



**HAL**  
open science

# La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : contribution à l'étude des mathématiques médiévales

Marc Moyon

## ► To cite this version:

Marc Moyon. La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : contribution à l'étude des mathématiques médiévales. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université Lille 1 - Sciences et Technologies, 2008. Français. NNT : . tel-02889911

**HAL Id: tel-02889911**

**<https://hal.science/tel-02889911>**

Submitted on 5 Jul 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

École doctorale SCIENCES DE L'HOMME ET DE LA SOCIÉTÉ  
UMR CNRS « Savoirs, Textes, langage »

La géométrie pratique en Europe  
en relation avec la tradition arabe,  
l'exemple du mesurage et du découpage :  
Contribution à l'étude des mathématiques médiévales.

Thèse d'Histoire des Sciences

présentée et soutenue publiquement le 18 novembre 2008  
par

**Marc MOYON**

pour l'obtention du Doctorat de l'Université de Lille 1

- Volume 1 -

Introduction, exposé historique  
et analyses mathématiques

**Composition du jury**

Andréa BREARD, Université de Lille1 (Examinatrice)  
Ahmed DJEBBAR, Université de Lille1 (Directeur de Thèse)  
Jens HØYRUP, Roskilde University (Rapporteur)  
Edmond MAZET, Université de Lille3 (Président)  
Jacques SESIANO, Ecole Polytechnique de Lausanne (Examineur)  
Maryvonne SPIESSER, Université de Toulouse III (Examinatrice)  
Bernard VITRAC, CNRS – Centre Louis Gernet (Rapporteur)

À Magali, qui, en plus d'accepter sacrifices et contraintes, m'a soutenu quotidiennement.

À Lilou qui, je l'espère, acceptera mes excuses pour avoir subi mes humeurs sans trop se plaindre.

# Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements vont naturellement vers Ahmed Djebbar sans qui ce travail n'aurait jamais pu être réalisé. Il a su me faire partager sa passion des bibliothèques pour ensuite m'initier à l'étude des manuscrits anciens. Je lui suis reconnaissant pour son soutien scientifique, depuis mes débuts dans le Master et tout au long de mes recherches pour ses conseils, ses remarques et ses corrections. Je le remercie enfin de m'avoir accompagné dans cette aventure humaine avec toute sa confiance et avec ses nombreux encouragements qui m'ont toujours permis d'avancer.

Je remercie aussi Edmond Mazet qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Il a suivi les premiers pas de mon travail et les a guidés. Les échanges que nous avons pu entretenir m'ont permis de développer ma problématique et d'approfondir ma réflexion.

Je suis ravi que Jens Høytrup et Bernard Vitrac aient accepté d'être les rapporteurs de ce jury. Tous deux m'ont toujours facilité l'accès à des sources importantes pour mon travail et m'ont éclairé de leurs remarques pertinentes. Je leur exprime donc toute ma reconnaissance pour leur confiance et leur disponibilité.

J'adresse aussi mes remerciements à Jacques Sésiano, Andréa Bréard et Maryvonne Spiesser qui ont accepté, tout au long de mon travail, de me faire profiter de leur expérience et de leur expertise scientifique. Je suis donc très fier qu'ils aient bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Bernard Maitte pour m'avoir accueilli au sein du CHSE de Lille, et soutenu dans toutes mes démarches.



# Conventions générales

La première fois qu'un auteur apparaît, son nom est suivi, entre parenthèses, d'une date aussi précise que possible, ou à défaut du siècle au cours duquel son activité scientifique est avérée.

On utilise (m. 1167) pour désigner une date de décès, (ca. 1167) pour donner une date approximative.

Les titres des ouvrages sont donnés, autant que faire se peut, dans leur version originale suivie de la traduction française entre crochets.

Les références aux *Eléments* d'Euclide se font sous la forme (*Elém.* H. I.47) pour désigner la proposition 47 du Livre I selon la numérotation de l'édition de J.-L. Heiberg reprise dans la traduction française de B. Vitrac qui est notre référence.

Donnons enfin les transcriptions utilisées pour les lettres arabes.

ا	ā	ط	ṭ
ب	b	ظ	ẓ
ت	t	ع	ʿ
ث	th	غ	gh
ج	j	ف	f
ح	ḥ	ق	q
خ	kh	ك	k
د	d	ل	l
ذ	dh	م	m
ر	r	ن	n
ز	z	ه	h
س	s	و	w / ū
ش	sh	ي	y / ī
ص	ṣ	ء	,
ض	ḍ		

# TABLE des MATIERES

## VOLUME 1

### Introduction, exposé historique et analyses mathématiques

<b>Première Partie : Introduction et exposé historique.....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>3</b>
<b>HISTORIQUE DES PROBLEMES DE MESURAGE ET DE DECOUPAGE .....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 1.</b>	
<b>Les problèmes de mesurage et de découpage dans la tradition mathématique mésopotamienne : forme et contenu .....</b>	<b>13</b>
<b>Sigles des collections des tablettes utilisées .....</b>	<b>13</b>
<b>A) Les pratiques de mesurage dans les mathématiques mésopotamiennes .....</b>	<b>14</b>
<b>1) Le calcul d'aires .....</b>	<b>14</b>
a) Le triangle .....	14
b) Le carré.....	14
c) Le rectangle .....	18
d) Le trapèze .....	20

e) Le cercle et ses portions .....	21
<b>2) Le calcul de volumes .....</b>	<b>25</b>
a) Les prismes droits .....	25
b) Le cylindre .....	26
c) Les pyramides et cônes tronqués.....	27
<b>B) Le découpage des figures planes dans les mathématiques mésopotamiennes .....</b>	<b>29</b>
<b>1) Le découpage des triangles .....</b>	<b>30</b>
a) Les bases des « calculs » de découpage .....	30
b) Découper un triangle en deux parties parallèlement à un côté .....	32
c) Découper un triangle en trois parties parallèlement à un côté .....	36
d) Découpage d'un triangle en trois triangles .....	38
<b>2) Le découpage des trapèzes .....</b>	<b>38</b>
a) Découper un trapèze en deux trapèzes de même aire parallèlement à ses bases .	39
b) Découper un trapèze en deux parties, dans un rapport donné, parallèlement à ses bases .....	43
c) Découpage d'un trapèze en $n$ ( $n > 2$ ) parties .....	44
<b>C) Conclusion .....</b>	<b>45</b>

## CHAPITRE 2.

<b>Le mesurage et le découpage dans les mathématiques grecques .....</b>	<b>47</b>
<b>A) Le mesurage des figures planes et solides dans les mathématiques grecques ....</b>	<b>48</b>
<b>1) Les <i>Metrica</i> de Héron d'Alexandrie.....</b>	<b>48</b>
<b>2) Le corpus pseudo-héronien .....</b>	<b>52</b>
<b>3) Les opuscules géométriques de Didyme et de Diophane et autres témoignages anonymes .....</b>	<b>56</b>
a) <i>Le traité de planimétrie et de stéréométrie</i> de Diophane .....	56
b) <i>Le métrage des divers bois</i> de Didyme .....	58
c) Plusieurs témoignages fragmentaires anonymes .....	59

<b>B) Les pratiques de découpage dans les mathématiques grecques</b> .....	64
1) <i>Sur les divisions d'Euclide</i> .....	64
2) <b>La division des figures dans le Livre III des <i>Metrica</i></b> .....	66
<b>CHAPITRE 3.</b>	
<b>La géométrie dans la littérature latine de l'Antiquité tardive</b> .....	69
<b>A) Une source éventuelle : le <i>De re rustica</i> de Columelle</b> .....	70
<b>B) L'héritage romain : les <i>agrimensores</i> et leur corpus</b> .....	74
1) <b>Les arpenteurs romains ou <i>agrimensores</i></b> .....	75
2) <b>Les textes « gromatiques » latins ou le <i>Corpus agrimensorum</i></b> .....	76
3) <b>Le découpage dans les traités gromatiques</b> .....	77
4) <b>Le mesurage dans les traités gromatiques</b> .....	77
a) Deux traités de Marcus Junius Nipsus .....	78
b) Le <i>Podismus</i> .....	78
c) Le <i>De iugeribus metiundis</i> .....	81
d) La contribution de Balbus .....	84
<b>C) Lien avec l'Europe de l'Antiquité tardive</b> .....	85
<b>CHAPITRE 4.</b>	
<b>Le mesurage et le découpage dans les mathématiques arabes d'Orient</b> .....	89
<b>A) Le mesurage</b> .....	90
1) <b>Les problèmes de mesurage comme champ d'application de l'algèbre</b> .....	92
a) al-Khwārizmī (780-850) et ses commentateurs .....	92
b) Abū Kāmil (ca.850-930) .....	93
c) Al-Karajī (m. 1023) .....	94
2) <b>La géométrie du mesurage : tradition du savoir-faire</b> .....	95
a) Thābit Ibn Qurra (836-901) .....	95

b) Abū Kāmil (ca.850-930) .....	96
c) Abū l-Wafā' al-Būzajānī (940-998) .....	97
d) Ibn al-Haythām (m. 1041) .....	98
e) Ibn Ṭāhir al-Baghdādī (11 <sup>e</sup> s.) .....	100
f) Le Qāḍī Abū Bakr (11 <sup>e</sup> -12 <sup>e</sup> s. ?) .....	101
g) Aḥmad Ibn Thabāt (13 <sup>e</sup> s.) .....	102
h) Deux témoins tardifs du mesurage en Orient musulman .....	102
<b>B) Le découpage .....</b>	<b>103</b>
<b>1) Le découpage « savant » : <i>Sur la division d'Euclide</i> .....</b>	<b>104</b>
<b>2) Le découpage dans la tradition locale .....</b>	<b>105</b>
a) Le témoignage de la jurisprudence musulmane .....	105
b) Thābit Ibn Qurra .....	105
c) Les problèmes traditionnels de découpage de terrains .....	106
<b>3) Une tradition mixte du découpage .....</b>	<b>107</b>
 <b>C) À qui s'adressent les traités de mesurage et de découpage en Orient musulman ?..</b>	
.....	110
 <b>CHAPITRE 5.</b>	
<b>Le mesurage et le découpage dans les mathématiques de l'Occident musulman .....</b>	<b>113</b>
 <b>A) Les textes connus dans leur version originale .....</b>	<b>113</b>
<b>1) Les témoins arabes du mesurage et du découpage de l'Occident musulman</b>	
.....	113
a) La <i>Risāla fī-t-taksīr</i> d'Ibn ḥAbdūn .....	115
b) Le <i>Talqīḥ al-afkār</i> d'Ibn al-Yāsamīn .....	118
c) Le traité d'al-Mursī .....	119
d) Le traité d'Ibn al-Jayyāb .....	121
e) D'autres ouvrages .....	124

---

2) Les traités de mesurage rédigés en hébreu .....	125
a) le <i>Ḥibbur ha-Mešīḥah we-ha-Tišboret</i> d'Abraham Bar Ḥiyya .....	126
b) le <i>Sefer ha-Middot</i> attribué à Abraham Ibn Ezra .....	128
3) Un représentant de la tradition latine directe : le <i>Liber Mahameleth</i> .....	130
B) Les textes arabes et hébraïques connus dans leur version latine .....	132
<b>CHAPITRE 6.</b>	
<b>Le mesurage et le découpage dans les géométries pratiques latines .....</b>	<b>139</b>
A) La « géométrie pratique » en Europe .....	140
1) Le schéma de Hughes de Saint-Victor .....	140
2) Le <i>De divisione philosophiae</i> de Dominicus Gundissalvo .....	141
3) L'apport du <i>Geometrie due sunt partes principales...</i> : les géométries pratiques « artificielle » et « non artificielle » .....	142
4) La préface d'un commentaire aux <i>Eléments</i> d'Euclide du 13 <sup>e</sup> siècle .....	143
B) Le corpus latin des 13 <sup>e</sup> et 14 <sup>e</sup> siècles .....	144
1) La <i>Practica geometriae</i> de Fibonacci (13 <sup>e</sup> s.) .....	145
2) Le <i>Liber Philotegni</i> de Jordanus de Nemore (13 <sup>e</sup> s.) .....	147
3) Le <i>De arte mensurandi</i> de Jean de Murs (14 <sup>e</sup> s.) .....	148
C) Quelques hypothèses sur la circulation éventuelle de la tradition arabe vers la tradition latine. ....	151
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>155</b>

<b>Deuxième Partie : Analyses mathématiques</b> .....	163
A) <i>Le Livre sur le mesurage</i> d'Abū Bakr .....	165
B) <i>Le Livre de Sa'īd Abū ōUthmān</i> .....	251
C) <i>Le Livre de ōAbd ar-Raḥmān</i> .....	255
D) <i>Le Livre sur les divisions des figures</i> de Muḥammad al-Baghdādī .....	263
<b>Résumé Anglais</b> .....	341

## VOLUME 2

### Textes et traductions

<b>Apparat critique et présentation du corpus manuscrit</b> .....	1
<b><i>Le Livre sur le mesurage d'Abū Bakr</i></b> .....	23
<b>Le Livre de Saōid Abū ōUthmān</b> .....	209
<b>Le Livre de ōAbd ar-Raĥmān</b> .....	221
<b><i>Le Livre sur les divisions des figures de Muĥammad al-Baĥdādī</i></b> .....	241
<b>ANNEXES</b> .....	385
- Annexe 1 : Terminologie latine du mesurage et du découpage .....	387
- Annexe 2 : Problèmes de découpage dans la tradition latine .....	411
- Annexe 3 : Analyse comparative des problèmes de mesurage .....	421
- Annexe 4 : Analyse comparative des problèmes de découpage .....	437
- Annexe 5 : Index des noms propres .....	441
<b>BIBLIOGRAPHIE GENERALE</b> .....	445

# Introduction

Notre travail porte sur la « *géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe à travers l'exemple du mesurage et du découpage* ». Il s'inscrit dans une problématique beaucoup plus large, celle de l'étude de la circulation éventuelle d'un savoir multiforme des Pays d'Islam vers l'Europe latine. Ces circulations sont difficiles à étudier en particulier dans le contexte historique du Moyen-Âge latin encore très mal connu<sup>1</sup>. Nous ne pouvons tenir compte que des documents qui nous sont parvenus et nous devons toujours garder en mémoire qu'ils ne sont pas, de manière certaine, représentatifs de l'ensemble de la production scientifique de la période considérée. Nous pouvons d'ores et déjà mentionner deux raisons principales à cette non-représentativité. D'un point de vue quantitatif, le nombre de documents qui nous ont été sauvegardés est manifestement inférieur à la production scientifique réelle notamment décrite par les biobibliographes. En outre, les documents disponibles aujourd'hui ne sont pas nécessairement strictement identiques aux versions originales. Ils peuvent être le résultat de traductions, de copies, de remaniements, de compilations pour établir un corpus scolaire par exemple. En l'absence de références explicites ou de témoignages directs que l'historien des sciences doit systématiquement vérifier, seules des hypothèses sur lesdites circulations peuvent raisonnablement être formulées.

---

<sup>1</sup> Nous précisons d'ores et déjà que le terme « moyen-âge » renvoie à une périodisation de l'Occident chrétien et ne convient pas aux pays d'Islam. Nous n'utiliserons donc ce terme que dans le contexte de l'Europe latine.

Cette première difficulté liée à la nature même des éventuelles circulations est accentuée par la spécificité des domaines scientifiques dont il est ici question : le mesurage et le découpage.

Le mesurage consiste, pour nous, à déterminer par un raisonnement ou un calcul des grandeurs (longueurs, surfaces, volumes) inconnues à partir de grandeurs caractéristiques connues. Il peut être un prolongement naturel de l'arpentage (dont l'objectif est la mesure effective) pour calculer, par exemple, la surface de terrains étudiés. Mais, il peut aussi être envisagé de manière indépendante comme une pratique intellectuelle de la géométrie au sens étymologique du terme. Dans notre travail, nous n'aborderons pas les pratiques d'arpentage conditionnées par l'utilisation d'instruments pour ne nous consacrer qu'exclusivement à l'étude des procédures à mener sur des mesures déjà réalisées.

Le découpage décrit une opération géométrique qui consiste à « découper » une partie d'une figure donnée, qu'elle soit plane ou solide. Doivent alors être respectées plusieurs contraintes sur la manière de découper, la forme des parties obtenues ou encore sur le rapport entre la partie découpée et la figure initiale.

Cette description est suffisante pour comprendre que dans ces deux domaines, les circulations ne se font pas uniquement par l'intermédiaire de traces écrites. En effet, intimement liés à l'activité de nombreux praticiens – géomètres-arpenteurs, architectes, maçons, charpentiers, mais aussi juristes ou décorateurs – le mesurage et le découpage sont des pratiques qui se transmettent aussi par un enseignement oral de maîtres à élèves ou d'ouvriers à apprentis.

Le point de départ de notre travail est une double connaissance : la tradition arabe du *ʿilm al-misāḥa* [science de la mesure]<sup>2</sup> et la tradition latine européenne de la *Practica geometriæ*.

Le *ʿilm al-misāḥa*<sup>3</sup> d'abord. Cette science s'occupe en particulier des définitions des mesures et des classifications des figures géométriques fondamentales et des procédures de

---

<sup>2</sup> Plusieurs traductions modernes sont données pour le terme arabe *misāḥa*. La traduction française de la *Muqaddima*, A. Cheddadi le traduit par « arpentage » ; [Ibn Khaldūn, 2002], p. 955 ; [Ibn Khaldūn, 2006], vol. 3, p. 86-87. R. Rashed, quant à lui, le traduit par « mensuration » ; [Rashed, 2007], p. 210-211. J. Sesiano et J. P. Hogendijk le traduisent par « mesure » en français, et « measurement » en anglais ; [Sesiano, 1993] ; [Hogendijk, 1990]. Enfin, A. Djebbar le traduit par « mesurage » ; [Djebbar, 2007].

calcul de longueurs, de superficies et de volumes des différentes figures de la géométrie élémentaire plane et solide. Trois familles de traités de *misāḥa* peuvent être distinguées selon les critères d'exposition de leurs auteurs<sup>4</sup>. Aucun d'entre eux ne sera écarté de notre étude.

Les uns s'apparentent à des recueils de procédures dans lesquels n'apparaît aucun exemple, seules les procédures fondamentales sont exposées dans un style des plus concis. D'autres sont, quant à eux, fournis d'exemples détaillés et complets qui servent à illustrer les procédés de calculs mis en place. Enfin, à l'image d'un manuel d'enseignement, le dernier type de traités est construit à partir d'une série de problèmes dont les procédures de résolution fournissent les éléments essentiels des principaux calculs de mesure. La majorité de ces traités ne fournissent pas de démonstrations des procédures employées. Nous verrons néanmoins que ce n'est pas systématique. Cette présence ou non des démonstrations, qui est parfois justifiée par l'auteur, est un élément à prendre en compte si l'on désire étudier les filiations textuelles, la motivation des auteurs et le lectorat probable. Dans les représentants de la *ʿilm al-misāḥa*, les instruments ne sont pas utilisés en général. Il se peut néanmoins que certains auteurs les exploitent ponctuellement afin de résoudre des problèmes d'application.

La notion de *Practica geometriae*, comme nous le verrons, s'inscrit dès le 12<sup>e</sup> siècle avec Hugh de Saint-Victor dans la dualité théorie/pratique à l'échelle philosophique<sup>5</sup>. Dans la tradition arabe, le couple savant/pratique est discuté par les philosophes comme al-Fārābī (m. 950) ou Ibn Sīnā (980-1037) dans leurs classifications des sciences mais aussi par les géomètres eux-mêmes. Le meilleur représentant de cette dernière catégorie est probablement le savant oriental Abū l-Wafā' (940-998).

Ainsi, nous avons choisi d'utiliser l'expression « *géométrie pratique* » dans un souci de distinguer deux traditions écrites : la géométrie dite savante et la « géométrie des procédures ». Ces deux géométries ne s'adresseraient pas au même public et ne répondraient pas aux mêmes exigences. Elles ne traitent pas non plus nécessairement des mêmes objets et lorsque c'est le cas, elles le font selon des présentations et des démarches bien différentes. Bien entendu, ces deux géométries ne doivent pas être considérées en opposition ou indépendantes l'une de l'autre mais bien comme se développant l'une avec l'autre. Le sujet

<sup>3</sup> La littérature arabe, et notamment certains titres d'ouvrages, donne aussi l'expression *ṣināʿat at-taksīr* [l'art du mesurage] qui renvoie à *ʿilm al-misāḥa*.

<sup>4</sup> [Schirmer, 1936], p. 587.

<sup>5</sup> Voir « *La géométrie pratique en Europe* », vol. I, p. 164-168.

est d'autant plus complexe qu'épistémologiquement, il ne s'agit bien que d'une seule et même tradition globale dont on ignore les passerelles entre les deux types mentionnés précédemment.

Un ouvrage (ou un chapitre) de géométrie se définirait comme une réponse à des besoins utilitaires et pédagogiques, à des préoccupations savantes avec, naturellement, des degrés intermédiaires.

Avec les récentes découvertes de textes d'*al-Andalus* sur la géométrie du mesurage (Ibn ʾAbdūn au 10<sup>e</sup> siècle, Ibn al-Jayyāb et al-Mursī au 13<sup>e</sup> siècle), de nouvelles informations sur la tradition de l'occident musulman sont devenues disponibles. Nous avons donc décidé de nous concentrer sur les textes géométriques traitant de mesurage et de découpage qui pouvaient être considérés comme éléments d'une circulation éventuelle entre l'espace arabe et l'espace latin. Nous avons regroupé quatre textes. Tous sont des traductions latines d'ouvrages arabes dont on n'a pas encore retrouvé les versions originales.

Les trois premiers traitent exclusivement du même thème : le mesurage. Il s'agit du *Liber mensurationum* [Livre sur le mesurage] d'Abū Bakr, du *Liber Saydi Abuothmi* [Livre de Saʾīd Abū ʾUthmān], et du *Liber Aderameti* [Livre de ʾAbd ar-Raḥmān]. Ces trois *Liber* ont été regroupés bien avant notre travail. Dans l'état actuel de nos connaissances, cinq manuscrits nous transmettent ces textes. Trois d'entre eux sont conservés à Paris : BnF Lat. 9335, BnF Lat. 7377a, BnF Lat. 7266 ; un à Cambridge sous la côte University Library, Mm.2.18 et le dernier à Dresde, le n<sup>o</sup>C80 de la Sächsische Landesbibliothek. Dans ces cinq *codices*, les textes qui nous préoccupent sont systématiquement ensemble et dans le même ordre d'exposition. Dans deux contributions différentes de la fin des années soixante, H.L.L. Busard a présenté ces textes pour en montrer leurs relatives importances<sup>6</sup>. Pour le *Liber mensurationum*, il a pris en compte quatre des cinq manuscrits connus ; il ne considère pas le ms Paris, BnF Lat. 7266. Pour les deux autres textes, il ne réalise pas les éditions critiques puisqu'il n'envisage qu'un seul et même manuscrit – ms. Paris, BnF Lat. 7377A –. De plus, jusqu'à maintenant, aucune traduction moderne de ces textes n'existe. Etant donné les nouvelles informations disponibles, il nous a donc semblé important de reprendre ces

---

<sup>6</sup> [Busard, 1968] ; [Busard, 1969].

---

éditions avec l'ensemble des manuscrits disponibles afin d'en réaliser les traductions françaises.

Le quatrième ouvrage est un texte savant sur la division des figures : le *De superficierum divisionibus Liber* [Livre sur les divisions des figures]. Ce texte est édité en 1570 à Pesaro par F. Commandin (1509-1575) à la demande de l'érudit anglais J. Dee (1527-1608). L'histoire du texte est complexe et repose sur de nombreuses hypothèses. Un manuscrit de la British Library du 14<sup>e</sup> siècle, le Cott. Tiberius B.IX, – en très mauvais état – contient une version dudit texte. Un autre manuscrit, le P.256 supra de la Biblioteca Ambrosiana de Milan, renferme une autre version du texte, qui pourrait être une copie de la précédente. L'édition de Commandin serait réalisée à partir du manuscrit milanais. Même si ce texte a de nombreuses fois été étudié, les références au manuscrit londonien sont rares. D'ailleurs personne, à notre connaissance, ne mentionne la mauvaise réfection du mss après l'incendie de la bibliothèque de Sir Cotton en 1731. Nous avons donc décidé de réaliser une nouvelle édition critique afin de produire une traduction moderne du texte.

L'identification des auteurs originaux de ces quatre textes est extrêmement délicate. Seules des hypothèses peuvent être avancées puisque les textes ne renferment que trop peu d'informations. En outre, pour l'attribution de ces textes à un (ou des) traducteur(s) éventuel(s), nous n'avons pas là-encore d'arguments décisifs. Néanmoins, certains éléments rencontrés dans les manuscrits pourraient orienter les recherches autour du travail prolifique du célèbre traducteur tolédan Gérard de Crémone.

Dans le but d'étudier les éventuelles circulations des pratiques de mesurage et de découpage des Pays d'Islam vers l'Europe, il nous a semblé indispensable de faire une recension et une synthèse des informations que nous connaissons sur plusieurs autres traditions. En effet, certains éléments de cette éventuelle circulation pourraient ne pas être d'origine arabe. C'est pourquoi, nous nous sommes tout d'abord intéressés aux pratiques mésopotamiennes majoritairement paléo-babyloniennes (à quelques exceptions près). Nous avons ensuite étudié les pratiques grecques aussi bien à partir des textes d'Euclide et de Héron d'Alexandrie qu'à partir de contributions plus modestes d'auteurs connus ou non. Nous avons aussi pris en compte les pratiques latines trouvées chez Columelle (1<sup>er</sup> s. ap. J.C.) ainsi que celles des *agrimensores* de l'Antiquité tardive. Puis, dans les mathématiques d'expression arabe, nous avons voulu distinguer celles qui relèvent de l'Orient de celles qui appartiennent à l'Occident musulman. Enfin, nous avons terminé avec une présentation des *géométries*

*pratiques* médiévales de langue latine qui ne sont pas majoritairement instrumentales et qui illustrent soit le mesurage au sens où nous l'entendons, soit le découpage des figures, soit les deux.

Cette perspective historique des pratiques du mesurage et du découpage n'est naturellement pas exhaustive. En effet, en privilégiant le passage gréco-arabe vers l'Europe comme nous l'avons fait, certaines traditions mathématiques (qui auraient probablement pu nourrir notre réflexion) sont laissées de côté : égyptienne, indienne, chinoise. Nous pensons inévitablement aussi aux géométries écrites en langue vernaculaire européenne que nous avons délibérément mises en dehors de notre premier corpus d'étude en les réservant à des travaux futurs.

Comme nous l'avons déjà précisé, l'étude d'une circulation éventuelle entre deux traditions mathématiques ou deux aires géographiques et culturelles différentes est difficile à mener. En éditant, traduisant et analysant les quatre traductions latines d'ouvrages arabes, nous espérons pouvoir apporter quelques éléments de réponse aussi minimes soient-ils. En effet, nous pensons que, dans ce cadre, c'est l'accumulation d'indices qui nous permettraient de conclure. Cette recherche nous a conduit à plusieurs choix méthodologiques.

D'une part, pour nos traductions en français, nous avons volontairement choisi de ne pas traduire par le sens afin de récupérer un maximum de termes techniques. En effet, à travers nos propres traductions, nous avons tenté le plus possible de revenir à ce que pouvaient être les originaux arabes. A ce titre, nous sommes restés fidèles, dans la mesure du possible, à la version latine quitte à sacrifier le style. Ainsi, nous avons voulu privilégier l'étude de la terminologie qui peut nous permettre d'établir une filiation possible entre les textes ou bien *a contrario* une rupture entre ceux-ci. Il est aussi possible de repérer la coexistence de plusieurs traditions mathématiques.

D'autre part, nous nous sommes intéressés aux énoncés des problèmes ainsi qu'à leurs procédures de résolution. C'est en particulier dans ce cadre que la synthèse des pratiques du mesurage et du découpage des diverses traditions est fondamentale. En effet, c'est l'occasion de voir une continuité naturelle dans un certain type de problèmes (ou procédures), ou l'émergence de nouveaux problèmes (ou procédures) liés à une pratique spécifique.

Notre travail se répartit en deux volumes. Dans le premier, nous débutons avec un exposé relativement chronologique des différentes traditions du mesurage et du découpage qu'il nous a semblé utile de présenter. Nous consacrons la seconde partie du premier volume à une analyse mathématique des problèmes et des procédures de résolution des textes édités et traduits. Dans le second volume, nous définissons d'abord l'apparat critique de nos éditions et nous décrivons succinctement les manuscrits que nous avons utilisés. Nous discutons aussi la question de l'identification des auteurs et du (ou des) traducteur(s) en latin. Suivent les éditions critiques de notre corpus avec la traduction française en vis-à-vis. La présentation de notre travail se poursuit avec plusieurs annexes : un glossaire de la terminologie latine du mesurage et du découpage, une liste des problèmes de découpage de la tradition latine, les analyses comparatives des problèmes de mesurage et de découpage rencontrés dans plusieurs textes arabes et latins, un index des noms propres que nous avons cités. Enfin, elle s'achève sur la bibliographie générale des sources manuscrites et imprimées.



Historique des pratiques  
de mesurage  
&  
de découpage

# Chapitre premier

## Les pratiques mésopotamiennes du mesurage et du découpage.

### **Sigles des collections des tablettes citées.**

AO : Antiquités Orientales, Musée du Louvre, Paris.

Ash. : The Ashmolean Museum, Oxford.

BM : British Museum, Londres.

Erm. : Collection du Musée National de l'Hermitage, Saint-Pétersbourg.

IM : The Iraq Museum, Bagdad.

Ist. : Istanbul Museum.

MAH : Musée d'Art et d'Histoire, Genève.

MLC : Collection de la Bibliothèque J.P. Morgan, Yale University ; New Haven.

MS : Schøyen collection, Friberg.

NBC : Nies Babylonian Collection, Yale University, New Haven.

Str. : Collection de l'Université de Strasbourg.

TMS : Textes Mathématiques de Suse, Bruins & Rutten

UET : Ur Excavations Texts, Londres.

VAT : Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museum, Berlin.

YBC : Yale Babylonian Collection.

- - - - -

De nombreuses tablettes d'argile contiennent des informations sur les pratiques géométriques en Mésopotamie par l'intermédiaire des problèmes, des procédures solution et des figures. D'autres tablettes ne donnent pas explicitement la procédure utilisée par le scribe pour résoudre le problème. La figure, lorsqu'elle est présente, est dans certain cas le réceptacle des divers résultats.

L'essentiel des sources dont nous disposons date de la période paléo-babylonienne, à savoir du début du 2<sup>e</sup> millénaire avant notre ère. Nous avons donc choisi de concentrer notre étude sur les tablettes de cette période. Si, de manière incidente, nous donnons des informations relatives à des tablettes d'époques différentes, séleucide (derniers siècles avant notre ère) ou sargonique (3<sup>e</sup> millénaire avant notre ère), nous le précisons.

D'abord, nous présenterons quelques textes qui illustrent certaines pratiques mésopotamiennes du mesurage de figures planes et solides. Nous donnerons ensuite une synthèse des informations sur le découpage de polygones livrée par le petit corpus considéré ici.

### **A) Les pratiques de mesurage dans les mathématiques mésopotamiennes.**

Les calculs sur les aires et les volumes sont étroitement liés aux manipulations de diverses tables métrologiques. Cette liaison s'exprime comme un va-et-vient entre nombres sexagésimaux positionnels d'une part et grandeurs métrologiques d'autre part<sup>7</sup>. Les calculs s'effectuent sur les nombres sexagésimaux. Le scribe est alors amené à développer sur ces nombres différents algorithmes de calcul d'aires et de volumes.

L'objectif des problèmes de mesurage des figures planes est double : il s'agit, dans un premier temps, de déterminer l'aire d'une surface à partir de ses dimensions. Dans un deuxième temps, le scribe détermine les grandeurs inconnues caractéristiques d'une figure à partir des grandeurs connues. En ce qui concerne les figures solides, seule la détermination du volume est proposée.

---

<sup>7</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p.ix-xvii; [Høyrup, 2002], p.15-18.

Nous proposerons, dans un premier temps, des problèmes autour du calcul d'aires de figures planes usuelles (triangle, quadrilatère, figures circulaires). Dans un second temps, nous aborderons le calcul du volume de solides.

## 1) Le calcul d'aires.

Les figures planes peuvent être envisagées pour elles-mêmes en tant qu'objet mathématique abstrait, ou considérées comme des formes de « champs »<sup>8</sup>. Cette dernière représentation peut expliquer certains éléments de la terminologie géométrique.

### a) Le triangle.

Dans la géométrie mésopotamienne, c'est l'expression « *tête de clou* » qui désigne le triangle<sup>9</sup>. Seuls deux types semblent être considérés : le triangle rectangle, de loin le plus répandu, et le triangle isocèle composé de la réunion de deux triangles rectangles<sup>10</sup>.

Il existe une ambiguïté d'un point de vue terminologique. Un triangle est défini par son *front*, équivalent à notre base, et son *flanc*<sup>11</sup>. Le *flanc* désigne de manière générale la hauteur d'un triangle, mais il peut aussi désigner les deux côtés égaux d'un triangle isocèle<sup>12</sup>.

Etant donné les deux seuls types de triangles considérés, le calcul de l'aire s'en trouve simplifié. La formule utilisée correspond au demi-produit du *flanc* par le *front*<sup>13</sup>.

Remarquons enfin que le triangle, en tant que tel, est peu présent. Lorsqu'il apparaît, c'est presque toujours comme une partie d'un rectangle ou plus généralement d'un quadrilatère.

### b) Le carré.

Le calcul de l'aire d'un carré, comme le carré numérique de son côté, est présent implicitement ou explicitement dans plusieurs tablettes. Citons, par exemple, BM 80 209 (face ; #1, #2)<sup>14</sup> ou BM 13 901<sup>15</sup>.

---

<sup>8</sup> [Friberg, 1990], p. 566a.

<sup>9</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. xvii.

<sup>10</sup> [Friberg, 1990], p. 554a.

<sup>11</sup> J. Høyrup nous a fait remarquer que le terme *flanc* est la traduction inventée par F. Thureau Dangin pour le sumérogramme « *ush* » dont le sens littéral n'est ni *flanc* ni *longueur*. Conscient de cela, nous continuerons néanmoins à utiliser le terme de Thureau-Dangin.

<sup>12</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. 226.

<sup>13</sup> [Friberg, 1990], p. 554b.

<sup>14</sup> [Friberg, 1981], p. 57-59.

La dernière tablette, l'une des plus anciennes connues, propose plusieurs problèmes explicitement liés à l'aire d'une figure carrée. En plus des connaissances géométriques disponibles à cette époque, les procédures de résolution montre des pratiques pré-algébriques des scribes de l'époque paléo-babylonienne. Donnons une transcription moderne et une interprétation algébrique du problème #1 de cette tablette :

BM 13 901, #1		
	Transcription moderne avec $c$ le côté du carré.	interprétation algébrique avec $x$ l'inconnue.
La surface et ma rencontre j'ai additionné : 45'. 1 le forjet tu poses. La moitié de 1 tu brises : 30' et 30' tu fais se tenir : 15'. 15' à 45' tu ajoutes : 1 fait l'équilatéral. 30' que tu as fait tenir, du corps de 1 tu arraches : 30' est la rencontre carré <sup>16</sup> .	$c^2 + 1 \times c = 45'$	$x^2 + p.x = q$
	1	$p$
	$1 \rightarrow 30'$	$\rightarrow \frac{p}{2}$
	$30' \rightarrow 30' \times 30' = 15'$	$\rightarrow \frac{p}{2} \times \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$
	$\rightarrow 15' + 45' = 1$	$\rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
	$1 \rightarrow \sqrt{1}$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
	$\rightarrow 1 - 30' = 30' = c$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$

En général, ces problèmes ne respectent pas l'homogénéité des grandeurs : est ajoutée, à l'image du #1, une surface représentée par son aire  $c^2$  à une ligne désignée par sa longueur  $c$ . Néanmoins, la procédure de résolution montre que la ligne  $c$  est transformée en une surface rectangulaire  $1 \times c$ . Cela donne au scribe la liberté d'opérer explicitement sur des nombres et non plus sur des grandeurs géométriques.

<sup>15</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 3, p. 1 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 1-10.

<sup>16</sup> Enoncé à partir de la traduction française de J. Høyrup que nous avons préférée, pour sa modernité, à celle donnée par F. Thureau-Dangin ; [Høyrup, 1992], p. 95 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 1.

Parmi les 24 problèmes de BM 13 901<sup>17</sup>, d'autres se ramènent aussi, comme dans #1, à des équations quadratiques faisant intervenir l'aire d'un carré et son côté. C'est la raison pour laquelle M. Caveing décrit cette tablette comme un « manuel de calcul du second degré<sup>18</sup> ». Voici une synthèse, en termes algébriques, de ces problèmes :

#2	$x^2 - x = 14.30$	#3	$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = 20$
#4	$\frac{2}{3}x^2 + x = 4.46.40$	#5	$x^2 + x + \frac{1}{3}x = 55$
#6	$x^2 + \frac{2}{3}x = 35$	#7	$11x^2 + 7x = 6.15$
#16	$x^2 - \frac{1}{3}x = 5$	#23	$x^2 + 4x = 41.40$

Certains autres problèmes liés au carré s'attachent au calcul de sa diagonale. En plus du problème #3<sup>19</sup> de BM 80 209, citons deux autres exemples.

D'abord, dans la tablette YBC 7 289 (face, #3)<sup>20</sup>, on trouve un calcul de la diagonale d'un carré en utilisant implicitement l'approximation  $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ <sup>21</sup>.

Le problème #8 de la tablette AO 6 484<sup>22</sup>, de l'époque des Séleucides, offre un exemple du problème réciproque avec une autre approximation pour  $\sqrt{2}$ . En effet, dans sa procédure, le scribe prend en compte les résultats  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{42}{60} + \frac{30}{60^2}$  et  $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{25}{60}$  :

« La diagonale d'un carré est 10 coudées. Qu'est le flanc du carré ?

Tu multiplieras 10 par 42'30'' : 7°5', le flanc.

Tu multiplieras 7°5' par 1°25' : 10°2'5'', la diagonale. »

<sup>17</sup> Nous remercions ici Christine Proust de nous avoir communiqué la translittération, la traduction et l'analyse présentées lors du séminaire de lecture de textes mathématiques du REHSEIS (janvier 2008).

<sup>18</sup> [Caveing, 1994], p. 35.

<sup>19</sup> [Friberg, 1981], p. 57.

<sup>20</sup> [Fowler et Robson, 1998]; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 42.

<sup>21</sup> [Fowler et Robson, 1998], p. 367.

<sup>22</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 96 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 76-81.

**c) Le rectangle.**

Plusieurs tablettes d'époques différentes (comme AO 6 484, BM 34 568<sup>23</sup> du temps des Séleucides ou encore les tablettes paléo-babyloniennes BM 85 194<sup>24</sup>, AO 8 862<sup>25</sup>, Str. 362<sup>26</sup>, VAT 8 390<sup>27</sup>, YBC 6 504<sup>28</sup>) utilisent explicitement ou implicitement la « formule » de l'aire  $A$  d'un rectangle :  $L \times l$  si  $L$  et  $l$  sont respectivement sa longueur et sa largeur. Par exemple, le problème #8 de la tablette BM 34 568 décrit<sup>29</sup> :

« Le flanc est 1' et le front 25. Qu'est la surface ?

Attendu que tu ne le (la) connais pas, tu multiplieras 1' par 25 : 25'.

La surface est 25'. »

Remarquons ici que nous retrouvons les termes *flanc* et *front* pour la longueur et la largeur du rectangle, ce qui renforce le lien déjà énoncé entre le rectangle et le triangle.

Citons aussi, à titre d'exemple, le problème #33 de la tablette BM 95 194 accompagné de sa procédure de résolution :

BM 85 194, #33	
Le flanc est 30. La surface est 10'. Qu'est le front ?	$L, A.$ $l?$
Toi, fractionnes en deux 30, tu trouveras 15.	$\rightarrow \frac{L}{2}$
Dénoue l'inverse de 15, tu trouveras 4.	$\rightarrow \frac{1}{L/2}$
Porte 10' à 4, tu trouveras 40'.	$\rightarrow A \times \frac{1}{L/2}$
Porte 40' à 30, le flanc, tu trouveras 20 : c'est le front <sup>30</sup> .	$\rightarrow \left( A \times \frac{1}{L/2} \right) \times L = l$

<sup>23</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 3, p. 14-17 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 57-63

<sup>24</sup> [Friberg, 2007] ; p. 45-46 ; [Høyrup, 2002], p. 272-275 ; [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 148 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 21-39.

<sup>25</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 108-113 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 64-71.

<sup>26</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 239 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 82-84

<sup>27</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 335 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 112-115.

<sup>28</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 3, p. 22 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 134-136.

<sup>29</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. 59.

<sup>30</sup> Traduction française de F. Thureau-Dangin ; Ibid., p. 38.

Comme dans le cas du carré, plusieurs problèmes traitent du calcul de la diagonale  $d$  d'un rectangle (BM 34 568, VAT 6 598<sup>31</sup>, Db<sub>2</sub>-146<sup>32</sup>, MS 3 971<sup>33</sup>). Précisons néanmoins que seule la tablette Db<sub>2</sub>-146 traite de la diagonale et de l'aire.

Le rectangle est la figure considérée dans plusieurs problèmes dont l'objectif est la recherche de diverses grandeurs étant données certaines autres. Le tableau suivant propose une synthèse de quelques-uns de ces problèmes :

Références tablettes <sup>34</sup>	Grandeurs ou relations données	Grandeurs cherchées
BM 34 568 #1, #5, #7 ; VAT 6 598, #6, #7	$L, l$	$d$
BM 34 568 #2	$L, d$	$l$
BM 34 568 #6, #8	$L, l$	$A$
Db <sub>2</sub> -146 (ou IM 67 118) ; MS 3 971 #2	$A, d$	$L, l$
BM 34 568 #3	$d + L, l$	$d, L$
BM 34 568 #4	$d + l, L$	$d, l$
BM 34 568 #9	$L + l, A$	$L, l$
BM 34 568 #10	$L + l, d$	$L, l$
BM 34 568 #11	$L + d, l$	$L, l$
BM 34 568 #13, #19	$d + L, d + l$	$d, L, l$
BM 34 568 #14, #17, #18 ; AO 6 484 #6	$L + l + d, A$	$d, L, l$
BM 34 568 #15	$L - l, A$	$L, l$
AO 8 862 #1	$A, A + (L - l), L + l$	$A, L, l$
AO 8 862 #2	$A, A + \frac{1}{2}L + \frac{1}{3}l, L + l$	$L, l$
AO 8 862 #3	$A, (L - l)(L + l), L + l$	$L, l$
AO 8 862 #4	$A, L + l = A, L + l + A$	$A, L, l$

<sup>31</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 277 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 127-131.

<sup>32</sup> [Høyrup, 2002], p. 257-261 ; [Friberg, 2005], p. 126.

<sup>33</sup> [Friberg, 2007], §10-1b.

<sup>34</sup> Lorsqu'aucun numéro de problème ne suit le nom de la tablette, c'est qu'elle ne comporte qu'un seul et unique problème, à savoir celui qui nous intéresse.

Str. 362 #3	$\frac{1}{7}L + \frac{1}{7}l + \frac{1}{7}A, L+l$	$L, l$
Str. 362 #4	$\frac{1}{7}L + A, l$	$A, L$
VAT 8 390 #1	$A, 9 \times (L-l)^2 = L^2$	$L, l$
VAT 8 390 #2	$A, 4 \times (L-l)^2 = l^2$	$L, l$
YBC 6 504 #1	$A - (L-l)^2, L-l$	$L, l$
YBC 6 504 #2	$A - (L-l)^2, L+l$	$L, l$
YBC 6 504 #3	$A - (L-l)^2, L$	$l$
YBC 6 504 #4	$A - (L-l)^2, l$	$L$

**d) Le trapèze.**

Le plus important, à propos du mesurage des quadrilatères, est probablement l'utilisation de la relation usuellement désignée par la « formule des arpenteurs »<sup>35</sup>. Il s'agit du produit des moyennes des côtés opposés. Cette formule est manipulée, entre autres, dans les tablettes YBC 7 290<sup>36</sup>, YBC 11 126<sup>37</sup>, IM 52 301<sup>38</sup>.

Alors qu'elle n'est juste que pour le rectangle, elle est usitée pour le calcul de l'aire du trapèze désigné par l'expression « tête de bœuf »<sup>39</sup>, et par extension pour tout autre quadrilatère quelconque<sup>40</sup>. Cette formule consiste alors à assimiler une figure de côtés  $a, b, c, d$  à un rectangle de côté  $\frac{1}{2}(a+c)$  et  $\frac{1}{2}(b+d)$ . Il est fort probable que les scribes avaient conscience que cette formule n'était qu'une approximation du calcul de la surface d'un quadrilatère. En effet, à une exception près, elle est utilisée pour des quadrilatères très proches du rectangle<sup>41</sup>.

L'origine de cette formule est sans doute à chercher du côté des pratiques d'arpentage comme pourraient le suggérer les tablettes de cadastre sur lesquelles les géomètres-arpenteurs portent deux indications d'aires pour un même rectangle<sup>42</sup>.

<sup>35</sup> [Høytrup, 2002], p. 230.

<sup>36</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 44.

<sup>37</sup> Ibid., p. 44.

<sup>38</sup> [Taha Baqir, 1950b].

<sup>39</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. xvii.

<sup>40</sup> [Høytrup, 1995]

<sup>41</sup> [Høytrup, 2002], p. 230-231.

<sup>42</sup> [Quillien, 2003], p. 18-19, p. 30.

Il faut néanmoins noter que, pour les trapèzes rectangles, les scribes utilisent le produit de la demi-somme des côtés parallèles par la hauteur<sup>43</sup>.

**e) Le cercle et ses portions.**

Le mesurage relatif au cercle est présent dans quelques tablettes paléo-babyloniennes. Par exemple, YBC 7 302<sup>44</sup> et YBC 11 120<sup>45</sup> montrent un cercle portant les valeurs du périmètre, du carré du périmètre et de l'aire. La procédure de la tablette YBC 7 997<sup>46</sup> illustre la formule standard du calcul de l'aire du cercle :  $A = \frac{1}{12} p^2$  si  $p$  est le périmètre du cercle<sup>47</sup>. L'approximation du rapport du périmètre au diamètre est  $\pi \approx 3$ . Cette approximation est encore vérifiée pour le calcul du périmètre à partir du diamètre, à savoir :  $p = 3d$ .

Pour calculer l'aire d'un cercle à partir du diamètre<sup>48</sup>, les procédures passent d'abord par le calcul du périmètre, et utilisent ensuite la relation  $A = \frac{1}{12} p^2$ .

La tablette BM 80 209 (face ; #5 à #8)<sup>49</sup> fournit plusieurs exemples de problèmes de détermination du périmètre d'un cercle à partir de son aire. La procédure fait alors apparaître la relation  $p^2 = 12A$  équivalente à la précédente.

Une série de problèmes de cette même tablette BM 80 209 (face ; #9, revers ; #5 à #13)<sup>50</sup> fournit des utilisations de cette relation avec des problèmes pseudo-algébriques de détermination d'une ou plusieurs grandeurs, certaines autres étant données. Le scribe propose, par exemple, de déterminer séparément le diamètre, la circonférence et l'aire d'un cercle étant donné la somme des trois éléments.

Plusieurs tablettes nous informent sur les procédures liées aux demi-cercles. Trois procédures différentes (mais mathématiquement équivalentes) sont attestées. D'abord, l'étude de la seule tablette BM 85 210<sup>51</sup> montre deux façons distinctes de calculer l'aire d'un demi-

---

<sup>43</sup> [Bruins, 1953]

<sup>44</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 44.

<sup>45</sup> Ibid., p. 44.

<sup>46</sup> Ibid., p. 98.

<sup>47</sup> [Friberg, 1990], p. 555.

<sup>48</sup> [Robson, 1999], p. 36 ; [Friberg, 2000], p. 128.

<sup>49</sup> [Friberg, 1981], p. 59-64.

<sup>50</sup> Ibid., p. 59-64.

<sup>51</sup> [Thureau-Dangin, 1932a] ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 46-53.

cercle, soit  $A = \frac{1}{4}a \times c$ , soit  $A = \frac{1}{6}a^2$  si  $A$  est l'aire,  $c$  la corde et  $a$  l'arc. Une troisième formule apparaît dans la tablette YBC 5 022<sup>52</sup> où  $A = \frac{3}{4}f \times d$  si  $f$  est la flèche, c'est-à-dire le rayon dans le cas particulier du demi-cercle.

D'autres tablettes enfin traitent d'une portion de cercle plus générale. Par exemple, le problème #20<sup>53</sup> de la tablette BM 85 194 propose le calcul de la corde  $c$  d'une portion de cercle connaissant sa flèche  $f$  et la circonférence  $p$  du cercle dont elle est issue. Comme dans le cas présent,  $f^2 = 2f$  le résultat est exact alors que la procédure du scribe est fautive en général.

BM 85 194, #20	
<i>La circonférence est 1'. Je suis descendu de 2 ninda. Qu'est la transversale la corde ?</i>	$p = 1'; f = 2.$ $c ?$
<i>Toi, carre 2, tu trouveras 4.</i>	$f \rightarrow f^2$
<i>Soustrais 4 de 20, la transversale le diamètre, tu trouveras 16.</i>	$\left[ p \rightarrow d = \frac{p}{3} \right]; f^2 \rightarrow d - f^2$
<i>Carre 20, la transversale le diamètre, tu trouveras 6'40.</i>	$p \rightarrow d^2$
<i>Carre 16, tu trouveras 4'16.</i>	$(d - f^2) \rightarrow (d - f^2)^2$
<i>Soustrais 4'16 de 6'40, tu trouveras 2'24.</i>	$\rightarrow d^2 - (d - f^2)^2$
<i>De quoi 2'24 est le carré ? C'est le carré de 12 : c'est le carré de la transversale la corde. Telle est la façon d'opérer<sup>54</sup>.</i>	$\rightarrow \sqrt{d^2 - (d - f^2)^2}$ $c = \sqrt{d^2 - (d - f^2)^2}$

<sup>52</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 132-136 ; [Lewy, 1947], p. 318.

<sup>53</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. 32.

<sup>54</sup> Traduction française de F. Thureau-Dangin ; Ibid., p. 32.

Dans le problème #1 de la tablette MS 3 049<sup>55</sup> (Fig. 1), on trouve une procédure exacte qui propose de calculer la corde  $c$  étant donnés le diamètre  $d$  du cercle dont est issu l'arc et la flèche  $f$ . Elle peut être transcrite ainsi :

$$d \rightarrow \frac{d}{2} \rightarrow \left(\frac{d}{2}\right)^2 ; \frac{d}{2} - p \rightarrow \left(\frac{d}{2} - p\right)^2$$

$$\rightarrow \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - p\right)^2 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - p\right)^2} \rightarrow 2 \times \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - f\right)^2} = c$$

Le problème #21 de la tablette BM 85 194<sup>56</sup> part du périmètre  $p$  du cercle dont est issue la portion et de sa corde  $c$ , et calcule sa flèche  $f$ . La procédure du scribe est exacte. Le diamètre  $d$  est à nouveau obtenu à partir du tiers du périmètre.

BM 85 194, #21	
<i>Si j'ai tracé une circonférence de 1' et que la transversale la corde est 12, qu'est ce dont je suis descendu ?</i>	$p = 1'$ ; $c = 12$ . $f$ ?
<i>Toi, carre 20, la transversale le diamètre, tu trouveras 6'40.</i>	$\left[ p \rightarrow \frac{p}{3} = d \right]$ ; $d \rightarrow d^2$
<i>Carre 12, tu trouveras 2'24.</i>	$c \rightarrow c^2$
<i>Soustrais de 6'40, tu trouveras 4'16.</i>	$\rightarrow d^2 - c^2$
<i>&lt;De quoi 4'16 est le carré. C'est le carré de 16. Soustrais 16 de 20, tu trouveras 4<sup>57</sup>&gt;</i>	$\left[ \rightarrow \sqrt{d^2 - c^2} \right]$ $\left[ \rightarrow d - \sqrt{d^2 - c^2} \right]$
<i>Fractionne en deux 4, tu trouveras 2 : ce dont tu es descendu est 2. C'est la façon d'opérer<sup>58</sup>.</i>	$\rightarrow \frac{1}{2} \left( d - \sqrt{d^2 - c^2} \right)$ $f = \frac{1}{2} \left( d - \sqrt{d^2 - c^2} \right)$

Citons enfin le problème #29<sup>59</sup> de cette même tablette. Etant donnés l'arc  $a$  et la corde  $c$ , la procédure détermine l'aire  $A$  de la portion de cercle.

<sup>55</sup> [Friberg, 2007], §11.1, [Friberg, 2007], p. 45-46.

<sup>56</sup> [Friberg, 2007] ; p. 45-46 ; [Høyrup, 2002], p. 272-275 ; [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 148 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 32.

<sup>57</sup> Corrections apportées à l'aide des commentaires de J. Høyrup, [Høyrup, 2002], note 311, p. 273.

<sup>58</sup> Traduction française de F. Thureau-Dangin, [Thureau-Dangin, 1938], p. 32.

BM 85 194, #29	
<i>Un segment de cercle. L'arc est 1 sosse. La corde est 50.</i>	$a = 1; c = 50.$
<i>Qu'est la surface ?</i>	$A ?$
<i>Toi, de quoi 1 sosse, l'arc, excède 50 ? Il excède de 10.</i>	$(a, c) \rightarrow a - c$
<i>Porte 50 à 10, l'excès, tu trouveras 8'20.</i>	$\rightarrow (a - c) \times c$
<i>Carre 10, la corde<sup>60</sup>, tu trouveras 1'40.</i>	$\rightarrow (a - c)^2$
<i>De 8'20 soustrais la moitié de 1'40, tu trouveras 7'30 (...)</i>	$\rightarrow [(a - c) \times c] - \frac{1}{2}(a - c)^2$
<i>C'est la façon d'opérer.</i>	$A = (a - c) \times c - \frac{1}{2}(a - c)^2$

Notons que chacune des procédures précédentes est accompagnée de figures décrivant les arcs de cercles en question.

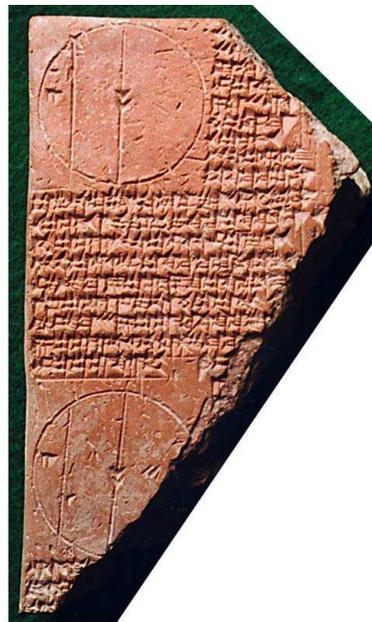


Figure 1. MS 3 049 (Source. <http://www.schoyencollection.com/math.htm>)

<sup>59</sup> Ibid., p. 37 ; [Thureau-Dangin, 1932b], p. 77-78.

<sup>60</sup> F. Thureau-Dangin précise que 10 n'est pas la corde mais bien la différence entre l'arc et la corde, [Thureau-Dangin, 1938], note 3, p. 37.

## 2) Le calcul de volumes.

Quatre types de solides sont présents dans la tradition mathématique mésopotamienne : les prismes droits, les troncs de cônes et les troncs de pyramides. Une seule tablette, à notre connaissance, propose le calcul du volume d'une pyramide entière, dans le cas d'une pyramide à base triangulaire. Il s'agit de la tablette BM 85 196 qui rassemble en outre d'importantes informations sur les pratiques de mesurage des volumes à l'époque paléo-babylonienne<sup>61</sup>.

Les solides sont rattachés à des problèmes d'excavation, de creusements de canaux, de fossés, de construction de murs, de barrages, de fortifications... Par exemple, le volume d'un solide représenté par une excavation est rendu par la quantité de terre évacuée, et l'aire de sa base est alors appelée le « sol »<sup>62</sup>. Il ne faut pas déduire du type de problèmes considérés et de la terminologie utilisée que les solides ne seraient que des objets matériels dénués d'abstraction. L'étude des problèmes montre qu'ils doivent être considérés comme pseudo-concrets ; la terminologie figurée rendant compte de considérations abstraites. Par exemple, la notion de « terre » préalablement mentionnée doit être entendue comme un « volume » dans son sens mathématique<sup>63</sup>. Le caractère concret des problèmes est en outre trahi par les énoncés eux-mêmes et certaines de leurs données, et en particulier par des relations hétérogènes comme la somme d'une aire et d'un volume.

Notons enfin qu'aucune figure en trois dimensions n'est représentée sur la surface d'argile des tablettes. Certains énoncés sont néanmoins accompagnés de figures planes.

### a) Les prismes droits.

Le chapitre des prismes droits est le plus souvent représenté par les problèmes dits « de briques ». Ils sont des témoins de situations pratiques en rapport, par exemple, avec la planification de constructions. Néanmoins, la répétition de ces problèmes et leur standardisation montrent que la *brique* doit être considérée comme une unité de volume, et que les empilements de briques, ou *tas de briques*, sont alors des prismes droits à bases

---

<sup>61</sup> [Thureau-Dangin, 1935], p.1.

<sup>62</sup> [Høyrup, 2002], p. 137 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 11.

<sup>63</sup> [Proust, 2007], p. 284.

rectangulaires<sup>64</sup>. Ces problèmes trouvent probablement leurs meilleurs représentants dans la tablette YBC 4 607<sup>65</sup>.

Un autre type de problème largement rencontré dans les mathématiques mésopotamiennes est lié à une excavation. Les deux parties BM 85 200 et VAT 6 599<sup>66</sup> de la même tablette proposent 30 problèmes sur le prisme rectangulaire. La tablette YBC 5 037<sup>67</sup> fournit 34 autres exemples de calcul de volumes de prismes droits carrés et rectangulaires à partir d'un problème d'excavations. Ces volumes apparaissent néanmoins de manière indirecte à partir de la tâche et du salaire quotidien d'un ouvrier et d'une dépense générale pour un travail complet.

Dans tous les cas, trois paramètres – longueur  $L$ , largeur  $l$ , profondeur  $p$  – sont présents ainsi que le volume du solide et l'aire de sa base. Ces problèmes illustrent le calcul du volume d'un cube en prenant la surface  $L \times l$  multipliée par la profondeur  $p$ , ou bien en prenant le produit de la surface  $S$  de la base par la hauteur  $h$ .

La tablette BM 85 196<sup>68</sup>, quant à elle, nous transmet un problème qui a trait au prisme triangulaire déterminé par trois paramètres : le *flanc* du triangle de base, son *front* et la hauteur  $h$ . Le problème #3 détermine le volume  $V$  du prisme par la procédure suivante :

$$\begin{aligned} (\textit{flanc}, \textit{front}, h) &\rightarrow \textit{flanc} \times \textit{front} \rightarrow (\textit{flanc} \times \textit{front}) \times \textit{hauteur} ; \\ \rightarrow V &= \frac{1}{2} \times [(\textit{flanc} \times \textit{front}) \times \textit{hauteur}]. \end{aligned}$$

### **b) Le cylindre.**

On trouve un calcul de cylindre dans le problème (#6) de la tablette BM 85 196<sup>69</sup> précédente. L'objectif du problème est le calcul du volume  $V$  du solide connaissant la circonférence  $p$  de son disque de base, et sa hauteur  $h$ . La procédure débute par le calcul de l'aire de la base circulaire nommée le « sol » qui sera enfin multipliée par la hauteur du solide :

---

<sup>64</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 94 ; [Proust, 2007], p. 209.

<sup>65</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 91-95.

<sup>66</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 194-200 ; vol. 3, p. 54 ; [Høyrup, 2002], p. 137-162 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 11-21.

<sup>67</sup> [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 59-63.

<sup>68</sup> [Neugebauer, 1935-37], p. 44 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 40.

<sup>69</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 2, p. 43-59 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 41.

$$p \rightarrow p^2 \rightarrow \frac{1}{12} \times p^2 ;$$

$$\rightarrow V = \left( \frac{1}{12} \times p^2 \right) \times h$$

**c) Les pyramides et cônes tronqués.**

Les scribes connaissaient une procédure exacte de calcul du volume de la pyramide à base triangulaire. Celle-ci apparaît dans le problème #1 de la tablette BM 85 196<sup>70</sup>. Il porte sur le calcul du volume d'un brisant dans un fleuve. La procédure peut être traduite par la chaîne suivante :

$$(h, front, flanc) \rightarrow \frac{h}{2} \times \frac{front}{2} \rightarrow \left( \frac{h}{2} \times \frac{front}{2} \right) \times flanc$$

$$\rightarrow \left[ \left( \frac{h}{2} \times \frac{front}{2} \right) \times flanc \right] - \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{h}{2} \times \frac{front}{2} \right) \times flanc \right]$$

Alors qu'une seule tablette s'intéresse à une pyramide entière, de nombreuses autres portent sur les troncs de pyramide à base carrée, rectangulaire ou trapézoïdale.

Plusieurs formules correspondent au calcul d'un tronc de pyramide à base carrée. Les dix derniers problèmes de la tablette YBC 5 037 que nous avons déjà rencontrée s'intéressent à la pyramide tronquée à base carrée. C'est aussi le cas de la tablette YBC 4 708<sup>71</sup>. Pour ces deux tablettes, le volume est calculé en suivant la même formule approchée :

$V = \frac{1}{2} (c_g^2 + c_p^2) \times h$  où  $h$  est la hauteur,  $c_g$  et  $c_p$  les longueurs respectives des côtés du grand et du petit carré.

Le tronc de pyramide à base carrée apparaît dans deux autres problèmes partiellement préservés des tablettes BM 85 196<sup>72</sup> et BM 85 210<sup>73</sup> pour lesquels la formule est identique à la précédente.

Enfin, le problème #28 de la tablette BM 85 194<sup>74</sup> fournit une autre procédure du calcul du volume d'un tronc de pyramide à base carrée. Cette fois-ci, la procédure est exacte.

<sup>70</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 2, p. 43-46 ; [Thureau-Dangin, 1935] ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 39-46.

<sup>71</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 389-294.

<sup>72</sup> Ibid., vol. 2, p. 43-59 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 39-46.

<sup>73</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 219-233 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 46-53.

Elle peut se traduire, avec les notations précédentes, par la formule <sup>75</sup> :

$$V = \left[ \left( \frac{c_g + c_p}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{c_g - c_p}{2} \right)^2 \right] \times h.$$

Le premier problème de la tablette BM 96 954<sup>76</sup> traite d'un tronc de pyramide à base rectangulaire. Mais, les seules parties conservées de cette tablette n'ont pas permis de retrouver la procédure utilisée par le scribe.

Le tronc de cône est l'objet de deux problèmes consécutifs de la BM 85 194<sup>77</sup>. Le premier (#14) fournit une procédure erronée de calcul du volume  $V$  d'un tronc de cône à partir des circonférences des bases inférieure  $p_i$  et supérieure  $p_s$ . Le scribe du problème #2<sup>78</sup> de la tablette BM 85 196 propose la même procédure :

BM 85 196, #2	
<i>Un tronc de cône. La circonférence inférieure est 4, la circonférence supérieure est 2, la hauteur 6. Qu'est la terre (volume) ?</i>	$p_i = 4, p_s = 2, h = 6.$  $V ?$
<i>Toi, carre 4, tu trouveras 16. Porte 16 à 5', l'inverse fixe<sup>79</sup>, tu trouveras 1°20'.</i>	$p_i \rightarrow p_i^2 \rightarrow \frac{1}{12} \times p_i^2$
<i>Carre 2, tu trouveras 4. Porte 4 à 5', tu trouveras 20'.</i>	$p_s \rightarrow p_s^2 \rightarrow \frac{1}{12} \times p_s^2$
<i>Additionne 1°20' et 20', tu trouveras 1°40'.</i>	$\rightarrow \frac{1}{12} \times p_i^2 + \frac{1}{12} \times p_s^2$
<i>Fractionne en deux 1°40', tu trouveras 50'.</i>	$\rightarrow \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{12} \times p_i^2 + \frac{1}{12} \times p_s^2 \right)$

<sup>74</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 143-151, vol. 2, p. 340 ; [Thureau-Dangin, 1932c] ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 36 ;

<sup>75</sup> [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 340 ; [Vetter, 1936], p. 696-700 ; [Waschow, 1932-3], p. 215.

<sup>76</sup> [Robson, 1999], p. 218-230.

<sup>77</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. 28-29 ; [Thureau-Dangin, 1935], p. 85-86.

<sup>78</sup> [Thureau-Dangin, 1938], p. 40.

<sup>79</sup> L'« inverse fixe » correspond à la constante 5' qui traduit le rapport entre le carré du périmètre et l'aire d'un cercle, [Robson, 1999], p. 36. Nous la rendons ici par un douzième dans la base décimale.

<p>Porte 50' à 6, la hauteur, tu trouveras 5 : c'est la terre. C'est la façon d'opérer<sup>80</sup>.</p>	$\rightarrow h \times \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{12} \times p_i^2 + \frac{1}{12} \times p_s^2 \right)$ $V = h \times \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{12} \times p_i^2 + \frac{1}{12} \times p_s^2 \right)$
--	---

Le second problème (#15) de la BM 85 194 propose le calcul du volume du tronc de cône étant donnés les diamètres des bases ( $d_s$  et  $d_i$ , avec  $d_s < d_i$ ) et la hauteur  $h$  du tronc. Il désire calculer le diamètre intermédiaire correspondant à une hauteur  $h'$ . La formule qui transcrit la procédure est  $d_i - \frac{(d_i - d_s) \times h'}{h}$ . Le scribe achève ici le problème et ne poursuit pas le calcul du volume alors qu'il avait toutes les données nécessaires<sup>81</sup>.

## B) Le découpage des figures planes dans les mathématiques mésopotamiennes.

Plusieurs tablettes attestent de la pratique du découpage de figures planes dans les mathématiques mésopotamiennes. À notre connaissance, les seules figures rencontrées dans ce type de problèmes sont le triangle et le trapèze. Certains autres énoncés proposent le découpage d'un quadrilatère quelconque mais la procédure ramène systématiquement le problème au découpage d'un trapèze. La notion de parallélogramme semble totalement inconnue des mathématiques babyloniennes<sup>82</sup>.

La majorité des problèmes sont exposés selon le même modèle. Le découpage désiré est décrit et accompagné de la donnée de certaines grandeurs nécessaires à la détermination des grandeurs manquantes. Ces grandeurs se répartissent en deux groupes : les longueurs (des côtés entiers et partiels, des transversales) et les aires (des figures entières et des parties découpées). En marge de ce type de problème, le découpage intervient aussi pour le mesurage d'une surface plane complexe.

<sup>80</sup> Traduction française de F. Thureau-Dangin, [Thureau-Dangin, 1938], p. 40.

<sup>81</sup> [Thureau-Dangin, 1932c]

<sup>82</sup> [Friberg, 2007], p. 244.

Le découpage tel qu'il est envisagé dans les mathématiques mésopotamiennes n'est donc pas une construction géométrique effective respectant certaines propriétés imposées mais plutôt une situation de calcul appliquée aux grandeurs.

Nous exposerons les problèmes que nous avons repérés en fonction de la figure à découper et en fonction des contraintes sur la transversale et sur les parties découpées. Ainsi, nous pensons mieux dégager les caractéristiques des procédures de résolution. Nous traiterons donc d'abord le triangle puis le trapèze.

### 1) Le découpage des triangles.

Dans l'ensemble des problèmes, à l'exception d'un seul, les transversales sont parallèles à un côté. Les procédures numériques développées prennent appui sur des règles métriques qui correspondront dans la tradition grecque à des propriétés géométriques essentielles.

Ces règles permettent d'établir des relations entre les grandeurs données et les grandeurs recherchées. Ces mêmes relations aboutissent alors sur ce qu'on nommerait aujourd'hui des résolutions d'équations, linéaires ou quadratiques, dont les solutions seraient les grandeurs recherchées.

Nous présenterons d'abord ces règles. Nous exposerons ensuite les problèmes de découpage du triangle en deux parties. Et enfin, nous dresserons une synthèse des problèmes de découpage en trois parties.

#### a) Les bases des « calculs » de découpage.

Le problème « *découper un triangle donné en  $n$  parties par des droites parallèles à un côté* » fait intervenir exactement  $3n$  grandeurs paramètres. En effet, nous comptons  $n$  aires partielles ( $A_i, 1 \leq i \leq n$ ),  $n$  longueurs partielles ( $a_i, 1 \leq i \leq n$ ) et  $(n-1)$  transversales ( $t_i, 1 \leq i \leq n-1$ ) aux quelles s'ajoute la base  $b$  du triangle parallèle aux transversales.

L'ensemble des tablettes conservées montre que  $n$  égale 2 ou 3. Nous nous limiterons donc à ces deux cas. Fixons dès à présent notre convention pour les paramètres du découpage du triangle à partir de la figure suivante :

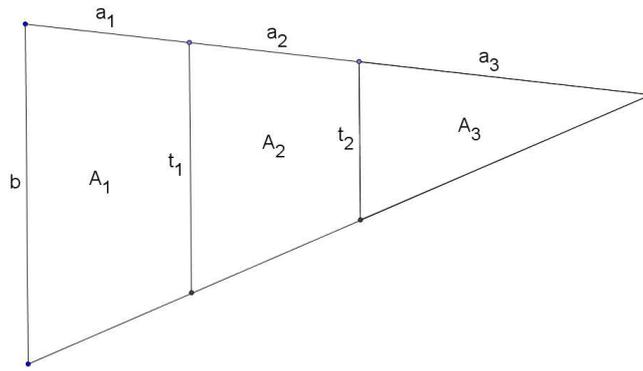


Fig. 2. Modèle du découpage d'un triangle en trois parties ( $n = 3$ ).

### i. La règle linéaire des figures semblables :

Les concepts de « droites parallèles » et de « triangles semblables » ne sont pas explicitement mentionnés dans les textes géométriques paléo-babyloniens<sup>83</sup>. Néanmoins, les scribes paraissent connaître et utiliser une relation numérique inhérente à ce que nous appellerons, après la tradition grecque, le théorème des lignes proportionnelles<sup>84</sup>.

En effet, le découpage d'un triangle parallèlement à un côté amène une relation numérique entre les transversales et les longueurs partielles. Cette relation peut s'écrire en termes modernes :

$$\frac{b}{a} = \frac{t_1}{a_2 + a_3} = \frac{t_2}{a_3}.$$

Elle permet alors d'aboutir, de manière anachronique, à des équations linéaires d'inconnue une transversale ou une longueur partielle. Le scribe, quant à lui, travaille sur des rapports numériques.

### ii. La règle quadratique des figures semblables :

De même, ce que la tradition grecque nous livrera comme la proposition 19 du sixième Livre des *Eléments* d'Euclide<sup>85</sup> semble être utilisée de manière intuitive plus de mille ans auparavant.

Dans le cas général d'une figure quelconque et dans un contexte numérique, elle mène à la « règle quadratique des figures semblables », à savoir :

<sup>83</sup> [Friberg, 1990], p. 558a.

<sup>84</sup> (*Elém. H. VI.2*) : « Si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre [les points de] section sera parallèle au côté restant du triangle. », [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 159.

<sup>85</sup> (*Elém. H. VI.19*) : « Les triangles semblables sont l'un relativement à l'autre dans le rapport doublé [de celui] des côtés homologues. », Ibid., vol. 2, p. 199.

« Les aires de figures semblables délimitées par des lignes droites et/ou des arcs circulaires sont proportionnelles aux carrés des côtés ou arcs correspondants dans les figures<sup>86</sup>. »

Dans le cas du découpage du triangle (Fig. 2), le formalisme moderne rend l'égalité des rapports de la manière suivante :

$$\frac{t_1^2}{b^2} = \frac{A_3 + A_2}{A} \quad \text{et} \quad \frac{t_2^2}{b^2} = \frac{A_3}{A}.$$

Ces relations permettent d'aboutir, de manière anachronique, à des équations quadratiques d'inconnue une transversale.

### iii. Conditions de détermination d'un problème de découpage d'un triangle.

Pour chaque problème de découpage en deux parties, deux équations sont données par les relations de calcul des aires partielles, et les deux règles précédentes procurent une nouvelle équation. L'énoncé du problème nous renseigne sur trois grandeurs-paramètres soit explicitement soit en donnant des relations sur celles-ci. Le problème est alors entièrement déterminé et la procédure aboutit à la connaissance des six grandeurs caractéristiques ( $a_1$  ;  $a_2$  ;  $A_1$  ;  $A_2$  ;  $b$  ;  $t$ ).

De même, pour le découpage en trois parties, chaque problème fournit 4 grandeurs (ou relations) pour être déterminé.

#### b) Découper un triangle en deux parties parallèlement à un côté.

Le problème de la bissection (découpage en deux parties égales) d'un triangle n'est trouvé dans aucune tablette connue<sup>87</sup>. Nous sommes amenés à penser que cette question est tout simplement absente des mathématiques cunéiformes dès l'origine. J. Friberg la ramène à celle de l'utilisation géométrique de  $\sqrt{2}$  ou de son approximation<sup>88</sup>. Pour cela, on utilise la règle quadratique des triangles semblables. Combinée à l'égalité des surfaces découpées, elle aboutit à l'égalité, à un facteur multiplicatif  $\sqrt{2}$  près, de la transversale au côté auquel elle est parallèle. Cette interprétation rationnelle peut tenir lieu d'explication de la lacune remarquée.

<sup>86</sup> [Friberg, 2007], p. 222.

<sup>87</sup> Ibid., p. 265.

<sup>88</sup> Ibid., p. 264-265.

Le découpage d'un triangle en deux parties vérifiant d'autres conditions métriques que l'égalité se retrouve, quant à lui, dans plusieurs tablettes. Trois de celles-ci, MLC 1 950<sup>89</sup>, Str. 364<sup>90</sup> et TMS 18<sup>91</sup>, révèlent certaines ressemblances. Sur chacune de ces tablettes, le scribe représente le découpage sur une figure avec les grandeurs correspondantes (Fig. 2).

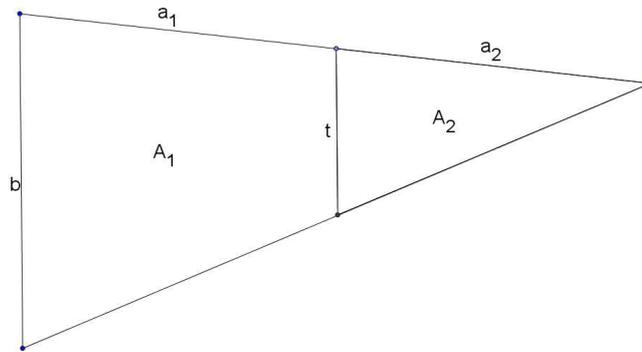


Fig. 3. Modèle du découpage du triangle en deux parties.

Comme nous l'avons montré précédemment, chaque énoncé détermine la valeur de trois grandeurs, ou relations sur celles-ci. Dans le tableau suivant, nous avons alors distingué les grandeurs (ou relations) données de celles qui sont cherchées :

Problèmes	Grandeurs ou relations données	Grandeurs cherchées
MLC 1 950	$a_1 = 20$ ; $a_2 = 30$ ; $A_1 = 5'20$	$b = 20$ ; $t = 12$ ; $A_2 = 3'$
#8 Str. 364 <sup>92</sup>	$b = 30$ ; $A_2 = 4'30$ ; $a_2 - a_1 = 10$	$t = 18$ ; $a_1 = 20$ ; $a_2 = 30$ ; $A_1 = 8'$
#9 Str. 364	$b = 30$ ; $A_1 = 8'$ ; $a_2 - a_1 = 10$	$t = 18$ ; $a_1 = 20$ ; $a_2 = 30$ ; $A_2 = 4'30$
#12 Str. 364	$b = 30$ ; $A_1 = 8'$ ; $a_2 = 30$	$t = 18$ ; $a_1 = 20$ ; $A_2 = 4'30$
#13 Str. 364	$b = 30$ ; $A_2 = 4'30$ ; $a_1 = 20$	$t = 18$ ; $a_2 = 30$ ; $A_1 = 8'$
TMS 18	$a_1 \times a_2 = 10$ ; $A_1 \times A_2 = 36$ ; $b^2 + t^2 = 20'24$	$a_1 = 20$ ; $a_2 = 30$ ; $A_1 = 8'$ ; $A_2 = 4'30$ ; $b = 30$ ; $t = 18$

<sup>89</sup> Ibid., p. 258-259 ; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 48-49.

<sup>90</sup> [Friberg, 2007], p. 244-252 ; [Neugebauer, 1935-37], p. 248-256 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 86-89.

<sup>91</sup> [Bruins et Rutten, 1961], p. 97 ; [Friberg, 2007], p. 255-258.

<sup>92</sup> La numérotation des problèmes de la tablette Str. 364 est celle prise en compte par F. Thureau-Dangin et O. Neugebauer ; [Neugebauer, 1935-37], p. 248-256 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 86-89.

Les six problèmes précédents n'envisagent que deux triangles (rectangles) différents. Les figures suivantes (Fig. 3 et Fig. 4) sont représentées à l'échelle.

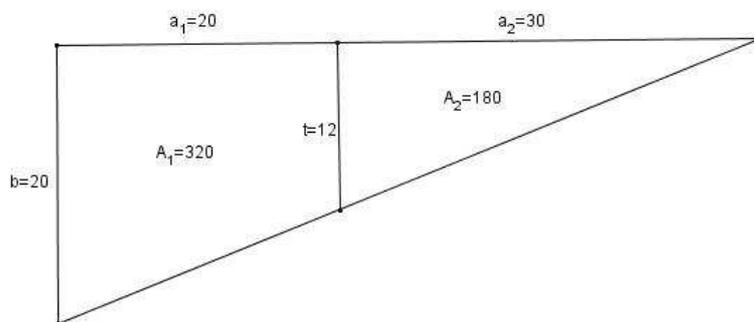


Fig. 4. MLC 1 950

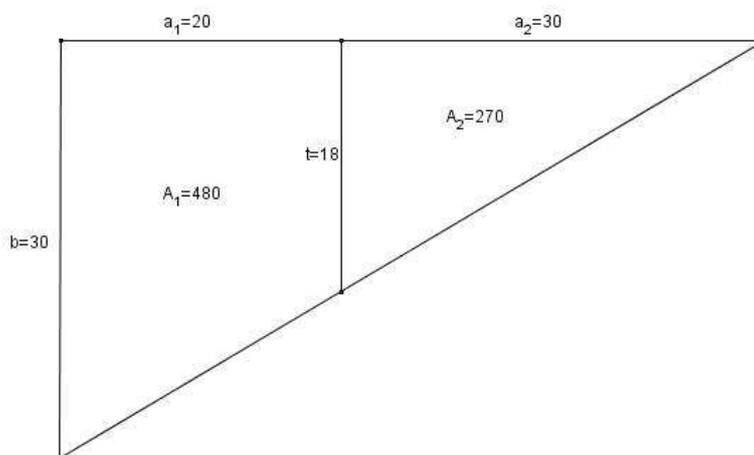


Fig. 5. TMS 18 et Str. 364.

De plus, trois rapports de grandeurs, dont chacun détermine les deux autres, sont conservés

d'un problème à l'autre : le rapport des longueurs partielles  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$  est conservé, de sorte que

le sont aussi le rapport  $\frac{A_1}{A_2}$  des aires partielles et le rapport  $\frac{b}{t}$  de la base à la transversale,

alors respectivement égaux à  $\frac{16}{9}$  et à  $\frac{5}{3}$ . La majorité des problèmes de découpage du triangle en deux parties vérifient ces rapports.

Pour J. Friberg, la « popularité »<sup>93</sup> de cette configuration s'explique par la régularité des longueurs partielles ( $a_1 = 20$  ;  $a_2 = 30$ ) ainsi que de leur différence ( $a_2 - a_1 = 10$ ) et de

<sup>93</sup> [Friberg, 2007], p. 255.

leur somme ( $a_2 + a_1 = 10$ ). Il faut, de plus, remarquer que les aires ( $A = A_1 + A_2; A_1; A_2$ ) vérifient le rapport ( $5^2; 4^2; 3^2$ ).

Les différences entre ces trois tablettes résident dans les procédures. Pour la tablette MLC 1 950, le scribe utilise une procédure qui reposerait sur la demi-somme et la demi-différence des longueurs de la base et de la transversale<sup>94</sup>. Le tableau suivant résume cette procédure, nous l'accompagnons d'une interprétation moderne :

MLC 1950	
Transcription de la procédure en notation moderne	Interprétation moderne
$(A_1, a_1) \rightarrow \frac{1}{a_1} \rightarrow \frac{A_1}{a_1}$	$= \frac{b+t}{2}$
$(A_1, a_1, a_2) \rightarrow 2a_2 \rightarrow a_1 + 2a_2 \rightarrow \frac{1}{a_1 + 2a_2} \rightarrow \frac{A_1}{a_1 + 2a_2}$	$= \frac{b-t}{2}$
$\rightarrow \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_1}{a_1 + 2a_2} = b$ $\rightarrow \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_1}{a_1 + 2a_2} = t$	Déterminer deux nombres $b$ et $t$ connaissant leur demi-somme et leur demi-différence.

Les deux autres tablettes ne donnent pas de solution explicite. Les raisons sont doubles ; soit le scribe ne l'a pas indiquée (Str. 364)<sup>95</sup>, soit la tablette est détériorée (TMS 18)<sup>96</sup>. Nous nous appuyons alors sur les reconstructions proposées par J. Friberg. La procédure de TMS 18 se ramènerait à la résolution d'un système de deux équations quadratiques d'inconnues  $(b+t)$  et  $t$ <sup>97</sup>. Et, les quatre problèmes de Str. 364 se résoudraient à l'aide d'une seule équation quadratique d'inconnue  $t$ <sup>98</sup>.

Revenons maintenant sur la tablette Str. 364. Le problème #7 part de la connaissance de deux grandeurs ( $a_1$  et  $t$ ) et de la somme des deux aires partielles<sup>99</sup>. Les problèmes #10 et #11 sont comparables respectivement aux problèmes #8 et #9 dans le cas où  $a_1 - a_2 = 10$  et

<sup>94</sup> Ibid., p. 259.

<sup>95</sup> Ibid., p. 247.

<sup>96</sup> Ibid., p. 255.

<sup>97</sup> Ibid., p. 257.

<sup>98</sup> Ibid., p. 249.

<sup>99</sup> Ibid., p. 247-249.

non  $a_2 - a_1 = 10$ <sup>100</sup>. Les données du problème #14 semblent avoir été compliquées « intentionnellement » en introduisant un facteur multiplicatif et des données pour que les grandeurs cherchées soient irrationnelles<sup>101</sup>.

Poursuivons notre examen du découpage d'un triangle en deux parties avec la tablette YBC 4 696<sup>102</sup>. Cette tablette nous transmet une liste de 52 problèmes dans lesquels les deux longueurs partielles  $a_1$  et  $a_2$  sont systématiquement données et égales à 20 et 30. Pour chaque problème, une troisième grandeur (parmi les quatre grandeurs caractéristiques restantes) est donnée. La solution est présentée sans aucune procédure. Tous les problèmes aboutiraient aujourd'hui à la résolution d'un système de deux équations linéaires à l'exception de deux qui se réduiraient à un système de deux équations quadratiques. Tous aboutissent à  $b = 30$  et  $t = 18$ . Ces problèmes présentent les mêmes valeurs que les précédents des tablettes TMS 18 et Str. 364, ##8-9 et ##12-13 (Fig. 4). Ils apparaissent avec ceux de MLC 1 950 comme des exercices « classiques » de découpage du triangle en deux parties.

Enfin, la tablette VAT 8 512<sup>103</sup> propose un autre problème de découpage du triangle en deux parties. Les données sont la base  $b$ , la différence des longueurs partielles ( $a_2 - a_1$ ) et la différence des aires partielles ( $A_2 - A_1$ ). À nouveau, les grandeurs de ce problème sont celles

des tablettes précédentes puisqu'une fois résolu, il conduit à :  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$  et  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16}{9}$ . Nous

reviendrons sur cette tablette dans la partie suivante car certaines interprétations montrent que la procédure du scribe ramène le problème à la bissection d'un trapèze construit à partir du triangle donné.

### c) Découper un triangle en trois parties parallèlement à un côté.

Le découpage d'un triangle en trois parties se présente de la même façon que le découpage précédent avec les mêmes grandeurs caractéristiques (base, transversales, longueurs partielles et aires partielles). Néanmoins, cette fois-ci, les problèmes font apparaître de nouvelles contraintes : des conditions sur l'égalité des aires partielles.

---

<sup>100</sup> Ibid., p. 250.

<sup>101</sup> Ibid., p. 252.

<sup>102</sup> Ibid., p. 261-264 ; [Neugebauer, 1935-37] ; p. 60-64.

<sup>103</sup> [Friberg, 2007], p. 259-261 ; [Høyrup, 2002], p. 234-238 ; [Neugebauer, 1935-37], p. 340-345 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 101.

Toutes les tablettes d'argile qui renvoient aux découpages du triangle en trois parties proposent une figure du type suivant sur laquelle on retrouve les neuf éléments caractéristiques :  $a_1$  ;  $a_2$  ;  $a_3$  ;  $A_1$  ;  $A_2$  ;  $A_3$  ;  $b$  ;  $t_1$  ;  $t_2$ .

Le problème #6 de la tablette Str. 364 étudiée précédemment s'intéresse au découpage d'un triangle en trois parties connaissant la somme des aires partielles ( $A_1 + A_2 + A_3 = 2850$ ), une de ces aires partielles ( $A_3 = 316 + \frac{2}{3}$ ) et deux longueurs partielles égales ( $a_1 = a_2 = 180 + \frac{1}{3}$ ). La reconstruction de la solution s'appuie sur le calcul des aires, et les règles des figures semblables pour aboutir aux grandeurs manquantes<sup>104</sup>.

Deux autres tablettes, MAH 16 055<sup>105</sup> et IM 43 996<sup>106</sup>, s'intéressent au découpage du triangle en trois parties de sorte que, pour MAH 16 055, les parties des extrémités soient égales :  $A_1 = A_3$ . L'unique exercice de IM 43 996 peut être interprété comme une approximation de ce problème<sup>107</sup>.

La condition d'égalité des aires et les règles des figures semblables imposent l'identité :  $b^2 - t_1^2 = t_2^2$ . Pour des valeurs entières de  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , le triplet  $(b, t_1, t_2)$  est alors systématiquement pythagoricien. C'est le cas des dix découpages des triangles de la tablette MAH 16 055 : cinq triangles rectangles et cinq triangles isocèles. Le triplet est, en outre, proportionnel au triplet  $(5 ; 4 ; 3)$ . De plus, les longueurs partielles  $(a_1, a_2, a_3)$  sont toujours dans le rapport  $(1 ; 1 ; 3)$ , et en conséquence les aires partielles  $(A_1, A_2, A_3)$  sont dans le rapport  $(9 ; 7 ; 9)$ .

Nous ne connaissons pas d'autres tablettes qui proposent un découpage explicite d'un triangle en trois parties. Il est néanmoins utilisé dans les problèmes #1, #2 et #3 de la tablette Str. 364<sup>108</sup> déjà bien connue. En effet, le scribe décompose la procédure du découpage d'un triangle en 5 parties (avec la donnée de 6 paramètres) en deux sous-problèmes : découper un

---

<sup>104</sup> [Friberg, 2007], p. 246.

<sup>105</sup> [Bruins, 1952], p. 11-14 ; [Friberg, 2007], p. 265-267 ; [Vaiman, 1961], p. 194.

<sup>106</sup> [Bruins, 1953] ; [Friberg, 2007], p. 267-269.

<sup>107</sup> [Friberg, 2007], p. 268.

<sup>108</sup> Ibid., p. 252-255.

trapèze en deux parties et le triangle restant en trois parties. La résolution du problème s'en trouve alors facilitée.

**d) Découpage d'un triangle en trois triangles.**

Le problème de la tablette YBC 8 633<sup>109</sup> est, à notre connaissance, le seul à proposer le découpage d'un triangle en trois parties avec des transversales non-parallèles à un côté. Cette spécificité est probablement due au fait qu'il ne s'agit pas explicitement d'un problème de découpage mais d'un problème de mesurage. En effet, le découpage n'apparaît que dans la procédure alors que l'objet du problème est le calcul de la surface d'un triangle isocèle. Celui-ci est judicieusement divisé en trois surfaces partielles<sup>110</sup>. Etant donnée la configuration du triangle – très proche d'un triangle rectangle –, J. Høyrup suppose que l'exercice aurait même pu être construit comme un prétexte au découpage d'une surface dont l'aire n'est pas aisée à calculer<sup>111</sup>.

En conclusion, le découpage d'un triangle est fortement présent dans la tradition mathématique mésopotamienne. Seuls les découpages en deux, et en trois parties inégales sont envisagées. Dans la grande majorité des cas, les transversales sont parallèles à un côté du triangle. Tous les problèmes connus de découpage ont une lecture « algébrique ». Les équations linéaires et/ou quadratiques proviennent alors des propriétés géométriques du découpage liées au parallélisme des transversales avec un côté. C'est aussi l'occasion, semble-t-il, de travailler sur des propriétés « arithmétiques » du nombre avec la recherche de rapports constants, la présence des triplets pythagoriciens.

**2) Le découpage des trapèzes.**

Nous étudierons d'abord le découpage du trapèze en deux parties, qu'elles soient de même aire ou dans un certain rapport. Ensuite, nous poursuivrons notre étude par le découpage en  $n$  ( $n > 2$ ) parties. Dans tous ces problèmes (à l'exception d'un seul), les transversales sont parallèles aux bases.

---

<sup>109</sup> [Høyrup, 2002], p. 254-257 ; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p.53-55.

<sup>110</sup> [Høyrup, 2002], p. 254.

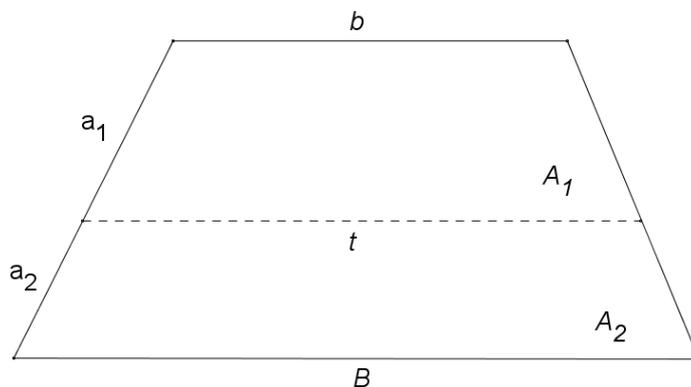
<sup>111</sup> Ibid., p. 257.

**a) Découper un trapèze en deux trapèzes de même aire parallèlement à ses bases.**

La bissection du trapèze ( $A_1 = A_2$ ) impose sur la transversale  $t$  la relation (\*) :

$$B^2 + b^2 = 2t^2 \text{ ou } t^2 = \frac{B^2 + b^2}{2} \quad (*)$$

connue des mathématiques paléo-babyloniennes et voire des pratiques sargoniques et peut-être même pré-sargoniques (3<sup>e</sup> millénaire avant notre ère)<sup>112</sup>.



**Fig. 1. Bissection du trapèze.**

De nombreuses tablettes proposent la bissection du trapèze. Citons tout d'abord IM 58 045<sup>113</sup> qui est, à notre connaissance, la plus ancienne tablette à bissecter un trapèze (période sargonique).

---

<sup>112</sup> [Friberg, 2007], p. 270 ; [Høyrup, 2002], p. 237-238.

<sup>113</sup> [Friberg, 1990], p. 562a; [Friberg, 2007], p. 269-271.



Figure 2. La tablette IM 58 045. (Source : Cuneiform Digital Library Initiative©)

Un trapèze y est représenté avec une transversale parallèle aux bases. Les longueurs des quatre côtés y sont inscrites et la procédure s'attache à calculer la transversale. Les bases et celle-ci correspondent au triplet (17 ; 13 ; 7) vérifiant nécessairement la relation (\*). Pour J. Friberg, cette tablette paraît davantage être un exercice de mathématiques qu'un croquis d'arpenteur<sup>114</sup>. C'est aussi le cas pour la tablette paléobabylonienne UET 5/858<sup>115</sup>.

Revenons maintenant sur la tablette VAT 8 512 dont l'énoncé propose le découpage d'un triangle. En supposant le triangle rectangle, et en lui ajoutant un rectangle, la procédure se ramènerait alors à la bissection d'un trapèze. Cette interprétation d'abord donnée par S. Gandz<sup>116</sup> et P. Huber<sup>117</sup>, reprise ensuite par J. Høyrup<sup>118</sup> et J. Friberg<sup>119</sup> reconstruit un trapèze dont les bases et la transversale correspondent à nouveau au triplet (17 ; 13 ; 7).

Le problème #1 de la tablette Erm. 15 073<sup>120</sup> fournit un autre exemple de triplet vérifiant (\*) pour la bissection d'un trapèze. Le verso de cette tablette est fortement détérioré mais trois exercices subsistent en partie. Les trois traitent du découpage des figures. Le premier d'entre eux calcule explicitement les longueurs partielles d'un trapèze bissecté. Les

---

<sup>114</sup> Ibid., p. 270.

<sup>115</sup> [Friberg, 2000], p. 142 ; [Vaiman, 1961], p. 251.

<sup>116</sup> [Gandz, 1948], p. 36.

<sup>117</sup> [Huber, 1955]

<sup>118</sup> [Høyrup, 2002], p. 234-238.

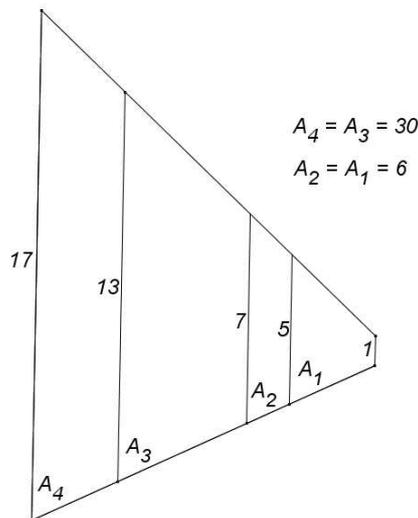
<sup>119</sup> [Friberg, 2007], p. 271-272.

<sup>120</sup> Ibid., p. 304-308.

deux bases et la transversale sont proportionnelles au triplet (7 ; 5 ; 1). Les deux autres problèmes, plus complexes, seront discutés ultérieurement.

