



HAL
open science

Représentations des groupes de Lie p -adiques et applications globales

Benjamin Schraen

► **To cite this version:**

Benjamin Schraen. Représentations des groupes de Lie p -adiques et applications globales. Théorie des nombres [math.NT]. Université Paris Sud (Paris 11) - Université Paris Saclay, 2017. tel-02948691

HAL Id: tel-02948691

<https://hal.science/tel-02948691v1>

Submitted on 24 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSIT  PARIS-SUD

Faculté des sciences d'Orsay
 cole doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (UMR 7640 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Benjamin SCHRAEN

Représentations des groupes de Lie p -adiques et applications globales

Rapporteurs : PIERRE COLMEZ
GUY HENNIART
PETER SCHNEIDER

Date de soutenance : 9 Novembre 2017

Composition du jury : LAURENT BERGER (Examineur)
CHRISTOPHE BREUIL (Invité)
GA TAN CHENEVIER (Examineur)
JEAN-FRANÇOIS DAT (Examineur)
GUY HENNIART (Rapporteur)
ARIANE MÉZARD (Examinatrice)
PETER SCHNEIDER (Rapporteur)

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE p -ADIQUES ET APPLICATIONS GLOBALES

BENJAMIN SCHRAEN

PUBLICATIONS ET PRÉPUBLICATIONS

Les travaux présentés dans ce mémoire font partie des publications [3] à [12] listées ci-dessous. Les publications [1] et [2] ont fait l'objet de ma thèse de doctorat.

- [1] B. Schraen, *Représentations p -adiques de $GL_2(L)$ et catégories dérivées*, Israel Journal of Mathematics **176** (2010), 307–362.
- [2] B. Schraen, *Représentations localement analytiques de $GL_3(\mathbf{Q}_p)$* , Annales scientifiques de l'École normale supérieure **44** (2011), no. 1, 43–145.
- [3] S. Orlik et B. Schraen, *The Jordan-Hölder series of the locally analytic Steinberg representation*, Documenta Mathematica **19** (2014), 647–671.
- [4] G. Dospinescu et B. Schraen, *Endomorphism algebras of admissible p -adic representations of p -adic Lie groups*, Representation Theory **17** (2013), 237–246.
- [5] J. Kohlhaase et B. Schraen, *Homological vanishing theorems for locally analytic representations*, Mathematische Annalen **353** (2012), no. 1, 219–258.
- [6] Y. Hu, S. Morra et B. Schraen, *Sur la fidélité de certaines représentations de $GL_2(F)$ sous une algèbre d'Iwasawa*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **131** (2014), 49–65.
- [7] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de $GL_2(F)$* , Journal für die reine und angewandte Mathematik **704** (2015), 187–208.
- [8] E. Hellmann et B. Schraen, *Density of potentially crystalline representations of fixed weight*, Compositio Mathematica **152** (2016), no. 8, 1609–1647.
- [9] C. Breuil, E. Hellmann et B. Schraen, *Une interprétation modulaire de la variété trianguline*, Mathematische Annalen **367** (2017), no. 3-4, 1587–1645.
- [10] C. Breuil, E. Hellmann et B. Schraen, *Smoothness and classicality on eigenvarieties*, Inventiones Mathematicae **209** (2017), no. 1, 197–274.
- [11] D. Le, S. Morra et B. Schraen, *Multiplicity one at full congruence subgroup*, prépublication soumise (2016).
- [12] C. Breuil, E. Hellmann et B. Schraen, *A local model for the trianguline variety and applications*, prépublication soumise (2017).

Remerciements

Merci à Pierre Colmez, Guy Henniart et Peter Schneider d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette habilitation à diriger des recherches ainsi qu'à Laurent Berger, Gaëtan Chenevier, Jean-François Dat et Ariane Mézard d'avoir accepté de faire partie du jury. C'est un grand honneur pour moi. Les résultats présentés dans ce mémoire portent indéniablement votre marque et n'auraient pu voir le jour sans l'inspiration insufflée par vos travaux. Je suis particulièrement reconnaissant à Christophe Breuil de m'avoir, au cours de ma thèse, initié aux divers aspects du Programme de Langlands p -adique, et pour avoir régulièrement partagé ses idées et sa vision de ce programme depuis une dizaine d'années.

Je remercie chaleureusement Eugen Hellmann pour les fréquents et passionnants échanges mathématiques que nous avons eus, et avons toujours, tout au long d'une longue collaboration.

Je voudrais également remercier Gabriel Dospinescu, Yongquan Hu, Jan Kohlhaase, Daniel Le, Sascha Orlik, Stéfano Morra. Ce fut un réel plaisir de travailler et d'échanger avec vous ces dernières années.

Je suis très reconnaissant envers tous mes collègues du LMV ainsi que du CMLS et de l'IHES dont la présence et l'activité font de ces lieux de merveilleux espaces de travail. Je voudrais tout particulièrement remercier Ahmed Abbes pour son invitation.

Merci à Frédéric Paulin pour son aide et son accompagnement tout au long de la préparation de cette habilitation.

Enfin, je voudrais remercier tous mes amis, du milieu mathématique ou non, ma famille, et surtout Claire, pour le bonheur qu'elle met dans ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

Publications et prépublications	1
Introduction	7
1. Représentations des groupes de Lie p -adiques	13
1.1. Représentations p -adiques continues	13
1.2. Représentations localement analytiques	15
1.3. Homologie des groupes discrets cocompacts	23
1.4. Représentations modulo p	27
2. Compatibilité local-global	30
2.1. Description du résultat principal	30
2.2. Familles de représentations galoisiennes	37
3. Densité des représentations potentiellement cristallines de poids fixés	43
4. Perspectives et projets	44
4.1. Caractère central des L -représentations de Banach irréductibles	44
4.2. Compatibilité local-global	45
4.3. Représentations modulo p de groupes de Lie p -adiques	45
Références	46

INTRODUCTION

Soit F un corps de nombres. Fixons $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de \mathbf{Q} contenant F . L'étude des représentations linéaires du groupe profini $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ est un problème fascinant en théorie algébrique des nombres, ne serait-ce que parce qu'un des moyens les plus efficaces de comprendre un groupe est de comprendre sa théorie des représentations. Comme ce groupe est profini, il est beaucoup plus intéressant de considérer ses représentations continues sur des \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels. De telles représentations abondent en géométrie arithmétique mais la théorie des représentations automorphes des groupes réductifs permet également de construire ces représentations. Rappelons d'abord brièvement le lien entre ces deux types de représentations. Soit \mathbf{A}_F l'anneau des adèles de F . Une représentation automorphe cuspidale (π, H) de GL_n est une représentation unitaire irréductible du groupe $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ sur un espace de Hilbert H , isomorphe à une sous-représentation de l'espace $L^2_{\text{cusp}}(\text{GL}_n(F) \backslash \text{GL}_n(\mathbf{A}_F) / Z(\mathbf{A}_F), \omega)$ muni de l'action de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ par translation à droite, Z désignant le centre de GL_n et ω un caractère unitaire du groupe $Z(\mathbf{A}_F)$.

Si (π, H) est une représentation unitaire irréductible, on peut décomposer (π, H) en « produit tensoriel restreint » de représentations locales. Plus précisément, si pour toute place v de F , on se donne (π_v, H_v) une représentation¹ lisse pré-unitaire irréductible sur \mathbf{C} du groupe topologique $\text{GL}_n(F_v)$, et si on suppose que, pour presque toute place v , la représentation (π_v, H_v) est sphérique (c'est-à-dire possède un vecteur non nul fixé par le sous-groupe compact maximal $\text{GL}_n(\mathcal{O}_{F_v})$ de $\text{GL}_n(K_v)$), on peut construire une représentation $\otimes'_v \pi_v$ de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ par le procédé de produit tensoriel restreint. Le complété unitaire d'une telle représentation est alors un exemple de représentation unitaire irréductible de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$. Réciproquement, on peut montrer que toute représentation unitaire irréductible (π, H) du groupe $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ est de cette forme et que la classe d'isomorphisme de la représentation (π_v, H_v) , dite composante locale de (π, H) , est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme de (π, H) .

Fixons désormais un isomorphisme $\iota : \mathbf{C} \simeq \overline{\mathbf{Q}_p}$. On dit qu'une représentation (ρ, V) du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ sur un $\overline{\mathbf{Q}_p}$ -espace vectoriel V de dimension finie est associée à (π, H) si la représentation (ρ, V) est non ramifiée en toute place finie v de F telle que (π_v, H_v) est sphérique, et si on a l'égalité

$$(0.1) \quad \det(X - \rho(\text{Frob}_v)) = \iota(P_{\pi_v})(X)$$

où $\text{Frob}_v \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ désigne un élément de Frobenius géométrique en v et où $P_{\pi_v}(X)$ désigne le polynôme de Satake de π_v . Rappelons que la correspondance de Satake établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles sphériques du groupe $\text{GL}_n(F_v)$ et les classes de conjugaison semi-simples du groupe $\text{GL}_n(\mathbf{C})$, le polynôme $P_{\pi_v}(X)$ étant alors le polynôme caractéristique de la classe de conjugaison associée à π_v . Le théorème de Čebotarev implique qu'il existe au plus une représentation continue et semi-simple (ρ, V) associée à π . Lorsque cette représentation existe on la note (ρ_π, V) .

1. Lorsque v est une place archimédienne, il s'agit plutôt d'un (\mathfrak{g}, K) -module.

On ne s'attend pas en général à pouvoir associer une représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ à toute représentation automorphe cuspidale de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$. La classe de représentations (π, H) pour lesquelles (ρ_π, V) est supposée exister a été introduite par Clozel ([35]). Elle est constituée des représentations automorphes dites algébriques, c'est-à-dire vérifiant une condition qui dépend de la composante archimédienne π_∞ de π . On sait désormais que l'on peut associer une représentation galoisienne à toute représentation automorphe cuspidale π lorsque F est un corps totalement réel ou un corps CM. Ce superbe résultat, dont l'origine se situe dans la théorie du corps de classes et les travaux d'Eichler et Shimura, résulte de la somme des contributions de nombreux mathématiciens ([42], [29], [70], [36], [57], [74], [94], [34], [56], [90]).

Cependant il s'avère que, même dans les nombreux cas où l'existence de la flèche $(\pi, H) \mapsto (\rho_\pi, V)$ est démontrée, notre connaissance de l'information arithmétique qu'elle contient n'est pas vraiment complète. Il reste encore de nombreux problèmes de *compatibilité local-global* à éclaircir, et ceux liés au programme de Langlands p -adique n'en sont pas les moindres. L'idée, de même que la dénomination, du « Programme de Langlands p -adique » a été proposée par Christophe Breuil et est fortement inspirée de la conjecture de Langlands locale. Je vais donc commencer par en donner un bref rappel.

Le problème de la compatibilité local-global peut brièvement se résumer comme suit. Considérons (π, H) une représentation automorphe cuspidale de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ et (ρ_π, V) la représentation galoisienne p -adique associée. Soit v une place finie de F . Identifions le groupe $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ à un sous-groupe de décomposition de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ et notons $\rho_{\pi,v} := \rho_\pi|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ la restriction de ρ_π à $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$. On obtient une classe d'isomorphisme de représentations p -adiques du groupe $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ qui ne dépend pas du choix de groupe de décomposition. Lorsque la représentation locale (π_v, H_v) est sphérique, la relation (0.1) montre que la classe d'isomorphisme de la semi-simplifiée de $(\rho_{\pi,v}, V)$ est entièrement déterminée par (π_v, H_v) (et réciproquement la donnée de $(\rho_{\pi,v}, V)$ détermine (π_v, H_v)). En général, la dépendance de la représentation locale $(\rho_{\pi,v}, V)$ en (π, H) est plus compliquée à déterminer. La formulation d'une compatibilité local-global lorsque v ne divise pas p est due à Langlands. Il a en effet conjecturé que lorsque v ne divise pas p , les classes d'isomorphisme de (π_v, H_v) et de (la Frobenius semi-simplifiée) $(\rho_{\pi,v}, V)$ se déterminent mutuellement. En particulier, la classe d'isomorphisme de $(\rho_{\pi,v}, V)$ ne dépend pas vraiment du choix du nombre premier p apparaissant dans les coefficients de la représentation (ρ_π, V) . Pour plus de précision, rappelons qu'il découle du théorème de monodromie locale de Grothendieck que l'on peut associer à toute représentation p -adique (r, V) « Frobenius semi-simple » du groupe $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ une représentation $(WD(r), W)$ du groupe de Weil-Deligne de F_v sur un \mathbf{C} -espace vectoriel W de dimension finie. La correspondance de Langlands prend alors la forme d'une bijection

$$(0.2) \quad \begin{aligned} \text{Irr}_{\mathbf{C}}(\text{GL}_n(F_v)) &\leftrightarrow WD_n(F_v) \\ (\pi_v, H_v) &\leftrightarrow (WD(\pi_v), W) \end{aligned}$$

où $\text{Irr}_{\mathbf{C}}(\text{GL}_n(F_v))$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe $\text{GL}_n(F_v)$ et $WD_n(F_v)$ l'ensemble des \mathbf{C} -représentations Frobenius semi-simples de dimension n du groupe de Weil-Deligne de F_v . On attend de cette bijection

le respect d'une règle de *compatibilité local-global*, ce qui signifie que pour toute place v de F ne divisant pas p , il devrait exister un isomorphisme

$$WD(\rho_{\pi,v}, V) \simeq (WD(\pi_v), W).$$

L'existence de la correspondance de Langlands locale est maintenant connue grâce aux travaux de Harris-Taylor ([57]) et Henniart ([59]). La compatibilité local-global est également connue dans un nombre important de cas ([73], [29], [57], [94], [26] etc.).

Cependant la correspondance de Langlands locale telle qu'énoncée ci-dessus n'est pas suffisante pour décrire les représentations galoisiennes locales $(\rho_{\pi,v}, V)$ lorsque $v|p$.

Comme expliqué dans [18], ce problème peut déjà être constaté dans le cas $n = 1$, où la construction $(\pi, H) \mapsto (\rho_{\pi}, V)$ est une conséquence de la théorie du corps de classes. Afin d'expliquer le type de problème qui apparaît ici, il est bon d'introduire quelques éléments de théorie de Hodge p -adique.

La théorie de Hodge p -adique a pour but l'étude de la catégorie $\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ où K est une extension finie de \mathbf{Q}_p . Elle tire ses origines de travaux de Tate ([95]) et a connu un développement spectaculaire suite aux travaux de Fontaine ([53], [54]). Ce dernier a défini tout un réseau de sous-catégories de la catégorie $\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ des représentations continues de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ sur les \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie :

$$\text{Rep}_{\text{cris}} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K) \subset \text{Rep}_{\text{st}} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K) \subset \text{Rep}_{\text{dR}} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K) \subset \text{Rep}_{\mathbf{Q}_p} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$$

les sous-catégories de représentations respectivement appelées *crystallines*, *semi-stables* et *de Rham*. Fontaine a également donné une description particulièrement utile de ces sous-catégories en termes d'objets provenant de l'algèbre linéaire. En voici un exemple. Soit K_0 le sous-corps non ramifié maximal de K et σ l'endomorphisme de Frobenius de K_0 . Un isocrystal filtré sur K est un triplet $(D, \varphi, \text{Fil}^\bullet)$ où D est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie, φ est un automorphisme σ -linéaire de D , appelé automorphisme de Frobenius, et Fil^\bullet est une \mathbf{Z} -filtration décroissante séparée et exhaustive du K -espace vectoriel $K \otimes_{K_0} D$, appelée filtration de Hodge. En désignant par MF_K la catégorie des isocristaux filtrés sur K , il existe un foncteur pleinement fidèle

$$D_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\text{cris}} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K) \longrightarrow \text{MF}_K$$

dont l'image essentielle peut-être décrite explicitement. Une description similaire existe pour la catégorie des représentations semi-stables, mais il faut ajouter un opérateur nilpotent sur les isocristaux filtrés. Le théorème de monodromie p -adique (dont la preuve résulte des travaux de André, Berger, Mebkhout et Kedlaya) nous apprend alors que toute représentation de de Rham devient semi-stable après restriction à un sous-groupe ouvert de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$. Une représentation p -adique de de Rham (r, V) de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ peut donc être entièrement décrite par un isocrystal filtré $D_{\text{pst}}(V)$ muni d'un opérateur de monodromie et d'une donnée de descente. Cette donnée de descente est une action d'un quotient fini du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ vérifiant un certain nombre de compatibilités avec les données précédentes.

La question qui est à l'origine du Programme de Langlands p -adique est alors la suivante. Soient (π, H) une représentation automorphe algébrique de $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ et (ρ_{π}, V)

la représentation p -adique associée. Si v est une place de F divisant p , que peut-on dire de la représentation $(\rho_{\pi,v}, V)$? En général, on s'attend à ce que cette représentation soit de de Rham. Même en admettant que l'on sache prouver ceci en général, on voudrait également pouvoir décrire l'isocrystal filtré avec donnée de descente $D_{\text{pst}}(V)$. Un premier pas dans cette direction a été fait par Fontaine. Il explique dans [55] comment associer une représentation de Weil-Deligne à un isocrystal filtré muni d'une donnée de descente. Si $WD_v(\rho_\pi)$ désigne la représentation de Weil-Deligne associée à $(\rho_{\pi,v}, V)$, on s'attend à ce que $WD_v(\rho_\pi)$ corresponde à la représentation π_v de $\text{GL}_n(F_v)$ via la correspondance de Langlands locale. Cette attente est même devenu un théorème dans un certain nombre de situations ([80], [34], [4], [27] etc.). Cependant la construction de $WD_v(\rho_\pi)$ à partir de $D_{\text{pst}}(V)$ n'utilise *pas* la filtration de Hodge, ce qui signifie que la donnée de π_v n'est pas suffisante pour caractériser la classe d'isomorphisme de $\rho_{\pi,v}$. Lorsque $n = 1$, ce problème apparaît déjà. En utilisant la théorie du corps de classes, on se rend compte assez rapidement que la seule donnée manquante est la donnée des poids de Hodge-Tate de la représentation $\rho_{\pi,v}$. Cependant, dès que $n \geq 2$, même la donnée des poids de Hodge-Tate ne suffit plus à caractériser la filtration de Hodge.

Dans l'optique de retrouver l'information perdue dans le passage aux représentations de Weil-Deligne, Breuil a imaginé au début des années 2000 que la correspondance de Langlands locale devrait se prolonger en une correspondance de Langlands p -adique. Plus précisément, l'idée de départ était qu'à une représentation de de Rham (ρ, V) de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F)$, il devrait être possible d'associer une représentation unitaire $(\Pi(\rho), B(V))$ du groupe $\text{GL}_n(F)$ sur un espace de Banach p -adique dont la construction utilise et *mémorise* la donnée de la filtration de Hodge sur $D_{\text{pst}}(V)$. La compatibilité avec la correspondance de Langlands locale de Harris-Taylor et Henniart est la suivante. Si $\pi_{\text{sm}}(\rho)$ désigne la représentation lisse associée à $WD(\rho)$ en utilisant (0.2) et si $\pi_{\text{alg}}(\rho)$ désigne la représentation algébrique dont le plus haut poids est donné par les poids de Hodge-Tate de (ρ, V) , alors la représentation $\pi_{\text{alg}}(\rho) \otimes \pi_{\text{sm}}(\rho)$ devrait apparaître comme une sous-représentation de $(\Pi(\rho), B(V))^2$. Les premières constructions de telles représentations $\Pi(\rho)$ pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ont été faites dans les articles [13], [14], [15] et [20]. Un peu plus tard, Colmez s'est rendu compte qu'il était possible de construire directement une représentation unitaire de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un espace de Banach à partir de la donnée d'un (φ, Γ) -module de rang 2³. En même temps, il a montré que par ce procédé, il était possible d'associer une représentation unitaire de Banach p -adique de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à toute représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, même celles qui ne sont pas de de Rham. En poussant un peu plus loin sa construction, il fut finalement capable de décrire un procédé permettant de construire complètement la correspondance de Langlands p -adique pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. La correspondance de Langlands p -adique prend la forme suivante et est une conséquence des travaux cumulés de Berger, Breuil, Colmez, Dospinescu, Emerton, Kisin, Paškūnas...([9], [38], [68], [40]).

2. Lorsque la représentation $\pi_{\text{sm}}(\rho)$ n'est pas générique, il faut légèrement la modifier ([48]).

3. Les (φ, Γ) -modules sont encore d'autres objets définis par Fontaine et issus de la théorie de Hodge p -adique.

Soit L une extension finie de \mathbf{Q}_p . À toute représentation (ρ, V) du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sur un L -espace vectoriel V de dimension 2, on peut associer une représentation unitaire $(\Pi(\rho), B(V))$ de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un L -espace de Banach $B(V)$ telle que

- la représentation (ρ, V) est absolument irréductible si et seulement si c'est le cas de la représentation $(\Pi(\rho), B(V))$;
- la correspondance $(\rho, V) \mapsto (\Pi(\rho), B(V))$ induit une bijection entre classes d'équivalence de représentations absolument irréductibles de dimension 2 et classes d'équivalence de représentations supercuspidales ;
- la représentation (ρ, V) est indécomposable si et seulement si la représentation $(\Pi(\rho), B(V))$ l'est aussi ;
- la représentation (ρ, V) est de de Rham et à poids de Hodge-Tate distincts⁴ si et seulement si la représentation $B(V)$ contient des vecteurs localement algébriques. Ceux-ci peuvent alors être décrits par la correspondance de Langlands locale et les poids de Hodge-Tate de (ρ, V) .

