonction analytique non nulle telle que $\Delta_i(\boldsymbol{z}_i)\Phi_i(\boldsymbol{z}_i)$ et $\Delta(\boldsymbol{z}_i)\Phi_i^{-1}(\boldsymbol{z}_i)$ appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}_i\}$. Posons $\Delta(\boldsymbol{z}) := \Delta_1(\boldsymbol{z}_1)\cdots\Delta_r(\boldsymbol{z}_r)$. D'après la proposition 25, l'ensemble

$$\mathcal{K}_\Delta := \{\boldsymbol{k} \in \mathcal{K} \;:\; \Delta(\boldsymbol{z}) \text{ est définie et non nulle au point } T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}\}$$

est infini.

Lemme 41. *La proposition 25 est toujours vraie quand on remplace $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}_\Delta$.*

Démonstration. La fonction $\Delta(\boldsymbol{z})$ appartient $\overline{\mathbb{Q}}\{\boldsymbol{z}\}$. Ainsi, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, sauf éventuellement un nombre fini, $\Delta(\boldsymbol{z})$ est définie au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$. On peut donc supposer que $\Delta(\boldsymbol{z})$ est définie au point $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. Soit L un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\psi \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} L\{\boldsymbol{z}\}$ tel que la suite $(\psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}))_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_\Delta}$ n'est pas identiquement nulle. La suite $(\Delta(\boldsymbol{z})\psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}))_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}}$ n'est pas identiquement nulle. Alors, d'après le lemme 25, $\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})\psi(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ pour une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. Par définition de $\mathcal{K}_\Delta$, ces $\boldsymbol{k}$ appartiennent à $\mathcal{K}_\Delta$. □

On donc supposer, sans perte de généralité que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Delta$, c'est-à-dire que, $\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. Le lemme 28 doit alors être modifié de la sorte.

Lemme 42 (Lemme 28-bis)**.** *Pour tout entier j, $1 \leq j \leq s$, il existe un polynôme multi-exponentiel $\psi_j \in \mathcal{R}_{\Gamma,r} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbf{K}}_1$ tel que*

$$\tau_{j,\boldsymbol{k}} = \psi_j(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$$

et $\Delta(\boldsymbol{z})^d\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. De plus, il existe un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de dimension finie L_0 tel que, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$ et tout j, $1 \leq j \leq s$, les coefficients de la série $\Delta(\boldsymbol{z})^d\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$ appartiennent à L_0.

Démonstration. La preuve suit les même étapes que celle du lemme 28. On observe tout d'abord que le lemme 29 reste vrai. En effet, par hypothèse, la matrice $\Delta(\boldsymbol{z})\Phi(\boldsymbol{z})$, est bien définie dans un voisinage de 0 et donc en $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ assez grand. Comme par hypothèse, $\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})$ ne s'annule pas en $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ est définie en $T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}$, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ suffisamment grand. Le reste de la preuve du lemme 29 est la même.

Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^r$. Pour chaque i, $1 \leq j \leq s$, la fonction $\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z})$ est un polynôme de degré d en les coefficients des matrices $\Phi^{-1}(\boldsymbol{z})$. On a donc $\Delta(\boldsymbol{z})^d\psi_j(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{z}\}$, comme souhaité. La dernière affirmation du lemme 42 se prouve de la même façon que dans le lemme 28, en prenant pour L_0 le $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel engendré par les monômes de degré au plus d en les coefficients de la matrice $\Phi(\boldsymbol{\alpha})$. □

Les preuves des lemmes 34, 35, 36 et 38 sont inchangées, à une exception près. Il faut être prudent dans l'implication (i) ⇒ (iii) du lemme 34. On procède de la manière suivante. Supposons que

$$P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ assez grand. Alors, le polynôme P étant homogène, on a également $P(\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})^d\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) = 0$ pour une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$.

D'après la proposition 25, $P(\Delta(\boldsymbol{z})^d \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$. On a donc $P(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$, comme souhaité.

Le principal changement apparaît dans la démonstration du lemme 37, dans la majoration de $|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|$, section 3.6.3. Pour obtenir une telle majoration, on est contraint à présent de minorer la quantité $|\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|$. On va utiliser pour cela un résultat de Corvaja et Zannier [44].

Fin de la preuve du théorème 16. Par un raisonnement similaire à celui de la section 3.6.4, on obtient la majoration suivante, à partir de (94) :

$$|E(\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})^d \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \leq e^{-c_1 \delta_1^{1/N} \delta_2 \rho^{|\boldsymbol{k}|}},$$

pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ suffisamment grand par rapport à δ_1, δ_2 et q, et pour un réel positif c_1. Comme E est homogène de degré $2\delta_1$ en $\boldsymbol{t}$, on a

$$\begin{aligned} |E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| &= |E(\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})^d \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{k}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}), T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \times |\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|^{-2\delta_1 d} \\ &\leq e^{-c_1 \delta_1^{1/N} \delta_2 \rho^{|\boldsymbol{k}|}} \times |\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})|^{-2\delta_1 d}. \end{aligned} \tag{100}$$

Par ailleurs, d'après [44, Proposition 3] il existe deux réels positifs c_2 et c_3 tels que

$$|\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \geq c_2 \|T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}\|^{c_3}, \tag{101}$$

pour une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$. En effet, les calculs faits dans la section 2.4 montrent que l'on peut appliquer la proposition 3 de [44] à la famille de points $(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}'}$. De plus, notre choix de $\mathcal{K}$ nous assure que $\Delta(T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ et, par conséquent, pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ puisque $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. En utilisant le fait que $\delta_1^{1/N}\delta_2 \gg \delta_1$, quand δ_1 tend vers l'infini, et en combinant (100) et (101), on obtient une majoration similaire à celle obtenue dans 3.6.3, c'est-à-dire,

$$|E(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{k}}, T_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\alpha})| \leq e^{-c_4 \delta_1^{1/N} \delta_2 \rho^{|\boldsymbol{k}|}},$$

pour une infinité de $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ et un réel positif c_4. Les calculs de la minoration restent les même. De plus, comme cette minoration est valable pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}'$ assez grand, on obtient la même contradiction que dans la section 3.6.5. La fin de la démonstration du théorème 16 est la même. □

4 Démonstration du théorème 15

L'inégalité

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) \geq \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r))$$

est toujours vraie, quelques soient les fonctions considérées. Notons alors

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})) := \left\{ P \in \overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}[\boldsymbol{X}] \ : \ P(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) = 0 \right\},$$

l'idéal des relations algébriques entre les fonctions $f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)$ sur $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}$ et

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})) := \left\{P \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}] \ : \ P(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)) = 0\right\} ,$$

l'idéal des relations algébriques à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, entre les nombres $f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)$. Ce sont des idéaux premiers.

Étant donné un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau, on note $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ la *hauteur* de $\mathfrak{p}$, c'est à dire, la longueur de la plus grande chaîne d'idéaux premiers inclus dans $\mathfrak{p}$. D'après le théorème de la hauteur de Krull, la hauteur de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est égale à la taille d'un ensemble minimal de générateurs de $\mathfrak{p}$.

Considérons $P_1(\boldsymbol{X}), \ldots, P_h(\boldsymbol{X}) \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]$ un système minimal de générateurs de l'idéal $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}))$. D'après le théorème 16, il existe des polynômes

$$Q_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}), \ldots, Q_h(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}) \in \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})) ,$$

tels que $Q_j(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}) = P_j(\boldsymbol{X})$, $1 \leq j \leq h$. Supposons qu'il existe un système de générateurs $R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}), \ldots, R_{h-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})$, de l'idéal $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))$. Alors, il existe une matrice $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})$ de taille $(h-1) \times h$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}[\boldsymbol{X}]$, telle que

$$(Q_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}), \ldots, Q_h(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X})) = (R_1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}), \ldots, R_{h-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}))\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{X}) .$$

En évaluant en $\boldsymbol{\alpha}$, il vient que $R_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X}), \ldots, R_{h-1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{X})$ engendre l'idéal $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}))$, une contradiction. On a donc

$$\mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))\right) \geq \mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}))\right) , \tag{102}$$

Notons $M := \sum_i m_i$ et $n := \sum_i n_i$. On a par ailleurs,

$$\mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}_{\boldsymbol{\alpha},\mathbf{0}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}))\right) = M - \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) \tag{103}$$

et

$$\mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}))\right) = M - \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r)) . \tag{104}$$

L'inégalité

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) \leq \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{1,1}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{\alpha}_r))$$

découle alors de (102), (103) et (104).

Chapitre IV

Pureté des relations algébriques entre les valeurs de fonctions mahlériennes

Si les théorèmes 14, 15 et 16 ont de nombreuses autres applications, notre motivation principale quant à la généralisation de la méthode de Mahler aux systèmes de plusieurs variables associés à des transformations différentes est d'obtenir des résultats concernant les fonctions mahlériennes d'une variable.

Considérons des multi-ensembles de nombres complexes

$$\mathcal{E}_1 = \{\zeta_{1,1}, \dots, \zeta_{1,m_1}\}, \dots, \mathcal{E}_r = \{\zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{r,m_r}\}.$$

Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, donnons-nous un vecteur d'indéterminées $\boldsymbol{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i})$ et définissons

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i) := \left\{P(\boldsymbol{X}_i) \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_i] : P(\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,m_i}) = 0\right\}$$

l'idéal des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les éléments de $\mathcal{E}_i$. On considère également le multi-ensemble $\mathcal{E} = \{\zeta_{1,1}, \dots, \zeta_{r,m_r}\}$ et

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) := \left\{P(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_r) \in \overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_r] : P(\zeta_{1,1}, \dots, \zeta_{r,m_r}) = 0\right\}.$$

On dit qu'un polynôme $P \in \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})$ est une *relation algébrique pure* par rapport aux multi-ensembles $\mathcal{E}_i$ si il appartient à l'idéal $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})$ de $\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_r]$ engendré par l'ensemble $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)$.

On déduit du théorème 14 le résultat suivant.

Théorème 18 (Premier théorème de pureté : points indépendants)**.** *Soient $r \geq 2$ un entier et $\rho > 1$ un réel. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère un système mahlérien régulier singulier*

$$\begin{pmatrix} f_{i,1}(T_i \boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(T_i \boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} = A_i(\boldsymbol{z}_i) \begin{pmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} \tag{105.i}$$

où $A_i(\boldsymbol{z}_i)$ *est une matrice de* $\mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i))$, $\boldsymbol{z}_i := (z_{i,1}, \dots, z_{i,n_i})$ *est une famille d'indéterminées,* T_i *est une matrice de taille* n_i *à coefficients entiers naturels et de rayon spectral* ρ. *Pour chaque* i, $1 \leq i \leq r$, *on considère un multi-ensemble*

$$\mathcal{E}_i \subseteq \{f_{i,1}(\boldsymbol{\alpha}_i), \dots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)\}\,,$$

pour un certain $\boldsymbol{\alpha}_i \in \overline{\mathbb{Q}}^{n_i}$ *et on pose* $\mathcal{E} := \cup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$. *Supposons que*

(i) *pour chaque* i, $\boldsymbol{\alpha}_i \in (\overline{\mathbb{Q}}^{\star})^{n_i}$ *soit un point régulier pour le système* (105.*i*) *et que le couple* $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ *soit admissible,*

(ii) *il n'existe pas de* n*-uplet d'entiers* $(\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_r)$, *où* $n = \sum n_i$, *tel que* $(T_1^k \boldsymbol{\alpha}_1)^{\boldsymbol{\mu}_1} \cdots (T_r^k \boldsymbol{\alpha}_r)^{\boldsymbol{\mu}_r} = 1$, *pour tout* k *dans une progression arithmétique.*

Alors

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})\,.$$

Autrement dit, toute relation algébrique entre les éléments de $\mathcal{E}$ est une relation algébrique pure par rapport aux ensembles $\mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq r$.

