



**HAL**  
open science

# Systemes à mémoire longue : de l'analyse et la synthèse basées sur des modèles entrée-sortie d'ordre non entier à l'étude du comportement interne

Christophe Farges

## ► To cite this version:

Christophe Farges. Systemes à mémoire longue : de l'analyse et la synthèse basées sur des modèles entrée-sortie d'ordre non entier à l'étude du comportement interne. Automatique. Université de Bordeaux, 2017. tel-02884762

**HAL Id: tel-02884762**

**<https://hal.science/tel-02884762>**

Submitted on 30 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX  
École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

## Christophe Farges

---

**SYSTÈMES À MÉMOIRE LONGUE :  
DE L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE BASÉES SUR DES  
MODÈLES ENTRÉE-SORTIE D'ORDRE NON ENTIER  
À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT INTERNE**

---

Soutenue le 30 novembre 2017

Après avis de

O. BACHELIER	Professeur à l'Université de Poitiers, LIAS-ENSIP – Poitiers	<i>Rapporteur</i>
G. GARCIA	Professeur à l'INSA, LAAS-CNRS – Toulouse	<i>Rapporteur</i>
M. ZASADZINSKI	Professeur à l'Université de Lorraine, CRAN – Nancy	<i>Rapporteur</i>

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de

J. SABATIER	Professeur à l'Université de Bordeaux, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	<i>Directeur</i>
D. MATIGNON	Professeur à l'ISAE-SUPAERO, ISAE-SUPAERO – Toulouse	<i>Président</i>
C. DEJOURS	Professeur à Bordeaux INP, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	<i>Examinatrice</i>
Y. DEVAL	Professeur à Bordeaux INP, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	<i>Examineur</i>
P. MELCHIOR	Maître de conférences à Bordeaux INP, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	<i>Examineur</i>
X. MOREAU	Professeur à l'Université de Bordeaux, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	<i>Membre invité</i>



# Table des matières

<b>Avant Propos</b>	<b>1</b>
<b>I Informations générales</b>	<b>3</b>
<b>1 Curriculum Vitæ</b>	<b>5</b>
1.1 Notice individuelle . . . . .	6
1.2 Formation et diplômes . . . . .	7
1.3 Fonctions . . . . .	8
1.4 Résumé succinct des activités d'enseignement . . . . .	8
1.5 Résumé succinct des activités de recherche . . . . .	9
1.6 Encadrement scientifique . . . . .	9
1.7 Responsabilités scientifiques, animations et évaluations . . . . .	10
1.8 Activités contractuelles . . . . .	10
1.9 Production scientifique . . . . .	10
<b>2 Complément au Curriculum Vitæ</b>	<b>11</b>
2.1 Encadrement scientifique . . . . .	12
2.2 Responsabilités scientifiques, animations et évaluations . . . . .	18
2.3 Activités contractuelles . . . . .	20
2.4 Production scientifique . . . . .	21
<b>3 Activités pédagogiques</b>	<b>29</b>
3.1 Responsabilités pédagogiques à l'IMA/Université de Bordeaux . . . . .	30
3.2 Activités d'enseignement . . . . .	33
3.3 Relations partenariales . . . . .	38

3.4	Implication dans le fonctionnement de l'établissement . . . . .	39
3.5	Innovation pédagogique et perspectives . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Activités de Recherche</b>	<b>45</b>
	<b>Introduction à la deuxième partie</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Dérivation non entière et modèles non entiers entrée-sortie</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	50
4.2	Intégration et dérivation d'ordre non entier . . . . .	51
4.3	Modèles non entiers entrée-sortie . . . . .	55
4.4	Conclusion . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Méthodes d'analyse et de synthèse basées sur des modèles non entiers entrée-sortie</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction . . . . .	72
5.2	Analyse et synthèse basées sur la reformulation d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain . . . . .	73
5.3	Méthodes d'analyse et de synthèse dédiées aux modèles non entiers commensurables	80
5.4	Contributions relatives aux autres classes de modèles non entiers . . . . .	104
5.5	Conclusion et autres contributions . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Perspectives en analyse, commande et diagnostic de modèles entiers et non entiers et sur l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue</b>	<b>113</b>
6.1	Introduction . . . . .	114
6.2	Perspectives en analyse, commande et diagnostic de modèles entiers et non entiers	114
6.3	Perspectives sur l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue	122
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>137</b>

# Avant Propos

Le présent mémoire constitue en premier lieu une synthèse des activités d'enseignement et de recherche que je mène depuis maintenant dix ans en tant que Maître de Conférences au sein de l'Université de Bordeaux. Au-delà de ce bilan, j'ai également souhaité mettre l'accent sur les activités que je souhaite mener dans les années à venir. Certaines sont dans la prolongation de mes travaux actuels. D'autres sont de nature plus prospective.

Ce mémoire est organisé en deux parties. La première constitue un document de synthèse de l'ensemble de mes activités universitaires. Dans les chapitres 1 et 2 sont retracés mon état civil, mon parcours de formation, mes encadrements, mes responsabilités scientifiques, mes activités contractuelles et mes publications. Le chapitre 3 est consacré à la présentation de mes activités pédagogiques en tant qu'enseignant et responsable de formation. Il décrit également mon implication dans le fonctionnement de l'établissement ainsi que les thèmes que je souhaite plus particulièrement développer dans les prochaines années.

La seconde partie du mémoire est dédiée à la description de mes activités de recherche. Dans le chapitre 4 sont décrites les notions, nécessaires à la compréhension des parties suivantes, liées aux opérateurs de dérivation et d'intégration non entière et à leur utilisation en tant qu'outil de modélisation. Le chapitre 5 présente une synthèse de mes principales contributions pour l'analyse, la commande et le diagnostic basés sur les modèles non entiers. Enfin, le chapitre 6 est consacré à la présentation de différentes thématiques de recherche que je souhaite développer à l'avenir.