Enfin cette correspondance de Langlands p -adique vérifie, et même étend, la propriété de compatibilité local-global. L'idée que la correspondance de Langlands p -adique se réalise dans la cohomologie complétée des courbes modulaires construite par Emerton trouve son origine dans un article de Breuil ([15]). Cette compatibilité local-global a ensuite été formulée dans un cadre plus général, et démontrée, par Emerton ([48], [49]). Rappelons brièvement ici ce qu'est la cohomologie complétée. Si $N \geq 3$ est un entier, soit $X(Np^n)$ la compactification de la courbe modulaire de niveau Np^n . La famille $(X(Np^n))_{n \geq 0}$ est un système projectif de courbes projectives lisses définies sur \mathbf{Q}

$$\cdots \longrightarrow X(Np^{n+1}) \longrightarrow X(Np^n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow X(N)$$

La cohomologie complétée est l'espace de Banach p -adique défini par

$$\tilde{H}^1(N, \mathbf{Q}_p) = \varprojlim_r \varinjlim_n H^1(X(Np^n), \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p,$$

l'espace $H^1(X(Np^n), \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ désignant la cohomologie étale du schéma $X(Np^n)_{\overline{\mathbf{Q}}}$. L'action du groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur la tour des courbes modulaires fournit une représentation unitaire de ce groupe sur $\tilde{H}^1(N, \mathbf{Q}_p)$. Cet espace est également muni d'une action continue du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ commutant à l'action de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le théorème de compatibilité local-global d'Emerton ([49]) nous dit alors que, pour toute représentation continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ de dimension 2, impaire et non ramifiée hors de N ⁵, il existe un isomorphisme de représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

$$\text{Hom}_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})}(\rho, \tilde{H}^1(N, \mathbf{Q}_p)) \simeq \Pi(\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}) \otimes \left(\bigotimes_{\ell|N, \ell \neq p} \pi_\ell(\rho_\ell)^{\Gamma_\ell(N)} \right).$$

À l'heure actuelle, l'extension d'une telle correspondance à d'autres groupes, tels que $\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ pour $n \geq 3$ ou même $\text{GL}_2(K)$ pour $K \neq \mathbf{Q}_p$, est loin d'être évidente. Une première indication est que la construction de Colmez permet d'associer une représentation continue du sous-groupe des matrices triangulaires de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à tout (φ, Γ) -module,

4. autrement dit la filtration de Hodge est un drapeau complet.

5. et telle que la réduction modulo p de ρ soit absolument irréductible.

non nécessairement de rang 2! (voir à ce sujet, [8] et [10]) Il semble très compliqué d'obtenir une L -représentation de Banach du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ à partir d'un (φ, Γ) -module de rang n en utilisant un tel procédé. Des généralisations de la construction de Colmez ont été proposées par Schneider-Vignéras-Zábrádi et Breuil ([87], [97], [88], [19]) mais de nombreuses questions concernant la finitude des objets construits sont encore ouvertes. Ensuite, il paraît désormais clair que la formulation de la correspondance p -adique, si elle existe, ne pourra pas être aussi simple. Un des problèmes est que nos connaissances sur la classification des représentations continues des groupes de Lie p -adiques sur des espaces de Banach p -adiques sont encore très partielles. Paškūnas ([79]) a par exemple donné une classification des représentations de Banach p -adiques unitaires irréductibles admissibles du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais cette classification repose entièrement sur la correspondance de Langlands p -adique et tout particulièrement sur l'existence du foncteur de Colmez! Il est de toute façon prouvé que, même dans le cas du groupe $\mathrm{GL}_2(K)$, la catégorie des représentations de Banach p -adiques contient beaucoup trop d'objets, notamment des représentations irréductibles qui n'ont a priori rien à voir avec les représentations galoisiennes.

Même en ignorant s'il existe une correspondance de Langlands p -adique pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$, il reste possible d'étudier les représentations de Banach p -adiques de ce groupe dans la cohomologie complétée des variétés de Shimura. Dans un travail récent en collaboration avec Breuil et Hellmann ([23]), nous prouvons le résultat de compatibilité local-global suivant. Nous nous intéressons au cas où F est un corps de nombres CM et où (π, H) est une représentation automorphe cuspidale provenant par changement de base d'un groupe unitaire G défini sur le sous-corps totalement réel maximal de F et tel que $G(\mathbf{R})$ est compact. Les variétés de Shimura associées au groupe G sont des ensembles finis et la cohomologie complétée \tilde{H}^0 est dans ce cas un espace de fonctions p -adiques continues sur un ensemble profini. On peut malgré tout donner un sens au sous-espace isotypique $\tilde{H}^0[\rho_\pi]$. Il est muni d'une action du groupe $\mathrm{GL}_n(F_v)$ pour toute place v divisant p . Dans l'article [23], nous nous intéressons au cas où la représentation $\rho_{\pi,v}$ est cristalline⁶. Nous ne parvenons pas tout à fait à prouver que la représentation $\tilde{H}^0[\rho_\pi]$ permet de retrouver la filtration de Hodge sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,v})$, mais nous démontrons une conjecture de [16] qui prédit que la position de cette filtration de Hodge dans la stratification de Schubert de la variété de drapeaux peut se lire *explicitement* sur la représentation $\tilde{H}^0[\rho_\pi]$. Ce résultat illustre l'apport de la correspondance de Langlands p -adique puisque la représentation localement algébrique $\pi_{\mathrm{alg}}(\rho_{\pi,v}) \otimes \pi_{\mathrm{sm}}(\rho_{\pi,v})$ ne contient aucune information concernant la position de la filtration de Hodge.

Les travaux que je vais présenter dans ce mémoire s'articulent tous autour du fil conducteur consistant à comprendre la catégorie des représentations de Banach p -adiques de groupes de Lie p -adiques au-delà du groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Ils peuvent se répartir essentiellement en deux catégories : méthodes locales et méthodes globales. Les méthodes locales consistent surtout à étudier les propriétés des représentations de Banach p -adiques d'un groupe de Lie p -adique, ainsi que les constructions qui en découlent. Les méthodes globales consistent à étudier directement une représentation de Banach p -adique issue de la théorie des formes automorphes p -adiques. Plus précisément, il s'agit d'étudier des

6. ... et faisons également un certain nombre d'autres hypothèses.

généralisations de l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})}(\rho, \tilde{H}^1(N, \mathbf{Q}_p))$, essentiellement dans le cas des formes automorphes p -adiques de groupes unitaires compacts à l'infini.

1. REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE p -ADIQUES

1.1. Représentations p -adiques continues. Cette partie contient des notions générales sur les représentations de Banach p -adiques des groupes de Lie p -adiques, essentiellement issues de [82].

1.1.1. Définitions. Soit G un groupe de Lie p -adique. Il s'agit d'un groupe topologique muni d'une structure de variété analytique p -adique pour laquelle l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est analytique. Par exemple, le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ est un groupe de Lie p -adique. Plus généralement si G est un groupe algébrique défini sur \mathbf{Q}_p , le groupe topologique $G(\mathbf{Q}_p)$ est un groupe de Lie p -adique.

Lorsque L est une extension finie de \mathbf{Q}_p , on appelle L -espace de Banach un L -espace vectoriel topologique séparé complet dont la topologie est donnée par une norme (on ne fixe pas une telle norme). Une L -représentation de Banach de G est un couple (Π, B) où B est un L -espace de Banach et Π est un morphisme continu de G dans le groupe des automorphismes continus de B .

On définit alors la catégorie des L -représentations de Banach de G , notée $\mathrm{Rep}_L G$, comme la catégorie dont les objets sont les L -représentations de Banach de G . L'ensemble des flèches de (Π_1, B_1) vers (Π_2, B_2) est le L -espace vectoriel des applications linéaires continues G -équivariantes de B_1 dans B_2 . Cette catégorie, notée $\mathrm{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$, est naturellement une catégorie additive L -linéaire. Ce n'est jamais une catégorie abélienne.

Une représentation p -adique *unitaire*⁷ de G est une L -représentation de Banach (Π, B) de G telle qu'il existe sur B une norme continue invariante sous l'action de G . Lorsque G est compact, toutes les L -représentations de Banach de G sont unitaires, mais c'est loin d'être le cas en général.

1.1.2. Algèbre des mesures et représentations admissibles. Si le groupe de Lie p -adique G est compact, on définit l'espace des mesures sur G à coefficients dans L comme le dual continu $\Lambda_L(G)$ de l'espace $\mathcal{C}(G, L)$ des fonctions continues de G dans L . L'isomorphisme topologique canonique entre $\mathcal{C}(G \times G, L)$ et $\mathcal{C}(G, L) \hat{\otimes}_L \mathcal{C}(G, L)$ permet de définir, à partir de deux éléments μ_1 et μ_2 de $\mathcal{C}(G)$, une forme linéaire continue $\mu_1 \hat{\otimes} \mu_2$ sur $\mathcal{C}(G \times G, L)$. L'espace $\Lambda_L(G)$ est alors muni d'une structure d'algèbre, où le produit de deux éléments μ_1 et μ_2 est défini par la formule

$$\mu_1 \cdot \mu_2(f) := \mu_1 \hat{\otimes} \mu_2((g_1, g_2) \mapsto f(g_1 g_2)).$$

Il est aisé de vérifier que ce produit munit $\Lambda_L(G)$ d'une structure de L -algèbre. On munit alors $\Lambda_L(G)$ de la topologie faible, c'est-à-dire la topologie localement convexe la moins fine pour laquelle les applications linéaires $\mu \mapsto \mu(f)$ sont continues. Munie de la topologie faible, l'algèbre $\Lambda_L(G)$ est alors une L -algèbre topologique localement compacte.

7. Il serait plus correct de parler de représentation *unitarisable*.

Soit (Π, B) une L -représentation de Banach de G . Si $v \in B$, notons o_v la fonction continue de G dans B définie par $o_v(g) := \Pi(g)v$. En utilisant l'isomorphisme topologique canonique $\mathcal{C}(G, B) \simeq \mathcal{C}(G, L) \hat{\otimes}_L B$, chaque élément $\mu \in \Lambda_L(G)$ définit une application linéaire continue μ_B de $\mathcal{C}(G, B)$ vers B . Ainsi on peut définir une structure de $\Lambda_L(G)$ -module sur B en posant $\mu(v) := \mu_B(o_v)$. Il est aisé de vérifier que ceci définit une structure de $\Lambda_L(G)$ -module sur B , que pour tout $v \in B$, l'application $\mu \mapsto \mu(v)$ est continue et que pour tout $\mu \in \Lambda_L(G)$, l'application $v \mapsto \mu(v)$ est continue. On dit que B est un $\Lambda_L(G)$ -module séparément continu. En particulier, le dual topologique faible B' de B est alors muni d'une structure de $\Lambda_L(G)$ -module à gauche définie par

$$\forall \mu \in \Lambda_L(G), \forall \lambda \in B', \mu(\lambda) := \lambda \circ \iota(\mu)$$

où ι est l'anti-automorphisme de $\Lambda_L(G)$ défini par composition à droite avec l'opération inverse de G . Schneider et Teitelbaum ont démontré dans [82] que le foncteur contra-variant $(\Pi, B) \mapsto B'$ est une anti-équivalence entre la catégorie des L -représentations de Banach de G et la catégorie des $\Lambda_L(G)$ -modules séparément continus dont l'espace sous-jacent est localement compact. La définition suivante est également due à Schneider et Teitelbaum.

Définition 1.1. *Soit (Π, B) une L -représentation de Banach du groupe G . On dit que (Π, B) est admissible si le $\Lambda_L(G)$ -module B' est de type fini.*

Remarque 1.2. Si H est un sous-groupe ouvert de G , l'algèbre $\Lambda_L(G)$ est un $\Lambda_L(H)$ -module à gauche libre de type fini. En particulier un $\Lambda_L(G)$ -module est de type fini si et seulement si il est de type fini comme $\Lambda_L(H)$ -module. Ceci implique que la représentation (Π, B) est admissible si et seulement si la représentation $(\Pi|_H, B)$ est admissible.

Soit à présent G un groupe de Lie p -adique, non nécessairement compact. Alors il existe un sous-groupe de G à la fois ouvert et compact. Soit G_0 un tel sous-groupe. On dit qu'une L -représentation de Banach de G est admissible si sa restriction à G_0 l'est au sens de la définition 1.1. Il découle de la remarque 1.2 que cette définition ne dépend pas du choix de G_0 .

D'après un théorème de Lazard, l'algèbre $\Lambda_L(G)$ est noethérienne. On en déduit alors que la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_L G$ dont les objets sont les représentations admissibles est une sous-catégorie abélienne que l'on note $\text{Rep}_L^{\text{adm}}(G)$.

1.1.3. Représentations irréductibles. Soit (Π, B) une L -représentation de Banach de G . On dit qu'elle est *irréductible* si B ne possède pas de sous-espace fermé stable par B autre que B et $\{0\}$. Il faut noter qu'il est essentiel de se restreindre aux sous-espaces fermés pour avoir une notion intéressante. En effet, toute L -représentation de Banach admissible de dimension infinie sur L possède des sous-espaces non triviaux stables par G . On dit que (Π, B) est *absolument irréductible* si pour toute extension finie L' de L , la représentation $(\Pi, B \otimes_L L')$ est irréductible.

L'existence d'un analogue du Lemme de Schur dans notre contexte est une question naturelle. Le résultat suivant, obtenu en collaboration avec Gabriel Dospinescu y répond affirmativement.

Théorème 1.3 ([46], Thm. 1.1). *Soit (Π, B) une représentation admissible irréductible de G . Alors le L -espace vectoriel $\text{End}_G(B)$ est de dimension finie et il existe une extension finie L' de L telle que $(\Pi, L' \otimes_L B)$ est isomorphe à une somme directe finie de L' -représentations absolument irréductibles. Si de plus (Π, B) est absolument irréductible alors $\text{End}_G(B)$ est réduit aux homothéties de B .*

Remarque 1.4. L'hypothèse d'admissibilité est ici essentielle. Il existe en effet des \mathbf{Q}_p -représentations de Banach du groupe \mathbf{Z}_p qui sont (topologiquement) irréductibles et dont l'algèbre d'endomorphismes est de dimension infinie ([43]).

Le cas où le groupe G est commutatif est déjà intéressant. Supposons en effet que G soit commutatif et compact. On se ramène assez facilement au cas où le groupe G est compact et sans torsion, autrement dit isomorphe à \mathbf{Z}_p^r pour un certain entier r . Dans ce cas, la transformée d'Amice fournit un isomorphisme entre $\Lambda_L(G)$ et l'algèbre $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X_1, \dots, X_r]]$ des séries formelles à r variables et à coefficients bornés. Dans ce cas, le théorème 1.3 est alors une conséquence de la classification des $\Lambda_L(G)$ -modules simples, autrement dit des idéaux maximaux de $\Lambda_L(G)$. Il découle effectivement du théorème des zéros de Hilbert couplé au théorème de préparation de Weierstraß pour les séries formelles que ces idéaux maximaux sont de codimension finie dans $\Lambda_L(G)$.

Le cas où $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et où (Π, B) est unitaire est dû à Paškūnas ([79]) et utilise de façon essentielle la correspondance de Langlands p -adique, connue uniquement dans ce cas. Notre preuve du théorème repose sur un analogue affinoïde du Lemme de Quillen dû à Ardakov et Wadsley ([3, Cor. 8.6]) et dont la preuve fait appel à des techniques de micro-localisation algébrique. On peut ainsi penser à cette approche comme à une version non commutative de la stratégie reposant sur le théorème des zéros de Hilbert.

Un autre ingrédient essentiel de la preuve est la théorie des représentations localement analytiques de G , développée par Schneider et Teitelbaum.

1.2. Représentations localement analytiques. Soient B un espace de Banach p -adique et f une fonction continue de G dans B . On dit que f est localement analytique si, localement sur B , f est donnée par une série convergente à coefficients dans B . On note $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, B)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(G, B)$ constitué des fonctions localement analytiques. Lorsque G est compact, l'espace des fonctions localement analytiques de G dans B peut s'écrire naturellement comme une limite inductive filtrante d'espaces de Banach p -adiques avec flèches de transitions injectives et compactes. Muni de la topologie localement convexe limite inductive, un tel espace vectoriel topologique est dit *de type compact*. Il est en particulier séparé et complet. L'inclusion de $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, B)$ dans $\mathcal{C}(G, B)$ est continue mais n'est pas stricte : la topologie de $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, B)$ n'est pas la topologie induite par la topologie de $\mathcal{C}(G, B)$.

Soit à présent (Π, B) une L -représentation de Banach de G . Un vecteur v de B est dit *localement analytique* si l'application continue o_v est dans $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, B)$. On vérifie aisément que l'ensemble B^{an} des vecteurs localement analytiques de B forme un sous-espace L -vectoriel de B .

Dans [83], Schneider et Teitelbaum définissent une L -représentation localement analytique de G comme un couple (π, V) où V est un L -espace vectoriel localement convexe de

type compact et π est un morphisme de G vers le groupe des automorphismes linéaires de V tel que l'application $G \times V \rightarrow V$ soit continue et que pour tout $v \in V$, l'application orbite de G dans V est localement analytique. On note $\text{Rep}_L^{\text{an}} G$ la catégorie des L -représentations localement analytiques de G .

1.2.1. *Algèbre des distributions et représentations admissibles.* On note $D(G, L)$ le dual continu⁸ de l'espace $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, L)$ des fonctions localement analytiques sur G . Ses éléments sont appelés distributions sur G . De façon similaire au cas des mesures, on montre que $D(G, L)$ est muni d'une structure d'algèbre. Comme pour les L -représentations de Banach, on montre que si (π, V) est une représentation localement analytique de G , le dual fort V' de l'espace vectoriel topologique V est muni d'une structure naturelle de $D(G, L)$ -module à gauche. De plus cette construction induit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des représentations localement analytiques de G et la catégorie des $D(G, L)$ -modules séparément continus dont l'espace sous-jacent est un espace de Fréchet nucléaire (voir [83, Cor. 3.3] pour plus de détails).

On note $\text{Rep}_L^{\text{an}} G$ la catégorie dont les objets sont les représentations localement analytiques de G et les flèches les applications continues G -équivariantes. Comme $\text{Rep}_L G$, ce n'est pas une catégorie additive. Il reste donc à construire une sous-catégorie abélienne naturelle de représentations admissibles. La difficulté est ici qu'en général l'algèbre $D(G, L)$ n'est pas noethérienne, même lorsque le groupe G est compact. Un exemple instructif est le cas du groupe $G = \mathbf{Z}_p$. La transformée d'Amice permet d'identifier l'algèbre des distributions $D(\mathbf{Z}_p, L)$ à l'algèbre des fonctions analytiques rigides sur le disque unité ouvert. Cet anneau n'est pas noethérien : il contient par exemple la fonction $\log(1+z)$ et pour tout $n \geq 1$, la fonction $(1+z)^{p^n} - 1$ divise la fonction $\log(1+z)$. La suite des idéaux engendrés par les fonctions $\log(1+z)/((1+z)^{p^n} - 1)$ forme alors une suite strictement croissante d'idéaux de $D(\mathbf{Z}_p, L)$. Cependant il existe une catégorie abélienne de $D(\mathbf{Z}_p, L)$ -modules contenant beaucoup d'objets intéressants. En effet, le disque unité ouvert est un espace rigide analytique de Stein. Or un théorème de Kiehl nous assure que, pour un tel espace X , le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{M})$ est un foncteur exact et pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux cohérents sur X dans la catégorie des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules. L'image essentielle de ce foncteur est en particulier une catégorie abélienne de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules, dits co-admissibles. Dans l'article [85], Schneider et Teitelbaum étendent la notion de module co-admissible au cas non commutatif pour des algèbres topologiques dites de Fréchet-Stein. Ils prouvent par ailleurs que lorsque G est un groupe compact, l'algèbre $D(G, L)$ est une algèbre de Fréchet-Stein. Si A est une algèbre de Fréchet-Stein, la catégorie des A -modules co-admissibles est une sous-catégorie abélienne de la catégorie des A -modules contenant tous les A -modules de présentation finie.

Remarque 1.5. Lorsque le groupe G est un groupe de Lie p -adique commutatif, le foncteur associant à toute L -algèbre affinoïde A le groupe $\text{Hom}(G, A^\times)$ des morphismes continus de G dans A^\times est représentable par un espace rigide analytique noté \widehat{G} . Il est appelé espace des caractères de G . De plus lorsque le groupe G est compact, l'espace \widehat{G} est un

8. muni de la topologie forte.

espace de Stein et il existe un isomorphisme topologique canonique

$$D(G, L) \simeq \Gamma(\widehat{G}, \mathcal{O}_{\widehat{G}}).$$

Lorsque $G = \mathbf{Z}_p$, on retrouve la transformée d'Amice. Via cet isomorphisme, la catégorie des $D(G, L)$ -modules co-admissibles s'identifie à la catégorie des $\Gamma(\widehat{G}, \mathcal{O}_{\widehat{G}})$ -modules isomorphes à l'espace des sections globales d'un faisceau cohérent sur \widehat{G} . Le foncteur des sections globales induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur \widehat{G} et cette catégorie de modules, qui est donc abélienne.

Le théorème 1.3 possède une version localement analytique.

Théorème 1.6 ([46], Thm. 1.1). *Soit (π, V) une représentation localement admissible irréductible de G . Alors le L -espace vectoriel $\text{End}_G(V)$ est de dimension finie et il existe une extension finie L' de L telle que $(\pi, L' \otimes_L V)$ est somme directe finie de représentations localement analytiques admissibles absolument irréductibles. Si de plus (π, V) est absolument irréductible, on a $\text{End}_G(V) = L$.*

Comme annoncé précédemment la preuve du théorème 1.3 (ainsi que beaucoup de résultats présentés dans ce mémoire) utilise de façon essentielle le fait que toute L -représentation de Banach admissible possède *beaucoup* de vecteurs localement analytiques. Plus précisément, on utilise le résultat suivant dû à Schneider et Teitelbaum ([85]).