Remarque 9. Si les matrices $T_1, \dots, T_r$ ont des rayons spectraux $\rho(T_i)$ distincts, mais multiplicativement dépendants deux à deux, on peut trouver des entiers positifs $d_1, \dots, d_r$ tels que $\rho(T_1)^{d_1} = \cdots = \rho(T_r)^{d_r}$, et itérer chaque système (105.*i*) d_i fois, pour pouvoir appliquer le théorème 18 avec les matrices $T_i^{d_i}$.

Notons qu'à l'inverse du théorème 14, on n'impose pas aux ensembles $\mathcal{E}_i$ de contenir *toutes* les valeurs des fonctions des systèmes (105.*i*).

La condition (ii) du théorème 18 garantit une certaine forme d'indépendance entre les points $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$. Cette condition est indispensable. En effet, rien n'interdit dans l'énoncé du lemme de choisir r copies d'un même système mahlérien. Sans cette condition, on pourrait prendre $\boldsymbol{\alpha}_1 = \cdots = \boldsymbol{\alpha}_r$ et choisir $\mathcal{E}_1 = \cdots = \mathcal{E}_r$ des multi-ensembles identiques, composés de t nombres algébriquement indépendants. Le multi-ensemble $\mathcal{E}$ contiendrait alors chaque nombre en r exemplaires. L'idéal $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})$ serait donc de hauteur $(r-1)t$, tandis que chacun des idéaux $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)$ serait réduit à 0.

Ce premier théorème de pureté permet de traiter simultanément les valeurs de plusieurs fonctions T-mahlériennes, en des points suffisamment indépendants. Cependant, ce théorème ne dit rien des valeurs de fonctions mahlériennes associés à des transformations dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants. Pour cela on a besoin du résultat suivant.

Théorème 19 (Second théorème de pureté : transformations indépendantes)**.** *Soit $r \geq 2$ un entier. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, on considère un système mahlérien régulier singulier*

$$\begin{pmatrix} f_{i,1}(T_i \boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(T_i \boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} = A_i(\boldsymbol{z}_i) \begin{pmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i) \\ \vdots \\ f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i) \end{pmatrix} \tag{106.i}$$

où $A_i(\boldsymbol{z}_i)$ est une matrice de $\mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i))$, T_i est une matrice à coefficients entiers naturels, de rayon spectral $\rho(T_i)$. Supposons que

(i) *pour chaque i, $\boldsymbol{\alpha}_i \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^{n_i}$ soit un point régulier pour le système (106.i) et que le couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ soit admissible,*

(ii) *pour chaque paire (i,j), $i \neq j$, on ait $\log \rho(T_i)/\log \rho(T_j) \notin \mathbb{Q}$.*

On considère pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, un multi-ensemble

$$\mathcal{E}_i \subseteq \{f_{i,1}(\boldsymbol{\alpha}_i), \dots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)\}$$

et on pose $\mathcal{E} := \cup_{i=1}^r \mathcal{E}_i$. On a

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})\,.$$

Les deux théorèmes ci-dessus sont énoncés en terme de pureté des relations algébriques. Ils induisent en fait un résultat fort d'indépendance algébrique.

Corollaire 20. *Sous les hypothèses du théorème 18 ou du théorème 19, on a*

$$\mathrm{deg.tr}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}(\mathcal{E}_i)\,.$$

Une utilisation conjointe des deux théorèmes de pureté nous permet alors d'obtenir le théorème 4, que nous ré-énonçons ici.

Théorème 4. *Soient $r \geq 2$ un entier et pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, $f_i(z)$ une fonction q_i-mahlérienne, $q_i \geq 2$, et un nombre algébrique α_i, $0 < |\alpha_i| < 1$. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit satisfaite :*

(i) *les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont multiplicativement indépendants,*

(ii) *les nombres $q_1, \dots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants.*

Alors les nombres $f_1(\alpha_1), \dots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants si et seulement si ils sont tous transcendants.

Remarque 10. L'algorithme 3 décrit au chapitre II montre comment savoir si chacun des nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ est transcendant. On peut, par conséquent, vérifier algorithmiquement l'indépendance algébrique entre les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$.

Soulignons le fait qu'aucune condition d'indépendance algébrique entre les fonctions n'est requise dans ce théorème. Les fonctions portant sur des variables toutes distinctes, l'indépendance algébrique découle immédiatement de la transcendance de chacune des fonctions. C'est là une différence importante avec la théorie de E-fonctions, pour laquelle démontrer l'indépendance algébrique de valeurs grâce au théorème de Siegel-Shidlovskii requiert d'avoir démontré celle des fonctions au préalable.

La première section de ce chapitre est consacrée à l'étude des propriétés des systèmes réguliers singuliers. En nous appuyant sur ces propriétés, ainsi que sur les théorèmes 14 et 15, nous démontrerons dans la section 2 les deux théorèmes de pureté. Dans la section 3 nous nous attarderons sur les conséquences des théorèmes de pureté quant aux fonctions mahlériennes d'une variable. Nous démontrerons notamment les théorèmes 4 et 5.

1 Propriété des systèmes réguliers singuliers

L'une des principales limitations des deux théorèmes de pureté est qu'ils ne s'appliquent pas à l'ensemble des fonctions mahlériennes, mais seulement à celles qui sont régulières singulières. On peut montrer notamment que la série génératrice de la suite de Rudin-Shapiro de l'exemple 22 n'est pas régulière singulière. Les fonctions régulières singulières forment pour autant une classe générique de fonctions mahlériennes, comme le montre la propriété 43. Nous proposons dans cette section, d'en étudier quelques propriétés.

Proposition 43. *Soit T une matrice inversible n'ayant aucune racine de l'unité parmi ses valeurs propres. Un système T-mahlérien dont la matrice $A(\boldsymbol{z})$ est définie et inversible en 0 est régulier singulier. En particulier, une fonction mahlérienne qui satisfait à une équation inhomogène telle que $p_0(0)p_m(0) \neq 0$ est régulière singulière.*

Démonstration. Comme T est une matrice inversible n'ayant aucune racine de l'unité parmi ses valeurs propres, on peut définir (voir [67]) un ordre total $\succ$ sur $\mathbb{N}^n$ de tel sorte que, pour tout $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^n$, on a :

- $\boldsymbol{\lambda} T \succ \boldsymbol{\lambda}$,
- $|\boldsymbol{\lambda}| > |\boldsymbol{\gamma}| \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} \succ \boldsymbol{\gamma}$.

Numérotons $\boldsymbol{\lambda}_i$, $i \in \mathbb{N}$ les éléments de $\mathbb{N}^n$ ainsi ordonnés. Notons

$$A(\boldsymbol{z}) =: \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}_i} ,$$

avec A_i, $i \in \mathbb{N}$, des matrices à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, $A_0 = A(0)$. On définit par récurrence une suite de matrices Φ_i, $i \in \mathbb{N}$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, en posant

$$\Phi_0 := \mathrm{I}_n, \qquad \text{et} \qquad \Phi_i := \left(\sum_{j,k\,:\,\boldsymbol{\lambda}_j + T\boldsymbol{\lambda}_k = \boldsymbol{\lambda}_i} A_j \Phi_k \right) A_0^{-1} .$$

L'ordre $\succ$ sur $\mathbb{N}^n$ nous garantit que les indices k intervenant dans la somme de droite sont tous strictement inférieurs à i. Ainsi la suite est bien définie. On pose alors $\Phi(\boldsymbol{z}) := \sum_i \Phi_i \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\lambda}_i}$. Les coefficients de la matrice $A(\boldsymbol{z})$ étant des fonctions analytiques, la récurrence nous garantit que les coefficients $\Phi(\boldsymbol{z})$ sont des fonctions analytiques. On vérifie qu'on a, par ailleurs,

$$\Phi(\boldsymbol{z}) A_0 = A(\boldsymbol{z}) \Phi(T\boldsymbol{z}) ,$$

ce qui termine la preuve de la première partie de la proposition.

Considérons à présent une fonction mahlérienne $f(\boldsymbol{z})$ satisfaisant à une équation inhomogène

$$p_{-1}(\boldsymbol{z}) + p_0(\boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{z}) + p_1(\boldsymbol{z}) f(T\boldsymbol{z}) + \cdots + p_m(\boldsymbol{z}) f(T^m \boldsymbol{z}) = 0 .$$

Le système compagnon associé à cette équation a pour matrice

$$A(\boldsymbol{z}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{p_{-1}(\boldsymbol{z})}{p_0(\boldsymbol{z})} & -\frac{p_1(\boldsymbol{z})}{p_0(\boldsymbol{z})} & \cdots & \cdots & -\frac{p_m(\boldsymbol{z})}{p_0(\boldsymbol{z})} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si $p_0(0) \neq 0$, la matrice $A(\boldsymbol{z})$ est définie en 0 et si $p_m(0) \neq 0$, elle est inversible. D'après la première partie de la proposition, la fonction $f(\boldsymbol{z})$ est régulière singulière. □

Dans [67], les auteurs annoncent avoir démontré le théorème 14 pour les systèmes mahlériens dont la matrice est définie et inversible en 0. Leur preuve est toutefois incomplète, comme nous en avons discuté au chapitre I. D'après la proposition 43, le théorème 14 fournit la première preuve du théorème principal de [67]. Il couvre également les résultats de Kubota [58] pour les systèmes de la forme (62) et de Ku. Nishioka [88] pour les systèmes de la forme (63). En effet, pour ces systèmes, les matrices sont définies et inversibles en 0. Nous allons voir que les systèmes réguliers singuliers forment une classe de systèmes plus naturelle que celle des systèmes dont la matrice est définie et inversible en 0. Le lemme suivant l'illustre bien.

Lemme 44. *Soit $f(\boldsymbol{z})$ une fonction T-mahlérienne solution d'un système régulier singulier. Alors tout système mahlérien contenant $f(\boldsymbol{z})$ et dont la taille est minimale, parmi les systèmes contenant $f(\boldsymbol{z})$, est régulier singulier.*

Démonstration. Notons d'abord que, si $A(\boldsymbol{z})$ est la matrice d'un système régulier singulier, alors pour toute matrice inversible $\Phi(\boldsymbol{z})$ à coefficients dans $\widehat{\mathbf{K}}$, le système associé à la matrice $\Phi(\boldsymbol{z})^{-1}A(\boldsymbol{z})\Phi(T\boldsymbol{z})$ est régulier singulier. Autrement dit, la classe des systèmes réguliers singuliers est stable par changement de jauge ramifié.

Supposons que $f(\boldsymbol{z})$ soit la première coordonnée d'un vecteur colonne $(f_1(\boldsymbol{z}),\dots,f_m(\boldsymbol{z}))^\top$, solution d'un système T-mahlérien, régulier singulier de type (59). Soit m_1 l'ordre de l'équation mahlérienne homogène minimale satisfaite par $f(\boldsymbol{z})$. Les fonctions $f(\boldsymbol{z}), f(T\boldsymbol{z}),\dots,f(T^{m_1-1}\boldsymbol{z})$ forment une famille libre de l'espace vectoriel engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ par les fonctions $f_1(\boldsymbol{z}),\dots,f_m(\boldsymbol{z})$. Tout système minimal contenant $f(\boldsymbol{z})$ est donc de taille supérieure ou égale à m_1.

Supposons dans un premier temps que $m = m_1$. Comme $f_1(\boldsymbol{z}),\dots,f_m(\boldsymbol{z})$ et $f(\boldsymbol{z}), f(T\boldsymbol{z}),\dots,f(T^{m-1}\boldsymbol{z})$ sont deux bases du même espace vectoriel, il existe une matrice inversible $\Phi(z)$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, telle que

$$\Phi(\boldsymbol{z})\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{z}) \\ f(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f(T^{m-1}\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(f(\boldsymbol{z}), f(T\boldsymbol{z}),\dots,f(T^{m-1}\boldsymbol{z}))^\top$ est donc solution du système T-mahlérien de matrice $\Phi(\boldsymbol{z})^{-1}A(\boldsymbol{z})\Phi(T\boldsymbol{z})$, qui est donc, lui aussi, régulier singulier.