Une dernière tablette présente une bissection : YBC 4 675<sup>121</sup> dont une partie du texte est recopiée sur la tablette YBC 9 852<sup>122</sup>. Il ne s'agit pas d'un trapèze mais d'un quadrilatère « *très long et fin* »<sup>123</sup>. Le modèle utilisé est néanmoins celui du découpage du trapèze<sup>124</sup> dont la bissection est semblable à celle de VAT 8 512. Le triplet des bases et de la transversale correspond alors à (17, 13, 7).

La tablette Erm. 15 189<sup>125</sup>, quant à elle, présente une liste de double-bissections du trapèze. Chacune des dix figures représentées est construite sur le même modèle : deux trapèzes bissectés joints à deux autres trapèzes bissectés. Cette tablette apparaît comme une généralisation de la « simple » bissection du trapèze. Dans ces dix exemples, les deux premiers trapèzes (d'aire égale à 30) vérifient le triplet (17 ; 13 ; 7) et les deux autres (d'aire égale à 6) vérifient (7 ; 5 ; 1).



**Fig. 2. Double-bissection du trapèze.**

<sup>121</sup> Ibid., p. 272-274 ; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 44-48 ; [Høytrup, 2002], p. 244-249.

<sup>122</sup> [Høytrup, 2002], note 272, p. 244 ; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 45.

<sup>123</sup> [Friberg, 2007], p. 272.

<sup>124</sup> [Høytrup, 2002], p. 249.

<sup>125</sup> [Caveing, 1994], note 111, p. 159 ; [Friberg, 2007], p. 287-292 ; [Vaiman, 1961], p. 197.

On trouve aussi ce type de découpage dans la tablette AO 17 264<sup>126</sup> connue pour le problème dit « *des six frères* ». Celui-ci s'intéresse au découpage d'un trapèze parallèlement aux bases en six surfaces partielles de sorte que les aires des deux premières soient égales ainsi que les deux suivantes et les deux dernières. L'énoncé ne fournissant que quatre grandeurs – deux longueurs partielles et deux transversales –, le problème est indéterminé. Le scribe détermine d'abord deux transversales de façon arbitraire pour fixer le problème<sup>127</sup>. Ensuite, il calcule les transversales manquantes et les longueurs partielles des côtés. Cette procédure est très éloignée d'une démarche géométrique et est davantage le reflet de manipulations numériques sur les grandeurs<sup>128</sup>.

La simple bisection du trapèze conduit aussi à des problèmes dans lesquels deux bisections sont imbriquées. À partir de la bisection d'un trapèze, le problème est de trouver deux autres transversales formant un trapèze qui soit, à son tour, bissecté par la première transversale (Fig. 8).

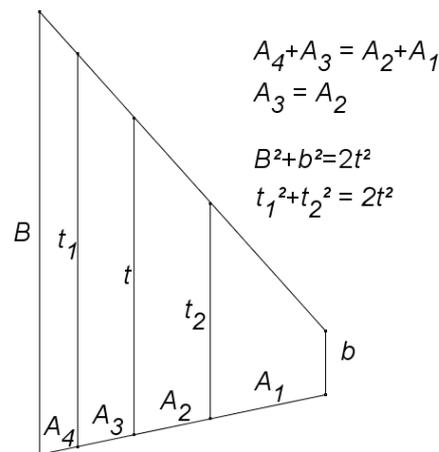


Fig. 3. Bisections imbriquées du trapèze.

Ce type de problèmes se retrouve principalement dans la tablette TMS 23<sup>129</sup>. Cette tablette ne repose pas explicitement sur le trapèze. Mais, les calculs proposés ne sont exacts que si l'on suppose trapézoïdal le quadrilatère à découper. Les deux bases et la première transversale sont proportionnelles au triplet déjà bien connu (7, 5, 1). Les deux nouvelles

<sup>126</sup> [Caveing, 1985] ; [Caveing, 1994], p. 144-162 ; [Friberg, 2007], p. 292-296 ; [Neugebauer, 1935-37], p. 126-134 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 74-76.

<sup>127</sup> [Thureau-Dangin, 1938], note 1, p. 75.

<sup>128</sup> [Caveing, 1994], p. 151.

<sup>129</sup> [Bruins et Rutten, 1961], p. 114; [Friberg, 2007], p. 299-304.

transversales (prises comme bases d'un nouveau trapèze) et la première transversale le sont avec le triplet (31, 25, 17).

Cette imbrication de deux bisections est aussi présente dans les problèmes #2 et #3 de la tablette Erm. 15 073 déjà présentée. Pour le #2, comme pour le problème précédent, il s'agit *a priori* d'un quadrilatère qu'il faut supposer trapézoïdal. Un nouveau triplet vérifiant (\*) pour les transversales est utilisé : (23, 17, 7) tandis que le second triplet est (17, 13, 7) déjà rencontré dans la tablette Erm. 15 189 et IM 58 045. En ce qui concerne le #3, la reconstruction de J. Friberg de la procédure perdue montre une similarité avec la tablette TMS 23 qui admet les mêmes triplets pour les transversales<sup>130</sup>.

**b) Découper un trapèze en deux parties, dans un rapport donné, parallèlement à ses bases.**

La relation (\*) généralisée au découpage en deux parties selon le rapport  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{p}{q}$

donne la relation (\*\*) suivante :

$$pb^2 + qB^2 = (p + q)t^2 \text{ ou } t^2 = \frac{pb^2 + qB^2}{(p + q)} (**).$$

Trois tablettes, YBC 4 608<sup>131</sup>, Str. 367<sup>132</sup> et Ist. Si. 269<sup>133</sup>, proposent ce découpage. Aucun problème ne donne explicitement un rapport pour le découpage. Ils fournissent, dans les énoncés conservés, les grandeurs  $A_1$  et  $A_2$  qui permettent de dégager ledit rapport.

L'unique problème de YBC 4 608 étudie le cas où  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{3}$ . Ainsi,  $(B, b, t)$  est proportionnel au triplet (8, 7, 2) qui vérifie nécessairement (\*\*). L'exercice, dont l'objectif semble classiquement de calculer les grandeurs partielles manquantes, est l'occasion d'utiliser la règle de fausse position. Une « valeur fausse » pour la transversale est calculée en choisissant un rapport des longueurs partielles  $\frac{a_1}{a_2}$  « faux ». Les « valeurs fausses » sont ensuite corrigées avec la valeur de la transversale donnée.

<sup>130</sup> [Friberg, 2007], p. 306.

<sup>131</sup> Ibid., p. 274-277 ; [Neugebauer, Sachs, et al., 1945], p. 49-53.

<sup>132</sup> [Friberg, 2007], p. 277-279 ; [Høyrup, 2002], p. 239-244 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 90.

<sup>133</sup> [Friberg, 2007], p. 279-282.

La règle de fausse position est encore utilisée dans la résolution de l'unique problème de Str. 367<sup>134</sup>. Dans ce cas,  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{29}{51}$ .

Quant à la tablette Ist. Si. 269, elle représente sur son recto quatre trapèzes découpés en deux parties et deux autres sur son verso. Sur cinq de ces figures, le scribe y a consigné les deux longueurs partielles ainsi que les bases et la transversale. Cette tablette peut témoigner d'exercices d'écolier dont le but serait le calcul des aires partielles. Elle peut aussi représenter la réalisation définitive de la tâche d'un écolier qui aurait été de calculer toutes les grandeurs caractéristiques des figures<sup>135</sup>. J. Friberg suggère une autre interprétation pour cette tâche d'écolier concernant les quatre trapèzes du recto<sup>136</sup>. Il s'agirait de la construction de trapèzes découpés en deux parties d'aires  $A_1$  et  $A_2$  toujours égales à 1 800 et 30, et avec la longueur totale  $a_1 + a_2$  toujours égale à 60. Le premier trapèze du verso respecte ces données à l'exception de la longueur totale qui égale, cette fois-ci, 50. Le deuxième trapèze du verso est très différent des précédents et se rapproche étrangement du problème « populaire »<sup>137</sup> de découpage du triangle en deux parties avec les aires partielles  $A_1 = 480$  et  $A_2 = 270$ , et la base  $B = 30$ <sup>138</sup>.

Les scribes de la tradition mésopotamienne ne se limitent pas au découpage du trapèze en deux parties égales ou vérifiant un certain rapport. Contrairement au cas du triangle, de nombreuses tablettes attestent des pratiques de découpage du trapèze en un nombre  $n$  ( $n > 2$ ) de parties.

### c) Découper un trapèze en $n$ ( $n > 2$ ) parties.

Pour l'ensemble de ces problèmes, la tâche du scribe est semblable aux problèmes précédents. Etant données certaines grandeurs (ou relations) caractéristiques, toutes les autres doivent être déterminées. À notre connaissance, le seul découpage en trois parties égales

---

<sup>134</sup> [Høyrup, 2002], p. 241.

<sup>135</sup> [Friberg, 2007], p. 280.

<sup>136</sup> Ibid., p. 281.

<sup>137</sup> Ibid., p. 255.

<sup>138</sup> Ibid., p. 282.

parallèlement aux bases intervient dans le problème #2 de la tablette VAT 7 621<sup>139</sup>. Malheureusement fort détérioré, ce problème ne livre pas la procédure.

Le problème #1 de cette même tablette traite d'un héritage entre deux groupes de neuf fils. Le trapèze est d'abord découpé en deux parties égales. Chacune de ces parties est alors découpée à son tour en neuf parties égales.

Une autre tablette aussi conservée à Berlin, VAT 7 531<sup>140</sup>, propose un découpage en trois parties égales. Le problème #1 est énoncé comme étant le partage d'un trapèze donné entre trois frères. Il s'agit de l'unique problème connu pour lesquelles les transversales ne sont pas parallèles aux bases mais perpendiculaires. À nouveau, le scribe ne fournit pas de procédure.

Les tablettes Ash. 1 922.168<sup>141</sup> et MS 3 908<sup>142</sup> proposent des découpages d'un trapèze parallèlement aux bases en trois parties inégales. Ces deux tablettes représentent les trapèzes découpés avec les grandeurs caractéristiques : bases et transversales, aires partielles et longueurs partielles.

Signalons enfin à la tablette IM 31 248<sup>143</sup> qui expose, quant à elle, la figure et le problème (dont une grande partie est perdue) du découpage d'un trapèze en cinq parties égales.

## C) Conclusion.

La terminologie utilisée ainsi que les situations évoquées dans les nombreux problèmes semblent relier le mesurage et le découpage à une réalité pratique. Néanmoins, plusieurs éléments nous poussent à croire que le mesurage et le découpage doivent davantage être considérés comme des chapitres d'une tradition savante des mathématiques. Ajoutons aussi que les tablettes qui nous sont parvenues, sauf peut-être celles relatives au cadastre, ne

---

<sup>139</sup> Ibid., p. 296-297 ; [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 290-294 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 99-100.

<sup>140</sup> [Friberg, 2007], p. 297-299 ; [Neugebauer, 1935-37], vol. 1, p. 291 ; [Thureau-Dangin, 1938], p. 98-99 ; [Vaiman, 1961].

<sup>141</sup> [Friberg, 2007], p. 285-286 ; [Robson, 1999], p. 273.

<sup>142</sup> [Friberg, 2007], §8. 1.

<sup>143</sup> [Bruins, 1953], p. 256 ; [Friberg, 2007], p. 286.

reflètent pas le travail des praticiens effectivement lié au mesurage et au découpage mais plutôt le résultat d'une « scolarisation » de ce travail. En effet, il semble raisonnable de croire que les problèmes de géométrie se seraient nourris des pratiques effectives mais les documents connus seraient davantage ancrés dans un corpus d'enseignement. Ainsi, les séries d'énoncés d'un même problème qui mettent en œuvre une permutation des données afin de calculer les grandeurs manquantes ne se rattachent qu'à des situations pseudo-concrètes. Ils apparaissent alors davantage comme un prétexte aux calculs sur les grandeurs. C'est aussi probablement le cas des problèmes dans lesquels l'homogénéité des grandeurs n'est pas respectée, ils ne peuvent « représenter » un problème concret. Ajoutons, à l'image de la tablette YBC 4 675, toutes les tablettes où les « conditions de réalité », comme l'inégalité triangulaire, ne sont pas vérifiées. Les problèmes de découpage nous fournissent un argument supplémentaire. Les problèmes de mesurage ne sont pas dissociés des diverses unités de longueur, de surface ou de volume, ceux qui traitent de découpage n'évoquent que très rarement ces unités. Le scribe se comporte comme s'il travaillait, anachroniquement, sur des rapports de grandeurs. Nous sommes en présence de nombres génériques sortis de tout contexte – quel qu'il soit –. Ils sont les représentants, voire les supports d'une tradition savante. Ces problèmes de découpage sont alors l'occasion de développements « arithmétiques » que nous avons qualifiés parfois d'« algébriques » lorsque leur formulation moderne aboutissait à une équation du second degré.

Enfin, notons la forte présence de procédures pré-algébriques afin de résoudre des problèmes de mesurage et de découpage. Ajoutons qu'aucune tablette, à notre connaissance, ne contient les premiers éléments constitutifs qui pourraient être à l'origine d'une structuration de la discipline algébrique. Les problèmes traités s'inscrivent tous dans un environnement géométrique avec ses références. De plus, la validité de la procédure n'est pas justifiée, elle est validée par ce que J. Høyrup nomme une géométrie « naïve » du couper-coller<sup>144</sup>.

---

<sup>144</sup> [Høyrup, 1990]

# Chapitre deux

## Les pratiques de mesurage et de découpage dans les mathématiques grecques.

Héron d'Alexandrie (1<sup>er</sup> s.) est sans doute le meilleur représentant de la « géométrie pratique » grecque. Quatre ouvrages sur le mesurage de figures planes et solides lui ont été attribués. Le seul ouvrage dont l'auteur est Héron s'avère aujourd'hui être *Les Metrica*; il s'agit sans doute du traité grec le plus riche sur le thème. Ensuite, les recueils de problèmes *Geometrica*, *Stereometrica* et *De mensuris* sont considérés comme apocryphes par les spécialistes. En plus des quelques documents anonymes qui nous sont parvenus, nous pouvons aussi citer les contributions de Diophane (1<sup>er</sup> s. av. J.-C.) et Didyme (1<sup>er</sup> s.).

La question du découpage de figures planes n'est pas, dans la tradition grecque, exclusivement envisagée en relation avec ses aspects pratiques. Elle illustre parfaitement la dualité « savoir savant / savoir faire » des mathématiques grecques avec ces nombreux allers et retours. Euclide, principal témoin et l'un des éminents représentants de la géométrie savante grecque, s'est intéressé à ces problèmes en y consacrant un ouvrage aujourd'hui perdu dans sa version originale : *Sur les divisions des figures*. Quelques siècles plus tard, Héron consacre un livre entier de ses *Metrica* aux pratiques de découpages des figures planes.

Dans une première partie, nous présentons ces différents témoins de la tradition géométrique grecque des pratiques de mesurage. Dans une seconde partie, nous nous occuperons des problèmes de découpage.

## **A) Le mesurage des figures planes et solides dans les mathématiques grecques.**

### **1. Les *Metrica* de Héron d'Alexandrie.**

Les *Metrica*, dont l'authenticité est assurée, sont construites en trois livres<sup>145</sup>. Elles marquent « *la volonté d'articuler différentes approches, en particulier la démarche démonstrative de la « grande géométrie » grecque (Euclide, Archimède, Apollonius...) et la démarche calculatoire ou algorithmique, à peu près universelle en mathématiques*<sup>146</sup>. » Le premier livre s'intéresse au mesurage des surfaces, le second traite exclusivement des volumes. Enfin le troisième, sur lequel nous reviendrons, étudie le découpage de figures planes et solides.

Après une longue préface dans laquelle Héron décrit ses motivations, et le plan de son travail, le Livre I des *Metrica* propose trente-neuf problèmes. Ils sont tous structurés de la même manière : énoncé, procédure de résolution et démonstration.

Le premier problème donne l'aire d'un rectangle, appelé « *domaine oblong* » et d'un carré. Suivent les problèmes relatifs, dans l'ordre, aux triangles, aux trapèzes, aux losanges et parallélogrammes, aux polygones réguliers, aux figures et solides circulaires.

#### **Les triangles.**

De manière générale, l'aire d'un triangle est calculée à l'aide de la hauteur et de la base par complétion pour obtenir un rectangle double du triangle donné. Sont exposées les

---

<sup>145</sup> Edition du texte grec avec traduction allemande dans [Héron, 1899-1914], vol. 3. Nous tenons à remercier B. Vitrac qui nous a communiqué sa traduction française personnelle.

<sup>146</sup> [Vitrac, à paraître], note 79, p. 25

procédures pour calculer la hauteur d'un triangle, qu'il soit isocèle, acutangle ou obtusangle, ainsi que les projections des côtés sur la base.

Voici la procédure pour le triangle acutangle de côtés  $a < b < c$ <sup>147</sup>.

$$\left[ \frac{(a^2 + b^2) - c^2}{2} \right] \div b = p, \text{ où } p \text{ est la projection de } a \text{ sur } b.$$

$$a^2 - p^2 \rightarrow \sqrt{a^2 - p^2} = h, \text{ où } h \text{ est la hauteur du triangle relativement à } b.$$

$$\frac{h \times b}{2} = A, \text{ où } A \text{ est l'aire du triangle.}$$

La détermination de l'aire d'un triangle sans le calcul de la hauteur fait l'objet d'un problème :

$$A = \sqrt{\frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - a \right) \left( \frac{p}{2} - b \right) \left( \frac{p}{2} - c \right)} \text{ si } p \text{ est le périmètre du triangle de côtés } a, b, c.$$

Même si cette formule porte aujourd'hui le nom de Héron d'Alexandrie, il semble qu'elle lui soit bien antérieure<sup>148</sup>. Ce même problème est l'occasion de donner, sans justification, une procédure d'approximation de la racine carrée :

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{N}{c} + c \right) \text{ si } c \text{ est la racine carrée du carré parfait le plus proche par excès de } N.$$

### Les quadrilatères.

Comme nous l'avons vu, Héron traite le rectangle dans le premier problème comme base pour les autres problèmes. Il peut en effet être considéré comme la figure fondamentale pour déterminer l'aire des autres figures, le carré étant l'unité de surface.

Après les triangles, sont exposés les trapèzes. Leur aire est déterminée par le produit de la demi-somme des bases par la hauteur. Ceci est démontré par la transformation du trapèze de bases  $b$  et  $B$  et de hauteur  $h$ , qu'il soit rectangle, isocèle, acutangle ou obtusangle<sup>149</sup>, en un rectangle de dimensions  $\frac{b+B}{2}$  et  $h$ . Les procédures pour déterminer la

---

<sup>147</sup> Héron prend l'exemple canonique du triangle de côtés (13, 14, 15).

<sup>148</sup> Le mathématicien arabe al-Bīrūnī attribue même cette relation à Archimède.

<sup>149</sup> Un trapèze obtusangle est un trapèze dont un des deux angles à la base est obtus.

hauteur d'un trapèze sont aussi données en se ramenant au cas d'un triangle en retranchant  $b$  de  $B$ .

Les problèmes suivants proposent l'aire de plusieurs autres quadrilatères (losange, parallélogramme ou quadrilatère ayant un angle droit et aucun côté parallèle) en les divisant, notamment par la diagonale, en figures simples dont on sait calculer l'aire d'après les problèmes précédents.

### Les polygones réguliers.

Dans cette partie, Héron traite de tous les polygones réguliers du triangle équilatéral au dodécagone de manière systématique, seul le carré n'est pas évoqué à cet endroit. L'aire du triangle équilatéral est donnée par la procédure exacte résumée par la formule :  $\sqrt{\frac{3}{16}c^2 \times c^2}$  si  $c$  est le côté du triangle.

Donnons enfin les formules issues des procédures démontrées par Héron pour le calcul de l'aire des polygones réguliers. À l'exception de la procédure concernant l'hexagone, elles sont toutes approchées.

pentagone	$A = \frac{c^2 \times 5}{3}$
hexagone	$A = \sqrt{\frac{c^2 \times c^2}{4} \times 27}$
heptagone	$A = \frac{c^2 \times 43}{12}$
octogone	$A = \frac{c^2 \times 29}{6}$
ennéagone	$A = \frac{c^2 \times 51}{8}$
décagone	$A = \frac{c^2 \times 15}{2}$
hendécagone	$A = \frac{c^2 \times 66}{7}$
dodécagone	$A = \frac{c^2 \times 45}{4}$

Héron précise enfin que les polygones non réguliers sont mesurés par triangulation.

### Les figures circulaires.

Héron débute avec une référence à *La mesure du cercle* d'Archimède pour établir le rapport entre circonférence et diamètre d'un cercle :  $\pi \approx \frac{22}{7}$ . Cela lui permet ensuite de répondre aux problèmes portant sur le cercle de diamètre  $d$ , de circonférence  $p$ , et d'aire  $A$ .

$$d \rightarrow d^2 \rightarrow d^2 \times 11 \rightarrow \frac{d^2 \times 11}{14} = A$$

$$(p, d) \rightarrow p \times \frac{d}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \left( p \times \frac{d}{2} \right) = A$$

$$d \rightarrow d \times 22 \rightarrow \frac{d \times 22}{7} = p$$

$$p \rightarrow p \times 7 \rightarrow \frac{p \times 7}{22} = d$$

$$A \rightarrow A \times \frac{14}{11} \rightarrow \sqrt{A \times \frac{14}{11}} = d$$

Après avoir donné une procédure pour l'aire d'une couronne, Héron se consacre à l'étude des portions de cercle plus petites puis plus grandes qu'un demi-cercle. Pour l'aire d'une portion plus petite qu'un demi-cercle,

$$A = \frac{1}{2}(c + f) \rightarrow \frac{1}{2}(c + f) \times f^{150} \text{ si } c \text{ (resp. } f) \text{ est la corde (resp. la flèche) de la portion de cercle.}$$

La portion de cercle plus grande qu'un demi-cercle est mesurée à partir de la différence entre le cercle complet et la portion complémentaire plus petite qu'un demi-cercle. Le diamètre  $d$  du cercle dont est issu la portion est implicitement déterminé par la formule :

$$d = \frac{1}{f} \times \left( \frac{c}{2} \right)^2 + f \text{ (avec les notations précédentes)}$$

Enfin, le livre I s'achève sur l'étude de l'ellipse, la parabole, sur les surfaces du cylindre droit, du cône de révolution, de la sphère et d'un segment de sphère en s'appuyant

---

<sup>150</sup> Notons que la version des *Metrica* qui nous est parvenue (transmise par un seul manuscrit) propose une procédure plus précise avec un terme correctif. Il se pourrait que cette correction ne soit pas de Héron lui-même mais d'un auteur postérieur qui introduit ce commentaire dans le texte ; [Høyrup, 1997], p. 80.

explicitement sur plusieurs travaux d'Archimède : *La mesure du cercle*, *Sur les conoïdes*, *De la méthode*, *Sur la sphère et le cylindre*.

Dans le livre II, Héron développe le mesurage des solides et complète ainsi les travaux de la fin du livre I. Dans un premier temps, il mesure le parallélépipède rectangle par le produit de la base par la hauteur. Il généralise alors ce résultat à tous les solides sans pointe.

Puis, il s'intéresse aux solides qui ne sont pas nécessairement droits comme le cône, le cylindre scalène, le solide parallélépipédique ; la démarche consiste à les ramener aux solides droits correspondants.

Ensuite, plusieurs problèmes traitent de la pyramide entière ou tronquée de base quelconque pour continuer sur différents troncs de solides (cône, prisme à base triangulaire). Se succèdent alors, avec une référence à *La sphère et le cylindre* d'Archimède, les problèmes sur la sphère et les segments de sphère. Le volume  $V$  de la sphère de diamètre  $d$  est indiqué par la procédure suivante :

$$d \rightarrow d^2 \rightarrow \frac{11}{14}d^2 \rightarrow \left(\frac{11}{14}d^2\right) \times d \rightarrow \left(\frac{11}{14}d^2\right) \times d \times \frac{2}{3} = V$$

D'autres types de figures cylindriques et sphériques sont mentionnées : une baignoire, une voûte, une coupole et le tore qui se trouve, par exemple, au pied d'une colonne.

Héron propose enfin la mesure des cinq solides de Platon, et des solides irréguliers avec l'utilisation de la poussée d'Archimède ou de l'« enrobage » pour une comparaison avec un solide droit.

## 2) Le corpus pseudo-héronien.

Notre propos est ici une présentation succincte du contenu géométrique du corpus et nous ne nous attacherons pas à discuter spécifiquement des traditions manuscrites, de leur histoire, de leurs liens éventuels ou de l'authenticité de leur attribution<sup>151</sup>.

---

<sup>151</sup> Cette question est au-dessus de nos compétences. Sur cette question et sur les informations relatives à *Geometrica*, nous remercions B. Vitrac pour nous avoir confié ses notes personnelles sur « Le corpus pseudo-héronien édité par Heiberg » et sur la « Structure du « traité » *Geometrica*, édité par Heiberg ».

*Geometrica*<sup>152</sup> est un recueil de problèmes de mesurage, compilé par J.L. Heiberg<sup>153</sup>, consacrés exclusivement aux figures planes à partir de matériaux provenant de divers traités byzantins.

Les problèmes sont énoncés et résolus sans démonstration. De plus, nombre d'entre eux font apparaître des unités métrologiques. Enfin, une pratique, probablement issue des arpenteurs, intervient quasi-systématiquement pour déterminer l'aire des figures les moins usuelles : la triangulation et plus généralement le découpage en figures dont on sait calculer l'aire. Néanmoins, cela ne suffit pas à conférer aux *Geometrica* un caractère pratique et utilitaire. En effet, la nature des problèmes et, en particulier, la multiplication des exemples numériques fractionnaires dénotent plutôt une compilation de problèmes pour mathématiciens aussi bien géomètres qu'arithméticiens.

Après une préface et une introduction sur les mesures, la compilation commence naturellement avec le carré et le rectangle. Ensuite, sont traités les triangles en débutant par les triangles rectangles, puis les triangles équilatéraux et isocèles, et enfin les triangles scalènes. Les procédures de calcul des projections, et des hauteurs sont les mêmes. Les *Geometrica* proposent davantage de problèmes où les données numériques sont modifiées et qui amènent notamment à de nombreux calculs fractionnaires<sup>154</sup>. La méthode dite « de Héron » du calcul de l'aire d'un triangle à partir de la seule connaissance de ses côtés est utilisée à deux occasions : pour le triangle canonique (13, 14, 15) et pour le triangle rectangle (5, 12, 13)<sup>155</sup>.

Des problèmes sur les quadrilatères sont ensuite proposés : losanges, rectangles, parallélogrammes, trapèzes. Les mêmes procédures que dans les *Metrica* sont appliquées ici, seuls les exemples numériques peuvent être différents.

Le recueil poursuit avec le traitement quantitativement important du cercle et de ses portions. Les *Geometrica* renferment de nombreuses procédures pour déterminer l'aire  $A$  d'un cercle, le diamètre  $d$  ou sa circonférence  $c$  à partir de la donnée d'une ou deux de ces grandeurs. Elles peuvent être résumées par les formules suivantes :

---

<sup>152</sup> Edition du texte grec avec traduction allemande dans [Héron, 1899-1914], vol. IV.

<sup>153</sup> C'est le cas plus globalement pour le « corpus pseudo-héronien » dont il est question ici ; vol. IV, V de [Héron, 1899-1914].

<sup>154</sup> Il s'agit ici d'une différence entre les textes du corpus pseudo-héronien et les *Metrica* dont les valeurs numériques choisies conduisent, pour la plupart, à des calculs simples. Soulignons ici une autre différence entre les textes. Alors que Héron précise dans la préface au Livre I ne pas considérer les unités métrologiques et les problèmes de conversion inhérents, ces questions sont largement présentes dans le corpus pseudo-héronien.

<sup>155</sup> [Héron, 1899-1914], vol. IV, p. 249, p. 251.

$$d \rightarrow 3 \times d + \frac{1}{7} \times d = p$$

$$d \rightarrow (d^2 \times 11) \times \frac{1}{14} = A \text{ (M)}^{156}$$

$$d \rightarrow \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times 3 + \frac{1}{7} \left(\frac{d}{2}\right)^2 = A$$

$$d \rightarrow d^2 - \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{21} \left[ d^2 - \frac{1}{4}d^2 \right] = A$$

$$d \rightarrow d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right)d^2 = A$$

$$p \rightarrow (p^2 \times 7) \times \frac{1}{88} = A$$

$$(d, p) \rightarrow d \times \frac{p}{4} = A$$

$$(d, p) \rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{p}{2} = A$$

$$(d, p) \rightarrow \frac{1}{4}(d \times p) = A$$

$$(d, p) \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{d}{2} \times p \right) = A \text{ (M)}$$

$$p \rightarrow 7p \times \frac{1}{22} = d \text{ (M)}$$

$$p \rightarrow 7 \times \frac{p}{22} = d$$

$$p \rightarrow \frac{1}{3} \left( p - \frac{p}{22} \right) = d$$

$$A \rightarrow \sqrt{\frac{1}{7} \times (88 \times A)} = p$$

Là encore, ces procédures sont exécutées avec de nombreux exemples numériques, et notamment avec des diamètres fractionnaires qui engendrent des calculs non triviaux.

Suivent plusieurs problèmes sur le cercle et les polygones réguliers (du pentagone au dodécagone), sur l'inscription et la circonscription d'une figure dans une autre.

---

<sup>156</sup> Nous signalons par (M) la présence de cette procédure dans les *Metrica*.

Notons la présence, dans les *Geometrica*, de trois problèmes pour lesquels les procédures de résolution proposées sont de nature pré-algébrique<sup>157</sup>. Voici ces problèmes avec leur procédure de résolution. Notons aussi que pour chacun d'entre eux la solution déterminée est soumise à une vérification.

<p><b>Problème 1 :</b> La somme des quatre côtés d'un carré et de son aire est 896. Déterminer son périmètre <math>p</math> et son aire <math>A</math>.</p>	$p + A = 896. \quad p, A ?$ $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ $\rightarrow 2 \times 2 = 4$ $\rightarrow 4 + 896 = 900$ $\rightarrow \sqrt{900} = 30$ $\rightarrow \frac{1}{2} \times 4 = 2$ $\rightarrow 4 \div 2 = 2$ $\rightarrow 30 - 2 = 28 = c$ (si $c$ est le côté du carré) $p = 120, A = 784$
<p><b>Problème 2 :</b> La somme du diamètre <math>d</math>, de la circonférence <math>p</math> et de l'aire <math>A</math> d'un cercle est 212. Déterminer les trois grandeurs <math>d, p</math> et <math>A</math> séparément.</p> <p><b>Problème 3 :</b> Même problème que précédemment avec la somme égale à <math>67 + \frac{1}{2}</math>. Les résolutions sont identiques.</p>	$d + p + A = 212. \quad d, p, A ?$ $154 \times 212 = 32\,648$ $\rightarrow 841 + 32\,648 = 33\,489$ $\rightarrow \sqrt{33\,489} = 183$ $\rightarrow \frac{183}{29} = 154$ $\rightarrow \frac{1}{11} \times 154 = 14 = d$ $\rightarrow \frac{183}{29} = 154$ $\rightarrow 2 \times 154 = 308$ $\rightarrow \frac{1}{7} \times 308 = 44 = p$ $\rightarrow (14 \times 44) \times \frac{1}{4} = 154 = A$

<sup>157</sup> Aucun problème de ce type n'apparaît dans les *Metrica*.

Restent deux ouvrages dans le corpus pseudo-héronien édité par J.L. Heiberg :

Les *Stereometrica*<sup>158</sup> donnent le mesurage de certaines figures géométriques solides. Parmi celles-ci, sont abordés la sphère, le cône, le tronc de cône, l'obélisque avec une base circulaire, le cylindre, le cube, les pyramides et les troncs de pyramide. Les autres problèmes traitent de questions en relation avec les bâtiments et les constructions comme, par exemple, celles d'un théâtre, d'une baignoire ou d'un bateau.

Quant au *De mensuris*<sup>159</sup>, il débute avec les mesures de toutes sortes d'objets comme des pierres de différentes sortes, une tour, un théâtre ou encore un navire. Ensuite, ce sont les figures géométriques planes et solides qui sont mesurées : cercle et portions de cercles, sphères et portions de sphères, pyramides, cône, troncs de cônes et pyramides.

### **3) Les opuscules géométriques de Didyme et de Diophane et autres témoignages anonymes.**

Didyme et Diophane sont deux mathématiciens mineurs de la tradition grecque. Ils se sont davantage illustrés dans des travaux agronomiques que dans des œuvres mathématiques<sup>160</sup>. Chacun d'eux a néanmoins publié un petit opuscule de géométrie pratique.

#### **a) Le traité de planimétrie et de stéréométrie de Diophane.**

L'opuscule<sup>161</sup> contient vingt-six problèmes résolus sans démonstration. Cet opuscule nous est parvenu dans les mêmes *codices* que les corpus pseudo-héronien que nous venons de présenter.

Dans cet ouvrage, sont principalement développés des calculs approchés sur les polygones réguliers, du pentagone au dodécagone, et quelques solides circulaires. Les neuf

---

<sup>158</sup> Edition du texte grec avec traduction allemande dans [Héron, 1899-1914], vol. V, étude partielle dans [Tannery, 1912]. Ce recueil est réparti en deux collections principales : *Stereometrica* I (p. 2-84) et *Stereometrica* II (p. 84-162).

<sup>159</sup> Edition du texte grec avec traduction allemande dans [Héron, 1899-1914], vol. V.

<sup>160</sup> [Ver Eecke, 1940].

<sup>161</sup> Edition du texte grec, et traduction allemande dans [Heiberg, 1927] ; traduction française dans [Ver Eecke, 1940] que nous prendrons comme texte de référence.

premiers problèmes concernent les figures circulaires. L'auteur propose le calcul de la circonférence  $p$  et de l'aire  $A$  d'un cercle à partir de son diamètre  $d$ <sup>162</sup>, le calcul de son aire à partir de son diamètre et sa circonférence<sup>163</sup>, et enfin de son diamètre à partir de sa circonférence<sup>164</sup>. Le rapport du diamètre au périmètre du cercle est  $\pi \approx \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$ .

$$d \rightarrow p = 3 \times d + \frac{1}{7} \times d \text{ (G)}^{165}$$

$$d \rightarrow A = (d^2 \times 11) \times \frac{1}{14} \text{ (M) + (G)}$$

$$p, d \rightarrow A = \frac{p}{2} \times \frac{d}{2} \text{ (G)}$$

$$p, d \rightarrow A = (p \times d) \times \frac{1}{4} \text{ (G)}$$

$$p \rightarrow d = (7 \times p) \times \frac{1}{22} \text{ (M) + (G)}$$

L'auteur donne aussi le calcul de l'aire de la figure triangulaire (resp. quadrangulaire) située entre trois (resp. quatre) cercles tangents, et celui du volume d'une sphère de diamètre  $d$  donné.

$$d \rightarrow \left( d^2 \times 11 \times \frac{1}{14} \right) \times 4$$

Les onze problèmes suivants traitent exclusivement des polygones réguliers<sup>166</sup>. Leur côté  $c$  étant donné, l'aire  $A$  du polygone est calculée. Toutes ces procédures sont directement issues des équivalences entre figures planes régulières comme « 5 carrés occupent 3 pentagones », ou « 13 carrés occupent 5 hexagones ». À l'exception du triangle équilatéral, toutes les procédures exposées par Héron se retrouvent chez Diophane.

Pour le triangle équilatéral, alors que Héron a une procédure exacte, Diophane donne une procédure approchée qui prend appui sur une équivalence explicitement attribuée par Archimède<sup>167</sup> : « 30 triangles équilatéraux sont équivalents à 13 carrés »<sup>168</sup>. Il arrive ainsi à :

<sup>162</sup> [Ver Eecke, 1940], p. 19.

<sup>163</sup> Ibid., p. 19-20.

<sup>164</sup> Ibid., p. 20

<sup>165</sup> Nous signalons par (G) (resp. (M)) la présence de ces procédures dans les *Geometrica* (resp. *Metrica*).

<sup>166</sup> [Ver Eecke, 1940], p. 24-27.

<sup>167</sup> [Ver Eecke, 1940], p. 31. Il le cite aussi à propos du cylindre ; Ibid., p. 39, 40, 43.

<sup>168</sup> À notre connaissance, aucun travail connu d'Archimède ne mentionne cette équivalence sinon de manière indirecte.

$$A = \frac{13c^2}{30} \text{ ou } A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)c^2 \text{ si } c \text{ est son côté.}$$

Il détermine aussi sa hauteur  $h$  à l'aide de la relation de Pythagore :  $h = \sqrt{\frac{3}{4}c^2}$ .

Diophane propose aussi deux procédures alternatives, l'une pour l'hexagone et l'autre pour le décagone :

$$\text{hexagone} \quad A = (c^2 \times 6) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)$$

$$\text{décagone} \quad A = \frac{c^2 \times 38}{5}$$

La procédure pour l'hexagone n'est qu'une conséquence de la procédure du triangle équilatéral. Pour le décagone, Diophane éprouve le besoin de préciser que « *cette méthode se comporte d'une manière exacte* »<sup>169</sup> alors que la formule est à nouveau approchée. Une raison peut être le fait qu'elle donne un résultat plus proche de la solution que l'autre formule.

Pour quelques-uns des problèmes précédents, le diamètre  $d$  du cercle circonscrit est soit déterminé par une procédure détaillée, soit seule sa valeur est donnée. Le problème réciproque, à savoir déterminer le côté du polygone régulier connaissant le diamètre du cercle circonscrit, n'est envisagé que pour l'octogone<sup>170</sup>. Ce dernier problème fait l'objet d'un énoncé général<sup>171</sup> dans lequel Diophane propose le calcul systématique du côté  $c$  (resp. du diamètre  $d$ ) en fonction du nombre de côtés  $n$  du polygone et du diamètre (resp. du côté) :

$$c = \frac{d \times 3}{n} \text{ et } d = \frac{c \times n}{3}$$

Les problèmes restants concernent la calotte sphérique, le tronc de cône, la sphère et le cylindre.

### **b) *Le métrage des divers bois de Didyme.***

Cette contribution<sup>172</sup> est beaucoup moins importante pour notre propos que la précédente même si, dans le cas présent, il s'agit peut-être du seul « vrai » représentant d'une

---

<sup>169</sup> Ibid., p. 27.

<sup>170</sup> Ibid., p. 25-26, p. 28-30.

<sup>171</sup> Ibid., p. 35-38.

<sup>172</sup> Edition du texte grec, et traduction allemande dans [Heiberg, 1927] ; traduction française dans [Ver Eecke, 1940] que nous prendrons comme texte de référence. Etude dans [Tannery, 1912].

géométrie pratique grecque. En effet, il s'agit d'un traité de métrologie dans lequel apparaissent quelques problèmes de mesurage. Les intentions de l'auteur étaient sans doute de fournir un document d'utilisation et de conversion des unités linéaires, de surface et de capacité.

Parmi les problèmes de mesurage, on retrouve le problème de la détermination, par la relation de Pythagore, de la diagonale d'un carré (ou d'un rectangle) de côté(s) donné(s)<sup>173</sup>.

Didyme s'intéresse ensuite au solide. Il détermine le volume d'un parallélépipède rectangle, d'un cylindre, et d'un demi-cylindre. Dans ces derniers calculs, l'auteur adopte la valeur approchée  $\pi \approx 3$ . En l'absence des figures, plusieurs autres problèmes sont difficiles à interpréter.

Enfin, de nombreux problèmes proposent la détermination du volume d'un parallélépipède rectangle dans une unité de volume donnée et pour lequel les dimensions sont données dans diverses unités. Ces derniers problèmes reprennent les trente-six premiers qui manipulent les différentes unités et leurs conversions.

### **c) Plusieurs témoignages fragmentaires anonymes.**

#### **i) Le papyrus Ayer.**

Le plus important des fragments géométriques pour notre propos est probablement le papyrus Ayer<sup>174</sup> qui serait une copie datée du 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> siècle après J.C. Il peut s'agir d'un fragment d'un traité pratique utilisé pour le mesurage de terrains après inondation<sup>175</sup>. Une des hypothèses considérerait la version originale de ce texte comme une source possible (directe ou indirecte) aux travaux de Héron<sup>176</sup>.

Trois figures géométriques, manifestement pas à l'échelle, sont représentées : deux trapèzes et un losange. Chacun des trois problèmes correspondants a pour objectif le calcul de l'aire desdites figures par division en triangles ou quadrilatères usuels. Les figures sont décrites avec l'indication des longueurs de chaque côté, ou des parties de côtés, celle de la hauteur, ainsi que l'aire de chaque figure découpée. De manière générale, ces problèmes sont rédigés dans un style direct avec une liste d'injonctions et se terminent systématiquement par

---

<sup>173</sup> [Ver Eecke, 1940], p. 10.

<sup>174</sup> Edition grecque des fragments, et traduction anglaise dans [Goodspeed, 1898].

<sup>175</sup> Ibid., p. 27.

<sup>176</sup> Ibid., p. 37.

le renvoi à la figure<sup>177</sup>. Les procédures ne sont pas démontrées. Examinons maintenant ces trois problèmes.

Le premier problème<sup>178</sup> s'intéresse au mesurage d'un trapèze scalène de côtés  $c_1 = 13$ ,  $c_2 = 15$ ,  $B = 16$  et  $s = 2$  que nous avons représenté ici à l'échelle :

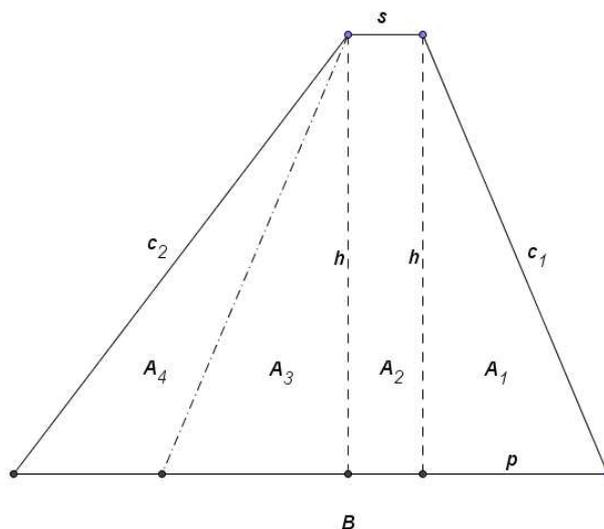


Figure 3 : Le trapèze scalène du papyrus Ayer.

La procédure débute avec la détermination de la projection  $p$  de  $c_1$  sur la base  $B$ , puis celle de la hauteur par la relation de Pythagore.

$$c_2^2 - c_1^2 \rightarrow \frac{c_2^2 - c_1^2}{B - s} \rightarrow (B - s) - \frac{c_2^2 - c_1^2}{B - s} \rightarrow \frac{1}{2} \times \left( (B - s) - \frac{c_2^2 - c_1^2}{B - s} \right) = p$$

$$c_1^2 - p^2 \rightarrow \sqrt{c_1^2 - p^2} \rightarrow h$$

Ensuite, le trapèze est découpé en quatre figures : le rectangle central  $A_2 = h \times s$ , les deux triangles rectangles  $A_1 = A_3 = \frac{1}{2} p \times h$  et le triangle obtusangle  $A_4 = \frac{1}{2} (B - (2p + s)) \times h$ .

Le second problème s'intéresse à nouveau au trapèze mais obtusangle, c'est-à-dire qu'il a un angle obtus à la base, dont la représentation suivante est à l'échelle :

<sup>177</sup> E. J. Goodspeed traduit les injonctions par des impératifs, et le renvoi aux figure par « *And the figure will be as follows* ».

<sup>178</sup> [Goodspeed, 1898], p. 31.

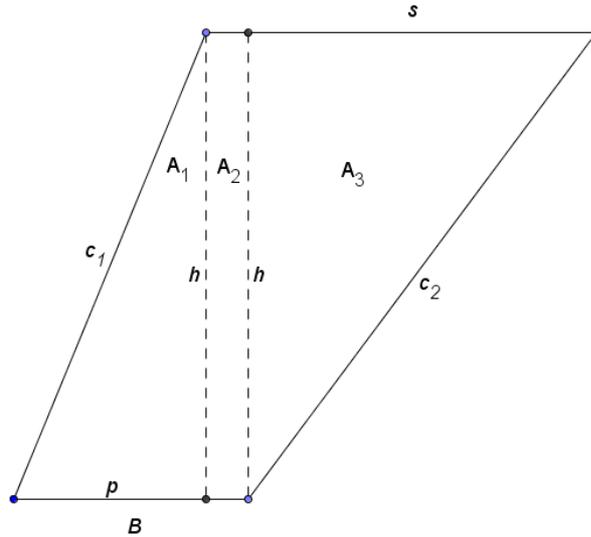


Figure 4 : Le trapèze obtusangle du papyrus Ayer.

La procédure débute, comme dans le cas précédent, avec la détermination de la projection  $p$  de  $c_1$  sur la base  $B$  en prenant en compte le fait que  $s > B$ , puis celle de la hauteur par la relation de Pythagore.

$$c_2^2 - c_1^2 \rightarrow \frac{c_2^2 - c_1^2}{s - B} \rightarrow \frac{c_2^2 - c_1^2}{s - B} - (s - B) \rightarrow \frac{1}{2} \times \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{s - B} - (s - B) \right) = p$$

Cette fois-ci, le trapèze n'est découpé qu'en trois figures : le rectangle central  $A_2 = h \times (B - p)$ , les deux triangles rectangles  $A_1 = \frac{1}{2} p \times h$  et  $A_3 = \frac{1}{2} [s - (B - p)] \times h$ .

Dans le troisième problème est proposé le mesurage d'un losange qui est considéré comme la composition de deux triangles isocèles de côtés  $c = 10$ , et de base  $B = 12$ <sup>179</sup>.

Le mesurage de ce losange consiste à déterminer la hauteur  $h$  du triangle isocèle composant le losange par la relation de Pythagore, qui sera aussi la hauteur de chacun des quatre triangles rectangles intérieurs au losange. L'aire du losange est alors le quadruple de l'aire d'un de ces triangles rectangles  $\frac{1}{2} \times h \times \frac{B}{2}$ .

<sup>179</sup> Ibid., p. 32.

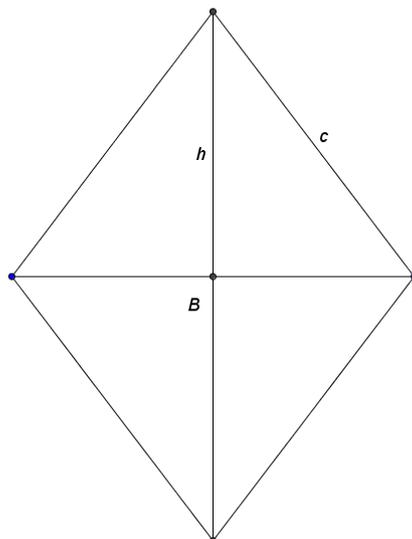


Figure 5 : Le losange du papyrus Ayer.

### ii) Autres fragments de papyri sur le mesurage.

Il y a d'abord le papyrus grec 259 de la Bibliothèque de Genève<sup>180</sup> qui pourrait dater du 2<sup>e</sup> siècle de notre ère. Il nous transmet trois problèmes de mesurage concernant le triangle rectangle. Pour chacun d'eux, il ne s'agit pas seulement pour l'auteur de déterminer la seule aire du triangle rectangle en question dont les côtés sont (3, 4, 5) pour les deux premiers et (6, 8, 10) pour le dernier. Il s'agit en fait de déterminer certaines grandeurs étant données certaines autres. Si  $d$  est l'hypoténuse du triangle rectangle,  $L$  (resp.  $l$ ) le plus grand (resp. plus petit) côté de l'angle droit :

- |             |  |
|-------------|--|
| Problème #1 | $d, L, l ?$ ou bien $d, l, L, A ?$       |
| Problème #2 | $d + L, l, d, L ?$ ou $d + l, L, d, l ?$ |
| Problème #3 | $l + L, d, l, L ?$                       |

Ces problèmes ne sont pas sans évoquer les problèmes séleucides sur le rectangle (avec  $L, l$  et  $d$  sa longueur, sa largeur et sa diagonale) de la tablette BM 34 568 par exemple et, comme nous le verrons certains problèmes de la tradition arabe d'*al-andalus*. Les procédures proposées, de nature pré-algébrique, sont alors identiques. Mais naturellement, cela ne suffit pas pour établir une filiation directe entre les deux traditions mathématiques.

<sup>180</sup> Edition grecque et traduction française dans [Rudhardt, 1978] ; analyse mathématique dans [Sesiano, 1986].

Le papyrus Vindob. Gr. Inv. 353 contient, quant à lui, deux problèmes relatifs au cercle<sup>181</sup>. Peu d'informations subsistent pour établir avec précision ces problèmes. Nous pensons néanmoins qu'il est intéressant de les mentionner pour renseigner sur les pratiques existantes en dehors des corpus de grande importance. La reconstruction du premier problème propose l'énoncé suivant : Etant donné le côté d'un carré, déterminer l'aire du cercle circonscrit<sup>182</sup>. Quand au second problème, il s'agirait de déterminer l'aire  $A$  d'un cercle à partir de sa circonférence  $p$ <sup>183</sup>. La procédure alors employée serait  $A = \frac{p \times r}{2}$  si  $r$  est le rayon du cercle.

Le papyrus Vindob. Gr. Inv. 256<sup>184</sup>, quant à lui, s'intéresse à un problème que nous avons déjà rencontré chez Diophane. Il s'agit de calculer l'espace compris entre quatre cercles tangents de même diamètre.

Deux autres papyri témoignent d'un type de problèmes de mesurage du rectangle liés aux unités de mesures de longueur et de surface : le SB 6951 de la bibliothèque de Gand<sup>185</sup>, et le P. Mich. 4966 de l'université du Michigan<sup>186</sup>. En effet, dans ces deux documents se retrouve le problème : étant donnée la longueur (resp. la largeur) d'un rectangle, quelle doit être la largeur (resp. la longueur) pour que son aire ait telle valeur<sup>187</sup>. L'intérêt de ce type de problème ne réside pas tant dans la procédure de calcul de l'aire plutôt que dans les conversions d'unités nécessaires.

Il y a enfin le papyrus Heid. Inv. G30 d'Heidelberg<sup>188</sup>. Il est classé parmi les témoins grecs des pratiques d'arpentage. Le problème présent sur ce papyrus illustre la procédure dite des arpenteurs déjà vue dans la tradition babylonienne. En effet, il s'agit de mesurer une parcelle quadrangulaire de dimensions connues (ou mesurées) : son aire est alors obtenue par le produit des moyennes des côtés opposés.

---

<sup>181</sup> [Bruins, Sijpesteijn, et al., 1977]

<sup>182</sup> Ibid., p. 106.

<sup>183</sup> Ibid., p. 108-109.

<sup>184</sup> Ibid., p. 110-111.

<sup>185</sup> [Shelton, 1981]

<sup>186</sup> [Robbins, 1934]

<sup>187</sup> [Shelton, 1981], p. 93 ; [Robbins, 1934], p. 102.

<sup>188</sup> [Shelton, 1981]

## **B) Les pratiques de découpage dans les mathématiques grecques.**

Dans cette partie, nous ne considérons pas le découpage comme étape du calcul de l'aire d'une figure plane ou d'un volume d'un solide, ce que nous avons déjà présenté dans la partie précédente.

Intéressons-nous donc aux deux témoins majeurs de la problématique générale du découpage des figures : Euclide et Héron.

### **1) Sur les divisions d'Euclide.**

Comme cela a été dit dans notre introduction générale, le contenu de cet ouvrage nous est connu par deux sources essentielles : le témoignage de Proclus (5<sup>e</sup> s.) dans son *Commentaire au Livre I des Eléments d'Euclide*, et la version arabe partielle d'as-Sijzī.

Reprenons d'abord les deux affirmations de Proclus à propos du livre d'Euclide. D'abord, à propos de l'œuvre du mathématicien grec, il dit :

*« Il existe encore de cet homme beaucoup d'autres ouvrages mathématiques, pleins d'une étonnante exactitude et d'une savante spéculation tels que ses Optiques, ses Catoptriques, ses Eléments de musique et, en outre, son livre Sur les Divisions<sup>189</sup>. »*

À partir de cette citation, l'ouvrage *Sur les Divisions* est décrit comme un texte composé sur le même modèle hypothético-déductif que les autres œuvres euclidiennes.

Proclus revient ensuite sur cet ouvrage pour nous donner indirectement une information quant à son contenu lorsqu'il tente de définir le « concept de la figure ». Il précise :

*« (...) le concept de la figure se complète par celui d'une totalité qui se décompose en parties non similaires ; et c'est pourquoi Euclide attribue aussi le concept de totalité à chacune des formes, et que chacune des figures est découpée en diverses espèces. En effet,*

---

<sup>189</sup> [Proclus de Lycie, 1948], p. 62.

*le cercle et chacune des figures rectilignes sont divisibles en figures conceptuellement dissimilaires ; et c'est ce dont l'Auteur des Eléments s'est occupé lui-même dans Les divisions lorsqu'il a divisé les figures données en figures tant similaires que dissimilaires*<sup>190</sup>. »

Ainsi, diviser un triangle en triangles produirait une division en « *figures similaires* ». Mais, diviser ce même triangle en un quadrilatère et un triangle serait une division en « *figures dissimilaires* ».

Nous apprenons donc davantage ici sur le contenu du texte d'Euclide aujourd'hui perdu dans sa version grecque. Par ailleurs, il est à noter que Proclus ne mentionne pas les figures solides. Son silence laisserait entendre qu'Euclide ne se serait intéressé qu'aux figures planes.

Venons-en à l'épitomé rédigé au 10<sup>e</sup> siècle par as-Sijzī, qui se rapporte explicitement au *Kitāb Uqlīdis fī al-qismat* [Livre d'Euclide sur les divisions]<sup>191</sup>. Il correspond, dans une certaine mesure, à la description de Proclus. Cette contribution serait une traduction arabe partielle du texte grec *Sur les divisions*.

Le géomètre persan donne les énoncés de trente-cinq propositions dont quatre seulement sont démontrées<sup>192</sup>, les autres ayant été jugées *faciles* par as-Sijzī<sup>193</sup>.

À partir des affirmations de Proclus et de la contribution d'as-Sijzī, plusieurs éléments sur le traité euclidien peuvent être avancés.

Les problèmes consistent à diviser une figure donnée par une ou plusieurs transversales soumises à des contraintes pour que les aires partielles répondent à un rapport donné. Ces problèmes sont formellement proches de ceux rencontrés dans la tradition babylonienne pour les triangles et les trapèzes. Mais leur résolution est différente de celles des scribes mésopotamiens. En effet, la méthode euclidienne est géométrique, vraisemblablement fondée sur les *Eléments* et la manipulation des rapports de grandeurs, alors que les procédures babyloniennes sont exclusivement guidées par une approche numérique.

---

<sup>190</sup> [Proclus de Lycie, 1948], p. 129.

<sup>191</sup> [Hogendijk, 1993], p. 149.

<sup>192</sup> Nous prenons en compte la classification de l'édition et de la traduction anglaise de J.P. Hogendijk, qui seront nos références ; [Hogendijk, 1993]. La classification de F. Woepcke comprend, quant à elle, trente-six propositions ; [Woepcke, 1851], p.233-244.

<sup>193</sup> [Hogendijk, 1993], p. 159.

Cette dernière remarque nous amène à signaler que l'existence même de *Sur les divisions* montre que la tradition grecque dite savante, avec Euclide comme représentant, ne se préoccupe pas uniquement de problématiques spéculatives. En effet, il faut noter que cet ouvrage part de préoccupations géométriques pratiques (voire calculatoires) pour en donner un traitement savant dans un cadre classique.

Héron d'Alexandrie a montré dans les deux premiers livres de ses *Metrica* qu'il s'intéressait particulièrement aux questions de mesurage. Il n'est donc pas surprenant qu'il se soit aussi intéressé au problème du découpage des figures.

## 2) La division des figures dans le Livre III des *Metrica*.

Après avoir traité du mesurage de figures planes et solides dans les deux premiers livres des *Metrica*, Héron expose dix-huit problèmes de division des figures planes (triangles, quadrilatères, polygones, cercle) et cinq problèmes de divisions de solides (sphère, pyramides, troncs de pyramide et de cône) qui se retrouvent globalement à la fin du livre<sup>194</sup>.

Dans sa courte préface, Héron explique en quoi la division des terrains fait l'écho d'une question plus large sur le juste partage et le mérite. C'est pourquoi il désire répondre aux divers problèmes de divisions à l'aide de la géométrie qui, selon lui, est la seule discipline capable de formuler des solutions à l'aide de démonstrations irréfutables :

« Si, cependant, on voulait diviser les domaines selon un rapport donné, de sorte que, pour ainsi dire, pas un seul grain de millet de la répartition proportionnelle ne dépasse, ni ne manque du rapport donné, il faudrait faire usage de la seule géométrie (...) »<sup>195</sup>

Pour atteindre le but fixé dans sa préface, Héron propose une construction de la (ou des) transversale(s) qu'il démontre. Il s'appuie implicitement sur des propositions des livres I, V et VI des *Eléments* d'Euclide en particulier et sur *Les Données*. Il est amené à distinguer deux groupes de problèmes.

---

<sup>194</sup> Nous mettons de côté, pour notre étude, la division des figures solides qui est marginale dans la tradition médiévale.

<sup>195</sup> Traduction française de B. Vitrac.

Les neuf premiers sont « numériques », c'est-à-dire qu'il est possible de les traiter à l'aide de nombres. Héron ne s'en prive pas et le traitement numérique est utilisé pour la synthèse mathématique du problème. L'analyse est, quant à elle, menée à l'aide d'un raisonnement géométrique sur les grandeurs et les rapports.

Le second groupe de problèmes (les quatorze derniers) est exclusivement géométrique. Aucun d'entre eux n'est exprimé numériquement, aucune grandeur n'est donnée.

Les problèmes proposés sont majoritairement des divisions en deux parties selon un rapport donné. La transversale est alors le plus souvent définie avec la donnée du point par lequel elle doit passer. Ce point peut être soit un sommet, soit situé sur un côté ou à l'extérieur de la figure. En outre, la contrainte sur la transversale peut être le parallélisme par rapport à un des côtés de la figure. Un seul problème propose de diviser un cercle à l'aide d'un autre cercle, et non pas une droite, afin que les deux parties soient dans un rapport donné, à savoir celui de 3 à 5.

Seuls deux problèmes résolvent la division en trois parties égales. Dans le cas d'un cercle, il est demandé de construire deux transversales sans contrainte supplémentaire. Pour un triangle, Héron propose de le diviser en trois triangles égaux à l'aide de trois droites concourantes à l'intérieur du triangle.

Signalons enfin que certains problèmes du Livre III des *Metrica* sont comparables à ceux de la version arabe du texte d'Euclide.

<i>Sur les divisions</i> d'Euclide <sup>196</sup>	Les <i>Metrica</i> de Héron d'Alexandrie <sup>197</sup>
#8	III. #5-#6
#26	III. #10
#28	III. #18
#29	III. #2
#31	III. #7
#35	III. #8-#11-#13

---

<sup>196</sup> Numération des problèmes de l'édition de [Hogendijk, 1993].

<sup>197</sup> Numération des problèmes de l'édition de [Héron, 1899-1914], vol. III.

# Chapitre trois

## La géométrie du mesurage et du découpage dans la littérature latine de l'Antiquité tardive.

La description des connaissances géométriques disponibles en latin dans l'Antiquité tardive prend appui sur l'ensemble des productions du territoire de langue et de culture latine. Celui-ci correspond *grosso modo* à l'Empire romain d'Occident du 5<sup>e</sup> siècle. Cet empire est vaste avec des régions réparties entre la péninsule ibérique et l'est du bassin méditerranéen d'Ouest en Est, et entre l'actuelle Angleterre et le nord de l'Afrique du Nord au Sud (*cf.* Fig. 1).

Comme en Mésopotamie ou en Egypte, l'administration disposait de quelques moyens pour mesurer des superficies. Les éléments de ce savoir géométrique se trouvent dans les livres de la littérature agricole et juridique liés à l'arpentage et au mesurage des champs. Après avoir établi une synthèse des procédures présentées par les divers auteurs, nous tenterons d'éclairer le rôle de ce savoir dans le monde latin à la veille de la réception de la science arabe.

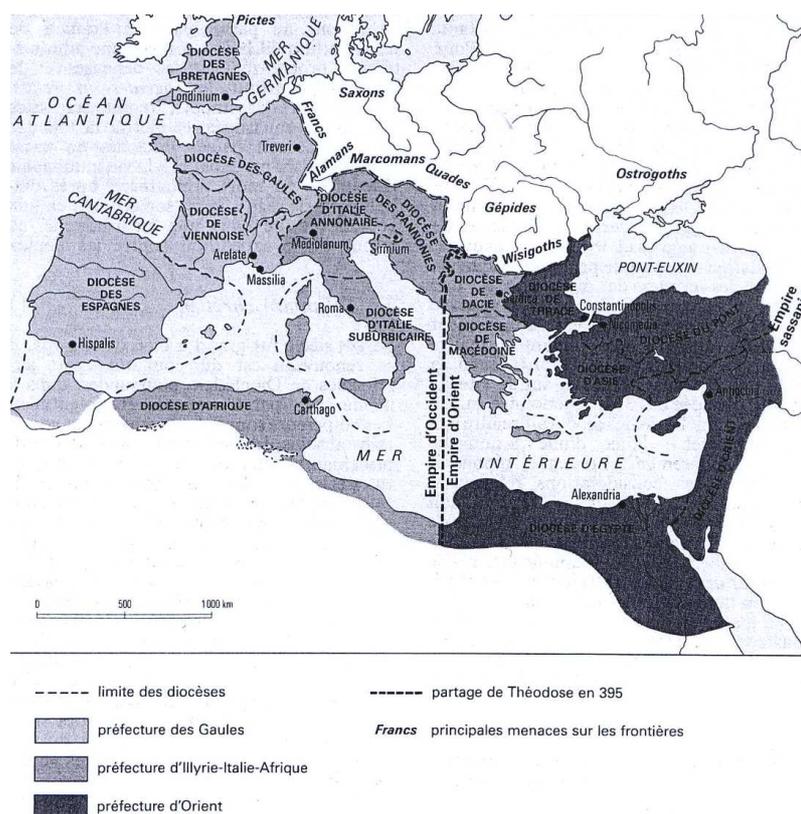


Figure 6. L'Empire romain à la fin du 4<sup>e</sup> s. ap. J.C.

### A) Une source éventuelle : Le *De re rustica* de Columelle.

Columelle, du 1<sup>er</sup> s. de notre ère, n'appartient pas à l'Antiquité tardive. Pour autant, nous le plaçons au début de ce chapitre comme source éventuelle des traités postérieurs que nous présenterons dans la suite.

Originaire de Cadix, il consacre les deux premiers chapitres du livre 5 de son *De re rustica* [De l'agriculture] au mesurage mathématique des champs<sup>198</sup>. En effet, le premier paragraphe intitulé « *Comment tu dois mesurer les formes données aux champs*<sup>199</sup> » est l'occasion d'introduire le travail géométrique qu'il se propose d'exposer pour compléter son ouvrage utile aux agriculteurs.

<sup>198</sup> Notre référence sera l'édition de 1533 ; [Varron, 1533], fol. 111r-114v. Signalons néanmoins une autre édition accompagnée d'une traduction française qui ne nous satisfait pas ; [Columelle, 1844-1845], vol.2, p. 6-21. Enfin, dans *Opera agricularum* [Les ouvrages des agriculteurs] de 1504, l'éditeur a réorganisé le texte de Columelle ; les paragraphes qui nous intéressent sont regroupés dans le premier chapitre du Livre 6 ; [Columelle, Varron, et al., 1504], fol. 68r-71r.

<sup>199</sup> « *Quemadmodum datas formas agrorum metiri debeas* » ; [Varron, 1533], fol. 111r.

Columelle fait, lui-même, la distinction entre les tâches qui relèvent soit de l'agriculture soit de la géométrie<sup>200</sup> en désignant alors les arpenteurs et non les agriculteurs comme responsables des mesures<sup>201</sup>. À son avis, il est indispensable<sup>202</sup> de présenter les unités de mesure utilisées pour le mesurage des champs. Il expose alors ses connaissances sur les principales unités utilisées dans le sud de l'Espagne et en Gaule<sup>203</sup> en partant de l'unité de surface *iugerum* [jugère]. Enfin, il regrette que le calcul des champs ne soit pas toujours facile à cause de leur forme. Il amène donc naturellement le second paragraphe « *à propos des formes variées des champs et de leurs mesurages*<sup>204</sup> » dans lequel il étudie les figures géométriques susceptibles d'être rencontrées en agriculture.

Columelle se livre à un exposé très didactique avec un énoncé général suivi d'un traitement numérique. Certaines éditions présentent des figures illustrant ses propos mais nous ne savons pas si ces figures sont présentes dans le travail originel. Nous résumons maintenant, sous la forme du tableau suivant, les résultats de Columelle concernant ces diverses figures.

algorithme <sup>205</sup>	transcription littérale moderne
<Problème 1> Mesurer l'aire d'un terrain carré de côté donné $c = 100$ .	
Deux côtés sont multipliés par eux-mêmes.	$c \times c$
<Problème 2> Mesurer l'aire d'un terrain « dont la longueur $L = 240$ est plus grande que la largeur $l = 120$ <sup>206</sup> »	
Tu multiplieras de cette manière la largeur par la longueur.	$l \times L$
<Problème 3> Mesurer l'aire d'un terrain « en forme de coin <sup>207</sup> » de côtés donnés $a = 10$ , $b = 100$ , $c = 20$ tels que $a$ et $c$ sont les côtés opposés inégaux et $b$ le côté restant.	

<sup>200</sup> Ibid., fol. 111v, ligne 6-8.

<sup>201</sup> Ibid., fol. 111r, ligne 33-35.

<sup>202</sup> Ibid., fol. 111v, ligne 30-31.

<sup>203</sup> Ibid., fol. 111v, ligne 16-18

<sup>204</sup> « *De variis agrorum formis et eorum dimensionibus* », Ibid., fol. 112r.

<sup>205</sup> Le texte que nous présentons est une adaptation de l'algorithme de calcul – hors du contexte numérique et des unités de mesure – à partir d'une traduction personnelle ; Ibid. fol. 112r-114v.

<sup>206</sup> « *Similiter que fiet de omnibus agris, quorum longitudo maior fit latitudine.* » ; Ibid., fol. 112v, ligne 6.

<sup>207</sup> « *Si autem cuneatus ager fuerit, (...)* » ; Ibid., fol. 112v, ligne 7. Dans la tradition babylonienne, la figure « en forme de coin » renvoie au triangle ; [Thureau-Dangin, 1938], p. xvii. Dans le texte de Columelle, cette figure renverrait au trapèze isocèle comme le suggère l'illustration dans l'édition de 1533 ; [Varron, 1533], fol. 113r. De façon plus générale, celle-ci pourrait désigner tout quadrilatère dont deux côtés seraient égaux.

Nous ferons la somme des deux latitudes <sup>208</sup> dont [nous prendrons] la moitié. En la multipliant par la longueur, nous produirons [la surface].	$\frac{a+c}{2} \times b$
<b>&lt;Problème 4&gt;</b> Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un « triangle à trois côtés égaux <sup>209</sup> » de côté donné $c = 300$ .	
Tu multiplieras le côté par lui-même. Tu prendras le tiers. De la même façon, tu prendras le dixième. Tu assembleras la somme de l'un et l'autre.	$(c \times c) \times \frac{1}{3} + (c \times c) \times \frac{1}{10}$
<b>&lt;Problème 5&gt;</b> Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un « triangle à côtés inégaux ayant un angle droit <sup>210</sup> » dont les côtés de l'angle droit sont donnés $a = 50, b = 100$ .	
Tu multiplieras les deux côtés de l'angle droit. Tu donnes la moitié de ce résultat.	$(a \times b) \times \frac{1}{2}$
<b>&lt;Problème 6&gt;</b> Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un cercle <sup>211</sup> de diamètre donné $d = 70$	
Tu multiplieras le diamètre par lui-même. Tu multiplieras ce résultat onze fois. J'enlève <sup>212</sup> naturellement le quatorzième du résultat.	$[(d \times d) \times 11] \frac{1}{14}$
<b>&lt;Problème 7&gt;</b> Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un demi-cercle <sup>213</sup> de diamètre donné $d = 140$ et de flèche donnée $f = 70$ .	
Il sera nécessaire de multiplier la latitude avec la base. Ceci est multiplié par onze. Le quatorzième de ce résultat est [la surface].	$[(d \times f) \times 11] \frac{1}{14}$
<b>&lt;Problème 8&gt;</b> Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un arc [de cercle] plus petit qu'un demi-cercle <sup>214</sup> de corde $c = 16$ et de flèche $f = 4$ données.	

<sup>208</sup> Le terme latin *latitudo*, *inis* ici utilisé renvoie aux deux bases (ou bien aux deux côtés non égaux) du trapèze.

<sup>209</sup> « *At si tribus paribus lateribus triquetrum metiri debueris, (...)* » ; [Varron, 1533], fol. 113r, ligne 1.

<sup>210</sup> « *Sed si triangulus disparibus fuerit lateribus ager, (...), quae habet rectumangulum (...)* » ; Ibid., fol. 113r, ligne 1-2.

<sup>211</sup> « *Si rotundus ager erit, ut circuli speciem habeat (...)* » ; Ibid., fol. 113v, ligne 1.

<sup>212</sup> « *Huius summae quartamdecimam subduco ...* » ; Ibid., fol. 113v, ligne 5.

<sup>213</sup> « *Si semicirculus fuerit ager, (...)* » ; Ibid., fol. 113v, ligne 9.

<sup>214</sup> « *Si autem minus quam semicirculus erit, arcum sic metiemur.* » ; Ibid., fol. 114r, ligne 1.

<p>Je pose la latitude avec la base<sup>215</sup>. Je le multiplie quatre fois. [Je prends] leur moitié. De la même façon, la moitié de la base est multipliée par elle-même. Je prends le quatorzième. Chacune des sommes [ensemble] font [la surface].</p>	$[(c + f) \times 4] \times \frac{1}{2} + \left(\frac{c}{2}\right) \times \left(\frac{c}{2}\right) \times \frac{1}{14}$
<p>&lt;Problème 9&gt; Mesurer l'aire d'un terrain à la forme d'un hexagone régulier<sup>216</sup> de côté donné <math>c = 30</math>.</p>	
<p>Je multiplie un côté par lui-même. Je détermine le tiers [plus] le dixième du résultat. Ceci est multiplié par six puisqu'il y a six côtés.</p>	$\left[\frac{1}{3}c \times c + \frac{1}{10}c \times c\right] \times 6$ , si $c$ est le côté de l'hexagone.

Seuls trois algorithmes de calcul (pour le carré, le rectangle et le triangle rectangle) sont exacts, les autres ne donnent qu'une valeur approchée de la surface à mesurer. Le tableau suivant présente le calcul des erreurs sur les trois figures de base :

figure concernée	mesure donnée	mesure calculée (arrondie à l'unité par défaut)	erreur commise (arrondie à l'unité par excès)
		(en pieds carrés)	
figure « en forme de coin »	1 500	1 498	+ 2
triangle équilatéral	39 000	38 971	+ 29
cercle	3 850	3 848	+ 2

L'erreur commise dans les exemples présentés par Columelle dont les dimensions sont probablement caractéristiques des terrains usuels des formes considérées, est moindre voire négligeable. En effet, dans le pire des cas, celui du triangle équilatéral, l'erreur est moins qu'un demi-scrupule<sup>217</sup> qui est donnée comme la plus petite unité nécessaire à l'« estimation des travaux effectués » au-dessous de laquelle « aucune rétribution ne dépend »<sup>218</sup>.

<sup>215</sup> Le terme latin *basis*, *is* ici utilisé renvoie à la corde d'un arc de cercle. Dans le cas du demi-cercle, il s'agit simplement du diamètre du cercle initial.

<sup>216</sup> « Si fuerit sex angulorum (...) Esto hexagonum quoquoersus lineis pedum xxx. » ; [Varron, 1533], fol. 114r, ligne 10-11.

<sup>217</sup> 1 jugère = 576 demi-scrupules = 288 scrupules = 28 800 pieds carrés ; Ibid., fol. 111v, ligne 34-37.

<sup>218</sup> « Iugeri partes non omnes posuimus, sed eas, quae cadunt in aestimationem facti operis, nam minores persequi supervacuum fuit, pro quibus nulla merces dependitur. » ; Ibid., fol. 111v, ligne 31-34.

De plus, le calcul de Columelle majore toujours la valeur réelle. La justification est communément admise en relation avec l'administration fiscale et le paiement de l'impôt sur les terres des propriétaires fermiers<sup>219</sup>.

Ces calculs montreraient deux éléments particulièrement importants quant à la connaissance pratique et théorique de Columelle. D'abord, la perpendiculaire poserait problème et donc la notion même de hauteur. Il n'utilise jamais la terminologie correspondante. Ensuite, en lien avec la première remarque, Columelle ne semble pas connaître l'utilisation du « théorème de Pythagore » ou tout au moins, il ne l'utilise pas directement<sup>220</sup>. Par conséquent, les seules figures correctement traitées sont les seules pour lesquelles l'angle droit est présent à l'origine et ne nécessite pas un nouveau tracé effectif et une nouvelle mesure. Précisons néanmoins que la question de la connaissance du « théorème de Pythagore » est délicate. En effet, les procédures pour le triangle équilatéral et l'hexagone régulier font apparaître le coefficient  $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}$  qui se retrouve chez Diophane ou dans le corpus pseudo-héronien. Diophane l'attribue à Archimède qui connaissait la relation dite « de Pythagore ».

Par exemple, pour la figure « en forme de coin », Columelle assimile la longueur des côtés égaux à ce qui devrait être la hauteur de quadrilatère. Il arrive alors à une formule approximative qui n'est pas sans rappeler la « formule des arpenteurs » relatives aux trapèzes dans la tradition mathématique babylonienne mais aussi dans l'Égypte Ptolémaïque<sup>221</sup>.

Ainsi que le fait remarquer J.-Y. Guillaumin<sup>222</sup>, ces paragraphes du *De re rustica* de Columelle auraient pu appartenir à un recueil plus important regroupant des textes d'arpentage du monde romain. A notre connaissance, aucune étude ne s'est encore attachée à établir les éventuelles relations entre Columelle et ce corpus plus général.

### **B) L'héritage romain : les *agrimensores* et leur corpus.**

S'intéresser aux géométries pratiquées et enseignées dans l'Empire romain impose une étude de la pratique de l'arpentage des champs. Notre désir n'est pas ici de faire un exposé sur

---

<sup>219</sup> [Dilke, 1995], p. 59.

<sup>220</sup> Ibid., p. 62.

<sup>221</sup> [Høyrup, 2002], p. 230 ; [Peet, 1923], p. 93.

<sup>222</sup> [Guillaumin, 2005], note 3, p. 4.

l'arpentage romain avec un historique détaillé de ses institutions<sup>223</sup>, de ses acteurs<sup>224</sup> avec une présentation de ses instruments<sup>225</sup>... mais, il nous semble important de rappeler quelques éléments de cette tradition pour éclairer la lecture des textes de ces premières géométries latines, ne serait-ce que pour fixer le vocabulaire relatif à celles-ci.

Après une brève description des acteurs de l'arpentage romain, nous présenterons l'ensemble des textes disponibles ainsi que les informations que nous avons sur leurs auteurs. Enfin, nous tenterons de décrire les deux premières étapes du travail de l'arpenteur : le mesurage et le découpage. La dernière étape relève davantage d'un travail matériel et en ce sens, nous verrons qu'elle ne nous intéresse pas directement<sup>226</sup>. Mais, en ce qui concerne le mesurage, nous avons isolé quelques textes qui, selon nous, méritent une présentation détaillée des démarches proposées.

### **1) Les arpenteurs romains ou *agrimensores*.**

Le terme *agrimensores* qui désigne littéralement les « mesureurs de champs » porte en lui une signification bien plus importante. Il rend compte d'une importante technicité et d'une fine théorisation qui, semble-t-il, ne trouve pas d'équivalent dans l'antiquité<sup>227</sup>.

L'activité professionnelle des *agrimensores* est liée aux applications pratiques des instructions juridiques<sup>228</sup>. En effet, les arpenteurs romains sont non seulement chargés de mesurer et de délimiter la terre avec logique et précision<sup>229</sup>, mais ils endossent aussi un rôle d'arbitre et d'expert lors de litiges liés au bornage et aux limites des champs. Enfin, pour certains d'entre eux, ils enseignent aussi les connaissances et les techniques liées à la mesure de la terre. Leur travail devient indispensable au fur et à mesure que l'Empire romain se développe, et naturellement leurs fonctions dans la vie sociale s'accroissent<sup>230</sup>. Concernant le rapport à la loi, mentionnons simplement que l'arpenteur n'a *a priori* à dominer que deux domaines du droit romain : le recueil des lois sur la classification des terres, et celui sur le

---

<sup>223</sup> [Hinrichs et Minary, 1989]

<sup>224</sup> [Chouquer et Favory, 1992]

<sup>225</sup> [Dilke, 1995], p. 75-88.

<sup>226</sup> Voir, par exemple, [Chouquer et Favory, 1992], p. 91-100.

<sup>227</sup> [Guillaumin, 2005], p. 3.

<sup>228</sup> [Pikulska, 2004], p. 207 ; [Hinrichs et Minary, 1989], p. 87-92.

<sup>229</sup> [Dilke, 1995], p. 25.

<sup>230</sup> Ibid., p. 26 ; [Pikulska, 2004], p. 212-3.

bornage et les litiges inhérents. Les lois sur l'héritage ou sur les procédures de restitution, par exemple, se rattachent indirectement aux deux domaines précédents<sup>231</sup>.

Attachons-nous précisément à la mesure de la terre en nous dégageant dorénavant de toutes considérations juridiques qui ne seraient pas directement liées à notre sujet. En ce qui concerne l'arpentage de la terre, la tâche est multiple et peut être décomposée en trois étapes. Après avoir mesuré la terre en question, l'*agrimensor* doit « découper » la terre pour enfin la borner en traçant effectivement ses limites.

### **2) Les textes « gromatiques » latins ou le *Corpus agrimensorum*.**

Les sources qui nous renseignent sur l'arpentage romain sont peu nombreuses et réunies sous ce que l'on appelle le *Corpus Agrimensorum*. Recueil de textes entiers ou fragmentaires d'auteurs divers, ce groupe hétéroclite traite néanmoins du même sujet : l'arpentage des terres de l'empire romain. Constitué au fil des siècles, il est difficile à dater. Néanmoins, les textes les plus importants semblent avoir été rédigés à partir de la fin du 1<sup>er</sup> siècle de notre ère<sup>232</sup>. Les derniers ajouts auraient été composés aux alentours du 5<sup>e</sup> siècle<sup>233</sup>.

Ces textes ne sont pas novateurs et ainsi, ils ne peuvent pas être considérés dans l'optique d'une quelconque production de savoirs<sup>234</sup>. Il s'agit plutôt de synthèses de pratiques et d'acquis anciens<sup>235</sup>. Ils se présentent sous la forme de manuels d'enseignement avec de nombreuses illustrations qui, pour la plupart, sont assez bien conservées<sup>236</sup> et où s'unissent art gromatique et géométrie mathématique. L'art gromatique, d'une part, est caractéristique des techniques d'arpentage romain avec l'utilisation d'instruments et notamment la *groma* essentiellement conçue pour tracer des alignements et prendre des angles droits. La géométrie, d'autre part, que nous qualifions de scientifique pour marquer un degré de théorisation dépassant la « simple » technicité des instruments est présente implicitement et même explicitement dans certains manuels que nous présenterons par la suite. Nous pouvons ainsi donner une description partielle de la formation intellectuelle des arpenteurs.

---

<sup>231</sup> [Dilke, 1995], p. 70-73.

<sup>232</sup> [Guillaumin, 2006], p. 46.

<sup>233</sup> [Dilke, 1995], p. 141 ; [Pikulska, 2004], p. 206.

<sup>234</sup> [Guillaumin, 2006], p. 45.

<sup>235</sup> Certaines de ces pratiques remontent aux premières colonies romaines des années 300 avant J.C. ; Ibid., p. 46.

<sup>236</sup> [Dilke, 1995], p. 141.

### 3) Le découpage dans les traités gromatiques.

Dans le *Corpus agrimensorum*, le découpage des terres occupe une place importante. Nous devons alors préciser le sens dans lequel nous devons entendre cette pratique dans l'Empire romain. Le découpage tel que les *agrimensores* le traitent est caractéristique d'une pratique exclusivement liée à l'établissement des cadastres.

Il est principalement lié à deux missions de l'arpenteur romain : la première est le mesurage des terres de formes irrégulières, et la seconde est la division de la terre par centuriation. C'est probablement à partir des seuls traités gromatiques de Frontin<sup>237</sup> et de Marcus Junius Nipsus<sup>238</sup> que nous avons pu décrire la manière de mesurer la superficie des terres dont les limites sont des courbes irrégulières<sup>239</sup>. D'abord, ces terres sont découpées en une figure inscrite régulière facile à mesurer – idéalement le rectangle – la plus grande possible en laissant sur les bords de petites surfaces irrégulières à leur tour. Des perpendiculaires aux côtés de la figure centrale seront tracées à partir de chaque angle de la frontière irrégulière. Les petites surfaces restantes seront ainsi découpées en une succession de petits triangles rectangles et de trapèzes dont les surfaces viendront s'ajouter à celle de la figure centrale. Aucun traitement mathématique de mesurage de longueur ou de surface n'accompagne, dans les documents que nous avons, ces découpages.

La centuriation, exposée en détail dans le traité d'Hygin le Gromatique<sup>240</sup>, dérive étymologiquement des *centuries* – petits carrés de base – qui recouvrent les terres de l'empire. Cette pratique implique donc un découpage orthonormé des territoires à partir du tracé de deux perpendiculaires et de parallèles à ces dernières. Là encore, aucune géométrie mathématique n'est effectivement présente dans les textes gromatiques auxquels nous avons eu accès.

### 4) Le mesurage dans les traités gromatiques.

Le paragraphe précédent montre le lien étroit qui existe entre le découpage de la terre et son mesurage dans leur sens le plus général. Parmi les nombreux traités<sup>241</sup> regroupés dans le *Corpus Agrimensorum*, nous n'en avons repéré que deux qui traitent explicitement de mesurage de surfaces planes par le biais d'un exposé pseudo-théorique lié à une série de

---

<sup>237</sup> [Guillaumin, 2005]

<sup>238</sup> [Bouma, 1993]

<sup>239</sup> [Hinrichs et Minary, 1989], p. 104.

<sup>240</sup> [Guillaumin, 2005]

<sup>241</sup> [Blume, Lachmann, et al., 1848]; [Thulin, 1913]; [Dilke, 1995], p. 251-4.

problèmes d'arpentage. Chacun est accompagné de figures géométriques. Précisons que nous entendons ici le terme arpentage dans son implication au sein d'une géométrie mathématique et non dans un sens lié au bornage de terres par exemple<sup>242</sup>. Nous présenterons aussi un troisième texte qui nous semble avoir sa place dans notre recension si l'on veut comprendre le développement de la géométrie dans le Moyen-Âge latin.

### a) Deux traités de Marcus Junius Nipsus.

La géométrie du mesurage est représentée dans les trois travaux concis et en partie incomplets – *Fluminis variatio*, *Limitis repositio* – attribués à Marcus Junius Nipsus<sup>243</sup> dont la biographie nous est pratiquement inconnue. Ces deux traités sont accompagnés de figures géométriques. Le premier d'entre eux, le *Fluminis variatio*<sup>244</sup> [Le changement dans le lit d'un fleuve], s'intéresse exclusivement au calcul de la largeur d'une rivière dans le cas où celle-ci se trouve dans un terrain à mesurer. Quant au *Limitis repositio*<sup>245</sup> [Le rétablissement des frontières], il expose principalement le bornage des terrains, et leurs découpages en utilisant la *groma*.

### b) Le *Podismus*.

Ce texte<sup>246</sup>, dont le titre montre qu'il pourrait dériver d'un modèle grec, est un texte de mesurage qui, de toute évidence, peut être considéré comme un texte de géométrie mathématique. En donnant des éléments mathématiques nécessaires aux mesurages de figures planes, il contribue à la formation technique des arpenteurs, mais aussi aux formations théorique, intellectuelle et géométrique.

Le texte qui subsiste aujourd'hui n'est qu'une version tronquée de l'original. L'auteur<sup>247</sup> commence par rappeler qu'il existe trois types de mesurage : linéaire, plan et solide<sup>248</sup> ainsi que trois types d'angles : droit, aigu et obtus<sup>249</sup>.

---

<sup>242</sup> Les extraits de Dolabella, par exemple, sont présentés comme un recueil de problèmes d'arpentage ; [Dilke, 1995] ; p. 252. Après vérification de l'édition, il se trouve que cette description est correcte mais pas au sens de l'arpentage strictement agricole ; [Favory, Gonzales, et al., 1994] ; [Favory, Gonzales, et al., 1995].

<sup>243</sup> [Bouma, 1993], p. 16.

<sup>244</sup> Edition, traduction et commentaires dans Ibid.

<sup>245</sup> Edition, traduction et commentaires dans Ibid.

<sup>246</sup> Edition dans [Blume, Lachmann, et al., 1848], vol. 1, p. 295-301 et vol. 2, p. 28-29 ; dans [Bubnov, 1899] ; édition et traduction française dans [Guillaumin, 1996] que nous choisissons comme édition de référence.

<sup>247</sup> Nous considérerons le *Podismus* d'auteur anonyme en suivant les arguments de J.-Y. Guillaumin et de N. Bubnov avant lui ; [Guillaumin, 1996], p. 93-94 ; [Bubnov, 1899], p. 428.

<sup>248</sup> « *Mensurarum genera sunt tria : rectum, planum solidum (...)* », [Guillaumin, 1996], p. 120.

<sup>249</sup> « *Angulorum genera sunt tria : rectus, acutus, hebes (...)* », Ibid., p. 120.

Enfin, une série de huit problèmes sur le triangle est proposée avec comme objectif soit le calcul d'aire, soit le calcul de longueurs manquantes en fonction de celles données, à l'exception de deux problèmes qui traitent des relations entre les côtés de triangles rectangles à partir du triplet (3, 4, 5)<sup>250</sup>.

algorithme <sup>251</sup>	transcription littérale moderne
<p><b>&lt;Problème 1&gt;</b> Dans un triangle obtusangle connaissant la longueur des trois côtés (<math>a = 17</math>, <math>b = 10</math>, <math>c = 9</math>), déterminer le prolongement<sup>252</sup> <math>e</math> de la base sur laquelle tombe la hauteur et la hauteur <math>h</math>.</p>	
<p>Du plus grand côté multiplié par lui-même, tu retrancheras les deux petites longueurs multipliées l'une et l'autre par elle-même. Tu prendras la moitié, divisée par la base. Ce sera le prolongement sur lequel la hauteur tombe.</p> <p>Si tu veux la hauteur, tu enlèveras du plus petit côté multiplié par lui-même le prolongement multiplié par lui-même. Tu prendras le côté du reste, ce sera la longueur de la hauteur.</p>	$e = \frac{a \times a - (b \times b + c \times c)}{2} / c$ $h = \sqrt{b \times b - e \times e}$
<p><b>&lt;Problème 2&gt;</b> Dans un triangle rectangle, connaissant la longueur de l'hypoténuse <math>c</math> (<math>c = 25</math>), l'aire <math>A</math> (<math>A = 150</math>), déterminer la base <math>b</math> et la hauteur<sup>253</sup> <math>h</math>.</p>	
<p>Je multiplie toujours l'hypoténuse par lui-même. A ce résultat tu ajouteras quatre aires. (...) Je prends le côté de ce [résultat, ce qui sera les deux côtés formant l'angle droit ajoutés]. Ensuite, pour trouver la différence entre les deux côtés [formant l'angle droit], tu multiplieras la longueur de l'hypoténuse entre elle. De cela, j'enlève quatre aires, et [je prends le côté du reste] et ce sera la différence que je colle aux deux [côtés de l'angle droit] joints. Je prends toujours la moitié de ce [résultat], ce sera la base. Si j'enlève de la base l'intervalle, le reste sera la hauteur.</p>	$b = \frac{1}{2} (\sqrt{c \times c + 4 \times A} + \sqrt{c \times c - 4 \times A})$ $h = b - \sqrt{c \times c - 4 \times A}$
<p><b>&lt;Problème 3&gt;</b> Dans un triangle rectangle, étant donnés la somme de la hauteur <math>h</math> avec la base <math>b</math> (<math>s = b + h = 23</math>), l'aire <math>A</math> (<math>A = 60</math>) et son hypoténuse <math>c</math> (<math>c = 17</math>), déterminer la hauteur et la base séparément.</p>	
<p>Je multiplie la longueur de l'hypoténuse par elle-même. De cela j'enlève quatre aires. Je prends toujours le côté du reste. Je l'additionne toujours aux deux [longueurs] jointes. Je prends toujours la moitié [du résultat], ce sera la base. Des deux [longueurs] jointes, j'enlève la base et le reste sera la hauteur.</p>	$b = \frac{1}{2} [(a + b) + \sqrt{c \times c - 4 \times A}]$ $h = s - b$

<sup>250</sup> Dans son édition, K. Lachmann fait précéder cette série de problèmes par deux paragraphes interpolés à propos de la mesure de deux volumes : celui du pavé droit et celui du cylindre.

<sup>251</sup> Le texte que nous présentons est une adaptation de l'algorithme de calcul – hors du contexte numérique et des unités de mesure – à partir d'une traduction personnelle ; Ibid., p. 120-138.

<sup>252</sup> « *eiecturam* » ; Ibid., p. 120.

<sup>253</sup> « *catetus* », Ibid., p. 124.

<b>&lt;Problème 4&gt;</b> Dans un triangle acutangle, étant donnés le petit côté ( $a = 13$ ), la base ( $b = 14$ ), le grand côté ( $c = 15$ ), déterminer la hauteur <sup>254</sup> $h$ et la <petite> projection <sup>255</sup> $p$ .	
Je fais toujours son petit côté par lui-même, et sa base par elle-même [joints] l'un et l'autre en un seul. J'enlève toujours de cette somme le grand côté. Je prends toujours la moitié du reste. Celle-ci est divisée par la base et ce sera la petite projection. ... j'enlève du petit côté [multiplié] par lui-même la petite projection [multipliée] par elle-même, le côté de ce qui reste sera la hauteur.	$p = \frac{1}{2b} [(a \times a + b \times b) - c \times c]$ $h = \sqrt{a \times a - p \times p}$
<b>&lt;Problème 5&gt;</b> Construire un triangle rectangle à partir d'un nombre impair (par exemple, 3).	
<b>&lt;Problème 6&gt;</b> Construire un triangle rectangle à partir d'un nombre pair (par exemple, 6).	
<b>&lt;Problème 7&gt;</b> Dans un triangle, de quelque nature qu'il soit, calculer son aire à partir de la connaissance de ses trois côtés ( $a = 6$ , $b = 8$ , $c = 10$ ).	
Je joins les trois longueurs en une unique, je prends toujours sa moitié ; je la mets de côté et j'enlève de celle-ci les longueurs une à une. (...) Ensuite, je multiplie [les restes entre eux]. Je multiplie [le résultat] par [la moitié mise de côté]. Je prends son côté, ce sera l'aire <sup>256</sup> .	$a + b + c = p$ $\sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)} \times \frac{p}{2}$
<b>&lt;Problème 8&gt;</b> Dans un triangle, étant donnée la longueur des 3 côtés, déterminer la hauteur $h$ issue de l'angle droit et la longueur des projections des côtés sur l'hypoténuse ( $a = 6$ , $b = 10$ , $c = 12$ ).	
Je multiplie toujours la hauteur par la base, le résultat est divisé par l'hypoténuse.	$h = \frac{a \times b}{c}$

Chacun des problèmes est posé dans un contexte de géométrie mathématique et non dans un contexte d'arpentage. Dans leur majorité, les problèmes ne renvoient pas à une situation matériellement réelle ; ils sont pseudo-concrets. Même si des valeurs précises ainsi que des unités de mesure (le pied, le pied carré) sont utilisées, l'auteur expose ses algorithmes de manière très générale, voire canonique. Il suffit, par exemple, de remarquer l'utilisation dans chaque problème de l'adverbe *semper* [toujours] qui renvoie à l'idée de modèle. L'importance donnée au triangle montre bien que l'intention de l'auteur n'est pas celle de vouloir fournir un texte, même superficiel, où l'arpenteur trouverait les premières connaissances nécessaires au mesurage des terres. L'auteur ne désirerait-il pas plutôt fournir un travail théorique sur le triangle ?

D'un point de vue interne, le seul problème amenant au calcul d'une surface utilise la formule dite de Héron. L'auteur précise que la formule est valable dans tous les triangles et il envisage le cas numérique du triangle rectangle (6, 8, 10). Même dans le cas simple du

<sup>254</sup> « *perpendicularis* », Ibid., p. 128.

<sup>255</sup> « *praecisura* », Ibid., p. 128-130.

<sup>256</sup> C'est la formule dite « de Héron ».

triangle rectangle, la moitié du produit de la base par la hauteur n'est pas explicitement envisagée. Cependant, la formule donnée dans le problème 11 nous invite à penser que l'auteur maîtrise la relation du demi-produit. Le « théorème de Pythagore » est utilisé implicitement à plusieurs reprises.

Nous allons maintenant nous intéresser à un second ouvrage qui est sans doute, par la diversité de ses figures géométriques, le témoin le plus important d'une géométrie mathématique dans les manuels du *Corpus Agrimensorum* : le *De iugeribus metiundis* [La mesure des jugères]<sup>257</sup>.

**c) Le *De iugeribus metiundis* :**

Ce texte nous renseigne, à partir du mesurage de dix champs de formes variées régulières, sur les pratiques de calcul de surface.

Plusieurs éléments, notamment rédactionnels, suggèrent que ce texte, accompagné de figures, est un recueil de fragments d'origines diverses<sup>258</sup>. Sa rédaction et sa compilation sont très difficiles à dater, l'hypothèse la plus argumentée<sup>259</sup> les placerait au début du 6<sup>e</sup> siècle. Le premier paragraphe est métrologique et propose des équivalents entre jugère (mesure de surface romaine<sup>260</sup> rectangle et non carrée) et pieds carrés<sup>261</sup>.

Nous présentons à l'aide du tableau synoptique suivant les algorithmes mis en place pour le calcul de la surface de différentes figures.

<b>algorithme<sup>262</sup></b>	<b>transcription littérale moderne</b>
<b>&lt;Problème 1&gt;</b> Mesurer l'aire d'un quadrilatère à côtés égaux donnés $c = 50$ <carré>	
Je multiplie <sup>263</sup> un côté par un autre.	$c \times c$
<b>&lt;Problème 2&gt;</b> Mesurer l'aire d'un carré <sup>264</sup> de périmètre donné $P = 80$ .	

