



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation de l'anisotropie induite par endommagement d'un matériau agrégataire énergétique

Abdelkibir Benelfellah

► **To cite this version:**

Abdelkibir Benelfellah. Contribution à la modélisation de l'anisotropie induite par endommagement d'un matériau agrégataire énergétique. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université François Rabelais de Tours, 2013. Français. NNT : . tel-02966078

**HAL Id: tel-02966078**

**<https://hal.science/tel-02966078>**

Submitted on 13 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale : [EMSTU]

E.A. 2640, Laboratoire de Mécanique et Rhéologie

**THÈSE** présentée par :  
**Abdelkibir BENELFELLAH**  
soutenue le : 30 Septembre 2013

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université François - Rabelais

Discipline / Spécialité : Mécanique / Matériaux et Structures

**Contribution à la modélisation de l'anisotropie  
induite par endommagement  
d'un matériau agrégataire énergétique**

**THÈSE DIRIGÉE PAR :**

PICART Didier

Ingénieur de recherche H.D.R., CEA, Monts

**RAPPORTEURS :**

HALM Damien

Professeur, ISAE-ENSMA, Poitiers

RAGUENEAU Frédéric

Professeur, ENS, Cachan

**JURY :**

BAILLY Patrice

Professeur, ENSI, Bourges, Président du jury

AIT HOCINE Nourredine

Professeur, ENI Val de Loire, Blois

CARRERE Nicolas

Enseignant chercheur H.D.R., ENSTA, Brest

FRACHON Arnaud

Maître de conférences, ENI Val de Loire,  
Blois

HALM Damien

Professeur, ISAE-ENSMA, Poitiers

MÉO Stéphane

Maître de conférences H.D.R., Université  
François Rabelais de Tours

PICART Didier

Ingénieur de recherche H.D.R., CEA, Monts

RAGUENEAU Frédéric

Professeur, ENS, Cachan



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique et Rhéologie (LMR) de l'université François Rabelais de Tours à l'ENI du Val de Loire (ENIVL) à Blois en collaboration avec le Commissariat de l'Énergie Atomique (CEA) Le Ripault à Monts.

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse Mr Didier PICART, Ingénieur de recherche H.D.R au CEA Le Ripault, pour m'avoir encadré lors de ce travail avec énormément d'enthousiasme et beaucoup de patience. Ses connaissances et sa rigueur scientifique, dont j'ai bénéficié tout au long de mes recherches, m'ont permis de forger un attachement particulier à la recherche scientifique. Ce qui m'a beaucoup aidé à mener à bien les différents sujets abordés dans ce mémoire. Au bout de ce chemin, je me souviens des heures et des heures de travail à la maison d'hôte au CEA Le Ripault. Je le remercie pour sa grande disponibilité et ces conseils pertinents qui ont contribué à ma formation scientifique. Je tiens ensuite à exprimer ma sincère reconnaissance à Mr Arnaud FRACHON, Michel GRATTON et Michaël CALIEZ, Maîtres de Conférences à l'ENI Val de Loire à Blois, pour leur accueil et leur encadrement scientifique au sein du laboratoire LMR. Ils m'ont témoigné leur passion de recherche et m'ont offert une grande disponibilité durant toute ma thèse. Sur le plan expérimental, un grand merci est adressé à Jean-Luc BRIGOLLE pour tous les résultats d'essais que j'ai pu exploiter pour réussir ma thèse.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à monsieur Patrice BAILLY, Professeur à l'ENSI de Bourges, qui ma fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mes plus vifs remerciements sont également adressés à messieurs Damien HALM Professeur de l'ISAE-ENSMA de Poitiers, et Frédéric RAGUENEAU, Professeur des universités, ENS Cachan à Paris, pour leur lecture et leur lourde tâche de rapporteurs. Je remercie aussi messieurs Nourredine AIT HOCINE, Professeur de l'ENI Val de Loire à Blois, et Nicolas CARRERE, Enseignant-chercheur H.D.R à l'ENSTA de Brest et Stéphane MÉO Maître de conférences H.D.R de l'université François Rabelais de Tours et Arnaud FRACHON Maître de conférences de l'ENI Val de Loire qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury en tant d'examineurs.

Je remercie aussi tous mes collègues LMRiens et de l'ENIVL et précisément Hicham CHIBANE et Nourredine AIT HOCINE pour tout moment que nous avons traversés ensemble pendant ces années de thèse.

Au fond de mon coeur, j'aimerais prier au Savant et Sage qui m'a éclairé la voix de la science durant toutes ses années de ma vie et bien encore jusqu'à sa rencontre. Je pense aussi à mes parents et à ma petite famille. Qu'ils trouvent ici mes profondes reconnaissances.

*REMERCIEMENTS*

---

# Résumé

Le matériau composite agrégataire énergétique étudié a un comportement visco-élastique endommageable sensible à la pression de confinement et à la température. Ces travaux concernent la modélisation de l'anisotropie induite par endommagement avec deux objectifs principaux. Dans un premier temps, le caractère anisotrope de l'endommagement est mis en évidence expérimentalement. Des essais alternant tension et compression permettant d'observer l'effet unilatéral d'endommagement. Ensuite, un modèle de comportement est développé pour le matériau d'étude. Des modèles pertinents sont tout d'abord comparés. Le modèle le plus approprié est ensuite amélioré par l'ajout de mécanismes d'endommagement, d'effectivité du dommage et d'un mécanisme de plasticité. Les données expérimentales sont utilisées pour identifier les paramètres du modèle. Ce dernier a été ensuite implémenté dans un logiciel de calcul aux éléments finis (Abaqus / standard) sous la forme d'une procédure Fortran (UMAT). Différents types de chargements sont simulés et confrontés aux résultats expérimentaux.

**Mots clés :** Anisotropie induite, endommagement, effectivité, microfissuration, plasticité, Implémentation, Composites agrégataires énergétiques.



# Abstract

An explosive aggregate material exhibits a visco-elastic behaviour with damage, internal friction and sensitivity to the confining pressure and temperature. This thesis focuses on the anisotropic elastic damage with unilateral effect. The first aim of this study is to highlight experimentally the anisotropic nature of the damage. Then, a new model is proposed for the studied material. This is achieved using a comparison of some relevant models in order to select the most appropriate among them. The selected model is then improved by adding unilateral effect mechanisms and plasticity. Experimental data is used to characterize the material behaviour and to determine the parameters of improved model. This model has been implemented in the finite element software (Abaqus / Standard) using Fortran procedure (UMAT) and then tested for different loads and compared with experimental results.

**Keywords :** Anisotropic damage, Unilateral effect, Microcracking, Degradation, Induced anisotropy, Plasticity, Constitutive modeling, Microplane model.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>23</b>
<b>1 Mise en évidence expérimentale de l'anisotropie d'endommagement et ses conséquences</b>	<b>27</b>
1.1 Synthèse bibliographique des principales observations réalisées sur les matériaux quasi-fragiles . . . . .	27
1.1.1 Variation de la raideur initiale, notion de pré-dommage . . . . .	28
1.1.2 Influence de la direction de chargement, notion d'effectivité . . . . .	30
1.1.3 Anisotropie induite de l'endommagement et ses effets . . . . .	31
1.1.4 Hystérésis lors des cycles . . . . .	33
1.1.5 Bilan . . . . .	34
1.2 Mise en évidence de l'anisotropie d'endommagement : échelle micro-structurale . . . . .	36
1.2.1 Observation de la microstructure initiale . . . . .	36
1.2.2 Effet d'une sollicitation à l'échelle microstructurale . . . . .	37
1.3 Mise en évidence de l'anisotropie d'endommagement : manifestations macroscopiques pour le matériaux étudié . . . . .	39
1.3.1 Influence de la pression de confinement et de la direction de chargement . . . . .	40
1.3.2 Extraction de la partie élastique endommageable pour des réponses expérimentales . . . . .	41
1.3.3 Bilan . . . . .	44
1.4 Mise en évidence du comportement unilatéral du matériau . . . . .	45
1.4.1 Mode opératoire . . . . .	45
1.4.2 Résultats . . . . .	46
1.4.3 Bilan . . . . .	52
1.5 Conclusion . . . . .	54

<b>2</b>	<b>État de l’art des modèles d’endommagement anisotrope</b>	<b>55</b>
2.1	Mécanique de l’endommagement . . . . .	55
2.1.1	Endommagement et contrainte effective . . . . .	56
2.1.2	Principes d’équivalences . . . . .	57
2.1.3	Cadre thermodynamique de l’endommagement . . . . .	59
2.2	Consistance et critères de choix de modèle avec prise en compte de l’unilatéralité . . . . .	61
2.2.1	Modèle de Chaboche et Maire . . . . .	61
2.2.2	Modèle de Halm et Dragon . . . . .	63
2.2.3	La perte du caractère potentiel de l’énergie libre . . . . .	64
2.2.4	La perte de symétrie due à l’introduction de l’effet unilatéral . . . . .	65
2.3	Modèles d’endommagement anisotrope retenus . . . . .	66
2.3.1	Approche discrète de Bargellini, Halm et Dragon . . . . .	67
2.3.2	Modèles microplans . . . . .	68
2.3.2.1	Formulation V-D-T . . . . .	69
2.3.2.2	Formulation V-D . . . . .	71
2.3.3	Modèles micromécaniques : schéma dilué . . . . .	72
2.3.4	Modèle de Dienes . . . . .	74
2.4	Comparaison analytique des modèles dans la base de Walpole . . . . .	74
2.4.1	Base de Walpole . . . . .	75
2.4.2	Uniformisation des modèles dans la base de Walpole . . . . .	77
2.4.3	Analyse à partir des paramètres de l’ingénieur. . . . .	80
2.5	Comparaisons numériques : conséquence d’un unique réseau de microfissures . . . . .	83
2.5.1	Définition des grandeurs observées et jeu de paramètres initial . . . . .	83
2.5.2	Comparaison des modèles avec le jeu de paramètres initial . . . . .	84
2.5.3	Comparaison de DM, VD et VDT avec des valeurs assurant la sensibilité négative du coefficient de contraction . . . . .	86
2.5.4	Possibilités du modèle VDT . . . . .	87
2.6	Conclusion . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Introduction de l’effet unilatéral dans le modèle VDT</b>	<b>91</b>
3.1	Synthèse bibliographique des modèles avec effet unilatéral d’endommagement . . . . .	92
3.1.1	Modèle isotrope de Mazars . . . . .	92
3.1.2	Modèle isotrope « concrete damaged plasticity » . . . . .	94
3.1.3	Modèles issus de l’homogénéisation . . . . .	95

3.1.4	Modèle anisotrope de Welemane . . . . .	98
3.1.5	Modèle de Maire et Chaboche . . . . .	100
3.1.6	Approche anisotrope et discrète de Bargellini et al. . . . .	103
3.1.7	Modèles d’endommagement microplan . . . . .	106
3.1.8	Bilan . . . . .	106
3.2	Effet unilatéral dans le modèle VDT . . . . .	107
3.2.1	Fonctions d’effectivité liées respectivement aux variables observables . . . . .	109
3.2.2	Fonctions d’effectivité non liés à leur variables respectives . . . . .	110
3.2.3	Critères et lois d’évolution de l’endommagement . . . . .	112
3.3	Identification des paramètres du modèle . . . . .	112
3.3.1	Détermination des modules élastiques . . . . .	113
3.3.2	Lois d’endommagement . . . . .	115
3.3.3	Réponse contrainte-déformation pour un microplan . . . . .	117
3.4	Simulation des essais sur le matériau M1 et adaptation du modèle . . . . .	118
3.4.1	Simulation des essais monotones . . . . .	118
3.4.2	Simulation des essais alternant traction et compression . . . . .	121
3.4.2.1	Traction puis compression . . . . .	121
3.4.2.2	Simulation d’un cycle de compression-traction . . . . .	124
3.4.3	Confrontation du modèle à l’expérience avec le jeu de paramètres final . . . . .	125
3.5	Simulations prospectives . . . . .	128
3.5.1	Cycle de compression-traction avec 10 MPa de confinement . . . . .	128
3.5.2	Sollicitation de cisaillement pure . . . . .	129
3.6	Conclusion . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Modèle VDT avec effectivité et plasticité</b> . . . . .	<b>133</b>
4.1	Rappel des observations expérimentales et adaptation du modèle proposé par Le [56] . . . . .	134
4.1.1	Seuil de plasticité . . . . .	134
4.1.2	Ecrouissage . . . . .	137
4.1.3	Direction d’écoulement . . . . .	139
4.2	Intégration de la loi de comportement dans le code Abaqus . . . . .	142
4.3	Simulations . . . . .	143
4.3.1	Sollicitations monotones . . . . .	145
4.3.2	Sollicitations avec cyclage . . . . .	148

4.3.3 Sollicitations alternées . . . . .	149
4.4 Conclusion . . . . .	152
<b>Conclusion générale</b>	<b>155</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>
<b>Annexes</b>	<b>171</b>
<b>A Expression des modèles comparés dans la base de Walpole</b>	<b>171</b>
A.1 Présentation de la base de Walpole . . . . .	171
A.2 Expression des quelques tenseurs usuelles dans la base de Walpole . .	172
A.3 Matrice de passage entre la base de Kunin et celle de Walpole . . . .	173
A.4 Uniformisation des écritures des modèles dans la base de Walpole . .	174
A.4.1 Approche discrète de Bargellini . . . . .	174
A.4.2 Formulations V-D-T des modèles microplans . . . . .	175
A.4.3 Formulation V-D des modèles microplans . . . . .	178
<b>B Modèle VDT couplé avec l'effectivité et le glissement avec frotte- ment</b>	<b>179</b>
B.1 Formulation thermodynamique: . . . . .	179
B.1.1 Consistance thermodynamique du modèle au passage ouvert- fermé: . . . . .	182
B.1.2 Lois d'écoulement : . . . . .	183
B.1.2.1 Critères d'évolution du glissement avec frottement: .	183
B.1.2.2 Évolution de l'effectivité et choix des variables de pilotage: . . . . .	186
B.2 Introduction du décalage sur l'effectivité . . . . .	188
<b>C Modèle VDT avec frottement interne anisotrope</b>	<b>191</b>
C.1 Formulation thermodynamique : . . . . .	191
C.1.1 Critère d'évolution et lois d'écoulement : . . . . .	193
<b>Glossaire</b>	<b>197</b>
<b>Index</b>	<b>199</b>

# Liste des tableaux

1.1	Tableau des essais de référence . . . . .	40
1.2	Tableau récapitulatif des niveaux de contrainte et déformations longitudinale et transversale des jauges 1 et 2 pour des essais monotones en traction et compression simple. . . . .	49
1.3	Tableau récapitulatif des niveaux de contrainte et déformations longitudinale et transversale des jauges 1 et 2 pour des essais monotones à rupture en traction et compression simple. . . . .	50
1.4	Tableau récapitulatif des niveaux de contraintes et déformations longitudinales et transeversales des jauges 1 et 2 pour un essai de traction suivi de compression simple à rupture. . . . .	51
2.1	Décomposition dans la base de Walpole des 5 modèles : effet de l'endommagement (ou de la densité de fissuration) pour un réseau de microfissures orientées suivant une même direction. . . . .	79
2.2	(a, b, c) Développements limités au premier ordre vis à vis de l'endommagement, du module d'Young $E$ , du coefficient de contraction $\nu$ et du module de cisaillement $\mu$ dans les directions $\mathbf{e}_1$ (normale à la fissure) et $\mathbf{e}_2$ (dans le plan d'isotropie). $E^d$ , $\nu^d$ et $\mu^d$ sont les grandeurs endommagées	81
2.3	Paramètres et amplitudes des endommagements pour chaque modèle, déterminés à partir de l'endommagement . . . . .	84
3.1	Propriétés élastiques déduites des essais présentés au premier chapitre.	114
3.2	Premier jeu de paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1. . . . .	117
3.3	Tableau final des paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1. . . . .	125
4.1	Paramètres de la fonction seuil de plasticité pour les états initiaux et saturés. . . . .	137
4.2	Paramètres du modèle VDT avec endommagement anisotrope, effet unilatéral et plasticité pour le matériau agrégataire M1. . . . .	142



# Table des figures

1.1	Essai de compression hydrostatique non-drainée (A) sur grès de Benthheim [33] (charge-décharge) et (B) sur un grès des Vosges [68] (monotone) : courbe pression de confinement $P_C$ en fonction des déformations $\varepsilon_{11}$ , $\varepsilon_{22}$ et $\varepsilon_V$ . . . . .	28
1.2	Lien entre contrainte, déformation et endommagement (mesuré par émission acoustique) lors d'un essai de compression simple (A) sur un granite de Weterly [76]. (B) Réponse mesurée sur un grès des Vosges. . . . .	29
1.3	Essais de torsion simple sans confinement (noté H0) ou avec confinement initial de 10 et 20 MPa (notés H10 et H20) [68]. . . . .	30
1.4	Essai de traction-compression sur un béton [74]. . . . .	31
1.5	Essai sur de la kaolinites. Torsion cyclée avec un déviateur initial de 0,05 MPa et une pression de confinement de 0,5 MPa [37]. . . . .	32
1.6	Évolution et distribution des densités de microfissures en fonction de la contrainte déviatorique [42]. (#i est le numéro de l'échantillon et $P_L$ en $mm^{-1}$ ) . . . . .	33
1.7	Evolution de la longueur $l_s$ (A) et du nombre $n$ des microfissures (B) en fonction de l'orientation à (1) $\sigma = 0,59\sigma_c$ , (2) $\sigma = 0,73\sigma_c$ , (3) $\sigma = 0,88\sigma_c$ , (4) $\sigma = 0,96\sigma_c$ , (5) $\sigma = \sigma_c$ , (6) déchargement [86]. . . . .	34
1.8	Évolution du rapport des déformations en fonction de la contrainte longitudinale pour un grès des Vosges [68] et pour le matériau étudié [56]. . . . .	35
1.9	Essai de compression uniaxiale cyclée sur un béton [74]. . . . .	35
1.10	Réponse couple/déformation angulaire avec décharges d'un cylindre creux de craie de Haubourdin soumis à une torsion et une pression hydrostatique de 8 MPa [68]. . . . .	35
1.11	Micrographie du matériau vierge après compactage [80]. . . . .	37
1.12	Vue en coupe d'un béton [28]. . . . .	37
1.13	Observations microstructurales <i>post mortem</i> du matériau M1 soumis à un essai d'impact à 13 m/s. (A) : schéma de principe de l'essai. (B) : image <i>post mortem</i> [72]. . . . .	38

1.14	Micrographie des microfissures avant (A) et après (B) le chargement dynamique [72]. . . . .	39
1.15	Micrographie du matériau après un chargement dynamique en compression [80]. . . . .	40
1.16	Effet de la pression de confinement et du mode de sollicitation sur le comportement du matériau à $3, 3.10^{-5}s^{-1}$ et à $20^{\circ}C$ . . . . .	41
1.17	Schéma d'un cycle de charge, relaxation, décharge et recouvrance . . . . .	42
1.18	Essai cyclé de compression simple à $20^{\circ}C$ et à $3, 3.10^{-5}s^{-1}$ . . . . .	43
1.19	Relaxation en compression simple. . . . .	44
1.20	Phases de relaxation en fonction du logarithmique du temps. . . . .	44
1.21	Phases des recouvrances des déformations longitudinales. . . . .	44
1.22	Phases de recouvrance des déformations transversales. . . . .	44
1.23	Prolongement des recouvrances des déformations longitudinales. . . . .	45
1.24	Prolongement des recouvrances des déformations transversales. . . . .	45
1.25	Réponses contrainte-déformations des essais à $20^{\circ}C$ et $\dot{\epsilon} = 3, 3.10^{-5}s^{-1}$ après extraction de la contrainte visqueuse et des déformations irréversibles. . . . .	46
1.26	Evolution expérimentale du module longitudinal et transverse expérimental ( $\sigma_L/\epsilon_T^e$ ) à $20^{\circ}C$ et pour $\dot{\epsilon} = 3, 3.10^{-5}s^{-1}$ . . . . .	47
1.27	Dégradation de la rigidité longitudinale (gauche) et transversale (droite) du matériau pour différents essais multi-cycles à $20^{\circ}C$ et à $\dot{\epsilon} = 3, 3.10^{-5}/s$ . . . . .	47
1.28	Essais monotones de compression et de traction à $0,012\text{mm}/\text{min}$ sur éprouvette diabolo ; (A) réponse contrainte-déformation des deux jauges bi-directionnelles ; (B) évolutions des modules sécants pour les deux essais. . . . .	48
1.29	Essai de traction simple suivi d'un essai de compression à rupture sur le matériau étudié. . . . .	50
1.30	Essai de compression suivi d'une traction jusqu'à rupture . . . . .	51
1.31	Essais alternant 2 cycles à 75% et à 85% des contraintes à rupture. Premier chargement en traction (A) ou en compression (B). . . . .	53
2.1	Définition de la contrainte effective appliquée sur un VER [73]. . . . .	56
2.2	Schématization de l'équivalence en déformation. . . . .	58
2.3	Schématization de l'équivalence en contrainte . . . . .	58
2.4	Schématization de l'équivalence en énergie . . . . .	59
2.5	Additivité des effet des familles de micro-fissures parallèles . . . . .	67
2.6	Principe des modèles microplan . . . . .	69

2.7	Modèle à composantes volumique, déviatorique et tangentielle (V-D-T)[18] . . . . .	69
2.8	Modèle à composante volumique et déviatorique (V-D) [59] . . . . .	71
2.9	$\mathbf{n}$ est le vecteur balayant la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ afin de décrire le module d'Young, le module de cisaillement et de coefficient de Poisson . . . . .	81
2.10	Sensibilité du module d'Young au dommage $d_2 : s^E$ . . . . .	85
2.11	Sensibilité du module de cisaillement au dommage $d_2 : S^\mu$ . . . . .	85
2.12	Sensibilité du module du coefficient de contraction au dommage $d_2 : S^\mu$ . . . . .	86
2.13	Sensibilité du module d'Young au dommage $d_2 : s^E$ pour deux valeurs particulières de $d_V$ . . . . .	87
2.14	Sensibilité du module de cisaillement au dommage $d_2 : S^\mu$ pour deux valeurs particulières de $d_V$ . . . . .	88
2.15	Sensibilité du coefficient de contraction au dommage $d_2 : S^\nu$ pour deux valeurs particulières de $d_V$ . . . . .	88
2.16	Sensibilité du module d'Young au dommage $d_2 : s^E$ pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$ . . . . .	88
2.17	Sensibilité du module de cisaillement au dommage $d_2 : s^\mu$ pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$ . . . . .	89
2.18	Sensibilité du coefficient de contraction au dommage $d_2 : s^\nu$ pour 5 valeurs particulières du ratio $\frac{\mu_D}{\mu_T}$ . . . . .	89
3.1	Réponse contrainte-déformation d'un essai de traction suivi d'une compression pour le modèle de Mazars [65]. . . . .	94
3.2	Réponse du modèle « concrete damaged plasticity » lors d'un chargement alternant une traction puis une compression. Effets de l'effectivité et du dommage. . . . .	96
3.3	Couplage entre endommagement et déformation plastique en compression et en traction [1]. . . . .	96
3.4	Essai de traction-compression d'un composite à matrice céramique [62]	100
3.5	Schéma d'une effectivité instantanée de dommage (A) et une effectivité progressive (B) [25] . . . . .	102
3.6	Courbes limites enveloppes des contraintes et déformations normales pour gérer le contact[8]. . . . .	106
3.7	Evolution régularisée de la contrainte en fonction de la déformation au passage ouvert/fermé de la partie volumique. . . . .	110
3.8	Evolution du module de Young en fonction de la pression de confinement pour le matériau agrégataire M1 (Vial et al. [81]). . . . .	113

3.9	Evolution des modules longitudinal et transversal en fonction du module de compressibilité en compression simple. . . . .	115
3.10	Loi d'évolution du dommage. . . . .	116
3.11	Réponse volumique contrainte-déformation et évolution de l'endommagement $d_V$ en fonction de la déformation volumique $\varepsilon_V$ . . . . .	117
3.12	Réponse contrainte-déformation déviatorique et évolution de l'endommagement $d_D$ en fonction de la déformation déviatorique $\varepsilon_D$ . La courbe rouge correspond à une déformation volumique nulle et la courbe verte à une déformation volumique égale à $\varepsilon_V^{H10}$ . . . . .	118
3.13	Simulation des essais monotones de compression simple (A) et de traction simple (B) pour le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres.. . . .	119
3.14	Simulation des essais monotones de compression à 5 MPa (A) et 10 MPa (B) de confinement sur le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres. . . . .	119
3.15	Simulation de l'essai de traction simple avec une évolution adaptée au chargement de tension (second jeu de paramètres où $a_5 = 1,5$ ). . . . .	120
3.16	Simulation, avec le second jeu de paramètres, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1. Les points expérimentaux rapportés sur la figure correspondent aux réponses expérimentales obtenues après les essais monotones correspondants. . . . .	121
3.17	Schématisation de la distribution des 4 systèmes de microfissures. . . . .	122
3.18	Variation du rapport du module longitudinal endommagé sur le module sain en fonction des dommages $d_V$ et $d_D$ des 4 systèmes de microfissures. . . . .	123
3.19	Simulation, avec le troisième jeu de paramètres, d'un cycle de traction suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1. (trait pointillé noir) Module longitudinal endommagé par la première charge de traction. . . . .	124
3.20	Réponse déviatoriques contrainte-déformation en fonction de $\varepsilon_D$ avec une effectivité de 0,5 à la fermeture des microfissures. . . . .	125
3.21	Simulation, avec le jeu de paramètre final, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1. . . . .	126
3.22	Simulation d'un cycle de compression simple suivi d'une traction sur le matériau agrégataire M1. . . . .	126
3.23	Simulation des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1. . . . .	127

3.24	Évolution des rigidités élastiques longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1. . . . .	128
3.25	Dégradation des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la déformation élastique principale positive, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple (TS), compression simple (CS) et compression sous 5 et 10 MPa de confinement (H05 et H10) sur le matériau agrégataire M1. . . . .	129
3.26	Simulation d'un confinement de 10 MPa puis d'une compression suivie d'une décharge. . . . .	129
3.27	Simulation d'un essai de cisaillement pure avec ou sans confinement de 10 MPa sur le matériau agrégataire M1. . . . .	130
4.1	Evolution de la surface de charge selon [55] dans le plan des contraintes réelles $(\sigma^V, Q)$ à 20°C . . . . .	135
4.2	Signification des paramètres $X_0$ , $X_m$ , $R_0$ et $R_m$ dans le plan des contraintes $(\sigma^V, Q)$ . . . . .	136
4.3	Surface de charge dans le plan des contraintes effectives $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}^V)$ . . . . .	137
4.4	Courbes d'écrouissage issues des expérimentations et du modèle. . . . .	138
4.5	La dilatance du matériau M1 dans le plan des déformations déviatoriques et volumiques plastiques. . . . .	139
4.6	Dilatance du matériau M1 en fonction de la déformation plastique cumulée. Les symboles indiquent les valeurs expérimentales et les traits sans symbole la réponse du modèle. Les carrés rangés le long de l'axe des ordonnées correspondent aux extrapolations des courbes expérimentales à déformation plastique nulle (limite d'élasticité initiale). Ces points n'ont pas été mesurés. . . . .	141
4.7	Dilatance du matériau M1 en fonction de la pression. Les symboles indiquent les valeurs expérimentales et les traits sans symbole la réponse du modèle. Les carrés correspondent aux extrapolations des courbes expérimentales à déformation plastique nulle (seuil d'élasticité initial). Ces points n'ont pas été mesurés. Le trait continu correspond à la fonction $l(\sigma^V)$ dont les paramètres ont été identifiés le long du seuil d'élasticité donc pour $p = 0$ . . . . .	141
4.8	Algorithme utilisé pour l'intégration de la loi de comportement dans le code de calcul Abaqus/Standard. . . . .	144
4.9	Comparaisons entre courbes expérimentales (points) et numériques (traits pleins) obtenues pour les quatre chargements monotones. . . . .	145

4.10	Évolution de la variable de l'endommagement déviatorique $d_D$ et tangentielle $d_T$ en fonction de la déformation longitudinale pour un essai de compression simple. . . . .	146
4.11	Évolution de la variable du dommage déviatorique $d_D$ et tangentielle $d_T$ en fonction de la déformation longitudinale pour un compression avec 10 MPa de confinement. . . . .	147
4.12	Rosette de dommage à 1% de déformation longitudinale dans un essai de compression simple (A) et de compression triaxiale avec 10 MPa de confinement (B). $e_1$ est la direction de chargement. . . . .	147
4.13	Simulation d'un essai de cisaillement pure et avec un confinement de 10 MPa pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	148
4.14	Simulation d'un essai de traction simple avec plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	149
4.15	Simulation d'un essai de compression simple à plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	150
4.16	Simulation d'un essai de compression triaxiale à 10 MPa de confinement à plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	150
4.17	Simulation d'un essai de traction suivi d'une compression simple pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	151
4.18	Simulation d'un essai de compression suivi d'une traction simple pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	151
4.19	Simulation d'un essai de compression suivi de traction avec un confinement de 10 MPa pour un matériau agrégataire M1 . . . . .	152
B.1	Modèle rhéologique de la partie tangentielle . . . . .	181
B.2	Modèle rhéologique de la partie tangentielle . . . . .	182
B.3	Représentation schématique de microfissures frottantes dans le cas ouvert ou fermé . . . . .	183
B.4	Critère de glissement au passage ouvert/fermé dans l'espace des forces thermodynamiques tangentielle et équivalente pour le modèle VDT. . . . .	184
B.5	Chemin de chargement de la fermeture à l'ouverture des fissures . . . . .	186
B.6	Chemin de chargement de l'ouverture à la fermeture des fissures . . . . .	187
B.7	Evolution de la fonction d'effectivité en fonction de la variable de déformation volumique . . . . .	188
B.8	Simulation d'un cycle de compression simple suivi d'une décharge avec un décalage sur l'effectivité $\alpha_D$ (A) avec 42 directions et (B) avec 507 directions sur le matériau agrégataire M1. . . . .	189

C.1	Représentation schématique de microfissures frottantes dans le cas ouvert ou fermé . . . . .	193
C.2	Critère de glissement au passage ouvert/fermé dans l'espace des forces thermodynamiques tangentielle et équivalente pour le modèle VDT. .	194

*TABLE DES FIGURES*

---

# Introduction générale

Le développement des outils de simulation et des méthodes de mesure de champ de déplacement permet maintenant de réaliser des comparaisons calcul/expérience exhaustives et précises de l'état de déformation expérimental et numérique de structures pyrotechniques complexes. Une des conséquences concerne les lois de comportement thermomécaniques qu'il faut faire progresser pour en augmenter la précision. Depuis quelques années, le Commissariat à l'Energie Atomique s'intéresse plus particulièrement au comportement d'un matériau explosif comprimé à base d'octogène lorsqu'il est soumis à une température comprise entre 0 et  $50^{\circ}\text{C}$ , une pression de confinement comprise entre 0 et 10 MPa et des vitesses de déformation de  $10^{-8}$  à  $10^{-3}\text{s}^{-1}$ . Ces sollicitations ne sont ni uniaxiales ni constantes dans le temps. Des états de tension peuvent alterner avec des états de compression.

Le matériau étudié, noté M1, est constitué d'une grande fraction solide de cristaux organiques, de quelques pourcents d'un liant et de porosité. Ses constituants et son mode de fabrication lui confèrent une dépendance à la direction de sollicitation (différence entre les contraintes maximales obtenues en traction ou en compression), à la pression de confinement, à la vitesse de déformation et à la température. Une étude expérimentale plus approfondie a montré un comportement contractant puis dilatant en fonction du confinement et le développement d'un endommagement anisotrope induit par la sollicitation.

La stratégie de modélisation poursuivie depuis quelques années a pour but de mettre en place les modèles les plus pragmatiques possibles (approche phénoménologique plutôt que micromécanique), les plus simples mais traduisant aussi toute la complexité et la variété des phénomènes observés. Pour cela, les modèles ont été proposés par touches successives en étudiant et intégrant petit à petit tous les phénomènes négligés, par souci de simplicité, lors des premiers travaux. Une première loi de comportement a été proposée par Said RjaFiAllah sous la forme d'un modèle élasto-viscoplastique [75]. Ce modèle a permis de modéliser la dégradation élastique isotrope et de prendre en compte l'influence de la pression de confinement. Plus récemment, Viet-Dung Le [56] a complété cette loi de comportement en y ajoutant une forte composante viscoélastique. Les analyses effectuées à cette occasion ont montré le rôle de l'anisotropie d'endommagement induite par la sollicitation. L'objectif de ce travail de thèse est d'étudier plus particulièrement ce phénomène.

Le premier chapitre de cette thèse présente le comportement mécanique observé expérimentalement pour quelques géomatériaux. La non linéarité initiale des courbes contrainte-déformation peut provenir d'un « pré-dommage ». Nous montrons que l'effet d'un dommage constant peut varier en fonction de la direction de sollicitation. Le dommage est plus ou moins « effectif ». Enfin, quelques analyses microstructurales réalisées sur des roches illustrent comment la sollicitation entraîne le développement d'un endommagement anisotrope par microfissuration. Nous mettons ensuite en évidence l'existence de nombreux défauts tels que des microfissures, des joints de grains et de la porosité dans le matériau M1. Le comportement macroscopique montre une dépendance à la direction de chargement et au confinement. La dernière partie du chapitre a trait aux résultats expérimentaux qui ont été utilisés lors de ce travail. La méthode de dépouillement permettant d'isoler le comportement élastique anisotrope est détaillée. Enfin, une série d'expérimentations alternant des charges de traction et de compression est rapportée dans ce chapitre. Ces essais permettent d'observer la reprise de raideur au passage traction/compression et de constater que le matériau rompt le plus souvent lors d'une tension.

La modélisation de l'anisotropie induite d'endommagement est rarement abordée dans la littérature. Plusieurs raisons peuvent être invoquées. Malgré une variation brutale de la raideur du matériau, les principes fondamentaux de la thermodynamique imposent de respecter la continuité de l'énergie libre (le saut de contrainte doit être nul à cet instant) et une dissipation nulle par ce mécanisme. Parmi les modèles proposés ces deux dernières décennies, les modèles dans lesquels le tenseur de rigidité endommagé est reconstruit à partir d'une décomposition spatiale des tenseurs de contrainte et de déformation sont les plus prometteurs. Chaque direction de l'espace (la sphère unité est discrétisée en un nombre fini de directions) porte ses propres variables internes de dommage. La seconde raison concerne l'identification des mécanismes de dommage. La réponse macroscopique du matériau à une sollicitation ne donne pas directement accès à la variable qui pilote l'endommagement ni à sa loi d'évolution. Il faut procéder par méthode inverse ou bien s'appuyer sur des représentations idéalisées des modes de déformation à l'échelle de la microstructure et à une méthode de changement d'échelle. Dans le second chapitre de cette thèse, nous avons sélectionné quelques uns de ces modèles avec discrétisation de l'espace. Nous les comparons analytiquement mais aussi à l'aide d'une application numérique afin d'isoler la formulation qui laissera le plus de souplesse à l'ingénieur.

La troisième partie de ce travail porte sur la prise en compte d'une loi d'endommagement anisotrope dans la formulation microplan avec décomposition V-D-T (volumique-déviatorique-tangentiel) du tenseur des déformations. Nous rappelons d'abord quelques modèles de références dans lesquels l'effectivité du dommage est introduite. À l'aide de variables scalaires, il est possible de tenir compte ou bien de négliger l'effet du dommage en fonction de la sollicitation. Une analyse thermodynamique met en évidence la possibilité d'une dissipation anormale lors d'un brusque changement de raideur du matériau. Nous montrons que deux choix sont possibles

pour annuler cette dissipation. Le premier consiste à piloter l'effectivité par la déformation projetée associée. Par exemple, l'effectivité sur le dommage volumique est pilotée par la déformation volumique. Le second choix n'impose pas de variable particulière de pilotage de l'effectivité mais nécessite d'introduire une déformation dite « stockée » et réactualisée lors de la fermeture des fissures afin d'annuler le saut des contraintes. Par simplicité, nous avons choisi la première des options. La dernière partie du chapitre est dédiée à l'identification des lois d'endommagement et aux comparaisons calcul/expérience.

Enfin, les déformations inélastiques sont ajoutées au modèle proposé dans le troisième chapitre. Plusieurs possibilités s'offraient à nous. La première consistait à introduire une déformation plastique tangente pour traduire le frottement interne et donc une réponse plastique anisotrope. Nous avons opté pour une approche plus pragmatique faute d'une mise en évidence claire d'un comportement plastique anisotrope. Nous reprenons la loi de plasticité isotrope proposée par V.D. Le [56] (seul le tenseur de rigidité est traité avec anisotropie). Cette loi est adaptée ici pour découpler le dommage de la plasticité à l'aide de la notion de contrainte effective.



# Chapitre 1

## Mise en évidence expérimentale de l'anisotropie d'endommagement et ses conséquences

L'objectif de cette thèse est de poursuivre les efforts entrepris depuis quelques années pour modéliser le comportement d'un matériau énergétique agrégataire compact. À l'issu de son travail de thèse, V.D. Le [56] a proposé des voies d'amélioration parmi lesquelles la nécessité de prendre en compte l'anisotropie d'endommagement induite par la sollicitation. La première partie de ce chapitre propose une synthèse des résultats issus des travaux expérimentaux qui ont permis de mieux comprendre le rôle de l'endommagement dans le comportement d'autres matériaux quasi-fragiles. Le matériau ici considéré est ensuite présenté. L'observations de sa microstructure initiale met en évidence un pré-endommagement. L'analyse des courbes contrainte-déformation pour différents types de chargements montre qu'il se dégrade de façon anisotrope. Enfin, la troisième section de ce chapitre détaille les expériences réalisées dans le cadre de cette étude et met en évidence le caractère unilatéral de l'endommagement.

### 1.1 Synthèse bibliographique des principales observations réalisées sur les matériaux quasi-fragiles

La microstructure des matériaux quasi-fragiles initialement isotropes, comme par exemple les géomatériaux, est souvent idéalisée en représentant une matrice continu et homogène parcourue par de nombreuses microfissures distribuées de façon isotrope . Certaines études microstructurales ont permis de valider cette représentation isotrope du pré-endommagement. Voyons qu'elles en sont les conséquences sur

le comportement de ces matériaux.

### 1.1.1 Variation de la raideur initiale, notion de pré-dommage

Habituellement, la diminution de la raideur d'un matériau est attribuée à l'endommagement. À endommagement fixé, il est possible d'observer, sur les matériaux quasi-fragiles, le phénomène inverse. Comme par exemple lors d'une compression hydrostatique. Dautriat a effectué cet essai sur un grès de Bentheim [33]. La figure 1.1.A présente l'évolution des déformations en fonction de la pression de confinement. La proximité des courbes contrainte-déformation  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  montrent que le grès de Bentheim conserve un comportement plutôt isotrope sous sollicitation hydrostatique. D'autre part, une rigidification de la réponse est observée lorsque la pression augmente. Ce phénomène est interprété comme la conséquence de la fermeture sous l'influence du confinement, des porosités et microfissures initialement présentes dans ce matériau. La courbe est ensuite linéaire et le module de compressibilité correspond au comportement du matériau non endommagé. Toutes les microfissures peuvent être considérées fermées au delà d'une pression de confinement de 18 MPa. La linéarité peut être associée à l'absence d'endommagement expliquant par la même, l'hysteresis observée sur la figure 1.1 A. L'extrapolation de la partie linéaire de la courbe vers l'axe des déformations à pression de confinement nulle permet de déduire le taux de microfissure et de porosité initial (ici de l'ordre de 0,16%).

Pecqueur a lui aussi réalisé un essai de compression hydrostatique sur un grès des Vosges [68]. La figure 1.1.B montre l'évolution de la pression de confinement en fonction des déformations. Les microfissures sont supposées fermées aux alentours de 20 MPa. Le prolongement de la pente du module de compressibilité vers l'axe des abscisses donne une porosité initiale de l'ordre de 0,7%.

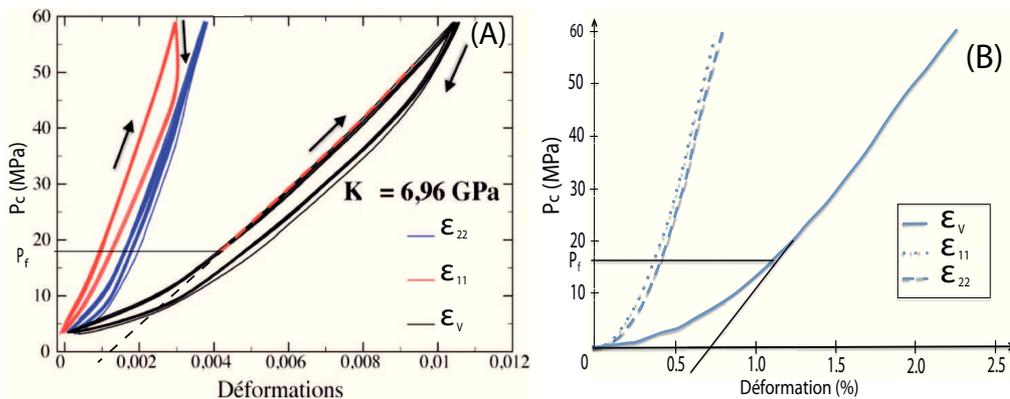


FIGURE 1.1 – Essai de compression hydrostatique non-drainée (A) sur grès de Bentheim [33] (charge-décharge) et (B) sur un grès des Vosges [68] (monotone) : courbe pression de confinement  $P_C$  en fonction des déformations  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_v$ .

## 1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

Les mesures présentées par Pecqueur [69] (fig. 1.2.B) peuvent être mis en parallèle de celles réalisées par Scholz sur un granite de Weterly (fig. 1.2.A). Ce dernier a réalisé des mesures d'émission acoustique permettant d'évaluer « l'activité » liée à l'endommagement (voir aussi [63] sur un béton et [42] sur des granites et argilites). La réponse peut être décomposée en quatre phases :

- **phase I (fermeture des microfissures)** : comme dans le cas de la compression hydrostatique, la concavité de la courbe traduit une augmentation de la raideur du matériau. Dans cette partie de la courbe, plusieurs émissions acoustiques sont enregistrées. Elles sont interprétées par la refermeture des microfissures initiales ou bien le frottement de leurs lèvres en vis-à-vis.
- **phase II (domaine linéaire)** : la réponse est linéaire. Les émissions acoustiques sont faibles ou inexistantes. Le matériau ne subit pas d'endommagement.
- **phase III (propagation stable des microfissures)** : durant cette phase, on observe une forte activité acoustique sur le granite de Weterly. Cette activité est interprétée comme la conséquence de la création et de la propagation stable des microfissures. Compte tenu des moyens de mesure, il n'est pas possible de statuer sur l'isotropie ou non de cet endommagement.
- **phase IV (propagation instable et rupture de l'éprouvette)** : la création, la coalescence et la propagation des microfissures s'intensifient. Elles se joignent pour former des microfissures qui conduisent à la rupture totale de l'éprouvette.

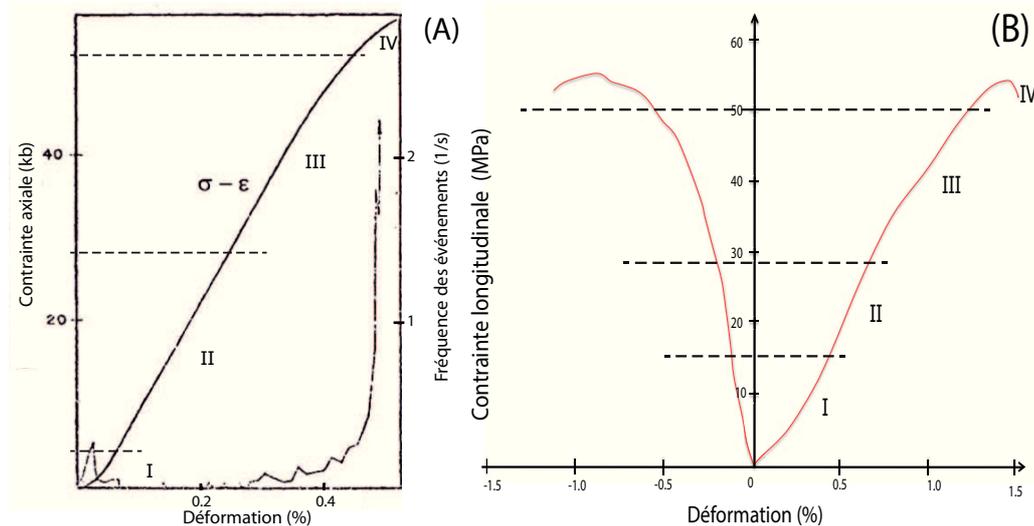


FIGURE 1.2 – Lien entre contrainte, déformation et endommagement (mesuré par émission acoustique) lors d'un essai de compression simple (A) sur un granite de Weterly [76]. (B) Réponse mesurée sur un grès des Vosges.

Lorsqu'une phase de confinement hydrostatique est appliquée avant à la phase de compression simple (essai triaxial couramment utilisé pour caractériser les géo-

## 1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

matériaux), la concavité positive du début de la courbe de compression disparaît. La fermeture des microfissures initiales se traduit donc par un accroissement de la raideur à l'origine avec le confinement.

Les essais de torsion, plus difficiles à mettre en oeuvre, sont moins utilisés que les essais de traction ou de compression. Néanmoins, Pecqueur a réalisé des essais de torsion sur des tubes épais à différentes pressions de confinement, toujours sur le gré des Vosges. Les essais ont été réalisés pour trois niveaux de confinement différents : nul, 10 ou 20 MPa. Tous les essais ont été réalisés en conditions drainées pendant les phases de torsion et de confinement. La figure 1.3 présente l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation de cisaillement jusqu'à la rupture. La pression hydrostatique influence le niveau de la contrainte à rupture du matériau, mais également le module de cisaillement à l'origine pour les faibles pressions.

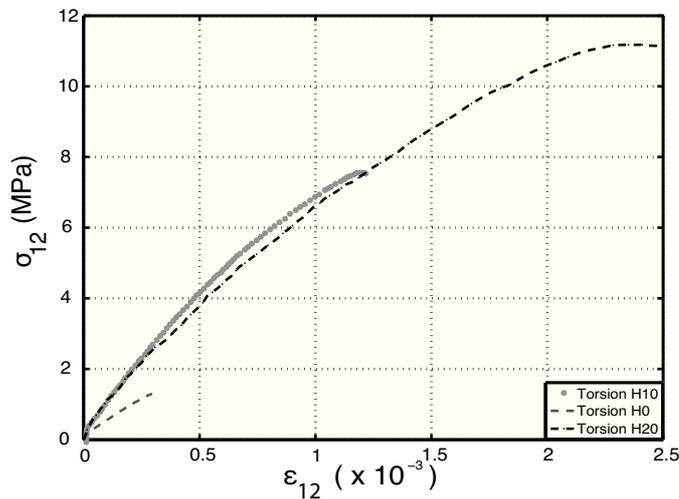


FIGURE 1.3 – Essais de torsion simple sans confinement (noté H0) ou avec confinement initial de 10 et 20 MPa (notés H10 et H20) [68].

### 1.1.2 Influence de la direction de chargement, notion d'effectivité

Les essais mentionnés précédemment montrent le rôle joué par le pré-dommage du matériau. Si un confinement initial permet de refermer les fissures, il ne les élimine pas. Seul leur effet sur la réponse globale est atténué lorsque la pression augmente. La connaissance du taux de dommage initial n'est donc pas suffisante. Il faut y ajouter la notion « d'effectivité », qui est dépendante de la direction de sollicitation. À titre de démonstration, mentionnons les essais de traction-compression de Ramtani sur un béton [74] (fig. 1.4). On observe une dissymétrie importante dans la réponse du matériau en traction ou en compression. Lors de la décharge et donc de la recompression, le matériau récupère son module initial. Cet exemple montre que l'effet de

## 1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

l'endommagement généré pendant la traction s'efface progressivement lorsque l'on repasse en compression. Supposons que chaque fissure est dans un plan de normale donnée, et classons les en « familles » de même orientation à un angle solide près. Une famille est définie par une orientation et une densité de microfissure. Lors de la traction, la famille dont la normale est orientée dans le sens de chargement voit sa densité croître. À la compression, ces fissures se referment et celles à  $90^\circ$  s'ouvrent.

Ce n'est pas le cas lors d'un cisaillement simple comme le démontrent les essais de torsion mentionnés par Doanh sur de la kaolinite [37]. Ces essais ont été effectués à déviateur constant. Ils se décomposent en deux étapes : (1) application d'une pression de confinement de 0,5 MPa et d'une contrainte normale verticale générant un déviateur de 0,05 MPa puis (2) application d'une sollicitation de torsion cyclique à contrainte verticale et pression de confinement constantes.

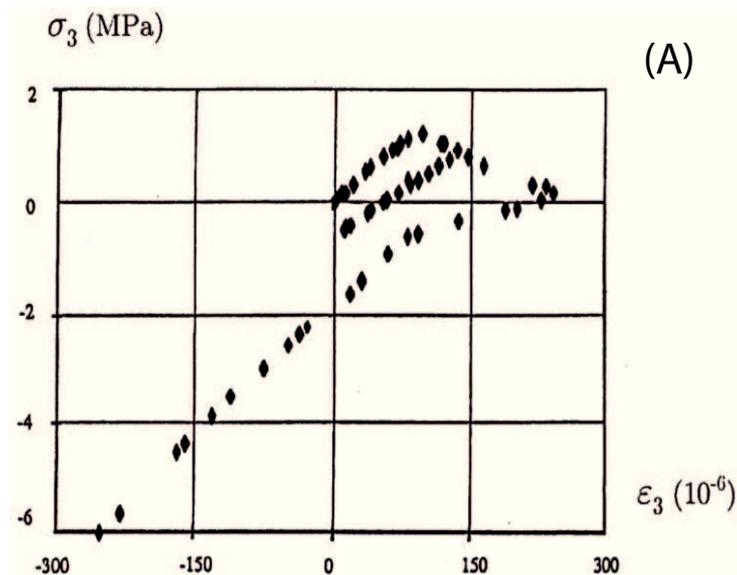


FIGURE 1.4 – Essai de traction-compression sur un béton [74].

La figure 1.5 représente l'évolution de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{13}$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\epsilon_{13}$ . Au chargement, on remarque une phase linéaire dont la pente correspond au module de cisaillement. Au début de la phase de déchargement, le module de cisaillement tangent est quasi-identique au module initial. Le dommage, s'il existe, n'est pas effectif ou s'avère être orienté suivant une direction n'ayant pas d'effet sur la réponse mesurée.

### 1.1.3 Anisotropie induite de l'endommagement et ses effets

Les paragraphes précédents ont permis de montrer que même si on considère un endommagement isotrope, son effet peut varier en fonction de la direction et du mode de sollicitation.

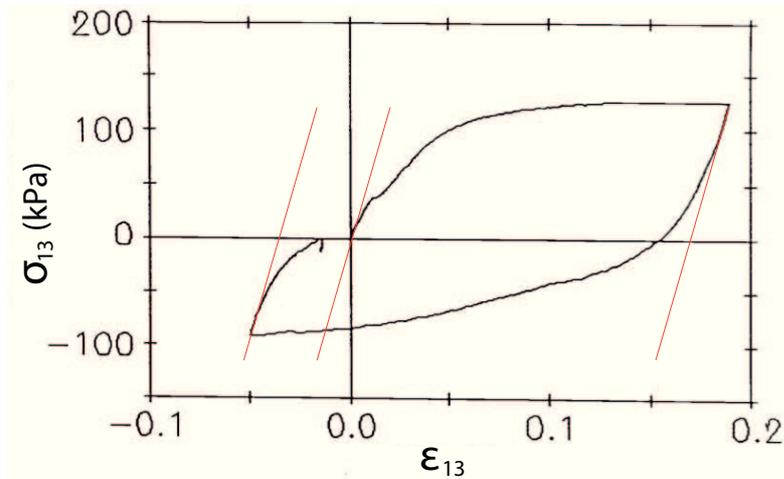


FIGURE 1.5 – Essai sur de la kaolinites. Torsion cyclée avec un déviateur initial de 0,05 MPa et une pression de confinement de 0,5 MPa [37].

Des observations microstructurales récentes ont été effectuées sur les roches granitiques (voir par exemple les travaux d’Homand *et al.* [42] et de Hoxha [43]). La figure 1.6 représente l’évolution et la distribution angulaire de la densité de fissuration d’un granite de la Vienne soumis dans un premier temps à une pression de confinement à laquelle est ensuite ajoutée une compression simple (direction  $90^\circ$ ) à plusieurs niveaux jusqu’à 5 MPa. Le paramètre  $P_L$  est le nombre d’intersection des fissures par unité de longueur de la grille de test constituée de lignes parallèles. Ce paramètre est représentatif d’une orientation privilégiée du réseau de microfissures : plus sa valeur est grande, plus la microfissuration est orientée. La microfissuration initiale est quasi-isotrope. Elle s’oriente majoritairement dans la direction transversale ( $0^\circ$  et  $180^\circ$ ) lors de la sollicitation. Dans la direction de chargement ( $90^\circ$ ), le paramètre augmente légèrement puis il se stabilise. Cet essai montre qu’un endommagement anisotrope s’est développé. Cette anisotropie est confirmée par des mesures de célérités d’ondes ultrasonores par Marigo [63] et Berthaud [14]. L’analyse de la cinétique de microfissuration montre le rôle joué par la déformation positive (endommagement de type mode I) pour ces matériaux.

Avec un microscope électronique à balayage, Zhao [86] a observé l’amorçage, le développement et la coalescence des microfissures à la surface d’un échantillon d’une roche granitique sous un chargement de compression simple. La figure 1.7 représente les longueurs cumulées et le nombre de microfissures en fonction de l’orientation pour une contrainte appliquée et croissante en valeur absolue. On observe une anisotropie de la distribution des microfissures, accentuée dans la direction transverse à la direction de sollicitation.

Si les observations à l’échelle de la microstructure restent rares dans la littérature, de nombreuses études ont permis de mesurer l’anisotropie du comportement de

## 1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

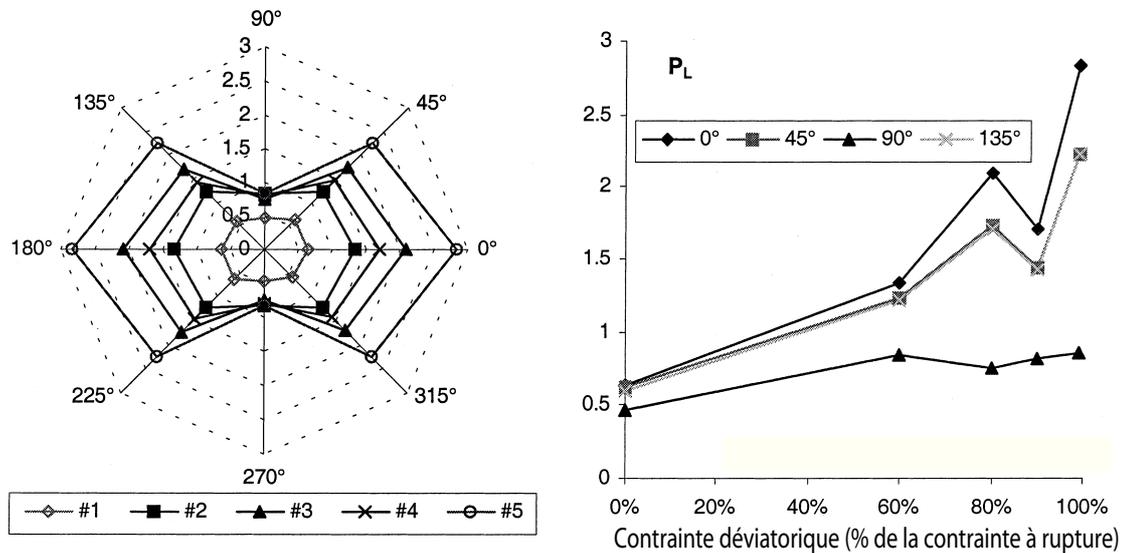


FIGURE 1.6 – Évolution et distribution des densités de microfissures en fonction de la contrainte déviatorique [42]. (# $i$  est le numéro de l'échantillon et  $P_L$  en  $mm^{-1}$ )

plusieurs matériaux. On peut citer [15] [77] [84] [43] [48] [64] [60] [54]. Un résumé des études portant sur des roches peut être trouvé dans l'ouvrage de Paterson [67]. Ces essais montrent par exemple la croissance du rapport de la déformation longitudinale sur la déformation transversale (nous appellerons ce rapport le « coefficient de contraction ») lors d'essais de compression. En considérant le grès des Vosges comme un matériau élastique endommageable isotrope, le coefficient de contraction ne doit pas dépasser 0,5. Or la figure 1.8 démontre qu'il en va autrement lorsque l'on trace le coefficient de contraction en fonction de la contrainte appliquée. Une explication avancée par Pecqueur [68] et reprise par Dragon *et al.* [2] invoquent l'anisotropie d'endommagement induite par la sollicitation. Nous verrons plus loin que notre matériau se comporte de façon identique.

### 1.1.4 Hystérésis lors des cycles

Lorsqu'après une compression, l'échantillon est déchargé puis rechargé, on observe souvent une boucle d'hystérésis (fig. 1.1.A et fig. 1.9). Pecqueur a mené des essais de torsion avec décharge sur un cylindre de craie de Haubourdin soumis à une pression hydrostatique de 8 MPa (fig. 1.10). Il observe des boucles d'hystérésis dans la réponse couple-déformation.

Dans la littérature, les hystérésis sont interprétés comme la manifestation d'une réouverture des microfissures lors des décharges accompagnée d'un frottement dissipatif des lèvres en regard de certaines fissures. Les mesures de Pecqueur (figure 1.10) suggèrent qu'en début de décharge en torsion, il faut vaincre un seuil (d'où

## 1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

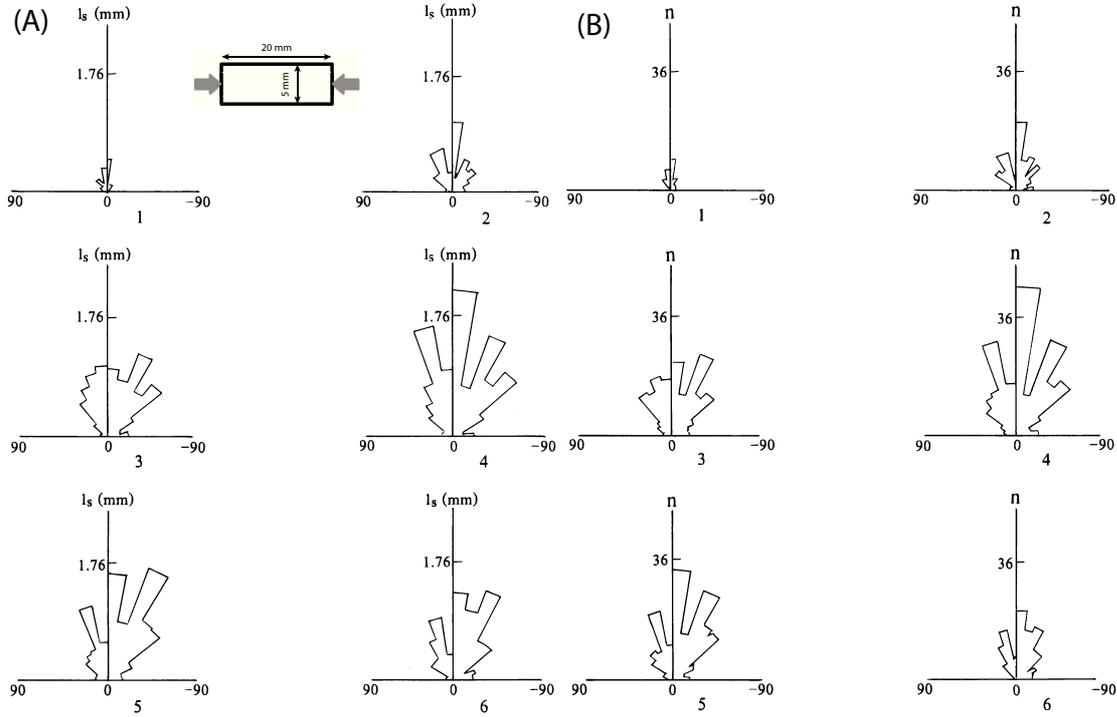


FIGURE 1.7 – Evolution de la longueur  $l_s$  (A) et du nombre  $n$  des microfissures (B) en fonction de l'orientation à (1)  $\sigma = 0,59\sigma_c$ , (2)  $\sigma = 0,73\sigma_c$ , (3)  $\sigma = 0,88\sigma_c$ , (4)  $\sigma = 0,96\sigma_c$ , (5)  $\sigma = \sigma_c$ , (6) déchargement [86].

une pente verticale sur les courbes, trajets BC ou DE) avant de rebrousser chemin. Cette observation tend à accréditer le rôle du frottement. D'autre part, si le mécanisme de réouverture des microfissures est invoqué seul, la décharge d'un essai de compression devrait se faire selon un trajet contrainte-déformation avec concavité négative alors que généralement l'inverse est observé. Il est donc légitime de penser que si les fissures peuvent effectivement se réouvrir lors de la décharge, le mécanisme de frottement domine la réponse contrainte-déformation dans les phases de décharge-recharge.