Supposons à présent que $m > m_1$. Grâce au théorème de la base incomplète, on prend une base $f(\boldsymbol{z}), f(T\boldsymbol{z}),\dots,f(T^{m_1-1}\boldsymbol{z}), g_1(\boldsymbol{z}),\dots,g_{m-m_1}(\boldsymbol{z})$ de l'espace vectoriel engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ par les fonctions $f_1(\boldsymbol{z}),\dots,f_m(\boldsymbol{z})$. Il existe donc une matrice $\Phi(\boldsymbol{z})$ inversible, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$, telle que

$$\Phi(\boldsymbol{z})\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f(T^{m_1-1}\boldsymbol{z}) \\ g_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ g_{m-m_1}(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(f(\boldsymbol{z}),\dots,f(T^{m_1-1}\boldsymbol{z}), g_1(\boldsymbol{z}),\dots,g_{m-m_1}(\boldsymbol{z}))^\top$ est donc solution du système mahlérien associé à la matrice $B(\boldsymbol{z}) := \Phi(\boldsymbol{z})^{-1}A(\boldsymbol{z})\Phi(T\boldsymbol{z})$, qui

est, par conséquent, régulier singulier. Il existe donc une matrice inversible $\Theta(\boldsymbol{z})$, à coefficients dans $\widehat{\mathbf{K}}$, et une matrice constante Ω, telles que

$$\Theta(\boldsymbol{z})\Omega = B(\boldsymbol{z})\Theta(T\boldsymbol{z})\,. \tag{107}$$

Par ailleurs, la matrice $B(\boldsymbol{z})$ est triangulaire inférieure et on peut supposer sans perte de généralité que la matrice Ω est triangulaire supérieure (en prenant une décomposition de Jordan de Ω, par exemple). Notons

$$\Theta(\boldsymbol{z}) := \left(\begin{array}{c|c} \Theta_1(\boldsymbol{z}) & \Theta_2(\boldsymbol{z}) \\ \hline \Theta_3(\boldsymbol{z}) & \Theta_4(\boldsymbol{z}) \end{array}\right), \quad \Omega := \left(\begin{array}{c|c} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \hline 0 & \Omega_4 \end{array}\right),$$

d'une part et

$$B(\boldsymbol{z}) := \left(\begin{array}{c|c} B_1(\boldsymbol{z}) & 0 \\ \hline B_3(\boldsymbol{z}) & B_4(\boldsymbol{z}) \end{array}\right),$$

d'autre part, la décomposition par blocs de ces matrices. En identifiant les blocs dans (107), on trouve

$$\Theta_1(\boldsymbol{z})\Omega_1 = B_1(\boldsymbol{z})\Theta_1(T\boldsymbol{z})\,.$$

En particulier, le système

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f(T^{m_1-1}\boldsymbol{z}) \end{pmatrix} = B_1(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} f(T\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ f(T^{m_1}\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}$$

est régulier singulier. □

Cela montre en particulier que la propriété pour une fonction d'être régulière singulière, ne dépend pas du système choisi. En particulier, si le système minimal pour la fonction n'est pas régulier singulier, aucun système contenant cette fonction ne l'est. La démonstration du lemme 44 montre en fait que tout sous-système d'un système régulier singulier reste régulier singulier. Bien sûr, partant d'une fonction régulière singulière, on peut toujours la considérer dans un système qui n'est pas régulier singulier, en grossissant le système avec des fonctions qui ne sont pas régulières singulières. Mais, si un système mahlérien n'est pas régulier singulier, c'est que l'une des fonctions du système n'est pas régulière singulière. La terminologie *régulier singulier* n'est donc pas tant attachée au système qu'aux fonctions qui composent ce système.

Un autre aspect de la classe des systèmes réguliers singuliers, que nous utiliserons largement par la suite, est sa stabilité par union.

Proposition 45. *Soit $A_1(\boldsymbol{z})$ (resp. $A_2(\boldsymbol{y})$) une matrice associée à un système T_1-mahlérien, (resp. T_2-mahlérien) régulier singulier. Alors, le système associé à la matrice diagonale par blocs* $\operatorname{diag}(A_1(\boldsymbol{z}), A_2(\boldsymbol{y}))$ *est un*

système T-mahlérien régulier singulier, où T est la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(T_1, T_2)$. *Si de plus $T_1 = T_2$, alors le système associé à la matrice diagonale par blocs* $\mathrm{diag}(A_1(\boldsymbol{z}), A_2(\boldsymbol{z}))$ *est un système T_1-mahlérien régulier singulier.*

Démonstration. La preuve découle immédiatement de la définition. □

2 Démonstration des deux théorèmes de pureté

Un aspect remarquable de la méthode de Mahler en plusieurs variables est qu'elle permet de considérer simultanément plusieurs systèmes en différents points, pourvu que ces points soient suffisamment indépendants. En effet, étant donnés une matrice T et des points algébriques $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ tels que les couples $(T, \boldsymbol{\alpha}_1), \dots, (T, \boldsymbol{\alpha}_r)$ sont tous admissibles, la matrice diagonale par blocs $S := \mathrm{diag}(T, \dots, T)$ et le point $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ satisfont toujours aux conditions (a) et (b) de la définition 7 d'admissibilité. On peut donc regrouper nos r systèmes mahlériens dans un seul grand système diagonal par blocs et appliquer le théorème 14, à la condition supplémentaire que la paire $(S, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait à la condition (c) de la définition 7. Dans le théorème 18, c'est la condition (ii) qui garantit cela. La proposition 45 nous assure, alors, que ce système diagonal par blocs reste régulier singulier.

Pour démontrer les théorèmes 18 et 19, a besoin de quelques lemmes préparatoires.

Lemme 46. *Pour chaque i, $1 \le i \le r$, considérons un multi-ensemble de séries entières*

$$\mathcal{F}_i := \{f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i), \dots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i)\} \subset \overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{z}_i]]\,,$$

et posons $\mathcal{F} = \cup \mathcal{F}_i$. On a

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i)}(\mathcal{F}_i)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que les fonctions portent sur des variables distinctes. □

On montre alors que l'égalité entre les idéaux de relations algébriques est une conséquence de l'égalité des degrés de transcendance.

Lemme 47. *Considérons des multi-ensembles $\mathcal{E}_i \subset \mathbb{C}$, $1 \le i \le r$, et notons $\mathcal{E} = \cup \mathcal{E}_i$. Si*

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,, \tag{108}$$

alors on a

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})\,.$$

Démonstration. Remarquons que l'inclusion

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}) \subset \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) \tag{109}$$

est immédiate. Il est donc suffisant de prouver que $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})$ est un idéal premier dont la hauteur est supérieure ou égale à celle de $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})$. On a les égalités

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\right) &= m_i - \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,, \quad \forall i,\ 1 \le i \le r \\ \mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})\right) &= M - \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})\,, \end{aligned}$$

où $M = m_1 + \cdots + m_r$. D'après (108) on a donc

$$\mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ht}\left(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\right)\,.$$

Posons $\mathcal{I} := \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})$. Alors l'isomorphisme

$$\frac{\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_1]}{\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_1)} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \frac{\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}_r]}{\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_r)} \simeq \frac{\overline{\mathbb{Q}}[\boldsymbol{X}]}{\mathcal{I}}$$

montre que l'idéal $\mathcal{I}$ est premier. En effet, un produit tensoriel d'anneaux intègres, sur un corps algébriquement clos, est un anneau intègre. De plus, en raisonnant comme ci-dessus, on trouve $\mathrm{ht}(\mathcal{I}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ht}(\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i))$. Par conséquent, $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E})$ et $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})$ sont deux idéaux premiers de même hauteur. D'après (109), ils sont égaux. □

Afin d'être en mesure de considérer des ensembles $\mathcal{E}_i$ qui ne contiennent qu'une partie des fonctions, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 48. *Soient $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ des multi-ensembles non vides de nombres complexes tels que $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{F}_i$, pour chaque i, $1 \le i \le r$. Supposons que*

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_i)\,.$$

Alors

$$\mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,.$$

Démonstration. Supposons, dans un premier temps, que tous les éléments de $\mathcal{F}_i$, $1 \le i \le r$, soient algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Par hypothèse, tous les éléments de $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i$ sont algébriquement indépendants. Alors tous les éléments de l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$ sont algébriquement indépendants,

ce qui prouve le lemme. Supposons à présent que certains éléments de $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq r$, soient algébriquement dépendants. Pour chaque i, on choisit un sous ensemble $\mathcal{E}'_i \subset \mathcal{E}_i$, composé d'éléments algébriquement indépendants et tel que $\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}'_i) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)$. On complète alors l'ensemble $\mathcal{E}'_i$ en un ensemble $\mathcal{F}'_i \subset \mathcal{F}_i$ d'éléments algébriquement indépendants, tels que $\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}'_i) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_i)$. D'après la première partie de la preuve on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}'_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}'_i)\,.$$

On en déduit que

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i\right) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}'_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}'_i) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,.$$

□

Le théorème 18 découle alors du théorème 14.

Démonstration du théorème 18. Posons pour chaque i, $1 \leq i \leq r$,

$$\mathcal{F}_i := \{f_{i,1}(\boldsymbol{\alpha}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)\}\,.$$

Comme chaque couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible et que chaque point $\boldsymbol{\alpha}_i$ est régulier, d'après le théorème 14 on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i)}(f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i), \ldots, f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i)) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_i)\,. \tag{110}$$

D'autre part, considérons la matrice diagonale par blocs

$$T := \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix},$$

et le point $\boldsymbol{\alpha} := (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$. Comme chacun des couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible et que les matrices $T_1, \ldots, T_r$ ont toutes le même rayon spectral ρ, le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait automatiquement aux conditions (a) et (b) de la définition 7 (pour plus de détails, voir l'appendice A). D'après le théorème de Masser, théorème Mas82, la condition (ii) du théorème 18 garantit que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait également à la condition (c) de la définition 7. Le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est donc admissible. On peut réunir toutes les fonctions $f_{i,j}(\boldsymbol{z}_i)$ dans un grand système T-mahlérien diagonal par blocs, pour lequel le point $\boldsymbol{\alpha}$ est régulier. D'après la proposition 45, ce nouveau système reste régulier singulier. Posons $\mathcal{F} := \cup \mathcal{F}_i$. D'après le théorème 14, on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) = \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F})\,. \tag{111}$$

D'autre part, d'après le lemme 46, on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})}(f_{1,1}(\boldsymbol{z}_1),\dots,f_{r,m_r}(\boldsymbol{z}_r)) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}_i)}(f_{i,1}(\boldsymbol{z}_i),\dots,f_{i,m_i}(\boldsymbol{z}_i))\,. \tag{112}$$

On déduit donc de (110), (111) et (112) que

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_i)\,.$$

Alors, d'après le lemme 48, on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,.$$

Le théorème découle alors du lemme 47. □

La démonstration du théorème 19 est alors identique, à l'exception du fait que l'on n'a pas besoin de regrouper tous les systèmes dans un seul grand système mahlérien.