Première partie

Informations générales



# Chapitre 1

## Curriculum Vitæ

---

<b>1.1</b>	<b>Notice individuelle . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Formation et diplômes . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Fonctions . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.4</b>	<b>Résumé succinct des activités d'enseignement . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.5</b>	<b>Résumé succinct des activités de recherche . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.6</b>	<b>Encadrement scientifique . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.7</b>	<b>Responsabilités scientifiques, animations et évaluations . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.8</b>	<b>Activités contractuelles . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1.9</b>	<b>Production scientifique . . . . .</b>	<b>10</b>

---

## 1.1 Notice individuelle

<i>NOM et Prénom</i>	<b>FARGES Christophe</b>
<i>Date et lieu de naissance</i>	14 avril 1980 à Toulouse
<i>Coordonnées</i>	06 08 80 90 67 – <a href="mailto:christophe.farges@ims-bordeaux.fr">christophe.farges@ims-bordeaux.fr</a>
<i>Etablissement d'affectation</i>	<b>Université de Bordeaux</b>
<i>Unité de formation</i>	Sciences de l'ingénieur
<i>Adresse</i>	351 cours de la Libération, bâtiment A1, 33405 Talence cedex
<i>Contact</i>	Christophe Aristégui, directeur UF sciences de l'ingénieur
<i>Coordonnées</i>	05 40 00 62 17 – <a href="mailto:ufsdi@u-bordeaux.fr">ufsdi@u-bordeaux.fr</a>
<i>Unité de Recherche</i>	<b>IMS UMR 5218 CNRS</b> (Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système), Pôle du système au système de systèmes, groupe Automatique, équipe CRONE
<i>Adresse</i>	351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex
<i>Contact</i>	Xavier Moreau, responsable du Groupe Automatique
<i>Coordonnées</i>	05 40 00 24 17 – <a href="mailto:xavier.moreau@ims-bordeaux.fr">xavier.moreau@ims-bordeaux.fr</a>
<i>Section CNU</i>	61e
<i>Grade</i>	MdC, classe normale
<i>Nomination</i>	au 1er septembre 2007
<i>Echelon</i>	6e, depuis le 01/03/2017
<i>Primes</i>	Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (PEDR) du 01/10/2015 au 01/10/2019
<i>Scopus h-index</i>	12
<i>Responsabilité pédagogique</i>	Responsable Licence Ingénierie et Maintenance des Systèmes pour l'Aéronautique et les Transports (130 étudiants)

## 1.2 Formation et diplômes

### 2006 – Doctorat de l'Université Paul Sabatier Toulouse III en Automatique

<i>Titre</i>	Méthodes d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques
<i>Laboratoire</i>	Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes LAAS-CNRS – 7, avenue du Colonel Roche, 31031, Toulouse
<i>Financement</i>	Allocataire de recherche MENRT
<i>Dates et durée</i>	du 1er Octobre 2003 au 6 décembre 2006 – 3 ans et 2 mois
<i>Directeurs de thèse</i>	Denis Arzelier, directeur de recherche, LAAS-CNRS Dimitri Peaucelle, directeur de recherche, LAAS-CNRS
<i>Rapporteurs</i>	Patrizio Colaneri, Professeur, Politecnico di Milano, Italie Gilles Duc, Professeur, SUPELEC, Paris
<i>Examineurs</i>	Régis Bertrand, Ingénieur de recherche, CNES, Toulouse Jamal Daafouz, Professeur, INP de Lorraine, Nancy
<i>Membre invité</i>	Alain Théron, Professeur agrégé, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

**Résumé** – La thèse porte sur la commande robuste des systèmes linéaires périodiques qui constituent une classe particulière de systèmes linéaires variant dans le temps et qui apparaissent dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur tels que l'aéronautique, l'espace ou les systèmes de télécommunication. Des méthodes systématique pour l'analyse et la synthèse robustes de ces systèmes sont développées sur la base de la théorie de Lyapunov et sont formulées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMI). La robustesse est prise en compte sous la forme d'incertitudes pouvant non seulement affecter le système à commander mais également le correcteur lui-même. Ce dernier problème est traité par la synthèse d'ensembles convexes de correcteurs assurant un niveau de performances garanties vis-à-vis du système bouclé (performances mesurées à l'aide des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ ). Les résultats théoriques sont illustrés sur le problème du maintien à poste autonome d'un satellite en orbite basse consistant à maintenir un satellite sur une orbite de référence excentrique malgré les différentes forces perturbatrices pouvant l'en écarter.

### 2003 – DEA de l'Université Paul Sabatier Toulouse III en Automatique

<i>Titre</i>	Synthèse de correcteurs par retour de sortie statique
<i>Laboratoire</i>	Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes
<i>Encadrants</i>	Denis Arzelier et Dimitri Peaucelle
<i>Mention</i>	Bien

### 2002 – Maîtrise EEA de l'Université Paul Sabatier

### 2001 – Licence EEA de l'Université Paul Sabatier

### 2000 – DEUG sciences de la matière de l'Université Paul Sabatier

### 1998 – Baccalauréat série S au Lycée Saint-Sernin de Toulouse

### 1.3 Fonctions

- Depuis 2007* Maître de Conférences à l’Université de Bordeaux, Laboratoire de l’Intégration du Matériau au Système (IMS) UMR 5218 CNRS.
- 2006 – 2007* Attaché Temporaire d’Enseignement et de Recherche (ATER), INSA de Toulouse, LAAS-CNRS.
- 2003 – 2006* Enseignant vacataire à l’Université Paul Sabatier et à l’INSA de Toulouse.

### 1.4 Résumé succinct des activités d’enseignement (détails au chapitre 3 p.29)

Mes activités d’enseignement relèvent principalement de l’Automatique. Elles sont principalement dispensées en Licence et Master du Cursus Master en Ingénierie et Maintenance des Systèmes pour l’Aéronautique et les Transports (CMI IMSAT) à l’IMA/Univesité de Bordeaux sur le site de Mérignac ainsi qu’en Master 2 Automatique et Mécatronique, Automobile, Aéronautique & Spatial (AM2AS).

Le tableau 1.1 présente une synthèse des enseignements que j’ai dispensés depuis mon arrivée à l’Université de Bordeaux en 2007.

Enseignement	Filière	C	TD	TP	Période
Bureau d’études <i>bille sur rail</i>	M1 AM2AS			×	2007
Mise à niveau MATLAB	M1 AM2AS			×	2007-2010
Bases de données	M1 IMSAT			×	depuis 2007
Commande multivariable avancée ( $\mathcal{H}_\infty$ )	M2 IMSAT		×	×	2007–2016
		×			2015–2016
Maintien à poste de satellites	M2 AM2AS			×	2007-2011
	M2 IMSAT			×	depuis 2008
Initiation à la mécanique spatiale	L2 SPI	×		×	2008-2010
Bases d’Automatique	L3 IMSAT			×	depuis 2008
Commande numérique	M1 IMSAT	×	×	×	depuis 2010
Détection et localisation de défauts	M2 IMSAT	×	×	×	depuis 2010
Représentation d’état	M1 IMSAT			×	depuis 2012
Asservissement du turboréacteur DGEN 380	L2 IMSAT			×	depuis 2014

TABLE 1.1 – Synthèse de mes activités d’enseignement

À ces cours s’ajoutent l’encadrement de différents projets portant notamment sur l’asservissement de différents systèmes tels que des réservoirs d’eau, une maquette d’hélicoptère ou des drones. Je participe également chaque année au suivi des stagiaires de la filiaire IMSAT.