### 1.1.5 Bilan

Force est de constater qu'à notre connaissance il n'existe pas une littérature abondante relatant des mesures quantitatives précises des taux de microfissuration initiales ou induites par un chargement. Les quelques publications que nous avons rassemblées montrent :

- Le plus souvent, la présence d'une microfissuration initiale et isotrope des géomatériaux.
- Le rôle joué par la direction de la sollicitation qui rend actives (nous dirons

1.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES OBSERVATIONS RÉALISÉES SUR LES MATÉRIAUX QUASI-FRAGILES

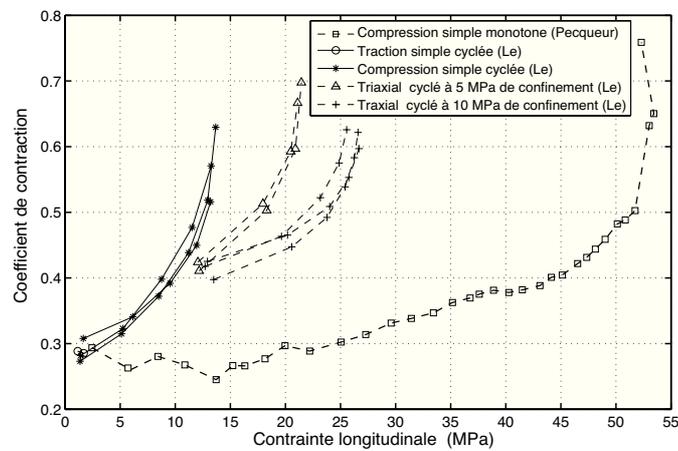


FIGURE 1.8 – Évolution du rapport des déformations en fonction de la contrainte longitudinale pour un grès des Vosges [68] et pour le matériau étudié [56].

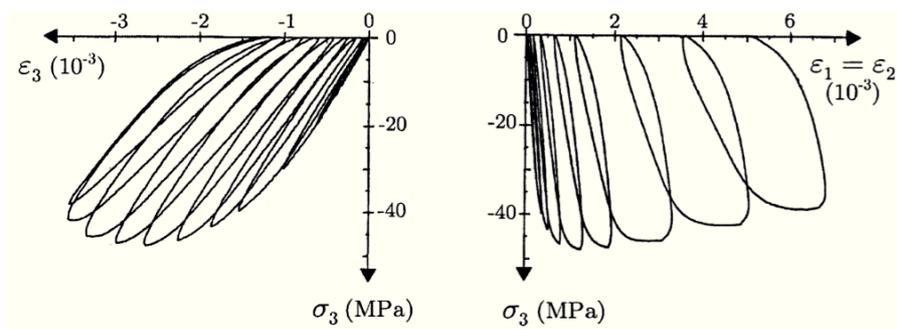


FIGURE 1.9 – Essai de compression uniaxiale cyclée sur un béton [74].

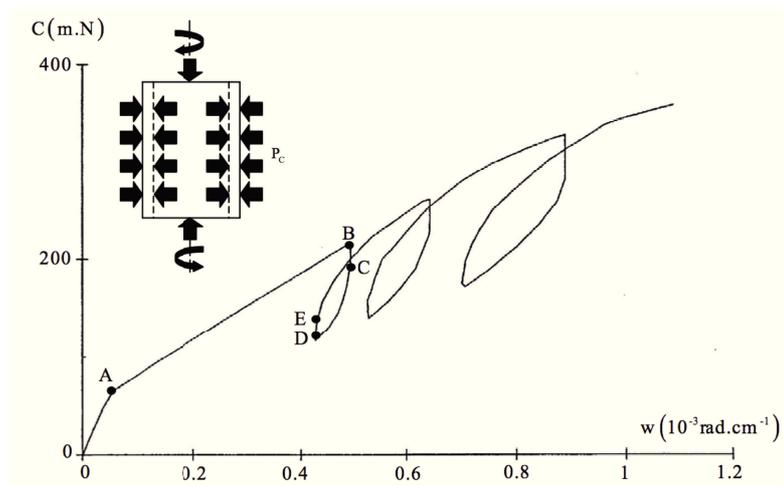


FIGURE 1.10 – Réponse couple/déformation angulaire avec décharges d'un cylindre creux de craie de Haubourdin soumis à une torsion et une pression hydrostatique de 8 MPa [68].

« effectives ») ou non certaines des microfissures en fonction de leur orientation et de leur niveau d'ouverture. Cela se traduit par exemple par une dépendance des modules élastiques à l'origine en fonction du confinement.

- Très probablement, un phénomène dissipatif de type frottement entre lèvres de certaines microfissures (cela dépend de leur orientation vis à vis de la sollicitation). Présent quelle que soit la sollicitation, il s'observe essentiellement lors des décharges et conduit à des boucles d'hystérésis.
- Un accroissement du coefficient de contraction au delà de 0,5, valeur non admise si l'on souhaite modéliser le comportement du matériau avec une loi élastique endommageable isotrope.
- Si le module de cisaillement est insensible à la direction de cisaillement, il dépend fortement du dommage existant. Ce n'est pas le cas du module d'Young qui dépend de l'endommagement et de la direction de chargement.

Dans la section suivante, le matériau étudié dans le cadre de cette thèse est présenté. Nous concentrons notre attention sur les manifestations macroscopiques ou bien à l'échelle de la microstructure prouvant l'existence initiale et le développement d'un endommagement anisotrope induit par la sollicitation, qu'elles soient aussi bien macroscopique qu'à l'échelle de la microstructure.

## 1.2 Mise en évidence de l'anisotropie d'endommagement : échelle microstructurale

Le matériau explosif étudié ici (appelé « M1 ») est formé de cristaux mélangés à une très faible quantité de liant polymère (quelques pourcents). La mise en forme du matériau est réalisée par compaction isostatique (voir par exemple [71]). Les cristaux enrobés par le liant sont introduits dans une poche en élastomère fermée hermétiquement par un bouchon constitué du même élastomère. Le vide est réalisé à l'intérieur de la poche. L'ensemble subit un préchauffage en étuve. Le sac de moulage est ensuite introduit dans une presse isostatique à l'intérieur de laquelle sont appliqués plusieurs cycles de pression de valeur maximale comprise entre 150 et 200 MPa. Après refroidissement, on obtient un matériau compact dont la porosité résiduelle est inférieure à 5%. La pièce moulée peut être usinée pour sa mise en forme finale (fig. 1.11.A).

### 1.2.1 Observation de la microstructure initiale

La figure 1.11.B présente la microstructure du matériau M1. On y voit le fort taux de charge de ce matériau. La porosité est peu identifiable avec le grandissement optique utilisé ici. Elle se localise essentiellement entre les plus petits grains. La taille des particules varie fortement de quelques centaines de microns à quelques microns, avec une taille moyenne de l'ordre de 200  $\mu\text{m}$ . Les particules ont un faible rapport

## 1.2. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : ÉCHELLE MICROSTRUCTURALE

---

de forme et elles sont orientées aléatoirement dans le matériau. Le liant, présent dans la composition en de très fines couches, n'est pas détectable à l'oeil y compris à forts grossissements. La figure montre que certains grains sont microfissurés. Cette microfissuration, absente des cristaux avant mise en forme, provient des contraintes intenses qui se sont développées lors de la compaction, particulièrement aux contacts entre grains. À plus fort grandissement (non montré ici), on distingue des réseaux rectilignes dans certains des plus gros grains provenant de leur déformation plastique lors du compactage. Cette microstructure complexe n'est pas sans rappeler celles observées pour des bétons (fig. 1.12). Comme le montre toutes les caractérisations effectuées jusqu'ici, le comportement global est initialement isotrope.

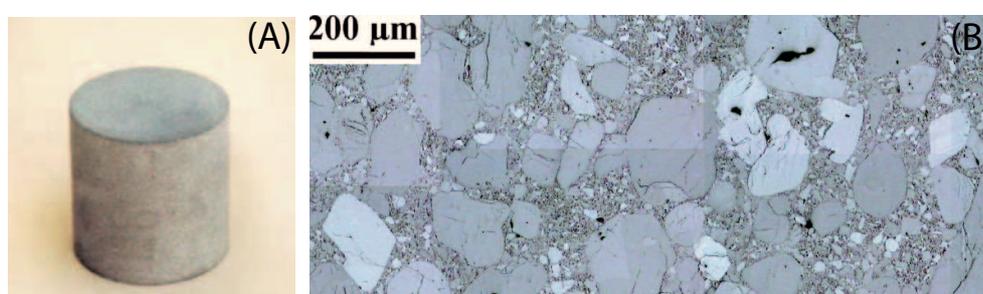


FIGURE 1.11 – Micrographie du matériau vierge après compactage [80].

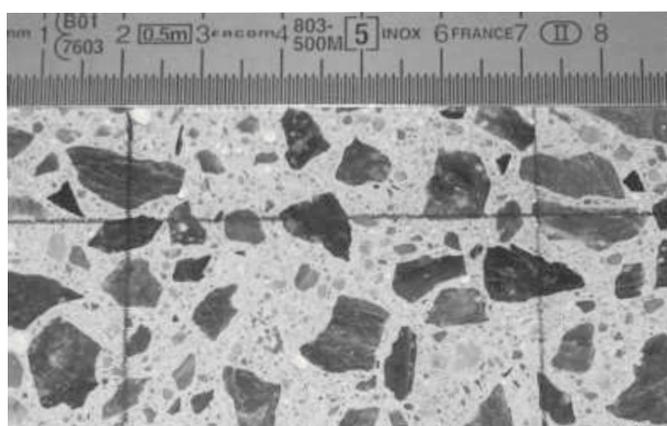


FIGURE 1.12 – Vue en coupe d'un béton [28].

### 1.2.2 Effet d'une sollicitation à l'échelle microstructurale

À partir d'échantillons sollicités puis récupérés et observés sous microscope, Trumel et al [79] ont constaté que pour des pressions de confinement allant de 10 à 20 MPa, le matériau s'endommage et rompt essentiellement par fissuration. La fissuration peut être soit de type décohésion (la fissure contourne les grains) soit intragran-

## 1.2. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : ÉCHELLE MICROSTRUCTURALE

nulaire. Pour illustrer ces phénomènes, nous rapportons ici les résultats d'une étude réalisée par Picart et al. [72] en régime dynamique. Lors d'un essai d'impact dans la tranche d'un échantillon, le matériau est contraint de se déformer autour d'une singularité géométrique fixe. La figure 1.13 présente le principe de l'essai (fig. 1.13.A) et une image en fin d'essai (fig. 1.13.B). La zone A de la figure 1.13.A représente la section observée sous microscope optique. La figure 1.14 montre :

- l'apparition de nouvelles microfissures au sein des grains,
- la décohésion des grains par rapport à la matrice (nous appelons « matrice » l'ensemble des plus petits grains, du liant et de la porosité),
- la propagation et l'ouverture des microfissures existantes,
- la fermeture d'autres fissures existantes,
- l'apparition de bandes de cisaillements dans les grains.

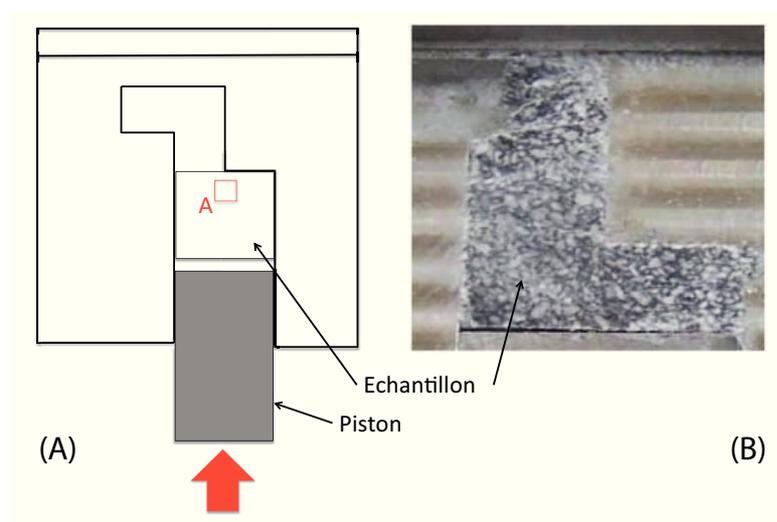


FIGURE 1.13 – Observations microstructurales *post mortem* du matériau M1 soumis à un essai d'impact à 13 m/s. (A) : schéma de principe de l'essai. (B) : image *post mortem* [72].

L'orientation privilégiée de la fissuration a été observée par exemple à la suite d'un essai de compression dynamique sur barre d'Hopkinson (fig. 1.15) [79]. Le réseau des fissures présente une normale commune parallèle à la direction d'extension, ce qui laisse penser à une fissuration gouvernée par la déformation principale positive. Il en résulte très probablement une dégradation anisotrope des propriétés mécaniques du matériau. Ceci étant, le niveau de déformation transversale très élevé atteint en dynamique avant rupture ne peut être atteint en régime quasi-statique, pour lequel le développement d'une orientation préférentielle est difficilement observable après les essais en l'absence d'une méthode quantitative d'analyse des images.

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAUX ÉTUDIÉ

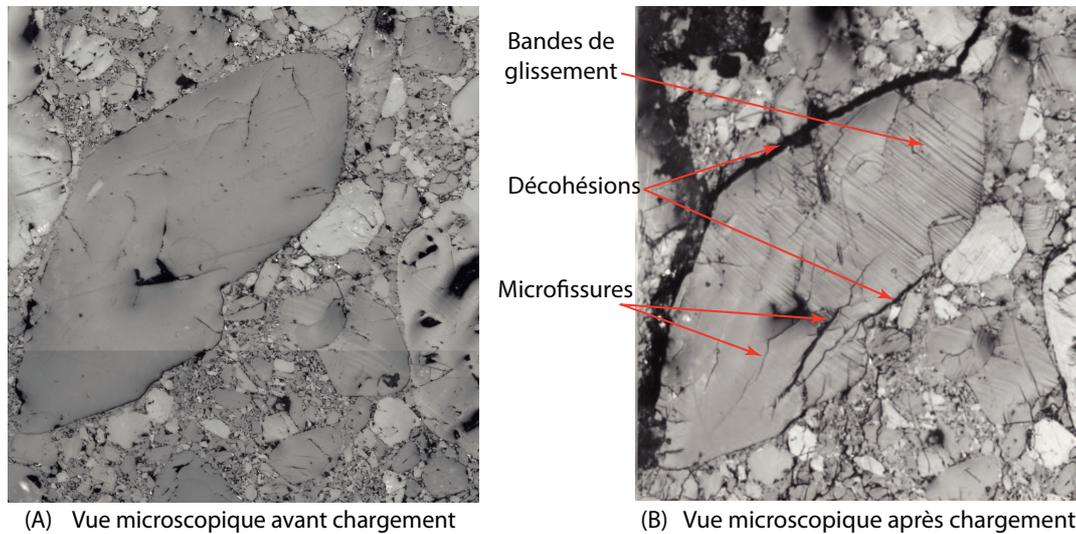


FIGURE 1.14 – Micrographie des microfissures avant (A) et après (B) le chargement dynamique [72].

### 1.3 Mise en évidence de l'anisotropie d'endommagement : manifestations macroscopiques pour le matériaux étudié

Plusieurs expériences ont été réalisées afin de caractériser le comportement du matériau étudié sur un domaine d'emploi donné :

- essais monotones (traction simple, compression simple et compression confinée à 5 MPa et 10 MPa),
- essais multi-cycles (traction simple, compression simple et avec confinement de 5 MPa et 10 MPa),
- essais de fluage-recouvrance et de relaxation à différentes charges,
- essais non proportionnels (essai de compression triaxiale suivi d'une compression simple),
- essais de spectrométrie mécanique (DMA),
- essais en température : les essais monotones et multicycles en traction et compression et DMA sont réalisés entre  $0^{\circ}\text{C}$  et  $50^{\circ}\text{C}$ .

Ces essais ont été réalisés à des vitesses de déformation comprises entre  $3,3 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$  et  $3,3 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$ . Autant que faire se peut, les éprouvettes ont été équipées de jauges de déformation orientées longitudinalement et transversalement sur les échantillons. Tous les résultats ont été consignés dans les mémoires de thèse de Said RjaFiAllah [75] et Viet-Dung Le [56]. Afin de simplifier nos travaux, nous n'avons considéré que les essais réalisés à  $20^{\circ}\text{C}$  et pour un unique taux de déformation de  $3,3 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$  (tab. 1.1).

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAU ÉTUDIÉ

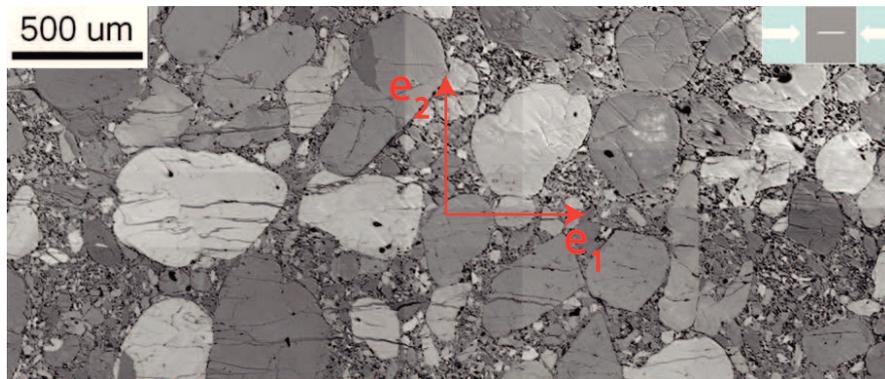


FIGURE 1.15 – Micrographie du matériau après un chargement dynamique en compression [80].

Type d'essai	Référence de l'essai
Compression simple	E39C20P000
Compression confinée à 5 MPa	E28H20P050
Compression confinée à 10 MPa	E22H20P100
Traction simple	E64T20P000

TABLE 1.1 – Tableau des essais de référence

#### 1.3.1 Influence de la pression de confinement et de la direction de chargement

La figure 1.16 présente les réponses contrainte-déformation pour trois chargements (pour plus de lisibilité, l'essai de compression confinée à 5 MPa n'est pas présenté). Nous observons que :

- Dans le cas d'un essai de traction simple, le matériau présente une rupture quasi-fragile pour un niveau de déformation longitudinale de l'ordre de 0,1 %. Cette valeur faible rend difficile la mise en oeuvre et l'exploitation des essais de traction. Par contre en compression simple, la rupture se manifeste à un niveau de déformation transversale sept fois plus grand (0,75 %). Cette réponse est typique des matériaux quasi-fragiles.
- En compression simple, la contrainte maximale est de l'ordre de  $-20$  MPa alors qu'en traction simple est de l'ordre de 3,5 MPa. Le rapport entre les déformations réversibles transversale et longitudinale est donné sur la figure 1.8. La dissymétrie de comportement est semblable au comportement d'un béton dont la contrainte à rupture en compression est de l'ordre de 38 MPa et en traction 3 MPa avec un coefficient de Poisson d'environ 0,2 [74].
- À un niveau de déformation donné, la contrainte en compression à 10 MPa de confinement est supérieure à celle enregistrée en compression simple : le

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAU ÉTUDIÉ

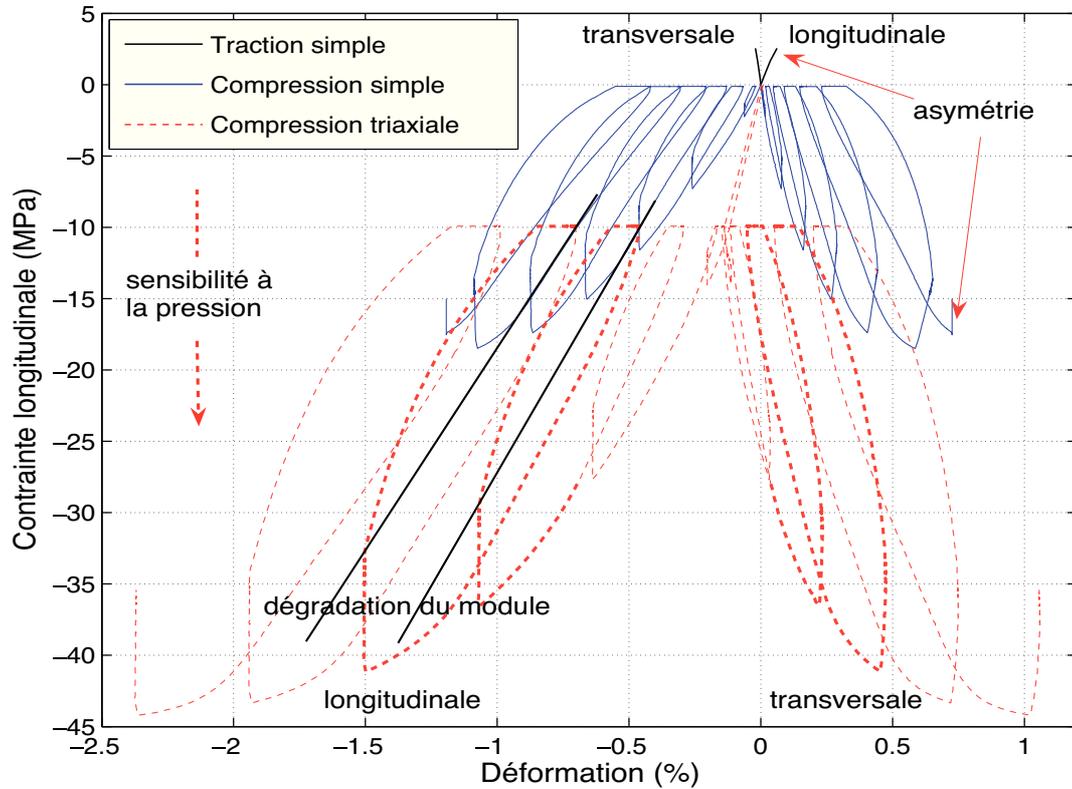


FIGURE 1.16 – Effet de la pression de confinement et du mode de sollicitation sur le comportement du matériau à  $3, 3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$  et à  $20^{\circ}C$ .

matériau est sensible à la pression de confinement.

- Les phases de déchargement montrent l'existence *a priori* de phénomènes irréversibles (dûs peut-être à une plasticité ou un frottement inter-granulaire). Des boucles d'hystérésis sont également mis en évidence.

Plusieurs essais triaxiaux ont été menés à très fort confinement initial (de 5 à 800 MPa) [81]. Cette étude a permis de montrer que les modules élastiques à l'origine varient fortement aux basses pressions inférieures à 10 MPa. Au delà de 10 MPa, ils deviennent constants et le restent tant que le niveau de pression utilisée pour densifier le matériau lors de sa fabrication n'est pas atteint.

#### 1.3.2 Extraction de la partie élastique endommageable pour des réponses expérimentales

Afin d'identifier le comportement élastique endommageable, il faut éliminer l'effet de la vitesse de déformation des courbes. Nous détaillons dans cette partie la procédure proposée par Le [56]. La contrainte mesurée est décomposée en une partie instantanée et une partie visqueuse (modélisation de type Maxwell généralisée). Pour

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAUX ÉTUDIÉ

isoler le comportement élastique endommageable, on retire la contrainte visqueuse en ne considérant que la contrainte relaxée pour chaque cycle. La contrainte n'étant pas complètement relaxée en fin de relaxation, la réponse est extrapolée sur une décade supplémentaire. Cette même extrapolation est appliquée en fin de recouvrance de façon à identifier au mieux la déformation résiduelle. La figure 1.17 illustre un cycle de charge-décharge avec une relaxation en fin de charge et une recouvrance en fin de décharge. La droite DB représente le module endommagé après un cycle de charge-décharge. Avec la méthode que nous venons de présenter, les point B et D ne sont pas ceux mesurés mais ceux extrapolés à partir des réponses temporelles des segments AB et CD.

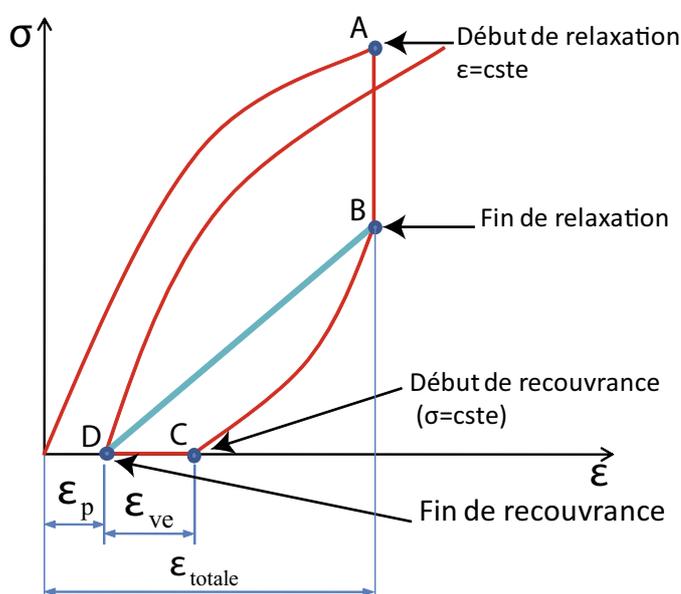


FIGURE 1.17 – Schéma d'un cycle de charge, relaxation, décharge et recouvrance

Cette démarche a été appliquée à tous les essais. Après la correction transversale des jauges, sont calculées les moyennes des jauges longitudinales et transversales. Les courbes contrainte-déformation pour l'ensemble des cycles de chargement sont ensuite tracées (fig. 1.18). Les points A, B, C, D qui représentent respectivement le début et la fin de la relaxation, et le début et la fin de la recouvrance (fig. 1.18) sont ensuite extraits. Ces points permettent ensuite de tracer les courbes temporelles de relaxation et de recouvrance en échelle logarithmique (1.21). Enfin, un prolongement linéaire des courbes d'une décade en temps permet de prédire la valeur « réelle » de fin de relaxation (fig. 1.20). On procède de la même manière avec les phases de recouvrance (fig. 1.23 et 1.24) pour construire la déformation irréversible longitudinale et transversale.

Une fois ce dépouillement fait pour chaque essai les courbes contrainte-déformation, sans contrainte visqueuse ni déformation irréversible peuvent être tracées (fig. 1.25).

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAU ÉTUDIÉ

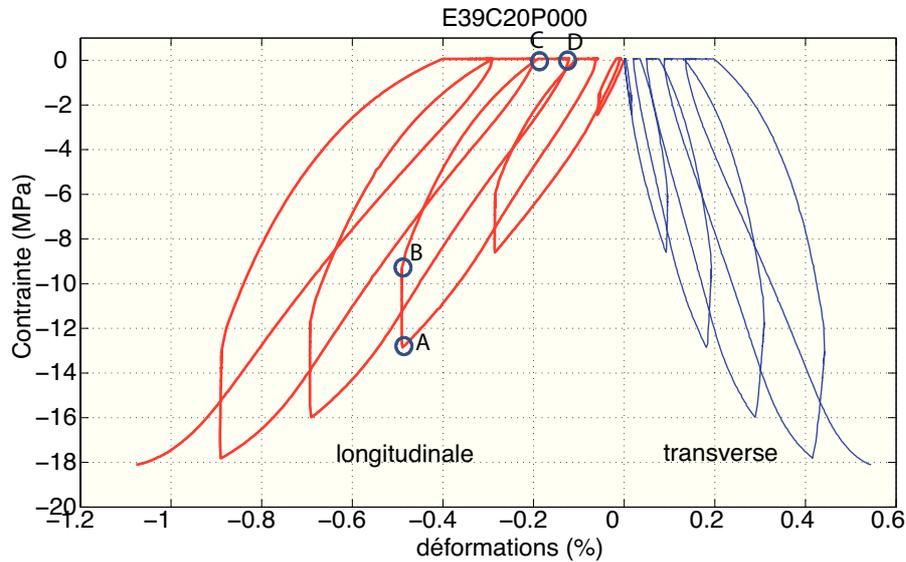


FIGURE 1.18 – Essai cyclé de compression simple à 20 °C et à  $3,3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ .

Notons que pour les compressions confinées à 5 et 10 MPa, les extrapolations ont été effectuées sous confinement. Une solution permettant d'accéder aux déformations irréversibles sans l'effet de confinement serait de refaire les essais en enlevant la pression de confinement à la fin de chaque décharge uniaxiale si cela ne conduit pas à la ruine du matériau. Ainsi, les phases de recouvrance seraient effectuées à pression nulle.

Les courbes contrainte-déformation obtenues montrent une forte sensibilité du matériau à la pression de confinement.

La figure 1.26 présente l'évolution des modules respectivement longitudinaux et transverses expérimentaux en fonction de la contrainte relaxée pour chaque essai. Ces courbes montrent deux phénomènes essentiels. Tout d'abord une dégradation des modules au cours de chaque essai. Cette dégradation est plus prononcée pour la réponse transversale. Ce phénomène peut être lié à la déformation positive dans cette direction qui tend à ouvrir des fissures. D'autre part, les modules dépendent fortement de la pression de confinement. Ceci met en évidence l'effet de la microfissuration initiale.

Il est ensuite possible de tracer l'évolution de la variation relative de ces modules en fonction de la plus grande déformation principale positive enregistrée pendant l'essai (fig. 1.27 [56]). La figure 1.27 (gauche) montre d'une part une évolution de rigidité différente entre la traction et la compression. D'autre part, bien que le module longitudinal initial dépende de la pression, l'influence de cette dernière sur la dégradation de la rigidité est faible. On observe le même faisceau de courbes en compression simple qu'en compression triaxiale à 5 MPa et à 10 MPa de confinement. La dégradation du module transversal est bien supérieure à celle du module

### 1.3. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ANISOTROPIE D'ENDOMMAGEMENT : MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES POUR LE MATÉRIAU ÉTUDIÉ

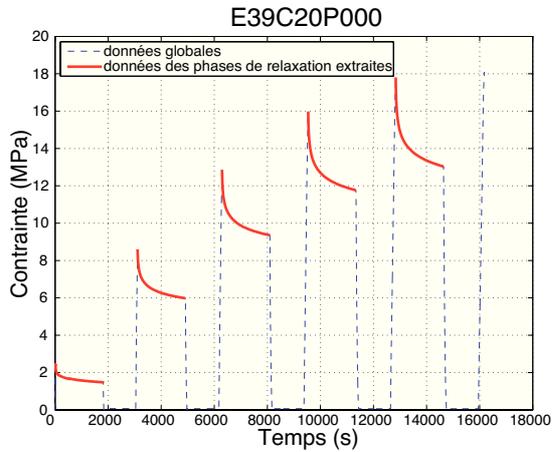


FIGURE 1.19 – Relaxation en compression simple.

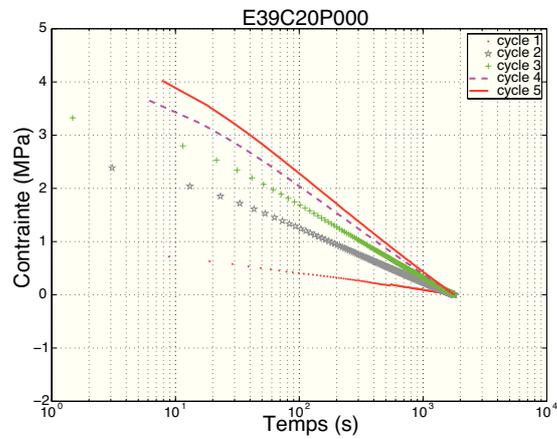


FIGURE 1.20 – Phases de relaxation en fonction du logarithmique du temps.

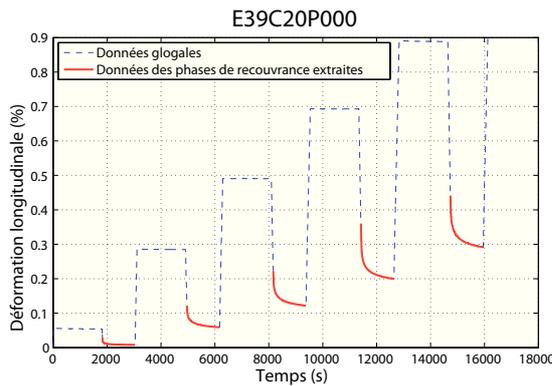


FIGURE 1.21 – Phases des recouvances des déformations longitudinales.

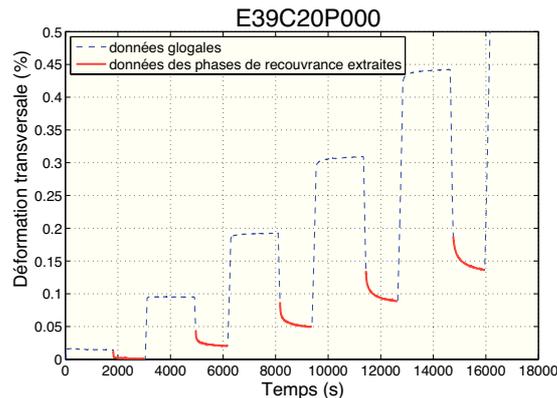


FIGURE 1.22 – Phases de recouvrance des déformations transversales.

longitudinal traduisant une augmentation de l'effet Poisson au cours du chargement (fig. 1.27 droite).

### 1.3.3 Bilan

Le mode de fabrication et les analyses microstructurales réalisées sur le matériau vierge ou après sollicitation laissent présager un comportement complexe avec :

- une dépendance du comportement à la vitesse de sollicitation et à la température de par la présence d'un liant polymère,
- une dépendance du comportement à la pression de confinement et une sensibilité au mode de sollicitation (réponse différente en traction et en compression) de par le fort taux de charge et une porosité résiduelle,

## 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

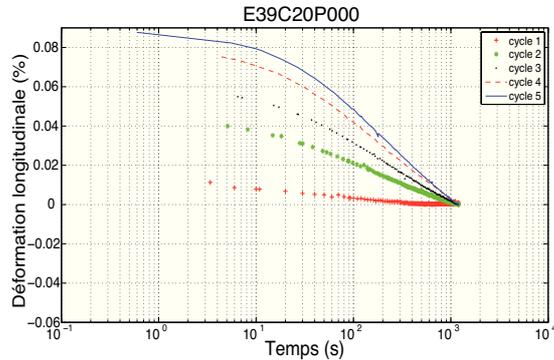


FIGURE 1.23 – Prolongement des recourances des déformations longitudinales.

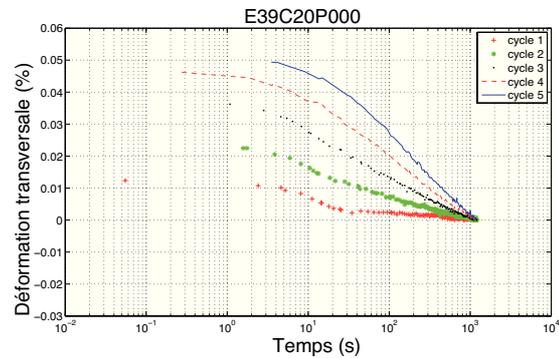


FIGURE 1.24 – Prolongement des recourances des déformations transversales.

- une isotropie initiale du comportement de par le mode de fabrication,
- une reprise de raideur (1) si un chargement hydrostatique est appliqué avant tout autre sollicitation ou bien si (2) le sens de la sollicitation change (effet unilatéral au passage traction/compression par exemple) de par la présence initiale de microfissures (et de nombreux contact entre grains) et la possibilité de les refermer,
- un endommagement par microfissuration intragranulaire, par décohésion grain/matrice ou grain/grain essentiellement de mode I,
- l'orientation possible de cet endommagement en fonction de la sollicitation,
- la possibilité de développer des bandes de plasticité même si ce mécanisme ne semble pas dominer aux faibles confinements qui nous intéressent ici.

Les études menées depuis plusieurs années ont permis de caractériser macroscopiquement le matériau étudié dans cette thèse. Dans les mémoires de thèse de RjaFiAllah et Le, le lecteur trouvera les réponses contrainte-déformation montrant l'influence de la vitesse de déformation, de la température, du sens de chargement et du confinement. Nous en donnons maintenant un aperçu en centrant la présentation sur les effets de l'endommagement.

## 1.4 Mise en évidence du comportement unilatéral du matériau

### 1.4.1 Mode opératoire

Les essais ont été réalisés sur une machine électro-mécanique disponible au CEA Le Ripault. Une montage à double cage a été disposé entre les plateaux de la machine. L'échantillon est prisonnier entre les deux cages. Ainsi, lorsque le plateau mobile de la machine s'écarte du plateau immobile, l'échantillon est soumis à une compression.

## 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

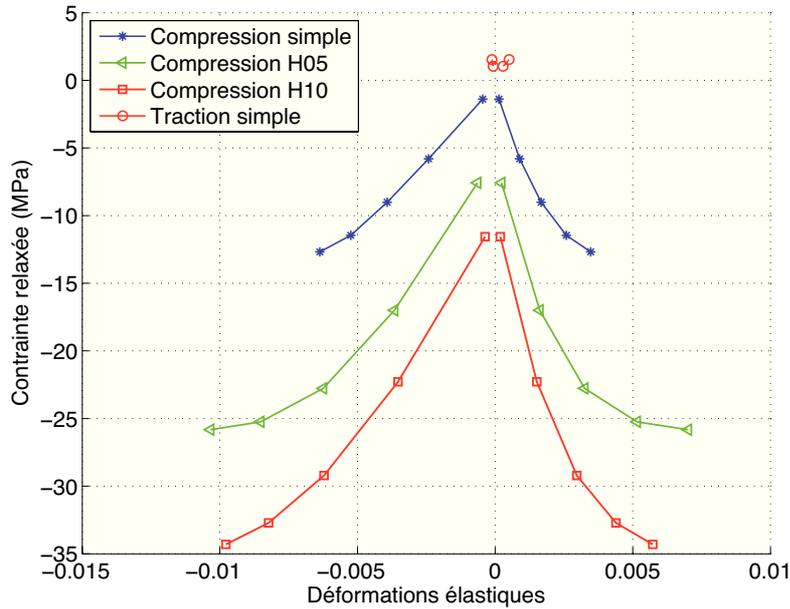


FIGURE 1.25 – Réponses contrainte-déformations des essais à 20 °C et  $\dot{\varepsilon} = 3,3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$  après extraction de la contrainte visqueuse et des déformations irréversibles.

Le mouvement inverse produit un effort de traction sur l'éprouvette.

Les éprouvettes de forme diabolo collées entre les plateaux des cages respectives (colle M200), ont été utilisées afin de réduire les risques de désalignement, et donc les flexions parasites, et de permettre la réalisation d'essais alternant, sur une même éprouvette et sans la replacer, une traction puis une compression. La hauteur totale de l'éprouvette est de 60 mm et sa section est carrée. Dans la partie centrale, la section est équivalente à celle d'une éprouvette de traction (10×10 mm). Dans la partie utile de l'éprouvette, des jauges de déformation ont été collées pour mesurer l'évolution des déformations respectivement longitudinale et transversale (colle M200).

Afin de limiter les contraintes visqueuses, les essais ont été réalisés à la vitesse la plus lente possible (0,012 mm/min) et à température ambiante.

### 1.4.2 Résultats

Compte tenu de ce nouveau mode opératoire, nous avons vérifié la cohérence des résultats avec la base expérimentale à notre disposition en effectuant deux essais monotones respectivement en compression et en traction (fig. 1.28 et tab. 1.2). La contrainte à la rupture en traction (2,92 MPa) est très proche de ce qui est habituellement obtenu avec les éprouvettes haltères (3,13 MPa). Il en va de même pour la compression pour laquelle, avec cette vitesse de chargement, on minimise effec-

## 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

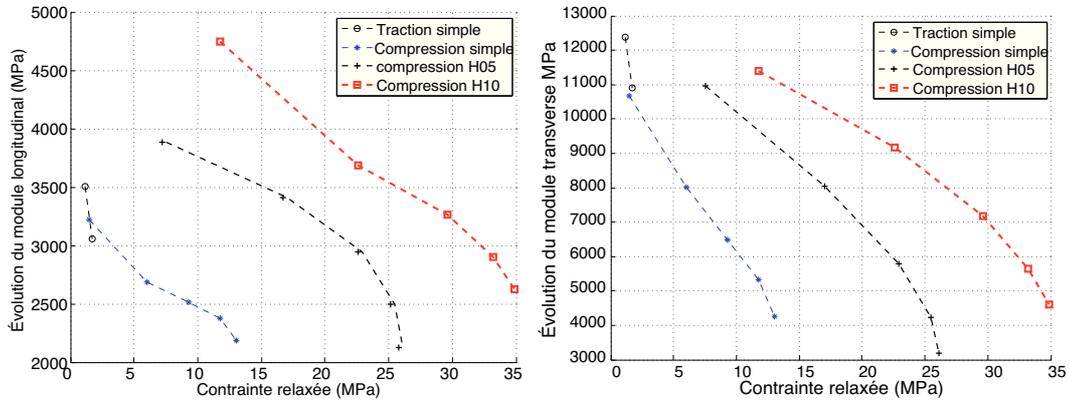


FIGURE 1.26 – Evolution expérimentale du module longitudinal et transverse expérimental ( $\sigma_L/\varepsilon_T^e$ ) à 20 °C et pour  $\dot{\varepsilon} = 3,3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ .

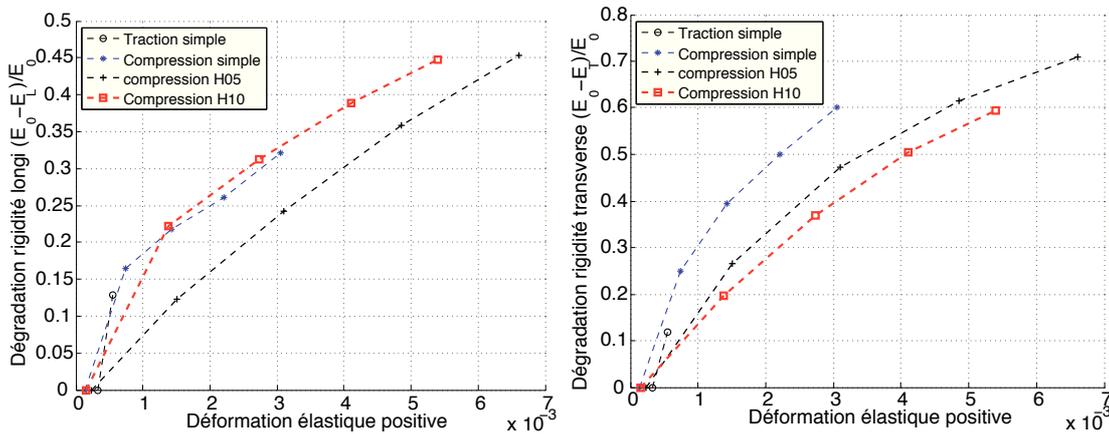


FIGURE 1.27 – Dégradation de la rigidité longitudinale (gauche) et transversale (droite) du matériau pour différents essais multi-cycles à 20 °C et à  $\dot{\varepsilon} = 3,3 \cdot 10^{-5} /s$ .

tivement la contrainte visqueuse et donc la contrainte à rupture. La dispersion des jauges en compression comme en traction varie de  $\pm 2,3\%$  à  $\pm 4,6\%$ , ce qui est tout à fait raisonnable compte tenu des niveaux des déformations atteints.

Le graphique en bas de la figure 1.28 montre l'évolution des modules sécants longitudinaux (à droite de l'axe des ordonnées) et transversaux (à gauche de cet axe) en fonction de la contrainte appliquée. Les valeurs obtenues pour les plus faibles contraintes (inférieures à 0,5 MPa) ne sont pas prises en compte. Les modules longitudinaux à l'origine sont identiques pour les deux essais. Pour un module donnée de 4 GPa, on relève une contrainte en compression comprise entre -0,55 et -0,64 MPa et en traction, pour une contrainte comprise entre 0,56 ou 0,84 MPa. On observe par contre une décroissance plus rapide de ce module lors de l'essai de traction. Pour les modules transverses, une valeur initiale de -12 GPa est plausible (soit un rapport

#### 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

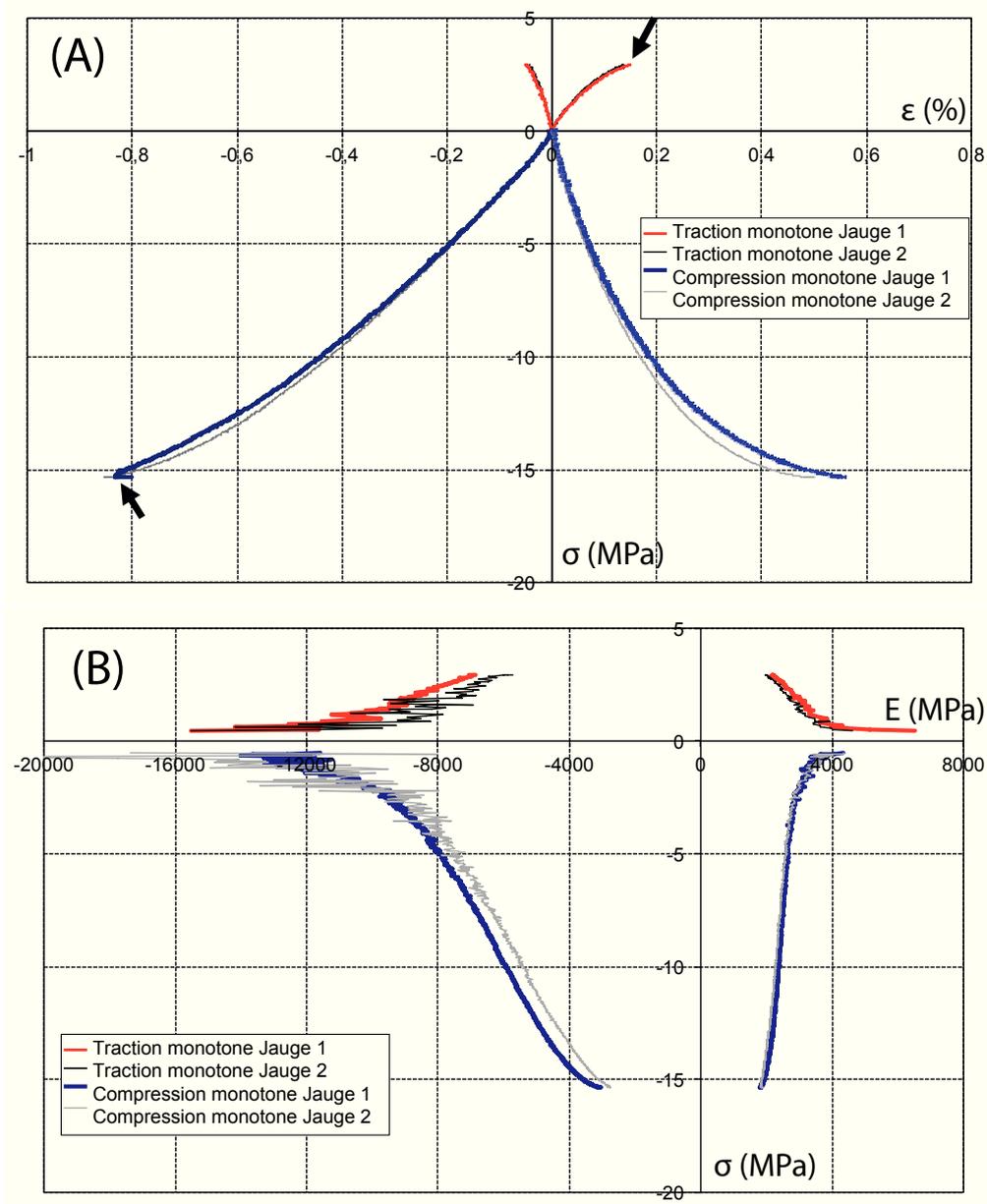


FIGURE 1.28 – Essais monotones de compression et de traction à 0,012mm/min sur éprouvette diabolo; (A) réponse contrainte-déformation des deux jauges bi-directionnelles; (B) évolutions des modules sécants pour les deux essais.

#### 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

-3 avec les modules longitudinaux). Le module transverse évolue plus rapidement en compression qu'en traction. On constate donc que c'est le module dans la direction des déformations positives qui baisse le plus vite, en accord avec l'idée d'un endommagement anisotrope et préférentiellement de mode I.

Contrainte max en traction	def. longi 1	def. longi 2	moyenne longi	def. trans 1	def. trans 2	moyenne trans
2,92 MPa	0,1359 %	0,1490 %	0,1425 %	-0,0425 %	-0,0445 %	-0,0435 %
Contrainte max en compression	def. longi 1	def. longi 2	moyenne longi	def. trans 1	def. trans 2	moyenne trans
-15,35 MPa	-0,8542 %	-0,8014 %	- 0,8278%	0,5025 %	0,5333 %	0,5179 %

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif des niveaux de contrainte et déformations longitudinale et transversale des jauges 1 et 2 pour des essais monotones en traction et compression simple.

Un essai composé d'une première phase de traction suivie d'un chargement de compression (fig. 1.29) à ensuite été réalisé. Afin de maximiser l'endommagement lors de la sollicitation de traction, une contrainte de 2,72 MPa a été appliquée. Elle représente 93% de la contrainte maximale enregistrée lors de l'essai de traction monotone. L'échantillon a ensuite été déchargé à la même vitesse avant d'être comprimé. On peut estimer que dès que la contrainte atteint -2 MPa, la courbe de compression monotone est parfaitement retrouvée. La variation de raideur se traduit par une hausse de 35% du module à cette contrainte. Cette observation montre que l'endommagement produit lors de la phase de traction affecte peu la réponse en compression. Nous interprétons cette observation en supposant que les familles de fissures créés en traction (majoritairement dans le plan horizontal) se referme complètement à -2MPa et c'est une autre famille qu'on active en compression, dans le plan vertical cette fois. La rupture intervient en compression à -15,03 MPa soit quasiment à la valeur de l'essai monotone correspondant. L'endommagement de traction n'affecte donc pas la rupture en compression ce qui confirme que l'on n'agit pas sur les mêmes familles de fissures en traction et en compression.

L'essai inverse a aussi été réalisé. On applique une contrainte de compression de -13,77 MPa correspondant à 90 % de la contrainte maximale enregistrée lors de l'essai monotone. Ensuite, l'éprouvette est déchargée à vitesse constante avant de subir un chargement de traction jusqu'à rupture (fig. 1.30). Aucun changement de pente n'est observé lorsque la contrainte devient positive . Par contre, on observe une rupture brutale de l'éprouvette à 2,50 MPa (85 % de la contrainte à rupture en monotone)

#### 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

Contrainte atteinte en traction	def. longi1	def. longi2	moyenne longi	def. trans1	def. trans2	moyenne trans
2,72 MPa	0,1362 %	0,1391 %	0,1377%	-0,0439 %	-0,0512 %	- 0,0476%
Contrainte max en compression	def. longi1	def. longi2	moyenne longi	def. trans1	def. trans2	moyenne trans
-15,03 MPa	-0,7803 %	décollée	- 0,7803%	0,4653 %	décollée	0,4653%

TABLE 1.3 – Tableau récapitulatif des niveaux de contrainte et déformations longitudinale et transversale des jauges 1 et 2 pour des essais monotones à rupture en traction et compression simple.

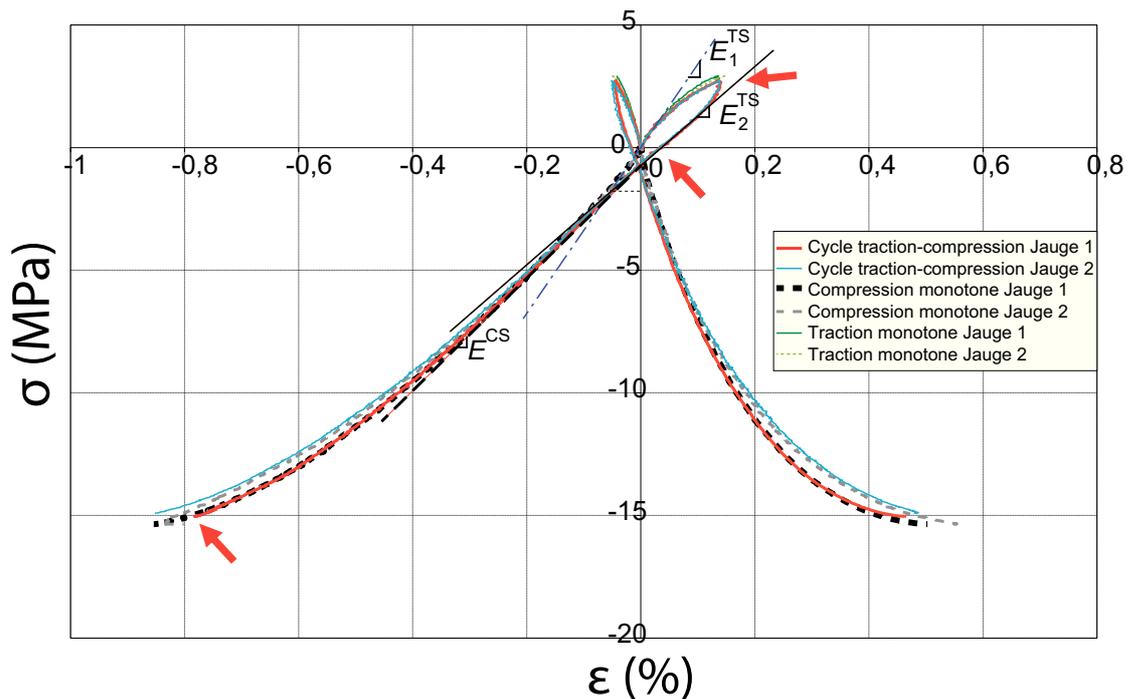


FIGURE 1.29 – Essai de traction simple suivi d'un essai de compression à rupture sur le matériau étudié.

alors que les courbes contrainte-déformation rattrape à peine les courbes obtenues lors du chargement monotone de traction. Le chargement préalable de compression influence sur la contrainte à la rupture lors de la phase de traction suivante.

Lors d'un essai de traction, on assiste à une rupture de nature fragile, et ce

#### 1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

Contrainte atteinte en compression	def. longi 1	def.longi 2	moyenne longi	def. trans 1	def. trans 2	moyenne trans
-13,77 MPa	-0,6183 %	-0,6813 %	- 0,6498%	0,2945 %	0,3135 %	0,3040%
Contrainte max en traction	def. longi 1	def.longi 2	moyenne longi	def. trans 1	def. trans 2	moyenne trans
2,50 MPa	0,0952 %	0,0926 %	0,0938%	-0,0410 %	-0,0296 %	- 0,0353%

TABLE 1.4 – Tableau récapitulatif des niveaux de contraintes et déformations longitudinales et tranversales des jauges 1 et 2 pour un essai de traction suivi de compression simple à rupture.

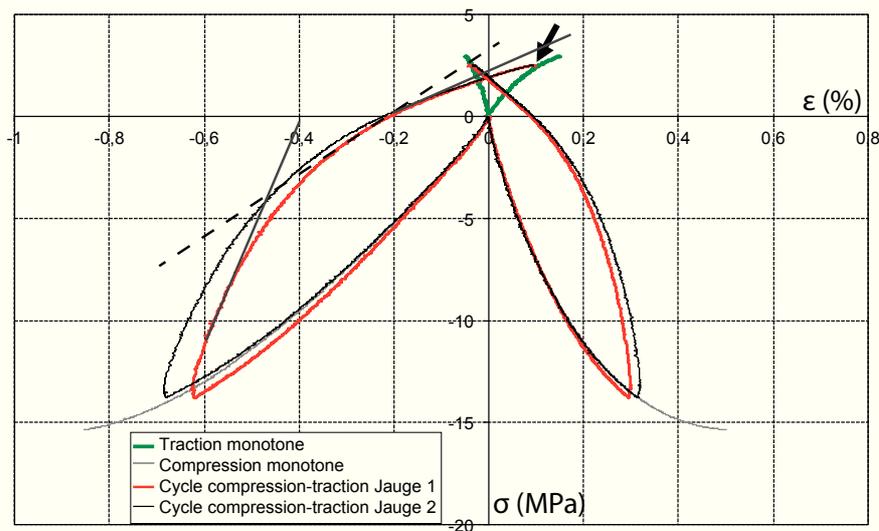


FIGURE 1.30 – Essai de compression suivi d’une traction jusqu’à rupture

pour un faible niveau de sollicitation. Lors des essais de compression, les niveaux de sollicitations atteints sont beaucoup plus élevés et la rupture semble plutôt de nature ductile. L’endommagement y progresse donc de manière beaucoup régulière que durant l’essai de traction et des déformations irréversibles se développent également. Elles peuvent être de plusieurs natures, à savoir une déformation réelle au sein des grains de HMX (High Melting point eXplosive) (fig. 1.14B), un écoulement du liant équivalent (petit grain de HMX combinés au liant polymérique), un frottement des lèvres des microfissures. Ce dernier phénomène ayant plutôt tendance à limiter l’écoulement sous confinement (consolidation du matériau) que de bloquer

une énergie interne suite à une décharge, qui par effet d'échelle se traduirait par une déformation irréversible.

Cette déformation "plastique" résiduelle en fin de compression associée à la rupture prématurée constatée lors de la phase de traction consécutive au premier cycle de compression simple soulève la question de la présence éventuelle d'un écrouissage de type cinématique. On constate une très faible diminution de la contrainte à rupture en traction, passant de 2,92 MPa à 2,5 MPa, et à un important décalage en déformation. Le centre du domaine élastique serait ainsi principalement déplacé vers les déformations longitudinales et transversales respectivement négatives et positives. Sur la figure 1.31B, on peut d'ailleurs constater que la rupture en traction faisant suite à trois cycles complets de compression/traction se produit pour une déformation longitudinale négative et quasiment la même contrainte de traction.

Des essais supplémentaires ont donc été réalisés afin d'essayer d'apporter des réponses à ces questions en analysant l'effet des chargement intermédiaires sur la rupture. Ces essais sont de même nature (alternance de cycle de traction et cycle de compression) à l'exception du premier chargement. Deux cycles sont tout d'abord effectués entre les contraintes correspondants à 75 % des contraintes à rupture (entre -11,48 et 2,23 MPa). Le cycle suivant s'est déroulé entre les contraintes correspondant à 85% (-13,08 et 2,43 MPa). L'ensemble des cycles sont tracés sur la figure 1.31. À chaque passage en contrainte négative après une sollicitation de traction, on observe une reprise de raideur franche vers -2,5 MPa cohérente avec ce qui a déjà été observé plus haut. Inversement, ces courbes montrent que lorsque d'une forte contrainte de compression on revient vers une contrainte nulle, il n'y a quasiment plus d'évolution de la raideur tangente à partir de -2,5 MPa Il semble donc bien que ce soit à cette contrainte que s'ouvrent majoritairement les microfissures existantes ou celles générées par les phases de traction préalables.

### 1.4.3 Bilan

Bien que les essais que nous venons de présenter mériteraient d'être dupliqués, les observations suivantes apparaissent clairement :

- appliquer une traction préalable ne modifie pas la réponse en compression et à rupture du matériau,
- la rupture est toujours intervenue lors d'une phase de traction,
- la déformation à rupture en traction est fortement influencée par un chargement préalable en compression même si celui-ci reste loin de la contrainte à rupture en compression,
- des variations rapides de raideur sont observées jusqu'à -2,5 MPa (puis se stabilisent) que l'on passe d'une traction à une compression ou bien l'inverse.