Démonstration du théorème 19. Posons pour chaque i, $1 \leq i \leq r$,

$$\mathcal{F}_i := \{f_{i,1}(\boldsymbol{\alpha}_i),\dots,f_{i,m_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)\}\,.$$

Comme chaque couple $(T_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$ est admissible et que chaque point $\boldsymbol{\alpha}_i$ est régulier, d'après le théorème 14, l'égalité (110) est satisfaite. D'autre part, d'après le théorème 15, l'égalité (111) est satisfaite. On déduit alors du lemme 46, de (110) et de (111) que

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}_i)\,.$$

Alors, d'après le lemme 48, on a

$$\deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \deg.\mathrm{tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i)\,.$$

Le théorème découle alors du lemme 47. □

3 Conséquences sur les fonctions d'une variable

Les théorèmes 18 et 19 s'appliquent aux fonctions mahlériennes de plusieurs variables. Nous avons montré, par exemple, comment la combinaison de ces deux théorèmes nous permet de décrire totalement les relations algébriques entre les valeurs de l'ensemble des fonctions de Hecke-Mahler $f_\omega(z)$

pour lesquelles ω est un nombre quadratique irrationnel [16]. Notre source principale de motivation reste cependant l'étude des fonctions mahlériennes d'une variable. C'est notre connaissance des systèmes mahlériens d'une variable et de leurs singularités, combinée aux deux théorèmes de pureté, qui nous permet de démontrer le théorème 4. En effet, ce théorème a la particularité d'être valable pour des fonctions mahlériennes régulières singulières considérées hors de leur système, évaluées en des points algébriques quelconques du disque unité épointé.

3.1 Démonstration du théorème 4

Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne régulière singulière et α un nombre algébrique du disque unité épointé tel que $f(z)$ est défini en α. On commence par montrer qu'il existe une fonction q-mahlérienne $g(z)$ possédant les propriétés suivantes :

(a) $g(\alpha) = f(\alpha)$,

(b) $g(z)$ est la première coordonnée d'un vecteur solution d'un système q^l-mahlérien régulier singulier, disons,

$$\begin{pmatrix} g_1(z) = g(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ g_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}.$$

pour un certain entier $l > 0$,

(c) le point α est régulier pour ce système.

Considérons un entier l_0 tel que $f(z)$ est définie aux points α^{q^l} pour tout $l \geq l_0$. Considérons le système compagnon associé à l'équation q^{l_0}-mahlérienne homogène minimale pour $f(z)$ et notons

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} g_1(z^{q^{l_0}}) \\ \vdots \\ g_m(z^{q^{l_0}}) \end{pmatrix},$$

ce système, avec $g_1(z) = f(z)$. D'après le lemme 44, ce système reste régulier singulier. Comme les fonctions $g_1(z), \ldots, g_m(z)$ sont linéairement indépendantes et définies au point α, il découle du théorème 9 qu'il existe un multiple l de l_0 tel que le nombre α^{q^l} est régulier pour le système

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} g_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ g_m(z^{q^l}) \end{pmatrix}, \tag{113}$$

où

$$A_l(z) = A(z)A(z^{q_0^l})A(z^{q^{2l_0}})\cdots A(z^{q^{l-l_0}})\,.$$

De plus, α n'est pas un pôle de $A_l(z)$. Soit $(b_1(z),\ldots,b_r(z))$ la première ligne de $A_l(z)$. Posons

$$g(z) = b_1(\alpha)g_1(z^{q^l}) + \cdots + b_r(\alpha)g_r(z^{q^l})\,. \tag{114}$$

En conjuguant $A_l(z^{q^l})$ par une matrice constante, on obtient un nouveau système q^l-mahlérien régulier singulier dont une solution a $g(z)$ comme première coordonnée. De plus, comme le point α^{q^l} est régulier pour le système (113), le point α est régulier pour ce nouveau système. Par ailleurs, d'après (113) et (114) on a bien $g(\alpha) = f(\alpha)$. Cela termine la première partie de la preuve.

Prouvons tout d'abord le cas (i) du théorème 4. Supposons que pour chaque i, $1 \le i \le r$, le nombre $f_i(\alpha_i)$ soit transcendant. Choisissons pour chaque i une indéterminée z_i. D'après la première partie de la preuve, quitte à remplacer q_i par $q_i^{l_i}$ pour l_i un entier, on peut associer à chaque couple (f_i,α_i), un système régulier singulier

$$\begin{pmatrix} g_{i,1}(z_i) \\ \vdots \\ g_{i,m_i}(z_i) \end{pmatrix} = B_i(z_i) \begin{pmatrix} g_{i,1}\left(z_i^{q_i}\right) \\ \vdots \\ g_{i,m_i}\left(z_i^{q_i}\right) \end{pmatrix}, \tag{115.i}$$

tel que $g_{i,1}(\alpha_i) = f_i(\alpha_i)$ et tel que le point α_i est régulier pour ce système. Séparons les entiers $1,\ldots,r$ en s classes $\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_s$ de telle sorte que i et j sont dans des classes différentes si et seulement si q_i et q_j sont multiplicativement indépendants. En itérant le système (115.i) un bon nombre de fois, on peut assurer, sans perte de généralité, que pour chaque entier k, $1 \le k \le s$, il existe un entier ρ_k tel que $q_i = \rho_k$ pour tout $i \in \mathcal{I}_k$. Posons

$$\mathcal{E} := \{g_{1,1}(\alpha_1),\ldots,g_{r,1}(\alpha_r)\},\quad \text{et}\quad \mathcal{E}_k := \{g_{i,1}(\alpha_i) \mid i \in \mathcal{I}_k\},\ \forall k \in \{1,\ldots,s\}\,.$$

Pour chaque $k \in \{1,\ldots,s\}$ on considère le système mahlérien en les variables $z_i, i \in \mathcal{I}_k$, dont la matrice est la matrice diagonale par blocs formée des $B_i(z_i), i \in \mathcal{I}_k$, et la transformation est $T_k = \rho_k \mathrm{I}_{c_k}$, où I_n est la matrice identité de taille n et $c_k = |\mathcal{I}_k|$. Ainsi, on a transformé les r systèmes mahlériens d'une variable en s systèmes mahlériens, possédant chacun c_k variables. Par hypothèse, les nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ sont multiplicativement indépendants. D'après le théorème Mas82, chacun des couples $(T_k, \boldsymbol{\alpha}_k := (\alpha_i)_{i\in\mathcal{I}_k})$ est admissible. De plus, par hypothèse, le point $\boldsymbol{\alpha}_k$ est régulier. Par construction, les nombres $\rho(T_1) = \rho_1,\ldots,\rho(T_s) = \rho_s$ sont deux à deux multiplicativement indépendants. On peut appliquer le second théorème de pureté, le théorème 19, à nos s systèmes mahlériens. Il vient que

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_k \mid \mathcal{E})\,. \tag{116}$$

Maintenant, choisissons un $k \in \{1, \dots, s\}$. Comme les nombres $\alpha_i, i \in \mathcal{I}_k$, sont multiplicativement indépendants, on peut appliquer le premier théorème de pureté, le théorème 18, à l'ensemble des c_k systèmes mahlériens (115.*i*), $i \in \mathcal{I}_k$. Comme pour chaque $i \in \mathcal{I}_k$, $g_{i,1}(\alpha_i) = f_i(\alpha_i)$ est transcendant, on en déduit que les nombres $g_{i,1}(\alpha_i)$, $i \in \mathcal{I}_k$, sont algébriquement indépendants. En d'autres termes, $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_k) = \{0\}$. Il découle alors de (116), que $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \{0\}$, c'est-à-dire, que les nombres $f_1(\alpha_1), \dots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Démontrons à présent le cas (ii) du théorème 4. On suppose que pour chaque i, $1 \le i \le r$, le nombre $f_i(\alpha_i)$ est transcendant. Comme précédemment, on associe à chaque couple $(f_i(z), \alpha_i)$ une fonction $g_i(z)$ satisfaisant aux hypothèses (a), (b) et (c). Comme les nombres q_i sont deux à deux multiplicativement indépendants, on peut appliquer le second théorème de pureté, le théorème 19, à ces systèmes. En notant

$$\mathcal{E} := \{g_1(\alpha_1), \dots, g_r(\alpha_r)\}$$

et $\mathcal{E}_i := \{g_i(\alpha_i)\}$, $1 \le i \le r$, on obtient

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E})\,.$$

Mais, comme $g_i(\alpha_i) = f_i(\alpha_i)$ est transcendant, on a $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}) = 0$ pour chaque i, $1 \le i \le r$, et finalement $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \{0\}$. Comme précédemment, on en déduit que les nombres $f_1(\alpha_1), \dots, f_r(\alpha_r)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

□

Généraliser le théorème 4 aux fonctions mahlériennes de plusieurs variables pourrait avoir son intérêt. Pour cela, il faudrait, comme dans la preuve du théorème 4, pouvoir « gommer » chaque singularité du système. Si une singularité provient d'un zéro du déterminant de la matrice $A(\boldsymbol{z})$, cela ne présente pas tellement plus de difficulté, puisque la construction du lemme 7 du chapitre I fonctionne toujours. Il est plus difficile cependant de gérer les singularités qui proviennent de pôles de la matrice $A(\boldsymbol{z})$.

3.2 Indépendance algébrique des fonctions mahlériennes en une variable

En 1969, Cobham [43] a démontré qu'une suite qui est à la fois p et q-automatique, pour deux entiers p et q multiplicativement indépendants, est ultimement périodique. Ce résultat est désormais connu sous le nom de *théorème de Cobham*. En 2017, les auteurs de [6] ont généralisé ce résultat.

Théorème ABe18 (Adamczewski et Bell, 2018)**.** *Une fonction irrationnelle ne peut pas être à la fois p et q-mahlérienne pour des entiers p et q multiplicativement indépendants.*

Ce résultat était une conjecture de van der Poorten [110] dont il suggérait que la démonstration fournirait une nouvelle preuve du théorème de Cobham. La preuve de [6], bien qu'elle démontre la conjecture de van der Poorten, ne donne pas une nouvelle preuve du théorème de Cobham, puisqu'elle s'appuie sur celui-ci. Schäfke et Singer [97] ont donné une nouvelle preuve du théorème ABe18, ne s'appuyant pas sur le théorème de Cobham et fournissant ainsi une nouvelle démonstration de ce dernier. Leur approche ne repose cependant pas sur la méthode de Mahler et la preuve imaginée par van der Poorten du théorème ABe18 reste encore à construire.

Le théorème ABe18 est en fait un théorème d'indépendance linéaire entre fonctions p et q-mahlériennes : deux fonctions transcendantes, respectivement p et q mahlériennes, sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dès que les nombres p et q sont multiplicativement indépendants. Loxton et van der Poorten ont en réalité conjecturé que deux fonctions transcendantes, respectivement p et q-mahlériennes sont algébriquement indépendantes. C'est un cas particulier de la conjecture B qui a tout récemment été démontré [11]. La méthode de démonstration de [11] ne semble toutefois pas se généraliser à plus de deux fonctions. Dans ce cadre, la méthode de Mahler permet une très grande souplesse, puisque le théorème 16 est valable pour un nombre quelconque de systèmes. Le théorème 5, que nous ré-énonçons ici, fournit donc une démonstration de la conjecture B dans le cadre régulier singulier.

Théorème 5. *Soient $q_1, \dots, q_r \geq 2$ des entiers deux à deux multiplicativement indépendants et pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, une fonction q_i-mahlérienne $f_i(z)$ régulière singulière et transcendante. Les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Démonstration du théorème 5. Comme les fonctions sont toutes transcendantes, d'après le théorème Bec94, il existe un voisinage épointé de l'origine $\mathcal{V} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ à l'intérieur duquel chacune des fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ prend des valeurs transcendantes aux points algébriques. Soit $\alpha \in \mathcal{V}$. Par hypothèse, les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$ sont tous transcendants. Comme les entiers $q_1, \dots, q_r$ sont deux à deux multiplicativement indépendants, d'après le point (ii) du théorème 4, les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$ sont algébriquement indépendants. En particulier, les fonctions $f_1(z), \dots, f_r(z)$ sont algébriquement indépendantes. □

Le théorème 5 pourrait s'étendre aux fonctions mahlériennes régulières singulières, de n variables, associées à des transformations $T_1, \dots, T_r$, dont les rayons spectraux sont deux à deux multiplicativement indépendants. Il suffit pour cela de trouver un point $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ tel que

- $\boldsymbol{\alpha}$ est régulier pour chacun des systèmes,
- chacun des couples $(T_i, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible,

- chacune des fonctions prend une valeur transcendante au point $\boldsymbol{\alpha}$.