<sup>257</sup> Edition dans [Blume, Lachmann, et al., 1848], p. 254-256. Edition critique, traduction et commentaires dans [Lefort, Bondoux, et al., 1991], p. 267-281 ; [Guillaumin, 1996], p. 198-211. La dernière édition sera notre référence.

<sup>258</sup> [Lefort, Bondoux, et al., 1991], p. 280.

<sup>259</sup> Ibid., p. 267-71.

<sup>260</sup> [Hinrichs et Minary, 1989], p. 103.

<sup>261</sup> [Guillaumin, 1996], §54, p. 198-200.

<sup>262</sup> Le texte que nous présentons est une adaptation personnelle, hors du contexte numérique, de la traduction des algorithmes sans supprimer leurs caractéristiques rhétoriques ; Ibid., p. 198-211.

<sup>263</sup> Notons ici l'utilisation du verbe latin « duco » pour multiplier.

<sup>264</sup> [Guillaumin, 1996], p. 201.

Tu prends le quart du pourtour, tu le multiplies par lui-même.	$\frac{1}{4} P \times \frac{1}{4} P$
<b>&lt;Problème 3&gt;</b> Mesurer l'aire d'un triangle équilatéral de côté donné $c = 60$	
Je multiplie un côté par la moitié d'un autre côté.	$c \times \frac{1}{2} c$
<b>&lt;Problème 4&gt;</b> Mesurer l'aire d'une « tête de bœuf » <sup>265</sup> de côté donné $c = 50$	
Je multiplie un côté d'un triangle par un côté de l'autre triangle.	$c \times c$
<b>&lt;Problème 5&gt;</b> Mesurer l'aire d'une figure inégale de côtés donnés $a = 30$ , $b = 6$ , $c = 40$ , $d = 20$ ; $a$ et $c$ (resp. $b$ et $d$ ) étant les côtés opposés d'un quadrilatère.	
	$\frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$ <sup>266</sup>
<b>&lt;Problème 6&gt;</b> Mesurer l'aire d'une figure « en forme de croissant » de côtés donnés $a = 20$ , $b = 0$ , $c = 60$ , $d = 10$ .	
	adaptation de la formule du quadrilatère précédent <sup>267</sup> .
<b>&lt;Problème 7&gt;</b> Mesurer l'aire d'un demi-cercle de diamètre donné $d = 40$ et de flèche donnée $f = 20$ .	
Il faudra multiplier la hauteur par la base, le multiplier par onze. J'en prends le quatorzième <sup>268</sup> .	$[(d \times f) \times 11] \frac{1}{14}$
<b>&lt;Problème 8&gt;</b> Mesurer l'aire d'un cercle de diamètre donné $d = 40$ .	
Je multiplie le diamètre par lui-même. Je multiplie le résultat par onze ; j'en prends le quatorzième.	$[(d \times d) \times 11] \frac{1}{14}$
<b>&lt;Problème 9&gt;</b> Mesurer l'aire d'un arc de cercle inférieur au demi-cercle, de corde donnée $c = 20$ et de flèche donnée $f = 5$ .	

<sup>265</sup> Deux triangles équilatéraux joints. Cette appellation est très proche de l'expression babylonienne « front de bœuf » pour désigner le trapèze ; [Thureau-Dangin, 1938], p. xvii.

<sup>266</sup> Nous voyons ici le cas le plus général de l'utilisation de la « formule des arpenteurs » précédemment évoquée.

<sup>267</sup> Nous pensons vraiment que la figure « en forme de croissant » est traitée comme un quadrilatère dont un côté serait nul et non comme un triangle comme le laisse penser J.M. Martin et J.P. Grémois dans leur étude ; [Lefort, Bondoux, et al., 1991], p. 280. Notre premier argument est la place frontière entre les quadrilatères et les figures circulaires donnée à l'exposé de celle-ci. Un deuxième argument, s'il est nécessaire, est apporté par la forme de l'algorithme proposé où il s'agit bien du produit des moyennes arithmétiques des côtés opposés. Ajoutons à nos arguments, les considérations de E. Peet sur les pratiques en Egypte Ptolémaïque ; [Peet, 1923], p. 94.

<sup>268</sup> La hauteur (resp. la base) correspond à la flèche (resp. la corde) de l'arc. Ici, dans le cas du demi-cercle, la flèche est le rayon et la corde le diamètre.

J'ajoute la hauteur <sup>269</sup> à la base <sup>270</sup> ; je multiplie par quatre. Je prends la moitié. De même, je prends la moitié de la base multipliée par elle-même ; j'en prends le quatorzième. Je leur ajoute la moitié mentionnée plus haut.	$\left(\frac{c}{2}\right) \times \left(\frac{c}{2}\right) \times \frac{1}{14} + [(c + f) \times 4] \times \frac{1}{2}$
<b>&lt;Problème 10&gt;</b> Mesurer l'aire d'un hexagone régulier de côté donné $c = 30$ .	
Je multiplie un côté par lui-même ; j'en garde le tiers. Par ailleurs, j'en prends le dixième. Ceux-ci, ajoutés les uns aux autres doivent être multipliés par six parce qu'il y a six côtés.	$\left[\frac{1}{3}c \times c + \frac{1}{10}c \times c\right] \times 6$

Il s'agit bien de dix problèmes de calcul de surface. L'expression « *Ager si fuerit...* » les introduisant confère à chacun d'eux un caractère pseudo-concret. Ils ne sont pas sans rappeler les premiers chapitres du Livre 5 du *De re rustica* de Columelle. Comme lui, l'auteur du *De iugeribus metiundis* travaille sur des grandeurs en précisant avec détails les unités de surface. D'ailleurs, les deux auteurs utilisent principalement la jugère avec ses subdivisions. À chaque fois, ils prennent soin, l'un comme l'autre, de décrire un algorithme qui laisse supposer un caractère géométrique mathématique à ces problèmes et ils attribuent ainsi une marque générale aux mesurages qu'ils proposent. Notons enfin, sans pour autant conclure sur une quelconque filiation, que certains paragraphes du *De iugeribus metiundis* sont textuellement présents chez Columelle avec une similarité terminologique comme *latitudo*, *inis* pour la flèche d'un arc de cercle) :

<i>De re rustica</i> , Columelle <sup>271</sup>	<i>De iugeribus metiundis</i> , anonyme
Problème #7, $d = 140, f = 70$	Problème #7, $d = 40, f = 20$
Problème #6, $d = 70$	Problème #8, $d = 40$
Problème #8, $c = 16, f = 4$	Problème #9, $c = 20, f = 5$
Problème #10, $c = 30$	Problème #10, $c = 30$

<sup>269</sup> Le terme latin *latitudo*, *inis* ici utilisé renvoie à la flèche d'un arc de cercle. Dans le cas du demi-cercle, il s'agit simplement du rayon du cercle initial ; [Guillaumin, 1996], p. 208.

<sup>270</sup> Le terme latin *basis*, *is* ici utilisé renvoie à la corde d'un arc de cercle. Dans le cas du demi-cercle, il s'agit simplement du diamètre du cercle initial ; Ibid., p. 208.

<sup>271</sup> Nous reprenons notre propre numérotation des problèmes de Columelle ; *supra*, p. 95-97.

J.-M. Martin et J.-P. Grélois ont mis en évidence, par des arguments internes, une éventuelle filiation avec les textes de la tradition géométrique grecque<sup>272</sup>. En effet, les méthodes de calcul mises en place aux derniers problèmes – ceux sur les figures circulaires et l’hexagone (problème 8 à 11) – renvoient directement à celles présentées dans les *Geometrica* héronienne<sup>273</sup>. Cependant, et contrairement aux autres textes gromatiques tardifs, nous notons peu d’hellénismes. En effet, nous ne relevons que deux utilisations de termes d’origine grecque, celui d’*isopleurus* dans le cas du carré et du triangle équilatéral et celui de *podismus* caractéristique des traités agrimensuriques. F.-T. Hinrichs, quant à lui, réduit l’influence possible de la géométrie grecque, et particulièrement celle de la tradition héronienne en montrant une certaine autonomie des pratiques romaines<sup>274</sup>.

Intéressons-nous enfin à Balbus (2<sup>e</sup> s. ?)<sup>275</sup>, cité par G. Sarton comme « l’un des meilleurs *agrimensores* romains »<sup>276</sup>, avec son *Expositio et ratio omnium formarum* [Présentation systématique de toutes les figures] sur les mesures et les formes géométriques dont seuls quelques fragments nous sont parvenus<sup>277</sup>.

### **d) La contribution de Balbus.**

Elle représente, semble-t-il, un élément caractéristique des ouvrages de géométrie dont le contenu devait être maîtrisé par les arpenteurs<sup>278</sup>.

Ce texte, contrairement aux deux précédents, n’expose pas la manière de mesurer des surfaces ou des corps. Une fois certaines unités de mesure présentées ainsi que leur correspondance, l’auteur établit à la manière d’Euclide, qu’il cite d’ailleurs explicitement<sup>279</sup>, les principales définitions des objets mathématiques en dehors de tout contexte d’arpentage. Cet exposé reprend principalement les définitions du Livre I des *Eléments* d’Euclide : celles du point, de la ligne, des extrémités d’une ligne, du parallélisme, de la surface, des extrémités d’une surface et de la perpendicularité. Après avoir exposé une classification des angles

---

<sup>272</sup> [Lefort, Bondoux, et al., 1991] ; p. 280.

<sup>273</sup> [Heiberg, 1976], p. 172-449.

<sup>274</sup> [Hinrichs et Minary, 1989], p. 111-117.

<sup>275</sup> [Guillaumin, 1996], p. 3.

<sup>276</sup> [Sarton, 1927], vol. 1, p. 271.

<sup>277</sup> Edition dans [Blume, Lachmann, et al., 1848], vol. 1, p. 91-108, vol. 2, p. 9-12 ; Edition, traduction et commentaires dans [Guillaumin, 1996] qui est notre référence.

<sup>278</sup> [Dilke, 1995], p. 145.

<sup>279</sup> [Blume, Lachmann, et al., 1848], p. 108.

particulièrement importante chez Balbus, il définit enfin l'ensemble des figures géométriques et en expose cinq genres suivant la nature des lignes qui les forment.

Il est fort douteux que Balbus ait traduit en latin une partie des *Eléments*, il n'est sans doute qu'un intermédiaire avec des sources latines antérieures qui sont perdues<sup>280</sup>. Cette présence euclidienne dans la tradition grammatique latine du début du 2<sup>e</sup> siècle est à rapprocher d'une volonté administrative et politique de donner aux arpenteurs romains une formation scientifique<sup>281</sup>. Cette formation géométrique, héritière des *Eléments* d'Euclide, semble relativement restreinte mais néanmoins tout à fait sérieuse et systématique<sup>282</sup>. Le manuel de géométrie de Balbus, mélange entre art grammatique et géométrie mathématique, peut donc raisonnablement être considéré comme un témoin de l'enseignement dispensé aux *agrimensores* romains<sup>283</sup>. A ce titre, nous pouvons avancer l'hypothèse que le lectorat potentiel a donc très probablement été limité aux apprentis techniciens du cadastre romain dans le but de perfectionner leurs compétences<sup>284</sup>.

### C) Lien avec l'Europe latine de l'antiquité tardive :

Dans cette partie, nous aimerions insister sur ce que nous savons de l'histoire des textes pour montrer la forte présence du *Corpus agrimensorum* ainsi que du texte de Columelle dans la littérature médiévale latine. Ecrits plusieurs siècles auparavant, nous allons montrer que ces textes sont toujours actuels à la fin de l'antiquité tardive mais aussi tout au long du Moyen-Âge central<sup>285</sup>. En effet, outre l'inspiration qu'ils auraient *a priori* suscitée chez Boèce (ca. 480-524), Cassiodore (m. 580), Isidore de Séville (m. 636) ou encore Gerbert d'Aurillac (m. 1003), ces textes sont aussi copiés dans les *scriptoria* des monastères<sup>286</sup>. L'abbaye de Corbie joue alors un rôle prépondérant dans la sauvegarde et la diffusion de la littérature grammatique et des travaux de (ou attribué à) Boèce<sup>287</sup>. La recension des manuscrits

---

<sup>280</sup> [Guillaumin, 1998], p. 73 & 75.

<sup>281</sup> [Hinrichs et Minary, 1989], p. 171-174.

<sup>282</sup> [Guillaumin, 1998], p. 82-83.

<sup>283</sup> Ibid., p. 75.

<sup>284</sup> [Pikulska, 2004], p. 208.

<sup>285</sup> [Guillaumin, 2006], p. 52.

<sup>286</sup> [Dilke, 1995], p. 141 ; [Lefort, Bondoux, et al., 1991], p. 20.

<sup>287</sup> [Ullman, 1964] ; [Folkerts, 1989], p. 3.

faite par C. Thulin dans son édition ainsi que l'étude de B.-L. Ullman, nous permettent d'ajouter que ces copies sont suffisamment nombreuses pour ne pas être marginales<sup>288</sup>.

Elles ne se font pas au hasard mais sont motivées par un besoin réel et conscient. Cette motivation est étroitement liée à la nature même du *quadrivium* et encore plus à son enseignement dans les écoles monastiques d'abord, puis dans les écoles cathédrales et enfin, à partir du 12<sup>e</sup> siècle, dans les universités<sup>289</sup>. Le *quadrivium*, dont le terme aurait été introduit pour la première fois par Boèce<sup>290</sup> est une notion transmise au Moyen-Âge latin par Martianus Capella (ca. 470) dans son ouvrage du 5<sup>e</sup> siècle, le *De Nuptiis Philologiae et Mercurii et de Septem artibus liberalibus* [Noces de Mercure et de la philologie et des sept arts libéraux]<sup>291</sup>. Il désigne les quatre disciplines mathématiques que sont l'arithmétique, la musique théorique, la géométrie et l'astronomie<sup>292</sup>. Pendant toute l'antiquité tardive, ces disciplines sont négligées au profit de celles du *trivium* : la rhétorique, la grammaire et la dialectique destinée à devenir la discipline la plus importante à l'approche du 12<sup>e</sup> siècle<sup>293</sup>.

Pendant toute cette période, les réalisations scientifiques sont insignifiantes<sup>294</sup>. Les écrits scientifiques s'appuient principalement sur les *Etymologies* d'Isidore de Séville dont le Livre III, seule partie consacrée à la géométrie, est extrêmement réduit<sup>295</sup>. L'évêque sévillan s'inspire, probablement directement, des travaux de Capella, de Boèce et de Cassiodore<sup>296</sup> pour sa classification scientifico-étymologique des figures et pour ses définitions. La terminologie ainsi que la présentation élémentaire des figures laissent percevoir la pauvreté des connaissances d'Isidore et de ses contemporains en matière de géométrie<sup>297</sup>. Celle-ci n'est que « science des figures »<sup>298</sup> avec typologie et pêle-mêle de définitions euclidiennes mais sans aucun théorème ni démonstration<sup>299</sup>. L'œuvre isidorienne se caractérise alors par un mélange entre géométrie mathématique et art grammatique empirique<sup>300</sup>.

---

<sup>288</sup> [Thulin, 1913], p. iii-iv ; [Ullman, 1964].

<sup>289</sup> [Verger 1999], p. 10-11.

<sup>290</sup> [Sarton, 1927], vol. 1, p. 425.

<sup>291</sup> [Taton, 1957], p. 410, 519 ; [Ferré, 2004], p. 45-74.

<sup>292</sup> [Sarton, 1927], vol. 1, p. 425.

<sup>293</sup> [Verger 1999], p.36.

<sup>294</sup> [Taton, 1957], p. 520.

<sup>295</sup> Ibid., p. 519 ; [Isidore de Séville, 1911].

<sup>296</sup> [Ribémont, 1998], p. 28 ; [Fontaine, 1959-1983], p. 441.

<sup>297</sup> [Ribémont, 1998], p. 28.

<sup>298</sup> [Fontaine, 1959-1983], p. 393.

<sup>299</sup> Ibid., p. 393.

<sup>300</sup> Ibid., p.402.

L'abondance des copies des textes gromatiques s'explique donc dans ce contexte où la géométrie, pourtant discipline du *quadrivium*, ne semble pas représentée par une importante documentation. Le *corpus agrimensorum* est transmis, copies après copies, sous une forme quelque peu corrompue s'éloignant peu à peu de l'original<sup>301</sup> pour permettre « le passage de la formation des arpenteurs romains à l'enseignement médiéval de la géométrie »<sup>302</sup>.

Comme B.-L. Ullman<sup>303</sup>, nous pensons que la géométrie de l'arpentage n'occupera pas une place importante dans l'Europe latine, via la tradition gromatique romaine, pour ses applications pratiques ou la formation de ses acteurs<sup>304</sup>. Elle deviendra fondamentale comme seule documentation géométrique en l'absence de tout autre texte de géométrie mathématique. La traduction latine des *Eléments* d'Euclide attribuée à Boèce<sup>305</sup> ne peut pas être considérée comme une exception puisqu'il semble qu'elle ait été perdue très tôt<sup>306</sup>. Elle est néanmoins attestée par son disciple Cassiodore dans ses *Institutions*<sup>307</sup>. Seuls de courts extraits ont subsisté, répartis dans quatre familles de manuscrits dont la datation s'étend du 8<sup>e</sup> au 9<sup>e</sup> siècle<sup>308</sup>. Ils permettent de reconstituer les quatre premiers livres et les définitions du livre 5<sup>309</sup>. L'une de ces familles correspond d'ailleurs à une rédaction du *Corpus agrimensorum*<sup>310</sup>. Les trois textes que nous avons isolés pour leur développement géométrique illustrent parfaitement notre propos. Balbus, comme nous l'avons déjà montré, fournit un manuel de géométrie de référence utilisé pendant toute l'Antiquité tardive<sup>311</sup>.

Quant au *Podismus*, sa dimension particulièrement théorique le rapproche lui aussi davantage du manuel d'enseignement de la géométrie du *quadrivium* que d'un texte à quelconque vocation pratique.

Attachons-nous maintenant davantage au *De iugerum metiundis* dont la tradition manuscrite n'est pas un cas isolé de l'histoire des textes gromatiques. Nous connaissons

---

<sup>301</sup> [Dilke, 1995], p. 142.

<sup>302</sup> [Guillaumin, 2006], p. 52.

<sup>303</sup> [Ullman, 1964]

<sup>304</sup> Ibid., p. 269.

<sup>305</sup> [Folkerts, 1989], p. 2-4.

<sup>306</sup> [Ullman, 1964], p. 264.

<sup>307</sup> Dans le chapitre 6 « *De geometrica* » du Livre II, Cassiodore précise « *Cuius disciplinae apud Graecos Euclides, Apollonius, Archimedes necnon et alii scriptores probabiles extiterunt, ex quibus Euclidem translatum Romanae linguae idem uir magnificus Boethius edidit. Qui si diligenti cura relegatur, hoc quod praedictis diuisionibus apertum est manifestae intellegentiae claritate cognoscitur.* » ; [Mynors, 1937].

<sup>308</sup> [Folkerts, 1970], p. 69-82 ; [Folkerts, 1981], p. 187-191.

<sup>309</sup> [Folkerts, 1970], p. 173-217.

<sup>310</sup> [Folkerts, 1989], p. 3.

<sup>311</sup> [Guillaumin, 1998], p. 83.

actuellement quatre copies datées entre le 9<sup>e</sup> et le 13<sup>e</sup> siècle<sup>312</sup>. Notons, à titre d'information, que ces quatre manuscrits contiennent des extraits de la géométrie attribuée à Boèce<sup>313</sup>. Plus généralement, ces codices regroupent et transmettent deux traditions : le noyau des textes grammatiques avec des extraits d'Euclide. B.-L. Ullman montre clairement en quoi leur contenu répond à une intention d'utilisation pour l'enseignement<sup>314</sup>. De plus, une étude textuelle et des illustrations montrent que les copistes méconnaissent la principale unité de mesure utilisée dans le texte, la jugère. A notre avis, cette ignorance flagrante prouve d'une part que le texte ne sera pas utilisé à des fins pratiques, et d'autre part que l'auteur n'est sûrement pas un arpenteur mais très probablement un Maître<sup>315</sup>.

La description du paysage des pratiques géométriques latines de l'Antiquité tardive avec des hypothèses d'articulation dans le développement du *quadrivium* boécien nous a semblé inévitable pour atteindre notre objectif.

---

<sup>312</sup> [Lefort, Bondoux, et al., 1991], p. 267 ; [Guillaumin, 1996], p. 112.

<sup>313</sup> [Folkerts, 1989], p. 32-34.

<sup>314</sup> [Ullman, 1964].

<sup>315</sup> Cette dernière remarque est déjà formulée par B.-L. Ullman au sujet du célèbre Pseudo-Boèce *Ars geometriae et arithmeticae* ; Ibid., p. 270.

# Chapitre quatre

## Le mesurage et le découpage dans les mathématiques arabes d'Orient.

Outre la géométrie savante qui s'est nourrie d'écrits de mathématiciens grecs (Euclide, Apollonius, Archimède), la tradition géométrique arabe d'Orient a développé dès l'origine une géométrie utilitaire ou pratique.

Al-Fārābī (m. 950) distingue dans « *Sur la science de la géométrie* » de son *Ihṣā' al-Ulūm* [énumération des sciences]<sup>316</sup> deux géométries : l'une pratique et l'autre théorique<sup>317</sup>. Il précise ensuite les diverses manifestations de la géométrie pratique en décrivant le *ʿilm al-ḥiyal* [science des procédés ingénieux]<sup>318</sup>. Il cite, par exemple :

---

<sup>316</sup> [al-Fārābī 1932], partie arabe, p. 34-36.

<sup>317</sup> Ibid., partie arabe, p. 35

<sup>318</sup> La science des procédés ingénieux n'inclut pas toujours, dans la tradition arabe, la géométrie pratique. En effet, dans ses « *parties secondaires des mathématiques* » de son *Epître sur les parties des sciences intellectuelles*, Ibn Sīnā (980-1037) distingue l'« *art du mesurage* » des « *procédés ingénieux* », ces derniers se rapprochant alors de la mécanique ; [Mimoune, 1984], p. 147.

« *l'art de la construction, l'art du mesurage de portions de solides, l'art de la réalisation d'instruments astronomiques et d'instruments de musique, et de la réalisation d'instruments pour de nombreux autres métiers pratiques*<sup>319</sup>. »

La géométrie utilitaire se décline donc selon différentes spécialités comme, entre autres, le mesurage, le découpage, la géométrie des instruments astronomiques (astrolabe, cadrans solaires par exemple), la géométrie décorative qui n'utilise pas le découpage (patrons de mosaïques, *muqarnas*, par exemple).

Quant aux pratiques scientifiques du mesurage et du découpage, elles sont utilisées dans les administrations fiscales et cadastrales. Elles ne laissent cependant leurs premières traces que dans quelques témoignages de chroniqueurs et autres juristes<sup>320</sup>. Aucun biobibliographe connu n'évoque un ouvrage de la science du mesurage et du découpage avant le 9<sup>e</sup> siècle<sup>321</sup>.

La géométrie pratique du mesurage et du découpage n'a pas suscité autant de recherches de la part des historiens des mathématiques arabes que la géométrie de la tradition savante. Ce n'est en effet que relativement récemment que certaines études s'y sont intéressées. Notre objectif est ici d'établir une synthèse des principales informations que nous avons pu récolter à la lecture des articles de recherche complétée, si besoin, par la consultation de manuscrits arabes et latins. Pour cela, nous avons séparé les deux composantes que sont le mesurage et le découpage, même si nous verrons que certains traités regroupent ces deux thèmes. Dans une dernière partie, nous poserons la question du lectorat potentiel de ce type d'ouvrages.

## A) Le mesurage.

Plusieurs ouvrages de *misāḥa* [mesurage] n'ont pas encore été retrouvés, nous ne sommes donc informés que par les biobibliographes. Ainsi, Abū Barza (9<sup>e</sup> s.)<sup>322</sup>, Ibn Nājiyya

---

<sup>319</sup> Sur « *les sciences des procédés ingénieurs* » en général ; [al-Fārābī, 1932], p. 44-46.

<sup>320</sup> [Djebbar, 2007], p. 113.

<sup>321</sup> Ibid., p. 115.

<sup>322</sup> [Suter, 1892], p. 37 ; [Sezgin, 1974], p. 275.

al-Kātib (10<sup>e</sup> s.)<sup>323</sup> et al-Ḥasan Ibn aṣ-Ṣabbāh (9<sup>e</sup> s.)<sup>324</sup> sont annoncés dans le *Fihrist* [catalogue] d'Ibn an-Nadīm comme des auteurs d'ouvrages sur le mesurage. Le *Tatimma ṣiwān al-ḥikma* [Supplément au trésor de la sagesse] d'al-Baihakī précise, quant à lui, qu'al-Qā'inī aurait rédigé un *Kitāb al-misāhā* [Livre sur le mesurage] au 11<sup>e</sup> siècle<sup>325</sup>.

L'analyse du contenu des traités de mesurage de l'Orient musulman, qui nous sont parvenus, nous permet de les rattacher à une même tradition mathématique. Quels que soient leurs auteurs, tous ces écrits proposent, avec plus ou moins de détails, des formules d'aire de figures planes rectilignes, celles du cercle et de ses portions. Ils exposent aussi les aires et les volumes de certains solides. Ces formules sont appliquées à des exemples numériques, et une des caractéristiques de ces ouvrages est alors l'absence quasi-systématique, explicitement voulue par certains auteurs comme Abū Kāmil et Abū l-Wafā', de démonstrations géométriques.

Néanmoins, au sein même de cette tradition, deux familles peuvent être mises en évidence.

La première fait apparaître, dans la continuité d'al-Khwārizmī, une démarche algébrique. Cette intervention de l'algèbre pour la résolution de problèmes anciens de *misāḥa* doit davantage être considérée comme un prétexte pour mettre en œuvre cette nouvelle discipline autonome. Il est à noter que l'incursion algébrique ne saurait être complète, seuls quelques problèmes sont concernés.

La seconde famille, quant à elle, est totalement géométrique. Entre géométrie pratique et géométrie « savante », la résolution de problèmes s'oriente alors vers une tradition appliquée du savoir-faire ou bien s'appuie sur certains résultats de la géométrie grecque.

---

<sup>323</sup> [Suter, 1892], p. 36 ; [Sezgin, 1974], p. 302.

<sup>324</sup> [Suter, 1900], p. 19 ; [Sezgin, 1974], p. 253.

<sup>325</sup> [Sezgin, 1974], p. 386-387.

## 1) Les problèmes de mesurage comme champ d'application de l'algèbre.

### a) al-Khwārizmī (780-850) et ses commentateurs.

Le premier représentant effectif est, à notre connaissance, Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī. Il consacre à la science du mesurage un court chapitre de son célèbre *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [Livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison]<sup>326</sup>.

Dans son *bāb al-misāḥa* [chapitre sur le mesurage], l'auteur introduit la notion d'unité de surface, de ses multiples et de ses fractions<sup>327</sup>. Il expose ensuite des formules d'aire exactes ou approchées de figures planes usuelles (triangle équilatéral, losange, cercle et portions de cercle) ainsi que de certains solides élémentaires (cube, solide vertical à base quelconque, cône)<sup>328</sup>. Ces formules sont suivies, sans lien logique évident, de l'énoncé et de la démonstration du théorème de Pythagore dans le cas particulier du triangle rectangle isocèle<sup>329</sup>. Al-Khwārizmī reprend alors son exposé initial avec la classification traditionnelle des figures rectilignes en présentant les cinq genres de quadrilatères<sup>330</sup> et les trois genres de triangles quelconques avec leur formule d'aire<sup>331</sup>. Enfin, il termine le chapitre avec trois exercices de mesurage concernant l'aire d'un cercle, le volume d'une pyramide tronquée et l'inscription d'un carré dans un triangle isocèle<sup>332</sup>. Ce dernier exercice ainsi qu'un autre consacré au triangle acutangle<sup>333</sup> utilise explicitement les procédures et les objets – *shay'* [chose] et *māl* [bien] – de l'algèbre définis dans les parties précédentes du traité.

---

<sup>326</sup> F. Rosen a édité la version arabe du seul manuscrit d'Oxford qu'il a traduit en anglais ; [Rosen, 1831]. Dans notre travail, la référence sera l'édition critique de R. Rashed, ainsi que sa traduction française ; [Rashed, 2007].

<sup>327</sup> [Rashed, 2007], p. 202.

<sup>328</sup> Ibid., p. 202-206.

<sup>329</sup> Ibid., p. 206-209.

<sup>330</sup> Ibid., p. 210-214.

<sup>331</sup> Ibid., p. 214-224.

<sup>332</sup> Ibid., p. 214-224.

<sup>333</sup> Ibid., p. 220, 229.

Parmi les publications en algèbre postérieures à al-Khwārizmī qui pourraient proposer des problèmes de *misāḥa*, notons d'abord les écrits de la seconde moitié du 9<sup>e</sup> siècle d'ad-Dīnawārī (m. 895)<sup>334</sup>, d'al-Miṣṣīṣī<sup>335</sup> et peut-être d'as-Sarakhsī (m. 899)<sup>336</sup>.

Ensuite, au début du 10<sup>e</sup> siècle, des *Sharḥ* [Commentaires] du livre d'algèbre d'al-Khwārizmī sont rédigés notamment par Sinān Ibn al-Faṭḥ<sup>337</sup> et aṣ-Ṣaydanānī<sup>338</sup>. Néanmoins, nous ne pouvons être sûrs de rien car aucune de ces contributions ne nous est parvenue. Seules des informations biobibliographiques subsistent avec le *Fihrist* d'Ibn an-Nadīm et le *Ta'rīkh al-Ḥukamā* [Histoire des philosophes] d'Ibn al-Qifṭī (m. 1248).

### **b) Abū Kāmil (ca.850-930).**

Dans la seconde partie de son *Kitāb al-kāmil fī l-jabr wa l-muqābala* [Livre complet sur la restauration et la comparaison], intitulée<sup>339</sup> *Fī al-mukhammas wa'l-mu'ashshar* [Sur le pentagone et le décagone]<sup>340</sup>, Abū Kāmil résout vingt problèmes de mesurage de polygones réguliers à  $n$  côtés ( $n = 3, 5, 6, 10, 15$ ).

Le mathématicien égyptien évoque d'abord le mesurage du pentagone et du décagone inscrits dans ou circonscrits à un cercle de diamètre donné et réciproquement<sup>341</sup>. Le problème suivant recherche le côté d'un 15-gone inscrit dans un cercle de diamètre donné<sup>342</sup>. Trois problèmes concernant le triangle équilatéral sont ensuite proposés avec le calcul de la hauteur

---

<sup>334</sup> [Sezgin, 1974], p. 262.

<sup>335</sup> Ibid., p. 297.

<sup>336</sup> Nous insérons cet auteur parmi les successeurs potentiels d'al-Khwārizmī même si le titre de son ouvrage, *Kitāb al-aritmāṭiqī fī l-aḥḍad wa l-muqābala* [Livre de l'arithmétique sur les nombres et la comparaison], pourrait aussi renvoyer à la tradition pré-algébrique ; Ibid., p. 263.

<sup>337</sup> Ibid., p. 301.

<sup>338</sup> Ibid., p. 301.

<sup>339</sup> [Yadegari et Levey, 1971], p. 10.

<sup>340</sup> Nous remercions A. Djebbar pour nous avoir fait parvenir une copie du seul manuscrit arabe connu – Istanbul, ms. Kara Mustafa Pasha 379, fol. 68a-79b. Il est publié par ailleurs en fac-simile dans [Abū Kāmil, 1986] et traduit en anglais dans [Yadegari et Levey, 1971] qui est notre référence. Une version latine est disponible – BnF, latin 7377A, fol.93v-97r – que R. Lorch a édité ; [Lorch, 1993]. Enfin, une traduction hébraïque de Mordecai Finzi (15<sup>e</sup> s.) est totalement conservée à Munich et partiellement à Paris. Cette version hébraïque a fait l'objet d'une traduction moderne en italien ; [Sacerdote, 1896] sur laquelle s'est appuyé H. Suter pour traduire le texte en allemand ; [Suter, 1909-1910].

<sup>341</sup> Problèmes 1-10 ; [Yadegari et Levey, 1971], p. 10-21.

<sup>342</sup> Problème 11 ; Ibid., p. 21-23.

connaissant la somme de son aire et de cette hauteur<sup>343</sup>, l'inscription d'un rectangle d'aire donnée dans un triangle et enfin le calcul du côté du carré inscrit dans un triangle connaissant la somme des aires de ce triangle et du carré cherché<sup>344</sup>. Abū Kāmil revient ensuite au pentagone avec la recherche du côté d'un pentagone régulier inscrit dans un carré de côté donné<sup>345</sup>. Enfin, il calcule le côté d'un pentagone ou d'un décagone d'aires données<sup>346</sup>, et pose trois problèmes de calcul d'un côté ou d'une diagonale suivant certaines contraintes de surface<sup>347</sup>.

L'auteur se réfère, de manière explicite, à trois propositions des *Eléments* d'Euclide<sup>348</sup>. Il donne néanmoins un traitement algébrique à l'ensemble de ces problèmes<sup>349</sup>. L'algèbre apparaît avec ses objets et ses opérations – *al-jabr* [la restauration] et *al-muqābala* [la comparaison] – qui ont été définis, expliqués et justifiés dans la première partie de son traité.

Abū Kāmil rédige un autre traité entièrement dédié au mesurage dans lequel il n'utilise ni les outils, ni la formulation de l'algèbre. Nous y reviendrons ultérieurement.

### c) Al-Karajī (m.1023).

Al-Karajī expose dans le *Kāfi fī l-ḥisāb* [Livre suffisant en calcul] deux chapitres consacrés au mesurage<sup>350</sup>. Ce sont ces chapitres qui situeraient la contribution d'al-Karajī dans le prolongement d'al-Khwārizmī puisque dix problèmes sont résolus en suivant une démarche algébrique. Néanmoins, les procédures mises en place apparaissent plus proches de l'ancienne tradition mésopotamienne que du traité d'algèbre d'al-Khwārizmī. Le problème étant concret, la terminologie l'est aussi avec l'utilisation de « carré » ou « côté ». De plus, l'homogénéité géométrique n'est pas respectée.

---

<sup>343</sup> Problème 12, Ibid., p. 23-24.

<sup>344</sup> Problème 13-14 ; Ibid., p. 24-26.

<sup>345</sup> Problème 15 ; Ibid., p. 27.

<sup>346</sup> Problèmes 16-17 ; Ibid., p. 27-31.

<sup>347</sup> Problèmes 18-20 ; Ibid., p. 31-35.

<sup>348</sup> (*Elém.* H. XII.1) ; (*Elém.* H. XIII.1) et (*Elém.* H. XIII.10).

<sup>349</sup> [Yadegari et Levey, 1971], p. 6.

<sup>350</sup> [al-Karajī, 1986], p. 128-157, 201-210.

Al-Karajī pourrait être considéré comme un témoin d'une voie intermédiaire entre les deux traditions de mesurage évoquées en introduction. Mais alors, dans l'état actuel de nos connaissances, le mathématicien de Baghdad serait son unique représentant.

## 2) La géométrie du mesurage : tradition du savoir-faire.

Détachée de toutes démarches algébriques ou pré-algébriques, la majorité des ouvrages de *misāḥa* que nous connaissons est enracinée dans une tradition géométrique basée sur le savoir-faire de certaines corporations d'artisans. La géométrie savante n'en est pas pour autant totalement écartée, son influence est manifeste pour quelques uns d'entre eux. Les auteurs, souvent des géomètres arabes de renom, font alors appel aux Anciens pour apporter leurs propres contributions à certains problèmes de mesurage.

Témoins d'une géométrie « mixte » entre géométrie pratique et géométrie savante, ces traités, par leur forme et leur contenu, intègrent la tradition orientale du mesurage telle que nous l'avons caractérisée en introduction. Pour les uns, il s'agit de corriger des procédés utilisés dans les pratiques locales. Et pour les autres, l'objectif est de fournir aux utilisateurs un manuel qui fournit une réponse savante aux règles qu'ils appliquent.

### a) Thābit Ibn Qurra (836-901).

Dans le *Kitāb fī misāḥat al-ashkāl al-musattāḥa wa l-mujjassama* [Livre sur la mesure des figures planes et solides]<sup>351</sup>, Thābit Ibn Qurra expose classiquement les formules pour calculer l'aire de figures planes rectilignes et curvilignes, ainsi que le volume de certains solides comme le cube ou la sphère<sup>352</sup>.

Les références aux *Eléments* d'Euclide, à *De la Sphère et le Cylindre* d'Archimède et à certains résultats de Ptolémée confèrent à ce travail le caractère d'un traitement savant des problèmes de mesurage.

---

<sup>351</sup> [Kapp, 1935], p. 61 ; [Sezgin, 1974], p. 268.

<sup>352</sup> [Rashed, 2000], p. 506.

### b) Abū Kāmil.

Abū Kāmil, comme nous l'avons déjà précisé, a rédigé un texte de mesurage principalement centré sur les pentagones et décagones réguliers. Il est également l'auteur d'une épître de *misāḥa* intitulée *Kitāb al-misāḥa wa'l-handasa* [Livre du mesurage et de la géométrie]<sup>353</sup>.

Ce *mukhtaṣar* [abrégé]<sup>354</sup> d'Abū Kāmil se classe naturellement, par son titre et son contenu, parmi les écrits de la science du mesurage. Il ne s'inscrit pas, comme le texte précédent *Sur le pentagone et le décagone*, dans une démarche algébrique. Il semble toutefois dans la continuité d'al-Khwārizmī dont le *bāb al-misāḥat* pourrait avoir été un modèle<sup>355</sup>. Cette continuité est renforcée dans le chapitre sur la mesure des arcs de cercle par une référence explicite au *Kitāb al-jabr wa l-muqābala* du mathématicien de Bagdad<sup>356</sup>. Il s'en distingue néanmoins par certains éléments formels et structurels. D'abord, son organisation, plus précise et plus structurée, n'est pas sans rappeler une éventuelle inspiration euclidienne. Celle-ci est accentuée par deux références explicites aux *Eléments*<sup>357</sup> présentés comme le seul livre permettant d'accéder aux démonstrations absentes de son traité. Abū Kāmil cite également l'*Almageste* de Ptolémée (Livre VI)<sup>358</sup>, dans laquelle, précise-t-il, le lecteur trouvera l'exposé de la mesure des arcs de cercle.

Ensuite, le mathématicien égyptien fournit un développement plus systématique des figures planes et solides avec des figures géométriques supplémentaires par rapport à son prédécesseur : le trapèze<sup>359</sup>, le cylindre<sup>360</sup>, le cône tronqué<sup>361</sup> et la sphère<sup>362</sup>.

<sup>353</sup> Téhéran, Bibliothèque Majlis-i Sanā, ms. 2672/6, fol. 93b-107a ; nous remercions à nouveau A. Djebbar de nous avoir communiqué une copie de ce manuscrit. J. Sesiano l'a analysé dans [Sesiano, 1996]. Nous nous référerons donc à ce travail et au manuscrit lui-même si cela s'avère nécessaire.

Notons que cette épître est souvent désignée par le titre de son premier chapitre *Kitāb misāḥat al-arāḍīn* [Livre de la mesure des terrains].

<sup>354</sup> Qualification originale ou due à un copiste ; Téhéran, Bib. Majlis-i Sanā, ms. 2672/6, fol. 107b.

<sup>355</sup> [Sesiano, 1996], p. 3.

<sup>356</sup> Téhéran, Bib. Majlis-i Sanā, ms. 2672/6, fol. 103b.

<sup>357</sup> Téhéran, Bib. Majlis-i Sanā, ms. 2672/6, fol. 94a.

<sup>358</sup> [Sesiano, 1996], p. 13.

<sup>359</sup> Ibid., p. 8-10.

<sup>360</sup> Ibid., p. 10-11.

<sup>361</sup> Ibid., p. 11-12.

<sup>362</sup> Ibid., p. 13.

Enfin, dans le *bāb ma'rifat al-awtār* [chapitre sur la connaissance des cordes], Abū Kāmil propose une section sur les relations entre les longueurs des côtés des polygones réguliers constructibles à la règle et au compas (jusqu'au décagone) et les diamètres des cercles inscrits ou circonscrits<sup>363</sup>. L'ensemble des problèmes de cette épître sur le pentagone et le décagone est identique (énoncés et données numériques) aux problèmes de la seconde partie de son *Kāmil*.

**c) Abū l-Wafā' al-Būzajānī (940-998).**

Deux écrits d'Abū l-Wafā' se rattachent à la tradition du mesurage de l'Orient musulman. Le premier d'entre eux est un petit traité dont le titre est très explicite : *La réponse d'Abū l-Wafā' Muḥammad Ibn Muḥammad al-Būzajānī à ce que lui a demandé le juriste Abū 'Alī al-Ḥasan Ibn al-Hārith al-Ḥubūbī et qui est la démonstration relative à la détermination de la surface des triangles sans déterminer la perpendiculaire ni le pied*<sup>364</sup>. L'auteur y propose deux formules (équivalentes à celles de Héron d'Alexandrie) du calcul de l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés<sup>365</sup>.

Le second, le *Kitāb fīmā yaḥtāju ilayhi aṣ-ṣani' min a'omāl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques]<sup>366</sup>, est sans doute l'un des représentants les plus caractéristiques de la géométrie « mixte ». En effet, Abū l-Wafā' y applique la géométrie savante pour la résolution de problèmes de la géométrie pratique. Sont ainsi exposés des procédés de construction, originaux ou tirés de la tradition artisanale, dans le but de produire un manuel pour les utilisateurs.

Il se compose de onze chapitres<sup>367</sup>. Le premier donne une présentation des instruments du géomètre : la règle, le compas et l'équerre. L'auteur s'intéresse ensuite aux constructions élémentaires et aux constructions fondamentales d'origine grecque (la duplication du cube, la

---

<sup>363</sup> [Sesiano, 1996], p. 14-19.

<sup>364</sup> [Sezgin, 1974], p. 324 ; traduction anglaise dans [Kennedy et Mawaldi, 1979].

<sup>365</sup> [Aghayani-Chavoshi, 1996], vol. 1, p. 23-44.

<sup>366</sup> Edition arabe dans [Abū l-Wafā', 1979]. Edition et traduction d'une des deux versions persanes connues dans [Aghayani-Chavoshi, 1996].

<sup>367</sup> [Aghayani-Chavoshi, 1996], vol. 1, p. 145-150.

trisection de l'angle et les figures géométriques associées aux miroirs ardents). Les chapitres suivants sont dédiés aux constructions : de polygones réguliers à  $n$  côtés ( $3 \leq n \leq 10$ ), de polygones réguliers ( $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9$  et  $10$ ) inscrits dans un cercle, de cercles circonscrits à des polygones (triangle quelconque, pentagone et hexagone réguliers), de cercles inscrits dans les triangles, de polygones inscrits dans d'autres polygones. Les quatre derniers chapitres s'intéressent aux découpages des figures que nous traiterons dans la suite de notre exposé.

Son exposé est volontairement dépourvu de justifications. Néanmoins, au 13<sup>e</sup> siècle, le mathématicien Ibn Yūnus (1242) rédige son *Sharḥ al-aḥmāl al-handasiyya li Abū l-Wafā'* [Commentaires sur les constructions géométriques d'Abū l-Wafā'] dans lequel il insère des justifications pour chacune des constructions proposées par Abū l-Wafā'<sup>368</sup>.

#### **d) Ibn al-Haytham (m. 1041)**

Lorsqu'Ibn al-Haytham rédige le *Fī uṣūl al-misāḥa* [Sur les fondements du mesurage]<sup>369</sup>, il reprend un premier ouvrage qu'il aurait « composé en [sa] jeunesse »<sup>370</sup> sur ce même thème.

Plusieurs passages du traité montrent clairement qu'il s'adresse aux praticiens du mesurage. Par exemple, dans sa classification des lignes en cinq espèces (la droite, la circulaire et les trois sections des cônes), Ibn al-Haytham ne s'intéresse qu'aux deux premières, seules utiles « à l'arpenteur ». De même, lorsqu'il s'intéresse aux surfaces, il écarte les convexes et les concaves puisque seule la plane « est utilisée dans l'art des arpenteurs »<sup>371</sup>.

Néanmoins il envisage cet art géométrique sur des bases théoriques solides notamment en démontrant ses propositions. Son texte se rapproche alors davantage de la géométrie « savante ».

Le contenu du traité est caractéristique des manuels de mesurage que nous avons déjà évoqués. Ibn al-Haytham introduit les fondements du mesurage : la mesure et son unité, les

---

<sup>368</sup> [Djebbar, 2007], p. 118.

<sup>369</sup> Edition et traduction dans [Rashed, 2000], p. 538-637. Les références à cette édition seront relatives à la traduction française (pages paires), exceptions faites des citations directes pour lesquelles nous renvoyons aussi à l'édition arabe (pages impaires) en indiquant la page et la ligne.

<sup>370</sup> Ibid., p. 538 / p. 539, l. 4.

<sup>371</sup> Ibid., p. 539, l. 16-18, p. 541, l. 2 et 5, p. 543, l. 7, p. 607, l. 17-19, p. 617, l. 8.

grandeurs mesurables<sup>372</sup>. Les mesures des lignes droites et circulaires, de quelques surfaces usuelles (les rectangles, les triangles, le cercle et ses portions) sont alors exposées. Avant de donner les résultats sur le cercle et d'exposer la démonstration d'Archimède de *La mesure du cercle*<sup>373</sup>, Ibn al-Haytham donne la mesure des polygones convexes par triangulation<sup>374</sup>. Quant aux portions de cercle, il ne s'intéresse pas aux portions supérieures au demi-cercle, et considère les portions inférieures comme l'excédent d'un triangle dans un secteur angulaire.

Ensuite, l'étude des solides débute par les polyèdres<sup>375</sup>, le parallélépipède rectangle occupant la première place. Le passage aux parallélépipèdes quelconques, aux prismes droits et obliques est permis par analogie avec les polygones. En effet, de même que la mesure d'un polygone quelconque est possible par triangulation, de même tout polyèdre, pour être mesuré, sera décomposé en pyramides. Le problème du parallélépipède se ramène donc à la mesure de la pyramide<sup>376</sup>. Avec la référence aux résultats du Livre XII des *Eléments* d'Euclide<sup>377</sup>, Ibn al-Haytham réduit le problème au partage du solide en pyramides d'une part<sup>378</sup> et à la détermination de la hauteur d'une pyramide d'autre part<sup>379</sup>. Il traite ensuite des seuls autres corps à faces planes qui font « *partie de l'art de la mesure* »<sup>380</sup> : les sphères, les cylindres et les cônes. C'est à nouveau l'occasion pour le géomètre arabe de citer explicitement des œuvres grecques avec le Livre XII d'Euclide bien sûr, mais aussi les *Sphériques* de Théodose. Le traité continue avec la détermination expérimentale de la hauteur d'un corps solide qui s'élève au-dessus du sol à l'aide d'une tige et d'un fil à plomb<sup>381</sup>. Enfin, Ibn al-Haytham termine avec un vade-mecum<sup>382</sup>, sans les démonstrations, de toutes « *les pratiques dont les arpenteurs ont besoin dans leur art* »<sup>383</sup>.

---

<sup>372</sup> Ibid., p. 538.

<sup>373</sup> Ibid., p. 570-578.

<sup>374</sup> Ibid., p. 546, p. 566-568.

<sup>375</sup> Ibid., p. 590-606.

<sup>376</sup> Ibid., p. 594.

<sup>377</sup> Ibid., p. 597, l. 2.

<sup>378</sup> Ibid., p. 596-600.

<sup>379</sup> Ibid., p. 600-606.

<sup>380</sup> Ibid., p. 607, l. 18-19.

<sup>381</sup> Ibid., p. 616-626.

<sup>382</sup> Ibid., p. 626-636.

<sup>383</sup> Ibid., p. 637, l. 8.

**e) Ibn Ṭāhir al-Baghdādī (11<sup>e</sup> s.)**

L'ouvrage de Ibn Ṭāhir al-Baghdādī, le *Kitāb fī-l-misāḥa* [Livre sur le mesurage]<sup>384</sup> est un écrit indépendant destiné aux praticiens. Il reproduit les principaux résultats et procédures de cette géométrie pratique.

Il expose d'abord les quadrilatères divisés en sept catégories : carré, rectangle, losange, quadrilatère quelconque, trapèze isocèle puis trapèze quelconque<sup>385</sup>. Notons qu'Ibn Ṭāhir propose quatre procédures distinctes pour déterminer l'aire d'un quadrilatère dont il donne l'origine pour trois d'entre elles<sup>386</sup>. La première est rapportée par les Persans et correspond au produit des moyennes des côtés opposés. La seconde, d'Inde, revient à la racine carrée du produit des quatre côtés. La troisième est byzantine ; il s'agit de la transposition de la formule de Héron dans le cas d'un quadrilatère. Enfin, la quatrième propose de découper le quadrilatère en deux triangles dont on déterminera la mesure. Précisons que contrairement aux trois premières méthodes, aucune origine n'est associée à cette dernière méthode.

Suit le chapitre sur le mesurage des triangles<sup>387</sup> dans lequel Ibn Ṭāhir se réfère dès le premier paragraphe aux *Eléments* d'Euclide<sup>388</sup>. Il s'organise autour des sept catégories de triangles : équilatéral, isocèle, scalène acutangle, scalène obtusangle, rectangle, isocèle obtusangle et isocèle rectangle. Deux procédures sont utilisées : le demi-produit de la base par la hauteur et la formule de Héron. L'auteur fait référence explicitement aux travaux d'Archimède à propos de l'aire d'un triangle équilatéral<sup>389</sup>.

Le chapitre suivant s'intéresse aux figures circulaires et aux polygones réguliers et irréguliers. Il est divisé en sept chapitres avec le cercle, le demi-cercle, les portions de cercle inférieures au demi-cercle et celles supérieures, l'ellipse, les hexagones régulier et irrégulier, les polygones concaves et enfin le pentagone régulier.

Le dernier chapitre sur le mesurage s'intéresse aux solides. Il débute avec la règle générale de mesurage du volume des parallélépipèdes rectangles, à savoir le produit des trois dimensions : longueur, largeur, hauteur ou profondeur. Il poursuit avec le tronc de pyramide, le cône de révolution puis termine avec la sphère.

---

<sup>384</sup> Edition dans [Ibn Ṭāhir, 1985], p. 335-357.

<sup>385</sup> [Ibn Ṭāhir, 1985], p. 335-345.

<sup>386</sup> Ibid., p. 340.

<sup>387</sup> Ibid., p. 346-354.

<sup>388</sup> Ibid., p. 346.

<sup>389</sup> Ibid., p. 347.

Le dernier chapitre de cet ouvrage – *chapitre sur le découpage des terrains*<sup>390</sup> – est consacré aux problèmes de découpage sur lesquels nous reviendrons dans la partie suivante.

**f) Le Qādī Abū Bakr (11-12<sup>e</sup> s. ?)<sup>391</sup>**

Nous ne sommes que très peu informés sur cet « Abū Bākr » sinon qu'il était *qādī* [juge] et qu'il a rédigé un traité de *misāḥa* avant la fin du 12<sup>e</sup> siècle. En effet, la seule copie connue<sup>392</sup> du *Kitāb al-ṭabaqāt fī sharḥ al-misāḥāt* [Livre des niveaux sur l'explication du mesurage] a été réalisée à Mossoul en 1191<sup>393</sup>.

Ce traité est divisé en quatre niveaux, eux-mêmes divisés en sections<sup>394</sup>. Une longue introduction débute le traité dans laquelle l'auteur précise vouloir rédiger un traité simple et résumé, facile à utiliser. Le premier niveau s'intéresse, au sein de quatre sections distinctes, au point, à la ligne, à la surface et au solide. Le niveau suivant, en 11 sections, est réservé au triangle et aux propriétés métriques de ses côtés. Le troisième niveau traite, dans cet ordre, des quadrangles, des polygones, des cercles et de ses arcs. Il contient 10 sections. Enfin, le dernier niveau propose en 8 sections la description et la mesure (d'aire et de volume) des corps sphériques, cylindriques, coniques et des prismes.

Abū Bakr propose un texte original à plusieurs titres compte tenu de la tradition précédemment décrite. D'abord, il fournit un exposé philosophique sur la nature du point comme « *origine des trois dimensions qui sont la longueur, la largeur et la profondeur* »<sup>395</sup>. Ensuite, d'un point de vue qualitatif, il énonce le concours des trois hauteurs d'un triangle acutangle. Il donne une formule approximative donnant le rayon d'un cercle circonscrit à un polygone régulier connaissant son côté. Il est aussi amené à utiliser, dans des exemples numériques, une circonférence de 32 pour un cercle de diamètre 10, et donc une approximation de  $\pi$  peu courante. Aucun de ces trois résultats comme d'ailleurs aucun autre du traité ne sont démontrés.

---

<sup>390</sup> Ibid., p. 365-375.

<sup>391</sup> [Sezgin, 1974], p. 386.

<sup>392</sup> [Hogendijk, 1990].

<sup>393</sup> Ibid., p. 144.

<sup>394</sup> Ibid., p. 133-142.

<sup>395</sup> Ibid., p. 149 (édition arabe) / p.145 (traduction anglaise)

**g) Aḥmad Ibn Thabāt (13<sup>e</sup> s.)**

Cet auteur consacre une partie de son ouvrage *Ghunya al-Ḥussāb* [La richesse du calculateur] à des problèmes de *misāḥa*<sup>396</sup>. Ceux-ci débutent avec les quadrilatères (rectangles, losanges, trapèzes et quelconques). Suivent des problèmes sur des polygones comme les polygones en forme d'escalier ou de tambour<sup>397</sup>, puis les polygones réguliers. Sont ensuite envisagés les triangles, et enfin le cercle et ses portions. Enfin, l'auteur s'intéresse à l'inscription et la circonscription de figures.

Il est à noter que la formule dite des arpenteurs pour déterminer l'aire d'un quadrilatère est utilisée, ainsi que la formule de Héron pour les triangles.

Ajoutons enfin qu'aucune référence à l'algèbre n'est présente. Néanmoins, Ibn Thabāt propose des problèmes pour lesquels les procédures sont rédigées sous une forme pré-algébrique qui rappelle les pratiques mésopotamiennes. L'auteur désire, par exemple, déterminer la largeur et la longueur d'un rectangle, leur différence et l'aire étant données<sup>398</sup>. Ou encore, il souhaite déterminer l'aire, le périmètre et le diamètre d'un cercle connaissant leur somme<sup>399</sup>.

**h) Deux témoins tardifs du mesurage en Orient musulman.**

Il est indispensable de terminer ce panorama de la tradition orientale du mesurage en signalant deux auteurs tardifs qui semblent dans le prolongement des auteurs précédents. Le premier est Ibn al-Ḥanbalī (m.1563) qui a rédigé les *Makhā'il al-milāḥa fī masā'il al-misāḥa* [Indices d'agréments sur les problèmes de mesurage]<sup>400</sup>. On y trouve deux figures géométriques : le *muṭabbal* [hexagone-tambour] et le *mudarraḥ* [escalier] qui sont probablement celles rencontrées dans le traité d'Aḥmad Ibn Thabāt.

---

<sup>396</sup> Traduction allemande dans [Rebstock, 1993].

<sup>397</sup> Nous n'avons pas eu accès au texte arabe, nous ne pouvons donc pas rendre ici la terminologie exacte.

<sup>398</sup> [Rebstock, 1993], p. 87.

<sup>399</sup> Ibid., p. 113. Notons par ailleurs que ce problème est ancien puisque nous l'avons déjà signalé dans une tablette de l'époque paléo-babylonienne, et ensuite dans les *Geometrica*. Dans les deux cas, la résolution correspond aussi à un traitement quasi-algébrique.

<sup>400</sup> [Djebbar, 2007], p. 118.

Le second est al- $\bar{A}$ milī (m.1622) avec son *Khulāṣat al-ḥisāb* [L'essence de l'arithmétique]<sup>401</sup>. Là encore, de nouvelles figures sont présentes : le *naḥīl* [fer à cheval], le *dhū ash-shuraf* [figure à balcons], sorte de polygone étoilé, et aussi le quadrilatère à deux angles droits et le pentagone à trois angles droits<sup>402</sup>.

De par leur contenu, ces deux ouvrages semblent moins influencés par la géométrie savante que par les problèmes réels de mesurage. Ils contribuent donc à prolonger la tradition arabe du mesurage jusqu'au 17<sup>e</sup> siècle.

En définitive, nous avons décliné les éléments de la tradition du mesurage en Orient musulman selon la démarche de leur auteur, marquée ou non par l'utilisation des outils et des procédures algébriques. Les « limites » de ces savoirs catégorisés sont arbitraires et donc discutables car elles reposent naturellement sur une connaissance partielle de la tradition avec sa terminologie, ses résultats et ses procédures. Conscients de cela, nous avons néanmoins choisi de présenter les éléments du découpage de l'Orient musulman selon cette distinction guidée, dans ce contexte, par le texte perdu *Sur les divisions des figures* d'Euclide.

## **B) Le découpage.**

Le découpage, comme nous l'avons déjà formulé en introduction, est une autre composante de la tradition géométrique arabe d'Orient. Ce chapitre exposé de manière indépendante ou dans le prolongement des chapitres de mesurage *stricto sensu* peut se scinder en trois catégories.

D'une part, des traités sont composés dans une filiation, qui reste à caractériser, de l'œuvre perdue d'Euclide.

D'autre part, d'autres ouvrages mathématiques ou juridiques<sup>403</sup> sont rédigés pour résoudre, comme pour les chapitres de *misāḥa*, des problèmes inhérents aux traditions locales

---

<sup>401</sup> [al- $\bar{A}$ milī, 1981], p. 84-106 ; [Djebbar, 2007], p. 117.

<sup>402</sup> [al- $\bar{A}$ milī, 1981], p. 84-85 ; [Djebbar, 2007], p. 118.

<sup>403</sup> [Rashed, 2007], p. 25-26.

en réponse à la jurisprudence musulmane (héritage particulièrement) et à certaines corporations d'artisans.

Enfin, certains autres correspondent à une catégorie mixte où l'influence d'Euclide est patente dans le type et l'énonciation des problèmes mais dont le traitement répond davantage à la tradition locale précédemment évoquée.

Le premier auteur connu ayant peut-être contribué à la tradition arabe du découpage est le célèbre philosophe Yaʿqūb al-Kindī (m. ca.873) qui, d'après Ibn an-Nadīm, aurait rédigé une *Risalā fī taqṣīm al-muthallath wa l-murabbaʿ wa ʿamalīhimā* [Épître sur la division du triangle et du carré et leur construction]<sup>404</sup>. Mais, à notre connaissance, aucune copie de cette épître n'a encore été retrouvée<sup>405</sup>. De plus, aucun autre document ne nous renseigne sur le contenu de cet ouvrage.

### 1) Le découpage « savant » : la division des figures d'Euclide.

Ibn an-Nadīm précise dans son *Fihrist* que Thābit Ibn Qurra aurait traduit ou révisé le traité *Sur les divisions des figures* d'Euclide<sup>406</sup>. Mais, à notre connaissance, aucun manuscrit ne vient confirmer cette information.

En plus de la version arabe du texte d'Euclide que nous avons déjà présentée<sup>407</sup>, signalons que le découpage des figures est un thème récurrent dans plusieurs autres travaux mathématiques d'as-Sijzī<sup>408</sup>.

Un autre document, anonyme, témoigne de l'existence de l'œuvre d'Euclide. Il s'agit d'un recueil de problèmes géométriques *Masā'il mutafarriqa handasīya* [Divers problèmes de géométrie], probablement du 10<sup>e</sup> siècle<sup>409</sup>. Il renferme deux propositions consécutives en

---

<sup>404</sup> [Suter, 1892], p. 12 ; [Sezgin, 1974], p. 258.

<sup>405</sup> [Djebbar, 2007], p. 119.

<sup>406</sup> [Suter, 1892], p. 17.

<sup>407</sup> « Les pratiques de mesurage et de découpage dans les mathématiques grecques », p. 88-90.

<sup>408</sup> [Crozet, 2004], p. 127-130 ; [Rashed, 2004].

<sup>409</sup> [Sezgin, 1974], p. 396.

relation avec le texte *Sur les divisions* d'Euclide<sup>410</sup>. La première d'entre elles dont l'objectif est de tracer, dans un cercle, deux droites parallèles qui en coupent une partie déterminée, cite explicitement l'ouvrage grec comme source du problème<sup>411</sup>.

## 2) Le découpage dans la tradition locale.

### a) La tradition juridique musulmane.

Ce paragraphe tente d'établir la relation entre les pratiques géométriques du découpage et les pratiques juridiques en place.

En effet, la répartition des héritages en droit musulman est une mission importante et complexe<sup>412</sup>. Celle-ci nécessite l'intervention de deux domaines de connaissances différents qui peuvent être représentés par la même personne ou bien deux personnes séparées.

D'abord, la connaissance des règles juridiques attribuant les parts aux héritiers est indispensable. Ensuite, cette répartition effective implique des connaissances d'ordre mathématique. Il s'agit de réaliser le partage et de calculer la part revenant à chacun des héritiers. Dans le cadre d'un héritage, le *qassām* ou *dharrāō* [découpeur] est donc spécialement chargé de diviser des parcelles entre ayants droit selon des conditions fixées par les règles de répartition. Pour une transaction commerciale aboutissant à un partage de biens immeubles, le *qassām* divise en respectant les parts revenant à chaque personne impliquée dans le contrat de ladite transaction<sup>413</sup>.

### b) Thābit Ibn Qurra.

La contribution de Thābit au découpage ne se limite pas à sa probable révision de l'œuvre d'Euclide. En effet, il rédige aussi une épître sur le découpage de carrés : *Fī l-ḥujja*

---

<sup>410</sup> [Schoy, 1926], p. 32-34, ; [Hogendijk, 1993], p. 144.

<sup>411</sup> [Schoy, 1926], note 3, p. 32 ; [Hogendijk, 1993], p. 161.

<sup>412</sup> [Schacht, 1983], p. 143-146.

<sup>413</sup> [Djebbar, 2007], p. 115. D'après Ibn an-Nadīm, le juriste Muḥammad Ibn al-Ḥasan ash-Shaybāni (749-805) a rédigé un *Kitāb al-qisma* [Livre sur les divisions]. Cet ouvrage pourrait traiter de la division des terrains entre ayants droit mais aucune information supplémentaire ne vient justifier cette hypothèse ; [Dodge, 1998], p. 505.

*al-mansūba ilā Suqrāt fī l-murabbaʿi wa quṭrihī* [Sur la preuve attribuée à Socrate au sujet du carré et de sa diagonale]<sup>414</sup>.

Un manuscrit du Caire<sup>415</sup> nous permet d'en connaître le contenu. Thābit propose deux démonstrations du « théorème de Pythagore » sur le modèle d'un découpage de deux carrés qu'il assemble de manière judicieuse<sup>416</sup>. En outre, il généralise ce même théorème selon deux axes. D'abord, il démontre, ce qu'Euclide avait déjà fait<sup>417</sup>, que le résultat n'est pas seulement vérifié pour des carrés, mais pour toutes autres figures semblables et semblablement construites sur les côtés d'un triangle rectangle. Ensuite, il énonce sans démonstration un résultat pour un triangle quelconque.

### c) Les problèmes traditionnels de découpage de terrains.

A l'instar des juristes, dès le 10<sup>e</sup> siècle, des mathématiciens proposent, dans leurs propres développements mathématiques, des problèmes « concrets » de découpage des terrains. Dans les traités susmentionnés d'al-Karajī et d'Ibn Ṭāhir, des problèmes de découpage de terrains suivent des contraintes en réservant un chemin d'accès aux différentes parcelles obtenues :

*« Par exemple, une terre vingt par trente, nous voulons la partager entre trois frères, et nous construisons dans celle-ci entre eux un chemin de deux coudées de largeur<sup>418</sup>. »*

Dans le *Kāfī*, il s'agit par exemple de diviser un terrain entre trois personnes de façon à ce que l'une d'entre elles ait la moitié, la seconde le tiers du reste, le troisième le quart en respectant en outre l'aménagement d'un chemin de largeur donnée pour servir chacune des parcelles<sup>419</sup>.

Ce type de découpage se retrouve au 16<sup>e</sup> siècle chez Ibn al-Ḥanbalī, déjà évoqué comme un témoin du mesurage, qui propose de découper

*« un terrain contenant en son milieu [une partie] qu'il n'est pas permis de mesurer, comme une récolte en cours, une mosquée, une colline ou un lac salé non cultivable »<sup>420</sup>.*

---

<sup>414</sup> [Sezgin, 1974], p. 269.

<sup>415</sup> Analysé dans [Sayili, 1960].

<sup>416</sup> [Djebbar, 1998], p. 109.

<sup>417</sup> [H. VI. 31] : « Dans les triangles rectangles, la figure sur le côté sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés contenant l'angle droit, semblables et semblablement décrites. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 236.

<sup>418</sup> [Ibn Ṭāhir, 1985], p. 372.

<sup>419</sup> [al-Karajī, 1986], p. 202-203.

Un autre traité, dont une copie date de 1296, s'intéresserait au découpage des terrains. Attribué à Aḥmad Ibn Ja'ôfar, le *Kitāb fī qismat al-araḍīn* [Livre sur la division des terrains] n'est conservé que dans un seul manuscrit qui, semble-t-il, n'a pas encore été analysé<sup>421</sup>. Néanmoins, sans preuves contraires, le seul titre de cet ouvrage nous permet de l'intégrer dans le découpage traditionnel des terrains.

### 3) Une tradition mixte du découpage.

C'est sans doute Abū l-Wafā' qui fournit l'élément connu le plus significatif de cette tradition mixte. Dans le *Kitāb fīmā yaḥtāju ilaihi aṣ-ṣāni' min a'omāl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], le géomètre persan résout, comme mentionné précédemment, des problèmes de découpage et de composition de figures dans les quatre derniers chapitres.

Certains problèmes se rapprochent davantage des découpages et assemblages proposés par Thābit Ibn Qurra. Il faut, par exemple, construire un carré à l'aide de trois carrés donnés<sup>422</sup>. D'autres sont dans le prolongement de la tradition euclidienne de la division des figures. En effet, Abū l-Wafā' propose, sans aucune démonstration (comme pour le mesurage), la résolution de divers problèmes de découpages de triangles (chap. 8) et de quadrilatères (chap. 9). Il partage, par exemple, un quadrilatère en deux parties égales par une ligne passant par un de ses angles, par un point situé sur un de ses côtés, ou encore par un point situé en dehors de celui-ci<sup>423</sup>. Il expose aussi les problèmes de découpage d'un tiers de cercle et de bissection d'un secteur. De nombreux problèmes de ces deux chapitres sont semblables à ceux de la traduction arabe d'as-Sijzī du texte *Sur les divisions* d'Euclide. Voici une synthèse de ces concordances :

---

<sup>420</sup> Traduction A. Djebbar ; [Djebbar, 2007], p. 118.

<sup>421</sup> [Sezgin, 1974], p. 396.

<sup>422</sup> [Abū l-Wafā', 1979], p. 145 ; [Berggren, 2007], p. 611-616.

<sup>423</sup> [Aghayani-Chavoshi, 1996], vol. 1, p. 148-149.

<i>Sur les divisions</i> d'Euclide <sup>424</sup>	Le livre d'Abū'l-Wafā' <sup>425</sup>
#1	Chap. 8 ; #84
#2	Chap. 8 ; #85
#3	Chap. 8 ; #82
#4	Chap. 9 ; #95
#5	Chap. 9 ; #96
#6	Chap. 9 ; #97-#101
#7	Chap. 9 ; #102, #103
#8	Chap. 9 ; #106, #107
#9	Chap. 9 ; #104
#10	Chap. 9 ; #105
#11	Chap. 9 ; #108
#12	Chap. 9 ; #110
#13	Chap. 9 ; #90
#14	Chap. 9 ; #111, #112
#15	Chap. 9 ; #92
#16	Chap. 9 ; #113-#115
#27	Chap. 9 ; #119
#28	Chap. 9 ; #118

Dans le chapitre 8 consacré au triangle, on trouve un problème original par rapport aux traités précédents, à savoir le découpage, à l'intérieur d'un triangle donné, d'un second triangle semblable au premier. Une dernière partie est consacrée aux problèmes traditionnels de partage de terrains qui se posent au « découpeur » ou à l'arpenteur en charge du bornage d'un terrain. Il s'agit par exemple de diviser un trapèze en deux ou trois parties, en laissant un chemin de largeur donnée menant à ces parties<sup>426</sup>.

Dans son analyse comparative des problèmes de découpages de la tradition arabe d'Orient<sup>427</sup>, J.P. Hogendijk prend en compte le texte d'Abū l-Wafā'. Les hypothèses issues de

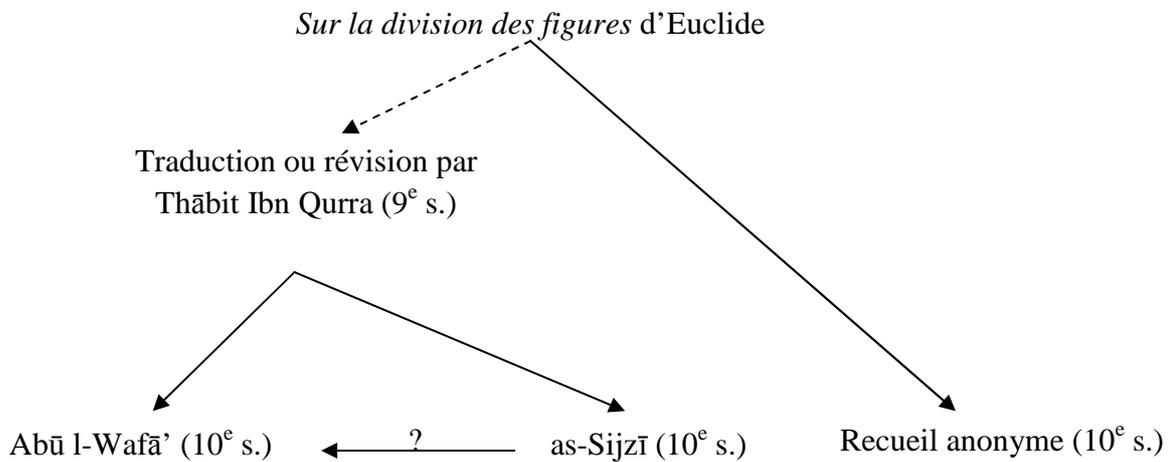
<sup>424</sup> Numération des problèmes de l'édition de [Hogendijk, 1993].

<sup>425</sup> Numération des problèmes de l'édition de [Aghayani-Chavoshi, 1996].

<sup>426</sup> Nous avons déjà mentionné ces problèmes dans les ouvrages du 11<sup>e</sup> siècle d'al-Karājī ou d'Ibn Ṭāhir.

<sup>427</sup> [Hogendijk, 1993]

cette analyse nous permettent, en l'absence de travaux plus récents, de proposer un schéma de la continuité arabe du texte perdu *Sur la division des figures* d'Euclide que l'on a précédemment évoqué.



Avant de conclure, nous devons ajouter à notre recension un dernier représentant de la tradition arabe d'Orient du découpage des figures planes<sup>428</sup>. Muḥammad al-Baghdādī dont on ne sait rien sinon qu'il est originaire de Bagdad aurait rédigé un ouvrage sur le thème. Il pourrait être intitulé *Kitāb taqṭiṭ as-suṭūḥ* [Livre de la division des surfaces]. Aucun manuscrit arabe n'a, à ce jour, été retrouvé. La traduction latine – *De superficierum divisionibus liber* – atteste la présence de cet ouvrage en Occident. Mais, le nom de son auteur, un certain Muḥammad al-Baghdādī sur lequel nous reviendrons, suppose qu'il aurait été rédigé en Orient.

La littérature arabe sur le découpage en Orient musulman semble donc s'être développée essentiellement selon deux directions : l'une dans la continuité du travail perdu d'Euclide, et l'autre davantage tournée vers des préoccupations pratiques et utilitaires. Néanmoins, le corpus connu de cette littérature met en évidence, et notamment par les représentants d'une tradition mixte, le fait que ces deux directions ne se sont pas développées de manière indépendante. Un va-et-vient quasi permanent entre géométrie savante et

---

<sup>428</sup> Précisons que nous n'avons pas la prétention d'avoir dressé ici une liste exhaustive des travaux orientaux sur le découpage. Il faudrait, en particulier, prendre en compte les différents témoins de la tradition persane.

géométrie pratique apparaît alors comme une caractéristique de cette discipline intégrée ou non aux chapitres de *misāḥa*.

### C) À qui s'adressent les traités de mesurage et de découpage en Orient musulman ?

Plusieurs auteurs communiquent explicitement les intentions et motivations inhérentes à leur travail. Si ces précieux témoignages ne nous permettent pas exclusivement de reconstituer une partie du lectorat visé par les traités que nous venons de décrire, ils permettent néanmoins de décrire leur utilité.

D'abord, al-Khwārizmī précise vouloir que son livre d'algèbre « *enferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui en lui est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration, et d'autres choses relevant du calcul et de ses sortes*<sup>429</sup>. »

Sont ici clairement visés, en plus des juristes et des marchands, le *massāḥ* ou *mu'addil*, le *qassām* ainsi que le *muhandis*<sup>430</sup>. Ces trois termes distinguent les trois catégories de personnes, entre autres, à qui al-Khwārizmī destine son ouvrage. Le premier terme renvoie à l'arpenteur dont le travail permet de déterminer l'assiette de l'impôt sur les terres agricoles et les loyers d'habitation. Quant au *muhandis*, il a un double sens. Il désigne à l'origine la personne chargée de réaliser le creusement des canaux et de mesurer les quantités d'eau à distribuer. Il indique aussi le mathématicien géomètre. Quant au *qassām* dont la tâche est définie précédemment, sa racine trilitère q-s-m renvoie au terme *qisma* [découpage].

Venons-en au dessein explicite d'Abū Kāmil. Dans l'introduction de son *Kitāb al-misāḥa*, il justifie son originalité, par rapport à ses habitudes, de ne pas exposer les

---

<sup>429</sup> [Rashed, 2007], p. 94.

<sup>430</sup> [Djebbar, 2007], p. 115.

démonstrations des procédures proposées<sup>431</sup>. Il indique alors ne pas vouloir allonger ou rendre plus difficile son traité conçu comme une introduction pour les débutants ou comme un manuel pour les amateurs<sup>432</sup>. Le contexte historique et social du traité d'Abū Kāmil aurait pu laisser croire, étant donné son contenu, qu'il puisse s'adresser aux employés de l'administration cadastrale d'Égypte, ou aux propriétaires qui louent leurs terres. J. Sesiano a montré qu'aucun de ces deux groupes n'apparaît concerné<sup>433</sup>. Les premiers, forts de leurs pratiques ancestrales, sont enclins à la tradition et non à l'innovation. Les seconds, premiers bénéficiaires des procédés approximatifs utilisés par les géomètres officiels, ne désirent pas atteindre l'exactitude des formules qui provoquerait une baisse de leur rente. Le lectorat semble alors exclusivement comprendre le « *débutant* » et l'« *amateur* ».

Abū l-Wafā', quant à lui, est très explicite sur ses intentions et donc sur le public visé par son ouvrage. Le premier indice est évidemment le titre même de son ouvrage : *Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques*. Cette synthèse réalisée à partir de l'expérience des artisans et des connaissances savantes des géomètres s'adresse alors en fait à ces deux derniers groupes humains. Il développe une longue critique des uns et des autres pour montrer en quoi son travail est original et utile<sup>434</sup>. Le géomètre n'a pas, nécessairement, un savoir-faire. Il connaît la vérité par la démonstration abstraite mais n'est pas toujours capable de la transférer dans le domaine pratique. L'artisan (le décorateur, l'arpenteur ...), quant à lui, travaille sur la réalité des constructions, des matériaux concrets qui n'est pas démontrée au moyen de raisonnements scientifiques. C'est pourquoi il commet des erreurs. Abū l-Wafā' se propose alors de corriger les procédures des artisans et autres arpenteurs avec ses connaissances théoriques. Il distingue les procédures justes et vérifiées par la géométrie savante des procédures approchées, inexactes. Il précise néanmoins que l'artisan qui réaliserait ces dernières ne commet pas d'erreurs car elles « paraissent » vraies.

Intéressons-nous maintenant au traité d'Ibn al-Haytham. Dans ses classifications des lignes, des surfaces et des solides, nous avons déjà relevé que le géomètre écarte tout ce qui ne concerne pas directement le *massāh*. De plus, sans les opposer, il différencie à deux

---

<sup>431</sup> [Sesiano, 1996], p. 2.

<sup>432</sup> Ibid., p. 2.

<sup>433</sup> Ibid., p. 2-3.

<sup>434</sup> [Berggren, 2007], p. 612.

reprises l'arpenteur et le géomètre. Si Ibn al-Haytham traite d'une question qui ne répond pas aux besoins immédiats du *massāḥ*, il renvoie alors systématiquement aux « livres des géomètres »<sup>435</sup>. Enfin, les deux dernières parties du traité, la détermination pratique des hauteurs des corps avec le fil à plomb et le récapitulatif des procédés de mesures, nous rappellent que le traité d'Ibn al-Haytham est bien dirigé vers les utilisateurs de la mesure.

Enfin le *qāḍī* Abū Bakr apporte un témoignage supplémentaire sur le lectorat potentiel des traités de mesurage. Il rédige son travail sur la mesure systématique des figures géométriques en réponse à une demande de frères<sup>436</sup>. Cette information est trop générale pour émettre une quelconque hypothèse. En effet, écartant les frères au sens propre, ces frères peuvent aussi bien désigner une partie de ses amis ou de ses coreligionnaires. En outre, avec le témoignage du voyageur Ibn Battūta, les frères pourraient aussi désigner toute personne intégrée dans une corporation de métiers<sup>437</sup>.

Ensuite, il précise l'utilité de son livre, pour les affaires religieuses et dans plusieurs domaines financiers et légaux comme les héritages ou les testaments<sup>438</sup>. Il ajoute que l'« *apprenant intelligent* » maîtrisera facilement l'ouvrage à condition d'en faire une lecture ordonnée et sérieuse<sup>439</sup>. Il est donc fort probable que le public visé par le *qāḍī* correspond à l'ensemble de ses fréquentations qui regroupe ses pairs et des étudiants juristes.

---

<sup>435</sup> [Rashed, 2000], p. 541, l. 8-9, p. 611, l. 7-8.

<sup>436</sup> [Hogendijk, 1990], p. 146.

<sup>437</sup> [Ibn Battūta, 1982], p. 138.

<sup>438</sup> [Hogendijk, 1990], p. 146.

<sup>439</sup> Ibid., p. 146-147.

# Chapitre cinq

## Le mesurage et le découpage dans les mathématiques de l'Occident musulman.

### **A) Les textes connus dans leur version originale.**

#### **1) Les témoins arabes du mesurage et du découpage de l'Occident musulman.**

Il faut préciser dès maintenant que le nombre de documents qui sont aujourd'hui en notre possession n'est pas représentatifs de l'importance de l'activité liée au mesurage et au découpage des figures de l'Occident musulman. En effet, nous savons grâce à l'étude de ces quelques documents, des informations biobibliographiques et des témoignages directs ou indirects d'ouvrages andalous, que la géométrie pratique a revêtu différentes formes et a donné lieu à de nombreuses publications depuis le 9<sup>e</sup> siècle jusqu'à la fin du 15<sup>e</sup> siècle. Elle

est également présente dans la formation de base de certaines corporations ou catégories de fonctionnaires et d'une manière générale, dans le cursus scolaire du jeune andalou<sup>440</sup>.

Avant de présenter en détail les ouvrages de *misāḥa* dont le contenu a pu être analysé, nous allons évoquer quelques auteurs dont les ouvrages ne nous sont pas parvenus mais dont on sait que leurs activités administratives ou d'enseignement ont pu les amener à s'intéresser, de près ou de loin, au mesurage et au découpage.

Dès le 9<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens cordouans Abū Ghālib al-Qurṭubi et son fils Muḥammad s'intéressent à la répartition des héritages et au mesurage. Mais, aucun ouvrage sur ces sujets ne leur est explicitement attribué<sup>441</sup>.

Au 10<sup>e</sup> siècle, les biobibliographes signalent Aḥmad Ibn Naṣr (m. 974-5), arithméticien et géomètre de Cordoue. Il est l'auteur d'un manuel de mesurage, intitulé *Kitāb al-misāḥa* [Livre sur le mesurage]<sup>442</sup>. Il ne nous est pas parvenu et son contenu nous est encore inconnu<sup>443</sup>. Étant données les connaissances en architecture que semble posséder Ibn Naṣr, il est possible que cet ouvrage traite de problèmes concrets liés au cadastre<sup>444</sup>. Mais, à notre connaissance, aucun témoignage postérieur ne vient confirmer cette hypothèse.

Pour le 11<sup>e</sup> siècle, deux noms nous sont parvenus : Ibn Ḥayyān (m. 1035-6) de Cordoue qui est secrétaire du fameux al-Manṣūr. Il s'intéresse à la science du calcul et du mesurage<sup>445</sup>. Le second Aṣ-Ṣaffār est originaire de Cordoue et enseigne le mesurage et les répartitions des héritages<sup>446</sup>. Ces deux hommes de sciences pourraient avoir rédigé des ouvrages ou des manuels sur le mesurage et le découpage, mais aucun témoignage postérieur ne vient le confirmer.

---

<sup>440</sup> Par exemple, le poète, historien, juriste et théologien andalou Ibn Hazm (m. 1064) recommande, dans le *Marātib al-ʿulūm* [Les degrés des sciences], l'enseignement de la science des nombres, des quatre opérations, des rapports, de la géométrie et de la *misāḥa* dans le cursus scolaire habituel des élèves qui dépassent le stade élémentaire d'apprentissage de la lecture et de l'écriture ; [Balty-Guesdon, 1992], p. 411.

<sup>441</sup> [Sanchez-Perez, 1921], p. 45 ; [Balty-Guesdon, 1992], p. 606, p. 611.

<sup>442</sup> [Sezgin, 1974], p. 391. J.A. Sanchez-Perez indique comme titre *Kitāb al-misāḥat al-majkhūlat* [Livre sur les aires inconnues], [Sanchez-Perez, 1921], p. 54.

<sup>443</sup> [Sezgin, 1974], p. 391 ; [Balty-Guesdon, 1992], p. 404.

<sup>444</sup> Il aurait été chargé par le calife al-Ḥakam II de la construction d'une ville ; [Balty-Guesdon, 1992], p. 404.

<sup>445</sup> Ibid., p. 635.

<sup>446</sup> Ibid., p. 670.

Abordons maintenant la présentation des quelques ouvrages sur le mesurage et le découpage de l'Occident musulman qui nous sont parvenus.

**a. La *Risāla fī-t-taksīr* d'Ibn ʿAbdūn.**

Ibn ʿAbdūn al-Jabalī est né en 923 à Cordoue où il a poursuivi ses études. Avant d'être médecin d'al-Ḥakam II (961-976) et de son successeur Hishām II, il enseigne la science du calcul et le mesurage. Il est l'auteur d'une *Risāla fī-t-taksīr* [Epître sur le mesurage] qui nous est parvenue<sup>447</sup>. Dans celle-ci, en plus d'avoir été un « maître d'école » et un « géomètre », il est présenté comme un « illustre homme de loi » et un « spécialiste des héritages »<sup>448</sup>. Aucun autre témoignage venant confirmer ces deux dernières informations ne nous est parvenu. L'objectif d'Ibn ʿAbdūn est annoncé dans l'introduction de son ouvrage, en ces termes :

« J'ai composé ce livre en m'efforçant d'en faire, pour ceux qui voudraient l'étudier, un livre abrégé englobant les <différentes> formes de mesurage. Et si l'esprit du débutant ne risquait pas de le fuir au moment de l'étudier, j'aurais établi tout cela par la démonstration<sup>449</sup>. »

Cette épître confirme la présence d'un enseignement de la géométrie pratique en *Andalus* au 10<sup>e</sup> siècle. A ce titre, elle fournit donc de précieux renseignements sur les connaissances et le savoir-faire disponibles à cette époque. Comme nous l'avons déjà remarqué chez la plupart des auteurs orientaux de *misāḥa*, aucune justification des procédures n'est donnée.

L'épître expose 128 problèmes répartis en 5 catégories correspondant aux types de figures ou solides étudiés<sup>450</sup>. Ibn ʿAbdūn traite d'abord les quadrilatères (carré, rectangle, losange, parallélogramme et trapèze isocèle), continue avec les triangles (acutangle, obtusangle et rectangle). Puis, il revient à des problèmes sur les trapèzes (quelconques et droits). Il poursuit avec les solides réguliers (parallélépipèdes rectangles, pyramide tronquée, pyramide à base carrée) puis avec le cercle et ses différentes portions. Il conclut son manuel avec l'étude de trois solides dont la terminologie est particulière et semble caractéristique des pratiques andalouses du mesurage.

---

<sup>447</sup> Edition et analyse dans [Djebbar, 2005] ; [Djebbar, 2006].

<sup>448</sup> [Djebbar, 2005], p. 27.

<sup>449</sup> [Djebbar, à paraître]

<sup>450</sup> Nous reprenons l'organisation et la numérotation de l'édition d'A. Djebbar ; [Djebbar, 2005] ; [Djebbar, 2006].

Le premier est la *ḥurmat aṭ-ṭaḥāim* [tas de froment]. Il correspond en fait au cône.

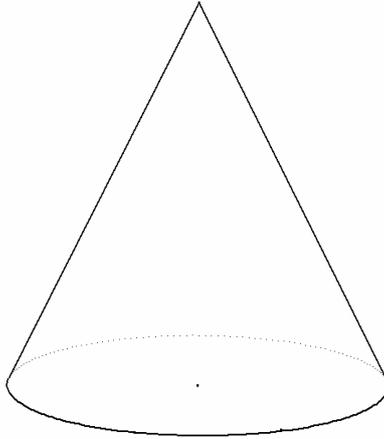


Figure 7. *ḥurmat aṭ-ṭaḥāim*

Le second appelé *ḥūt aṭ-ṭaḥāim* [poisson de froment] est un prisme dont le sommet est nommé *shawka* [arête] dans le premier sens du terme.

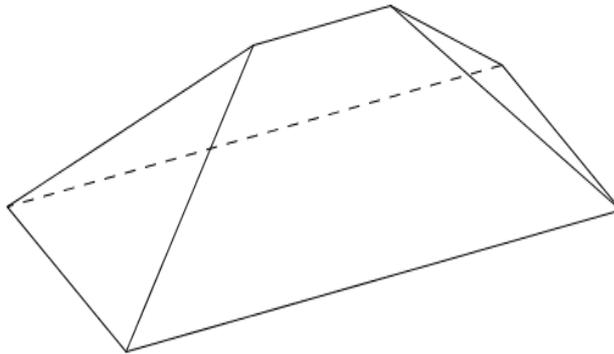


Figure 8. *ḥūt aṭ-ṭaḥāim*

Enfin le troisième est un *ḥūt aṭ-ṭaḥāim* tronqué, et Ibn ḥAbdūn le nomme *fanīqa*.

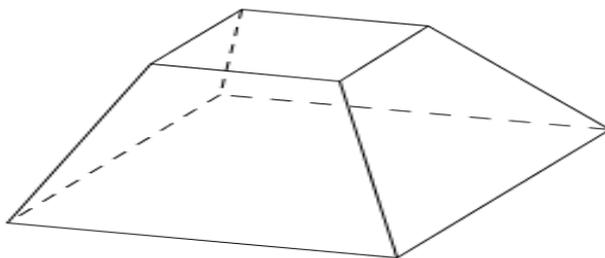


Figure 9. *fanīqa*

Plusieurs définitions du terme *fanīqa* peuvent être données. Etymologiquement, cela signifie un sac dans lequel on transporte de la terre<sup>451</sup>. Mais, nous avons retrouvé une autre occurrence de ce terme dans la tradition agricole andalouse. Il s'agit dans ce cas d'une unité de mesure de superficie<sup>452</sup>, et d'une unité de volume de grains utilisée pendant très longtemps dans la péninsule ibérique au moins à partir du 10<sup>e</sup> siècle<sup>453</sup>. Pour ce qui est de l'unité de volume, sa persistance est confirmée jusqu'au 19<sup>e</sup> siècle dans les pratiques métrologiques espagnoles, en particulier dans la région de la Rioja<sup>454</sup>.

La terminologie de ces solides n'est pas le seul élément qui distingue le manuel d'Ibn ōAbdūn des manuels de l'Orient musulman que nous avons évoqués au chapitre précédent. Toujours du point de vue terminologique, deux figures planes témoigneraient d'une tradition peu ou pas représentée en Orient. « *Le quadrilatère à côtés différents dont les deux longueurs et les deux largeurs sont égales et dont les angles sont droits* », à savoir le rectangle, est aussi nommé à plusieurs reprises *murabba' mustaṭīl* [quadrilatère oblong]<sup>455</sup>.

Le trapèze, quant à lui, est nommé *ḥarīdat ar-ra's* [<figure> à large sommet]. Cette appellation qu'Ibn ōAbdūn semble être le seul à formuler, peut sous-entendre le trapèze comme une section de triangle. C'est ce que peuvent suggérer les opérations de *tajbīr* [restauration] du trapèze pour lesquelles l'andalou utilise aussi le verbe *injabara* [restaurer]<sup>456</sup> dans un sens géométrique et non algébrique comme al-Khwārizmī.

D'un point de vue interne, de nombreux énoncés sont proposés sans respect de l'homogénéité des grandeurs : par exemple, Ibn ōAbdūn ajoute ou retranche des longueurs à des surfaces et réciproquement. De plus, plusieurs problèmes s'exprimeraient aujourd'hui comme des problèmes quadratiques. A la manière des scribes mésopotamiens et notamment celui de la tablette BM 13 901, l'auteur andalou décrit des procédures se rapprochant des algorithmes de l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī sans jamais s'y référer. Pour être plus précis, ni les

---

<sup>451</sup> [Djebbar, 2002], p. 215.

<sup>452</sup> [Vallvé Bermejo, 1976], p. 353.

<sup>453</sup> [Vallvé Bermejo, 1977], p. 117-118. Cette utilisation est attestée par Ibn Bassāl (11<sup>e</sup> s.) qui mentionne la *fanīqa* comme mesure de capacité dans son *Kitāb al-qasd wa-l-bayān* [Livre du but et de la démonstration] ; [El-Faīz, 1998], p. 331-332.

<sup>454</sup> [Fondacion Caja Rioja, 2001], p. 76, 118-119.

<sup>455</sup> Problèmes [38<sup>e</sup>], [77], [80], [126] ; [Djebbar, 2005] ; [Djebbar, 2006].

<sup>456</sup> Problèmes [49], [50], [81], [82] ; [Djebbar, 2005].

objets de l’algèbre (chose, racine et bien), ni ses opérations caractéristiques (restauration et comparaison) n’apparaissent tout au long du manuel. L’analyse moderne de l’*épître* révèle qu’aucun problème ne se ramènerait à l’équation de type 5, à savoir de la forme  $x^2 = bx + c$ . Cette *Epître* sur le mesurage d’Ibn *ôAbdûn* est donc un représentant andalou de pratiques pré-algébriques, dénommées « algèbre d’arpentage » par J. Høyrup<sup>457</sup>.

Nous ne présenterons pas les problèmes de l’*Epître* d’Ibn *ôAbdûn* parce que la plupart sont identiques aux problèmes des livres sur le mesurage qui sont précisément l’objet de notre travail. Dans l’état actuel de nos connaissances, nous ne pouvons savoir si ce manuel de *misāḥa* prolonge en partie une tradition différente de celles que nous avons déjà présentées, tout en étant dans la continuité d’une tradition locale avec une terminologie et des pratiques propres à l’*Andalus*.

#### **b. Le *Talqīḥ al-afkār* d’Ibn al-Yāsamīn.**

Ibn al-Yāsamīn est un auteur maghrébin qui s’intéresse de près ou de loin au mesurage. De descendance berbère du Maghreb extrême, il a probablement perfectionné sa formation en *Andalus*, à Séville plus précisément, et il meurt assassiné à Marrakech en 1204. Fort apprécié pour ses talents de versificateur, il emploie ce style littéraire, probablement à des fins didactiques, pour rédiger trois poèmes de mathématiques. Le plus célèbre est son *Urjūza fī l-jabr wa-l-mūqabala* [Poème sur la restauration et la comparaison]<sup>458</sup>.

Il est aussi l’auteur d’un important ouvrage de calcul, le *Talqīḥ al-afkār* [La fécondation des esprits], dans lequel il traite, sans démonstration, du mesurage en tant que tel et comme domaine d’application de l’algèbre. C’est tout l’objet de la dernière section du cinquième chapitre – « *sur des choses dont on a besoin en algèbre et en muqābala* » – dont les problèmes de mesurage et de découpage semblent entièrement repris du *Kitāb al-Kāfī fī l-ḥisāb* [Le Livre suffisant en calcul] d’al-Karajī que nous avons déjà évoqué<sup>459</sup>. Cette section

---

<sup>457</sup> [Høyrup, 1992]

<sup>458</sup> [Abdeljaouad, 2005]. Un autre poème sur les nombres irrationnels quadratiques, *Urjūza fī-l-judhūr* [Poème sur les racines], nous est aussi parvenu ; [Zemouli, 1986]. Il serait l’auteur d’un troisième poème sur la méthode de fausse position, *Urjūza fī-l-kaffāt* [Poème sur les plateaux], qui n’a pas été retrouvé. Les écrits mathématiques, qui ont été retrouvés, ont été édités et étudiés dans [Zemouli, 1993].

<sup>459</sup> [Djebbar, 2002], p. 220-223.

est construite en deux parties : comme un manuel de *misāḥa* d'abord, puis comme un chapitre d'algèbre<sup>460</sup>.

La première partie débute avec la nomenclature des figures géométriques, puis l'évocation des unités de mesure qui ne sont pas les mêmes d'un pays à l'autre<sup>461</sup>. Sont ensuite exposées les procédures donnant l'aire ou des éléments des figures suivantes : les triangles, les quadrilatères (carré, rectangle, parallélogramme, trapèze) et le cercle et ses portions. En ce qui concerne les solides, Ibn al-Yāsāmīn traite du cylindre, du cône, de solides polygonaux, donne une formule approchée du volume d'une sphère. Il étudie aussi certaines surfaces et autres volumes utiles pour l'architecture et la construction (pièces d'une maison, coupole).

La seconde partie propose de résoudre des problèmes explicitement à l'aide des objets et des opérations de l'algèbre<sup>462</sup>. L'auteur pose la valeur cherchée comme la chose, c'est-à-dire l'inconnue.