Ces essais confirment donc le rôle central joué par le sens de la sollicitation (et donc la notion d'effectivité de l'endommagement) et la nécessité de considérer, dans tout futur modèle, le caractère intrinsèquement anisotrope de l'endommagement induit

1.4. MISE EN ÉVIDENCE DU COMPORTEMENT UNILATÉRAL DU MATÉRIAU

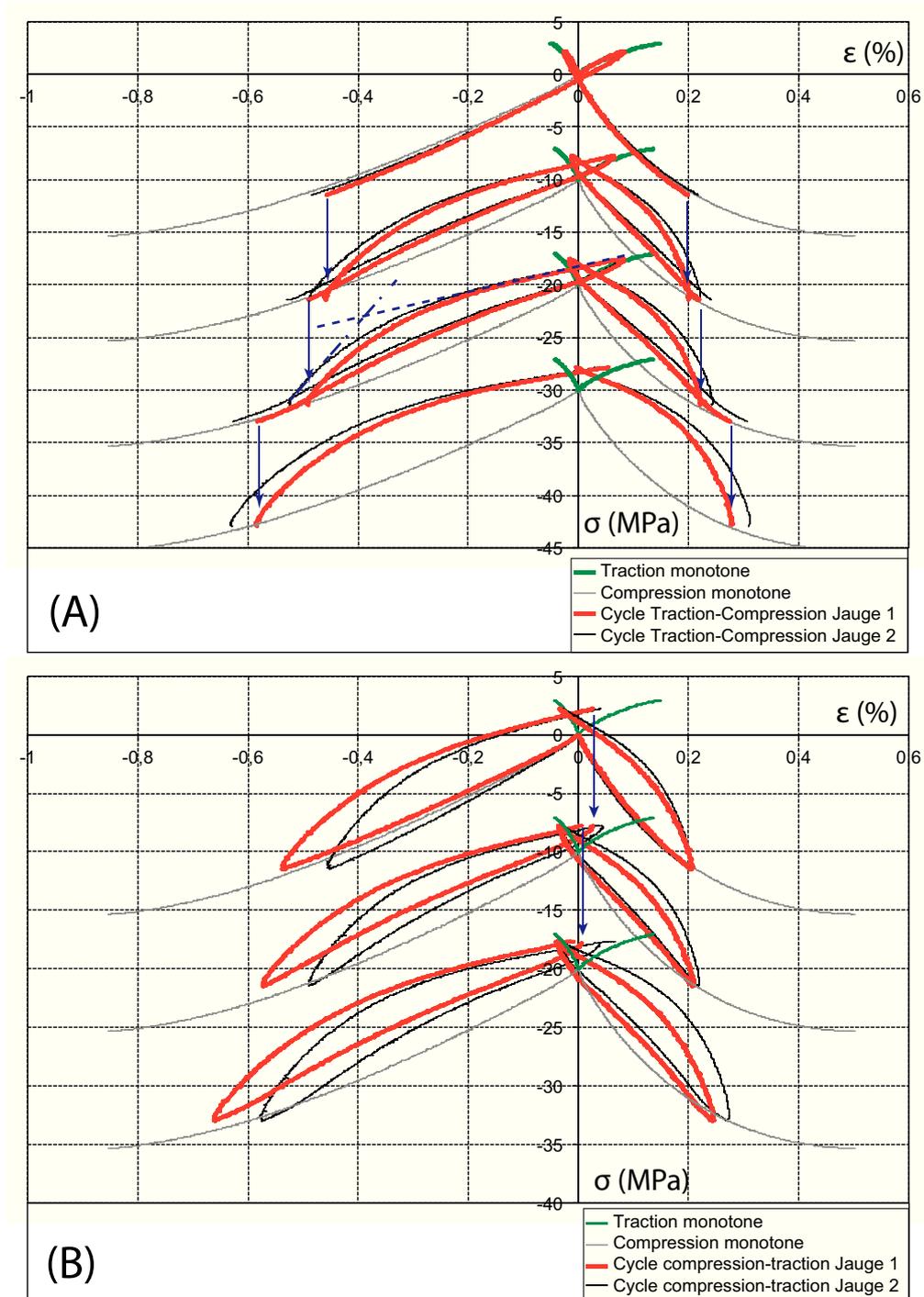


FIGURE 1.31 – Essais alternant 2 cycles à 75% et à 85% des contraintes à rupture. Premier chargement en traction (A) ou en compression (B).

par la sollicitation.

## 1.5 Conclusion

Le matériau à l'étude présente toutes les caractéristiques d'un matériau quasi-fragile. Il est constitué majoritairement de grains en contact, eux-même microfissurés de par le procédé de mise en forme qui a permis de compacter la matière. Il ne peut pas être schématisé sous la forme d'une matrice continue et homogène par endroit fissurée. Il doit être vu plutôt comme un polycristal. Ce pré-dommage constitue la première cause de dépendance en pression et l'asymétrie de comportement traction-compression. Comme pour d'autres matériaux, un confinement préalable permet de refermer ces défauts et tend à ramener le comportement vers celui du matériau non-endommagé. Pour le matériau pris ici en considération, une pression de l'ordre de 10 MPa semble suffisante.

Lorsque le matériau est soumis à une déformation positive orientée, un endommagement anisotrope apparaît vraisemblablement même si cette anisotropie n'a pu effectivement être quantifiée qu'à la suite d'un chargement dynamique de compression. L'effet de cette anisotropie se fait sentir (1) par des variations de la raideur du matériau au passage d'une contrainte uniaxiale de -2,5 MPa, (2) par un comportement sensiblement différent en traction et en compression et (3) par une évolution du coefficient de Poisson dépassant 0,5. Nous avons aussi observé un lien direct entre la contrainte à rupture en traction et l'histoire des chargements de compression préalables. Les causes exactes de ce phénomène restent inconnues. Tout au plus pourrait-on supposer l'influence d'un phénomène d'écrouissage plastique en lien avec le mécanisme de frottement des lèvres de microfissures et les déformations résiduelles correspondantes. Cela reste à prouver.

La synthèse bibliographique effectuée confirme l'importance des phénomènes de microfissuration dont l'évolution induit une dégradation des propriétés élastiques. Cette dégradation est principalement liée à la nature et à la direction des sollicitations. Dans le cas de la torsion, la dégradation du module de cisaillement n'est pas perturbée par l'effet unilatéral. Néanmoins des phénomènes dissipatifs, interprétés comme la conséquence du frottement des lèvres des microfissures, peuvent être observés.

# Chapitre 2

## État de l'art des modèles d'endommagement anisotrope

Dans le chapitre précédent, les grandes lignes du comportement ont été mises en lumière. Dans la mesure où ce comportement se rapproche de certains matériaux fragiles, nous nous appuyerons sur les travaux portant par exemple sur les bétons. Dans ce chapitre, le cadre général de la mécanique de l'endommagement est introduit. Une synthèse des modèles à endommagement anisotrope et effet unilatéral est réalisée. Cette synthèse conduit à ne choisir que certains de ces modèles pour des raisons de constance thermodynamique. Leur comparaison nous permettra de ne retenir qu'une seule des formulations.

### 2.1 Mécanique de l'endommagement

Comme cela a été montré dans le chapitre 1, le matériau présente des porosités, des fissures et se compose de différentes phases. Les porosités et les fissures sont des frontières de la matière. Leurs évolutions et notamment la propagation des fissures changent les conditions aux limites de la structure, tel que nous l'indique la mécanique de la rupture.

Puisque l'objectif de cet étude est de modéliser le comportement mécanique de ce matériau, différentes solutions nous sont offertes. Il est possible, par exemple, de modéliser les fissures, porosités et les interfaces à l'échelle des différents constituants, à la façon d'une structure. Cette solution serait relativement précise à la mesure de la connaissance de la structure réelle. L'autre possibilité s'appuie sur une représentation périodique de la microstructure du matériau. Par une technique d'homogénéisation, il est alors possible de déterminer un milieu homogène équivalent. Cette modélisation ne nécessite que peu de ressources numériques. Il est cependant difficile de choisir un volume élémentaire représentatif (VER) quand les phénomènes qu'il doit représenter évoluent (nucléation et coalescence de fissures, décohésion), compte tenu du

pré-endommagement supposé et de la très faible périodicité de la structure. Enfin, il est possible de modéliser le comportement du matériau par la mécanique des milieux continus. La continuité du milieu implique la définition de variables continues pour décrire le comportement de la structure du matériau. C'est à ces fins qu'a été introduit le concept de l'endommagement.

### 2.1.1 Endommagement et contrainte effective

Kachanov en 1958 [44] fut le premier à utiliser le concept d'endommagement pour expliquer la rupture par fluage dans les aciers. Il considéra une barre soumise à un effort de traction uniaxial constant et il affirma que, quoique la force restât la même, la contrainte augmentait car les microfissures réduisaient la surface résistante.

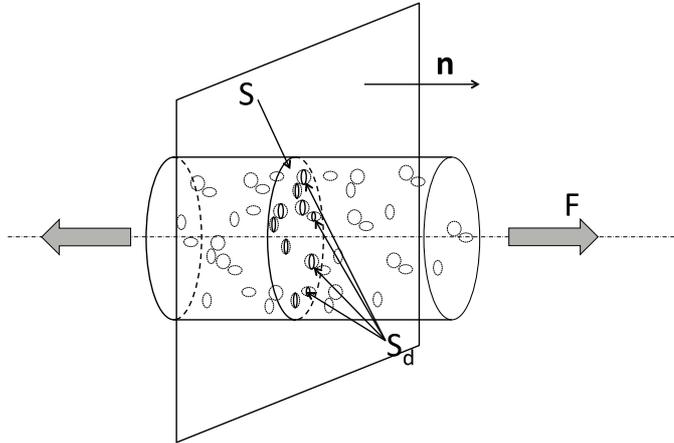


FIGURE 2.1 – Définition de la contrainte effective appliquée sur un VER [73].

En d'autres termes, si pour un corps endommagé, on choisit un VER autour d'un point  $P$ , d'abscisse  $\mathbf{e}_1$  et un plan passant par ce point  $P$ , orienté par sa normale  $\mathbf{n}$  (figure 2.1), on définit :

- $S$  l'aire de la surface d'intersection entre le plan et le VER ;
- $S_{d_{\mathbf{e}_1}}$  la somme des aires de toutes les microfissures et des micro-pores qui se trouvent dans le plan ;
- $d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1)$  la valeur de l'endommagement liée au point  $P$  dans la direction  $\mathbf{n}$  et à l'abscisse  $\mathbf{e}_1$  :

$$d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = \frac{\partial S_{d_{\mathbf{e}_1}}}{\partial S}. \quad (2.1)$$

Pour définir une variable continue  $d_{P,\mathbf{n}}$  sur le VER il faut regarder sur tous les plans le long de l'abscisse  $\mathbf{e}_1$  et considérer celui qui est le plus endommagé (théorie du maillon le plus faible) :

$$d_{P,\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{e}_1} [d(P, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1)] \quad (2.2)$$

Finalement on arrive à l'expression suivante :

$$d_{P,n} = \max_{e_1} \left[ \frac{\partial S_{d_{e_1}}}{\partial S} \right] \quad (2.3)$$

La surface endommagée  $S_{d_{e_1}}$  est une portion de la surface totale  $S$  et l'endommagement est la valeur maximale du rapport des deux surfaces. Ainsi de 2.3 on déduit que la valeur de la variable scalaire  $d$  est bornée entre 0 et 1 :  $d = 0$  pour un VER sain et  $d = 1$  pour un VER complètement endommagé. Cependant, dans la réalité, la rupture survient pour des valeurs de  $d$  inférieures à 1. Ceci suggère que le mécanisme de rupture est différent du mécanisme d'endommagement.

Pour introduire la notion de la contrainte effective prenons l'exemple d'une barre de section  $S$  soumise à une traction uniaxiale par une force  $F$  (figure 2.1). La contrainte nominale est :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.4)$$

Si maintenant on considère l'aire résistante effective ( $S - S_d$ ), on peut définir une nouvelle contrainte :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_d} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_d}{S})} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (2.5)$$

La contrainte  $\tilde{\sigma}$  est appelée « contrainte effective » correspondant au principe d'équivalence en déformation. Les différents principes d'équivalence sont présentés dans la partie suivante.

### 2.1.2 Principes d'équivalences

Pour prendre en compte l'endommagement dans la modélisation, nous devons choisir le type d'équivalence utilisé. En d'autres termes, la manière dont l'endommagement affecte les caractéristiques mécaniques du matériau que ce soit dans une formulation en rigidité ou en souplesse. Il existe trois types d'équivalences : une équivalence en déformation, en contrainte ou en énergie.

Ci-dessus dans ce document, on a utilisé le principe d'**équivalence en déformation** énoncé par Chaboche et Lemaître [23] qui affirment que : *Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.* En d'autres termes, l'**équivalence en déformation** définit la contrainte effective comme étant la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge supposé homogène pour obtenir la même déformation  $\epsilon$  que celle provoquée par la contrainte nominale  $\sigma$  appliquée à l'élément de volume endommagé (fig. 2.2).

Si on suppose maintenant que la contrainte dans le matériau sain équivalent est la même que dans le matériau réel, alors on emploie l'**équivalence en contrainte**

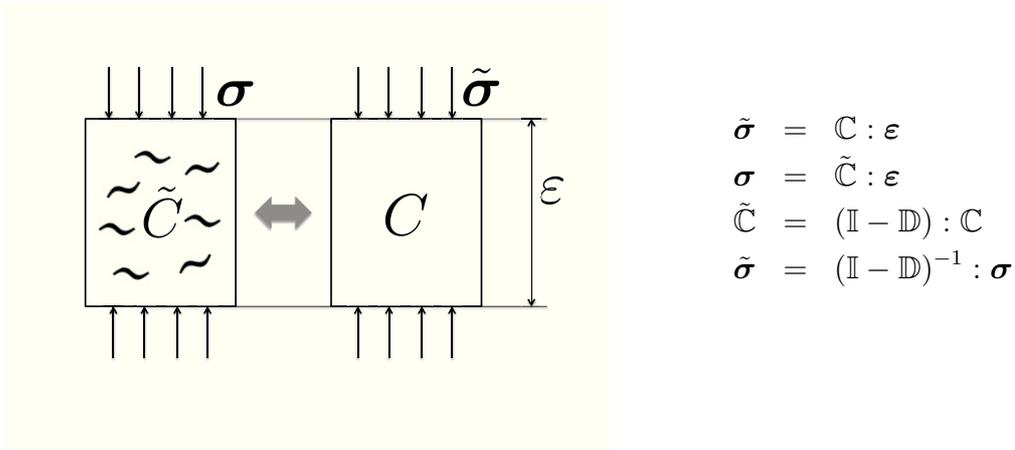


FIGURE 2.2 – Schématisation de l'équivalence en déformation.

[21] (fig. 2.3). Il s'ensuit que, pour exercer sur le matériau réel et sur le matériau sain la même contrainte, il faut appliquer à ce dernier la déformation  $\tilde{\varepsilon}$ .

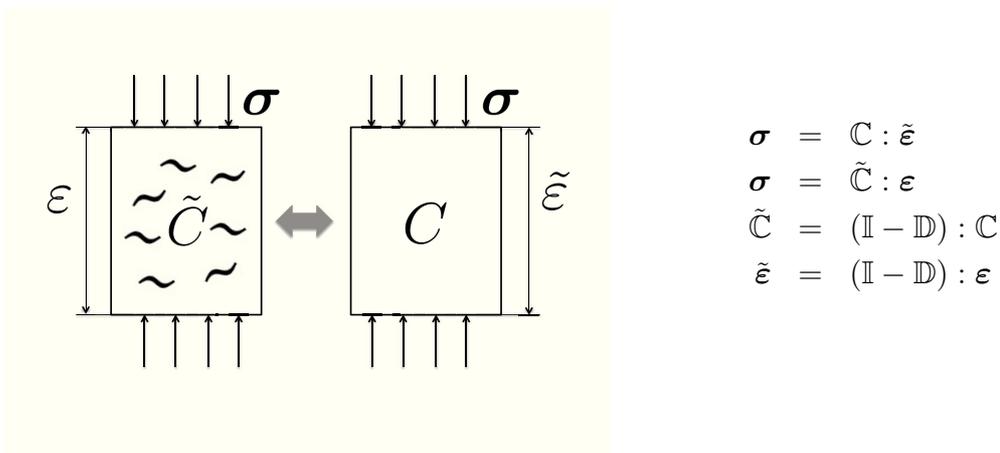


FIGURE 2.3 – Schématisation de l'équivalence en contrainte

**L'équivalence en énergie** définit la contrainte effective comme étant la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge supposé homogène pour obtenir la même énergie que celle provoquée par la contrainte réelle appliquée à l'élément de volume endommagé (Cordebois et Sidoroff, [30]) (fig. 2.4)

Dans le cadre de cette étude, il a été choisi de faire une équivalence en déformation car, dans le cadre de l'intégration numérique, le pilotage est fait en déformation. Ce choix simplifie considérablement l'intégration.

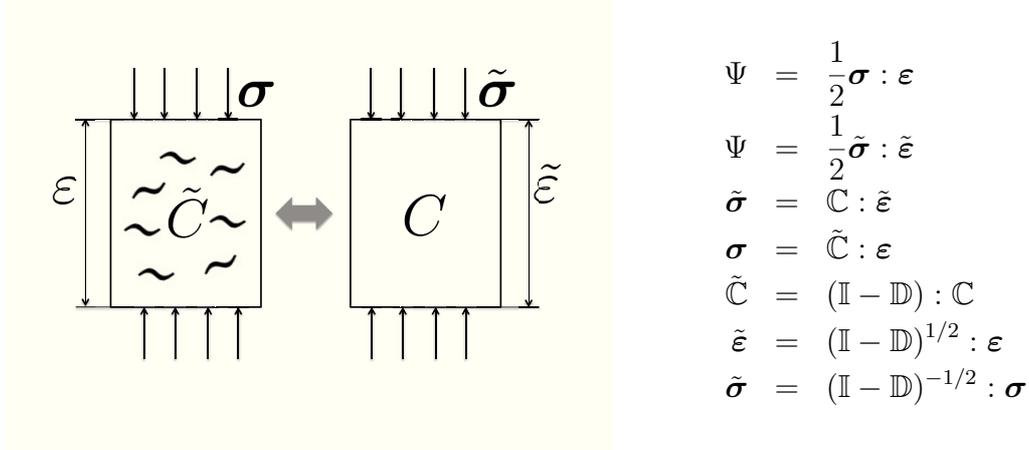


FIGURE 2.4 – Schématisation de l'équivalence en énergie

### 2.1.3 Cadre thermodynamique de l'endommagement

Le principe d'équivalence en déformation présenté précédemment sera l'élément clé pour introduire le cadre thermodynamique. La vision phénoménologique de l'endommagement néglige l'échelle microscopique, en affirmant la validité du principe de l'état local à l'échelle mésoscopique. Il s'agit de considérer l'énergie libre spécifique  $\Psi$ , qui joue le rôle de potentiel thermodynamique et qui est fonction convexe de toutes les variables d'état, observables et internes, et en particulier de l'endommagement.

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d, V_k), \quad (2.6)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur des déformations,  $T$  est la température absolue,  $V_k$  désigne les autres variables internes comme par exemple les variables d'écrouissage. Si on fait l'hypothèse du découplage entre le dommage (supposé isotrope pour l'instant) et tous les autres effets représentés par les variables  $V_k$ , le potentiel 2.6 devient :

$$\Psi = \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d) + \Psi_P(\boldsymbol{\varepsilon}, T, V_k). \quad (2.7)$$

Enfin, si l'on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme, l'effet de la température sera négligé et l'expression de  $\Psi_d$  peut se réduire à :

$$\rho \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, T, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (1 - d) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

dont on déduit la première loi d'état élastique du matériau endommagé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi_d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Par le principe d'équivalence en déformation détaillé dans la section 2.1.2, on déduit la relation suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.10)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement est déduit de la dérivée de l'énergie libre par rapport à la variable de dommage  $d$  :

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi_d}{\partial d} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

On note  $\Delta \Psi$  la densité d'énergie élastique associé à une variation de déformation et définie par :

$$\Delta \Psi = \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

A contrainte constante, on montre que :

$$-Y = \frac{1}{2} \frac{\Delta \Psi}{\Delta d} \quad (2.13)$$

La variable  $-Y$  peut être donc considérée comme le taux de restitution d'énergie élastique associé à une variation d'endommagement à contrainte constante, c'est à dire l'énergie restituée par perte de la raideur d'un milieu endommagé.

On postule aussi l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation  $\Phi$  qui est une forme convexe à valeur scalaire de toutes les variables flux, les variables observables et les variables internes qui interviennent comme paramètres :

$$\Phi = \Phi(\dot{d}, \dot{V}_k, q; \boldsymbol{\varepsilon}, d, V_k, T) \quad (2.14)$$

où  $q$  est le vecteur courant de chaleur, associé au gradient de température  $T$  pour les processus non-isothermes. Le potentiel de dissipation est utilisé pour vérifier si le modèle respecte le principe d'entropie qui impose que la dissipation intrinsèque soit positive. En effet, toujours sous la même hypothèse de découplage du potentiel et à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem on a :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_i}{T} \geq 0 \quad (2.15)$$

où  $s$  est l'enthalpie spécifique,  $\dot{\Psi}$  le taux d'énergie libre qui a la forme suivante :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (2.16)$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme, le deuxième principe de la thermodynamique est respecté si :

$$-Y \dot{d} \geq 0 \quad (2.17)$$

$-Y$  étant une fonction quadratique de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on en conclut que  $\dot{d}$  doit toujours être positif ou égal à zéro. Le potentiel de dissipation, qui est une fonction convexe, nous donne par transformation de Legendre-Fenchel partielle un autre potentiel dual équivalent  $\Phi^*$ . Ce dernier nous permet d'exprimer  $\dot{d}$  en fonction de  $Y$  :

$$\dot{d} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial Y} \quad (2.18)$$

Vu que  $\Phi^*$  est convexe à son tour, l'équation 2.17 est automatiquement vérifiée.

## 2.2 Consistance et critères de choix de modèle avec prise en compte de l'unilatéralité

Il est aujourd'hui admis que la perte de cohésion de la matière par microfissuration nécessite une méthodologie différente appelée « mécanique de l'endommagement ». Cette discipline, qui trouve ses fondements dans les travaux de Kachanov [44] et Rabotnov [73], a pris son essor à la fin des années soixante-dix dans un contexte phénoménologique. Les premières approches sont basées sur des variables scalaires pour rendre compte d'un endommagement isotrope (Chaboche et Lemaître [22], Mazars [65]). Krajcinovic et Fonseka [47] ont introduit des variables vectorielles pour décrire un endommagement anisotrope. Des problèmes de symétrie du tenseur de rigidité élastique ayant été décelés dans l'écriture de ces modèles, leur développement n'a pas été poursuivi. Pour résoudre ces difficultés, plusieurs auteurs comme Ladevèze [53], Chow et Wang [29], Chaboche et Maire [62], Murakami [66], Halm et Dragon [40] ont fait appel à des variables tensorielles d'ordre deux. Malgré les améliorations apportées, quelques incohérences subsistent comme le souligne les travaux de Chaboche [24], Welemane et Cormery [83], Challamel *et al.* [26] et Carol et Willam [19]. Ces travaux mettent en évidence les critères suivants pour une formulation thermodynamique consistante :

- le tenseur de rigidité doit conserver ses symétries majeures et mineures malgré l'introduction de l'unilatéralité [24],
- lors d'un cycle d'ouverture-refermeture de microfissures, l'énergie libre doit être non dissipative [19] si un frottement dissipatif n'est pas pris en compte,
- la réponse contrainte/déformation doit être continue [26] au passage ouvert/fermé des microfissures (unilatéralité),
- l'énergie libre doit être unique et conserve ainsi son caractère de potentiel [83].

Tout modèle doit à la fois répondre à ces critères et prédire le comportement complexe du matériau agrégataire étudié . Il existe plusieurs types d'approches : macroscopiques (approches discrètes ou modèles microplans) et microscopiques (modèles basés sur l'homogénéisation). Ces modèles seront étudiés, analysés et comparés dans la section 2.3. Mais tout d'abord intéressons nous aux inconsistances thermodynamiques existants pour quelques modèles à endommagement anisotrope. Ce travail permettra de dégager une méthode de choix des modèles et d'en éviter les écueils.

### 2.2.1 Modèle de Chaboche et Maire

Cette formulation est développée dans le cadre de la mécanique de l'endommagement avec une approche macroscopique. Le milieu endommagé est considéré continu et élastique [62]. La description détaillée de ce concept a été développé dans les travaux de Chaboche *et al.* [21] [23]. Dans ce modèle, le potentiel thermodynamique peut être exprimé en contrainte ou en déformation. Exprimer l'énergie en fonction de la contrainte est motivé principalement par la simplicité de l'identification des pa-

## 2.2. CONSISTANCE ET CRITÈRES DE CHOIX DE MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DE L'UNILATÉRALITÉ

---

ramètres. Par contre, l'expression en déformation est plus facile à implémenter dans les codes de calcul par éléments finis. L'énergie libre de Helmholtz est exprimé en fonction du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (variable observable) et d'un tenseur d'ordre 2 d'endommagement  $\mathbf{d}$  (variable interne). Le potentiel thermodynamique est de la forme suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.19)$$

l'expression du tenseur de rigidité effectif  $\tilde{\mathbb{C}}$  de [62] est de la forme suivante :

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^0 - \Delta\tilde{\mathbb{C}} \quad \text{avec} \quad \Delta\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{D} : \mathbb{K}^0 \quad (2.20)$$

où  $\Delta\tilde{\mathbb{C}}$  représente les variations du tenseur de rigidité.  $\mathbb{C}^0$  est le tenseur d'élasticité isotrope du matériau sain.  $\mathbb{K}^0$  est un tenseur d'élasticité d'ordre 4 intrinsèque au matériau (peut intégrer une anisotropie initiale). Si le matériau est considéré isotrope à l'état initial alors  $\mathbb{K}^0 = \mathbb{C}^0$ . Le tenseur d'endommagement peut être construit de plusieurs façons :

- à partir d'un tenseur d'ordre 4 noté  $\mathbb{D}$ ,
- à partir d'un tenseur  $\mathbf{d}$  d'ordre 2 avec lequel se construit le tenseur  $\mathbb{D}$  d'ordre 4 à partir de la formule suivante :

$$\mathbb{D} = (\alpha - \beta)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{d}) + \beta(\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{d}), \quad (2.21)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients de pondération. Les produits tensoriels contractés sont expliqués dans le glossaire page 197,

- à partir des variables scalaires  $\delta_i$  (variable scalaire liée à la direction du dommage  $\mathbf{n}_i$ ) si l'endommagement possède des directions privilégiées :

$$\mathbf{d}_i = \delta_i (n_i \otimes n_i) \quad (2.22)$$

La loi d'état est déduite directement du potentiel thermodynamique à partir de (2.20) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.23)$$

Pour assurer la continuité de la réponse contrainte/déformation, Chaboche et Maire [62] préfèrent introduire les effets d'ouverture/fermeture de fissures (effet unilatéral) directement sur le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}^0$ , donc définir un nouveau tenseur d'effectivité  $\Delta\mathbb{C}^{eff}$  :

$$\Delta\mathbb{C}^{eff} = \Delta\tilde{\mathbb{C}} - \Delta\tilde{\mathbb{C}}^- \quad (2.24)$$

avec :

$$\Delta\tilde{\mathbb{C}}^- = H(-\varepsilon_n)(\mathbb{P}_n : \Delta\tilde{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_n) \quad (2.25)$$

avec  $H(x)$  est la fonction de Heaviside définie dans le glossaire page 197,  $\mathbb{P}_n$  un tenseur de projection et  $\varepsilon_n$  une projection du tenseur de déformation  $\varepsilon$  dans la direction  $\mathbf{n}$ . Ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\mathbb{P}_n = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad , \quad \varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \quad (2.26)$$

le potentiel thermodynamique devient donc :

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.27)$$

Avant d'exposer les inconsistances mathématiques et thermodynamiques de ce modèle (sections 2.2.3 et 2.2.4), présentons le modèle de Halm et Dragon qui souffre lui aussi des mêmes problèmes.

### 2.2.2 Modèle de Halm et Dragon

Cette approche proposée par Halm et Dragon [40] rend compte des phénomènes d'activation/désactivation de l'endommagement. Le mécanisme dissipatif est décrit par une unique variable interne d'endommagement tensorielle du second ordre  $\mathbf{d}$  rendant compte de l'amplitude et de l'orientation des dommages [74]. Le tenseur  $\mathbf{d}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i, \quad (2.28)$$

où  $d_i$  et  $\mathbf{v}_i$  représentent respectivement les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur  $\mathbf{d}$ . En d'autres termes, toute configuration d'endommagement est équivalente à trois systèmes orthogonaux de microfissures parallèles. L'énergie devant rester une fonction isotrope de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de  $\mathbf{d}$ , deux tenseurs symétriques d'ordre 2, on montre qu'il existe 10 invariants (J. P. Boehler [16]) :

$$\begin{aligned} & tr(\boldsymbol{\varepsilon}), (tr \boldsymbol{\varepsilon})^2, (tr \boldsymbol{\varepsilon})^3, tr(\mathbf{d}), (tr \mathbf{d})^2, (tr \mathbf{d})^3 \\ & tr(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}), tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{d}), tr(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{d}^2), tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{d}^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'autre part, l'énergie libre est choisie quadratique en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et linéaire en  $\mathbf{d}$ . L'invariant  $tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d})$  est choisi pour introduire les effets résiduels de l'endommagement. Pour ces raisons, le potentiel thermodynamique  $\Psi$  proposé par Halm et Dragon [40] est défini sous cette forme :

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = & \frac{\lambda}{2} (tr(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + g tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + \alpha tr(\boldsymbol{\varepsilon}) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) + 2\beta tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d}) \\ & - (\alpha + 2\beta) \boldsymbol{\varepsilon} : \left[ \sum_{i=1}^3 H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.2. CONSISTANCE ET CRITÈRES DE CHOIX DE MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DE L'UNILATÉRALITÉ

---

avec  $\mathbf{v}_i^{\otimes 4} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$ . La première loi d'état est déduite de la dérivation de l'énergie par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + g\mathbf{d} + \alpha [\text{tr } (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d})\mathbf{1} + \text{tr } (\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{d}] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &\quad - 2(\alpha + 2\beta) \left[ \sum_{i=1}^3 H(-\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) d_i (\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $g$  est une constante caractérisant les effets résiduels dus aux dommages, et  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients qui gèrent le degré d'anisotropie de la dégradation des propriétés élastiques. Le modèle de Halm et Dragon [40] s'appuie sur la décomposition spectrale du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pour rendre compte de l'effet unilatéral de l'endommagement. En effet, l'opérateur tensoriel d'ordre quatre  $d_i \mathbf{v}_i^{\otimes 4}$  permet d'annuler la contribution du système équivalent de microfissures de normale  $\mathbf{v}_i$  sur la dégradation de la rigidité du matériau dans cette direction lorsque  $\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_i \leq 0$ .

### 2.2.3 La perte du caractère potentiel de l'énergie libre

Dans la formulation (2.27) proposée par Chaboche et Maire [62], le triplet  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de tenseur d'endommagement  $\mathbf{d}$ . Weleman et Cormery [31] montrent dans un exemple simple que l'énergie libre n'est plus uniquement définie. Soit un état  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$  où la déformation est uniaxiale  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$  avec  $\varepsilon_1 < 0$  et l'endommagement  $\mathbf{d}$  est un tenseur d'ordre 2 isotrope tel que  $\mathbf{d} = d_0 \mathbf{1}$ . Le milieu est supposé isotrope lorsque tous les dommages sont actifs, le tenseur de rigidité  $\tilde{\mathbb{C}}$  est donc isotrope de la forme :

$$\tilde{\mathbb{C}} = (\lambda_0 + a)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\mu_0 + b)\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}, \quad (2.32)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions scalaires de  $\mathbf{d}$ . Munis du résultat 2.32, les vecteurs propres du tenseur  $\mathbf{d}$  peuvent être déterminés afin d'évaluer l'énergie  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$ . Le tenseur  $\mathbf{d}$  étant sphérique, toute base orthonormée de l'espace est base principale. Si le triplet  $(v_1, v_2, v_3)$  est assimilé à la base de l'espace physique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , l'énergie libre s'exprime sous cette forme :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} [\lambda_0 + 2\mu_0 - \eta(a + 2b)] \varepsilon_1^2 \quad (2.33)$$

$\eta$  est un paramètre matériau (compris entre 0 et 1) caractérisant le degré de récupération du module élastique. Si la base principale  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  retenue est maintenant  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$  définie par :

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (2.34)$$

cette même énergie prend alors la valeur :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2}[\lambda_0 + 2\mu_0 - \frac{\eta}{2}(a + 2b)]\varepsilon_1^2 \quad (2.35)$$

Ce changement de base montre que pour chaque configuration donnée d'endommagement et de déformation, cela peut aboutir à plusieurs valeurs d'énergie libre. Cette énergie libre perd son caractère de potentiel thermodynamique. Si le triplet  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  correspond à une base principale du tenseur des déformations, c'est le tenseur de rigidité qui peut ne pas être unique, aboutissant à un matériau aux propriétés physiques différentes pour un même état de déformation et d'endommagement.

La même analyse critique peut être faite pour les approches utilisant une décomposition spectrale du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Une analyse critique de Carol et Willam [19] et Challamel *et al.* [26] sur d'autres modélisations souligne d'autres effets néfastes engendrés par de telles décompositions. On cite la dissipation anormale et l'aspect non-conservatif de l'énergie au passage ouvert/fermé des microfissures (effet unilatéral). Pour conclure, l'introduction de l'effet unilatéral doit se faire à l'échelle de la microfissure et par rapport à des directions fixées au préalable. Plusieurs possibilités seront détaillées au chapitre 4.

### 2.2.4 La perte de symétrie due à l'introduction de l'effet unilatéral

Pour une formulation thermodynamique consistante, le caractère conservatif de l'énergie libre (existence du potentiel thermodynamique) est équivalent à la symétrie du tenseur Hessien de l'énergie libre. Or, si l'ouverture/fermeture des fissures est décrite à partir des valeurs propres du tenseur des déformations dans le tenseur d'endommagement, cette conservation n'est pas systématique. En effet, dans ce cas, Challamel *et al.* [26] montrent qu'elle n'est assurée que lorsque les directions principales des tenseurs d'endommagement et de déformation coïncident. De manière plus générale, les surfaces de charge d'endommagement doivent être continues et au moins convexes dans leur espace de définition respectif afin de garantir l'indépendance des variables d'état par rapport au chemin de chargement. De plus, la réponse contrainte-déformation doit être continue au passage ouvert-fermé des microfissures et cette transition ne doit pas générer de dissipation artificielle. Or, nombre de modèles utilisent les déformations principales positives comme force motrice de la microfissuration des matériaux quasi-fragiles. Malheureusement, une formulation du potentiel thermodynamique à partir des parties respectivement positive et négative du tenseur des déformations aboutit souvent à une dissipation artificielle indésirable [19], indépendamment du respect ou non de la loi de normalité au potentiel de dissipation lors de la formulation des lois d'évolution. Une approche différente [83] met

en évidence, pour un état donné, la perte de l'unicité de l'énergie libre pour de telles formulations et donc leur incapacité à générer un potentiel. Enfin, le modèle n'est pas conservatif si la rigidité initiale est corrigée par un terme tensoriel couplant la partie positive de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^+$  ou de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^+$  au tenseur d'endommagement  $d$  ou  $(1 - d)^{-1/2}$  ([38] [57]). Il faut donc utiliser avec précaution les décompositions des tenseurs pour décrire correctement l'effet unilatéral.

Les travaux de Cormery et Weleman [32], de Challamel *et al.* [27], de Bazant et Gambarova [9], de Bazant *et al.* [8], Carol *et al.* [18], Zhu [87] et Bargellini *et al.* [4] ont remédié à ces inconsistances thermodynamiques en travaillant dans la base directionnelle des microfissures. Ces modèles sont essentiellement de trois natures :

- phénoménologiques à l'échelle macroscopique [18] [51],
- phénoménologiques à l'échelle de la microstructure alliés à une méthode de changement d'échelle [89],
- phénoménologiques à l'échelle macroscopique, mais en s'appuyant sur les conclusions de l'approche précédente [4] [36].

Tous ces modèles contournent les problèmes de formulation en prenant en compte l'effet d'ouverture-fermeture des microfissures suivant des directions préétablies, et en sommant ensuite la contribution de chaque effet de fissuration sur la rigidité initiale. Nombre de ces modèles ont en commun de supposer une non interaction entre systèmes de micro-fissures d'orientations différentes.

La mise au point d'un modèle d'endommagement anisotrope pour des matériaux quasi-fragiles permettant de décrire l'effet unilatéral se doit de répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la formulation à retenir parmi les approches thermodynamiquement satisfaisantes ?
- Quelles forces pilotent réellement la formation, le développement des microfissures ?
- Comment accéder à ces forces et en déduire les lois d'évolutions ?

Nous proposons dans la section suivante de répondre à la première de ces questions. On présentera tout d'abord une synthèse d'une sélection de différents modèles qui seront ensuite reformulés dans la base tensorielle de Walpole plus facilement interprétable au sens de la mécanique que la base courante de Kunin. Les modèles seront ensuite comparés, en dehors de tout effet unilatéral, soit sous un angle analytique, soit en interprétant l'effet du dommage sur la réponse d'un matériau endommagé suivant une unique direction.

## 2.3 Modèles d'endommagement anisotrope retenus

Dans le cadre de ces modèles, on considère que les micro-fissures peuvent être regroupées en systèmes de micro-fissures. Chaque système est caractérisé par une

direction  $\mathbf{n}$  et une densité de micro-fissures (fig. 2.5). La distribution homogène et aléatoire induit, pour une famille de micro-fissures, un comportement orthotrope de révolution. Le comportement macroscopique du matériau initialement isotrope est alors altéré par la somme des contributions de chaque système de micro-fissures.

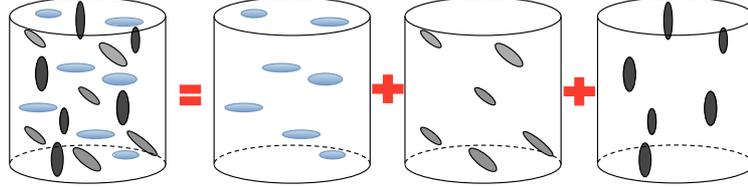


FIGURE 2.5 – Additivité des effet des familles de micro-fissures parallèles

Dans ce qui suit, seront présentés les modèles de Bargellini *et al.*, les modèles microplans, les modèles micromécaniques et le modèle de Dienes.

### 2.3.1 Approche discrète de Bargellini, Halm et Dragon

L'approche discrète considère un ensemble de directions  $\mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$  représentant la normale du  $i^{eme}$  système de microfissures compris dans un angle solide  $\phi$  [4]. Les tenseurs directionnels  $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$  sont associés à des variables internes scalaires  $\rho_i^{Dis}$  représentant les densités des fissures pour chaque direction  $\mathbf{n}_i$ . L'approche discrète se place dans le cadre macroscopique des matériaux standards ; les variables tensorielles d'endommagement, du modèle Halm et Dragon [40], sont simplement remplacées par des couples densité-tenseur de direction  $(\rho_i^{Dis}, \mathbf{N}_i)$  [3]. Pour  $N$  systèmes de micro-fissures, l'expression du tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^{ed}$  est déduite de la dérivée seconde de l'énergie libre par rapport à la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et se met sous la forme d'une somme de contributions directionnelles :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed}(\rho_i^{Dis}, \mathbf{N}_i) &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} \\ &- \sum_{i=1}^N \rho_i^{Dis} \{ \alpha [2 \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1}] + 2\beta [\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \underline{\otimes} \mathbf{1}] \\ &+ (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

où  $k$  et  $\mu$  sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du matériau. Les deux modules  $\alpha$  et  $\beta$  gèrent la pondération de l'endommagement.  $\alpha$  multiplie une partie isotrope et une partie directionnelle alors que  $\beta$  ne multiplie que des tenseurs purement directionnels et accentue le degré d'anisotropie.  $H(x)$  est la fonction d'Heaviside permettant de gérer l'effet d'ouverture-fermeture des microfissures en fonction de la nature du chargement défini dans le glossaire page 197. Sous l'hypothèse de non interaction des micro-fissures, l'influence de plusieurs systèmes

de microfissures est la somme des contributions de chaque système. Le fait d'expliciter des directions fixes de microfissures offre la possibilité de formuler des conditions d'ouverture-refermeture dépendantes de leur orientation et permet d'éviter la décomposition spectrale du tenseur de déformations. Ainsi, les effets de fermeture sont traités direction par direction.

### 2.3.2 Modèles microplans

L'origine de ces modèles date de 1938 (Taylor [78]). Ils ont été appliqués tout d'abord à la plasticité des métaux (Batdorf et Budianski [5]). Depuis, ils ont été appliqués aux matériaux fragiles (béton, céramique, roches, glaces,...). A titre d'exemple dans ce domaine, on peut citer les travaux de Bazant *et al.* [11] [10] [12] [13], de Carol *et al.* [17] [19] et de Ramm *et al.* [50] [59].

Ces modèles microplans considèrent que chaque direction de l'angle solide, considérée fixe, caractérise un microplan avec son comportement associé (figure 2.6). Les déformations globales sont alors projetées sur chaque microplan. A cette étape, il existe plusieurs types de formulations. On se concentrera sur l'étude des deux plus récentes à savoir les approches VDT (Volumique, Déviatorique et Tangentielle) et VD (Volumique et Déviatorique). Une loi de comportement dans le plan permet ensuite de définir l'état de contrainte associée à ces déformations projetées. La contrainte globale est construite avec le principe des travaux virtuels, à partir des contraintes sur chaque microplan, au travers d'une intégrale sur tout l'angle solide. Dans ce rapport, l'angle solide est discrétisé en 42 secteurs angulaires équirépartis, garantissant a minima la capacité à décrire l'isotropie.

Ces approches se basent sur l'hypothèse de l'existence des potentiels d'énergie libre définis au niveau de chaque micro-plan, dont l'intégrale angulaire correspond à l'énergie libre globale, soit :

$$\Psi^{glo} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{loc}(\mathbf{t}_{\varepsilon}, q) d\Omega \quad (2.37)$$

où le vecteur déformation  $\mathbf{t}_{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$  et  $q$  est une variable dissipative. La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  est définie par la dérivée de l'énergie libre globale  $\Psi^{glo}$  par rapport au tenseur des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{glo}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{glo}]}{\partial \Psi^{loc}} \cdot \frac{\partial \Psi^{loc}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.38)$$

Carol, Kuhl et Steinmann [18] proposent de décomposer le tenseur de déformation global en une partie volumique  $\varepsilon_V$ , déviatorique  $\varepsilon_D$  avec ou sans partie tangentielle  $\varepsilon_T$  (figure 2.7). Ce calcul sera détaillé pour chacun des modèles.

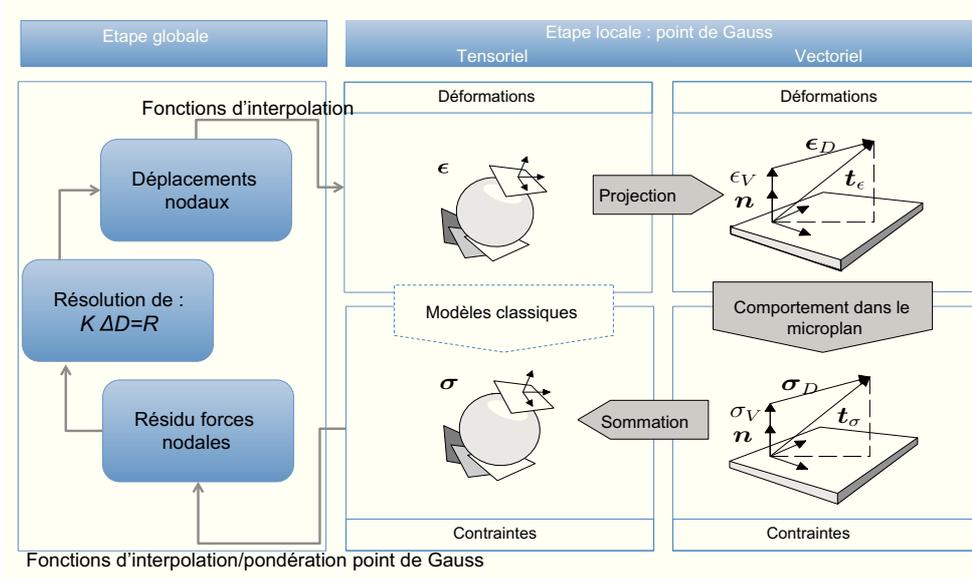


FIGURE 2.6 – Principe des modèles microplan

### 2.3.2.1 Formulation V-D-T

Bazant et Prat [6] ont présenté cette approche pour réussir à simuler la réponse du béton sous un essai de compression. Cette formulation est basée sur la décomposition du tenseur de déformation suivant une direction  $\mathbf{n}$  en une partie tangentielle et une partie normale. Cette dernière est décomposée à son tour en une partie volumique et déviatorique.

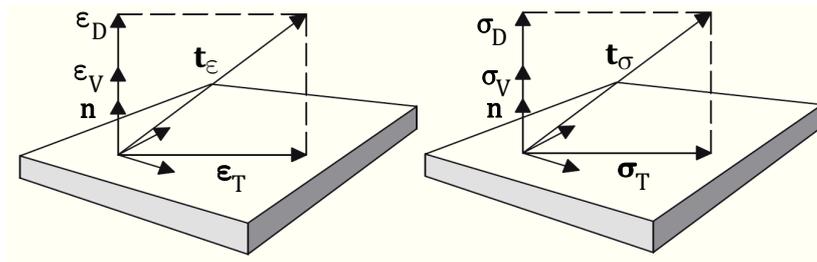


FIGURE 2.7 – Modèle à composantes volumique, déviatorique et tangentielle (V-D-T)[18]

$$\varepsilon_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon_D = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \vec{\varepsilon}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.39)$$

avec :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{T} = \mathbf{n}\cdot\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (2.40)$$

Les équations 2.38 et 2.37 permettent de définir la contrainte globale à partir des contraintes au niveau des microplans. On peut remarquer que les opérateurs qui permettent de « remonter » à cette contrainte globale sont les mêmes que ceux utilisés lors de la « descente » de la déformation au niveau du microplan :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{\sigma_V \cdot \mathbf{V} + \sigma_D \cdot \mathbf{D} + \sigma_T \cdot \mathbf{T}\} d\Omega \quad (2.41)$$

avec les lois d'état, formulées au niveau du microplan, suivantes définissant les contraintes :

$$\sigma_V := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_V} \quad , \quad \sigma_D := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_D} \quad , \quad \sigma_T := \frac{\partial[\rho_0 \Psi^{loc}]}{\partial \varepsilon_T} \quad (2.42)$$

Les modules de compressibilité volumique, de cisaillement déviatorique et de cisaillement tangentiel sont respectivement dénommés  $k_V$ ,  $\mu_D$  et  $\mu_T$ . Ils sont liés aux modules élastiques usuels  $k$  (module de compressibilité) et  $\mu$  (module de cisaillement) par les relations suivantes :

$$k_V = 3k \quad (a), \quad \frac{2}{5}\mu_D^{VDT} + \frac{3}{5}\mu_T = 2\mu \quad (b) \quad (2.43)$$

Avec cette formulation, les constantes élastiques de cisaillement associées à chaque microplan ne sont pas déterminées de manière unique à partir du module de cisaillement  $\mu$ . Wu [85] propose de s'affranchir de la relation 2.43 (b) en utilisant un coefficient de pondération entre le module de cisaillement déviatorique et tangentiel. Leukart [59] propose d'égaliser ces deux modules dans sa formulation V-D. La loi de comportement est définie au niveau du microplan, avec des variables d'endommagement agissant sur ces trois modules. Le tenseur de rigidité endommagé s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{k_V(1-d_V)\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mu_D^{VDT}(1-d_D)\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mu_T(1-d_T)\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}\} d\Omega, \quad (2.44)$$

où  $d_V$ ,  $d_D$ ,  $d_T$  sont respectivement les variables d'endommagement volumique, déviatorique et tangentielle. En remplaçant les tenseurs de projection par leur expressions (équation 2.40), on obtient l'écriture du tenseur de rigidité dans la base de Kunin :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} = & \left( k - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left( d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right. \\ & \left. + d_D \mu_D^{VDT} \left[ \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \right. \\ & \left. + d_T \mu_T \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1}) - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \right) d\Omega \quad (2.45) \end{aligned}$$

L'intégrale peut être discrétisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^{ed} = & \left( k - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N 3 w_i \left( d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right. \\
 & + d_D^i \mu_D^{VDT} \left[ \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i) + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \right] \\
 & \left. + d_T^i \mu_T \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \overline{\otimes} \mathbf{1}) - \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \right] \right) \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

où  $w_i$  est un scalaire de pondération angulaire. Notons que l'endommagement volumique isotrope  $d_V$  dans ce modèle ne dépendant que d'une donnée globale et est donc indépendant des directions.

### 2.3.2.2 Formulation V-D

Elle consiste à décomposer le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en une partie volumique et déviatorique (figure 2.8) [59].

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbf{Dev} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.47)$$

avec :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{Dev} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}^{dev} \quad , \quad \mathbf{Dev}^T = \mathbb{I}^{dev} \cdot \mathbf{n} \quad (2.48)$$

où  $\mathbb{I}^{dev}$  est la partie déviatorique du tenseur identité d'ordre 4.

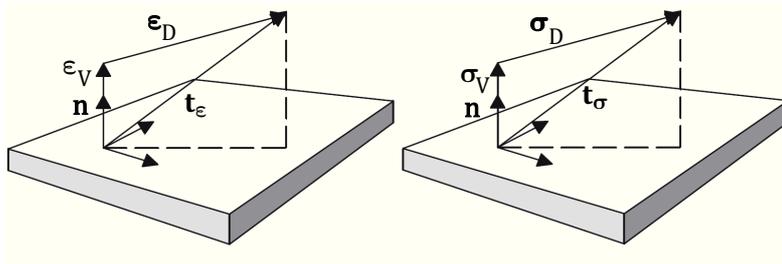


FIGURE 2.8 – Modèle à composante volumique et déviatorique (V-D) [59]

Les équations 2.38 et 2.37 permettent à nouveau de définir la contrainte globale à partir des contraintes au niveau des microplans :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{V} \cdot \frac{\partial[\Psi^{loc}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_V} + \mathbf{Dev}^T \cdot \frac{\partial[\Psi^{loc}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_D} \right\} d\Omega. \quad (2.49)$$

La loi de comportement est à nouveau définie au niveau du microplan, avec des variables d'endommagement agissant sur les deux modules et le tenseur de rigidité endommagé s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \{k_V(1 - d_V)\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2\mu_D^{VD}(1 - d_{Dev})\mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev}\} d\Omega, \quad (2.50)$$

les modules élastiques au niveau du microplan  $k_V$  et  $\mu_{Dev}$  étant déterminés de manière unique en fonction des modules élastiques usuels par les relations suivantes :

$$k_V = 3k \quad , \quad \mu_D^{VD} = \mu. \quad (2.51)$$

La prise en considération des expressions des tenseurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{Dev}$  dans la base de Kunin conduit au tenseur de rigidité endommagé, fonction des variables d'endommagement  $d_V$ ,  $d_{Dev}$  suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left[ d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + d_{Dev} 2\mu \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{2}(\mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}) - \frac{1}{3}(\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} &= (k - \frac{2}{3}\mu) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \sum_{i=1}^N 3w_i \left[ d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + d_D^{VD} 2\mu \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{2}(\mathbf{N}_i \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}_i) - \frac{1}{3}(\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec  $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ .

### 2.3.3 Modèles micromécaniques : schéma dilué

Les modèles micromécaniques permettent au moyen d'un changement d'échelle (localisation et homogénéisation) de prendre en considération la microstructure via le choix d'un VER ainsi que le comportement local des constituants. Ainsi, le principe des modèles micromécaniques consiste à déduire le comportement homogène équivalent au moyen d'un changement d'échelle. Les trois étapes principales sont : (1) l'étape de représentation qui consiste à décrire un VER du matériau à l'échelle microscopique, (2) l'étape de localisation qui établit les relations définissant les grandeurs à l'échelle microscopique en fonction des grandeurs macroscopiques et (3) l'étape d'homogénéisation qui détermine les grandeurs macroscopiques en recourant à une opération de moyenne (la plus simple étant la macro-homogénéité de Hill). Derrière cet aspect déductif du comportement macroscopique sont tout de même sous-jacentes deux difficultés : la première réside dans une « bonne » description de la géométrie de la structure à l'échelle du VER, la seconde concerne la connaissance des propriétés locales des matériaux constitutifs. Zhu [88] propose plusieurs modèles anisotropes induits, dont un basé plus particulièrement sur l'estimation

d'Eshelby supposant la non interaction des microfissures. Ce schéma d'homogénéisation a été retenu en raison de sa simplicité. Une autre estimation, basée sur le schéma de Mori-Tanaka, prend en compte les interactions entre les fissures, au sein d'un même système de microfissures. En plus des interactions des microfissures, le schéma de Ponte-Castaneda et Willis [20] prend en compte la distribution spatiale de ces deniers. Pour l'estimation d'Eshelby, le potentiel d'énergie libre à l'échelle macroscopique est de la forme suivante :

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \rho^{Esh}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{hom}(\rho^{Esh}, \mathbf{n}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.54)$$

où  $\rho^{Esh}$  représente la densité d'un système de microfissures parallèles, ayant la même direction et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est la déformation à l'échelle macroscopique.

Pour un schéma dilué et donc une faible concentration de microfissures (chaque famille de microfissures présente une normale  $\mathbf{n}$  et une densité  $\rho^{Esh}$ ), Zhu [88] arrive au tenseur de rigidité :

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C}^{el} - \frac{4}{3} \pi \rho^{Esh} \mathbb{C} : \mathbb{T}(\mathbf{n}) \quad (2.55)$$

avec  $\mathbb{C}^{el}$  la rigidité initiale du solide. Deux cas se présentent :

– Cas de la fissure ouverte :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{n}) &= \frac{4(1-\nu)}{\pi} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2-\nu} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{1}] - \frac{\nu}{2-\nu} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

– Cas de la fissure fermée :

$$\mathbb{T}'(\mathbf{n}) = \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} - 2 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] \quad (2.57)$$

Le tenseur de rigidité homogénéisé est le tenseur de rigidité du matériau sein affaibli par  $N$  systèmes de microfissures de directions  $\mathbf{n}_i$  et de densité  $\rho_i^{Esh}$

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C}^{el} : \left[ I - \frac{4}{3} \pi \sum_{i=1}^N \rho_i^{Esh} \mathbb{T}_i(\mathbf{n}_i) \right] \quad (2.58)$$

Les approches micromécaniques permettent également de connaître la force associée à une densité de micro-fissures  $\rho_i^{Esh}$  et ce pour chaque réseau de microfissures directement à partir de l'énergie libre, elle-même formulée à partir du comportement homogénéisé. Outre la base physique qu'elles procurent au modèle, ces approches offrent également la possibilité de prendre en considération de façon explicite des couplages entre différents mécanismes de déformation, ainsi que l'ouverture et la fermeture des fissures. Par contre, la complexité inhérente à la technique d'homogénéisation rend difficile l'intégration d'autres comportements comme la viscosité ou la plasticité en raison de la difficulté d'accéder à l'opérateur de localisation.

### 2.3.4 Modèle de Dienes

Le modèle proposé par Dienes [35] [36] a pour objectif de modéliser le comportement d'une classe d'explosifs pressés soumis à une grande variété de sollicitations tant quasi-statiques que dynamiques. Le principe du modèle est fondé sur l'hypothèse d'une décomposition additive du taux de déformation, chaque taux étant associé à un mécanisme (élasticité, plasticité, ouverture de fissures, frottement des lèvres, croissance des fissures et coalescence). Ce modèle intégrant de nombreux mécanismes, seule la partie relative au comportement hypoélastique endommagée est analysée ici. À l'inverse des modèles précédents, celui de Dienes est formulé en vitesse.

Le principe de ce modèle consiste à ajouter à la souplesse élastique du matériau sein notée  $\mathbb{S}$ , une souplesse associée aux microfissures ouvertes et une associée aux microfissures fermées, notées respectivement  $\mathbb{S}^o$  et  $\mathbb{S}^c$ , et ce pour un nombre discret de directions fixes. La première ( $\mathbb{S}^o$ ) dégrade à la fois la rigidité normale à la fissure et la rigidité de cisaillement hors plan de fissure, alors que la seconde ( $\mathbb{S}^c$ ) ne dégrade que les propriétés de cisaillement donnant ainsi un caractère unilatéral au modèle. La souplesse totale du matériau fissuré  $\mathbb{S}^{ed}$  est donnée par :

$$\mathbb{S}^{ed} = \mathbb{S} + \mathbb{S}^o + \mathbb{S}^c \quad (2.59)$$

Le tenseur de souplesse endommagé est la somme des souplesses associées au matériau sain, aux microfissures ouvertes et aux microfissures fermées :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{ed} &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \left( \frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu} \right) \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ &+ \frac{8}{3\mu} \frac{1-\nu}{2-\nu} \sum_{i=1}^N [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} - \nu \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i] F^o w_i \\ &+ \frac{8}{3\mu} \frac{1-\nu}{2-\nu} \sum_{i=1}^N [\mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1} - 2\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i] F^s w_i \end{aligned} \quad (2.60)$$

où  $\nu$  est le coefficient de contraction et  $F^o$  désigne la densité de micro-fissures ouvertes et  $F^s$  fermées. Notons que le modèle peut être formulé en rigidité sans difficultés majeures. C'est ce que nous proposons dans la section 2.4.2.

## 2.4 Comparaison analytique des modèles dans la base de Walpole

Le mécanisme principal d'endommagement des matériaux quasi-fragiles est supposé lié à la micro-fissuration. On considère dans ce travail chaque famille de microfissures indépendante des autres (figure 2.5). Chaque système de microfissures est caractérisé par une direction  $\mathbf{n}$  et une densité ou un niveau de dommage. Le caractère aléatoire de la répartition des fissures au sein de la même famille implique

que la dégradation qui lui est associée soit de type orthotrope de révolution. On considère que le comportement global endommagé d'un matériau est la somme des dégradations associées à chaque système des microfissures sous l'hypothèse de non interaction des microfissures.

Dans cette section on introduira la base de Walpole permettant une comparaison des modèles choisis. Un tableau résumera cette comparaison de point de vue des effets.

### 2.4.1 Base de Walpole

Afin de comparer ces modèles d'endommagement anisotropes, il est pertinent de les réécrire dans une base commune dont chaque élément est physiquement compréhensible et permet d'isoler les mécanismes de leurs effets. Pour ce faire, nous utilisons la base de Walpole [82].

La base de Walpole décompose un tenseur isotrope transverse du quatrième ordre en une somme de tenseurs élémentaires du même ordre. De plus, elle permet d'effectuer les opérations de produit doublement contracté et d'inversion des tenseurs d'ordre 4 de manière analytique et simple. Les tenseurs de projection de cette base s'écrivent en fonction de  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  et  $\mathbf{a} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_2 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_3 = \mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (2.61)$$

$$\mathbb{E}_4 = \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{a} + \mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_5 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_6 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{N} \quad (2.62)$$

$\mathbf{1}$  est le tenseur identité d'ordre 2 (glossaire 197). À titre d'exemple, la base de Walpole est exprimée en notation de Voigt pour une direction  $\mathbf{n} = [1 \ 0 \ 0]$  en annexe A. Il est facile de vérifier que si  $p$  et  $q$  sont deux indices variant de 1 à 4 alors :

$$\mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = \mathbb{E}_q \text{ si } p = q, \quad \mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = 0 \text{ si } p \neq q, \quad (2.63)$$

et que

$$\mathbb{E}_4 : \mathbb{I}_V = \mathbb{I}_V : \mathbb{E}_4 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbb{E}_4 : \mathbb{I}_D = \mathbb{I}_D : \mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_4 \quad (2.64)$$

où  $\mathbb{I}_V$  et  $\mathbb{I}_D$  sont respectivement la partie volumique et déviatorique de l'identité d'ordre 4 (glossaire 197). On propose ci-dessous une matrice de passage reliant la base de Kunin [52] utilisée classiquement pour l'élaboration des modèles précédents et celle de Walpole :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{1}) \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_2 \\ \mathbb{E}_3 \\ \mathbb{E}_4 \\ \mathbb{E}_5 \\ \mathbb{E}_6 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE  
WALPOLE

---

D'autre part, tout tenseur  $\mathbb{L}$  d'ordre quatre isotrope transverse s'écrit comme une combinaison linéaire des six tenseurs élémentaires  $\mathbb{E}_i$  définis ci-dessus sous la forme :

$$\mathbb{L} = l_1\mathbb{E}_1 + l_2\mathbb{E}_2 + l_3\mathbb{E}_3 + l_4\mathbb{E}_4 + l_5\mathbb{E}_5 + l_5\mathbb{E}_6 \quad (2.66)$$

où  $l_i$  sont les composantes de chaque tenseur de la base de Walpole. La symétrie du tenseur  $\mathbb{L}$  impose l'égalité entre  $l_5$  et  $l_6$ . Pour une écriture plus légère, on notera les coordonnées liées à la base sous la forme suivante :

$$\mathbb{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_5\} \quad (2.67)$$

L'inverse du tenseur  $\mathbb{L}$  d'ordre 4 peut être calculer analytiquement, soit :

$$\mathbb{L}^{-1} = \left\{ \frac{l_2}{\Delta}, \frac{l_1}{\Delta}, \frac{1}{l_3}, \frac{1}{l_4}, -\frac{l_5}{\Delta}, -\frac{l_5}{\Delta} \right\} \quad (2.68)$$

avec :  $\Delta = l_1l_2 - 2l_5^2$ . En notant  $\mathbb{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_5\}$ , le produit doublement contracté de  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{M}$  s'écrit :

$$\mathbb{L} : \mathbb{M} = \left\{ l_1m_1 + 2l_5m_5, l_2m_2 + 2l_5m_5, l_3m_3, \right. \\ \left. l_4m_4, l_5m_1 + l_2m_5, l_5m_2 + l_1m_5 \right\} \quad (2.69)$$

Les exemples précédents illustrent la simplicité des opérations dans cette base correspondant aux milieux isotropes transverses. Le tenseur de rigidité associé à un milieu isotrope transverse s'écrit d'une manière générale sous la forme :

$$\mathbb{C}^{el} = 2k_p\mathbb{E}_1 + (E_n + 4k_p\nu_p^2)\mathbb{E}_2 + 2\mu_p\mathbb{E}_3 + 2\mu_n\mathbb{E}_4 + 2k_p\nu_p(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (2.70)$$

$E_n$  et  $\mu_n$  désignent respectivement le module d'Young et le module de cisaillement normaux au plan d'isotropie;  $k_p$ ,  $\mu_p$ ,  $\nu_p$  sont respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement et le coefficient de contraction dans ce plan d'isotropie. Le tenseur de rigidité isotrope transverse  $\mathbb{C}^{el}$  s'écrit en notation ingénieur sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{el} = \begin{bmatrix} E_n + 4k_p\nu_p^2 & 2k_p\nu_p & 2k_p\nu_p & 0 & 0 & 0 \\ 2k_p\nu_p & k_p + \mu_p & k_p - \mu_p & 0 & 0 & 0 \\ 2k_p\nu_p & k_p - \mu_p & k_p + \mu_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_p \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

À partir de l'expression 2.71 et de l'annexe A, on peut interpréter les tenseurs de la base de Walpole de la manière suivante :

- $\mathbb{E}_1$  porte l'effet sphérique dans le plan d'isotropie,

- $\mathbb{E}_2$  porte l'effet directionnel,
- $\mathbb{E}_3$  porte l'effet de cisaillement dans le plan d'isotropie,
- $\mathbb{E}_4$  porte l'effet de cisaillement dans le plan normal au plan d'isotropie,
- $\mathbb{E}_5$  et  $\mathbb{E}_6$  correspondent à « l'effet Poisson » entre le plan d'isotropie et sa normale.