Théorème 1.7. *Soit G un groupe de Lie compact. Alors l'algèbre $D(G, L)$ est un $\Lambda_L(G)$ -module fidèlement plat.*

Corollaire 1.8. *Si G est un groupe de Lie p -adique et (Π, B) est une L -représentation de Banach admissible de G , l'espace B^{an} est dense dans B . De plus la représentation localement analytique $(\Pi|_{B^{\text{an}}}, B^{\text{an}})$ est admissible et, pour tout sous-groupe compact ouvert G_0 de G , il existe un isomorphisme canonique*

$$D(G_0, L) \otimes_{\Lambda_L(G_0)} B' \xrightarrow{\sim} (B^{\text{an}})'$$

Sous les hypothèses du corollaire 1.8, le $D(G_0, L)$ -module $(B^{\text{an}})'$ est non seulement admissible, mais aussi de présentation finie. De plus le foncteur $(\Pi, B) \mapsto (\Pi|_{B^{\text{an}}}, B^{\text{an}})$ de la catégorie $\text{Rep}_L^{\text{adm}}(G)$ vers la catégorie $\text{Rep}_L^{\text{an,adm}}(G)$ est exact.

1.2.2. *Action infinitésimale sur les vecteurs localement analytiques.* Soit G un groupe de Lie p -adique. Notons $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ son algèbre de Lie. Si \mathfrak{r} est un élément de \mathfrak{g} , on définit endomorphisme $L_{\mathfrak{r}}$ de $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, L)$ en dérivant l'action de G par translation à gauche :

$$L_{\mathfrak{r}}(f)(g) := \frac{d}{dt} (f(\exp(-t\mathfrak{r})g))|_{t=0}.$$

On vérifie aisément que $\mathfrak{r} \mapsto L_{\mathfrak{r}}$ définit un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans $\text{End}_{\text{cont}}(\mathcal{C}^{\text{an}}(G, L))$. On obtient alors une forme L -linéaire continue $\iota(\mathfrak{r})$ de $\mathcal{C}^{\text{an}}(G, L)$ en posant

$$\iota(\mathfrak{r})(f) := L_{-\mathfrak{r}}(f)(1).$$

L'application ι est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} vers $D(G, L)$ qui se prolonge donc en un morphisme de \mathbf{Q}_p -algèbres de $U(\mathfrak{g})$ vers $D(G, L)$. Nous notons $U_L(\mathfrak{g}) := L \otimes_{\mathbf{Q}_p} U(\mathfrak{g})$ et en déduisons un morphisme de L -algèbres de Lie $U_L(\mathfrak{g}) \rightarrow D(G, L)$.

On en déduit que si (π, V) est une représentation localement analytique de G , il existe une structure de $U_L(\mathfrak{g})$ -module sur V déduite de la structure de $D(G, L)$ -module sur V et du morphisme ι . Comme c'est le cas pour l'action des éléments de $D(G, L)$, les éléments de $U_L(\mathfrak{g})$ agissent sur V par des endomorphismes continus.

Notons $Z_L(\mathfrak{g})$ le centre de l'anneau $U_L(\mathfrak{g})$. Une conséquence évidente du théorème 1.6 est que le centre $Z_L(\mathfrak{g})$ agit sur une représentation localement analytique de G admissible et absolument irréductible par un caractère. Il est alors naturel de se demander s'il en est de même lorsque (π, V) est obtenue à partir des vecteurs localement analytiques d'une L -représentation de Banach admissible et absolument irréductible. Plus précisément, soit (Π, B) une L -représentation de Banach, admissible et absolument irréductible de G . D'après le corollaire 1.8, le sous-espace des vecteurs localement analytiques B^{an} est dense dans B . Ceci implique que l'application de restriction $\text{End}_G(B) \rightarrow \text{End}_G(B^{\text{an}})$ est injective. La conjecture suivante est formulée dans [46].

Conjecture 1.9. *Soit (Π, B) une représentation admissible irréductible de G . Alors $\text{End}_L(B) = \text{End}_L(B^{\text{an}}) = L$. En particulier le centre $Z(\mathfrak{g})$ agit sur B^{an} par un caractère.*

Cette conjecture ne se déduit pas de la densité de B^{an} dans B . En effet, la topologie de B^{an} , pour laquelle les éléments de $U_L(\mathfrak{g})$ agissent continûment, est en général strictement plus fine que la topologie de B . En général, la structure de $U_L(\mathfrak{g})$ -module sur B^{an} ne s'étend pas par continuité à B . Il n'est donc pas possible de faire appel au théorème 1.3 pour résoudre ce problème. Notons de plus que lorsque (Π, B) est irréductible, ce n'est pas nécessairement le cas de $(\Pi|_{B^{\text{an}}}, B^{\text{an}})$. L'utilisation du théorème 1.6 est donc impossible pour aborder cette question. Certains cas particuliers de cette conjecture sont déjà connus. Lorsque $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (Π, B) est unitaire, Dospinescu a prouvé que le centre $Z_L(\mathfrak{g})$ agit sur B^{an} par un caractère ([45, Thm. 1.4]). De même l'égalité entre les algèbres d'endomorphismes est une conséquence d'un résultat de Colmez et Dospinescu sur le complété unitaire universel de la représentation $(\Pi|_{B^{\text{an}}}, B^{\text{an}})$ ([39, Cor. 0.4]). Ces cas sont particuliers au groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ car ils utilisent de façon essentielle la correspondance de Langlands p -adique.

Avec Dospinescu, nous avons cependant noté qu'il serait possible de déduire la conjecture 1.9 du théorème 1.3 à condition de pouvoir répondre positivement à la question suivante :

Question : Soit (Π, B) une L -représentation de Banach admissible de G . L'image de l'application de restriction $\text{End}_G(B) \rightarrow \text{End}_G(B^{\text{an}})$ est-elle dense pour la topologie canonique de $\text{End}_G(B^{\text{an}})$?

Rappelons brièvement ce qu'est la topologie canonique de $\text{End}_G(B^{\text{an}})$ (voir la preuve de [46, Thm. 3.13]). Soit G_0 un sous-groupe compact ouvert de G . Comme le $D(G_0, L)$ -module $(B^{\text{an}})'$ est de présentation finie, il est muni de la topologie canonique déduite de la topologie de $D(G_0, L)$. Fixons par ailleurs une présentation de $(B^{\text{an}})'$:

$$D(G_0, L)^{r_1} \longrightarrow D(G_0, L)^{r_0} \longrightarrow (B^{\text{an}})' \longrightarrow 0$$

Un tel choix de présentation identifie $\text{End}_{D(G_0, L)}((B^{\text{an}})')$ à un sous-espace fermé de $\text{Hom}_{D(G_0, L)}(D(G_0, L)^{r_0}, (B^{\text{an}})') \simeq (B^{\text{an}})^{r_0}$. La topologie induite sur $\text{End}_{D(G_0, L)}((B^{\text{an}})')$ ne dépend pas du choix de présentation ci-dessus. On utilise alors l'isomorphisme entre $\text{End}_{G_0}(B^{\text{an}})$ et $\text{End}_{D(G_0, L)}((B^{\text{an}})')$ pour définir la topologie de $\text{End}_{G_0}(B^{\text{an}})$. On vérifie finalement que $\text{End}_G(B^{\text{an}})$ s'identifie à un sous-espace fermé de $\text{End}_{G_0}(B^{\text{an}})$. Cela implique que la topologie induite sur $\text{End}_G(B^{\text{an}})$ par $\text{End}_{G_0}(B^{\text{an}})$ ne dépend pas du choix de G_0 dans G .

La réponse à la question ci-dessus est positive lorsque G est un groupe commutatif. La commutativité de G implique en effet que $\text{End}_G(B)$ est un $\Lambda_L(G_0)$ -module, et même un $\Lambda_L(G_0)$ -module de type fini. De même, $\text{End}_G(B^{\text{an}})$ est un $D(G_0, L)$ -module et $\text{End}_{G_0}(B^{\text{an}}) \simeq D(G_0, L) \otimes_{\Lambda_L(G_0)} \text{End}_G(B)$. La conclusion est une conséquence immédiate de la densité de $\Lambda_L(G_0)$ dans $D(G_0, L)$. Cependant, même lorsque $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, le problème reste ouvert.

1.2.3. *Induction parabolique.* La construction de L -représentations de Banach admissibles est un problème difficile. Dans un premier temps, il est naturel de faire appel à un procédé familier en théorie des représentations : l'induction parabolique.

Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p . Supposons désormais que G est le groupe des K -points d'un groupe réductif connexe \underline{G} défini sur K . Soit \underline{P} un sous-groupe parabolique et $P := \underline{P}(K)$. Si \underline{N}_P est le radical unipotent de \underline{P} et \underline{M}_P un sous-groupe de Levi de \underline{P} , on pose encore $N_P := \underline{N}_P(K)$ et $M_P := \underline{M}_P(K)$. Soit (θ, B) une L -représentation de Banach admissible de M_P . En composant θ avec la surjection de P sur M_P , on munit l'espace B d'une représentation continue admissible de P . On note alors $\text{Ind}_P^G B$ l'espace des fonctions continues f de G dans B qui vérifient la relation

$$\forall g \in G, \forall p \in P, f(gp) = \theta(p^{-1})(g).$$

On note $\text{Ind}_P^G \theta$ l'action de G sur $\text{Ind}_P^G B$ définie par translation à gauche :

$$\text{Ind}_P^G \theta(g)f := f(g^{-1}\cdot)$$

L'application quotient $G \rightarrow G/P$ possède une section continue et le quotient G/P est compact. L'espace $\text{Ind}_P^G B$ est donc naturellement isomorphe à l'espace des fonctions continues de G/P dans B et possède une structure de L -espace de Banach (qui ne dépend pas du choix de la section). De plus, on vérifie aisément que l'action de G sur $\text{Ind}_P^G B$ est continue et que la représentation $(\text{Ind}_P^G \theta, \text{Ind}_P^G B)$ est admissible. Lorsque la représentation (θ, B) est unitaire, il en est de même de la représentation $\text{Ind}_P^G \theta$.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il existe un analogue du procédé d'induction parabolique dans le cadre des représentations localement analytiques admissibles. Si (V, π) est une représentation localement analytique admissible⁹ de M_P , on note $\text{Ind}_P^{G, \text{an}} \theta$ la représentation localement analytique admissible de G obtenue par l'exact analogue du procédé décrit précédemment. Par ailleurs, il est facile de vérifier que si (θ, B) est une L -représentation de Banach admissible de M_P , il existe un isomorphisme canonique entre $\text{Ind}_P^{G, \text{an}} \theta$ et $(\text{Ind}_P^G \theta)^{\text{an}}$.

9. Même lorsque $K \neq \mathbf{Q}_p$, nous prenons le parti de considérer le groupe $\underline{G}(K)$ comme une variété \mathbf{Q}_p -analytique.

L'étude de ces représentations induites a été entreprise en premier lieu par Schneider et Teitelbaum lorsque $K = \mathbf{Q}_p$, $\underline{G} = \mathrm{GL}_2$, \underline{P} est un sous-groupe de Borel de \underline{G} et θ est une représentation irréductible de M_P . On peut déduire des résultats de Schneider et Teitelbaum ([83], [84], [82]) que la représentation $\mathrm{Ind}_B^G \theta$ est irréductible si et seulement si le caractère θ^{-1} n'est pas algébrique dominant. Lorsque θ^{-1} est algébrique dominant, le sous-espace de $\mathrm{Ind}_B^G \theta$ dont les éléments sont des fonctions polynomiales sur G est stable par G et isomorphe à la représentation algébrique irréductible $L(\theta^s)$ de plus haut poids θ^s ¹⁰. Le quotient $\mathrm{Ind}_P^G \theta$ par ce sous-espace est alors irréductible. Lorsque θ est le caractère trivial, ce quotient est noté St_G et appelé *représentation de Steinberg continue* de G . On peut montrer que la suite exacte

$$0 \longrightarrow L(\theta^s) \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \theta \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^G \theta / L(\theta^s) \longrightarrow 0$$

est non scindée.

Dans le cas localement analytique la situation est un peu plus compliquée. Schneider et Teitelbaum montrent que la représentation $\mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{an}} \theta$ est irréductible si et seulement si le caractère θ^{-1} n'est *pas* localement algébrique dominant. Lorsque θ est localement algébrique, on peut l'écrire de façon unique sous la forme d'un produit $\theta_{\mathrm{alg}} \theta_{\mathrm{sm}}$ où θ_{alg} est algébrique et θ_{sm} est un caractère lisse, c'est-à-dire localement constant. Supposons que $\theta_{\mathrm{alg}}^{-1}$ est dominant. Notons $\mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}} \theta_{\mathrm{sm}}$ la représentation *lisse* induite de θ_{sm} de P à G et notons $L(\theta_{\mathrm{alg}}^s)$ la représentation algébrique (sur \mathbf{Q}_p) de \underline{G} de plus haut poids θ_{alg}^s . Il existe alors une suite exacte de représentations localement analytiques

$$(1.1) \quad 0 \longrightarrow L(\theta_{\mathrm{alg}}^s) \otimes_L \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}} \theta_{\mathrm{sm}} \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^{G,\mathrm{an}} \theta \rightarrow \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{an}} \theta_{\mathrm{alg}}^s \alpha_P \theta_{\mathrm{sm}} \longrightarrow 0$$

où α_P est le caractère algébrique donné par l'action adjointe de \underline{M}_P sur $\mathrm{Lie}(\underline{N})$. Cette suite exacte est non scindée.

L'étude de l'induction parabolique dans le cadre des représentations lisses nous apprend que la représentation $\mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}} \theta$ est irréductible si et seulement si le caractère θ_{sm} n'est pas de la forme $\chi \circ \det$ ou $(\chi \circ \det)|_{\alpha_P|_p}$ où χ est un caractère lisse de \mathbf{Q}_p^\times . Dans ces deux derniers cas, la représentation $\mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}} \theta_{\mathrm{sm}}$ est de longueur 2 et se décompose en une suite exacte non scindée

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \chi \circ \det \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}}(\chi \circ \det) \longrightarrow (\chi \circ \det) \otimes_L \mathrm{St}_G^{\mathrm{sm}} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow (\chi \circ \det) \otimes_L \mathrm{St}_G^{\mathrm{sm}} \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{sm}}(\chi \circ \det |_{\alpha_P|_p}) \longrightarrow \chi \circ \det \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Nous voyons déjà sur ce cas particulier que les vecteurs localement analytiques d'une représentation admissible irréductible de G ne forment pas nécessairement une représentation irréductible. Par exemple lorsque $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, la représentation St_G est irréductible, mais on a une suite exacte non scindée :

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}_G^{\mathrm{sm}} \longrightarrow \mathrm{St}_G^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{an}} \alpha_P \longrightarrow 0.$$

10. Si χ est un caractère du tore M_P , χ^s est le conjugué de χ par l'élément non trivial s du groupe de Weyl de (GL_2, M_P) .

1.2.4. *Le foncteur d'Orlik-Strauch.* La théorie d'Orlik-Strauch ([78], [16]) a pour but de généraliser la décomposition donnée par la suite exacte (1.1) au cas où \underline{G} est un groupe réductif déployé sur K . Commençons par remarquer que le dual topologique de $\text{Ind}_P^{G,\text{an}} \theta$ est le $D(G, L)$ -module co-induit $D(G, L) \otimes_{D(P, L)} \theta^{-1}$. Après passage au dual, la suite exacte (1.1) est l'analogie, dans la catégorie des $D(G, L)$ -modules, de la décomposition dans la catégorie \mathcal{O} , du module de Verma $U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U_L(\mathfrak{p})} \theta_{\text{alg}}^{-1}$ donnée par

$$0 \longrightarrow U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U_L(\mathfrak{p})} (\theta_{\text{alg}}^s)^{-1} \alpha_P^{-1} \longrightarrow U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U_L(\mathfrak{p})} \theta_{\text{alg}}^{-1} \longrightarrow L(\theta^{-1}) \longrightarrow 0.$$

Fixons \underline{B} un sous-groupe de Borel de \underline{G} ainsi que \underline{T} un sous-tore maximal de \underline{B} et posons $B = \underline{B}(K)$, $T = \underline{T}(K)$, $\mathfrak{b} := \text{Lie}(B)$ ainsi que $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$. . . Rappelons que la catégorie \mathcal{O} est la sous-catégorie pleine de la catégorie des $U_L(\mathfrak{g})$ -modules de type fini dont les objets sont à la fois des $U_L(\mathfrak{b})$ -modules localement finis et des sommes directes de $U_L(\mathfrak{t})$ -modules simples de dimension finie sur L . Il s'agit d'une sous-catégorie abélienne de la catégorie des $U_L(\mathfrak{g})$ -modules. On note \mathcal{O}_{alg} la sous-catégorie pleine de \mathcal{O} constituée des objets dont les composantes $U_L(\mathfrak{t})$ -isotypiques proviennent de caractères du tore $\text{Res}_{K/\mathbf{Q}_p} \underline{T}$, autrement dit de caractères algébriques. Lorsque \underline{P} est un sous-groupe de \underline{G} contenant \underline{B} , on note $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{O} dont les objets sont sommes directes de $U_L(\mathfrak{m}_P)$ -modules simples de dimension finie sur L . Finalement on note $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{O} dont les objets sont à la fois dans \mathcal{O}_{alg} et dans $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$. Soit M est un objet de \mathcal{O}_{alg} . On dit qu'un sous-groupe parabolique \underline{P} contenant \underline{B} est maximal pour M si \underline{P} est maximal parmi les sous-groupes paraboliqes tels que M est un objet de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$.

Soit M un objet de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$. On peut munir M d'une unique structure de représentation localement analytique de P compatible à sa structure de $U_L(\mathfrak{p})$ -module ([78, 3.4]). En particulier M possède une structure de $D(P, L)$ -module compatible à sa structure de $U_L(\mathfrak{p})$ -module. Soit (π, V) une représentation lisse admissible du groupe M_P . On note encore (π, V) la représentation du groupe P obtenue par inflation le long de $P \twoheadrightarrow M_P$. On munit le L -espace vectoriel V de la topologie localement convexe la plus fine et on note V' son dual topologique muni de la topologie forte. Posons $D(\mathfrak{g}, P; L) := U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U_L(\mathfrak{p})} D(P, L)$. Il s'agit d'un anneau s'identifiant au sous-anneau de $D(G, L)$ des distributions d'ordre fini et de support P . D'après ce qui précède, l'espace vectoriel $M \widehat{\otimes}_L V'$ est muni d'une structure de $D(\mathfrak{g}, P; L)$ -module. On pose alors, comme dans [78, 4.1, 4.4],

$$\mathcal{F}_P^G(M, \pi) := \left(D(G, L) \otimes_{D(\mathfrak{g}, P; L)} (M \widehat{\otimes}_L V') \right)'.$$

Le résultat suivant est dû à Orlik et Strauch ([78]).

Théorème 1.10. *La représentation localement analytique $\mathcal{F}_P^G(M, \pi)$ est admissible. De plus le foncteur contravariant $M \mapsto \mathcal{F}_P^G(M, \pi)$ de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$ vers la catégorie $\text{Rep}_L^{\text{an, adm}}(G)$ est exact. Le foncteur $\pi \mapsto \mathcal{F}_P^G(M, \pi)$ de la catégorie $\text{Rep}_L^{\text{sm, adm}}(P)$ vers la catégorie $\text{Rep}_L^{\text{an, adm}}(G)$ est exact.*

Supposons de plus que \underline{P} est le plus grand sous-groupe parabolique de \underline{G} contenant \underline{B} tel que M soit isomorphe à un objet de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$ et supposons que π est irréductible. Alors la représentation $\mathcal{F}_{\underline{P}}^G(M, \pi)$ est irréductible¹¹.

Remarque 1.11. Soit θ_{alg} un caractère algébrique de \underline{T} et θ_{sm} un caractère algébrique de T . Notons $M(\theta_{\text{alg}})$ le module de Verma $U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U_L(\mathfrak{b})} \theta_{\text{alg}}$. Il s'agit d'un objet de \mathcal{O}_{alg} . Par définition, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}_B^G(M(\theta_{\text{alg}}^{-1}), \theta_{\text{sm}}) \simeq \text{Ind}_B^{G, \text{an}} \theta_{\text{alg}} \theta_{\text{sm}}$$

Cette construction généralise donc bien l'induction parabolique.

Remarque 1.12. Si $\underline{P} \subset \underline{Q}$, on a $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}}$. De plus si M est un objet de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}}$ et π est une représentation lisse admissible de P , on a, pour tout $\underline{P} \subset \underline{Q} \subset \underline{P}(M)$:

$$\mathcal{F}_{\underline{P}}^G(M, \pi) \simeq \mathcal{F}_{\underline{Q}}^G(M, \text{Ind}_{\underline{P}}^{\underline{Q}, \text{sm}} \pi).$$

Ainsi le théorème 1.10 généralise-t-il complètement la décomposition de Schneider et Teitelbaum.