## 1.5 Résumé succinct des activités de recherche

(détails en 2e partie du mémoire p.47)

Mes activités de recherche concernent le développement de méthodes d'analyse et de synthèse pour les modèles faisant intervenir la dérivation non entière. De tels modèles permettent de rendre compte finement et avec peu de paramètres du comportement dynamique de différents phénomènes physiques : transferts thermiques, vibrations des matériaux viscoélastiques, charge et décharge des batteries électriques et des supercapacités.

Pour cette classe de modèles, je me suis intéressé d'un point de vue fondamental et méthodologique :

- à l'analyse de stabilité et à la stabilisation par retour d'état ;
- au calcul des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  ;
- à l'approximation par des modèles entiers incertains ;
- à la détection de défauts.

Par ailleurs, la thèse que j'ai récemment co-encadrée en partenariat avec le groupe PSA m'a amené à travailler sur des aspects applicatifs liés au dimensionnement et à la surveillance thermique des câblages dans l'automobile.

## 1.6 Encadrement scientifique

(détails au paragraphe 2.1 p.12)

### 3 thèses soutenues avec un taux d'encadrement cumulé de 170%

1. Asma Aribi, *Contributions au diagnostic des systèmes à modèles d'ordres non entiers* soutenue le 18/12/2013 – co-direction M.N. Abdelkrim (30%) et **C. Farges 70%** ;
2. Lamine Fadiga, *Commande  $\mathcal{H}_\infty$  à base de modèles non entiers* soutenue le 12/06/2014 – co-direction J. Sabatier (50%) et **C. Farges 50%** ;
3. Mathieu Chevré, *Modélisation électrothermique de composants électriques et électroniques automobiles et estimation des résistances de contact dans les connecteurs* soutenue le 19/07/2016 – co-direction J. Sabatier (50%) et **C. Farges 50%**.

### 6 Masters 2 Recherche

1. Fatah Makhbouche (2010) ;
2. Asma Aribi (2010) ;
3. Nacer Eddine Chelbi (2014) ;
4. Omar Hosni (2014) ;
5. Nouma Abdelmoumen (2015) ;
6. Gemma Prieto Aguilar (2017).

## 1.7 Responsabilités scientifiques, animations et évaluations

(détails au paragraphe 2.2 p.18)

- Membre du comité d'édition (editorial board) de la revue *Fractional Calculus & Applied Analysis* (FCAA), depuis 2014 ;
- Membre du comité de programme de la conférence ICINCO en 2015, 2016 et 2017 ;
- Membre du comité de programme de la conférence ICAS en 2016 ;
- Organisation de 2 sessions invitées pour l'European Control Conference 2013 ;
- Chair ou co-chair à 2 reprises dans des conférences internationales ;
- Evalueur de 43 articles de revue et de 49 communications ;
- Membre de 2 comités de sélection de Maîtres de Conférences (en 2011 et 2012) ;
- Membre de 2 comités de sélection d'ATER (en 2011 et 2013) ;
- Expert dans le cadre de 3 Validations des Acquis de l'Expérience.

## 1.8 Activités contractuelles

(détails au paragraphe 2.3 p.20)

- Participation en tant que chercheur dans le projet ANR *Model Identification and Control of a Convertible Aircraft* (depuis 2016) ;
- Participation en tant que chercheur dans le contrat industriel *Synthèse et implantation de lois de protection pour éviter les surintensités et les surchauffes dans les conducteurs électriques automobiles : approche à base de modèles non entiers* avec la société Peugeot Citroën Automobiles (PSA), Vélizy (de 2012 à 2015) ;
- Participation en tant que chercheur dans le projet *Stratégies Innovantes et Robustes pour l'Autonomie des Systèmes Aéronautiques et Spatiaux* agréé par le pôle de compétitivité AESE (en 2007).

## 1.9 Production scientifique

(détails au paragraphe 2.4 p.21)

L'ensemble de mes travaux de recherche a donné lieu à :

- 19 articles dans des revues internationales ;
- 2 chapitres dans des ouvrages de synthèse ;
- 30 communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture dont 1 relevant de l'enseignement ;
- 2 brevets.

## Chapitre 2

# Complément au Curriculum Vitæ

---

<b>2.1</b>	<b>Encadrement scientifique</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1.1	Articulation des thèses encadrées et en cours d'encadrement dans mon projet de recherche . . . . .	12
2.1.2	Thèses soutenues (3) . . . . .	14
2.1.3	Masters 2 Recherche (6) . . . . .	17
<b>2.2</b>	<b>Responsabilités scientifiques, animations et évaluations</b> . . . . .	<b>18</b>
2.2.1	Membre du comité éditorial de la revue FCAA . . . . .	18
2.2.2	Membre du comité de programme de congrès (2) . . . . .	18
2.2.3	Organisation de sessions dans des conférences internationales (2) . . . . .	18
2.2.4	Chair ou cochair dans des congrès internationaux (2) . . . . .	18
2.2.5	Evaluateur pour des revues (43) et des congrès internationaux (49) . . . . .	19
2.2.6	Membre de comités de recrutement et de VAE . . . . .	19
<b>2.3</b>	<b>Activités contractuelles</b> . . . . .	<b>20</b>
2.3.1	Participation en tant que chercheur dans un projet . . . . .	20
2.3.2	Participation en tant que chercheur dans un contrat industriel . . . . .	20
2.3.3	Participation en tant que chercheur dans un projet . . . . .	20
<b>2.4</b>	<b>Production scientifique</b> . . . . .	<b>21</b>
A	Revue internationale avec comité de lecture (19) . . . . .	21
B	Chapitres dans des ouvrages de synthèse (2) . . . . .	23
C	Communications dans des congrès internationaux (30) . . . . .	23
D	Brevets (2) . . . . .	27

---

## 2.1 Encadrement scientifique

### 2.1.1 Articulation des thèses encadrées et en cours d'encadrement dans mon projet de recherche

Les thèses que j'ai encadrées s'inscrivent dans le cheminement global de mon projet de recherche qui concerne le développement de méthodes d'analyse et de synthèse pour les modèles faisant intervenir des dérivées non entières. De tels modèles permettent de rendre compte finement et avec peu de paramètres du comportement dynamique de différents phénomènes physiques : transferts thermiques, vibrations des matériaux viscoélastiques, charge et décharge des batteries électriques et des supercapacités.