La matrice de passage (équation 2.65) dans base de Walpole nous permet de proposer une écriture uniformisée des modèles facilitant les comparaisons analytiques ainsi qu'une autre compréhension des effets existant au sein de chaque modèle.

### 2.4.2 Uniformisation des modèles dans la base de Walpole

Comme nous l'avons rappelé, les réponses globales respectives de ces modèles résultent de la somme des rigidités endommagées directionnelles sur un nombre fini de directions fixes, pouvant être associées à des systèmes de microfissures. La compréhension des effets présents dans chaque modèle après sommation angulaire passe par la compréhension des effets associés à une unique famille de microfissures de normale commune  $\mathbf{n}$ . On ne considèrera donc par la suite qu'une direction endommagée lors de la formulation des tenseurs associés à la rigidité globale dans la base de Walpole. Les fissures sont considérées effectives. Après avoir uniformisé les écritures, on constate que tous les modèles se mettent sous la forme 2.72, avec différentes expressions pour les variables d'endommagement  $d_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= 2(k + \frac{1}{3}\mu)(1 - d_1)\mathbb{E}_1 + (k + \frac{4}{3}\mu)(1 - d_2)\mathbb{E}_2 + 2\mu(1 - d_3)\mathbb{E}_3 \\ &+ 2\mu(1 - d_4)\mathbb{E}_4 + (k - \frac{2}{3}\mu)(1 - d_5)(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \end{aligned} \quad (2.72)$$

- Le modèle discret est formulé initialement en densité de fissuration  $\rho^{Dis}$  pour chaque direction  $\mathbf{n}$ . Pour uniformiser l'écriture on remplace cette densité par des effets de dommage  $d_i$ . Le tenseur de rigidité s'écrit dans la base de Walpole sous la forme 2.72 avec  $d_1 = d_5 = 0$  les  $d_i$  non nuls s'écrivent sous cette forme :

$$d_2 = \frac{3\alpha + 4\beta}{k + \frac{4}{3}\mu} \rho^{Dis} \quad , \quad d_3 = \frac{2\alpha}{2\mu} \rho^{Dis} \quad , \quad d_4 = \frac{2(\alpha + \beta)}{2\mu} \rho^{Dis} \quad (2.73)$$

où  $\rho^{Dis}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis dans la section 2.3.1.

- Concernant le modèle VDT, l'écriture du tenseur de rigidité conduit aux variables de dommage suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{[d_V 2k + d_D \frac{2}{3}\mu_D]}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{[d_V k + \frac{4}{3}d_D \mu_D]}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \frac{\frac{3}{2}d_T \mu_T}{2\mu} \quad , \quad d_5 = \frac{[d_V k - \frac{2}{3}d_D \mu_D]}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE  
WALPOLE

---

où  $d_V$ ,  $d_D$  et  $d_T$  sont respectivement les variables d'endommagement volumique déviatorique et tangentiel.  $k$  est le module de compressibilité,  $\mu_D$  et  $\mu_T$  sont les modules cisaillement à l'échelle de microplan.

- Les variables de dommage du modèle VD peuvent être déduites en considérant que  $d_D = d_T$  soit :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_V}{2k + \frac{2}{3}\mu} \frac{2k + d_{Dev} \frac{2}{3}\mu}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{d_V}{k + \frac{4}{3}\mu} \frac{k + d_{Dev} \frac{4}{3}\mu}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \frac{3d_{Dev}}{2} \quad , \quad d_5 = \frac{d_V}{k - \frac{2}{3}\mu} \frac{k - d_{Dev} \frac{2}{3}\mu}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (2.75)$$

- Dans le schéma d'Eshelby on peut exprimer la rigidité endommagée dans la base de Walpole avec les dommages suivants :

$$\begin{aligned} d_1 &= \rho^{Esh} \frac{4(3k - 2\mu)^2(3k + 4\mu)}{9\mu(3k + \mu)^2} \quad , \quad d_2 = d_5 = \rho^{Esh} \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \rho^{Esh} \frac{16(k + 4\mu)}{9(3k + 2\mu)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

où  $\rho^{Esh}$  désigne la densité de microfissures dans un milieu dilué.

- Le modèle de Dienes étant formulé en souplesse, il implique une inversion. Pour ce faire, les propriétés d'inversion de la base de Walpole ont été exploitées :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{2}{3} \frac{2c_3^2 + c_2 F^o}{2c_3 + c_1 F^o} \mathbb{E}_1 + \frac{2}{3} \frac{c_3(3k + 4\mu)}{2c_3 + c_1 F^o} \mathbb{E}_2 + 2\mu \mathbb{E}_3 \quad (2.77)$$

$$+ \frac{2\mu}{1 + 2\mu\xi F^o} \mathbb{E}_4 + \frac{2}{3} \frac{c_3(3k - 2\mu)}{2c_3 + c_1 F^o} (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (2.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{8(1 - \nu)}{3\mu(2 - \nu)} \quad , \quad c_1 = \xi(3k + 2\mu)(3k + 4\mu) \\ c_2 &= 27\xi k \mu(3k + 2\mu) \quad , \quad c_3 = 3k + \mu \end{aligned} \quad (2.79)$$

On remarque des non-linéarités par rapport à la densité de micro-fissures ouverte  $F^o$  dans l'expression 2.77. Or, les autres modèles exposés s'exprime de façon linéaire par rapport à leurs variables d'endommagements. Ainsi, pour permettre la comparaison il est proposé de faire un développement limité au premier ordre du modèle de Dienes par rapport à  $F^o$ . Le modèle devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= \left(2k + \frac{2}{3}\mu\right) \left(1 - F^o \frac{4(3k - 2\mu)^2(3k + 4\mu)}{9\mu(3k + \mu)^2}\right) \mathbb{E}_1 \\ &+ \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \left(1 - \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} F^o\right) \mathbb{E}_2 + 2\mu \mathbb{E}_3 + 2\mu \left(1 - \frac{16}{9} \frac{3k + 4\mu}{3k + 2\mu} F^o\right) \mathbb{E}_4 \\ &+ \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \left(1 - \frac{4(3k + 4\mu)^2}{9\mu(3k + \mu)} F^o\right) (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \end{aligned} \quad (2.80)$$

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE  
WALPOLE

Base de Walpole	$\mathbb{E}_1$	$\mathbb{E}_2$	$\mathbb{E}_3$	$\mathbb{E}_4$	$\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$
<b>Rigidités</b>					
isotrope	$2k + \frac{2}{3}\mu$	$(k + \frac{4}{3}\mu)$	$2\mu$	$2\mu$	$k - \frac{2}{3}\mu$
isotrope transverse	$2k_p$	$E_n + 4k_p\nu_p^2$	$2\mu_p$	$2\mu_n$	$2k_p\nu_p$
<b>Dommages</b>					
Approche Discrète	1	$1 - \frac{(3\alpha+4\beta)}{k+\frac{4}{3}\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \frac{2\alpha}{2\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \frac{2(\alpha+\beta)}{2\mu} \rho^{Dis}$	1
Modèle VDT	$1 - d_V \frac{2k}{2k+\frac{2}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{2}{3}\mu D}{2k+\frac{2}{3}\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k+\frac{4}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{4}{3}\mu D}{k+\frac{4}{3}\mu}$	1	$1 - d_T \frac{\frac{3}{2}\mu T}{2\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k-\frac{2}{3}\mu} + d_D \frac{\frac{2}{3}\mu D}{k-\frac{2}{3}\mu}$
Modèle VD	$1 - d_V \frac{2k}{2k+\frac{2}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{2}{3}\mu}{2k+\frac{2}{3}\mu}$	$1 - d_V \frac{k}{k+\frac{4}{3}\mu} - d_D \frac{\frac{4}{3}\mu}{k+\frac{4}{3}\mu}$	1	$1 - \frac{3}{2}d_D$	$1 - d_V \frac{k}{k-\frac{2}{3}\mu} + d_D \frac{\frac{2}{3}\mu}{k-\frac{2}{3}\mu}$
Modèle Eshelby	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k-2\mu)^2(3k+4\mu)}{9\mu(3k+\mu)^2}$	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$	1	$1 - \rho^{Esh} \frac{16(k+4\mu)}{9(3k+2\mu)}$	$1 - \rho^{Esh} \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$
Modèle Dienes linéarisé	$1 - F^o \frac{4(3k-2\mu)^2(3k+4\mu)}{9\mu(3k+\mu)^2}$	$1 - F^o \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$	1	$1 - F^o \frac{16}{9} \frac{3k+4\mu}{3k+2\mu}$	$1 - F^o \frac{4(3k+4\mu)^2}{9\mu(3k+\mu)}$

TABLE 2.1 – Décomposition dans la base de Walpole des 5 modèles : effet de l'endommagement (ou de la densité de fissuration) pour un réseau de microfissures orientées suivant une même direction.

où on reconnaît la forme de l'expression 2.72.

Le tableau 2.1 rassemble les expressions précédentes obtenues dans la base physique de Walpole à un facteur de pondération angulaire  $w_i$  près sur les dommages  $d$ . Ces approches sont comparées aux rigidités élastiques linéaires isotrope et isotrope transverse. Pour tous les modèles anisotropes, l'endommagement affecte le module purement directionnel porté par  $\mathbb{E}_2$  et le module de cisaillement normal au plan d'isotropie dans le tenseur  $\mathbb{E}_4$ . On remarque que le module de cisaillement dans le plan d'isotropie  $\mu_p$  porté par le tenseur  $\mathbb{E}_3$  n'est affecté par l'endommagement que dans l'approche discrète qui, par contre n'affecte pas la rigidité volumique du plan d'isotropie ( $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$ ). Elle se différencie donc des autres modèles qui considèrent des effets sur les composantes  $\mathbb{E}_3, \mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6$ . Sur cette dernière, les modèles microplans intègrent une concurrence entre l'effet de l'endommagement volumique voulant

affaiblir le module de compressibilité dans le plan  $k_p$  et l'effet de l'endommagement déviatorique qui veut augmenter l'effet Poisson dans le plan d'isotropie  $\nu_p$ . Pour le modèle hypo-élastique endommageable de Dienes, tous les tenseurs sont affectés par  $F^o$ , à l'exception de  $\mathbb{E}_3$ . Dans cette version linéarisé, il correspond, au modèle Eshelby. On associera donc par la suite sa réponse à celle d'Eshelby. Pour les autres composantes, une croissance de la densité de fissure conduit à une décroissance du module correspondant. On observe aussi dans les expressions 2.79 que les modèles discret, Eshelby et Dienes sont entièrement paramétrés par une seule grandeur, la densité de fissure, quand les modèles microplans fournissent déjà deux ou trois variables d'endommagement dont les forces associées ne sont pas obligatoirement les mêmes. Cette souplesse de modélisation est un atout pour les modèles phénoménologiques cherchant à reproduire des effets complexes. Ce choix doit toutefois être tempéré par le manque de données expérimentales réellement discriminantes.

Dans cette partie, l'interprétation des différences et similitudes entre modèles a été prospecté au niveau de l'écriture tensoriel d'un système de microfissures en s'appuyant sur des quantités physiques liées à la base tensorielle de Walpole. Ceci n'est pas aussi facile à appréhender que l'interprétation des évolutions des modules de l'ingénieur classiques que sont le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

### 2.4.3 Analyse à partir des paramètres de l'ingénieur.

Pour simplifier l'interprétation sur les grandeurs de l'ingénieur, il est proposé de faire des développement limités par rapport au dommage pour les expressions des modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de contraction au premier ordre pour deux directions perpendiculaires. Ces grandeurs sont déterminés à partir des définitions tensorielles, en les projetant selon une direction. Ceci est exprimé dans les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{n}) &= \{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \mathbb{S}^{ed} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\}^{-1} \\ \mu(\mathbf{n}, \mathbf{p}) &= \{4(\mathbf{n} \otimes \mathbf{p}) : \mathbb{S}^{ed} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{p})\}^{-1} \\ \nu(\mathbf{n}, \mathbf{p}) &= -E(\mathbf{n})\{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} : \mathbb{S}^{ed} : \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}\}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

où  $\mathbf{n}$ 'est une direction par rapport à laquelle est exprimé la grandeur et  $\mathbf{p}$  est une direction qui lui est perpendiculaire définie dans le sens direct dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  ainsi que le présente la figure 2.9

L'inversion de la rigidité génère des non linéarités dans la matrice de souplesse, tout comme l'inversion de la souplesse a généré des non-linéarité pour le modèle de Dienes. Afin d'appréhender les quantités de l'ingénieur et l'effet des endommagements, les expressions générées par 2.81 sont linarisées par rapport aux variables

2.4. COMPARAISON ANALYTIQUE DES MODÈLES DANS LA BASE DE  
WALPOLE

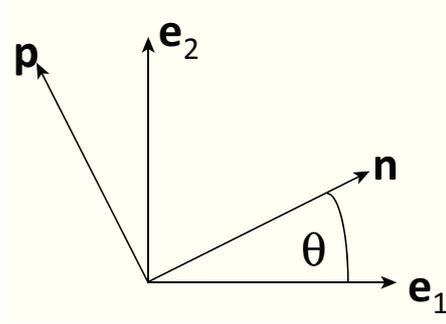


Figure 2.9:  $\mathbf{n}$  est le vecteur balayant la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  afin de décrire le module d'Young, le module de cisaillement et de coefficient de Poisson

d'endommagement. Les résultats de ces linéarisations sont donnés dans le tableau 2.2 pour les directions particulières  $n = \mathbf{e}_1$  et  $n = \mathbf{e}_2$ .

(a)	$\frac{E^d(\mathbf{e}_1)}{E}$	$\frac{E^d(\mathbf{e}_2)}{E}$	
Discret	$1 - \frac{(3\alpha+4\beta)(3k+\mu)}{9k\mu} \rho^{Dis}$	$1 - \rho^{Dis} \left( \frac{3\alpha+4\beta}{9k} + \frac{3\alpha+\beta}{3\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{3k+\mu} \right)$	
VD	$1 - \left( \frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{6k}{3k+\mu} d_{Dev} \right)$	$1 - \left( \frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{2k}{3k+\mu} d_{Dev} \right)$	
VDT	$1 - \left( \frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{3k}{3k+\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	$1 - \left( \frac{\mu}{3k+\mu} d_V + \frac{3k}{3k+\mu} \frac{\mu_D}{4\mu} d_D \right)$	
Eshelby	$1 - \frac{12k(3k+4\mu)}{(3k+\mu)^2} \rho^{Esh}$	1	
(b)	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\nu}$	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{\nu}$	
Discret	1	$1 - \rho^{Dis} \left( -\frac{\beta}{\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{(3k+\mu)} \right)$	
VD	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} (d_V - 2d_{Dev})$	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left( d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} d_{Dev} \right)$	
VDT	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left( d_V - \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left( d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$	
Eshelby	$1 - \frac{12k(3k+4\mu)}{(3k+\mu)^2} \rho^{Esh}$	1	
(c)	$\frac{\mu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}{\mu} = \frac{\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{\mu}$	$\frac{\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{\mu}$	$\frac{\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{\nu}$
Discret	$1 - \rho^{Dis} \frac{\alpha+\beta}{\mu}$	$1 - \rho^{Dis} \frac{\alpha}{\mu}$	$1 - \rho^{Dis} \left( \frac{\beta}{\mu} - \frac{3(\alpha+\beta)}{(3k+\mu)} - \frac{3\alpha}{(3k-2\mu)} \right)$
VD	$1 - \frac{3}{2} d_{Dev}$	1	$1 - \frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left( d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} d_{Dev} \right)$
VDT	$1 - \frac{3}{2} \frac{\mu_T}{2\mu} d_T$	1	1 -
Eshelby	$1 - \frac{16(3k+4\mu)}{9(3k+2\mu)} \rho^{Esh}$	1	$\frac{9k\mu}{(3k+\mu)(3k-2\mu)} \left( d_V - \frac{(3k+2\mu)}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D \right)$
			1

TABLE 2.2 – (a, b, c) Développements limités au premier ordre vis à vis de l'endommagement, du module d'Young  $E$ , du coefficient de contraction  $\nu$  et du module de cisaillement  $\mu$  dans les directions  $\mathbf{e}_1$  (normale à la fissure) et  $\mathbf{e}_2$  (dans le plan d'isotropie).  $E^d$ ,  $\nu^d$  et  $\mu^d$  sont les grandeurs endommagées

Suivant la direction  $\mathbf{e}_1$  normale à la fissure, le module d'Young peut être dégradé dans les quatre modèles. Il en va de même pour le module de cisaillement hors plan de fissure.

Dans le plan d'isotropie, les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  du modèle Discret étant positifs, on peut montrer que le module  $E^d(\mathbf{e}_2)$  y est forcément affecté par l'endommagement. Il n'en va pas de même pour le modèle Eshelby issu de l'homogénéisation qui ne fait apparaître aucune dégradation.

Les modèles VD et VDT dégradent également ce module  $E^d(\mathbf{e}_2)$  (proportionnellement à  $E^d(\mathbf{e}_1)$ ) sans pour autant affecter le module de cisaillement  $\mu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  contrairement au modèle Discret comportant un endommagement isotrope déviatorique (sur  $\mathbb{E}_3$ , tableau 2.1), qui affiche un endommagement affectant à la fois le module de cisaillement et le coefficient de contraction.

Concernant l'évolution du coefficient de contraction  $\nu^d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et  $\nu^d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$  hors le plan d'isotropie, le modèle Discret ne permet pas d'ajuster l'effet de l'endommagement sur le coefficient de contraction suivant la direction  $\mathbf{e}_1$ . Par contre le modèle Discret affiche dans la direction  $\mathbf{e}_2$  une augmentation de l'effet Poisson contrairement à Eshelby qui ne le modifie pas, ce qui est en contradiction avec les constatations expérimentales. Dans les modèles microplan, le coefficient de contraction étant exprimé à partir de la différence de deux termes, peut croître ou décroître suivant ces mêmes directions. Dans le modèle VD, ce sont les niveaux relatifs des variables  $d_V$  et  $d_D^{VD}$  qui gèrent ce signe, avec une variable  $d_D^{VD}$  contrainte par le niveau de dommage sur le module de cisaillement. Il est possible de garantir que le modèle VD décrit une augmentation du coefficient de contraction selon les direction  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  en respectant les relations :

$$d_V^{VD} \leq 2d_D^{VD} \quad \text{et} \quad d_V^{VD} \leq d_D^{VD} \frac{3k + 2\mu}{2\mu} \quad (2.82)$$

Ceci est également possible pour le modèle VDT en respectant les relations :

$$d_V^{VDT} \leq \frac{\mu_D}{\mu} d_D^{VDT} \quad \text{et} \quad d_V^{VDT} \leq \frac{3k + 2\mu}{2\mu} \frac{\mu_D}{2\mu} d_D^{VDT} \quad (2.83)$$

La différentiation dans le modèle VDT des deux paramètres  $\mu_D$  et  $\mu_T$ , et l'introduction d'une variable d'endommagement  $d_T$  permet de découpler cet endommagement de ceux agissant sur les deux autres paramètres. De plus, des pondérations supplémentaires fonction des propriétés élastiques  $\mu_D/2\mu$  et  $\mu_T/2\mu$ , permet un réglage supplémentaire dans les effets Poisson.

Les comparaisons analytiques aident à comprendre comment l'endommagement agit dans les différents modèles et font ressortir quelques différences importantes (nombre de paramètres et de variables, adaptabilité et souplesse d'identification).

## 2.5 Comparaisons numériques : conséquence d'un unique réseau de micro-fissures

Afin de faciliter l'interprétation des évolutions d'endommagement, il est proposé une étude numérique comparative. Dans un premier temps, il est exposé la démarche employée pour la détermination du jeu de paramètres initial et la définition des variables de sensibilité observées. A partir de celui-ci, un premier tracé des sensibilités est présenté. Il s'en suivra une analyse avec des valeurs particulières d'endommagement respectant la sensibilité négative sur le coefficient de contraction (impliquant une augmentation du coefficient de contraction). Enfin, une analyse sur le modèle VDT sera exposé.

### 2.5.1 Définition des grandeurs observées et jeu de paramètres initial

Comme dans le paragraphe précédant, on ne considère qu'un unique réseau de micro-fissure, de normale  $\mathbf{n}$ . Les conséquences de cet endommagement seront analysés sur des sensibilités (variation relative de la variable d'observation par rapport à la variable d'entrée) le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient de contraction (à partir des relations 2.81), défini comme suit :

$$s^E = \frac{E - E(\mathbf{n})}{E} \quad , \quad s^\mu = \frac{\mu - \mu(\mathbf{n})}{\mu} \quad , \quad s^\nu = \frac{\nu - \nu(\mathbf{n})}{\nu} \quad (2.84)$$

où  $E$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young, le module de cisaillement et le coefficient du Poisson identifiés sur un grès des Vosges par Pecqueur [68] (ensemble de paramètres de références). Le coefficient  $w_1$  correspond à la pondération du dommage relatif à chaque direction qui discrétise l'angle solide. Dans notre cas, ce poids est de  $w_1 = 4\pi/42$  pour toutes les directions et tous les modèles. Enfin,  $d_2$  est le dommage lié au tenseur  $\mathbb{E}_2$  et qui est fixé arbitrairement à 25%, a été choisis pour l'ensemble des modèles qui sont comparés. Le modèle discret ayant été identifié sur le grès des Vosges, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont déjà connus (respectivement 2500 MPa et 8100 MPa). Il est possible d'en déduire la densité de fissures pour ce modèle  $\rho^{Dis} = 8,72\%$ . Il en va de même pour la densité de fissure du modèle Eshelby qui est  $\rho^{Esh} = 4,4\%$ . La différence entre ces densités de fissures trouve son origine dans leurs définitions puisque  $\rho^{Esh}$  n'inclut pas l'angle solide total ( $\frac{4}{3}\pi$ ). Dans les modèles discret et d'Eshelby les paramètres de dommages  $d_i$  sont tous proportionnels à la densité de fissures. Il est donc possible de calculer pour les dommages associés au tenseur de la base de Walpole  $d_i$ . Il est supposé ensuite que  $d_4^{VD} = d_4^{Dis} = 17,31\%$ . Ceci permet d'en déduire directement la valeur de  $d_{Dev}^{VD} = 11,55\%$ . Puisque  $d_2$  est le même pour tous les modèle, il est possible d'en déduire  $d_V^{VD} = 27\%$ .

Dans un premier temps, nous allons caler les paramètres du modèle VDT de

## 2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

manière à ce qu'il soit identique au modèle VD, et ce afin de pouvoir comparer les modèles microplans, aux modèles Discret et Eshelby. Pour assurer cette similarité, les paramètres du modèle VDT doit vérifier  $\mu_D^{VDT} d_D^{VDT} = \mu_T^{VDT} d_T^{VDT}$ . En imposant arbitrairement que  $\mu_D^{VDT} = \mu_T^{VDT}$ , il en résulte que  $\mu_D^{VDT} = \mu_T^{VDT} = \mu_D^{VD} = \mu$  et  $d_D^{VDT} = d_T^{VDT} = d_D^{VD}$ .

Notons que si l'endommagement  $d_2$  demeure inférieur à  $\frac{27k(3\alpha+4\beta)}{[(3k+4\mu)(11\alpha+20\beta)]}$  alors  $d_V$  n'excède jamais 1. Les autres grandeurs lui sont inférieures. Ainsi, pour les valeurs des modules élastiques choisies et pour les valeurs des coefficients de pondération anisotropes identifiés par Bargellini dans le modèle discret,  $d_2$  doit donc être inférieur 92.6 %. Le tableau 2.3 résume les valeurs numériques d'endommagement obtenues.

Modèles	discret	VD	VDT	Eshelby
Paramètres pour $d_2 = 25\%$	$\rho^{Dis} = 8.72\%$	$d_V^{VD} = 27\%$	$d_V^{VDT} = 27\%$	$\rho^{Esh} = 4.4\%$
	$\alpha = -2500 MPa$	$d_{Dev} = 11.55\%$	$d_D = 11.55\%$	
	$\beta = -8100 MPa$		$d_T = 11.55\%$	
	$k = 6805 MPa$	$k_V = 20415 MPa$		$k = 6805 MPa$
	$\mu = 5340 MPa$	$\mu_D = 10680 MPa$ $\mu_T = 10680 MPa$		$\mu = 5340 MPa$
	$d_1 = 0$	$d_1 = 23.79\%$		$d_1 = 2.2\%$
	$d_3 = 4.08\%$	$d_3 = 0$		$d_3 = 0$
	$d_4 = 17.3\%$	$d_4 = 17.3\%$		$d_4 = 7.3\%$
	$d_5 = 0$	$d_5 = 31.28\%$		$d_5 = 25\%$

TABLE 2.3 – Paramètres et amplitudes des endommagements pour chaque modèle, déterminés à partir de l'endommagement

Les modèles ont été programmés dans Matlab. Les résultats numérique et analyses des modèles seront détaillés dans la section suivante.

### 2.5.2 Comparaison des modèles avec le jeu de paramètres initial

L'endommagement sur le module directionnel (figure 2.10) est légèrement atténué pour les modèles VD, VDT et EM dans la direction  $\mathbf{e}_1$  alors que pour cette direction, DM amplifie sa sensibilité. Dans le plan d'isotropie ( $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ), DM prévoit une sensibilité de 15% alors que VD/VDT prédisent une amplitude de 42%. La proportionnalité de ces effets dans ce plan est directement reliée au rapport entre les parties volumiques de DM ( $-\rho\alpha$ ) et de VD/VDT ( $\frac{k}{3}d_V$ )

La figure 2.11 présente la distribution angulaire de la sensibilité du module de cisaillement. Cette figure montre que les courbes pour DM et VD/VDT sont superposées et semblent indépendantes de la direction. Pour EM, on note une légère

## 2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

atténuation de la sensibilité selon la bissectrice de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Les paramètres internes de EM ne peuvent ajuster ni la faible sensibilité anisotrope, ni la sensibilité isotrope. Il en va de même pour VD/VDT, tandis que pour DM, ces sensibilités peuvent être ajustées par les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que le montre le tableau 2.2.

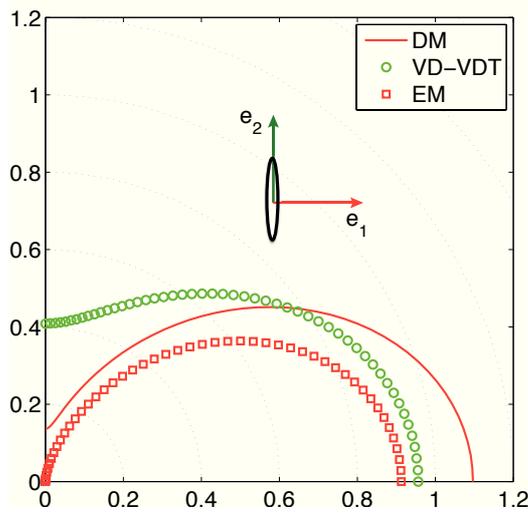


FIGURE 2.10 – Sensibilité du module d'Young au dommage  $d_2 : s^E$

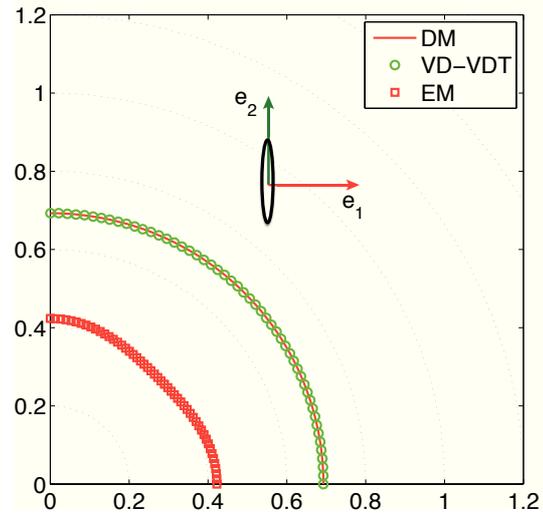


FIGURE 2.11 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage  $d_2 : S^\mu$

La figure 2.12 présente la distribution angulaire de la sensibilité de l'endommagement sur le coefficient de contraction. DM a une sensibilité négative selon la direction  $\mathbf{e}_2$ , une augmentation de l'effet du coefficient de contraction ; pour ce modèle, il n'y a pas d'effet dans la direction  $\mathbf{e}_1$ . De façon symétrique à DM par rapport à la seconde bissectrice du plan  $(e_1, e_2)$ , EM a une sensibilité nulle selon l'axe  $\mathbf{e}_2$  et positive dans la direction  $\mathbf{e}_1$ . Cette sensibilité qui ne peut être que positive (tableau 2.2  $\nu(e_1, e_2)$ ) implique une diminution du coefficient de contraction, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales (figure 1.8). C'est la raison pour laquelle ce modèle est écarté du reste des investigations. VD et VDT présente une sensibilité négative d'amplitude maximum selon la direction  $e_2$ . Il y a également un effet positif dans la direction  $e_1$  et une sensibilité nulle sur la première bissectrice.

Ainsi que cela a été expliqué dans la section 2.4.3, les paramètres d'endommagement de VD doivent vérifier les relations 2.82 pour que la sensibilité du coefficient de contraction soit négative. Or, la figure 2.12 met en évidence que le jeu de paramètres ( $d_D^{VD} = 11,55\%$  et  $d_V^{VD} = 27\%$ ) ne vérifie pas ces relations. Ceci est pris en considération dans la section suivante.

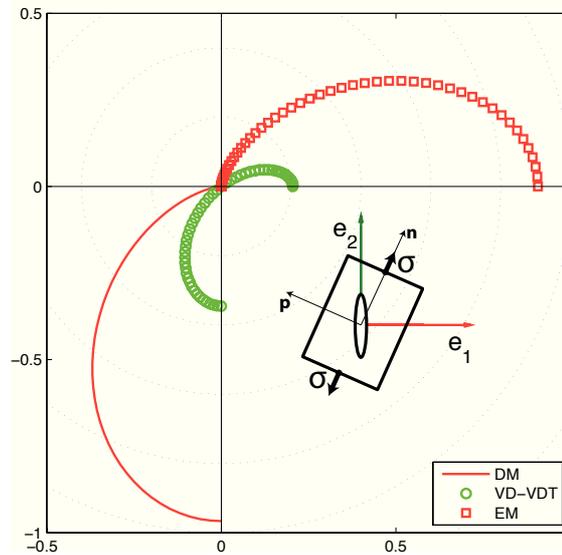


FIGURE 2.12 – Sensibilité du module du coefficient de contraction au dommage  $d_2$  :  $S^\mu$

### 2.5.3 Comparaison de DM, VD et VDT avec des valeurs assurant la sensibilité négative du coefficient de contraction

Dans cette section, la valeur du dommage volumique de VD est changée pour se conformer à la relation 2.82. En l'occurrence,  $d_V = 2d_D = 23,10\%$  pour être à la limite de la relation 2.82, soit une sensibilité du coefficient de contraction nulle selon la direction  $e_1$ . Cette modification n'induit pas d'effet sur la sensibilité du module de cisaillement comme le montre la figure 2.14 et n'a qu'une faible modification sphérique sur la sensibilité du module d'Young de VD uniquement tel que le présente la figure 2.13. L'évolution angulaire de la sensibilité du coefficient de contraction change significativement, uniquement pour VD ainsi que le montre la figure 2.15.

Ce jeu de paramètres particulier met en lumière la souplesse de VD/VDT par rapport à DM au regard de la capacité à modifier la sensibilité du coefficient de contraction. De plus, il apparaît qu'il n'y a pas d'ensemble  $(\alpha, \beta)$  pour que la sensibilité du module d'Young de DM soit nul dans la direction  $e_2$  (à l'exception de  $(0,0)$  qui correspond à un comportement isotrope non endommagé). D'autre part, VD n'a comme conséquence aucune diminution marquée de cette limite tout en préservant l'effet de dommage sur les autres directions et modules.

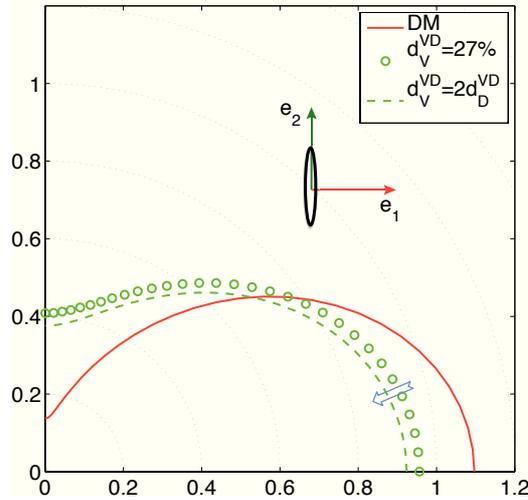


FIGURE 2.13 – Sensibilité du module d’Young au dommage  $d_2 : s^E$  pour deux valeurs particulières de  $d_V$

### 2.5.4 Possibilités du modèle VDT

La formulation VDT permet d’accéder, au niveau de chaque microplan, à la composante transverse pouvant être nécessaire pour piloter les lois d’endommagement faisant intervenir aussi la déformation transverse. Encore une fois, on se limite ici à l’analyse aux conséquences d’un dommage fixé. Toujours pour des raisons de simplicité, on conserve tous les paramètres fournis dans le tableau 2.3 pour analyser ce modèle, à l’exception de  $\mu_D$  et  $\mu_T$  qui sont libérés. Afin de vérifier l’isotropie non endommagée, la relation  $\frac{2}{5}\mu_D + \frac{3}{5}\mu_T = 2\mu_{Dev} = 2\mu$  est toujours respectée, mais par contre, la relation  $\mu_D d_D = \mu_T d_T$  n’est plus vérifiée. On s’intéresse donc, uniquement à l’influence du rapport des modules  $\frac{\mu_D}{\mu_T}$  sur les réponses.

Les figures 2.16, 2.17 et 2.18 montrent l’évolution des sensibilités des paramètres de l’ingénieur pour un ensemble discret de valeurs du rapport des modules  $\mu_D/\mu_T$ . Le choix de faire varier ce rapport des modules et non le rapport des endommagements  $d_D/d_T$  est guidé par la volonté de conserver la même sensibilité définie précédemment.

On remarque dans un premier temps qu’il existe deux directions d’invariances par paramètre de l’ingénieur (traits pointillés sur les courbes). Il semble que ces invariants dépendent des paramètres du matériau. Il sera donc possible de les gérer dans le cadre d’une identification.

Sur la figure 2.16, les directions d’invariants sont données pour des angles de  $33^\circ$  et  $73^\circ$ . Il est à noter que les amplitudes des sensibilités pour ces deux directions sont différentes. Ceci implique que le rapport des modules de cisaillement ne permet pas seul de caler un comportement isotrope. Dans les intervalles  $[0^\circ; 33^\circ]$  et  $[73^\circ; 90^\circ]$ , la

2.5. COMPARAISONS NUMÉRIQUES : CONSÉQUENCE D'UN UNIQUE RÉSEAU DE MICRO-FISSURES

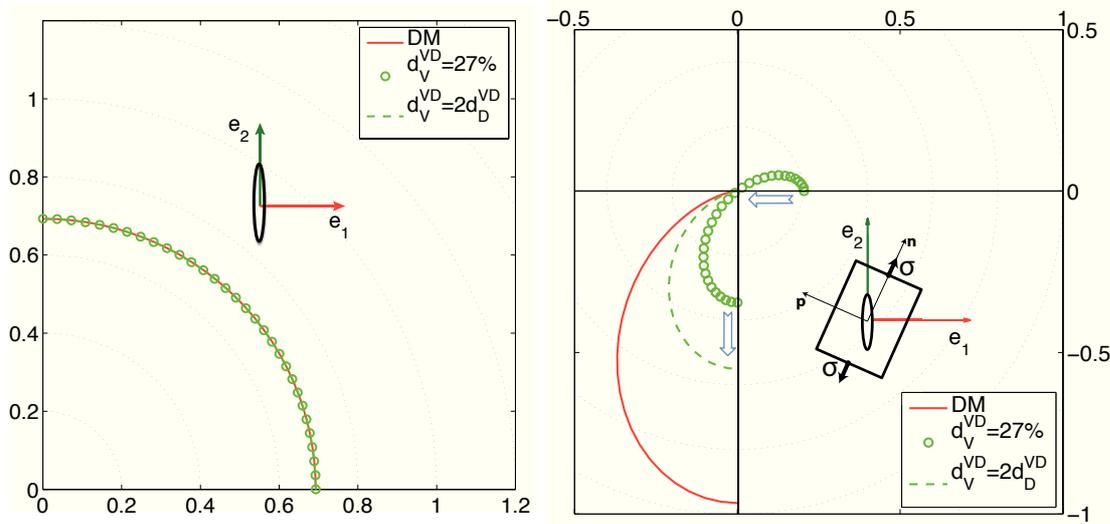


FIGURE 2.14 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage  $d_2$  :  $S^\mu$  pour deux valeurs particulières de  $d_V$       FIGURE 2.15 – Sensibilité du coefficient de contraction au dommage  $d_2$  :  $S^\nu$  pour deux valeurs particulières de  $d_V$

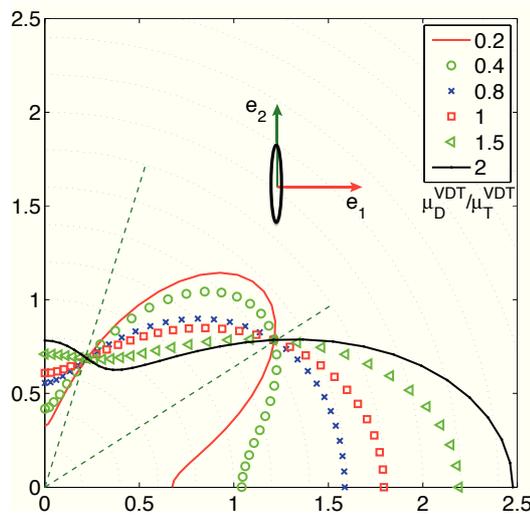


FIGURE 2.16 – Sensibilité du module d'Young au dommage  $d_2$  :  $s^E$  pour 5 valeurs particulières du ratio  $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

sensibilité est une fonction croissante du rapport  $\mu_D/\mu_T$ , contrairement à l'intervalle  $[33^\circ ; 73^\circ]$ . En outre, l'amplitude des variations de la sensibilité est plus prononcée pour la direction  $e_1$ .

La figure 2.17 présente une symétrie par rapport à la première bissectrice. Ainsi les directions d'invariances sont également symétriques ( $20^\circ$  et  $70^\circ$ ) et leurs amplitudes de sensibilités sont égales. Cette symétrie récurrente semble être intrinsèque

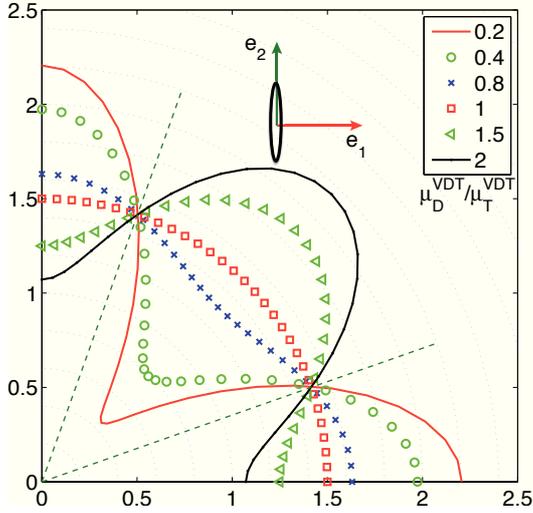


FIGURE 2.17 – Sensibilité du module de cisaillement au dommage  $d_2 : s^\mu$  pour 5 valeurs particulières du ratio  $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

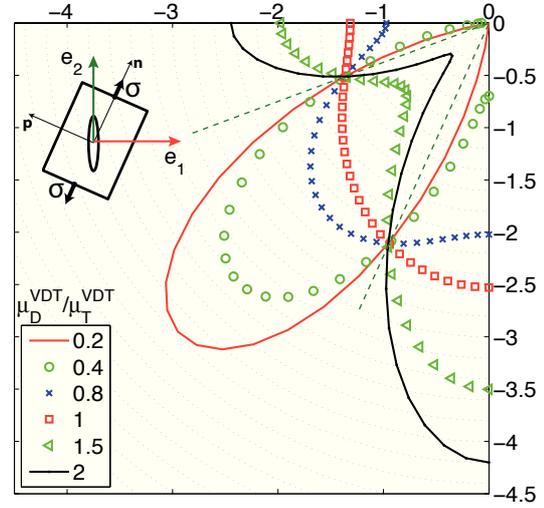


FIGURE 2.18 – Sensibilité du coefficient de contraction au dommage  $d_2 : s^\nu$  pour 5 valeurs particulières du ratio  $\frac{\mu_D}{\mu_T}$

à la sensibilité du module de cisaillement car elle apparaissait déjà pour DM et EM sur le figure 2.11. Enfin, la plus forte variation de sensibilité est observée selon la bissectrice.

La figure 2.18, bien que représenté dans le troisième quart du plan, présente des directions d'invariances à  $21^\circ$  et  $66^\circ$  par rapport à  $\mathbf{e}_1$ . L'amplitude maximum de variation de la sensibilité est observée pour la direction  $\mathbf{e}_2$ . De plus, il est constaté qu'il y a une sensibilité nulle sur les axes  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  pour la valeur particulière du rapport  $\mu_D/\mu_T$  de 0,2.

La grande variabilité des sensibilités des paramètres de l'ingénieur laisse apparaître de larges possibilités pour une identification sur le matériau objet de cette étude.

## 2.6 Conclusion

Le choix d'un modèle d'endommagement anisotrope pouvant prendre en compte sainement l'effet unilatéral reste difficile compte tenu du manque de données expérimentales. Des considérations thermodynamiques rappelées dans ce chapitre ont permis de sélectionner les quatre classes de modèle suivantes : (1) l'approche de Bargellini *et al.* [4], (2) les approches microplans [18], (3) les approches anisotropes micromécaniques dont par exemple [89] et (4) un modèle formulé en vitesse [36]. Ces modèles ont été reformulés dans une base tensorielle communément interprétable : la base de Walpole. Ce travail analytique a mis en exergue de grandes

différences quant aux conséquences d'un endommagement fixé sur les tenseurs de la base de Walpole. Ces différences ont été observées quantitativement grâce à l'uniformisation des modèles et à des choix particuliers d'endommagement. En se basant sur la faculté des modèles à décrire un accroissement du coefficient de contraction, l'approche micromécanique que nous avons sélectionnée a finalement été écartée. Il a été montré que le modèle développé par Bargellini *et al.* s'approche fortement du modèle VD dans lequel la condition  $d_V = 2d_D$  serait respectée en permanence. Dans ce cas les réponses ne diffèrent que par leur amplitude respective. On remarquera toutefois que les comparaisons proposées n'éclairent pas les effets du dommage sur trois des composantes tensorielles de la base de Walpole ce qui ne permet pas d'étudier comparativement ces deux modèles dans ce cas.

Le modèle microplan VDT se montre le plus souple pour modifier de façon indépendante les trois grandeurs de l'ingénieur. Cette capacité provient de la fermeture du problème (3 équations V, D et T pour 3 inconnues  $E$ ,  $\mu$  et  $\nu$ ). Cependant, il reste à comprendre les relations liant les paramètres et les modules. Ceci peut se faire au travers d'une étude de sensibilité qui permettrait de formuler des relations entre les paramètres des microplans et les variables globales.

Ce chapitre n'a pour ambition que de choisir de façon rationnel une structure de modèle qui puisse être adaptée à la modélisation du matériau objet de nos études. Cette adaptation, par la prise en compte de phénomènes mécaniques est l'objet des chapitres suivants.

## Chapitre 3

# Introduction de l'effet unilatéral dans le modèle VDT

Nous avons vu au premier chapitre que le matériau M1 est initialement endommagé et qu'il peut développer une anisotropie d'endommagement induite par la sollicitation. L'endommagement se traduit par une reprise de raideur (respectivement une forte baisse de raideur) lors d'un chargement de traction simple suivi d'une compression (respectivement une traction suivant une compression simple). Cet effet s'explique par « l'état » dans laquelle se trouve les microfissures. Selon qu'elles sont ouvertes ou fermées, elles agissent différemment sur le comportement global du matériau. Cet effet est appelé « effet unilatéral ». Comme l'état d'ouverture ou de fermeture dépend de la direction de la sollicitation, on dira ici que la sollicitation rend « effectif » ou non un endommagement existant. Bien entendu, la sollicitation participe ensuite à étendre le niveau d'endommagement. L'intégration de ces phénomènes dans les lois de comportement permet de représenter d'une part, la non linéarité dans la réponse du matériau provoquée par le changement d'état des microfissures à endommagement figé mais également la dissymétrie du comportement entre les sollicitations de type traction et compression.

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé quelques modèles assurant la continuité de la réponse contrainte-déformation sous des chargements multiaxiaux non proportionnels, l'existence du potentiel thermodynamique et la symétrie du tenseur d'élasticité endommagé et du tenseur Hessien (second gradient) de l'énergie libre. Le modèle microplan avec décomposition VDT a été choisi notamment pour la souplesse qu'il confère au modélisateur. L'objectif de ce troisième chapitre est d'introduire l'effet unilatéral dans la formulation VDT. Nous supposons pour l'instant qu'aucun mécanisme n'induit de déformation résiduelle.

Dans la première partie de ce chapitre, nous analysons quelques modèles proposés dans la littérature. Les principes fondamentaux de la thermodynamique sont ensuite exploités pour définir un cadre rigoureux à la modélisation de cet effet. Enfin, nous identifions un premier jeu de paramètres pour retrouver le comportement élastique

endommageable.

## 3.1 Synthèse bibliographique des modèles avec effet unilatéral d'endommagement

Parmi la littérature, nous avons sélectionné les modèles les plus pertinents à notre connaissance. Nous en donnons quelques détails pour illustrer les différents choix de modélisation concernant :

- la variable pilotant l'endommagement des matériaux quasi-fragiles,
- la forme des lois d'évolution d'endommagement,
- la méthode utilisée pour intégrer l'effet unilatéral dans le modèle,
- la variable qui pilote cet effet.

L'effet unilatéral se traduit par une variation brutale des propriétés élastiques du matériau. Il faut s'assurer que la réponse contrainte-déformation est bien continue, autrement dit que le saut de propriété n'affecte que la raideur du matériau et ne produit pas un saut de contrainte lorsque l'on se situe au basculement ouvert/fermé (ou l'inverse).

### 3.1.1 Modèle isotrope de Mazars

Mazars [64][65] a proposé un modèle élastique endommageable isotrope. Ce modèle de référence pour les bétons s'appuie sur la mécanique de l'endommagement et une variable scalaire  $d$  telle que le module d'Young courant vaut  $E = E_0(1 - d)$ . Pour introduire la dissymétrie du comportement, Mazars propose deux variables d'endommagement, notés  $d_t$  et  $d_c$ , respectivement en traction et en compression (donc fonction de la nature de la sollicitation). La combinaison linéaire de ces deux modes donne l'endommagement effectif :

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c \quad (3.1)$$

où  $\alpha_t$ ,  $\alpha_c$  sont deux coefficients d'effectivité définis en fonction des déformations principales  $\varepsilon_i$  tels que :

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i(\varepsilon_i) \frac{\varepsilon_{ti} \varepsilon_i}{\hat{\varepsilon}^2} \quad (3.2)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i(\varepsilon_i) \frac{\varepsilon_{ci} \varepsilon_i}{\hat{\varepsilon}^2} \quad (3.3)$$

$H(\varepsilon_i)$  est la fonction d'Heaviside de la déformation principale  $\varepsilon_i$  et  $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_i \rangle_+^2}$  est la déformation équivalente égale à la somme des carrés des déformations principales

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

positives ( $\langle x \rangle_+$  est la fonction de Macaulay représentant la partie positive de  $x$ ).  $\varepsilon_{ti}$  et  $\varepsilon_{ci}$  sont, respectivement, les parties positives et négatives des valeurs principales du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\varepsilon_{ti} = \langle \varepsilon_i \rangle_+ \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ci} = \langle \varepsilon_i \rangle_- \quad (3.5)$$

Une fonction seuil d'endommagement est défini par :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \hat{\varepsilon} - \kappa(d) \quad (3.6)$$

Ce seuil est différent en traction et en compression car il dépend de la déformation équivalente  $\hat{\varepsilon}$ . Avec ce modèle, à  $d_t$  et  $d_c$  fixés, l'endommagement « effectif »  $d$  change avec la direction de la déformation.  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  valent par exemple :

$$\begin{cases} \alpha_c = 0 & \text{en traction pure} \\ \alpha_t = 0 & \text{en compression pure} \\ \alpha_c + \alpha_t = 1 & \text{en cas de combinaison} \end{cases} \quad (3.7)$$

Les lois d'évolution de  $d_t$  et  $d_c$  sont définis telles que :

$$\begin{aligned} d_t &= 1 - \kappa_0 (1 - A_t) - A_t \exp(-B_t (\kappa(d) - \kappa_0)) \\ d_c &= 1 - \kappa_0 (1 - A_c) - A_c \exp(-B_c (\kappa(d) - \kappa_0)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec  $\kappa_0$  le seuil d'endommagement initial. Les paramètres  $A_t$ ,  $A_c$ ,  $B_t$  et  $B_c$  permettent d'avoir deux vitesses d'évolution de dommage en fonction de la nature de la sollicitation. Une vitesse d'endommagement rapide en traction et une deuxième plus lente en compression. En supposant que le coefficient de Poisson n'est pas affecté par l'endommagement, l'énergie libre pour un matériau isotrope peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.9)$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre quatre du matériau vierge (non endommagé) et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  représente le tenseur de déformation d'ordre deux. La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  est déduite par la dérivation de l'énergie libre :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.10)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement  $d$  est obtenue par dérivation de l'énergie libre par rapport à  $d$  :

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.11)$$

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

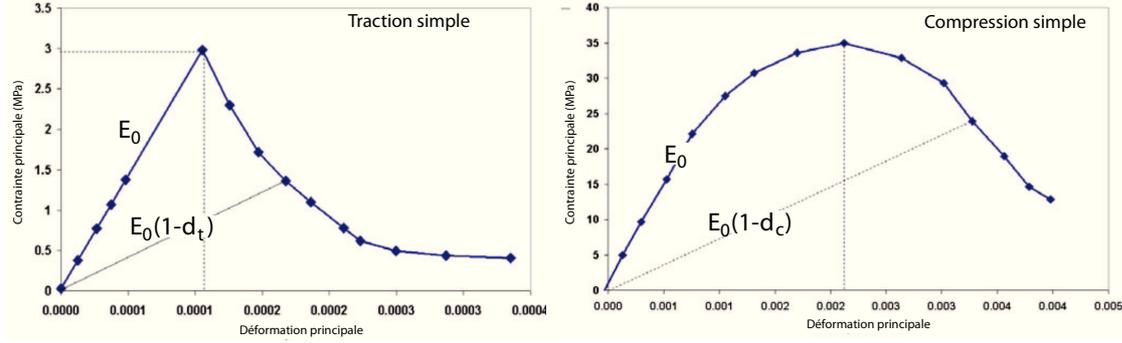


FIGURE 3.1 – Réponse contrainte-déformation d'un essai de traction suivi d'une compression pour le modèle de Mazars [65].

Ce modèle isotrope tient compte d'un endommagement différent en traction et en compression (fig. 3.1) mais il ne permet pas de décrire l'effet unilatéral de manière anisotrope. Compte tenu de la formulation de l'équation 3.9, seule la raideur du matériau varie lors de la refermeture des fissures. Il n'y a donc pas de saut de contrainte car la refermeture s'effectue à déformation nulle. Nous constatons que la même phénoménologie est utilisée pour les deux mécanismes d'endommagement  $d_t$  et  $d_c$ . Ces deux grandeurs sont pilotées par l'extension du matériau, seule leur effectivité ( $\alpha_t$  et  $\alpha_c$ ) et leur vitesse d'évolution respectives sont différentes.

#### 3.1.2 Modèle isotrope « concrete damaged plasticity »

Il s'agit d'un modèle élasto-plastique avec endommagement destinés à la modélisation du comportement des bétons et disponible dans le code de calcul Abaqus. La loi d'état peut être écrite sous la forme suivante [61] :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  sont respectivement les tenseurs de déformation totale et de déformation plastique. A l'image du modèle précédent, la variable  $d$  est dissociée en deux variables internes d'endommagement par la relation suivante :

$$d = 1 - (1 - s_t d_c)(1 - s_c d_t) = s_t d_c + s_c d_t - s_c s_t d_c d_t \quad (3.13)$$

où  $s_t$  et  $s_c$  sont des fonctions de l'état des contraintes principales (noté par le signe  $\widehat{\mathbf{X}}$ ) définies par :

$$\begin{aligned} s_t &= 1 - w_t r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) & 0 \leq w_t \leq 1 \\ s_c &= 1 - w_c (1 - r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i)) & 0 \leq w_c \leq 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

$d_t$  et  $d_c$  sont, respectivement, deux variables de dommage en traction et compression simple qui dépendent de l'état de déformation plastique  $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$  et  $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$  :

$$\begin{aligned} d_t &= d_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl}) & 0 \leq d_t \leq 1 \\ d_c &= d_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}) & 0 \leq d_c \leq 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ces deux fonctions  $d_t$  et  $d_c$  sont rentrées sous forme de tableau dans Abaqus (figure 3.2). Cette formulation diffère de la proposition de Mazars car ce sont ici les contraintes qui pilotent l'effectivité. La variable  $r(\hat{\sigma})$  indique si l'état de contrainte est plutôt du type traction ( $r \rightarrow 1$ ) ou compression ( $r \rightarrow 0$ ). Elle est définie à partir des contraintes principales effectives (définies comme le rapport de la contrainte principale sur le terme  $1 - d$ ) :

$$r(\hat{\sigma}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|} \quad 0 \leq r(\hat{\sigma}_i) \leq 1 \quad (3.16)$$

Les pondérations  $w_t$  et  $w_c$  (deux paramètres fixés entre 0 et 1) permettent de régler les parts des endommagements qui interviennent finalement dans le calcul de l'endommagement total. Pour le modèle de Mazars,  $w_t$  et  $w_c$  valent l'unité. La figure 3.2 issue de la documentation du code Abaqus illustre l'influence de ces coefficients. L'évolution de chaque variable d'endommagement est pilotée par la déformation plastique. Ce couplage direct entre l'endommagement et la plasticité est illustré sur la figure 3.3.

Ce modèle permet de reproduire le caractère unilatéral des dommages et de différentier le comportement du matériau en compression et en traction. A déformation donnée, le passage ouvert/fermé et son inverse s'effectue à contrainte nulle. Il n'y a donc pas de saut de contrainte. L'effectivité est pilotée ici par les contraintes principales ce qui différentie cette approche de celle proposée par Mazars. Enfin, l'écriture développée dans l'équation 3.13 conduit à un troisième terme dont la signification physique et difficilement interprétable.

#### 3.1.3 Modèles issus de l'homogénéisation

Ces méthodes de changement d'échelle [70] [87] dans les milieux à microstructure aléatoire sont pour l'essentiel basées sur la résolution des problèmes d'inclusion d'Eshelby [39]. Dans le cas du schéma d'Eshelby, la rigidité endommagée s'écrit sous la forme suivante :

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

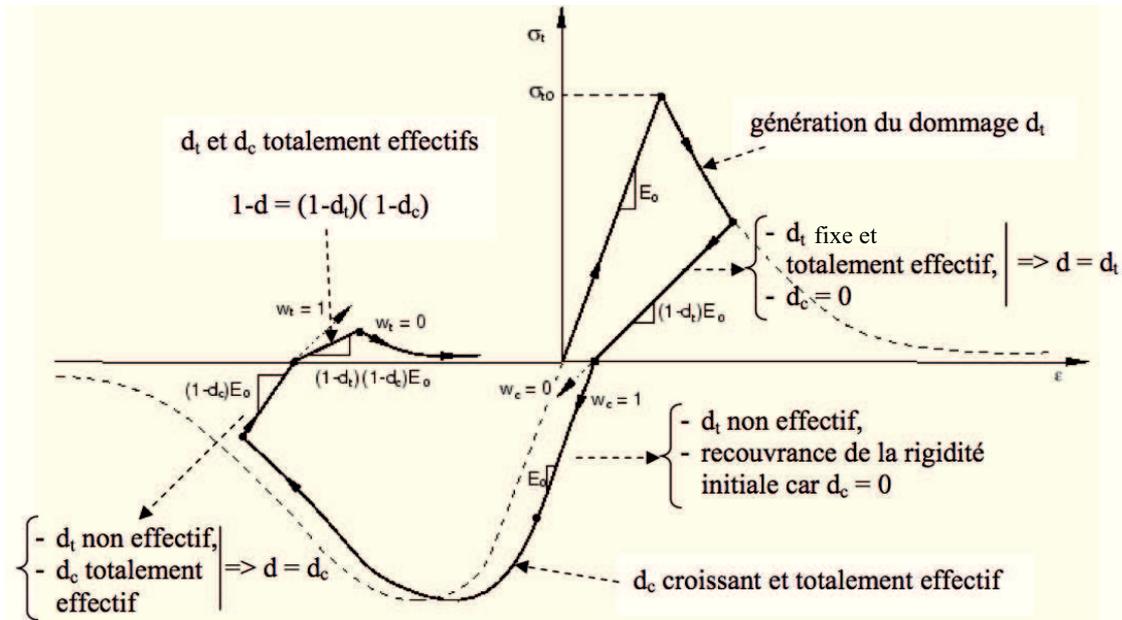


FIGURE 3.2 – Réponse du modèle « concrete damaged plasticity » lors d'un chargement alternant une traction puis une compression. Effets de l'effectivité et du dommage.

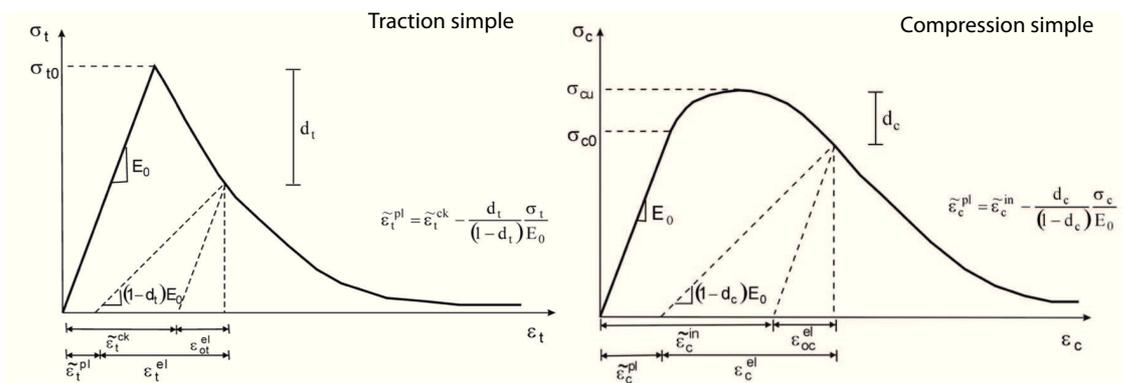


FIGURE 3.3 – Couplage entre endommagement et déformation plastique en compression et en traction [1].