### c. Le traité d'al-Mursī.

Nous n'avons que très peu d'informations sur Muḥammad al-Mursī. Comme son nom l'indique, il est originaire de la ville de Murcie et sa période d'activité se situerait dans la première moitié du 13<sup>e</sup> siècle<sup>463</sup>. Il est l'auteur d'un ouvrage intitulé *Kitāb al-qurb fī t-taksir wa t-taqīṭ* [Livre qui facilite le mesurage et le découpage]<sup>464</sup>.

Etant donnés les thèmes traités, celui-ci s'adresse à différentes corporations, parmi lesquelles les arpenteurs et les découpeurs des surfaces mais aussi les décorateurs, les maçons, les agriculteurs et les marchands. Ajoutons que ce livre contient des éléments d'un savoir mathématique « savant » : le recours ponctuel à l'algèbre avec ses objets et ses opérations caractéristiques, ainsi que des références explicites à Euclide<sup>465</sup>. Ces éléments tendent à montrer que le lectorat d'al-Mursī s'étend à des artisans qui ne sont pas des praticiens au sens

---

<sup>460</sup> [Zemouli, 1993], p. 269-299.

<sup>461</sup> Ibid., p. 269

<sup>462</sup> Ibid., p. 295-299.

<sup>463</sup> Il est même probable qu'elle soit antérieure à 1236 ; [Djebbar, 2007], p. 126.

<sup>464</sup> Analysé dans [Djebbar, 2007].

<sup>465</sup> Les deux références à Euclide sont difficiles à interpréter. Elles ne semblent pas renvoyer aux *Eléments*. Etant donné le contenu de l'ouvrage d'al-Mursī, elles pourraient renvoyer au livre perdu *Sur la division des figures*. Mais aucun élément ne vient confirmer cette hypothèse ; [Djebbar, 2007], p. 128-129.

traditionnel du terme, mais des hommes suffisamment familiers avec la culture « savante » des mathématiciens.

Le manuel d'al-Mursī s'organise autour de huit chapitres. Les cinq premiers traitent des figures planes dans l'ordre croissant de leur nombre de côtés (les triangles, les trapèzes, les quadrilatères où le trapèze est à nouveau étudié et les polygones) pour finir par l'étude du cercle et de ses portions. Ces chapitres sont développés selon le même schéma : généralités, mesurage et problèmes de découpage.

Le sixième chapitre propose, à la manière classique des manuels de *misāḥa*, des problèmes où il s'agit de déterminer certains éléments inconnus d'une figure plane donnée à partir de ses éléments connus. Les figures planes sont alors étudiées dans un ordre différent que celui des cinq premiers chapitres ; al-Mursī débute par les quadrilatères et terminent par le triangle<sup>466</sup>.

Enfin, les deux derniers chapitres étudient successivement l'inscription de figures (carré, cercle, triangle équilatéral) dans d'autres (cercle, carré, triangle, pentagone, hexagone), leur circonscription par d'autres ainsi que d'autres problèmes de construction.

La terminologie et les procédures utilisées apparentent cet ouvrage à la tradition andalouse de la géométrie du mesurage. Il définit, par exemple, le trapèze comme un triangle dont on a ôté un triangle, ce que la terminologie d'Ibn ḥAbdūn laissait envisager. On retrouve aussi, dans la section traitant du volume de solides particuliers, deux solides déjà repérés chez Ibn ḥAbdūn : le *ṣubrat aṭ-ṭaḥām* [tas de froment], et le *ḥūt aṭ-ṭaḥām* [poisson de froment]<sup>467</sup>.

Revenons aux problèmes de découpage proposés par al-Mursī<sup>468</sup>. Aucun d'eux n'est démontré.

Parmi ces problèmes, il faut distinguer ceux qui offrent des situations de mesurage après avoir coupé une partie de la figure initiale. Ils sont davantage à classer parmi les pratiques de mesurage avec des contraintes particulières. Quant aux autres, ils se répartissent

---

<sup>466</sup> Voir liste des problèmes dans Ibid., p. 143-144.

<sup>467</sup> Notons qu'al-Mursī remplace le mot *ḥurmat* par *ṣubra* qui désigne aussi le mot poisson, ce qui pourrait être un indice de différence régionale de l'appellation d'un même objet.

<sup>468</sup> Voir liste des problèmes dans [Djebbar, 2007], p. 140-144.

en deux catégories principales. La plus importante quantitativement correspond aux découpages de figures selon un rapport donné avec des conditions sur la transversale ou bien sur les propriétés de la figure découpée. Par exemple,

- découper un triangle selon un rapport donné par une ligne passant par un sommet et coupant le côté opposé.
- découper un triangle selon un rapport donné par une ligne coupant deux côtés du triangle et non nécessairement parallèle au troisième.
- découper un trapèze isocèle selon un rapport donné selon la hauteur (c'est-à-dire par une ligne perpendiculaire aux bases).
- découper un trapèze selon un rapport donné par une ligne coupant les deux bases.
- découper un carré ou un rectangle selon un rapport donné par une ligne parallèle à deux côtés.
- découper un carré ou un rectangle selon un rapport donné par une ligne coupant deux côtés consécutifs.

Certains autres problèmes ne proposent pas le découpage d'une figure mais plutôt la division de celle-ci en un certain nombre de figures semblables à la figure initiale et identiques entre elles. C'est, par exemple, le cas du triangle équilatéral qu'il faut diviser en quatre, neuf ou seize triangles eux-mêmes équilatéraux.

#### **d. Le traité d'Ibn al-Jayyāb.**

Les renseignements biographiques sur Ibn al-Jayyāb ne sont donnés que par les deux ouvrages retrouvés dont il est l'auteur. D'abord, le *Kitāb al-farā'id* qui étudie, comme son titre nous l'indique, la répartition des héritages<sup>469</sup>. Le second dont le sujet nous intéresse directement, traite du mesurage et du découpage des figures planes ainsi que du mesurage de solides : il s'agit du *Kitāb at-taqrīb wa t-taysīr li ifādat al-mubtadi' bi šinā'at at-taksīr* [Livre qui vulgarise et facilite pour faire profiter le débutant de l'art du mesurage]<sup>470</sup>. L'auteur a vécu au 13<sup>e</sup> siècle et sa période d'activité se situerait entre 1236 et 1281<sup>471</sup>.

---

<sup>469</sup> [Djebbar, 2007], p. 129-130.

<sup>470</sup> [Djebbar, 2007], p. 129.

<sup>471</sup> [Djebbar, 2007], p. 130.

Dans l'introduction de son traité, l'auteur évoque explicitement les salaires de ceux qui étaient chargés de découper les terres, les outils de l'arpenteur et du découpeur. Ainsi, l'ouvrage est explicitement destiné aux professionnels du découpage.

L'ouvrage se divise en deux parties<sup>472</sup> : la première s'intéresse au mesurage et au découpage des figures planes et la seconde expose le mesurage des solides.

Les sections sur le mesurage et le découpage des figures planes suivent le même plan d'exposition. Les deux chapitres sont organisés en fonction du nombre croissant de lignes (droites ou courbes) qui délimitent les figures planes : le cercle, les portions de cercles, les triangles et figures circulaires construites à partir de deux segments et un arc, les quadrilatères (carré, rectangle, trapèze), l'hexagone.

Quant au mesurage des solides, l'auteur étudie dans l'ordre le cylindre droit, le tronc de cône, le cône, la sphère, la demi-sphère, les parallélépipèdes, les pyramides tronquées et les prismes. Ibn al-Jayyāb achève son ouvrage avec des problèmes de calcul de volumes concrets.

Plusieurs similarités entre les travaux d'Ibn ōAbdūn, d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb sont à prendre en compte. Elles tendent d'ailleurs à confirmer une continuité des pratiques et de la terminologie dans les géométries pratiques d'*Andalus*.

Certaines procédures de calcul fournissant des résultats approchés se retrouvent dans les manuels. De plus, sont présents deux solides qui semblent, comme nous l'avons déjà précisé, caractéristiques d'*Andalus* : le *ḥūt aṭ-ṭaṭām* [poisson de froment]<sup>473</sup> et le *ḥurmat aṭ-ṭaṭām* [tas de froment]<sup>474</sup>.

Ibn al-Jayyāb présente néanmoins plusieurs particularités comme l'utilisation des fractions décimales et le recours systématique à une planche quadrillée pour dessiner et mesurer les figures planes.

---

<sup>472</sup> [Djebbar, 2007]. Les informations ont été complétées par la consultation d'une copie du manuscrit et les analyses personnelles d'A. Djebbar qu'il a bien voulu nous confier.

<sup>473</sup> Ms. Escorial n°929, fol. 58a, 58b.

<sup>474</sup> Ms. Escorial n°929, fol. 58b, 65a.

Précisons enfin, comme nous l'avons fait pour al-Mursī, les divers problèmes de découpage posés par Ibn al-Jayyāb dont aucun n'est accompagné de la démonstration. Limitons-nous aux problèmes liés aux figures rectilignes.

À propos du triangle,

- Découper un triangle selon un rapport donné par une ligne passant par un sommet et coupant le côté opposé.
- Couper une partie d'un triangle dans un rapport donné par une ligne parallèle à la base de telle sorte que la partie coupée soit un triangle ou un trapèze.
- Découper un triangle selon un rapport donné par une ligne coupant deux côtés du triangle non nécessairement parallèle au troisième.
- Couper un triangle équilatéral en neuf triangles équilatéraux.
- Couper un triangle quelconque par un segment de longueur donnée et parallèle à la base.

À propos des quadrilatères,

- Découper un carré, un rectangle ou un losange parallèlement (ou non) à un côté de telle sorte que la partie découpée soit un carré, un rectangle ou un triangle.
- Partager un carré, un rectangle ou un losange entre plusieurs héritiers ou ayants droit en prenant en compte l'aménagement d'un ou de plusieurs chemins, d'une ou de plusieurs entrées.
- Découper un trapèze par une ligne passant par un point de la base et un du sommet<sup>475</sup>, par un point d'un côté et un de la base, par un point du sommet et un d'un côté.
- Découper un trapèze par une ligne passant par un point de chaque côté parallèlement ou non à la base.

L'étude des travaux d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb concernant le découpage des figures planes montre des invariants. Ceux-ci fournissent autant d'éléments qui contribuent peut-être à établir des « orientations » dans les pratiques andalouses.

D'abord, de nombreux problèmes sont semblables chez les deux auteurs. Ces derniers ne leur sont pas spécifiques puisqu'ils sont aussi présents dans certains autres ouvrages d'Orient. Ils sont sans doute extraits d'un fond commun progressivement enrichi par les

---

<sup>475</sup> Le sommet (resp. la base) désigne ce que nous nommons aujourd'hui la petite base (resp. la grande base). Les côtés désignent alors les deux côtés non parallèles.

pratiques locales des corporations et les contributions originales de certains hommes de sciences.

Ensuite, aucun des deux auteurs andalous ne démontre ses découpages ; le problème est posé et résolu sans aucune justification.

Enfin, nombre de problèmes d'al-Mursī et d'Ibn al-Jayyāb sont pratiques au sens où ils répondent manifestement aux besoins de corporations telles que les décorateurs ou les répartiteurs d'héritage. Les divisions de figures en sous-figures semblables et égales ou bien encore l'aménagement de chemins entre copropriétaires correspondent à ces préoccupations pratiques.

Au vu de tous ces éléments, le découpage étudié par les deux auteurs andalous semblerait davantage se rapprocher de la tradition arabe d'Orient représentée par Ibn Ṭāhir, al-Karajī ou par Abū l-Wafā' plutôt que des travaux grecs d'Euclide ou même de Héron d'Alexandrie.

#### **e. D'autres ouvrages.**

Toujours au 13<sup>e</sup> siècle, il faut mentionner un long poème de 203 vers intitulé *al-Iksīr fī mubtaghā šinā'at at-taksīr* [L'élixir sur le désir de l'art du mesurage] qui s'inscrit dans la tradition que nous avons évoquée depuis le début de ce chapitre. Son auteur est Ibn Liyūn (m. 1346), un polygraphe, qui est l'auteur d'un second poème consacré au *ʿilm al-filāḥa* [science de l'agriculture]. Ce poème de 203 vers semble un représentant de la continuité d'Ibn ʿAbdūn.

Deux commentaires maghrébins tardifs sur le mesurage sont à signaler. Le premier est celui de Abū l-ʿAbbās Ibn al-Qāḍī (m. 1616) et le second celui de son neveu Abū ʿAbdallah Ibn al-Qāḍī (m. 1630). Dans le *Sharḥ al-Iksīr fī ʿilm at-taksīr* [Commentaire de l'Elixir sur la science du mesurage] du neveu, on trouve les volumes *fanīqa*, *ʿurmat aṭ-ṭaʿām* et *ḥūt aṭ-ṭaʿām*<sup>476</sup>. Mais il est intéressant de noter la présence de termes que nous n'avons pas trouvée

---

<sup>476</sup> [Ibn al-Qāḍī, 1957], p. 86.

dans les textes arabes du mesurage connu : le *qubūrī* pour dire *ḥūt aṭ-ṭaḥāḥ*<sup>477</sup>, le *makhrūt al-mudawwar* [cône circulaire<sup>478</sup>] pour le *ḥurmat aṭ-ṭaḥāḥ* et le *bayt munḥanī* [maison inclinée] qui n'a pas d'équivalents dans les textes étudiés<sup>479</sup>.

Signalons aussi l'ouvrage d'Ibn ar-Raqqām (m. 1315) : le *Tanbīh wa t-tabṣīr fī qawānīn at-taksīr* [Le rappel et l'éclaircissement sur les règles du mesurage]<sup>480</sup>. Très court et élémentaire, cet ouvrage semble en dehors d'une quelconque filiation avec les œuvres précédentes.

Enfin, mentionnons le *Mukhtaṣar fī l-misāḥa* [L'abrégé sur le mesurage] d'Ibn al-Bannā (m. 1321) pour la démarche originale de son auteur. C'est un manuel d'enseignement du mesurage rédigé en 1292<sup>481</sup>. Ibn al-Bannā désire d'une part classer naturellement les figures usuelles planes et solides en fonction de leur contour ou en fonction de leurs surfaces. Aucun exemple numérique n'est donné. Il cherche ensuite à dénombrer les équations issues de chacune des figures considérées en fonction de l'ensemble des éléments qui la caractérise<sup>482</sup>. Par exemple pour le cas du triangle, il précise :

« *Le triangle comporte cinq éléments : ses trois côtés, sa hauteur et son aire ; il comporte trente données à déterminer, parce que ce qui est connu peut être un, deux, trois ou quatre de ces éléments, et ce qui est à déterminer une inconnue entre ces éléments*<sup>483</sup>. »

## 2) Les traités de mesurage rédigés en hébreu.

---

<sup>477</sup> Deux paragraphes se suivent : *taksīr al-qubūrī* [mesurage du *qubūrī*] et *taksīr ḥūt aṭ-ṭaḥāḥ* [mesurage du poisson de table]. Nous gardons une transcription française du terme *qubūrī* car aucune traduction du terme ne semble convenir dans ce cadre.

<sup>478</sup> Cette appellation semble locale car dans la géométrie savante le *makhrūt* désigne le cône.

<sup>479</sup> [Ibn al-Qāḍī, 1957], p. 86.

<sup>480</sup> [Ibn ar-Raqqām, 1986] ; [Djebbar, 2005] ; p.24.

<sup>481</sup> [Djebbar et Aballagh, 2001], p. 111-112.[Djebbar et Aballagh, 2001]

<sup>482</sup> [Djebbar, 1980], p. 106-107.

<sup>483</sup> Trad. D. Lamrabet ; [Lamrabet, 1994], p. 244.

a) le *Ḥibbur ha-Mešīḥah we-ha-Tišboret*<sup>484</sup> d'Abraham Bar Ḥiyya.

Abraham Bar Ḥiyya (m. ca. 1145) rédige en 1116 un ouvrage sur le mesurage et le découpage : le *Ḥibbur ha-Mešīḥah we-ha-Tišboret* [Livre sur le mesurage et le calcul]<sup>485</sup>. Précisons d'ores et déjà qu'il existe une version latine, le *Liber embadorum*, réalisée par Platon de Tivoli qui n'est pas identique au texte original mais en conserve le contenu et la structure<sup>486</sup>.

Ayant vécu à Saragosse où il aurait exercé d'importantes fonctions qui transparaissent dans son nom latinisé Savasorda [*ṣāḥib aṣ-ṣurṭa* - chef de la police], Abraham Bar Ḥiyya s'est inévitablement approprié une partie de la culture scientifique de l'*Andalus*. Si l'on en croit le prologue du *Ḥibbur ha-Mešīḥah we-ha-Tišboret*, il souhaite transmettre ce qu'il a appris à ses coreligionnaires, et notamment aux juifs sépharades de France<sup>487</sup>. Le décalage entre la culture géométrique de l'Europe latine et celle de l'*Andalus* serait, selon les propres mots de l'auteur, à l'origine de la rédaction de ce même ouvrage<sup>488</sup>. Scandalisé par les erreurs commises par les *agrimensores* de l'époque, il insiste notamment sur le mesurage des terres. De ce fait, l'ouvrage est conçu pour ceux qui s'occupent de la répartition des terres, des achats et des ventes ainsi que des héritages.

Le livre est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est une présentation générale des objets et des propriétés géométriques dont il sera question dans la suite de l'ouvrage. L'auteur propose notamment une classification des figures planes : le cercle, les trois types de triangles (équilatéral, isocèle, scalène) et cinq classes de quadrilatères (carré, rectangle, losange, parallélogramme, quadrilatère quelconque). Sont ensuite définis quelques éléments arithmétiques comme le nombre, la racine carrée, le carré, le cube et la racine cubique. Ce premier chapitre s'achève sur l'énoncé et la démonstration de propositions euclidiennes en relation avec la méthode des aires du Livre I des *Eléments* et avec les premières propositions du Livre II<sup>489</sup>.

---

<sup>484</sup> Nous donnons ici la transcription des lettres hébraïques utilisée par T. Lévy.

<sup>485</sup> Traduction en catalan par J. Millàs I Vallicrosa d'après l'édition de M. Guttmann ; [Abraham Bar Ḥiyya, 1912]; [Abraham Bar Ḥiyya, 1931].

<sup>486</sup> Texte édité par M. Curtze ; [Curtze, 1902].

<sup>487</sup> [Abraham Bar Ḥiyya, 1931], p. iii.

<sup>488</sup> Ibid., p. 5.

<sup>489</sup> On retrouve notamment les propositions 33, 35, 36, 37, 38, 41 du Livre I des *Eléments* et les propositions 4, 5, 6, 7, 9, 10 du Livre II ; Ibid., p. 16-30.

Le second chapitre, le plus important quantitativement, étudie le mesurage des figures planes, et les calculs qui s'y rapportent. L'ordre d'exposition des figures est : le carré, les triangles, les quadrilatères n'ayant pas tous leurs côtés égaux et leurs angles droits, le cercle et ses portions, les polygones. Dans sa section sur le cercle, l'auteur présente une table des cordes et des arcs.

Quant au troisième chapitre, il aborde le découpage des figures planes : triangles, quadrilatères et figures circulaires. Abraham Bar Ḥiyya mentionne, en guise de remarques, le découpage du pentagone et de l'hexagone<sup>490</sup>. Le chapitre est fractionné en trois sections en fonction de la figure plane à découper. Dans chaque section, les problèmes sont organisés selon le nombre croissant de parties à découper : 2, 3, 4 ou plus. La première section traite du triangle, la seconde des quadrilatères et la troisième des figures circulaires. Il est intéressant de voir que l'auteur partage, de manière originale, la section des quadrilatères en trois familles : ceux dont les deux diagonales les partagent également, ceux dont une seule des deux diagonales les partage également, et enfin ceux dont aucune de leurs diagonales ne les partage de manière égale. Tous les problèmes sont démontrés. Même si nous ne notons qu'une seule référence explicite aux *Eléments* d'Euclide<sup>491</sup>, Abraham Bar Ḥiyya s'inspire directement de la méthode des aires du Livre I, et de la théorie des rapports des Livres V et VI. Notons aussi une trace du vocabulaire pratique du découpage de terrains avec l'expression « *champ triangulaire* » qui revient dans deux problèmes<sup>492</sup>.

Enfin le dernier chapitre se concentre sur le mesurage des solides. Cette partie est concise et Abraham Bar Ḥiyya y omet les démonstrations difficiles. Les solides sont répartis en trois groupes : les solides sans pointe (cube, parallélépipède rectangle, prismes droits, cylindres), les solides à pointe (les pyramides dont la base est un triangle, un carré ou tout autre polygone à côtés égaux mais à angles différents, le cône), enfin la sphère et ses portions. Ce chapitre se termine avec l'explication de la manière de mesurer des terrains, et notamment de la manière de tracer une perpendiculaire.

L'ouvrage d'Abraham Bar Ḥiyya semble dans la filiation de la tradition andalouse représentée par Ibn ʿAbdūn, même si d'un point de vue terminologique, il n'est pas toujours

---

<sup>490</sup> Voir liste des problèmes en annexe.

<sup>491</sup> « *comme l'explique Euclide dans son livre des démonstrations* ; [Curtze, 1902], p. 132.

<sup>492</sup> *Ibid.*, problèmes III. 6 et III. 8, p. 136

possible d'établir des liens. Remarquons cependant quelques points intéressants. Le rectangle, comme chez Ibn ʿAbdūn, est le *quadrilatère oblong* dans la version hébraïque<sup>493</sup> ainsi que dans la version latine. Dans la version latine au moins<sup>494</sup>, le trapèze est la *figure dont la tête est coupée*, ce qui rappelle directement la terminologie utilisée plus tard par al-Mursī, et indirectement celle d'Ibn ʿAbdūn. Les solides particuliers repérés chez Ibn ʿAbdūn ne se retrouvent pas dans le *Hibbur ha-Mešīḥah we-ha-Tišboret*. Mais nous ne pouvons rien en conclure car Abraham Bar Ḥiyya a bien pu se limiter aux seuls solides usuels présents dans les pratiques outre pyrénéennes.

De plus, les problèmes du second chapitre ainsi que leurs résolutions semblent clairement issus de la tradition andalouse du mesurage dont un représentant est Ibn ʿAbdūn. Même si nous reviendrons sur ces problèmes ultérieurement, une différence doit d'ores et déjà être mentionnée : l'auteur hébraïque démontre la plupart de ces problèmes.

Quant aux problèmes de découpage, leurs énoncés ont tous une relation directe avec la pratique de la division des terrains, mais ils sont aussi tous démontrés. La présentation et le contenu des démonstrations se rapprochent d'une pratique savante de type euclidien. Remarquons aussi qu'on ne trouve pas, comme dans certains manuels arabes d'Orient ou d'Occident, de problèmes pratiques faisant intervenir, par exemple, l'aménagement de chemins.

### **b) le *Sefer ha-Middot* attribué à Abraham Ibn Ezra**

L'unique copie du *Sefer ha-Middot* [Livre des mesures] contient une attribution à Abraham Ibn Ezra (m. 1167)<sup>495</sup> que nous considérerons dans la suite comme l'auteur du texte<sup>496</sup>. Il existe une version latine du texte qui, apparemment, a été copiée au milieu du 12<sup>e</sup> siècle<sup>497</sup>. Nous n'avons aucun renseignement sur le traducteur probable de l'hébreu au latin, ni

---

<sup>493</sup> D'après la traduction catalane de J. Millàs I Vallicrosa ; [Abraham Bar Ḥiyya, 1931], p. 15.

<sup>494</sup> La traduction catalane utilise le terme « *trapezi* » qui cache la dénomination hébraïque originale.

<sup>495</sup> Edition du texte hébraïque par T. Lévy et traduction anglaise dans [Lévy et Burnett, 2006].

<sup>496</sup> Voir discussion à ce sujet ; Ibid., p. 63-66.

<sup>497</sup> Edition de la version latine par Ch. Burnett et traduction anglaise dans Ibid. Un seul *codex* latin contient, à notre connaissance, le *Sefer ha-Middot*, ms. Oxford, Bodleian Library, Digby 51, fol. 38va-42vb. Ce *codex* présente de nombreuses concordances avec les travaux d'Abraham Ibn Ezra et de Platon de Tivoli ; [Lévy et Burnett, 2006], p. 70.

même sur ses relations avec Ibn Ezra<sup>498</sup>. Cette version complète la version hébraïque du début du texte tandis que la fin du texte en est absente.

Le *Sefer ha-Middot* se présente en deux parties. Le premier tiers est une arithmétique sans unité et logique apparentes. Il s'agit davantage de notes prises d'un livre d'arithmétique ou de notes d'étudiants que d'un exposé systématique.

La seconde partie, c'est-à-dire les deux tiers restant, est plus homogène et correspond à un traité sur le mesurage de figures planes et solides et la mesure de distances.

D'une manière plus précise, on y trouve d'abord des considérations générales sur le point, la ligne, la surface et les solides. Ensuite, Abraham Ibn Ezra propose de mesurer les figures planes usuelles : les triangles (équilatéral, isocèle, scalène, et rectangle), les quadrilatères (le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le trapèze et leurs différentes espèces), le cercle et ses portions. Enfin, il étudie le mesurage des solides avec, dans l'ordre, le cube, la pyramide à base carrée, la pyramide tronquée, le cylindre et le tronç de cône. Dans la dernière partie, il propose de mesurer la hauteur d'une colline, d'un arbre ou d'une tour ainsi que la profondeur d'un puits à l'aide, par exemple, d'un astrolabe.

Il est intéressant de noter que de nombreux problèmes sont, selon la terminologie actuelle, de type quadratique. Abraham Ibn Ezra est néanmoins un représentant, comme l'est Ibn ʿAbdūn, des pratiques pré-algébriques puisque les objets et les opérations spécifiques à l'algèbre arabe du 9<sup>e</sup> siècle ne sont pas utilisés.

En plus de cette première information, le *Sefer ha-Middot* semble être dans la continuité de la tradition du mesurage de la *Risāla* d'Ibn ʿAbdūn. En effet, de nombreux problèmes et leurs procédures de résolution sont communs à ces deux textes. Nous y reviendrons de manière précise lors de l'analyse comparative des problèmes mathématiques de certains textes sur le mesurage. Notre étude de la terminologie n'est pas aussi détaillée que pour les textes arabes de par le changement des langues de rédaction, l'hébreu ou le latin. Notons néanmoins que la version latine nomme le trapèze : *figura cum capito amplo* [la figure dont le sommet est large] exactement comme Ibn ʿAbdūn<sup>499</sup>. Quant aux solides

---

<sup>498</sup> [Lévy et Burnett, 2006], p. 69-77.

<sup>499</sup> [Lévy et Burnett, 2006], p. 220, 222-224.

caractéristiques des pratiques andalouses, ils sont absents de l'exposé d'Ibn Ezra ; rien ne peut donc être conclu à ce niveau.

### 3) Un représentant de la tradition latine directe : le *Liber Mahameleth*.

Le *Liber Mahameleth* est un ouvrage volumineux composé en Castille dans la seconde moitié du 12<sup>e</sup> siècle<sup>500</sup>. Le terme *mahameleth*, qui est le nom donné en *Andalus* au vaste domaine des problèmes de transactions indépendamment des procédés utilisés pour les résoudre (arithmétique ou algébrique), indique l'origine arabe des sources de son auteur.

Le *Liber mahameleth* présente un second intérêt et non des moindres. A notre connaissance, il est le seul témoin latin connu des pratiques mathématiques ibériques exprimées en latin et en relation directe avec la tradition arabe.

Cet ouvrage, dont l'auteur reste inconnu, est centré sur l'étude de l'arithmétique, de l'algèbre et de leurs applications. C'est dans cette dernière catégorie que nous trouvons des problèmes qui peuvent être rattachés à des pratiques de mesurage et de découpage<sup>501</sup>. Les procédures mises en œuvre ne sont pas géométriques mais suivent une démarche purement arithmétique en utilisant les rapports entre grandeurs.

Par exemple, dans le paragraphe « *Les étoffes : matières homogènes* » du chapitre « *problème de morcellement* », plusieurs problèmes de mesurage de rectangles sont ainsi proposés. Citons deux exemples :

« *Si quelqu'un interroge, en disant : à propos d'une étoffe de 10 coudées de long et 8 coudées de large, et 50 onces pour le poids, si une part de 15 onces de poids et 6 coudées de long a été ôtée, quelle sera sa grandeur totale et sa largeur ?*<sup>502</sup> »

« *Si on a fait une proposition ainsi, en disant : <à propos d'une étoffe de 10 coudées de long et 8 de large et 50 onces de poids>, si on a ôté une part de poids de 20 onces qui a une longueur double de sa largeur, quelle est sa longueur ou sa largeur ?*<sup>503</sup> »

---

<sup>500</sup> [Sesiano, 1988], p. 70.

<sup>501</sup> [Vlasschaert, 2003], vol. 2, p. 410-439. Comme le travail d'A.M. Vlasschaert n'est pas publié, nous donnerons par la suite plusieurs exemples des problèmes qui se rapprochent de nos préoccupations.

<sup>502</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 416.

<sup>503</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 420.

Les énoncés sont stéréotypés. Ils correspondent à la formulation tout aussi systématique des problèmes de certains manuels de mesurage, celui d'Ibn ūAbdūn par exemple. De nombreux autres problèmes de ce type pourraient être cités avec des contraintes différentes sur les longueurs et largeurs.

Nous signalons aussi des problèmes qui, sans être de véritables découpages, semblent sinon s'en inspirer du moins s'y référer implicitement. Par exemple, dans le problème suivant, il s'agit de découper un rectangle d'un autre rectangle avec une contrainte de similitude :

*« Si quelqu'un interroge, en disant : à propos d'une étoffe de 10 coudées de long et 8 de large et d'un poids de 60 onces, si une partie entièrement semblable par comparaison à celle-là lui a été ôtée, mais d'un poids de 15 onces, quelle est sa longueur ou sa largeur ?<sup>504</sup> »*

Ou bien encore, lorsque le problème propose explicitement le découpage de tissus rectangulaires ou circulaires en morceaux eux aussi rectangulaires ou circulaires de dimensions données. Par exemple :

*« Si tu veux savoir combien de gausapes de 4 coudées de long et 3 de large tu peux faire à partir d'une toile de lin de 15 coudées de long et 8 d'ampleur.<sup>505</sup> »*

*« Si quelqu'un demande : à partir d'une toile de lin arrondie, dont le diamètre est de 10 coudées, combien de toiles de lin arrondies, dont le diamètre de chacune est de deux coudées peuvent-elles être taillées ?<sup>506</sup> »*

Enfin le dernier paragraphe « le pavement » des « problèmes de morcellement » fournit à nouveau des problèmes de mesurage et de découpage dans un autre cadre pratique. Par exemple :

*« Si quelqu'un dit : <pour> toute chambre arrondie dont le pavement a 6 coudées de diamètre, combien de tables semblablement arrondies, dont le diamètre de chacune est de 3 coudées, reçoit-il ?<sup>507</sup> »*

---

<sup>504</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 421.

<sup>505</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 427.

<sup>506</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 435.

<sup>507</sup> Trad. A.M. Vlasschaert ; Ibid., vol. 2, p. 438.

## **B) Les textes arabes et hébraïques connus dans leur version latine.**

Contrairement à ce qui s'est passé au 11<sup>e</sup> siècle où l'activité scientifique originale était importante et le mouvement de traduction balbutiant, c'est dans l'Espagne du 12<sup>e</sup> siècle que ce premier mouvement devient déterminant.

La *Reconquista* a été une formidable opportunité pour tous les acteurs de l'époque qui désiraient combler l'écart avec le savoir de l'espace musulman. L'éveil de la curiosité à l'égard de la production scientifique et philosophique de leurs voisins musulmans est une première étape remarquable dans le long processus de réception du savoir gréco-arabe en Europe médiévale. Les traducteurs du 12<sup>e</sup> siècle, « *instruments conscients de la redécouverte de la science grecque avec ses ajouts arabes* »<sup>508</sup>, sont donc à la fois initiateurs et participants actifs de la « *Renaissance du 12<sup>e</sup> siècle* »<sup>509</sup>.

L'activité de traduction s'intensifie qualitativement et quantitativement pendant le 12<sup>e</sup> siècle. Elle se disperse géographiquement d'abord le long de l'Ebre, ensuite jusqu'en Catalogne, en Navarre pour finalement atteindre Tolède et probablement Ségovie<sup>510</sup>. Des hommes nés dans la péninsule ibérique parlant l'arabe, la langue romane<sup>511</sup> et parfois le latin, ainsi que des érudits provenant de toute l'Europe s'efforcent d'appréhender la science écrite en arabe<sup>512</sup>.

Parmi les représentants les plus connus du mouvement de traductions du 12<sup>e</sup> siècle, citons Adélarde de Bath, Platon de Tivoli, Robert de Chester, Hermann de Carinthie et son élève Rudolf de Bruges, Dominicus Gundissalvo, Hughes de Santalla ou bien encore Jean de Séville et, bien sûr, Gérard de Crémone (1114-1187)<sup>513</sup>. Beaucoup d'éléments de leur biographie et des relations qu'ils entretenaient les uns avec les autres restent malheureusement très obscurs. Néanmoins, un élément est certain : au départ de ce grand mouvement de traduction, les activités ne sont pas centrées sur un lieu unique. La transmission au reste de

---

<sup>508</sup> [D'Alverny, 1982], p. 422.

<sup>509</sup> [Haskins, 1927]

<sup>510</sup> [Lemay, 1963], p. 647.

<sup>511</sup> E. Levi-Provençal précise que la langue romane parlée dans la péninsule ibérique est issue de l'idiome latino-ibérique ; c'est alors le seul moyen d'expression des classes populaires des villes et les groupes de métayers chrétiens qui peuplent les hameaux agricoles, [Levi-Provençal, 1948], p. 119.

<sup>512</sup> [D'Alverny, 1982], p. 440.

<sup>513</sup> [Haskins, 1924], chap. 1.

l'Europe se trouve facilitée par la diversité des nationalités représentées parmi le groupe des étudiants-traducteurs qui arrivent en Espagne et qui s'installent dans les principales villes pour traduire les manuscrits qu'il leur a été possible d'acquérir. Ces villes sont essentiellement Barcelone, Tarazona et Tolède<sup>514</sup>.

Deux de ces érudits ont traduit des ouvrages connus de *misāḥa* de l'arabe ou de l'hébreu en latin et à ce titre, nous intéressent particulièrement.

Le premier d'entre eux est l'italien Platon de Tivoli. Sa biographie n'est connue que par ses propres traductions<sup>515</sup>. La majorité de son activité a eu lieu en Catalogne, et plus précisément autour de Barcelone, entre 1132 à 1146. C'est d'ailleurs probablement dans les communautés juives de cette ville qu'il apprend l'arabe et qu'il trouve son inspiration et ses matériaux de travail<sup>516</sup>. Comme nous l'avons déjà dit, il est l'auteur du *Liber embadorum*, traduction latine du manuel de *misāḥa* d'Abraham Bar Ḥiyya. Revenons sur les conditions de travail du traducteur italien. Nous savons que la rédaction du *Liber embadorum* s'achève en 1145, à la suite d'une collaboration entre Platon de Tivoli et l'auteur lui-même. Ce dernier servirait alors d'interprète au premier<sup>517</sup>. Platon de Tivoli n'est pas non plus isolé des autres traducteurs. En plus de ses relations avec les milieux juifs de Catalogne, nous savons qu'il entretient des contacts avec Jean de Séville<sup>518</sup>.

Le second traducteur à qui on attribue une traduction d'un ouvrage de *misāḥa* est Gérard de Crémone. Son activité se situe à Tolède dans la deuxième moitié du 12<sup>e</sup> siècle. Il est le traducteur de l'arabe au latin le plus assidu et surtout le plus prolifique<sup>519</sup>. Nous sommes relativement bien renseignés sur son existence. En effet, à sa mort, ses disciples ont écrit les *Vita, Commemoratio librorum et Eulogium*<sup>520</sup>, dans lesquels ils ont consigné de nombreuses informations biographiques et notamment une précieuse liste de ses traductions. L'objectif affiché de ces quelque soixante et onze traductions de l'arabe au latin semble bien

---

<sup>514</sup> [Vernet Gines, 1975], p. 74. Les traducteurs rayonnent dans plusieurs villes du Nord de l'Espagne et probablement du Sud de la France. Par exemple, Hermann de Carinthie et Robert de Chester apparaissent en 1141 sur les bords de l'Ebre, puis nous pouvons les suivre à Ségovie, Léon, Toulouse, Béziers et Pampelune. D'ailleurs, notons que Robert de Chester deviendra archevêque de Pampelune, [Haskins, 1924], p. 68.

<sup>515</sup> [D'Alverny, 1982], p. 450-451 ; [Boncompagni, 1851-52].

<sup>516</sup> [Lemay, 1963], p. 658.

<sup>517</sup> [Haskins, 1924], p. 18.

<sup>518</sup> [Haskins, 1924], p. 14.

<sup>519</sup> [Haskins, 1924], p. 14.

<sup>520</sup> Textes édités par Ch. Burnett dans [Burnett, 2001].

être le désir de combler la « *pénurie des Latins* »<sup>521</sup>. Même s'il connaissait bien l'arabe, il ne pouvait réaliser seul un programme aussi ambitieux couvrant les domaines de la connaissance les plus importants comme la philosophie, les mathématiques, la médecine ou encore l'astronomie<sup>522</sup>. Gérard de Crémone a dû s'entourer d'une équipe de collaborateurs<sup>523</sup>.

La seconde moitié du 12<sup>e</sup> siècle marque donc un passage clef de la circulation des pratiques et savoirs arabes à l'Occident médiéval. Une conséquence immédiate se situe au niveau de la motivation pour le choix des textes à traduire. Désormais, le mouvement de traduction ne se fait plus au hasard de la disponibilité des manuscrits. Il apparaît plutôt organisé par le public savant de l'enseignement en Occident chrétien qui alimente une importante demande et oriente de manière décisive les activités des traducteurs<sup>524</sup>.

C'est peut-être effectivement dans ce cadre que Gérard de Crémone a traduit entre autres l'Algèbre d'al-Khwārizmī<sup>525</sup> ainsi que le *Liber de practica geometrie tractatus* mentionné dans l'*Eulogium*<sup>526</sup>. Ce traité de *misāḥa* correspondrait au *Liber Mensurationum* d'Abū Bakr qui fait l'objet d'une édition critique et d'une traduction française dans notre travail. En effet, son *incipit* précise qu'il s'agit d'un « *Livre abrégé dans lequel sont contenues les mesures de surfaces et de volumes d'Abū Bakr qui était dit Heus, traduit par le maître Gérard de Crémone à Tolède de l'arabe au latin* ».

Comme nous le verrons dans les commentaires qui précèdent les éditions critiques, nous avons de bonnes raisons de croire que les trois autres textes qui sont édités et traduits ici, à savoir le *Liber Saydi Abuothmi*, le *Liber Aderameti* et le *De superficierum divisionibus liber* d'al-Baghdādī sont aussi des traductions de Gérard de Crémone.

Nous présentons très succinctement le contenu des quatre ouvrages qui sont des témoins indirects des pratiques du mesurage et du découpage dans la tradition arabe (de l'Orient et de l'Occident musulmans). Une présentation plus détaillée des problèmes se trouve dans notre analyse mathématique de ces textes.

---

<sup>521</sup> [Haskins, 1924], p. 15; [D'Alverny, 1982], p. 452.

<sup>522</sup> [D'Alverny, 1982], p. 453.

<sup>523</sup> [Haskins, 1924], p. 12-13 ; [D'Alverny, 1982], p. 444-457 ; [Burnett, 1995]

<sup>524</sup> [Lemay, 1963], p. 661.

<sup>525</sup> Edition du texte dans [Hughes, 1986].

<sup>526</sup> [Burnett, 2001], p. 277.

**Le *Liber mensurationum* [Livre sur le mesurage] d'Abū Bakr .**

Précisons d'ores et déjà que la version qui nous est parvenue paraît corrompue par rapport à la version arabe<sup>527</sup>. Il semble néanmoins qu'elle reste suffisamment représentative du texte initial.

Il s'agit d'un ouvrage sur le mesurage des figures planes et solides composé de 158 problèmes. Ils sont organisés en fonction des figures. Abū Bakr expose d'abord les quadrilatères (carré, rectangle, losange, trapèze), puis les triangles et enfin le cercle et ses portions. Les derniers problèmes traitent des figures solides. Dans cette dernière partie, sont envisagés les solides rencontrés dans les textes du mesurage d'al-Andalus avec le *corpus simile faneche*, le *corpus simile chaburi* et le *corpus simile cumulo frumenti*.

Outre les problèmes de mesure d'aires et de volumes, Abū Bakr expose de nombreux problèmes pré-algébriques caractéristiques des mathématiques mésopotamiennes où il s'agit de déterminer des grandeurs inconnues à partir de la connaissance de certaines autres.

L'auteur propose pour de nombreux problèmes des procédures alternatives « par l'algèbre » où il utilise les objets propres à la discipline d'al-Khwārizmī : *shay'* [chose], *māl* [bien], ainsi que la classification des équations et les opérations d'*al-jabr* et d'*al-muqābala*. Etant donné l'histoire du texte, nous ne pouvons savoir si ces paragraphes sont originaux ou issus d'une compilation (ou autre transformation) d'un auteur arabe, du traducteur ou d'un copiste. Signalons seulement, qu'à ce sujet, toutes les copies sont concordantes. Tant que nous n'avons pas de nouvelles informations, nous suivons l'hypothèse qu'Abū Bakr est bien l'auteur des résolutions algébriques.

**Le *Liber Saydi Abuothmi* [Livre de Saōid Abū ōUthmān]**

Il faut admettre que cet ouvrage présente une organisation différente des autres traités connus. Il débute avec plusieurs propriétés du carré puis définit la notion de surface et de volume à partir du choix d'une unité de mesure.

Ensuite, l'auteur donne la procédure pour calculer l'aire d'un triangle, d'un quadrilatère quelconque par triangulation, et des polygones réguliers et quelconques.

---

<sup>527</sup> Voir, par exemple, les problèmes 37-39.

Enfin, le texte que nous avons s'achève sur la classification des quadrilatères en fonction du nombre décroissant de leurs propriétés : parallélismes et égalité des côtés. Néanmoins, le texte original devait poursuivre car l'auteur précise : « *je commence en parlant des quadrilatères.* ». Cette phrase sous-entend bien qu'il devait traiter d'autres types de figures.

### **Le *Liber Aderameti* [Livre de ʿAbd ar-Raḥmān]**

Cet ouvrage est construit comme un *vade-mecum* de formules pour déterminer les aires des figures planes et solides usuelles. Les problèmes sont énoncés sous une forme très générale et aucun exemple numérique n'est donné. De plus, précisons qu'aucun problème de type pré-algébrique n'est abordé.

L'organisation du texte est conforme aux traités arabes du mesurage : les quadrilatères (carré et rectangle, losange, parallélogramme, trapèzes), les triangles, le cercle et ses portions. Sont ensuite traitées les figures solides parmi lesquelles nous trouvons à nouveau les solides *faneche*, *caburi* et *tritici frumenti* comme chez Abū Bakr et d'autres textes andalous.

### **Le *De superficierum divisionibus liber* [Livre sur les divisions des surfaces] de Muḥammad al-Baghdādī**

Ce traité contient 22 propositions sur le découpage de figures planes. Les propositions sont organisées selon les figures : triangles (6 propositions), quadrilatères (9 propositions), pentagones (6 propositions). Une des 22 propositions, la dixième, est un résultat auxiliaire pour les propositions suivantes.

Plusieurs éléments permettent de dire que le *De superficierum divisionibus liber* est rédigé comme un ouvrage savant tant dans sa forme que dans son contenu.

D'abord, la structuration logique de son organisation générale. Une numérotation des problèmes permet des renvois précis et explicites si besoin, notamment pour les propositions 3 et 10 qui sont des constructions intermédiaires utilisées par les propositions suivantes.

Ensuite, l'auteur adopte une démarche qualitativement progressive en traitant les problèmes selon la difficulté croissante de leur résolution. De plus, il les présente selon le

schéma « euclidien » : proposition, exposition, construction, démonstration, conclusion. Ajoutons que, à l'opposé des traités de *misāḥa*, l'auteur ne s'adresse jamais directement à son lecteur, son style rhétorique est impersonnel avec des phrases construites sur le mode infinitif. Les énoncés sont généraux. Il s'agit toujours de « diviser » une figure (triangle, quadrangle ou pentagone) dans un rapport  $\frac{p}{q}$  quelconque. Il n'est jamais question de « couper » une partie donnée d'une figure initiale.

Enfin, aucun résultat n'est établi sans une démonstration bâtie sur les *Eléments* d'Euclide qui sont explicitement cités à plusieurs reprises. Pour être plus précis, en dehors des références internes, le matériel utilisé repose exclusivement sur la méthode des aires présentée au Livre I, la théorie des rapports du Livre V et les résultats de son application à la géométrie plane puisés dans le Livre VI. De plus, aucune référence n'est faite, de près ou de loin, à un problème ; n'apparaît aucune référence à des contraintes pratiques comme un partage entre ayants droit, ou à des contraintes naturelles comme l'aménagement d'un chemin. Nous pouvons considérer le *De superficierum divisionibus Liber* comme un ouvrage d'exercices sur les *Eléments*.

## Chapitre six

### Le mesurage et le découpage dans les « géométries pratiques » du Moyen-Âge latin.

Les auteurs latins, à partir du 12<sup>e</sup> siècle, usent de l'expression « *practica geometriae* ». Dans les traités géométriques eux-mêmes ou dans les classifications des sciences, la géométrie pratique ne semble pas définie comme un concept abstrait, mais plutôt en fonction de ce qu'elle traite ou ne traite pas.

Malgré cela, l'étude des traités qui nous sont parvenus montre que leur contenu varie largement jusqu'au 14<sup>e</sup> siècle. Il ne suit pas *a priori* un plan général de développement mais est progressivement révélé au fur et à mesure des différentes parties. Le nombre et le nom de ces parties en disent long sur les intentions de l'auteur dans la rédaction de son traité.

Avant de présenter les principaux textes sur le mesurage et le découpage de la tradition latine, nous aimerions donc préciser le cadre intellectuel dans lequel ces textes auraient été rédigés.

## A) La « géométrie pratique » en Europe.

### 1) Le schéma de Hugues de Saint-Victor.

Le couple théorie/pratique associé à la géométrie se trouve, à notre connaissance, pour la première fois dans le monde latin, dans l'œuvre de Hugues de Saint-Victor (m. 1141). Il est présent dans son ouvrage de méthode et de pédagogie, le *Didascalicon*<sup>528</sup> et est illustré dans le titre même d'un de ses ouvrages : la *Practica geometriae*<sup>529</sup>.

Dans celui-ci, il introduit clairement une dichotomie entre la géométrie théorique et la géométrie pratique en les définissant l'une et l'autre. Ainsi, son lecteur est renseigné sur la nature et le contenu de chacune d'elle.

« Considérant que la discipline géométrique toute entière est soit théorique, c'est-à-dire spéculative, soit pratique, c'est-à-dire active, si la théorique est vraiment celle qui recherche avec soin la dimension des espaces et des distances par les seules spéculations du raisonnement, la pratique est celle qui est réalisée à l'aide de quelques instruments et qui tranche en conjecturant proportionnellement certaines [distances] de certaines autres<sup>530</sup>. »

En définissant la géométrie pratique, Hugues de Saint-Victor rend inséparable l'utilisation de l'instrument (comme l'astrolabe, l'équerre, le miroir ou le gnomon) de celle des rapports. Les deux géométries sont alors considérées dans leurs complémentarités.

Il poursuit en distinguant au sein même de la géométrie pratique trois parties : *altimetria*, *planimetria* et *cosmimetria*<sup>531</sup>. Cette triade est aussi présentée et détaillée dans le *Didascalicon*, ce qui nous permet d'avoir un complément d'information sur le contenu précis de la géométrie pratique de cet auteur. L'*altimetria* s'intéresse à la mesure des hauteurs<sup>532</sup>, la *planimetria* à celle des surfaces<sup>533</sup> et la *cosmimetria* à celle du cosmos<sup>534</sup>. Restant dans le cadre de sa définition de la géométrie pratique, l'auteur désire à la fois utiliser les instruments

---

<sup>528</sup> Texte édité dans [Saint-Victor (de), 1939], traduit en anglais dans [Taylor, 1968], et en français dans [Saint-Victor (de), 1991].

<sup>529</sup> Texte édité par R. Baron dans [Saint-Victor (de), 1966].

<sup>530</sup> Ibid., p. 16.

<sup>531</sup> Ces trois parties correspondent aux trois types de mesure déjà évoqués par l'auteur latin du *Podismus* au 2<sup>e</sup> siècle de notre ère.

<sup>532</sup> Ibid., p. 22-46.

<sup>533</sup> Ibid., p. 47-48.

<sup>534</sup> Ibid., p. 49-64.

et les rapports. Aussi, la partie *planimetria* est très brève puisqu'une simple procédure arithmétique, sans utilisation d'instruments, est le plus généralement suffisante.

À l'époque de la rédaction du *Didascalicon* et de la *Practica geometriae*<sup>535</sup>, nous avons déjà précisé que peu de travaux géométriques sont en circulation<sup>536</sup>. Les connaissances géométriques de Hugues de Saint-Victor sont alors relativement restreintes. En particulier, il n'a *a priori* pas connu le corpus euclidien des *Eléments* dans une version complète<sup>537</sup>, et encore moins les apports des traditions géométriques des pays d'islam. La dichotomie théorie/pratique opérée par Hugues de Saint-Victor est donc limitée et ne peut être le reflet de l'organisation et de la division effectives des sciences de la fin du 12<sup>e</sup> siècle.

## 2) Le *De divisione philosophiae* de Dominicus Gundissalvo.

Le premier auteur latin en contact avec la tradition scientifique arabe à s'intéresser au couple théorie/pratique en relation avec la géométrie est, vu les documents qui nous sont parvenus, Dominicus Gundissalvo (m. 1181)<sup>538</sup>.

Archidiacre de Ségovie dans la première moitié du 12<sup>e</sup> siècle, il est en excellente position pour appréhender la science arabe. Il rédige une classification des sciences, *De Divisione Philosophiae* [De la division de la philosophie]<sup>539</sup> dont un des thèmes centraux est justement le couple théorie/pratique et l'articulation entre les deux.

« (...) tout art est divisé en théorie et pratique, puisqu'il est dominé soit par la seule connaissance de la pensée, et c'est la théorie, soit dans l'exercice de l'activité, et c'est la pratique<sup>540</sup>. »

Il précise que les deux aspects – théorie et pratique – ne sont pas seulement mutuellement bénéfiques mais surtout totalement dépendants l'un de l'autre.

---

<sup>535</sup> Ces deux ouvrages ont été élaborés entre 1125 et 1130, mais nous ne pouvons être plus précis, et en particulier, nous ne savons pas lequel des deux textes précède l'autre ; [Baron, 1955], p. 116.

<sup>536</sup> Rappelons ici que seules les deux géométries du pseudo-Boèce composées dans la première moitié du 11<sup>e</sup> siècle sont disponibles avec la géométrie de Gerbert ou *Geometria incerti auctoris* [Géométrie d'un auteur incertain] et autres travaux similaires.

<sup>537</sup> La première traduction latine des *Eléments* est celle attribuée à Adélarde de Bath (m. 1160). Elle est, à notre connaissance, postérieure à la rédaction du *Didascalicon* et de la *Practica Geometriae* de Hugues de Saint-Victor.

<sup>538</sup> Aussi nommé Dominicus Gundissalinus.

<sup>539</sup> Texte édité dans [Gundissalinus, 1903].

<sup>540</sup> *Ibid.*, p. 44.

« Ce serait honteux pour quelqu'un de pratiquer quelque art que ce soit et d'ignorer ce que celui-ci est, son genre, de quel sujet il traite et toutes les autres choses qui le précèdent<sup>541</sup>. »

Enfin, Gundissalvo ne peut se limiter à cette seule distinction héritée de Hugues de Saint-Victor. Avec le *De Divisione Philosophiae*, il doit tenter d'intégrer dans les champs disciplinaires de l'occident latin ses connaissances philosophiques et scientifiques acquises au contact de la tradition arabe. Les classifications arabes des sciences auxquelles il a accès, comme l'*Ihṣā' al-Ulūm* d'al-Fārābī que nous avons déjà présentée<sup>542</sup> lui demandent de prendre en compte une nouvelle catégorie de la géométrie pratique : celle des artisans.

Gundissalvo est alors amené à distinguer deux sections : celle du mesureur, seule reconnue jusque là dans la tradition latine, et celle de l'artisan qui utilise la géométrie pratique dans l'exercice de son métier.

« L'artisan de la [géométrie] pratique est celui qui l'utilise en travaillant. Deux types [d'artisan] existent, à savoir les mesureurs et les artisans.

*Les mesureurs sont ceux qui mesurent la hauteur, la profondeur ou la surface de la terre.*

*Les artisans sont ceux qui déploient toute leur énergie en travaillant ou en fabricant dans les arts mécaniques comme le charpentier dans le bois, le forgeron dans le fer, le maçon dans l'argile et la pierre, et de la même façon tous les artisans des arts mécaniques [travaillant] selon la géométrie pratique<sup>543</sup>. »*

La division tripartite *altimetria*, *planimetria*, *cosmimetria* est toujours présente dans le *De divisione philosophiae*. Elle devient la division classique : mesure des lignes, mesure des surfaces et mesure des volumes et plus seulement de l'unique sphère.

### **3) L'apport du *Geometrie due sunt partes principales...* : les géométries pratiques « artificielle » et « non artificielle ».**

Nous ne connaissons pas l'auteur, probablement du 12<sup>e</sup> siècle, du texte de géométrie dont l'incipit est *Geometrie due sunt partes principales*<sup>544</sup>. Etant donné le nombre de copies

---

<sup>541</sup> Ibid., p. 44.

<sup>542</sup> En effet, dans le *De scientiis*, traduction latine de Gérard de Crémone du *Ihṣā' al-Ulūm* d'al-Fārābī, on retrouve les distinctions entre la géométrie « active » et la géométrie « spéculative ». De même, la rubrique d'« *ingeniorum scientia* » [sciences des ingénieurs] décrit, comme dans la version arabe, les activités de la géométrie pratique ; [al-Fārābī, 1932], p. 146, p.154-156.

<sup>543</sup> [Gundissalinus, 1903], p. 109.

<sup>544</sup> Edition dans [Hahn, 1982].

connues à ce jour (une cinquantaine), le texte a vraisemblablement joui d'une diffusion importante dans toute l'Europe latine.

Les deux principales parties dont il est question dès l'incipit sont naturellement : la théorie et la pratique. À l'image de Hugues de Saint-Victor, cet auteur anonyme considère que les outils de la géométrie pratique sont de deux types : les instruments matériels et les méthodes de calcul. Cette distinction illustre deux sens de « mesurer », à savoir « donner la mesure ». Il s'agit d'un acte matériel avec des instruments, ou bien d'un calcul à partir d'unités et mesurer est alors synonyme de comparer.

L'innovation de notre auteur est alors de relever une distinction claire entre deux géométries selon les outils utilisés :

*« Cette recherche de grandeurs [la géométrie pratique] est appelée mesurage<sup>545</sup>. Un mesurage est artificiel, et l'autre est non artificiel. Il est non artificiel lorsque la connaissance de la grandeur inconnue est subordonnée à un seul ou plusieurs noms de rapports d'une grandeur connue à une inconnue. Le mesurage est artificiel lorsque nous arrivons à la connaissance de la grandeur inconnue par la considération d'instruments et le travail sur les nombres<sup>546</sup>. »*

Ce passage est fondamental pour la notion de géométrie pratique. Pour la première fois, à notre connaissance, la « géométrie pratique » peut se détacher de l'utilisation d'un quelconque instrument. Elle nécessite alors une importante connaissance des calculs sur les rapports et sur les nombres.

#### **4) La préface d'un commentaire aux *Eléments* d'Euclide du 13<sup>e</sup> siècle.**

Dans la préface du commentaire aux *Eléments* d'Euclide, autrefois nommé Adelard IIB<sup>547</sup> par M. Clagett, l'auteur décrit une classification des sciences dans laquelle le savoir est traditionnellement divisé en théorie et pratique.

Les deux géométries sont alors clairement ciblées en fonction de l'activité de leurs acteurs respectifs : le *demonstrator* pour la géométrie théorique et l'*exercitator* [praticien] pour la géométrie pratique. Celui qui démontre doit expliquer les théorèmes selon les principes de la discipline, alors que celui qui pratique doit mesurer. De plus,

---

<sup>545</sup> En latin, *mensuratio*.

<sup>546</sup> Citation latine reprise dans [Victor, 1979], p. 20.

<sup>547</sup> Edition critique dans [Clagett, 1954], p. 273-277.

« *L'instrument du demonstrator est une baguette et une table de poussière*<sup>548</sup>. *Quant aux instruments de l'exercitator, ce sont les mesures de la géométrie, à savoir la perche avec la palme, le doigt, le pied, le pas et la brasse*<sup>549</sup>. »

Étant donnée la description des instruments, l'auteur de cette préface semble omettre l'artisan qui utiliserait la géométrie pratique dans l'exercice de son métier sans avoir un recours direct aux mesures. Alors qu'il est manifestement postérieur à Gundissalvo, il revient à une classification qui s'apparente davantage à celle de Hugues de Saint-Victor.

À la lumière de tous ces éléments, il semble bien que les géométries pratiques se définissent, dans la tradition latine, par opposition à la géométrie spéculative mais qu'elles ne s'unifient pas pour autant dans un même genre dont les critères seraient déterminés et respectés par leurs auteurs. Elles sont diverses et dépendent principalement de leurs époques de composition, de leurs auteurs et des motivations de ceux-ci.

## **B) Le corpus latin des 13<sup>e</sup> et 14<sup>e</sup> siècles.**

Plusieurs traités médiévaux s'intéressent au mesurage et au découpage. Ceux-ci se décomposent en deux grandes familles, plus ou moins distinctes. Dans une première famille, les instruments de mesure (comme les miroirs, les quadrants ou les astrolabes) sont présents de manière partielle ou totale *via* leur construction ou/et leur utilisation. C'est le cas du *Tractatus Quadrantis* ou *Quadrans Vetus*<sup>550</sup> écrit à Montpellier entre 1250 et 1280, et de la *Practica Geometriae*<sup>551</sup> de Dominicus de Clavasio, au 14<sup>e</sup> siècle. Se trouvent aussi réunis dans cette famille, les textes anonymes *Artis Cuiuslibet consummatio*<sup>552</sup>, *Geometriae due sunt partes principales*<sup>553</sup> du 12<sup>e</sup> siècle. Dans ce type de textes, les auteurs utilisent « la géométrie non-artificielle » pour justifier les techniques de mesures avec les instruments notamment

---

<sup>548</sup> En latin, « *radius et mensa cum pulvere* ». La présence de la « baguette et la table à poussière » est étonnante dans cette préface aux *Eléments* d'Euclide puisqu'elle fait davantage référence aux pratiques arithmétiques.

<sup>549</sup> [Clagett, 1954], p. 274.

<sup>550</sup> Edition critique dans [Hahn, 1982]. Sur l'auteur du traité, [Thorndike, 1947].

<sup>551</sup> [Busard, 1965]

<sup>552</sup> Edition et traduction anglaise dans [Victor, 1979].

<sup>553</sup> Edition critique dans [Hahn, 1982].

pour la détermination de longueurs. À notre connaissance, les problèmes de découpage des figures ne sont pas traités dans ces textes.

La seconde famille des géométries pratiques, celle qui nous intéresse ici, est représentée par les auteurs qui résolvent les problèmes de mesurage à l'aide d'un raisonnement géométrique, arithmétique ou algébrique, sans utiliser d'instrument matériel. Les principaux textes sont la *Practica geometriae* de Fibonacci et le *De arte mensurandi* de Jean de Murs. Ajoutons aux deux textes précédents le *Liber Philotegni* de Jordanus de Nemore qui, sans être classé parmi les géométries pratiques, expose des problèmes de découpage de figures planes<sup>554</sup>.

### 1) La *Practica geometriae* [Pratique de la géométrie] de Fibonacci (13<sup>e</sup> s.).

Fibonacci (ca.1170-ca.1240) est probablement le mathématicien européen le plus important du 13<sup>e</sup> siècle. Néanmoins, peu d'informations sur sa vie nous sont parvenues. Grâce à sa préface du *Liber Abbaci* [Livre de calcul]<sup>555</sup>, nous apprenons que son père est un notable pisan responsable des douanes à Béjaïa en Algérie. Grâce à cela, Fibonacci aurait été en contact direct avec la tradition arabe puisqu'il écrit avoir passé *quelques jours*<sup>556</sup> dans une école d'abaque pour apprendre le calcul indien. Pour le commerce, il aurait aussi visité les pays arabes comme l'Égypte et la Syrie. Ainsi, Fibonacci a nourri des contacts avec les traditions commerciales et probablement scientifiques arabes, et l'examen de son œuvre semble montrer une connaissance des mathématiques arabes des 9<sup>e</sup> et 10<sup>e</sup> siècles. Nous ne pouvons néanmoins pas savoir s'il a eu un accès direct aux textes arabes, à l'enseignement en arabe ou à des traductions latines réalisées en *Andalus* ou en Sicile.

En plus du *Liber Abbaci* qu'il publie à deux reprises, en 1202 et 1228, son œuvre mathématique compte, entre autre, la *Practica Geometriae* publiée en 1220 en réponse à son ami et maître Dominicus, un érudit espagnol qui l'aurait introduit à la cour de Frédéric II. Il convient d'y ajouter deux opuscules publiés en 1225 : le *Liber Quadratorum* [Livre des <nombre> carrés]<sup>557</sup> et le *Flos Leonardi* [Fleur de Léonard]. Ces deux derniers ouvrages ont pour origine des défis mathématiques lancés par Jean de Palerme, mathématicien arabisant de

---

<sup>554</sup> À partir des problèmes de mesurage et de découpage des *Liber mensurationum* et *De superficierum divisionibus liber*, une analyse comparative de ces trois traités est présentée en annexe ; annexe 3 et 4.

<sup>555</sup> Edition latine dans [Boncompagni, 1857] ; traduction anglaise dans [Sigler, 2002].

<sup>556</sup> « *aliquot dies* »

<sup>557</sup> Edition latine dans [Boncompagni 1855], traductions française dans [Ver Eecke 1952] et anglaise dans [Sigler 1987].

la cour de Frédéric II de Hohenstaufen, en contact avec des écrits arabes dont aucune version latine n'est connue<sup>558</sup>.

Revenons à la *Practica Geometriae*<sup>559</sup> qui semble avoir été relativement importante pour les pratiques postérieures<sup>560</sup>. Dans la préface de son ouvrage, Fibonacci différencie explicitement deux groupes différents de lecteurs. Il vise ceux qui voudraient travailler en suivant des démonstrations géométriques, ce qui renvoie à la géométrie spéculative. En outre, il s'intéresse aussi aux traditions des géométries pratiques en rédigeant pour ceux qui désireraient procéder selon un usage courant ou une coutume laïque<sup>561</sup> par opposition à ce que pourrait être le mode clérical enseigné dans les écoles-cathédrale ou les universités.

Le mathématicien pisan rédige un manuel divisé en dix parties dont une introduction dans laquelle il fournit quelques définitions géométriques, des propositions du Livre I des *Eléments* d'Euclide et des informations sur des unités pisanes de mesure.

À l'exception de deux chapitres techniques sur l'extraction des racines carrée et cubique<sup>562</sup>, la composition de l'ouvrage est « calquée » sur les traités de *misāḥa* de la tradition arabe. Après l'introduction, il commence par la mesure de surfaces carrées et rectangulaires dont les dimensions ne seraient pas données dans une seule et unique unité. La multiplication à réaliser s'en trouve compliquée, et Fibonacci détaille les méthodes à utiliser.

Le chapitre trois est entièrement consacré au « *mesurage de tous les champs*<sup>563</sup> ». C'est le chapitre le plus important quantitativement. Y sont traités, dans l'ordre, les triangles, les quadrilatères, les autres polygones, le cercle et ses portions, les figures circulaires. Le chapitre se termine sur le mesurage des champs à flanc de montagne, c'est-à-dire subissant une dénivellation.

Quant au quatrième chapitre, il est centré sur la « *division des champs entre copropriétaires*<sup>564</sup> ». Malgré ce titre, Fibonacci ne s'intéresse pas, à l'exception de trois problèmes<sup>565</sup>, aux partages entre ayants droits ou héritiers comme certains problèmes de la tradition arabe du découpage. Il s'agit de problèmes géométriques de division de figures

---

<sup>558</sup> [Rashed, 2003], p. 57.

<sup>559</sup> Edition latine dans [Boncompagni, 1862] et traduction anglaise dans [Hughes, 2008]. Nous gardons l'édition latine comme texte de référence.

<sup>560</sup> [Simi, 2004]

<sup>561</sup> « *vulgarem consuetudinem, quasi laicali more* » ; [Boncompagni, 1862], p. 1.

<sup>562</sup> Ce sont les deuxième et cinquième chapitres, Fibonacci s'inspire largement du chapitre 14 de son *Liber Abaci*.

<sup>563</sup> Ibid., p. 30.

<sup>564</sup> Ibid., p. 110.

<sup>565</sup> Ibid., p. 120, 125, 135

planes par une ou plusieurs transversales répondant à certaines contraintes. Sont exposés pas moins de 81 problèmes sur ce thème et donne des énoncés théoriques. Il s'appuie sur des exemples numériques génériques<sup>566</sup>. Les démonstrations qu'il donne sont fondées sur ses connaissances savantes et en particulier celles des *Eléments* d'Euclide qu'il cite explicitement, ou dont il reprend des propositions « mot à mot ». Les principes de base sont, comme dans le *De superficierum divisionibus liber*, la méthode des aires du premier Livre des *Eléments*, la théorie des rapports du Livre V et quelques unes de ses utilisations dans la géométrie plane du Livre VI.

L'objectif du sixième chapitre est la détermination des dimensions des solides et notamment les calculs de volumes : parallélépipède, pyramide, cône et sphère. Il achève son chapitre sur la détermination du volume de solides inscrits dans une sphère.

Dans le chapitre 7, sont proposés des problèmes de mesurage « sur le terrain » de hauteurs, de profondeurs et de largeurs à l'aide d'instruments tels que le quadrant dont la construction et l'utilisation sont expliquées.

Ensuite, divers problèmes de géométrie sont posés en rapport avec l'inscription ou la circonscription d'une figure dans une autre. Il s'agit alors de déterminer le côté d'un polygone (pentagone ou décagone) en fonction du diamètre du cercle circonscrit et réciproquement. D'autres problèmes sont proposés pour déterminer les longueurs de transversales dans un triangle répondant à certaines contraintes. Fibonacci utilise deux types de raisonnement : l'algèbre et la théorie des rapports.

Enfin, la dernière partie, quantitativement petite, est centrée sur des problèmes arithmétiques indéterminés.

## **2) Le *Liber Philotegni* [Livre de l'ami de l'art]<sup>567</sup> de Jordanus de Nemore (13<sup>e</sup> s.).**

Très peu d'informations biographiques sur Jordanus de Nemore sont disponibles. Il serait le plus important mécanicien et mathématicien latin de la fin du 12<sup>e</sup> siècle et du début du 13<sup>e</sup> siècle. Cette considération n'est pas contredite par l'ensemble des travaux qui lui sont attribués<sup>568</sup>. De nombreux sujets et disciplines sont traités : la science des poids et la statique,

---

<sup>566</sup> Voir l'ensemble des problèmes dans « *Les problèmes de découpage dans la tradition latine (12<sup>e</sup> -14<sup>e</sup> s.)* » ; annexe 2.

<sup>567</sup> [Høyrup, 1988], p. 327.

<sup>568</sup> A propos de la vie et de l'œuvre de Jordanus de Nemore, [Høyrup, 1988].

l'arithmétique avec, par exemple, le *De numeris datis*<sup>569</sup>, les proportions avec le *Liber de proportionibus* qui s'apparente au Livre V des *Eléments*. Parmi ses travaux, il en est aussi un en géométrie : le *Liber Philotegni*<sup>570</sup>.

Cet ouvrage aurait été rédigé dans l'environnement universitaire de la première moitié du 13<sup>e</sup> siècle. Ainsi le *Liber Philotegni* aurait été le support d'un enseignement de la géométrie à la Faculté des Arts<sup>571</sup>. Le *Liber de triangulis Jordani*<sup>572</sup> qui, manifestement, en dérive serait alors une *reportatio*, c'est-à-dire un travail d'étudiants élaboré à partir de leurs notes<sup>573</sup>. J. Høyrup utilise en particulier cet argument pour suggérer l'existence d'un « *cercle Jordanien* » dans le milieu universitaire parisien<sup>574</sup>.

L'objectif principal semble être l'étude des polygones (réguliers et irréguliers) en général, mais aussi inscrits dans un cercle donné ou circonscrits à un cercle ou à un autre polygone. L'étude des figures isopérimétriques est aussi importante. De nombreuses propositions sur le triangle sont proposées comme intermédiaire à la réalisation de l'objectif susmentionné. Certaines autres sont exposées et démontrées indépendamment de l'objectif central ; c'est le cas des propositions qui nous intéressent à propos du découpage de figures planes selon des contraintes fixées.

L'organisation de l'ouvrage est ainsi. Jordanus débute par diverses propriétés des triangles sur leurs angles et leurs côtés. L'auteur expose ensuite le matériel nécessaire pour la démonstration de quatre problèmes de division d'un triangle et d'un seul pour les quadrilatères<sup>575</sup>. Les propositions suivantes concernent la comparaison des arcs et des segments circulaires. Enfin, les dernières propositions établissent les résultats nécessaires pour comparer les polygones réguliers et irréguliers. Ces quatre parties se retrouvent sous la forme de quatre livres dans le *Liber de trianguli Jordani*.

### **3) Le *De arte mensurandi* [Sur l'art du mesurage] de Jean de Murs (14<sup>e</sup> s.).**

L'activité scientifique de Jean de Murs est placée entre 1317 et au moins 1345. La majeure partie de son travail a été rédigée à Paris alors qu'il était Maître ès-Arts à la Sorbonne

---

<sup>569</sup> Edition critique et traduction anglaise dans [Hughes, 1981].

<sup>570</sup> Edition latine et traduction anglaise dans [Clagett, 1984].

<sup>571</sup> [Høyrup, 1988], p. 328-329.

<sup>572</sup> Edition latine dans [Curtze, 1887].

<sup>573</sup> [Høyrup, 1988], p. 349.

<sup>574</sup> Ibid., p. 343-351.

<sup>575</sup> Voir « *Les problèmes de découpage dans la tradition latine (12<sup>e</sup>-14<sup>e</sup> s.)* » ; annexe 2.

depuis 1321<sup>576</sup>. Il est l'auteur d'ouvrages dans tous les domaines du *Quadrivium* et en particulier en arithmétique et en géométrie.

Son travail mathématique le plus connu est probablement le *Quadripartitum numerorum* (1343)<sup>577</sup>. C'est un ouvrage d'arithmétique composé de quatre livres précédés d'une section versifiée. Il dérive directement ou indirectement de plusieurs autres travaux mathématiques antérieurs dont les *Eléments* d'Euclide, l'*Arithmetica speculativa* de Boèce, les livres d'algèbre d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil et le *Liber Abbaci* de Fibonacci<sup>578</sup>.

Jean de Murs est aussi l'auteur d'une géométrie pratique. Il décide plus exactement de poursuivre, vers 1344, le travail anonyme inachevé connu sous le nom *De arte mensurandi* [De l'art du mesurage]. Cet ouvrage comporte alors douze chapitres dont les quatre premiers et le début du cinquième appartiennent à la version antérieure à notre auteur. Ceux-ci traitent précisément des connaissances mathématiques nécessaires à l'astronomie. Jean de Murs, en terminant le texte, en fait un traité théorique sur le mesurage avec des références explicites aux *Eléments* d'Euclide dans la version de Campanus et à Archimède.

Détaillons le contenu des différentes sections du *De arte mensurandi*, quantitativement très inégales. Les quatre premiers chapitres portent sur les opérations de multiplication, division et extraction de racines avec des fractions sexagésimales, des propositions de trigonométrie requises pour dresser une table des cordes, des propositions sur les triangles, et enfin la mesure de grandeurs inaccessibles.

Le cinquième chapitre, divisé en trois parties, est le plus complet de tout l'ouvrage. C'est à partir de la dixième proposition de la première partie que Jean de Murs poursuit la rédaction du traité<sup>579</sup>. L'auteur anonyme a précédemment établi les résultats généraux sur les polygones. L'auteur énonce aussi des propositions pour mesurer le rectangle, le triangle, et toute autre polygone. Jean de Murs continue alors avec les polygones réguliers pour ensuite introduire l'algèbre qui, d'après lui, est utile pour résoudre de nombreux problèmes. Il reprend ici une partie de son *Quadripartitum numerorum* avec les équations et la classification qui correspondent à la tradition khwarizmienne. Dans la seconde partie du chapitre 5, il traite de problèmes de mesurage dont l'objectif principal est de déterminer des grandeurs (longueurs de côtés, diagonales, hauteurs, aires) à partir de grandeurs connues. Enfin, la troisième partie

---

<sup>576</sup> [Pouille, 1981]

<sup>577</sup> Edition critique dans [L'huillier, 1990].

<sup>578</sup> Ibid., p. 12-14.

<sup>579</sup> [Busard, 1998], p. 13.

est un recueil de divers problèmes faisant principalement intervenir les irrationnels, de deux problèmes de division du triangle<sup>580</sup>, et de résultats (majoritairement faux) sur la relation entre les côtés d'un triangle et sa configuration (rectangle, acutangle ou obtusangle).

Dans le chapitre 6, l'auteur expose la mesure du cercle et de ses portions ainsi que des lunules. C'est aussi l'occasion de donner cinq problèmes de division du cercle, de ses parties et de la lunule.

Le septième chapitre fournit des problèmes de construction de solides réguliers (cube, tétraèdre, dodécaèdre, icosaèdre), de construction avec contraintes (tripler un cube donné, construire un cube égal à un parallélépipède donné) et de circonscription et d'inscription des uns dans les autres. Jean de Murs étudie aussi la mesure de leur volume.

Le chapitre 8 est subdivisé en deux parties. Dans la première partie, l'auteur revient sur la mesure du cercle et notamment sur l'approximation fautive de  $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{1}{8}$ . La seconde traite de la quadrature du cercle.

Le chapitre 9 ne contient qu'une seule et unique proposition : de toutes les figures isopérimétriques, le cercle est la plus grande.

Le chapitre 10 concerne la mesure des solides (pyramide, cylindre, sphère, et leurs sections).

Le chapitre 11 porte d'abord sur les polyèdres réguliers de Platon et semi-réguliers d'Archimède, puis sur divers corps irréguliers.

Le dernier chapitre est subdivisé en deux parties. La première débute avec des définitions empruntées du livre X des *Eléments* d'Euclide et porte sur les incommensurables et les binômes. La seconde partie traite de la division des lignes, des surfaces selon un rapport donné. Il s'agit, par exemple, à la manière du livre VI des *Eléments*, de couper un parallélogramme (ou un triangle, ou un carré) dans un rapport donné. Enfin, le même type de problème est posé pour les solides.

Donnons quelques éléments de comparaison entre Fibonacci et Jean de Murs. D'abord, sur la forme des problèmes, le mathématicien italien reste dans la « tradition » du problème de mesurage. Ses énoncés sont souvent exprimés selon un modèle « prescriptif » c'est-à-dire qui s'adresse directement à leurs lecteurs : « *Fais ceci. Fais cela...* ». Jean de Murs, au contraire, rédige ses problèmes sous la forme de propositions générales uniformément construites, à la manière des *Données* d'Euclide, sur le modèle : « *ceci étant*

---

<sup>580</sup> Voir « *Les problèmes de découpage dans la tradition latine (12<sup>e</sup>-14<sup>e</sup> s.)* » ; annexe 2.

*donné, cela est connu* ». Une seconde différence, liée à la précédente, se situe au niveau des données numériques. Chez Fibonacci, tous les problèmes sont énoncés et construits à partir d'exemples numériques mais, au vue de la formulation de l'auteur, ils sont de portée générale. Dans le *De arte mensurandi*, le recours aux nombres n'est pas systématique, et lorsque son auteur les utilise, c'est comme simple exemple d'illustration de la procédure générale.

### **C) Quelques hypothèses sur la circulation éventuelle de la tradition arabe vers la tradition latine.**

#### **Le mesurage**

Si Fibonacci et Jean de Murs, n'ont pas eu accès directement aux textes originaux, il est raisonnable de penser qu'ils connaissaient les versions latines d'Abū Bakr et d'Abraham Bar Ḥiyya. L'étude comparative des problèmes<sup>581</sup> permet de préciser cette conjecture, d'abord en tendant à montrer que les deux auteurs latins emprunteraient très certainement leurs problèmes à Abū Bakr, le rôle d'Abraham Bar Ḥiyya étant à ce point de vue beaucoup plus restreint<sup>582</sup>.

De nombreux énoncés et procédures se retrouvent dans les quatre textes. Et, parmi les problèmes de type pré-algébrique, Fibonacci et Jean de Murs en exposent plusieurs déjà présents dans le *Liber Mensurationum* mais absents du *Liber Embadorum*. C'est particulièrement le cas pour les chapitres du carré et du rectangle. L'organisation des propositions sur le carré et le rectangle du *De arte mensurandi* suit avec une étonnante fidélité les chapitres correspondants d'Abū Bakr.

De plus, parmi les problèmes présents dans les quatre textes, les données numériques proposées par les deux auteurs latins sont majoritairement celles d'Abū Bakr et non pas celles d'Abraham Bar Ḥiyya. Bien sûr, cette remarque ne tient compte que des données numériques significatives et non pas des nombres « naturels » liés aux triplets (3, 4, 5) ou (13, 14, 15)<sup>583</sup>.

---

<sup>581</sup> Voir « *Analyse comparative des problèmes de mesurage* » ; annexe n°3.

<sup>582</sup> Une précision doit être apportée ici. En effet, Jean de Murs est beaucoup plus éloigné (chronologiquement) d'Abū Bakr et d'Abraham Bar Ḥiyya que ne l'est Fibonacci. Alors, il ne pourrait aussi dépendre qu'indirectement des versions latines de ces ouvrages à travers la production scientifique de toute la fin du 13<sup>e</sup> et du début du 14<sup>e</sup> siècle qui reste méconnue en grande partie.

<sup>583</sup> Nous qualifions ces nombres de « naturels » car ils conduisent systématiquement à des calculs sur des entiers. Ce type de nombres se retrouve déjà dans les tablettes paléo-babyloniennes, ou dans les *Metrica* de Héron.

Enfin, un dernier argument concerne la présence des pratiques algébriques. Nous avons déjà précisé qu'Abū Bakr réunit deux procédures dont l'une est explicitement algébrique alors qu'Abraham Bar Ḥiyya ne fait aucune référence aux objets de l'algèbre. Or, nombre de problèmes de Fibonacci et de Jean de Murs sont résolus par l'algèbre soit uniquement, soit de manière alternative. Avec les deux traités latins, l'algèbre devient indispensable pour résoudre les problèmes de mesurage. Précisons d'ailleurs que Jean de Murs consacre, à la fin de la première partie de son chapitre V, des propositions à la résolution des équations<sup>584</sup>. Il donne la classification al-Khwarizmienne des équations, leur algorithme de résolution ainsi que les démonstrations de la validité de la résolution des équations de type composé reprenant les exemples numériques de la tradition d'al-Khwārizmī.

Venons-en au *Liber embadorum* d'Abraham Bar Ḥiyya. Nous ne pouvons pas totalement exclure son rôle dans la circulation des pratiques de mesurage de la tradition arabe au monde latin. Nous voudrions néanmoins insister sur une caractéristique d'Abraham Bar Ḥiyya qui se retrouve chez Fibonacci et Jean de Murs : les démonstrations géométriques. En effet, dans la tradition occidentale de *misāḥa*, Abraham Bar Ḥiyya est le seul auteur à démontrer ses procédures sur la base d'un raisonnement euclidien révélant par là même ses connaissances des *Eléments*. Sa première partie est d'ailleurs complètement dévolue à la présentation des objets et propriétés de la géométrie savante. Rappelons que Fibonacci, qui est censé connaître la tradition gréco-latine d'Euclide (voire la tradition arabe)<sup>585</sup>, adopte la même attitude au début de sa *Practica Geometriae*. Quant à Jean de Murs, les références euclidiennes, qui renvoient à la version de Campanus de Novare<sup>586</sup>, sont explicites tout au long de son traité. De plus, nombre de ces démonstrations géométriques sont les mêmes dans les trois ouvrages. Ces éléments sont néanmoins trop faibles pour étayer de façon décisive un quelconque emprunt.

---

<sup>584</sup> Cette partie est empruntée à son *Quadripartitum numerorum*, [L'huillier, 1990].

<sup>585</sup> [Folkerts, 2002]

<sup>586</sup> [Busard, 2005]

## Le découpage

L'analyse comparative de la *Practica geometriae* et du *De superficierum divisionibus liber* montre que si Fibonacci connaissait le texte de Muḥammad al-Baghdādī, il ne s'en est pas nécessairement inspiré. En effet, il y a d'abord les références de Fibonacci aux pratiques traditionnelles de découpage des terrains qui sont totalement absentes chez al-Baghdādī. Il y a ensuite peu de correspondances entre les problèmes des deux ouvrages. Nous avons aussi montré que Fibonacci produit un texte systématique quant aux contraintes sur la transversale. Dans ce cadre, il n'aurait pas laissé de côté certains problèmes présents chez al-Baghdādī s'il en avait eu connaissance notamment à propos des triangles et des polygones. Enfin, sur de nombreux points, les démonstrations des deux auteurs divergent alors que le matériel géométrique est le même dans les deux cas.

Le chapitre sur le découpage des figures planes du *Liber embadorum* pourrait fournir une preuve du fait que Fibonacci devait connaître cet ouvrage. En effet, Abraham Bar Ḥiyya est, dans l'état actuel de nos connaissances, la seule source andalouse connue antérieure à Fibonacci. Elle pourrait être la source principale du mathématicien italien sur ce thème. Certes, l'organisation générale des deux textes diffère mais nous pensons que Fibonacci a pu, à partir des problèmes (figures et contraintes) du *Liber embadorum*, développer sa propre contribution. Une interrogation subsiste néanmoins. Huit problèmes du corpus d'Abraham Bar Ḥiyya ne sont ni traités, ni mentionnés dans la *Practica geometriae*. C'est étonnant si Fibonacci désirait, comme nous le pensons, fournir un travail complet et systématique.

Quant à Jordanus de Nemore, même s'il paraît indépendant de Fibonacci, il pourrait partager au moins une source commune avec ce dernier. L'étude précédente montre alors que cette source ne peut être ni la version arabe du texte d'Euclide, ni le *De superficierum divisionibus liber*. Par ailleurs, Jordanus de Nemore soit fait preuve d'une originalité, soit dépend d'une source inconnue de Fibonacci et d'Abraham Bar Ḥiyya. En effet, prenons l'exemple de son premier problème<sup>587</sup>, l'auteur ne mentionne pas le cas où le point choisi serait le milieu d'un côté ; ce que font Fibonacci et Abraham Bar Ḥiyya. De plus, alors qu'il

---

<sup>587</sup> Voir les problèmes de découpage des figures du *Liber philotegni* dans « *Les problèmes de découpage dans la tradition latine (12<sup>e</sup>-14<sup>e</sup> s.)* » ; annexe 2.

utilise les mêmes principes, la méthode des aires principalement, le découpage qu'il utilise ne correspond pas à celui exposé par les deux autres auteurs.

# Conclusion générale

Dans cette étude, nous nous sommes efforcés de dresser une synthèse, qui n'avait jamais été réalisée jusque-là, sur les géométries du mesurage et du découpage des pays d'islam et de l'Europe latine. Ainsi, notre problématique a été de décrire les circulations éventuelles des connaissances, de dégager les interactions probables entre ces écrits, et plus généralement d'exposer les apports possibles de la tradition arabe à la tradition latine.

Notre souci n'a pas été d'exhumer de nouveaux documents, qu'ils soient latins ou arabes. Nous nous sommes donc appuyés sur les différentes études menées par nos prédécesseurs ainsi que sur les éditions critiques, les traductions et les analyses mathématiques des quatre textes que nous avons proposés : le *Liber mensurationum* d'Abū Bakr, le *Liber Saydi Abuothmi*, le *Liber Aderameti* et enfin le *De superficierum divisionibus Liber* d'al-Baghdādī.

La question des circulations éventuelles est une des questions les plus délicates pour un historien des mathématiques. La nature même de l'exercice nous amène donc à être très prudent quant aux résultats pressentis dans notre étude. Nous aimerions néanmoins reprendre, dans cette conclusion, quelques points importants qui pourraient illustrer lesdites circulations. Plusieurs éléments ont systématiquement été pris en compte tout au long de notre étude : l'énoncé des problèmes, leurs procédures de résolution ainsi que la terminologie géométrique utilisée.

### **Les Problèmes.**

Il existe une continuité évidente entre les traditions pour un certain type de problèmes. Leur circulation est alors très difficile à étudier puisqu'ils feraient partie d'un fond commun au thème du mesurage. Par exemple, les problèmes les plus élémentaires qui se proposent de calculer la mesure d'une surface plane ou d'un solide se trouvent naturellement dans toutes les traditions. Ensuite, l'objectif de nombreux autres problèmes est de calculer une ou plusieurs caractéristiques géométriques d'une figure (côtés, hauteur, diagonales) étant données quelques autres. La tradition latine de l'antiquité tardive est différente des autres traditions étudiées à ce titre car elle reste à un niveau très utilitaire de la géométrie de la mesure. Le second type de problèmes n'y est donc pas développé.

Ensuite, il est intéressant de voir que certains problèmes de mesurage ne se rencontrent qu'à partir d'une tradition. Par exemple, de nombreux auteurs de l'Occident musulman proposent des problèmes de restauration des côtés d'un trapèze (Ibn ʿAbdūn, Abū Bakr, Abraham bar Hiyya). Dans l'état actuel de nos connaissances, aucun problème de ce type ne se trouve dans les traditions antérieures ou en Orient musulman. Par contre, ils se trouvent aussi dans le *Practica geometriae* de Fibonacci au 13<sup>e</sup> siècle et chez Jean de Murs au 14<sup>e</sup> siècle. Ces problèmes pourraient alors permettre de mettre en évidence une spécificité de l'Occident musulman ainsi qu'une éventuelle circulation chez les latins.

Quant aux problèmes de découpage, même s'ils sont présents dans de nombreuses traditions, ils se présentent sous des formes différentes. En Mésopotamie, avec la tablette IM 58045 du Musée de Bagdad, il semble que le découpage de figures planes est posé dès l'époque sargonique. De nombreuses tablettes paléo-babyloniennes confirment aussi l'existence de ces problèmes. Il s'agit davantage de problèmes originaux de mesurage où les objectifs sont les calculs de longueurs et d'aires partielles. Dans la tradition grecque, avec les œuvres d'Euclide et de Héron d'Alexandrie, la question de la division des figures se développe davantage autour d'un raisonnement géométrique. Ces deux types d'évolution, l'un pratique et l'autre savant, se trouvent dans la tradition arabe de l'Orient et de l'Occident musulmans ainsi que dans la tradition latine. Parmi toutes les traditions que nous avons étudiées, seule la littérature latine des *agrimensores* ne développe aucun problème de division des figures.

### Les procédures de résolution.

Dans notre étude du corpus sur le mesurage, trois principaux types de procédures ont été distingués. Un premier type, appelé pré-algébrique, est de nature arithmétique. Il est caractérisé par l'enchaînement d'opérations arithmétiques effectuées sur des grandeurs géométriques. De nombreuses tablettes montrent que les scribes mésopotamiens utilisent des résolutions pré-algébriques. Nous pouvons citer, entre autres, les problèmes des tablettes BM13 901 de l'époque paléobabylonienne ou BM 34 568 de l'époque séleucide. En Grèce, nous avons rencontré ces mêmes pratiques dans les problèmes des *Geometrica* ainsi que dans le papyrus grec 259 de la Bibliothèque de Genève. Alors que dans la tradition arabe d'Orient, seul le traité d'Ibn Thabāt (13<sup>e</sup> s.) semble exposer de telles procédures, ces pratiques sont largement illustrées en Occident musulman. Citons la *Risāla* d'Ibn ʿAbdūn, le *Livre sur le mesurage* d'Abū Bakr, et les deux textes hébraïques d'Abraham Ibn Ezra et d'Abraham Bar Ḥiyya. Dans les géométries latines, Fibonacci puis Jean de Murs proposent ce même type de procédures dans la *Practica geometriae* pour l'un et dans le *De arte mensurandi* pour l'autre. Cette description nous pousse à nouveau à la prudence quant à la circulation de ce type de procédure.

Un nouveau type de procédure de résolution apparaît dans la tradition arabe d'Orient. Dès la rédaction du *Mukhtaṣar* d'al-Khwārizmī considérée comme l'acte de naissance officielle de l'algèbre, cette discipline avec ses objets (*shay'* [chose], *māl* [bien]) et ses opérations (*jabr* [restauration] et *muqābala* [comparaison]) est utilisée dans le cadre des problèmes de mesurage. Elle est aussi utilisée dans le traité *Fī al-mukhammas wa'l-mu'ashshar* [Sur le pentagone et le décagone] d'Abū Kāmil, et dans le *Kāfī fī l-ḥisāb* [Livre suffisant en calcul] d'al-Karajī. En Occident musulman, dans le *Talqīh al-afkār* [La fécondation des esprits] d'Ibn al-Yāsamīn, les problèmes de mesurage qui sont repris du *Kāfī* d'al-Karajī, sont alors naturellement envisagés comme domaine d'application de l'algèbre. De même, al-Mursī a recours aux objets de l'algèbre pour résoudre certains problèmes de mesurage. Le *Liber mensurationum* est un autre ouvrage connu dans lequel coexistent les deux procédures précédentes. L'analyse mathématique montre que les deux procédures sont

équivalentes voire, pour certaines, identiques. Pourtant, Abū Bakr présente alors les secondes comme alternatives aux premières : il faut sans doute y voir là la force des traditions face à la nouvelle discipline qu'est l'algèbre. Dans la littérature latine, Fibonacci comme Jean de Murs font aussi appel à l'algèbre pour résoudre certains problèmes de mesurage.

Enfin, le troisième type est géométrique et prend appui sur la géométrie savante grecque avec en particulier les œuvres d'Euclide et d'Archimède. Ces procédures sont largement à l'œuvre chez Héron, chez Ibn al-Haytham ou encore chez Abū l-Wafā'. Dans l'état actuel de nos connaissances, à part Abraham Bar Ḥiyya, aucun autre auteur de l'Occident musulman n'a recours à ce type de procédure. Par contre, chez les auteurs latins comme Fibonacci et Jean de Murs, pour un même problème, ils peuvent distinguer deux procédures de résolution : l'une basée sur la géométrie des *Eléments* d'Euclide, et l'autre (comme nous venons de le préciser) algébrique présentée comme alternative à la première.

### La terminologie

Notre étude sur la terminologie nous demande là-encore beaucoup de précautions car nous n'avons pas travaillé nécessairement sur les versions originales. Par exemple, la partie centrale de notre corpus est un ensemble de quatre traductions latines d'ouvrages arabes. Précisons néanmoins que plusieurs éléments (structure des phrases, termes et expressions utilisés, transcription) montrent que le (ou les) traducteur(s) ont réalisé leur travail selon la méthode *de verbo ad verbum*.

La terminologie des opérations arithmétiques ou géométriques ainsi que celle des objets géométriques peuvent être un marqueur de la circulation des pratiques mathématiques. Son étude peut alors nous permettre d'établir une filiation possible entre les textes ou bien *a contrario* une rupture entre ceux-ci. Il est aussi possible de repérer la coexistence de plusieurs traditions mathématiques. Présentons ici trois exemples qui nous paraissent des plus significatifs.

Les termes de la racine *jabara*.

En analysant les occurrences des termes latins *restauratio* et *restauro* du *Liber mensurationum*, nous pouvons mettre en évidence la polysémie de la racine arabe correspondante *jabara*. Ceci confirmerait alors une multiplicité de traditions. D'abord,

comme dans la *Risāla* d'Ibn ōAbdūn avec les termes *injibār* ou *tajbīr* pour « restauration » et *injabara* pour « se restaurer », il faut entendre une restauration géométrique, c'est-à-dire dans un sens ancien pré-khwarizmien. Ensuite, la racine *jabara* peut revêtir un sens arithmétique, il s'agit alors de « restaurer » une fraction pour la ramener à l'unité. Enfin, le sens canonique développé par al-Khwārizmī dans son *Mukhtaṣar* apparaît dans les résolutions algébriques des problèmes.

Du côté de la *Practica geometriae*, le terme *restauro* est réservé pour l'unique sens algébrique. En effet, dans le sens arithmétique, Fibonacci utilise le terme *reintegrare*. Pour le sens géométrique, l'auteur contourne la difficulté terminologique en s'exprimant à l'aide de périphrases. Par exemple, pour la restauration du trapèze, il écrit : *prolonger les côtés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent*.

Le cas du trapèze.

Les problèmes de restauration que nous avons évoqués précédemment sous-entendent le trapèze comme un triangle tronqué. Cela nous permettrait de suggérer une interprétation pour une des appellations du trapèze de l'Occident (musulman et latin). Nous rencontrons l'expression *āarīdat ar-ra's* ou par contraction *āarīda* [figure à tête large] chez Ibn ōAbdūn, transcrite par *arida* dans les traductions latines du texte d'Abū Bakr et de Saōid Abū ōUthmān. Dans les textes d'Abraham Bar Ḥiyya, Platon de Tivoli et Fibonacci, le trapèze est désigné par l'expression : *[la figure qu'on appelle] tronquée de la tête*. Dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne pouvons pas savoir s'il s'agit là de deux traditions distinctes. Chez ces trois derniers auteurs, existe une autre terminologie pour le trapèze dont l'origine semblerait savante. Une double influence serait alors à noter. Chez Bar Ḥiyya et Platon, l'autre terme est *almuncharif*; il s'agit clairement de l'influence du terme oriental des textes savants : *al-munḥarif*. Chez Fibonacci, en plus de *[figure] à tête coupée*, il utilise le terme d'origine grecque *trapezium*<sup>1</sup>.

Vers une originalité andalouse avec trois solides particuliers.

<sup>1</sup> Le mot est utilisé par Euclide dans les *Eléments* pour désigner les autres quadrilatères que le carré, le rectangle, le losange et le parallélogramme mais, après la définition, il n'intervient plus jamais. Il est possible qu'Euclide l'ait utilisé dans son ouvrage *Sur les divisions* pour désigner, cette fois-ci, un quadrilatère à deux côtés parallèles. En effet, as-Sijzī utilise le mot *munḥarif*; [Hogendijk, 1993], p. 149.