Afin de mieux expliquer mon parcours de recherche, je commence tout d'abord par rappeler mes activités de doctorat. Dans ma thèse qui s'est déroulée de 2003 à 2006 au laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS-CNRS) de Toulouse, j'ai développé des méthodes pour l'analyse et la synthèse robustes des systèmes linéaires périodiques qui constituent une classe particulière de systèmes linéaires variant dans le temps (LTV). Le cadre de travail choisi était celui de la théorie de Lyapunov et faisait appel principalement à des outils numériques de type inégalités matricielles linéaires (LMI), point fort de l'équipe MAC dont je faisais partie. À cette occasion, j'ai notamment développé des formulations LMI pour le calcul des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  de cette classe de modèles ainsi que pour la synthèse de lois de commande robustes par retour d'état et de sortie.

Après mon recrutement en 2007 dans le groupe Automatique du laboratoire IMS, je me suis naturellement intéressé à l'outil de la dérivation non entière et à ses applications en commande et en modélisation qui est un des thèmes majeurs de l'équipe CRONE. À cette époque, Mathieu Moze terminait sa thèse intitulée *Commande CRONE des systèmes Linéaires à Paramètres Variables* encadrée par Alain Oustaloup et Jocelyn Sabatier. Ses travaux avaient notamment conduit à l'obtention de formulations LMI pour l'analyse de stabilité des modèles non entiers commensurables et le calcul de leur norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Du fait de mon expérience en thèse, j'ai naturellement souhaité travailler avec Mathieu Moze et Jocelyn Sabatier sur cette thématique. Ceci nous a notamment conduit à nous intéresser au problème de synthèse LMI de lois de commande stabilisantes par retour de pseudo état.

Nous avons alors souhaité aller plus loin en proposant avec Jocelyn Sabatier un sujet de thèse ministériel sur l'extension de la commande  $\mathcal{H}_\infty$  aux modèles non entiers via des approches LMI. Ayant eu la chance d'obtenir ce financement, la thèse de Lamine Fadiga a démarré en octobre 2010. Elle a permis d'obtenir différentes formulations LMI pour les problèmes de synthèse de lois de commande par retour d'état et de sortie minimisant un critère de performance faisant intervenir la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous avons également abordé ces problèmes sous un angle différent en les reformulant comme des problèmes de synthèse robuste  $\mathcal{H}_\infty$ , le modèle non entier étant alors vu comme une réalisation d'un modèle entier incertain.

En parallèle de ces activités, j'ai également travaillé sur le diagnostic à base de modèles non entiers dans le cadre du co-encadrement de la thèse de Asma Aribi de l'Université de Gabès. Cette thèse a été l'occasion de mettre à profit les notions de diagnostic que j'ai pu acquérir en m'intéressant aux activités de l'équipe ARIA lors de mon arrivée dans le groupe Automatique et mettre en pratique lorsque j'ai repris le cours de détection et location de défauts à l'IMA/Université de Bordeaux. À l'occasion de cette thèse, nous avons pu étendre au cas non entier différentes techniques de diagnostic développées dans le cas entier, notamment l'espace de parité et celles basées sur l'utilisation d'estimateurs.

À la fin de la thèse de Huy Cuong Nguyen qui portait sur la modélisation et la protection de l'architecture automobile, le groupe PSA a proposé de poursuivre son partenariat avec l'équipe CRONE sur cette thématique. J'ai ainsi eu l'opportunité de participer à l'encadrement de la thèse de Mathieu Chevrié à partir de décembre 2012 et de travailler sur un sujet plus applicatif que ceux que j'avais abordés jusqu'ici. Il s'agissait notamment de détecter une variation anormale de la résistance de contact dans les connecteurs électriques, cette-dernière pouvant engendrer des échauffements critiques. Deux approches ont été développées :

- la première, appliquée à un connecteur de boîtier électronique automobile, reposait sur un diagnostic à base de modèle et m'a permis de mettre à profit sur une application concrète l'expérience acquise pendant la thèse d'Asma Aribi ;
- la seconde, appliquée à un connecteur de recharge de véhicule électrique, consistait à estimer un flux de chaleur lié à l'effet Joule provoqué par la résistance de contact.

Dans le cadre de l'établissement de ces modèles, des techniques d'optimisation du maillage d'un fil électrique basées sur l'utilisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  ont été proposées. De nouveaux développements théoriques ont été ainsi réalisés afin de calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  de fonctions de transfert non entières de forme particulière. J'ai ainsi eu l'occasion de travailler à nouveau sur cette norme rencontrée pendant ma thèse et de travailler avec Rachid Malti qui avait fourni les premiers résultats sur cette thématique.

Les travaux réalisés pendant ces thèses ont ainsi conduit au développement de nouvelles méthodes d'analyse, de commande et de diagnostic pour les systèmes décrits par des modèles non entiers.

Ils m'ont par ailleurs permis de mieux comprendre la nature de cette classe de modèles et m'ont conduit à un certain nombre de questionnements à l'origine d'une partie de mon projet de recherche pour les années à venir, projet détaillé plus loin dans ce manuscrit.

### 2.1.2 Thèses soutenues (3), taux d'encadrement cumulé 170%

Les références bibliographiques citées ici sont listées au paragraphe 2.4 pp.21-27.

#### 2.1.2.1 Thèse d'Asma Aribi, taux d'encadrement 70%

<i>Doctorat de</i>	l'Université de Gabès, Tunisie, spécialité Automatique
<i>Titre</i>	Contributions au diagnostic des systèmes à modèles d'ordres non entiers
<i>Laboratoires</i>	Unité MACS de l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, Tunisie Intégration du Matériau au Système, Bordeaux
<i>Financement</i>	Assistante à l'ENIG, Tunisie
<i>Dates et durée</i>	du 1er octobre 2010 au 18 décembre 2013 soit 3 ans et 3 mois
<i>Directeur</i>	Mohamed Naceur Abderhim, professeur, ENIG, Tunisie (30%)
<i>Co-encadrant</i>	Christophe Farges, maître de conférences, IMS, Bordeaux (70%)
<i>Rapporteurs</i>	Kamel Abderrahim, ENIG, Tunisie Nabil Derbel, École National d'Ingénieurs de Sfax, Tunisie
<i>Président</i>	Ahmed Saïd Nouri, ENIG, Tunisie
<i>Examineurs</i>	Mohamed Aoun, ENIG, Tunisie Pierre Melchior, IMS, Bordeaux

**Contexte** – Pendant sa thèse, Asma Aribi a occupé un poste d'Assistante à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès et devait à ce titre assumer la charge annuelle d'enseignement afférente à ce poste. Elle s'est déplacée à raison de 4 mois par an à l'Université de Bordeaux pour travailler sur sa thèse.