Le théorème CZ05, combiné avec le théorème 16, semble permettre de garantir l'existence d'un tel point. Le second théorème de pureté permet alors de conclure à l'indépendance algébrique des valeurs de toutes ces fonctions au point $\boldsymbol{\alpha}$. On en déduit l'indépendance algébrique des fonctions.

3.3 Un exemple : variations sur la suite de Baum-Sweet

Soit $q \geq 2$ un entier. On considère le morphisme q-uniforme

$$\sigma_q : \begin{cases} a & \mapsto & ab\cdots b \\ b & \mapsto & cb\cdots b \\ c & \mapsto & bd\cdots d \\ d & \mapsto & dd\cdots d \end{cases},$$

ainsi que le codage $\tau : a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 0, d \mapsto 0$. Le mot $\mathfrak{bs}_q$, obtenu comme image par τ du point fixe de σ_q commençant par la lettre a est une variante en base q de la suite de Baum-Sweet. On a par exemple,

$$\mathfrak{bs}_3 := 111011011100\cdots, \quad \text{et } \mathfrak{bs}_4 := 11110111011101111000\cdots.$$

La n-ième lettre du mot $\mathfrak{bs}_q$ vaut 1 si et seulement si l'écriture en base q de l'entier n n'a pas de blocs de 0 consécutifs de longueur paire. Notons alors, pour chaque q, $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$ la série génératrice du mot $\mathfrak{bs}_q$. Notons également $\mathcal{Q}$ l'ensemble des entiers $q \geq 2$ qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme p^n, avec $p, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Proposition 49. *Les fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$, $q \in \mathcal{Q}$, sont toutes algébriquement indépendantes.*

Démonstration. Les suites n'étant pas périodiques, les fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$, $q \geq 2$, sont toutes irrationnelles. D'après le théorème Ra92, elles sont transcendantes. La construction de Cobham présentée au chapitre I nous donne la fonction $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$ dans un système de taille 4. Comme l'application qui à chaque lettre de l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ associe la première lettre de son image par σ_q est inversible, d'après la proposition 43, chacune des fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$ est régulière singulière. Par ailleurs, par hypothèse, n'importe quelle paire de l'ensemble $\mathcal{Q}$ est formée d'entiers multiplicativement indépendants. Alors n'importe quel sous-ensemble fini de $\{f_{\mathfrak{bs},q}(z),\ q \in \mathcal{Q}\}$ satisfait aux hypothèses du théorème 5. □

Proposition 50. *Pour chaque $q \geq 2$, on note ξ_q le nombre réel dont le développement binaire est la suite $\mathfrak{bs}_q$. Les nombres ξ_q, $q \in \mathcal{Q}$, sont algébriquement indépendants.*

Démonstration. Le point $\frac{1}{2}$ est régulier pour chacun des systèmes associés aux fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$, puisque les seules éventuelles singularités de tels systèmes sont des entiers algébriques. Considérons n'importe famille finie d'entiers distincts $q_1, \ldots, q_r \in \mathcal{Q}$. Comme les nombres ξ_{q_i} sont automatiques et irrationnels, d'après le théorème AB07b, ils sont transcendants. Alors, d'après le point (ii) du théorème 4, les nombres $\xi_{q_1}, \ldots, \xi_{q_r}$ sont algébriquement indépendants. □

En utilisant consécutivement les deux théorèmes de pureté on peut en réalité obtenir le résultat suivant.

Proposition 51. *Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour chaque couple $(p,q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, soit $\xi_{p,q}$ le nombre réel dont le développement en base p est le mot $\mathfrak{bs}_q$. Les nombres*

$$\xi_{p,q},\ \xi_{p^q,q}\,,\ (p,q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}\,,$$

sont algébriquement indépendants.

Démonstration. N'importe quel point de la forme $\frac{1}{p}$ est régulier pour chacun des systèmes associés aux fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$. Considérons une famille finie $q_1, \ldots, q_r$ d'éléments distincts de $\mathcal{Q}$ et $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts. Pour chaque couple (i,j), $1 \leq i, j \leq r$, on note

$$\mathcal{E}_{i,j} := \{\xi_{p_j,q_i}, \xi_{p_j^{q_i},q_i}\}$$

et $\mathcal{E}_i := \cup_j \mathcal{E}_{i,j}$. D'après le premier théorème de pureté, on a

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_{i,j} \mid \mathcal{E}_i)\,.$$

Comme pour l'exemple 13, le critère donné par Ku. Nishioka dans [85] garantit que, pour chaque q, les fonctions $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$ et $f_{\mathfrak{bs},q}(z^q)$ sont algébriquement indépendantes. Comme $f_{\mathfrak{bs},q}(z)$ satisfait à une équation q-mahlérienne homogène d'ordre 2, d'après le théorème de Nishioka, pour chaque couple (i,j), les nombres $\xi_{p_j,q_i} = f_{\mathfrak{bs},q_i}(1/p_j)$ et $\xi_{p_j^{q_i},q_i} = f_{\mathfrak{bs},q_i}(1/p_j^{q_i})$ sont algébriquement indépendants. On a donc $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_{i,j}) = \{0\}$ pour chaque couple (i,j) et, par conséquent, $\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i) = \{0\}$. Posons alors $\mathcal{E} := \cup_i \mathcal{E}_i$. D'après le second théorème de pureté on a

$$\mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Alg}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}_i \mid \mathcal{E}) = \{0\}\,.$$

Les nombres

$$\xi_{p_j,q_i},\ \xi_{p_j^{q_i},q_i},\ 1 \leq i, j \leq r\,,$$

sont donc algébriquement indépendants. □

Pistes pour de futures recherches

1 Vers une théorie pour les systèmes généraux

Les travaux présentés dans les chapitres III et IV représentent des avancées importantes quant à la théorie des fonctions mahlériennes. Toutefois, la restriction aux systèmes réguliers singuliers, bien qu'elle n'empêche pas de traiter la plupart des exemples, est une obstruction à l'obtention de résultats généraux concernant le développement des nombres réels en base entière. Récemment, nous pensons avoir trouvé une nouvelle preuve du théorème 16 valable pour tous les systèmes mahlériens et non plus seulement pour les systèmes réguliers singuliers. Cette démarche, si elle aboutit, fournirait une démonstration des conjectures A, B et C.

2 Sur la régularité des corps de fonctions mahlériennes de plusieurs variables

Le théorème 16 appliqué pour $r = 1$ montre uniquement qu'une relation algébrique entre les valeurs de fonctions $f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_m(\boldsymbol{z})$ formant un vecteur solution d'un système mahlérien régulier singulier provient, par spécialisation, d'une relation sur $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}$ entre les fonctions. La relation ne se relève pas immédiatement sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$. Pour obtenir cela, la régularité de l'extension $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z}, f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_m(\boldsymbol{z}))$ est nécessaire. Notons qu'il n'y a rien de surprenant à cela puisque, comme le montre le lemme 2 du chapitre I, pouvoir relever les relations entre les valeurs des fonctions nécessite la régularité des extensions. Pour obtenir des énoncés comme les deux théorèmes de pureté, cette hypothèse n'est pas nécessaire. Cependant, quand il s'agit d'étudier la transcendance de valeurs de fonctions mahlériennes de plusieurs variables, cette hypothèse devient indispensable. En effet, comme dans le chapitre I, cette transcendance découlerait de l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ entre les fonctions $1, f_1(\boldsymbol{z}), \dots, f_m(\boldsymbol{z})$. Sans l'hypothèse de régularité, on est contraint de pouvoir garantir l'indépendance linéaire de ces fonctions sur $\overline{\mathbb{Q}(\boldsymbol{z})}$, ce qui semble souvent aussi difficile que de garantir leur indépendance algébrique.

En particulier, le théorème 16 ne permet pas de démontrer l'analogue suivant du théorème 1 pour les fonctions mahlériennes de plusieurs variables, même dans le cas régulier singulier.

Conjecture D. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $f(\boldsymbol{z})$ une fonction T-mahlérienne, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un point algébrique tel que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible. Alors le nombre $f(\boldsymbol{\alpha})$ est soit transcendant, soit dans $\mathbb{K}(\boldsymbol{\alpha})$.*

Dans le cadre des fonctions mahlériennes d'une variable, la régularité sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ du corps engendré par les coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien découle du fait qu'une fonction mahlérienne d'une variable est soit rationnelle, soit transcendante. Obtenir un tel résultat pour les fonctions mahlériennes de plusieurs variables permettrait, combiné avec un travail autour des singularités, de démontrer la conjecture D pour les fonctions régulières singulières.

3 Sur les nombres morphiques

À tout morphisme σ sur un alphabet fini $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\}$ on peut associer sa *matrice d'incidence*, notée T_σ. C'est la matrice $n \times n$ dont la (i, j)-ième coordonnée est égale au nombre d'occurrences de la lettre a_j dans le mot $\sigma(a_i)$. Si une suite morphique est engendrée par un morphisme σ tel que le rayon spectral de T_σ vaut un nombre réel ρ, on dit qu'elle est *ρ-morphique*. Par extension on dit qu'un réel ξ est *ρ-morphique* s'il existe un entier $b \geq 2$ tel que le développement de ξ en base b est une suite ρ-morphique. Un résultat classique montre que les suites q-morphiques sont précisément les suites q-automatiques.

Cobham [42] a montré que la série génératrice de toute suite morphique s'obtient comme spécialisation d'une fonction T_σ-mahlérienne de plusieurs variables en un point de la forme $(z, \dots, z)$. La méthode de Mahler devrait permettre de démontrer la transcendance des nombres ρ-morphiques irrationnels, quand $\rho > 1$ (un résultat déjà démontré à l'aide du théorème de sous-espace dans [17], ou [9]). On s'attend même à ce que la méthode de Mahler nous permette de démontrer le résultat suivant.

Conjecture E. *Soient $\rho_1, \rho_2 > 1$ deux réels multiplicativement indépendants. Un réel irrationnel ne peut pas être à la fois ρ_1-morphique et ρ_2-morphique.*

En dehors des limitations concernant les systèmes réguliers singuliers, ou la régularité de l'extension, mentionnées aux deux précédents paragraphes, une troisième difficulté s'ajoute. Bien que la matrice d'incidence T_σ ait un rayon spectral strictement supérieur à 1, rien ne garantit que les couples

$(T_\sigma, \boldsymbol{\alpha})$ auxquels on veut appliquer la méthode de Mahler, soient admissibles. Comme le signale van der Poorten [110], quand ce n'est pas le cas, il semble qu'il y ait toujours une manière de réduire le nombre de variables afin de pouvoir appliquer la méthode de Mahler avec une matrice T de taille inférieure. On ne sait toutefois pas le faire dans le cas général.

4 Mesures d'indépendance algébrique

En reprenant leur démonstration du théorème AB07b, Adamczewski et Bugeaud ont pu obtenir des mesures de transcendance pour les nombres automatiques [4]. Par *mesure de transcendance*, on entend, étant donné un nombre transcendant ξ, une estimation du minimum des nombres $|P(\xi)|$, quand $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ parcourt l'ensemble des polynômes dont le degré et la hauteur sont chacun bornés par un nombre fixé. Dans [3] les auteurs précisent comment, de manière générale, l'utilisation du théorème du sous-espace permet d'obtenir des mesures de transcendance.