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

$$\mathbb{C}_{Esh}^{hom}(\rho, \mathbf{n}) = \mathbb{C} - \sum_{i=1}^N \rho_i^f (\mathbb{C}^{i,f} - \mathbb{C}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_\epsilon^i : (\mathbb{C}^{i,f} - \mathbb{C})]^{-1} \quad (3.17)$$

où  $\mathbb{P}_\epsilon^i$  désigne le tenseur de Hill qui ne dépend que de la géométrie de l'inclusion  $f$  et les propriétés élastiques de la matrice.  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité isotrope pour le matériau sain.  $\rho_i^f$  représente la densité des microfissures dans l'inclusion  $f$ .

L'idée repose sur une différentiation de la modélisation de l'élasticité des fissures suivant leur état [34]. D'une part une élasticité nulle dans l'état ouvert indiquant qu'elles ne supportent pas de contraintes ( $\mathbb{C}^{i,f} = 0\mathbb{I}$ ). D'autre part une élasticité fictive isotrope  $C^f = 3k\mathbb{J}$  des microfissures dans l'état fermé avec  $\mathbb{J}$  la partie volumique du tenseur d'identité  $\mathbb{I}$  d'ordre 4 et  $k$  le module de compressibilité du matériau sain. Une inclusion contient une densité de microfissures  $\rho_i^f$  orientées dans la même direction  $\mathbf{n}_i$ . L'approximation analytique de cette fonction de densité des microfissures n'est pas facile. Pour cette raison Pensée *et al.* ont adopté une procédure d'intégration numérique de type Gauss. De ce fait, cette densité devient  $\rho_i^f = w_i d_i$  où  $w_i$  est un facteur de pondération et  $d_i$  est la densité et cela pour une direction  $\mathbf{n}_i$  donnée. Le critère d'ouverture-fermeture  $\hat{\beta}$  pour les fissures de normale  $\mathbf{n}_i$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\hat{\beta}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) = \frac{16\rho_i(1-\nu^2)}{3E} [\lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_i] \quad (3.18)$$

La transition de l'état ouvert à l'état fermé se fait à  $\hat{\beta} = 0$ . Elle dépend de la déformation volumique et de la déformation normale au plan de la fissure. Le critère d'endommagement est exprimé sous la forme suivante :

$$f_i(F^{d_i}, (d_i)) = F^{d_i} - R(d_i) \quad (3.19)$$

où  $R(d_i)$  est la résistance à l'endommagement.  $F^{d_i}$  est la force thermodynamique :

$$\begin{aligned} F^{d_i} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial d_i} \\ &= \frac{1}{2H_0} \left\{ (\langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+)^2 + \frac{4\mu^2}{1-\frac{\nu}{2}} [(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{N}_i - \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}] \right\} \\ H_0 &= \frac{3E}{16(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

L'évolution de la densité de microfissures  $d_i$  suit une règle de normalité par rapport au critère :

$$\dot{d}_i = \frac{\partial f_i}{\partial F^{d_i}} \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{d_i}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2H_0} \left\{ 2 \langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ \mathbf{N}_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\mu}{1-\nu/2} [\mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i - 2(\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}] \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $E$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont les propriétés élastiques du matériau sain, et  $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$  est le tenseur de projection pour chaque direction  $\mathbf{n}_i$  fixe. On notera que la force thermodynamique correspond à un taux de restitution de l'énergie en mode mixte puisqu'elle comporte un terme  $(\langle \mathbb{C} : \mathbf{N}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+)^2 / 2H_0$  provenant de l'ouverture des microfissures (mode I) et des termes correspondant au taux de restitution de l'énergie de cisaillement (mode II et III). L'évolution du dommage ne dépend donc pas uniquement de l'ouverture des fissures comme dans le modèle de Mazars mais aussi des effets de cisaillement.

Le principe de cette approche consiste à modifier la rigidité au passage ouvert/fermé. Cela revient à disposer de deux énergies pour traiter le dommage en fonction de l'état de la fissure. Cette idée est utilisée aussi par Wellemane dont nous décrivons maintenant le modèle.

### 3.1.4 Modèle anisotrope de Wellemane

Wellemane a proposé une énergie libre qui se compose d'une énergie libre du matériau sain (sans microfissures)  $\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  modifiée par une énergie libre due à l'endommagement [83] :

$$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) + \Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{d}$  est l'ensemble des tenseurs irréductibles  $(d_0, d_2, d_4, \dots, d_p)$  qui décrit la densité des microfissures [32] :

$$\rho(\mathbf{n}) = d_0 + d_2 : [\mathbf{n}^{\otimes 2}] + d_4 :: [\mathbf{n}^{\otimes 4}] + \dots + d_p \bullet [\mathbf{n}^{\otimes p}] \quad (3.23)$$

Cette manière de décrire la distribution de la densité de dommage est plus riche qu'une variable scalaire ou tensorielle d'ordre 2 ou 4. Cependant, la difficulté pratique de gérer des tenseurs d'ordre 8 ou plus (d'ordre  $p$ ) conduit à limiter son utilisation à des tenseurs de dommage d'ordre 4 seulement. L'énergie de dommage  $\Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d})$  est définie comme la somme sur la sphère unité des contributions pour chaque direction, soit :

$$\Psi_d(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \psi(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (3.24)$$

où  $\psi$  représente la modification de l'énergie induite pour chaque système de microfissures. Notons que cette somme d'énergies suppose implicitement une non interaction entre les microfissures (cf. [45]). Pour rendre compte de l'effectivité du dommage,

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

cette énergie libre élémentaire  $\psi$  prendra des valeurs différentes suivant l'état des microfissures (ouvert ou fermé), soit :

$$\psi(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} \psi_1(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) > 0 \\ \psi_2(\rho(\mathbf{n}, \mathbf{d}), \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n})$  désigne le critère de gestion d'ouverture-fermeture des microfissures de normale  $\mathbf{n}$ . Il s'écrit sous la forme suivante :

$$g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) = \delta_1 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} + \delta_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.26)$$

où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont deux paramètres. Ces deux énergies élémentaires sont exprimées en fonctions des invariants de  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de leurs invariants mixtes. L'énergie est construite de telle façon qu'elle soit continument différentiable. Elle vérifie les conditions de restitution d'énergie au passage ouvert-fermé [83].

L'état des microfissures ne dépend donc pas de leur densité mais seulement de l'orientation  $\mathbf{n}$  et l'état de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Ce critère ressemble à celui utilisé dans le cas des modèles micromécaniques. La différence réside dans le fait qu'ici on a deux paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$  de pondération ajustable alors que, dans le modèle micromécanique, cette pondération est fixe et dépend des paramètres élastiques (éq. 3.18).

La fonction seuil qui gère l'évolution du dommage  $\mathbf{d}$  est exprimée de la même façon que dans le cas des approches micromécaniques :

$$f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) = \|\mathbf{F}^d\| - R(\mathbf{d}) \leq 0 \quad (3.27)$$

où  $\|\mathbf{X}\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbf{X}$ .  $\mathbf{F}^d$  est l'ensemble des forces thermodynamiques qui résultent de la différentiation de l'énergie par rapport à l'ensemble des tenseurs irréductibles  $\mathbf{d}$ .

$$\mathbf{F}^d = \{F^{d_0}, F^{d_2}, F^{d_4}, \dots, F^{d_p}\} \quad (3.28)$$

$$F^{d_0} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_0}, F^{d_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_2}, F^{d_4} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_4}, \dots, F^{d_p} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d_p} \quad (3.29)$$

L'évolution de l'endommagement s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) < 0 \\ \frac{\langle (\mathbf{F}^d, \dot{\mathbf{F}}^d) \rangle_+}{k_0 \eta \|\mathbf{F}^{d_0}\| \|\mathbf{F}^d\|} \mathbf{F}^d & \text{si } f(\mathbf{F}^d, \mathbf{d}) = 0 \\ \dot{\mathbf{F}}^d = \frac{\partial \mathbf{F}^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $k_0$  et  $\eta$  sont deux paramètres strictement positifs. L'évolution du dommage dépend principalement de la partie positive des forces thermodynamiques.

### 3.1.5 Modèle de Maire et Chaboche

Maire et Chaboche [62] [25] ont proposé une méthode originale basée sur la notion d'énergie « bloquée » (voir aussi Andrieux *et al.* (1986)) pour assurer la continuité de la réponse contrainte-déformation (fig :3.4).

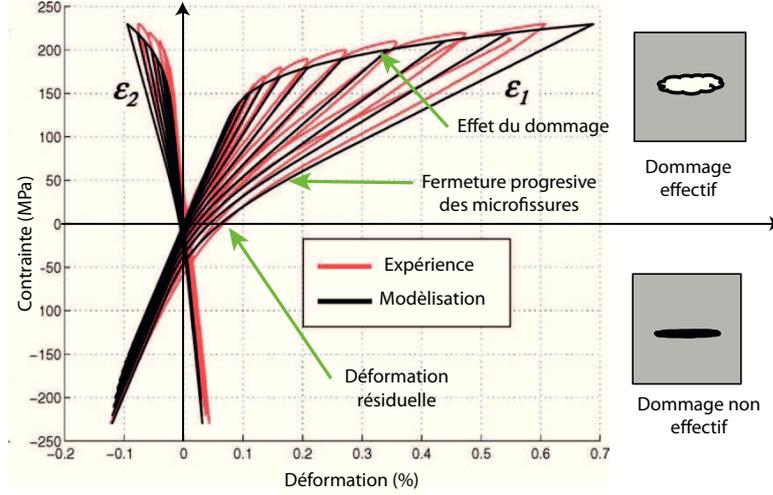


FIGURE 3.4 – Essai de traction-compression d'un composite à matrice céramique [62]

La loi de comportement est écrite sous la forme suivante en introduisant une déformation stockée  $\epsilon^S$  :

$$\sigma = \mathbb{C}^{ed} : (\epsilon - \epsilon^S) \quad (3.31)$$

où  $\mathbb{C}^{ed}$  est le tenseur d'élasticité endommagé. Le dommage est supposé non effectif lorsque la déformation atteint la déformation de fermeture  $\epsilon^f$ . Si  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à une famille de microfissures, le critère de désactivation du dommage peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\epsilon_n = \mathbf{n} \cdot (\epsilon - \epsilon^f) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad (3.32)$$

Le dommage est effectif quand  $\epsilon_n$  est positif. Dans le cas contraire l'effet de l'endommagement est désactivé. On remarque qu'à l'inverse des modèles de Wellemane et micromécanique détaillés ci-dessus, le critère est formulé en déformation (les modules élastiques sont absents). La condition unilatérale peut être écrite sur la rigidité effective en tant que :

$$\mathbb{C}^{ed} = \mathbb{C} - \sum_{\alpha=1}^N H(\epsilon_n) d_\alpha \mathbb{K}_\alpha - [\mathbb{D} : \mathbb{C}]_s \quad (3.33)$$

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

$\mathbb{K}_\alpha$  est un tenseur d'ordre 4 exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_\alpha &= \gamma [(\mathbb{K} : \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha) + (\mathbb{K} : (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha)) \otimes \mathbf{1}]_s \\ &+ \frac{\gamma - 1}{2} [\mathbb{K} : (\mathbf{1} \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha)) + \mathbb{K} : (\mathbf{1} \otimes (\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha))]_s \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $\mathbb{K}$  est un tenseur d'ordre 4 intrinsèque au matériau. Si le matériau est considéré isotrope à l'état initial sera le tenseur d'élasticité isotrope ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). On notera que si le matériau est initialement isotrope transverse alors ce tenseur  $\mathbb{K}$  sera isotrope transverse. La rigidité endommagée dépend de deux variables d'endommagement. La première est scalaire  $d_\alpha$ , où l'indice  $\alpha$  désigne les directions de projection liées aux systèmes des microfissures. La seconde est un tenseur de dommage  $\mathbb{D}$  d'ordre 4 construit à partir d'un tenseur  $\mathbf{d}$  d'ordre 2 :

$$\mathbb{D} = \gamma [\mathbf{1} \otimes \mathbf{d}]_s + \frac{\gamma - 1}{2} [\mathbf{1} \otimes \underline{\mathbf{d}} + \mathbf{1} \otimes \overline{\mathbf{d}}]_s \quad (3.35)$$

avec :

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 H(\mathbf{n}_i \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^f) \mathbf{n}_i) d_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (3.36)$$

$i$  désigne les directions principales du tenseur de dommage  $\mathbf{d}$ .  $\gamma$  est un coefficient de pondération.  $H(x)$  est la fonction de Heaviside.  $[\mathbb{X}]_s$  signifie « partie symétrique » du tenseur d'ordre 4  $\mathbb{X}$ .  $d_i$  représente les variables d'endommagement des directions principales.

Deux critères sont associés à ces variables de dommage  $d_\alpha$  et  $\mathbf{d}$  :

$$f_\alpha = g_\alpha \left( \sum_\beta a_{\alpha\beta} \langle F_\beta^{d_\beta} \rangle \right) - \frac{d_\alpha}{D_c^\alpha} \leq 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} f &= g \left[ \chi \left( \langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+ : \mathbb{Q} : \langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+ \right)^{1/2} + (1 - \chi) \text{tr}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi \text{tr}(\mathbf{d}) - (1 - \xi) \text{tr}(\mathbf{F}^{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d})}{D_c} \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$a_{\alpha\beta}$  et  $D_c^\alpha$  sont deux paramètres où  $\langle \mathbf{F}^{\mathbf{d}} \rangle_+$  est la partie positive du tenseur des forces thermodynamiques.  $F_\alpha^{d_\alpha}$  et  $\mathbf{F}^{\mathbf{d}}$  sont, respectivement, la variable et le tenseur d'ordre 2 des forces thermodynamiques associés à l'énergie libre.  $\chi$  et  $\xi$  sont deux paramètres.  $\mathbb{Q}$  est un tenseur d'ordre 4 qui représente les directions privilégiés du matériau. Les lois d'évolution des variables de dommage sont :

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

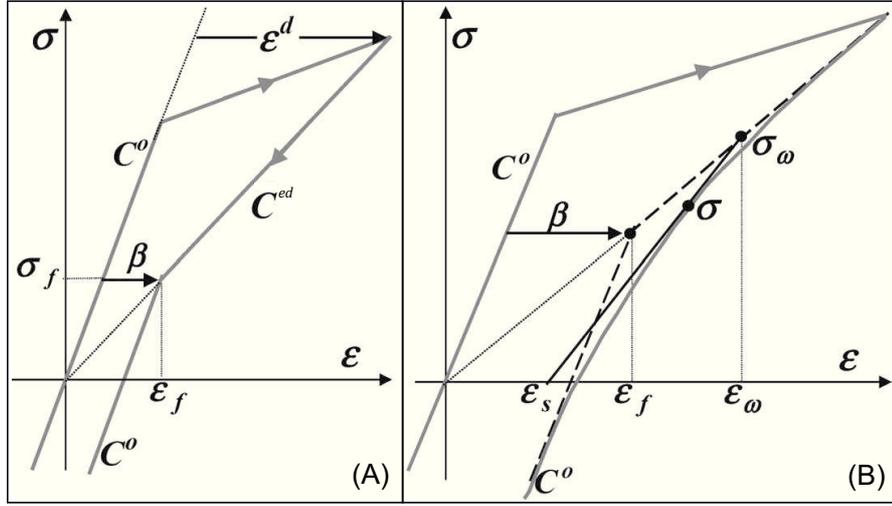


FIGURE 3.5 – Schéma d'une effectivité instantanée de dommage (A) et une effectivité progressive (B) [25]

$$\dot{d}_\alpha = \dot{\mu}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial F_\alpha^{d_\alpha}} \quad , \quad \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mu} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}^d} \quad (3.39)$$

avec  $\dot{\mu}_\alpha$  et  $\dot{\mu}$  deux multiplicateurs scalaires déterminés, respectivement, en vérifiant les conditions de consistance  $f_\alpha = \dot{f}_\alpha = 0$  et  $f = \dot{f} = 0$ .

Dans le cas où l'endommagement est effectif, la loi de Hooke s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^+ : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.40)$$

Après désactivation du dommage la première loi de Hooke est remplacée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_\alpha^- : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^S) \quad (3.41)$$

où

$$\mathbb{C}_\alpha^- = \mathbb{C}^{ed} + d_\alpha \mathbb{K}_\alpha \quad (3.42)$$

Le passage ouvert-fermé se fait à une déformation  $\boldsymbol{\epsilon}^f$  (fig :3.5). La continuité de la réponse contrainte-déformation est assurée par la combinaison des deux équations de la loi de Hooke 3.40 et 3.41 pour déterminer la déformation dite « stockée » :

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^f = \mathbb{C}_\alpha^+ : \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^f = \mathbb{C}_\alpha^- : (\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^f - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^S) \quad (3.43)$$

On déduit la déformation « stockée » :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S = \left[ \mathbb{I} - \left( \mathbb{C}_\alpha^- \right)^{-1} : \mathbb{C}_\alpha^+ \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^f \quad (3.44)$$

L'énergie est obtenue par intégration de la loi de Hooke 3.41 :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S) : \mathbb{C}^{ed} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S) + \psi_\alpha^s \quad (3.45)$$

avec  $\psi_\alpha^s$  l'énergie stockée :

$$\psi_\alpha^s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S : \left( \mathbb{C}^{ed-1} - \left( \mathbb{C}_\alpha^- \right)^{-1} \right)^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S \quad (3.46)$$

L'évolution de dommage est gérée par un critère qui combine des effets isotropes et des effets purement anisotropes. En plus des variables de dommage, ce modèle utilise deux variables internes supplémentaires : l'indice de désactivation de dommage et la déformation stockée  $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^S$ . Cette nouvelle règle de désactivation de dommage permet de décrire correctement la désactivation complète (en particulier pour le module de cisaillement), sans discontinuité dans la réponse contrainte-déformation. Par contre, dans le cas de réactivation de dommage, il est possible d'avoir une discontinuité de la réponse contrainte-déformation (pour des chargements complexes dans lesquels la contrainte lors de l'ouverture est différente de celle à la fermeture de microfissures).

### 3.1.6 Approche anisotrope et discrète de Bargellini et al.

L'approche discrète de Bargellini *et al.* [2] prend en compte la refermeture des lèvres des microfissures. Une fonction Heaviside sur la déformation normale au système de microfissures a pour but de gérer l'effet du dommage suivant la direction du chargement pour chaque direction fixe. L'énergie globale est l'énergie élastique dégradée par la somme des énergies dues à l'endommagement. Cette énergie d'endommagement est restituée dans chaque direction où les fissures se referment. L'énergie libre s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.47)$$

$$- \sum_{i=1}^N \rho_i \left\{ \alpha \left[ tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right] \right. \\ \left. + \beta tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right\} \quad (3.48)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \rho_i H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \left\{ -\frac{\alpha}{2} tr^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) + 2(\alpha + \beta) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \right\} \quad (3.49)$$

3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET  
UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

avec  $\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$  un tenseur directionnel égal au produit tensoriel de la normale à la famille de fissure sur elle-même. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (équivalents à des modules) gèrent le degré d'anisotropie d'endommagement et  $\rho_i$  est la densité de microfissures perpendiculaires à la  $i$ -ème direction. Le passage ouvert/fermé est géré par une fonction Heaviside sur la déformation normale  $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}$  pour chaque direction. À l'ouverture, (3.48) représente la partie endommagée à retirer de l'énergie élastique. Lors de la fermeture des microfissures, 3.49 permet de récupérer les modules endommagés. La restitution des modules élastiques est proportionnelle à la densité des microfissures  $\rho_i$ . En dérivant cette énergie par rapport au tenseur des déformations, on obtient l'expression de la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ &- \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}_i] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \\ &+ \sum_{i=1}^N \rho_i H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \{ -\alpha \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) \mathbf{N}_i + 2(\alpha + \beta) (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dans le cas d'un système de microfissures de direction fixe, on vérifie l'absence de dissipation anormale due à l'effet unilatéral. Pour se faire, on considère que le matériau est pré-endommagé et qu'il n'y a pas d'évolution de dommage. Ainsi on peut écrire le taux d'énergie sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} : \dot{\rho} \text{ avec } : \dot{\rho} = 0 \quad (3.51)$$

La dissipation est obtenue par la relation suivante :

$$\begin{aligned} w &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \\ w &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}] + 4\beta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} \} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &- \rho \frac{\partial H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}))}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) - 2(\alpha + \beta) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &- \rho H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) \{ \alpha \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} - 4(\alpha + \beta) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} \} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

On annule le terme contracté à  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  par définition de la contrainte sous la forme d'une loi d'état. Au passage ouverture/fermeture, on a les relations suivantes :

$$- \text{état ouvert} : -\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) < 0 \Rightarrow H(-\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) = 0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^o &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ &- \rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{1} + \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N}] \\ &+ 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.53)$$

### 3.1. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE DES MODÈLES AVEC EFFET UNILATÉRAL D'ENDOMMAGEMENT

---

– état fermé :  $-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) > 0 \Rightarrow H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})) = 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^f &= \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\quad -\rho \{ \alpha [2\boldsymbol{\varepsilon} - tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})\mathbf{1} + tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{N}] + 2\beta(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \\ &\quad +\rho \{ -\alpha tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + 2(\alpha + \beta)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Exactement à la refermeture, c'est à dire lorsque  $-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}) = 0$ , le saut de contrainte  $[\boldsymbol{\sigma}]$  s'écrit sous la forme suivante :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}^f - \boldsymbol{\sigma}^o = 2\rho(\alpha + \beta)(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.55)$$

Cette équation montre que le saut de contrainte n'est pas nul lors du changement d'état de la famille de microfissure. Pour annuler le saut de contrainte, Bargellini *et al.* intègrent un mécanisme de frottement et notamment une déformation caractéristique de cisaillement. Comme nous le verrons au chapitre 4, cette grandeur se soustrait au membre de droite de l'équation 3.55. A chaque fermeture, elle est donc re-initialisée de façon à annuler le saut de contrainte. Elle peut s'interpréter comme un déplacement relatif des lèvres des microfissures de la famille considérée, lorsqu'elles sont ouvertes, sous l'action du cisaillement.

Le critère d'évolution de l'endommagement est associé à une partie de la force thermodynamique à savoir :

$$f(F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i), \rho_i) = F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i) - c_1 \exp(\rho_i/c_2) \leq 0 \quad (3.56)$$

où  $i$  désigne les directions de projections. La partie de la force thermodynamique considérée s'écrit :

$$F^{\rho_i}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{N}_i) = -\left(\frac{3}{2}\alpha + 2\beta\right) tr^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \quad (3.57)$$

La fonction de Heaviside  $H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i))$  permet de gérer l'évolution du dommage en fonction de la nature de chargement.  $c_1$  et  $c_2$  sont deux paramètres. La loi d'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\dot{\rho}_i = -\frac{c_2(3\alpha + 4\beta) tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i) H(tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i))}{c_1 \exp(\rho_i/c_2)} \mathbf{N}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.58)$$

La continuité de l'énergie libre et de la réponse contrainte-déformation sont assurées grâce à la définition et à l'initialisation d'un nouveau paramètre pour chaque famille de fissure : la déformation de cisaillement. Nous verrons que Bargellini *et al.* se servent de cette grandeur pour introduire un mécanisme de frottement entre lèvres des microfissures. Cette approche diffère donc de toutes celles présentées auparavant, l'effet unilatéral ne pouvant pas être modélisé sans effet de frottement.

La définition des paramètres de pondération  $\alpha$  et  $\beta$  reste sommaire. L'hypothèse d'une évolution du dommage uniquement lorsque les fissures sont ouvertes est forte. Il ne peut pas y avoir frottement entre lèvres des microfissures et évolution de la microfissure simultanément. Un endommagement de type mode I est donc privilégié.

### 3.1.7 Modèles d'endommagement microplan

L'effet unilatéral a été introduit dans les modèles microplans à l'aide de courbes limites enveloppes [8] [7]. Prenons l'exemple de la contrainte normale au plan de la microfissure (fig. 3.6). Elle est reliée linéairement à la déformation normale par un module. Supposons que l'on parte de l'état de repos où contrainte et déformation sont nulle, et qu'on applique une tension (déformation positive). La contrainte normale ne pouvant pas dépasser l'enveloppe, elle est abaissée en suivant les abaques en fonction de la pression. Il en va de même pour un état initial à contrainte normale nulle mais déformation normale négative. Si on impose une déformation normale supérieure et que le comportement linéaire coupe le plateau à gauche de l'axe des ordonnées, la contrainte normale sera ajustée et maintenu à la valeur du plateau.

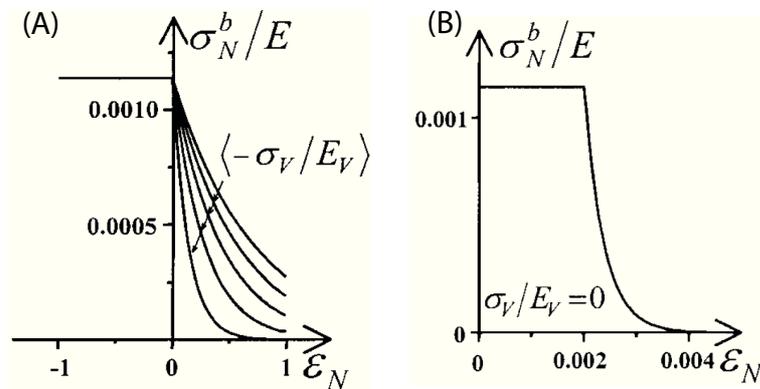


FIGURE 3.6 – Courbes limites enveloppes des contraintes et déformations normales pour gérer le contact[8].

### 3.1.8 Bilan

L'effet d'ouverture-fermeture des fissures est un phénomène cinématique. Souvent, la variable utilisée pour piloter l'effet unilatéral et l'évolution du dommage est le tenseur de déformation  $\epsilon$ . L'effet unilatéral peut être introduit de deux façons :

1. dans la loi d'évolution du dommage ce qui permet de ne pas affecter le tenseur de rigidité lors du passage ouvert/fermé (ou l'inverse) et ne produit pas de saut de contrainte à cet instant,

2. sous la forme d'une variation d'énergie libre et donc de contrainte ce qui nécessite d'effectuer le changement de mécanisme à déformation nulle, ou de mettre en place un mécanisme supplémentaire, sous la forme d'une déformation de régularisation, pour annuler le saut de contrainte.

On note que la plupart des modèles utilisent la partie positive du tenseur de déformation projeté pour piloter l'évolution de l'endommagement. Dans le cas où cela ne suffit pas, certains modèles ont recourt à deux lois d'évolution de dommage. Ces dernières sont gérées par une fonction seuil où l'endommagement ne peut décroître.

## 3.2 Effet unilatéral dans le modèle VDT

Dans cette section, nous vérifions le cadre thermodynamique du modèle microplan avec décomposition de type VDT et prise en compte de l'effectivité. Le modèle microplan VDT a déjà été présenté en détail dans le chapitre précédent. Les conséquences du mécanisme d'ouverture/fermeture des microfissures sont introduites dans l'énergie libre de chaque microplan sous la forme de fonctions d'effectivité notées  $\alpha_V(X_V)$ ,  $\alpha_D(X_D)$  et  $\alpha_T(X_T)$ . Afin de conserver un cadre le plus général possible, nous avons supposé que ces fonctions sont pilotées par des variables quelconques. Nous choisissons une énergie libre pour un plan donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi^{mic} &= \frac{1}{2}k_V (1 - \alpha_V(X_V) d_V) \varepsilon_V^2 + \frac{1}{2}\mu_D [(1 - \alpha_D(X_D) d_D) \varepsilon_D^2] \\ &+ \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T] \end{aligned} \quad (3.59)$$

où  $k_V$ ,  $\mu_D$  et  $\mu_T$  sont respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement déviatorique (normal au plan des microfissures) et de cisaillement tangentiel. Les expressions de ces modules sont exprimés dans l'équation 2.43 au chapitre 2.

Pour vérifier la positivité de la dissipation, on se base sur la démarche proposée par Kuhl et al. [51]. Nous choisissons arbitrairement de vérifier l'inégalité de Clausius Duhem pour chaque microplan ce qui assure sa validation à l'échelle globale. On écrit la dissipation dans chaque microplan sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_V + \boldsymbol{\sigma}_D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (3.60)$$

Le taux d'énergie libre à l'échelle du microplan s'écrit :

$$\dot{\Psi}^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (3.61)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \dot{\alpha}_V(X_V) + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \dot{\alpha}_D(X_D) + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \dot{\alpha}_T(X_T) \quad (3.62)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \quad (3.63)$$

On distingue trois contributions : un taux d'énergie dû aux variables observables ( $\dot{\varepsilon}_V$ ,  $\dot{\varepsilon}_D$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$ ), un taux dû à l'endommagement ( $\dot{d}_V$ ,  $\dot{d}_D$  et  $\dot{d}_T$ ) et un dernier dû à l'effectivité ( $\dot{\alpha}_V(X_V)$ ,  $\dot{\alpha}_D(X_D)$  et  $\dot{\alpha}_T(X_T)$ ). La dissipation dans chaque microplan est la somme de la dissipation intrinsèque (ou mécanique) et de la dissipation due à l'endommagement et à l'effectivité :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{mic} &= \left[ \sigma_V - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \right] \dot{\varepsilon}_V + \left[ \sigma_D - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \right] \dot{\varepsilon}_D + \left[ \boldsymbol{\sigma}_T - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \\ &- \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \dot{\alpha}_V(X_V) - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \dot{\alpha}_D(X_D) - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \dot{\alpha}_T(X_T) \\ &- \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \geq 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables de l'endommagement sont :

$$F^{d_V} = -\frac{\partial \Psi_V}{\partial d_V} = \frac{1}{2} k_V \alpha_V(X_V) \varepsilon_V^2 \quad (3.65)$$

$$F^{d_D} = -\frac{\partial \Psi_D}{\partial d_D} = \frac{1}{2} \mu_D \alpha_D(X_D) \varepsilon_D^2 \quad (3.66)$$

$$F^{d_T} = -\frac{\partial \Psi_T}{\partial d_T} = \frac{1}{2} \mu_T \alpha_T(X_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (3.67)$$

La gestion de la dissipation de l'endommagement ne présente aucune difficulté [18][51]. Afin de focaliser l'attention sur l'effectivité, considérons un processus ne modifiant pas l'endommagement ( $\dot{d}_V = \dot{d}_D = \dot{d}_T = 0$ ). Afin de gérer les trois termes dissipatifs dues à l'effectivité (seconde ligne de l'équation 3.64), deux possibilités se présentent. La première considère des mécanismes d'effectivité non dissipatifs. Dans la seconde, la dissipation due à l'effectivité est conservée mais on assure qu'elle reste positive.

### 3.2.1 Fonctions d'effectivité liées respectivement aux variables observables

On pose ici que  $\alpha_V$ ,  $\alpha_D$  et  $\alpha_T$  sont respectivement fonction de  $\varepsilon_V$ ,  $\varepsilon_D$  et  $\varepsilon_T$  ce qui donne :

$$\dot{\alpha}_V(\varepsilon_V) = \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V, \quad \dot{\alpha}_D(\varepsilon_D) = \frac{\partial \alpha_D(\varepsilon_D)}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D, \quad \dot{\alpha}_T(\varepsilon_T) = \frac{\partial \alpha_T(\varepsilon_T)}{\partial \varepsilon_T} \dot{\varepsilon}_T \quad (3.68)$$

A titre d'exemple, l'énergie libre sur la partie volumique s'écrit sous la forme :

$$\Psi^{mic} = \frac{1}{2} k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V^2 \quad (3.69)$$

Dans la dissipation, les termes d'effectivité s'ajoutent aux termes de la loi d'état pour donner la relation suivante :

$$\mathcal{D}_V = \left[ \sigma_V - (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) k_V \varepsilon_V + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} d_V k_V \varepsilon_V^2 \right] \dot{\varepsilon}_V \quad (3.70)$$

Si cette formulation annule la dissipation liée à l'effectivité, elle impose (1) la continuité de la dérivée de  $\alpha_V$  ou (2) un basculement d'effectivité à  $\varepsilon_V$  nul pour annuler le saut de contrainte. A titre d'illustration, on choisit une fonction continue pour l'effectivité volumique sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_V(\varepsilon_V) &= \frac{1}{2} (1 + \tanh(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \\ \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} &= \frac{a_1}{2} (1 - \tanh^2(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \end{aligned} \quad (3.71)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des paramètres à définir. La contrainte volumique peut alors s'écrire selon la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_V &= k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V - \frac{1}{2} k_V \frac{\partial \alpha_V(\varepsilon_V)}{\partial \varepsilon_V} d_V \varepsilon_V^2 \\ &= k_V \varepsilon_V \left\{ \left[ 1 - \frac{d_V}{2} (1 + \tanh(a_1 \varepsilon_V + a_2)) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_1}{4} \left[ 1 - \tanh^2(a_1 \varepsilon_V + a_2) \right] d_V \varepsilon_V \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Cette loi d'état est élastique non linéaire. Elle traduit une effectivité progressive de l'endommagement (fig. 3.7).

L'évolution de la réponse contrainte-déformation au passage ouvert/fermé est continue et se fait sans dissipation anormale. Ceci reste vrai que la fonction d'effectivité soit continue ou non (en pointillé sur la figure, cas d'une fonction Heaviside). Le raisonnement est le même pour les fonctions d'effectivité déviatorique et tangentielle liées à leur déformation  $\varepsilon_D$  et  $\varepsilon_T$  respective.

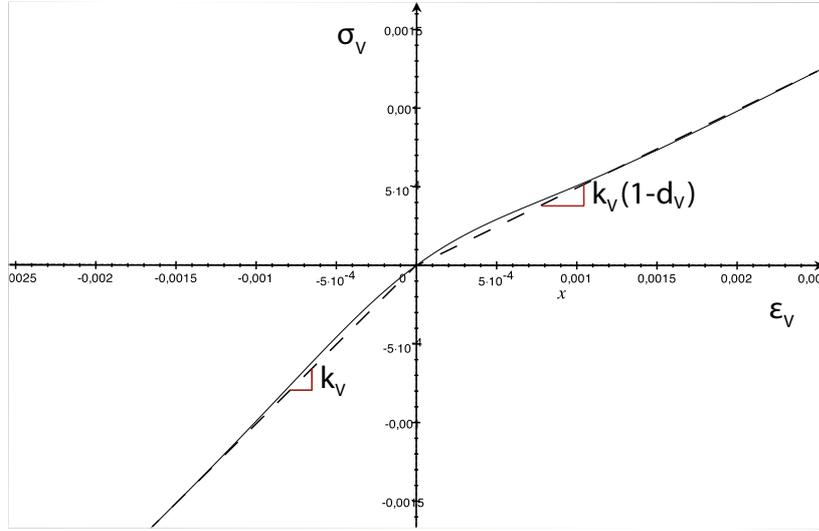


FIGURE 3.7 – Evolution régularisée de la contrainte en fonction de la déformation au passage ouvert/fermé de la partie volumique.

### 3.2.2 Fonctions d'effectivité non liés à leur variables respectives

Si les fonctions d'effectivité ( $\alpha_V$ ,  $\alpha_D$  et  $\alpha_T$ ) sont indépendantes de leur variable respective ( $\varepsilon_V$ ,  $\varepsilon_D$ ,  $\varepsilon_T$ ), il suffit que chaque terme dissipatif soit nul indépendamment les uns des autres. On choisit la fonction d'effectivité sur la partie volumique  $\alpha_V$  pour exposer notre raisonnement. La dissipation volumique dans l'un des plans est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V &= [\sigma_V - (1 - \alpha_V(X_V) d_V) k_V \varepsilon_V] \cdot \dot{\varepsilon}_V \\ &+ \frac{1}{2} d_V k_V \varepsilon_V^2 \frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V} \dot{X}_V = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Les choix de la fonction d'effectivité et de la grandeur cinématique qui la pilote  $X_V$  sont limités car il faut que  $\frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V}$  soit nul quel que soit  $\dot{X}_V$ . Un choix possible est de prendre la fonction d'Heaviside  $H(X_V)$  comme fonction d'effectivité. Sa dérivée est toujours nulle sauf en  $X_V = 0$ . Pour annuler la dissipation en ce point, on peut faire apparaître la variable de pilotage devant la dérivée  $X_V \frac{\partial \alpha_V(X_V)}{\partial X_V}$ , par exemple en écrivant la relation suivante :

$$H(X_V^n) \Rightarrow n X_V^{n-1} \frac{\partial H(X_V^n)}{\partial X_V} = 0 \quad \forall X_V \text{ \& } n \neq 0 \quad (3.74)$$

Pour ne pas avoir une effectivité dissipative ni de saut de contrainte, on peut aussi adopter la méthode de régularisation utilisée dans le modèle de Bargellini et al. [2]

dans la section 3.1.6 ou dans Maire et Chaboche (section 3.1.5). Supposons que l'on introduise l'effectivité sur l'endommagement tangentiel, pilotée par la déformation normale autrement dit une effectivité non liée à la variable observable (ici  $\varepsilon_T$ ). On écrit :

$$\Psi_T^{mic} = \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \cdot (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)] \quad (3.75)$$

où  $\varepsilon_T^p$  est une déformation du cisaillement tangentielle irréversible permettant d'annuler l'énergie au passage ouvert/fermé. La fonction d'effectivité  $\alpha_T$  dépend d'une grandeur cinématique  $X$  quelconque. On écrit la dissipation à l'échelle du microplan sur la partie tangentielle sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \dot{\Psi}_T^{mic} \geq 0 \quad (3.76)$$

où  $\dot{\Psi}_T^{mic}$ , le taux d'énergie à l'échelle du microplan, s'exprime sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}_T^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_T^p} \dot{\varepsilon}_T^p \quad (3.77)$$

soit :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_T^{mic} &= \mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu_T \left[ \frac{\partial \alpha_T}{\partial X} d_T (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)^2 \right] \dot{X} \\ &\quad - \mu_T [(1 - \alpha_T(X) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\varepsilon}_T^p \end{aligned} \quad (3.78)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}_T^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - F_X \dot{X} - \mathbf{F}_T^P \dot{\varepsilon}_T^P \quad (3.79)$$

Sous l'hypothèse d'une effectivité non dissipative, le terme dissipatif dû à l'effectivité de l'équation 3.78 doit être nul quelque soit  $\dot{X}$ . Pour se faire, on choisit pour la fonction d'effectivité  $\alpha_T$  la fonction d'Heaviside  $H(X)$  pour gérer l'ouverture/fermeture en fonction du paramètre cinématique  $X$ . La dérivé de cette fonction est toujours nulle sauf à  $X = 0$ . Pour faciliter le raisonnement, supposons maintenant que  $X$  est une déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}^N$  normale au plan de fissure ( $\varepsilon_{eq}^N$  est une combinaison de la déformation volumique et de la projection du tenseur de déformation  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ ). On remarque alors que :

1. ( $\varepsilon_{eq}^N < 0$ )

Les microfissures sont fermées, l'endommagement n'est pas effectif.

2.  $(\varepsilon_{eq}^N > 0)$

Les microfissures sont ouvertes, l'endommagement est effectif.

3.  $(\varepsilon_{eq}^N = 0)$

Les microfissures sont fermées et l'endommagement n'est pas effectif. Afin d'annuler  $F_{eq}^N$  (et donc la dissipation due à la variation de  $X$ ) on réactualise  $\varepsilon_T^P$  à la valeur courante de la déformation tangentielle  $\varepsilon_T$  cet instant. Cette réactualisation a comme second effet d'annuler aussi  $\mathbf{F}_T^P$ .

Remarquons que pour cette dernière condition, la nullité de  $\varepsilon_{eq}^N$  impose celle des deux forces  $F_{eq}^N$  et  $\mathbf{F}_T^P$  qui pourraient être employées pour introduire un phénomène de frottement dans le modèle. Cet aspect n'étant pas l'objet de ce chapitre, nous renvoyons le lecteur à l'introduction du chapitre suivant et en annexe où une formulation avec frottement a été étudiée [B](#).

### 3.2.3 Critères et lois d'évolution de l'endommagement

À fonction d'effectivité bloquée, considérons maintenant la dissipation due à l'endommagement. En remplaçant les forces associées à l'endommagement dans l'équation [3.64](#), on obtient la dissipation dans le microplan. Elle est positive si la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{1}{2}k_V\alpha_V(X_V)\varepsilon_V^2\dot{d}_V + \frac{1}{2}\mu_D\alpha_D(X_D)\varepsilon_D^2\dot{d}_D + \frac{1}{2}\mu_T\alpha_T(X_T)\varepsilon_T \cdot \varepsilon_T\dot{d}_T \geq 0 \quad (3.80)$$

$\forall \dot{d}_V, \dot{d}_D, \dot{d}_T$

Les modules  $k_V$ ,  $\mu_D$  et  $\mu_T$  sont toujours positifs de même que le carré de chaque déformation. Il suffit donc que les fonctions d'effectivité et l'évolution de l'endommagement restent positives ou nulles pour satisfaire la relation précédente.

## 3.3 Identification des paramètres du modèle

Dans cette section et les suivantes, nous cherchons à déterminer le modèle d'endommagement *le plus simple possible* permettant de décrire le comportement de notre matériau. Dans un premier temps, supposons que l'effectivité du dommage n'est due qu'à la présence de porosité et que l'effectivité ne porte que sur la partie volumique du comportement. Pour des raisons de simplicité, on suppose que la fonction d'effectivité volumique  $\alpha_V(\varepsilon_V)$  est liée à sa variable observable  $\varepsilon_V$ . Les endommagements sur les parties déviatorique et tangentielle sont donc toujours effectifs. La loi d'état peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3}{4\pi}\rho_0 \int_{\Omega} \{k_V(1 - \alpha_V(\varepsilon_V)d_V)\varepsilon_V \mathbf{V} \\ &+ \mu_D(1 - d_D)\varepsilon_D \mathbf{D} + \mu_T(1 - d_T)\varepsilon_T \cdot \mathbf{T}\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Afin de simplifier le modèle, on choisit une fonction de Heaviside pour l'effectivité volumique  $\alpha_V(\varepsilon_V)$ .

### 3.3.1 Détermination des modules élastiques

Vial *et al.* [81] ont montré que la pression de confinement n'a plus d'effet sur le module de Young du matériau M1 au delà de 10 MPa, bien entendu tant que l'on reste en deçà de la pression de moulage (fig. 3.8). Nous allons donc considérer que tout le pré-dommage mis en évidence sur les micrographies est refermé à cette pression. Ainsi, la caractérisation du matériau à cette pression donne les caractéristiques élastiques du matériau non endommagé. L'essai triaxial avec un confinement de 10 MPa donne un module d'Young  $E^{H10} = 4300$  MPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0,4$  MPa. Ces valeurs induisent un module de compressibilité  $k^{H10} = 7167$  MPa et un module de cisaillement  $\mu^{H10} = 1535$  MPa (tableau 3.1). Les modules mesurés en compression simple ou sous un confinement de 5 MPa seront considérés comme affectés d'une pré-dommage auquel nous pourrions accéder.

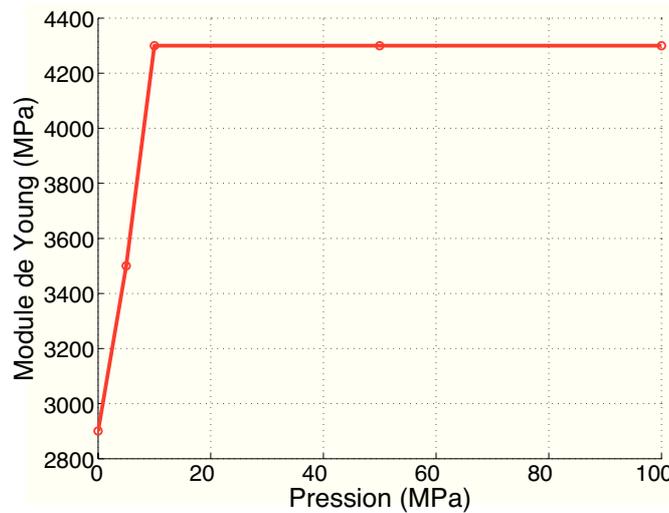


FIGURE 3.8 – Evolution du module de Young en fonction de la pression de confinement pour le matériau agrégataire M1 (Vial et al. [81]).

Le modèle 3.81 impose les relations suivantes pour les deux essais rapportés dans le tableau 3.1 :

$$\begin{cases} k_V^0 (1 - d_V^0) & = 3k^{CS} \\ k_V^0 & = 3k^{H10} \end{cases} \quad (3.82)$$

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

	$E$ (MPa)	$\nu$	$k$ (MPa)	$\mu$ (MPa)
Compression simple (exposant : CS)	2900	0,3	2416	1115
Compression triaxiale à 10 MPa de confinement (exposant : H10)	4300	0,4	7167	1535

TABLE 3.1 – Propriétés élastiques déduites des essais présentés au premier chapitre.

et

$$\begin{cases} 2\mu^{CS} &= \frac{2}{5}\mu_D^0 (1 - d_D^0) + \frac{3}{5}\mu_T^0 (1 - d_T^0) \\ \mu^{H10} &= \mu^{CS} \end{cases} \quad (3.83)$$

La seconde équation de 3.82 donne  $k_V^0 = 21500$  MPa. L'effectivité n'étant appliquée que sur la partie volumique du comportement, les modules de cisaillement en début d'essai CS et en début d'essai H10 doivent être identiques dans ce modèle. Ce n'est pas le cas lors des essais. Pour résoudre ce problème, il faudrait :

- Intégrer une effectivité fonction du changement de volume sur la partie déviatorique et tangentielle et gérer les problèmes de dissipation évoqués plus haut. Cette solution bride le choix des fonctions d'effectivité.
- Conserver ce verrou dans le modèle et reporter sur les lois d'évolution des dommages déviatorique et tangentiel la chute rapide du module de cisaillement lors d'un essai CS.

Nous optons pour la seconde approche qui permet de respecter « à moindre frais » le cadre thermodynamique. Afin de déterminer le module de compressibilité apparent en compression simple, on relie les modules d'élasticité longitudinal  $E_L$  et transversal  $E_T$  aux modules de compressibilité et de cisaillement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_L &= \frac{9k\mu}{3k+\mu} \\ E_T &= \frac{18k\mu}{3k-2\mu} \end{cases} \quad (3.84)$$

Connaissant les modules en début d'essai triaxial H10 ( $k^{H10}$  et  $\mu^{H10}$ ), sachant que  $\mu^{H10} = \mu^{CS}$  et que les modules en début d'essai de compression simple doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} E_L^{CS} &\leq E_L^{H10} \\ E_T^{CS} &\leq E_T^{H10} \end{cases} \quad (3.85)$$

il est possible de déterminer numériquement une valeur approchée du module de compressibilité en début de compression simple (fig. 3.9).

Le problème impose donc  $k^{CS} \in [5740, 7220]$  MPa. Pour  $k^{CS} = 5740$  MPa, on obtient  $E_L^{CS} = 4230$  MPa et  $E_T^{CS} = 10750$  MPa. Pour  $k^{CS} = 7220$  MPa, on obtient  $E_L^{CS} = 4300$  MPa et  $E_T^{CS} = 10375$  MPa. Finalement, les modules longitudinaux et

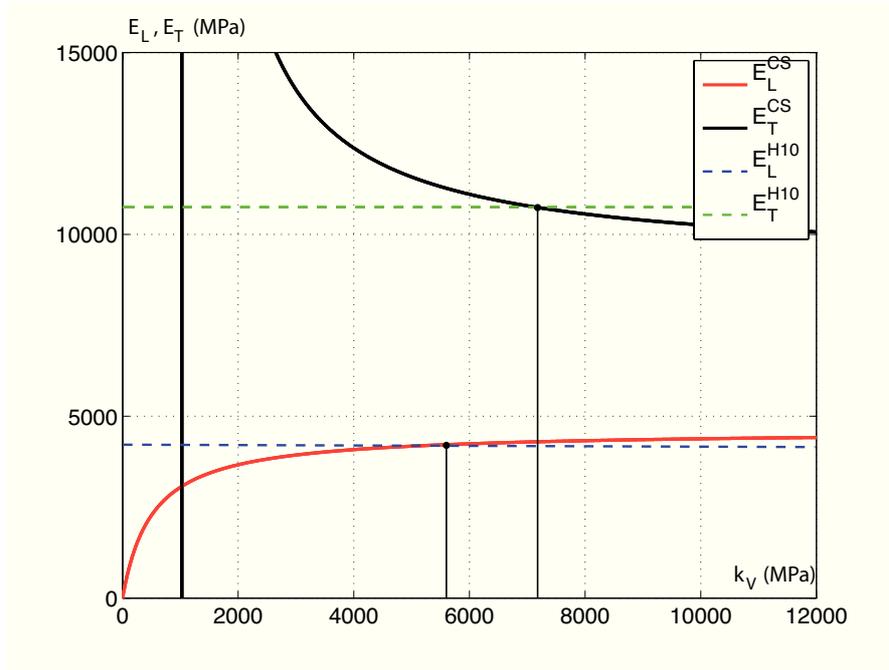


FIGURE 3.9 – Evolution des modules longitudinal et transversal en fonction du module de compressibilité en compression simple.

transversaux sont peu différents quel que soit le choix du module de compressibilité. On observe aussi que le module longitudinal en début d'essai CS est très proche, voir égal, au module à l'origine de l'essai H10. Ne disposant pas de la courbe pression-changement de volume, nous choisissons volontairement d'accentuer sa non linéarité en posant  $k^{CS} = 5740$  MPa. On déduit la valeur du pré-dommage :

$$d_V^0 = 1 - \frac{k^{CS}}{k^{H10}} = 1 - \frac{5740}{7167} = 0,2 \quad (3.86)$$

Nous simplifions le modèle, au moins pour l'état initial en supposant l'égalité des modules de cisaillement et des pré-dommages déviatorique et tangentiel  $\mu_D^0 = \mu_T^0$  et  $d_D^0 = d_T^0$ . Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, une évolution positive du coefficient de contraction impose le respect de la condition  $d_V^0 \leq 2d_D^0$ . N'ayant pas à notre disposition d'essais de torsion sur M1, on pose arbitrairement  $d_D^0 = 0,1$ . On déduit alors  $\mu_D^0 = \mu_T^0 = 3070$  MPa.

### 3.3.2 Lois d'endommagement

Une difficulté lors de l'identification des modèles microplans est que la réponse globale est issue d'une sommation des réponses élémentaires sur chaque plan. Il en résulte que cette réponse globale peut être différente de la réponse « locale ». Il faut

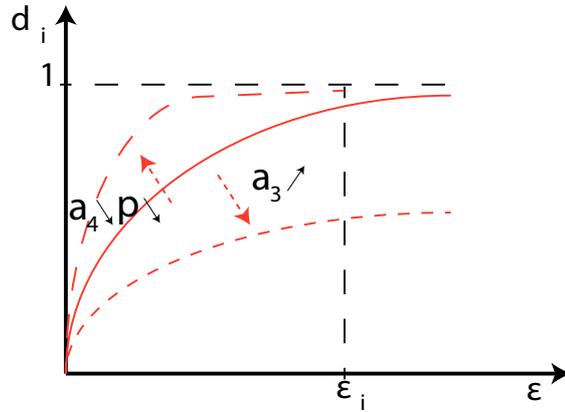


FIGURE 3.10 – Loi d'évolution du dommage.

donc postuler des comportements élémentaires et regarder ensuite quelles en sont les conséquences une fois la réponse de tous les plans assemblés sous la forme du tenseur des contraintes.

Nous supposons que les endommagements évoluent en fonction des forces thermodynamiques associées calculées à partir de l'énergie libre. A l'image du modèle proposé par Bazant *et al.*, nous ajoutons une dépendance de la loi d'endommagement au changement de volume. Les lois d'évolutions sont données par les relations ci-dessous :

$$d_i(F^{d_i}, p) = \max_t \left( d_i^0, 1 - \exp \left( -p \left[ a_3 F^{d_i} \right]^{a_4} \right) \right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq d_i \leq 1 \quad (3.87)$$

$$p = 1 + a_5 k_V^0 < \varepsilon_V - \varepsilon_{V0}^{H10} >_+ \quad (3.88)$$

où  $d_i^0$  est égal au pré-dommage du matériau ( $i$  remplace les indices  $V$ ,  $D$  ou  $T$ ), et  $a_3$ ,  $a_4$  et  $a_5$  sont des paramètres à identifier.  $\varepsilon_{V0}^{H10}$  est la valeur de la déformation volumique (négative) atteinte après une compression isostatique à 10 MPa de confinement. Ainsi,  $p = 1$  au début de la phase de compression de l'essai H10 ( $\varepsilon_V = \varepsilon_{V0}^{H10}$ ) et  $p \gg 1$  en début d'essai de compression simple sans confinement. La figure 3.10 illustre l'effet des paramètres sur l'évolution de l'endommagement.

La rigidité du matériau étant la somme des rigidités endommagées dans chaque direction, il est impossible de déduire des mesures directes les valeurs des trois paramètres  $a_3$ ,  $a_4$  et  $a_5$ . Les paramètres ( $a_3$ ,  $a_4$ ) sont tout d'abord déterminés par méthode inverse sur la courbe H10 dont on cherche à reproduire la non linéarité. Puis, on détermine  $a_5$  en recalant les courbes CS. Le tableau 3.2 résume les valeurs des modules et des paramètres après identification.

### 3.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

$k_V^0$ (MPa)	$\mu_D^0 =$ $\mu_T^0$ (MPa)	$d_V^0$	$d_D^0 =$ $d_T^0$	$a_3$ (MPa <sup>-1</sup> )	$a_4$	$a_5$ (MPa <sup>-1</sup> )	$\varepsilon_V^{H10}$
21500	3070	0,2	0,1	8	$\frac{2}{3}$	0,25	$4,65 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.2 – Premier jeu de paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1.

#### 3.3.3 Réponse contrainte-déformation pour un microplan

On se place ici au niveau d'un seul microplan. On impose dans un premier temps une traction hydrostatique puis on décharge avant de comprimer de façon hydrostatique (fig. 3.11). Durant cet essai fictif, rien n'évolue dans les parties déviatorique et tangentielle du comportement. Durant la première phase, le dommage évolue de 0,2 (valeur de pré-dommage) jusqu'à 0,64 en fin de traction. L'endommagement est totalement effectif ( $\alpha_V = 1$ ) car la déformation volumique est positive. Lors de la décharge, l'endommagement n'évolue plus. Pendant la compression hydrostatique, l'endommagement n'est plus effectif ( $\alpha_V = 0$ ). Le module initial est donc retrouvé et n'évolue pas.

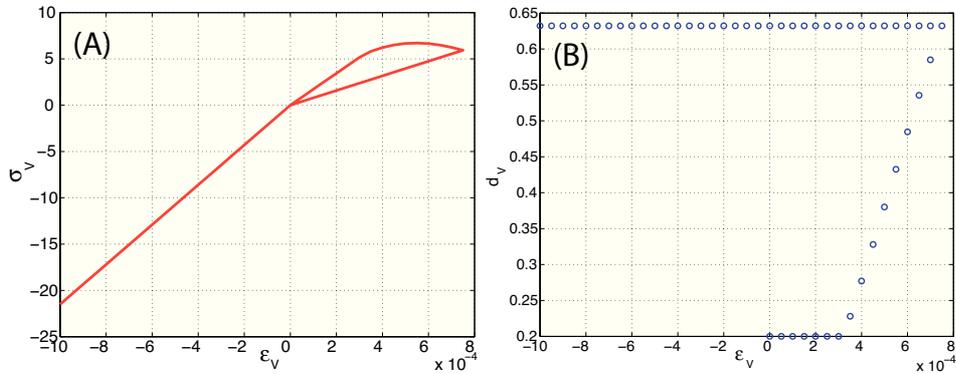


FIGURE 3.11 – Réponse volumique contrainte-déformation et évolution de l'endommagement  $d_V$  en fonction de la déformation volumique  $\varepsilon_V$ .

Sur la partie déviatorique, l'endommagement est toujours effectif. La figure 3.12 montre qu'une traction normale au plan et à volume constant ( $\varepsilon_D$  évolue seul) produit aussi une courbe en cloche en fonction de la loi d'endommagement. La décharge et la compression à volume constant ne se traduisent pas par une reprise de raideur au passage de l'origine des axes. Lorsque le seuil d'endommagement est retrouvé en compression, l'endommagement reprend son évolution. La différence entre les courbes rouge et verte concerne la valeur de la déformation volumique (constante lors des calculs). Pour la courbe rouge, elle est nulle. Pour la courbe verte, elle cor-

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

respond à  $\varepsilon_V^{H10}$  la déformation volumique obtenue avec un confinement de 10 MPa. La courbe rouge montre un endommagement plus important. Notons que la réponse de la partie tangentielle du modèle donnera les mêmes courbes lors d'un chargement purement tangentiel.

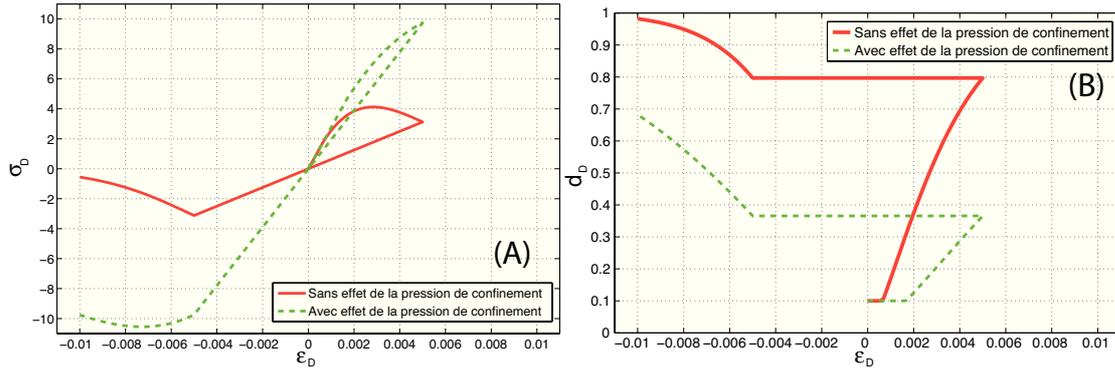


FIGURE 3.12 – Réponse contrainte-déformation déviatorique et évolution de l'endommagement  $d_D$  en fonction de la déformation déviatorique  $\varepsilon_D$ . La courbe rouge correspond à une déformation volumique nulle et la courbe verte à une déformation volumique égale à  $\varepsilon_V^{H10}$ .

## 3.4 Simulation des essais sur le matériau M1 et adaptation du modèle

Après l'identification des paramètres du comportement et l'étude de la réponse d'un microplan, le modèle est maintenant appliqué aux essais réalisés sur le matériau M1 et présentés dans le premier chapitre. Nous verrons que la simulation des essais alternés imposera une modification du modèle.

### 3.4.1 Simulation des essais monotones

Les figures 3.13 et 3.14 présentent les comparaisons entre expériences et simulations (calculs MATLAB) pour les essais de compression simple, de traction et de compression triaxiale à 5 et 10 MPa de confinement. On remarque que l'essai triaxial à 10 MPa est bien reproduit. On profite ici du fait qu'à 10 MPa, les paramètres ont été déduits directement des essais et que l'effectivité est nulle. Par contre, la réponse pour un confinement de 5 MPa varie peu de celle obtenue à 10 MPa. L'influence de la pression n'étant pas parfaitement traduite, il faudra revoir l'identification de  $a_5$  ou la forme de la loi choisie pour  $p$ . On constate que malgré les grosses approximations

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

que nous avons faite suite au « verrou » qu'impose le modèle sur les modules de cisaillement, les pieds de courbes sont bien représentés pour tous les essais. Durant la compression, l'endommagement atteint sa valeur maximale dans les directions où la déformation normale projetée est positive (la normale au plan est perpendiculaire à la direction de compression), . Dans les autres directions, soit l'endommagement évolue moins rapidement, soit il reste bloqué à la valeur du pré-dommage. L'effet du dommage sur la rigidité globale est même annulé par l'effectivité pour les fissures dont la normale est parallèle à la direction de compression.

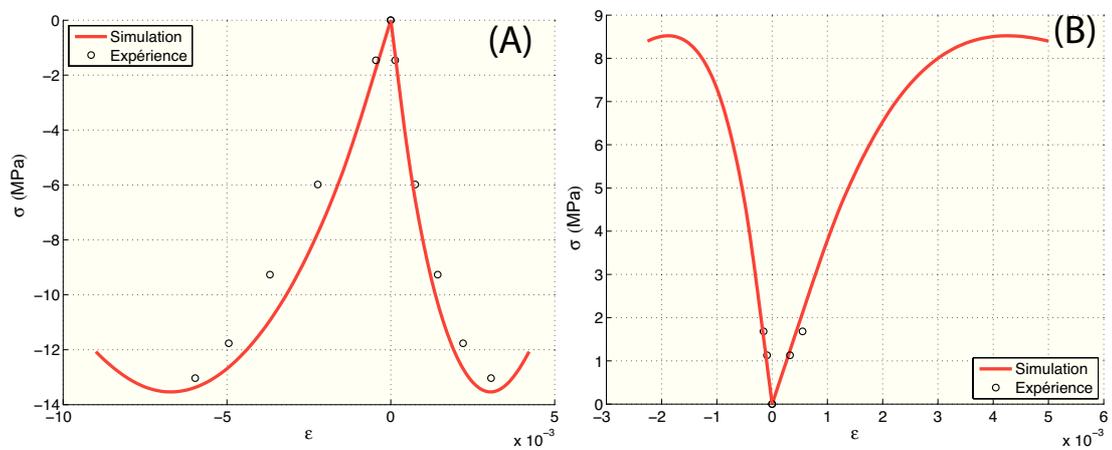


FIGURE 3.13 – Simulation des essais monotones de compression simple (A) et de traction simple (B) pour le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres..