Intéressons-nous enfin à la dénomination de trois solides particuliers, déjà repérée par Ahmed Djebbar, qui pourrait être utilisée comme un marqueur de circulation : la *ḥurmat aṭ-ṭaḥām* ou *ṣubrat aṭ-ṭaḥām* [tas de froment] traduite en latin par *cumulus frumenti* ou *cumulus tritici*, le *ḥūt aṭ-ṭaḥām* [poisson de froment] ou *qubūrī* transcrit en latin et (à défaut) complété par *chaburi*, *caburi* [*quod est piscis*], et enfin la *faniqā*. Cette terminologie se rencontre exclusivement dans les textes de l'Occident musulman, aucune trace ne se retrouve dans les textes de l'Europe latine que nous avons étudiés. Remarquons néanmoins que cette terminologie perdure encore au 15<sup>e</sup> siècle, ce qui correspond à la datation de la dernière copie (le manuscrit de Dresde). Or, à notre connaissance, ces solides ne sont pas une référence du mesurage en Europe en dehors des frontières de l'Espagne. La persistance de cette terminologie illustrerait alors le fait que le moteur de la circulation éventuelle ne serait pas le besoin mais plutôt le savoir géométrique. En effet, dans un tel domaine pratique voire utilitaire, un filtrage aurait dû s'opérer. Là encore, est pointée la force de la tradition, la tendance du savoir savant à l'emporter sur les savoirs pratiques.

Le corpus sur le mesurage et le découpage s'étoffe depuis quelques décennies de nouveaux textes qui sont les bienvenus dans le cadre de l'étude de la circulation des pratiques mathématiques de la tradition arabe vers l'Europe latine. Notre travail s'inscrit donc dans une perspective plus large qui devrait se nourrir, dans le futur, selon deux axes principaux. Nous désirons d'abord continuer à développer nos connaissances des chapitres maghrébo-andalous et latins des pratiques du mesurage et du découpage en analysant, éditant et traduisant de nouveaux textes. En outre, nous voulons aussi orienter nos recherches futures vers la littérature non-mathématique mais concernée par les mathématiques, comme les textes agronomiques ou métrologiques, qui devrait fournir des informations sur les pratiques scientifiques elles-mêmes.



Analyses  
mathématiques

***Le Livre sur le mesurage***

***Le Liber mensurationum***

**d'Abū Bakr**

Analyse mathématique

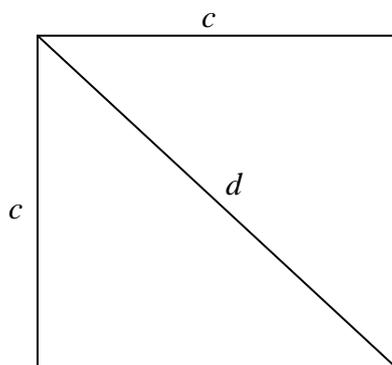
**Conventions pour l'analyse mathématique.**

Tout ce qui est signalé entre [...] est ajouté soit pour une meilleure organisation des problèmes, soit pour une meilleure compréhension de la démarche mathématique de l'auteur.

Nous avons donné une transcription générale des procédures proposées par Abū Bakr dès que cela nous était possible. Nous avons mis en parallèle, dans un tableau, la procédure numérique effective de l'auteur, et la procédure générale.

**[CHAPITRE DU CARRE]**

Soient  $c$  le côté,  $d$  la diagonale,  $e$  l'excès de la diagonale sur le côté, et  $A$  l'aire.

**Problème #1**

$c = 10$ . Aire ?

$$c \rightarrow c \times c = A$$

**Problème #2**

$c = 10$ . Diagonale ?

$$c \rightarrow c \times c = c^2$$

$$c^2 \rightarrow 2c^2$$

$$2c^2 \rightarrow \sqrt{2c^2} = d$$

Remarque :

Abū Bakr utilise la procédure donnant directement la diagonale d'un carré à partir de son côté.

Celle-ci est donnée au début du Livre de Sa'īd Abū ōUthmān. Pour le même problème, Ibn ōAbdūn utilise la relation de Pythagore comme si les deux côtés du carré n'étaient pas égaux.

Notons qu'Abū Bakr donne une procédure générale sans donner la valeur exacte ou une approximation de la diagonale qui, de fait, est irrationnelle.

Cependant, ce ne peut être l'irrationalité de la diagonale qui l'empêche de l'exprimer car les problèmes suivants montrent que notre auteur manipule ce type de nombres et notamment  $\sqrt{200}$ <sup>1</sup>.

Nous pouvons aussi attendre une valeur approchée de la diagonale qu'Ibn ōAbdūn, par exemple, donne :  $d = \sqrt{200} \approx 14 + \frac{1}{7}$ . Manifestement, Abū Bakr s'intéresse, ici, davantage à la procédure qu'à la détermination effective.

**Problème #3**

$c + A = 110$ . Côté ?

<sup>1</sup> Voir les problèmes #10, #11, et plus généralement #16, #17 et #18 pour le seul chapitre sur le carré.

$1 \rightarrow \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 110$ $110 + \frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{110 + \frac{1}{4}} = 10\frac{1}{2}$ $10\frac{1}{2} \rightarrow (10\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 10 = c$	$1 \rightarrow \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (c + A)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (c + A)}$ $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (c + A)} - \frac{1}{2} = c$
--	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$x^2 + x = 110$$

$$1 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 110$$

$$\frac{1}{4} + 110 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + 110}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4} + 110} - \frac{1}{2}$$

#### Problème #4

$4c + A = 140$ . Côté ?

$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$ $2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$ $4 \rightarrow 4 + 140 = 144$ $144 \rightarrow \sqrt{144} = 12$ $12 \rightarrow 12 - \frac{4}{2} = 10$	$4 \rightarrow \frac{4}{2}$ $\frac{4}{2} \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A) \rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)}$ $\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)} - \frac{4}{2} = c$
---	---

**Problème #5** $A - c = 90$ . Côté ?

$1 \rightarrow \frac{1}{2}$	$1 \rightarrow \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 90 \rightarrow \sqrt{90 + \frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (A - c)$
$\frac{1}{4} + 90 \rightarrow \sqrt{90 + \frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (A - c) \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (A - c)}$
$9\frac{1}{2} \rightarrow \left(9\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 10$	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (A - c)} + \frac{1}{2} = c$

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$x^2 - x = 90$$

Après restauration,  $x^2 = x + 90$ 

(Type 6)

$$1 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 90$$

$$\frac{1}{4} + 90 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + 90}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4} + 90} + \frac{1}{2} = 10$$

Remarque :

Abū Bakr précise dans la procédure algébrique « restaure et compare » pour obtenir  $x^2 = x + 90$ . C'est étonnant car il n'y a aucun besoin de comparer. En fait, les deux opérations algébriques semblent soudées et Abū Bakr ne les identifie pas clairement. L'attitude de l'auteur est irrégulière à ce sujet. D'autres exemples de ce type se retrouvent dans les problèmes suivants, mais il sait aussi utiliser les termes à bon escient.

**Problème #6** $A - 4c = 60$ . Côté ?

$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$ $2 \rightarrow 2 \times 2$ $2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2 + 60$ $2 \times 2 + 60 \rightarrow \sqrt{2 \times 2 + 60} = 8$ $\rightarrow 8 + \frac{4}{2} = 10$	$4 \rightarrow \frac{4}{2}$ $\frac{4}{2} \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2 + (A - 4c)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (A - 4c)}$ $\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (A - 4c)} + \frac{4}{2} = c$
---	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$x^2 - 4x = 60$$

Après restauration,  $x^2 = 4x + 60$

(Type 6)

$$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \rightarrow 2 \times 2 \rightarrow 4 + 60$$

$$\rightarrow \sqrt{64} = 8$$

$$x = 8 + 2 = 10$$

### Problème #7

$$4c = \frac{2}{5}A. \text{ Côté ?}$$

Deux algorithmes sont proposés :

a.  $4 \rightarrow 4 \div \frac{2}{5} = 10 = c$

b. Par restauration de l'unité,

$$\frac{2}{5} \times 2,5 = 1 \Rightarrow 4 \times 2,5 = 10$$

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$4x = \frac{2}{5}x^2$$

Il faut résoudre cette équation selon l'algèbre.

$$\left[ 4 = \frac{2}{5}x \right]$$

$$[ 10 = x ]$$

Remarque :

Abū Bakr donne deux procédures qui ne diffèrent que par la conception du coefficient de l'aire  $A$ . Dans la première, il divise par ce coefficient alors que dans la seconde, il multiplie par son inverse (après l'avoir cherché).

La seconde méthode est intéressante. Abū Bakr ramène à l'unité et équilibre l'ensemble. Cette procédure qui n'est pas dans la tradition du calcul indien mais plutôt dans une tradition pré-islamique héritière du calcul oral ou mental utiliserait des tables d'inverses.

L'auteur ne précise pas si une méthode est plus adaptée qu'une autre en fonction de la nature de ce coefficient, fractionnaire ou entier par exemple. Les problèmes qui suivent ne nous renseignent pas davantage : ledit coefficient est toujours entier, et seule la première procédure est utilisée. Le problème #14 viendrait néanmoins confirmer l'hypothèse que si le coefficient est fractionnaire, il est préférable de procéder avec la multiplication par l'inverse.

### Problème #8

$4c = A$ . Côté ?

$$4 \rightarrow 4 \div 1 = 4 = c$$

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$4x = x^2$$

$$x = 4$$

### Problème #8'

$4c = 2A$ . Côté ?

$$4 \rightarrow 4 \div 2 = 2 = c$$

Le côté est 2.

Remarque :

Ce problème clôt une série de trois problèmes équivalents dans lesquels seul un coefficient change : il est soit fractionnaire, soit égal à l'unité, soit un multiple de l'unité.

Cette exposition est classique pour montrer que la procédure est générale quel que soit le coefficient choisi. Elle rejoint la méthode d'exposition de la classification des équations d'al-Khwārizmī. En effet, ce dernier donne, pour chacun des six types, trois exemples pour que le coefficient du terme de plus haut degré soit unitaire, fractionnaire et multiple de l'unité.

### Problème #9

$4c - A = 3$ . Côté ?

$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$	$4 \rightarrow \frac{4}{2}$
---------------------------------	-----------------------------

$2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$ $4 \rightarrow 4 - 3 = 1$ $1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$ Par augmentation et diminution, $\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 = c \\ 2 - 1 = 1 = c \end{array} \right.$ Le côté est soit 1, soit 3.	$\frac{4}{2} \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (4c - A)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (4c - A)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (4c - A)} = c \\ \frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (4c - A)} = c \end{array} \right.$
--	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté,

$$x \times x = x^2$$

$$4x - x^2 = 3$$

Après restauration,

$$x^2 + 3 = 4x$$

(Type 5)

Remarque :

Ce problème marque une différence avec les pratiques pré-algébriques d'Ibn'Abdūn. En effet, nous avons déjà signalé que dans les problèmes de ce dernier, aucun ne se ramène, de manière anachronique, à l'équation de type 5<sup>2</sup>. Or, ici, Abū Bakr donne une équation de type 5 et le précise explicitement. Celle-ci admet, dans les conditions du problème, deux solutions déjà envisagées par al-Khwārizmī. Abū Bakr les mentionne dans sa première procédure en utilisant les termes « diminution » et « augmentation » qui correspondent à ceux utilisés par al-Khwārizmī dans son *Mukhtaṣar*<sup>3</sup>.

Ce problème fournit un autre exemple d'une utilisation erronée du couple *jabr/muqābala*. Abū Bakr annonce les deux opérations ensemble puis une comparaison alors que seule une restauration est nécessaire dans le problème.

### Problème #10

$d = \sqrt{200}$ . Côté ?

$d \rightarrow d \times d = 200$	$d \rightarrow d^2$
----------------------------------	---------------------

<sup>2</sup> J. Høyrup nous fait remarquer que ce type de problème existe dans la tradition mésopotamienne notamment avec les problèmes de rectangles où l'aire et la somme des deux côtés sont connus et dans un texte de Suse ; [Bruins et Rutten, 1961], p. 44, [Høyrup, 2002], p. 221.

<sup>3</sup> [Rashed, 2007], p. 105, l. 14.

$200 \rightarrow \frac{200}{2} = 100$ $100 \rightarrow \sqrt{100} = 10 = c$ Le côté est 10.	$d^2 \rightarrow \frac{d^2}{2}$ $\frac{d^2}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{d^2}{2}} = c$
---	---

Remarque :

Il s'agit de la réciproque du problème #2 dans l'énoncé comme dans la procédure.

### Problème #11

$d = \sqrt{200}$ . Aire ?

$d \rightarrow d \times d = 200$ $200 \rightarrow \frac{200}{2} = 100 = A$ L'aire est 100.	$d \rightarrow d^2$ $d^2 \rightarrow \frac{d^2}{2} = A$
--	--

Remarque :

Précisons qu'ici Ibn ʿAbdūn donne une seconde procédure absente de chez Abū Bakr :

$$d \rightarrow \frac{d}{2} \times d = A.$$

### Problème #12

$4c + A = 60$ . Côté ?

$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$ $2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$  $4 \rightarrow 60 + 4$  $60 + 4 \rightarrow \sqrt{60 + 4} = 8$  $8 \rightarrow 8 - \frac{4}{2} = 6 = c$ Le côté est 6.	$4 \rightarrow \frac{4}{2}$ $\frac{4}{2} \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2$ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)}$ $\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (4c + A)} - \frac{4}{2} = c$
--	---

Remarque.

La présence de ce problème est surprenante dans l'exposé d'Abū Bakr ; il s'agit exactement du même problème que #4 avec la même procédure. L'auteur n'apporte rien de plus. Une explication peut résider dans l'hypothèse que le *Liber mensurationum* est en réalité une compilation de plusieurs manuels qui n'auraient pas la même structure interne. L'auteur se laisse alors piéger à des répétitions.

**Problème #13**

$A - 3c = 18$ . Côté ?

$3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2} \rightarrow 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{4} \rightarrow 2\frac{1}{4} + 18 = 20\frac{1}{4}$ $20\frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{20\frac{1}{4}} = 4\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{2} \rightarrow 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 6 = c$ Le côté est 6.	$3 \rightarrow \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (A - 3c)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (A - 3c)}$ $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (A - 3c)} + \frac{3}{2} = c$
---	---

**Problème #14**

$4c = \frac{3}{8}A$ . Côté ?

Prendre le numérateur de la fraction  $\frac{3}{8}$ .

$$4 \rightarrow 4 \times 4 = 16$$

$$16 \rightarrow 16 \times 2 = 32$$

$$32 \rightarrow 32 \div 3 = 10\frac{2}{3} = c$$

Le côté est  $10\frac{2}{3}$ .

Remarque :

Il s'agit du problème #7 avec un changement de coefficient fractionnaire. Abū Bakr n'utilise ici qu'une seule des deux méthodes proposées au #7 : la multiplication par l'inverse. Cette multiplication – par  $\frac{8}{3}$  – est d'ailleurs étrange. Elle est d'abord décomposée en la multiplication par 4, puis par 2, puis naturellement en la division par 3. La seule hypothèse serait probablement à chercher du côté des manipulations opératoires dans les traditions antérieures à celle du calcul indien ce que #7 met d'ailleurs en évidence.

**Problème #15**

$A \div d = 7\frac{1}{2}$ . Côté ?

$7\frac{1}{2} \rightarrow 7\frac{1}{2} \times 2 = 15 = d$ 15 est la diagonale. $d \rightarrow 15 \times 15$ $15 \times 15 \rightarrow \frac{15 \times 15}{2}$	$\frac{A}{d} \rightarrow 2 \times \frac{A}{d} = d$ $d \rightarrow d^2$
--	---

$\rightarrow \sqrt{\frac{15 \times 15}{2}} = c$ $\sqrt{\frac{15 \times 15}{2}} \approx 10 \frac{7}{10} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$	$d^2 \rightarrow \frac{d^2}{2}$ $\rightarrow \sqrt{\frac{d^2}{2}} = c$
--	--

Remarque :

Le côté est déterminé par la connaissance de la diagonale. S'agissant de la réciproque de #2, il est étonnant qu'Abū Barkr n'ait pas traité cette question auparavant de manière isolée comme l'a fait Ibn ōAbdūn au [A.3].

Ici, Abū Bakr donne le résultat de l'extraction de la racine carrée de 112,5. Même si aucune procédure n'apparaît, il est à peu près certain que soit utilisé  $\sqrt{c^2 + r} \approx c + \frac{r}{2c}$ . Néanmoins,

l'application de cette formule d'approximation aurait dû conduire Abū Bakr au résultat :

$\sqrt{112,5} \approx 10 + \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$ . H.L.L. Busard conclut alors à une erreur du mathématicien<sup>4</sup>, ce qui,

à notre avis, est rapide étant donné les connaissances de l'auteur et la qualité des procédures. Nous pensons davantage qu'il s'agirait d'une erreur d'un copiste arabe, du traducteur latin, ou bien du premier copiste latin. Plusieurs autres passages du texte donnent de nouveaux arguments à cette hypothèse.

Ici, l'erreur viendrait alors d'une mauvaise lecture du premier mot souligné qui aurait été lu à la place du second.

عشرة وسبعة أعشار ونصف عشر	$10 + \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$
عشرة وستة أعشار ونصف عشر	$10 + \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$

### Problème #16

$d - c = 4$ . Côté ?

$4 \rightarrow 4 \times 4 = 16$	$(d - c) \rightarrow (d - c)^2$
$16 \rightarrow 16 \times 2 = 32$	$(d - c)^2 \rightarrow 2 \times (d - c)^2$
$32 \rightarrow \sqrt{32}$	$\rightarrow \sqrt{2 \times (d - c)^2}$
$\sqrt{32} \rightarrow \sqrt{32} + 4$	$\rightarrow \sqrt{2 \times (d - c)^2} + (d - c) = c$
[Le coté est $4 + \sqrt{32}$ ]	

Remarque :

Notons qu'Abū Bakr utilise ici explicitement et sans gêne les nombres irrationnels. Il ne donne pas d'approximation de ce résultat.

<sup>4</sup> [Busard, 1968], p. 74.

Les deux problèmes suivants sont équivalents, et les procédures identiques. Dans #17, Abū Bakr modifie la différence entre la diagonale et le côté, ainsi la procédure exposée est générale à tout problème du type «  $\forall n, d - c = n$ . Côté ? ». Dans #18, seule la formulation change pour généraliser aux problèmes du type «  $\forall n, d = n + c$ . Côté ? »

**Problème #17**

$d - c = 5$ . Côté ?

Même résolution que précédemment.

$$[5 \rightarrow 5 \times 5 = 20]$$

$$[20 \rightarrow 20 \times 2 = 40]$$

$$[40 \rightarrow \sqrt{40}]$$

$$[\sqrt{40} \rightarrow \sqrt{40} + 4 = 4 + \sqrt{40}]$$

[Le coté est  $4 + \sqrt{40}$ ]

**Problème #18**

$d = c + 4$ . Côté ?

$4 \rightarrow 4 \times 4 = 16$	$e \rightarrow e^2$
$16 \rightarrow 16 \times 2 = 32$	$e^2 \rightarrow 2 \times e^2$
$32 \rightarrow \sqrt{32}$	$2 \times e^2 \rightarrow \sqrt{2 \times e^2}$
$\sqrt{32} \rightarrow \sqrt{32} + 4 = 4 + \sqrt{32} = c$	$\sqrt{2 \times e^2} + e = c$
Le côté est $4 + \sqrt{32}$ .	

Remarque :

Ce problème est identique à #16. Seules les formulations changent. Dans #16, on lit « tu as retranché de la diagonale de ce quadrilatère son côté » alors que dans #18 : « c'est un carré dont la diagonale excède chacun de ses côtés de quatre. » Les procédures sont inchangées. Aucun de ces problèmes n'existe chez Ibn ōAbdūn.

**Problème #19**

$A \div d = 7 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} c$  ? Diagonale [et côté] ?

$$7 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \rightarrow 2 \times 7 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = 14 \frac{1}{7} = d$$

$14 \frac{1}{7}$  est la diagonale.

$$d \rightarrow d \times d \rightarrow \frac{d \times d}{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{d \times d}{2}} = c$$

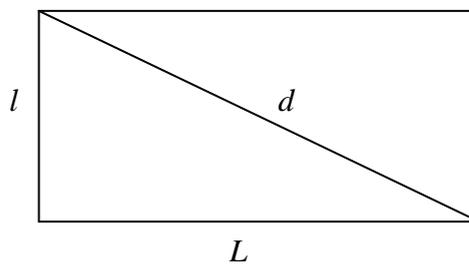
[Le côté est environ 10]

Remarque :

C'est une adaptation du problème #15 accompagnée de la même procédure. Avec ce dernier problème, Abū Bakr revient sur le carré classique de son exposé, celui de côté 10. En effet, le choix de  $7\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}$  pour le rapport de l'aire à la diagonale n'est pas anodin. Il amène directement une diagonale égale à  $14\frac{1}{7}$ , valeur connue pour être une approximation de  $\sqrt{200}$ .

[CHAPITRE DU RECTANGLE]

Soient  $L$  la longueur,  $l$  la largeur,  $d$  la diagonale,  $e$  l'excès de la longueur sur la largeur et  $A$  l'aire.



**Problème #20**

$L = 8, l = 6$ . Aire ?

$(L, l) \rightarrow L \times l = A = 48$

L'aire est 48.

**Problème #21**

$L = 8, l = 6$ . Diagonale ?

$L \rightarrow L \times L$ $l \rightarrow l \times l$ $\rightarrow L \times L + l \times l$ $\rightarrow \sqrt{L \times L + l \times l} = d$ $d = 10$ . La diagonale est 10.	$L \rightarrow L^2$ $l \rightarrow l^2$ $\rightarrow L^2 + l^2$ $\rightarrow \sqrt{L^2 + l^2} = d$
---	---

**Problème #22**

$d = 10, L = 8$ . Largeur ?

$L \rightarrow L \times L \rightarrow 64$ $d \rightarrow d \times d$ $\rightarrow d \times d - 64 \rightarrow 36$ $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$ [La largeur est 6.]	$L \rightarrow L^2$ $d \rightarrow d^2$ $\rightarrow d^2 - L^2$ $\rightarrow \sqrt{d^2 - L^2} = l$
--	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté cherché,

$$x \times x = x^2$$

$$L \times L = 64$$

$$\Rightarrow x^2 + 64$$

Après comparaison par  $d \times d$ ,

$$100 - 64 = 36$$

$$36 = x^2$$

$$x = 6$$

La largeur est 6.

Remarque :

L'étape « compare avec le produit de la diagonale » de la procédure algébrique montre qu'Abū Bakr a clairement identifié le rôle de chaque opération du couple *jabr/muqābala* alors que dans d'autres exemples, nous pouvons en douter.

### Problème #23

$d = 10, l = 6$ . Longueur ?

Même procédé que précédemment.

### Problème #24

$A = 48, L = 8$ . Largeur ?

$$48 \div 8 = 6 = l$$

La largeur est 6.

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur,

$$x \times 8$$

Après comparaison avec l'aire :  $x \times 8 = 48$

$$x = 8.$$

La largeur est 8.

### Problème #25

$A = 48, L + l = 14$ . Longueur et largeur ?

$14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$	$L + l \rightarrow \frac{(L + l)}{2}$
$7 \rightarrow 7 \times 7 = 49$	$\frac{(L + l)}{2} \rightarrow \left[ \frac{(L + l)}{2} \right]^2$
$49 \rightarrow 49 - 48 = 1$	$\left[ \frac{(L + l)}{2} \right]^2 \rightarrow \left[ \frac{(L + l)}{2} \right]^2 - A$

$1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$ $\frac{14}{2} + 1 = L [= 8]$ [La longueur est 8.] $\frac{14}{2} - 1 = l [= 6]$ [La largeur est 6.]	$\left[\frac{(L+l)}{2}\right]^2 - A \rightarrow \sqrt{\left[\frac{(L+l)}{2}\right]^2 - A}$ $\frac{(L+l)}{2} + \sqrt{\left[\frac{(L+l)}{2}\right]^2 - A} = L$ $\frac{(L+l)}{2} - \sqrt{\left[\frac{(L+l)}{2}\right]^2 - A} = l$
---	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est un des côtés, le second côté est  $14 - x$ .

$$x \times (14 - x) = 14x - x^2$$

Après comparaison avec l'aire, et restauration,

$$14x - x^2 = 48$$

$$x^2 + 48 = 14x$$

(Type 5)

$$14 \rightarrow \frac{14}{2}$$

$$\frac{14}{2} \rightarrow \frac{14}{2} \times \frac{14}{2}$$

$$\frac{14}{2} \times \frac{14}{2} \rightarrow \frac{14}{2} \times \frac{14}{2} - 48$$

$$\frac{14}{2} \times \frac{14}{2} - 48 \rightarrow \sqrt{\frac{14}{2} \times \frac{14}{2} - 48}$$

$$\frac{14}{2} + \sqrt{\frac{14}{2} \times \frac{14}{2} - 48} \text{ est la longueur.}$$

$$\frac{14}{2} - \sqrt{\frac{14}{2} \times \frac{14}{2} - 48} \text{ est la largeur.}$$

Remarque :

Là encore, Abū Bakr utilise parfaitement le sens algébrique des deux opérations *jabr* et *muqābala*.

### Problème #26

$A = 48, L = l + 2$ . Largeur et longueur ?

$2 \rightarrow \frac{2}{2} = 1$ $1 \rightarrow 1 \times 1 = 1$ $1 \rightarrow 1 + 48 = 49$	$e \rightarrow \frac{e}{2}$ $\frac{e}{2} \rightarrow \left(\frac{e}{2}\right)^2$ $\left(\frac{e}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e}{2}\right)^2 + A$
--	--

$49 \rightarrow \sqrt{49} = 7$ $7 \rightarrow 7 - 1 = 6 = l$ La largeur est 6. $6 \rightarrow 6 + 2 = 8 = L$ La longueur est 8.	$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + A \rightarrow \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + A}$ $\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + A} - \frac{e}{2} = l$ $l + e = L$
---	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$ ,

$$x \times (x + 2) \rightarrow x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x = 48$$

(Type 4)

### Problème #27

$d = 10, A = 48$ . Longueur et largeur ?

$A \rightarrow 2 \times A = 96$ $d \rightarrow d \times d$ $d \times d + 96 = 196$ $196 \rightarrow \sqrt{196} = 14 = L + l$	$A \rightarrow 2 \times A$ $d \rightarrow d^2$ $\rightarrow d^2 + 2A$ $\rightarrow \sqrt{d^2 + 2A} = L + l$
---	--

Le problème se ramène au problème précédent [#25].

Remarque :

Ce problème est présent chez Ibn ḥAbdūn dans [A16], mais les procédures sont différentes. Ce dernier s'intéresse à l'excès de la longueur sur la largeur, et non pas à la somme des deux côtés comme Abū Bakr. Les deux auteurs n'utilisent donc pas la même relation.

La procédure d'Abū Bakr repose sur  $(L + l)^2 = L^2 + l^2 + 2 \times Ll = d^2 + 2A$ , alors que celle d'Ibn ḥAbdūn repose sur  $(L - l)^2 = L^2 + l^2 - 2 \times Ll = d^2 - 2A$ . Les étapes de cette dernière procédure sont :

$$d \rightarrow d \times d = 100$$

$$A \rightarrow 2 \times A = 96$$

$$\rightarrow 100 - 96 = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow L - l = 2$$

Chez Ibn ḥAbdūn, le problème se ramène donc au problème [A15] = #26.

### Problème #28

$d = 10, L + l = 14$ . Longueur et largeur ?

$14 \rightarrow 14 \times 14$ $d \rightarrow d \times d$ $14 \times 14 - d \times d \rightarrow 96$ $96 \rightarrow \frac{96}{2} = 48 = A$ L'aire est 48.	$L + l \rightarrow (L + l)^2$ $d \rightarrow d^2$ $\rightarrow (L + l)^2 - d^2$ $\rightarrow \frac{(L + l)^2 - d^2}{2} = A$
---	--

Poursuivre avec la méthode précédente [#25].

Remarque :

Ce problème est présent chez Ibn ʿAbdūn, [A21], mais les procédures des deux textes divergent.

La procédure d'Ibn ʿAbdūn détermine l'excès de la longueur sur la largeur pour se ramener à [A17] dont aucun énoncé équivalent n'est présent chez Abū Bakr.

Ibn ʿAbdūn donne néanmoins une procédure alternative [A21'] qui coïncide avec la démarche d'Abū Bakr.

### Problème #29

$L + l = 14$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$2 + 14 = 16$ $16 \rightarrow \frac{16}{2} = 8 = L$ La longueur est 8. $14 - 2 \rightarrow \frac{14 - 2}{2} = l$ La largeur est [6].	$(L - l) + (L + l)$ $\rightarrow \frac{(L - l) + (L + l)}{2} = L$  $(L + l) - (L - l) \rightarrow \frac{(L + l) - (L - l)}{2} = l$
--	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est  $x + 2$ ,

$$x + 2 + x$$

$$x + 2 + x = 14$$

La résolution donne la largeur.

$$[2x + 2 = 14]$$

$$[2x = 12]$$

$$[x = 6]$$

$14 - 6$  est la longueur.

Remarque :

Ce problème revient à la recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur différence.

### Problème #30

$L + d = 18$ ,  $l = 6$ . Diagonale et longueur ?

$6 \rightarrow 6 \times 6 = 36$ $36 \rightarrow \frac{36}{18} = 2$ $2 \rightarrow 18 + 2 = 20$ $20 \rightarrow \frac{20}{2} = d$ La diagonale est [10].  $2 \rightarrow 18 - 2 \rightarrow \frac{18-2}{2} = L$ La longueur est [8].	$l \rightarrow l^2$ $l^2 \rightarrow \frac{l^2}{L+d}$ $\frac{l^2}{L+d} \rightarrow (L+d) + \frac{l^2}{L+d}$ $\frac{1}{2} \left[ (L+d) + \frac{l^2}{L+d} \right] = d$  $\frac{l^2}{L+d} \rightarrow (L+d) - \frac{l^2}{L+d} \rightarrow \frac{1}{2} \left[ (L+d) - \frac{l^2}{L+d} \right] = L$
--	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la diagonale est donc  $18 - x$ ,  
 $x \times x$

$$6 \times 6$$

$$x^2 + 36 = (18 - x)(18 - x)$$

$$x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2$$

Après restauration et comparaison,

$$36x = 288$$

$$x = 8$$

La largeur est 8,

$$18 - 8 = 10$$

La diagonale est 10.

### Problème #31

$d = 4 + l$ ,  $L = 8$ . Diagonale et largeur ?

$8 \rightarrow 8 \times 8 = 64$  $64 \rightarrow 64 \div 4 = 16$  $16 \rightarrow 16 + 4$  $16 + 4 \rightarrow \frac{16+4}{2} = d = 10$ La diagonale est 10. $10 - 4 = 6 = l$ La largeur est 6.	$L \rightarrow L^2$ $L^2 \rightarrow \frac{L^2}{(d-l)}$ $\frac{L^2}{(d-l)} \rightarrow \frac{L^2}{(d-l)} + (d-l)$ $\frac{1}{2} \left[ \frac{L^2}{(d-l)} + (d-l) \right] = d$  $d - (d-l) = l$
--	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la diagonale, la largeur est  $x - 4$ ,

$$(x-4) \times (x-4)$$

$$8 \times 8$$

$$(x-4) \times (x-4) + 8 \times 8$$

Après comparaison,

$$(x-4) \times (x-4) + 8 \times 8 = x \times x$$

$$[x^2 - 8x + 16 + 64 = x^2]$$

$$[8x = 80]$$

$$[x = 10]$$

### Problème #32

$L \times A = 384$ ,  $l = 6$ . Diagonale et longueur ?

$384 \div 6$  $\rightarrow \sqrt{384 \div 6} = L$ La longueur est [8].  $8 \rightarrow 8 \times 8$ $6 \rightarrow 6 \times 6$ $\rightarrow 8 \times 8 + 6 \times 6$ $\rightarrow \sqrt{8 \times 8 + 6 \times 6} = d$ La diagonale est [10].	$\frac{A \times L}{l}$  $\rightarrow \sqrt{\frac{A \times L}{l}} = L$  $l \rightarrow l^2$ $L \rightarrow L^2$ $\rightarrow L^2 + l^2$ $\rightarrow \sqrt{L^2 + l^2} = d$
--	--

Procédure algébrique :

Deux méthodes algébriques.

a. Si  $x$  est la longueur,

$$384 \rightarrow \frac{384}{x}$$

$$x \rightarrow x \times 6$$

$$\Rightarrow 6x = \frac{384}{x}$$

$$\Rightarrow 6x^2 = 384$$

$$\Rightarrow x^2 = 64$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$

La longueur est 8.

b. Si  $x$  est la longueur,

$$6 \rightarrow 6 \times x$$

C'est l'aire.

$$6x \rightarrow 6x \times x = 6x^2$$

Après comparaison avec 384,

$$x = 8$$

La longueur est 8.

**Problème #33**

$A = 48$ ,  $L \div l = 1\frac{1}{3}$ . Longueur et largeur ?

Prendre le dénominateur 3. $1\frac{1}{3} \rightarrow 1\frac{1}{3} \times 3 = 4$ $48 \rightarrow 48 \times 3 = 144$ $144 \rightarrow 144 \div 4 = 36$  $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6 = l$ La largeur est 6.  $\rightarrow 1\frac{1}{3} \times 48 = 64$  $64 \rightarrow \sqrt{64} = 8 = L$ La longueur est 8.	$\frac{L}{l} \rightarrow \frac{L}{l} \times 3$ $A \rightarrow A \times 3$ $A \times 3 \rightarrow \frac{A \times 3}{\left(\frac{L}{l} \times 3\right)}$  $\frac{A \times 3}{\left(\frac{L}{l} \times 3\right)} \rightarrow \sqrt{\frac{A \times 3}{\left(\frac{L}{l} \times 3\right)}} = l$  $\frac{L}{l} \rightarrow \frac{L}{l} \times A$ $\frac{L}{l} \times A \rightarrow \sqrt{\frac{L}{l} \times A} = L$
---	---

**Problème #34**

$A = 48$ ,  $l \div L = \frac{3}{4}$ . Largeur ?

$\frac{3}{4} \times 48 = 36$  $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6 = l$ La largeur est 6.	$A \times \left(\frac{l}{L}\right)$  $\rightarrow \sqrt{A \times \left(\frac{l}{L}\right)} = l$
---	---

**Problème #35**

$l + L = 14$ ,  $d = 10$ . Longueur et largeur ?

$10 \rightarrow 10 \times 10$ $14 \rightarrow 14 \times 14$ $\rightarrow 14 \times 14 - 10 \times 10$ $\rightarrow \frac{14 \times 14 - 10 \times 10}{2} = 48$  $14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$ $7 \rightarrow 7 \times 7 = 49$  $\rightarrow 49 - 48 = 1$	$d \rightarrow d^2$ $(l + L) \rightarrow (l + L)^2$ $\rightarrow (l + L)^2 - d^2$ $\rightarrow \frac{(l + L)^2 - d^2}{2}$  $(l + L) \rightarrow \frac{(l + L)}{2}$ $\frac{(l + L)}{2} \rightarrow \left[\frac{(l + L)}{2}\right]^2$ $\rightarrow \left[\frac{(l + L)}{2}\right]^2 - \frac{(l + L)^2 - d^2}{2}$
--	---

$[l \rightarrow \sqrt{l}]$ $1 \rightarrow \frac{14}{2} + 1 = 8 = L$ La Longueur est 8. $1 \rightarrow \frac{14}{2} - 1 = 6 = l$ La largeur est 6.	$\rightarrow \sqrt{\left[\frac{(l+L)}{2}\right]^2 - \frac{(l+L)^2 - d^2}{2}}$ $\frac{(l+L)}{2} + \sqrt{\left[\frac{(l+L)}{2}\right]^2 - \frac{(l+L)^2 - d^2}{2}} = L$ $\frac{(l+L)}{2} - \sqrt{\left[\frac{(l+L)}{2}\right]^2 - \frac{(l+L)^2 - d^2}{2}} = l$
---	---

**Problème #35'**

$A = 48, l + L = 14$ . Longueur et largeur ?

[C'est le problème précédent #25.]

**Problème #36**

$l + d = 16, L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$16 + 2 = 18$ $18 \rightarrow 18 \times 18$ $16 \rightarrow 16 \times 16$ $\rightarrow 18 \times 18 + 16 \times 16$ $\rightarrow 18 \times 18 + 16 \times 16 - 2 \times 2$ $\rightarrow \sqrt{18 \times 18 + 16 \times 16 - 2 \times 2} = 24$ $24 \rightarrow 24 - 16 = 8 = L$ La longueur est 8. $8 \rightarrow 8 - 2 = 6 = l$ La largeur est 6.	$(l + d) + (L - l) = (d + L)$ $(d + L) \rightarrow (d + L)^2$ $(l + d) \rightarrow (l + d)^2$ $\rightarrow (l + d)^2 + (d + L)^2$ $\rightarrow (d + L)^2 + (d + l)^2 - (L - l)^2$ $\rightarrow \sqrt{(d + L)^2 + (d + l)^2 - (L - l)^2}$ $\rightarrow \sqrt{(d + L)^2 + (d + l)^2 - (L - l)^2} - (d + l) = L$ $\rightarrow L - (L - l) = l$
--	--

**Problème #37**

$L + d = 18, L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

Même méthode que précédemment [#36]

Procédure algébrique : Même méthode que précédemment.

Remarque :

Il s'agit du problème symétrique de #36 entre la largeur et la longueur. Ici, Abū Bakr précise « même méthode que précédemment » pour la procédure algébrique. Or, dans le problème #36, il n'évoque pas la solution algébrique. Plusieurs hypothèses sont alors à prendre en compte :

- la version du texte que nous avons est corrompue et la procédure algébrique était initialement présente pour #36,
- Abū Bakr se ramène à un problème bien antérieur. Il peut, par exemple, s'agir de #30. En effet, pour les deux problèmes, la mise en équation est identique.

- enfin, la remarque d'Abū Bakr peut aussi renvoyer aux méthodes précédentes de manière globales.

**Problème #38**

$L + l + A = 62$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$62 - 2 = 60$	$(L + l + A) \rightarrow (L + l + A) - (L - l) = 2l + A$
$2 \rightarrow 2 + \frac{4}{2} = 4$	$e \rightarrow e + \frac{4}{2}$
$\left[ 4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2 \right]$	$\left[ e + \frac{4}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \left( e + \frac{4}{2} \right) \right]$
$[2 \rightarrow 2 \times 2 = 4]$	$\left[ \frac{1}{2} \times \left( e + \frac{4}{2} \right) \rightarrow \left( \frac{1}{2} \times \left( e + \frac{4}{2} \right) \right)^2 \right]$
$60 \rightarrow 60 + 4 = 64$	$2l + A \rightarrow (2l + A) + \left( \frac{1}{2} \times \left( e + \frac{4}{2} \right) \right)^2$
$64 \rightarrow \sqrt{64} = 8 = L$	$\sqrt{(2l + A) + \left( \frac{1}{2} \times \left( e + \frac{4}{2} \right) \right)^2} = L$
La longueur est 8.	$L - (L - l) = l$
$8 \rightarrow 8 - 2 = 6 = l$	
La largeur est 6.	

Remarque :

Deux étapes sont absentes de la procédure d'Abū Bakr. Ce problème se ramène à tous ceux sur le carré du type  $n.c + A = p$ . De plus, les problèmes #41 à #43, sur le rectangle, proposent le même type de problème. Tous ces problèmes nous permettent de reconstituer entièrement la démarche qui fait intervenir le nombre de côtés du quadrilatère. De fait, le terme 4 qui intervient dans la 5<sup>e</sup> étape n'est pas le résultat de la 2<sup>e</sup> étape.

Cette omission va dans le sens de la corruption de la version que nous avons par rapport à la version originale. Il s'agit vraisemblablement d'une omission dans le texte arabe.

**Problème #39**

$l \times A$  donné. Longueur ?

Même méthode que précédemment.

Remarque :

Abū Bakr renvoie au problème qui « précède celui par l'algèbre ». Cette expression n'est pas suffisamment précise pour comprendre de quel problème il s'agit. Ici, nous ne pensons pas à un problème de corruption qui serait plus important que des erreurs de traduction ou de copie. En effet, il s'agirait d'une réorganisation des problèmes, ce qui est peu probable.

Le problème auquel Abū Bakr renvoie peut être #32 qui est symétrique à #39 (mêmes conditions avec la longueur à la place de la largeur). Ce problème précède évidemment #39 et propose, à la suite de la procédure pré-algébrique « traditionnelle », une procédure algébrique. De plus, aucun autre problème entre #32 et #39 ne propose une résolution algébrique. Ce qui pourrait expliquer la formulation alambiquée d'Abū Bakr.

**Problème #40**

$L \times d = 80$ ,  $l = 6$ . Diagonale et longueur ?

$80 \rightarrow 80 \times 80 = 6\,400$	$L \times d \rightarrow (L \times d)^2$
$6 \rightarrow 6 \times 6 = 36$	$l \rightarrow l^2$
$36 \rightarrow \frac{36}{2} = 18$	$l^2 \rightarrow \frac{l^2}{2}$
$18 \rightarrow 18 \times 18 = 324$	$\frac{l^2}{2} \rightarrow \left(\frac{l^2}{2}\right)^2$
$324 \rightarrow 324 + 6\,400 = 6\,724$	$\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2$
$6\,724 \rightarrow \sqrt{6\,724} = 82$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2}$
$82 \rightarrow 82 + 18 = 100$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2 + \left(\frac{l^2}{2}\right)}$
$100 \rightarrow \sqrt{100} = 10 = d$ La diagonale est 10.	$\rightarrow \sqrt{\sqrt{\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2 + \left(\frac{l^2}{2}\right)} = d$
$82 - 18$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2} - \left(\frac{l^2}{2}\right)$
$\rightarrow \sqrt{82 - 18} = L$ La longueur est [8].	$\rightarrow \sqrt{\sqrt{\left(\frac{l^2}{2}\right)^2 + (L \times d)^2} - \left(\frac{l^2}{2}\right)} = L$

**Problème #40'**

$d \times l = 60$ ,  $L = 8$ .

Même méthode que précédemment [#40].

Procédure algébrique :

La méthode selon l'algèbre est sans difficulté.

Remarque :

Abū Bakr précise que la procédure algébrique est « légère » et ne la détaille pas. Or, la mise en équation qui aurait pu être la sienne en posant  $x$  la largeur donne l'équation  $x^4 + 64x^2 = 3\,600$  qui n'est pas aussi immédiate que les précédentes.

**Problème #41**

$l + A = 54, L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$1 + 2 \rightarrow 3$	$1 + e$
$3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	$1 + e \rightarrow \frac{1}{2}(1 + e)$
$1\frac{1}{2} \rightarrow 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1 + e) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(1 + e)\right)^2$
$2\frac{1}{4} \rightarrow 2\frac{1}{4} + 54 = 56\frac{1}{4}$	$\rightarrow \left(\frac{1}{2}(1 + e)\right)^2 + (l + A)$
$56\frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{56\frac{1}{4}}$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1 + e)\right)^2 + (l + A)}$
$\rightarrow \sqrt{56\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2} = 6 = l$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1 + e)\right)^2 + (l + A)} - \frac{1}{2}(1 + e) = l$
La largeur est 6.	$l + (L - l) = L$
$6 + 2 \rightarrow 8 = L$	
La longueur est 8.	

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$ ,

$$x \times (x + 2) = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x + x = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x = 54$$

Même résolution que précédemment [en algèbre].

Remarque :

Le coefficient 1 de la première étape correspond au coefficient de  $l$ , c'est-à-dire au nombre de côtés ajoutés à l'aire dans l'équation  $l + A = 54$ . Le problème suivant est le symétrique de celui-ci avec la longueur à la place de la largeur.

La remarque « procède selon ce qui est exposé précédemment » ne renvoie pas aux problèmes précédents en tant que tels mais davantage aux procédures algébriques qui y sont développées. Elle peut aussi renvoyer à un traité d'algèbre qui précéderait le texte d'Abū Bakr.

**Problème #42**

$L + A = 56, L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$56 - 2 = 54$	$(L + A) - e$
$1 + 2 = 3$	$1 + e$

$3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2} \rightarrow 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{4} \rightarrow 2\frac{1}{4} + 54 = 56\frac{1}{4}$ $56\frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$ $7\frac{1}{2} \rightarrow 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 6 = l$ La largeur est 6.	$1+e \rightarrow \frac{1}{2}(1+e)$ $\frac{1}{2}(1+e) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(1+e)\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}(1+e)\right)^2 + (L+A) - e$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+e)\right)^2 + (L+A) - e}$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(1+e)\right)^2 + (L+A) - e} - \frac{1}{2}(1+e) = l$
--	--

Procédure algébrique :

La méthode selon l'algèbre est facile.

### Problème #43

$2l + 2L + A = 76$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$2 \rightarrow (L-l) \times 2 = 4$ $4 \rightarrow 76 - 4 = 72$ $n + 2 = 4 + 2 = 6$ si $n$ est le nombre de cotés. $6 \rightarrow \frac{6}{2} = 3$ $3 \rightarrow 3 \times 3 = 9$ $9 \rightarrow 72 + 9 = 81$ $81 \rightarrow \sqrt{81} = 9$ $9 \rightarrow 9 - \frac{6}{2} = 6 = l$ La largeur est 6. $6 + 2 = 8 = L$ La longueur est 8.	$2 \times e$ $\rightarrow (2l + 2L + A) - e \times \frac{n}{2}$ $4 + e$ $4 + e \rightarrow \frac{4+e}{2}$ $\frac{4+e}{2} \rightarrow \left(\frac{4+e}{2}\right)^2$ $\rightarrow [(2l + 2L + A) - e \times 2] + \left(\frac{4+e}{2}\right)^2$ $\rightarrow \sqrt{[(2l + 2L + A) - e \times 2] + \left(\frac{4+e}{2}\right)^2}$ $\rightarrow \sqrt{[(2l + 2L + A) - e \times 2] + \left(\frac{4+e}{2}\right)^2} - \frac{4+e}{2} = l$ $l + (L - l) = L$
--	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$ ,

$$x \times (x + 2) = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x + (4 + 4x) = x^2 + 6x + 4$$

$$x^2 + 6x + 4 = 76$$

Résoudre à l'aide de l'algorithme de l'équation de Type 4.

Remarque :

Le problème #43 est dans le prolongement des problèmes #38, #41 et #42 lorsque l'auteur ajoute une quantité de côtés à l'aire. Cette fois-ci, on ajoute le périmètre (les quatre côtés) à l'aire du rectangle.

La procédure d'Abū Bakr est très précise et identifie clairement les quantités comme le nombre de côtés, l'excès de la longueur sur la largeur. Ibn ōAbdūn propose le même problème, [A26], avec la même procédure sans être aussi précis qu'Abū Bakr.

**Problème #44**

$A - l = 42, L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$2 - 1 = 1$ $1 \rightarrow \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 42 = 42\frac{1}{4}$ $42\frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{42\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}$ $6\frac{1}{2} \rightarrow 6\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 6 = l$ La largeur est 6. $[6 + 2 = 8]$ La longueur est 8.	$e - 1$ $(e - 1) \rightarrow \frac{1}{2}(e - 1)$ $\frac{1}{2}(e - 1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)}$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)} - \frac{1}{2}(e - 1) = l$ $l + (L - l) = L$
--	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$ ,

$$x \times (x + 2) = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x - x = x^2 + x$$

$$x^2 + x = 42$$

$$1 \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} + 42 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + 42}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + 42} - \frac{1}{2} = 6$$

$$x = 6$$

La largeur est 6.

$6 + 2 = 8$ .  
La longueur est 8.

Remarque :

Ce problème et les deux suivants correspondent aux problèmes #38, #41-#43 en prenant la différence entre l'aire et un certain nombre de côtés. Les procédures sont équivalentes.

### Problème #45

$A - L = 40$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$2 + 40 = 42$	$e + (A - L) = A - l$
$2 - 1 = 1$	$e - \frac{n}{4}$
$1 \rightarrow \frac{1}{2}$	$(e - 1) \rightarrow \frac{1}{2}(e - 1)$
$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(e - 1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2$
$\frac{1}{4} \rightarrow 42 + \frac{1}{4} = 42\frac{1}{4}$	$\rightarrow \left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)$
$42\frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{42\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)}$
$6\frac{1}{2} \rightarrow 6\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 6 = l$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}(e - 1)\right)^2 + (A - l)} - \frac{1}{2}(e - 1) = l$
La largeur est 6.	$l + (L - l) = L$
$6 + 2 = 8 = L$	
La longueur est 8.	

Procédure algébrique :  
La méthode selon l'algèbre est facile.

### Problème #46

$A - (2l + 2L) = 20$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$2 \times 2 = 4$	$2 \times e$
$4 \rightarrow 20 + 4 = 24$	$(2 \times e) \rightarrow (2 \times e) + (A - 2L - 2l)$
$[4 \rightarrow 4 - 2]$	$4 \rightarrow 4 - e$
$2 \rightarrow \frac{2}{2} = 1$	$4 - e \rightarrow \frac{4 - e}{2}$
$1 \rightarrow 1 \times 1 = 1$	$\frac{4 - e}{2} \rightarrow \left(\frac{4 - e}{2}\right)^2$
$1 \rightarrow 24 + 1 = 25$	$\rightarrow (2 \times e) + (A - 2L - 2l) + \left(\frac{4 - e}{2}\right)^2$

$25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$ $5 \rightarrow 5 + \frac{2}{2} = 6 = l$ La largeur est 6. $6 + 2 = 8$ La longueur est 8.	$\rightarrow \sqrt{(2 \times e) + (A - 2L - 2l) + \left(\frac{4-e}{2}\right)^2}$ $\rightarrow \sqrt{(2 \times e) + (A - 2L - 2l) + \left(\frac{4-e}{2}\right)^2} + \frac{4-e}{2} = l$ $l + (L - l) = L$
---	---

Remarque :

À l'image du problème #43, Abū Bakr soustrait ici le périmètre du rectangle à son aire.

Ibn ōAbdūn propose, avec [A23], le même énoncé avec les mêmes données numérique et la même procédure. Sa démarche est intéressante car il décrit une étape intermédiaire entre la 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> qui justifie le coefficient 2 ensuite utilisé : c'est la différence entre le nombre de côtés du quadrilatère et l'excès de la longueur sur la largeur.

Cette étape est absente dans la version que nous avons du texte d'Abū Bakr. Ce peut à nouveau être une omission du copiste arabe ou latin, ou du traducteur.

Ibn ōAbdūn poursuit avec deux autres exemples, [A24] et [A25], qui ne sont pas chez Abū Bakr. Il généralise le procédé précédent en considérant le cas limite où l'excès est égal au nombre de côté. Il considère ensuite le cas où l'excès est supérieur au nombre de côtés. Le calcul de la différence est renversé.

Il faudrait donc comprendre : « Prendre le nombre de côtés du quadrilatère, prendre l'excès, et retrancher le plus grand du plus petit. »

**Problème #47**

$l + L + d = \frac{48}{2}$ ,  $A = 48$ . Longueur et largeur ?

$\frac{48}{2} = 24$ $24 \rightarrow 24 \times 24 = 576$ $48 \rightarrow 48 \times 2$ $\rightarrow 576 - 48 \times 2 = 480$ $480 \rightarrow \frac{480}{2} = 240$ $240 \rightarrow 240 \div 24 = 10 = d$ La diagonale est 10. $24 - 10 = 14$ Donc, $l + L = 14$ .	$l + L + d \rightarrow (l + L + d)^2$ $(l + L + d)^2 \rightarrow 2 \times (l + L + d)^2$ $\rightarrow (l + L + d)^2 - 2 \times A$ $\rightarrow \frac{(l + L + d)^2 - 2 \times A}{2}$ $\rightarrow \frac{\frac{1}{2}((l + L + d)^2 - 2 \times A)}{l + L + d} = d$ $(l + L + d) - d = l + L$
--	--

Le problème se ramène au problème #25.

Remarque :

La formulation de l'énoncé d'Abū Bakr pose question. En effet, pourquoi introduit-il la moitié de 48, et pas tout de suite 24 ?

Un élément de réponse est peut-être chez Ibn ōAbdūn. En effet, ce dernier fournit un problème équivalent avec [A30] dont l'énoncé est «  $2l + 2L + 2d = 48$ ,  $A = 48$ . Longueur et largeur ? », et les étapes de la procédure sont les mêmes.

### Problème #48

$l + L + d = 24$ ,  $L = l + 2$ . Longueur et largeur ?

$24 \times 24 = 576$	$(l + L + d) \rightarrow (l + L + d)^2$
$576 \rightarrow 576 \times 2 = 1152$	$(l + L + d)^2 \rightarrow 2 \times (l + L + d)^2$
$1152 \rightarrow 1152 + (L - l) \times (L - l) = 1152 + 2 \times 2 = 1156$	$\rightarrow 2 \times (l + L + d)^2 + e^2$
$1156 \rightarrow \sqrt{1156} = 34$	$\rightarrow \sqrt{2 \times (l + L + d)^2 + e^2}$
$34 \rightarrow 34 - 24 = 10 = d$	$\rightarrow \sqrt{2 \times (l + L + d)^2 + e^2} - (l + L + d) = d$
La diagonale est 10.	
Poursuivre avec la méthode précédente.	

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$ ,

$$x + x + 2$$

$$24 - (2x + 2) = 22 - 2x$$

$$x \times x + 2 \times 2 = (22 - 2x) \times (22 - 2x)$$

$$[x^2 + 4 = 484 - 88x + 4x^2]$$

$$[3x^2 + 88x = 480]$$

[Type 4]

$$[x = 6]$$

La largeur est 6.

$$6 + 2 = 8$$

La longueur est 8.

Remarque :

« Ce qui précède » est sans doute le problème #28 dans lequel on a la diagonale et la somme des deux côtés.

Ibn ōAbdūn donne un problème équivalent, [A28], mais dont l'énoncé est différent.

Il donne la somme des côtés et des deux diagonales égale à 48, il est ainsi cohérent avec le problème précédent.

### Problème #49

$d = L + 2$ ,  $L = l + 2$ . Diagonale, longueur [et largeur] ?

$$2 \times 5 = d$$

La diagonale est [10].

$$2 \times 4 = L$$

La longueur est [8].

$$2 \times 3 = l$$

La largeur est [6].

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur, la longueur est alors  $x + 2$  et le diamètre  $x + 4$ ,

$$\begin{cases} x \times x \\ (x + 2) \times (x + 2) \end{cases}$$

$$x \times x + (x + 2) \times (x + 2) = 2x^2 + 4x + 4$$

$$(x + 4) \times (x + 4) = x^2 + 8x + 16$$

$$2x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x^2 = x^2 \\ 16 - 4 = 12 \\ 8x - 4x = 4x \end{cases}$$

$$x^2 = 4x + 12$$

L'algorithme de résolution de l'équation de type 6 donne :

$$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \rightarrow 2 \times 2$$

$$\rightarrow 2 \times 2 + 12 = 16$$

$$16 \rightarrow \sqrt{16} = 4$$

$$4 \rightarrow 4 + 2 = 6$$

$$[x = 6]$$

La largeur est 6.

$$6 + 2 = 8$$

La longueur est 8.

$$6 + 4 = 10.$$

La diagonale est 10.

Remarque :

Abū Bakr utilise le premier triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) comme proportion pour le triplet (largeur, longueur, diagonale) qui forme un triangle rectangle.

Il faut noter que l'excès entre les éléments du premier triplet pythagoricien est l'unité. En multipliant par 2 (le nouvel excès), Abū Bakr donne un nouveau triplet pythagoricien dont l'excès est construit pour être 2.

Abū Bakr précise que cette méthode n'est valable que si les excès sont égaux. En effet, si les excès ne sont plus égaux, alors le triplet n'est plus en proportion avec (3 ; 4 ; 5).

La preuve algébrique n'est qu'une transcription de la relation de Pythagore pour la détermination de la diagonale.

**Problème #50**

$L - l = d - L, d = 10$ . Longueur et largeur ?

$\frac{10}{2} \times \frac{10}{2} = 25$	$d \rightarrow \left(\frac{d}{2}\right)^2$
$10 \times 10 - 25 = 75$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}d^2$
$75 \rightarrow 75 - \frac{1}{5} \times 75 = 60$	$\frac{3}{4}d^2 \rightarrow \frac{3}{4}d^2 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{4}d^2\right) = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4}d^2\right) = \frac{3}{5}d^2$
$5 \rightarrow 5 - \frac{1}{5} \times 5 = 4$	$\frac{d}{2} \rightarrow \frac{d}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{d}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{d}{2} = \frac{2}{5}d$
$4 \rightarrow \frac{4}{2} \times \frac{4}{2} = 2 \times 2$	$\frac{2}{5}d \rightarrow \left(\frac{\frac{2}{5}d}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}d\right)^2$
$2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2 + 60 = 64$	$\left(\frac{1}{5}d\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{5}d\right)^2 + \frac{3}{5}d^2 = \frac{16}{25}d^2$
$64 \rightarrow \sqrt{64} = 8$	$\rightarrow \sqrt{\frac{16}{25}d^2} = \frac{4}{5}d$
$8 \rightarrow 8 - 2 = 6 = l$	$\rightarrow \frac{4}{5}d - \left(\frac{1}{5}d\right) = \frac{3}{5}d = l$
La largeur est 6.	
$10 - 6 = 4$	
$4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$	
$2 \rightarrow 6 + 2 = 8 = L$	
La longueur est [8].	

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la largeur,

$$10 - x$$

$$\frac{10 - x}{2} = 5 - \frac{x}{2}$$

$$5 - \frac{x}{2} + x = 5 + \frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(5 + \frac{x}{2}\right) \times \left(5 + \frac{x}{2}\right) \\ x \times x \end{array} \right.$$

$$\left(5 + \frac{x}{2}\right) \times \left(5 + \frac{x}{2}\right) + x \times x = 10 \times 10$$

$$\left[ 25 + 5x + \frac{5x^2}{4} = 100 \right]$$

$$\left[ \frac{5x^2}{4} + 5x = 75 \right]$$

$$\left[ x^2 + 4x = 60 \right]$$

[Type 4]

$$x = 6$$

La largeur est 6.

Remarque :

Le problème est un prolongement au problème précédent où les excès sont égaux mais pas explicitement quantifiés. Etant donnée l'égalité des excès, les conditions du problème #49 sont réunies, c'est-à-dire que le triplet (largeur, longueur, diagonale) est dans le rapport (3 ; 4 ; 5). Comme la diagonale est 10, Abū Bakr pouvait prétendre que le triplet désiré était le double de premier triplet pythagoricien entier, à savoir (6 ; 8 ; 10). Mais, il choisit une autre méthode plus complexe qui n'utilise pas les rapports, mais une démarche pré-algébrique comme pour les autres problèmes.

Ce type de problème ne se retrouve pas dans les autres textes arabes connus, nous ne pouvons donc pas établir d'analyse comparative qui nous permettrait de mieux comprendre la démarche d'Abū Bakr.

### Problème #51

$\frac{d}{L} = \frac{L}{l}$ ,  $d = 10$ . Longueur et largeur ?

$10 \rightarrow \frac{10}{2} = 5$ $5 \rightarrow 5 \times (5 \times 5) = 125$ $125 \rightarrow \sqrt{125} - 5 = l$ La largeur est $\sqrt{125} - 5$ .	$d \rightarrow \frac{d}{2}$ $\frac{d}{2} \rightarrow 5 \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$ $5 \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{5 \times \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2} = l$
---	--

Deux méthodes pour trouver la longueur :

a.

$\sqrt{125} - 5 \rightarrow (\sqrt{125} - 5) \times 10$ $\rightarrow \sqrt{(\sqrt{125} - 5) \times 10} = L$ La longueur est $\sqrt{(\sqrt{125} - 5) \times 10}$ .	$l \rightarrow l \times d$ $l \times d \rightarrow \sqrt{l \times d} = L$
---	--

b.

$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{125} - 5) \times (\sqrt{125} - 5) \\ 10 \times 10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} l^2 \\ d^2 \end{array} \right.$
---	---

$10 \times 10 - (\sqrt{125} - 5) \times (\sqrt{125} - 5)$ $\rightarrow \sqrt{10 \times 10 - (\sqrt{125} - 5) \times (\sqrt{125} - 5)} = L$ La longueur est $\sqrt{10^2 - (\sqrt{125} - 5)^2}$ .	$\rightarrow d^2 - l^2$ $\rightarrow \sqrt{d^2 - l^2} = L$
---	---

Remarque :

Les deux démarches pour la détermination de la longueur sont vraiment différentes. Dans la première, Abū Bakr utilise explicitement la propriété de la longueur comme la moyenne proportionnelle entre la largeur et la diagonale. Dans la seconde, il utilise la relation de Pythagore.

### Problème #52

$d - L = L - l = e$ ,  $e \times d = 20$ . Longueur et largeur ?

$20 \times 5 = 100$ $100 \rightarrow \sqrt{100} = 10 = d$ $\left[ e = \frac{20}{10} \right]$ $e = 2$ La diagonale est 10.	$e \times d \times 5$ $\rightarrow \sqrt{e \times d \times 5} = d$ $e = \frac{e \times d}{d}$
---	---

Le problème se ramène au problème suivant :

### Problème #52'

$d = 10$ ,  $d - L = L - l = 2$ . Longueur et largeur ?

Les problèmes précédents donnent la solution [en particulier, #50].

Remarque :

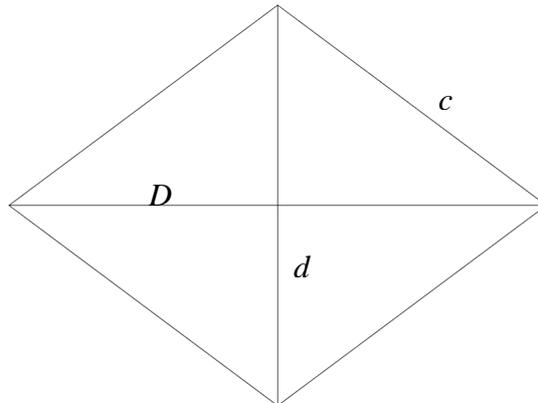
Les excès entre la diagonale et la longueur d'une part, et entre la longueur et la largeur d'autre part sont égaux ; nous sommes dans les conditions de #49. Le triplet est donc proportionnel à (3 ; 4 ; 5).

L'algorithme repose sur la relation :  $5 \times e \times d = d^2$  où  $e$  peut être considéré comme le facteur de proportionnalité entre le triplet ( $d ; L ; l$ ) et (5 ; 4 ; 3).

En effet  $5e = d$  car  $\frac{L}{d} = \frac{4}{5}$ ;  $\frac{l}{d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{L}{d} - \frac{l}{d} = \frac{L-l}{d} = \frac{e}{d} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$ .

**[CHAPITRE SUR LES LOSANGES]**

Soient  $c$  côté,  $d$  diagonale courte,  $D$  longue diagonale,  $A$  aire.



**Problème #53**

$D = 16, d = 12, c = 10$ . Aire ?

$A = 96.$	$(d, D) \rightarrow A = \frac{D}{2} \times d$ $(d, D) \rightarrow A = \frac{d}{2} \times D$
-----------	--

Remarque :

Le problème est surdéterminé avec la donnée du côté alors qu'elle n'est pas utile pour déterminer l'aire d'un losange. De plus, elle se détermine facilement à partir de la connaissance des deux diagonales, ce qu'il fera au #56.

**Problème #54**

$A = 96, D = 16$ . Diagonale courte ?

$96 \div \frac{16}{2} = d$ La diagonale courte est [12].  $96 \div \frac{12}{2} = 16 = D$ La longue diagonale est 16.	$(A, D) \rightarrow A \div \frac{D}{2} = d$  $(A, d) \rightarrow A \div \frac{d}{2} = D$
---	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la diagonale courte,

$$x \times \frac{16}{2} = 8x = 96$$

$$x = 12$$

Remarque :

Notons ici que la terminologie d'Abū Bakr trahit sa conception du trapèze comme un la moitié d'un rectangle de longueur  $D$  et de largeur  $d$ . En effet, la diagonale courte (resp. longue) est nommé le côté court (resp. long). Ce « lapsus » est stable pour ce problème mais ne se

retrouve nul part ailleurs. À notre avis, le problème #57' renvoie aussi au chapitre sur le rectangle.

**Problème #55**

$c = 10, d = 12$ . Longue diagonale ?

$\frac{12}{2} \times \frac{12}{2} = 36$	$d \rightarrow \left(\frac{d}{2}\right)^2$
$c \times c = 100$	$c \rightarrow c^2$
$100 - 36 = 64$	$\rightarrow c^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$
$64 \rightarrow \sqrt{64} = 8$	$\rightarrow \sqrt{c^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$
$8 \rightarrow 8 \times 2 = D$	$\rightarrow 2 \times \sqrt{c^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = D$
La longue diagonale est [16].	

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la diagonale longue,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \\ \frac{12}{2} \times \frac{12}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{2} + \frac{12}{2} \times \frac{12}{2} = \frac{1}{4}x^2 + 36$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 36 = 10 \times 10 = 100$$

Après restauration,

$$x^2 + 144 = 400$$

Après comparaison,

$$256 = x^2$$

$$x = \sqrt{256} = 16$$

La longue diagonale est 16.

**Problème #56**

$D = 16, d = 12$ . Côté ?

$$\begin{cases} \frac{D}{2} \times \frac{D}{2} \\ \frac{d}{2} \times \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\frac{D}{2} \times \frac{D}{2} + \frac{d}{2} \times \frac{d}{2} = 100$$

$$100 \rightarrow \sqrt{100} = 10 = c$$

Le côté est 10.

**Problème #57**

$D^2 + d^2 = 400$ ,  $A = 96$ . Diagonales courte et longue ?

$4 \times A = 384$	$A \rightarrow 4 \times A$
$384 \rightarrow 400 + 384 = 784$	$4A \rightarrow D^2 + d^2 + 4A$
$784 \rightarrow \sqrt{784} = 28 = D + d$	$\rightarrow \sqrt{D^2 + d^2 + 4A} = D + d$
La somme des deux diagonales est 28.	

Ce problème est alors ramené au suivant :

**Problème #57'**

$D + d = 28$ ,  $A = 96$ . Diagonales courtes et longues ?

$\frac{28}{2} \times \frac{28}{2} = 196$	$(D + d) \rightarrow \left(\frac{D + d}{2}\right)^2$
$196 \rightarrow 196 - 96 \times 2 = 4$	$\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{D + d}{2}\right)^2 - 2A$
$4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 - 2A}$
$2 \rightarrow 14 + 2 = D$	$\frac{(D + d)}{2} + \sqrt{\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 - 2A} = D$
$2 \rightarrow 14 - 2 = d$	$\frac{(D + d)}{2} - \sqrt{\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 - 2A} = d$
[La diagonale courte est 12, la longue est 16.]	

Remarque :

Abū Bakr énonce à nouveau « Procède donc selon ce qui a précédé » qui ne renvoie pas nécessairement au problème précédent alors qu'à première vue, il renvoie même exactement au problème suivant !

En fait, nous pensons ici que l'auteur fait référence au problème #25 relatif au rectangle où  $L + l = 14$ , et  $A = 48$  pour lequel la procédure de résolution est identique modulo le doublement de l'aire puisque l'aire du rectangle est double du losange correspondant.

La présence de #58 s'expliquerait alors par la volonté d'Abū Bakr de donner divers énoncés de problèmes. la résolution de #57 lui fournit l'occasion d'en distinguer un nouveau qui peut être autonome et non rattaché à un autre problème.

Un élément terminologique est à soulever. Abū Bakr débute sa procédure en « quadruplant » l'aire. Il définit alors ce que cela signifie, à savoir « multiplier par quatre », comme si le terme n'était pas utilisé couramment.

Abū Bakr propose une procédure alternative pour résoudre le problème #57.

$\frac{400}{4} = 100$ $100 \rightarrow 100 + 96 = 196$ $196 \rightarrow \sqrt{196} = 14$ $\frac{96}{2} = 48$ $14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$ $7 \rightarrow 7 \times 7 = 49$ $49 \rightarrow 49 - 48 = 1$ $1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$ $1 \rightarrow \frac{14}{2} + 1 = 8 = \frac{D}{2}$ <p>8 est la moitié de la longue diagonale</p> $1 \rightarrow \frac{14}{2} - 1 = 6 = \frac{d}{2}$ <p>6 est la moitié de la diagonale courte.</p>	$D^2 + d^2 \rightarrow \frac{D^2 + d^2}{4}$ $\frac{D^2 + d^2}{4} \rightarrow \frac{D^2 + d^2}{4} + A$ $\frac{D^2 + d^2}{4} + A \rightarrow \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A}$ $A \rightarrow \frac{A}{2}$ $\sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)$ $\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right) \rightarrow \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)^2$ $\rightarrow \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)^2 - \frac{A}{2}$ $\rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)^2 - \frac{A}{2}}$ $\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)^2 - \frac{A}{2}} = \frac{1}{2} D$ $\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4} + A} \right)^2 - \frac{A}{2}} = \frac{1}{2} d$
---	--

### Problème #58

$A = 96, d + D = 28$ . Diagonales courte et longue ?

$96 \times 2 = 192$ $\frac{28}{2} = 14$	$A \rightarrow 2 \times A$ $(d + D) \rightarrow \frac{(d + D)}{2}$
---	--

$14 \rightarrow 14 \times 14$ $\rightarrow 14 \times 14 - 192$ $\rightarrow \sqrt{14 \times 14 - 192} = 2$ $14 + 2 = 16 = D$ La longue diagonale est 16. $14 - 2 = 12 = d$ La diagonale courte est 12.	$\frac{(d+D)}{2} \rightarrow \left(\frac{d+D}{2}\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{d+D}{2}\right)^2 - 2A$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{d+D}{2}\right)^2 - 2A}$ $\frac{d+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{d+D}{2}\right)^2 - 2A} = D$ $\frac{d+D}{2} - \sqrt{\left(\frac{d+D}{2}\right)^2 - 2A} = d$
--	---

**Problème #59**

$D + d = 28, \frac{d}{D} = \frac{3}{4}$ . Diagonales courte et longue ?

$1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$ $28 \div 1\frac{3}{4} = 16 = D$ La longue diagonale est 16. $28 - 16 = 12 = d$ La diagonale courte est 12.	$\frac{d}{D} \rightarrow \frac{D+d}{D}$ $(D+d) \rightarrow (D+d) \div \left(\frac{D+d}{D}\right) = D$ $(D+d) - D = d$
---	---

Remarque :

En fait l'unité de la 1<sup>e</sup> étape correspond à la fraction  $\frac{D}{D}$  afin de déterminer  $\frac{D+d}{D}$  dont on connaît le numérateur. Il suffira alors de diviser le numérateur par cette fraction, et on déterminera  $D$ .

**Problème #60**

$D + d = 28, D = d + 4$ . Diagonales courte et longue ?

$4 + 28$ $\rightarrow \frac{4+28}{2} = D$ La longue diagonale est [16]. $28 - 4 \rightarrow \frac{28-4}{2} = d$ La diagonale courte est [12].	$\frac{(D-d) + (D+d)}{2}$ $\rightarrow \frac{(D-d) + (D+d)}{2} = D$ $\frac{(D+d) - (D-d)}{2}$ $\rightarrow \frac{(D+d) - (D-d)}{2} = d$
---	---

Remarque :

Ce problème est à nouveau celui de la détermination de deux nombres dont on connaît la somme et la différence.

**Problème #61**

$D^2 + d^2$ ,  $A$  connus. Diagonales longue et courte ?

$A \times 4 + 400 = 784$ $784 \rightarrow \sqrt{784} = 28 = D + d$ La somme des deux diagonales est 28.	$A \times 4 + (D^2 + d^2)$ $\rightarrow \sqrt{A \times 4 + (D^2 + d^2)} = D + d$
---	---

Cela revient au problème #58.

Remarque :

La présence de ce problème est étrange puisque c'est exactement le même que #57 avec exactement la même procédure. La seule différence entre les deux est l'énoncé. En effet, dans #57, il est numériquement spécifié alors que #61 a un énoncé général, vérifié quel que soit l'aire et la somme des carrés des deux diagonales.

**Problème #62**

$\frac{D}{d} = 1\frac{1}{3}$ ,  $A = 96$ . Diagonales longue et courte ?

$A \times 2 = 192$  $192 \rightarrow 192 \times 1\frac{1}{3} = 256$  $256 \rightarrow \sqrt{256} = D$ La longue diagonale est 16.  $192 \rightarrow 192 \div 1\frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{192 \div 1\frac{1}{3}}$ [La diagonale courte est 12.]	$A \rightarrow 2A$  $A \rightarrow 2A \times \frac{D}{d}$ $2A \times \frac{D}{d} \rightarrow \sqrt{2A \times \frac{D}{d}} = D$  $\rightarrow \sqrt{2A \div \frac{D}{d}} = d$
---	---

Procédure algébrique :

Si  $x$  est la diagonale courte, la grande diagonale est donc  $x + \frac{1}{3}x$ ,

$$x \times \left( x + \frac{1}{3}x \right) = x^2 + \frac{1}{3}x^2 = 2 \times A = 192$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12$$

La diagonale courte est 12, et donc la longue est 16.

**Problème #63**

$\frac{d}{D} = \frac{3}{4}$ ,  $A = 96$ . Diagonales longue et courte ?

La méthode est unique

$[A \times 2 = 192]$  $[192 \rightarrow 192 \times \frac{3}{4} = 144]$	$A \rightarrow 2A$  $A \rightarrow 2A \times \frac{d}{D}$
--	---

$[144 \rightarrow \sqrt{144} = d]$ [La longue diagonale est 12.] $[192 \rightarrow 192 \div \frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{192 \div \frac{3}{4}} = 16]$ [La diagonale courte est 16.]	$2A \times \frac{d}{D} \rightarrow \sqrt{2A \times \frac{d}{D}} = d$ $\rightarrow \sqrt{2A \div \frac{d}{D}} = D$
---	--

Remarque :

Abū Bakr ne décrit pas la procédure, mais précise qu'elle est « unique », c'est-à-dire semblable au problème #62 précédent avec le rapport inverse égal.

**Problème #64**

$\frac{D}{d} = 1\frac{1}{3}$ ,  $D + d = 28$ . Diagonales longue et courte ?

$1 + 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$ $2\frac{1}{3} \rightarrow 28 \div 2\frac{1}{3} = 12 = d$ La diagonale courte est 12. $28 - 12 = 16 = D$ La longue diagonale est 16.	$\frac{D}{d} \rightarrow \frac{d+D}{d}$ $\frac{d+D}{d} \rightarrow (D+d) \div \left(\frac{d+D}{d}\right) = d$ $(D+d) - d = D$
---	---

Procédé algébrique :

Selon l'algèbre, le procédé est facile.

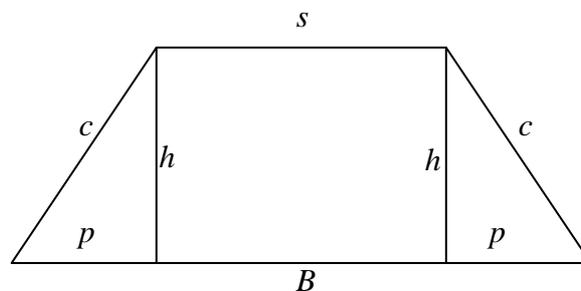
Remarque :

Il s'agit du même problème que #59 avec un rapport inversé mais égal.

D'un point de vue algébrique, le problème aboutit à une équation linéaire, c'est sans doute la raison pour laquelle Abū Bakr juge le procédé « facile ».

**TRAPEZE ISOCELE.**

$B$  la base du trapèze,  $s$  son sommet (ou petite base),  $h$  sa hauteur,  $c$  ses côtés non-parallèles,  $p$  la projection de ces côtés sur sa base,  $d$  diagonale et  $A$  son aire.



**Problème #65**

$B = 16$ ,  $s = 4$ ,  $c = 10$ . Aire ?

$B - s \rightarrow \frac{B - s}{2} = 6 = p$ <p>Les projections sont <math>p = 6</math>.</p> $\begin{cases} p \times p \\ c \times c \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - p \times p$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - p \times p} = 8 = h$ <p>La hauteur est <math>h = 8</math>.</p> $(B + s) \times \frac{h}{2} = 80 = A$ <p>L'aire est 80.</p>	$(B, s) \rightarrow B - s \rightarrow \frac{B - s}{2} = p$ $p \rightarrow p^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - p^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - p^2} = h$ $(B, s, h) \rightarrow (B + s) \times \frac{h}{2} = A$
---	--

**Problème #66**

$s = 4, p = 6, h = 8$ . Diagonale ?

$\begin{cases} s + p \rightarrow (s + p) \times (s + p) \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow (s + p) \times (s + p) + h \times h = 164$ $164 \rightarrow \sqrt{164} = d \approx 12 \frac{5}{6}$ <p>Chaque diagonale est environ <math>12 \frac{5}{6}</math>.</p>	$(s, p) \rightarrow s + p \rightarrow (s + p)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow (s + p)^2 + h^2$ $\rightarrow \sqrt{(s + p)^2 + h^2} = d$
---	---

Remarque :

La diagonale est irrationnelle, Abū Bakr en donne une valeur approchée à l'aide de la formule pressentie dans le problème #15 sur le carré.

L'auteur précise aussi qu'il s'agit d'une approximation par excès sans donner davantage de détails.

**Problème #67**

$s = 4, B = 16, c = 10$ . Restauration du trapèze ?

$$(B, s) \rightarrow B - s = 12$$

$$\rightarrow \frac{s}{12} = \frac{1}{3}$$

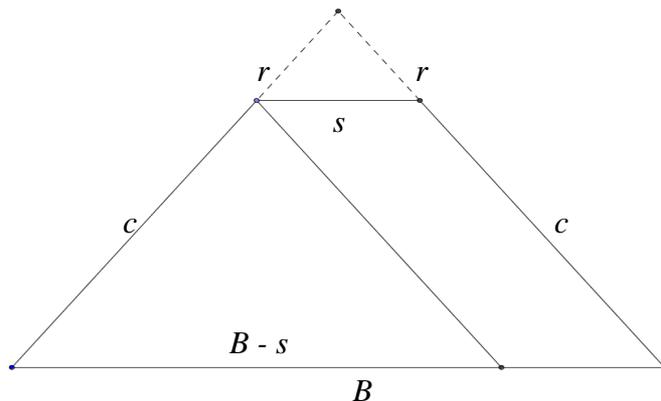
$\frac{1}{3}$  du côté est la partie manquante pour compléter le trapèze en triangle.

Remarque :

L'opération visée est la restauration du trapèze isocèle en un triangle. Abū Bakr désire que les deux côtés inclinés se rencontrent en un unique point qui serait le sommet principal d'un triangle. Notons que le terme utilisé pour la restauration est *restauratio* qui est aussi la traduction de *jabr* de l'opération algébrique correspondant à la restauration d'une équation.

Ce problème ne fait pas partie des problèmes dit pré-algébriques.

Sa résolution est fondée sur la proposition des lignes proportionnelles, sans que ce soit explicite dans le texte<sup>5</sup>.



$$\frac{B}{B-s} = \frac{c+r}{c} \Rightarrow \frac{s}{B-s} = \frac{r}{c}$$

Ibn ōAbdūn propose le même énoncé, [A49], avec les mêmes données mais la procédure de résolution est différente. En effet, il ne calcule pas explicitement le rapport de section comme le fait Abū Bakr, mais détermine directement la longueur des « morceaux » à ajouter pour restaurer les côtés inclinés.

**Problème #68**

$s = 4, B = 16$ . Où se rencontrent les diagonales sur la hauteur à partir du sommet ?

$$(s, B) \rightarrow s + B = 20$$

$$20 \rightarrow \frac{s}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

**Problème #68'**

$s = 4, B = 16$ . Où se rencontrent les diagonales sur la hauteur à partir de la base ?

$$20 \rightarrow \frac{B}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Remarque :

Le problème #68' est le complémentaire du #68 ; le point d'intersection des diagonales est situé au cinquième de la hauteur en partant du sommet, ou aux quatre cinquièmes en partant de la base.

La procédure repose à nouveau sur le théorème des lignes proportionnelles (H. VI. 2) :

$$\frac{h_1}{h} = \frac{s}{s+B} \text{ si } h_1 \text{ est la partie de la hauteur entre le point d'intersection des diagonales et le}$$

sommet. Cela donne l'intersection des diagonales sur la hauteur, au cinquième en partant du sommet.

<sup>5</sup> (El., H. VI. 2) : « Si une droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les [points de] section sera parallèle au côté restant du triangle. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 159.

De même en partant de la base, avec la relation  $\frac{h_2}{h} = \frac{B}{s+B}$  si  $h_2$  est la partie de la hauteur entre le point d'intersection des diagonales et la base. Cela donne l'intersection des diagonales sur la hauteur, au quatre cinquièmes en partant de la base.

**Problème #69**

$c = 10, h = 8, s = 4$ . Base ?

$\begin{cases} c \times c \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - h \times h} = 6 = p$ <p>La projection est <math>p = 6</math>.</p> $6 \times 2 = 12 = 2p$ $12 \rightarrow 12 + 4 = 16 = B$ <p>La base est 16.</p>	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2} = p$ $p \rightarrow 2 \times p$ $2p \rightarrow 2p + s = B$
---	---

**Problème #70**

$c = 10, h = 8, B = 16$ . Sommet ?

$\begin{cases} c \times c = 100 \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - h \times h} = 6 = p$ $6 \rightarrow 6 \times 2 = 12 = 2p$ $12 \rightarrow 16 - 12 = 4 = s$ <p>Le sommet est 4.</p>	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2} = p$ $p \rightarrow 2 \times p$ $2p \rightarrow B - 2p = s$
---	---

**Problème #71**

$s + B = 20, h = 8, c = 10$ . Base et sommet ?

$\begin{cases} c \times c \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - h \times h = 36$ $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$ $6 \rightarrow 6 \times 2 = 12$ $12 \rightarrow 20 - 12 = 8 = 2s$ $8 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 = s$ <p>Le sommet est 4.</p> $20 - 4 = 16 = B$ <p>La base est 16.</p>	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2} = p$ $p \rightarrow 2 \times p$ $2p \rightarrow (s + B) - 2p = 2s$ $2s \rightarrow \frac{2s}{2} = s$ $(s + B) - s = B$
---	--

**Problème #72**

$d = 12\frac{5}{6}$ ,  $s = 4$ ,  $c = 10$ . Base ?

$\begin{cases} 12\frac{5}{6} \times 12\frac{5}{6} = 164 \\ c \times c \end{cases}$ $164 - c \times c = 64$ $64 \rightarrow 64 \div s = 16 = B$ <p>La base est 16.</p>	$d \rightarrow d^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow d^2 - c^2$ $\rightarrow (d^2 - c^2) \div s = B$
---	--

**Problème #73**

$d = 12\frac{5}{6}$ ,  $h = 8$ ,  $c = 10$ . Sommet ?

$\begin{cases} 12\frac{5}{6} \times 12\frac{5}{6} \\ h \times h \end{cases}$ $164 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{164 - h \times h} = 10$ $c \rightarrow c \times c$ $\rightarrow c \times c - h^2 \rightarrow \sqrt{c \times c - h^2} = 6$ $10 - 6 = 4 = s$ <p>Le sommet est 4.</p>	$d \rightarrow d^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow d^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{d^2 - h^2}$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow \sqrt{d^2 - h^2} - \sqrt{c^2 - h^2} = s$
--	---

**Problème #74**

$s \times B = 64$ ,  $s \times h = 32$ ,  $A = 80$ . Sommet, hauteur, base ?

$\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $32 \rightarrow \frac{32}{2} = 16$ $16 \rightarrow 80 - 16 = 64$ $64 \rightarrow \frac{1}{4} \times 64 = 16 = B$ <p>La base est 16.  <math>64 \div 16 = 4 = s</math>          Le sommet est 4.</p>	$\frac{s \times h}{s \times B} = \frac{h}{B}$ $\frac{h}{B} \rightarrow \left(\frac{h}{B}\right)^2$ $\rightarrow \frac{s \times h}{2}$ $\rightarrow A - \frac{s \times h}{2}$ $\left(A - \frac{s \times h}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{h}{B}\right)^2 \times \left(A - \frac{s \times h}{2}\right) = B$ $(s \times B) \div B = s$
--	--

Autre méthode.

$\frac{32}{2} = 16$ $16 \rightarrow 80 - 16 = 64$	$s \times h \rightarrow \frac{s \times h}{2}$ $\frac{s \times h}{2} \rightarrow A - \frac{s \times h}{2}$
---	---

$64 \rightarrow \sqrt{64} = 8 = h$ La hauteur est 8. $32 \div 8 = 4 = s$ Le sommet est 4.	$\rightarrow \sqrt{A - \frac{s \times h}{2}} = h$ $(s \times h) \div h = s$
--	---

Remarque :

Ces deux résolutions posent un problème car elles ne sont pas généralisables à tout trapèze isocèle comme pour les problèmes précédents.

En effet, elles sont vérifiées si et seulement si la hauteur du trapèze est la moitié de la base comme l'énoncé le propose.

### Problème #75

$A = 80, h = 8, s = 4$ . Base ?

$A \div s = 20$ $20 \rightarrow 20 - 4 = 16 = B$ La base est 16.	$(A, s) \rightarrow A \div s$ $A \div s \rightarrow A \div s - s = B$
--	--

Autre méthode.

$4 \times 2 = 8$  $8 \rightarrow A \div 8 = 10$ $10 \rightarrow 10 \times 2 = 20$ $20 \rightarrow 20 - 4 = B$ La base est [16].	$(s, h) \rightarrow s \times \left(\frac{h}{s}\right) = h$ $\rightarrow A \div h$ $A \div h \rightarrow (A \div h) \times 2$ $\rightarrow (A \div h) \times 2 - s = B$
--	---

Remarque :

Abū Bakr donne deux méthodes pour résoudre ce problème qui n'ont pas la même valeur. En effet, la première procédure repose sur l'identité  $\frac{A}{s} - s = B$  qui est vérifiée si et seulement si  $h = 2s$  qui sont bien les conditions de l'énoncé. La deuxième procédure, quant à elle, est différente car elle reste valable pour tout trapèze, quel qu'il soit. En effet, il suffit de considérer le premier facteur  $2 = \frac{h}{s}$  comme dans la procédure généralisée.

### Problème #76

$A = 80, h = 8, B = 16$ . Sommet ?

$A \div \frac{h}{2} = 20$ $20 \rightarrow 20 - 16 = 4 = s$ Le sommet est 4.	$(A, h) \rightarrow A \div \frac{h}{2}$ $A \div \frac{h}{2} \rightarrow \left(A \div \frac{h}{2}\right) - B = s$
---	---

Remarque :

Ce problème est équivalent au précédent en remplaçant le sommet par la base. Abū Bakr applique alors une troisième procédure issue directement de la détermination de l'aire d'un

trapèze. Cette procédure est vérifiée quel que soit le trapèze. Il est étrange que cette procédure apparaisse troisième des procédures possible alors que c'est la plus simple.

**Problème #77**

$c = 10, h = 8, B = 16$ . Sommet ?

$h \times h = 64$ $64 \rightarrow 64 \div B = s$ Le sommet est [4].	$h \rightarrow h^2$ $h^2 \rightarrow h^2 \div B = s$
---	---

Autre méthode.

$\begin{cases} c \times c \\ h \times h \end{cases}$ $c \times c - h \times h \rightarrow \sqrt{c \times c - h \times h}$ $\rightarrow 2 \times \sqrt{c \times c - h \times h} = 12$ $12 \rightarrow 12 - h = 4$ Le sommet est 4.	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $c^2 - h^2 \rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow 2 \times \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow 2 \times \sqrt{c^2 - h^2} - h = s$
---	--

Remarque :

Abū Bakr propose, à nouveau, deux procédures distinctes pour résoudre ce problème. Les deux ont un handicap majeur : elles ne sont pas généralisables à tous les trapèzes isocèles.

En effet, la première méthode repose sur la relation  $\frac{h^2}{B} = s$ , c'est-à-dire que  $h$  est moyenne

proportionnelle de  $B$  et  $s$ . Précisons que les deux problèmes précédents où  $\frac{h}{B} = \frac{s}{h} = \frac{1}{2}$  en sont

des cas particuliers. La seconde méthode utilise, quant à elle, la relation  $2p - h = s$  équivalente à  $B - h = 2s$ , ce qui est vérifié par le trapèze précédent.

Ces problèmes où la généralisation de la procédure n'est pas validée sont très étonnants. Ils ne semblent pas répondre aux mêmes objectifs que l'ensemble des autres problèmes. De plus, ils ne se retrouvent dans aucun autre texte arabe connu.

**Problème #78**

$s = 4, h = 8, B = 16$ . Diagonale ?

$s + B = 20$ $20 \rightarrow \frac{20}{2}$ $\rightarrow \frac{20}{2} \times \frac{20}{2}$ $h \times h$ $\rightarrow \frac{20}{2} \times \frac{20}{2} + h \times h$	$(s, B) \rightarrow s + B$ $s + B \rightarrow \frac{s + B}{2}$ $\frac{s + B}{2} \rightarrow \left(\frac{s + B}{2}\right)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow \left(\frac{s + B}{2}\right)^2 + h^2$
--	--

$\rightarrow \sqrt{\frac{20}{2} \times \frac{20}{2} + h \times h} = d$ <p>La diagonale est <math>\lfloor \sqrt{164} \rfloor</math></p>	$\rightarrow \sqrt{\left(\frac{s+B}{2}\right)^2 + h^2} = d$
--	---

Remarque :

Abū Bakr ne donne pas la valeur de la diagonale qui est par ailleurs explicitement utilisée dans le problème suivant. Ici, il se limite à la procédure qui la détermine sans en donner une valeur approchée.

Cette procédure utilise la relation  $\left(\frac{s+B}{2}\right)^2 + h^2 = d^2$  qui provient de la transformation du trapèze en un rectangle de longueur la demi-somme des bases et comme largeur la hauteur du trapèze. Alors, la diagonale du nouveau rectangle est la diagonale du trapèze si et seulement si le trapèze est isocèle.

**Problème #79**

$d = \sqrt{164}$ ,  $s = 4$ ,  $c = 10$ . Base ?

$\begin{cases} \sqrt{164} \times \sqrt{164} = 164 \\ c \times c \\ \rightarrow 164 - c \times c \\ \rightarrow (164 - c \times c) \div 4 = 16 = B \end{cases}$ <p>La base est 16.</p>	$\begin{aligned} d &\rightarrow d^2 \\ c &\rightarrow c^2 \\ &\rightarrow d^2 - c^2 \\ &\rightarrow \frac{d^2 - c^2}{s} = B \end{aligned}$
---	--

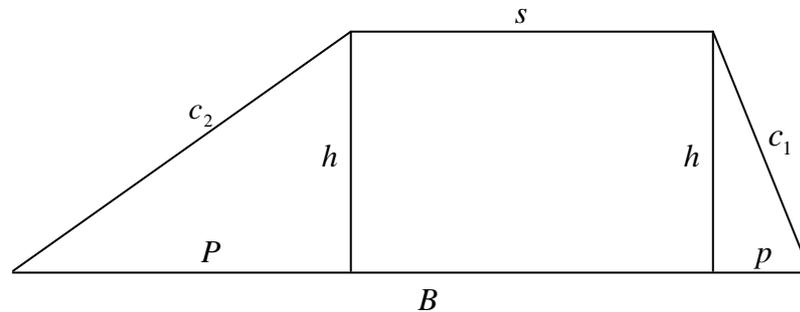
**Problème #80**

$d = \sqrt{164}$ ,  $c = 10$ ,  $B = 16$ . Sommet ?

Même méthode que problème #79.	
$\frac{64}{B} = s$	$\frac{d^2 - c^2}{B} = s$

**TRAPEZES QUELCONQUES (LARGE).**

$B$  la base du trapèze,  $s$  son sommet (ou petite base),  $h$  sa hauteur,  $c_1$  et  $c_2$  les deux côtés non-parallèles ( $c_1 < c_2$ ),  $p$  (resp.  $P$ ) la projection du plus petit (resp. grand) côté non-parallèle sur sa base,  $d$  (resp.  $D$ ) sa petite (resp. grande) diagonale et  $A$  son aire.



**Problème #81**

$s = 4, B = 18, c_1 = 13, c_2 = 15.$

Pour connaître l'aire d'un tel trapèze, il faut connaître sa hauteur qui est déterminée à partir de la connaissance des projections.

$c_1 \rightarrow c_1 \times c_1$ $c_2 \rightarrow c_2 \times c_2$ $\rightarrow c_2 \times c_2 - c_1 \times c_1 = 56$ $56 \rightarrow \frac{56}{2} = 28$ $28 \rightarrow 28 \div (B - s) = 2$  $2 \rightarrow 2 + \left(\frac{B - s}{2}\right) = P$ La longue projection est [9]. $2 \rightarrow \left(\frac{B - s}{2}\right) - 2 = p$ La courte projection est 5.	$c_1 \rightarrow c_1^2$ $c_2 \rightarrow c_2^2$ $\rightarrow c_2^2 - c_1^2$ $\rightarrow \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$ $\rightarrow \left(\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\right) \div (B - s) = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B - s)}$ $\rightarrow \left(\frac{B - s}{2}\right) + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B - s)} = P$  $\rightarrow \left(\frac{B - s}{2}\right) - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B - s)} = p$
--	--

$p \rightarrow p \times p$ $P \rightarrow P \times P$  $c_1 \rightarrow c_1 \times c_1$ $c_2 \rightarrow c_2 \times c_2$ $(c_2, P) \rightarrow c_2 \times c_2 - P \times P$ $\rightarrow \sqrt{c_2 \times c_2 - P \times P} = 12 = h$ La hauteur est 12. ou $(c_1, p) \rightarrow c_1 \times c_1 - p \times p$ $\rightarrow \sqrt{c_1 \times c_1 - p \times p} = 12 = h$	$p \rightarrow p^2$ $P \rightarrow P^2$  $c_1 \rightarrow c_1^2$ $c_2 \rightarrow c_2^2$ $(c_2, P) \rightarrow c_2^2 - P^2$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - P^2} = h$  ou $(c_1, p) \rightarrow c_1^2 - p^2$
--	--

$$\rightarrow \sqrt{c_1^2 - p^2} = h$$

Remarque :

Abū Bakr décrit avec précision les démarches pour déterminer l'aire d'un trapèze quelconque avec la détermination des projections puis de la hauteur. Mais, il ne donne pas la procédure de calcul de l'aire d'un tel trapèze.