**Résumé** – Le thème général de cette thèse concerne le développement d'algorithmes de détection et de localisation de pannes basés sur des modèles non entiers. Deux approches sont principalement proposées : la première passe par la généralisation de la méthode de l'espace de parité dynamique aux modèles non entiers ; la seconde fait intervenir la synthèse de différents estimateurs (de pseudo-état et à entrées inconnues). L'efficacité des approches a été confirmée par des expérimentations sur une carte électronique pouvant présenter des défauts capteurs ainsi que sur un banc d'essai permettant d'étudier la diffusion de chaleur dans des barres d'aluminium et pouvant présenter des défauts capteurs (mesures de températures) et actionneurs (résistance chauffante).

**Publications associées** – Revue *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* [A-8] et actes des conférences SSD et FDA [C2-12, C2-8].

**Devenir de l'étudiante** – Depuis sa soutenance, Asma Aribi occupe un poste d'assistante permanente d'enseignement à l'ENIG. Elle candidate en 2017 pour un poste de Maître Assistant.

### 2.1.2.2 Thèse de Lamine Fadiga, taux d'encadrement 50%

<i>Doctorat de</i>	l'Université de Bordeaux, spé. Automatique, Productique, Signal et Image
<i>Titre</i>	Commande $\mathcal{H}_\infty$ à base de modèles non entiers
<i>Laboratoire</i>	Intégration du Matériau au Système (IMS), Bordeaux
<i>Financement</i>	bourse MENRT
<i>Dates et durée</i>	du 1er octobre 2010 au 12 juin 2014 soit 3 ans et 8 mois
<i>Directeur</i>	Jocelyn Sabatier, professeur, IMS, Bordeaux (50%)
<i>Co-encadrant</i>	Christophe Farges, maître de conférences, IMS, Bordeaux (50%)
<i>Rapporteurs</i>	Germain Garcia, professeur, INSA, Toulouse Michel Zasadzinski, professeur, Université de Lorraine, Nancy
<i>Président</i>	Luc Dugard, directeur de recherche, GIPSA-Lab, Grenoble
<i>Examineurs</i>	Mohamed M'Saad, professeur, ENSICAEN, Caen Alain Oustaloup, professeur, IMS, Bordeaux

**Contexte** – Cette thèse s'est déroulée dans le cadre d'un financement ministériel et Lamine Fadiga a occupé un poste de moniteur de septembre 2011 à octobre 2013.

**Résumé** – Les études menées dans ces travaux de thèse permettent d'étendre la méthodologie de commande  $\mathcal{H}_\infty$  aux modèles décrits par des équations différentielles faisant intervenir des ordres de dérivation non entiers. Deux approches sont proposées : la première consiste à réécrire le modèle non entier comme un modèle entier incertain afin de pouvoir réutiliser les méthodes de commande développées pour les modèles entiers ; la seconde approche repose sur le développement de conditions formulées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) spécifiques aux modèles non entiers décrits par leur pseudo représentation d'état. Ces deux approches sont appliquées en simulation à l'isolation vibratoire d'un pont.

**Publications associées** – Revues *Mechatronics* [A-10] et *Journal of Vibration and Control* [A-5] ; chapitre de livre [B-1] et actes des conférences [C2-15, C2-13, C2-11, C2-10].

**Devenir de l'étudiant** – Après sa soutenance, Lamine Fadiga a occupé un poste d'ingénieur de recherche de novembre 2014 à décembre 2015 au laboratoire IMS. Il est depuis janvier 2016 Ingénieur d'étude dans l'entreprise Segula Technologie pour le groupe PSA.

### 2.1.2.3 Thèse de Mathieu Chevrié, taux d'encadrement 50%

<i>Doctorat de</i>	l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Automatique, Productique, Signal et Image
<i>Titre</i>	Modélisation électrothermique de composants électriques et électroniques automobiles et estimation des résistances de contact dans les connecteurs
<i>Laboratoire</i>	Intégration du Matériau au Système (IMS), Bordeaux
<i>Financement</i>	bourse CIFRE avec PSA Peugeot Citroën
<i>Dates et durée</i>	du 10 décembre 2012 au 19 juillet 2016 soit 3 ans et 6 mois
<i>Directeur</i>	Jocelyn Sabatier, professeur, IMS, Bordeaux (50%)
<i>Co-encadrant</i>	Christophe Farges, maître de conférences, IMS, Bordeaux (50%)
<i>Co-encadrants industriels</i>	Laetitia Pradere, Ingénieur, Groupe PSA, Paris
<i>industriels</i>	Franck Guillemard, Ingénieur, Groupe PSA, Paris
<i>Rapporteurs</i>	Michel Basset, professeur, Université de Haute Alsace, Mulhouse Philippe Testé, chargé de recherche, Laboratoire de Génie Electrique de Paris
<i>Présidente</i>	Brigitte d'Andréa-Novet, professeur, Mines ParisTech
<i>Examineur</i>	Xavier Moreau, professeur, IMS, Bordeaux

**Résumé** – Dans le cadre d'un partenariat avec le groupe PSA Peugeot Citroën, cette thèse avait pour but de mettre en place de nouveaux outils théoriques et pratiques pour le dimensionnement des câblages et la surveillance thermique des connecteurs dans l'automobile. Deux approches ont principalement été développées : la première, appliquée à un connecteur de boîtier électronique automobile, repose sur un diagnostic à base de modèle afin de détecter les variations anormales de la résistance de contact ; la seconde, appliquée à un connecteur de recharge de véhicule électrique, repose sur l'estimation du flux de chaleur lié à l'effet Joule provoqué par la résistance de contact. Les modèles électrothermiques développés reposent notamment sur l'optimisation du maillage d'un fil électrique et ont conduit à des développements théoriques sur le calcul de la norme  $\mathcal{H}_2$  des modèles non entiers.

**Publications associées** – Revues *Int. Journal of Dynamics and Control* [A-7], *IEEE Trans. on Industrial Electronics* [A-2] et *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* [A-6, A-1] ; actes des conférences [C2-9, C2-5, C2-6, C2-3, C2-2] ; brevets [D-1, D-2].

**Devenir de l'étudiant** – Depuis sa soutenance, Mathieu Chevrié assume une double fonction au sein du laboratoire IMS : post-doctorant et ingénieur résident de l'OpenLab *Electronics and Systems for Automotive* (laboratoire commun entre le groupe PSA et l'IMS).