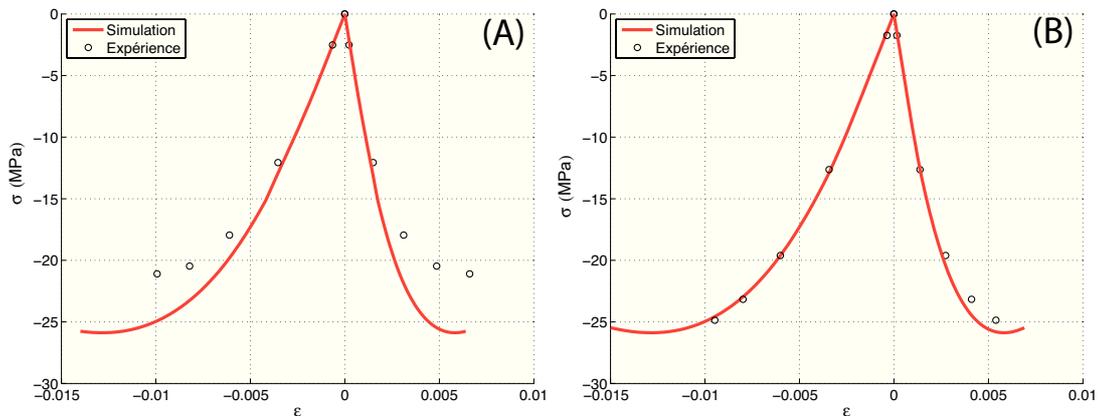


FIGURE 3.14 – Simulation des essais monotones de compression à 5 MPa (A) et 10 MPa (B) de confinement sur le matériau agrégataire M1 et le premier jeu de paramètres.

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

La figure 3.13 (B) présente la simulation d'un essai de traction. Si les modules à l'origine sont bons, la contrainte maximale est mal reproduite car l'endommagement n'évolue pas assez vite lors de cet essai. La dissymétrie de comportement entre traction et compression simple n'est donc pas maîtrisée. Rappelons toutefois que les lois d'endommagement ont été identifiées à partir d'essais de compression. Pour cela, distinguons maintenant deux lois d'évolution des endommagements en fonction du signe de la déformation volumique. Lorsqu'elle est négative ou nulle (respectivement positive), le paramètre  $a_5$  de l'équation 3.88 vaut  $a_5 = 0,25$  (resp.  $a'_5 = 1,5$ ). Donc le paramètre qui permet de tenir compte de la pression de confinement devient :

$$p = 1 + [a_5 H(-\varepsilon_V) + a'_5 H(\varepsilon_V)] k_V^0 < \varepsilon_V - \varepsilon_{V0}^{H10} >_+ \quad (3.89)$$

Finalement, cette démarche reproduit le modèle de Mazars où deux modes d'endommagement sont proposés. Par contre, pour nous, il s'agit de deux vitesses appliquées pour chaque microplan alternativement selon que l'on le soumet à une tension ou à une compression volumique. Avec cette adaptation du modèle d'endommagement, la nouvelle courbe de traction est donnée sur la figure 3.15.

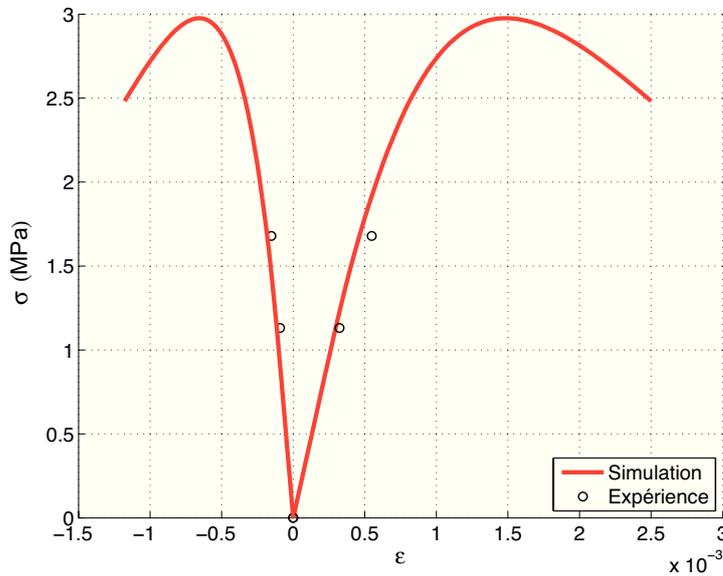


FIGURE 3.15 – Simulation de l'essai de traction simple avec une évolution adaptée au chargement de tension (second jeu de paramètres où  $a_5 = 1,5$ ).

### 3.4.2 Simulation des essais alternant traction et compression

#### 3.4.2.1 Traction puis compression

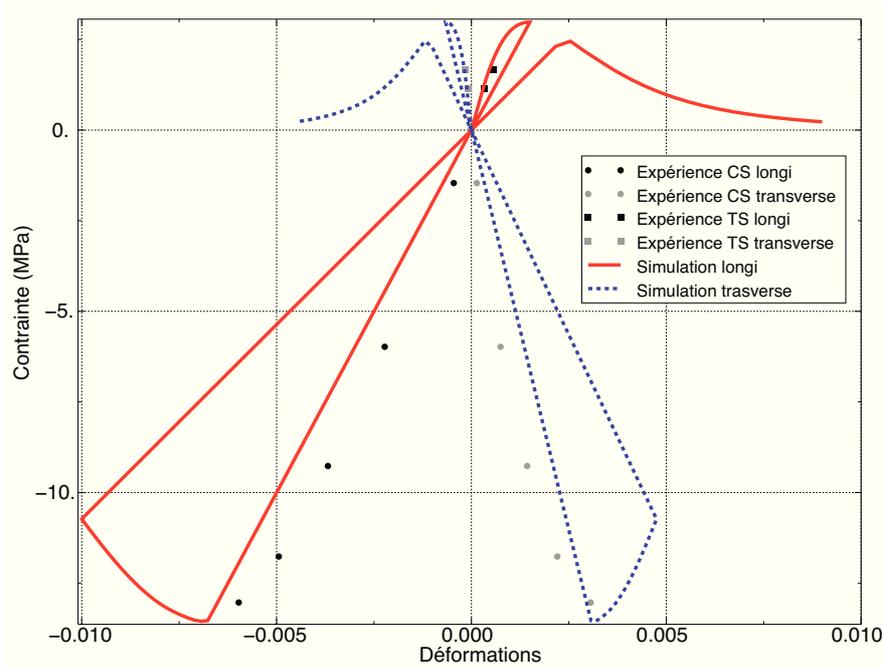


FIGURE 3.16 – Simulation, avec le second jeu de paramètres, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1. Les points expérimentaux rapportés sur la figure correspondent aux réponses expérimentales obtenues après les essais monotones correspondants.

La figure 3.16 présente la réponse contrainte-déformation pour un cycle traction-décharge-compression-décharge. En fin de première décharge, le module endommagé est égal à 2080 MPa. Le module subit une légère hausse de sa valeur pour atteindre 2115 MPa. Cette hausse est faible car elle n'est la conséquence que de l'effectivité sur la partie volumique de la loi de comportement. Afin d'étudier comment ajuster la reprise de raideur, nous avons calculé analytiquement l'équation reliant le module longitudinal global à la réponse d'un système contenant quatre familles de fissure (fig. 3.17). Le choix de ce système est justifié par (1) la difficulté de calculer ce module analytiquement pour un nombre important de systèmes de microfissures et (2) la nécessité de travailler avec un nombre suffisant de famille pour décrire les mécanismes d'ouverture-fermeture. Enfin, nous nous plaçons à l'origine c'est à dire dans un état où seuls les pré-dommages existent afin d'analyser l'effet de la direction de chargement depuis l'état au repos.

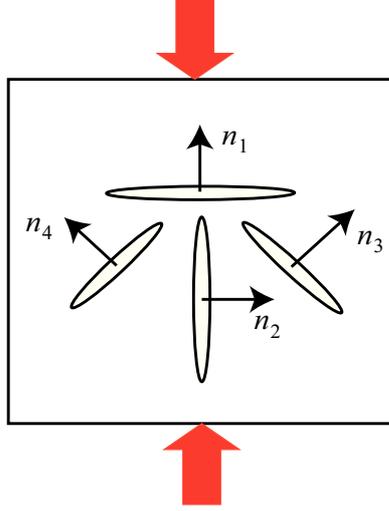


FIGURE 3.17 – Schématisation de la distribution des 4 systèmes de microfissures.

La démarche analytique consiste à :

- calculer la rigidité endommagée par ces 4 systèmes de microfissures,
- inverser cette rigidité pour obtenir la souplesse,
- inverser le premier terme de la souplesse pour revenir à l'expression du module longitudinal.

Le module longitudinal est donné par la relation suivante (l'exposant « 0 » désignant les pré-dommages est volontairement supprimé pour alléger l'expression) :

$$E_L = \frac{\mu (3 - 4(2 - d_D) d_D) (-16\mu d_D + 3k(3 - d_V))}{3(3k + \mu) - d_D(9k + 24\mu - 20\mu d_D) - 3k(1 - d_D) d_V} \quad (3.90)$$

Pour quantifier l'effet de l'endommagement volumique et déviatorique sur le module d'Young à l'origine, nous avons tracé l'évolution du rapport du module longitudinal sur le module du matériau sain en fonction de valeurs fictives pour  $d_V$  et  $d_D$ . On observe sur la figure 3.18 que le dommage volumique a peu d'effet sur le rapport des modules, et donc sur la reprise de raideur. En revanche,  $d_D$  a beaucoup d'influence sur le rapport des modules. Cette étude illustrative nous incite donc à introduire l'effectivité aussi sur la partie déviatorique. Le modèle est modifié comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{3}{4\pi} \rho_0 \int_{\Omega} [k_V (1 - \alpha_V (\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V] \mathbf{V} \\ &+ [\mu_D (1 - \alpha_D (\varepsilon_D) d_D) \varepsilon_D] \mathbf{D} + [\mu_T (1 - d_T) \boldsymbol{\varepsilon}_T] \cdot \mathbf{T} d\Omega \end{aligned}$$

L'analyse de la courbe 1.29 du premier chapitre montre une reprise partielle de la raideur initiale. Rappelons toutefois que les effets visqueux n'ont pas été éliminés

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

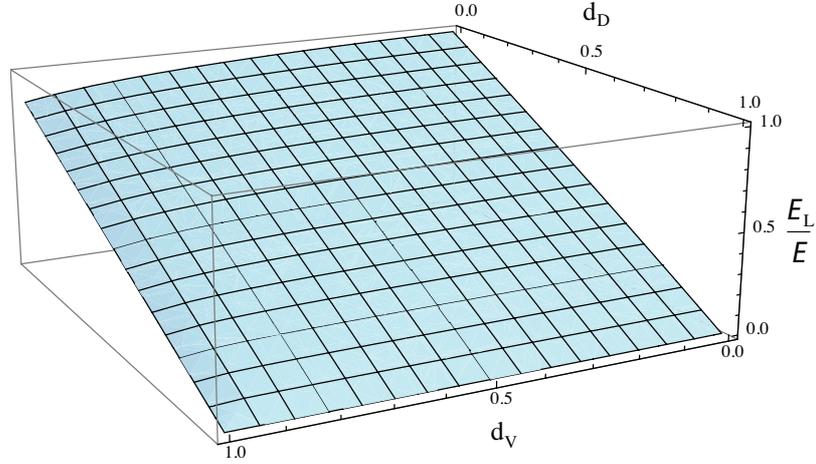


FIGURE 3.18 – Variation du rapport du module longitudinal endommagé sur le module sain en fonction des dommages  $d_V$  et  $d_D$  des 4 systèmes de microfissures.

de ces courbes car ces essais alternés n'intégraient pas des phases de relaxation et fluage. Nous avons remarqué lors des calculs qu'il est possible de régler l'ampleur de la reprise de raideur en admettant une faible perte d'effectivité. Par exemple, la loi ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon_D \leq 0 & \Rightarrow \alpha(\varepsilon_D) = a_6 = 0,5 \\ \varepsilon_D > 0 & \Rightarrow \alpha(\varepsilon_D) = 1 \end{cases} \quad (3.91)$$

induit une reprise de raideur partielle (le module initial n'est pas récupéré en totalité) au passage traction-compression. On dispose donc d'un moyen simple pour régler le modèle (la valeur de  $a_6$  n'a pas été optimisée). La simulation de l'essai cyclé, avec ce troisième jeu de paramètres, permet de tracer la figure 3.19. Le module longitudinal endommagé en fin de traction est égal à 2400 MPa. Au début du chargement en compression simple, le module longitudinal devient égal à 2700 MPa, soit une reprise de 12 %. Le niveau de contrainte maximale est plutôt satisfaisant en traction comparé à l'expérience. Par contre, la courbe est trop raide en compression simple. Pour retrouver un comportement satisfaisant, il a suffi de modifier le paramètre  $a_3$  ( $a_3 = 12$ ). On obtient ainsi le quatrième et dernier jeu de paramètres.

La figure 3.20 illustre comment un microplan réagit maintenant lorsqu'il subit une sollicitation normale au plan à volume constant et sans déformation tangentielle. Les niveaux de contraintes maximum en compression sont nettement différents par rapport à la courbe 3.12 précédente. Dans les deux courbes (avec ou sans l'effet de la pression) et au début de la compression simple, les modules de cisaillement déviatoriques  $\mu_{D_1}^{CS}$  et  $\mu_{D_2}^{CS}$  sont différents du module initial  $\mu_{D_1}^{TS}$  et du module en fin

de traction  $\mu_{D_2}^{TS}$ .

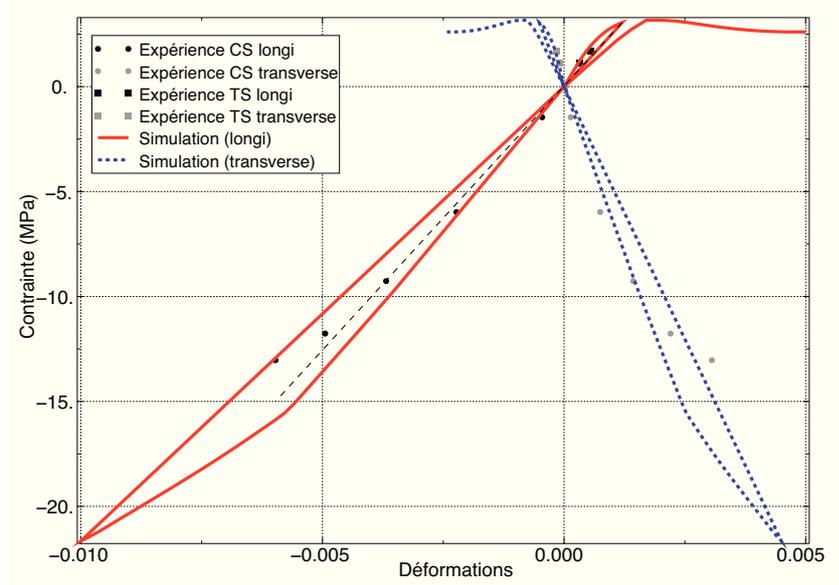


FIGURE 3.19 – Simulation, avec le troisième jeu de paramètres, d’un cycle de traction suivi d’une compression sur le matériau agrégataire M1. (trait pointillé noir) Module longitudinal endommagé par la première charge de traction.

Avec ces nouveaux paramètres, on simule l’essai de traction suivi d’une compression simple (figure 3.21). On remarque une nette amélioration au niveau de la contrainte maximale. L’allure de la courbe est plutôt satisfaisante comparée à l’expérience. Finalement, cette étude montre que l’on dispose de deux réglages. Le paramètre  $a_6$  permet de régler les reprises de raideur quand la loi d’évolution du dommage induit la non linéarité du comportement. Ce dernier effet ne doit pas dominer aux faibles charges sous peine d’inhiber l’effet de  $a_6$ .

### 3.4.2.2 Simulation d’un cycle de compression-traction

Pour une comparaison qualitative avec les essais expérimentaux réalisés sur le matériau M1, on propose de simuler un cycle de compression simple suivi d’une décharge, puis d’une traction (fig. 3.22). On remarque un changement de pente entre la décharge de compression et le passage en traction simple comme constaté expérimentalement. En effet le module en fin compression est de 2016 MPa. Au passage en traction le module est de l’ordre de 1864 MPa. Ce qui fait une diminution de module de l’ordre de 8 %.

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

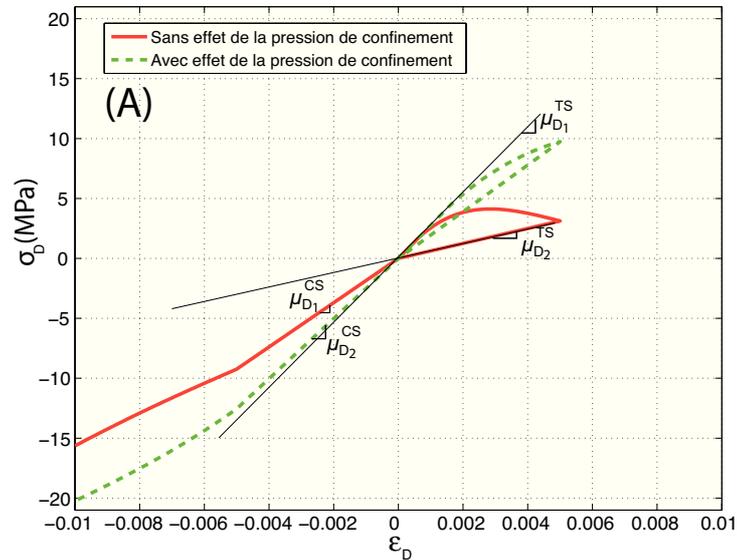


FIGURE 3.20 – Réponse déviatorique contrainte-déformation en fonction de  $\varepsilon_D$  avec une effectivité de 0,5 à la fermeture des microfissures.

$k_V^0$ (MPa)	$\mu_D^0 = \mu_T^0$ (MPa)	$d_V^0$	$d_D^0 = d_T^0$	$a_3$ (MPa <sup>-1</sup> )	$a_4$	$a_5$ ou $a'_5$ (MPa <sup>-1</sup> )	$\varepsilon_V^0$
21500	3070	0,2	0,1	12	$\frac{2}{3}$	0,25 ou 1,5	$4,65 \cdot 10^{-4}$

TABLE 3.3 – Tableau final des paramètres du modèle VDT avec effet unilatéral pour le matériau agrégataire M1.

Cette diminution de module est due à la réouverture des défauts existants ou créés lors du chargement en compression. Ce mécanisme est pris en compte ici par les fonctions d'effectivité  $\alpha_D$  et  $\alpha_V$ .

#### 3.4.3 Confrontation du modèle à l'expérience avec le jeu de paramètres final

On rappelle le tableau 3.3 des paramètres réactualisés après la prise en compte de l'effectivité sur la partie déviatorique  $\alpha_D$ .

On re-simule les essais monotones de traction simple et compression simple et sous 5 et 10 MPa de confinement avec ce jeu de paramètres (figure 3.23). On remarque que les courbes des simulations des essais monotones suivent bien les courbes expé-

3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

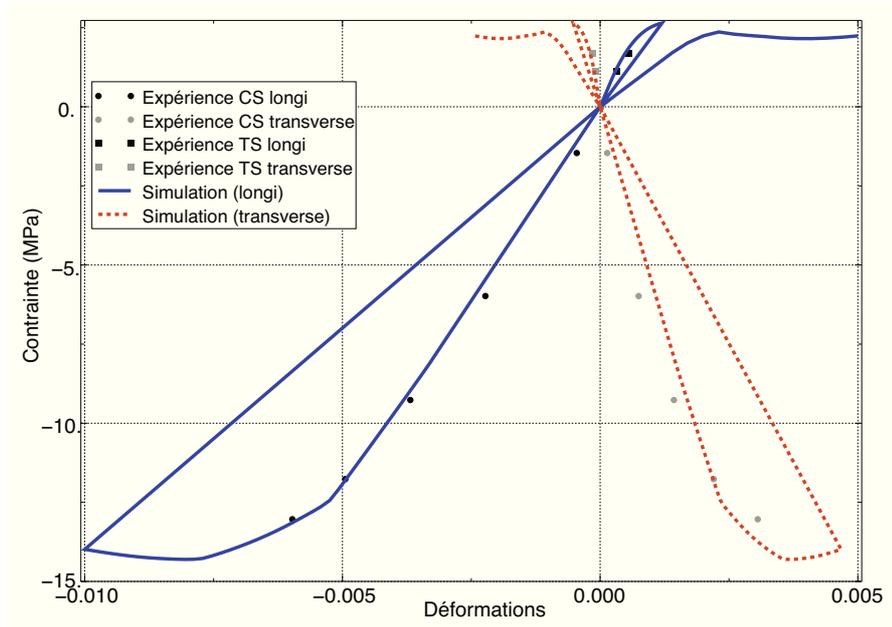


FIGURE 3.21 – Simulation, avec le jeu de paramètre final, d'un cycle de traction simple suivi d'une compression sur le matériau agrégataire M1.

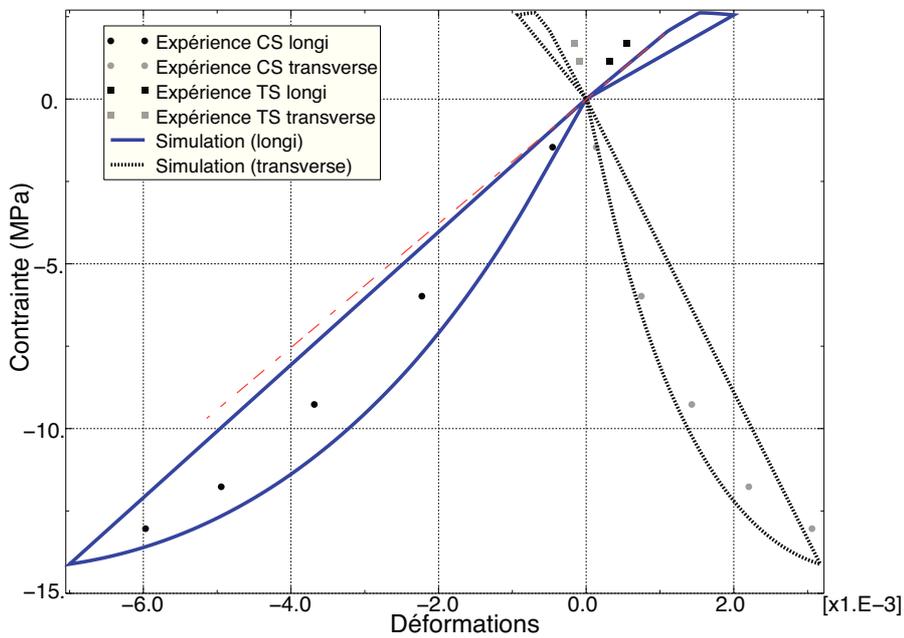


FIGURE 3.22 – Simulation d'un cycle de compression simple suivi d'une traction sur le matériau agrégataire M1.

rimentales.

### 3.4. SIMULATION DES ESSAIS SUR LE MATÉRIAU M1 ET ADAPTATION DU MODÈLE

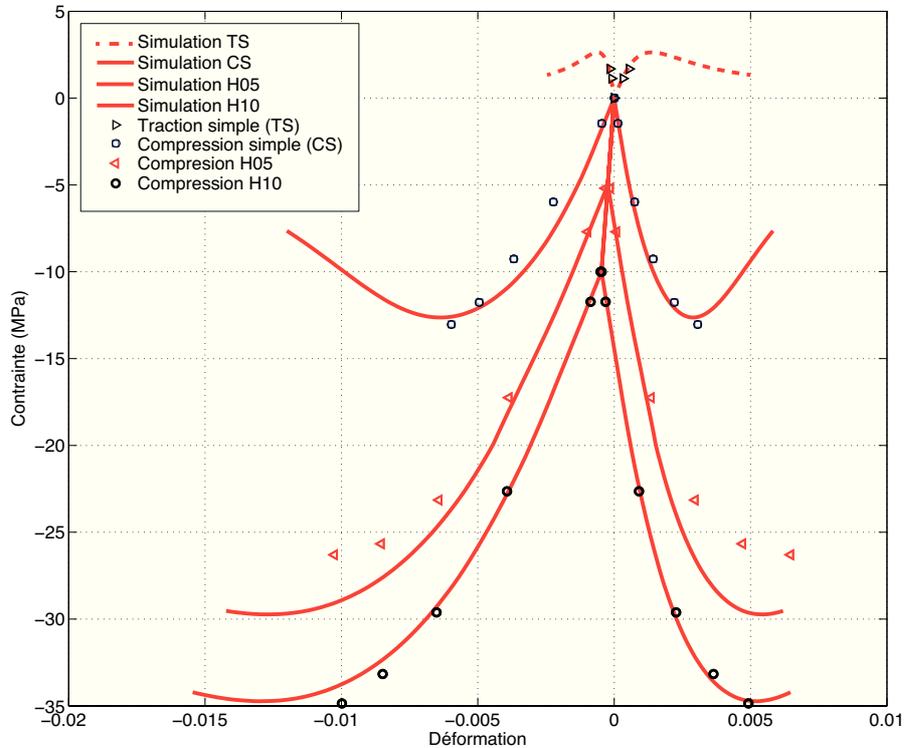


FIGURE 3.23 – Simulation des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1.

Dans le premier chapitre, on a tracé l'évolution des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée (fig. 1.26) pour quantifier l'évolution des modules en fonction de l'endommagement. On propose de confronter la réponse du modèle à ses résultats expérimentaux. Les figures 3.24 (A) et (B) représentent respectivement l'évolution des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée. Le modèle prédit bien la dégradation de ces modules dans tous les essais.

Les figures 3.25 (A) et (B) représentent, respectivement, la dégradation des rigidités longitudinales et transversales. Sur la figure 3.25 (A), on remarque que les courbes expérience de traction simple et compression simple sont groupées avec les courbes simulation. Cependant l'évolution de la dégradation en compression simple en simulation reste nettement supérieure à celle en expérience. Les courbes de compression avec confinement sont aussi regroupées avec l'expérience au pied des courbes. Par contre l'évolution reste aussi forte en simulation par rapport à l'expérience. On peut déduire que il reste un affinement des paramètres d'évolution pour confondre l'évolution en simulation avec celle en expérience sur ce module longitudinal.

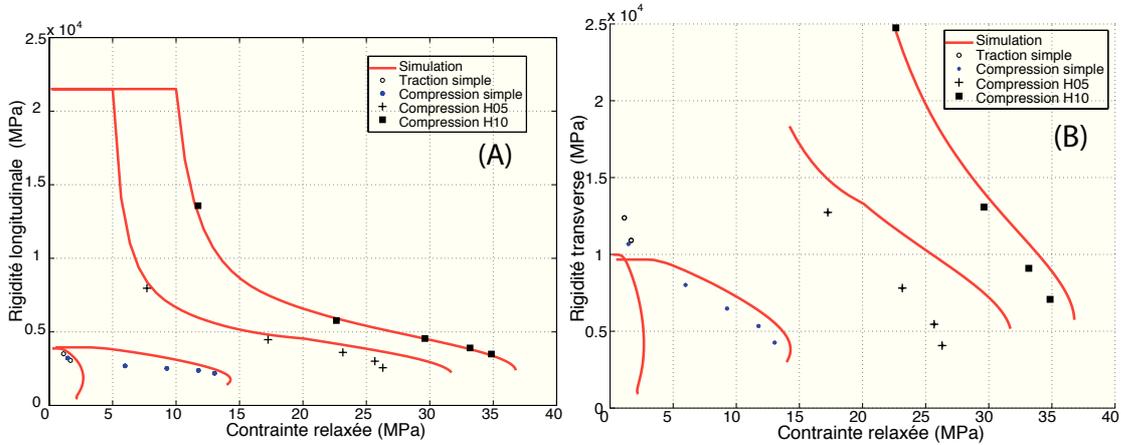


FIGURE 3.24 – Évolution des rigidités élastiques longitudinales et transversales en fonction de la contrainte relaxée, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple, compression simple et compression sous 5 et 10 MPa de confinement sur le matériau agrégataire M1.

La figure 3.25 (B) décrit l'évolution de la dégradation du module transversal. Mise à part l'essai de compression à 5 MPa de confinement, on observe une concordance entre les courbes de la simulation et les courbes expérience. On note que l'effet de la pression de confinement est introduit de façon linéaire dans la loi d'évolution du dommage. En perspective, une modification sur la manière d'introduire l'effet de la pression permettra d'affiner la prédiction du modèle.

## 3.5 Simulations prospectives

### 3.5.1 Cycle de compression-traction avec 10 MPa de confinement

La simulation commence par un confinement de 10 MPa puis une compression suivi d'une décharge et, ensuite, d'une traction. (fig. 3.26). On remarque deux changements de pente; le point (1) 10 MPa de confinement et le point (2) à contrainte nulle lors du passage en traction. Le premier correspond au point où l'effectivité de dommage s'active et le deuxième point correspond à l'effet de la pression qui n'est pas pris en compte en traction.

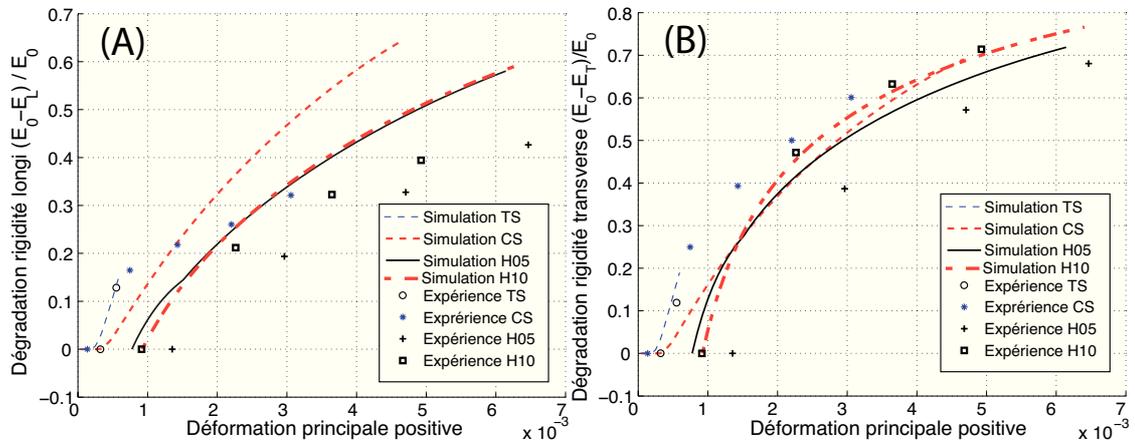


FIGURE 3.25 – Degré de dégradation des raideurs longitudinales et transversales en fonction de la déformation élastique principale positive, confrontation simulation-expérience des essais de traction simple (TS), compression simple (CS) et compression sous 5 et 10 MPa de confinement (H05 et H10) sur le matériau agrégataire M1.

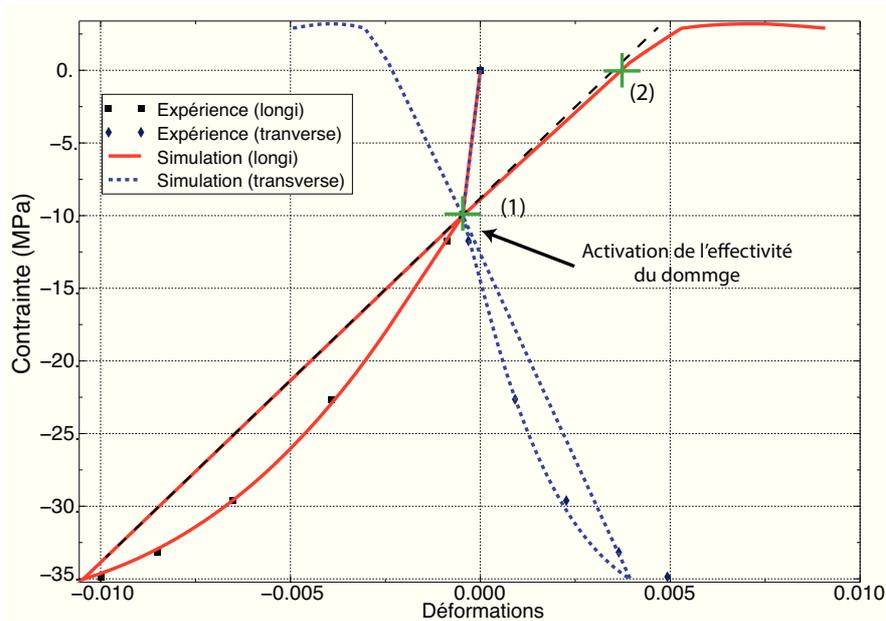


FIGURE 3.26 – Simulation d'un confinement de 10 MPa puis d'une compression suivie d'une décharge.

### 3.5.2 Sollicitation de cisaillement pure

Les réponses à des essais de torsion avec ou sans confinement sont données sur la figure 3.27. On constate que le modèle ne permet pas de reproduire un module élastique de cisaillement initial dépendant de la pression de confinement. On re-

trouve par contre l'effet du confinement sur la forme des courbes et notamment les contraintes de cisaillement maximales atteintes. Pour intégrer plus de non linéarité dans les courbes de cisaillement, la loi d'évolution de l'endommagement tangentiel pourrait être adaptée, par exemple en amplifiant l'effet de la variable  $P$ , connaissant la réponse en cisaillement du matériau. Ces essais font actuellement défaut.

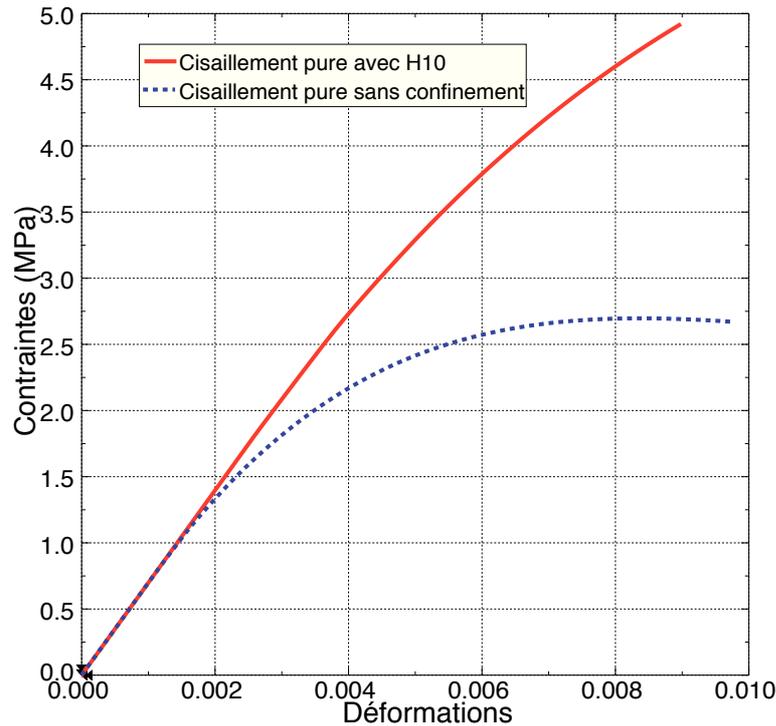


FIGURE 3.27 – Simulation d'un essai de cisaillement pure avec ou sans confinement de 10 MPa sur le matériau agrégataire M1.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons implémenté deux mécanismes d'effectivité dans le modèle VDT en respectant le cadre thermodynamique. Pour obtenir une dissipation nulle, ces mécanismes ne sont gouvernés que par les déformations qui leur sont associées. Ce choix induit le « verrou » analytique suivant : le module de cisaillement à l'origine n'est pas fonction de la pression de confinement. Pour valider ou non cette hypothèse, nous préconisons de réaliser des essais de cisaillement sous confinement. De simples fonctions Heaviside ont été employées pour gérer les variations de raideurs sur chaque microplans. Notons que pour l'endommagement déviatorique,

nous pouvons piloter une perte partielle d'effectivité, et donc la reprise partielle de module, au passage traction-compression. Puisqu'aucun mécanisme dissipatif n'est introduit, les variations brusques de raideurs se font à déformation élastique nulle pour annuler le saut de contrainte résultant de la variation de rigidité.

Pour les chargements de compression, l'effet du confinement a été pris en compte dans l'évolution du dommage. Cela nous a permis d'identifier le modèle sur l'essai triaxial H10 puis de traduire le comportement observé en compression simple. A l'image de ce qui a été proposé dans certains modèles pour les bétons, nous avons intégré deux lois d'endommagement pour maîtriser la dissymétrie traction-compression. Une fois déterminés les pré-dommages, le modèle n'est régi que par 5 paramètres dont 4 règlent l'évolution des trois variables d'endommagement et le dernier la perte partielle d'effectivité. Les paramètres sont donnés dans le tableau [3.3](#).

Le comportement du matériau décrit au premier chapitre montre l'existence de phénomènes irréversibles. Leur prise en compte est l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 4

## Modèle VDT avec effectivité et plasticité

Les essais mentionnés dans le premier chapitre mettent en évidence des déformations irréversibles en fin de chargement. Elles pourraient provenir de la déformation irréversible des cristaux ou d'un mouvement relatif des grains.

Trois possibilités se présentent à nous pour intégrer une composante de plasticité dans le modèle :

1. Modéliser le mécanisme de frottement interne s'est, dans une décomposition V-D-T, intégrer une déformation plastique tangentielle. Le frottement n'étant actif que si les microfissures sont refermées, il faut donc ajouter un scalaire  $\alpha_T$  pour tenir compte de l'état de fermeture ou non des microfissures. Cet état étant piloté par la déformation normale à la microfissure, nous avons vu au chapitre précédent que  $\alpha_T$  doit faire intervenir une déformation « stockée » pour annuler le saut de contrainte lors du changement d'état. On peut donc imaginer un modèle où la déformation « stockée », réactualisée lors de la fermeture, évolue ensuite par un mécanisme de frottement. L'idée s'inspire des travaux de Bargellini *et al.* [2].
2. La seconde possibilité consiste à introduire une déformation plastique décomposée en parties volumique, déviatorique et tangentielle dans chaque microplan [18][49][58]. Cette approche n'interfère pas avec les variables d'effectivité. L'identification des paramètres ne peut être réalisée de façon directe et requière une méthode inverse.
3. La plasticité est supposée isotrope en contraintes effectives. Le modèle développé au chapitre précédent fournit le tenseur de rigidité anisotrope endommagé permettant de calculer les contraintes effectives. C'est cette solution qu'on a choisit. On se base sur les travaux de V.D. Le [56] pour lequel tous les dépouillements expérimentaux ont déjà été effectués.

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord comment les essais ont été interprétés

par V.D. Le [56]. Les loi d'écroûissage et le phénomène de dilatance ont été identifiés sur ces essais et une modélisation phénoménologique en est proposée. Dans la seconde section, nous montrons comment le modèle d'élasticité avec endommagement anisotrope et effet unilatéral est enrichi par une composante de plasticité. Nous détaillons notamment l'algorithme numérique mis en place pour intégrer la loi de comportement dans une routine utilisateur UMAT pour le code aux éléments finis Abaqus/Standard. Enfin, dans le cadre d'une prospection, le chapitre se termine sur la simulation de quelques uns de nos essais.

## 4.1 Rappel des observations expérimentales et adaptation du modèle proposé par Le [56]

Dans le premier chapitre, nous avons montré comment les essais ont été analysés pour retrancher la composante visqueuse du comportement et identifier la composante élastique endommageable. Connaissant la déformation résiduelle après recouvrance pour chaque cycle de charge/décharge, il est maintenant possible de s'intéresser à la plasticité. La différence principale avec la méthode proposée par V.D. Le réside dans le découplage que nous imposons entre endommagement et plasticité à travers un tenseur des contraintes effectives.

### 4.1.1 Seuil de plasticité

L'analyse des courbes contrainte-déformation permet difficilement d'identifier la perte de linéarité initiale. Nous supposons ici que le seuil d'élasticité initial est faible. Cependant, les déformations plastiques sont négligées pour le premier cycle sur chaque essai (rappel : le premier cycle relaxation-décharge-recouvrance est supposé élastique et sert à identifier le module à l'origine à partir duquel ont été calculés les endommagements isotropes). En s'appuyant sur les contraintes maximales atteintes durant chaque essai et avant rupture, on obtient le graphique reliant la pression à la contrainte octaédrique. Sur la figure 4.1, les courbes vertes et rouges correspondent respectivement aux critères de plasticité initial et final, pour lequel l'écroûissage est supposé saturé. L'essai de traction montrant un faible niveau de déformation et une rupture fragile, il n'a pas été considéré dans la construction de ces équipotentielles.

V.D. Le postule un domaine de réversibilité  $f(Q, \sigma^V, R, \sigma^0) \leq 0$  où  $Q$  et  $\sigma^V$  représentent respectivement la contrainte octaédrique et la pression des contraintes globales de Cauchy  $\sigma$  définies par :

$$\sigma^V = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \text{ , } Q = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^{dev} : \sigma^{dev}} \text{ avec } \sigma^{dev} = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (4.1)$$

Le critère proposé s'écrit sous la forme suivante :

4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION  
DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

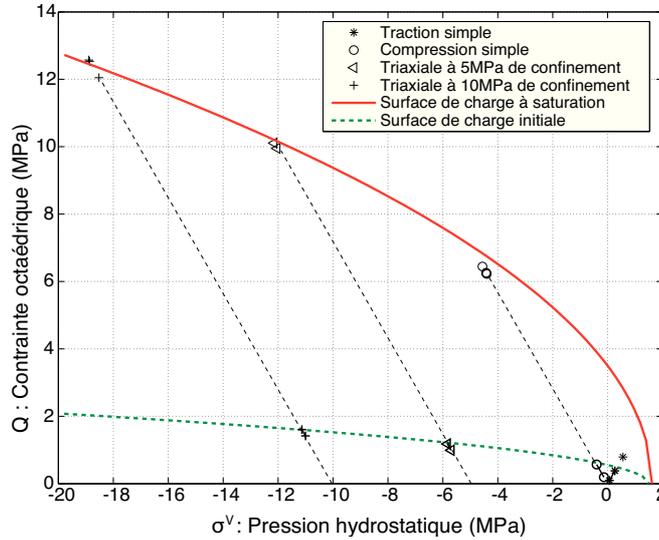


FIGURE 4.1 – Evolution de la surface de charge selon [55] dans le plan des contraintes réelles  $(\sigma^V, Q)$  à 20°C .

$$f = \sqrt{Q^2 + \alpha(R)\sigma^V} - R \quad (4.2)$$

$$\alpha(R) = \frac{R^2}{X(R)} \quad (4.3)$$

$$X(R) = X_0 + (X_m - X_0) \frac{R - R_0}{R_m - R_0} \quad (4.4)$$

où  $\alpha(R)$  est une fonction de l'écroissance  $R$  permettant de pondérer l'influence de la pression sur la surface de charge au cours de l'évolution de l'écroissance. Elle garantit un déploiement homothétique du critère de plasticité et respecte la non intersection des isovaleurs du critère. Les surfaces de charges initiales et à saturation, associées à un niveau d'écroissance respectivement nul et saturé, fournissent deux valeurs différentes de la fonction  $\alpha(R)$ . La signification des paramètres  $X_0$ ,  $R_0$ ,  $X_m$  et  $R_m$  est donnée sur la figure 4.2.

On peut constater que la surface de charge à saturation déterminée par Le [56] passe au dessus des mesures obtenues en compression simple car l'écroissance n'est pas saturé lors de cet essai.

Intéressons-nous maintenant aux contraintes effectives dont il faut déterminer la valeur pour calculer l'écroissance dans notre modèle. La démarche est maintenant usuelle pour un modèle avec endommagement isotrope. A chaque valeur de contrainte relaxée correspond une déformation plastique après recouvrance et une valeur d'endommagement  $d$ . La première étape consiste à diviser la contrainte par  $1-d$  et, connaissant l'équation du critère de plasticité, à déduire la valeur de l'écrois-

4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION  
DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

---

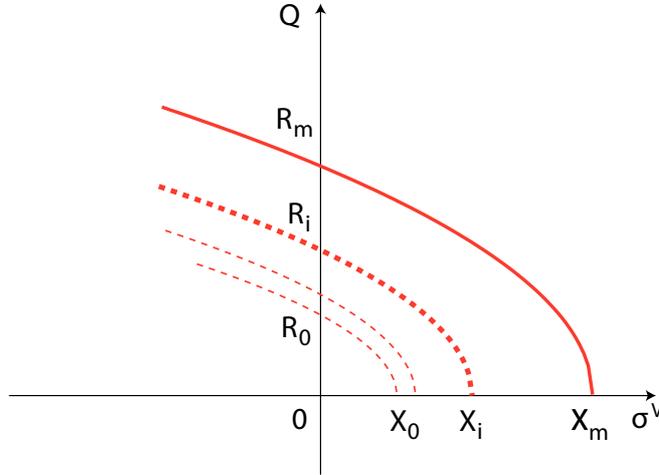


FIGURE 4.2 – Signification des paramètres  $X_0$ ,  $X_m$ ,  $R_0$  et  $R_m$  dans le plan des contraintes  $(\sigma^V, Q)$ .

sage. D'autre part, le tenseur des déformations plastiques est utilisé pour calculer une déformation plastique cumulée dont l'expression dépend du problème. On utilise enfin le graphique reliant l'écrouissage à la déformation plastique cumulée pour déterminer la loi d'écrouissage.

Ici, l'anisotropie de l'endommagement complique la première étape de la démarche. Le modèle d'endommagement donne le tenseur de rigidité endommagé  $\mathbb{C}^{ed}$  connue en fin de relaxation. La contrainte effective pourrait être calculée par la relation  $\tilde{\sigma} = \mathbb{C}^{ed} : \mathbb{C}^{el-1} : \sigma$ . La méthode que nous avons choisi est différente mais plus rapide. Le tenseur des contraintes est décomposé en parties volumique  $\sigma^V \mathbf{1}$  et déviatorique  $\sigma^{dev}$ . En compression, l'endommagement n'est pas effectif sur la composante sphérique des contraintes ( $\alpha_V(\varepsilon_V) = 0$ ) dans notre modèle. Par contre, lors du chargement uniaxial, l'endommagement « déviatorique » se développe. Il affecte donc la contrainte déviatorique  $\sigma^{dev}$ . Celle-ci est divisée par un endommagement « isotrope équivalent » connaissant la dégradation de la raideur longitudinale. Cette simplification est raisonnable lorsque l'on s'intéresse aux essais uniaxiaux (avec ou sans confinement) et à la perte du module d'Young qui décrit l'endommagement de la section de matière perpendiculaire à la direction de sollicitation. On définit la contrainte octaédrique effective « équivalente » par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{Q}{1-d} \\ 1-d &= \frac{E^{ed}}{E_0} \end{aligned}$$

où  $d$  est l'endommagement constaté pour un niveau de contrainte donné. Les modules initiaux et endommagés sont notés  $E_0$  et  $E^{ed}$ . Ce traitement particulier des mesures

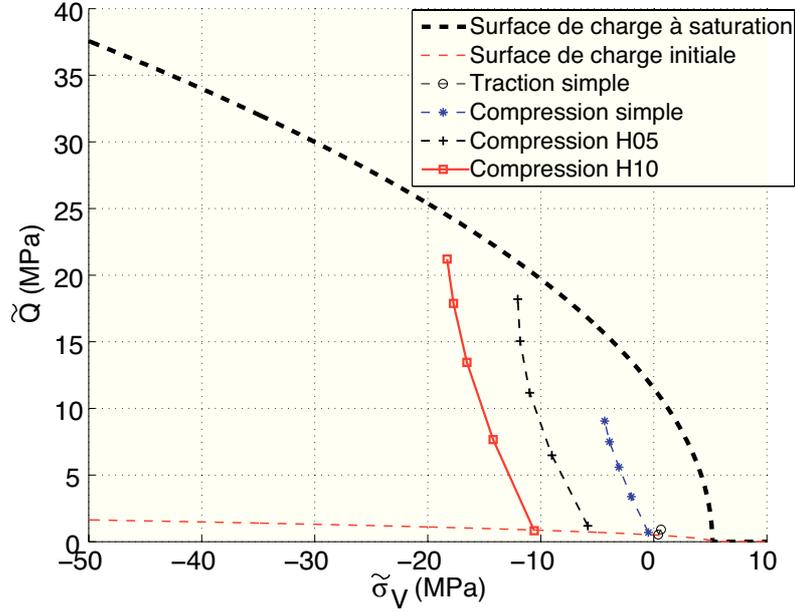


FIGURE 4.3 – Surface de charge dans le plan des contraintes effectives  $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}^V)$ .

Paramètres d'écrouissage	$X_0$	$X_m$	$R_0$	$R_m$
Valeur (MPa)	5, 16	5, 17	0, 5	11, 5

TABLE 4.1 – Paramètres de la fonction seuil de plasticité pour les états initiaux et saturés.

permet de tracer l'évolution de la contrainte octaédrique effective en fonction de la pression effective dans le plan  $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}^V)$  (fig. 4.3). En écrivant l'équation 4.2 en contrainte effective, la fonction seuil de plasticité suivante :

$$\tilde{Q}^2 + \frac{\tilde{R}^2}{X(R)} \tilde{\sigma}^V - R^2 = 0 \quad (4.5)$$

a été identifiée (pointillés noirs sur fig. 4.3, tab. 4.1). Nous indiquons ci-dessous la méthode permettant de déterminer les quatre paramètres.

### 4.1.2 Ecrouissage

Les grandeurs conjuguées au sens de la dissipation plastique dans le plan des deux premiers invariants de contraintes  $(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}^V)$  sont  $\dot{\epsilon}_d^p$ , la vitesse de déformation plastique déviatorique, et le taux de déformation plastique volumique  $\dot{\epsilon}_v^p$  :

4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION  
DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

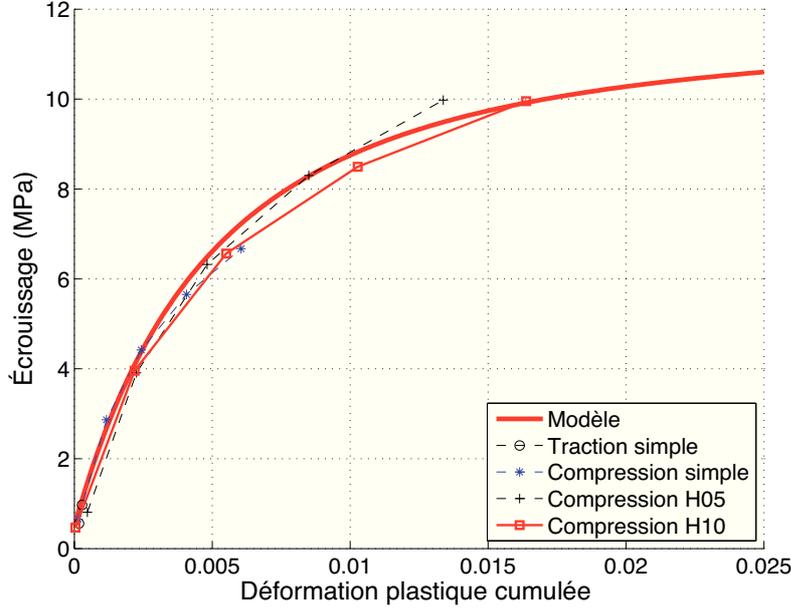


FIGURE 4.4 – Courbes d'écrouissage issues des expérimentations et du modèle.

$$\tilde{\sigma} : \dot{\varepsilon}^p = \tilde{\sigma}^V \dot{\varepsilon}_v^p + \tilde{Q} \dot{\varepsilon}_d^p \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_v^p &= \frac{1}{3} (\varepsilon_L^p + 2\varepsilon_T^p) \\ \varepsilon_d^p &= \sqrt{2 (\varepsilon_L^p - \varepsilon_T^p)^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $\varepsilon_L^p$  et  $\varepsilon_T^p$  sont respectivement les déformations longitudinales et transversales irréversibles mesurées. On se base à nouveau sur le modèle d'écrouissage développé par RjaFiAllah [75] et Le [55]. On suppose que l'écrouissage  $R$  est piloté par une déformation plastique cumulée dont le taux, notée  $\dot{p}$ , est égal à la vitesse de déformation plastique déviatorique en uniaxial  $\dot{\varepsilon}_d^p$ . Les relations 4.7 sont données en fonction des variables observables. L'identification de la loi d'écrouissage s'effectue en deux temps. Tout d'abord, on cherche les paramètres  $X_0$ ,  $X_m$ ,  $R_0$  et  $R_m$  permettant (1) si possible de joindre les contraintes maximales de chaque essai à la courbe du critère de plasticité (éq. 4.5 ; on suppose que l'écrouissage est quasiment saturé lorsque les contraintes maximales sont atteintes pour chaque essai) et (2) de grouper les courbes  $R(p)$ . Après optimisation des quatre paramètres (tab. 4.1), on obtient la forme du critère de plasticité (fig. 4.3) et l'écrouissage (fig. 4.4). Dans un second temps, la courbe d'écrouissage est approximée par la relation suivante :

$$R(p) = R_0 + (R_m - R_0) \left[ 1 - \frac{1}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \right] \quad (4.8)$$

#### 4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

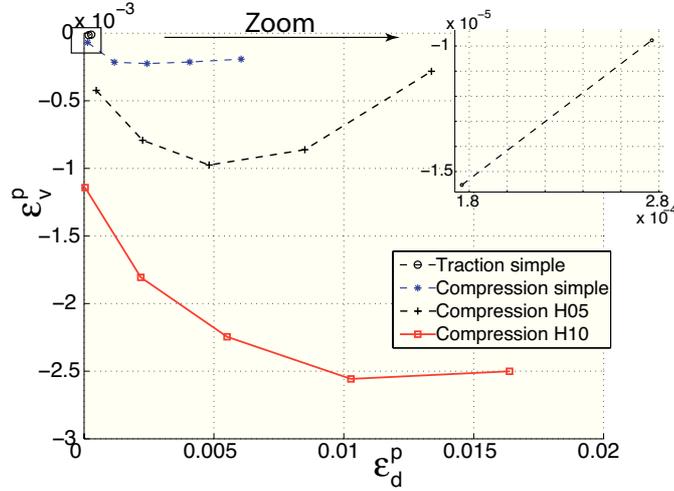


FIGURE 4.5 – La dilatance du matériau M1 dans le plan des déformations déviatoriques et volumiques plastiques.

où les deux paramètres  $b_1$  et  $b_2$  contrôlent, respectivement, la pente initiale et la courbure entre le passage de la pente initiale à l'asymptote. Ces paramètres sont  $b_1 = 300$  et  $b_2 = 40000$ . La figure 4.4 montre que lors des essais, les courbes d'écroutissage sont loin d'avoir saturées ce qui se traduit par un critère de plasticité saturé bien au dessus des points mesurés (fig. 4.3).

#### 4.1.3 Direction d'écoulement

À partir des déformations résiduelles obtenues lors de tous les essais (après extrapolation temporelle), on trace l'évolution de la dilatance définie comme le rapport  $\beta = \dot{\varepsilon}_v^p / \dot{\varepsilon}_d^p$ . On observe sur la figure 4.5 un comportement initialement contractant puis, en fonction du niveau du confinement, une phase de dilatance se terminant par la rupture de l'échantillon. En traction, seule une dilatance est observée. Ces courbes montrent donc qu'un écoulement plastique déviatorique seul n'est pas suffisant.

La détermination du potentiel de dissipation, dont les dérivées donnent la direction d'écoulement, n'est pas indispensable. Une méthode indirecte, souvent pratiquée en mécanique des sols [41], est appliquée ici. La norme du tenseur des vitesses des déformations irréversibles  $\dot{\varepsilon}^P$  est déterminée par la règle d'écoulement usuelle :

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\varepsilon}_d^p + \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{N}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\tilde{Q}, \tilde{\sigma}^V)}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (4.9)$$

avec  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique, calculé pour respecter la consistance  $\dot{f} = f = 0$ . De l'équation 4.9 on déduit l'expression de la direction d'écoulement  $\bar{\mathbf{N}}$  :

4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION  
DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

---

$$\bar{\mathbf{N}} = \sqrt{\frac{3}{1+\beta^2}} \left( \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d}{3\tilde{Q}} + \frac{\beta}{3}\mathbf{1} \right) \quad (4.10)$$

le taux de déformation plastique s'écrit alors :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\lambda}\bar{\mathbf{N}} = \dot{\lambda}\sqrt{\frac{3}{1+\beta^2}} \left( \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d}{3\tilde{Q}} + \frac{\beta}{3}\mathbf{1} \right) \quad (4.11)$$

La dilataance correspond donc à la tangente à la courbe de l'évolution de la déformation plastique volumique en fonction de la déformation plastique déviatorique (fig. 4.5). La pression  $\tilde{\sigma}^V$  et la déformation plastique  $p$  sont approximées, respectivement, à partir de la moyenne de deux états de contrainte consécutifs en fin de phase de relaxation et de deux états de déformation plastique consécutifs en fin de phase de recouvrance :

$$\begin{aligned} \sigma_i^V &= (\sigma_{B_i}^V + \sigma_{B_{i+1}}^V) / 2 \\ p_i &= (p_{D_i} + p_{D_{i+1}}) / 2 \end{aligned}$$

Comme cela avait été le cas pour le modèle de V.D. Le, nous relient la dilataance à la déformation plastique cumulée et à la pression en nous appuyant sur les figures 4.6 et 4.7. Il est supposé une indépendance des variables  $p$  et  $\sigma^V$ . D'où les relations suivantes :

$$\beta(p, \sigma^V) = h(p) + l(\sigma^V) + c_0, \quad (4.12)$$

$$l(\sigma^V) = c_1 (1 - \exp(c_2 \sigma^V)) + c_3 \sigma^V, \quad (4.13)$$

$$h(p) = c_4 \cdot \ln(1 + c_5 \cdot p). \quad (4.14)$$

Connaissant l'évolution de la dilataance en fonction de  $p$ , les courbes des essais ont été extrapolées pour définir les valeurs de la dilataance sur le seuil d'élasticité initial (carrés sur la fig. 4.6). Ces points, reportés dans le graphe de la dilataance en fonction de la pression déterminent les paramètres de la fonction  $l(\sigma^V)$  (trait plein sur la fig. 4.7). Ensuite, les paramètres de la fonction  $h(p)$  sont déterminés (traits sans symboles sur la fig. 4.6). Les paramètres du modèle élasto-plastique avec endommagement anisotrope sont rassemblés dans le tableau 4.2.

4.1. RAPPEL DES OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES ET ADAPTATION  
DU MODÈLE PROPOSÉ PAR LE [56]

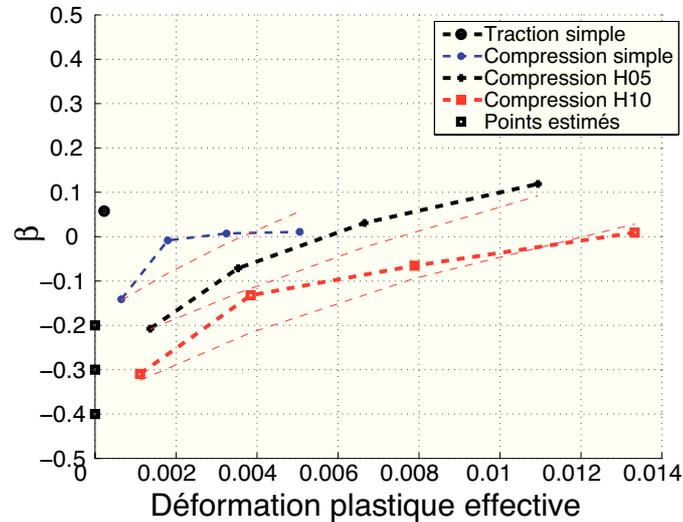


FIGURE 4.6 – Dilatance du matériau M1 en fonction de la déformation plastique cumulée. Les symboles indiquent les valeurs expérimentales et les traits sans symbole la réponse du modèle. Les carrés rangés le long de l'axe des ordonnées correspondent aux extrapolations des courbes expérimentales à déformation plastique nulle (limite d'élasticité initiale). Ces points n'ont pas été mesurés.