Dans l'article [77], en collaboration avec Sascha Orlik, nous prouvons que les représentations obtenues sont essentiellement deux à deux non isomorphes. Plus précisément, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 1.13 ([77], Cor. 3.6). *Soient M_1 et M_2 deux objets simples de la catégorie \mathcal{O}_{alg} . Notons P_1 et P_2 les sous-groupes paraboliques standards de G , maximaux respectivement pour M_1 et M_2 . Pour $i = 1, 2$, soit (π_i, V_i) un sous-quotient irréductible de l'induite lisse $\text{Ind}_{B, \text{sm}}^{P_i} \mathbf{1}$. Alors les représentations localement analytiques irréductibles $\mathcal{F}_{P_1}^G(M_1, \pi_1)$ et $\mathcal{F}_{P_2}^G(M_2, \pi_2)$ sont isomorphes si et seulement si M_1 et M_2 sont isomorphes (auquel cas $P_1 = P_2$) et (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont isomorphes.*

La preuve de ce théorème repose sur le calcul des co-invariants pour le groupe N des représentations $\mathcal{F}_{P_i}^G(M_i, \pi_i)$. Si (π, V) est une représentation localement analytique de G , définissons $\overline{H}_0(N, V)$ comme le plus grand quotient séparé de V sur lequel N agit trivialement. Nous prouvons alors qu'il existe un isomorphisme de représentations localement analytiques de T :

$$\overline{H}_0(N, \mathcal{F}_{P_i}^G(M_i, \pi_i)) \simeq \chi_{-\lambda_i} \otimes_L J_{N \cap M_{P_i}}(V_i)$$

où λ_i est le plus haut poids du $U_L(\mathfrak{g})$ -module M_i et $J_{N \cap M_{P_i}}(V_i)$ désigne le module de Jacquet de la représentation lisse V_i de M_{P_i} .

Remarque 1.14. En réalité les théorèmes 1.10 et 1.13 sont prouvés dans [78] et [77] dans le cadre légèrement différent des représentations localement K -analytiques du groupe G , c'est-à-dire en considérant G comme une variété localement K -analytique. Ces théorèmes ont été étendus par Breuil dans [16] au cadre des représentations localement \mathbf{Q}_p -analytiques du groupe G , seul cas considéré dans ce mémoire.

11. il faut de plus supposer que $p > 2$ si G a des composantes de type B , C ou F_4 et même $p > 3$ si G a des composantes de type G_2 .

1.2.5. *Décompositions des représentations de Steinberg localement analytiques.* Supposons désormais $K = \mathbf{Q}_p$. Je vais présenter ici la décomposition de la représentation de Steinberg localement analytique, obtenue en collaboration avec Sascha Orlik dans l'article [77].

Définissons $\mathrm{St}_G^{\mathrm{an}}$ comme le quotient de la représentation $\mathrm{Ind}_B^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}$ par le sous-espace $\sum_{B \subsetneq P \subset G} \mathrm{Ind}_P^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}$, où P varie parmi les sous-groupes paraboliques de G contenant B . Le deuxième résultat principal de l'article [77] décrit complètement la série de Jordan-Hölder de $\mathrm{St}_G^{\mathrm{an}}$. Afin de formuler ce résultat, il me faut introduire quelques notations. Soit Δ l'ensemble de racines simples de \underline{T} associé à la paire $(\underline{B}, \underline{P})$. Les sous-groupes paraboliques \underline{P} de \underline{G} contenant \underline{B} sont alors en bijection avec les parties $I \subset \Delta$. Soit ρ la demi-somme des racines positives de la paire $(\underline{B}, \underline{T})$, le groupe de Weyl \mathcal{W} de \underline{G} agit sur l'ensemble des caractères algébriques de \underline{T} par la formule $w \cdot \chi = w(\chi + \rho) - \rho$. Si $w \in \mathcal{W}$, on note L_w le $U(\mathfrak{g})$ -module simple de plus haut poids $w \cdot 0$ et on note $I(w)$ la partie de Δ correspondant au plus grand sous-parabolique $\underline{P}_{I(w)}$ (contenant \underline{B}) tel que L_w soit un objet de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{P}_{I(w)}}$. Enfin, si $J \subset I$ sont deux parties de Δ , on note $v_{P_J}^{P_I}$ la représentation lisse irréductible de P_I définie comme le quotient de $\mathrm{Ind}_{P_J}^{P_I, \mathrm{sm}} \mathbf{1}$ par $\sum_{P_J \subsetneq Q} \mathrm{Ind}_Q^{P_I, \mathrm{sm}} \mathbf{1}$. Si $w \in \mathcal{W}$, on note $\mathrm{Supp}(w)$ l'ensemble des racines simples $\alpha \in \Delta$ dont la réflexion simple correspondante s_α apparaît dans une décomposition réduite de w . Enfin, si w et w' sont deux éléments de \mathcal{W} , on note $m(w', w)$ la multiplicité du $U(\mathfrak{g})$ -module $L_{w'}$ dans la série de Jordan-Hölder du module de Verma $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} w \cdot 0$. Le nombre $m(w', w)$ est calculable explicitement en fonction des polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Théorème 1.15 ([77], Thm. 4.6). *L'espace topologique $\mathrm{St}_G^{\mathrm{an}}$ est séparé et l'action de G induit une structure de représentation localement analytique de G . Si $w \in \mathcal{W}$ et si $J \subset I(w)$, la multiplicité de $\mathcal{F}_{P_{I(w)}}^G(L_w, v_{P_J}^{P_{I(w)}})$ dans $\mathrm{St}_G^{\mathrm{an}}$ est donnée par la formule*

$$\sum_{w' \in \mathcal{W} \mid \mathrm{Supp}(w')=J} (-1)^{\ell(w') + |J|} m(w', w).$$

Ce nombre est non nul si et seulement si $J \subset \mathrm{Supp}(w)$. De plus tous les sous-quotients de la représentation $\mathrm{St}_G^{\mathrm{an}}$ sont de cette forme.

Une étape importante dans la preuve du théorème ci-dessus est l'existence d'une suite exacte longue de représentations localement analytiques admissibles.

$$(1.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbf{1}_G \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset \Delta \\ |\Delta \setminus I|=1}} \mathrm{Ind}_{P_I}^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}_{P_I} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{I \subset \Delta \\ |\Delta \setminus I|=i}} \mathrm{Ind}_{P_I}^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}_{P_I} \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}_B \longrightarrow \mathrm{St}_G^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

Remarque 1.16. En fait, les résultats de [77] sont prouvés dans un cadre légèrement plus général, en remplaçant $\mathrm{Ind}_B^{G,\mathrm{an}} \mathbf{1}_B$ par $\mathrm{Ind}_B^{G,\mathrm{an}} \theta$ où θ est un caractère algébrique de T tel que θ^{w_0} est dominant.

Le théorème est prouvé dans [77] dans le cadre un peu plus général des représentations K -analytiques. Il est certainement possible de généraliser ce résultat au cadre des représentations localement analytiques du groupe G lorsque $K \neq \mathbf{Q}_p$.

1.3. Homologie des groupes discrets cocompacts. Restons dans le cas où $G = \underline{G}(\mathbf{Q}_p)$ pour \underline{G} un groupe réductif connexe déployé défini sur \mathbf{Q}_p . Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret cocompact. Je vais décrire dans cette partie des résultats obtenus en collaboration avec Jan Kohlhaase concernant l'homologie du groupe Γ sur certaines représentations localement analytiques de G et leurs applications à une conjecture de Schneider concernant la cohomologie de systèmes locaux sur les variétés analytiques rigides uniformisées par les espaces de Drinfel'd.

1.3.1. Homologie de sous-groupes discrets. Le premier de nos résultats est une nouvelle description des induites paraboliques $\text{Ind}_P^{G,\text{an}} \theta$.

Soit $\underline{G}_{\mathbf{Z}_p}$ un schéma en groupes réductif connexe déployé sur \mathbf{Z}_p et $\underline{B}_{\mathbf{Z}_p}$ un sous-schéma en groupes de Borel de $\underline{G}_{\mathbf{Z}_p}$ tels que $\underline{G} \simeq \text{Spec } \mathbf{Q}_p \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}_p} \underline{G}_{\mathbf{Z}_p}$ et que \underline{B} corresponde à $\text{Spec } \mathbf{Q}_p \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}_p} \underline{B}_{\mathbf{Z}_p}$ sous cet isomorphisme. Notons I le sous-groupe d'Iwahori correspondant, c'est-à-dire l'image réciproque de $\underline{B}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbb{F}_p)$ sous l'application $\underline{G}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \underline{G}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbb{F}_p)$. Soit θ un L -caractère du tore p -adique T . Notons \mathcal{A} la représentation $\text{Ind}_{B \cap I}^{I,\text{an}} \theta$. Notons T^- le sous-monoïde de T constitué des éléments t tels que $t^{-1}(N \cap I)t \subset N \cap I$. Soit $\text{c-ind}_I^G \mathcal{A}$ la sous-représentation de $\text{Ind}_I^G \mathcal{A}$ dont les éléments sont les fonctions à support compact dans G . On construit alors un morphisme de monoïdes $t \mapsto U_t$ de T^- vers $\text{End}_I(\text{c-ind}_I^G \mathcal{A})$ tel que U_t corresponde à une fonction de G dans $\text{End}_I(\mathcal{A})$ I -bi-équivariante et de support $It^{-1}I$.

La représentation \mathcal{A} peut également être identifiée à la sous-représentation de $\text{Ind}_B^{G,\text{an}} \theta$ dont les éléments sont les fonctions à support dans I . On en déduit, par réciprocity de Frobenius, un morphisme G -équivariant $\text{c-ind}_I^G \mathcal{A} \rightarrow \text{Ind}_B^{G,\text{an}} \theta$. On montre alors que ce morphisme se factorise en un isomorphisme de représentations localement analytiques :

$$L(\theta) \otimes_{L[T^-]} \text{c-ind}_I^G \mathcal{A} \xrightarrow{\simeq} \text{Ind}_B^{G,\text{an}} \theta.$$

Cependant il est très utile de comprendre la structure de $\text{c-ind}_I^{G,\text{an}} \theta$ en tant que $L[T^-]$ -module. Supposons le groupe \underline{G} semi-simple et adjoint de rang n . Soit Δ l'ensemble des racines simples du triplet $(\underline{G}, \underline{B}, \underline{T})$ et $(\beta_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ l'ensemble des co-poids fondamentaux correspondants. On pose $t_\alpha := \beta_\alpha(p^{-1})$ pour $\alpha \in \Delta$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1.17 ([69], Thm. 2.5). *La suite d'opérateurs $(t_\alpha - \theta(t_\alpha))_{\alpha \in \Delta}$ est $\text{c-ind}_I^G \theta$ -régulière et*

$$L[t_\alpha; \alpha \in \Delta] / (t_\alpha - \theta(t_\alpha); \alpha \in \Delta) \otimes_{L[t_\alpha; \alpha \in \Delta]} \text{c-ind}_I^G \mathcal{A} = L(\theta) \otimes_{L[T^-]} \text{c-ind}_I^G \mathcal{A} \simeq \text{Ind}_B^{G,\text{an}} \theta.$$

En particulier, on obtient une résolution de $\text{Ind}_B^{G,\text{an}} \theta$ par un complexe de Koszul $C_\bullet(\theta)$ de représentations localement analytiques de G tel que $C_i(\theta) = (\text{c-ind}_I^{G,\text{an}} \theta)^{(n)}$.

Lorsque le groupe Γ est discret, cocompact et sans torsion on déduit immédiatement de ce résultat que chaque $C_i(\theta)$ est un $L[\Gamma]$ -module libre de type fini et donc que

$$H_i(\Gamma, \text{Ind}_B^{G, \text{an}} \theta) \simeq H_i(L \otimes_{L[\Gamma]} C_\bullet(\theta)).$$

En particulier on a $H_i(\Gamma, \text{Ind}_B^{G, \text{an}} \theta) = 0$ sauf si $0 \leq i \leq n$ et $H_i(\Gamma, \text{Ind}_B^{G, \text{an}} \theta)$ est de dimension finie pour tout $i \geq 0$.

En utilisant le fait que tout module simple de la catégorie \mathcal{O}_{alg} est quotient d'un module de Verma et que tout objet de \mathcal{O}_{alg} est de longueur finie, on déduit le théorème suivant de la construction d'Orlik et Strauch :

Théorème 1.18. *Soit \underline{P} un sous-groupe parabolique de \underline{G} contenant \underline{B} , soit M un objet de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^p$ et soit π une représentation lisse de P , sous-quotient d'une induite parabolique lisse du quotient de Levi de \underline{P} . Alors le L -espace vectoriel $H_i(\Gamma, \mathcal{F}_P^G(M, \pi))$ est de dimension finie pour tout $i \geq 0$ et nul sauf si $0 \leq i \leq n$.*

En remarquant que pour tout $t \in T^-$, l'opérateur U_t est un endomorphisme à puissances bornées de chaque $C_i(\theta)$, on déduit du théorème 1.17 le critère d'annulation suivant, valable même sans supposer que le groupe \underline{G} est semi-simple et adjoint, mais uniquement réductif connexe déployé sur \mathbf{Q}_p .

Théorème 1.19 ([69], Thm. 3.13). *Supposons que Γ est un sous-groupe discret cocompact de G dont l'image dans le plus grand quotient semi-simple et adjoint de G est discrète. Soit θ un caractère algébrique de T contenu dans le réseau des racines de $(\underline{G}, \underline{T})$ dont la décomposition sur la base des racines simples du triplet $(\underline{G}, \underline{B}, \underline{T})$ a au moins un coefficient strictement positif. On a alors $H_i(\Gamma, \text{Ind}_B^{G, \text{an}} \theta) = 0$ pour tout $i \geq 0$.*

1.3.2. *Cohomologie des variétés uniformisées par les espaces de Drinfel'd.* Soit $d \geq 1$ un entier et soit Ω l'espace de Drinfel'd de dimension d . L'espace Ω est l'ouvert admissible de l'espace rigide analytique $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^d$ défini par

$$\Omega := \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^d \setminus \bigcup_{H \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^d} H$$

où H parcourt les hyperplans définis sur \mathbf{Q}_p . L'espace Ω est muni d'une action du groupe $\text{PGL}_d(\mathbf{Q}_p)$. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $\text{PGL}_{d+1}(\mathbf{Q}_p)$ agissant sans point fixe sur Ω . On peut alors considérer l'espace rigide analytique quotient $X_\Gamma := \Gamma \backslash \Omega$. Il s'agit d'une variété rigide analytique propre et lisse sur \mathbf{Q}_p . Soit V une représentation de dimension finie du groupe Γ . On note \mathcal{M}_Γ le \mathbf{Q}_p -système local sur X_Γ associé au système local constant V sur Ω muni de la donnée de descente fournie par l'action de Γ sur V .

La cohomologie de de Rham de \mathcal{M}_Γ est définie par Schneider dans [81] de la façon suivante. Par descente étale, le \mathcal{O}_Ω -module localement libre $V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{O}_\Omega$ muni de sa connexion canonique descend à X_Γ pour donner un \mathcal{O}_{X_Γ} -module à connexion $(\mathcal{E}_V, \nabla_V)$. La cohomologie de de Rham de \mathcal{M}_Γ est alors la cohomologie de de Rham de ce module à connexion :

$$H_{\text{dR}}^q(X_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma) := \mathbb{H}^q(\mathcal{E}_V \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^\bullet).$$

Lorsque la représentation V contient un \mathbf{Z}_p -réseau stable par Γ , il a été conjecturé par Schneider ([81]) et prouvé en général par Scholze ([89]) que la suite spectrale

$$(1.3) \quad E_1^{p,q} = H^q(X_\Gamma, \mathcal{E}_V \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^p) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{p+q}(X_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma)$$

dégénère.

Lorsque V ne contient pas de \mathbf{Z}_p -réseau stable par Γ , il peut cependant arriver que cette suite spectrale ne dégénère pas en E_1 ([81]).

Lorsque la représentation provient d'une représentation algébrique irréductible du groupe PGL_{d+1} , on peut cependant construire une autre suite spectrale. Dans ce cas, le faisceau localement libre \mathcal{E}_V est la restriction à Ω d'un faisceau PGL_{d+1} -équivariant sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^d$. Comme $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^d$ est isomorphe à l'espace homogène $\text{PGL}_{d+1}/\underline{P}$ où \underline{P} désigne un sous-groupe parabolique maximal de PGL_{d+1} , il se trouve que le faisceau \mathcal{E}_V est associé à la représentation de \underline{P} obtenue par restriction de V à \underline{P} . En considérant une filtration de Jordan-Hölder judicieuse de $V|_{\underline{P}}$, on définit une filtration Fil^\bullet de \mathcal{E}_V telle que chaque Fil^i est localement facteur direct de \mathcal{E}_V . Schneider démontre de plus que la connexion sur \mathcal{E}_V vérifie la condition de transversalité de Griffith pour cette filtration, c'est-à-dire

$$\nabla_V(\text{Fil}^i) \subset \text{Fil}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^1.$$

On définit alors une nouvelle filtration du complexe $\mathcal{E}_V \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^\bullet$ en posant

$$\text{Fil}^i(\mathcal{E}_V \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^\bullet) := [\text{Fil}^i \xrightarrow{\nabla_V} \text{Fil}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^1 \xrightarrow{\nabla_V} \dots \xrightarrow{\nabla_V} \text{Fil}^{i-r} \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^r \xrightarrow{\nabla_V} \dots].$$

La suite spectrale associée à cette filtration prend alors la forme

$$(1.4) \quad E_1^{p,q} = \mathbb{H}^q([\text{gr}^p \xrightarrow{\nabla_V} \dots \xrightarrow{\nabla_V} \text{gr}^{p-r} \otimes_{\mathcal{O}_{X_\Gamma}} \Omega^r \xrightarrow{\nabla_V} \dots]) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{p+q}(X_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma).$$

La conjecture suivante est formulée dans [81].

Conjecture 1.20. (i) *Les filtrations aboutissantes associées aux suites spectrales (1.3) et (1.4) coïncident.*

(ii) *La suite spectrale (1.4) dégénère en E_1 .*

(iii) *La filtration aboutissante $\text{Fil}_{\text{dR}}^\bullet$ de la suite spectrale (1.4) est transverse à la filtration de monodromie $\text{Fil}_\Gamma^\bullet$, définie comme la filtration aboutissante de la suite spectrale de Hochschild Serre*

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H_{\text{dR}}^q(\Omega) \otimes V) \Rightarrow H_{\text{dR}}^{p+q}(X_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma)$$

i.e. pour $0 \leq i \leq d+1$,

$$H_{\text{dR}}^d(X_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma) = \text{Fil}_\Gamma^j \oplus F_{\text{dR}}^{d+1-j}$$

Le cas $d = 1$ est prouvé directement par Schneider. Iovia et Spieß ont donné une preuve de cette conjecture pour d général mais lorsque V est la représentation triviale et par Große-Klönne lorsque V est la représentation standard de PGL_{d+1} ou sa duale.

Dans l'article [69], nous prouvons le cas particulier suivant de cette conjecture.

Théorème 1.21 ([69], Thm. 4.9 et 4.10). (i) *La partie (i) de la conjecture 1.20 est vraie pour d et V arbitraire.*

(ii) Lorsque $d = 2$ et la représentation V est autoduale, toutes les assertions de 1.20 sont vraies.

Notre preuve repose sur les résultats de Schneider et Teitelbaum ([86]) généralisés par Orlik ([76]) donnant une série de Jordan-Hölder des espaces de sections de fibrés vectoriels $\mathrm{PGL}_{d+1}(\mathbf{Q}_p)$ -équivariants sur Ω en termes de représentations localement analytiques de Orlik-Strauch. Plus précisément, nous utilisons une version explicite des résultats de [76] pour GL_3 que j'avais obtenue dans ma thèse ([92]). Nous exprimons alors les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale (1.4) comme duaux des groupes d'homologie de Γ étudiés précédemment et utilisons le théorème 1.19.

Remarque 1.22. Ici aussi, nous prouvons plus généralement un résultat valide en remplaçant le corps de base \mathbf{Q}_p par une extension finie K , mais il faut alors utiliser des représentations localement K -analytiques du groupe $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$.

1.4. Représentations modulo p . Soit G un groupe de Lie p -adique et soit (π, B) une représentation unitaire de G sur un espace de Banach p -adique. Soit $\|\cdot\|$ une norme de B invariante par G . La boule unité B° de B pour cette norme est alors un \mathcal{O}_L -module séparé et complet stable par G . Notons $\overline{B} = B^\circ/\varpi_L$ sa réduction modulo ϖ_L . On vérifie facilement que l'action de G sur B° stabilise $\varpi_L B^\circ$ et donne lieu à une représentation linéaire $\overline{\pi}$ de G sur le k_L -espace vectoriel \overline{B} . On obtient ainsi une représentation lisse du groupe G . On vérifie de plus que la représentation (π, B) est admissible si et seulement si la représentation lisse $(\overline{\pi}, \overline{B})$ est admissible.

Soit k une clôture algébrique de $\overline{\mathbb{F}_p}$. Beaucoup de problèmes rencontrés dans la théorie des représentations de Banach p -adiques de G ont leur analogue dans la théorie des k -représentations lisses de G . Lorsque G est le groupe des \mathbf{Q}_p -points d'un groupe réductif connexe \underline{G} défini sur \mathbf{Q}_p , les travaux de Abe, Henniart, Herzig et Vignéras ([60], [2]) nous donnent une classification des représentations admissibles irréductibles de G en fonction des représentations admissibles irréductibles *supercuspidales* des sous-groupes de Levi de \underline{G} . Ces représentations supercuspidales sont les k -représentations irréductibles du groupe G qui ne sont pas isomorphes à des sous-quotients de l'induite parabolique d'une représentation admissible d'un sous-groupe de Levi strict de G . Cependant la structure des représentations supercuspidales de G reste mystérieuse. La classification des représentations supercuspidales du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est due à Breuil ([12]). Le cas du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est dû à Abdellatif ([1]) et celui du groupe $U(1,1)(\mathbf{Q}_{p^2}/\mathbf{Q}_p)$ est dû à Koziol et Xu ([71]) mais ce sont les seuls cas connus.