### Problème #82

$A = 132, h = 12, s = 4$ . Base ?

$$(A, h) \rightarrow A \div h$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h)$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h) - s = B$$

[La base est 18.]

Remarque :

L'algorithme décrit par Abū Bakr est très formel. Aucun calcul n'est effectivement réalisé.

Cette procédure pose néanmoins un problème logique car l'auteur utilise la formule de l'aire d'une trapèze quelconque qu'il ne donnera qu'au problème #84.

### Problème #82'

$A = 132, h = 12, B [= 18]$ . Sommet ?

$$(A, h) \rightarrow A \div h$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h)$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h) - B = s$$

[Le sommet est 4.]

### Problème #83

$s = 4, B = 18, c_1 = 13, c_2 = 15$ . Longue et courte projections ?

$(B, s) \rightarrow B - s = 14$ $14 \rightarrow 14 \times 14$ $13 \rightarrow 13 \times 13$ $\rightarrow 14 \times 14 + 13 \times 13 = 365$ $365 \rightarrow 365 - 15 \times 15 = 140$ $140 \rightarrow \frac{140}{2} = 70$ $70 \rightarrow 70 \div 14 = 5 = p$ La courte projection est 5. $5 \rightarrow 5 + 4 = 9 = P$ La longue projection est 9.	$(B, s) \rightarrow B - s$ $B - s \rightarrow (B - s)^2$ $c_1 \rightarrow c_1^2$ $\rightarrow (B - s)^2 - c_1^2$ $\rightarrow (B - s)^2 - c_1^2 - c_2^2$ $\rightarrow \frac{(B - s)^2 - c_1^2 - c_2^2}{2}$ $\rightarrow \left( \frac{(B - s)^2 - c_1^2 - c_2^2}{2} \right) \div (B - s) = p$ $[\rightarrow B - (p + s) = P]$
--	---

Remarque :

Le problème propose explicitement la même demande que dans #81. Les étapes des deux procédures sont néanmoins différentes : la dernière retranche un à un le carré des côtés inclinés alors que dans #81, la somme des carrés des côtés est retranchée en bloc .

Ici, la dernière étape, pour déterminer la longue projection, est erronée. En fait, la somme  $p + s$  donne  $B - P$ . Il faudrait en fait retrancher cette somme de  $B$  si l'on veut obtenir  $P$ . Ici, nous sommes dans le cas particulier où  $2P = B$ , donc la réponse reste juste, mais la procédure n'est pas générale.

**Problème #84**

$h = 12, B = 18, s = 4$ . Aire ?

$$B + s \rightarrow (B + s) \times \frac{h}{2} = 132 \text{ ou } h \times \frac{(B + s)}{2} = 132$$

L'aire est 132.

**Problème #85**

$s = 4, p = 5, P = 9, h = 12$ . Longue et courte diagonales ?

Pour déterminer la longue diagonale,

$s + P = 13$ $13 \rightarrow 13 \times 13 = 169$ $h \times h = 144$ $144 + 169 = 313$ $313 \rightarrow \sqrt{313}$ La longue diagonale est $\sqrt{313}$ .	$(s, P) \rightarrow s + P$ $s + P \rightarrow (s + P)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow h^2 + (s + P)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (s + P)^2} = D$
--	---

Pour déterminer la diagonale courte,

$s + p = 9$ $\left\{ \begin{array}{l} 9 \times 9 \\ h \times h \end{array} \right.$ $9 \times 9 + h \times h = 225$ $225 \rightarrow \sqrt{225} = 15$ La diagonale courte est 15.	$(s, p) \rightarrow s + p$ $s + p \rightarrow (s + p)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow h^2 + (s + p)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (s + p)^2} = d$
---	---

**Problème #86**

$s = 4, B = 18$ . Lieu de rencontre des diagonales sur la hauteur et restauration des côtés du trapèze ?

Mêmes procédures que pour le trapèze [isocèle].

Remarque :

Abū Bakr fait ici référence aux problèmes #67 et #68 concernant le trapèze isocèle.

**Problème #87**

$c_1 = 13, c_2 = 15, h = 12, s = 4$ . Base ?

$\begin{cases} c_1 \times c_1 \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow c_1 \times c_1 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c_1 \times c_1 - h \times h}$ $\begin{cases} c_2 \times c_2 \\ h \times h \end{cases}$ $c_2 \times c_2 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c_2 \times c_2 - h \times h}$ $\rightarrow \sqrt{c_2 \times c_2 - h \times h} + \sqrt{c_1 \times c_1 - h \times h}$ $\rightarrow \sqrt{c_2 \times c_2 - h \times h} + \sqrt{c_1 \times c_1 - h \times h} + s = B = 18$ <p>La base est 18.</p>	$c_1 \rightarrow c_1^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c_1^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c_1^2 - h^2}$ $c_2 \rightarrow c_2^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c_2^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2}$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2} + \sqrt{c_1^2 - h^2}$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2} + \sqrt{c_1^2 - h^2} + s = B$
--	--

**Problème #88**

$c_1 = 13, c_2 = 15, h = 12, B = 18, [p = 5]$ . Sommet ?

$\begin{cases} 15 \times 15 \\ h \times h \end{cases}$ $15 \times 15 - h \times h = 81$ $81 \rightarrow \sqrt{81} = 9$ $9 \rightarrow 9 + 5 = 14$ $14 \rightarrow B - 14 = 4 = s$ <p>Le sommet est 4.</p>	$c_2 \rightarrow c_2^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c_2^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2}$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2} + p$ $\rightarrow B - \left( \sqrt{c_2^2 - h^2} + p \right) = s$
---	---

Remarque :

La procédure est classique mais elle nécessite la connaissance de la courte projection qui n'est pas donnée dans l'énoncé. Abū Bakr reprend la valeur des problèmes précédents sans la calculer.

Néanmoins, mathématiquement, la donnée de  $p$  surdétermine le problème puisque  $p$  est peut être calculée à partir de  $c_1$  et  $h$  en utilisant la relation de Pythagore comme dans #87. C'est sans doute la raison pour laquelle Abū Bakr ne mentionne pas cette grandeur au titre des connues.

**Problème #89**

$c_1 = 13, c_2 = 15, A = 132, s \times h = 48$ . Sommet et base ?

$\rightarrow A - 48$ $\rightarrow (A - 48) \div \frac{15}{2}$	$\rightarrow A - s \times h$ $\rightarrow (A - s \times h) \div \frac{c_2}{2} = \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2}$
$(A - 48) \div \frac{15}{2} = 11\frac{1}{5}$	$\rightarrow \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2}$
$\begin{cases} 11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5} \\ 13 \times 13 \end{cases}$	$\rightarrow \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2$ $c_1 \rightarrow c_1^2$
$13 \times 13 - 11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5} = 43\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\rightarrow c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2$
$43\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{43\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 6\frac{3}{5}$	$\rightarrow \sqrt{c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2}$
$6\frac{3}{5} \rightarrow 15 - 6\frac{3}{5} = 8\frac{2}{5}$	$\rightarrow c_2 - \sqrt{c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2}$
$\begin{cases} 8\frac{2}{5} \times 8\frac{2}{5} \\ 11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5} \end{cases}$	$\rightarrow \left( c_2 - \sqrt{c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2} \right)^2$ $\rightarrow \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2$
$\rightarrow 8\frac{2}{5} \times 8\frac{2}{5} + 11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5}$ $\rightarrow \sqrt{8\frac{2}{5} \times 8\frac{2}{5} + 11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5}} = 14$ La différence entre la base et le sommet est 14.	$\rightarrow \left( c_2 - \sqrt{c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2} \right)^2 + \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2$ $\rightarrow \sqrt{\left( c_2 - \sqrt{c_1^2 - \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2} \right)^2 + \left( \frac{2 \times (A - s \times h)}{c_2} \right)^2} = B - s$
$[\rightarrow A - 48]$ $84 \div \frac{14}{2} = 12$ La hauteur est 12.	$\rightarrow A - s \times h$ $\rightarrow (A - s \times h) \div \frac{B - s}{2} = h$
$48 \div 12 = 4$ Le sommet est 4.	$\rightarrow (s \times h) \div h = s$
$14 + 4 = 18$ La base est 18.	$\rightarrow (B - s) + s = B$

**Problème #90**

$s + B = 22, A = 132$ . Hauteur ?

$A \div \left( \frac{s + B}{2} \right) = A \div 11 = 12$	$A \div \left( \frac{s + B}{2} \right) = h$
--	---

La hauteur est 12.	
--------------------	--

Une autre méthode pour déterminer la hauteur.

$A \div 22$ $\rightarrow 2 \times (A \div 22) = 12$ La hauteur est 12.	$A \div (s + B)$ $\rightarrow 2 \times A \div (s + B) = h$
--	---

Procédure algébrique :

Soit  $x$  la hauteur.

$$x \times \frac{22}{2} = 11x$$

$$11x = A$$

$$x = 12$$

**Problème #91**

$A = 132, h = 12, s = 4$ . Base ?

$A \div 12$ $\rightarrow 2 \times (A \div 12)$ $\rightarrow 2 \times (A \div 12) - s = B = 18$ La base est 18.	$(A, h) \rightarrow A \div h$ $\rightarrow 2 \times A \div h$ $\rightarrow 2 \times A \div h - s = B$
---	---

**Problème #91'**

$A = 132, h = 12, B = 18$ . Sommet ?

$A \div 12$ $\rightarrow 2 \times (A \div 12)$ $\rightarrow 2 \times (A \div 12) - B = s = 4$ Le sommet est [4].	$(A, h) \rightarrow A \div h$ $\rightarrow 2 \times A \div h$ $\rightarrow 2 \times A \div h - B = s$
---	---

**Problème #92**

$D = \sqrt{313}, h = 12, c_1 = 13$ . Base ?

$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{313} \times \sqrt{313} = 313 \\ h \times h \end{array} \right.$ $\rightarrow 313 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{313 - h \times h}$ $\left\{ \begin{array}{l} 13 \times 13 \\ h \times h \end{array} \right.$ $\rightarrow 13 \times 13 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{13 \times 13 - h \times h}$ $\sqrt{313 - h \times h} + \sqrt{13 \times 13 - h \times h} = B = 18$ La base est 18.	$D \rightarrow D^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow D^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{D^2 - h^2}$ $c_1 \rightarrow c_1^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c_1^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c_1^2 - h^2}$ $\rightarrow \sqrt{D^2 - h^2} + \sqrt{c_1^2 - h^2} = B$
--	---

**Problème #93**

$d = 15, h = 12, c_2 = 15$ . Base ?

$\begin{cases} 15 \times 15 \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow 15 \times 15 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{15 \times 15 - h \times h}$	$d \rightarrow d^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow d^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{d^2 - h^2}$
$\begin{cases} 15 \times 15 \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow 15 \times 15 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{15 \times 15 - h \times h}$	$c_2 \rightarrow c_2^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c_2^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c_2^2 - h^2}$
$\sqrt{15 \times 15 - h \times h} + \sqrt{15 \times 15 - h \times h} = B = 18$ <p>La base est 18.</p>	$\rightarrow \sqrt{d^2 - h^2} + \sqrt{c_2^2 - h^2} = B$

**Problème #94**

$h, p, P$  donnés. Côtés long et court ?

$$\begin{cases} h \times h \\ p \times p \end{cases}$$

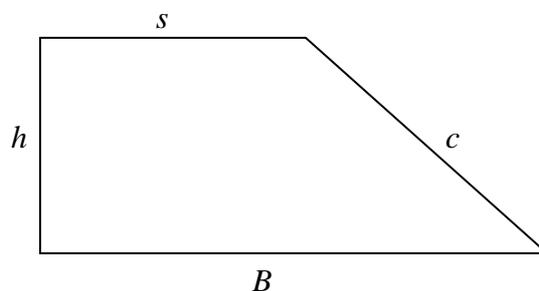
$$h \times h + p \times p \rightarrow \sqrt{h \times h + p \times p} = c_1$$

$$\begin{cases} h \times h \\ P \times P \end{cases}$$

$$h \times h + P \times P \rightarrow \sqrt{h \times h + P \times P} = c_2$$

**TRAPEZES RECTANGLES.**

$B$  la base du trapèze,  $s$  son sommet (ou petite base),  $h$  sa hauteur,  $c$  le côté incliné,  $d$  (resp.  $D$ ) sa petite (resp. grande) diagonale et  $A$  son aire.

**Problème #95**

$s = 2, B = 8, h = 8, c = 10$ . Aire ?

$s + B = 10$ $10 \rightarrow 10 \times \frac{h}{2} = 40$ L'aire est 40.	$(s, B) \rightarrow s + B$ $\rightarrow (s + B) \times \frac{h}{2}$
---	--

Remarque :

Abū Bakr fait remarquer que dans le cas du trapèze rectangle, un des deux côtés non parallèles – celui qui n'est pas incliné –, est la hauteur du trapèze.

Dans la suite, les problèmes sont résolus avec les mêmes procédures que pour le trapèze quelconque.

**Problème #96**

$s + B = 10, h = 8, c = 10$ . Sommet et base ?

$\begin{cases} c \times c \\ h \times h \end{cases}$ $c \times c - h \times h = 36$ $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$ $6 \rightarrow 10 - 6 = 4$ $4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2$ Le sommet est 2. $2 + 6 = 8$ La base est 8.	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow (s + B) - \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow \frac{(s + B) - \sqrt{c^2 - h^2}}{2} = s$ $\rightarrow s + \sqrt{c^2 - h^2} = B$
--	---

**Problème #97**

$A = 40, h = 8, s = 2$ . Base ?

$$A \div h$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h)$$

$$\rightarrow 2 \times (A \div h) - s = B$$

La base est [8].

**Problème #97'**

$A = 40, h = 8, B = 8$ . Sommet ?

La méthode est la même que précédemment

$[A \div h]$ $[\rightarrow 2 \times (A \div h)] = 10$ $10 - B = s = 2$ Le sommet est 2.	$(A, h) \rightarrow A \div h$ $[\rightarrow 2 \times (A \div h)]$ $\rightarrow 2 \times (A \div h) - B = s$
--	---

**Problème #98**

$s + B = 10, c = 10, h = 8$ . Sommet et base ?

$\left\{ \begin{array}{l} 10 \times 10 \\ h \times h \end{array} \right.$ $10 \times 10 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{10 \times 10 - h \times h}$ $\rightarrow 10 - \sqrt{10 \times 10 - h \times h} = 4$ $4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2 = s$ Le sommet est 2. $2 + \sqrt{10 \times 10 - h \times h} = 2 + 6 = 8 = B$ La base est 8.	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow (s + B) - \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow \frac{(s + B) - \sqrt{c^2 - h^2}}{2} = s$ $s + \sqrt{c^2 - h^2} = B$
--	---

**Problème #99**

$s = 2, h = 8, B = 8$ . Diagonales longue et courte ?

Pour déterminer la diagonale courte.

$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 2 \\ 8 \times 8 \end{array} \right.$ $2 \times 2 + 8 \times 8 = 68$ $68 \rightarrow \sqrt{68} = d$ La diagonale courte est $\sqrt{68}$ .	$s \rightarrow s^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow s^2 + h^2$ $\rightarrow \sqrt{s^2 + h^2} = d$
--	---

Pour déterminer la longue diagonale.

$\left\{ \begin{array}{l} h \times h \\ B \times B \end{array} \right.$ $h \times h + B \times B = 128$ $128 \rightarrow \sqrt{128} = D$ La longue diagonale est $\sqrt{128}$ .	$h \rightarrow h^2$ $B \rightarrow B^2$ $\rightarrow h^2 + B^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + B^2} = D$
--	---

**Problème #100**

$s = 2, B = 8$ . Restauration du trapèze ?  
Même procédure que précédemment.

**Problème #101**

A quelle distance les diagonales se coupent-elles sur la hauteur ?  
Même procédure que précédemment.

**Problème #102**

$c = 10, h = 8, B = 8, s = 2$ . Restauration du trapèze ?  
[Même procédure que précédemment.]

Remarque :

les trois problèmes #100-#102 se ramènent aux problèmes #67- et #68 relatifs au trapèzes isocèles.

**Problème #103**

$s + B = 10, h + c = 18, A = 40$ . Hauteur, côté incliné, base et sommet ?

$A \div \frac{s+B}{2} = A \div 5 = 8$ <p>La hauteur est 8.  <math>18 - 8 = 10</math>            Le côté incliné est 10.</p> $\begin{cases} h \times h \\ c \times c \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - h \times h}$ $\rightarrow 10 - \sqrt{c \times c - h \times h}$ $\rightarrow \frac{10 - \sqrt{c \times c - h \times h}}{2} = s$ <p>Le sommet est [2].  <math>10 - s = B</math>            La base est [8].</p>	$(A, s+B) \rightarrow A \div \left( \frac{s+B}{2} \right) = h$ $\rightarrow (h+c) - h = c$ $h \rightarrow h^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow (s+B) - \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow \frac{(s+B) - \sqrt{c^2 - h^2}}{2} = s$ $(s+B) - s = B$
--	---

**Problème #104**

$A$  connue [= 40],  $h = 8, B = 8$ . Sommet ?

$A \div \frac{8}{2} = 10$ $10 \rightarrow 10 - 8 = s = 2$ <p>Le sommet est 2.</p>	$(A, h) \rightarrow A \div \frac{h}{2}$ $\rightarrow A \div \frac{h}{2} - B = s$
---	--

**Problème #104'**

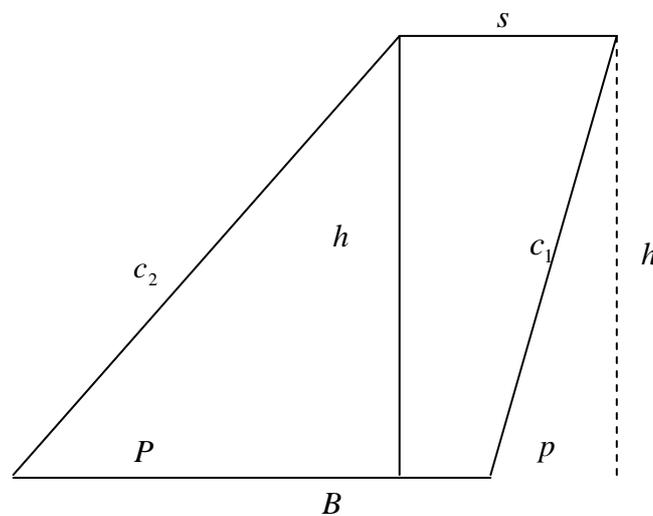
$A = 40, h = 8, s = 2$ . Base ?

$$A \div h \rightarrow 2 \times (A \div h) \rightarrow 2 \times (A \div h) - s = B = 8$$

La base est 8.

**TRAPEZES QUELCONQUES OBTUSANGLES.**

$B$  la base du trapèze,  $s$  son sommet (ou petite base),  $h$  sa hauteur,  $c_1$  et  $c_2$  les deux côtés non-parallèles ( $c_1 < c_2$ ),  $p$  (resp.  $P$ ) la projection du plus petit (resp. grand) côté non-parallèle sur sa base,  $d$  (resp.  $D$ ) sa petite (resp. grande) diagonale et  $A$  son aire.



**Problème #105**

$s = 3, B = 6, c_1 = 5$  et  $c_2 = 7$ . Aire ?

Il faut déterminer sa hauteur, qui se détermine par les projections des côtés sur la base.

$B - s = 3$ $\begin{cases} c_1 \times c_1 \\ c_2 \times c_2 \end{cases}$ $\rightarrow c_2 \times c_2 - c_1 \times c_1$ $\rightarrow \frac{c_2 \times c_2 - c_1 \times c_1}{2}$ $\rightarrow \left( \frac{c_2 \times c_2 - c_1 \times c_1}{2} \right) \div 3 = 4$	$(B, s) \rightarrow B - s$ $c_1 \rightarrow c_1^2$ $c_2 \rightarrow c_2^2$ $\rightarrow c_2^2 - c_1^2$ $\rightarrow \frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$ $\rightarrow \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) \div (B - s) = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B - s)}$
--	--

$\begin{cases} 4 + \frac{3}{2} = 5\frac{1}{2} = P \\ 4 - \frac{3}{2} = 2\frac{1}{2} = p \end{cases}$ <p>La petite projection est <math>2\frac{1}{2}</math> et la grande est <math>5\frac{1}{2}</math>.</p>	$\begin{cases} \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B-s)} \right) + \frac{B-s}{2} = P \\ \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2(B-s)} \right) - \frac{B-s}{2} = p \end{cases}$
--	--

Pour déterminer la hauteur.

$\begin{cases} p \times p \\ c_1 \times c_1 \end{cases}$ $\rightarrow c_1 \times c_1 - p \times p$ $\rightarrow \sqrt{c_1 \times c_1 - p \times p} = h = 4\frac{1}{3}$	$p \rightarrow p^2$ $c_1 \rightarrow c_1^2$ $\rightarrow c_1^2 - p^2$ $\rightarrow \sqrt{c_1^2 - p^2} = h$
--	--

ou

$$\begin{cases} P \times P \\ c_2 \times c_2 \end{cases}$$

$$c_2 \times c_2 - P \times P \rightarrow \sqrt{c_2 \times c_2 - P \times P} = h = 4\frac{1}{3}$$

La hauteur est  $4\frac{1}{3}$ .

Pour déterminer l'aire.

$$s + B \rightarrow (s + B) \times \frac{h}{2} = A = 19\frac{1}{2}$$

L'aire est  $19\frac{1}{2}$ .

### Problème #106

[ $p, B, h$  donnés.] Longue et courte diagonales ?

Pour déterminer la longue diagonale.

$2\frac{1}{2} + B = 2\frac{1}{2} + 6 = 8\frac{1}{2}$ $8\frac{1}{2} \rightarrow 8\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 72\frac{1}{4}$ $4\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3} = 18\frac{3}{4} \text{ [par approximation]}$ $\rightarrow 18\frac{3}{4} + 72\frac{1}{4}$ $\rightarrow \sqrt{18\frac{3}{4} + 72\frac{1}{4}} = D$	$(p, B) \rightarrow p + B$ $\rightarrow (p + B)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow h^2 + (p + B)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (p + B)^2} = D$
--	---

Pour déterminer la diagonale courte.

$s - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3} \end{cases}$	$(p, s) \rightarrow s - p$ $\rightarrow (s - p)^2$ $h \rightarrow h^2$
---	--

$\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3}$ $\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3}} = d$	$\rightarrow h^2 + (s - p)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (s - p)^2} = d$
--	--

Remarque :

Ce problème est vérifié que lorsque le sommet est plus grand que la petite projection. Cela impose donc une contrainte sur l'inclinaison du trapèze. Dans le cas contraire, la procédure doit prendre en compte  $(p, s) \rightarrow p - s$  à la première étape.

Abū Bakr et Ibn ḥAbdūn utilisent la même approximation pour le produit de  $4\frac{1}{3}$  par lui-même.

$$4\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{3} = 18\frac{7}{9} \text{ et } \frac{7}{9} \approx \frac{7-1}{9-1} = \frac{3}{4}$$

En fait, l'approximation semble répondre au contexte des calculs suivants car les deux auteurs étaient capables de donner la valeur exacte. On trouvera un autre exemple de cela au sujet des triangles.

### Problème #107

$A = 19\frac{1}{2}$ ,  $h = 4\frac{1}{3}$ ,  $s = 3$ . Base ?

$A \div 4\frac{1}{3}$ $\rightarrow 2 \times (A \div 4\frac{1}{3})$ $\rightarrow 2 \times (A \div 4\frac{1}{3}) + s = 2 \times (A \div 4\frac{1}{3}) + 3 = 12$ $12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 = B$ <p>La base est 6.</p>	$(A, h) \rightarrow A \div h$ $\rightarrow 2 \times (A \div h)$ $\rightarrow 2 \times (A \div h) + s$ $\rightarrow \frac{2 \times (A \div h) + s}{2} = B$
---	---

Remarque :

Ce problème n'est pas vérifié en général. La procédure est valable si et seulement si  $B = 2s$ , ce qui est évidemment le cas ici.

Abū Bakr se conduit comme pour les problèmes #74, #75 et #77. Nous n'avons pas d'explications à ce comportement d'autant plus que le problème suivant donne une procédure générale vraie dans tout trapèze.

### Problème #108

$A = 19\frac{1}{2}$ ,  $h = 4\frac{1}{3}$ ,  $B = 6$ . Sommet ?

$A \div h$ $\rightarrow 2 \times (A \div h)$ $\rightarrow 2 \times (A \div h) - B = s = 3$ <p>Le sommet est 3.</p>	$(A, h) \rightarrow A \div h$ $\rightarrow 2 \times (A \div h)$ $\rightarrow 2 \times (A \div h) - B = s$
--	---

### Problème #109

$A = 19\frac{1}{2}$ ,  $s + B = 9$ . Hauteur ?

$s + B = 9$ $\rightarrow A \div 9$ $\rightarrow 2 \times (A \div 9) = h = 4\frac{1}{3}$ La hauteur est $4\frac{1}{3}$ .	$(s, B) \rightarrow s + B$ $\rightarrow A \div (s + B)$ $\rightarrow 2 \times [A \div (s + B)] = h$
--	---

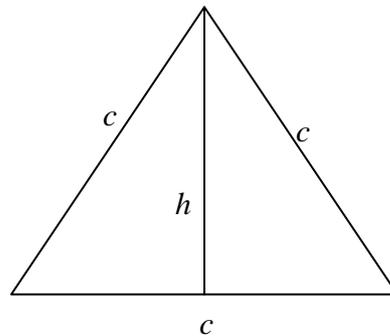
### Problème #110

Restauration du trapèze et lieu de rencontre des diagonales sur la hauteur ?

La méthode est la même que dans le cas du trapèze isocèle (problèmes #67 et #68).

### TRIANGLE EQUILATERAL.

Soient  $c$  le côté du triangle,  $h$  sa hauteur et  $A$  son aire.



### Problème #111

$c = 10$ . Aire et hauteur ?

$\begin{cases} c \times c \\ \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} \end{cases}$ $c \times c - \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} = 75$ $75 \rightarrow \sqrt{75} \approx 8\frac{2}{3}$ La hauteur est environ $8\frac{2}{3}$ .	$c \rightarrow c^2$ $c \rightarrow \frac{c}{2} \rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2$ $\rightarrow c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = h$
---	--

Pour calculer l'aire :

$$c \times \frac{h}{2}$$

L'aire est [environ]  $43\frac{1}{3}$ .

Remarque :

Ce problème fournit un exemple de double approximation. D'abord, la racine carrée est extraite par la formule :  $\sqrt{x} = n + \frac{r}{2n}$  si  $x = n^2 + r$ , d'où  $\sqrt{75} = 8\frac{5}{8}$ . Ensuite, la fraction  $\frac{5}{8}$  est approchée par  $\frac{2}{3}$  par le même procédé que dans #106. Ainsi, le numérateur de la nouvelle fraction peut être divisé par deux pour déterminer l'aire du triangle.

**Problème #112**

$h = \sqrt{75}$ . Côté ?

$\sqrt{75} \times \sqrt{75} = 75$  $75 \rightarrow 75 + \frac{1}{3}.75 = 100$  $100 \rightarrow \sqrt{100} = 10$ Le côté est 10.	$h \rightarrow h^2$  $\rightarrow h^2 + \frac{1}{3}h^2$  $\rightarrow \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}h^2} = c$
---	--

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté du triangle,

$$x \times x = x^2$$

$$\sqrt{75} \times \sqrt{75} = 75$$

$$75 \rightarrow 75 + \frac{1}{3}.75 = 100$$

$$100 \rightarrow \sqrt{100} = 10$$

$$x = 10$$

Le côté est 10.

Remarque :

La première procédure est la réciproque du problème précédent.

La procédure algébrique est très étonnante ; elle n'est pas dans la tradition d'al-Khwārizmī.

En effet, Abū Bakr choisit bien une *chose* mais n'aboutit, à l'aide de celle-ci, à une équation à résoudre. Il suit la première procédure sans référence à l'inconnue et il conclut artificiellement à l'aide de l'inconnue.

**Problème #113**

$A = 43\frac{1}{3}$ . Côté ?

$A \times A = 1875$  $1875 \rightarrow \frac{1}{3}.1875 = 625$	$A \rightarrow A^2$  $A^2 \rightarrow \frac{1}{3}A^2$
--	---

$625 \rightarrow \sqrt{625} = 25$	$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}A^2}$
$25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$	$\rightarrow \sqrt{\sqrt{\frac{1}{3}A^2}}$
$5 \rightarrow 2 \times 5 = 10 = c$ Le côté est 10.	$\rightarrow 2 \times \sqrt{\sqrt{\frac{1}{3}A^2}} = c$

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le côté du triangle,

$$x \times x = x^2$$

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}x^2} \text{ est la hauteur.}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}x^2} \times \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2} \text{ [changement de variable]}$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2} = A^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2} \times \sqrt{\frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2} = \left( \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2 \right)$$

$$A \times A = 1875$$

$$\left( \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X^2 \right) \times \left( 5\frac{1}{3} \right) = 1 \cdot X^2$$

$$1875 \times 5\frac{1}{3} = 10\,000$$

$$X = \sqrt{10\,000} = 100$$

$$c = \sqrt{100} = 10$$

Remarque :

- La première étape est une nouvelle approximation d'un produit.

Elle donne  $43\frac{1}{3} \times 43\frac{1}{3} = 1877\frac{7}{9} \approx 1875$  pour faciliter les calculs suivants mais aussi pour répondre au problème #111 dont  $c$ 'est la réciproque.

Précisons que Ibn ʿAbdūn donne trois problèmes [A63, A68 et A69] pour déterminer le côté d'un triangle équilatéral à partir de la connaissance de son aire. La procédure d'Abū Bakr se coïncide exactement avec [A68].

Les deux autres procédures sont résumées par les formules suivantes :

$$[A63] : c \rightarrow \sqrt{\sqrt{3A^2} + \frac{1}{3}\sqrt{3A^2}}$$

$$[A69] : c \rightarrow \sqrt{\sqrt{\left(5 + \frac{1}{3}\right)A^2}} .$$

Ibn ōAbdūn précise que cette dernière formule est la plus approchée ; il s'agit effectivement d'une procédure exacte, la difficulté réside dans l'extraction successive des deux racines carrées.

- la procédure algébrique.

En posant le côté comme la *chose*, elle suit la procédure algorithmique de #111 : Abū Bakr donne ainsi l'expression de la hauteur en fonction de  $x$ . Puis, il la multiplie par la moitié de la base qui correspond à la formule de l'aire,  $h \times \frac{c}{2}$ , qu'il ne donnera pas dans le cas des triangles équilatéral.

Il a donc une expression de l'aire en fonction de  $x$  qu'il reste à évaluer à  $A = 43\frac{1}{3}$ .

### Problème #114

$c = 10$ . Aire ?

$c \rightarrow c \times c$ $\rightarrow \frac{1}{4}c \times c = 25$ $\rightarrow 25 \times 75$  $\rightarrow \sqrt{25 \times 75} = \sqrt{1875}$ [L'aire est $\sqrt{1875}$ ]	$c \rightarrow c^2$ $c^2 \rightarrow \frac{1}{4}c^2$ $\rightarrow \left(\frac{1}{4}c^2\right) \times \left(\frac{3}{4}c^2\right)$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2\right) \times \left(\frac{3}{4}c^2\right)} = A$
--	--

Remarque :

Abū Bakr utilise ici la relation  $A = \sqrt{\frac{3}{16}c^4}$  qui pourrait provenir de la formule de Héron exposée dans le problème #116.

Cette relation peut aussi être écrite sous la forme  $\sqrt{5\frac{1}{3}A} = c^2 \Leftrightarrow 5\frac{1}{3}A^2 = c^4$  que nous avons trouvée chez Ibn ōAbdūn. Le coefficient  $5\frac{1}{3}$  est celui qui apparaît dans la procédure algébrique précédente et qui se retrouve dans le problème suivant.

### Problème #115

$A = 2 \times 3c$ . Côté ?

$2 \times n = 6$ si $n$ est le nombre des côtés.	$n \rightarrow 2 \times n$
$6 \rightarrow 6 \times 6 = 36$	$2n \rightarrow (2n)^2$
$36 \rightarrow 36 \times 5\frac{1}{3} = 192$	$\rightarrow (2n)^2 \times 5\frac{1}{3}$

$192 \rightarrow \sqrt{192}$ Le côté est $\sqrt{192}$ .	$\rightarrow \sqrt{(2n)^2 \times 5\frac{1}{3}} = c$
--	---

Remarque :

Abū Bakr utilise le coefficient  $5\frac{1}{3}$  mis en évidence dans les deux problèmes précédents qui établit une relation entre le carré de l'aire et la puissance quatrième du côté.

### Problème #116

$c = 10$ . Aire ?

$c \rightarrow c+c+c \rightarrow \frac{c+c+c}{2} = 15$ $15 = ? + c \Rightarrow ? = 5$ $5 \rightarrow 5 \times 5 \rightarrow 5 \times 5 \times 5$ $\rightarrow 5 \times 5 \times 5 \times 15$ $\rightarrow \sqrt{5 \times 5 \times 5 \times 15} = A$ L'aire est $[\sqrt{1875}]$ .	$c \rightarrow 3c \rightarrow \frac{3c}{2}$ $\rightarrow \frac{3c}{2} - c = \frac{c}{2}$ $\rightarrow \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right)$ $\rightarrow \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \frac{3c}{2}$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \left(\frac{3c}{2} - c\right) \times \frac{3c}{2}} = A$
---	---

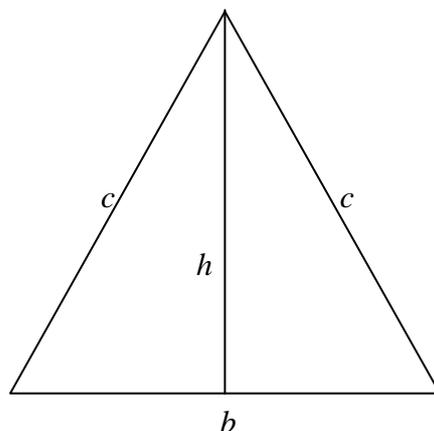
Remarque :

Il s'agit ici de l'utilisation de la formule de Héron pour calculer directement l'aire d'un triangle sans la hauteur.

En dehors du problème #114 où cette formule est utilisée indirectement, elle n'est utilisée nulle part ailleurs. Elle est uniquement formulée dans le cas particulier d'un triangle équilatéral. L'auteur conclut néanmoins en précisant qu'il faut agir ainsi dans tous les triangles dès qu'on a la connaissance de ses côtés.

### CHAPITRE SUR LES TRIANGLES ISOCELES.

$c$  les deux côtés égaux du triangle,  $b$  sa base,  $h$  sa hauteur et  $A$  son aire.



**Problème #117**

$c = 10, b = 12$ . Aire ?

Détermination de la hauteur du triangle.

$\begin{cases} c \times c \\ \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - \frac{b}{2} \times \frac{b}{2}$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - \frac{b}{2} \times \frac{b}{2}} = 8 = h$ <p>La hauteur est 8.</p> $8 \times \frac{b}{2} = 48$ <p>L'aire est 48.</p>	$c \rightarrow c^2$ $b \rightarrow \frac{b}{2} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\rightarrow c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = h$ <p>La hauteur est 8.</p> $h \times \frac{b}{2} = A$
--	---

**Problème #118**

$A = 48, b = 12$ . Hauteur ?

$$A \div \frac{b}{2} = h$$

[La hauteur est 8.]

**Problème #119**

$h = 8, c = 10$ . Base ?

$\begin{cases} c \times c \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow c \times c - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{c \times c - h \times h} = 6$ $6 \rightarrow 6 \times 2 = 12 = b$ <p>La base est 12.</p>	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$ $\rightarrow 2 \times \sqrt{c^2 - h^2} = b$
--	--

**Problème #120**

$A = 48, c = 10$ . Base ?

$2 \times A = 96$ $c \rightarrow c \times c$ $\rightarrow c \times c + 2 \times A = 196$ $196 \rightarrow \sqrt{196} = 14$ $14 \rightarrow \frac{14}{2} = 7$	$A \rightarrow 2 \times A$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 + 2A$ $\rightarrow \sqrt{c^2 + 2A}$ $\rightarrow \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2}$
--	---

$7 \rightarrow 7 \times 7 = 49$  $49 \rightarrow 49 - 48 = 1$  $1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{14}{2} + 1 = 8 = h \\ 7 - 1 = 6 = \frac{b}{2} \end{array} \right.$ La hauteur est 8. La moitié de la base est 6.	$\rightarrow \left( \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} \right)^2$ $\rightarrow \left( \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} \right)^2 - A$ $\rightarrow \sqrt{\left( \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} \right)^2 - A}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} \right)^2 - A} = h \\ \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2} \right)^2 - A} = \frac{b}{2} \end{array} \right.$
Il existe une autre méthode de résolution mais le début est difficile.	

Remarque :

Cette procédure est identique aux procédures des problèmes #27 et #25 dans le cas du rectangle sans qu'Abū Bakr n'y fasse référence. La procédure se ramène à un rectangle de dimensions  $h$  et  $\frac{b}{2}$ , c'est pourquoi elle conclut exactement sur ces valeurs.

Dans le même problème, [A77], Ibn ōAbdūn précise explicitement qu'il faut se ramener au « *quadrilatère oblong* ».

Abū Bakr précise qu'il existe une autre méthode mais avec un début difficile. Il ne peut s'agir de la méthode algébrique car d'une part il aurait mentionné « par l'algèbre », et d'autre part la mise en équation n'est pas difficile. Peut-être fait-il référence à la procédure mise en place dans le *Liber embadorum* d'Abraham Bar Ḥiyya, problème II. B12. L'auteur débute en déterminant l'excès entre la hauteur et la demi-base et détermine ensuite les deux grandeurs à partir de la connaissance de l'aire (même procédure que #26 d'Abū Bakr pour le rectangle).

### Problème #121

$h + b = 20$ ,  $A = 48$ . Hauteur et base ?

Même méthode que pour le rectangle. [problème #25]

### Problème #122

$h + b = 20$ ,  $b = h + 4$ . Hauteur et base ?

$4 + 20 = 24$ $24 \rightarrow \frac{24}{2} = 12$ La base est 12. $20 - 12 = 8$	$\rightarrow (h + b) + (b - h)$ $\rightarrow \frac{(h + b) + (b - h)}{2} = b$ $\rightarrow (h + b) - b = h$
---	---

La hauteur est 8.	
-------------------	--

Remarque :

Cette procédure est à nouveau celle de la détermination de deux grandeurs connaissance leur somme et leur différence.

**Problème #123**

$A = 48, \frac{b}{h} = 1\frac{1}{2}$  Base et hauteur ?

Deux méthodes.

$2 \times A = 96$ $96 \rightarrow 96 \times 1\frac{1}{2} = 144$  $144 \rightarrow \sqrt{144} = 12$ La base est 12.  $12 \div 1\frac{1}{2} = 8$	$A \rightarrow 2 \times A$ $\rightarrow 2A \times \frac{b}{h}$  $\rightarrow \sqrt{2A \times \frac{b}{h}} = b$  $b \div \frac{b}{h} = h$
--	---

$96 \div 1\frac{1}{2}$  $\rightarrow \sqrt{96 \div 1\frac{1}{2}}$ La hauteur est 8.	$2A \div \frac{b}{h}$  $\rightarrow \sqrt{2A \div \frac{b}{h}} = h$
--	---

**Problème #124**

$A = 48, \frac{h}{b} = \frac{2}{3}$ . Hauteur et base ?

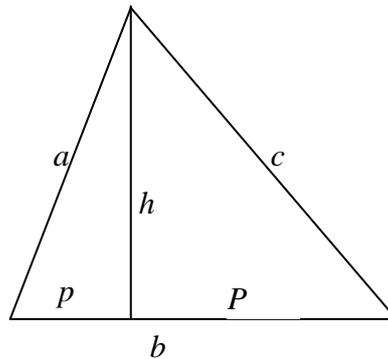
$2 \times A = 96$ $96 \rightarrow 96 \times \frac{2}{3} = 64$  $64 \rightarrow \sqrt{64} = 8$ La hauteur est 8.  $96 \div \frac{2}{3}$  $\rightarrow \sqrt{96 \div \frac{2}{3}} = 12$ La base est 12.	$A \rightarrow 2 \times A$ $\rightarrow 2A \times \frac{h}{b}$  $\rightarrow \sqrt{2A \times \frac{h}{b}} = h$  $2A \div \frac{h}{b}$  $\rightarrow \sqrt{2A \div \frac{h}{b}} = b$
--	--

Remarque :

Problème identique au précédent avec le rapport inverse.

**CHAPITRE SUR LES TRIANGLES ACUTANGLES**

$a$  le petit et  $c$  le grand côté du triangle,  $b$  sa base,  $h$  sa hauteur,  $p$  (resp.  $P$ ) sa petite (resp. longue) projection du petit (resp. long) côté sur la base  $b$  et  $A$  son aire.



**Problème #125**

$a = 13, b = 14, c = 15$ . Aire ?

Il faut déterminer la hauteur, qui se détermine à partir des projections.

$\begin{cases} a \times a \\ c \times c \end{cases}$	$a \rightarrow a^2$ $c \rightarrow c^2$
$c \times c - a \times a = 56$	$\rightarrow c^2 - a^2$
$56 \rightarrow \frac{56}{2} = 28$	$\rightarrow \frac{c^2 - a^2}{2}$
$28 \rightarrow 28 \div b = 2$	$\rightarrow \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div b$
$\begin{cases} \frac{14}{2} + 2 = 9 \\ \frac{14}{2} - 2 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{b}{2} + \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div b = P \\ \frac{b}{2} - \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div b = p \end{cases}$
La petite projection est 5, et la longue est 9.	

Pour déterminer la hauteur,

$\begin{cases} p \times p \\ a \times a \end{cases}$	$p \rightarrow p^2$ $a \rightarrow a^2$
$\rightarrow a \times a - p \times p$	$\rightarrow a^2 - p^2$
$\rightarrow \sqrt{a \times a - p \times p} = 12 = h$	$\rightarrow \sqrt{a^2 - p^2} = h$

ou

$\begin{cases} P \times P \\ c \times c \end{cases}$	$P \rightarrow P^2$ $c \rightarrow c^2$
$\rightarrow c \times c - P \times P$	$\rightarrow c^2 - P^2$
$\rightarrow \sqrt{c \times c - P \times P} = 12 = h$	$\rightarrow \sqrt{c^2 - P^2} = h$
La hauteur est 12	

$$\frac{b}{2} \times h = 84$$

L'aire est 84.

Il existe une autre méthode pour déterminer les projections.

$14 \times 14 = 196$ $15 \times 15 = 225$ $196 + 225 = 421$ $421 \rightarrow 421 - 13 \times 13 = 252$ $252 \rightarrow \frac{252}{2} = 126$ $126 \rightarrow 126 \div b = 9$ La longue projection est 9. $b - 9 = 5$ La petite projection est 5.	$b \rightarrow b^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 + b^2$ $\rightarrow c^2 + b^2 - a^2$ $\rightarrow \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ $\left( \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} \right) \div b = P$ $b - P = p$
---	---

Remarque :

Abū Bakr donne deux procédures pour déterminer les projections des côtés du triangle sur la base. La première est identique à celle présentée dans le cas du trapèze acutangle, la seconde est nouvelle.

Ces deux procédures sont aussi exposées, dans le même ordre, chez Ibn ōAbdūn [A71, A72].

Nous aurions pu attendre d'Abu Bakr une procédure algébrique de détermination des projections à l'image d'al-Khwārizmī. Dans son algèbre, ce dernier pose comme *chose* une projection et aboutit à l'équation  $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$  dans le cas du même triangle (13, 14, 15).

### Problème #126

$p = 5, A = 84, h = 12$ . Base et long côté ?

$A \div \frac{h}{2} = 13 = b$ La base est 13. $13 - 5 = 9$ $9 \rightarrow 9 \times 9$ $\rightarrow h \times h + 9 \times 9$ $\rightarrow \sqrt{h \times h + 9 \times 9} = 15 = c$ Le long côté est 15.	$(A, h) \rightarrow A \div \frac{h}{2} = b$ $(b, p) \rightarrow b - p$ $\rightarrow (b - p)^2$ $\rightarrow h^2 + (b - p)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (b - p)^2} = c$
--	---

### Problème #127

$P = 9, h = 12, A = 84$ . Petit côté ?

Même méthode que le problème précédent.

$A \div \frac{h}{2} = b$ $b - 9 = 5$ $\begin{cases} 5 \times 5 \\ h \times h \end{cases}$ $\rightarrow 5 \times 5 + h \times h$ $\rightarrow \sqrt{5 \times 5 + h \times h} = a$ Le petit côté est [13].	$(A, h) \rightarrow A \div \frac{h}{2} = b$ $(b, P) \rightarrow b - P$ $\rightarrow (b - P)^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow h^2 + (b - P)^2$ $\rightarrow \sqrt{h^2 + (b - P)^2} = a$
---	--

**Problème #128**

$A = 84, c = 15, a = 13$ . Base ?

$84 \div \frac{15}{2} = 11\frac{1}{5}$	$(A, c) \rightarrow A \div \frac{c}{2}$
$11\frac{1}{5} \times 11\frac{1}{5} = 125\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\rightarrow \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2$
$13 \times 13 = 169$	$a \rightarrow a^2$
$169 \rightarrow 169 - 125\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 43\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\rightarrow a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2$
$43\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{43\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 6\frac{3}{5}$	$\rightarrow \sqrt{a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2}$
$6\frac{3}{5} \rightarrow 15 - 6\frac{3}{5} = 8\frac{2}{5}$	$\rightarrow c - \sqrt{a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2}$
$8\frac{2}{5} \rightarrow 8\frac{2}{5} \times 8\frac{2}{5} = 70\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\rightarrow \left(c - \sqrt{a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2}\right)^2$
$70\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow 70\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + 125\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = 196$	$\rightarrow \left(c - \sqrt{a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2$
$196 \rightarrow \sqrt{196} = 14$ La base est 14.	$\rightarrow \sqrt{\left(c - \sqrt{a^2 - \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(A \div \frac{c}{2}\right)^2} = b$

**Problème #129**

$A = 84, b = 14$ . Hauteur ?

$84 \div \frac{b}{2} = 12$ La hauteur est 12.	$(A, b) \rightarrow A \div \frac{b}{2} = h$
--	---

**Problème #130**

$A = 84, h = 12$ . Base ?

$84 \div \frac{h}{2} = 14$ La base est 14.	$(A, h) \rightarrow A \div \frac{h}{2} = b$
---	---

**Problème #131**

$a = 13, c = 15, h = 12$ . Base ?

$\left\{ \begin{array}{l} 13 \times 13 \\ h \times h \end{array} \right.$ $\rightarrow 13 \times 13 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{13 \times 13 - h \times h}$	$a \rightarrow a^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow a^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{a^2 - h^2}$
$\left\{ \begin{array}{l} 15 \times 15 \\ h \times h \end{array} \right.$ $\rightarrow 15 \times 15 - h \times h$ $\rightarrow \sqrt{15 \times 15 - h \times h}$	$c \rightarrow c^2$ $h \rightarrow h^2$ $\rightarrow c^2 - h^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - h^2}$
$\rightarrow \sqrt{13 \times 13 - h \times h} + \sqrt{15 \times 15 - h \times h} = 14 = b$ La base est 14.	$\rightarrow \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{c^2 - h^2} = b$

**Problème #132**

$h + b = 26, A$  est connue [= 84]. Hauteur et base ?

$2 \times A = 168$	$A \rightarrow 2 \times A$
$\frac{26}{2} = 13$	$\rightarrow \frac{h+b}{2}$
$13 \rightarrow 13 \times 13$	$\rightarrow \left( \frac{h+b}{2} \right)^2$
$\rightarrow 13 \times 13 - 168$	$\rightarrow \left( \frac{h+b}{2} \right)^2 - 2A$
$\rightarrow \sqrt{13 \times 13 - 168} = 1$	$\rightarrow \sqrt{\left( \frac{h+b}{2} \right)^2 - 2A}$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{26}{2} + 1 = b \\ \frac{26}{2} - 1 = h \end{array} \right.$ La base est [14], la hauteur est [12].	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h+b}{2} + \sqrt{\left( \frac{h+b}{2} \right)^2 - 2A} = b \\ \frac{h+b}{2} - \sqrt{\left( \frac{h+b}{2} \right)^2 - 2A} = h \end{array} \right.$

**Problème #133**

$h + b = 26, b \div h = 1 \frac{1}{6}$ . Hauteur et base ?

$1 + 1\frac{1}{6} = 2\frac{1}{6}$	$(b, h) \rightarrow 1 + \frac{b}{h} = \frac{h+b}{h}$
$\rightarrow 26 \div 2\frac{1}{6}$	$\rightarrow (h+b) \div \frac{h+b}{h}$
$\rightarrow 26 \div 2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(26 \div 2\frac{1}{6}) = 14$ La base est 14.	$\rightarrow (h+b) \div \frac{h+b}{h} + \frac{1}{6} \left[ (h+b) \div \frac{h+b}{h} \right] = b$
$\frac{6}{7} \times 14 = 12$ La hauteur est 12.	$\frac{6}{7} \times b = h$

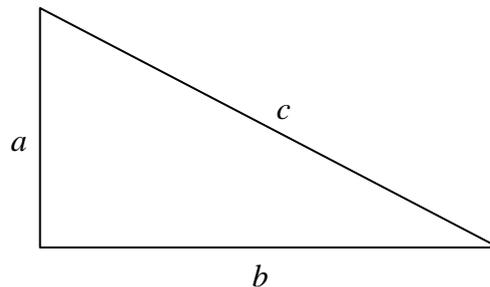
Remarque :

Cette procédure est étrange car Abū Bakr a la hauteur dès la 2<sup>e</sup> étape mais ne le mentionne pas. Il détermine d'abord la base, puis la hauteur à partir des données de l'énoncé.

Ce problème est absent du traité d'Ibn ōAbdūn.

#### CHAPITRE SUR LES TRIANGLES RECTANGLES.

$a, b$  les deux côtés contenant l'angle droit du triangle ( $a < b$ ),  $c$  son hypoténuse,  $A$  son aire.



#### Problème #134

Aire ?

$$a \times \frac{b}{2} = 24$$

L'aire est 24.

#### Problème #135

$c = 10, a = 6$ . Long côté ?

$\left\{ \begin{array}{l} 6 \times 6 \\ 10 \times 10 \end{array} \right.$ $\rightarrow 10 \times 10 - 6 \times 6$ $\rightarrow \sqrt{10 \times 10 - 6 \times 6} = 8 = b$ Le côté restant est 8.	$a \rightarrow a^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - a^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - a^2} = b$
--	---

**Problème #135'**

$c = 10, b = 8$ . Petit côté ?

La méthode est la même que la précédente (problème #135).

**Problème #136**

$b \times c = 80, a = 6$ . Long côté et hypoténuse ?

La méthode est la même que pour les problèmes sur le rectangle (problème #40).

Remarque :

Abū Bakr considère le triangle rectangle comme la moitié d'un rectangle.

D'ailleurs, la terminologie utilisée par Abū Bakr est significative : l'hypoténuse est nommé la « diagonale » du triangle rectangle.

**Problème #137**

$A = 24, a = 6$ . Long côté ?

$A \div 6$ $\rightarrow 2 \times (A \div 6) = 8 = b$ Le long côté est 8.	$(A, a) \rightarrow A \div a$ $\rightarrow 2 \times (A \div a) = b$
--	--

**Problème #137'**

$A = 24, b = 8$ . Petit côté ?

$A \div b$

$\rightarrow 2 \times (A \div b) = a$

**Problème #138**

$A = 24, b = a + 2$ . Côtés long et court ?

$2 \times A = 48$ $\frac{2}{2} = 1$ $1 \rightarrow 1 \times 1$  $\rightarrow 48 + 1 \times 1$  $\rightarrow \sqrt{48 + 1 \times 1} = 7$  $\begin{cases} 7 + 1 = b \\ 7 - 1 = a \end{cases}$ Le long côté est [8], et le court est [6].	$A \rightarrow 2 \times A$ $b - a \rightarrow \frac{b - a}{2}$ $\rightarrow \left(\frac{b - a}{2}\right)^2$ $\rightarrow 2A + \left(\frac{b - a}{2}\right)^2$ $\rightarrow \sqrt{2A + \left(\frac{b - a}{2}\right)^2}$ $\begin{cases} \sqrt{2A + \left(\frac{b - a}{2}\right)^2} + \frac{b - a}{2} = b \\ \sqrt{2A + \left(\frac{b - a}{2}\right)^2} - \frac{b - a}{2} = a \end{cases}$
---	--

**Problème #139** $a + b = 14, A [= 24]$ . Côtés long et court ?

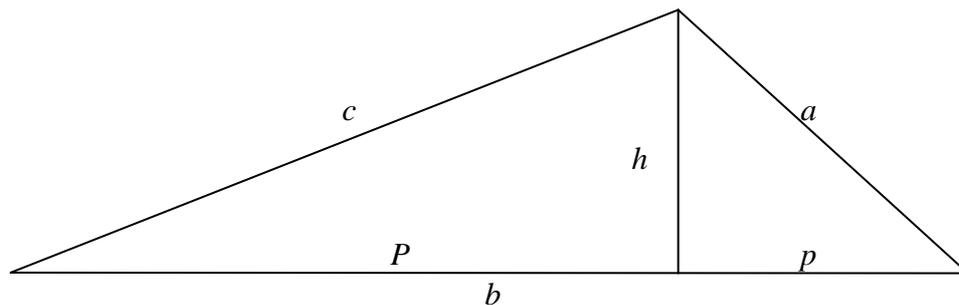
$2 \times 24 = 48$ $\frac{14}{2} = 7$ $\rightarrow 7 \times 7$  $\rightarrow 7 \times 7 - 48$  $\rightarrow \sqrt{7 \times 7 - 48}$  $7 \pm \sqrt{7 \times 7 - 48}$ [Le côté long est 8, et le court est 6.]	$A \rightarrow 2 \times A$ $a + b \rightarrow \frac{a + b}{2}$ $\rightarrow \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - 2A$ $\rightarrow \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - 2A}$ $\frac{a + b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - 2A} = b$ $\frac{a + b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - 2A} = a$
---	--

**Problème #140** $A = 24, b \div a = 1\frac{1}{3}$ . Côtés long et court ?

$2 \times 24 = 48$ $48 \div 1\frac{1}{3} = 36$  $36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$ Le côté court est 6. $24 \div 6 = 4$ $4 \rightarrow 4 \times 2 = 8$ Le côté long est 8.	$A \rightarrow 2 \times A$ $A \rightarrow 2A \div \frac{b}{a}$ $\rightarrow \sqrt{2A \div \frac{b}{a}} = a$ $(A, a) \rightarrow A \div a$ $\rightarrow 2 \times (A \div a)$
---	---

**CHAPITRE SUR LES TRIANGLES OBTUSANGLES.**

$a, c$  sont les deux côtés contenant l'angle obtus, et  $b$  sa base opposée à l'angle obtus,  $h$  la hauteur relative à  $b$ ,  $p$  (resp.  $P$ ) la projection du côté  $a$  (resp.  $c$ ) sur la base  $b$ ,  $A$  son aire.



**Problème #141**

$a = 4, c = 13, b = 15$ . Aire ?

Il faut déterminer la hauteur, et donc les projections.

$\begin{cases} 4 \times 4 \\ 13 \times 13 \end{cases}$ $\rightarrow 4 \times 4 + 13 \times 13 = 185$ $b \times b = 225$ $225 - 185 = 40$ $40 \rightarrow \frac{40}{2} = 20$ $20 \rightarrow \frac{20}{4} = 5$ <p>5 est la projection [de <math>c</math> sur <math>a</math>].</p>	$a \rightarrow a^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow a^2 + c^2$ $b \rightarrow b^2$ $\rightarrow b^2 - (a^2 + c^2)$ $\rightarrow \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{2}$ $\rightarrow \frac{1}{4} \times \left( \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{2} \right) = p$
--	---

Pour déterminer la hauteur

$\begin{cases} 5 \times 5 \\ 13 \times 13 \end{cases}$ $\rightarrow 13 \times 13 - 5 \times 5$ $\rightarrow \sqrt{13 \times 13 - 5 \times 5} = 12$ <p>12 est la hauteur extérieure relative à <math>a</math></p>	$p \rightarrow p^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - p^2$ $\rightarrow \sqrt{c^2 - p^2}$
--	--

$\frac{4}{2} \times 12 = 24$ <p>L'aire est 24.</p>	$\frac{a}{2} \times h = A$
--	----------------------------

Remarque :

Ici, Abū Bakr considère le côté  $a$  comme la base. Il doit donc calculer la hauteur relative à  $a$ . Ainsi, la première partie de son algorithme est destiné au calcul de la projection de  $c$  sur  $a$ .

Abū Bakr fait suivre deux problèmes qui ont pour but le calcul des deux autres hauteurs, l'une étant encore extérieure (#141'), et l'autre étant intérieure (#141'').

Ibn ḥAbdūn a la même attitude avec le problème [A78] qui, par ailleurs, présente les mêmes procédures.

**Problème #141'**

Pour déterminer la seconde hauteur extérieure, la méthode est identique à la précédente.

**Problème #141''**

Pour déterminer la hauteur intérieure, la méthode est identique à celle pour le triangle scalène.

$\begin{cases} 4 \times 4 \\ 13 \times 13 \end{cases}$ $\rightarrow 13 \times 13 - 4 \times 4$ $\rightarrow \frac{13 \times 13 - 4 \times 4}{2} = 76\frac{1}{2}$ $76\frac{1}{2} \rightarrow 76\frac{1}{2} \div \frac{b}{2} = 10\frac{1}{5}$ $10\frac{1}{5} \rightarrow \frac{10\frac{1}{5}}{2}$ $\rightarrow \frac{b}{2} + \frac{10\frac{1}{5}}{2} = 7\frac{1}{2} + \frac{10\frac{1}{5}}{2} = 12\frac{3}{5}$ <p>La longue projection <math>P</math> [sur <math>b</math>] est <math>12\frac{3}{5}</math>.</p> $15 - 12\frac{3}{5} = 2\frac{2}{5}$ <p>La petite projection <math>p</math> [sur <math>b</math>] est <math>2\frac{2}{5}</math>.</p>	$a \rightarrow a^2$ $c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - a^2$ $\rightarrow \frac{c^2 - a^2}{2}$ $\rightarrow \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div \frac{b}{2}$ $\rightarrow \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div \frac{b}{2} \right]$ $\rightarrow \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c^2 - a^2}{2} \right) \div \frac{b}{2} \right] = P$ $b - P = p$
---	---

Calcul de la hauteur :

$\begin{cases} p \times p \\ a \times a \end{cases}$ $\rightarrow a \times a - p \times p$ $\rightarrow \sqrt{a \times a - p \times p} = 3\frac{1}{5} = h$ <p>La hauteur intérieure est <math>3\frac{1}{5}</math>.</p>	$p \rightarrow p^2$ $a \rightarrow a^2$ $\rightarrow a^2 - p^2$ $\rightarrow \sqrt{a^2 - p^2} = h$
--	--

ou bien, même procédure avec  $P$  et  $c$  au lieu de  $p$  et  $a$ .

Calcul de l'aire :

$3\frac{1}{5} \times \frac{b}{2} = 3\frac{1}{5} \times 7\frac{1}{2} = 24$ <p>L'aire est 24.</p>	$h \times \frac{b}{2} = A$
---	----------------------------

Remarque :

Abū Bakr fait référence au problème #125, le seul du chapitre du triangle scalène à déterminer les projections des côtés sur la base.

Les deux procédures sont néanmoins différentes. En effet, ici, à la 4<sup>e</sup> étape, on divise par la moitié de  $b$  puis par 2. Il divise donc globalement par  $b$ , ce qu'il fait effectivement en une seule étape dans le problème #125.

De plus, pour déterminer  $p$ , dans le #125, il le fait par « augmentation et diminution », alors qu'ici,  $p$  est donnée comme étant la différence de  $b$  avec  $P$ .

**Problème #142**

$A = 24, h = 3\frac{1}{5}$ . Base ?

$A \div 3\frac{1}{5}$	$A \rightarrow A \div h$
$\rightarrow 2 \times (A \div 3\frac{1}{5}) = b$	$\rightarrow 2 \times (A \div h) = b$
La base est [15].	

$2 \times A = 48$	$A \rightarrow 2A$
$48 \rightarrow 48 \div 3\frac{1}{5} = b$	$\rightarrow 2A \div h = b$
La base est [15].	

**Problème #143**

$A = 24, b = 15$ . Hauteur ?

$$A \div \frac{b}{2} = h$$

La hauteur est  $[3\frac{1}{5}]$ .

**LA MESURE DU CERCLE**

$d$  est le diamètre du cercle,  $p$  sa circonférence,  $A$  son aire.

**Problème #144**

$d = 14$ . Aire ?

$d \times d = 196$	$d \rightarrow d^2$
$196 \rightarrow 196 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times 196 = 154$	$\rightarrow d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d^2 = A$
L'aire est 154.	

$3\frac{1}{7} \times d = 44$	$d \rightarrow 3\frac{1}{7} \times d = p$
La circonférence est 44.	

$\frac{d}{2} \times \frac{p}{2} = A$	$(d, p) \rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{p}{2} = A$
L'aire est [154].	

Remarque :

D'après la première et la seconde procédure, Abū Bakr considère  $\pi = 3\frac{1}{7}$ . La troisième procédure est correcte car elle ne considère pas d'approximation de  $\pi$  en déterminant l'aire directement à partir du diamètre et de la circonférence du cercle.

**Problème #145**

$A = 154$ . Diamètre ?

$154 + \frac{3}{11} \times 154 = 196$	$A \rightarrow A + \frac{3}{11} A$
$196 \rightarrow \sqrt{196} = d$	$\rightarrow \sqrt{A + \frac{3}{11} A} = d$
Le diamètre est [14].	

Procédure algébrique :

Si  $x$  est le diamètre,

$$x \times x = x^2$$

$$\rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right)x^2 = \frac{5}{7}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}x^2 = 154$$

Après restauration du bien par  $\left(1 + \frac{3}{11}\right)$ ,

$$154 + \frac{3}{11} \times 154 = 196$$

$$x^2 = 196$$

$$x = 14$$

Le diamètre est 14.

Remarque :

Il considère le diamètre comme la *chose* et analyse le problème en respectant la première procédure du problème #144, ce qui lui donne une équation.

#### LA MESURE DU DEMI-CERCLE

$d$  est le diamètre du cercle dont est issu le demi-cercle,  $c$  sa corde et  $A$  son aire.

#### Problème #146

$c = 14$ . Aire ?

$c \times c = 14 \times 14 = 196$ $196 \rightarrow 196 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times 196 = 154$ $154 \rightarrow \frac{154}{2} = 77$ L'aire est 77.	$c \rightarrow c^2$ $\rightarrow c^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times c^2$ $\rightarrow \frac{1}{2} \times \left[ c^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times c^2 \right] = A$
--	---

Remarque :

Abū Bakr utilise la procédure générale pour le cas particulier du demi-cercle.

#### LA MESURE DE PORTIONS DE CERCLE PLUS GRANDE QUE LE DEMI-CERCLE

$d$  est le diamètre du cercle dont est issue la portion de cercle,  $p$  la circonférence de la portion,  $c$  sa corde,  $f$  sa flèche,  $a$  son arc et  $A$  son aire.

#### Problème #147

$c = 6$ ,  $f = 9$ ,  $a = 20$ . Aire ?

$\frac{c}{2} \times \frac{c}{2} = 9$ $9 \rightarrow 9 \div f = 1$ $1 \rightarrow 1 + f = 10 = d$ <p>Le diamètre du cercle dont est issue la portion est 10.</p>	$c \rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 \div f$ $\rightarrow \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 \div f\right] + f = d$
---	---

$\frac{10}{2} = 5$ $5 \rightarrow 5 \times \frac{a}{2} = 5 \times 10 = 50$ $f = \frac{d}{2} + ? \Rightarrow ? = 4$ $4 \rightarrow 4 \times \frac{c}{2} = 4 \times 3 = 12$ $12 \rightarrow 50 + 12 = 62 = A$ <p>L'aire est 62.</p>	$d \rightarrow \frac{d}{2}$ $\rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{a}{2}$ $\rightarrow f - \frac{d}{2}$ $\rightarrow \left(f - \frac{d}{2}\right) \times \frac{c}{2}$ $\rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{a}{2} + \left(f - \frac{d}{2}\right) \times \frac{c}{2} = A$
---	---

Remarque :

Abū Bakr utilise le fait que la moitié de la corde  $c$  est moyenne proportionnelle de la flèche  $f$

et du segment correspondant au diamètre sans la flèche ( $d - f$ ), i.e.  $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = f \times (d - f)$ .

**[LA MESURE DES] PORTIONS DE CERCLE PLUS PETITES QUE LE DEMI-CERCLE**

$d$  est le diamètre du cercle dont est issue la portion de cercle,  $p$  la circonférence de la portion,  $c$  sa corde,  $f$  sa flèche,  $a$  son arc et  $A$  son aire.

**Problème #148**

$c = 8, f = 2, a = 10$ . Aire ?

$\frac{c}{2} \times \frac{c}{2} = 16$ $16 \rightarrow 16 \div f = 8$ $8 \rightarrow 8 + 2 = 10 = d$ <p>Le diamètre du cercle dont est issue la portion est 10.</p>	$c \rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2$ $\rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 \div f$ $\rightarrow \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 \div f\right] + f = d$
--	---

$\frac{10}{2} = 5$	$d \rightarrow \frac{d}{2}$
--------------------	-----------------------------

$5 \rightarrow 5 \times \frac{a}{2} = 25$ $\frac{d}{2} = f + ? \Rightarrow ? = 3$ $3 \rightarrow 3 \times \frac{c}{2} = 12$ $12 \rightarrow 25 - 12 = 13 = A$ L'aire est 13.	$\rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{a}{2}$ $\rightarrow \frac{d}{2} - f$ $\rightarrow \left(\frac{d}{2} - f\right) \times \frac{c}{2}$ $\rightarrow \frac{d}{2} \times \frac{a}{2} - \left(\frac{d}{2} - f\right) \times \frac{c}{2} = A$
--	--

Remarque :

Même méthode que problème #147 avec l'utilisation de la moyenne proportionnelle.

Remarquons que les portions plus petites et plus grandes qu'un demi-cercle sont vues comme indépendantes l'une de l'autre et non pas dans leur complémentarité à un cercle entier.

### LE CUBE

$c$  est son arête et  $V$  son volume.

#### Problème #149

$$(c \times c) \times c$$

$c = 10$ . Volume ?

$$10 \times 10 = 100$$

$$100 \rightarrow 100 \times 10 = 1\,000 = V$$

Le volume du cube est 1 000.

### CHAPITRE SUR LES PARALLELEPIPEDES RECTANGLES [A BASE CARREE] ET LA SCIENCE DE LEUR MESURE.

$c$  est le côté des bases,  $h$  sa hauteur et  $V$  son volume.

#### Problème #150

$c = 4$ ,  $h = 10$ . Volume ?

$c \times c$ $\rightarrow c \times c \times h = 160 = V$ Le volume est 160.	$c \rightarrow c \times c$ $\rightarrow c \times c \times h = V$
---	---

#### Problème #151

$V = 160$ ,  $h = 10$ . Côtés de sa base ?

$V \div h = V \div 10 = 16$ $16 \rightarrow \sqrt{16} = c$ Les côtés de sa base sont [4].	$(V, h) \rightarrow V \div h$ $\rightarrow \sqrt{V \div h} = c$
---	--

### CHAPITRE SUR LE VOLUME DES SOLIDES SEMBLABLES A LA FANICHE.

$c_b$  est le côté de sa base carrée,  $c_s$  le côté de son sommet carré,  $h$  sa hauteur et  $V$  son volume.

**Problème #152**

$c_b = 4, c_s = 2, h = 10$ . Volume ?

$4 \times 4 = 16$	$c_b \rightarrow c_b^2$
$c_s \times c_s = 4$	$c_s \rightarrow c_s^2$
$16 + 4 = 20$	$\rightarrow c_s^2 + c_b^2$
$c_s \times c_b = 8$	$\rightarrow c_s \times c_b$
$8 \rightarrow 20 + 8 = 28$	$\rightarrow c_s^2 + c_b^2 + c_s \times c_b$
$28 \rightarrow 28 \times \frac{1}{3} h = 28 \times 3 \frac{1}{3} = 93 \frac{1}{3} = V$	$\rightarrow \frac{1}{3} h \times (c_s^2 + c_b^2 + c_s \times c_b) = V$
Le volume est $93 \frac{1}{3}$ .	

Remarque :

Cette procédure s'obtient par la différence implicite de deux pyramides entières – la première de base  $c_b^2$  et de hauteur  $k$ , et la seconde de base  $c_s^2$  et de hauteur  $k'$  – :

$$\frac{1}{3} k c_b^2 - \frac{1}{3} k' c_s^2 = \frac{1}{3} (k c_b^2 - k' c_s^2).$$

Or, il est aisé de voir que  $k - k' = h$  et  $\frac{k}{k'} = \frac{c_b}{c_s}$  (théorème des lignes proportionnelles).

De sorte que  $k = \frac{h c_b}{c_b - c_s}$  et  $k' = \frac{h c_s}{c_b - c_s}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} k c_b^2 - \frac{1}{3} k' c_s^2 \\ &= \frac{1}{3} (k c_b^2 - k' c_s^2) \\ &= \frac{1}{3} h \left( \frac{c_b}{c_b - c_s} \times c_b^2 - \frac{c_s}{c_b - c_s} \times c_s^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} h \left( \frac{c_b^3 - c_s^3}{c_b - c_s} \right) = \frac{1}{3} h (c_b^2 + c_s^2 + c_b c_s) \end{aligned}$$

d'où la formule.

**CHAPITRE SUR LE VOLUME DES SOLIDES SEMBLABES A UN POISSON TRIANGULAIRE NOMME CHABURI.**

$L$  est la longueur de sa base,  $l$  la largeur de sa base,  $c$  son arête au sommet,  $h$  sa hauteur et  $V$  son volume.

**Problème #153**

$L = 10, l = 6, c = 8, h = 5$ . Volume ?

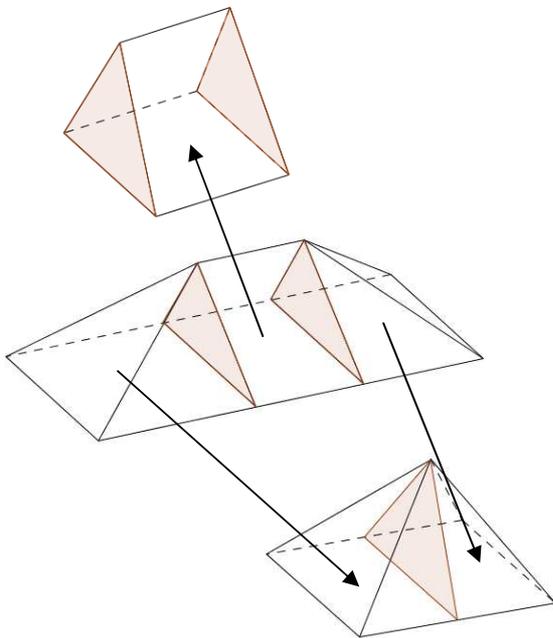
$L \times l = 10 \times 6 = 60$	$(L, l) \rightarrow L \times l$
$\frac{c}{2} \times l = 4 \times 6 = 24$	$(c, l) \rightarrow \frac{c}{2} \times l$

$24 + 60 = 84$ $84 \rightarrow 84 \times \frac{1}{3} h = V$ Le volume est [140].	$\rightarrow \frac{c}{2} \times l + L \times l$ $\rightarrow \frac{1}{3} h \times \left( \frac{c}{2} \times l + L \times l \right)$
--	--

Remarque :

Cette formule est exacte. On la retrouve en découpant le *chaburi* en trois morceaux recollés en deux : les deux extrémités identiques seraient des pyramides à base rectangulaire, et la partie centrale est un prisme droit à base triangulaire.

Cette procédure présuppose la connaissance du volume d'un prisme droit à base triangulaire, et d'une pyramide entière. Or, le calcul du volume du prisme droit à base triangulaire est l'objet du problème suivant.



Prisme droit à base triangulaire de dimensions  $c \times l \times h$

Pyramide à base rectangulaire de dimensions  $(L-c) \times l \times h$

Le volume du *chaburi* est donc :

$$c \times l \times \left( \frac{1}{2} h \right) + \frac{1}{3} h \times l \times (L - c)$$

$$= \frac{1}{6} h \times c \times l + \frac{1}{3} h \times l \times L$$

d'où le résultat.

#### CHAPITRE SUR LE SOLIDE *SERRATILIS*

$L$  est la longueur de sa base,  $l$  la largeur de sa base,  $h$  sa hauteur et  $V$  son volume.

#### Problème #154

$L = 10$ ,  $l = 8$ ,  $h = 6$ . Volume ?

$L \times l = 80$ $80 \rightarrow 80 \times \frac{h}{2} = V = 240$ Le volume est 240.	$(L, l) \rightarrow L \times l$ $\rightarrow \frac{h}{2} \times (L \times l) = V$
---	--

**CHAPITRE SUR LE SOLIDE SEMBLABLE A UNE MAISON**

$L$  est la longueur de sa base,  $l$  la largeur de sa base,  $h_1$  et  $h_2$  ses hauteurs ( $h_1 < h_2$ ) et  $V$  son volume.

**Problème #155**

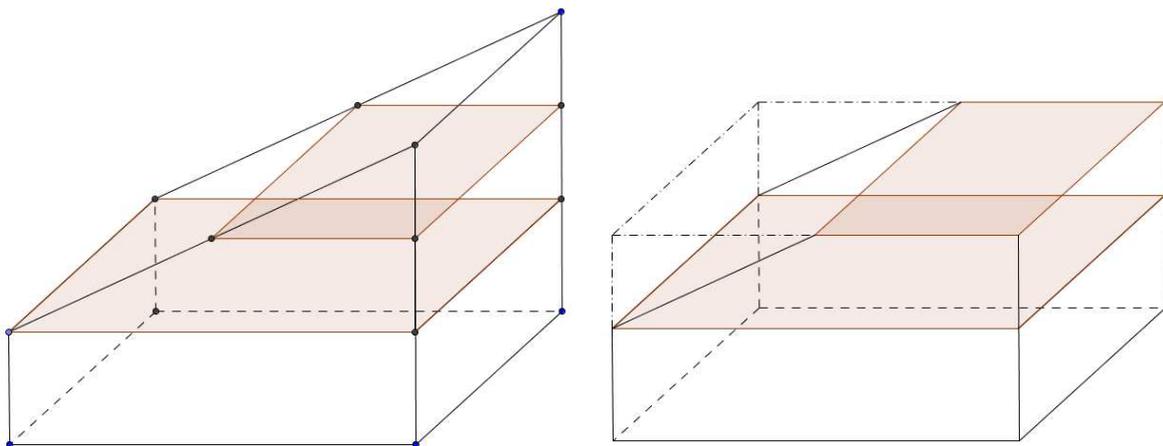
$L = 20, l = 15, h_1 = 10, h_2 = 13$ . Volume ?

$L \times l [= 300]$ $13 - 10 = 3$ $3 \rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2} \rightarrow 1\frac{1}{2} + 10 = 11\frac{1}{2}$ $11\frac{1}{2} \rightarrow 11\frac{1}{2} \times 300 = 3\,450 = V$ Le volume est 3 450.	$(L, l) \rightarrow L \times l$ $(h_1, h_2) \rightarrow h_2 - h_1$ $\rightarrow \frac{h_2 - h_1}{2}$ $\rightarrow \left( \frac{h_2 - h_1}{2} \right) + h_1$ $\rightarrow \left[ \left( \frac{h_2 - h_1}{2} \right) + h_1 \right] \times (L \times l)$
--	---

Remarque :

L'idée est de calculer une hauteur moyenne et de multiplier par la surface de base.

Il est intéressant de voir comment la hauteur moyenne est calculée : Abū Bakr « nivelle » le solide au-dessus de la hauteur la plus basse. Il cherche à ce que les morceaux se compensent.



**CHAPITRE SUR LE VOLUME D'UNE COLONNE.**

$d$  est le diamètre du disque de base,  $h$  sa hauteur et  $V$  son volume.

**Problème #156** $d = 14, h = 24$ . Volume ?

$d \rightarrow d \times d$ $\rightarrow d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d$ $\rightarrow \left[ d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d \right] \times h = V = 3\,696$ Le volume est 3 696.	$d \rightarrow d^2$ $\rightarrow d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d^2$ $\rightarrow \left[ d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d^2 \right] \times h = V$
---	---

**CHAPITRE SUR LE VOLUME D'UN SOLIDE PYRAMIDAL QUI EST SEMBLABLE A UN TAS DE GRAINS = CONE.**

$d$  est le diamètre du disque de base,  $h$  sa hauteur,  $A$  l'aire de son disque de base et  $V$  son volume.

**Problème #157** $d = 14, h = 6$ . Volume ?

Mesurer le cercle comme dans le chapitre sur la mesure du cercle (#144).

$d \rightarrow d \times d$ $\rightarrow d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d$ $A \times \frac{h}{3} = V$ Le volume est [308].	$d \rightarrow d^2$ $\rightarrow d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d^2$ $\rightarrow \left[ d^2 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d^2 \right] \times \frac{h}{3} = V$
---	---

**CHAPITRE SUR LA MESURE DE LA SPHERE** $d$  est son diamètre et  $V$  son volume.**Problème #158** $d = 14$ . Volume ? $d \rightarrow d \times d$ 

$$\rightarrow d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d$$

$$\rightarrow \left[ d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d \right] \times 4$$

$$\rightarrow \left[ \left[ d \times d - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}\right) \times d \times d \right] \times 4 \right] \times \frac{d}{6} = V$$

ou

$$d \times d \rightarrow d \times d - \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) \times d \times d$$

$$d \times d - \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) \times d \times d \rightarrow \left[ d \times d - \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) \times d \times d \right] \times \left( \frac{2}{3} d \right) = V$$

Le volume est  $\left[ 1\ 437 \frac{1}{3} \right]$ .

Remarque :

La procédure de calcul du volume de la sphère est donnée très généralement. Le volume n'est pas explicitement calculé.

Avec  $\pi = 3 + \frac{1}{7}$ , la première procédure est exacte et conforme à la formule « classique ». La seconde procédure est équivalente avec une fraction réduite.

**Le Livre de Saôïd Abū  
ôUthmān**

***Le Liber Saydi Abuothmi***

Analyse mathématique

### [Introduction]

- Qu'est-ce que la mesure d'une surface ou d'un solide ? Notion d'unité de surface – un carré d'une unité (coudée ou autre) de côté – qui compose toute surface plane.
- Comme conséquence de la présence d'un angle droit (c'est-à-dire d'une non inclinaison), relation entre la diagonale  $d$  et le côté  $c$  d'un carré :  $d^2 = 2c^2$ .
- Définitions d'une diagonale, d'un angle (ou sommet ?).
- Mesure d'un solide. Unité de mesure solide : le cube d'une unité (un coudée ou autre) d'arête.
- Les surfaces se divisent en deux groupes :
  - o celles dont la mesure se calcule en une opération,
  - o celles dont la mesure n'est rendue possible que par triangulation.

### [A propos du triangle]

- Procédure générale de calcul de l'aire d'un triangle :  $h \times \frac{b}{2}$ .
- Inégalité triangulaire.

### [A propos du quadrilatère]

Deux familles de quadrilatères : celle autonome, l'autre où la triangulation est nécessaire.

### [Les polygones réguliers]

- Procédure générale de calcul de l'aire d'un polygone régulier :

$$(h, c) \rightarrow h \times c \rightarrow (h \times c) \times \frac{n}{2}$$

où  $h$  est la hauteur du triangle de décomposition,  $c$  est le côté du polygone et  $n$  est le nombre de côtés du polygone.

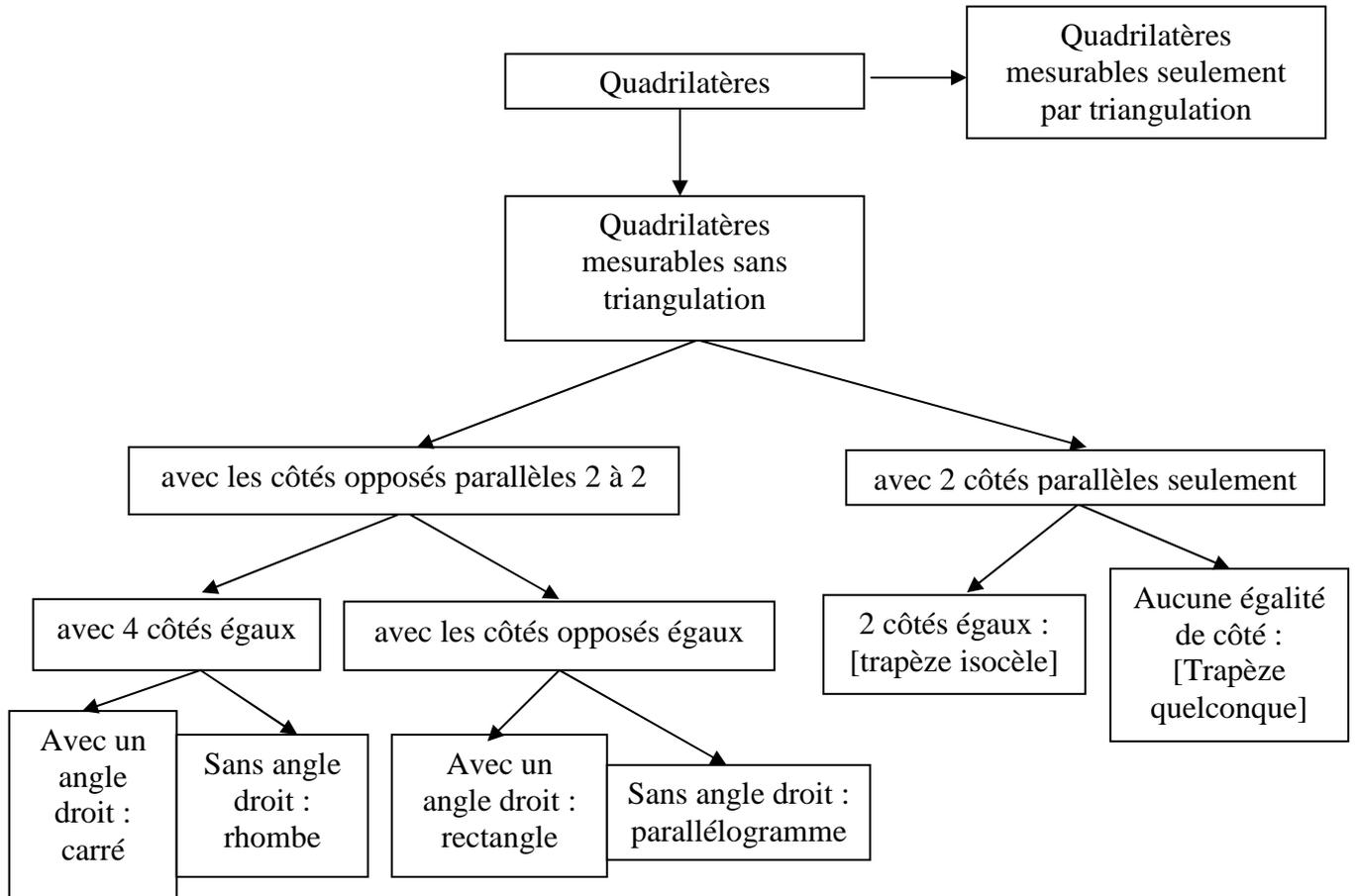
- Exemples du pentagone  $(h \times c) \times 2\frac{1}{2}$ , de l'hexagone  $(h \times c) \times 3$ , de l'heptagone  $(h \times c) \times 3\frac{1}{2} \dots$

### [Les polygones quelconques]

La mesure de ces polygones n'est permise que par triangulation.

## Chapitre sur les quadrilatères.

C'est une classification des quadrilatères dont l'arbre suivant propose une synthèse.



Le traité s'achève sur cette classification.

**Le Livre de ôAbd ar-Rahmān**

***Le Liber Aderameti***

**Analyse mathématique**

**[Les figures planes rectilignes.]**

[#1] Aire d'un rectangle de côtés  $l$  et  $L$ .

$$A = l.L$$

[#2] Aire d'un losange de diagonales  $d_1, d_2$ .

$$A = d_1 \times \frac{d_2}{2}$$

[#3] Aire d'un parallélogramme.

Diviser le parallélogramme en triangles et mesurer les aires des triangles.

[#4] Aire d'un trapèze de sommet  $s$ , de base  $B$  et de hauteur  $h$ .

$$A = \frac{h}{2} \times (s + B)$$

[#5] Aire d'un triangle de base  $b$  et de hauteur correspondante  $h$ .

$$A = \frac{b}{2} \times h \text{ ou } \frac{h}{2} \times b$$

**[Les figures planes circulaires.]**

[#6] Aire d'un cercle de diamètre  $d$ .

$$A = d \times d - \frac{1}{7} d \times d - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} d \times d$$

[#6'] Aire d'un cercle de diamètre  $d$  et de circonférence  $p$ .

$$A = \frac{d}{4} \times p \text{ ou } A = \frac{p}{4} \times d$$

[#7] Aire d'un demi-cercle de diamètre  $d$ .

$$A = \frac{1}{2} \left( d^2 - \frac{1}{7} d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} d^2 \right)$$

**[#8]** Longueur  $a$  d'un arc de flèche  $f$ .

$$a = 3\frac{1}{7} \times f$$

**[#9]** Longueur  $a$  d'un demi-cercle de diamètre  $d$ .

$$a = \frac{1}{2} \times (3\frac{1}{7} \times c)$$

**[#10]** Dans une portion de cercle de corde  $c$  et de flèche  $f$ :

-  $f > \frac{1}{2}c \Rightarrow$  la portion est plus grande qu'un demi-cercle

-  $f < \frac{1}{2}c \Rightarrow$  la portion est plus petite qu'un demi-cercle.

**[#11]** Aire d'une portion de cercle plus grande qu'un demi-cercle de flèche  $f$ , de corde  $c$  et d'arc  $a$ .

On détermine d'abord le diamètre  $d$  du cercle dont est issue la portion.

$$d = \left[ \left( \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} \right) \div f \right] + f$$

$$\text{D'où : } A = \left( \frac{d}{2} \times \frac{a}{2} \right) + \left( f - \frac{d}{2} \right) \times \frac{c}{2}$$

**[#12]** Longueur de l'arc  $a$  d'une portion de cercle plus grande qu'un demi-cercle, de diamètre  $d$  et de flèche  $f$ .

$$a = \left( f + \frac{1}{7} f \right) + d + \left( f - \frac{d}{2} \right)$$

**[#13]** Aire d'une portion de cercle plus petite qu'un demi-cercle de flèche  $f$ , de corde  $c$  et d'arc  $a$ .

On détermine d'abord le diamètre  $d$  du cercle dont est issue la portion.

$$d = \left[ \left( \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} \right) \div f \right] + f$$

$$A = \left( \frac{d}{2} - f \right) \times \frac{c}{2} - \left( \frac{d}{2} \times \frac{a}{2} \right)$$

[#14] Longueur de l'arc  $a$  d'une portion de cercle plus petite qu'un demi-cercle, de diamètre  $d$  et de flèche  $f$ .

$$a = \left( f + \frac{1}{7} f \right) + d + \left( \frac{d}{2} - f \right)$$

**[Les solides.]**

[#15] Volume  $V$  du parallélépipède rectangle de dimensions  $(L, l, h)$ .

$$V = (L \times l) \times h$$

[#16] Volume d'un prisme droit dont l'aire de la base est  $B$ , et de hauteur  $h$ .

$$V = B \times h$$

[#17] Volume d'une pyramide dont l'aire de la base est  $B$ , et de hauteur  $h$ .

$$V = B \times \frac{h}{3}$$

[#18] Volume de la *faniche* dont le côté de la base est  $c_B$ , celui du sommet est  $c_S$ , et de hauteur  $h$ .

$$V = \frac{h}{3} \times [c_B \times c_S + (c_B \times c_B + c_S \times c_S)]$$

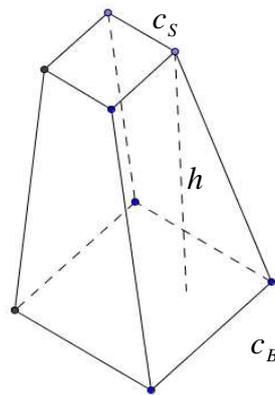


Figure 1 : Le tronc de pyramide à base carrée.

[#19] Volume  $V$  du solide semblable au *caburi*, de sommet  $s$  [parallèle à la longueur de la base] de longueur de la base  $L$ , de largeur  $l$  et de hauteur  $h$ .

$$V = \frac{h}{3} \times \left( L \times l + \frac{s}{2} \times l \right)$$

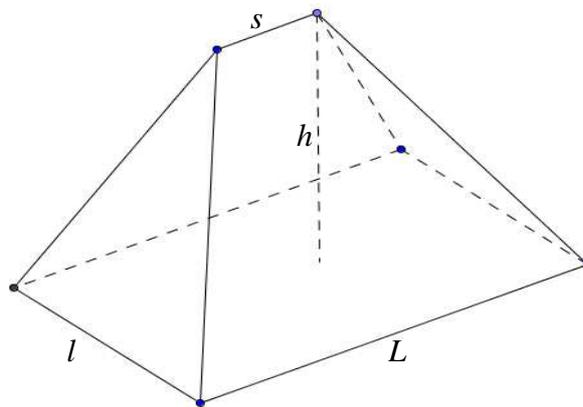


Figure 2.1 : Le solide semblable au *caburi*.

[#20] Dans les mêmes conditions mais avec le sommet parallèle à la largeur

$$V = \frac{h}{3} \times \left( L \times l + \frac{s}{2} \times L \right) \quad \text{ou} \quad V = \frac{h}{3} \times \left( L \times l + \frac{L}{2} \times s \right)$$

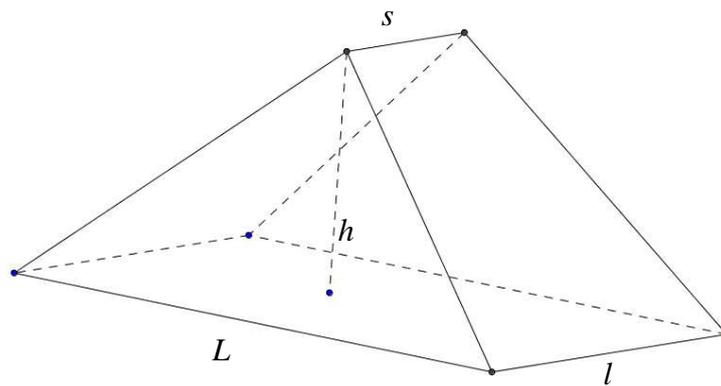


Figure 2.2 : la figure semblable au *caburi*.

[#21] Volume du prisme droit à base triangulaire de longueur de base  $L$ , de largeur  $l$  et de hauteur  $h$ .

$$V = \frac{h}{2}(L \times l)$$

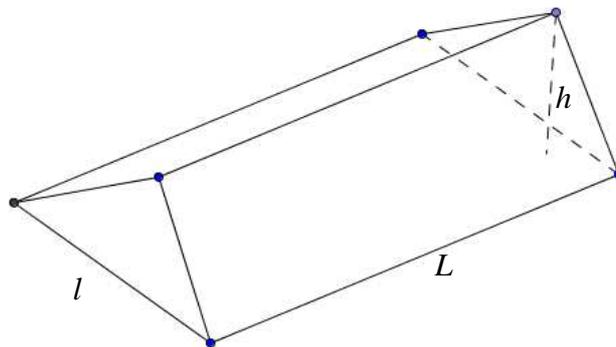


Figure 3 : Le prisme droit à base triangulaire.

[#22] Volume d'un solide semblable à une maison, de longueur de base  $L$ , de largeur  $l$  et de hauteurs  $h_1$  et  $h_2$ ,  $h_1 < h_2$ .

$$V = \left( \frac{h_2 - h_1}{2} + h_1 \right) \times (L \times l)$$

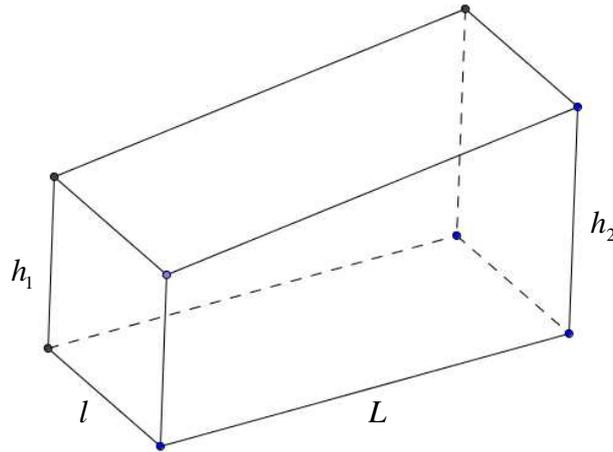


Figure 4 : le solide semblable à une maison.

[#23] Volume d'un cylindre de hauteur  $h$ , de base circulaire d'aire  $B$

$$V = B \times h$$

[#24] Volume d'un cône tronqué de diamètre de base  $d_B$ , de diamètre du sommet  $d_S$  et de hauteur  $h$ .

L'auteur traduit la différence entre le cône tout entier et le « petit » cône coupé.

Calcul de la hauteur du « petit » cône coupé.

$$A = \frac{1}{3} \times \left( \frac{d_S}{d_B - d_S} \times h + h \right) \times \left[ d_B^2 - \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) d_B^2 \right] - \frac{1}{3} \times \left( \frac{d_S}{d_B - d_S} \times h \right) \times \left[ d_S^2 - \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \right) d_S^2 \right]$$

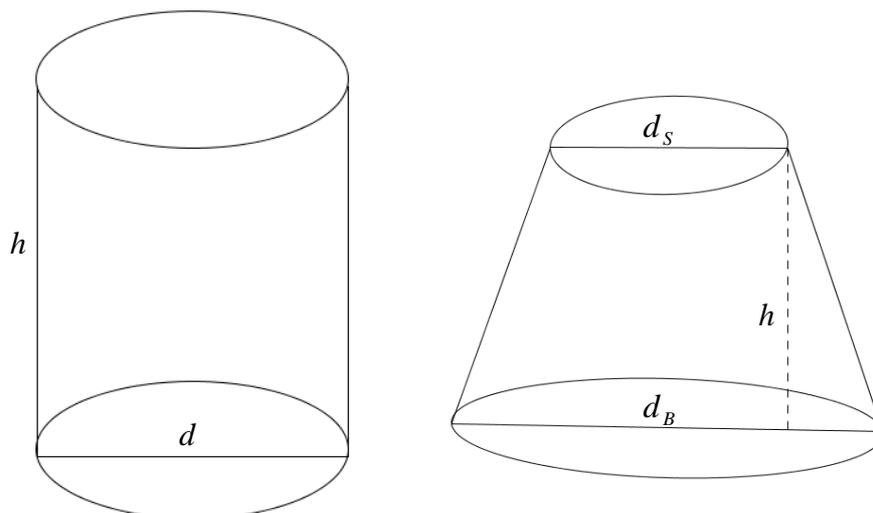


Figure 5 : Le cylindre et le tronc de cône.