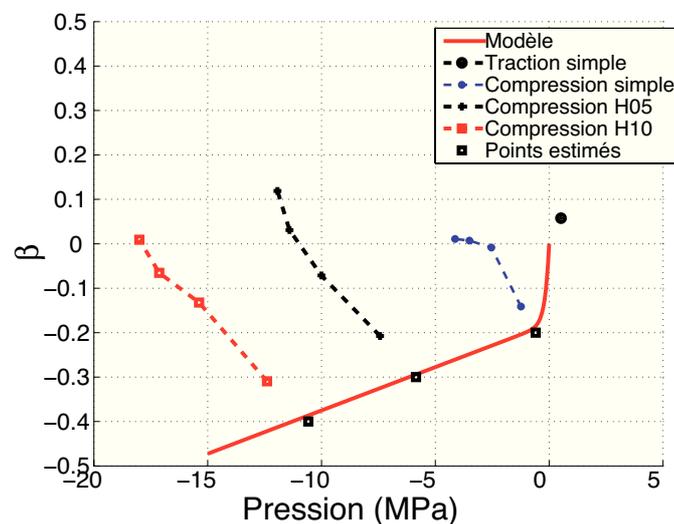


FIGURE 4.7 – Dilatance du matériau M1 en fonction de la pression. Les symboles indiquent les valeurs expérimentales et les traits sans symbole la réponse du modèle. Les carrés correspondent aux extrapolations des courbes expérimentales à déformation plastique nulle (seuil d'élasticité initial). Ces points n'ont pas été mesurés. Le trait continu correspond à la fonction  $l(\sigma^V)$  dont les paramètres ont été identifiés le long du seuil d'élasticité donc pour  $p = 0$ .

Paramètres de dommage et d'élasticité								
$k_V^0$ (MPa)	$\mu_D^0 = \mu_T^0$ (MPa)	$d_V^0$	$d_D^0 = d_T^0$	$a_3$ (MPa <sup>-1</sup> )	$a_4$	$a_5$ ou $a'_5$ (MPa <sup>-1</sup> )	$a_6$	$\varepsilon_V^0$
21500	3070	0, 2	0, 1	12	$\frac{2}{3}$	0, 25 ou 1, 5	$\frac{1}{2}$	$4, 65 \cdot 10^{-4}$

Paramètres d'écroissage					
$X_0$ (MPa)	$X_m$ (MPa)	$R_0$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	$b_1$	$b_2$
5, 16	5, 17	0, 5	11, 5	200	10000

Paramètres de dilatance					
$c_0$	$c_1$	$c_2$ (MPa <sup>-1</sup> )	$c_3$ (MPa <sup>-1</sup> )	$c_4$	$c_5$
0	-0, 18	5, 6	0, 0195	0, 36	280

TABLE 4.2 – Paramètres du modèle VDT avec endommagement anisotrope, effet unilatéral et plasticité pour le matériau agrégataire M1.

## 4.2 Intégration de la loi de comportement dans le code Abaqus

Les travaux de V.D. Le ont notamment permis d'intégrer la loi de comportement isotrope dans le code aux éléments finis Abaqus/Standard. La routine utilisateur UMAT reprise ici et modifiée pour tenir compte de la formulation microplan pour l'élasticité avec endommagement anisotrope. La plasticité est modifiée et intègre la contrainte effective.

Les variables d'endommagement et d'effectivité sont des fonctions des déformations élastiques. Ceci devrait conduire à calculer l'endommagement et l'effectivité avec la plasticité dans un schéma implicite. Par souci de simplification, l'endommagement est calculé connaissant la déformation élastique au début du pas de temps. Ceci permet de simplifier les calculs et l'intégration en découplant l'endommagement et la plasticité. L'une des conséquences est que pour l'utilisation de cette programmation dans Abaqus, il faut s'assurer que les incréments de déformations ne sont pas trop importants entre deux instant successifs. Une autre conséquence est qu'il nous a fallu réévaluer le paramètre  $a_3$ , qui passe ainsi de 12 MPa<sup>-1</sup> à 13 MPa<sup>-1</sup>. Enfin, pour assurer une cohérence vis-à-vis de cette hypothèse, le calcul de la jacobienne élastoplastique ne prend pas en considération la sensibilité de la contrainte ni vis-à-vis de l'endommagement ni vis-à-vis de l'effectivité.

Pour calculer la contrainte effective utilisé pour le calcul de la plasticité, la démarche s'appuie sur le principe d'équivalence en contrainte. Dans un premier temps,

la contrainte globale est projetée sur les micro-plans.

$$\begin{aligned}\sigma_V^i &= \mathbf{V}^i : \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_D^i &= \mathbf{D}^i : \boldsymbol{\sigma} \\ \sigma_T^i &= \mathbf{T}^i \cdot \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

où l'exposant  $i$  représente l'indice du microplan. En appliquant le principe d'équivalence en contrainte dans le microplan, les contraintes effectives sont :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_D^i &= \frac{1}{1 - \alpha_D^i d_D^i} \sigma_D^i = \frac{1}{1 - \alpha_D^i d_D^i} \mathbf{D}^i : \boldsymbol{\sigma} \\ \tilde{\sigma}_T^i &= \frac{1}{1 - d_T^i} \sigma_T^i = \frac{1}{1 - d_T^i} \mathbf{T}^i \cdot \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes effectives globales est construit en sommant la contribution de chaque microplan :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \sum_{i=1}^N 3\omega_i \left[ \sigma_V^i \cdot \mathbf{V}^i + \tilde{\sigma}_D^i \cdot \mathbf{D}^i + \tilde{\sigma}_T^i \cdot \mathbf{T}^i \right] \\ &= \sum_{i=1}^N 3\omega_i \left[ \mathbf{V}^i \otimes \mathbf{V}^i + \frac{1}{1 - \alpha_D^i d_D^i} \mathbf{D}^i \otimes \mathbf{D}^i + \frac{1}{1 - d_T^i} \mathbf{T}^{iT} \cdot \mathbf{T}^i \right] : \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

Cette expression permet par identification avec l'équation de la section 2.1.2 de déterminer :

$$(\mathbb{I} - \mathbb{D})^{-1} = \sum_{i=1}^N 3\omega_i \left[ \mathbf{V}^i \otimes \mathbf{V}^i + \frac{1}{1 - \alpha_D^i d_D^i} \mathbf{D}^i \otimes \mathbf{D}^i + \frac{1}{1 - d_T^i} \mathbf{T}^{iT} \cdot \mathbf{T}^i \right]$$

C'est ce tenseur d'ordre quatre qui est utilisé dans l'algorithme présenté sur la figure 4.8.

## 4.3 Simulations

L'objectif de cette partie est de comparer les résultats des simulations par la méthode des éléments finis avec les mesures expérimentales. Dans un premier temps, des simulations de sollicitations monotones sont comparées aux points expérimentaux représentant l'enveloppe des essais cyclés. Il s'en suit des simulations cyclées comparées aux données expérimentales dont la partie visqueuse est retirée. Enfin, ce sont des simulations de sollicitations alternant traction puis compression permettant d'activer l'effectivité qui sont réalisées.

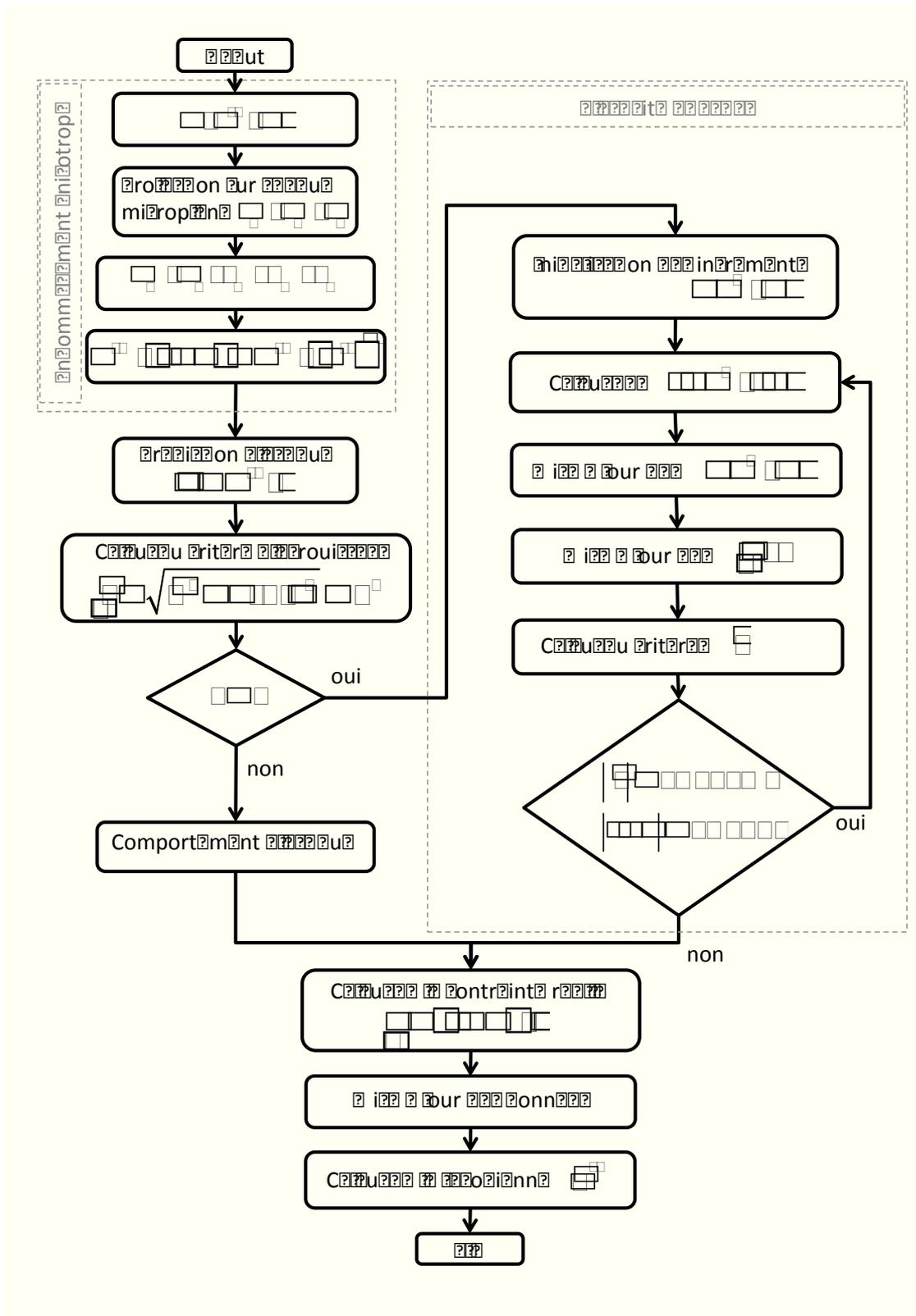


FIGURE 4.8 – Algorithme utilisé pour l’intégration de la loi de comportement dans le code de calcul Abaqus/Standard. 144

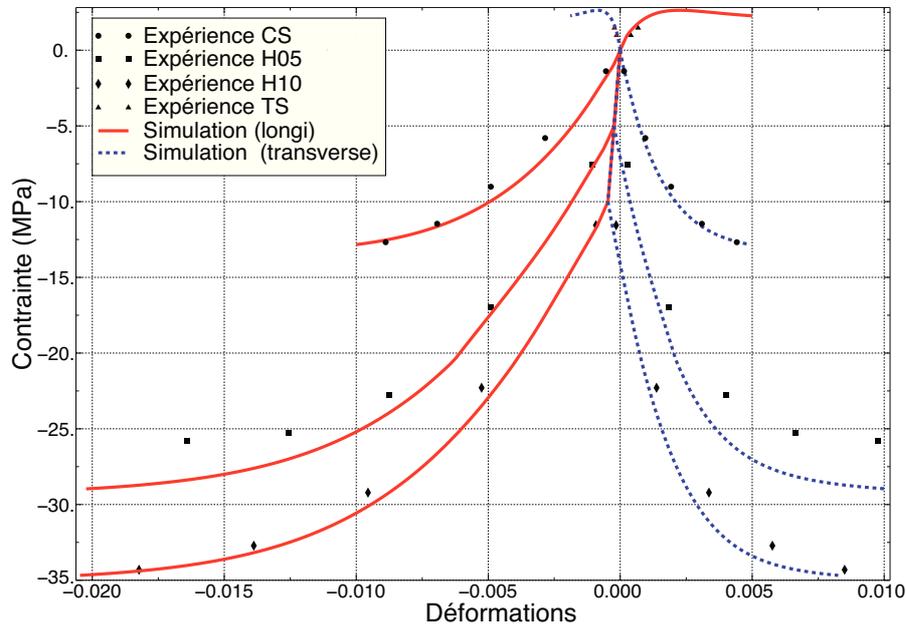


FIGURE 4.9 – Comparaisons entre courbes expérimentales (points) et numériques (traits pleins) obtenues pour les quatre chargements monotones.

### 4.3.1 Sollicitations monotones

La figure 4.9 permet de comparer les réponses expérimentales et numériques pour différentes sollicitations. Ces dernières sont arrêtées arbitrairement un peu après le dernier point expérimental. Les réponses expérimentales sont mieux reproduites en traction simple et compression simple qu'en compression consolidées. Il est observé une raideur surestimée pour les compressions, en particulier pour un confinement de 5 MPa.

Pour mettre en évidence l'effet anisotrope du dommage, on trace l'évolution des variables d'endommagement  $d_D$  et  $d_T$ , suivant leur orientation, en fonction de la déformation longitudinale. On note que les 21 directions de la discrétisation de l'espace angulaire se divisent en 5 familles par rapport à l'axe de sollicitation  $\mathbf{e}_1$  ; les familles de direction sont respectivement à  $0^\circ$ ,  $33,26^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à  $\mathbf{e}_1$ . Les figures 4.10 et 4.11 représentent l'évolution de l'endommagement déviatorique et tangentiel en fonction de la déformation longitudinale pour un essai de compression simple (fig. 4.10) et un essai de compression triaxiale avec 10 MPa de confinement (fig. 4.11). On remarque qu'en compression avec confinement de 10 MPa, au même niveau de dommage, la déformation longitudinale est deux fois plus grande que celle en compression simple. L'endommagement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  est prépondérant devant celui à  $33,26^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $67^\circ$ . L'endommagement qui évolue le moins est celui à  $45^\circ$ . Par contre, l'endommagement  $d_T$  suivant cette famille de  $45^\circ$  par rapport à la direction de sollicitation évolue plus rapidement que toutes les autres directions. L'endomma-

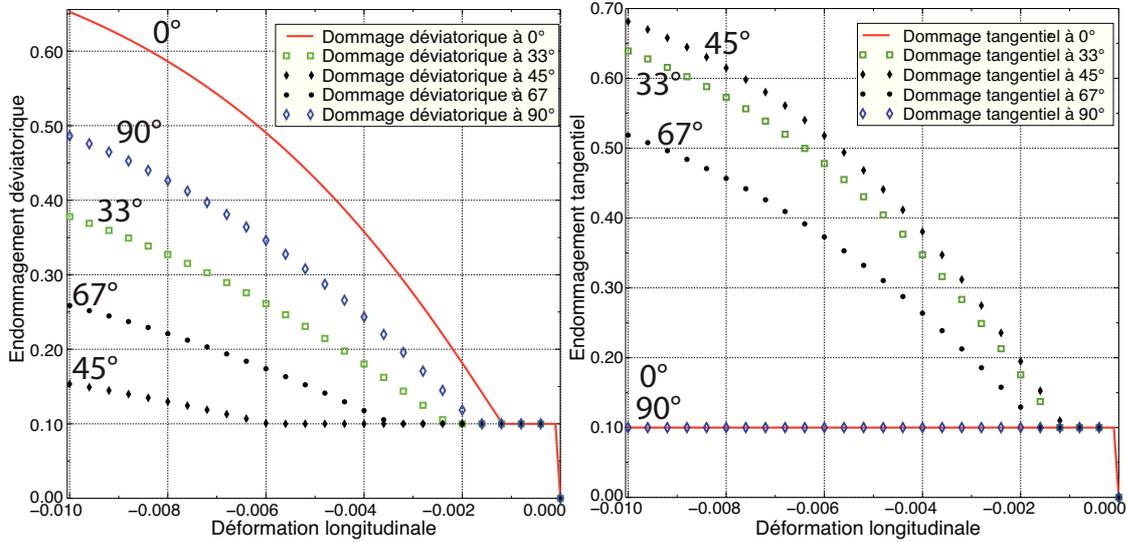


FIGURE 4.10 – Évolution de la variable de l’endommagement déviatorique  $d_D$  et tangentielle  $d_T$  en fonction de la déformation longitudinale pour un essai de compression simple.

gement  $d_T$  des directions à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à  $\mathbf{e}_1$  n’évolue pas car il ne voit pas de déformation tangentielle.

Pour mettre en évidence l’effectivité du dommage, on s’intéresse plutôt à la distribution du dommage à une valeur de déformation longitudinale fixe (ici 1%) dans un plan contenant la direction de sollicitation  $\mathbf{e}_1$  (fig. 4.12 A,B). On remarque que dans la direction de sollicitation, le dommage déviatorique effectif (petit cercle noir) est la moitié de celui calculé. Ceci montre que le modèle rend compte de l’effectivité du dommage. Au même niveau de déformation (ici 1%), on remarque que l’endommagement sous compression confinée évolue moins que celui en compression simple. Donc on peut dire que l’effet de la pression de confinement est bien prise en compte.

Pour vérifier l’effet de la pression de confinement en cisaillement, on propose de simuler des essais de cisaillement pure avec et sans confinement. Dans le chapitre précédent, on a vu l’effet de la pression de confinement et de l’effectivité du dommage sur l’évolution de ce dernier. On s’intéresse ici à l’effet de l’érouissage sur la réponse du matériau. Il n’existe aucun essai expérimental qui permet de valider quantitativement cette prédiction du comportement. Il est cependant possible de constater la similitude avec les essais de Pequeur. La figure 4.13 représente une simulation d’un essai de cisaillement pure sans confinement et avec un confinement de 10 MPa. En cisaillement pure, pour une déformation de 0,8%, le niveau de contrainte (2,26 MPa) est plus faible que dans la simulation sans plasticité (2,6 MPa). L’effet de l’érouissage a baissé le niveau de contrainte. L’allure de la courbe est similaire à celle de la simulation sans plasticité (fig. 3.27).

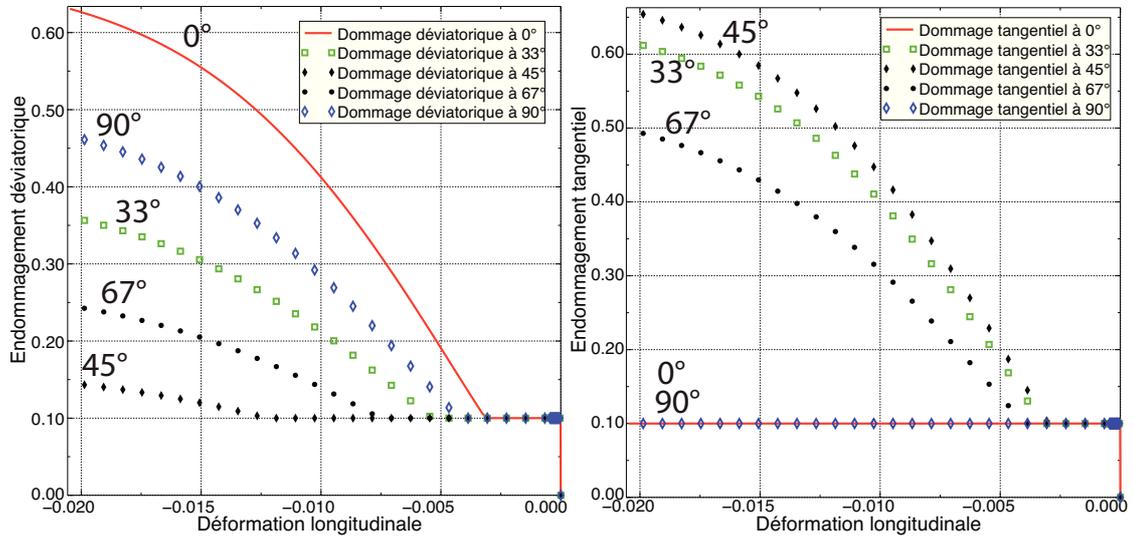


FIGURE 4.11 – Évolution de la variable du dommage déviatorique  $d_D$  et tangentielle  $d_T$  en fonction de la déformation longitudinale pour un compression avec 10 MPa de confinement.

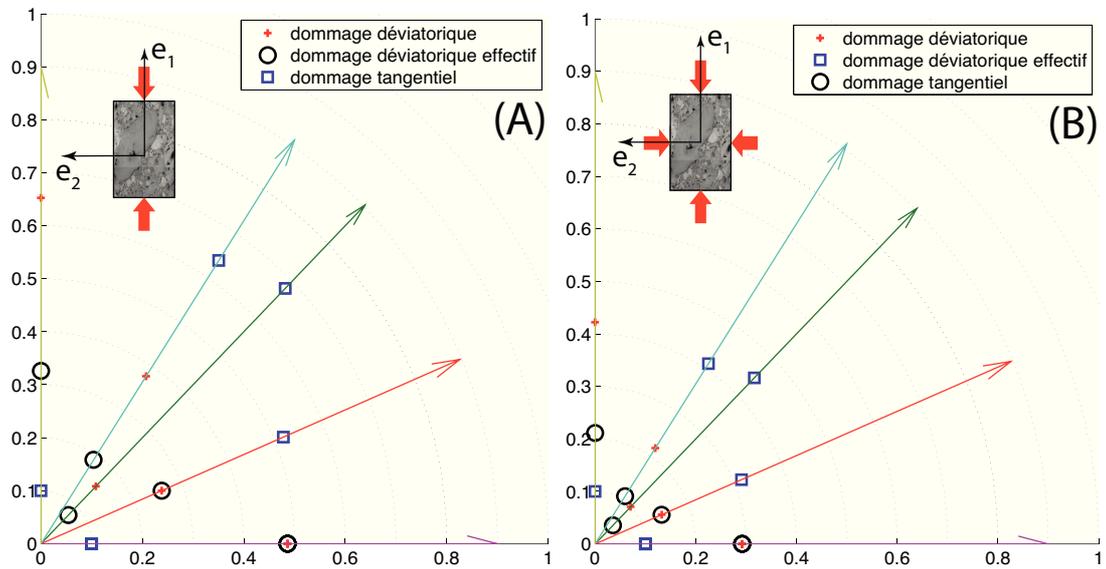


FIGURE 4.12 – Rosette de dommage à 1% de déformation longitudinale dans un essai de compression simple (A) et de compression triaxiale avec 10 MPa de confinement (B).  $e_1$  est la direction de chargement.

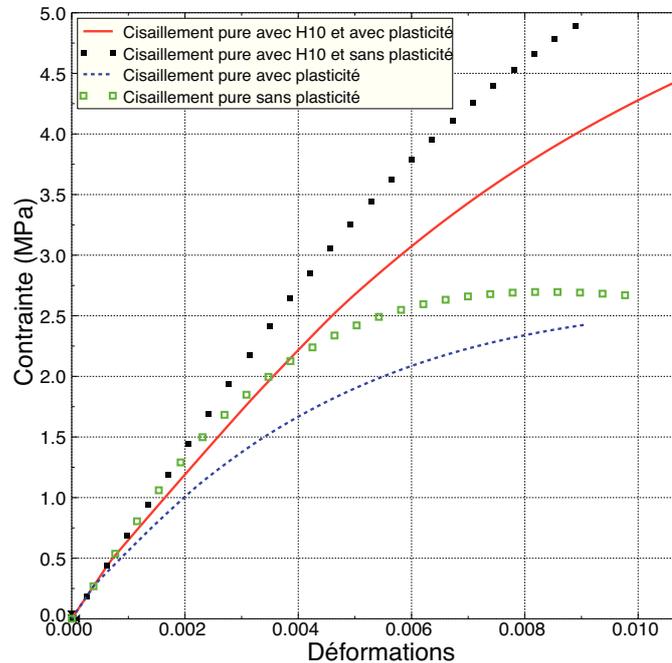


FIGURE 4.13 – Simulation d’un essai de cisaillement pur et avec un confinement de 10 MPa pour un matériau agrégataire M1

### 4.3.2 Sollicitations avec cyclage

Les figures 4.14 à 4.16 montrent les déformations résiduelles obtenues pour un chargement de traction, de compression et de compression avec confinement de 10 MPa. Les points rapportés le long des axes des abscisses (ou bien pour une contrainte de -10 MPa) correspondent aux déformations résiduelles. Sur les figures 4.14 et 4.15 les déformations résiduelles du modèle (les intersections des décharges avec l’axe des abscisses) sont supérieures à celles de l’expérience. Au dernier cycle on remarque une différence des déformations irréversibles longitudinales de  $3,7 \times 10^{-5}$  avec une erreur de 29% par rapport à l’expérience en traction simple. En compression simple, on prédit 30% de plus de déformation irréversible. On conclut que le niveau d’érouissage prédit par le modèle est fort par rapport à l’expérience. Toutefois, dans la figure 4.16, cette différence est moindre en compression triaxiale avec 10 MPa de confinement le modèle prédit moins de déformations irréversibles (5% en moins). Ce qui peut être dû à l’effet de la pression de confinement sur l’évolution de l’érouissage. On rappelle que le but n’est pas de coller aux courbes mais plutôt de sentir les mécanismes influençant la réponse globale pour un éventuel calage futur plus précis.

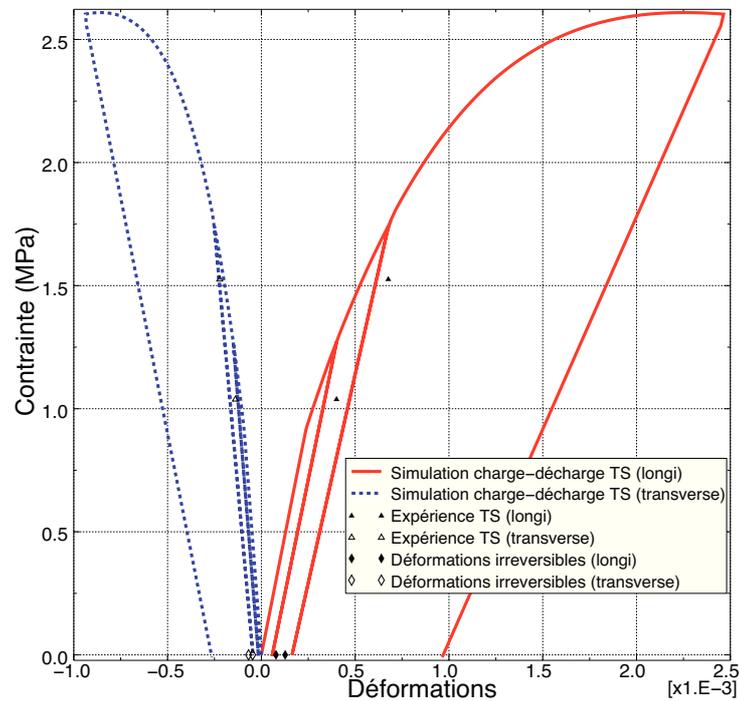


FIGURE 4.14 – Simulation d’un essai de traction simple avec plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1

### 4.3.3 Sollicitations alternées

Les deux essais alternant des tractions et des compressions, mentionnés dans le premier chapitre, sont simulés sur les figures 4.17 et 4.18. Sur ces courbes, les croix vertes indiquent les changements de raideur. Les mesures effectuées lors des essais de traction et de compression monotones sont reportées pour donner une référence. Les niveaux des contraintes au pic correspondent aux niveaux observés expérimentalement quels que soient le type de chargement.

Sur la figure 4.17, il existe deux points d’activation de l’effectivité. Un point (A) lors du passage en compression simple et le deuxième point (B) lors du passage en traction simple. Au point (A) le module sécant de décharge en traction est 2792 MPa et le module au passage en compression simple est 2995 MPa. Ce qui donne une reprise de module de l’ordre de 7%. Au point (B), lors de la décharge de la compression simple, le module sécant est 2222 MPa et au début de la traction simple le module est de l’ordre de 2087 MPa. Ce qui signifie qu’on a une réduction de module de l’ordre de 6 %.

La figure 4.18 représente une simulation d’un chargement de compression simple suivi de traction simple. Au point d’activation de l’effectivité (la croix verte), le module sécant en décharge est 2287 MPa au début du chargement en traction le module sécant est 2149 MPa. Ce qui signifie une réduction de module de 6 %.

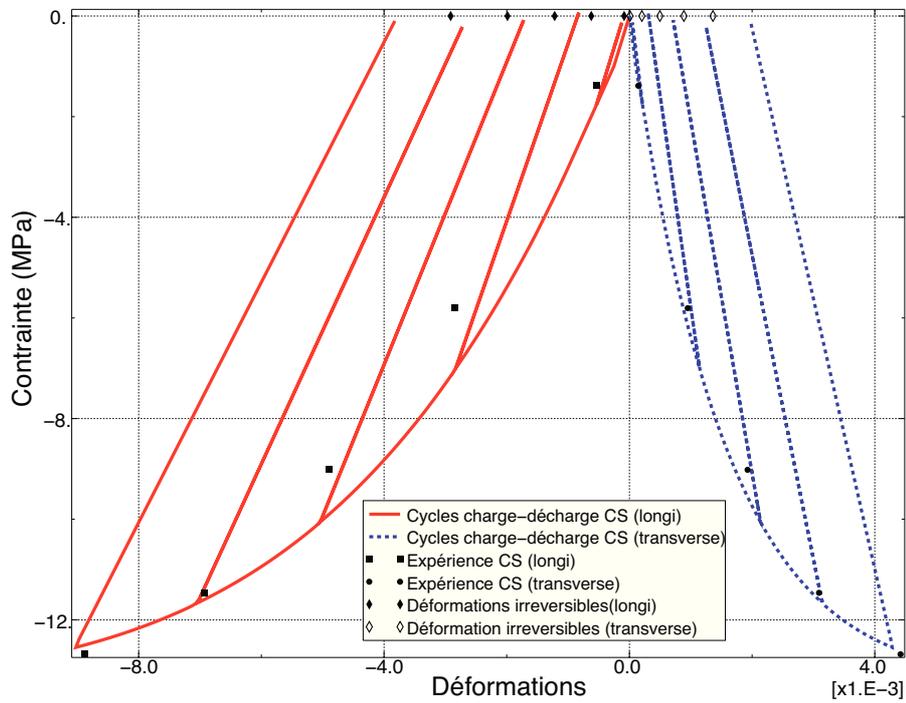


FIGURE 4.15 – Simulation d’un essai de compression simple à plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1

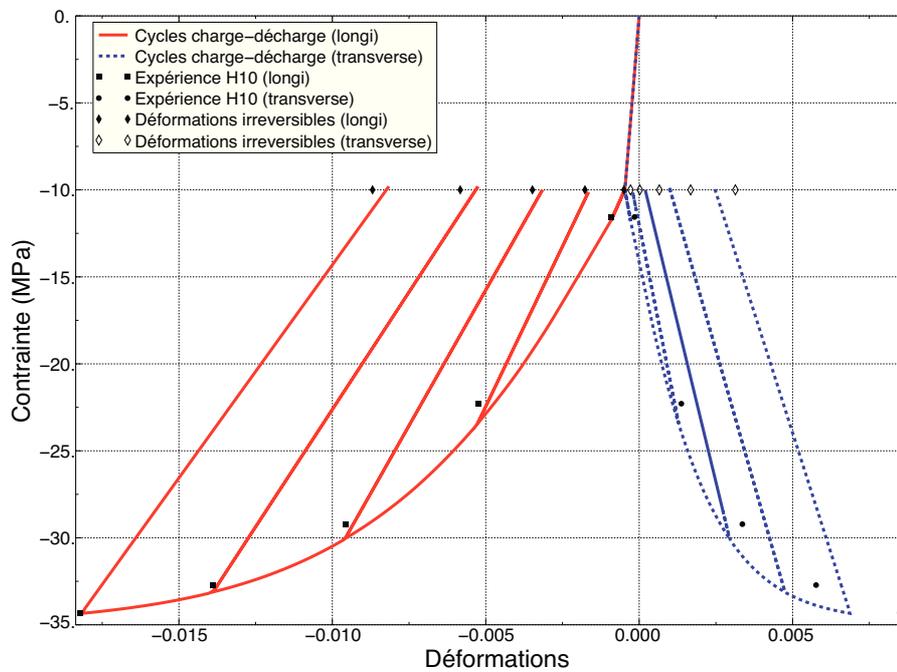


FIGURE 4.16 – Simulation d’un essai de compression triaxiale à 10 MPa de confinement à plusieurs cycles de charge-décharge pour un matériau agrégataire M1

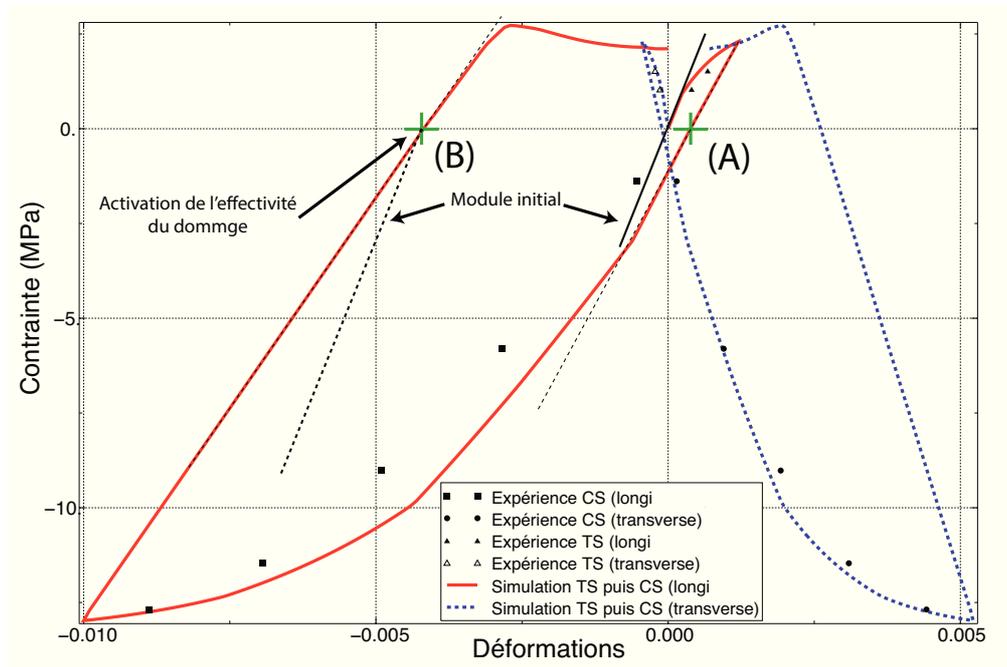


FIGURE 4.17 – Simulation d'un essai de traction suivi d'une compression simple pour un matériau agrégataire M1

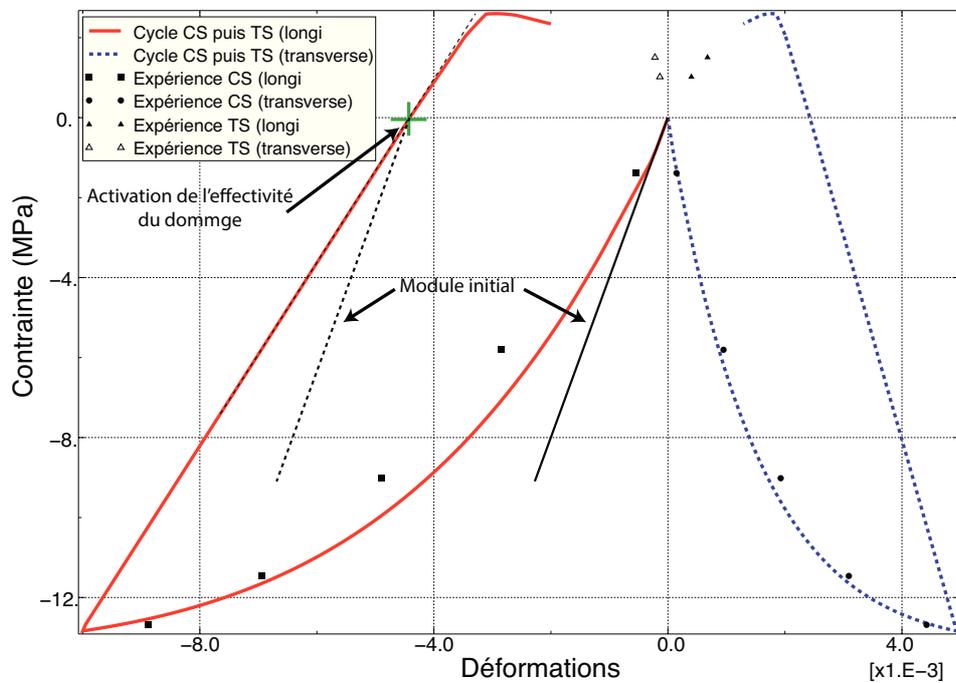


FIGURE 4.18 – Simulation d'un essai de compression suivi d'une traction simple pour un matériau agrégataire M1

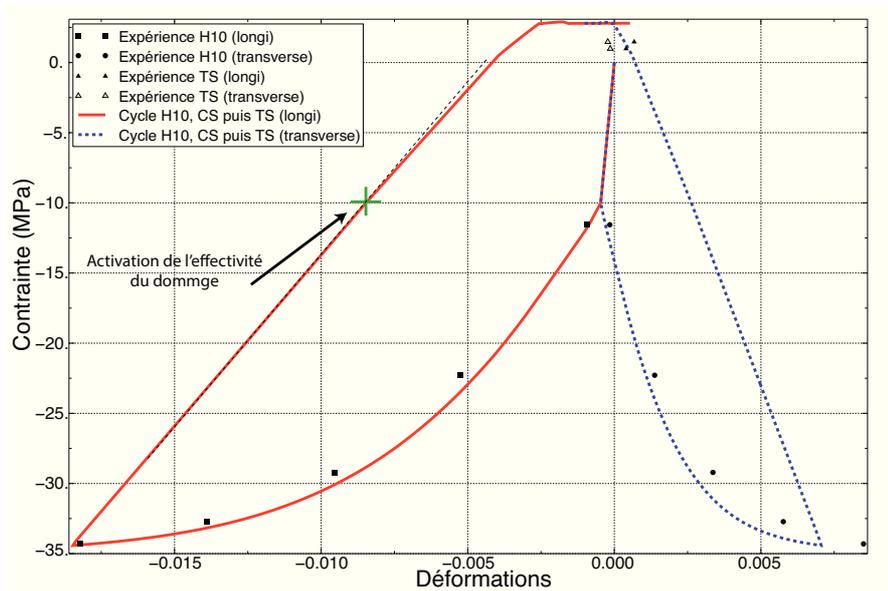


FIGURE 4.19 – Simulation d’un essai de compression suivi de traction avec un confinement de 10 MPa pour un matériau agrégataire M1

La figure 4.19 représente la simulation d’un essai composé de 3 phases : mise en pression jusqu’à 10 MPa à laquelle on superpose une compression simple suivi d’une décharge qui se prolonge en traction. Le confinement est maintenu tout au long de la simulation. Le module de décharge de la compression est de l’ordre de 2436 MPa jusqu’à ce que la pression de confinement initiale soit atteinte, en deçà le module sécant à une valeur de 2321 MPa. Ce qui donne une réduction de l’ordre de 5 %. Ces simulations nous ont permis de quantifier les effets unilatéraux sur les raideurs. Cet effet reste faible (6 à 7 %). Néanmoins, on sait que la diminution du paramètre  $a_6$  (lié à la fonction d’effectivité déviatorique) permettra de donner plus de poids à cette effectivité. En contrepartie, cette diminution de l’effectivité déviatorique cachera l’effet du dommage associé lors de la compression.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le comportement plastique a été ajouté au modèle élastique endommageable présenté dans le chapitre précédent. Une bonne partie du modèle de V.D. Le a été repris. Ce modèle a été modifié pour prendre en compte un découplage entre plasticité et endommagement grâce à une écriture en contraintes effectives. Les dépouillements ont été adaptés et les paramètres redéterminés. Les comparaisons entre calculs et expériences montrent un accord satisfaisant même si une optimisation finale des paramètres serait nécessaire pour augmenter encore celui-ci. Le modèle détaillé en annexe de cette thèse est une première esquisse d’une approche où le

frottement entre les lèvres des microfissures est la cause des déformations résiduelles. Nous suggérons d'en poursuivre l'identification.



# Conclusion générale

La modélisation de l'endommagement anisotrope induit par la sollicitation reste un domaine peu exploré dans la littérature concernant les matériaux quasi-fragiles. Le matériau étudié lors de ce travail de thèse présente toutes les caractéristiques de cette classe de matériaux. Sa microstructure fortement hétérogène comprend de nombreuses interfaces (joints de grains, microfissures) et une part de porosité. A ce titre, un comportement différent est observé en fonction de la direction de sollicitation (traction ou compression) et de la pression.

Dans le cadre de ce travail de thèse, la base expérimentale a été enrichie. La réponse contrainte-déformation élastique anisotrope a été isolée sur quatre essais uniaxiaux (traction et compression simples, essais triaxiaux à 5 et 10 MPa de confinement). La mesure des modules d'élasticité longitudinaux (module d'Young) et transverses a permis d'identifier les dégradations enregistrées le long de ces deux directions et de montrer le développement d'une anisotropie. Celle-ci s'exprime aussi par l'augmentation du coefficient de Poisson « équivalent » (pour un modèle élastique isotrope) au delà de la valeur limite de 0,5. Les évolutions des dégradations tracées en fonction de la plus grande déformation élastique principale positive montre des courbes assez regroupées démontrant un mécanisme d'endommagement préférentiellement de mode I. Quelques essais ont été réalisés pour étudier le comportement du matériau lors de l'alternance d'une tension avec une compression. Lors de la refermeture des fissures (passage de la tension vers la compression), une reprise de raideur est observée. Elle n'est pas totale puisque le module initial n'est pas complètement récupéré. Lors du passage d'une compression à une tension, un changement brusque de comportement est observé pour une contrainte uniaxiale d'environ -2 MPa. Afin de mieux saisir le comportement de ce matériau, quelques essais complémentaires font défauts. Il s'agit par exemple (1) d'essais de torsion et de torsion sous confinement qui permettraient d'observer la dégradation du module de cisaillement et (2) la mesure de l'ellipsoïde d'endommagement à la suite d'une torsion, d'une traction et d'une compression uniaxiale. Notons que la réponse à des sollicitations biaxiales n'est pas disponible actuellement, notamment en ce qui concerne les traction et compression équi-biaxiales. Enfin, il est souhaitable de quantifier la densité et l'orientation des microfissures au sein de la microstructure, et après une première sollicitation, afin d'établir un lien plus direct entre les variables d'endommagement du modèle (ou les densités de microfissures portées par d'autres modèles) et la réalité microstructurale.

Quelques modèles de comportement satisfaisant les principes de la thermodynamique ont été comparés après avoir été traduit dans la base de Walpole. Nous montrons que les modèles n'endommagent pas les mêmes tenseurs élémentaires de cette base. Le modèle de Bargellini et al. [2] se distingue en cela qu'il affecte le module de cisaillement dans le plan d'isotropie mais pas la rigidité volumique du plan d'isotropie. Les autres modèles agissent à l'inverse. Notre choix s'est porté sur l'approche microplan avec décomposition V-D-T car (1) elle offre une grande souplesse au modélisateur à travers ses trois variables de dommages indépendantes et (2) elle permet d'assurer un accroissement du coefficient de contraction avec l'endommagement. A partir d'une analyse numérique réalisée pour un seul système de microfissure, nous avons déterminé les règles permettant de respecter ce dernier point. Enfin, notons qu'une démarche de modélisation phénoménologique plus générale pourrait être proposée directement dans la base de Walpole en affectant chaque tenseur de la base par son propre dommage. A nouveau, des expérimentations discriminantes font défauts pour alléger les modélisations.

Une loi élastique avec endommagement anisotrope, et prise en compte du pré-dommage et de l'effectivité du dommage, a été proposée et identifiée dans le troisième chapitre de cette thèse. En reliant les variables d'effectivité à leur déformation associée, aucune dissipation anormale ne peut intervenir car le modèle se réduit à une loi d'état « élastique non linéaire ». Nous avons pris la précaution d'effectuer les changements d'état ouvert/fermé lorsque la déformation associée à l'effectivité est nulle afin d'annuler le saut de contrainte à cet instant. Notons que l'emploi d'un modèle hypoélastique aurait permis de lever cette contrainte. Le modèle que nous proposons ne permet pas de différencier les modules de cisaillement initiaux en fonction de la pression. Ce « verrou » peut être contourné grâce aux lois d'évolution de l'endommagement mais pour cela, il faut disposer d'essais de torsion avec confinement. L'amplitude de la reprise partielle de raideur lors d'un essai traction-compression est réglée en ajustant la hauteur de la fonction Heaviside de l'effectivité de la composante déviatorique de l'endommagement. Quoi qu'il en soit, deux lois d'évolution de l'endommagement restent nécessaires pour traduire la grande différence entre le dommage enregistré en traction ou en compression. Les mécanismes réels d'endommagement restent donc à étudier car invoquer une dégradation de mode I seule, même anisotrope, ne suffit pas. Parmi les travaux futurs, mentionnons la nécessité de décaler la reprise de raideur pour une valeur de déformation élastique non nulle, tel qu'observé lors des essais alternés. Nous suggérons dans ce cas d'introduire une déformation « stockée » dans la fonction effectivité à l'image de ce qui a été proposé par Bargellini et al. et par Maire et Chaboche [2] [25].

Le modèle a été complété en ajoutant une composante de plasticité. Nous avons fait le choix pragmatique d'une plasticité isotrope plutôt que de l'introduire pour chaque microplan, compte tenu du peu d'information sur ce point. L'approche développée par V.D. Le [56] a été adoptée avec, comme unique différence, un découplage de la plasticité et de l'endommagement grâce à l'utilisation de la contrainte effec-

tive. Le seuil de plasticité a été identifié dans l'espace des contraintes effectives et l'écroutissement est relié au cumul de la vitesse de déformation déviatorique. La dilatance plastique est reliée à la déformation plastique cumulée et à la pression effective. Sans que nous ayons cherché à optimiser précisément les valeurs des paramètres, un bon accord est retrouvé entre les courbes expérimentales et les simulations. Enfin, la part d'irréversibilité attribuée au frottement interne, à la réorganisation locale de l'assemblage granulaire (notamment au sein de la matrice formée des plus petits grains, du liant et de la porosité) ou à la déformation plastique des cristaux n'est pas encore tranchée même si, à l'orée des observations qualitatives disponibles actuellement, le dernier phénomène semble le moins probable.



# **BIBLIOGRAPHIE**



# Bibliographie

- [1] (2004). *Example Problems Manual*. ABAQUS, version 6.5 édition. 17, 96
- [2] BARGELLINI, R. (2006). *Contribution d'une approche discrète à la modélisation de l'endommagement de matériaux microfissurés*. Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique, Chasseneuil-du-Poitou, Vienne, département. 33, 103, 110, 133, 156
- [3] BARGELLINI, R., HALM, D. et DRAGON, A. (2007). Discrete approach for modelling quasi-brittle damage : conditions on the set of directions. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(12):781 – 786. 67
- [4] BARGELLINI, R., HALM, D. et DRAGON, A. (2008). Modelling of quasi-brittle behaviour : a discrete approach coupling anisotropic damage growth and frictional sliding. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(4):564 – 581. 66, 67, 89, 179
- [5] BATDORF, S. et BUDIANSKY, B. (1949). *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, volume Technical Note No. 1871. National Advisory Committee for Aeronautics,. 68
- [6] BAZANT, Z. P., P. P. (1988). Microplane model for brittle plastic material : Part i – theory, part ii – verification. *J. Eng. Mech.*, 114:1672–1702. 69
- [7] BAZANT, Z. et CANER, F. (2005). Microplane model m5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. i : Theory. *J. Eng. Mech.*, 131(1):31–40. 106
- [8] BAZANT, Z., CANER, F., CAROL, I., ADLEY, M. et AKERS, S. (2000). Microplane model m4 for concrete. i : Formulation with work-conjugate deviatoric stress. *J. Eng. Mech.*, 126(9):944–953. 17, 66, 106
- [9] BAZANT, Z. et GAMBAROVA, P. (1981). Rough cracks in reinforced - concrete - closure. *Journal of the Structural Division-ASCE*, 107(7):1377–1378. 66
- [10] BAZANT, Z. P. et GAMBAROVA, P. G. (1984). Crack shear in concrete : Crack band microplane model. *Journal of Structural Engineering*, 110(9):2015–2035. 68

- 
- [11] BAZANT, Z. P. et OH, B. H. (1983). Microplane model for fracture analysis of concrete structures. *Proc. symp. Non-Nucl. Munitions Struct., US Air Force Academy, Springs, Co*, pages 49 – 55. 68, 172
- [12] BAZANT, Z. P. et OH, B. H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(4):559–582. 68
- [13] BEGHINI, A., BAZANT, Z. P., ZHOU, Y., GOUIRAND, O. et CANER, F. C. (2007). Microplane model m5f for multiaxial behavior and fracture of fiber-reinforced concrete. *J. Eng. Mech.*, 133(1):66–75. 68
- [14] BERTHAUD, Y. (1980). *Etude des possibilités de mesure de l'endommagement par des techniques ultrasonores*. Thèse de doctorat, Université ParisVI. 32
- [15] BIENIAWSKI, Z. (1967). Mechanism of brittle fracture of rock : Part ii—experimental studies. *Int. J. Rock. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 4(4):407 – 408, IN13–IN14, 409–418, IN15–IN18, 419–423. 33
- [16] BOEHLER, J. (1987). *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. 63
- [17] CAROL, I., BAZANT, Z. P. et PRAT, P. C. (1991). Geometric damage tensor based on microplane model. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10):2429–2448. 68
- [18] CAROL, I., JIRÀSEK, M. et BAZANT, Z. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stresses. *Int. J. Sol. Struct.*, 38(17):2921 – 2931. 17, 66, 68, 69, 89, 108, 133
- [19] CAROL, I. et WILLAM, K. (1996). Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2939 – 2957. 61, 65, 68
- [20] CASTANEDA, P. P. et WILLIS, J. R. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919 – 1951. 73
- [21] CHABOCHE, J. (1977). Sur l'utilisation des variables d'état internes pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement. *Symp. Franco-Polonais de rhéologie et Mécanique, Cracovie*. 58, 61
- [22] CHABOCHE, J. et LEMAITRE, J. (1978). Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal Mécanique Appliquée*, 2:317–365. 61
- [23] CHABOCHE, J. et LEMAITRE, J. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Paris, cambridge univ. press édition. 57, 61

- [24] CHABOCHE, J.-L. (1992). Damage induced anisotropy : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics*, 1(2):148–171. 61
- [25] CHABOCHE, J.-L. et MAIRE, J.-F. (2002). A new micromechanics based cdm model and its application to cmc's. *Aerospace Science and Technology*, 6(2):131 – 145. 17, 100, 102, 156
- [26] CHALLAMEL, N., HALM, D. et DRAGON, A. (2006). On the non-conservativeness of a class of anisotropic damage models with unilateral effects. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(7):414 – 418. 61, 65
- [27] CHALLAMEL, N., LANOS, C. et CASANDJIAN, C. (2005). Strain-based anisotropic damage modelling and unilateral effects. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(3):459 – 473. 66
- [28] CHEKROUN, M. (2008). *Caractérisation mécanique des premiers centimètres du béton avec des ondes de surface*. Thèse de doctorat, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Nantes. 15, 37
- [29] CHOW, C. L. et WANG, J. (1987). An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(5):547 – 558. 61
- [30] CORDEBOIS, J. et SIDOROFF, F. (1979). Anisotropie élastique induite par endommagement. *Colloque Euromech, Grenoble*, 295(295):115. 58
- [31] CORMERY, F. et WELEMANE, H. (2002). A critical review of some damage models with unilateral effect. *Mech. Res. Com.*, 29(5):391 – 395. 64
- [32] CORMERY, F. et WELEMANE, H. (2010). A stress-based macroscopic approach for microcracks unilateral effect. *Comp. Mat. Sci.*, 47(3):727 – 738. 66, 98
- [33] DAUTRIAT, J. (2009). *Comportement hydromécanique de roches réservoir sous contraintes, Relations entre évolution de perméabilité et échelles des mécanismes d'endommagement*. Thèse de doctorat, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Palaiseau. 15, 28
- [34] DEUDÉ, V., DORMIEUX, L., KONDO, D. et PENSÉE, V. (2002). Propriétés élastiques non linéaires d'un milieu mésocraqué non linear elastic properties of a mesocracked medium. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(8):587 – 592. 97
- [35] DIENES, J., ZUO, Q. et KERSHNER, J. (2006). Impact initiation of explosives and propellants via statistical crack mechanics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(6):1237 – 1275. 74

- [36] DIENES, J. K. (1996). *High-Pressure Shock Compression of Solids II*, chapitre Unified Theory of Flow, Hot Spots, and Fragmentation with an Application to Explosive Sensitivity, pages 366 – 398. Springer-Verlag. 66, 74, 89
- [37] DOANH, T. (1984). *Contribution à l'étude du comportement de la kaolinite*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Chatenay Malabry. 15, 31, 32
- [38] EKH, M., MENZEL, A., RUNESSON, K. et STEINMANN, P. (2003). Anisotropic damage with the mcr effect coupled to plasticity. *International Journal of Engineering Science*, 41(13-14):1535 – 1551. Damage and failure analysis of materials. 66
- [39] ESHELBY, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Mathematical and Physical Sciences*, 241:376–396. 95
- [40] HALM, D. et DRAGON, A. (1998). An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(3):439 – 460. 61, 63, 64, 67
- [41] HICHER, P. et SHAO, J. F. (2002). *Elastoplasticité des sols et des roches - Modèle de comportement des sols et des roches 1*. Hermès Science Publications. 139
- [42] HOMAND, F. (2002). *Endommagement des granites et argilites*, volume 6. Revue française de génie civil. 15, 29, 32, 33
- [43] HOXHA, D., LESPINASSE, M., SAUSSE, J. et HOMAND, F. (2005). A microstructural study of natural and experimentally induced cracks in a granodiorite. *Tectonophysics*, 395(1-2):99 – 112. 32, 33
- [44] KACHANOV, L. (1958). On the time to failure under creep conditions. *Izv. AN SSR, Otd. Tekhn. Nauk.*, 8:26–31. 56, 61
- [45] KACHANOV, M. (1993). Elastic solids with many cracks and related problems. volume 30 de *Advances in Applied Mechanics*, pages 259 – 445. Elsevier. 98
- [46] KRAJGINOVIC, D. (1996). *Damage Mechanics*, volume 41. North-Holland. 172
- [47] KRAJGINOVIC, D. et FONSEKA, G. U. (1981). The continuous damage theory of brittle materials, parts i and ii. *Journal of Applied Mechanics*, 48:809–824. 61
- [48] KRANZ, R. L. (1983). Microcracks in rocks; a review. *Tectonophysics*, 100(1-3):449 – 480. Continental Tectonics; Structure, Kinematics and Dynamics. 33

- [49] KUHL, E. et RAMM, E. (2000). Microplane modelling of cohesive frictional materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 133
- [50] KUHL, E., RAMM, E. et de BORST, R. (2000). An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2):87 – 103. 68
- [51] KUHL, E., STEINMANN, P. et CAROL, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part ii. dissipation and inelastic constitutive modeling. *International Journal of Solids and Structures*, 38(17):2933 – 2952. 66, 107, 108
- [52] KUNIN, I. A. (1981). An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 19(12):1551–1561. 75, 171, 174, 175, 177
- [53] LADEVEZE, P. (1983). *Sur une théorie de l'endommagement anisotrope*. Rapport interne no 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan. 61
- [54] LAVROV, A., VERVOORT, A. et WEVERS, M. (2003). Anisotropic damage formation in brittle rock; experimental study by means of acoustic emission and kaiser effect. *J. Phys. IV France*, 105:321–328. 33
- [55] LE, V., GRATTON, M., CALIEZ, M., FRACHON, A. et PICART, D. (2010). Experimental mechanical characterization of plastic-bonded explosives. *Journal of Materials Science*, 45(21):5802–5813. 19, 135, 138
- [56] LE, V.-D. (2007). *Modélisation et identification du comportement plastique visco-élastique endommageable d'un matériau agrégataire*. Thèse de doctorat, Université François Rabelais de Tours. 11, 15, 23, 25, 27, 35, 39, 41, 43, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 156
- [57] LEMAITRE, J., DESMORAT, R. et SAUZAY, M. (2000). Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(2):187 – 208. 66
- [58] LEUKART, M. (2005). *Endommagement anisotrope et plasticité dans la cohésion des matériaux de friction*. Thèse de doctorat, Université de Stuttgart Institut pour l'analyse structurelle. 133
- [59] LEUKART, M. et RAMM, E. (2003). A comparison of damage models formulated on different material scales. *Computational Materials Science*, 28(3-4):749 – 762. Twelfth International Workshop on Computational Mechanics of Materials. 17, 68, 70, 71
- [60] LITEWKA, A. et SZOJDA, L. (2006). Damage, plasticity and failure of ceramics and cementitious composites subjected to multi-axial state of stress. *International Journal of Plasticity*, 22(11):2048 – 2065. 33

- [61] LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S. et OÑATE, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299 – 326. 94
- [62] MAIRE, J. et CHABOCHE, J. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 1(4):247 – 257. 17, 61, 62, 64, 100
- [63] MARIGO, J.-J. (1980). *Propagation des ondes ultrasonores et microfissuration du béton*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris). 29, 32
- [64] MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI. 33, 92
- [65] MAZARS, J. (1986). A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):729 – 737. 17, 61, 92, 94
- [66] MURAKAMI, S. et KAMIYA, K. (1997). Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(4):473 – 486. 61
- [67] PATERSON, M. (1978). *Experimental Rock Deformation : The Brittle Field*. Springer-Verlag, Berlin. 33
- [68] PECQUEUR, G. (1995). *Etude expérimentale et modélisation du comportement d'une craie et d'un grès en torsion*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1. 15, 28, 30, 33, 35, 83
- [69] PECQUEUR, G., MIKOLAJEZAK, A., SIAWAK, J. M. et DRAGON, A. (1996). Validation of an anisotropic damage model under torsional loading. ISBN 90 5410843 6. Barla. 29
- [70] PENSEE, V. (2002). *Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésofissuration*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1. 95
- [71] PICART, D. (1993). *Comportement et mise en forme d'un explosif agrégataire*. Thèse de doctorat, L'École Nationale Supérieure de Cachan. 36
- [72] PICART, D., DAMIANI, D. et DOUCET, M. (2012). The reverse edge-on impact test ; a small scale experiment for non-shock ignition studies. *AIP Conference Proceedings*, 1426(1):497–500. 15, 16, 38, 39
- [73] RABOTNOV, Y. N. (1968). Progress in applied mechanics. *Division of Technical Sciences*, pages 307–315. 16, 56, 61

- [74] RAMTANI, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial de béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI. 15, 30, 31, 35, 40, 63
- [75] RJAFIALLAH, S. (2006). *Modélisation du comportement mécanique d'un matériau agrégataire*. Thèse de doctorat, Université François Rabelais de Tours. 23, 39, 138
- [76] SCHOLZ, C. (1968). Experimental study of the fracturing process in brittle rock. *J. Geophys. Res.*, 73(4):1447–1454. 15, 29
- [77] TAPPONIER, P. et BRACE, W. (1976). Developpement of stress induced microcracks in westerly granite. *Int. J. Rock. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 13:103–112. 33
- [78] TAYLOR, G. I. (1938). Plastic strain in metals. *Journal Institute of Metals*, 62:307–324. 68
- [79] TRUMEL, H., LAMBERT, P. et BELMAS, R. (2010). Mesoscopic investigations of the deformation and initiation mechanisms of a hmx-based pressed composition. In *Fourteenth Int. Detonation Symp.*, page 1096. Office of Naval Research publication number 351-10-185. 37, 38
- [80] TRUMEL, H., ROCHER, D., LAMBERT, P., LABRUNIE, M. et GALLIC, C. L. (2005). Low velocity impact ignition of a hmx-based composition : first microstructural results. *Workshop on Explosive Behavior*. 15, 16, 37, 40
- [81] VIAL, J., PICART, D., BAILLY, P. et DELVARE, F. (2013). Numerical and experimental study of the plasticity of hmx during a reverse edge-on impact test. *Model. and Simul. in Mat. Sci. and Eng.*, 21(4). 17, 41, 113
- [82] WALPOLE, L. (1981). Elastic behavior of composite materials : Theoretical foundations. volume 21 de *Advances in Applied Mechanics*, pages 169 – 242. Elsevier. 75, 171
- [83] WELEMANE, H. (2002). *Une modélisation des matériaux microfissurés. Application aux roches et aux bétons*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1. 61, 65, 98, 99
- [84] WONG, T.-F. (1982). Micromechanics of faulting in westerly granite. *Int. J. of Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 19(2):49 – 64. 33
- [85] WU, J.-Y. (2009). An alternative approach to microplane theory. *Mechanics of Materials*, 41(2):87 – 105. 70

- [86] ZHAO, Y. (1998). Crack pattern evolution and a fractal damage constitutive model for rock. *Int. J. Rock. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 35(3):349 – 366. 15, 32, 34
- [87] ZHU, Q. (2006). *Applications des approches d’homogénéisation à la modélisation tridimensionnelle de l’endommagement des matériaux quasi fragiles : formulations, validations et implémentations numériques*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1. 66, 95
- [88] ZHU, Q., fu SHAO, J. et KONDO, D. (2008a). A micromechanics-based non-local anisotropic model for unilateral damage in brittle materials. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(3):320 – 328. 72, 73
- [89] ZHU, Q., KONDO, D. et SHAO, J. (2008b). Micromechanical analysis of coupling between anisotropic damage and friction in quasi brittle materials : Role of the homogenization scheme. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5): 1385 – 1405. 66, 89

# ANNEXES



# Annexe A

## Expression des modèles comparés dans la base de Walpole

### A.1 Présentation de la base de Walpole

On synthétise dans cette section la base introduite par Walpole [82] pour l'étude des tenseurs isotropes transverses (cf. également Kunin [52] pour une approche similaire). On considère un système de microfissures parallèles de normale  $\mathbf{n}$ . Les tenseurs de projection de cette base s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_2 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_3 = \mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{E}_4 = \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{a} + \mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbb{E}_5 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} \quad , \quad \mathbb{E}_6 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{N} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{a} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathbf{1}$  le tenseur identité d'ordre 2 (symbole de Kronecker).