**2.1.3 Masters 2 Recherche (6), taux d'encadrement cumulé 400%****Stage de Fatah Makhbouche (février à juin 2010) – taux d'encadrement 50%**

<i>Diplôme</i>	Master 2 Recherche EAPS de l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Automatique et mécatronique, automobile, aéronautique et spatial
<i>Titre</i>	Diagnostic à base de modèles non entiers
<i>Encadrement</i>	L. Lavigne, IMS (50%) ; C. Farges, IMS (50%)

**Stage d'Asma Aribi, taux d'encadrement 100%**

<i>Diplôme</i>	Master de l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès (ENIG), Tunisie
<i>Dates</i>	de février à juin 2010
<i>Titre</i>	Diagnostic des systèmes non entiers
<i>Encadrement</i>	C. Farges (100%)

**Stage de Nacer Eddine Chelbi (février à juin 2014) – taux d'encadrement 75%**

<i>Diplôme</i>	Master 2 Recherche EAPS de l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Automatique et mécatronique, automobile, aéronautique et spatial
<i>Titre</i>	Validation de modèles électrothermiques de conducteurs électriques dans une automobile et identification de la résistance d'un point de contact
<i>Encadrement</i>	J. Sabatier, IMS (25%) ; C. Farges (75%)

**Stage d'Omar Osni (février à juin 2014) – taux d'encadrement 75%**

<i>Diplôme</i>	Master 2 Recherche EAPS de l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Automatique et mécatronique, automobile, aéronautique et spatial
<i>Titre</i>	Conception d'un algorithme permettant de calculer les pôles et les zéros d'un modèle non entier non commensurable
<i>Encadrement</i>	J. Sabatier, IMS (25%) ; C. Farges (75%)

**Stage de Nouma Abdelmoumem (mars à août 2015) – taux d'encadrement 75%**

<i>Diplôme</i>	Master 2 Recherche GSAT de l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Avionique et Systèmes Aéroportés
<i>Titre</i>	Amélioration d'un estimateur de température et de la protection contre les échauffements potentiellement dangereux d'un fil électrique
<i>Encadrement</i>	J. Sabatier, IMS (25%) ; C. Farges (75%)

**Stage de Gemma Prieto Aguilar (février à juillet 2017) – taux d'encadrement 25%**

<i>Diplôme</i>	Master 2 IMSAT de l'Université de Bordeaux
<i>Spécialité</i>	Maintenance Aéronautique Avionique
<i>Titre</i>	Control design of a tilt-wing UAV
<i>Encadrement</i>	T. B. Airimitoiaie, IMS (50%) ; L. Lavigne, IMS (25%) ; C. Farges (25%)

## 2.2 Responsabilités scientifiques, animations et évaluations

### 2.2.1 Membre du comité éditorial de la revue FCAA

<i>Titre</i>	Fractional Calculus & Applied Analysis (FCAA)
<i>Éditeur</i>	Walter de Gruyter, Berlin, Allemagne
<i>Impact Factor</i>	2.246 en 2015
<i>Fonction et date</i>	Membre du comité d'édition (editorial board) depuis 2014
<i>Liste des membres</i>	<a href="https://www.degruyter.com/view/j/fca">https://www.degruyter.com/view/j/fca</a>

### 2.2.2 Membre du comité de programme de congrès (2)

#### 2.2.2.1 Congrès ICINCO

<i>Titre</i>	Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics
<i>Fonction</i>	Membre du comité de programme
<i>Dates</i>	2015 à Colmar, FR ; 2016 à Lisbonne, PT ; 2017 à Porto, PT
<i>Liste des membres</i>	<a href="http://www.icinco.org/ProgramCommittee.aspx">http://www.icinco.org/ProgramCommittee.aspx</a>

#### 2.2.2.2 Congrès ICAS

<i>Titre</i>	Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences
<i>Fonction et dates</i>	Membre du comité de programme – 2016 à Daejeon, Corée
<i>Site de la conférence</i>	<a href="http://www.icas2016.com">http://www.icas2016.com</a>

### 2.2.3 Organisation de sessions dans des conférences internationales (2)

<i>Conférence</i>	European Control Conference (ECC) 2013 à Zurich, Suisse
<i>Sessions</i>	Fractional dynamical systems and signals 1 & 2 1- Fractional differentiation in modeling and systems analysis 2 - Fractional differentiation in automatic control
<i>Site de la conférence</i>	<a href="http://www.ecc2013.ethz.ch">http://www.ecc2013.ethz.ch</a>

### 2.2.4 Chair ou cochair dans des congrès internationaux (2)

#### 2.2.4.1 Congrès ECC 2009

<i>Conférence</i>	European Control Conference (ECC) 2009 à Budapest, Hongrie
<i>Fonction et session</i>	Co-chair de la session LMI's/BMI's/SOS's
<i>Site de la conférence</i>	<a href="http://www.conferences.hu/ecc09">http://www.conferences.hu/ecc09</a>

#### 2.2.4.2 Congrès ACC 2015

<i>Conférence</i>	American Control Conference (ACC) 2015 à Chicago, USA
<i>Fonction et session</i>	Chair de la session Linear Systems I (ACC)
<i>Site de la conférence</i>	<a href="http://acc2014.a2c2.org">http://acc2014.a2c2.org</a>

## 2.2.5 Evalueur pour des revues (43) et des congrès internationaux (49)

### 2.2.5.1 Revues (43)

Automatica 2008; IEEE Trans. on Automatic Control 2008; International Journal of Systems Science 2009; Journal of Inequalities and Applications 2010; Automatica 2010 (2); IEEE Trans. on Education 2010; Asian Journal of Control 2011; Systems & Control Letters 2011; Signal, Image and Video Processing 2011; Journal of the Franklin Institute 2011; European Journal of Control 2011; European Journal of Control 2012; Asian Journal of Control 2012 (2); International Journal of Automation and Computing 2012; International Journal of Systems Science 2012; Automatica 2013 (2); Systems & Control Letters 2013 (2); Kybernetika 2013; IET Control Theory & Applications 2014; IEEE Trans. on Automatic Control 2014 (2); Systems & Control Letters 2014 (2); Mathematical Problems in Engineering 2014; Automatica 2015 (3); Advances in Difference Equations 2015; Journal of the Franklin Institute 2015; Fractional Calculus and Applied Analysis 2015; CALCOLO - A Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation 2015; IEEE Trans. on Automatic Control 2015; IEEE Trans. on Automatic Control 2016 (2); Automatica 2016; ISA Trans. 2016; IEEE Trans. on Automatic Control 2017; IEEE Control Systems Letters 2017; IMA Journal of Mathematical Control and Information 2017.

### 2.2.5.2 Communications dans des congrès (49)

Chinese Control and Decision Conference 2009; European Control Conference 2009; Chinese Control and Decision Conference 2010; Mediterranean Conference on Control and Automation 2010; IFAC World Congress 2010; Conférence Internationale Francophone d'Automatique 2011; IFAC Symposium on Robust Control Design 2012; Chinese Control and Decision Conference 2013; IFAC Fractional Differentiation and Its Applications 2013 (2); IFAC Symposium on System Structure and Control 2013 (2); Mediterranean Conference on Control and Automation 2013; American Control Conference 2013; European Control Conference 2013; Conference on Decision and Control 2013; European Control Conference 2014 (3); IFAC World Congress 2014 (2); Conference on Decision and Control 2014 (2); European Control Conference 2015; American Control Conference 2015; International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2015 (4); Conference on Decision and Control 2015 (3); European Control Conference 2016 (3); American Control Conference 2016; International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2016 (4); Conference on Decision and Control 2016; IFAC World Congress 2017 (4); International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2017 (4).