**[#25]** Volume d'un cône de révolution de hauteur  $h$  et d'aire de la base.

$$V = B \times \frac{h}{3}$$

**[#26]** Volume d'une pyramide de hauteur  $h$  et d'aire de la base  $B$ .

$$V = B \times \frac{h}{3}$$

***Le Livre sur les divisions des  
surfaces***

***Le De superficierum  
divisionibus liber***

**de Muḥammad al-Baghdādī**

Analyse mathématique

### Conventions spécifiques pour l'analyse mathématique du texte d'al-Baghdādī.

Tout ce qui est signalé entre (...) est explicitement dans le texte. *A contrario*, tout ce qui est signalé entre [...] n'est pas dans le texte original, nous l'ajoutons pour une meilleure compréhension de l'argumentation mathématique.

Ensuite, les références aux propositions des *Eléments* d'Euclide seront mentionnées de la façon suivante :

- (B. V.4) lorsqu'elles sont citées explicitement par Muḥammad al-Baghdādī.
- [*Elem. H. V.4*] lorsque nous les indiquons pour suivre la démarche de l'auteur.

L'énoncé des propositions sera donné en note de bas de page la première fois qu'elle sera citée. La seule référence au texte d'Euclide est la traduction française du texte grec établi par Heiberg<sup>1</sup>.

Une correspondance entre la numérotation des références citées par al-Baghdādī et les propositions du texte de Heiberg est systématiquement signalée sous la forme : (B. VI ; 12 = *Elem. H VI.10*)

Enfin, pour une meilleure lisibilité de l'analyse mathématique, nous avons décidé de noter les rapports, de manière anachronique avec la notation fractionnaire. Ainsi, l'égalité  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  doit s'entendre par la proportion «  $a$  est à  $b$  comme  $c$  est à  $d$  », c'est-à-dire  $a : b :: c : d$ .

---

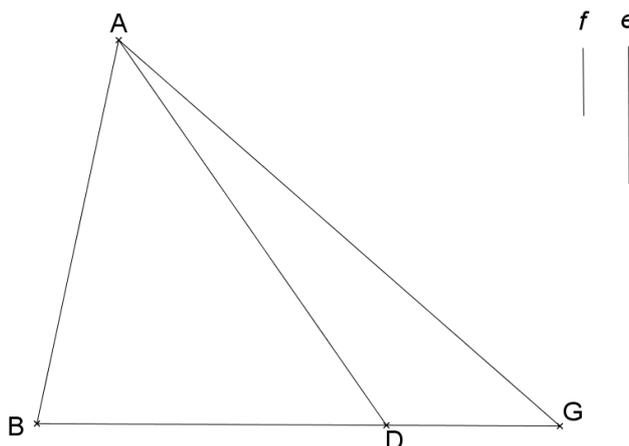
<sup>1</sup> [Vitrac, 1990]

## A propos de la division des triangles.

### [#1] Proposition 1.

**Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite menée d'un angle du triangle.**

Soit le triangle  $ABG$  qu'il s'agit de diviser selon le rapport  $\frac{e}{f}$  par une ligne passant par  $A$ .



Divisons  $BG$  au point  $D$  selon le rapport  $\frac{e}{f}$ . (B. VI.12 = *Elem.* H. VI.10)<sup>2</sup>

Traçons  $AD$  ; c'est la ligne cherchée. (B. VI.1 = *Elem.* H. VI.1)<sup>3</sup>

### [#2] Proposition 2.

**Diviser selon un rapport donné un triangle donné par une droite menée à partir d'un point d'un côté du triangle donné.**

Soient un triangle  $ABG$ ,  $D$  un point de  $BG$ , et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons le triangle  $ABG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne passant par  $D$ .

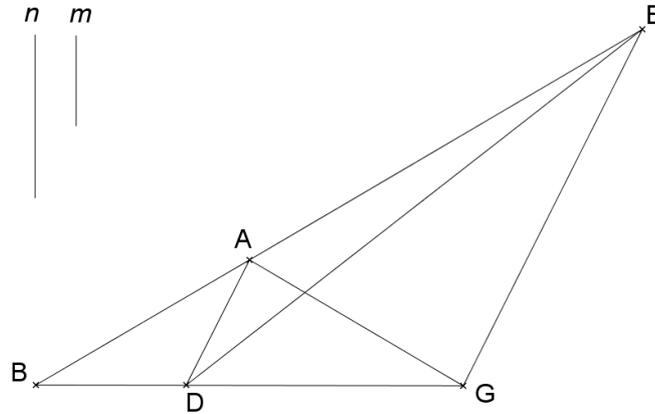
Traçons  $DA$  et sa parallèle passant par  $G$  [*Elem.* H. I.31]<sup>4</sup> ; elle coupe [le prolongement de]  $BA$  en  $E$ . (B. I.29 = *Elem.* H. I.29 ; B. I.17 = *Elem.* H. I.17)<sup>5</sup>

<sup>2</sup> *Elem.* H. VI.10 : « Couper une droite non segmentée donnée semblablement à une [droite] segmentée donnée » ; Ibid., vol. 2, p. 180.

<sup>3</sup> *Elem.* H. VI.1 : « Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases » ; Ibid., vol. 2, p. 155.

<sup>4</sup> *Elem.* H. I.31 : « Par un point, mener une droite parallèle à une droite donnée. » ; Ibid., vol. 1, p. 253.

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{m}{n} = \frac{BA}{AE}$ .



Démontrons que  $AD$  divise le triangle  $ABG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$\frac{BAD}{ADE} = \frac{m}{n} \text{ (B. VI.1 = Elem. H. VI.1) ; [Elem. H. V.11]}^6$$

$$ADE = ADG \text{ (B. I.37 = Elem. H. 1.37)}^7$$

$$\frac{ABD}{ADG} = \frac{m}{n} \text{ (B. V.7 = Elem. H. V.7)}^8 \text{ ; [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $\frac{m}{n} < \frac{BA}{AE}$ .

Soit  $F$  le point de  $BE$  tel que  $\frac{BF}{FE} = \frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

$$\left[ \frac{BE}{BF} = \frac{m+n}{m} \right] \text{ [Elem. H. V.18]}^9$$

<sup>5</sup> Elem. H. I.29 : « Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits »; Ibid., vol. 1, p. 251.

Elem. H. I.17 : « Dans tout triangle, deux angles, pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus petits que deux droits »; [Vitrac, 1990], vol. 1, p. 228.

<sup>6</sup> Elem. H. V.11 : « Les [rapports qui sont] les mêmes qu'un même rapport sont aussi les mêmes l'un que l'autre. »; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 90.

<sup>7</sup> Elem. H. I.37 : « Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. »; Ibid., vol. 1, p. 264.

<sup>8</sup> Elem. H. V.7 : « Des [grandeurs] égales ont le même rapport relativement à une même [grandeur] comme aussi une même [grandeur] relativement à des [grandeurs] égales. »; Ibid., vol. 2, p. 80.

<sup>9</sup> Elem. H. V.18 : « Si des grandeurs sont en proportion par séparation, elles seront aussi en proportion par composition. »; Ibid., vol. 2, p. 107.

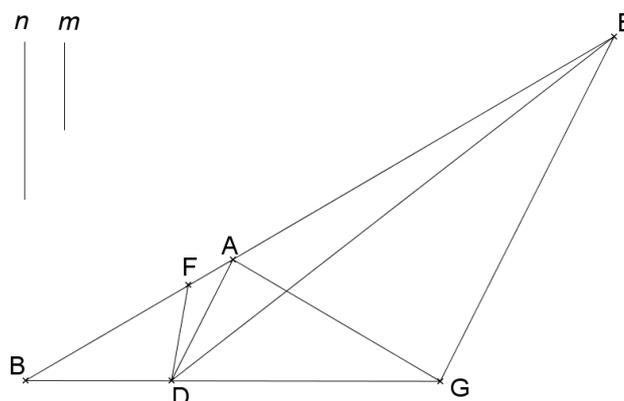
$$\left[ \frac{BF}{BE} = \frac{m}{m+n} \right] \text{ [Elem. H. Porisme V.7]}^{10}$$

$$\left[ \frac{BA}{BE} > \frac{m}{m+n} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{BF}{BE} = \frac{m}{m+n} < \frac{BA}{BE} \right]$$

$$[BF < BA] \text{ [Elem. H. V.10]}$$

$$F \in BA \text{ (B. V.8 = Elem. H. V.8)}^{11}$$



Démontrons que  $DF$  divise le triangle  $ABG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons  $DE$ .

$$ADE = ADG \text{ (B. I.37 = Elem. H. I.37)}$$

$$\text{Donc } ADE + AFD = ADG + AFD$$

$$\text{Donc } FDE = AFDG$$

$$\frac{BFD}{FED} = \frac{m}{n} \text{ (B. VI.1 = Elem. H. VI.1) ; [Elem. H. V.11]}$$

$$\text{D'où } \frac{BFD}{AFDG} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\text{- 3}^{\text{ème}} \text{ cas : } \frac{m}{n} > \frac{BA}{AE}.$$

<sup>10</sup> Elem. H. Porisme V.7 : « A partir de là, il est évident que si certaines grandeurs sont en proportion, elles seront aussi en proportion par inversion. », Ibid., vol. 2, p. 81.

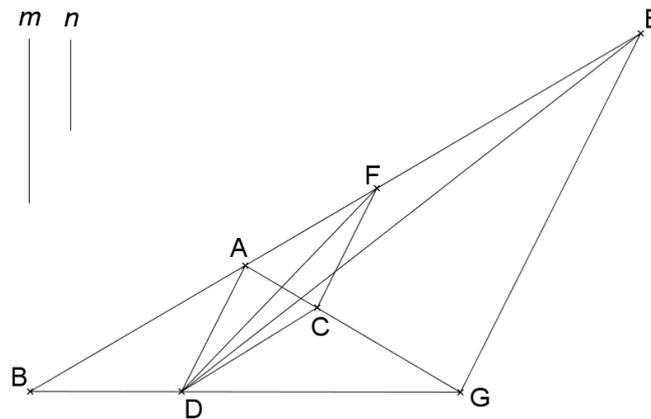
<sup>11</sup> Elem. H. V.8 : « De deux grandeurs inégales la plus grande a relativement à une même [grandeur] un rapport plus grand que la plus petite. Et la même [grandeur] a relativement à la plus petite un rapport plus grand que relativement à la plus grande. » ; Ibid., vol. 2, p. 82. En fait, ici, al-Baghdādī utilise la réciproque de cette proposition, à savoir Elem. H. V.10.

Soit  $F$  le point de  $BE$  tel que  $\frac{BF}{FE} = \frac{m}{n}$ . [*Elem. H. VI.10*]

$F \in AE$ .

Traçons la parallèle à  $GE$  passant par  $F$  ; elle coupe  $AG$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons  $CD$ .



Démontrons que  $CD$  divise le triangle  $ABG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  donné.

Traçons  $DF$  et  $DE$ .

$ADE = ADG$  et  $ADF = ADC$  (B. I.37 = *Elem. H. I.37*)

$ADE - ADF = ADG - ADC$ , donc  $FDE = CDG$

$AFD + ABD = ACD + ABD$ , donc  $BFD = BACD$

Donc  $\frac{FBD}{FDE} = \frac{BACD}{CGD}$  [*Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11*]

Mais  $\frac{FBD}{FDE} = \frac{m}{n}$  (B. VI.1 = *Elem. H. VI.1*)

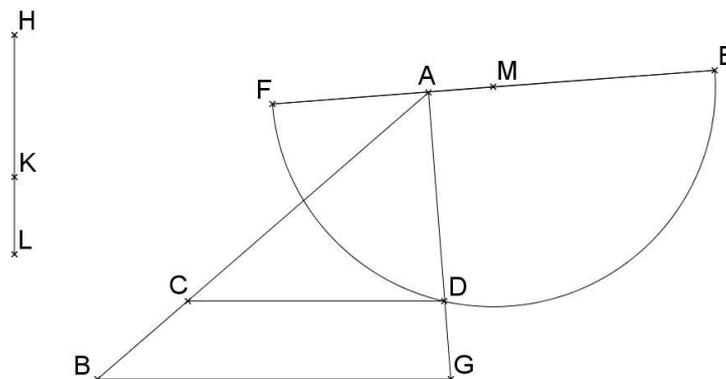
Donc,  $\frac{BACD}{CGD} = \frac{m}{n}$  [*Elem. H. V.11*]

### [#3] Proposition 3.

**Diviser selon un rapport donné un triangle par une droite parallèle à un côté donné du triangle étudié.**

Soient  $ABG$  un triangle et  $\frac{KH}{KL}$  un rapport donné.

Divisons le triangle  $ABG$  selon le rapport  $\frac{KH}{KL}$  par une parallèle à  $BG$ .



Soit  $E$  tel que  $AE \perp AG$  et  $AE = AG$ . [*Elem. H. I.11* et *Elem. H. I.2*]<sup>12</sup>

Soit  $F$  dans le prolongement de  $EA$  avec  $\frac{EA}{AF} = \frac{HL}{HK}$  [*Elem. H. VI.12* ; *Elem. H. I.2*]<sup>13</sup>

Soit  $M$  le milieu de  $FE$ .

Le demi-cercle de centre  $M$  et d'extrémités  $E$  et  $F$  coupe  $AG$  en  $D$  car  $AD < AE$ , et  $AE = AG$ .

La parallèle à  $BG$  passant par  $D$  coupe  $AB$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31* ; *Elem. H. I.17*]

Montrons que  $\frac{ACD}{CBGD} = \frac{HK}{KL}$ .

$$\frac{ABG}{ACD} = \frac{AG^2}{AD^2} \quad (\text{B. VI.17} = \text{Elem. H. VI.19})^{14}$$

$$\frac{ABG}{ACD} = \frac{AE^2}{AD^2} \quad \text{car } AG = AE \quad [\text{Elem. H. V.7} ; \text{Elem. H. V.11}]$$

[Le triangle  $FDE$  est rectangle en  $D$ .]

$$\left[ \frac{EA}{DA} = \frac{DA}{AF} \right]$$

$$\frac{AE^2}{AD^2} = \frac{EA}{AF} \quad (\text{B. III.30} = \text{Elem. H. III.31} ; \text{B. VI.8} = \text{Elem. H. Porisme VI.8})^{15}$$

<sup>12</sup> *Elem. H. I.11* : « Mener une ligne droite à angles droits avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci. » ; *Ibid.*, vol. 1, p. 217.

<sup>13</sup> *Elem. H. I.2* : « Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée. », *Ibid.*, vol. 1, p. 197.  
*Elem. H. VI.12* : « De trois droites données, en trouver une quatrième proportionnelle. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 183.

<sup>14</sup> *Elem. H. VI.19* : « Les triangles semblables sont l'un relativement à l'autre dans le rapport doublé [de celui] des côtés homologues. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 199.

$$\text{Donc } \frac{ABG}{ACD} = \frac{EA}{AF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{EA}{AF} = \frac{HL}{HK} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{ABG}{ACD} = \frac{HL}{HK} \right]$$

$$\frac{CBGD}{ACD} = \frac{LK}{KH} \text{ [Elem. H. V.17]}$$

$$\frac{ACD}{CBGD} = \frac{HK}{KL} \text{ [Elem. H. Porisme V.7]}$$

**[#4] Proposition 4.**

**Diviser selon un rapport donné un triangle par une ligne parallèle à la perpendiculaire tracée à partir d'un sommet du triangle sur la base.**

Soit le rapport  $\frac{KL}{LM}$ . Divisons le triangle  $ABG$  par une parallèle à  $AD$  qui est la perpendiculaire à  $BG$  passant par  $A$ .

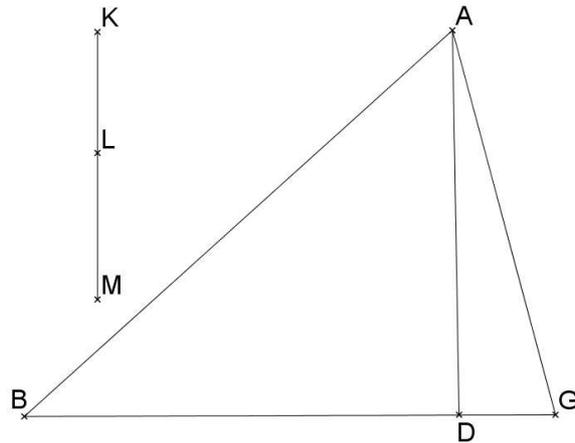
Divisons  $KM$  selon le rapport  $\frac{BD}{DG}$ . [Elem. H. VI.10]

$$\text{- 1<sup>er</sup> cas : } \frac{KL}{LM} = \frac{BD}{DG}.$$

---

<sup>15</sup> Elem. H. III.31 : « Dans un cercle, d'une part l'angle dans le demi-cercle est droit, d'autre part celui dans un segment plus grand [qu'un demi-cercle] est plus petit qu'un droit, celui dans un segment plus petit, plus grand qu'un droit. De plus l'angle du segment plus grand est plus grand qu'un droit et l'angle du segment plus petit, plus petit qu'un droit. » ; Ibid., vol. 1, p. 449.

Elem. H. Porisme VI.8 : « A partir de ceci, il est évident que si dans un triangle rectangle, une perpendiculaire est menée à partir de l'angle droit sur la base, la [droite] menée est moyenne proportionnelle des segments de la base. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 178.

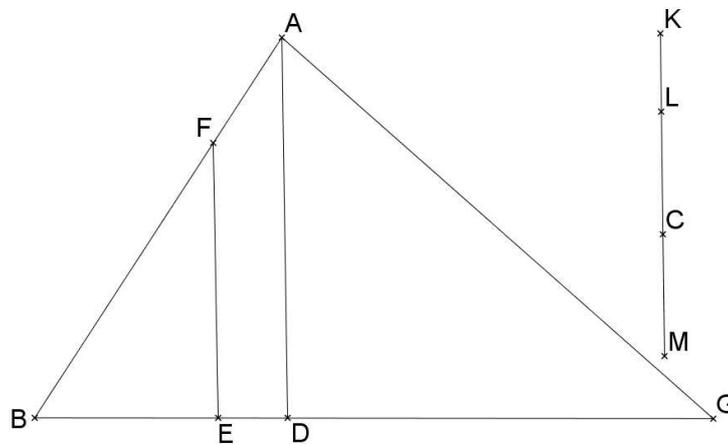


$$\frac{KL}{LM} = \frac{ABD}{ADG} \quad (\text{B. VI.1} = \text{Elem. H. VI.1})$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $C$  de  $KM$  tel que  $\frac{KC}{CM} = \frac{BD}{DG}$  est entre  $L$  et  $M$ .

Soit  $FE$  la parallèle à  $AD$  avec  $F$  sur  $AB$  et  $E$  sur  $BD$  tels que  $\frac{BFE}{AFED} = \frac{KL}{LC}$ . (Baghdādī,

Prop.3)



Montrons que  $\frac{FBE}{AFEG} = \frac{KL}{LM}$ .

$$\frac{ADG}{ABD} = \frac{MC}{CK} \quad (*) \quad [\text{Elem. H. VI.1} ; \text{Elem. H. V.11}]$$

$$\frac{ABG}{ABD} = \frac{MK}{KC} \quad (\text{B. V.18} = \text{Elem. H. V.18})$$

$$\frac{ABD}{FBE} = \frac{KC}{KL} \text{ [par hypothèse ; } Elem. H. V.18 \text{ ; } Elem. H. Porisme V.7]$$

donc  $\frac{ABG}{FBE} = \frac{MK}{KL}$  (B. V.22 = *Elem. H. V.22*)<sup>16</sup>

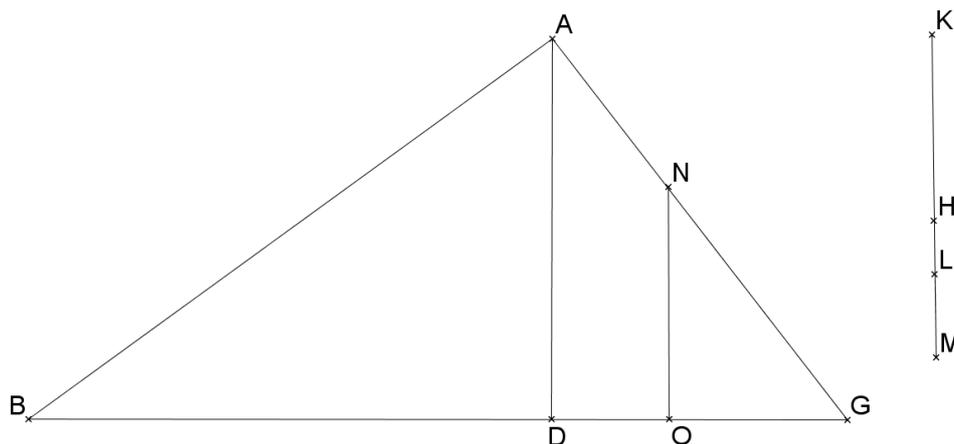
$$\frac{AFEG}{FBE} = \frac{ML}{KL} \text{ [} Elem. H. V.17 \text{]}$$

Donc  $\frac{FBE}{AFEG} = \frac{KL}{LM}$  [*Elem. H. Porisme V.7*]

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $H$  de  $KM$  tel que  $\frac{KH}{HM} = \frac{BD}{DG}$  est entre  $K$  et  $L$ .

Soit  $NO$  la parallèle à  $AD$  avec  $N$  sur  $AG$  et  $O$  sur  $DG$  tels que  $\frac{ANOD}{NOG} = \frac{HL}{LM}$ . (Baghdādī,

Prop.3)



Montrons que  $\frac{NABO}{NOG} = \frac{KL}{LM}$ .

$$\frac{ABD}{ADG} = \frac{KH}{HM} \text{ (**) (B. VI.1 = } Elem. H. VI.1 \text{ ; B. V.11 = } Elem. H. V.11 \text{)}$$

$$\frac{ABG}{ADG} = \frac{KM}{HM} \text{ (B. V.18 = } Elem. H. V.18 \text{)}$$

$$\frac{ADG}{NOG} = \frac{HM}{LM} \text{ [par hypothèse ; } Elem. H. V.18 \text{ ; H. Porisme V.7]}$$

<sup>16</sup> *Elem. H. V.22* : « Si des grandeurs en quantité quelconque et d'autres égales en multitude sont, prises deux par deux, dans le même rapport, elles seront aussi dans le même rapport à égalité de rang.. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 118.

$$\text{donc } \frac{ABG}{NOG} = \frac{KM}{LM} \text{ [Elem. H. V.12]}^{17}$$

$$\text{D'où, } \frac{NABO}{NOG} = \frac{KL}{LM} \text{ [Elem. H. V.17]}$$

### [#5] Proposition 5.

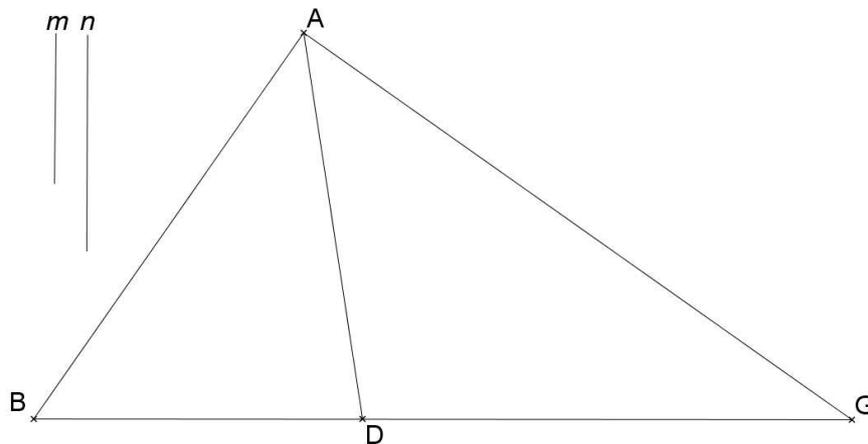
**Diviser selon un rapport donné un triangle étudié par une droite parallèle à une droite passant par un de ses sommets, laquelle n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à un de ses côtés.**

Soient  $ABG$  un triangle et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné. Soit  $D$  un point de  $BG$  tel que  $AD$  ne soit ni perpendiculaire ni parallèle à un côté du triangle  $ABG$ .

Divisons  $ABG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne parallèle à  $AD$ .

Divisons  $BG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{BD}{DG} = \frac{m}{n}$ .



$AD$  divise le triangle  $ABC$  selon le rapport donné  $\frac{m}{n}$  (B. VI.1 = Elem. H. VI.1) ;

[Elem. H. V.11]

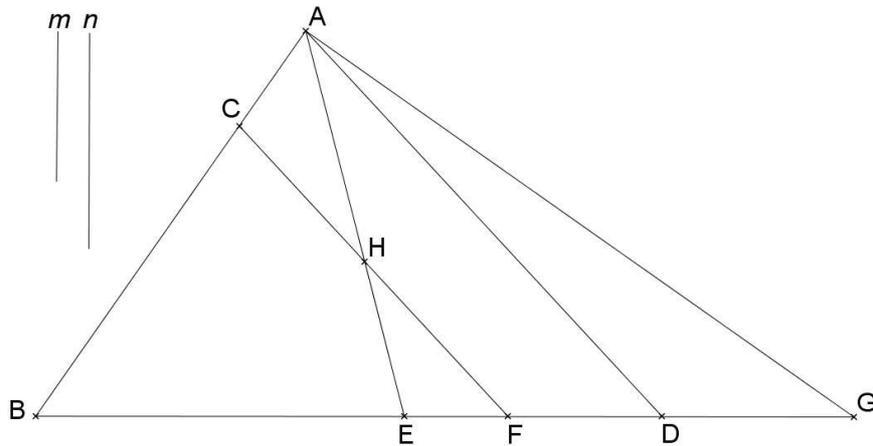
- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $E$  de  $BG$  tel que  $\frac{BE}{EG} = \frac{m}{n}$  est entre  $B$  et  $D$ .

Soit  $F$  un point de  $BG$  tel que  $BF$  soit la moyenne proportionnelle entre  $BD$  et  $BE$ .

[Elem. H. VI.13]

Traçons la parallèle à  $AD$  passant par  $F$  ; elle coupe  $AB$  en  $C$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

<sup>17</sup> Elem. H. V.12 : « Si des grandeurs en quantité quelconque sont en proportion, comme l'une d'entre les antécédentes [est] relativement à l'une d'entre les conséquentes, ainsi seront toutes les antécédentes relativement à toutes les conséquentes. » ; [Vitrac, 1990], vol. 2, p. 93.



Montrons que  $FC$  divise le triangle  $ABG$  tel que  $\frac{BFC}{ACFG} = \frac{m}{n}$ .

Traçons  $AE$ .

$$\frac{ABD}{CBF} = \frac{BD^2}{BF^2} \quad (\text{B. VI.17} = \text{Elem. H. VI.19})$$

$$\left[ \frac{BD}{BF} = \frac{BF}{BE} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\left[ \frac{BD^2}{BF^2} = \frac{BD}{BF} \times \frac{BF}{BE} \right]$$

$$\frac{ABD}{CBF} = \frac{BD}{BE}$$

Mais  $\frac{BD}{BE} = \frac{ABD}{ABE}$  [Elem. H. VI.1]

Donc  $\frac{ABD}{CBF} = \frac{ABD}{ABE}$  [Elem. H. V.11]

Donc  $CBF = ABE$ . [Elem. H. V.9]<sup>18</sup> (\*)

Soit  $H$  le point d'intersection de  $AE$  avec  $CF$  ;

$$ACH = EFH \quad [\text{car } CBF - CHEB = ABE - CHEB]$$

$$ACH + AHFG = EFH + AHFG, \text{ donc } ACFG = AEG (**).$$

$$\left. \begin{array}{l} CBF = ABE \\ ACFG = AEG \end{array} \right\} \frac{ABE}{AEG} = \frac{BFC}{ACFG} \quad [\text{Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11}]$$

$$\left[ \frac{BE}{EG} = \frac{m}{n} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{ABE}{AEG} = \frac{m}{n} \quad [\text{Elem. H. VI.1}]$$

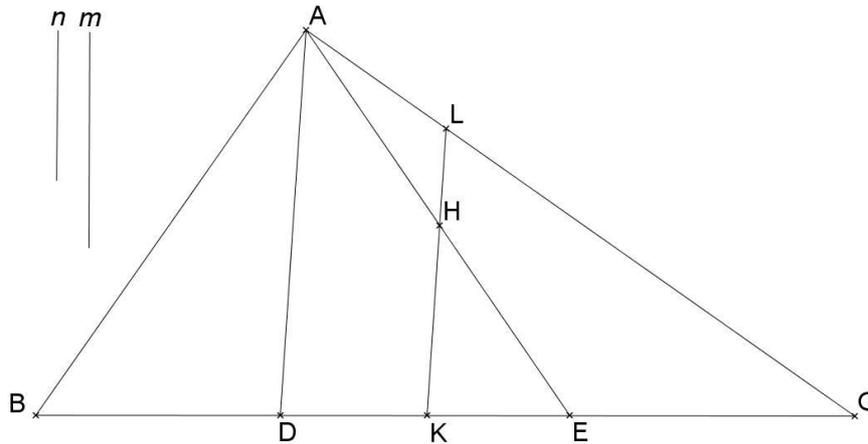
<sup>18</sup> Elem. H. V.9 : « Les [grandeurs] qui ont le même rapport relativement à une même [grandeur] sont égales l'une à l'autre ; et celles relativement auxquelles la même [grandeur] a le même rapport sont égales. » ; Ibid., vol. 2, p. 87.

Donc  $\frac{BFC}{ACFG} = \frac{m}{n}$  [Elem. H. V.11]

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $E$  de  $BG$  tel que  $\frac{BE}{EG} = \frac{m}{n}$  est entre  $D$  et  $G$ .

Soit  $K$  un point de  $BG$  tel que  $KG$  soit la moyenne proportionnelle entre  $DG$  et  $EG$ .  
[Elem. H. VI.13]

Traçons la parallèle à  $AD$  passant par  $K$  ; elle coupe  $AG$  en  $L$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]



Montrons que  $LK$  divise le triangle  $ABC$  tel que  $\frac{LABK}{LKG} = \frac{m}{n}$ .

$$\frac{ADG}{LKG} = \frac{DG^2}{KG^2} \text{ [Elem. H. VI.19]}$$

$$\left[ \frac{DG}{KG} = \frac{KG}{EG} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{ADG}{LKG} = \frac{DG}{KG} \times \frac{KG}{EG} \right]$$

D'où  $\frac{ADG}{LKG} = \frac{DG}{EG}$

Et  $\frac{DG}{EG} = \frac{ADG}{AEG}$  [Elem. H. VI.1]

$$\left[ \frac{ADG}{LKG} = \frac{ADG}{AEG} \right] \text{ [Elem. H. V.11]}$$

Donc,  $LKG = AEG$ . [Elem. H. V.9]

Soit  $H = LK \cap AE$ ,  $[AEG - LHEG = LKG - LHEG]$  donc  $AHL = KHE$ .

$[ABKH + AHL = ABKH + HKE]$  donc  $LABK = ABE$

$$\left. \begin{array}{l} LKG = AEG \\ LABK = ABE \end{array} \right\} \frac{LABK}{LKG} = \frac{ABE}{AEG} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ABE}{AEG} = \frac{m}{n} \right] \text{ [par hypothèse ; } Elem. H. VI.1]$$

$$\text{Donc } \frac{LABK}{LKG} = \frac{m}{n} \text{ [} Elem. H. V.11]$$

**[#6] Proposition 6.**

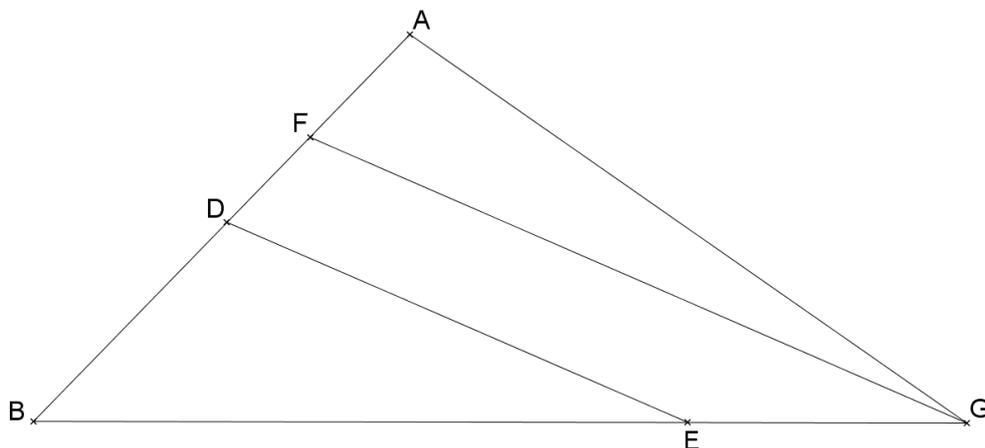
**Diviser selon un rapport donné un triangle étudié par une droite parallèle à une droite quelconque menée à l'intérieur de celui-ci à partir d'un de ses angles ou non.**

Plusieurs cas sont possibles :

- Si la droite étudiée est parallèle à un côté du triangle, Baghdādī, Prop.3.
- Si la droite étudiée passe par un sommet du triangle, Baghdādī, Prop.5.
- Pour un triangle donné, que soit prise une droite qui ne passe par aucun sommet du triangle et qui ne soit parallèle à aucun de ses côtés.

Soit un triangle  $ABG$  et  $DE$  une telle droite avec  $D$  sur  $AB$  et  $E$  sur  $BG$  et  $DE$  coupe  $AG$  après  $G$ .

Traçons la droite parallèle à  $DE$  passant par  $G$  ; elle coupe  $AB$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]



Divisons le triangle  $ABG$  par une ligne parallèle à  $GF$  selon le rapport donné. (Baghdādī, Prop.4 si  $FG \perp AB$  ; Baghdādī, Prop.5 sinon)

La droite par laquelle le triangle aura été divisé est aussi parallèle à  $DE$ .

(B. I.30 = *Elem. H. I.30*)<sup>19</sup>

---

<sup>19</sup> *Elem. H. I.30* : « Les parallèles à une même droite sont aussi parallèles l'une à l'autre. » ; *Ibid.*, vol. 1, p. 252.

## A propos de la division des quadrangles.

[#7] Proposition 7.

**Diviser selon un rapport donné un quadrangle par une droite tracée à partir d'un angle du quadrilatère.**

Soient  $ABGD$  un quadrangle et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

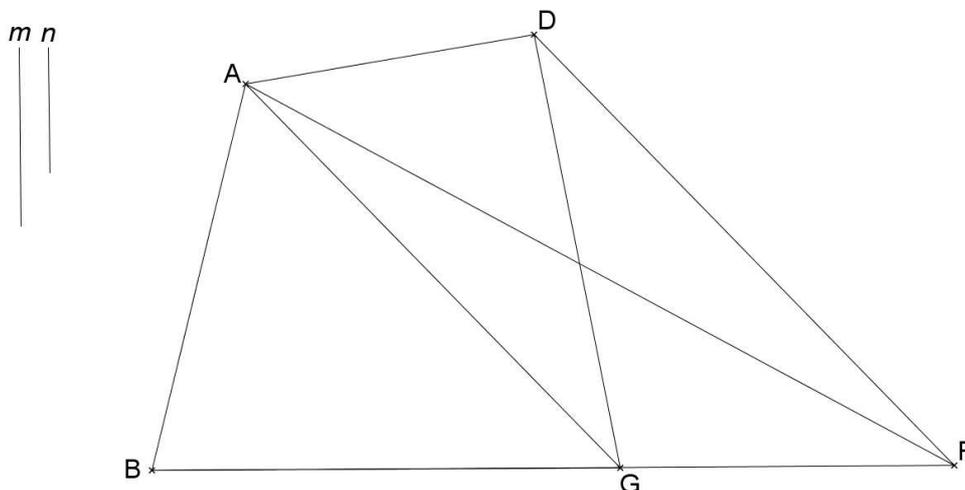
Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne passant par  $A$ .

Traçons la diagonale  $AG$ . Traçons la parallèle à  $AG$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $F$ .

[*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I. 17*]

Divisons  $BF$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [*Elem. H. VI.10*]

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{BG}{GF} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que  $AG$  partage le quadrangle  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  donné.

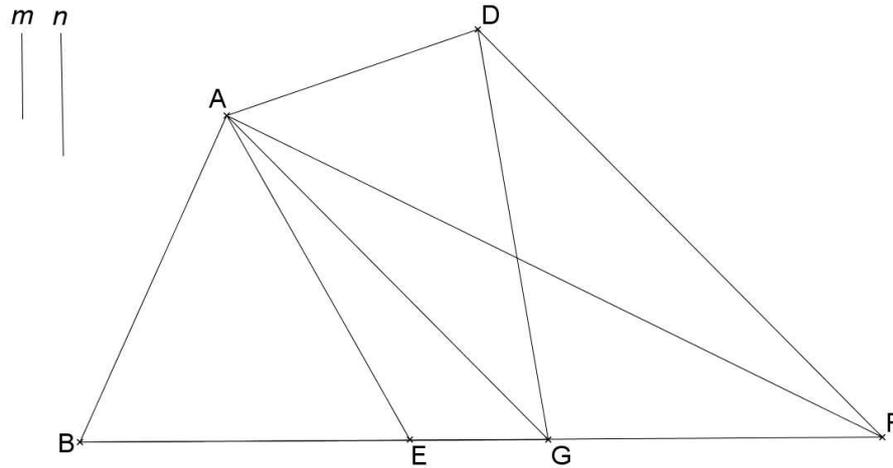
$ADG = AFG$  (B. I.37 = *Elem. H. I.37*)

$\frac{ABG}{AGF} = \frac{m}{n}$  (B. VI.1) ; [*Elem. H. V.11*]

Donc  $\frac{ABG}{AGD} = \frac{m}{n}$  [*Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11*]

- **2<sup>ème</sup> cas : Le point  $E$  de  $BF$  tel que  $\frac{BE}{EF} = \frac{m}{n}$  est entre  $B$  et  $G$ .**

Traçons  $AE$  et montrons que  $\frac{ABE}{AEGD} = \frac{m}{n}$ .



Traçons  $AF$ .

$ADG = AFG$  (B. I.37 = *Elem. H. I.37*)

$ADG + AEG = AFG + AEG$  ; donc,  $AEGD = AEF$ .

$\frac{ABE}{AEGD} = \frac{ABE}{AEF}$  [*Elem. H. V.7*]

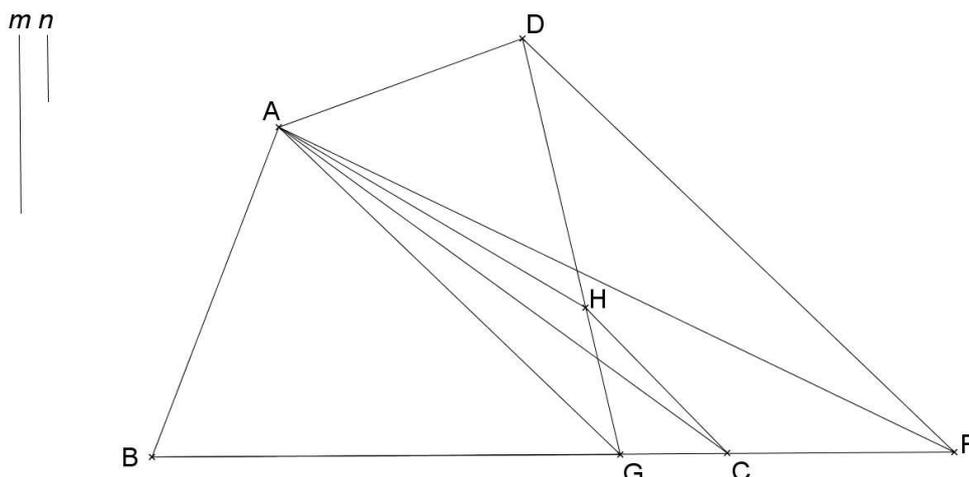
$\frac{ABE}{AEF} = \frac{m}{n}$  (B. VI.1 = *Elem. H. VI.1*)

Donc  $\frac{ABE}{AEGD} = \frac{m}{n}$  [*Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11*]

- **3<sup>ème</sup> cas : le point  $C$  de  $BF$  tel que  $\frac{BC}{CF} = \frac{m}{n}$  est entre  $G$  et  $F$ .**

Traçons la parallèle à  $DF$  passant par  $C$ . Elle coupe  $GD$  en  $H$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons  $AH$  et montrons que  $\frac{ABGH}{ADH} = \frac{m}{n}$ .



Traçons  $AC$ .

$$AHG = ACG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$\text{Mais } ADG = AFG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$ADG - AHG = AFG - ACG ; \text{ d'où } ADH = AFC$$

$$AGH + ABG = ACG + ABG, \text{ d'où } ABGH = ABC$$

$$\frac{ABGH}{ADH} = \frac{ABC}{ACF} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ABC}{ACF} = \frac{BC}{CF} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{BC}{CF} = \frac{m}{n} \right] \text{ [par hypothèse], donc } \frac{ABC}{ACF} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\text{Par conséquent } \frac{ABGH}{ADH} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#8] Proposition 8.**

**Diviser selon un rapport donné le quadrilatère à deux côtés parallèles étudié par une ligne passant par un point de l'un des deux côtés parallèles déjà mentionnés.**

Soient  $ABGD$  un quadrangle tel que  $BG \parallel AD$ ,  $E$  un point de  $BG$  et  $\frac{l}{m}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$  par une ligne passant par  $E$ .

<Lemme>

Prolongeons  $BG$  jusqu'au point  $F$  tel que  $GF = AD$ . [*Elem. H. I.2*]

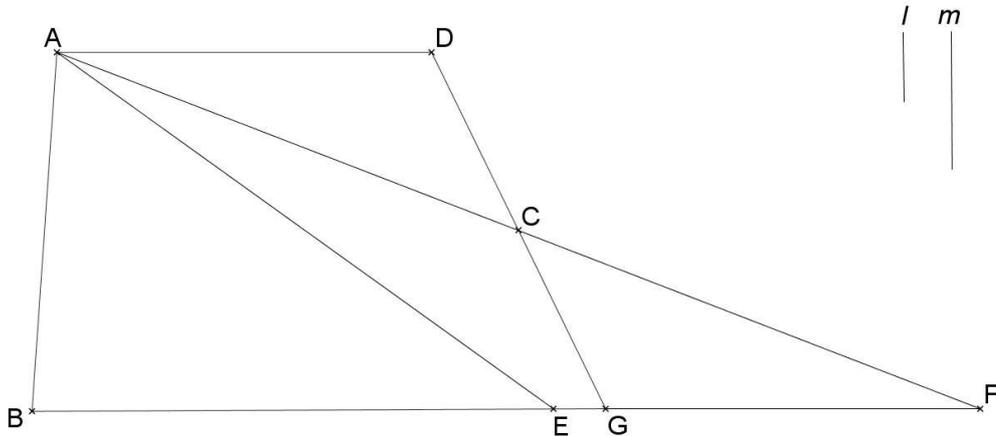
$AF$  coupe  $DG$  en  $C$ .

Les triangles  $ADC$  et  $CGF$  sont semblables avec  $AD = GF$ , donc ils sont égaux.

D'où,  $ABGC + ADC = ABGC + GCF$

Donc,  $ABGD = ABF$ .

- **1<sup>er</sup> cas** :  $E$  est le point de  $BF$  tel que  $\frac{BE}{EF} = \frac{l}{m}$ .



Montrons que  $EA$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$ .

$$ADC = GCF$$

$$[ADC + AEGC = GCF + AEGC]$$

$$AEGD = AEF.$$

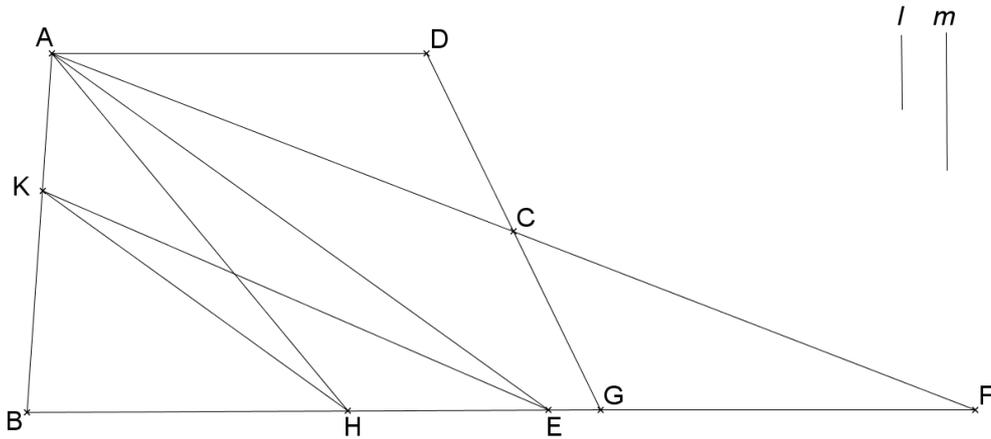
$$\text{Donc } \frac{ABE}{AEGD} = \frac{ABE}{AEF} \text{ [Elem. H. V.7]}$$

$$\left[ \frac{BE}{EF} = \frac{l}{m} \text{ et } \frac{ABE}{AEF} = \frac{BE}{EF} \right] \text{ [par hypothèse ; Elem. H. VI.1], d'où } \frac{ABE}{AEF} = \frac{l}{m} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\text{Donc } \frac{ABE}{ADGE} = \frac{l}{m} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- **2<sup>ème</sup> cas** : le point  $H$  de  $BF$  tel que  $\frac{BH}{HF} = \frac{l}{m}$  est entre  $B$  et  $E$ .

La parallèle à  $AE$  passant par  $H$  coupe  $AB$  en  $K$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]



Montrons que  $KE$  coupe le quadrangle  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$ .

Traçons  $AH$ .

$KAH = KEH$  car  $AE // KH$  [*Elem. H. I.37*], soit  $KBH + KEH = KBH + KAH$ , donc  $KBE = ABH$

$AKE = AHE$  [*Elem. H. I.37*], soit  $AKE + AEGD = AHE + AEGD$ , donc  $AKEGD = AHGD$

$$\left[ \frac{KBE}{AKEGD} = \frac{ABH}{AHGD} \right] \text{ [Elem. H. V.7 \& Elem. H. V.11]}$$

$AHGD = AHF$  (Lemme)

$$\frac{KBE}{AKEGD} = \frac{ABH}{AHF} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{BH}{HF} = \frac{l}{m} \text{ et } \frac{ABH}{AHF} = \frac{BH}{HF} \right] \text{ [par hypothèse ; Elem. H. VI.1]}$$

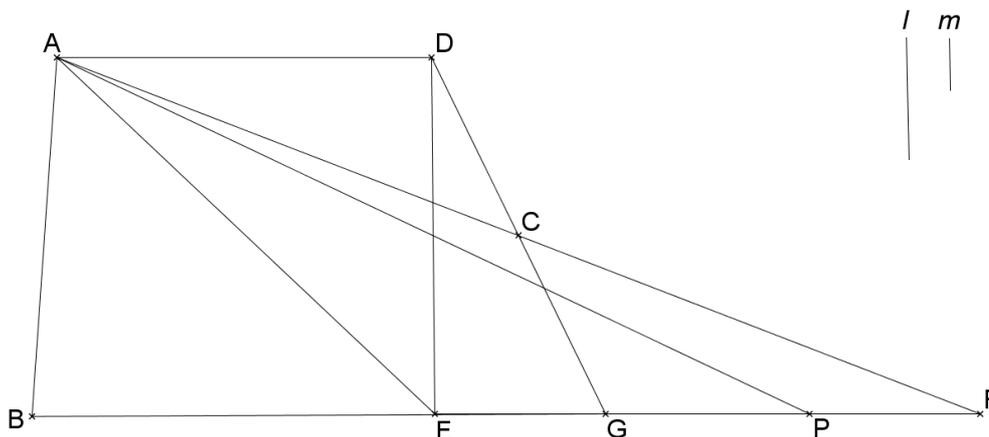
$$\left[ \frac{ABH}{AHF} = \frac{l}{m} \right] \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\text{donc } \frac{KBE}{AKEGD} = \frac{l}{m} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : le point qui divise  $BF$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$  est entre  $E$  et  $F$ .

Soit  $P$  un point de  $EF$  tel que  $EP = DA$ . [*Elem. H. I.2*]

a.  $P$  est le point de  $BF$  tel que  $\frac{BP}{PF} = \frac{l}{m}$ .



Montrons que  $ED$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$ .

Traçons  $PA$ .

$ADE = APE$  car  $EP = AD$  et  $EP \parallel AD$  [*Elem. H. I.34*]<sup>20</sup>

$ADE + ABE = APE + ABE$ , donc  $ABED = APB$

$ABGD = ABF$  (Lemme)

$ABGD - ABED = ABF - APB$  donc  $DEG = APF$

$$\frac{ABED}{DEG} = \frac{APB}{APF} \quad (\text{B. V.19} = \text{Elem. H. V. 19})^{21}$$

$$\left[ \frac{BP}{PF} = \frac{l}{m} \text{ et } \frac{ABP}{APF} = \frac{BP}{PF} \right] \quad [\text{par hypothèse ; Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{ABP}{APF} = \frac{l}{m} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

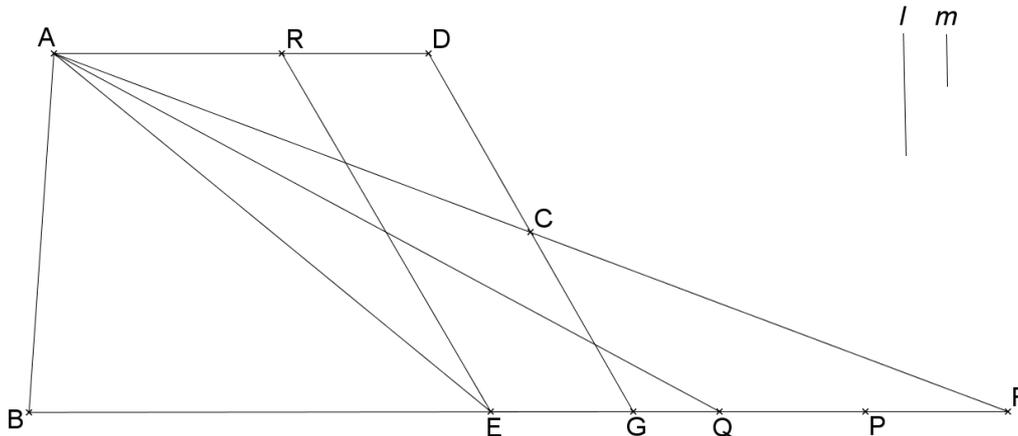
$$\text{Donc } \frac{ABED}{DEG} = \frac{l}{m} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

**b. Le point  $Q$  de  $BF$  tel que  $\frac{BQ}{QF} = \frac{l}{m}$  est entre  $E$  et  $P$ .**

Soit  $R$  le point de  $AD$  tel que  $AR = EQ$ . [*Elem. H. I.2*]

<sup>20</sup> *Elem. H. I.34* : « Les côtés et les angles opposés des aires parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales. » ; *Ibid.*, vol. 1, p. 259.

<sup>21</sup> *Elem. H. V.19* : « Si comme un tout [est] relativement à un tout, ainsi est ce qui en est retranché relativement à ce qui en est retranché, le reste sera aussi relativement au reste comme le tout relativement au tout. » ; *Ibid.*, vol. 2, p. 112.



Montrons que  $ER$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$ .

Traçons  $AQ$ .

$ARE = AQE$  car  $AR = EQ$  et  $AR // EQ$  [*Elem. H. I.34*]

$ARE + ABE = AQE + ABE$ , donc  $ABER = ABQ$

$ABGD = ABF$  (Lemme), soit  $ABGD - ABER = ABF - ABQ$ , donc  $REGD = AQF$

Donc,  $\frac{ABER}{REGD} = \frac{ABQ}{AQF}$  [*Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11*]

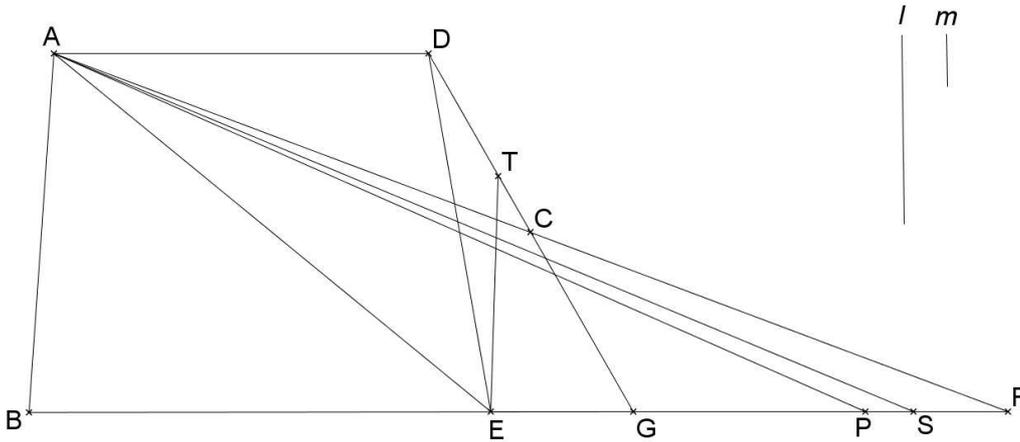
$\left[ \frac{BQ}{QF} = \frac{l}{m} \text{ et } \frac{ABQ}{AQF} = \frac{BQ}{QF} \right]$  [*Elem. H. VI.1*]

$\left[ \frac{ABQ}{AQF} = \frac{l}{m} \right]$  [*Elem. H. V.11*]

$\frac{ABER}{REGD} = \frac{l}{m}$  [*Elem. H. V.11*]

**c. Le point  $S$  de  $BF$  tel que  $\frac{BS}{SF} = \frac{l}{m}$  est entre  $P$  et  $F$ .**

Soit  $T$  le point de  $DG$  tel que  $\frac{DT}{TG} = \frac{PS}{SF}$ . [*Elem. H. VI.10*]



Montrons que  $ET$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{l}{m}$ .

Traçons  $AS$ .

$ADE = APE$  car  $AD = EP$  et  $AD \parallel EP$ . [Elem. H. I.34]

$ADE + ABE = APE + ABE$ , soit  $ABED = ABP$ .

$ABGD = ABF$  [Lemme] ;  $[ABGD - ABED = ABP - APF]$ , donc  $DEG = PAF$

$$\left[ \frac{DET}{TEG} = \frac{DT}{TG} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{DT}{TG} = \frac{PS}{SF} \right]$$

$$\left[ \frac{PS}{SF} = \frac{PAS}{SAF} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{DET}{TEG} = \frac{PAS}{SAF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{DEG}{DET} = \frac{PAF}{PAS} \text{ et } \frac{DEG}{TEG} = \frac{PAF}{SAF} \right] \text{ [Elem. H. V.18]}$$

Comme  $DEG = PAF$ ,  $DET = PAS$  et  $TEG = SAF$  [Elem. H. V.14]<sup>22</sup>

$ABED = ABP$  et  $DET = PAS$ , donc  $ABED + DET = ABP + PAS$ , soit  $ABETD = ABS$ .

Comme aussi  $TEG = SAF$ ,  $\frac{ABETD}{TEG} = \frac{ABS}{ASF}$  [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]

$$\left[ \frac{ABS}{SAF} = \frac{BS}{SF} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

<sup>22</sup> Elem. H. V.14 : « Si une première [grandeur] a relativement à une deuxième le même rapport qu'une troisième relativement à une quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la deuxième sera aussi plus grande que la quatrième ; et si égale, égale ; et si plus petite, plus petite. » ; Ibid., vol. 2, p. 96.

$$\left[ \frac{BS}{SF} = \frac{l}{m} \right]$$

$$\frac{ABETD}{TEG} = \frac{l}{m} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#9] Proposition 9.**

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère quelconque étudié par une droite passant par un point de l'un des côtés non parallèles déjà mentionnés.**

Soient  $ABGD$  un quadrangle dont les deux côtés  $AD$  et  $BG$  ne sont pas parallèles,  $\frac{m}{n}$  un rapport donné et  $E$  un point de  $BG$ .

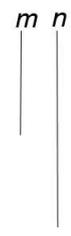
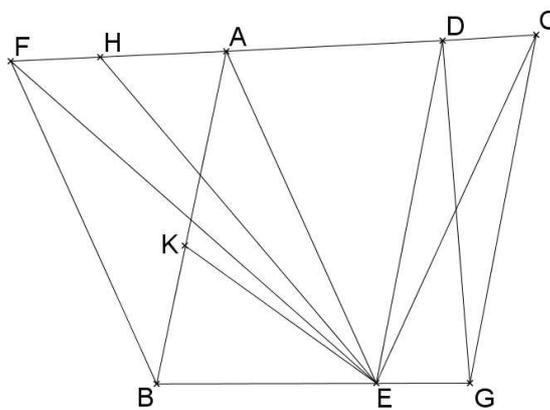
Traçons une ligne passant par  $E$  divisant  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

La parallèle à  $AE$  passant par  $B$  coupe  $AD$  en  $F$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

La parallèle à  $ED$  passant par  $G$  coupe  $AD$  en  $C$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

- 1<sup>er</sup> cas : le point  $H$  tel que  $\frac{FH}{HC} = \frac{m}{n}$  est entre  $F$  et  $A$ .

$K$  est le point de  $AB$  tel que  $\frac{BK}{KA} = \frac{FH}{HA}$ . [Elem. H. VI.10]



Montrons que  $KE$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons  $EF$  et  $EC$ .

<Lemme>

$$AFE = ABE \text{ (B. I.37 = Elem. H. I.37)}$$

$$DCE = DGE \text{ (B. I.37 = Elem. H. I.37)}$$

$$DCE + AFE + AED = DGE + ABE + AED, \text{ soit } FEC = ABGD$$

$$AFE = ABE \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$\frac{FH}{HA} = \frac{BK}{KA} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{EHA}{EFH} = \frac{HA}{FH} \text{ et } \frac{EKA}{EBK} = \frac{KA}{BK} \right] \text{ (B. VI.1 = Elem. H. VI.1)}$$

$$\left[ \frac{EHA}{EFH} = \frac{EKA}{EBK} \right] \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$[EHA = EKA] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$EHF = EKB \text{ [Elem. H. I.14]}$$

$$FEC - EHF = ABGD - EKB \text{ [Lemme]}$$

$$HEC = AKEGD.$$

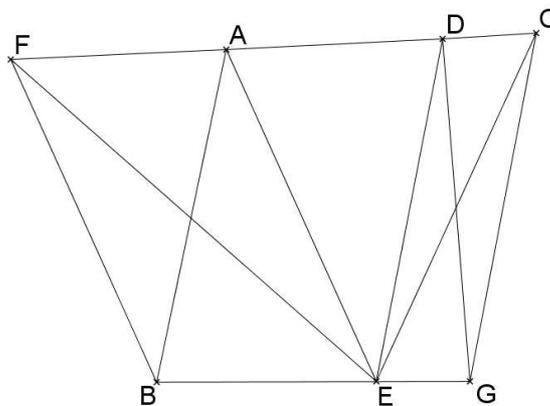
$$\frac{EKB}{AKEGD} = \frac{EHF}{ECH} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{EHF}{ECH} = \frac{FH}{HC} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FH}{HC} = \frac{m}{n} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\text{Donc, } \frac{EKB}{AKECGD} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : le point A est tel que  $\frac{FA}{AC} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que EA divise ABGD selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$AFE = ABE \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[EFC = ABGD] \text{ [Lemme]}$$

$$EFC - AFE = ABGD - ABE, \text{ soit } AEC = AEGD$$

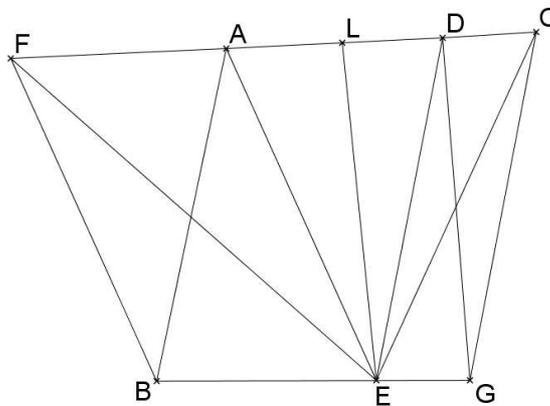
$$\frac{ABE}{AEGD} = \frac{AFE}{AEC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{AFE}{AEC} = \frac{FA}{AC} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FA}{AC} = \frac{m}{n} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\text{Donc, } \frac{ABE}{AEGD} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : le point  $L$  tel que  $\frac{FL}{LC} = \frac{m}{n}$  est entre  $A$  et  $D$ .



Montrons que  $EL$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$AFE = ABE \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$LAE + AFE = LAE + ABE, \text{ soit } LFE = ABEL$$

$$[EFC = ABGD] \text{ [Lemme]}$$

$$EFC - LFE = ABGD - ABEL, \text{ soit } LEC = LEGD$$

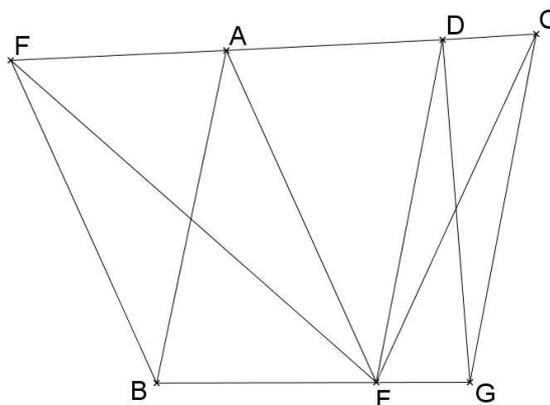
$$\frac{ABEL}{LEGD} = \frac{LFE}{LEC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{LFE}{LEC} = \frac{FL}{LC} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{FL}{LC} = \frac{m}{n} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABEL}{LEGD} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 4<sup>ème</sup> cas : le point  $D$  est tel que  $\frac{FD}{DC} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que  $ED$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$DCE = DGE \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[EFC = ABGD] \text{ [Lemme]}$$

$$EFC - DCE = ABGD - DGE, \text{ soit } DFE = DABE$$

$$\frac{ABED}{DEG} = \frac{DFE}{DEC} \text{ [H V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

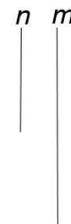
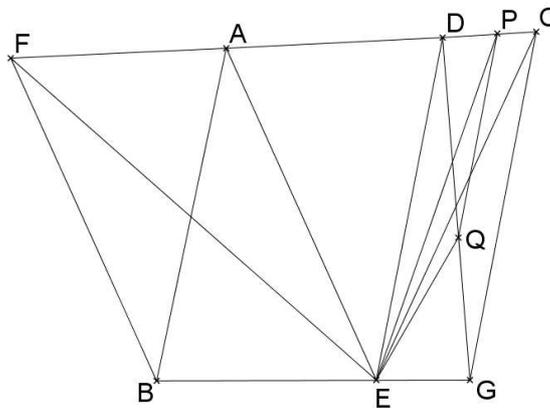
$$\frac{DFE}{DEC} = \frac{FD}{DC} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FD}{DC} = \frac{m}{n} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABED}{DEG} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 5<sup>ème</sup> cas : le point  $P$  tel que  $\frac{FP}{PC} = \frac{m}{n}$  est entre  $D$  et  $C$ .

Traçons la parallèle à  $GC$  passant par  $P$  ; elle coupe  $GD$  en  $Q$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]



Montrons que  $EQ$  coupe  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons  $PE$ .

$$DEP = DEQ \text{ (B. I.37 = Elem. H. I.37)}$$

$$DEP + AED = DEQ + AED, \text{ soit } AEP = AEQD$$

$$AFE = ABE \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$AFE + AEP = ABE + AEQD, \text{ soit } FEP = ABEQD$$

$$[EFC = ABGD] \text{ [Lemme]}$$

$$EFC - FEP = ABGD - ABEQD, \text{ soit } PEC = QEG$$

$$\frac{ABEQD}{QEG} = \frac{FEP}{PEC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

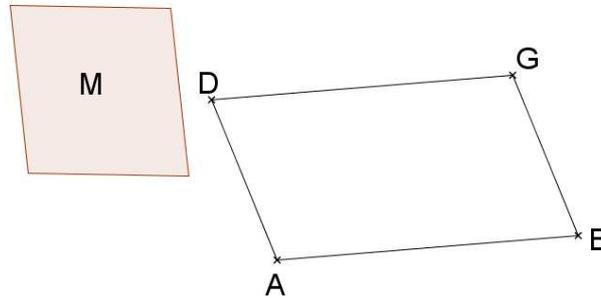
$$\frac{FEP}{PEC} = \frac{FP}{PC} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FP}{PC} = \frac{m}{n} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABEQD}{QEG} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#10] Proposition 10.**

Soient  $AB$  une ligne,  $AD$  et  $BG$  deux autres lignes. Soit  $M$  une surface donnée. Nous voulons construire sur la ligne  $AB$  une surface, égale à une surface  $M$  donnée, incluse entre les lignes  $AD$ ,  $BG$  et la ligne  $AB$  et une ligne qui lui est parallèle.



Les angles  $DAB$  et  $GBA$  sont soit égaux à deux droits, soit plus petits, soit plus grands que deux droits.

- **1<sup>er</sup> cas :  $DAB$  et  $GBA$  sont égaux à deux angles droits.**

$AD$  et  $BG$  sont parallèles. [*Elem. H. I.28*]<sup>23</sup>

Construisons sur la ligne  $AB$  une surface à côtés parallèles dont les angles sont égaux aux angles  $DAB$  et  $GBA$  et que cette surface soit égale à  $M$ . (B. I.44 = *Elem. H. I.44*)<sup>24</sup>

- **2<sup>ème</sup> cas :  $DAB$  et  $GBA$  sont plus petits que deux angles droits.**

Les lignes  $AD$  et  $BG$  sont sécantes en  $E$  au-delà de  $GD$ .

- o Si  $EAB < M$  :

Il est impossible de construire la surface demandée

- o Si  $EAB > M$  :

Soient  $F$ ,  $H$  et  $C$  les points tels que  $\frac{EAB}{M} = \frac{FH}{FC}$ .

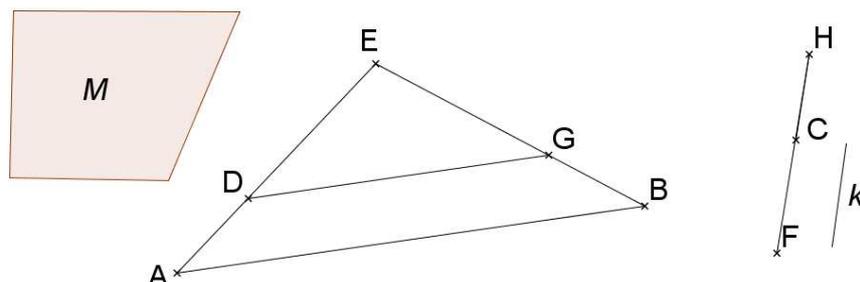
Soit  $k$  la moyenne proportionnelle entre  $FH$  et  $CH$ . [*Elem. H. VI.13*]

Soit  $G$  le point de  $EB$  tel que que  $\frac{EG}{EB} = \frac{k}{FH}$ . [*Elem. H. VI.12*]

Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $G$  ; elle coupe  $AE$  en  $D$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

<sup>23</sup> *Elem. H. I.28* : « Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre. » ; *Ibid.*, vol. 1, p. 249.

<sup>24</sup> *Elem. H. I.44* : « Sur une droite donnée et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné. » ; *Ibid.*, vol. 1, p. 275.



Montrons que  $ABGD = M$ .

$$\frac{BAE}{GDE} = \frac{BE^2}{GE^2} \quad (\text{B. VI.17} = \text{Elem. H. VI.19})$$

$$\left[ \frac{BE}{GE} = \frac{FH}{k} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{BAE}{GDE} = \frac{FH^2}{k^2}$$

$$\left[ \frac{FH}{k} = \frac{CH}{k} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{FH^2}{k^2} = \frac{FH}{CH} \right]$$

$$\frac{BAE}{GDE} = \frac{FH}{CH} \quad [\text{Elem. H. V.11}] \langle * \rangle$$

$$\left[ \frac{BAE}{BAE - GDE} = \frac{FH}{FH - CH} \right] \text{ (par conversion des rapports) } [\text{Elem. H. porisme V.19}]^{25}$$

$$\frac{BAE}{BADG} = \frac{FH}{FC}$$

$$\frac{FH}{FC} = \frac{BAE}{M} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{BAE}{BADG} = \frac{BAE}{M} \right] [\text{Elem. H. V.11}]$$

$$BADG = M \quad [\text{Elem. H. V.9}]$$

- **3<sup>ème</sup> cas :  $DAB$  et  $GBA$  sont plus grands que deux angles droits.**

Les lignes  $AD$  et  $BG$  sont sécantes en  $E$  au-delà de  $AB$ .

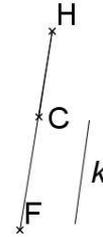
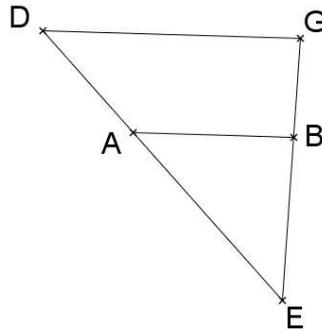
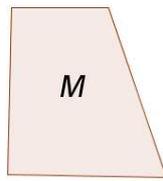
Soient  $F$ ,  $H$  et  $C$  les points tels que  $\frac{ABE}{M} = \frac{CH}{CF}$ .

Soit  $k$  la moyenne proportionnelle entre  $FH$  et  $CH$ . [Elem. H. VI.13]

Soit  $G$  le point de  $EB$  tel que  $\frac{EG}{EB} = \frac{FH}{k}$ . [Elem. H. VI.12]

<sup>25</sup> Elem. H. porisme V.19 : « (...) il est évident que si des grandeurs sont en proportion par composition, elles seront aussi en proportion par conversion. » ; Ibid., vol. 2, p. 113.

Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $G$  ; elle coupe  $AE$  en  $D$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]



Montrons que  $ABGD = M$ .

$$\frac{GDE}{BAE} = \frac{FH}{HC} \quad (*)$$

$$\frac{GDE}{GDE - BAE} = \frac{FH}{FH - CH} \quad (\text{par conversion des rapports}) \quad [\textit{Elem. H. porisme V.9}]$$

$$\frac{GDE}{GDAB} = \frac{FH}{FC}$$

$$\frac{ABE}{ABGD} = \frac{CH}{CF} \quad (\text{par s\u00e9paration des rapports}) \quad [\textit{Elem. H. V.17}]^{26}$$

$$\left[ \frac{CH}{CF} = \frac{ABE}{M} \right] \quad [\text{par hypoth\u00e8se}]$$

$$\frac{ABE}{ABGD} = \frac{ABE}{M} \quad [\textit{Elem. H. V.11}]$$

$$ABGD = M \quad [\textit{Elem. H. V.9}]$$

**[#11] Proposition 11.**

**Diviser selon un rapport donn\u00e9 un quadrilat\u00e8re \u00e0 c\u00f4t\u00e9s parall\u00e8les par une droite parall\u00e8le \u00e0 l'un de ses c\u00f4t\u00e9s parall\u00e8les.**

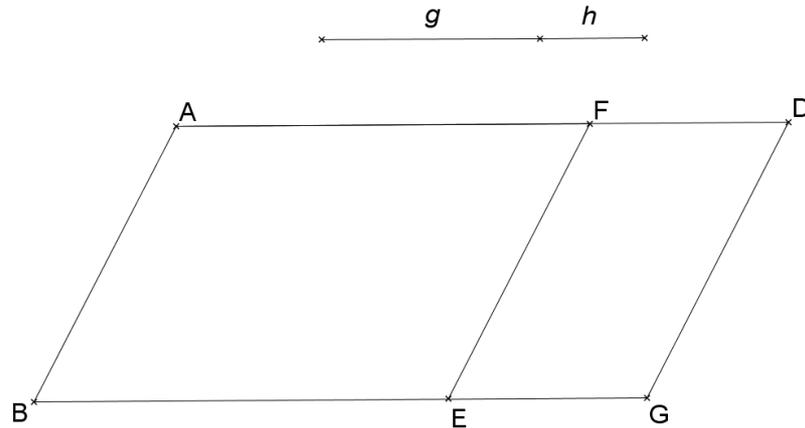
Soient  $ABGD$  un parall\u00e9logramme, et  $\frac{g}{h}$  un rapport donn\u00e9.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{g}{h}$  par une ligne parall\u00e8le \u00e0  $AB$ .

Divisons  $BG$  au point  $E$  selon le rapport  $\frac{g}{h}$ . [*Elem. H. VI.10*]

Tra\u00e7ons la parall\u00e8le \u00e0  $AB$  passant par  $E$  ; elle coupe  $BG$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

<sup>26</sup> *Elem. H. V.17* : « Si des grandeurs sont en proportion par composition, elles seront aussi en proportion par s\u00e9paration. » ; *Ibid.*, vol. 2, p. 104.



Montrons que  $EF$  est la droite cherchée.

$$\frac{ABEF}{FEGD} = \frac{BE}{EG} \quad (\text{B. VI.1} = \text{Elem. H. VI.1})$$

$$\left[ \frac{BE}{EG} = \frac{g}{h} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{ABEF}{FEGD} = \frac{g}{h} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

### [#12] Proposition 12.

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère à deux côtés parallèles, et seulement deux, par une droite parallèle à ses côtés parallèles.**

Soient  $ABGD$  un trapèze avec  $AD$  et  $BG$  parallèles, et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$  par une ligne parallèle aux côtés  $AD$  et  $BG$ .

Soit  $E$  le point d'intersection de  $AB$  et  $DG$ .

Posons les points  $H, L$  et  $O$  tels que :  $\frac{DAE}{GBE} = \frac{HO}{LO}$

Par conversion,  $\frac{DAE}{ABGD} = \frac{HO}{LH}$  [Elem. H. Porisme V.19]

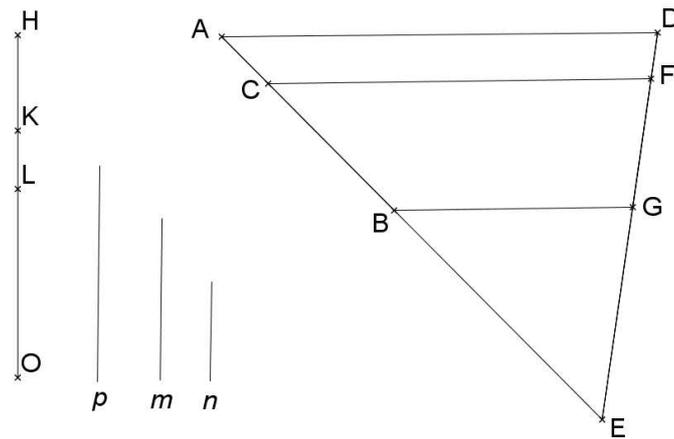
Par séparation,  $\frac{GBE}{DABG} = \frac{LO}{LH}$  [Elem. H. V.17]

Divisons  $HL$  au point  $K$  tel que  $\frac{HK}{KL} = \frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

Soit  $p$  la moyenne proportionnelle entre  $KO$  et  $OL$ . [Elem. H. VI.13]

Soit  $F$  le point de  $DE$  tel que  $\frac{FE}{GE} = \frac{KO}{p}$ . [Elem. H. VI.12]

Traçons la parallèle à  $DA$  passant par  $F$ ; elle coupe  $AB$  en  $C$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]



Montrons que  $FC$  coupe  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$\frac{FCE}{GBE} = \frac{FE^2}{GE^2} \text{ [Elem. H. VI.19]}$$

$$\frac{FCE}{GBE} = \frac{KO^2}{p^2} \text{ [par hypothèse ; Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{KO}{p} = \frac{p}{LO} \text{ [par hypothèse], donc } \frac{FCE}{GBE} = \frac{KO}{LO} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{FCBG}{GBE} = \frac{KL}{LO} \text{ [Elem. H. V.17] et } \frac{GBE}{ABGD} = \frac{LO}{LH}, \text{ donc } \frac{FCBG}{ABGD} = \frac{KL}{LH} \text{ [Elem. H. V.22]}$$

$$\frac{FGBC}{ACFD} = \frac{KL}{KH} \text{ [Elem. H. V.17]}$$

$$\frac{ACFD}{CBGF} = \frac{HK}{KL} \text{ [Elem. H. Porisme V.7]}$$

$$\text{Donc, } \frac{ACFD}{CBGF} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

### [#13] Proposition 13.

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère à deux côtés parallèles, et seulement deux, par une droite parallèle à un des deux côtés non parallèles.**

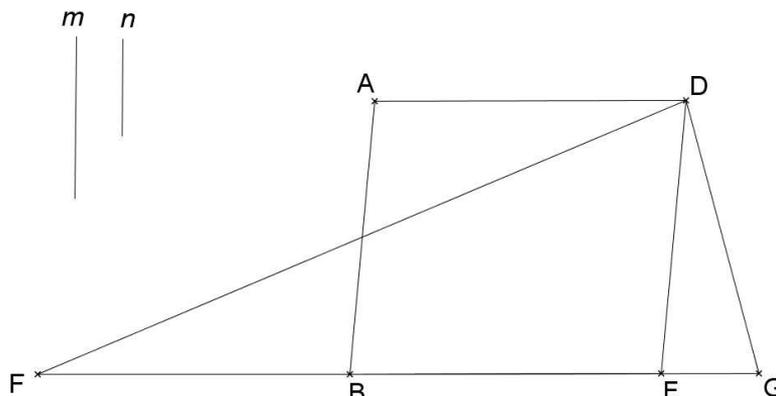
Soient  $ABGD$  un trapèze avec  $AD$  et  $BG$  parallèles, et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  par un ligne parallèle à  $AB$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $E$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]  
Prolongeons  $EB$  et soit  $F$  le point tel que  $BF = BE$ . [Elem. H. I.2]

Divisons  $FG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $E$  est tel que  $\frac{FE}{EG} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que  $DE$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons  $DF$ .

$$\frac{FDE}{EDG} = \frac{FE}{EG} \quad [\text{Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{FDE}{EDG} = \frac{m}{n} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

$$\left[ ABED = 2 \times DBE; DBE = \frac{1}{2} FDE \right]$$

$ABED = FDE$  (B. VI.1 = Elem. H. VI.1 ; B. I.41 = Elem. H. I.41)<sup>27</sup>

$$\frac{ABED}{EDG} = \frac{m}{n} \quad [\text{Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11}]$$

- 2<sup>ème</sup> cas : le point de division est entre  $F$  et  $E$  ;  $\frac{FE}{EG} > \frac{m}{n}$ .

Soit  $C$  le milieu de  $EG$ .

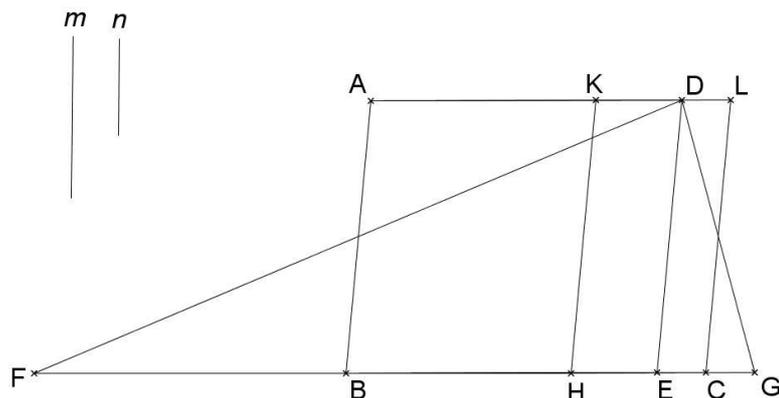
$$BE = \frac{1}{2} FE \text{ et } EC = \frac{1}{2} EG, \text{ donc } \frac{BE}{EC} > \frac{m}{n}.$$

Divisons  $BC$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

Soit  $H$  le point de  $BE$  tel que  $\frac{BH}{HC} = \frac{m}{n}$ . [Elem. H. VI.10]

Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $H$  ; elle coupe  $AD$  en  $K$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

<sup>27</sup> Elem. H. I.41 : « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle. » ; Ibid., vol. 1, p. 269.



Montrons que  $HK$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Traçons la parallèle à  $DE$  passant par  $C$  ; elle coupe  $AD$  en  $L$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

$EG = 2 \times EC$ , donc  $DECL = DEG$  [*VI ; 1 & I ; 41*]

$KHED + DECL = KHED + DEG$ , soit  $KHCL = KHGD$

$$\frac{ABHK}{KHCL} = \frac{ABHK}{KHGD} \quad [\textit{Elem. H. V.7}]$$

$$\frac{ABHK}{KHCL} = \frac{BH}{HC} \quad [\textit{Elem. H. VI.1}]$$

$$\left[ \frac{BH}{HC} = \frac{m}{n} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{ABHK}{KHCL} = \frac{m}{n} \quad [\textit{Elem. H. V.11}]$$

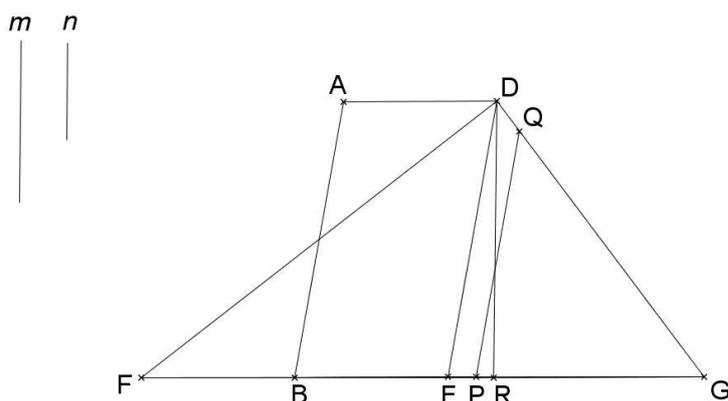
Donc,  $\frac{ABHK}{KHGD} = \frac{m}{n}$  [*Elem. H. V.11*]

- 3<sup>ème</sup> cas : le point  $R$  tel que  $\frac{FR}{RG} = \frac{m}{n}$  est entre  $E$  et  $G$ .

Traçons  $DR$ .

Divisions  $DEG$  selon le rapport  $\frac{DER}{DRG}$  par la ligne  $PQ$  parallèle à  $DE$ . (Baghdādī, Prop.3)

$$\begin{cases} DEPQ = DER \\ QPG = DRG \end{cases}$$



Montrons que  $PQ$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$\left[ \frac{FDR}{RDG} = \frac{FR}{RG} \text{ et } \frac{FR}{RG} = \frac{m}{n} \right] \text{ [Elem. H. VI.1 ; par hypothèse]}$$

$$\frac{FDR}{RDG} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$ABED = FDE$  [Elem. H. VI.1 ; Elem. H. I.41] et  $DEPQ = DER$  [par hypothèse], donc

$$ABPQD = FDR$$

$$QPG = DRG \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABPQD}{QPG} = \frac{FDR}{DRG} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\text{Donc, } \frac{ABPQD}{QPG} = \frac{m}{n} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

#### [#14] Proposition 14.

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère n'ayant aucun côté parallèle par une droite parallèle à un de ses côtés.**

Soient  $ABGD$  un quadrilatère, et  $\frac{v}{x}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$  par une ligne parallèle à  $AB$ .

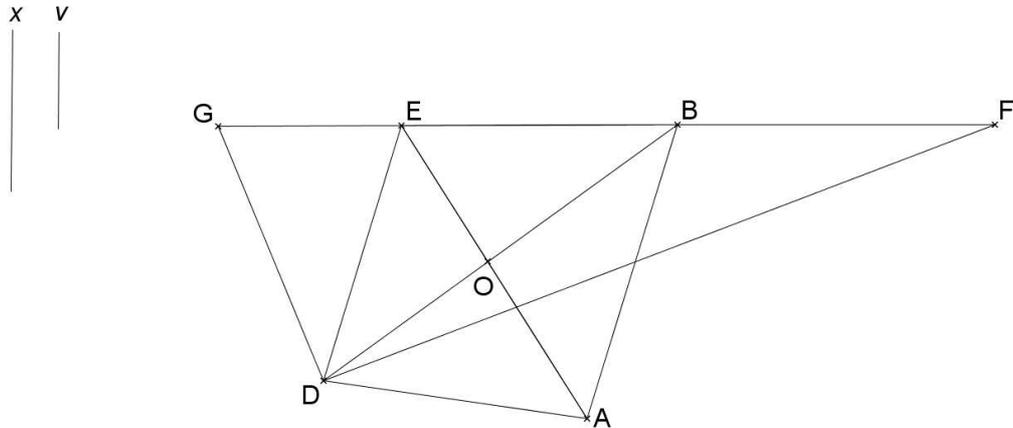
Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BC$  en  $E$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

$EA$  et  $BD$  sont sécantes en  $O$ .

Prolongeons  $CB$  au point  $F$  tel que  $\frac{FB}{BE} = \frac{AO}{OE}$ . [Elem. H. VI.12]

Divisons  $FG$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ . [Elem. H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{FE}{EG} = \frac{v}{x}$ .



Montrons que  $DE$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

<lemme>

$$\frac{ADO}{ODE} = \frac{AO}{OE} \quad [Elem. H. VI.1]$$

$$\frac{ABO}{OBE} = \frac{AO}{OE} \quad [Elem. H. VI.1]$$

donc,  $\frac{BAD}{BED} = \frac{AO}{OE} \quad [Elem. H. V.12]$

$$\left[ \frac{AO}{OE} = \frac{FB}{BE} \right] \text{ [par hypothèse], donc } \frac{BAD}{BED} = \frac{FB}{BE} \quad [Elem. H. V.11]$$

$$\frac{FDB}{BED} = \frac{FB}{BE} \quad [Elem. H. VI.1], \text{ donc } BAD = FBD \quad [Elem. H. V.11 ; Elem. H. V.9]$$

$BAD + BDE = FBD + BDE$ , soit  $ABED = FED$  ■

$$\frac{FDE}{EDG} = \frac{FE}{EG} \quad [Elem. H. VI.1]$$

$$\left[ \frac{FE}{EG} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FDE}{EDG} = \frac{v}{x} \quad [Elem. H. V.11]$$

$$\frac{ABED}{EDG} = \frac{v}{x} \quad [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]$$

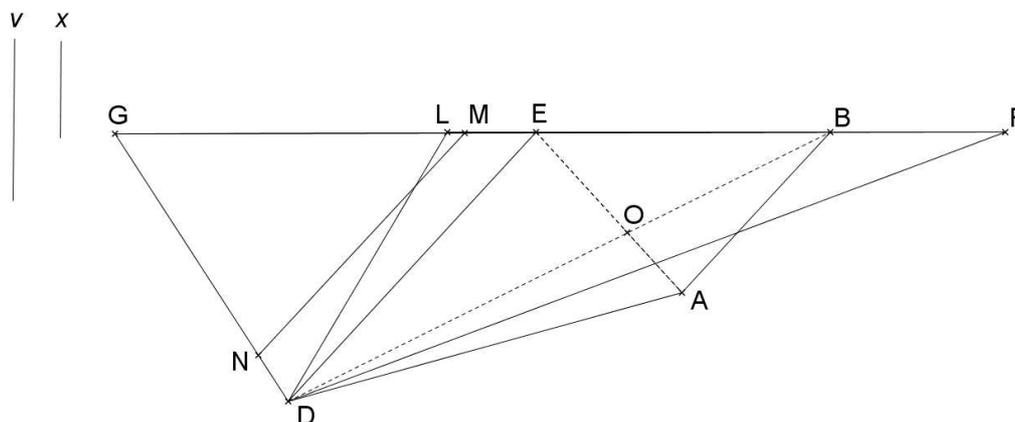


- 3<sup>ème</sup> cas : Le point L tel que  $FL : LG :: v : x$  est entre E et G.

$$FDL : LDG :: v : x$$

Coupons le triangle DEG par la ligne MN parallèle à ED tel que  $LDG = MNG$ . (Baghdādī,

Prop.3)



Montrons que MN divise ABGD selon le rapport  $v : x$ .

$$FDE = ABED \text{ [lemme] et } EDL = DEMN \text{ [par construction].}$$

$$[FDE + EDL = ABED + DEMN] \text{ donc } ABMND = FDL$$

$$MNG = LDG$$

$$ABMND : MNG :: FDL : LDG \text{ [V ; 7 et V ; 11]}$$

$$ABMND : MNG :: v : x \text{ [V ; 11]}$$

**[#15] Proposition 15.**

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère quelconque par une ligne parallèle à l'une de ses diagonales.**

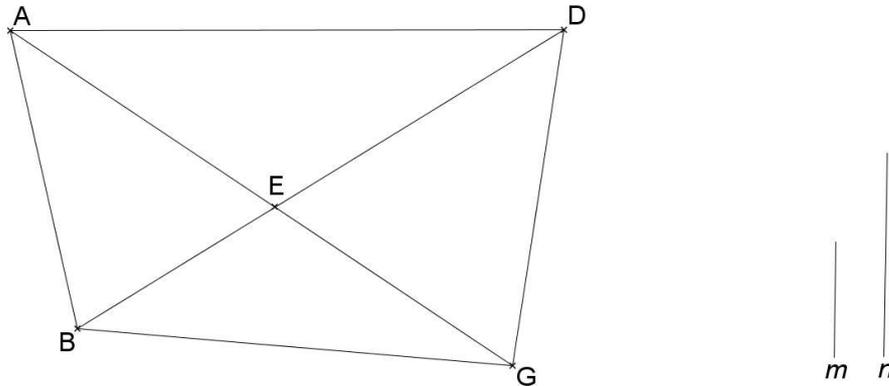
Soient  $ABGD$  un quadrilatère, et  $\frac{m}{n}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGD$  par une ligne parallèle à  $AG$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

Soit  $E$  le point d'intersection de  $BD$  avec  $AG$ .

Divisons  $BD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ . [*Elem.* H. VI.10]

- 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{BE}{ED} = \frac{m}{n}$ .



Montrons que  $AG$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$$\frac{ABE}{AED} = \frac{BE}{ED} \text{ et } \frac{BEG}{EDG} = \frac{BE}{ED} \quad [\text{Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{ABG}{ADG} = \frac{BE}{ED} \quad [\text{Elem. H. V.12}]$$

$$\left[ \frac{BE}{ED} = \frac{m}{n} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABG}{ADG} = \frac{m}{n} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $F$  tel que  $\frac{BF}{FD} = \frac{m}{n}$  est entre  $B$  et  $E$ .

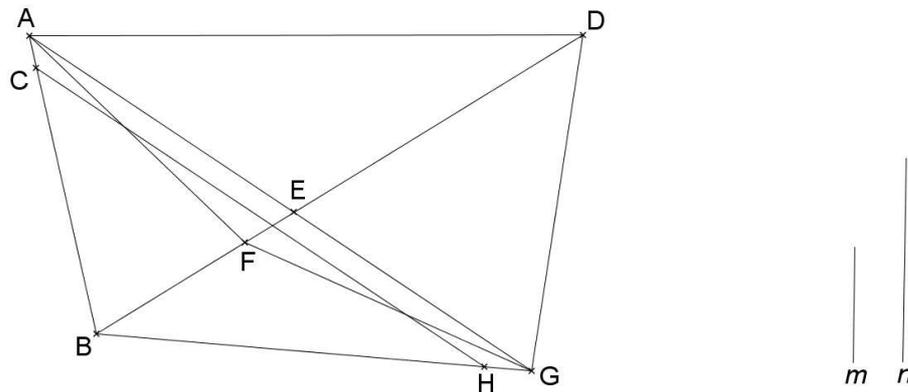
Traçons  $FA$  et  $FG$ .

$$\left[ \frac{ABF}{AFD} = \frac{BF}{FD} \text{ et } \frac{GBF}{GFD} = \frac{BF}{FD} \right] \quad [\text{Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{ABF + GBF}{AFGD} = \frac{BF}{FD}$$

$$\left[ \frac{ABGF}{AFGD} = \frac{BF}{FD} \right]$$

Coupons du triangle  $ABG$  un triangle  $CBH$  par la ligne  $CH$  parallèle à  $AG$  tel que  $ABG$  et  $CBH$  soient semblables et  $CBH = ABF + GBF$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $CH$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$CBH = ABGF$  [par hypothèse]

$[ABG - ABGF = ABG - CBH]$

$AFG = ACHG$

$AFG + ADG = ACHG + ADG$ , soit  $AFGD = ACHGD$

$$\frac{CBH}{ACHGD} = \frac{ABGF}{AFGD} \quad [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]$$

$$\left[ \frac{ABGF}{AFGD} = \frac{BF}{FD} \text{ et } \frac{BF}{FD} = \frac{m}{n} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{CBH}{ACHGD} = \frac{m}{n} \quad [Elem. H. V.11]$$

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $O$  tel que  $\frac{BO}{OD} = \frac{m}{n}$  est entre  $E$  et  $D$ .

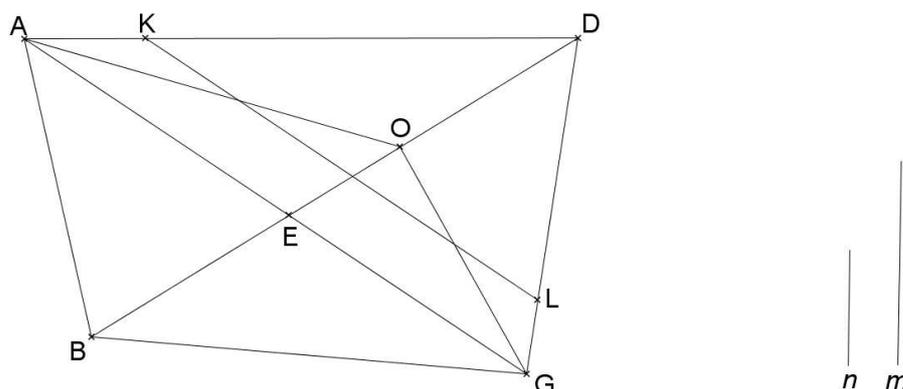
$$\left[ \frac{AOB}{AOD} = \frac{BO}{OD} \text{ et } \frac{BOG}{DOG} = \frac{BO}{OD} \right] \quad [Elem. H. VI.1]$$

$$\left[ \frac{AOB + BOG}{AOD + DOG} = \frac{BO}{OD} \right]$$

$$\frac{ABGO}{AOGD} = \frac{BO}{OD}$$

$$\frac{ABGO}{AOGD} = \frac{m}{n} \quad [Elem. H. V.11]$$

Coupons du triangle  $AGD$  un triangle  $KLD$  par la ligne  $KL$  parallèle à  $AG$  tel que  $KLD$  soit semblable à  $AGD$  et  $KLD = AOGD$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $KL$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{m}{n}$ .