1.4.1. Présentation des représentations supercuspidales. Pour le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, la classification des représentations supercuspidales est assez simple. On peut l'obtenir de la façon suivante. Soit (σ, W) une représentation lisse irréductible admissible (nécessairement de dimension finie) du groupe $\mathbf{Q}_p^\times \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Considérons l'induite compacte $\mathrm{c-ind}_{\mathbf{Q}_p^\times \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} W$. L'algèbre des endomorphismes $\mathcal{H}(\sigma)$ de cette représentation est isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_\sigma]$ où T_σ est un opérateur de Hecke correspondant à la double classe $\mathbf{Q}_p^\times \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Breuil prouve dans [12] que le quotient

$\text{c-ind}_{\mathbf{Q}_p^\times \text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} W/(\text{Im } T_\sigma)$ est admissible irréductible et supercuspidal, et que toute représentation supercuspidale est isomorphe à un tel quotient. En utilisant ce résultat, il montre que les classes d'isomorphismes de représentations supercuspidales de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de k -représentations irréductibles de dimension 2 du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. On voit donc que pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ la situation est particulièrement agréable. Mais elle ne se généralise malheureusement pas à des groupes plus compliqués.

Si K est une extension finie stricte de \mathbf{Q}_p , il est déjà souligné dans [12] que les quotients $\text{c-ind}_{K^\times \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\text{GL}_2(K)} W/(\text{Im } T_\sigma)$ ne sont pas des représentations admissibles.

Soit (π, V) une représentation irréductible admissible et supercuspidale du groupe $\text{GL}_2(K)$. D'après un théorème de Bartel et Livne ([5]) il existe une représentation admissible irréductible (σ, W) , de dimension finie, du groupe $K^\times \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ et une application surjective $\text{GL}_2(K)$ -équivariante¹²

$$\text{c-ind}_{K^\times \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\text{GL}_2(K)} W/(\text{Im } T_\sigma) \twoheadrightarrow V.$$

D'après ce qui précède, dès que $K \neq \mathbf{Q}_p$, ce morphisme ne peut pas être un isomorphisme. Cependant il était possible d'envisager que son noyau soit un $k[\text{GL}_2(K)]$ -module de type fini. Dans l'article [93], je démontre que ce n'est malheureusement jamais le cas.

Plus précisément si (π, V) est une représentation lisse du groupe $\text{GL}_2(K)$, on dit que (π, V) est de présentation finie si et seulement si il existe une représentation lisse de type fini¹³ (π_0, V_0) de $\text{GL}_2(K)$ et un morphisme $\text{GL}_2(K)$ -équivariant surjectif $f : V_0 \rightarrow V$ dont le noyau est un $k[\text{GL}_2(K)]$ -module de type fini. Cela ne dépend pas du choix de la représentation (π_0, V_0) ni de la flèche f . Le résultat principal de [93] est alors le suivant.

Théorème 1.23 ([93], Thm. 0.1). *Supposons $[K : \mathbf{Q}_p] = 2$. Si (π, V) est une représentation irréductible supercuspidale de $\text{GL}_2(K)$ ayant un caractère central, alors (π, V) n'est pas de présentation finie.*

1.4.2. *Conséquences concernant la généralisation du foncteur de Colmez.* Une étape cruciale dans l'établissement de la correspondance de Langlands p -adique pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est la construction par Colmez d'un foncteur allant de la catégorie des k_L -représentations lisses admissibles de longueur finie du groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ vers la catégorie des représentations continues du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sur les \mathcal{O}_L -modules de longueur finie. Il me semble important ici de rappeler brièvement la construction de ce foncteur.

Fixons K une extension finie de \mathbf{Q}_p et notons $A = k[[N(\mathcal{O}_K)]]$ l'algèbre complétée du groupe des matrices unipotentes supérieures du groupe $\text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. La matrice diagonale $\alpha = \begin{pmatrix} \varpi_K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit sur le groupe $N(\mathcal{O}_K)$ par conjugaison et donc sur l'anneau A via un endomorphisme noté σ . Notons alors $A_\sigma[X]$ l'anneau des polynômes tordus à coefficients dans A , c'est-à-dire l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans A mais muni d'une loi de multiplication de telle sorte que pour $a \in A$, on ait $Xa = \sigma(a)X$. Si (π, V) est une k -représentation lisse du groupe $\text{GL}_2(K)$, l'espace V est naturellement

12. Ici encore on a un isomorphisme $\text{End}_{\text{GL}_2(K)} \text{c-ind}_{K^\times \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\text{GL}_2(K)} \sigma \simeq k[T_\sigma]$.

13. c'est-à-dire telle que V_0 est un $k[\text{GL}_2(K)]$ -module de type fini.

muni d'une structure de A -module. Lorsque la représentation (π, V) est admissible, on peut montrer (voir par exemple [47]) que tout sous $A_\sigma[X]$ -module de présentation finie est automatiquement de co-type fini sur A . Lorsque $K = \mathbf{Q}_p$, on a $A \simeq k[[X]]$ et on peut utiliser cette remarque pour produire, en utilisant la stratégie de Colmez ([38]), une structure (φ, Γ) -module sur le dual d'un $A_\sigma[X]$ -module bien choisi, notamment engendrant V sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

À ce stade, il devient naturel de se demander si cette stratégie se généralise à d'autres groupes. Dans le cadre du groupe $\mathrm{GL}_2(K)$, une généralisation de cette stratégie a été proposée par Vignéras ([97]) suivant une construction de Schneider et Vignéras pour des groupes déployés sur \mathbf{Q}_p plus généraux ([87]). Plus précisément la construction de Vignéras donne un foncteur exact de la catégorie des k -représentations admissibles de longueur finie et de présentation finie vers la catégorie des k -représentations de longueur finie du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F)$. Du théorème 1.23, on peut déduire une caractérisation de cette catégorie.

Corollaire 1.24. *Si K est une extension quadratique de \mathbf{Q}_p , toute k -représentation admissible de longueur finie et de présentation finie du groupe $\mathrm{GL}_2(K)$ a une série de Jordan-Hölder constituée de sous-quotients de représentations de la forme $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(K)} \chi$, où B est un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(K)$ et χ est un caractère lisse de B à valeurs dans k^\times .*

L'idée de la démonstration du théorème 1.23 est la suivante. Soit (π, V) une représentation supersingulière irréductible du groupe $\mathrm{GL}_2(K)$. En utilisant un résultat de Hu ([61, Thm. 1.3]), il suffit de prouver que si $W \subset V$ est un sous- k -espace vectoriel de dimension stable sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ et engendrant V comme représentation de $\mathrm{GL}_2(K)$, le sous- $A_\sigma[X]$ -module M engendré par W n'est pas de co-type fini sur A . Pour ce faire, on montre qu'il suffit de prouver qu'un tel sous- $A_\sigma[X]$ -module n'est pas de présentation finie ([93, Lem. 2.6], [63]). L'idée principale est alors d'utiliser la structure de $k[X]$ -module sur les \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$. Pour ce faire, on utilise une remarque importante d'Emerton : l'anneau $A_\sigma[X]$ est de présentation finie ([47, Prop. 1.3]). Ceci implique en particulier que les $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$ sont des $k[X]$ -modules de type fini.

Comme (π, V) est supersingulière, il existe une représentation irréductible (σ, W) de $K^\times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ et une surjection

$$\mathrm{c-ind}_{K^\times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\mathrm{GL}_2(K)} W / (\mathrm{Im} T_\sigma) \twoheadrightarrow V.$$

On choisit pour $M \subset V$ un $A_\sigma[X]$ -module image d'un $A_\sigma[X]$ -module de présentation finie $\widetilde{M} \subset \mathrm{c-ind}_{K^\times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\mathrm{GL}_2(K)} W / (\mathrm{Im} T_\sigma)$. On peut alors calculer explicitement les $k[X]$ -modules $\mathrm{Tor}_i^A(k, \widetilde{M})$. Des manipulations des suites exactes longues d'homologie associées à tous les quotients de présentation finie de \widetilde{M} dominant M permettent de montrer que le noyau de l'application $\widetilde{M} \rightarrow M$ s'écrit comme une union strictement croissante de $A_\sigma[X]$ -modules de type fini. La cohérence de l'anneau $A_\sigma[X]$ nous permet alors de conclure que M n'est pas de présentation finie.

1.4.3. *Invariants sous un groupe de congruence des représentations supercuspidales.* Une autre complication dans la théorie des représentations modulo p des groupes $\mathrm{GL}_2(K)$ lorsque $K \neq \mathbf{Q}_p$ est qu'il n'existe pas de paramétrisation naturelle des représentations supercuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}_2(K)$ par les classes d'isomorphisme des k -représentations irréductibles de dimension 2 du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$. La situation est en fait très étrange. Dans l'article [25], Breuil et Paškūnas ont construit beaucoup de représentations supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(K)$ qui n'ont a priori rien à voir avec les représentations galoisiennes. Dans l'optique de faire le tri dans cet amas de représentations, ils ont associé, lorsque K est non ramifiée, à toute représentation ρ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ un « diagramme », qui correspond essentiellement à la donnée d'un système de coefficients \mathcal{V}_ρ sur l'arbre de Bruhat-Tits \mathcal{BT}_K de $\mathrm{PGL}_{2,K}$. Ils associent alors à un tel diagramme une famille de représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_2(K)$ obtenues comme quotients de la représentation $H_0(\mathcal{BT}_K, \mathcal{V}_\rho)$. Ces représentations ont la propriété suivante. Notons $D_0(\rho)$ la fibre de \mathcal{V}_ρ au-dessus du sommet de \mathcal{BT}_K fixé par $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. Il s'agit d'une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. De plus si π est une représentation du « paquet » associé à ρ par Breuil et Paškūnas, la représentation $D_0(\rho)$ s'identifie à une sous-représentation de $\pi|_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}$ et on a

$$\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)} \pi = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)} D_0(\rho).$$

Notons K_1 le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K/\varpi_K)$ donné par la réduction modulo ϖ_K . Il n'est pas clair a priori que $D_0(\rho) = \pi^{K_1}$. De fait Hu a prouvé dans l'article [62] qu'il existait des représentations π pour lesquelles cette égalité était fautive. Ce qui n'était pas clair à l'époque était qu'il existât de telles représentations. Dans la prépublication [75] en collaboration avec Le et Morra, nous montrons qu'il existe effectivement une telle représentation.

Théorème 1.25 ([75], Cor. 1.2). *Supposons K/\mathbf{Q}_p non ramifiée. Soit ρ une représentation semi-simple de dimension 2 du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ qui est 1-générique au sens de [75, Def. 4.1]. Alors il existe une représentation π de $\mathrm{GL}_2(K)$ de Breuil-Paškūnas associée à ρ telle que $\pi^{K_1} \simeq D_0(\rho)$.*

Notre méthode de démonstration est globale et utilise la cohomologie des courbes de Shimura. Elle complète un résultat de compatibilité local-global d'Emerton-Gee-Savitt ([52]). Celui-ci assure qu'il existe une représentation π dans le « paquet » de Breuil-Paškūnas vérifiant $\pi^{I_1} \simeq D_0(\rho)^{I_1}$, où I_1 désigne un pro- p -Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ contenant K_1 . L'ingrédient essentiel de notre démonstration est la description de la structure du réseau des sous-représentations d'une enveloppe injective dans la catégorie des k -représentations du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K/\varpi_K)$. Un résultat analogue a été obtenu indépendamment par Hu et Wang ([64]).

2. COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Dans ce chapitre, je vais décrire les résultats de compatibilité local-global obtenus dans les trois articles [21], [22], [23].

2.1. Description du résultat principal.

2.1.1. *Groupes unitaires.* Le cadre global de notre étude est celui des formes automorphes p -adiques sur un groupe unitaire compact aux places infinies. Depuis les travaux de Chenevier ([30]), il est bien connu que ce cadre est particulièrement agréable pour étudier les propriétés p -adiques des représentations de GL_n tout en minimisant les difficultés aux places archimédiennes, puisque toutes les représentations aux places archimédiennes sont cohomologiques. Commençons par rappeler ce cadre global.

Soit F un corps de nombres totalement réel et soit G_0 un groupe algébrique sur F , forme tordue du groupe $\mathrm{GL}_{n,F}$. Ceci implique qu'il existe une F -algèbre étale E telle que $[E : F] = 2$ ainsi qu'une E -algèbre centrale simple D de rang n^2 et une anti-involution $*$ sur D de seconde espèce, ce qui signifie que la restriction de $*$ à E est l'unique automorphisme F -linéaire non trivial c de E . Le groupe G_0 est alors le groupe algébrique défini par $G_0(R) = \{x \in (R \otimes_F D)^\times, xx^* = 1\}$. Nous notons alors $G := \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}} G_0$.

Dans tout ce qui suit nous considérons des groupes G tels que $G(\mathbf{R})$ est compact. Dans ce cas E est nécessairement une extension quadratique totalement imaginaire de F . Nous faisons de plus l'hypothèse que l'extension E/F est non ramifiée en toutes les places finies et que le groupe G est quasi-déployé en toutes les places finies.

Soit S_p l'ensemble des places de F divisant p . Nous supposons que pour tout $v \in S_p$, la place v est non ramifiée et décomposée dans E . Il existe ainsi un isomorphisme $G_0(F_v) \simeq \mathrm{GL}_n(F_v)$ que nous fixons une fois pour toute. Le groupe de Lie p -adique $G(\mathbf{Q}_p)$ est donc isomorphe à $\prod_{v \in S_p} \mathrm{GL}_n(F_v)$.

Fixons désormais L une extension finie de \mathbf{Q}_p . Pour U un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}^\infty)$, on note X_U l'ensemble fini $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}^\infty) / U$. Si $U^p \subset G(\mathbf{A}^{p,\infty})$ est un sous-groupe compact ouvert, on note X_{U^p} l'espace topologique $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}^\infty) / U^p$. On note $\tilde{H}^0(U^p)_L$ le L -espace vectoriel des fonctions continues de X_{U^p} dans L . Cet espace peut être vu à la fois comme la cohomologie complétée de niveau modérée U^p de la tour de « variétés de Shimura » $(X_U)_{U \subset G(\mathbf{A}^\infty)}$ et comme l'espace des formes automorphes p -adiques de niveau modéré U^p sur $G(\mathbf{A})$. L'espace topologique X_{U^p} étant compact, on munit $\tilde{H}^0(U^p)_L$ de la norme sup, ce qui en fait un espace de Banach p -adique. Le groupe $G(\mathbf{Q}_p)$ agit continûment sur l'espace X_{U^p} par translation à droite. On munit ainsi l'espace $\tilde{H}^0(U^p)_L$ d'une L -représentation de Banach du groupe de Lie p -adique $G(\mathbf{Q}_p)$. Il est clair que cette action préserve la boule unité de la norme sup. Cette représentation est donc une représentation unitaire de $G(\mathbf{Q}_p)$. La finitude des ensembles X_U implique que cette représentation est de plus admissible.

2.1.2. *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes de G .* Soit W une L -représentation algébrique du groupe G , ainsi que W^\vee la représentation duale. Dans ce qui suit, on considère une telle représentation comme une représentation du groupe $G(\mathbf{Q}_p) \subset G(L)$. Soit $U = U_p \times U^p$ un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{Q}_p) \times U^p$. Une forme automorphe classique de niveau U et de poids W^\vee est par définition un élément du L -espace vectoriel de dimension finie

$$H^0(U, W^\vee) := \mathrm{Hom}_{U_p}(W, \tilde{H}^0(U^p)_L).$$

En fixant ι un isomorphisme entre $\overline{\mathbf{Q}_p} \simeq \mathbf{C}$, on retrouve la définition « classique » des formes automorphes. En effet, via ι , la représentation W permet de définir une représentation algébrique complexe (π_∞, W_∞) du groupe G . On vérifie alors que le \mathbf{C} -espace vectoriel $H^0(U, W^\vee)_{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \otimes_{L, \iota} H^0(U, W^\vee)$ est en bijection naturelle ([30, 4.2]) avec le \mathbf{C} -espace vectoriel des fonctions $f : G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}) / U \rightarrow W_\infty^\vee$ telles que, pour $g \in G(\mathbf{A})$ et $k \in G(\mathbf{R})$,

$$f(gk) = \pi_\infty(k^{-1})^\vee f(g).$$

Supposons (π_∞, W_∞) irréductible. Ce cas se présente dès que W est irréductible et L assez grand. On peut donner une description explicite des espaces $H^0(U, W^\vee)$ en termes de représentations automorphes de $G(\mathbf{A})$. L'espace

$$H^0(W_\infty^\vee)_{\mathbf{C}} := \varinjlim_{U \subset G(\mathbf{A}^\infty)} H^0(U, W_\infty^\vee)_{\mathbf{C}}.$$

est naturellement muni d'une représentation lisse semi-simple du groupe $G(\mathbf{A}^\infty)$ se décomposant de la façon suivante

$$H^0(W_\infty^\vee)_{\mathbf{C}} \simeq \bigoplus_{\pi} \pi^{m(\pi \otimes_{\mathbf{C}} \pi_\infty)}$$

où π parcourt l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $G(\mathbf{A}^\infty)$ et où $m(\pi_f \otimes_{\mathbf{C}} \pi_\infty)$ désigne la multiplicité de la représentation irréductible $\pi \otimes_{\mathbf{C}} \pi_\infty$ de $G(\mathbf{A})$ dans l'espace $L^2(G(F) \backslash G(\mathbf{A}))$.

Si π est une \mathbf{C} -représentation irréductible de $G(\mathbf{A}^\infty)$ telle que $m(\pi \otimes \pi_\infty) \neq 0$, la représentation π est définie sur un corps de nombres. Les représentations π telles que $\pi^U \neq 0$ et $m(\pi \otimes \pi_\infty) \neq 0$, étant en nombre fini, on peut choisir l'extension L suffisamment grande pour que toutes ces représentations soient définies sur L (via ι). On obtient alors la décomposition suivante

$$(2.1) \quad H^0(U, W^\vee) \simeq \bigoplus (\pi^U)^{m(\pi \otimes \pi_\infty)}$$

Soit π une représentation irréductible de $G(\mathbf{A}^\infty)$ comme considérée ci-dessus, c'est-à-dire $\pi^U \neq 0$ et $m(\pi \otimes \pi_\infty) \neq 0$. On peut décomposer cette représentation en un produit tensoriel restreint $\pi \simeq \bigotimes'_v \pi_v$ où chaque π_v est une L -représentation lisse irréductible de $G(F_v)$. Soit v une place finie de F non ramifiée et décomposée dans E et telle que π_v est sphérique. Soit w une place de E divisant v . L'inclusion $F \subset E$ induit un isomorphisme $F_v \simeq E_w$ ainsi qu'un isomorphisme de groupes $\iota_w : G(F_v) \simeq G(E_w)$. La représentation π_v est sphérique, en particulier le groupe G_{F_v} est quasi-déployé et donc isomorphe à GL_{n, F_v} . Via ι_w , on considère π_v comme une représentation du groupe $\mathrm{GL}_n(E_w)$. Comme cette représentation est définie sur L , le paramètre de Satake de la représentation $\pi_v \otimes |\det|^{\frac{1-n}{2}}$ est défini sur L . On peut donc associer à (π, w) une classe de conjugaison semi-simple de $\mathrm{GL}_n(L)$ notée $\theta_{\pi, w}$.

En utilisant les théorèmes de transfert des groupes unitaires à GL_n ([72, Cor. 5.3]) ainsi que les théorèmes de construction de représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes de GL_n ([34, Thm. 3.2.3]), on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Il existe, à isomorphisme près, une unique représentation continue semi-simple $\rho_\pi : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow \mathrm{GL}_n(L)$ telle que*

- ρ_π est non-ramifiée en toute place w de E divisant une place v de F décomposée dans E et telle que π_v est sphérique ;
- si w est une telle place et Frob_w un élément de Frobenius géométrique en w , la classe de conjugaison du semi-simplifié de $\rho_\pi(\text{Frob}_w)$ est $\theta_{\pi,w}$.

Remarque 2.2. La représentation ρ_π est entièrement déterminée par sa restriction aux groupes de décomposition correspondant aux places w de E dont la restriction à F vérifie les hypothèses de l'énoncé ci-dessus. En effet l'ensemble de ces places w est de densité 1 dans l'ensemble des places de E .

Par ailleurs, il est facile de vérifier que si ρ_π existe, en notant c l'unique automorphisme F -linéaire non trivial de E et en désignant par ε le caractère cyclotomique, alors,

$$(2.2) \quad \rho_\pi^\vee \circ c \simeq \rho_\pi \otimes \varepsilon^{n-1}$$

2.1.3. Algèbres de Hecke. Le fait de travailler avec des groupes unitaires compacts à l'infini présente cependant un inconvénient : il n'existe pas d'action naturelle du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E)$ sur le L -espace de Banach $\tilde{H}^0(U^p)_L$. On ne peut donc pas définir l'analogue de la représentation $\tilde{H}^1(U^p)_L[\rho]$ comme dans le cas elliptique. Cependant cette difficulté peut être aisément contournée en utilisant l'action des opérateurs de Hecke sur $\tilde{H}^0(U^p)_L$ aux places non ramifiées.

Soit v une place de F telle que $v \notin S_p$ et telle que U_v soit un sous-groupe compact hyperspécial de $G(F_v)$. On note $\mathcal{H}_{G(F_v)}(U_v, L)$ l'algèbre de Hecke associée à U_v . Il s'agit de l'espace des fonctions à support compact de $U_v \backslash G(F_v)/U_v$ dans L . Il s'agit d'une L -algèbre dont la multiplication est définie par convolution. Le groupe U_v étant hyperspécial, cette algèbre est commutative noethérienne et régulière. Elle agit naturellement sur l'espace $\tilde{H}^0(U^p)_L$ et chaque élément de $\mathcal{H}_{G(F_v)}(U_v, L)$ agit continûment sur $\tilde{H}^0(U^p)_L$ et commute à l'action de $G(F_p)$.