## 2.2.6 Membre de comités de recrutement et de VAE

J'ai eu le rôle d'expert dans le cadre de trois Validations des Acquis de l'Expérience (VAE) de l'Université de Bordeaux. J'ai également participé aux comités de sélection suivants :

- recrutement de Maîtres de Conférences en 2011 et 2012;
- recrutement d'attaché temporaire d'enseignement et de recherche (ATER) en 2011 et 2013.

## 2.3 Activités contractuelles

### 2.3.1 Participation en tant que chercheur dans un projet

<i>Titre</i>	Stratégies Innovantes et Robustes pour l'Autonomie des Systèmes Aéronautiques et Spatiaux
<i>Type</i>	Projet soutenu par la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique & Espace et agréé par le pôle de compétitivité AESE
<i>Partenaires académiques</i>	IMS, SATIE, LAAS-CNRS, CRAN, LRI, ONERA
<i>Partenaires industriels</i>	CNES, Airbus France, Thales Alenia Space
<i>Responsable</i>	Ali Zolghadri
<i>Dates</i>	de 2007 à 2010
<i>Durée</i>	3 ans
<i>Implication</i>	création d'un simulateur de rendez-vous orbital servant de benchmark pour le projet

### 2.3.2 Participation en tant que chercheur dans un contrat industriel

<i>Titre</i>	Synthèse et implantation de lois de protection pour éviter les surintensités et les surchauffes dans les conducteurs électriques automobiles
<i>Type</i>	Contrat industriel avec le groupe PSA
<i>Responsable</i>	Jocelyn Sabatier
<i>Dates</i>	du 10/12/2012 au 11/12/2015
<i>Durée</i>	3 ans
<i>Montant</i>	63000€ HT
<i>Fonction</i>	chercheur
<i>Publications</i>	a conduit à la publication de deux brevets [D-1, D-2]

### 2.3.3 Participation en tant que chercheur dans un projet

<i>Titre</i>	Model Identification and Control of a Convertible Aircraft
<i>Type et montant</i>	Programme Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs Appel à projets générique 2016 ANR
<i>Montant</i>	37800€
<i>Responsable</i>	Tudor-Bogdan Airimitoiaie
<i>Dates et durée</i>	depuis décembre 2016 – 2 ans
<i>Implication</i>	participation au développement du modèle du drone convertible développement d'algorithmes de diagnostic encadrement de plusieurs stagiaires

## 2.4 Production scientifique

La liste exhaustive de mes publications est donnée ci-après. Les noms indiqués en **mauve** désignent les doctorants que j'ai co-encadrés.

### A Revues internationales avec comité de lecture (19)

**IF** : "Impact Factor", du *Journal of Citation Reports (JCR)*, correspondant à l'année indiquée.

**SNIP** : "Source Normalized Impact per Paper", de *Scopus*, correspondant à l'année indiquée.

Les références [A-18, A-19], correspondant au travail de thèse, sont données par souci d'exhaustivité. Les DOI sont cliquables et permettent d'accéder aux documents en ligne.

- [A-1] **Mathieu CHEVRIÉ**, **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER, Franck GUILLEMARD et Laetitia PRADERE. "H2-norm for mesh optimization with application to electro-thermal modeling of an electric wire in automotive context". In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 45 (avr. 2017), p. 176-189. DOI : [10.1016/j.cnsns.2016.09.018](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.09.018). IF2016 : 2.784, SNIP2016 : 1.574.
- [A-2] **Christophe FARGES**, **Mathieu CHEVRIÉ**, Jocelyn SABATIER, Laetitia PRADERE et Franck GUILLEMARD. "Detection of electric contact resistance variations in automotive connectors". In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 64.12 (déc. 2017), p. 9469-9476. ISSN : 0278-0046. DOI : [10.1109/TIE.2017.2711514](https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2711514). IF2016 : 7.168, SNIP2016 : 3.696.
- [A-3] Jocelyn SABATIER, **Mathieu CHEVRIÉ**, **Christophe FARGES**, Franck GUILLEMARD et Laetitia PRADERE. "Electrical contact resistance estimation with application to electric vehicle charging cable". In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 140 (déc. 2017), p. 041003-1 -041003-7. DOI : [10.1115/1.4037531](https://doi.org/10.1115/1.4037531).
- [A-4] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. "Analysis of fractional models physical consistency". In : *Journal of Vibration and Control* 23.6 (avr. 2017), p. 895-908. DOI : [10.1177/1077546315587177](https://doi.org/10.1177/1077546315587177). IF2016 : 2.101, SNIP2016 : 0.806.
- [A-5] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et **Lamine FADIGA**. "Approximation of a fractional order model by an integer order model : a new approach taking into account approximation error as an uncertainty". In : *Journal of Vibration and Control* 22.8 (mai 2016), p. 2069-2082. DOI : [10.1177/1077546314566665](https://doi.org/10.1177/1077546314566665). IF2016 : 2.101, SNIP2016 : 0.806.
- [A-6] Rachid MALTI, **Mathieu CHEVRIÉ**, **Christophe FARGES** et Jocelyn SABATIER. "H2-norm of fractional transfer functions of implicit type". In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 26 (sept. 2015), p. 223-237. DOI : [10.1016/j.cnsns.2015.02.015](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.02.015). IF2015 : 2.834, SNIP2014 : 1.998.