En 1986, Becker [27] avait obtenu par la méthode de Mahler une mesure de transcendance pour les valeurs aux points algébriques d'une fonction mahlérienne $f(z)$ satisfaisant à une équation de la forme

$$f(z) = a(z)f(z^q) + b(z)\,,$$

avec $a(z), b(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Ku. Nishioka [86] a généralisé ce résultat en donnant une mesure d'indépendance algébrique pour les valeurs des coordonnées d'un vecteur solution d'un système mahlérien, en un point algébrique régulier. Par *mesure d'indépendance algébrique*, on entend, étant donnés des nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$, une estimation du minimum des nombres $|P(\xi_1, \ldots, \xi_r)|$, quand $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_r]$ parcourt l'ensemble des polynômes dont le degré et la hauteur sont chacun majorés par un nombre fixé. Amou [18], Töpfer [107] et Philipon [91] ont montré comment de telles estimations permettent également d'obtenir des résultats de transcendance pour les valeurs de fonctions mahlériennes évaluées en certains points transcendants.

Dans la continuité de ces travaux, il serait intéressant de voir quelles mesures de transcendance on peut obtenir pour les nombres automatiques, en utilisant la méthode de Mahler. De même, il serait intéressant de reprendre la preuve du théorème 16 afin d'obtenir une mesure d'indépendance algébrique pour les nombres $f_1(\alpha_1), \ldots, f_r(\alpha_r)$ du théorème 4. Obtenir une telle mesure nécessiterait d'estimer la hauteur des coefficients des polynômes dans la construction de l'approximant de Padé du lemme 38. C'est une piste que nous n'avons, pour l'instant, pas du tout explorer.

Bibliographie

[1] B. Adamczewski, *On the many faces of the Kempner number*, J. Integer Seq. **16** (2013), Article 13.2.15, 34 pp.

[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Annals of Math. **165** (2007), 547–565.

[3] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue-Siegel-Roth-Schmidt*, Proc. London Math. Soc. **101** (2010), 1–31.

[4] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Nombres réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance*, J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 65–98.

[5] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, F. Luca, *On the values of a class of analytic functions at algebraic points*, Acta Arith., **135** (2008), 1–18.

[6] B. Adamczewski, J. Bell *A problem about Mahler functions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **17** (2017), 1301–1355

[7] B. Adamczewski, J. Bell, D. Smertnig. *A height gap theorem for coefficients of Mahler functions* preprint (2020), arXiv :2003.03429 [math.NT], 42 pp.

[8] B. Adamczewski, *Mahler's method*, Doc. Math., Extra Volume Mahler Selecta (2019), 95–122.

[9] B. Adamczewski, J. Cassaigne, M. Le Gonidec, *On the computational complexity of algebraic numbers: the Hartmanis–Stearns problem revisited*, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 3085–3115.

[10] B. Adamczewski, T.Dreyfus, C. Hardouin, *Hypertranscendence and linear difference equations*, à paraître au J. Amer. Math. Soc., preprint (2019), arXiv :1910.01874 [math.NT], 30 pp.

[11] B. Adamczewski, T.Dreyfus, C. Hardouin, M. Wibmer, *Algebraic independance and linear difference equations*, travail en cours.

[12] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. **350** (2012) 1–4.

[13] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques*, Proc. London Math. Soc. **115** (2017), 55–90.

[14] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs*, J. Théor. Nombres Bordeaux **30** (2018), 557–573.

[15] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Mahler's method in several variables I: The theory of regular singular systems*, preprint (2018), arXiv :1809.04823 [math.NT], 65 pp.

[16] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Mahler's method in several variables II: Applications to base change problems and finite automata*, preprint (2018), arXiv :1809.04826 [math.NT], 47 pp.

[17] J. Albert *Propriétés combinatoires et arithmétiques de certaines suites automatiques et substitutives*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris Sud (2006).

[18] M. Amou *Algebraic independence of the values of certain functions at a transcendental number*, Acta Arithmetica **59** (1991), 71–82.

[19] J.-P. Allouche, J.O. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press (2003).

[20] J.-P. Allouche, J.O. Shallit, *The ring of k-regular sequences*, Theoret. Comput. Sci **96** (1992), 163–197.

[21] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Annals of Math. **151** (2000), 705–740.

[22] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance*, Annals of Math. **151** (2000), 741–756.

[23] Y. André, *Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties: a new differential Galois correspondence*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **47** (2014), 449–467.

[24] D.H. Bailey, J.M. Borwein, R.E. Crandall, C. Pomerance, *On the binary expansions of algebraic numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 487–518.

[25] A. Barbe, F. von Haeseler *Limit set of automatic sequences*, Advances in Math. **175** (2003), 169–196.

[26] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, G. Philibert, *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin*, Invent. Math. **124** (1996), 1–9.

[27] P-G. Becker, *Transcendence measures by Mahler's transcendence method*, Bull. of the Austral. Math. Soc., **33(1)** (1986), 59–65.

[28] P-G. Becker, *k-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations* Journal of Number Theory **49** (1994), 269–286.

[29] J. Bell, Y. Bugeaud, M. Coons, *Diophantine approximation of Mahler numbers*, Proc. London Math. Soc. **110** (2015), 1157–1206.

[30] J. Bell, M. Coons, *Transcendence tests for Mahler functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 1061–1070

[31] J. Bell, M. Coons, E. Rowland *The Rational-Transcendental Dichotomy of Mahler Functions*, J. of Integer **Seq. 16 No. 2** (2013), Article 13.2.10, 11p.

[32] D. Bertrand, *Theta functions and transcendence*, Madras Ramanujan J. **1** (1997), 339–350.

[33] F. Beukers, *A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), 369–379.

[34] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 24–271.

[35] É. Borel, *Sur les chiffres décimaux de* $\sqrt{2}$ *et divers problèmes de probabilités en chaîne*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. **230** (1950), 591–593

[36] J.M. Borwein, P.B. Borwein, *On the complexity of familiar functions and numbers*, SIAM Rev. **30 No. 4** (1988), 589–601

[37] T.C. Brown, *On locally finite semigroups* (In Russian), Ukraine Math. J. **20** (1968), 732–738.

[38] Y. Bugeaud, *On the expansions of a real number to several integer bases*, Rev. Mat. Iberoamericana **28** (2012), 931–946.

[39] D.G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Soc. **8** (1933), 254–260.

[40] F. Chyzak, T. Dreyfus, P. Dumas, M. Mezzarobba, *Computing solutions of linear Mahler equations* Mathematics of Computation, **87** (2018), 2977–3021.

[41] A. Cobham, *A Proof of Transcendence Based on Functional Equation*, IBM Research Report, **RC-2041** (1968).

[42] A. Cobham, *On the Hartmanis-Stearns problem for a class of tag machines*, Conference Record of 1968 Ninth Annual Symposium on Switching and Automata Theory, Schenectady, New York (1968), 51–60.

[43] A. Cobham, *On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata*, Math. Systems Theory **3** (1969), 186–192.

[44] P. Corvaja, U. Zannier, *S-Unit Points on Analytic Hypersurfaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **38** (2005), 76–92.

[45] P. Dumas, *Récurrences mahlériennes, suites automatiques, études asymptotiques*, Thèse, Université de Bordeaux I, Talence (1993).

[46] T. Dreyfus, C. Hardouin, J. Roques, *Hypertranscendence of solutions of Mahler equations*, J. Eur. Math. Soc. **20** (2018), 2209–2238.

[47] G. Everest, A.J. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence Sequences*, Mathematical Surveys and Monographs **104**, Amer. Math. Soc. (2003), 318 p.

[48] G. Fernandes, *Méthode de Mahler en caractéristique non nulle : un analogue du théorème de Ku. Nishioka*, Ann. Inst. Four **68** (2018), 2553–2580.

[49] G. Fernandes, *Regular extensions and algebraic relations between values of Mahler functions in positive characteristic* à paraître aux Trans. Amer. Math. Soc. (2018), arXiv :1808.00719 [math.NT], 31 p.

[50] S. Ferenczi, C. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory **67** (1997), 146–161.

[51] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[52] H. Furstenberg, *Intersections of Cantor sets and transversality of semigroups*, in Problems in Analysis (Sympos. Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1970), 41–59.

[53] F.R. Grantmacher, *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers (1959).

[54] J. Hartmanis R.E. Stearns, *On the computational complexity of algorithms*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 28–306.

[55] R.A. Horn, C.R. Johnson., *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press (1994).

[56] W. Krull, *Parameterspezialisierung in Polynomringen II. Das Grundpolynom*, Arch. Math. (Basel) **1** (1948), 129–137.

[57] K.K. Kubota, *An Application of Kronecker's Theorem to Transcendence Theory*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1976), exp. 25, 10p.

[58] K.K. Kubota, *On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values*, Math. Ann. **227** (1977), 9–50.

[59] S. Lang, *Algebra*, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics **21** Springer-Verlag, New York (2002).

[60] M. Laurent, *Équations exponentielles-polynômes et suites récurrentes linéaires, II*, Journal of Number Theory **31** (1989), 24–53.

[61] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *On algebraic functions satisfying a class of functional equations*, Aequationes Math **14** (1976) 413–420.

[62] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *A class of hypertranscendental functions*, Aequationes Math **16** (1977) 93-106.

[63] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain solutions of functional equations*, Journal of Number Theory **9** (1977), 87–106.

[64] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain solutions of functional equations II*, J. Austral. Math. Society **24** (1977), 15–47.

[65] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain solutions of functional equations III*, Bull. Austral. Math. Society **16** (1977), 393–408.

[66] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Algebraic independence properties of the Fredholm series*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **26** (1978), 31–45.

[67] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations*, J. reine angew. Math. **330** (1982), 159–172.

[68] J.H. Loxton, A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of automata: regular sequences*, J. reine angew. Math. **392** (1988), 57–69.

[69] J.H. Loxton, Automata and transcendence in *New advances in transcendence theory (Durham 1986)*, Cambridge University Press (1988), 215–228.

[70] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **101** (1929), 342–367.

[71] K. Mahler, *Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen*, Math. Ann. **103** (1930), 573–587.

[72] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendente Funktionen*, Math. Z. **32** (1930), 545–585.

[73] K. Mahler, *Remarks on a paper by W. Schwarz*, Journal of Number Theory **1** (1969), 512–521.

[74] K. Mahler, *Fifty years as a mathematician*, J. Number Theory **14** (1982), 121–155.

[75] D. Masser, *A vanishing theorem for power series*, Invent. Math. **67** (1982), 275–296.

[76] D. Masser, *Algebraic independence properties of the Hecke-Mahler series*, Quart. J. Math. Oxford **50** (1999), 207–230.

[77] M. Mendès France, *Nombres algébriques et théorie des automates*, Enseign. Math. **26** (1980), 193–199.

[78] M. Morse, G.A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[79] M. Morse, G.A. Hedlund, *Symbolic dynamics II*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[80] Yu.V. Nesterenko, *On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions*, Mat. Sb. **128 (170)** (1985) ; traduit en anglais dans Math. USSR Sb. **56** (1987), 545–567.

[81] Yu.V. Nesterenko, *Fonctions modulaires et problèmes de transcendance*, CRAS Paris **322** (1996), 909–914, (voir également Sbornik **187 (9)** (1996), 65–96).

[82] Yu. V. Nesterenko, A. B. Shidlovskii, *On the linear independence of values of E-functions*, Mat. Sb. **187** (1996), 93–108 ; traduit dans Sb. Math. **187** (1996), 1197–1211.

[83] Ke. Nishioka, *Algebraic function solutions of a certain class of functional equations*, Arch. Math. **44** (1985), 330–335.

[84] Ku. Nishioka, *On a problem of Mahler for transcendency of function values*, J. Austral. Math. Soc. (Séries A) **35** (1982), 386–393.

[85] Ku. Nishioka, *New approach in Mahler's method*, J. Reine angew. Math. **407** (1990), 202–219.

[86] Ku. Nishioka, *Algebraic independence measures of the values of Mahler functions*, J. Reine angew. Math. **420** (1991), 203–214.

[87] Ku. Nishioka, *Algebraic independence by Mahler's method and S-unit equations*, Compos. Math. **92** (1994), 87–110.