On note alors $\mathcal{H}^{\text{un}}(U^p, L)$ l'algèbre

$$\varinjlim_S \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}_{G(F_v)}(U_v, L)$$

où S parcourt les ensembles finis de places $v \notin S_p$, décomposées dans E et telles que U_v est hyperspécial. On a donc un morphisme de L -algèbres

$$\mathcal{H}^{\text{un}}(U^p, L) \rightarrow \text{End}_{G(\mathbf{Q}_p)} \tilde{H}^0(U^p)_L$$

Notons S l'ensemble des places de F contenant S_p ainsi que les places v pour lesquelles U_v n'est pas un groupe hyperspécial. Supposons de plus que si $v \in S$, v est décomposée dans E . Soit $\rho : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow \text{GL}_n(L)$ une représentation continue semi-simple vérifiant (2.2). Supposons de plus que ρ est non ramifiée hors de S . On peut alors associer à ρ un caractère ψ_ρ de $\mathcal{H}^{\text{un}}(U^p, L)$ où $\psi_\rho = \bigotimes_{v \notin S} \psi_{\rho_v}$. On note ψ_{ρ_v} le caractère de $\mathcal{H}_{G(F_v)}(U_v, L)$ correspondant à la classe de conjugaison du Frobenius $\rho(\text{Frob}_w)$ pour w divisant v via l'isomorphisme de Satake.

On définit alors $\tilde{H}^0(U^p)_L[\rho]$ comme le sous-espace ψ_ρ -isotypique de $\tilde{H}^0(U^p)_L$. La représentation ρ est dite automorphe p -adique lorsque $\tilde{H}^0(U^p)_L[\rho] \neq 0$. Le sous- L -espace vectoriel fermé $\Pi(\rho, U^p) := \tilde{H}^0(U^p)_L[\rho]$ de $\tilde{H}^0(U^p)_L$ est stable sous l'action

de $G(\mathbf{Q}_p)$. C'est donc une représentation continue admissible du groupe $G(\mathbf{Q}_p)$. On espère fortement que la représentation $\Pi(\rho, U^p)$ détermine complètement les représentations $\rho_w := \rho|_{\text{Gal}(\overline{E}_w/E_w)}$ pour $w|p$. Plus précisément, on espère que pour toute place $w|p$ de F , il existe une représentation admissible continue $\Pi(\rho_w)$ de $\text{GL}_n(E_w)$ sur un L -espace de Banach telle que

$$\Pi(\rho, U^p) \simeq \left(\widehat{\bigotimes}_{v|p} \Pi(\rho_w) \right) \otimes_L \left(\bigotimes_{v \in S \setminus S_p} \pi(\rho_w)^{U_v} \right)$$

où $\pi(\rho_w)$ désigne la représentation lisse de $G(F_v)$ associée à ρ_w par la correspondance de Langlands locale¹⁴.

Pour motiver cette définition, remarquons déjà que si π est une représentation de $G(\mathbf{A}^\infty)$ telle que $m(\pi \otimes \pi_\infty) \neq 0$, alors il découle de (2.1) que, pour tout sous-groupe compact ouvert U_p de $G(\mathbf{Q}_p)$,

$$\left(\left(\bigotimes_{v|p} \pi_v \right)^{U_p} \right)^{m(\pi \otimes \pi_\infty)} \hookrightarrow \text{Hom}_{U_p}(W, \Pi(\rho_\pi, U^p))$$

En particulier la représentation $\Pi(\rho_\pi, U^p)$ contient des vecteurs localement algébriques.

On est cependant loin d'être capable de construire les représentations $\Pi(\rho_w)$, même dans les cas les plus simples, lorsque $G(F_v)$ est différent de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il est toutefois possible de se demander si la classe d'isomorphisme de la représentation $\Pi(\rho_\pi, U^p)$ détermine ρ_w .

2.1.4. Compatibilité local-global. Soit $\rho : \text{Gal}(\overline{E}/E) \rightarrow \text{GL}_n(L)$ une représentation galoisienne semi-simple continue vérifiant la condition (2.2) et non ramifiée hors de S .

Nous supposons désormais, pour simplifier l'exposition, qu'en toute place $w|p$ de E , on a $E_w \simeq \mathbf{Q}_p$. De plus si v est une place de F divisant p , on choisit une des deux places w de E divisant v et on pose $\rho_v := \rho_w = \rho|_{\text{Gal}(\overline{E}_w/E_w)}$. On a donc $\text{Gal}(\overline{E}_w/E_w) \simeq \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Nous nous plaçons dans le cas où toutes les représentations ρ_v sont *crystallines* de poids de Hodge-Tate réguliers, c'est-à-dire que la filtration de Hodge sur $D_{\text{dR}}(\rho_v) \simeq D_{\text{cris}}(\rho_v)$ est un drapeau complet.

Rappelons de plus que l'on sait comment associer à ρ_v une représentation lisse irréductible $\pi(\rho_v)$ de $\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Soit $(D_{\text{cris}}(\rho_v), \varphi_v)$ l'isocrystal associé à ρ_v . Notons Φ_{ρ_v} la classe de conjugaison de $\text{GL}_n(L)$ associée au semi-simplifié de l'endomorphisme φ_v . Par définition, la représentation $\pi(\rho_v)$ est telle que le paramètre de Satake de $\pi(\rho_v) \otimes |\det|^{-\frac{1-n}{2}}$ est Φ_{ρ_v} .

Nous nous plaçons désormais dans le cas où φ_v est semi-simple régulier et où la représentation $\pi(\rho_v)$ est générique, ce qui revient à demander que les valeurs propres $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'endomorphisme φ_v vérifient, pour tout $i \neq j$,

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} \notin \{1, p\}$$

14. Lorsque v est décomposée dans E , on choisit une place w de E divisant v et on considère $\Pi(\rho_w)$ (resp. $\pi(\rho_w)$) comme une représentation de $\text{GL}_n(F_v)$ via l'isomorphisme $F_v \simeq E_w$, en conjecturant que cette représentation est indépendante du choix de w .

Quitte à élargir le corps L si nécessaire, on peut supposer que Φ_{ρ_v} est la classe de conjugaison d'une matrice diagonale à coefficients deux à deux distincts. On appelle raffinement de ρ_v un n -uplet *ordonné* $\mathcal{R}_v = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de valeurs propres de φ_v . Par extension, on appelle raffinement de ρ la donnée d'une famille $(\mathcal{R}_v)_{v|p}$ où chaque \mathcal{R}_v est un raffinement de ρ_v .

Remarque 2.3. Supposons que ρ est irréductible et de la forme ρ_π pour une représentation automorphe π de $G(\mathbf{A}^\infty)$ telle que $m(\pi \otimes \pi_\infty) \neq 0$ pour une certaine représentation algébrique irréductible W et telle que, pour $v|p$, π_v est sphérique. On sait alors que pour $v|p$, ρ_v est cristalline de poids de Hodge-Tate réguliers déterminés par le plus haut poids de W^\vee et $\pi(\rho_v) \simeq \pi_v$ (voir [33, Thm. 3.3]). Par ailleurs, on a une inclusion de représentations localement analytiques

$$\bigotimes_{v|p} \pi(\rho_v) \otimes_L W)^{m(\pi \otimes \pi_\infty)} \hookrightarrow \Pi(\rho, U^p)^{\text{an}}$$

Ainsi les vecteurs localement algébriques de $\Pi(\rho, U^p)$ permettent de retrouver les isocristaux $D_{\text{cris}}(\rho_v)$ ainsi que les poids de Hodge-Tate. On espère que la représentation $\Pi(\rho, U^p)$ caractérise complètement la filtration de Hodge sur $D_{\text{dR}}(\rho_v)$.

Notons $B \subset \text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, $T \subset B$ le sous-tore des matrices diagonales ainsi que \bar{B} le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures. Si M est un $U_L(\mathfrak{gl}_n)$ -module de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\text{b}}$, on définit un objet M^\vee de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\bar{\text{b}}}$ en posant

$$M^\vee = \text{Hom}_L(M, L)^{\bar{\mathfrak{n}}^\infty}$$

Il s'agit du plus grand sous-espace de $\text{Hom}_L(M, L)$ sur lequel le radical unipotent $\bar{\mathfrak{n}}$ de $\bar{\mathfrak{b}}$ agit de façon nilpotente.

Définition 2.4. Soit \mathcal{R} un raffinement de ρ . Soit $M = (M_v)_{v|p}$ une famille d'objets de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\text{b}}$. On définit une représentation localement analytique du groupe $G(\mathbf{Q}_p) \simeq \text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)^{[F:\mathbf{Q}]}$ en posant

$$\mathcal{F}(M, \mathcal{R}) := \widehat{\bigotimes}_{v|p} \mathcal{F}_{\bar{B}}^{\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)}(M_v^\vee, \delta_{\mathcal{R}_v})$$

où $\delta_{\mathcal{R}_v}$ est le caractère non ramifié de T défini par

$$\delta_{\mathcal{R}_v} = \text{nr}(\varphi_{1,v}) \otimes \cdots \otimes \text{nr}(\varphi_{n,v} p^{1-n})$$

où $\text{nr}(\varphi)$ désigne l'unique caractère non ramifié de \mathbf{Q}_p^\times envoyant p sur φ .

Remarque 2.5. Supposons que M soit l'objet simple de plus haut poids μ dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\text{b}}$. Alors la représentation $\Pi(M, \mathcal{R})$ est isomorphe au socle de $\text{Ind}_B^{\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p), \text{an}} \chi$ où χ désigne le caractère

$$(x_{1,v}, \dots, x_{n,v})_{v|p} \mapsto \prod_{v|p} \prod_{i=1}^n x_i^{\mu_{i,v}} (\varphi_{i,v} p^{1-i})^{v_p(x_{i,v})}$$

Pour $v|p$, choisissons un isomorphisme $D_{\text{cris}}(\rho_v) \simeq L^n$ déterminant une base dans laquelle l'endomorphisme φ_v a une matrice diagonale dont les entrées diagonales sont ordonnées conformément au raffinement \mathcal{R}_v . L'ensemble des drapeaux complets de cet espace s'identifie ainsi au quotient $\text{GL}_n(L)/B(L)$. Notons $w_{\mathcal{R}_v}$ l'unique élément de \mathfrak{S}_n tel que la filtration de Hodge de $D_{\text{dR}}(\rho_v) \simeq D_{\text{cris}}(\rho_v)$ appartienne à la cellule $B(L)w_{\mathcal{R}_v}B(L)$. Notons enfin $\mathbf{k}_v = (k_{1,v} < \dots < k_{n,v})$ le vecteur des poids de Hodge-Tate de ρ_v ¹⁵. On identifie \mathbf{k}_v à un poids de GL_n , c'est-à-dire à un caractère algébrique du tore T . Pour un tel caractère λ , on note $L(\lambda)$ l'objet simple de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\text{b}}$ de plus haut poids $\lambda - \theta$, où $\theta = (0, -1, \dots, 1 - n)_{v|p}$ désigne la demi-somme des racines positives.

Le résultat principal de l'article [23] est alors le suivant. Rappelons que nous avons ici fixé $\rho : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow \text{GL}_n(L)$ une représentation galoisienne semi-simple continue vérifiant la condition (2.2) et non ramifiée hors de S . Nous supposons qu'elle est cristalline en p et que si $v|p$, les poids de Hodge-Tate de ρ_v sont réguliers, que l'endomorphisme de Frobenius φ_v est semi-simple régulier et que la représentation lisse $\pi(\rho_v)$ est générique.

Théorème 2.6 ([23], Thm. 5.3.3). *Soit ρ vérifiant les propriétés ci-dessus. Supposons que :*

- (i) *le groupe U^p est de la forme $\prod_{v \notin S_p} U_v$ où U_v est hyperspécial en toute place v de F inerte dans E ;*
- (ii) *la réduction $\bar{\rho}$ de ρ modulo ϖ_L est telle que $\bar{\rho}(\text{Gal}(\bar{E}/E(\zeta_p)))$ est un sous-groupe adéquat ;*
- (iii) *il existe un raffinement \mathcal{R} de ρ , ainsi qu'un objet M de \mathcal{O}_{alg} tels que*

$$\text{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\mathcal{F}(M, \mathcal{R}), \Pi(\rho, U^p)^{\text{an}}) \neq 0$$

En particulier on suppose que $\Pi(\rho, U^p) \neq 0$.

Soit $w = (w_v)_{v|p} \in \mathfrak{S}_n^{[F:\mathbf{Q}_p]}$. Alors :

$$(2.3) \quad \text{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\mathcal{F}((L(w_v(\mathbf{k}_v)))_{v|p}, \mathcal{R}), \Pi(\rho, U^p)^{\text{an}}) \neq 0$$

si et seulement si pour tout $v|p$, on a $w_v \geq w_{\mathcal{R}_v}$ pour l'ordre de Bruhat.

Pour résumer, ce théorème nous dit que la représentation $\Pi(\rho, U^p)$ détermine la position des filtrations de de Rham des isocristaux $D_{\text{cris}}(\rho_v)$ dans la stratification de Schubert de la variété de drapeaux.

Soit w_0 l'élément maximal de \mathfrak{S}_n pour l'ordre de Bruhat. Pour tout $v|p$, le caractère $w_0(\mathbf{k}_v) - \theta$ est dominant. Ainsi la représentation $\mathcal{F}((L(w_0(\mathbf{k}_v)))_{v|p}, \mathcal{R})$ est localement algébrique et isomorphe à

$$\bigotimes_{v|p} (L(w_0(\mathbf{k}_v)) \otimes_L \pi(\rho_v))$$

Comme l'inégalité $w_0 \geq w_{\mathcal{R}_v}$ est toujours vérifiée, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.7 ([23], Thm. 5.1.3). *Sous les hypothèses du théorème 2.6, la représentation ρ est automorphe. Cela signifie qu'il existe une représentation π de $G(\mathbf{A}^\infty)$ telle que $\rho \simeq \rho_\pi$.*

15. Dans nos conventions, les poids de Hodge-Tate sont les opposés des sauts de la filtration de Hodge.

Remarque 2.8. 1) La condition $\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\mathcal{F}(M, \mathcal{R}), \Pi(\rho, U^p)^{\mathrm{an}}) \neq 0$ revient à dire que la représentation galoisienne ρ est associée à une forme automorphe p -adique de *pente finie*.

2) Dans [23], le théorème est énoncé sous l'hypothèse

$$\mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\mathcal{F}(U_L(\mathfrak{gl}_n) \otimes_{U_L(\mathfrak{b})} w_0(\mu_{\mathbf{k}})), \mathcal{R}), \Pi(\rho, U^p)) \neq 0$$

Cette hypothèse peut sembler plus forte. En réalité, en utilisant [22, Thm. 5.5], on peut se ramener à cette hypothèse. En d'autres termes, si ρ est associée à une forme p -adique surconvergente de pente finie, elle est également associée à une forme p -adique surconvergente de pente finie qui est de plus *de poids classique*.

Dans l'article [22], nous donnons une démonstration plus directe du corollaire 2.7 sous l'hypothèse supplémentaire suivante : pour tout $v|p$, l'élément $w_0 w_{\mathcal{R}_v}^{-1}$ est un produit de réflexions simples deux à deux distinctes. Il s'agit de [22, Thm. 1.1]. Dans tous les cas, les démonstrations sont basées sur les résultats de l'article [21].

Nous montrons en réalité un résultat légèrement plus fort. Lorsque les éléments $w_0 w_v^{-1}$ sont des produits de réflexions simples, nous montrons que les espaces (2.3) sont de dimension *minimale*. Cela implique qu'ils devraient apparaître avec multiplicité 1 dans le socle de la représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ associée conjecturalement à ρ_v . La question de savoir si ce résultat reste vrai en général est très intéressante. Il semble que ce genre de résultat soit important pour la construction de fonctions L p -adiques dans les cas critiques. Notre résultat de multiplicité 1 est une conséquence de la lissité de la variété trianguline en certains points. Comme cette variété n'est pas lisse en général, il semble que de nouvelles idées soient nécessaires pour aller plus loin.

Remarque 2.9. 1) Dans le cas du groupe $\mathrm{GL}_{2, \mathbf{Q}}$, le corollaire 2.7 est un théorème de Kisin ([67]). Lorsque le raffinement \mathcal{R} est *non critique*, c'est-à-dire $w_{\mathcal{R}_v} = w_0$ pour tout $v|p$, le corollaire 2.7 est un théorème de Chenevier ([31, Prop. 4.2]).

2) Dans le cas du groupe $\mathrm{GL}_{2, \mathbf{Q}}$, le théorème 2.6 est dû à Breuil et Emerton ([20]) par des méthodes plus géométriques. Lorsque G est un groupe unitaire en deux variables, le théorème 2.6 est prouvé par Ding dans [44].

2.2. Familles de représentations galoisiennes. Dans cette partie, je vais donner quelques éléments de preuve du théorème 2.6 et vais expliciter quelques résultats intermédiaires des articles [21], [22], [23].

2.2.1. Variétés de Hecke et systèmes de Taylor-Wiles-Kisin. La théorie des variétés de Hecke joue un rôle crucial dans la preuve du théorème 2.6. Les variétés de Hecke pour les groupes unitaires ont été construites et étudiées notamment par Bellaïche, Chenevier et Emerton ([30], [6], [50]).

Nous supposons désormais, afin de simplifier l'exposition, que l'on a $S = S_p$ et que toutes les représentations locales $\bar{\rho}_v$ sont absolument irréductibles¹⁶. Ces hypothèses n'existent pas dans les articles [21], [22] et [23].

16. Rappelons que nous avons également supposé que $F_v \simeq \mathbf{Q}_p$.

Soit $E_S \subset \overline{\mathbf{Q}}$ l'extension maximale de E non ramifiée hors de S et soit $R_{\bar{\rho}, S}$ l'anneau de déformations universel de la représentation $\bar{\rho}$ du groupe $\text{Gal}(E_S/E)$. On note $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}, S}$ la fibre générique du schéma formel $\text{Spf } R_{\bar{\rho}, S}$. Il s'agit d'un espace analytique rigide dont les points sont en bijection avec les relevés de $\bar{\rho}$ en caractéristique 0. De même, si $v|p$, on note $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v}$ l'espace analytique rigide paramétrant les relevés de la représentation locale $\bar{\rho}_v$ de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Notons $T_p = T^{[F:\mathbf{Q}]}$. La variété de Hecke $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ est alors un sous-espace analytique fermé du produit $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}, S} \times \widehat{T}_p$ correspondant à l'adhérence de Zariski des points « classiques » de la forme $(\rho_\pi, (\delta_v)_{v|p})$ où π est une représentation automorphe du groupe $G(\mathbf{A}^\infty)$, sphérique aux places divisant p et δ_v est un caractère localement algébrique *dominant* de T , c'est-à-dire de la forme $\delta_{\text{alg}}\delta_{\text{sm}}$ où δ_{alg} est un caractère algébrique dominant correspondant aux poids de Hodge-Tate de $\rho_{\pi, v}$ et δ_{sm} un caractère lisse non ramifié de T correspondant à un choix de raffinement de $\rho_{\pi, v}$ comme dans la définition 2.4. Cette variété $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ est en fait le support d'un faisceau cohérent \mathcal{M}_{U^p} sur $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}, S} \times \widehat{T}_p$. Ce faisceau est tel que si $x = (\rho, (\delta_v)_{v|p})$ est un point de $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$, où les $\delta_v = \delta_{\text{alg}, v}\delta_{\text{sm}, v}$ sont des caractères localement algébriques de T , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{k(x)}(\mathcal{M}_{U^p} \otimes k(x), k(x)) &\simeq \\ &\text{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}\left(\bigotimes_{v|p} \mathcal{F}_{\overline{B}}^{\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)}((U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \delta_{\text{alg}, v})^\vee, \delta_{\text{sm}, v}), \tilde{H}^0(U^p)_L[\rho]\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.10. On peut montrer que si $x = (\rho, (\delta_v)_{v|p})$ est un point de $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ comme ci-dessus, $\delta_{\text{alg}, v} = \delta_{w_v(\mathbf{k}_v)}$ correspond à une permutation des poids de Hodge-Tate de $\rho_{\text{alg}, v}$ et $\delta_{\text{sm}, v} = \delta_{\mathcal{R}_v}$ à un raffinement \mathcal{R}_v de la représentation $\rho_{\pi, v}$. La représentation $\mathcal{F}((L(w_v(\mathbf{k}_v)))_{v|p}, \mathcal{R})$ correspond alors au cosocle de la représentation

$$\bigotimes_{v|p} \mathcal{F}_{\overline{B}}^{\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)}((U_L(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \delta_{\text{alg}, v})^\vee, \delta_{\text{sm}, v})$$

apparaissant dans l'isomorphisme ci-dessus.