$AOG = AGLK$  [par hypothèse]

$[AOG + ABG = AGLK + ABG]$

$ABGO = ABGLK$

$KLD = AOGD$  [par hypothèse]

$$\frac{ABGLK}{KLD} = \frac{ABGO}{AOGD}$$

Donc,  $\frac{ABGLK}{KLD} = \frac{m}{n}$  [*Elem. H. V.11*]

### [#16] Proposition 16.

**Diviser selon un rapport donné un quadrilatère quelconque par une ligne parallèle à une ligne [tracée] dans le quadrilatère, laquelle n'est parallèle ni à un de ses côtés, ni à une de ses diagonales.**

Soient  $ABGD$  un quadrilatère,  $\frac{v}{x}$  un rapport donné, et  $E$  un point de  $BG$ .

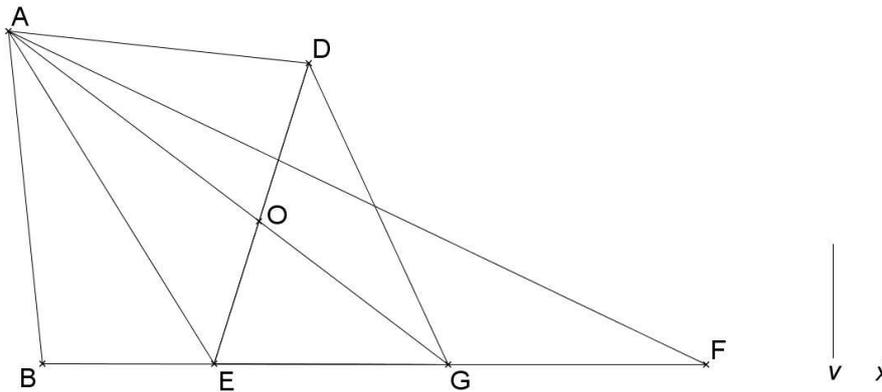
Divisons  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$  par une droite parallèle à  $AE$ .

$AG$  et  $ED$  sont sécantes en  $O$ .

Dans le prolongement de  $BG$ , plaçons  $F$  tel que  $\frac{EG}{GF} = \frac{EO}{OD}$ . [*Elem. H. VI.12 ; Elem. H. I.2*]

Divisons  $BF$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ . [*Elem. H. VI.10*]

**1<sup>er</sup> cas : E est tel que  $\frac{BE}{EF} = \frac{v}{x}$ .**



Montrons que  $AE$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

<lemme1>

$$\left[ \frac{AEO}{AOD} = \frac{EO}{OD} \text{ et } \frac{GEO}{GOD} = \frac{EO}{OD} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{AEG}{AGD} = \frac{EO}{OD}$$

$$\left[ \frac{EO}{OD} = \frac{EG}{GF} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{AEG}{AGD} = \frac{EG}{GF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{AEG}{AGF} = \frac{EG}{GF} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{AEG}{AGD} = \frac{AEG}{AGF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$AGD = AGF \text{ [Elem. H. V.9]}$$

$$[AGD + AEG = AGF + AEG]$$

$$AEGD = AEF \blacksquare$$

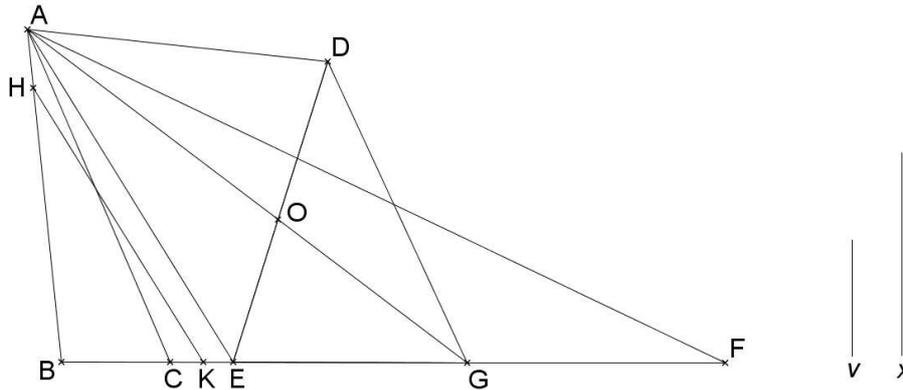
$$\frac{ABE}{AEGD} = \frac{ABE}{AEF} \text{ [Elem. H. V.7]}$$

$$\left[ \frac{ABE}{AEF} = \frac{BE}{EF} \text{ et } \frac{BE}{EF} = \frac{v}{x} \right] \text{ [Elem. H. VI.1 ; par hypothèse]}$$

$$\frac{ABE}{AEGD} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : le point  $C$  tel que  $\frac{BC}{CF} = \frac{v}{x}$  est entre  $B$  et  $E$ .

Du triangle  $ABE$ , coupons un triangle  $HBK$  par  $HK$  parallèle à  $AE$  tel que  $HBK$  soit semblable à  $ABE$  et  $HBK = ABC$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $HK$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$[HBK = ABC]$  [par hypothèse]

$[ABE - HBK = ABE - ABC]$ ,  $AHKE = ACE$

$AEGD = AEF$  [lemme1]

$[AEGD + AHKE = AEF + ACE]$

$AHKGD = ACF$

$[HBK = ABC]$  [par hypothèse]

$$\frac{HBK}{AHKGD} = \frac{ABC}{ACF} \quad [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]$$

$$\left[ \frac{ABC}{ACF} = \frac{BC}{CF} \text{ et } \frac{BC}{CF} = \frac{v}{x} \right] \quad [Elem. H. VI.1 ; \text{par hypothèse}]$$

$$\text{Donc, } \frac{HBC}{AHKGD} = \frac{v}{x} \quad [Elem. H. V.11]$$

- 3<sup>ème</sup> cas : le point de division de  $BF$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$  est entre  $E$  et  $F$

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BF$  en  $M$ .  $[Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]$

$AM$  et  $ED$  sont sécantes en  $N$ .

Soit  $L$  le point de  $BF$  tel que  $\frac{LM}{ME} = \frac{DN}{NE}$ . [*Elem. H. VI.12*]

$L$  est le point d'intersection de la parallèle à  $AM$  passant par  $D$  avec  $BF$  ;  $L$  est nécessairement avant  $F$ , car  $DF$  est la parallèle à  $AG$ , et  $M$  est avant  $G$ .

Traçons  $AL$ .

<lemme2>

[ $AML = AMD$ ] [*Elem. H. I.37*]

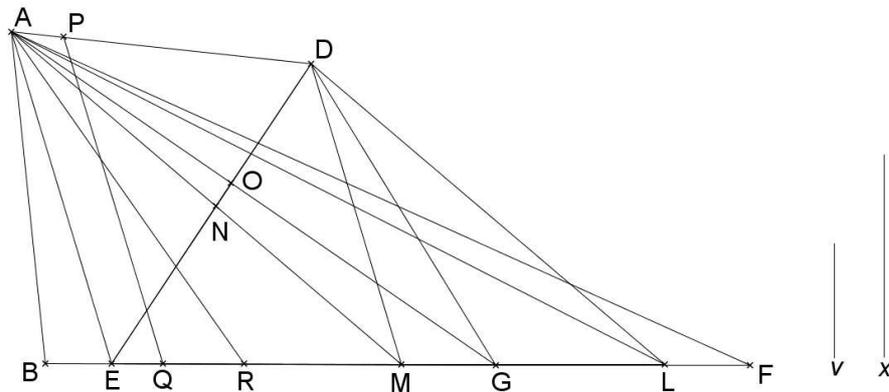
[ $AML + AME = AMD + AME$ ]

$AEL = AEMD$

a. Le point  $R$  de  $BF$  tel que  $\frac{BR}{RF} = \frac{v}{x}$  est entre  $E$  et  $L$ .

Traçons  $PQ$  parallèle à  $AE$  telle que  $AEQP = AER$ . (Baghdādī, Prop.10)

$AEQP < AEMD$  car  $AEL > AER$  et  $AEL = AEMD$ . [lemme2]



Montrons que  $PQ$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$AEGD = AEF$  [lemme1] et  $AEQP = AER$  [par hypothèse]

[ $AEGD - AEQP = AEF - AER$ ],  $PQGD = ARF$

$AEQP = AER$  [par hypothèse], donc  $AEQP + ABE = AER + ABE$ , soit  $ABQP = ABR$

$\frac{ABQP}{PQGD} = \frac{ABR}{ARF}$  [*Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11*]

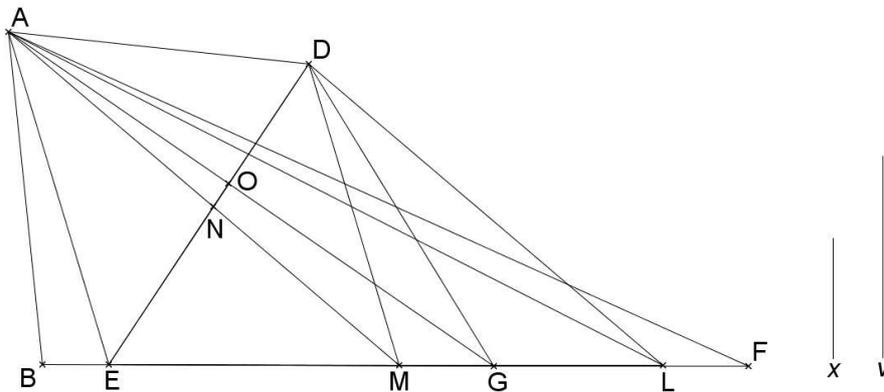
$\left[ \frac{ABR}{ARF} = \frac{BR}{RF} \right]$  [*Elem. H. VI.1*]

$$\frac{ABQP}{PQGD} = \frac{BR}{RF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{BR}{RF} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABQP}{PQGD} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**b. L est tel que  $\frac{BL}{LF} = \frac{v}{x}$ . (4<sup>ème</sup> cas)**



Montrons que  $DM$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$AEF = AEGD$  [lemme1] et  $AEL = AEMD$  [lemme2]

$AEF - AEL = AEGD - AEMD$ , soit  $ALF = DMG$

$AEMD = AEL$  [lemme2], soit  $AEMD + ABE = AEL + ABE$ , donc  $ABMD = ABL$

$$\frac{ABMD}{DMG} = \frac{ABL}{ALF} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

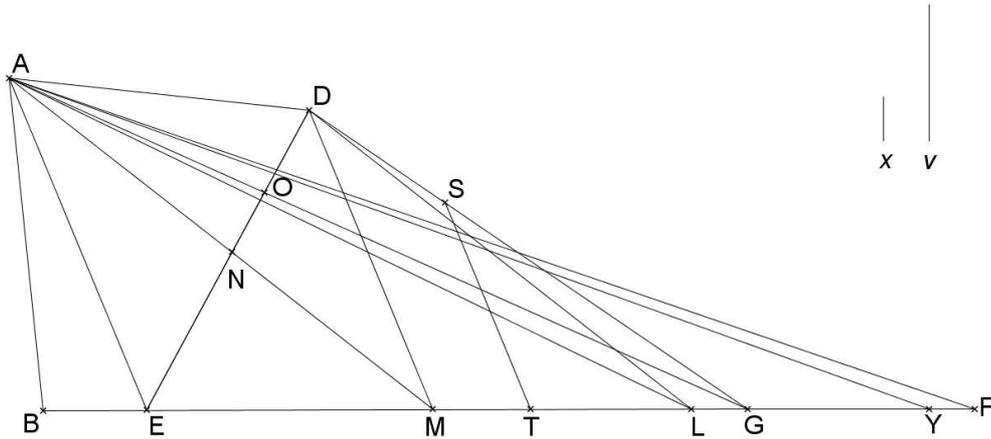
$$\left[ \frac{ABL}{ALF} = \frac{BL}{LF} \text{ et } \frac{BL}{LF} = \frac{v}{x} \right] \text{ [Elem. H. VI.1 ; par hypothèse]}$$

$$\frac{ABMD}{DMG} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**c. Le point Y tel que  $\frac{BY}{YF} = \frac{v}{x}$  est entre L et F. (5<sup>ème</sup> cas)**

Traçons  $AY$ .

$DMG > AYP$  car  $DMG = ALF$  et  $ALF > AYP$ . Séparons de  $DMG$  un triangle  $STG$  qui lui est semblable par la ligne  $ST$  parallèle à  $DM$  tel que  $STG = AYP$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $ST$  divise  $ABGD$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$AEF = AEGD$  [lemme1] et  $AEL = AEMD$  [lemme2], donc  $ALF = DMG$

$STG = AYF$  [par hypothèse],

$DMG - STG = ALF - AYF$ , soit  $DMTS = ALY$

$ABMD = ABL$ , [ $ABMD + DMTS = ABL + ALY$ ], donc  $ABTSD = ABY$

$$\frac{ABTSD}{STG} = \frac{ABY}{AYF} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ABY}{AYF} = \frac{BY}{YF} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABTSD}{STG} = \frac{BY}{YF} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{BY}{YF} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABTSD}{STG} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

## A propos de la division des pentagones.

### [#17] Proposition 17.

**Diviser selon un rapport donné un pentagone quelconque étudié par une ligne menée à partir d'un de ses angles, quel qu'il soit.**

Soient  $ABGDE$  un pentagone, et  $\frac{p}{q}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$  par une ligne menée à partir de  $A$ .

Traçons  $AG$  et  $AD$ .

Traçons la parallèle à  $AG$  passant par  $B$  ; elle coupe  $GD$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $AD$  passant par  $E$  ; elle coupe  $GD$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons  $AF$  et  $AC$ .

$AFC = ABGDE$  car  $ABG = AFG$  et  $AED = ACD$ , donc

$$ABG + AED + AGD = AFG + ACD + AGD$$

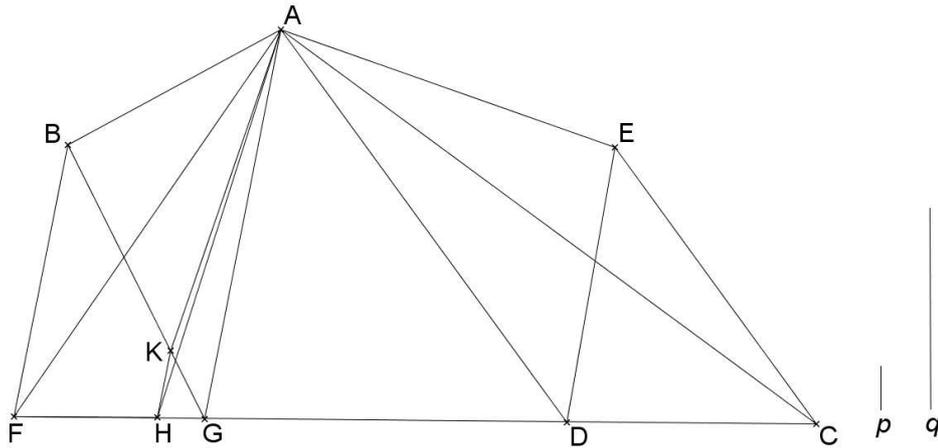
Divisons  $FC$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ . [*Elem. H. VI.10*]

- **1<sup>er</sup> cas : Le point  $H$  tel que  $\frac{FH}{HC} = \frac{p}{q}$  est entre  $F$  et  $G$ .**

Traçons la parallèle à  $BF$  passant par  $H$  ; elle coupe  $BG$  en  $K$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

$$\frac{BK}{KG} = \frac{FH}{HG} \quad (\text{VI ; 2})$$

Traçons  $AK$  et  $AH$ .



Montrons que  $AK$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

<lemme>

$AED = ACD$ , donc  $AED + AGD = ACD + AGD$ , soit  $AGDE = AGC$  ■

$AKG = AHG$  car  $KH$  et  $AG$  parallèles [*Elem. H. I.37*]

$[AGDE + AKG = AGC + AHG]$

$AKGDE = AHC$

$$\frac{BG}{BK} = \frac{FG}{FH} \text{ [*Elem. H. VI.2*]}$$

$$\frac{ABG}{ABK} = \frac{AFG}{AFH} \text{ [*Elem. H. VI.1 ; Elem. H. V.11*]}$$

$$\frac{ABG}{AFG} = \frac{ABK}{AFH} \text{ [*Elem. H. V.16*]}^{28}$$

$ABG = AFG$ , donc  $ABK = AFH$

$$\frac{ABK}{AKGDE} = \frac{AFH}{AHC}$$

$$\left[ \frac{AFH}{AHC} = \frac{FH}{HC} \right] \text{ [*Elem. H. VI.1*]}$$

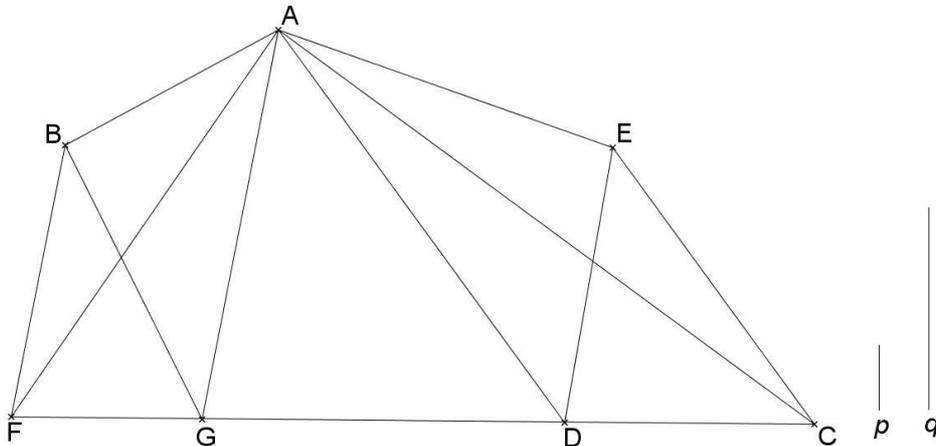
$$\frac{ABK}{AKGDE} = \frac{FH}{HC} \text{ [*Elem. H. V.11*]}$$

$$\left[ \frac{FH}{HC} = \frac{p}{q} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

<sup>28</sup> *Elem. H. V.16* : « Si quatre grandeurs sont en proportion, elles seront aussi en proportion de manière alterne. », *Ibid.*, vol. 2, p. 99.

$$\frac{ABK}{AKGDE} = \frac{p}{q} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $G$  est tel que  $\frac{FG}{GC} = \frac{p}{q}$ .



Montrons que  $AG$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$$AGDE = AGC \text{ (lemme)}$$

$$ABG = AFG$$

$$\frac{ABG}{AGDE} = \frac{AFG}{AGC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

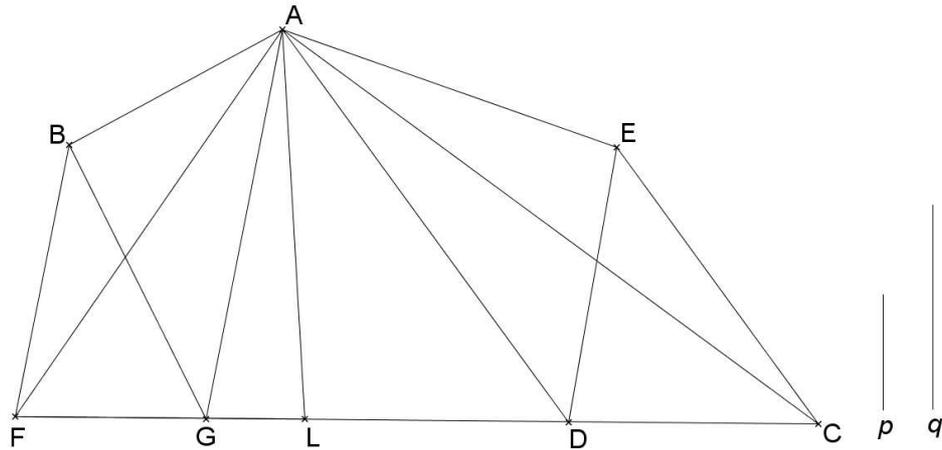
$$\left[ \frac{AFG}{AGC} = \frac{FG}{GC} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABG}{AGDE} = \frac{FG}{GC} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FG}{GC} = \frac{p}{q} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABG}{AGDE} = \frac{p}{q} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $L$  tel que  $\frac{FL}{LC} = \frac{p}{q}$  est entre  $G$  et  $D$ .



Montrons que  $AL$  divise  $ANGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$ABG = AFG$ , donc  $ABG + AGL = AFG + AGL$ , soit  $ABGL = AFL$

$AED = ACD$ , donc  $AED + ALD = ACD + ALD$ , soit  $ALDE = ALC$

$$\frac{ABGL}{ALDE} = \frac{AFL}{ALC} \quad [\text{Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11}]$$

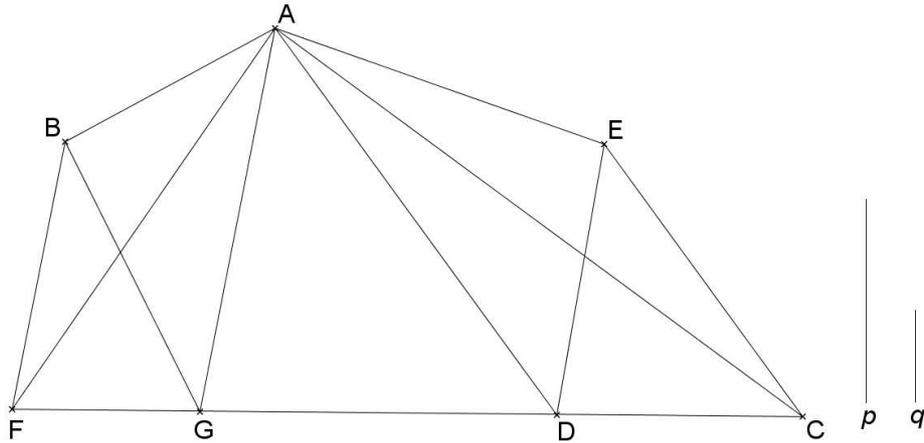
$$\left[ \frac{AFL}{ALC} = \frac{FL}{LC} \right] \quad [\text{Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{ABGL}{ALDE} = \frac{FL}{LC} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

$$\left[ \frac{FL}{LC} = \frac{p}{q} \right] \quad [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{ABGL}{ALDE} = \frac{p}{q} \quad [\text{Elem. H. V.11}]$$

- 4<sup>ème</sup> cas : Le point  $D$  est tel que  $\frac{FD}{DC} = \frac{p}{q}$ .

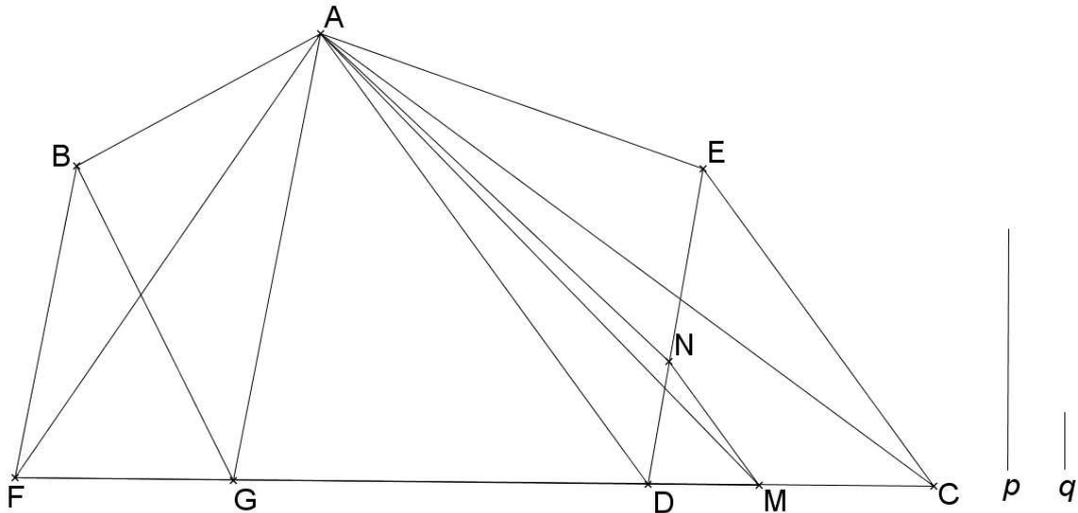


Montrons que  $AD$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

Même démonstration que (Baghdādī, Prop.17, 2<sup>ème</sup> cas).

- 5<sup>ème</sup> cas : Le point  $M$  tel que  $\frac{FM}{MC} = \frac{p}{q}$  est entre  $D$  et  $C$ .

Traçons la parallèle à  $EC$  passant par  $M$  ; elle coupe  $ED$  en  $N$ . [*Elem.* H. I.31 ; *Elem.* H. I.17]



Montrons que  $AN$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$$\left[ \frac{ED}{EN} = \frac{CM}{CD} \right] \text{ [Elem. H. VI.2]}$$

$$\left[ \frac{AED}{AEN} = \frac{ACM}{ACD} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{AED}{ACD} = \frac{ACM}{AEN} \right] [Elem. H. V.16]$$

$$[AED = ACD] [Elem. H. I.37]$$

$AEN = ACM$  (même démonstration que Baghdādī, Prop.17, 1<sup>er</sup> cas)

$$[ADM=ADN ; ABGD=AFD] ABGDN = AFM$$

$$\frac{ABGDN}{AEN} = \frac{AFM}{ACM} [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]$$

$$\frac{AFM}{ACM} = \frac{FM}{MC} [Elem. H. VI.1]$$

$$\frac{ABGDN}{AEN} = \frac{FM}{MC} [Elem. H. V.11]$$

$$\left[ \frac{FM}{MC} = \frac{p}{q} \right] [\text{par hypothèse}]$$

$$\frac{ABGDN}{AEN} = \frac{p}{q} [Elem. H. V.11]$$

### [#18] Proposition 18.

**Diviser selon un rapport donné un pentagone étudié par une ligne menée à partir d'un point d'un côté désigné du pentagone donné.**

Soient  $ABGDE$  un pentagone,  $\frac{v}{x}$  un rapport donné et  $F$  un point de  $AB$ .

Divisons  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$  par une ligne passant par  $F$ .

Traçons la parallèle à  $FG$  passant par  $B$  ; elle coupe  $GD$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $FD$  passant par  $E$  ; elle coupe  $GD$  en  $H$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Soit  $L$  le point d'intersection de  $AD$  et  $FE$ .

Soit  $K$  dans le prolongement de  $DH$  tel que  $\frac{DH}{HK} = \frac{DL}{LA}$ . [*Elem. H. VI.10*] Donc,  $LH // AK$ .

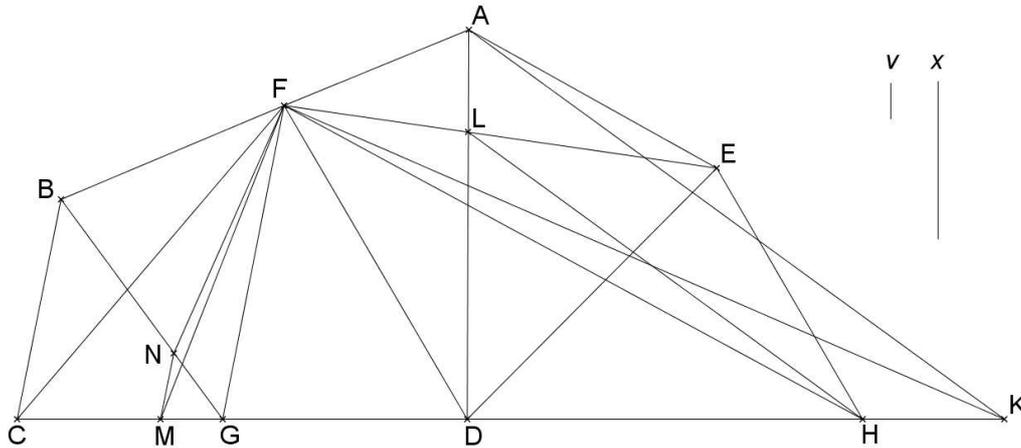
[*Elem. H. VI.2*]

Divisons  $CK$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ . [*Elem. H. VI.10*]

- 1<sup>er</sup> cas : Le point  $M$  tel que  $\frac{CM}{MK} = \frac{v}{x}$  est entre  $C$  et  $G$ .

Traçons la parallèle à  $BC$  passant par  $M$  ; elle coupe  $BG$  en  $N$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

$$\frac{BN}{NG} = \frac{CM}{MG} \text{ [Elem. H. VI.2]}$$



Montrons que  $FN$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

<Lemme>

$$\left[ \frac{ELD}{ELA} = \frac{DL}{LA} \text{ et } \frac{FLD}{FLA} = \frac{DL}{LA} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FDE}{FAE} = \frac{DL}{LA}$$

$$\left[ \frac{DL}{LA} = \frac{DH}{HK} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FDE}{FAE} = \frac{DH}{HK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{DH}{HK} = \frac{DFH}{HFK} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FDE}{FAE} = \frac{DFH}{HFK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{DFE}{DFH} = \frac{FAE}{FHK} \text{ [Elem. H. V.16]}$$

Mais,  $FDE = FDH$  car  $FD$  et  $EH$  sont parallèles [*Elem. H. I.37*], donc  $FAE = FHK$

$$[FAE + FDE = FHK + FDH], FDEA = FDK,$$

soit  $FDEA + FGD = FDK + FGD$ , donc  $FGDEA = FGK$ . ■

$$FBG = FCG \text{ [Elem. H. I.37]} \text{ et } \frac{BN}{NG} = \frac{CM}{MG} \text{ [Elem. H. VI.2]}$$

$$\left[ \frac{FBN}{FNG} = \frac{FCM}{FMG} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{FBN}{FBG} = \frac{FCM}{FCG} \right] \text{ [Elem. H. V.18]}$$

$$FBN = FCM \text{ [Elem. H. V.14]}$$

$$FNG = FMG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$FGDEA + FNG = FGK + FMG \text{ [Lemme]}$$

$$FNGDEA = FMK \text{ et } FBN = FCM, \text{ donc } \frac{FBN}{FNGDEA} = \frac{FCM}{FMK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

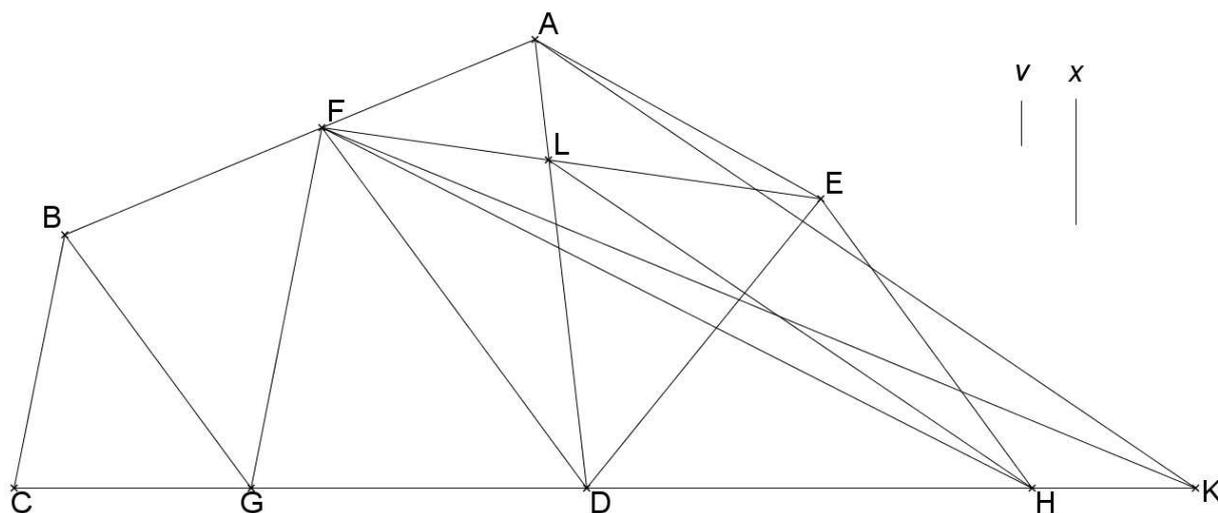
$$\left[ \frac{FCM}{FMK} = \frac{CM}{MK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FBN}{FNGDEA} = \frac{CM}{MK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CM}{MK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FBN}{FNGDEA} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $G$  est tel que  $\frac{CG}{GK} = \frac{v}{x}$ .



Montrons que  $FG$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$$FGDEA = FGK \text{ [Lemme]}$$

$$FBG = FCG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$\frac{FBG}{FGDEA} = \frac{FCG}{FGK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

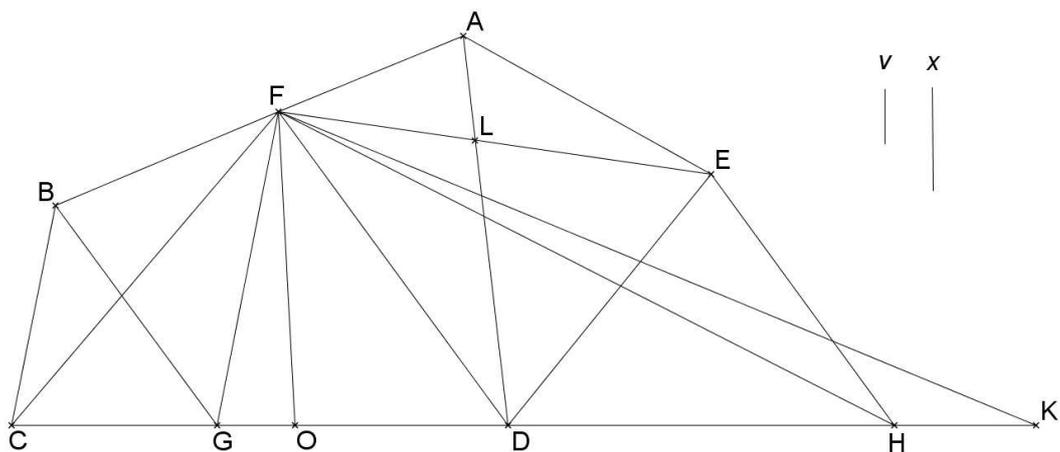
$$\left[ \frac{FCG}{FGK} = \frac{CG}{GK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FBG}{FGDEA} = \frac{CG}{GK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CG}{GK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FBG}{FGDEA} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $O$  tel que  $\frac{CO}{OK} = \frac{v}{x}$  est entre  $G$  et  $D$ .



Montrons que  $FO$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$$[FDEA = FDK] \text{ [lemme]}$$

$$FDEA + FOD = FDK + FOD, \text{ soit } FODEA = FOK$$

$$[FBG = FCG] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$FOG + FBG = FOG + FCG, \text{ soit } FBGO = FCO$$

$$\frac{FBGO}{FODEA} = \frac{FCO}{FOK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

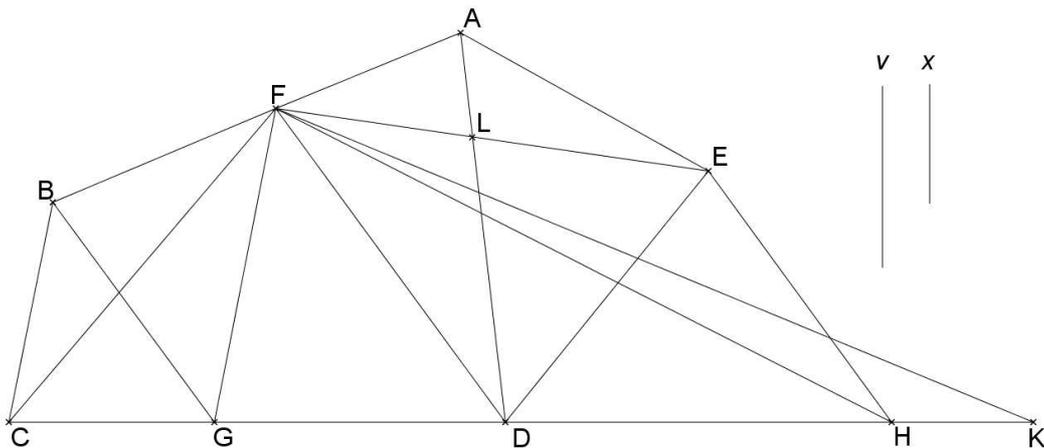
$$\frac{FCO}{FOK} = \frac{CO}{OK} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FBGO}{FODEA} = \frac{CO}{OK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CO}{OK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FBGO}{FODEA} = \frac{v}{x} \text{ [V ; 11]}$$

- 4<sup>ème</sup> cas : Le point  $D$  est tel que  $\frac{CD}{DK} = \frac{v}{x}$ .



Montrons que  $FD$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$FBG = FCG$ , soit  $FBG + FGD = FCG + FGD$ , donc  $FBGD = FCD$

$[FDEA = FDK]$  [lemme]

$$\frac{FBGD}{FDEA} = \frac{FCD}{FDK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FCD}{FDK} = \frac{CD}{DK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

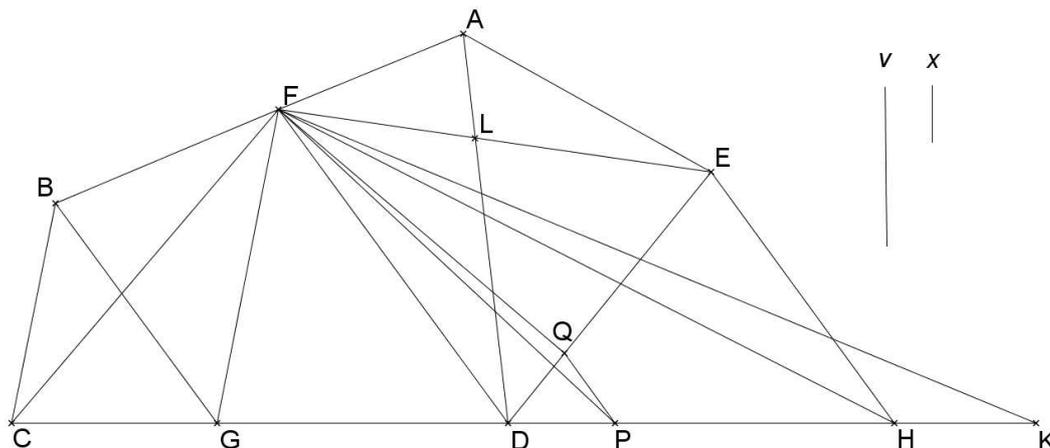
$$\left[ \frac{CD}{DK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{FBGD}{FDEA} = \frac{v}{x} \right] \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 5<sup>ème</sup> cas : Le point  $P$  tel que  $\frac{CP}{PK} = \frac{v}{x}$  est entre  $D$  et  $H$ .

Traçons la parallèle à  $EH$  passant par  $P$  ; elle coupe  $DE$  en  $Q$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

$$\frac{DQ}{DE} = \frac{DP}{PH} \text{ [Elem. H. VI.2]}$$



Montrons que  $FQ$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$$FDEA = FDK \text{ [lemme]}$$

$$FDQ = FDP \text{ [I ; 37]}$$

$$FDEA - FDQ = FDK - FDP, \text{ soit } FQEA = FPK$$

$$[FBG = FCG ; FBG + FGD = FCG + FGD], FBGD = FCD, \text{ soit}$$

$$FBGD + FDQ = FCD + FDP$$

$$\text{donc } FBGDQ = FCP$$

$$\frac{FBGDQ}{FQEA} = \frac{FCP}{FPK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

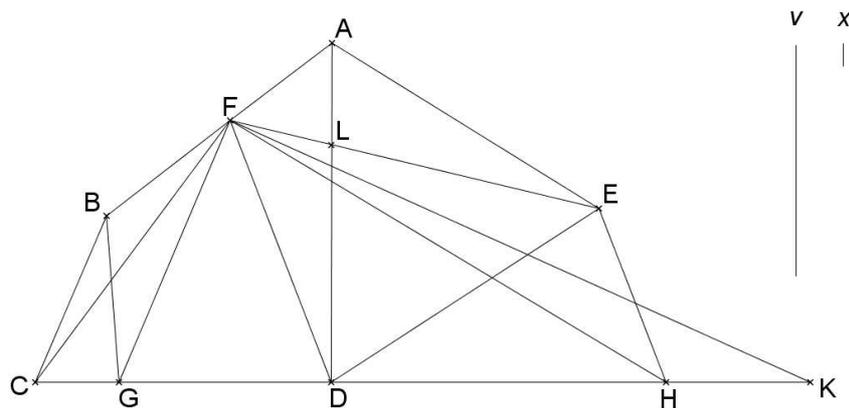
$$\left[ \frac{FCP}{FPK} = \frac{CP}{PK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{FBGDQ}{FQEA} = \frac{CP}{PK} \right] \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CP}{PK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FBGDQ}{FQEA} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 6<sup>ème</sup> cas : Le point  $H$  est tel que  $\frac{CH}{HK} = \frac{v}{x}$ .



Montrons que  $FE$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$$FBGD = FCD \text{ [lemme]}$$

$$AFE = FHK \text{ (lemme)}$$

$$FDE = FDH \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[FBGD + FDE = FCD + FDH]$$

$$FBGDE = FCH$$

$$\frac{FBGDE}{FAE} = \frac{FCH}{FHK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FCH}{FHK} = \frac{CH}{HK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

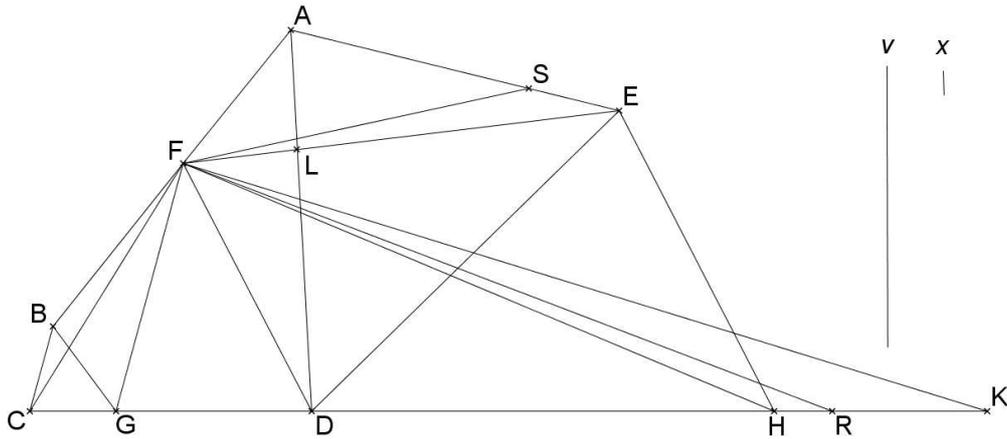
$$\frac{FBGDE}{FAE} = \frac{CH}{HK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CH}{HK} = \frac{v}{x} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{FBGDE}{FAE} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 7<sup>ème</sup> cas : Le point  $R$  tel que  $\frac{CR}{RK} = \frac{v}{x}$  est entre  $H$  et  $K$ .

Soit  $S$  le point de  $EA$  tel que  $\frac{ES}{SA} = \frac{HR}{RK}$ . [Elem. H. VI.10]



Montrons que  $FS$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{v}{x}$ .

$$AFE = FHK \text{ [lemme] et } \frac{ES}{SA} = \frac{HR}{RK} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\left[ \frac{FES}{AFE} = \frac{FHR}{FHK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1] donc } FAS = FRK \text{ [Elem. H. V.14] et [de même] } FES = FHR$$

$$[FBGD = FCD \text{ et } FDE = FDH] \text{ [lemme ; Elem. H. I.37]}$$

$$[FBGD + FDE = FCD + FDH], \text{ soit } FBGDE = FCH$$

$$[FBGDE + FES = FCH + FHR]$$

$$FBGDES = FCR$$

$$\frac{FBGDES}{FSA} = \frac{FCR}{FRK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FCR}{FRK} = \frac{CR}{RK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{FBGDES}{FSA} = \frac{CR}{RK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CR}{RK} = \frac{v}{x} \right]$$

$$\frac{FBGDES}{FSA} = \frac{v}{x} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#19] Proposition 19.**

**Diviser selon un rapport donné un pentagone à deux côtés parallèles par une droite parallèle à ses côtés parallèles.**

Soient  $ABGDE$  un pentagone avec  $AB$  et  $GD$  parallèles, et  $\frac{q}{r}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{q}{r}$  par une ligne parallèle à  $AB$ .

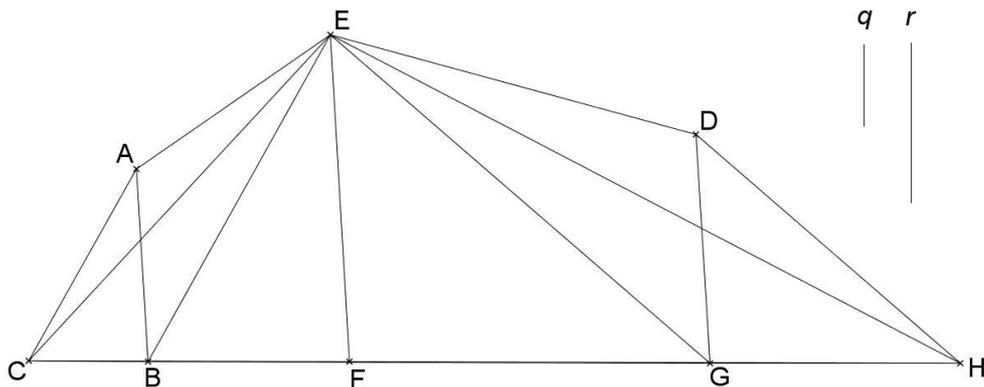
Traçons la parallèle à  $AB$  passant par  $E$  ; elle coupe  $BG$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $EB$  passant par  $A$  ; elle coupe  $BG$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $EG$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $H$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Divisons  $CH$  selon le rapport  $\frac{q}{r}$ . [*Elem. H. VI.10*]

- 1<sup>er</sup> cas :  $F$  est tel que  $\frac{CF}{FH} = \frac{q}{r}$ .



Montrons que  $EF$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{q}{r}$ .

$EAB = ECB$  car  $AC$  et  $EB$  sont parallèles [*Elem. H. I.37*]

$EAB + EBF = ECB + EBF$ , soit  $EABF = ECF$  <\*>

$EDG = EHG$  car  $EG$  et  $DH$  sont parallèles [*Elem. H. I.37*]

$EDG + EFG = EHG + EFG$ , soit  $EFGD = EFH$  <\*\*\*>

$$\frac{ABFE}{EFGD} = \frac{ECF}{EFH} \quad [\textit{Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11}]$$

$$\left[ \frac{ECF}{EFH} = \frac{CF}{FH} \right] [\textit{Elem. H. VI.1}]$$

$$\frac{ABFE}{EFGD} = \frac{CF}{FH} \quad [\textit{Elem. H. V.11}]$$

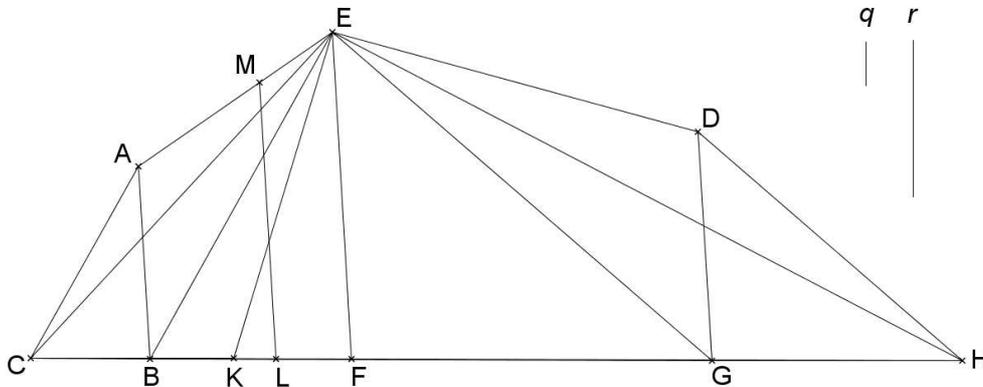
$$\left[ \frac{CF}{FH} = \frac{q}{r} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABFE}{EFGD} = \frac{q}{r} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $K$  tel que  $\frac{CK}{KH} = \frac{q}{r}$  est entre  $C$  et  $F$ .

$ECK < ECF$  et  $ECF = ABFE$  [\*], donc  $ECK < ABFE$

Construisons à partir de  $AB$  la surface  $ABML$  telle que  $AB$  et  $ML$  soient parallèles, et  $ABML = ECK$ . (Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $LM$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{q}{r}$ .

$ECK = ABLM$  [par hypothèse]

[ $EAB = ECB$  et  $EDG = EHG$ , soit  $ECB + EBG + EGH = EAB + EBG + EDG$ ],

$ECH = ABGDE$  <\*\*\*>

$ECH - ECK = ABGDE - ABLM$ , soit  $EKH = MLGDE$

$$\frac{ABLM}{MLGDE} = \frac{ECK}{EKH} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ECK}{EKH} = \frac{CK}{KH} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABLM}{MLGDE} = \frac{CK}{KH} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

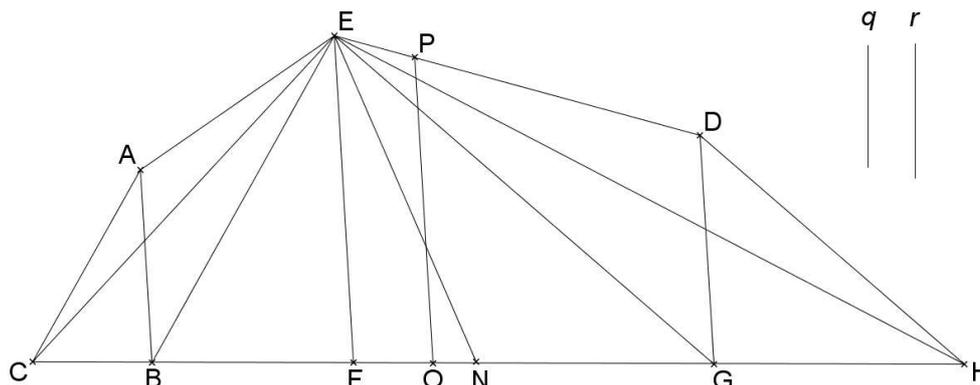
$$\frac{CK}{KH} = \frac{q}{r} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABLM}{MLGDE} = \frac{q}{r} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $N$  tel que  $\frac{CN}{NH} = \frac{q}{r}$  est entre  $F$  et  $H$ .

$EHN < EFGD$  car  $EHN < EHF$  et  $EFGD = EHF$  [\*\*]

Construisons à partir de  $DG$  la surface  $POGD$  telle que  $DG$  et  $PO$  soient parallèles, et  $POGD = EHN$ . (Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $OP$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{q}{r}$ .

$POGD = ENH$  [par hypothèse]

$ECH = ABGDE$  [\*\*\*]

$ABGDE - POGD = ECH - ENH$ , soit  $ABOPE = ECN$

$$\frac{ABOPE}{POGD} = \frac{ECN}{ENH} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{ECN}{ENH} = \frac{CN}{NH} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABOPE}{POGD} = \frac{CN}{NH} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{CN}{NH} = \frac{q}{r} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABOPE}{POGD} = \frac{q}{r} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#20] Proposition 20.**

**Diviser selon un rapport donné un pentagone dont un de ses côtés est parallèle à une de ses diagonales par une droite parallèle à ce côté et à cette diagonale.**

Soient  $ABGDE$  un pentagone tel que  $AB$  et  $GE$  soient parallèles, et  $\frac{p}{q}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$  par une ligne parallèle à  $AB$ .

Traçons la parallèle à  $EB$  passant par  $A$  ; elle coupe  $BG$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $EG$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

<lemme>

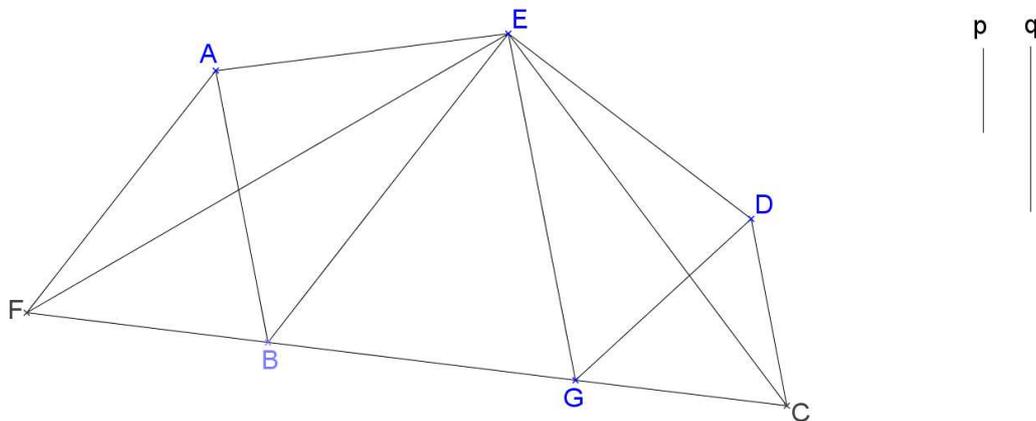
$$[EAB = EFB \text{ et } EDG = ECG]$$

$$[EAB + EBG + EGD = EFB + EBG + ECG]$$

$$ABGDE = EFC \text{ (Baghdādī, Prop.19)■}$$

Divisons  $FC$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ . [*Elem. H. VI.10*]

- 1<sup>er</sup> cas : Le point  $G$  est tel que  $\frac{FG}{GC} = \frac{p}{q}$ .



Montrons que  $EG$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$$[EGD = EGC] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$ABGDE - EGD = EFC - EGC \text{ [lemme]}$$

$$\text{soit } ABGE = EFG \text{ <*>}$$

$$\frac{ABGE}{EGD} = \frac{EFG}{EGC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{EFG}{EGC} = \frac{FG}{GC} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABGE}{EGD} = \frac{FG}{GC} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FG}{GC} = \frac{p}{q} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

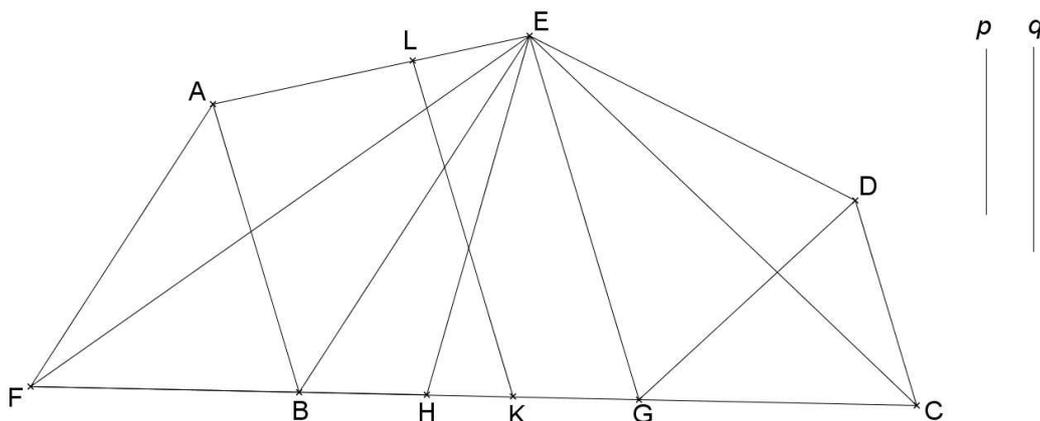
$$\frac{ABGE}{EGD} = \frac{p}{q} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : Le point  $H$  tel que  $\frac{FH}{HC} = \frac{p}{q}$  est entre  $F$  et  $G$ .

$ABGE = EFG$  [\*\*] et  $EFH < EFG$ , donc  $EFH < ABGE$

Construisons à partir de  $AB$  la surface  $ABKL$  telle que  $AB$  et  $KL$  soient parallèles, et

$ABKL = EF$  Elem. H. (Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $LK$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$ABGDE = EFC$  [lemme]

$ABKL = EFH$  [par hypothèse]

$ABGDE - ABKL = EFC - EFH$ , soit  $LKGDE = EHC$

$$\frac{ABKL}{LKGDE} = \frac{EFH}{EHC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{EFH}{EHC} = \frac{FH}{HC} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABKL}{LKGDE} = \frac{FH}{HC} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{FH}{HC} = \frac{p}{q} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

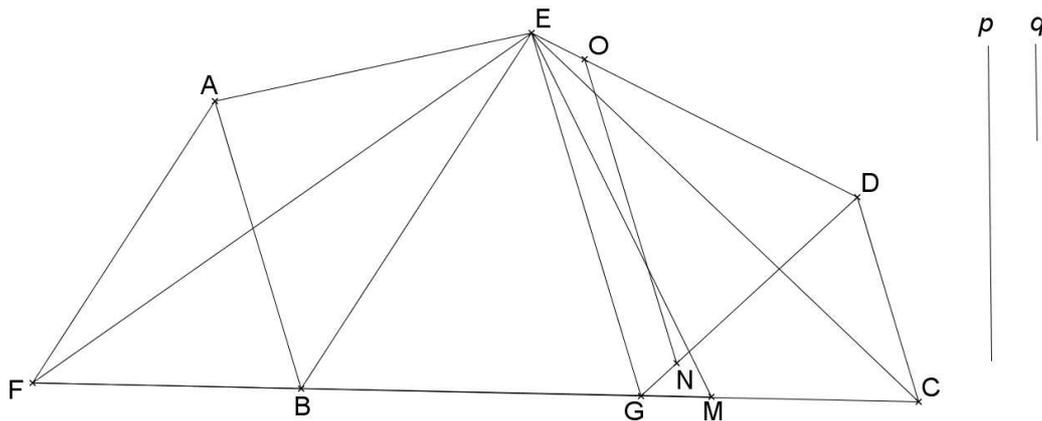
$$\frac{ABKL}{LKGDE} = \frac{p}{q} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 3<sup>ème</sup> cas : Le point  $M$  tel que  $\frac{FM}{MC} = \frac{p}{q}$  est entre  $G$  et  $C$ .

$EDG = ECG$  et  $EMG < ECG$ , donc  $EMG < EDG$ .

Construisons à partir de  $EG$  la surface  $EGNO$  telle que  $EG$  et  $NO$  soient parallèles, et  $EGNO = EMG$ . (Baghdādī, Prop.10)

Cette construction revient à couper du triangle  $DEG$  le triangle  $DON$  tel que  $DON$  et  $DEG$  soient semblables et  $DON = ECM$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $NO$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{p}{q}$ .

$ABGDE = EFC$  [lemme] et  $OND = EMC$  [par hypothèse]

$ABGDE - OND = EFC - EMC$ , soit  $ABGNOE = EFM$

$$\frac{ABGNOE}{OND} = \frac{EFM}{EMC} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{EFM}{EMC} = \frac{FM}{MC} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABGNOE}{OND} = \frac{FM}{MC} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{FM}{MC} = \frac{p}{q} \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABGNOE}{OND} = \frac{p}{q} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**[#21] Proposition 21.**

**Deux droites parallèles à un quelconque côté d'un pentagone étudié – ce côté n'étant parallèle ni à un autre côté, ni à une diagonale du pentagone – peuvent être tracées à l'intérieur du pentagone à partir de deux des trois angles non reliés au côté considéré.**

Soit  $ABGDE$  un pentagone dont le côté  $AE$  n'est parallèle ni à un autre côté, ni à la diagonale  $BD$ .

Montrons que deux lignes parallèles à  $AE$  peuvent être tracées à l'intérieur du pentagone à partir de deux des trois angles  $B, G$  ou  $D$ .

- $AE$  et  $BD$  sont sécantes au-delà de  $AB$  :

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $B$  ; elle coupe  $ED$  en  $F$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

- $BF$  et  $GD$  sont sécantes au-delà de  $FD$  :

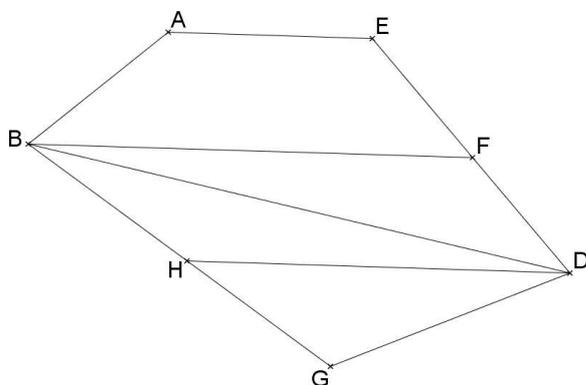
Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $H$ . (fig.1) [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

$BF$  et  $HD$  sont parallèles à  $AE$  et intérieures au pentagone  $ABGDE$ . [Elem. H. I.30]

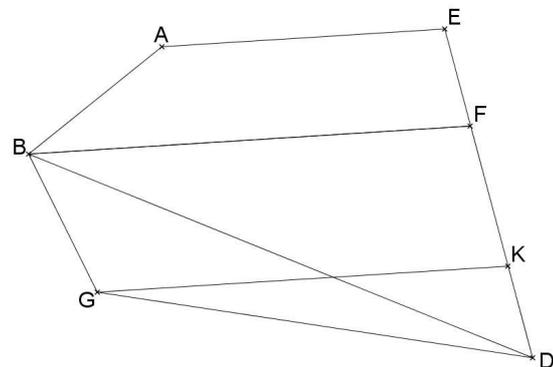
- $BF$  et  $GD$  sont sécantes au-delà de  $BG$  :

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $G$  ; elle coupe  $ED$  en  $K$ . (fig.2) [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

$BF$  et  $GK$  sont parallèles à  $AE$  et intérieures au pentagone  $ABGDE$ . [Elem. H. I.30]



**Fig. 1**



**Fig. 2**

- $AE$  et  $BD$  sont sécantes au-delà de  $ED$  :

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $D$  ; elle coupe  $AB$  en  $C$ . [*Elem.* H. I.31 ; *Elem.* H. I.17]

- $DC$  et  $BG$  sont sécantes au-delà de  $DG$  :

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $B$  ; elle coupe  $DG$  en  $L$ . (fig.3) [*Elem.* H. I.31 ; *Elem.* H. I.17]

$CD$  et  $BL$  sont parallèles à  $AE$  et intérieures au pentagone  $ABGDE$ . [*Elem.* H. I.30]

- $DC$  et  $BG$  sont sécantes au-delà de  $BC$  :

Traçons la parallèle à  $AE$  passant par  $G$  ; elle coupe  $AB$  en  $M$ . (fig.4) [*Elem.* H. I.31 ; *Elem.* H. I.17]

$CD$  et  $MG$  sont parallèles à  $AE$  et intérieures au pentagone  $ABGDE$ . [*Elem.* H. I.30]

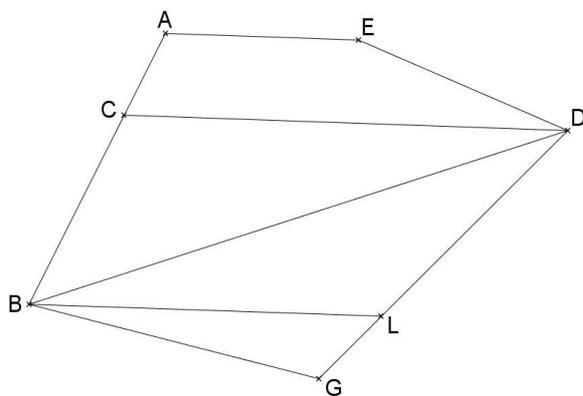


Fig. 3

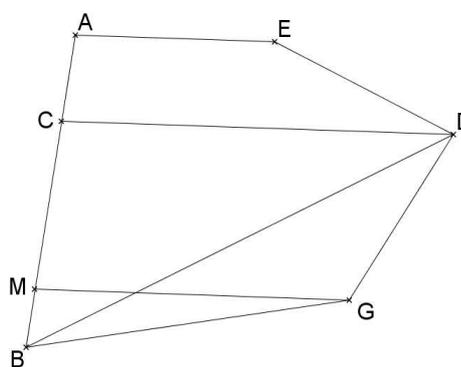


Fig. 4

### [#22] Proposition 22.

**Diviser selon un rapport donné un pentagone par une droite parallèle à l'un de ses côtés, [pentagone dont] aucun côté n'est parallèle ni à un des autres côtés ni à une quelconque de ses diagonales.**

Soient  $ABGDE$  un pentagone dont  $AB$  n'est parallèle ni à  $EG$ , ni aux autres côtés  $ED$  et  $GD$ , et

$\frac{y}{z}$  un rapport donné.

Divisons  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$  par une ligne parallèle à  $AB$ .

Traçons les deux parallèles à  $AB$  passant par  $G$ ,  $D$  ou  $E$  et qui restent à l'intérieur du pentagone. Ces deux droites coupent soit le même côté, soit deux côtés opposés.

[*Elem.* H. I.31]

- **1<sup>er</sup> cas : Elles coupent deux côtés opposés.**

La parallèle à  $AB$  passant par  $G$  coupe  $ED$  en  $C$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

La parallèle à  $AB$  passant par  $E$  coupe  $BG$  en  $F$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Raisonnons d'abord sur le côté consécutif à  $AB$ , c'est-à-dire  $BG$ .

Traçons la parallèle à  $EB$  passant par  $A$  ; elle coupe  $BG$  en  $H$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons la parallèle à  $EG$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $K$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Traçons  $EH$  et  $EK$ .

<Lemme 1>

$$EAB = EHB \text{ [Elem. H. I.37]}$$

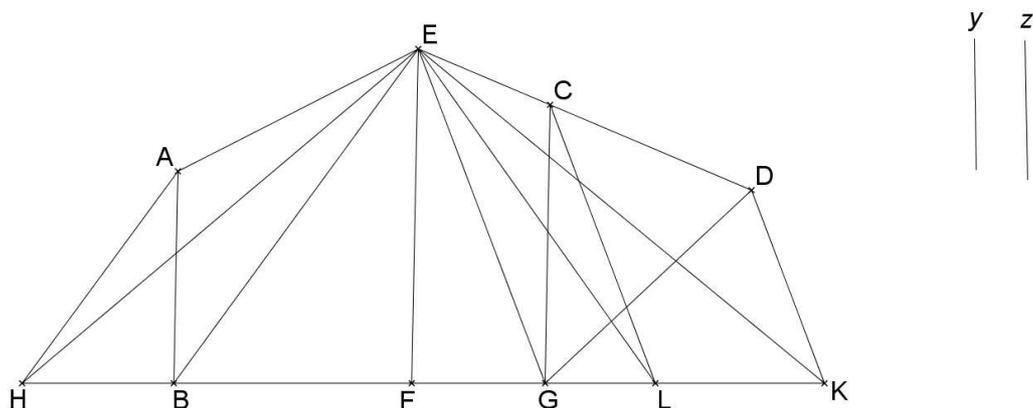
$$EDG = EKG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$EAB + EDG + EBG = EHB + EKG + EBG, \text{ soit } ABGDE = EHK.$$

Traçons la parallèle à  $EG$  passant par  $C$  ; elle coupe  $BG$  en  $L$ . [*Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17*]

Divisons  $HK$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

a.  $F$  est tel que  $\frac{HF}{FK} = \frac{y}{z}$ .



Montrons que  $EF$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$[EAB = EHB] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[EAB + EBF = EHB + EBF], EABF = EHF \text{ <*>}$$

$$[EDG = EGK] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[EDG + EFG = EGK + EFG], EDGF = EKF \text{ <***>}$$

$$\frac{EABF}{EDGF} = \frac{EHF}{EKF} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

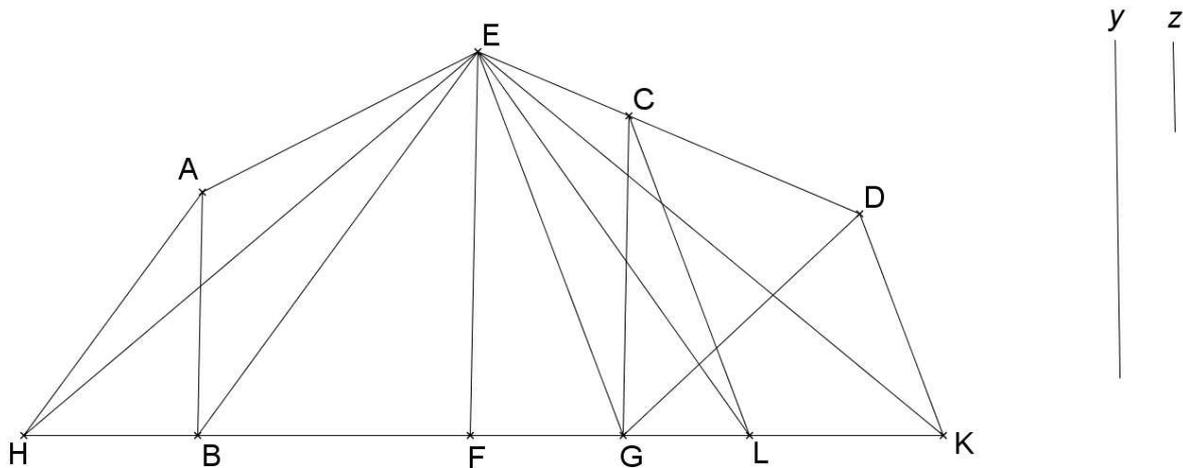
$$\left[ \frac{EHF}{EKF} = \frac{HF}{FK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{EABF}{EDGF} = \frac{HF}{FK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HF}{FK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{EABF}{EDGF} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**b. L est tel que  $\frac{HL}{LK} = \frac{y}{z}$ .**



Montrons que  $GC$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$ECG = ELG \text{ car } EG \text{ et } CL \text{ sont parallèles [Elem. H. I.37]}$$

$$EDG = EKG \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$EDG - ECG = EKG - ELG, \text{ soit } CGD = ELK$$

$$[AEB = EHB] \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[AEB + EBG = EHB + EBG], ABGE = EHG \text{ <****>}$$

$$[ABGE + ECG = EHG + EGL]$$

$$ABGCE = EHL$$

$$\frac{ABGCE}{CGD} = \frac{EHL}{ELK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{EHL}{ELK} = \frac{HL}{LK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABGCE}{CGD} = \frac{HL}{LK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HL}{LK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

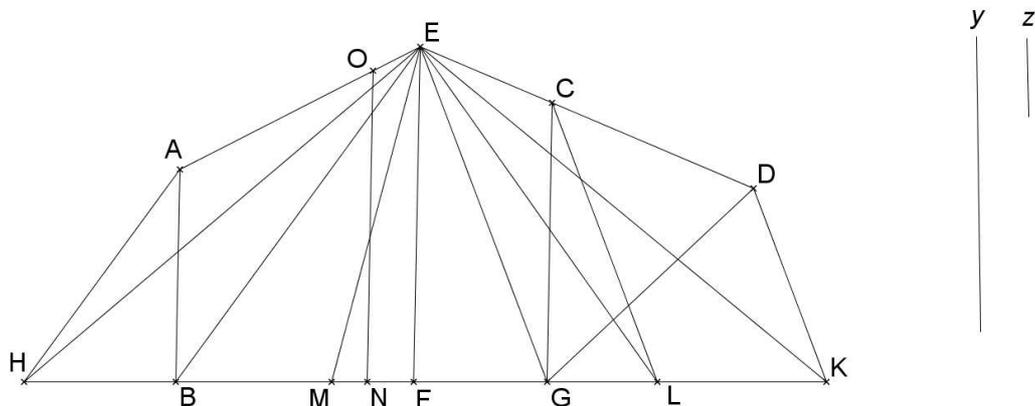
$$\frac{ABGCE}{CGD} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

c. Le point  $M$  tel que  $\frac{HM}{MK} = \frac{y}{z}$  est entre  $H$  et  $F$ .

$EHF = EABF$  et  $EHM < EHF$ , donc  $EHM < EABF$ .

Construisons sur  $AB$  la surface  $ABNO$  telle que  $NO$  et  $AB$  soient parallèles et  $ABNO = EHM$ .

(Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $NO$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$ABGDE = EHK \text{ [Lemme 1]}$$

$$ABNO = EHM \text{ [par hypothèse]}$$

$$[ABGDE - ABNO = EHK - EHM]$$

$$ONGDE = EMK$$

$$\frac{ABNO}{ONGDE} = \frac{EHM}{EMK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11] } \langle \text{****} \rangle$$

$$\left[ \frac{EHM}{EMK} = \frac{HM}{MK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABNO}{ONGDE} = \frac{HM}{MK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HM}{MK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

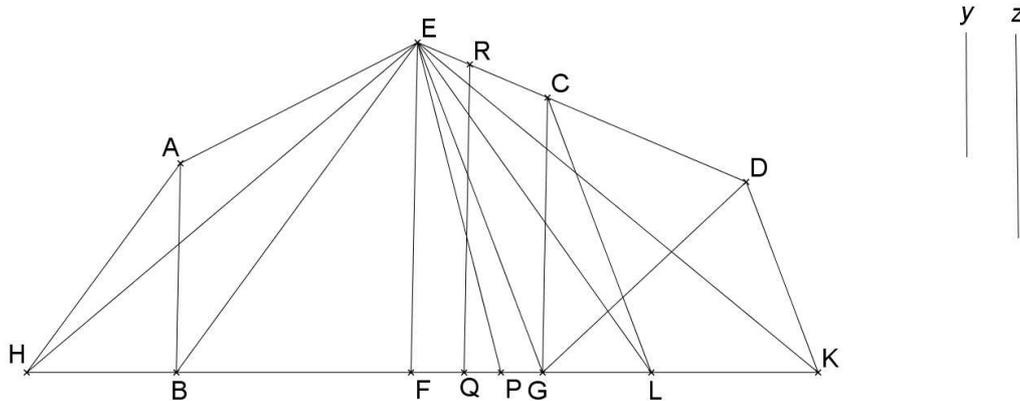
$$\frac{ABNO}{ONGDE} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

d. Le point  $P$  tel que  $\frac{HP}{PK} = \frac{y}{z}$  est entre  $F$  et  $L$ .

$EFL = EFGC$  et  $EFP < EFL$ , donc  $EFP < EFGC$ .

Construisons sur  $EF$  la surface  $EFQR$  telle que  $EF$  et  $QR$  soient parallèles et  $EFQR = EFP$ .

(Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $QR$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$[EHB = EAB, I ; 37 \text{ et } EFP = EFQR, \text{ par construction}]$

$[EHB + EBF + EFP = EAB + EBF + EFQR]$

$EHP = ABQRE$

$ABGDE = EHK$  [Lemme 1]

$[ABGDE - ABQRE = EHK - EHP]$

$RQGD = EPK$  <\*\*\*\*\*>

$$\frac{ABQRE}{RQGD} = \frac{EHP}{EPK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{EHP}{EPK} = \frac{HP}{PK} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABQRE}{RQGD} = \frac{HP}{PK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HP}{PK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

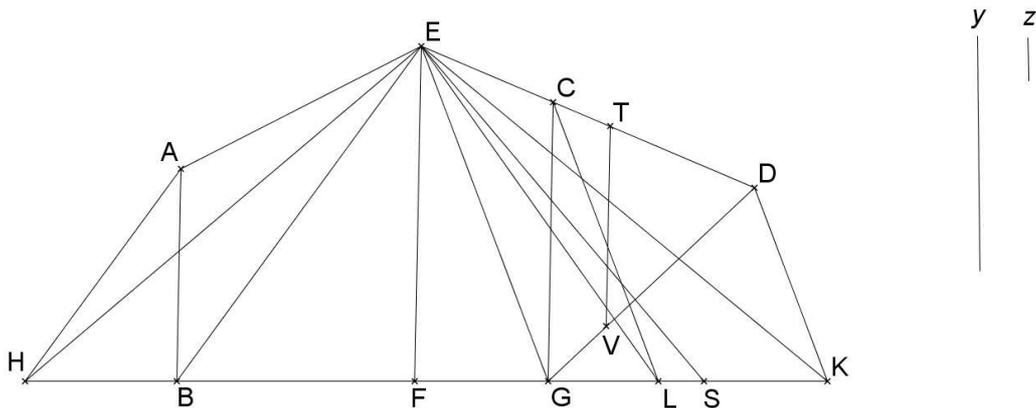
$$\frac{ABQRE}{RQGD} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

e. Le point  $S$  tel que  $\frac{HS}{SK} = \frac{y}{z}$  est entre  $L$  et  $K$ .

$ECG = ELG$  et  $EDG = EKG$ , donc  $ECG - EDG = ELG - EKG$ , soit  $CDG = EKL$

$EKS < EKL$  donc  $EKS < CDG$

Coupons de  $CDG$  un triangle  $TDV$  par la ligne  $TV$  parallèle à  $CG$  tel que  $TDV$  et  $CDG$  soient semblables,  $EKS = TDV$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $TV$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$ABGDE = EHK$  [Lemme 1]

$TDV = EKS$

$ABGDE - TDV = EHK - EKS$ , soit  $ABGVTE = EHS$

$$\frac{ABGVTE}{TDV} = \frac{EHS}{EKS} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

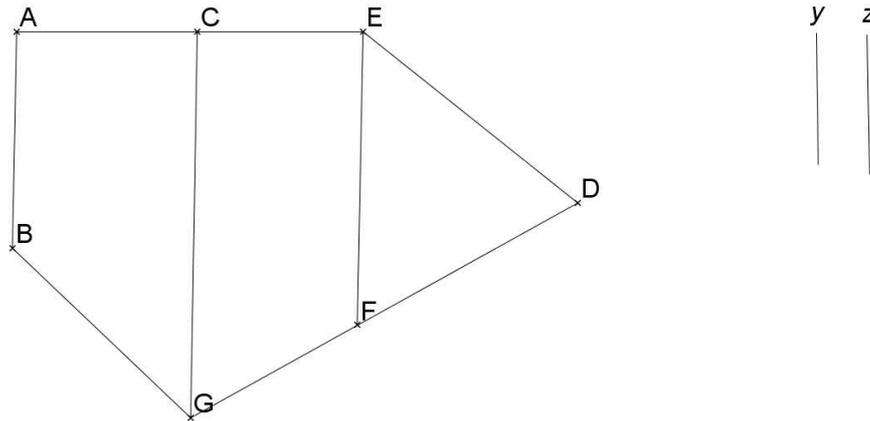
$$\left[ \frac{EHS}{EKS} = \frac{HS}{SK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABGVTE}{TDV} = \frac{HS}{SK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HS}{SK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABGVTE}{TDV} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 2<sup>ème</sup> cas : les deux droites  $CG$  et  $EF$  sont telles que  $F$  est sur  $GD$  et  $C$  sur  $AE$



Nous raisonnerons alors sur le côté  $AE$  comme ce que nous avons fait par rapport au côté  $BG$ .

- 3<sup>ème</sup> cas : Les deux parallèles coupent le même côté  $BG$ .

Traçons la parallèle à  $EG$  passant par  $A$  ; elle coupe  $BG$  en  $H$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

Traçons la parallèle à  $EF$  passant par  $D$  ; elle coupe  $BG$  en  $K$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

Traçons la parallèle à  $EC$  passant par  $E$  ; elle coupe  $BG$  en  $L$ . [Elem. H. I.31 ; Elem. H. I.17]

<Lemme 2>

$EHK = ABGDE$  (Lemme 1)

$[EHB = EAB \text{ et } CLE = CDE]$  [Elem. H. I.37]

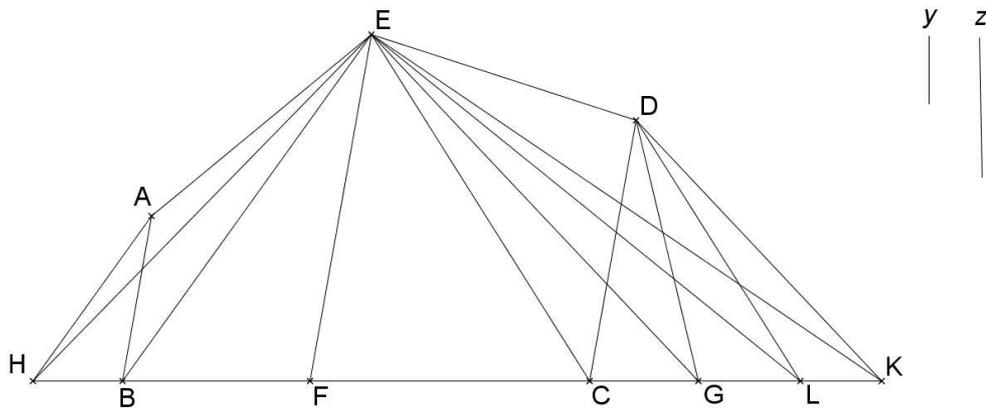
$[EHB + EBC + CLE = EAB + EBC + CDE]$

$EHL = ABCDE$

$ABGDE - ABCDE = AHK - AHL$ , soit  $DGC = ELK$  ■

Divisons  $HK$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ . [Elem. H. VI.10]

a.  $F$  est tel que  $\frac{HF}{FK} = \frac{y}{z}$ .



Montrons que  $EF$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$ABFE = EHF \text{ [*]}$$

$$EFGD = EFK \text{ [**]}$$

$$\frac{ABFE}{EFGD} = \frac{EHF}{EFK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

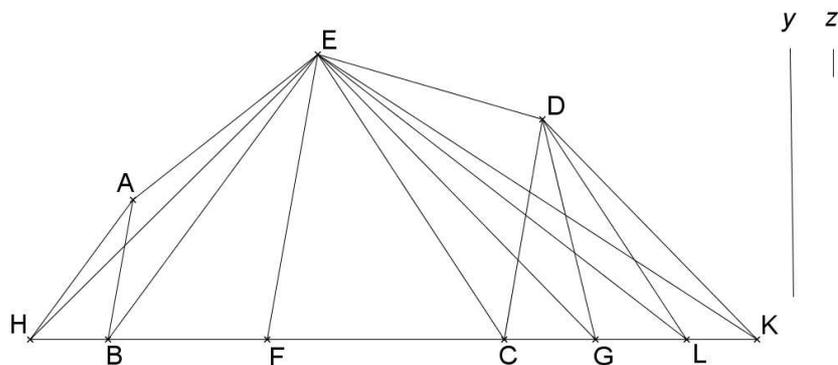
$$\left[ \frac{EHF}{EFK} = \frac{HF}{FK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{EBFE}{EFGD} = \frac{HF}{FK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

$$\left[ \frac{HF}{FK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{EBFE}{EFGD} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**b.  $L$  est tel que  $\frac{HL}{LK} = \frac{y}{z}$ .**



Montrons que  $EL$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$ECD = ECL \text{ [Elem. H. I.37]}$$

$$[EAB = EHB, I ; 37 \text{ donc } EAB + EBC = EHB + EBC]$$

$$ABCE = EHC$$

$$[ABCE + ECD = EHC + ECL]$$

$$ABCDE = EHL$$

$$DCG = ELK \text{ [Lemme 2]}$$

$$\frac{ABCD}{DCG} = \frac{EHL}{ELK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{EHL}{ELK} = \frac{HL}{LK} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\frac{ABCD}{DCG} = \frac{HL}{LK} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

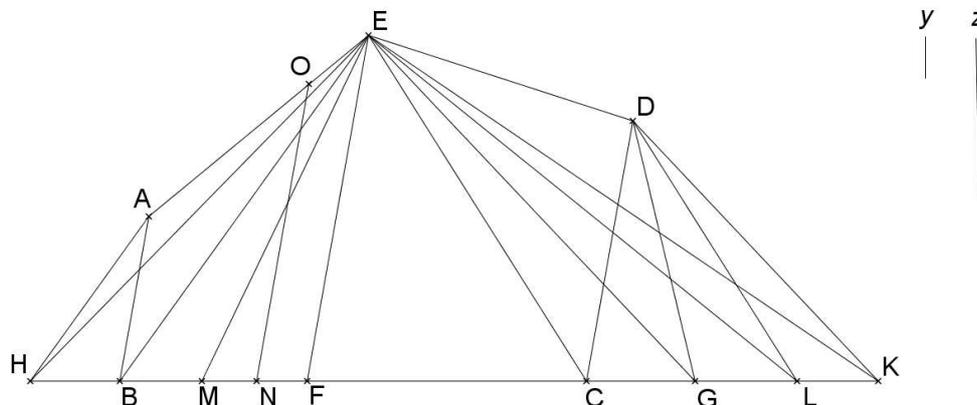
$$\left[ \frac{HL}{LK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABCD}{DCG} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**c. Le point  $M$  tel que  $\frac{HM}{MK} = \frac{y}{z}$  est entre  $H$  et  $F$ .**

Construisons sur  $AB$  la surface  $ABNO$  telle que  $AB$  et  $NO$  soient parallèles et  $ABNO = EHM$ .

(Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $ON$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$$\frac{ABNO}{ONGDE} = \frac{EHM}{EMK} \text{ (****)}$$

$$\left[ \frac{EHM}{EMK} = \frac{HM}{MK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

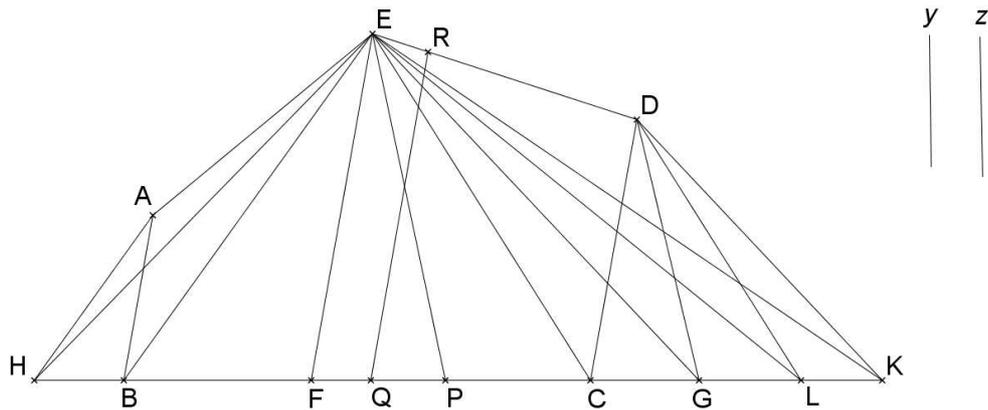
$$\left[ \frac{HM}{MK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABNO}{ONGDE} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

**d. Le point  $P$  tel que  $\frac{HP}{PK} = \frac{y}{z}$  est entre  $F$  et  $L$ .**

Construisons sur  $EF$  la surface  $EFQR$  telle que  $EF$  et  $QR$  soient parallèles et  $EFQR = EFP$ .

(Baghdādī, Prop.10)



Montrons que  $RQ$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

[ $ABFE = EHF$ , \* et  $EFQR = EFP$ , soit  $ABFE + EFQR = EHF + EFP$ ]

$$ABQRE = EHP$$

$$[RQGD = EPK] \text{ [*****]}$$

$$\frac{ABQRE}{RQGD} = \frac{EHP}{EPK} \text{ [Elem. H. V.7 ; Elem. H. V.11]}$$

$$\frac{EHP}{EPK} = \frac{HP}{PK} \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

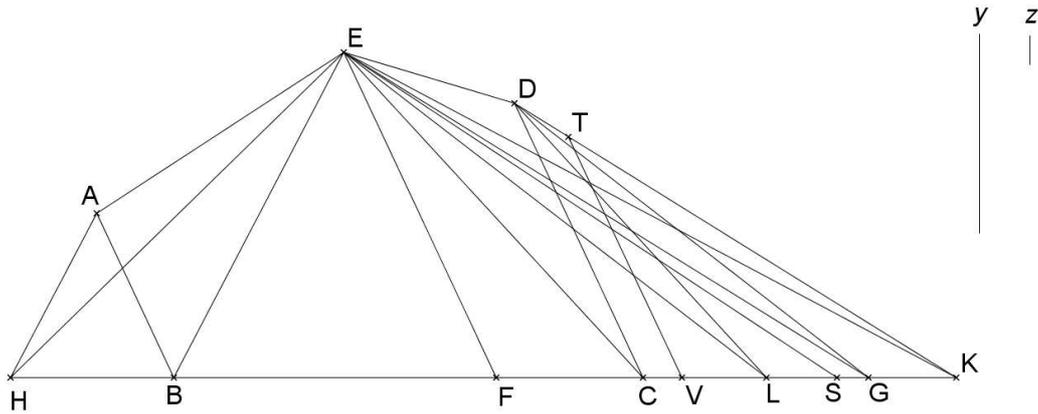
$$\left[ \frac{HP}{PK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABQRE}{RQGD} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

e. Le point  $S$  tel que  $\frac{HS}{SK} = \frac{y}{z}$  est entre  $L$  et  $K$ .

$DCG = ELK$  (Lemme 2) et  $ESK < DCG$  donc  $ESK < ELK$ .

Coupons de  $CDG$  un triangle  $TVG$  par la ligne  $TV$  parallèle à  $DG$  tel que  $TVG$  et  $CDG$  soient semblables,  $EKS = TVG$ . (Baghdādī, Prop.3)



Montrons que  $TV$  divise  $ABGDE$  selon le rapport  $\frac{y}{z}$ .

$TVG = ESK$  [par hypothèse]

$ABGDE = EHK$  [Lemme 1]

$[ABGDE - TVG = EHK - EKS]$

$ABVTDE = EHS$

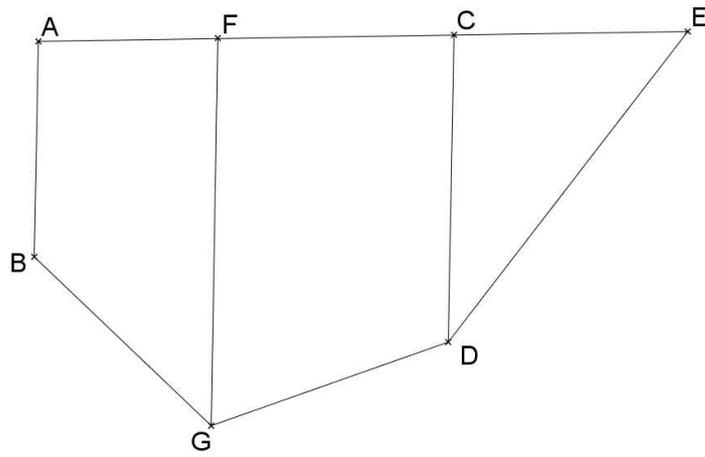
$$\frac{ABVTDE}{TVG} = \frac{EHS}{ESK}$$

$$\left[ \frac{EHS}{ESK} = \frac{HS}{SK} \right] \text{ [Elem. H. VI.1]}$$

$$\left[ \frac{HS}{SK} = \frac{y}{z} \right] \text{ [par hypothèse]}$$

$$\frac{ABVTDE}{TVG} = \frac{y}{z} \text{ [Elem. H. V.11]}$$

- 4<sup>ème</sup> cas : Les deux parallèles coupent le même côté  $AE$ .



Nous raisonnerons sur le côté  $AE$  comme ce que nous avons fait pour le côté  $BG$ .

# The practical geometry in Europe linked with the Arabian tradition, the example of the measurement and the division of figures : Contribution to the study of medieval mathematics.

## **Abstract :**

The object of our work is the critical edition, the French translation and the mathematical analysis of the *Liber mensurationum* of Abu Bakr, of the *Liber Saydi Abuothmi*, of the *Liber Aderameti* and of the *De superficierum divisionibus liber* of Muḥammad al-Baghdādī. These four texts of the Arabian tradition are about two chapters of practical geometry : the measurement and the division of figures. The measurement has for object the determination of unknown quantities (lengths, areas, volumes) from quantities data. The division of figures consists in dividing a geometric figure in several parts according to properties and constraints fixed *a priori*.

Our work takes in account some previous mathematical traditions – mesopotamian one, Greek and Latin of the late Antiquity - describing their activities of measurement and division of figures. We complete this description with a presentation of the practices of the muslim Orient and Occident. Thus, we put in evidence some characteristic elements of the practices of the Muslim west. These would suggest the existence of a tradition of the measurement and the division of figures to this region.

Finally, the corpus that we present is a vector of the diffusion of the practices of geometry of the Arabian tradition in the Latin world. Indeed, the four texts are arabo-Latin translations that seem have been achieved in *Andalus* around the 12th century. Their analyses allow us to study an aspect of the appropriation of the Arabian science by the Latin.

## **Keywords :**

Mathematics, practical geometry, measurement, division of figures, Muslim West, *Andalus*, Latin Middle-Ages, translations, *misāḥa*, *Practica geometriae*.

L'objet de notre travail est l'édition critique, la traduction française et l'analyse mathématique du *Liber mensurationum* d'Abū Bakr, du *Liber Saydi Abuothmi*, du *Liber Aderameti* et du *De superficierum divisionibus liber* de Muḥammad al-Baghdādī. Ces quatre textes de la tradition arabe traitent de deux chapitres de géométrie pratique : le mesurage et le découpage. Le mesurage a pour objet la détermination de grandeurs inconnues (longueurs, aires, volumes) à partir de grandeurs données. Le découpage consiste à diviser une figure géométrique en plusieurs parties selon des propriétés et des contraintes fixées *a priori*.

Notre travail prend en compte certaines traditions mathématiques antérieures – mésopotamienne, grecque, latine de l'Antiquité tardive – en décrivant leurs activités de mesurage et de découpage. Nous complétons cette description avec une présentation des pratiques de l'Orient et de l'Occident musulmans. Ainsi, nous mettons en évidence certains éléments caractéristiques des pratiques de l'Occident musulman. Ceux-ci suggèreraient l'existence d'une tradition du mesurage et du découpage propre à cette région.

Enfin, le corpus que nous présentons est un vecteur de la diffusion des pratiques de géométrie de la tradition arabe au monde latin. En effet, les quatre textes sont des traductions arabo-latines qui semblent avoir été réalisées en *Andalus* aux alentours du 12<sup>e</sup> siècle. À ce titre, leurs analyses nous permettent d'étudier un aspect de l'appropriation de la science arabe par les Latins.

**Mots-Clés :**

Mathématiques, géométrie pratique, mesurage, découpage, Occident musulman, Andalus, moyen-âge latin, traductions, *misāḥa*, *Practica geometriae*.