[88] Ku. Nishioka, *Algebraic independence of Mahler functions and their values*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 51–70.

[89] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math. **1631**, Springer-Verlag, Berlin (1997).

[90] Ku. Nishioka, *Algebraic theory of difference equations and Mahler functions*, Aequ. Math. **84** (2012), 24–259.

[91] P. Philippon, *Indépendance algébrique et K-fonctions*, J. Reine Angew. Math. **497** (1998), 1–15.

[92] P. Philippon, *Groupes de Galois et nombres automatiques*, J. Lond. Math. Soc. **92** (2015), 596–614.

[93] B. Randé, *Équations Fonctionnelles de Mahler et Applications aux Suites p-régulières*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Talence (1992).

[94] J. Roques, *An introduction to difference Galois theory*, CRM Series in Math. Phy. Sym. and integrability of difference equations (2017), 359–390.

[95] J. Roques, *On the algebraic relations between Mahler functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 321–355.

[96] A.M. Turing, *On computable numbers*, Proc. Lond. Math. Soc. **42** (1937), 230–265 ; corrigendum **43** (1937), 544–546.

[97] R. Schäfke, M. Singer *Consistent systems of linear differential and difference equations*, J. of the Eur. Math. Soc., **21** (2019), 2751–2792.

[98] O.F.G. Schilling, *The theory of valuations* (Mathematical Surveys, **4**) New York, American Mathematical Society (1950).

[99] T. Schneider, *Einführung in die Transzendenten Zahlen*, Springer, Berlin (1958).

[100] W. Schwarz, *Remarks on the Irrationality and Transcendence of Certain Series*, Math. Scand., **20** (1967), 269–274.

[101] A. B. Shidlovskii, *Transcendental Numbers*, Degruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter (1989), Chap 12.

[102] J. Shallit, *Real numbers with bounded partial quotients: a survey*, Enseign. Math. **38** (1992), 151–187.

[103] J. Shallit, Fife's Theorem Revisited, in *Developments in Language Theory*, Lecture Notes in Compt. Sci., Springer **6795** (2011), 397–405.

[104] P. Shmerkin, *On Furstenberg's intersection conjecture, self-similar measures, and the L^q norms of convolutions*, Annals of Math. **189** (2019), 319–391.

[105] C.L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss., (1929), 41–69.

[106] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.

[107] T. Töpfer, *An Axiomatization of Nesterenko's Method and Applications On Mahler Functions* Journal of Number Theory **49 (1)** (1994), 1–26.

[108] A.J. van der Poorten, *Propriétés arithmétiques et algébriques de fonctions satisfaisant certaines équations fonctionnelles*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1975), exp. 7, 13p.

[109] A.J. van der Poorten, *On the transcendance and algebraic independance of certain somewhat amusing numbers*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1976), exp. 14, 13p.

[110] A.J. van der Poorten, *Remarks on automata, functional equations and transcendence*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987), Exp. 27, 11pp.

[111] M. van der Put and M.F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **328**, Springer-Verlag, Berlin (2003).

[112] M. Waldschmidt, Words and Transcendence, in *Analytic Number Theory*, Cambridge University Press (2009), 449-470.

[113] M. Wu, *A proof of Furstenberg's conjecture on the intersections of $\times p$- and $\times q$-invariant sets*, Annals of Math. **189** (2019), 707–751.

[114] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra II.*, Graduate Texts in Math. **29** Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1975).

Appendice A

Conditions d'admissibilité

La méthode de Mahler ne peut fonctionner que lorsque le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible au sens de la définition 7. Si les conditions (a) et (b) peuvent être facilement vérifiées *à la main*, la condition (c) est loin d'être évidente et il a fallu attendre le théorème de Masser (théorème Mas82) pour disposer d'une description simple des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfaisant à cette condition.

Nous allons expliquer en quoi ces trois conditions sont nécessaires pour permettre à la méthode de Mahler de fonctionner. Puis, en reprenant les travaux de Kubota [58], de Loxton et van der Poorten [63, 64] et de Masser [75], nous donnerons une caractérisation simple des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$ admissibles.

1 Conditions (a) et (b)

La méthode de Mahler en une variable repose sur le constat selon lequel, pour tout nombre algébrique non nul α du disque unité, les suites de termes généraux $-\log\left|\alpha^{q^k}\right|$ et $\log H\left(\alpha^{q^k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, ont une vitesse de croissance comparable. En effet, on a pour tout entier k,

$$\frac{\log H\left(\alpha^{q^k}\right)}{\log\left|\alpha^{q^k}\right|} = \frac{\log H(\alpha)}{\log|\alpha|}\,. \tag{117}$$

L'égalité (117) permet d'obtenir une majoration et une minoration pour la fonction auxiliaire dont les ordres de grandeur sont comparables et, en ajustant correctement les paramètres, d'aboutir à une contradiction. Dans le cadre des fonctions de plusieurs variables, on doit pouvoir garantir que la transformation $\boldsymbol{z} \mapsto T\boldsymbol{z}$ satisfait à la même propriété. Autrement dit, étant donnés un point non nul $\boldsymbol{\alpha} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ et une matrice carrée T, de taille n, à coefficients dans $\mathbb{N}$, on souhaiterait avoir un encadrement de la forme

$$0 \leq \frac{\log H\left(T^k\boldsymbol{\alpha}\right)}{-\log||T^k\alpha||} = \mathcal{O}(1)\,, \tag{118}$$

pour tout k assez grand. Le lemme suivant montre que seules les conditions (a) et (b) permettent cela.

Lemme 52. *Soient T une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$. L'égalité (118) est vraie pour tout k assez grand si et seulement si les conditions* (a) *et* (b) *de la définition 7 sont satisfaites par le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$.*

Démonstration. Soient T une matrice $n \times n$ à coefficients entiers naturels et $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$. Si le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait soit à l'estimation (118), soit à la condition (b), on a nécessairement $T^k\boldsymbol{\alpha} \mapsto 0$. En particulier, on peut supposer, quitte à changer $\boldsymbol{\alpha}$ en $T^{k_0}\boldsymbol{\alpha}$ pour un entier k_0, que $||\boldsymbol{\alpha}|| < 1$. On a alors un encadrement

$$0 \leq -\log ||T^k\boldsymbol{\alpha}|| \leq \log H(T^k\boldsymbol{\alpha}) \leq ||T^k|| \log H(\boldsymbol{\alpha})\,.$$

Supposons que le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfasse aux conditions (a) et (b). Alors l'estimation (118) découle directement de l'encadrement ci-dessus. Nous allons montrer à présent l'implication inverse. Notons $\rho(T)$ le rayon spectral de la matrice T. Celle-ci étant à coefficients positifs c'est une valeur propre de T qui possède un vecteur propre à coordonnées positives ou nulles. En regardant l'espace caractéristique associé à cette valeur propre, on obtient la majoration

$$-\log ||T^k\boldsymbol{\alpha}|| = \mathcal{O}(\rho(T)^k)$$

et d'un autre côté la minoration

$$\log H(T^k\boldsymbol{\alpha}) \geq \gamma \|T^k\|\,,$$

pour un certain réel $\gamma > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait à l'estimation (118), les conditions (a) et (b) de la définition 7 découlent immédiatement de la majoration et de la minoration ci-dessus. □

Exemple 32. Les conditions (a) et (b) concernant l'admissibilité des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$ empêchent au théorème 14 de s'appliquer à un système contenant à la fois une fonction 2-mahlérienne et une fonction 3-mahlérienne. En effet, pour un tel système, la matrice serait

$$T := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On aurait alors $\|T^k\| = 3^k$ et, par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^2$, tel que $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$,

$$\log \|T^k\boldsymbol{\alpha}\| = 2^k \log |\boldsymbol{\alpha}_1|\,,$$

pour tout k assez grand. Ainsi, les conditions (a) et (b) ne peuvent être satisfaites pour un même ρ. C'est précisément pour cette raison que l'on a besoin du théorème 15, qui permet de considérer simultanément plusieurs systèmes mahlériens.

Loxton et van der Poorten [63, 64] ont donné une caractérisation des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfaisant aux conditions (a) et (b). Les résultats qu'ils démontrent dans [64] impliquent le lemme suivant.

Lemme 53. *Soit T une matrice de taille n, à coefficients entiers naturels. Notons $\rho(T)$ son rayon spectral. Supposons que la matrice T possède un vecteur propre à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre $\rho(T)$, alors les conditions* (a) *et* (b) *sont satisfaites pour tout point $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ tel que $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$, quand k tend vers l'infini.*

Démonstration. Rappelons des résultats classiques sur les matrices dont les coefficients sont des entiers naturels (voir [53]). On dit qu'une matrice carrée T à coefficients dans $\mathbb{N}$, est *irréductible* s'il n'existe pas de permutation des lignes et colonnes, telle que T prenne la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix},$$

où A et C sont des matrices carrées. D'après le théorème de Frobenius [53, Chapter III, Theorem 2], si T est irréductible, la matrice T a un vecteur propre à coordonnées strictement positives, associé à son rayon spectral $\rho(T)$. De plus, si T a exactement h valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ de module $\rho(T)$, alors $\lambda_i^h = \rho(T)$ pour tout i, $1 \le i \le h$. L'entier h s'appelle la *période* de la matrice T. Quand $h = 1$, on dit que T est *primitive*.

Toute matrice T à coefficients entiers naturels, peut s'écrire, après conjugaison par une matrice de permutation, sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & T_\kappa & & & \\ S_{1,1} & \cdots & S_{1,\kappa} & T_{\kappa+1} & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ S_{\nu,1} & & \cdots & & S_{\nu,\kappa+\nu-1} & T_{\kappa+\nu} \end{pmatrix},$$

où $T_1, \ldots, T_{\kappa+\nu}$ sont des matrices carrées irréductibles et telle que, pour chaque i, $1 \le i \le \nu$, au moins l'une des matrices $S_{i,j}$, $1 \le j < \kappa + i$ est non nulle. Cette décomposition est appelée la *forme normale* de la matrice T. Elle est unique à permutation près des blocs $T_1, \ldots, T_\kappa$, des blocs $T_{\kappa+1}, \ldots, T_{\kappa+\nu}$ et des lignes et colonnes à l'intérieur de chaque bloc. Pour une démonstration, on renvoie à [53, Chapter 4]. D'après [53, Chapter 3, Theorem 6], une matrice T satisfait aux conditions du lemme 53 si et seulement si sa forme normale satisfait aux conditions suivantes

(1) $\rho(T_1) = \cdots = \rho(T_\kappa) = \rho(T)$,

(2) $\rho(T_{\kappa+i}) < \rho(T)$ pour $1 \leq i \leq \nu$.

Soit T une matrice satisfaisant aux conditions du lemme. Elle satisfait donc aux conditions (1) et (2). Soit $\boldsymbol{\alpha}$ choisi comme dans le lemme 53. Le couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfait aux conditions (a) et (b) si et seulement si c'est le cas du couple $(T, T^k\boldsymbol{\alpha})$, pour chaque entier k. Comme $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$, on peut supposer que $\boldsymbol{\alpha}$ appartient au disque unité ouvert. Notons $\boldsymbol{u}$ la projection du vecteur

$$(-\log|\alpha_1|, \ldots, -\log|\alpha_n|)$$

sur l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(T)$. C'est un vecteur à coordonnées strictement positives. D'après Loxton et van der Poorten [63, Lemma 4], on a pour tout vecteur $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n$

$$\log|(T^{kh}\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}| = -\rho(T)^{kh}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}\rangle + \mathcal{O}(\rho'^{kh}),$$

où h est la période de T et $0 < \rho' < \rho(T)$. En prenant $\boldsymbol{\mu} = e_i$ le i-ième vecteur de la base canonique, on obtient la condition (b), pour $\rho = \rho(T)$. Par ailleurs, en changeant $\boldsymbol{\alpha}$ en le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ de la base canonique et en prenant pour $\boldsymbol{\mu}$ le vecteur $\boldsymbol{e}_j$ de la base canonique, le nombre $\log|(T^k\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|$ est simplement $t_{i,j,k}$, le coefficient i, j de la matrice T^k. L'égalité ci-dessus nous donne alors la condition (a). □

Même s'il n'est démontré à aucun moment, le résultat suivant, qui montre que les conditions du lemme 53 sont optimales, est présent en creux dans [64].