Supposons $\bar{\rho}$ absolument irréductible et vérifiant les hypothèses du théorème 2.6. Notons $\tilde{H}^0(U^p)_{L, \bar{\rho}}$ le facteur direct de $\tilde{H}^0(U^p)_L$ obtenu par localisation en $\bar{\rho}$. Il s'agit d'une représentation unitaire admissible de $G(\mathbf{Q}_p)$ contenant tous les $\tilde{H}^0(U^p)_L[\rho]$ pour ρ relevant $\bar{\rho}$. Dans l'article [28], Caraiani, Emerton, Gee, Geraghty, Paškūnas et Shin appliquent la méthode de Taylor-Wiles-Kisin en niveau infini en p . Le résultat de cette construction est une L -représentation unitaire admissible de Banach du groupe $\mathbf{Z}_p^s \times G(\mathbf{Q}_p)$, notée Π_∞ , pour un certain entier $s \geq 1$, ainsi qu'une inclusion $\tilde{H}^0(U^p)_{L, \bar{\rho}} \subset \Pi_\infty$ identifiant $\tilde{H}^0(U^p)_{L, \bar{\rho}}$ aux vecteurs fixés par \mathbf{Z}_p^s . Le but de l'article [21] est d'étudier l'image par le foncteur d'Emerton-Jacquet de la représentation localement analytique Π_∞^{an} . Comme dans le cas des variétés de Hecke, on construit une variété analytique rigide $X_p(\bar{\rho})$. Il s'agit d'une sous-variété analytique rigide de l'espace

$$\prod_{v|p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v} \times \mathbb{U}^r \times \widehat{T}_p$$

où \mathbb{U}^r est un produit de disques unité ouverts provenant de l'application de la méthode de Taylor-Wiles. On construit alors, de façon analogue à la théorie des variétés de Hecke, un faisceau cohérent \mathcal{M}_∞ sur l'espace

$$\prod_{v|p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v} \times \mathbb{U}^r \times \widehat{T}_p$$

et $X_p(\bar{\rho})$ est par définition le support de ce faisceau. L'inclusion $\widetilde{H}^0(U^p)_{L,\bar{\rho}} \subset \Pi_\infty$ induit une immersion fermée $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}} \hookrightarrow X_p(\bar{\rho})$ telle que $\mathcal{M}_\infty|_{\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}} = \mathcal{M}_{U^p}$.

Un résultat important de l'article [21] est le suivant.

Théorème 2.11 ([21], Thm. 1.1). *L'espace $X_p(\bar{\rho})$ est réduit et s'identifie à une union de composantes irréductibles de l'espace $\prod_{v|p} X_{\text{tri}}(\bar{\rho}_v) \times \mathbb{U}^r$, où l'espace $X_{\text{tri}}(\bar{\rho}_v)$ est la variété trianguline associée à la représentation locale $\bar{\rho}_v$.*

2.2.2. La variété trianguline. Il s'agit d'un espace analytique rigide paramétrant des représentations p -adiques d'un corps local. Sa géométrie joue un rôle crucial et est au cœur des résultats de [21], [22], [23]. La première occurrence de cet espace figure dans les travaux de Kisin ([67]). La présentation que nous en donnons ici utilise la notion de représentation trianguline dégagée par Colmez ([37]). Les méthodes utilisées sont par ailleurs fortement inspirées des travaux de Bellaïche et Chenevier sur le sujet ([6], [31], [32]).

Rappelons que T désigne le tore diagonal $(\mathbf{Q}_p^\times)^n \subset \text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Notons $T^\circ = (\mathbf{Z}_p^\times)^n$ son sous-groupe compact maximal. Fixons $\bar{r} : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_n(k_L)$ une représentation continue. Par simplicité nous supposons ici que \bar{r} est absolument irréductible. Il est alors naturel de considérer la construction suivante. Soit X_{cris} l'ensemble des couples (r, δ) de $\mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \widehat{T}$ tels que r est une représentation cristalline et tels que δ est un caractère de la forme $\delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathcal{R}}$ où $\mathbf{k} = (k_1 > \dots > k_n) \in \mathbf{Z}^n$ est l'ensemble des poids de Hodge-Tate de r et $\mathcal{R} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un raffinement non critique de r tel que, pour $i \neq j$, on a $\varphi_i \varphi_j^{-1} \notin \{1, p\}$. On note alors $X_{\text{tri}} := X_{\text{tri}}(\bar{r})$ l'adhérence de Zariski de X_{cris} dans $\mathfrak{X}_{\bar{r}} \times \widehat{T}$.

Soit $(\rho, \delta) \in X_{\text{cris}}$ et notons $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ les coordonnées de δ . Ce sont des caractères de \mathbf{Q}_p^\times tels que

$$\delta(\text{diag}(x_1, \dots, x_n)) = \delta_1(x_1) \cdots \delta_n(x_n).$$

En utilisant le théorème de comparaison de Berger, on peut montrer que le (φ, Γ) -module de ρ sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_L := L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{R}$ est une extension successive des (φ, Γ) -modules de rang 1

$$\mathcal{R}_L(\delta_1) \cdots \mathcal{R}_L(\delta_n).$$

Ce type de (φ, Γ) -module a été introduit par Colmez ([37]) sous le nom de (φ, Γ) -module triangulin. Dans ce cas ρ est dite trianguline et δ est appelé *paramètre* de ρ .

D'après un théorème de Kedlaya-Pottharst-Xiao ([66]), si (ρ, δ) est un point de X_{tri} , la représentation ρ est trianguline. Lorsque δ est un paramètre de ρ , on dit que le point de X_{tri} est saturé. Il peut cependant arriver que δ ne soit pas un paramètre de ρ . Heureusement, la plupart des points de X_{tri} sont saturés, dans le sens où l'ensemble des points saturés de X_{tri} contient un ouvert dense pour la topologie de Zariski.

L'espace X_{tri} doit être considéré comme un analogue local des variétés de Hecke $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$. On peut également le munir d'une application *poids*,

$$\kappa : X_{\text{tri}} \longrightarrow \widehat{T}^\circ$$

obtenue par composition de la projection naturelle $X_{\text{tri}} \rightarrow \widehat{T}$ avec l'application de restriction $\widehat{T} \rightarrow \widehat{T}^\circ$.

Lorsque $\bar{r} = \bar{\rho}|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_v)}$, les propriétés de compatibilité local-global rappelées dans la remarque 2.3 nous assurent l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}} & \longrightarrow & X_{\text{tri}} \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \\ \widehat{T}^\circ & \xlongequal{\quad} & \widehat{T}^\circ \end{array}$$

Le résultat suivant est le premier résultat important concernant la géométrie de l'espace X_{tri} . Nous l'avons tout d'abord démontré dans une collaboration avec Hellmann ([58]) lorsque \bar{r} est absolument irréductible, et généralisé dans [21]. Par soucis de simplicité, je me contente ici de l'énoncé dans le cas où \bar{r} est absolument irréductible.

Théorème 2.12. *L'espace X_{tri} est équidimensionnel de dimension $1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Soit U_{sat} l'ensemble des points $(\rho, \delta) \in X_{\text{tri}}$ tels que ρ est trianguline de paramètre $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et tels que, pour $i \neq j$,*

$$\delta_i \delta_j^{-1} \notin \{x^k, x^{k+1} | x|_K, k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}.$$

Alors l'ensemble U_{sat} est un ouvert de Zariski de X_{tri} , Zariski dense dans X_{tri} . De plus, la restriction de l'application κ à U_{sat} est lisse. En particulier, U_{sat} est lisse.

2.2.3. Géométrie de la variété trianguline aux points presque de Rham. Une difficulté majeure apparaît lorsque l'on essaie d'appliquer la méthode de Taylor-Wiles-Kisin à la variété trianguline. En effet de nombreux points intéressants (et même des points classiques!) de $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ sont envoyés sur des points non saturés de l'espace X_{tri} . Or il semble a priori compliqué de contrôler la géométrie de la variété X_{tri} en ces points puisque la variété X_{tri} a été définie par adhérence de Zariski. De fait, la variété X_{tri} n'est pas lisse en tout point $X_{\text{tri}} \setminus U_{\text{sat}}$. Dans un travail récent, en collaboration avec Breuil et Hellmann, nous montrons cependant comment décrire la géométrie de la plupart des points cristallins non saturés. Ici, un petit miracle se produit. Même lorsque la variété n'est pas lisse en un tel point, son complété est le complété d'une variété algébrique! De plus ces variétés peuvent se décrire très explicitement, ce qui nous permet de prouver que la variété X_{tri} est irréductible en la plupart des points cristallins. Je vais à présent décrire précisément ce résultat.

Si $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$, désignons par $\delta_{\mathbf{m}}$ le caractère algébrique $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \prod_i z_i^{m_i}$ de T . Soit (ρ, δ) un point cristallin de X_{tri} . Notons $\mathbf{k} = (k_1 < \dots < k_n)$ ses poids de Hodge-Tate. On peut montrer que le caractère δ est alors automatiquement de la forme $w(\delta_{\mathbf{k}})\delta_{\mathcal{R}}$ où \mathcal{R} est un raffinement de ρ . Cependant il faut bien noter ici que δ n'est pas nécessairement un paramètre de ρ .

Notons $\mathcal{F}\ell_n$ le \mathbf{Q} -schéma des drapeaux complets de \mathbf{Q}^n . Il s'agit d'un \mathbf{Q} -schéma isomorphe à l'espace homogène $\mathrm{GL}_{n,\mathbf{Q}}/B$ pour un sous-groupe de Borel $B \subset \mathrm{GL}_{n,\mathbf{Q}}$. On note également $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n,\mathbf{Q}}$. Rappelons que la résolution simultanée de Grothendieck est le sous-schéma fermé $\tilde{\mathfrak{g}}$ du produit $\mathfrak{g} \times_{\mathbf{Q}} \mathcal{F}\ell_n$ dont les R -points sont les couples (A, F_{\bullet}) où (F_i) est un drapeau complet de R^n ¹⁷ et A est un élément de $M_n(R)$ stabilisant tous les F_i . L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ est un \mathbf{Q} -schéma lisse. La flèche $\tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ est une application propre et génériquement étale de degré $|\mathcal{W}|$.

Nous nous intéressons ici au produit fibré $X := \tilde{\mathfrak{g}} \times_{\mathfrak{g}} \tilde{\mathfrak{g}}$. Il est muni d'une application « oubli de l'endomorphisme »

$$\pi : X \longrightarrow \mathcal{F}\ell_n^2.$$

Le schéma $\mathcal{F}\ell_n^2$ a une partition naturelle $(U_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ par des sous-schémas localement fermés et indexés par les éléments de $w \in \mathfrak{S}_n$. La cellule U_1 est fermée et correspond à l'inclusion diagonale de $\mathcal{F}\ell_n$ dans $\mathcal{F}\ell_n^2$. Au contraire U_{w_0} , avec w_0 le plus grand élément de \mathfrak{S}_n , est un ouvert dense de $\mathcal{F}\ell_n^2$. Plus généralement, pour $w \in \mathfrak{S}_n$, l'espace U_w correspond aux paires de drapeaux de position relative w . On vérifie immédiatement que pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$, l'espace $\pi^{-1}(U_w)$ est un fibré vectoriel au-dessus de U_w de dimension totale n^2 . Notons X_w l'adhérence de $\pi^{-1}(U_w)$ dans X . Il est aisé de vérifier que le schéma X est équidimensionnel de dimension n^2 et que les $(X_w)_{w \in \mathfrak{S}_n}$ en sont les composantes irréductibles.

Soit \mathfrak{t} l'algèbre de Lie du tore T . On note κ_1 l'application $X \rightarrow \mathfrak{t}$ associant à un triplet $(A, F_{\bullet,1}, F_{\bullet,2})$ l'élément de $\mathfrak{t} \simeq \mathbf{Q}^n$ donné par l'action de A sur le gradué de la filtration $F_{\bullet,1}$.

Remarque 2.13. Notons $\tilde{\mathcal{N}}$ l'image réciproque par $\tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ du cône nilpotent $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$. L'espace $\tilde{\mathcal{N}}$ est lisse et la flèche $\tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ est une résolution des singularités de \mathcal{N} . On peut de même considérer l'espace $\tilde{\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} \tilde{\mathcal{N}}$. Il est muni d'une application $\pi_{\mathcal{N}}$ vers $\mathcal{F}\ell_n^2$. Il s'agit d'un espace équidimensionnel de dimension $(n^2 - n)$ dont on définit les composantes irréductibles de la même façon. Ce sont les $Z_w = \pi_{\mathcal{N}}^{-1}(U_w)$. Notons que ces composantes irréductibles sont en fait géométriquement irréductibles.

Il faut prendre garde que si $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \times_{\mathfrak{g}} \tilde{\mathfrak{g}}$, les schémas $\tilde{\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} \tilde{\mathcal{N}}$ et $\mathcal{N} \times_{\mathfrak{g}} (\tilde{\mathfrak{g}} \times_{\mathfrak{g}} \tilde{\mathfrak{g}})$ ne sont pas isomorphes. En effet, le premier est réduit mais pas le second. En fait le premier est isomorphe à la nilréduction du second.

Revenons alors au point $x = (\rho, \delta)$ de X_{tri} . Rappelons que δ est de la forme $w(\delta_{\mathbf{k}})\delta_{\mathcal{R}}$ pour un certain $w \in \mathfrak{S}_n$ et un raffinement \mathcal{R} de ρ . Fixons un isomorphisme $D_{\mathrm{cris}}(\rho) \simeq L^n$. Supposons que les valeurs propres de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'endomorphisme φ de $D_{\mathrm{cris}}(\rho)$ vérifient la propriété $\varphi_i \varphi_j^{-1} \notin \{1, p\}$ pour $i \neq j$ et que les poids de Hodge-Tate $\mathbf{k} = (k_1 < \dots < k_n)$ sont deux à deux distincts. Dans ce cas, on peut construire deux drapeaux \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de $D_{\mathrm{cris}}(\rho)$. Le premier est l'unique drapeau stable par l'endomorphisme φ dont l'action sur les gradués successifs correspond au raffinement \mathcal{R} . Le second est le drapeau de Hodge de $D_{\mathrm{dR}}(\rho) \simeq D_{\mathrm{cris}}(\rho)$ ¹⁸. On obtient ainsi un point $x_{\mathrm{dR}} = (0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in X(L)$.

17. Plus précisément F_i est un sous- R -module projectif de rang i de R^n et $F_i \subset F_{i+1}$.

18. Rappelons que nous avons supposé $K = \mathbf{Q}_p$.

Le théorème suivant donne une description complète du complété de X_{tri} au point x . En fait le complété de X_w au point x_{dR} est un « modèle local » de X_{tri} au point x .

Théorème 2.14. *On a $x_{\text{dR}} \in X_w(L)$ et il existe des entiers r et s ainsi qu'un isomorphisme de schémas formels sur L*

$$(2.4) \quad \widehat{X_{\text{tri},x}} \times \text{Spf } L[[X_1, \dots, X_r]] \simeq \widehat{X_{w,x_{\text{dR}}}} \times \text{Spf } L[[Y_1, \dots, Y_s]].$$

De plus cet isomorphisme est compatible aux applications $\kappa : X_{\text{tri},x} \rightarrow \widehat{T}^\circ$ et $\kappa_1 : X_{w,x_{\text{dR}}} \rightarrow \mathfrak{t}$.

Corollaire 2.15. *Soit $x = (\rho, \delta) \in X_{\text{tri}}$ un point cristallin vérifiant les hypothèses de généralité ci-dessus. L'espace X_{tri} est normal et Cohen-Macaulay en x , en particulier il est irréductible en x .*

Ce résultat est la clef permettant de prouver le corollaire 2.7. Le mécanisme permettant de passer du corollaire 2.15 au corollaire 2.7 est celui de la méthode de Taylor-Wiles-Kisin et utilise le théorème 2.12, il est décrit dans la preuve de [22, Thm. 3.9]. Dans l'article [22] nous prouvons directement le résultat suivant, ce qui nous permettait d'obtenir la version faible du corollaire 2.7.

Théorème 2.16 ([22], Thm. 1.3). *Soit $x = (\rho, \delta) \in X_{\text{tri}}$ un point cristallin comme ci-dessus tel que $\delta = \delta_{w_0(\mathbf{k})} \delta_{\mathcal{R}}$ pour \mathcal{R} un raffinement de ρ . Supposons que l'élément $w_0 w_{\mathcal{R}}^{-1}$ du groupe \mathfrak{S}_n est un produit de réflexions simples deux à deux distinctes. Alors X_{tri} est lisse en x .*

Le corollaire 2.15 est une conséquence immédiate du théorème 2.14 une fois que l'on sait que les variétés algébriques X_w sont normales. Il se trouve que la géométrie de ces variétés a déjà été étudiée par Bezrukavnikov et Riche dans l'article [11]. Ils prouvent en particulier que ces variétés sont Cohen-Macaulay. Il nous restait donc à démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.17. *Pour tout $w \in \mathfrak{S}_n$ la variété algébrique X_w est non singulière en codimension 1. Il s'agit donc d'une variété normale.*

Remarque 2.18. On peut se demander si le même résultat est vrai pour les variétés Z_w , composantes irréductibles de $\widetilde{\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} \widetilde{\mathcal{N}}$. À ma connaissance il s'agit toujours d'une question ouverte. Nous ne savons pas si ces variétés sont normales ou Cohen-Macaulay en général.

Une étape clef dans la preuve du théorème 2.14 est l'introduction d'un nouveau foncteur de déformations de représentations galoisiennes. Le raffinement \mathcal{R} de ρ donne lieu à une triangulation du (φ, Γ) -module $D_{\text{rig}}(\rho)$, et donc également une filtration F_\bullet du (φ, Γ) -module $D_{\text{rig}}(\rho)_{[\frac{1}{t}]}$ sur $\mathcal{R}_{[\frac{1}{t}]}$. On note $\mathfrak{X}_{\rho, \mathcal{R}}$ l'espace des déformations du couple (ρ, F_\bullet) . Ce foncteur de déformations est plus général que le foncteur défini par Bellaïche et Chenevier dans [6] car on paramètre ici des déformations d'une triangulation de $D_{\text{rig}}(\rho)_{[\frac{1}{t}]}$ qui ne donnent pas nécessairement des triangulation de $D_{\text{rig}}(\rho)$. On démontre en fait le résultat suivant.

Théorème 2.19. *Le foncteur $\mathfrak{X}_{\rho, \mathcal{R}}$ est pro-représentable par un sous-schéma formel fermé du complété de $\mathcal{X}_{\bar{\tau}}$ au point ρ et on a un isomorphisme*

$$(2.5) \quad \mathfrak{X}_{r, \mathcal{R}} \times \mathrm{Spf} L[[X_1, \dots, X_r]] \simeq \widehat{X_{w, x_{\mathrm{dR}}}} \times \mathrm{Spf} L[[Y_1, \dots, Y_s]].$$

Signalons également le corollaire suivant, conséquence du théorème 2.14 et du caractère Cohen-Macaulay des espaces X_w .

Corollaire 2.20. *L'application $\kappa : X_{\mathrm{tri}} \rightarrow \widehat{T}^\circ$ est plate en un point cristallin vérifiant les hypothèses de généralité ci-dessus.*

En utilisant une version plus précise du théorème 2.12 prouvée dans [21], on peut montrer que les résultats ci-dessus impliquent un résultat analogue pour les variétés de Hecke.

Théorème 2.21 ([23], Thm. 5.4.2). *Soit $x \in \mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ un point de la variété de Hecke correspondant à une représentation ρ telle que pour tout $v|p$, la représentation locale ρ_v est cristalline à poids de Hodge-Tate deux à deux distincts et de Frobenius générique. Alors $\mathcal{E}(U^p)_{\bar{\rho}}$ est Cohen-Macaulay en x et l'application poids κ est plate en x .*

2.2.4. *Preuve du théorème 2.6 et du corollaire 2.7.* Pour conclure, donnons une esquisse de la démonstration du théorème 2.6. Fixons ρ une représentation vérifiant les hypothèses du théorème 2.6. Pour tout $v|p$, fixons un raffinement \mathcal{R}_v de $\rho_v = \rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$. La famille de représentations locales $(\rho_v)_{v|p}$ définit un point x de la variété analytique rigide $\prod_{v|p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v}$. En nous inspirant de la version géométrique de la conjecture de Breuil-Mézard ([51]), nous construisons deux familles de cycles de codimension $[F : \mathbf{Q}] \frac{n(n+1)}{2}$ dans le complété $\widehat{\mathfrak{X}}_\rho$ de l'espace $\prod_{v|p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_v}$ au point ρ . La première famille $(\mathfrak{L}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n^{[F:\mathbf{Q}]}}$ est d'origine galoisienne. Chaque cycle \mathfrak{L}_w est un produit de cycles \mathfrak{L}_{w_v} , où \mathfrak{L}_{w_v} est un cycle de \mathfrak{X}_{ρ_v} . Le cycle \mathfrak{L}_{w_v} est construit à partir du support singulier du \mathcal{D} -module GL_n -équivariant sur $\mathcal{F}\ell_n^2$ correspondant au $U(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple de plus haut poids $w_v w_0(\mathbf{k}) - \theta$. Ce support singulier est en effet un cycle de la variété algébrique $\widetilde{\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} \widetilde{\mathcal{N}}$, vu comme sous-schéma fermé du fibré cotangent de $\mathcal{F}\ell_n^2$, qui est également incluse dans $X = \widetilde{\mathfrak{g}} \times_{\mathfrak{g}} \widetilde{\mathfrak{g}}$. On utilise alors l'isomorphisme (2.5) pour tirer ce cycle sur \mathfrak{X}_{ρ_v} et construire \mathfrak{L}_{w_v} . Cette famille de cycles vérifie la propriété suivante : pour tout $v|p$,

$$\mathfrak{L}_{w_v} \neq 0 \Leftrightarrow w_v \geq w_{\mathcal{R}_v}$$

La seconde famille $(\mathfrak{C}_w)_{w \in \mathfrak{S}_n^{[F:\mathbf{Q}]}}$ est d'origine automorphe et provient de la méthode de « patching » de Taylor-Wiles-Kisin. Plus précisément \mathfrak{C}_w est le support d'un faisceau cohérent sur $\prod_{v|p} \mathfrak{X}_{\rho_v}$ dont la fibre en un point $y = (r_v)_{v|p}$ est le dual de l'espace vectoriel

$$(2.6) \quad \mathrm{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\mathcal{F}((L(w w_0(\mathbf{k})))_{v|p}, \mathcal{R})), \Pi_\infty[(r_v)_{v|p}])$$

On montre alors par un procédé d'induction sur la longueur de $w_0 w^{-1}$ l'égalité $[\mathfrak{C}_w] = [\mathfrak{L}_w]$ en commençant par le cas où $w = w_0$. Ce cas, correspondant au corollaire 2.7, se déduit du corollaire 2.15 en utilisant la méthode de [22].