Il est facile de vérifier que  $\forall p, q, 1, \dots, 4$

$$\mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = \mathbb{E}_q \quad \text{si } p = q, \quad \mathbb{E}_p : \mathbb{E}_q = 0 \quad \text{si } p \neq q, \quad (\text{A.4})$$

et que

$$\mathbb{E}_4 : \mathbb{J} = \mathbb{J} : \mathbb{E}_4 = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbb{E}_4 : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{E}_4 = \mathbb{E}_4 \quad (\text{A.5})$$

Tout tenseur  $\mathbb{L}$  d'ordre quatre isotrope transverse s'écrit comme une combinaison linéaire des six tenseurs élémentaires  $\mathbb{E}_i$  définis ci-dessus :

$$\mathbb{L} = l_1 \mathbb{E}_1 + l_2 \mathbb{E}_2 + l_3 \mathbb{E}_3 + l_4 \mathbb{E}_4 + l_5 \mathbb{E}_5 + l_5 \mathbb{E}_6 \quad (\text{A.6})$$

pour une écriture plus légère, par la suite on notera les coordonnées liée à la base sous la forme :

## A.2. EXPRESSION DES QUELQUES TENSEURS USUELLES DANS LA BASE DE WALPOLE

---

$$\mathbb{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_5\} \quad (\text{A.7})$$

l'inverse du tenseur  $\mathbb{L}$  d'ordre 4 est alors :

$$\mathbb{L}^{-1} = \left\{ \frac{l_2}{\Delta}, \frac{l_1}{\Delta}, \frac{1}{l_3}, \frac{1}{l_4}, -\frac{l_5}{\Delta}, -\frac{l_5}{\Delta} \right\} \quad (\text{A.8})$$

avec :  $\Delta = l_1 l_2 - 2l_5^2$ . En notant  $\mathbb{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_5\}$ , le produit doublement contracté de  $\mathbb{L}$  et  $\mathbb{M}$  s'écrit :

$$\mathbb{L} : \mathbb{M} = \{l_1 m_1 + 2l_5 m_5, l_2 m_2 + 2l_5 m_5, l_3 m_3, l_4 m_4, l_5 m_1 + l_2 m_5, l_5 m_2 + l_1 m_5\} \quad (\text{A.9})$$

Les exemples précédents illustrent la simplicité de ces opérations dans cette base. À titre d'illustration les tenseurs de la base de Walpole sont écrits en notation de Voigt pour une direction  $\mathbf{n}(1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{E}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{E}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \mathbb{E}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{E}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbb{E}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## A.2 Expression des quelques tenseurs usuelles dans la base de Walpole

On peut décomposer les tenseurs identité d'ordre 4 et la partie volumique et déviatorique de ce tenseur dans la base de Walpole sous la forme suivante :

$$\mathbb{I} = \{1, 1, 1, 1, 0, 0\}, \mathbb{J} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \mathbb{K} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right\} \quad (\text{A.10})$$

On exprime le tenseur d'élasticité isotrope :

$$\mathbb{C}^{el} = \left\{ \left(2k + \frac{2}{3}\mu\right), \left(k + \frac{4}{3}\mu\right), 2\mu, 2\mu, \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \right\} \quad (\text{A.11})$$

En se basant sur les relations déduites des travaux de Bazant et Oh[11] et Krajinovic [46], on obtient après intégration des tenseurs de cette base sur la sphère unité les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbb{E}_1 d\Omega &= \frac{2}{3}\mathbb{J} + \frac{1}{15}\mathbb{K} \quad , \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbb{E}_2 d\Omega = \frac{1}{3}\mathbb{J} + \frac{2}{15}\mathbb{K} \quad , \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbb{E}_3 d\Omega = \frac{2}{5}\mathbb{K} \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbb{E}_4 d\Omega &= \frac{2}{5}\mathbb{K} \quad , \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) d\Omega = \frac{2}{3}\mathbb{J} - \frac{2}{15}\mathbb{K} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

### A.3 Matrice de passage entre la base de Kunin et celle de Walpole

Pour construire une matrice de passage on écrit les tenseurs de la base de Walpole en fonction des tenseurs de la base de Kunin :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

le tenseur  $\mathbb{E}_2$  est déduit de manière directe :

$$\mathbb{E}_2 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{N} \quad (\text{A.14})$$

on calcule le tenseur  $\mathbb{E}_3$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3 &= \mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{N}) - \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \\ &= \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{N} - \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N} - \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \mathbb{E}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_4 &= \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{a} + \mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{N} \\ &= \mathbf{N} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{N}) + (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \underline{\otimes} \mathbf{N} \\ &= \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N} - 2 \mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_5 &= \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} \\ &= \mathbf{N} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{N}) = \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_6 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{N} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{N}) \otimes \mathbf{N} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

Kunin propose d'écrire sa base de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_1 &= \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} = \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4 \\ \mathbb{K}_2 &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = 2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6 \\ \mathbb{K}_3 &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbb{K}_4 &= \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbb{K}_5 &= \frac{1}{2} (\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{1}) \\ \mathbb{K}_6 &= \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

$$\mathbb{K}_6 = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (\text{A.20})$$

On construit une matrice de passage reliant la base de Kunin [52] utilisée classiquement pour l'élaboration des modèles précédents et celle de Walpole :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_1 \\ \mathbb{K}_2 \\ \mathbb{K}_3 \\ \mathbb{K}_4 \\ \mathbb{K}_5 \\ \mathbb{K}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} \\ \frac{1}{2} (\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N} + \mathbf{N} \overline{\otimes} \mathbf{1}) \\ \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_2 \\ \mathbb{E}_3 \\ \mathbb{E}_4 \\ \mathbb{E}_5 \\ \mathbb{E}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

## A.4 Uniformisation des écritures des modèles dans la base de Walpole

Dans cette section on présentera les calculs analytiques menant à l'écriture des modèles dans la base de Walpole choisi comme base de comparaison .

### A.4.1 Approche discrète de Bargellini

L'approche discrète de Bargellini est déjà écrite dans la base de Kunin sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{ed}(\rho_i, \mathbf{N}_i) &= \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} \\ &- \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \alpha [2 \mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{1}] \\ &+ 2\beta [\mathbf{1} \overline{\otimes} \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \overline{\otimes} \mathbf{1}] \\ &- (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \}\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

$$- (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{A.23})$$

On remplace les tenseurs de la base de Kunin par leur équivalents de la base de Walpole comme indiqué dans la matrice de passage : on remplace les tenseurs de Kunin par leur équivalents de la base de Walpole dans l'écriture de rigidité.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{ed}(\rho_i, \mathbf{N}_i) &= \sum_{i=1}^N \left( k - \frac{2}{3}\mu \right) (2\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) + 2\mu (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) \\
&- \rho_i \{ \alpha [2 (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) \\
&- (2\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) + (2\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6)] \\
&+ 2\beta (2\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_4) - (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i)) \mathbb{E}_2 \} \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{ed}(\rho_i, \mathbf{N}_i) &= \sum_{i=1}^N \left( 2k + \frac{2}{3}\mu \right) \mathbb{E}_1 + \left( k + \frac{4}{3}\mu \right) \mathbb{E}_2 \\
&+ 2\mu (\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) + \left( k - \frac{2}{3}\mu \right) (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (\text{A.25}) \\
&- \rho_i \{ [3\alpha + 4\beta - (3\alpha + 4\beta) H(-tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}_i))] \mathbb{E}_2 \\
&+ 2\alpha \mathbb{E}_3 + 2(\alpha + \beta) \mathbb{E}_4 \} \quad (\text{A.26})
\end{aligned}$$

### A.4.2 Formulations V-D-T des modèles microplans

Le tenseur de rigidité endommagé global en formulation V-D-T s'écrit sous cette forme :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \{ k_V (1 - d_V) \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mu_D (1 - d_D) \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mu_T (1 - d_T) \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \} d\Omega \quad (\text{A.27})$$

avec  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{T}$  sont respectivement les tenseurs de projection volumique déviatorique et tangentiel. Ces tenseurs s'expriment :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{A.28})$$

on écrit l'expression de produit tensoriel de ces tenseurs avec eux mêmes dans la la base de Kunin [52].

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} = \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} = \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) \otimes \left( \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{A.31})$$

$$(\text{A.32})$$

on pose  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  et on remplace dans l'équation précédente :

$$\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{1}) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (\text{A.34})$$

pour des raison de simplicité, on passe en écriture indicielle

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ijp}^T \mathbf{T}_{pkl} &= (\mathbf{n}_m \mathbf{I}_{ijpm} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p) (\mathbf{n}_r \mathbf{I}_{rpkl} - \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l) \\ &= \mathbf{n}_m \mathbf{I}_{ijpm} \mathbf{n}_r \mathbf{I}_{rpkl} - \mathbf{n}_m \mathbf{I}_{ijpm} \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l - \mathbf{n}_r \mathbf{I}_{rpkl} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p \\ &\quad + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \\ &= \mathbf{n}_m \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jm} + \delta_{jp} \delta_{im}) \mathbf{n}_r \frac{1}{2} (\delta_{rk} \delta_{pl} + \delta_{pk} \delta_{rl}) \\ &\quad - \mathbf{n}_m \frac{1}{2} (\delta_{ip} \delta_{jm} + \delta_{jp} \delta_{im}) \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \\ &\quad - \mathbf{n}_r \frac{1}{2} (\delta_{rk} \delta_{pl} + \delta_{pk} \delta_{rl}) \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{n}_m \mathbf{n}_r (\delta_{ip} \delta_{jm} \delta_{rk} \delta_{pl} + \delta_{ip} \delta_{jm} \delta_{pk} \delta_{rl} + \delta_{jp} \delta_{im} \delta_{rk} \delta_{pl} \\ &\quad + \delta_{jp} \delta_{im} \delta_{pk} \delta_{rl}) - \mathbf{n}_m \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jm} - \mathbf{n}_m \mathbf{n}_p \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \frac{1}{2} \delta_{jp} \delta_{im} \\ &\quad - \mathbf{n}_r \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p \frac{1}{2} \delta_{rk} \delta_{pl} - \mathbf{n}_r \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_p \frac{1}{2} \delta_{pk} \delta_{rl} + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{n}_m \mathbf{n}_r (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{rk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{rl} + \delta_{jl} \delta_{im} \delta_{rk} + \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{rl}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{n}_j \mathbf{n}_i \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l + \mathbf{n}_k \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_l + \mathbf{n}_l \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k) \\ &\quad + \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \\ (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T})_{ijkl} &= \frac{1}{4} (\delta_{il} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k + \delta_{ik} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_l + \delta_{jl} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_k + \delta_{jk} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_l) - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \mathbf{n}_k \mathbf{n}_l \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

cette forme est équivalente en écriture tensorielle à :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} &= \frac{1}{2} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}) - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

on déduit la forme du tenseur de rigidité dans la base de Kunin [52] :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} = & \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \otimes \overline{\mathbf{1}} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left\{ d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right. \\ & + d_D \mu_D \left[ \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}_i \right] \\ & \left. + d_T \mu_T \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{1} \otimes \overline{\mathbf{N}} + \overline{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{1}) - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

à l'aide de la matrice de passage, on exprime cette rigidité dans la base de Walpole :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} = & \sum_{i=1}^N \left\{ \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) + 2\mu (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) \right. \\ & - d_V \frac{k}{3} (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \\ & - d_D \mu_D \left[ \frac{1}{9} (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) - \frac{1}{3} (2 \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) + \mathbb{E}_2 \right] \\ & \left. - d_T \mu_T \left[ \frac{1}{2} (2 \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_4) - \mathbb{E}_2 \right] \right\} w_i \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

on en déduit l'écriture suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} = & \sum_{i=1}^N \left\{ \left(2k + \frac{2}{3}\mu\right) \mathbb{E}_1 + \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \mathbb{E}_2 + 2\mu (\mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right) (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \right. \\ & - d_V \frac{k}{3} (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \\ & \left. - d_D \mu_D \left[ \frac{2}{9} (\mathbb{E}_1 + 2 \mathbb{E}_2 - (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6)) \right] - d_T \mu_T \frac{1}{2} \mathbb{E}_4 \right\} w_i \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

après simplification on obtient l'expression suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = 2\left(k + \frac{1}{3}\mu\right)(1 - d_1)\mathbb{E}_1 + \left(k + \frac{4}{3}\mu\right)(1 - d_2)\mathbb{E}_2 + 2\mu(1 - d_3)\mathbb{E}_3 \quad (\text{A.40})$$

$$+ 2\mu(1 - d_4)\mathbb{E}_4 + \left(k - \frac{2}{3}\mu\right)(1 - d_5)(\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} d_1 = \frac{\frac{2}{9}[d_V k_V + d_D \mu_D]}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{\frac{1}{9}[d_V k_V + d_D 4\mu_D]}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 = 0 \quad , \quad d_4 = \frac{d_T \mu_T}{4\mu} \quad , \quad d_5 = \frac{\frac{1}{9}[d_V k_V - d_D 2\mu_D]}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

### A.4.3 Formulation V-D des modèles microplans

Le tenseur de rigidité endommagé s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^{ed} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left\{ k_V(1 - d_V) \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + 2\mu_D(1 - d_D) \mathbf{Dev}^T \cdot \mathbf{Dev} \right\} d\Omega \quad (\text{A.43})$$

avec :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{Dev} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^{dev} \quad , \quad \mathbf{Dev}^T = \mathbf{I}^{dev} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.44})$$

en remplaçant les tenseurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{Dev}$  par leurs relations respectives, on peut écrire le tenseur de rigidité endommagé en fonction des variables d'endommagement  $d_V$ ,  $d_D$  dans la base de Kunin :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= \left( k - \frac{2}{3} \mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ d_V \frac{k}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + d_D 2\mu \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{2} (\mathbf{N} \underline{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{N}) - \frac{1}{3} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{N}) + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

on remplace les tenseurs de la base de Kunin par leur correspondant de la base de Walpole

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ed} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left( k - \frac{2}{3} \mu \right) (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) + 2\mu (\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4) \right. \\ &\quad - d_V \frac{k}{3} (2 \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \\ &\quad \left. - d_D \frac{2}{9} \mu \left( 2 \mathbb{E}_1 + 4 \mathbb{E}_2 + \frac{9}{2} \mathbb{E}_4 - 2 (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) \right) \right\} w_i \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

on simplifiant l'écriture le tenseur de rigidité endommagé peut s'écrire sous la forme [A.40](#) avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\frac{2}{9} [d_V 3k + d_D 2\mu]}{2k + \frac{2}{3}\mu} \quad , \quad d_2 = \frac{\frac{1}{9} [d_V 3k + d_D 8\mu]}{k + \frac{4}{3}\mu} \\ d_3 &= 0 \quad , \quad d_4 = \frac{d_D}{2} \quad , \quad d_5 = \frac{\frac{1}{9} [d_V 3k - d_D 4\mu]}{k - \frac{2}{3}\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

# Annexe B

## Modèle VDT couplé avec l'effectivité et le glissement avec frottement

### B.1 Formulation thermodynamique :

Les constats phénoménologiques des matériaux quasi-fragiles analysés dans le premier chapitre montrent qu'il existe des hystérésis dus à un mécanisme irréversible. Ce mécanisme peut être assimilé à un glissement avec frottement entre les lèvres des microfissures (considérées rugueuses) intra-granulaire et un frottement au niveau des surfaces des grains. Pour introduire ce mécanisme dans le modèle VDT amélioré, on considère que ce mécanisme est lié à chaque famille de microfissures de direction donnée et qu'il n'y a pas d'interaction entre les mécanismes. Le comportement global de ce mécanisme est la somme des contributions dans chaque direction (comme pour l'endommagement). On se basera aussi sur les résultats de l'analyse du modèle de Bargellini [4] dans la section 3.1.6. Le glissement avec frottement sera dissipatif que lorsque les microfissures sont fermées. Il sera introduit au niveau de la partie tangentielle. La variable associée à ce mécanisme sera les déformations anélastiques tangentielles  $\boldsymbol{\varepsilon}_T^p$ . On réécrit alors l'énergie libre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Psi^{mic} &= \frac{1}{2}k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) (\varepsilon_V - \varepsilon_V^p)^2 + \frac{1}{2}\mu_D (1 - \alpha_D(\varepsilon_D) d_D) (\varepsilon_D - \varepsilon_D^p)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)]\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Les effectivités sur la partie volumique  $\alpha_V$  et déviatorique  $\alpha_D$  seront liées à leur variables observables respectives  $\varepsilon_V$  et  $\varepsilon_D$ . De ce fait la partie volumique et déviatorique de l'énergie libre, précédemment analysée, est inchangée. Dans cette section, l'étude est focalisée plutôt sur la dissipation tangentielle. La fonction d'effectivité

$\alpha_T$  dépendra d'une grandeur cinématique  $X_T$ . On écrit la dissipation à l'échelle du microplan sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \boldsymbol{\sigma}_V \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_V + \boldsymbol{\sigma}_D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

si on calcul le taux d'énergie à l'échelle du microplan on obtient :

$$\dot{\Psi}^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (\text{B.3})$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D \quad (\text{B.4})$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial X_T} \dot{X}_T \quad (\text{B.5})$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \quad (\text{B.6})$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_T^P} \dot{\varepsilon}_T^P \quad (\text{B.7})$$

ainsi, on écrit le taux d'énergie à l'échelle du microplan sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}^{mic} = k_V \left[ (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V + \frac{1}{2} k_V \frac{\partial \alpha_V}{\partial \varepsilon_V} d_V \varepsilon_V^2 \right] \dot{\varepsilon}_V \quad (\text{B.8})$$

$$+ \mu_D \left[ (1 - \alpha_D(\varepsilon_D) d_D) \varepsilon_D + \frac{1}{2} \mu_D \frac{\partial \alpha_D}{\partial \varepsilon_D} d_D \varepsilon_D^2 \right] \dot{\varepsilon}_D \quad (\text{B.9})$$

$$+ \mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (\text{B.10})$$

$$- \frac{1}{2} \mu_T \left[ \frac{\partial \alpha_T}{\partial X_T} d_T (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)^2 \right] \dot{X}_T \quad (\text{B.11})$$

$$- \mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\varepsilon}_T^P \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{\Psi}^{mic} = \sigma_V \dot{\varepsilon}_V + \sigma_D \dot{\varepsilon}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - F_X \dot{X}_T - \mathbf{F}_T^P \dot{\varepsilon}_T^P \quad (\text{B.13})$$

Sous l'hypothèse d'une effectivité non dissipative, le terme dissipatif dû à l'effectivité [B.11](#) doit être nul quelque soit  $\dot{X}_T$ . Pour se faire, on choisi pour la fonction d'effectivité  $\alpha_T$  la fonction d'Heaviside  $H(X_T)$  pour gérer l'ouverture-fermeture en fonction du paramètre cinématique  $X_T$ . Car la dérivé de cette fonction est toujours nulle sauf à  $X_T = 0$ . Pour lier le mécanisme de frottement à la l'ouverture fermeture des fissures, ce paramètre cinématique  $X_T$  est assimilé à une déformation équivalente normale  $\varepsilon_{eq}^N$  qui va piloter l'effectivité et l'écoulement dû frottement sans glissement :

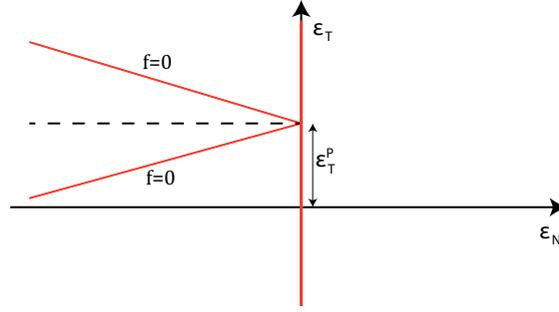


FIGURE B.1 – Modèle rhéologique de la partie tangentielle

1.  $(\varepsilon_{eq}^N \leq 0)$  : Les microfissures sont fermées. l'endommagement n'est pas effectif et il y'a écoulement avec frottement.
2.  $(\varepsilon_{eq}^N > 0)$  : Les microfissures sont ouvertes. l'endommagement est effectif et il n' y a pas d'écoulement avec frottement car les microfissures sont ouvertes.
3.  $(\varepsilon_{eq}^N = 0)$  Les microfissures sont fermées. L'endommagement n'est pas effectif. La variable de déformation due au frottement tangentiel  $\varepsilon_T^p$  doivent se situer sur le nez du critère. De ce fait elle sera initialisée à la valeur courante  $\varepsilon_T$ . Avec cette première condition on garantira un saut d'énergie nul au moment de l'ouverture fermeture. À  $\varepsilon_{eq}^N = 0$ , la force thermodynamique normale doit être nulle ( $F_{eq}^N = 0$ ). De ce fait, une deuxième condition s'impose pour lier la force thermodynamique normale  $F_{eq}^N$  à la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}^N$  par un module normal équivalent  $E_{eq}$ , on écrit alors :

$$F_{eq}^N = E_{eq}\varepsilon_{eq}^N \quad (B.14)$$

avec  $E_{eq} = \frac{3k_V\mu_D}{k_V+\mu_D}$  est un module équivalent normal exprimé en fonction de du module de compressibilité  $k_V$  et de cisaillement déviatorique  $\mu_D$ . Pour mieux comprendre la phénoménologie de ce mécanisme de glissement avec frottement à une direction donnée, on trace le modèle rhéologique représentatif pour la partie tangentielle (figure B.2). Le modèle contient deux branches :

- Fissures ouvertes ( $\alpha_T(\varepsilon_{eq}^N) = 1$ ) : La branche supérieure, seule, est active. L'endommagement est effectif et il n'existe aucun glissement avec frottement entre les lèvres des fissures.
- Fissures fermées ( $\alpha_T(\varepsilon_{eq}^N) = 0$ ) : les deux branches sont actives. L'endommagement n'est pas effectif (les deux effets de dommage sur les deux ressorts s'annulent entre eux). Mais il a glissement avec frottement.

La déformation anélastique due au glissement avec frottement est lié à la force thermodynamique tangentielle  $F_T$  et une force non associée  $F_{eq}^N$  pour faire dépendre le glissement à la pression de confinement. Dans la section suivante les critères d'écoulement de l'endommagement et du frottement seront présentés.

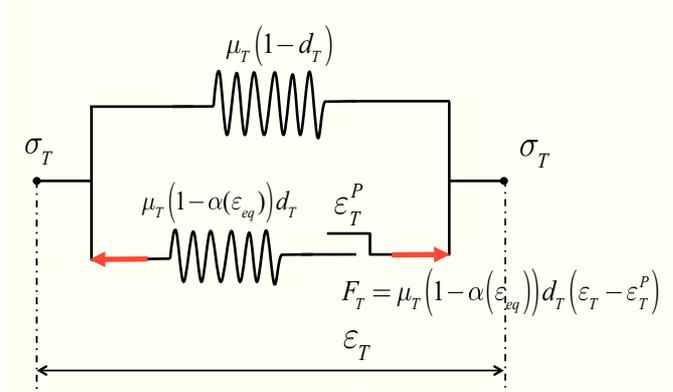


FIGURE B.2 – Modèle rhéologique de la partie tangentielle

### B.1.1 Consistance thermodynamique du modèle au passage ouvert-fermé :

Pour vérifier la consistance thermodynamique de ce modèle VDT avec prise en compte de l'effet unilatéral et du frottement entre lèvres des microfissures, on réécrit l'énergie en prenant en compte toutes les conditions pour une formulation consistante thermodynamiquement. On vérifie que le saut d'énergie au moment du passage ouvert fermé est bien nul. Pour se faire on prend à titre d'exemple la fonction de Heaviside comme fonction d'effectivité et on écrit :

$$\begin{aligned}
 [\Psi] = \Psi^f - \Psi^o &= \frac{1}{2} \{ E_V d_V \varepsilon_V^2 + \mu_D d_D \varepsilon_D^2 \} \\
 &+ \mu_T d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \cdot (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \} = 0 \quad (B.15)
 \end{aligned}$$

le passage ouvert/fermé se fait à  $\varepsilon_{eq}^N = 0$ . Pour que le saut d'énergie soit nul il faut que  $\varepsilon_T = \varepsilon_T^p$ . La contrainte à l'échelle du microplan peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{mic} = k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V \mathbf{V} + \mu_D (1 - \alpha_D(\varepsilon_D) d_D) \varepsilon_D \mathbf{D} \quad (B.16)$$

$$+ \mu_T \left[ (1 - d_T) \varepsilon_T + H(\varepsilon_{eq}^N) d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \right] \cdot \mathbf{T} \quad (B.17)$$

on vérifiera que le saut de contrainte est nul avec les mêmes conditions que celles du saut d'énergie :

$$\begin{aligned}
 [\boldsymbol{\sigma}^{mic}] &= k_V d_V \varepsilon_V \mathbf{V} + \mu_D d_D \varepsilon_D \mathbf{D} \\
 &+ \mu_T d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (B.18)
 \end{aligned}$$

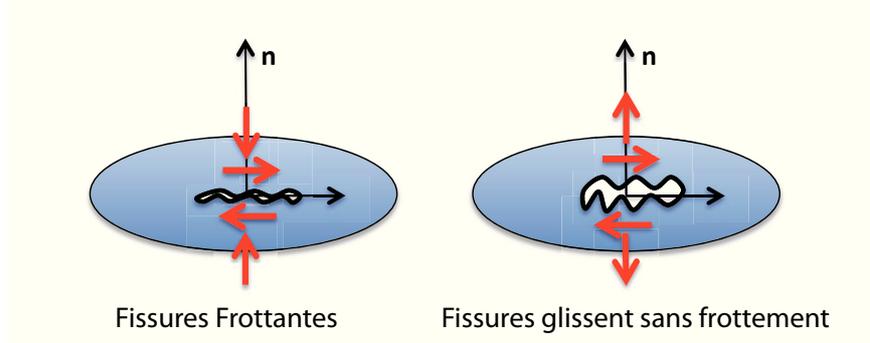


FIGURE B.3 – Représentation schématique de microfissures frottantes dans le cas ouvert ou fermé

## B.1.2 Lois d'écoulement :

### B.1.2.1 Critères d'évolution du glissement avec frottement :

Dans cette section, on s'intéresse à modéliser le comportement macroscopique induit par des fissures frottantes. Pour un système de microfissures ayant la même direction, on suppose que les lèvres des microfissures ne frottent que si elles sont fermées. On fait l'hypothèse d'uniformité des contraintes sur ces lèvres de microfissures. Lors de l'ouverture on considère que le glissement entre ces lèvres se fait sans frottement. Le comportement global sera obtenu par la sommation des mécanismes de chaque direction de l'espace angulaire. La figure B.3 schématise les mécanismes microstructuraux dans le cas ouvert et fermé.

La dissipation avec les nouveaux variables s'écrit alors sous la forme suivante :

$$W^d = \sigma^{mic} \cdot \dot{\varepsilon}^{mic} - \dot{\Psi}^{mic} = \begin{Bmatrix} \sigma_V \\ \sigma_D \\ \sigma_T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_V \\ \dot{\varepsilon}_D \\ \dot{\varepsilon}_T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_V \\ \sigma_D \\ \sigma_T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_V \\ \dot{\varepsilon}_D \\ \dot{\varepsilon}_T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_X \\ F_D^P \\ \mathbf{F}_T^P \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{eq}^N \\ \dot{\varepsilon}_D^P \\ \dot{\varepsilon}_T^P \end{Bmatrix} \quad (B.19)$$

On postule qu'il existe un domaine de réversibilité  $f(\mathbf{F}_T^P, F_D^P) \leq 0$  pour chaque microplan. Ce domaine de réversibilité est écrit dans l'espace des forces thermodynamiques  $\mathbf{F}_T^P$  et  $F_D^P$  associées, respectivement, aux variables internes de glissement  $\varepsilon_T^P$  et  $\varepsilon_D^P$ . Un critère de glissement est défini à  $f(\mathbf{F}_T^P, F_D^P) = 0$ . Cette fonction de charge  $f$  est exprimée à l'échelle du microplan à partir des forces thermodynamiques tangentielle  $\mathbf{F}_T^P$  et déviatorique  $F_D^P$  B.19 associée à  $\varepsilon_T^P$ ,  $\varepsilon_D^P$  et une composante équivalente en contrainte  $F_{eq}$ . Ainsi le critère non associé (type Coulomb) pour l'évolution du frottement est écrit sous la forme suivante :

$$f = \sqrt{\|\mathbf{F}_T\|^2} + r F_{eq} \quad (B.20)$$

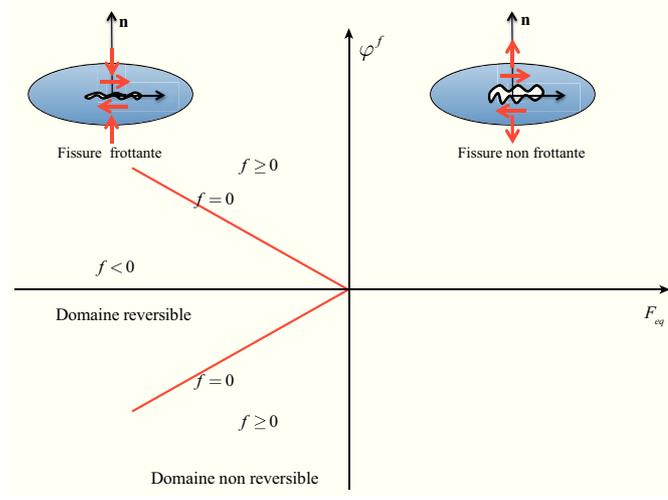


FIGURE B.4 – Critère de glissement au passage ouvert/fermé dans l'espace des forces thermodynamiques tangentielle et équivalente pour le modèle VDT.

avec  $r$  représente un coefficient de frottement sur les lèvres des microfissures. Ce paramètre permet de donner plus de poids à la pression de confinement devant le glissement avec frottement. Le critère d'écoulement  $\varphi^f$  doit contenir la surface de charge  $f$ . On sait que  $rF_{eq} \leq 0$ . On suppose que le critère d'écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\varphi^f = \sqrt{\|\mathbf{F}_T\|^2} \quad (\text{B.21})$$

la figure B.4 montre l'évolution du critère d'écoulement en fonction de la contrainte équivalente  $F_{eq}$  à déterminer. Quand les fissures sont ouvertes on considère qu'il n'y a pas de frottement. Le glissement avec frottement n'est considéré qu'à la fermeture des fissures.

Il est noté que la sortie du critère, lors du passage de l'état d'ouverture à la fermeture, se fait aussi au nez du critère. Les directions d'écoulement sont obtenues par normalité au critère d'écoulement  $\varphi^f$  par rapport à la force thermodynamique tangentielle  $F_T$  et déviatorique  $F_D$  à  $f = 0$  :

$$\bar{N} = \frac{\partial \varphi^f}{\partial \mathbf{F}_T} + \frac{\partial \varphi^f}{\partial F_D} = \frac{\mathbf{F}_T + F_D}{\sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2}} \quad (\text{B.22})$$

il en résulte que l'écoulement peut s'écrire en fonction des directions d'écoulement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_D^P \\ \dot{\varepsilon}_T^P \end{cases} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2}} \begin{cases} F_D \\ \mathbf{F}_T \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est défini tel que  $f = \dot{f} = 0$  avec  $\varepsilon_{eq}^N \leq 0 \Rightarrow F_{eq} \leq 0$  :

$$\dot{\lambda} / f = \dot{f} = 0 \quad \& \quad \begin{cases} F_{eq} = E_{eq} \varepsilon_{eq}^N \\ F_D = E_D \left(1 - H(\varepsilon_{eq}^N)\right) d_D (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P) \\ F_T = E_T \left(1 - H(\varepsilon_{eq}^N)\right) d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P) \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

il en résulte que le multiplicateur plastique de frottement s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2}}{[\mu_T^2 d_T^2 (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P) \mathbf{F}_T + \mu_D^2 d_D^2 (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P) F_D]} \quad (\text{B.25})$$

$$\times \left\{ \mu_T^2 d_T^2 (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P) \cdot \dot{\varepsilon}_T^P + \mu_D^2 d_D^2 (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P) \dot{\varepsilon}_D^P \right. \quad (\text{B.26})$$

$$\left. - \frac{1}{(1 - H(\varepsilon_{eq}^N))} \frac{\partial H(\varepsilon_{eq}^N)}{\partial \varepsilon_{eq}^N} \dot{\varepsilon}_{eq} \left[ \mu_T d_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P)^2 + \mu_D d_D (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.27})$$

$$+ \left. \frac{r}{(1 - H(\varepsilon_{eq}^N))^2} E_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}^N \sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2} \right\} \quad (\text{B.28})$$

comme montré dans la section B.1, on pose que la fonction d'effectivité est la fonction d'Heaviside et on récrit le multiplicateur de plasticité :

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2}}{[\mu_T^2 d_T^2 (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P) \mathbf{F}_T + \mu_D^2 d_D^2 F_D]} \left\{ \mu_T^2 d_T^2 (\varepsilon_T - \varepsilon_T^P) \cdot \dot{\varepsilon}_T^P \right. \quad (\text{B.29})$$

$$\left. + \mu_D^2 d_D^2 (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P) \dot{\varepsilon}_D^P + \frac{r}{(1 - H(\varepsilon_{eq}^N))^2} E_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq}^N \sqrt{\|F_T\|^2 + F_D^2} \right\} \quad (\text{B.30})$$

Pour illustrer le comportement phénoménologique du modèle, on propose de suivre l'évolution de la contrainte tangentielle durant un chemin de chargement qui va d'une fissure frottante à une fissure non frottante figure B.5. D'un état de déformation normale négatif  $\varepsilon_N < 0$ , on augmente  $\varepsilon_N$  pour aller vers l'ouverture et on suit le chemin de chargement proposé dans la figure B.5.

- A→B : domaine élastique,
- B→C : Glissement sur le critère,
- C→D : la déformation normale reste constante  $\varepsilon_N = cste$ , et l'écoulement diminue et rentre dans le domaine réversible.
- D→E : Glissement sur le critère jusqu'au nez du critère,

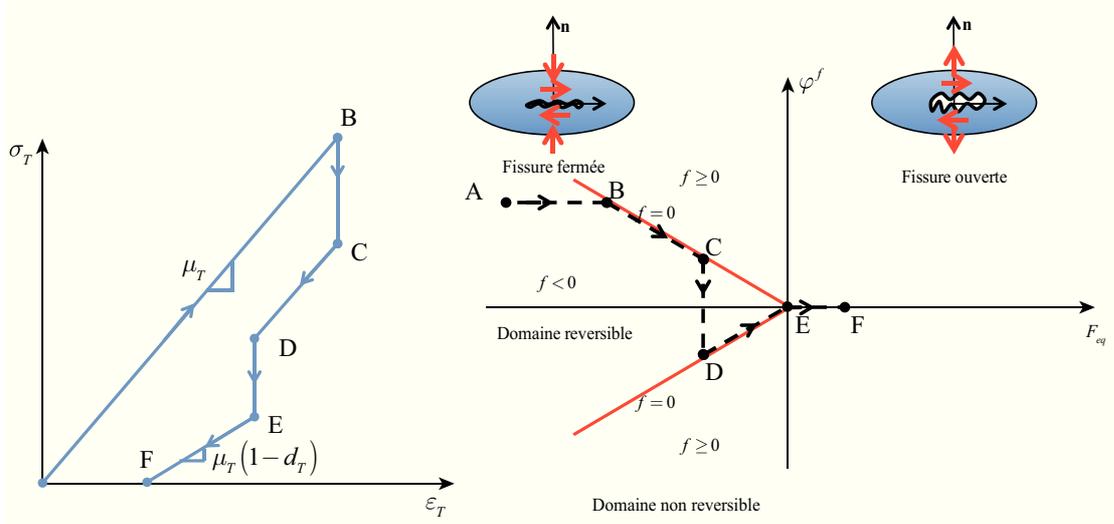


FIGURE B.5 – Chemin de chargement de la fermeture à l'ouverture des fissures

- E→F : Sortie de critère vers le domaine des fissures non frottante; dans ce domaine on considère que les fissures ne frottent pas.

Dans la figure B.6 on s'intéresse plutôt au chemin de chargement qui va aller du domaine des fissures non frottantes au domaine des fissures frottante.

- A→B : la déformation due au frottement au nez du critère (point B) s'initialise à la valeur de la déformation tangentielle.
- B→C : Si la déformation tangentielle continue d'augmenter au même temps que la déformation normale diminue, il y'aura glissement sur le critère.
- C→D : Si la déformation tangentielle diminue, on rentre dans le critère et reste que domaine réversible.

### B.1.2.2 Évolution de l'effectivité et choix des variables de pilotage :

La gestion de l'ouverture-fermeture des microfissures impose le choix d'une grandeur cinématique normale au système de microfissures. Ces dernières ne se ferment pas toutes en même temps. Les constats expérimentaux montrent qu'il y a plutôt une fermeture progressive (essais triaxiaux) 1.2. Aussi l'effet de la pression de confinement dépend du niveau de confinement 1.1. Ce que la fonction d'Heaviside ne peut le décrire. Donc, pour ces constats expérimentaux, le choix d'une fonction d'effectivité permettant de réduire l'effet de l'endommagement progressivement sur la partie volumique et déviatorique est justifié. Pour avoir une dissipation nulle on choisit de piloter ces deux fonctions  $\alpha_V$ ,  $\alpha_D$  par leur variables observables respectives  $\varepsilon_V$ ,  $\varepsilon_D$ . On parle alors d'une effectivité anisotrope car l'effectivité déviatorique dépend d'une grandeur cinématique directionnelle  $\varepsilon_D$ . En compression, on considère que l'effet de l'endommagement diminue en fonction de l'état de déformation. Quand les déformations  $\varepsilon_V$ ,  $\varepsilon_D$  sont positives on considère que l'endommagement est 100% effectif.



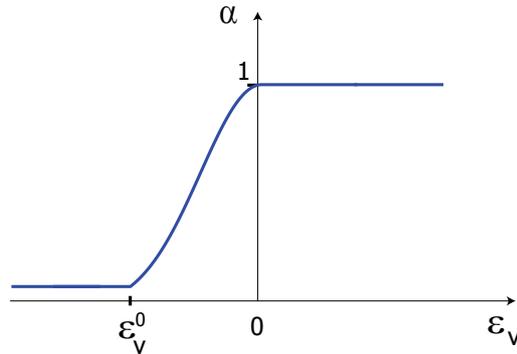


FIGURE B.7 – Evolution de la fonction d’effectivité en fonction de la variable de déformation volumique

passage ouvert/fermé. De ce fait, au passage ouvert/fermé, un saut de dissipation d’énergie existera sur cette partie tangentielle. Ce saut de dissipation n’a pas de conséquence dans le cas des chargements monotones. Mais pour des chargements quelconques il faut admettre l’existence de cette dissipation positive sur la partie tangentielle.

## B.2 Introduction d’un décalage sur l’effectivité

Lier l’effectivité à la déformation associée permet d’annuler toute dissipation anormale. Par contre, cela impose une fonction d’effectivité à dérivée continue ou un changement d’effet à déformation associée nulle. Nous allons illustrer ici l’effet des sauts de contrainte sur la réponse globale. Pour se faire, on ajoute une déformation arbitraire de  $\epsilon_D^0 = 1,5e - 3$  au niveau de la fonction d’effectivité. La fonction d’effectivité peut s’écrire alors sous la forme :

$$\alpha_D(\epsilon_D) = H(\epsilon_D - \epsilon_D^0) \quad (\text{B.34})$$

on teste le modèle avec ce décalage pour un essai de compression suivi d’une décharge (fig. B.8). On remarque que le décalage introduit des irrégularités sur la réponse contrainte-déformation. En augmentant le nombre de directions de projection (de 21 directions à 507), on remarque une régularisation de la réponse. Malgré cela, le modèle présente des sauts de contraintes. Ces sauts de contraintes peuvent être régularisés par l’introduction d’une déformation irréversible.

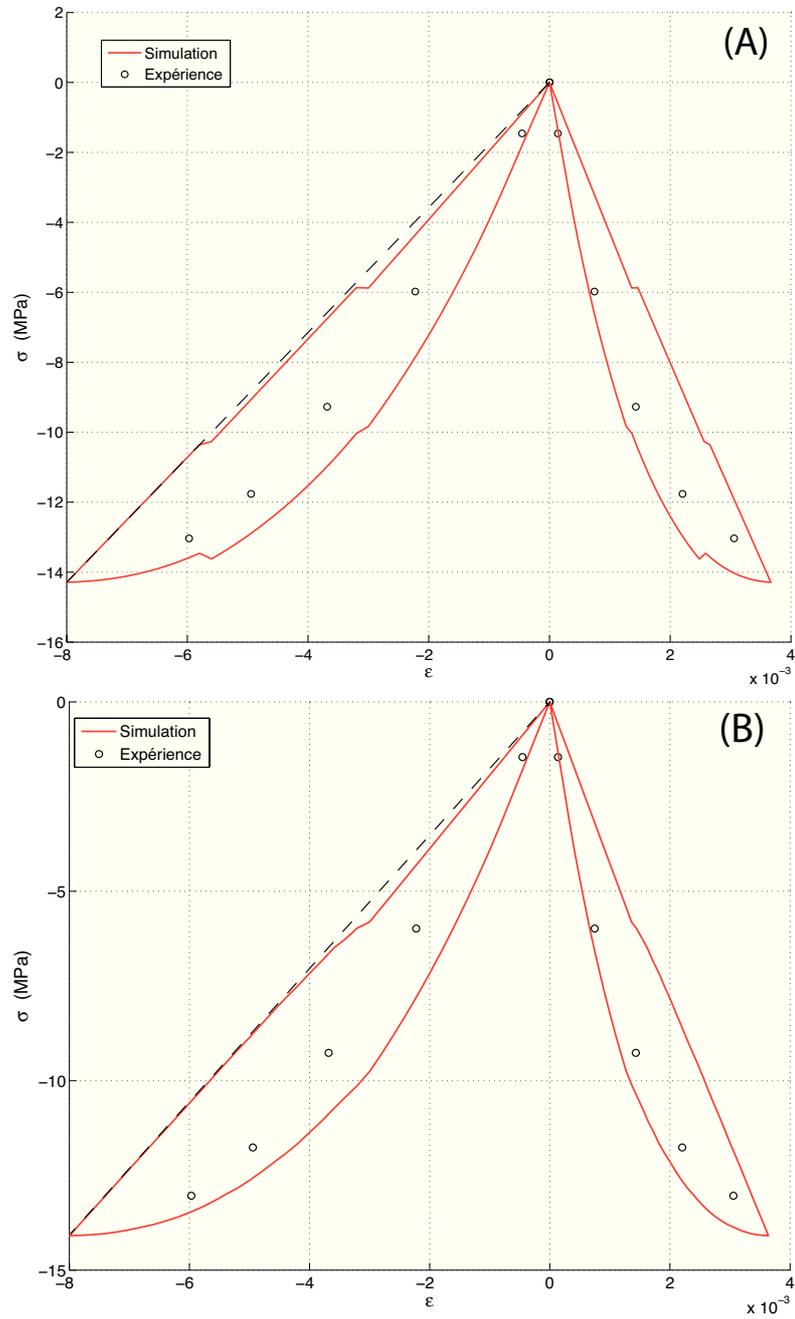


FIGURE B.8 – Simulation d'un cycle de compression simple suivi d'une décharge avec un décalage sur l'effectivité  $\alpha_D$  (A) avec 42 directions et (B) avec 507 directions sur le matériau agrégataire M1.

## *B.2. INTRODUCTION DU DÉCALAGE SUR L'EFFECTIVITÉ*

---

# Annexe C

## Modèle VDT avec frottement interne anisotrope

### C.1 Formulation thermodynamique :

Sous l'hypothèse de petites déformations, on considère que ce mécanisme est lié à chaque famille des microfissures de direction donnée et qu'il n'y a pas d'interaction entre les mécanismes. Le comportement global de ce mécanisme est la somme des contributions dans chaque direction (comme pour l'endommagement). Il sera introduit au niveau de la partie volumique, déviatorique et tangentielle. Les variables associées à ce mécanisme seront les déformations anélastiques  $\varepsilon_V^P$ ,  $\varepsilon_D^P$  et  $\varepsilon_T^p$ . On réécrit alors l'énergie libre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Psi^{mic} &= \frac{1}{2}k_V (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) (\varepsilon_V - \varepsilon_V^P)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\mu_D (1 - \alpha_D(\varepsilon_D) d_D) (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p) \cdot (\varepsilon_T - \varepsilon_T^p)]\end{aligned}\quad (C.1)$$

Les effectivités sur la partie volumique  $\alpha_V$  et déviatorique  $\alpha_D$  seront liées à leur variables observables respectives  $\varepsilon_V$  et  $\varepsilon_D$ . De ce fait la partie volumique et déviatorique de l'énergie libre, précédemment analysée, est inchangée. Dans cette section, l'étude est focalisée plutôt sur la dissipation tangentielle. La fonction d'effectivité  $\alpha_T$  dépendra d'une grandeur cinématique  $X_T$ . Pour des raisons de simplicité, on suppose que sur cette partie tangentielle l'endommagement est toujours effectif et donc ( $\alpha_T = 1$ ). On écrit la dissipation à l'échelle du microplan sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}^{mic} = \sigma_V \dot{\varepsilon}_V + \sigma_D \dot{\varepsilon}_D + \sigma_T \cdot \dot{\varepsilon}_T - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad (C.2)$$

si on calcul le taux d'énergie à l'échelle du microplan on obtient :

$$\dot{\Psi}^{mic} = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (C.3)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_V} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_V} \dot{\varepsilon}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_D} \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_D} \dot{\varepsilon}_D \quad (C.4)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \alpha_T} \frac{\partial \alpha_T}{\partial X_T} \dot{X}_T \quad (C.5)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} \dot{d}_V + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} \dot{d}_D + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} \dot{d}_T \quad (C.6)$$

$$+ \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V^P} \dot{\varepsilon}_V^P + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D^P} \dot{\varepsilon}_D^P + \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T^P} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^P \quad (C.7)$$

ainsi, on écrit le taux d'énergie à l'échelle du microplan sous la forme suivante :

$$\dot{\Psi}^{mic} = k_V \left[ (1 - \alpha_V(\varepsilon_V) d_V) \varepsilon_V + \frac{1}{2} k_V \frac{\partial \alpha_V}{\partial \varepsilon_V} d_V \varepsilon_V^2 \right] \dot{\varepsilon}_V \quad (C.8)$$

$$+ \mu_D \left[ (1 - \alpha_D(\varepsilon_D) d_D) \varepsilon_D + \frac{1}{2} \mu_D \frac{\partial \alpha_D}{\partial \varepsilon_D} d_D \varepsilon_D^2 \right] \dot{\varepsilon}_D \quad (C.9)$$

$$+ \mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (C.10)$$

$$- \frac{1}{2} k_V \left[ \alpha_V(\varepsilon_V) (\varepsilon_V - \varepsilon_V^p)^2 \right] \dot{d}_V \quad (C.11)$$

$$- \frac{1}{2} \mu_D \left[ \alpha_D(\varepsilon_D) (\varepsilon_D - \varepsilon_D^p)^2 \right] \dot{d}_D \quad (C.12)$$

$$- \frac{1}{2} \mu_T [\alpha_T(X_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{d}_T \quad (C.13)$$

$$- \frac{1}{2} \mu_T \left[ \frac{\partial \alpha_T}{\partial X} d_T (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)^2 \right] \dot{X} \quad (C.14)$$

$$- k_V [(1 - \alpha_V d_V) (\varepsilon_V - \varepsilon_V^p)] \dot{\varepsilon}_V^P \quad (C.15)$$

$$- \mu_D [(1 - \alpha_D d_D) (\varepsilon_D - \varepsilon_D^p)] \dot{\varepsilon}_D^P \quad (C.16)$$

$$- \mu_T [(1 - \alpha_T(X_T) d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p)] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^P \quad (C.17)$$

$$\dot{\Psi}^{mic} = \sigma_V \dot{\varepsilon}_V + \sigma_D \dot{\varepsilon}_D + \sigma_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \quad (C.18)$$

$$- F_V^d \dot{d}_V - F_D^d \dot{d}_D - F_T^d \dot{d}_T \quad (C.19)$$

$$- F_X \dot{X} \quad (C.20)$$

$$- F_V^P \dot{\varepsilon}_V^P - F_D^P \dot{\varepsilon}_D^P - \mathbf{F}_T^P \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^P \quad (C.21)$$

Sous l'hypothèse d'une effectivité non dissipative, le terme dissipatif dû à l'effectivité C.14 doit être nul quelque soit  $\dot{X}_T$ . Pour des raisons de simplicité on considère

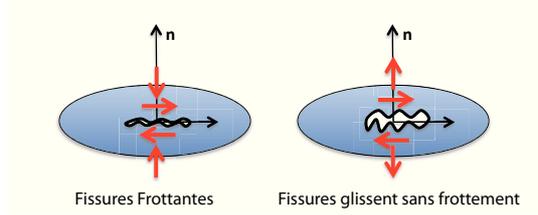


FIGURE C.1 – Représentation schématique de microfissures frottantes dans le cas ouvert ou fermé

que la fonction d'effectivité  $\alpha_T = 1$ . Le mécanisme dissipatif dû au frottement dépend de l'effet de la pression de confinement en d'autres termes ; l'état d'ouverture fermetures des fissures.

### C.1.1 Critère d'évolution et lois d'écoulement :

Dans cette section, on s'intéresse à modéliser le comportement macroscopique induit par des fissures frottantes. Pour un système de microfissures ayant la même direction, On suppose que les lèvres des microfissures ne frottent que si elles sont fermées. On fait l'hypothèse d'uniformité des contraintes sur ces lèvres de microfissures. Lors de l'ouverture on considère que le glissement entre ces deniers se fait sans frottement. Le comportement global sera obtenu par la sommation des mécanismes de chaque direction de l'espace angulaire. La figure C.1 schématise les mécanismes microstructuraux dans le cas ouvert et fermé.

La dissipation avec les nouveaux variables s'écrit alors sous la forme suivante :

$$W^d = \sigma^{mic} \cdot \varepsilon^{mic} - \dot{\Psi}^{mic} \quad (C.22)$$

$$= \begin{Bmatrix} \sigma_V \\ \sigma_D \\ \sigma_T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_V \\ \dot{\varepsilon}_D \\ \dot{\varepsilon}_T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_V \\ \sigma_D \\ \sigma_T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_V \\ \dot{\varepsilon}_D \\ \dot{\varepsilon}_T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_V^P \\ F_D^P \\ \mathbf{F}_T^P \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_V^P \\ \dot{\varepsilon}_D^P \\ \dot{\varepsilon}_T^P \end{Bmatrix} \quad (C.23)$$

On postule qu'il existe un domaine de réversibilité  $f(\mathbf{F}_T^P, F_D^P, F_V^P, R) \leq 0$  pour chaque microplan. Ce domaine de réversibilité est écrit dans l'espace des forces thermodynamiques  $\mathbf{F}_T^P$ ,  $F_D^P$  et  $F_V^P$  associées, respectivement, aux variables internes de glissement  $\varepsilon_T^P$  et  $\varepsilon_D^P$ . Un critère de glissement est défini à  $f(\mathbf{F}_T^P, F_D^P, F_V^P, R) = 0$ . Cette fonction de charge  $f$  est exprimée à l'échelle du microplan à partir des forces thermodynamiques tangentielle  $\mathbf{F}_T^P$ ,  $F_D^P$  et  $F_V^P$  associées à  $\varepsilon_T^P$ ,  $\varepsilon_D^P$  et  $\varepsilon_V^P$  et. Ainsi le critère associé pour l'évolution du frottement est écrit sous la forme suivante :

$$f = \sqrt{\|\mathbf{F}_T^P\|^2 + (F_D^P)^2} + \alpha F_V^P + R \quad (C.24)$$

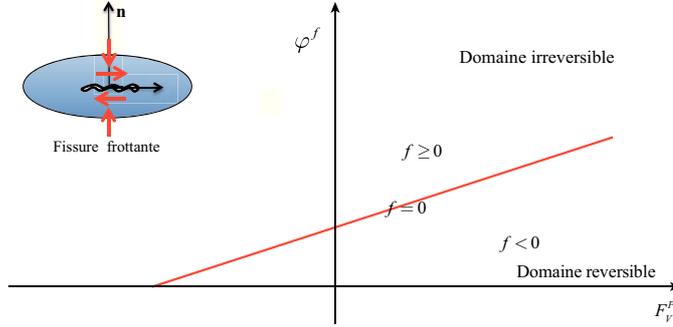


FIGURE C.2 – Critère de glissement au passage ouvert/fermé dans l'espace des forces thermodynamiques tangentielle et équivalente pour le modèle VDT.

avec  $\alpha$  représente un coefficient de pondération de l'effet de la pression de confinement.  $R$  est un écoulement isotrope qui s'exprime :

$$R = k_1 (p)^{1/k_2} - \sigma^0 \quad (\text{C.25})$$

$k_1$  et  $k_2$  sont deux paramètres à identifier.  $\sigma^0$  représente la contrainte seuil de l'écoulement. La variable  $p$  représente la plasticité cumulée dont l'incrément de plasticité s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta p = \Delta \lambda = \sqrt{\frac{2}{3} (\Delta \varepsilon_D^p)^2 + (\Delta \varepsilon_T^p)^2} \quad (\text{C.26})$$

le critère d'écoulement  $\varphi^f$  doit contenir la surface de charge  $f$ . On sait que  $rF_{eq} \leq 0$ . On suppose que le critère d'écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\varphi^f = \sqrt{\|\mathbf{F}_T^P\|^2 + (F_D^P)^2} + \beta F_V^P + R \quad (\text{C.27})$$

La figure C.2 montre l'évolution du critère d'écoulement en fonction de la pression volumique  $F_V^P$ . Le glissement avec frottement n'est considéré qu'à la fermeture des fissures.

Les directions d'écoulement sont obtenues par normalité au critère d'écoulement  $\varphi^f$  par rapport aux forces thermodynamiques  $\mathbf{F}_T^P$ ,  $F_D^P$  et  $F_V^P$  à  $f = 0$  :

$$\bar{N}_V = \frac{\partial \varphi^f}{\partial F_V^P} = \beta \quad (\text{C.28})$$

$$\bar{N}_D = \frac{\partial \varphi^f}{\partial F_D^P} = \frac{F_D^P}{\sqrt{\|\mathbf{F}_T^P\|^2 + F_D^P{}^2}} \quad (\text{C.29})$$

$$\bar{N}_T = \frac{\partial \varphi^f}{\partial \mathbf{F}_T^P} = \frac{\mathbf{F}_T^P}{\sqrt{\|\mathbf{F}_T^P\|^2 + F_D^P{}^2}} \quad (\text{C.30})$$

il en résulte que l'écoulement peut s'écrire en fonction des directions d'écoulement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_V^P \\ \dot{\varepsilon}_D^P \\ \dot{\varepsilon}_T^P \end{cases} = \dot{\lambda} \begin{cases} \bar{N}_V \\ \bar{N}_D \\ \bar{N}_T \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est défini tel que  $f = \dot{f} = 0$  :

$$\dot{\lambda} / f = \dot{f} = 0 \quad \& \quad \begin{cases} F_V^P = k_V (1 - \alpha_V (\varepsilon_V) d_V) (\varepsilon_V - \varepsilon_V^P) \\ F_D^P = \mu_D (1 - \alpha_D (\varepsilon_D) d_D) (\varepsilon_D - \varepsilon_D^P) \\ \mathbf{F}_T^P = \mu_T (1 - d_T) (\boldsymbol{\varepsilon}_T - \boldsymbol{\varepsilon}_T^p) \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

il en résulte que le multiplicateur plastique de frottement s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta\lambda = - \frac{f}{\frac{\partial f}{\partial F_V^P} \frac{\partial F_V^P}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial f}{\partial F_D^P} \frac{\partial F_D^P}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{F}_T^P} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_T^P}{\partial \Delta\lambda}} \quad (\text{C.33})$$

$$= \frac{f}{\alpha k_V \bar{N}_V + \mu_D \frac{F_D^P}{\sqrt{\|\mathbf{F}_T\|^2 + F_D^2}} \cdot \bar{N}_D + \mu_T \frac{\mathbf{F}_T^P}{\sqrt{\|\mathbf{F}_T\|^2 + F_D^2}} \cdot \bar{N}_T} \quad (\text{C.34})$$

Cette approche peut être justifiée par des essais qui montrent le caractère anisotrope de l'évolution du glissement avec frottement.

*C.1. FORMULATION THERMODYNAMIQUE :*

---

# Glossaire

## Notations tensorielles :

$n$	scalaire
$\mathbf{n}$	vecteur
$\mathbf{N}$	tenseur d'ordre 2
$\mathbb{N}$	tenseur d'ordre 4
$\mathbf{1}$	tenseur identité d'ordre 2
$\mathbb{I}$	Identité d'ordre 4
$\sigma$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\tilde{\sigma}$	tenseur des contraintes effectives
$\varepsilon$	tenseur de déformation
$\mathbb{C}^{el}$	tenseur d'élasticité pour un matériau sain
$\mathbb{C}^{ed}$	tenseur d'élasticité endommagée
$\mathbb{I}_V$	la partie volumique du tenseur d'identité $\mathbb{I}$ d'ordre 4
$\mathbb{I}_D$	la partie déviatorique du tenseur d'identité $\mathbb{I}$ d'ordre 4

## Opérations sur les tenseurs :

$\cdot$	produit contracté
$:$	produit doublement contracté
$\otimes$	produit tensoriel
	$(a \otimes b)_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$
	$(a \underline{\otimes} b)_{ijkl} = a_{il}b_{jk}$
	$(a \overline{\otimes} b)_{ijkl} = a_{ik}b_{jl}$
	$(a \underline{\overline{\otimes}} b)_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})$

## Fonctions usuelles :

$H(X)$	fonction de Heaviside
	$\begin{cases} H(x) = 1 & \text{si } x > 0 \\ H(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
$\ \mathbf{X}\ $	norme euclidienne du tenseur $\mathbf{X}$
$\langle \mathbf{X} \rangle_+$	Partie positive du tenseur $\mathbf{X}$





## Résumé :

Le matériau composite agrégataire énergétique étudié a un comportement visco-élastique endommageable sensible à la pression de confinement et à la température. Ces travaux concernent la modélisation de l'anisotropie induite par endommagement avec deux objectifs principaux. Dans un premier temps, le caractère anisotrope de l'endommagement est mis en évidence expérimentalement. Des essais alternant tension et compression permettant d'observer l'effet unilatéral d'endommagement. Ensuite, un modèle de comportement est développé pour le matériau d'étude. Des modèles pertinents sont tout d'abord comparés. Le modèle le plus approprié est ensuite amélioré par l'ajout de mécanismes d'endommagement, d'effectivité du dommage et d'un mécanisme de plasticité. Les données expérimentales sont utilisées pour identifier les paramètres du modèle. Ce dernier a été ensuite implémenté dans un logiciel de calcul aux éléments finis (Abaqus / standard) sous la forme d'une procédure Fortran (UMAT). Différents types de chargements sont simulés et confrontés aux résultats expérimentaux.

**Mots clés :** Anisotropie induite, endommagement, effectivité, microfissuration, plasticité, Implémentation, Composites agrégataires énergétiques.

## Abstract :

An explosive aggregate material exhibits a visco-elastic behaviour with damage, internal friction and sensitivity to the confining pressure and temperature. This thesis focuses on the anisotropic elastic damage with unilateral effect. The first aim of this study is to highlight experimentally the anisotropic nature of the damage. Then, a new model is proposed for the studied material. This is achieved using a comparison of some relevant models in order to select the most appropriate among them. The selected model is then improved by adding unilateral effect mechanisms and plasticity. Experimental data is used to characterize the material behaviour and to determine the parameters of improved model. This model has been implemented in the finite element software (Abaqus / Standard) using Fortran procedure (UMAT) and then tested for different loads and compared with experimental results.

**Keywords :** Anisotropic damage, Unilateral effect, Microcracking, Degradation, Induced anisotropy, Plasticity, Constitutive modeling, Microplane model.