Lemme 54. *Soit $(T, \boldsymbol{\alpha})$ un couple satisfaisant aux conditions* (a) *et* (b) *de la définition 7, alors la matrice T possède un vecteur propre à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre ρ.*

Démonstration. On va tout d'abord montrer que le nombre réel ρ intervenant dans les conditions (a) et (b) n'est autre que le rayon spectral de la matrice T. D'après la condition (a) les coefficients de T^k sont en $\mathcal{O}(\rho^k)$. Cela implique que $\rho(T) \leq \rho$. Notons L l'application

$$L : \boldsymbol{z} \mapsto (-\log|z_1|, \ldots, -\log|z_n|)$$

et $\boldsymbol{x} = L(\boldsymbol{\alpha})$, de sorte que

$$L(T^k\boldsymbol{\alpha}) = T^k(\boldsymbol{x}).$$

où $T^k(\boldsymbol{x})$ désigne la multiplication usuelle entre la matrice T^k et le vecteur colonne $\boldsymbol{x}^\top$. D'après la condition (b), $\|T^k(\boldsymbol{x})\| \geq c\rho^k$ pour un réel positif c. Donc $\rho \leq \rho(T)$. On a donc bien $\rho = \rho(T)$.

Montrons à présent que T possède un vecteur à coordonnées strictement positives, associé à la valeur propre $\rho(T)$. Quitte à changer T en T^h, on peut supposer que T est une matrice primitive et donc que toutes les autres

valeurs propres de T ont un module strictement inférieur à $\rho(T)$. Supposons par l'absurde que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(T)$ ne contienne aucun vecteur à coordonnées strictement positives. Alors, il existe un entier i_0, $1 \leq i_0 \leq n$, tel que la i_0-ième coordonnée de n'importe quel vecteur propre de T, associé à la valeur propre $\rho(T)$, est nulle. Notons U le sous-espace caractéristique de T associé à la valeur propre $\rho(T)$ et V un supplémentaire de U, stable par T. On doit distinguer deux situations.

Premier cas : l'espace vectoriel U possède un vecteur dont la i_0-ième coordonnée est strictement positive. Notons $\boldsymbol{e}_{i_0}$ le i_0-ième vecteur de la base canonique. On peut décomposer

$$\boldsymbol{e}_{i_0} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\,,$$

où $\boldsymbol{u} \in U$ et $\boldsymbol{v} \in V$. Alors, en appliquant la matrice T^k, $k \in \mathbb{N}$ à cette décomposition, la i_0-ième coordonnée de $T^k\boldsymbol{e}_{i_0}$ est asymptotiquement supérieure à $ck\rho(T)^k$. Or, ce nombre est précisément la coordonnée (i_0, i_0) de la matrice T^k. Cela contredit la condition (a).

Second cas : l'espace vectoriel U ne possède aucun vecteur dont la i_0-ième coordonnée est strictement positive. On pose, comme ci-dessus, $\boldsymbol{x} = L(\boldsymbol{\alpha})$ et on décompose $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{u} \in U$ et $\boldsymbol{v} \in V$. Alors, la i_0-ième coordonnée de $T^k\boldsymbol{x}$ est la même que celle de $T^k\boldsymbol{v}$. Par hypothèse, il existe un réel $\rho' < \rho(T)$ tel que cette coordonnée soit inférieure à ρ'^k pour tout k assez grand. Cela contredit la condition (b). □

2 Lemme de zéros

Comme toutes les preuves de transcendance, on a besoin de garantir, quand on applique la méthode de Mahler, que certaines quantités ne s'annulent pas, afin de pouvoir les minorer. Les résultats permettant de garantir cela sont regroupés sous l'appellation *Lemmes de zéros*. Dans le cadre de la méthode de Mahler en une variable, le lemme de zéros utilisé est simplement le « principe des zéros isolés ». En effet, si $f(z)$ est une fonction analytique non nulle, α un point non nul du disque unité et $q \geq 2$ un entier, alors $f(\alpha^{q^k})$ ne peut être nul que pour un nombre fini d'entiers k, le point 0 étant un point d'accumulation de la suite $(\alpha^{q^k})_{k\in\mathbb{N}}$. Quand on considère des fonctions analytiques de plusieurs variables, le théorème des zéros isolés n'est plus valable et l'on a besoin de résultats plus fins pour prouver qu'une série analytique $f(\boldsymbol{z})$ ne peut pas s'annuler en tout point de la forme $T^k\boldsymbol{\alpha}$.

Après des résultats partiels [70, 58, 64], Masser a établi le théorème Mas82, qui donne une caractérisation plus simple des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$ satisfaisant à la condition (c). Elle impose en particulier à la matrice T d'être inversible et de n'avoir aucune racine de l'unité parmi ses valeurs propres. La condition (c) est notamment satisfaite si les coordonnées du point $\boldsymbol{\alpha}$ sont

globalement multiplicativement indépendantes. Cela nous pousse à adopter, suivant [47], la définition suivante.

Définition 10. Soit T une matrice carrée de taille n, à coefficients dans $\mathbb{N}$. On dit qu'un point algébrique $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ est *T-indépendant* s'il n'existe pas de n-uplet d'entiers $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n$ tel que $(T^k\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}} = 1$ pour tout k dans une progression arithmétique.

En particulier, un point dont toutes les coordonnées sont multiplicativement indépendantes est T-indépendant, dès que la matrice T est inversible et qu'aucune de ses valeurs propres n'est une racine de l'unité. Le théorème Mas82 se reformule alors ainsi.

Lemme 55. *Soit T une matrice inversible de taille n à coefficients dans $\mathbb{N}$ et dont aucune valeur propre n'est une racine de l'unité. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in (\overline{\mathbb{Q}}^\star)^n$ tel que $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$. La condition* (c) *est satisfaite si et seulement si le point $\boldsymbol{\alpha}$ est T-indépendant.*

3 Caractériser l'admissibilité des couples $(T, \boldsymbol{\alpha})$

Les résultats des deux sections précédentes nous poussent à adopter la définition suivante.

Définition 11. On dit qu'une matrice carrée T, à coefficients dans $\mathbb{N}$, est de classe $\mathcal{M}$ (ou tout simplement que $T \in \mathcal{M}$), si elle satisfait aux trois conditions suivantes.

(i) la matrice T est inversible,

(ii) aucune de ses valeurs propres n'est une racine de l'unité,

(iii) elle possède un vecteur propre à coordonnées strictement positives, associé à la valeur propre $\rho(T)$, son rayon spectral.

En particulier, le rayon spectral d'une matrice de classe $\mathcal{M}$ est strictement supérieur à 1.

Remarque 11. La classe $\mathcal{M}$ possède une propriété importante pour les applications. Si T est une matrice de la classe $\mathcal{M}$, la matrice obtenue en collant en diagonale plusieurs copies de T, *i.e.*, la matrice

$$\begin{pmatrix} T & & \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix}$$

est, elle aussi, de classe $\mathcal{M}$. Plus généralement, si $T_1, \dots, T_r$ sont plusieurs matrices de classe $\mathcal{M}$ et de **même rayon spectral**, la matrice

$$\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}$$

est, elle aussi, de classe $\mathcal{M}$. Inversement, si les rayons spectraux des matrices sont deux à deux multiplicativement indépendants, on n'a aucun moyen de regrouper les matrices dans une matrice de classe $\mathcal{M}$.

Notons $\mathcal{U}(T)$ l'ensemble des points $\boldsymbol{\alpha}$ de $(\mathbb{C}^\star)^n$ pour lesquels la condition (b) est satisfaite. Loxton et van der Poorten [63, 64] affirmaient sans démonstration que pour $T \in \mathcal{M}$, l'ensemble $\mathcal{U}(T)$ est un voisinage épointé de l'origine. Nous donnons ici une preuve de cette affirmation, tout en donnant une caractérisation plus précise de l'ensemble $\mathcal{U}(T)$.

Lemme 56. *Soit $T \in \mathcal{M}$, alors*

$$\mathcal{U}(T) = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{C}^\star)^n : \lim_{k\to\infty} T^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \right\} .$$

En particulier, $\mathcal{U}(T)$ est un ouvert de $(\mathbb{C}^\star)^n$, qui contient la boule unité épointée de $\mathbb{C}^n$ pour la norme infinie.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{U}(T)$ contient la boule unité épointée de $(\mathbb{C}^\star)^n$, pour la norme infinie. Soit $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{C}^\star)^n$ tel que $\|\boldsymbol{\alpha}\| < 1$. Posons

$$L(\boldsymbol{\alpha}) := (-\log|\alpha_1|, \dots, -\log|\alpha_n|) > 0 .$$

Par hypothèse, T possède un vecteur propre $\boldsymbol{\mu}$, à coordonnées strictement positives, associé à la valeur propre $\rho(T)$. On peut supposer que toutes les coordonnées de $\boldsymbol{\mu}$ sont plus petites que celles de $L(\boldsymbol{\alpha})$. Posons alors $\boldsymbol{\nu} := L(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\mu} > 0$. D'après [63, Lemma 4], on a

$$-\log\|T^k\boldsymbol{\alpha}\| = \|T^k(L(\boldsymbol{\alpha}))\| = \|T^k(\boldsymbol{\mu}) + T^k(\boldsymbol{\nu})\| \geq \|T^k(\boldsymbol{\mu})\| = \rho^k\|\boldsymbol{\mu}\| ,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque $T^k\boldsymbol{\nu}$ a des coordonnées positives. La condition (b) est donc satisfaite, à l'intérieur de la boule unité épointée de $(\mathbb{C}^\star)^n$.

Maintenant, si $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{C}^\star)^n$ est tel que $\lim_{k\to\infty} T^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, il existe un entier k_0 tel que $T^{k_0}\boldsymbol{\alpha}$ soit dans la boule unité épointée. Donc $T^{k_0}\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}(T)$. Il suit que $\boldsymbol{\alpha}$ appartient aussi à $\mathcal{U}(T)$.

Inversement, si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}(T)$, la condition (b) impose que $\lim_{k\to\infty} T^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. □

En collectant les résultats ci-dessus, on obtient la caractérisation suivante des couples admissibles.

Proposition 57. *Un couple $(T, \boldsymbol{\alpha})$ est admissible si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites.*

- *La matrice T est de classe $\mathcal{M}$.*
- *Le point $\boldsymbol{\alpha}$ est T-indépendant.*
- *$T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$ quand $k \to \infty$.*

Démonstration. D'après Kubota [58], si la condition (c) de la définition 7 d'admissibilité est satisfaite, la matrice T est inversible et n'a pas de racines de l'unité comme valeurs propres. D'après le lemme 55, le point $\boldsymbol{\alpha}$ est alors T-indépendant. D'après le lemme 54, si les conditions (a) et (b) de l'admissibilité sont satisfaites, alors la matrice T a un vecteur propre à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre $\rho(T)$. Donc T est de classe $\mathcal{M}$. Par définition, si la condition (b) est satisfaite, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}(T)$. Donc, d'après le lemme 56, $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$.

Inversement, si $T \in \mathcal{M}$, la condition (a) est satisfaite d'après le lemme 53. Si de plus $T^k\boldsymbol{\alpha} \to 0$, alors, d'après le lemme 56, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{U}(T)$ et la condition (b) est satisfaite. Enfin, si le point $\boldsymbol{\alpha}$ est T-indépendant, d'après le lemme 55, la condition (c) est satisfaite. □