Pour mener à bien cette induction, il faut en réalité étendre la construction des cycles \mathfrak{L}_w et \mathfrak{C}_w à tout élément de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^b$, les définitions ci-dessus gardant un sens

lorsque l'on remplace $L(ww_0)$ par un objet quelconque de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^b$. Une étape essentielle dans le procédé d'induction est de comparer les cycles obtenus à partir de modules de Verma.

Remarque 2.22. Le cycle \mathfrak{L}_w est construit à partir une combinaison entières des cycles $[Z_{w'}]$ pour $w' \leq w$. Le coefficient correspondant à $[Z_w]$ est toujours égal à 1. On a en fait $\mathfrak{C}_w = [Z_w]$ pour $n \leq 7$ mais cette inégalité s'avère fausse pour $n \geq 8$ (voir [65]).

3. DENSITÉ DES REPRÉSENTATIONS POTENTIELLEMENT CRISTALLINES DE POIDS FIXÉS

Dans cette dernière partie, je voudrais présenter un résultat obtenu en collaboration avec Hellmann concernant la densité des représentations galoisiennes potentiellement cristallines de poids de Hodge-Tate fixés.

Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p . Fixons $\bar{\rho}$ une représentation absolument irréductible de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ sur un k -espace vectoriel de dimension finie n , où k est un corps fini de caractéristique p . Soit $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$ l'espace analytique rigide paramétrant les déformations de $\bar{\rho}$ en caractéristique 0. En s'inspirant d'un argument global de Gouvea et Mazur, Colmez a prouvé dans [37], lorsque $n = 2$ et $K = \mathbf{Q}_p$, que l'ensemble des points cristallins de \mathfrak{X} est Zariski-dense dans \mathfrak{X} . Cela signifie que si x est un point cristallin de $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$ et U un ouvert affinoïde connexe contenant x , toute fonction analytique rigide sur U s'annulant en tous les points cristallins de U est identiquement nulle. L'argument de Colmez consiste à utiliser la notion de représentation galoisienne trianguline pour construire un analogue local de la fougère infinie de Gouvea et Mazur. Le résultat de Colmez a été généralisé par Chenevier en dimension n dans [32] puis par Nakamura lorsque K est une extension quelconque de \mathbf{Q}_p .

Dans l'article [58], nous nous intéressons à l'ensemble des représentations *potentiellement* cristallines de poids de Hodge-Tate fixés mais de niveau arbitraire, répondant ainsi à une question posée par Colmez dans [37]. Plus précisément nous fixons un type de Hodge-Tate régulier \mathbf{k} , c'est-à-dire un n -uplet d'entiers deux à deux distincts pour chaque plongement de K dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ et considérons l'ensemble des points potentiellement cristallins de type de Hodge-Tate égal à \mathbf{k} . Une généralisation naïve de l'énoncé précédent ne peut être vraie. En effet, cet ensemble de représentations n'est pas Zariski-dense dans $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$. Par exemple, l'application qui à tout point de $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$ associe le polynôme de Sen de la représentation galoisienne correspondante est une fonction analytique rigide non constante sur $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$ mais reste constante sur l'ensemble des représentations potentiellement cristallines de poids de Hodge-Tate \mathbf{k} . Nous prouvons cependant que cet ensemble de représentations est dense en un sens plus faible. Soit en effet $R_{\bar{\rho}}$ l'anneau des déformations de $\bar{\rho}$. Les points fermés du schéma $\text{Spec } R_{\bar{\rho}}$ sont alors en bijection avec les points de $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$. De plus, lorsque l'anneau $R_{\bar{\rho}}$ est normal, l'anneau $R_{\bar{\rho}}[\frac{1}{p}]$ coïncide avec l'ensemble des fonctions analytiques rigides *bornées* sur $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$. Nous montrons qu'il n'existe pas de fonction analytique rigide bornée non triviale s'annulant sur tous les points potentiellement cristallins de poids de Hodge-Tate fixés de $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}}$. Plus précisément nous montrons le résultat suivant.

Théorème 3.1 ([58]). *Supposons que $p \nmid 2d$ et $\bar{\rho} \not\cong \bar{\rho} \otimes \varepsilon$, où ε désigne le caractère cyclotomique. Soit $\mathbf{k} = (k_{i,\sigma}) \in \prod_{\sigma: K \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{Z}^d$ un poids régulier. Alors les représentations*

potentiellement cristallines de poids de Hodge-Tate \mathbf{k} forment une partie Zariski-dense de $\text{Spec } R_{\bar{p}}[1/p]$.

Contrairement au résultat de Colmez, Chenevier et Nakamura utilisant uniquement des techniques locales, les techniques utilisées ici sont partiellement globales et font appel à la théorie des formes automorphes p -adiques et à la méthode de Taylor-Wiles-Kisin.

4. PERSPECTIVES ET PROJETS

4.1. Caractère central des L -représentations de Banach irréductibles. Dans un travail en cours avec Dospinescu, nous prouvons que la deuxième partie de la conjecture 1.9 est vérifiée pour certaines L -représentations de Banach du groupe $\text{GL}_n(K)$, pour K une extension finie de \mathbf{Q}_p . Il s'agit de représentations du type $\Pi(\rho, U^p)$ définies dans le §2.1.3. Nous prouvons dans ce cas que le caractère de $Z_L(\mathfrak{g})$ est lié au polynôme de Sen de la représentation galoisienne locale $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}$, exactement comme dans [45].

Nous espérons que ce type de résultat puisse être très utile pour borner supérieurement la *dimension canonique* des représentations de Banach $\Pi(\rho, U^p)$, plus précisément la dimension du support du $\Lambda_L(G_p)$ -module $\Pi(\rho, U^p)'$ définie par Venjakob ([96]).

4.2. Compatibilité local-global. Le théorème 2.6 donne une description de la partie du socle de la représentation localement analytique $\Pi(\rho, U^p)$ dont les composantes sont des représentations d'Orlik-Strauch. La prochaine étape consiste à déterminer la multiplicité de ces composantes. On montre dans [22] que ces composantes apparaissent avec « multiplicité 1 » lorsque les éléments w_v de (2.3) sont tels que $w_v w_0$ est un produit de réflexions simples deux à deux distinctes. Or cette propriété de multiplicité 1 est équivalente au fait que le faisceau cohérent défini par (2.6) est localement libre. Comme ce faisceau est Cohen-Macaulay, le théorème 2.16 implique que cette liberté locale est automatique sous la condition ci-dessus. L'investigation du cas général me semble être un problème très intéressant, probablement lié à la géométrie des modèles locaux X_w .

Enfin, il faudrait pouvoir pousser jusqu'au bout les problèmes de compatibilité local-global considérés dans ce mémoire. Dans le théorème 2.6, nous prouvons que la représentation localement analytique $\Pi(\rho, U^p)^{\text{an}}$ permet de retrouver la position de la filtration de Hodge des représentations cristallines *dans la stratification de Schubert*. La détermination précise de la filtration de Hodge nécessite encore de définir de nouveaux paramètres correspondant à la position précise de cette filtration de Hodge dans la variété de drapeaux. Il ne semble pas possible de construire ces paramètres en utilisant uniquement des représentations localement analytiques provenant de la série d'Orlik et Strauch. C'est pourquoi nous soupçonnons fortement que les représentations localement analytiques $\Pi(\rho, U^p)^{\text{an}}$ contiennent d'autres sous-quotients correspondant à un nouveau type de représentations localement analytiques. La construction de ce type de représentations ainsi que la définition de leur rôle dans des résultats de compatibilité local-global similaires à ceux présentés dans ce mémoire constituent un projet de recherche très enthousiasmant.

4.3. Représentations modulo p de groupes de Lie p -adiques. Notre compréhension des représentations supersingulières d'un groupe de Lie p -adique différent de

$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ reste toujours très pauvre. Il serait intéressant de pouvoir aller au delà du théorème 1.23. Tout d’abord, il reste à résoudre la question de savoir si la « non-finitude » de la présentation des représentations supersingulières est un phénomène qui reste vrai pour d’autres groupes, tels $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Q}_p)$. C’est probablement le cas. Une fois cette question résolue, une question très intéressante, mais probablement beaucoup plus difficile, consisterait à obtenir une version plus précise de ce résultat. On pourrait par exemple se demander si, étant donnée une représentation supersingulière (π, V) d’un groupe G , et une surjection

$$\mathrm{c}\text{-ind}_{K \times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}^{\mathrm{GL}_2(K)} W / (\mathrm{Im} T_\sigma) \rightarrow V$$

il est possible de décrire, même partiellement, la structure de son noyau. Il est probable que le moindre progrès dans cette direction nous en apprenne beaucoup sur les représentations supersingulières. Une question précise serait par exemple de tenter de calculer explicitement ce que donne l’application du foncteur défini dans [19] à ces représentations. Il est possible qu’une généralisation du théorème 1.23 à des groupes plus généraux puisse nous mettre sur la bonne voie.

RÉFÉRENCES

- [1] R. ABDELLATIF, *Classification des représentations modulo p de $\mathrm{SL}_2(F)$* , Bull. Soc. Math. France **142** (2014), no. 3, 537–589.
- [2] N. ABE, G. HENNIART, F. HERZIG et M. -F. VIGNERAS, *A classification of irreducible admissible mod p representations of p -adic reductive groups*, Journal of the A.M.S **30** (2017), no. 2, 495–559.
- [3] K. ARDAKOV et S. WADSLEY, *On irreducible representations of compact p -adic analytic groups*, Ann. Math. **178** (2013), 453–557.
- [4] T. BARNET-LAMB, T. GEE, D. GERAGHTY et R. TAYLOR, *Local-global compatibility for $l = p, I$* , Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **21** (2012), pp. 57–92.
- [5] L. BARTHEL et R. LIVNÉ, *Irreducible modular representations of GL_2 of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.
- [6] J. BELLAÏCHE et G. CHENEVIER *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque **324** (2009).
- [7] L. BERGER, *Représentations p -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.
- [8] ———, *On some modular representations of the Borel of subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Compos. Math. **146** (2010), no. 1, 58–80.
- [9] L. BERGER et C. BREUIL, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Astérisque **330** (2010), 155–211.
- [10] L. BERGER et M. VIENNEY, *Irreducible modular representations of the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Automorphic Forms and Galois Representations Vol. I (2014), 32–51.
- [11] R. BEZRUKAVNIKOV et S. RICHE, *Affine braid group actions on Springer resolutions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **45** (2012), 535–599.
- [12] C. BREUIL, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I.*, Compositio Math. **138** (2003), 165–188.
- [13] ———, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 23–58.
- [14] ———, *Invariant \mathcal{L} et série spéciale p -adique*, Ann. Scient. de l’E.N.S. **37** (2004), 559–610.
- [15] ———, *Série spéciale p -adique et cohomologie étale complétée*, Astérisque **331** (2010), 65–115.

- [16] ———, *Vers le socle localement analytique pour GL_n I*, Ann. Inst. Fourier **66** (2016), 633–685.
- [17] ———, *Vers le socle localement analytique pour GL_n II*, Math. Annalen **361** (2015), 741–785.
- [18] ———, *Introduction générale*, Astérisque, **319** (2008), 1–12.
- [19] ———, *Induction parabolique et (φ, Γ) -modules*, Alg. and Number Theory **9** (2015), 2241–2291.
- [20] C. BREUIL et M. EMERTON, *Représentations ordinaires de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilité local-global*, Astérisque **331** (2010), 255–315.
- [21] C. BREUIL, E. HELLMANN et B. SCHRAEN, *Une interprétation modulaire de la variété trianguline*, Math. Annalen **367** (2017), no. 3-4, 1587–1645.
- [22] ———, *Smoothness and classicality on eigenvarieties*, Invent. Math. **209** (2017), no. 1, 197–274.
- [23] ———, *A local model for the trianguline variety and applications*, prépublication.
- [24] C. BREUIL et A. MÉZARD, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$* , Duke Math. J. **115** (2002), 205–298.
- [25] C. BREUIL et V. PAŠKŪNAS, *Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2* , Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012).
- [26] A. CARAIANI, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. **161** (2012), 2311–2413.
- [27] ———, *Monodromy and local-global compatibility for $l = p$* , Algebra Number Theory, **8** (2014), 1597–1646.
- [28] A. CARAIANI, M. EMERTON, T. GEE, D. GERAGHTY, V. PAŠKŪNAS et S. W. SHIN, *Patching and the p -adic local Langlands correspondence*, Cambridge J. Math. **4** (2016), 197–287.
- [29] H. CARAYOL, *Sur les représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **19** (1986), 409–468.
- [30] G. CHENEVIER, *Familles p -adiques de formes automorphes pour GL_n* , J. Reine Angew. Math., **570** (2004), 143–217.
- [31] ———, *On the infinite fern of Galois representations of unitary type*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), no. 6, 963–1019.
- [32] ———, *Sur la densité des représentations cristallines de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$* , Math. Ann. **355** (2013), no. 4, 1469–1525.
- [33] ———, *Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires*, prépublication.
- [34] G. CHENEVIER et M. HARRIS, *Construction of automorphic Galois representations. II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.
- [35] L. CLOZEL, *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions, Vol. I, vol. 10 of Perspect. Math., 1990, 77–159.
- [36] ———, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$* , Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **73** (1991), 97–145.
- [37] P. COLMEZ, *Représentations triangulines de dimension 2*, Astérisque **319** (2008), 213–258.
- [38] ———, *Représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque **330** (2010), 281–509.
- [39] P. COLMEZ et G. DOSPINESCU, *Complétés universels de représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.
- [40] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU et V. PAŠKŪNAS, *The p -adic local Langlands correspondence for $GL_2(\mathbf{Q}_p)$* , Cambridge J. Math., **2** (2014), 1447–1519.
- [41] J.-F. DAT, *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup **39** (2006), no. 1, 1–74.
- [42] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations ℓ -adiques*, Séminaire Bourbaki **355** (1969).
- [43] B. DIARRA, *Sur quelques représentations p -adiques de \mathbf{Z}_p* , Indagationes Math., **41** (1979), 481–493.
- [44] Y. DING, *Companion points and locally analytic socle for $GL_2(L)$* , arXiv :1602.08859.

- [45] G. DOSPINESCU, *Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands p -adique*, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.
- [46] G. DOSPINESCU et B. SCHRAEN, *Endomorphism algebras of admissible p -adic representations of p -adic Lie groups*, Representation Theory **17** (2013), 237–246.
- [47] M. EMERTON, *On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ in characteristic p* , 2008, prépublication.
- [48] ———, *A local-global compatibility conjecture in the p -adic Langlands Program for GL_2, \mathbb{Q}* , Pure and Applied Math. Quaterly **2** (2006), no. 2, 279–393.
- [49] ———, *Local-Global Compatibility in the p -adic Langlands programme for GL_2, \mathbb{Q}* , prépublication.
- [50] ———, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), no. 1, 1–84.
- [51] M. EMERTON et T. GEE, *A geometric perspective on the Breuil–Mézard conjecture*, Journal Inst. Math. Jussieu **13** (2014), 183–223.
- [52] M. EMERTON, T. GEE et D. SAVITT, *Lattices in the cohomology of Shimura curves*, Invent. Math. **200** (2015), no. 1, 1–96.
- [53] J.-M. FONTAINE, *Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d’un corps local; construction d’un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), 529–577.
- [54] ———, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astérisque **223** (1994), 113–184.
- [55] ———, *Représentations ℓ -adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque **223** (1994).
- [56] M. HARRIS, K.-W. LAN, R. TAYLOR et J. THORNE, *On the rigid cohomology of certain shimura varieties*, arXiv :1411.6717.
- [57] M. HARRIS et R. TAYLOR, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, vol. 151 of Annals of Mathematics Studies, 2001.
- [58] E. HELLMANN et B. SCHRAEN, *Density of potentially crystalline representations of fixed weight*, Compositio Mathematica **152** (2016), no. 8, 1609–1647.
- [59] G. HENNIART, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique*, Invent. Math., **139** (2000), 439–455.
- [60] F. HERZIG, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p -adic GL_n* , Invent. Math., **186** (2011), no. 2, 373–434.
- [61] YONGQUAN HU, *Diagrammes canoniques et représentations modulo p de $GL_2(F)$* , J. Inst. Math. Jussieu **11** (2012), no. 1, 67–118.
- [62] ———, *Sur quelques représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_{p^f})$* , J. Algebra **324** (2010), no. 7, 1577–1615.
- [63] Y. HU, S. MORRA et B. SCHRAEN, *Sur la fidélité de certaines représentations de $GL_2(F)$ sous une algèbre d’Iwasawa*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **131** (2014), 49–65.
- [64] YONGQUAN HU et HAORAN WANG, *Some multiplicity one result on the mod p cohomology of shimura curves : the tame case*, Math. Res. Lett., à paraître.
- [65] M. KASHIWARA et Y. SAITO, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.
- [66] K. KEDLAYA, J. POTTHARST et L. XIAO, *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), 1043–1115.
- [67] M. KISIN, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. **153** (2003), no. 2, 373–454.
- [68] ———, *Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ representations*, Astérisque **330** (2010), 529–542.
- [69] J. KOHLHAASE et B. SCHRAEN, *Homological vanishing theorems for locally analytic representations*, Mathematische Annalen **353** (2012), no. 1, 219–258.

- [70] R. E. KOTTWITZ, *On the λ -adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), 653–665.
- [71] K. KOZIOL ET P. XU, *A classification of the irreducible mod- p representations of $U(1, 1)(\mathbf{Q}_p^2/\mathbf{Q}_p)$* , Ann. Inst. Fourier **66** (2016), no. 4, 1545–1582.
- [72] J.-P. LABESSE, *Changement de base CM et séries discrètes*, in *On the stabilization of the trace formula* (2011), 429–470, Int. Press.
- [73] R. LANGLANDS, *Modular forms and ℓ -adic representations*, in *Modular functions of one variable, II*, Lecture Notes in Math., **349** (1973), 361–500.
- [74] G. LAUMON ET B. C. NGÔ, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Ann. of Math., **168** (2008), no. 2, 477–573.
- [75] D. LE, S. MORRA ET B. SCHRAEN, *Multiplicity one at full congruence subgroup*, prépublication.
- [76] S. ORLIK, *Equivariant vector bundles on Drinfeld’s upper half spaces*, Invent. Math. **172** (2008), 585–656.
- [77] S. ORLIK ET B. SCHRAEN, *The Jordan-Hölder series of the locally analytic Steinberg representation*, Documenta Mathematica **19** (2014), 647–671.
- [78] S. ORLIK ET M. STRAUCH, *On Jordan-Hölder Series of some Locally Analytic Representations*, J. Amer. Math. Soc., **28** (2015), 99–157.
- [79] V. PAŠKŪNAS, *The image of Colmez’s Monreal functor*, Publ. IHES **118** (2013), 1–191.
- [80] T. SAITO, *Modular Forms and p -adic Hodge Theory*, Invent. Math. **129** (1997), 607–620.
- [81] P. SCHNEIDER, *The cohomology of local systems on p -adically uniformized varieties*, Math. Ann. **293** (1992), 623–650.
- [82] P. SCHNEIDER ET J. TEITELBAUM, *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380.
- [83] ———, *Locally analytic distributions and p -adic representation theory, with applications to GL_2* , J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 443–468.
- [84] ———, *$U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations*, Represent. Theory **5** (2001), 111–128.
- [85] ———, *Algebras of p -adic distributions and admissible representations.*, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.
- [86] ———, *p -adic bounday values*, Astérisque **278** (2002), 51–125.
- [87] P. SCHNEIDER ET M. -F. VIGNÉRAS, *A functor from smooth o -torsion representations to (φ, Γ) -modules*, In *On certain L -functions*, volume 13 of *Clay Math. Proc.*, pages 525–601. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [88] P. SCHNEIDER, M. -F. VIGNÉRAS ET G. ZÁBRÁDI, *From étale P_+ -représentations to G -equivariant sheaves on G/P* , « Automorphic Forms and Galois Representations, vol. 2 », LMS Lecture Note Series **415** (2014), 248–366.
- [89] P. SCHOLZE, *p -adic Hodge Theory for rigid analytic varieties*, Forum of Math. Pi **1** (2013).
- [90] ———, *On torsion in the cohomology of locally symmetric spaces*, Ann. Math. **182** (2015), 145–237.
- [91] B. SCHRAEN, *Représentations p -adiques de $GL_2(L)$ et catégories dérivées*, Israel Journal of Mathematics **176** (2010), 307–362.
- [92] ———, *Représentations localement analytiques de $GL_3(\mathbf{Q}_p)$* , Annales scientifiques de l’École normale supérieure **44** (2011), no. 1, 43–145.
- [93] ———, *Sur la présentation des représentations supersingulières de $GL_2(F)$* , Journal für die reine und angewandte Mathematik **704** (2015), 187–208.
- [94] S. W. SHIN, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), 1645–1741.
- [95] J. TATE, *p -divisible groups*, Proc. Conf. Local Field (Driebergen, 1966), 158–183.

- [96] O. VENJAKOB, *On the structure of the Iwasawa algebra of a p -adic Lie group*, J. Eur. Math. Soc. **4** (2002), no. 3, 271–311.
- [97] M. -F. VIGNÉRAS, *Le foncteur de Colmez pour $GL(2, F)$* , In *Arithmetic geometry and automorphic forms*, volume 19 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 531–557. Int. Press, Somerville, MA, 2011.