- [A-7] **Mathieu CHEVRIÉ**, Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Rachid MALTI. “H2-norm computation of a class of implicit fractional transfer functions : Application to approximation by integer order models”. In : *International Journal of Dynamics and Control* (2015). DOI : [10.1007/s40435-015-0156-3](https://doi.org/10.1007/s40435-015-0156-3).
- [A-8] **Asma ARIBI**, **Christophe FARGES**, Mohamed AOUN, Pierre MELCHIOR, Slaheddine NAJAR et Mohamed Naceur ABDELKRIM. “Fault detection based on fractional order models : Application to diagnosis of thermal systems”. In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 9.10 (oct. 2014), p. 3679-3693. DOI : [10.1016/j.cnsns.2014.03.006](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.03.006). IF2014 : 2.866, SNIP2014 : 1.998.
- [A-9] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Jean-Claude TRIGEASSOU. “Fractional systems state space description : some wrong ideas and proposed solutions”. In : *Journal of Vibration and Control* 20.7 (mai 2014), p. 1076-1084. DOI : [10.1177/1077546313481839](https://doi.org/10.1177/1077546313481839). IF2013 : 4.355, SNIP2014 : 0.967.
- [A-10] **Christophe FARGES**, **Lamine FADIGA** et Jocelyn SABATIER. “Hinfinity analysis and control of commensurate fractional order systems”. In : *Mechatronics* 23.7 (2013), p. 772-780. DOI : [10.1016/j.mechatronics.2013.06.005](https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2013.06.005). IF2013 : 1.823, SNIP2014 : 2.824.
- [A-11] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Jean-Claude TRIGEASSOU. “A stability test for non-commensurate fractional order systems”. In : *Systems & Control Letters* 62 (2013), p. 739-746. DOI : [10.1016/j.sysconle.2013.04.008](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.04.008). IF2013 : 1.886, SNIP2013 : 2.09.
- [A-12] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “On stability of commensurate fractional order systems”. In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22.4 (2012), p. 1-8. DOI : [10.1142/S0218127412500848](https://doi.org/10.1142/S0218127412500848). IF2012 : 0.921, SNIP2012 : 0.791.
- [A-13] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES**, Mathieu MERVEILLAUT et Ludovic FENETEAU. “On observability and pseudo state estimation of fractional order systems”. In : *European Journal of Control* 18.3 (2012), p. 260-271. DOI : [10.3166/ejc.18.260-271](https://doi.org/10.3166/ejc.18.260-271). IF2012 : 1.250, SNIP2012 : 1.444.
- [A-14] **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER et Mathieu MOZE. “Fractional order polytopic systems : robust stability and stabilisation”. In : *Advances in Difference Equations*.35 (2011). DOI : [10.1186/1687-1847-2011-35](https://doi.org/10.1186/1687-1847-2011-35). IF2011 : 0.845, SNIP2011 : 0.614.
- [A-15] Jocelyn SABATIER, Huy Cuong NGUYEN, **Christophe FARGES**, Jean-Yves DELETAGE, Xavier MOREAU, Franck GUILLEMARD et Bernard BAVOUX. “Fractional models for thermal modeling and temperature estimation of a transistor junction”. In : *Advances in Difference Equations* (2011). DOI : [10.1155/2011/687363](https://doi.org/10.1155/2011/687363). IF2011 : 0.845, SNIP2011 : 0.614.

- [A-16] **Christophe FARGES**, Mathieu MOZE et Jocelyn SABATIER. “Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems”. In : *Automatica* 46.10 (2010), p. 1730-1734. DOI : [10.1016/j.automatica.2010.06.038](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.06.038). IF2010 : 2.172, SNIP2010 : 3.095.
- [A-17] Jocelyn SABATIER, Mathieu MOZE et **Christophe FARGES**. “LMI stability conditions for fractional order systems”. In : *Computers & Mathematics with Applications* 59.5 (2010), p. 1594-1609. DOI : [10.1016/j.camwa.2009.08.003](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.003). IF2010 : 1.472, SNIP2010 : 1.186.
- [A-18] **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE et Denis ARZELIER. “LMI Formulation For The Resilient Dynamic Output Feedback Stabilization of Linear Periodic Systems”. In : *International Journal of Tomography & Statistics (IJTS)* 6.7 (2007), p. 74-79.
- [A-19] **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE, Denis ARZELIER et Jamal DAAFOUZ. “Robust H2 performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs”. In : *Systems & Control Letters* 56.2 (fév. 2007), p. 159-166. DOI : [10.1016/j.sysconle.2006.08.006](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2006.08.006). IF2007 : 1.634, SNIP2007 : 1.752.

## B Chapitres dans des ouvrages de synthèse (2)

- [B-1] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et **Lamine FADIGA**. “Fractional Order Differentiation and Robust Control Design”. In : t. 77. *Intelligent Systems, Control and Automation : Science and Engineering 1*. Springer Netherlands, 2015. Chap. Hinfinité control of commensurate fractional order models, p. 193-235. DOI : [10.1007/978-94-017-9807-5](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9807-5).
- [B-2] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Alain OUSTALOUP. “Fractional Order Differentiation and Robust Control Design”. In : t. 77. *Intelligent Systems, Control and Automation : Science and Engineering 1*. Springer Netherlands, 2015. Chap. Fractional Order Models, p. 1-61. DOI : [10.1007/978-94-017-9807-5](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9807-5).

## C Communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture (30)

### C1 Communications relevant de l’enseignement (1)

- [C1-1] Loïc LAVIGNE, **Christophe FARGES** et Franck CAZAURANG. “Commande Linéaire Quadratique d’une maquette pédagogique d’hélicoptère”. In : *9e Colloque sur l’Enseignement des Technologies et des Sciences de l’Information et des Systèmes (CETISIS)*. Trois-Rivières, Canada, oct. 2011.

**C2 Communications relevant de la recherche (29)**

Les références [C2-23] à [C2-29], correspondant au travail de thèse, sont données par souci d'exhaustivité.

- [C2-1] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “Misconceptions in using Riemann-Liouville’s and Caputo’s definitions for the description and initialization of fractional partial differential equations”. In : *20th IFAC World Congress*. Toulouse, France, juil. 2017.
- [C2-2] **Mathieu CHEVRIÉ**, **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER, Franck GUILLEMARD et Laetitia PRADERE. “Finite length wire dynamical modeling for automotive applications using H2-norm based approximation of a fractional model”. In : *European Control Conference (ECC)*. Aalborg, DK, juin 2016.
- [C2-3] **Mathieu CHEVRIÉ**, Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Rachid MALTI. “H2-norm of a class of fractional transfer functions suited for modelling diffusive phenomena”. In : *American Control Conference (ACC)*. Chicago, IL, USA, juil. 2015.
- [C2-4] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “About fractional models physical consistency : Case of implicit differentiation based fractional order models”. In : *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Osaka, Japan, déc. 2015, p. 2077-2082. DOI : [10.1109/CDC.2015.7402513](https://doi.org/10.1109/CDC.2015.7402513).
- [C2-5] Rachid MALTI, **Mathieu CHEVRIÉ**, **Christophe FARGES** et Jocelyn SABATIER. “Lp-norm boundedness conditions of stable Davidson-Cole filters”. In : *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA)*. Catania, Italy, juin 2014, p. 1-6. DOI : [10.1109/ICFDA.2014.6967390](https://doi.org/10.1109/ICFDA.2014.6967390).
- [C2-6] **Mathieu CHEVRIÉ**, Rachid MALTI, **Christophe FARGES** et Jocelyn SABATIER. “H2-norm of fractional transfer functions of implicit type of the first kind”. In : *19th IFAC World Congress*. Cape Town, South Africa, août 2014, p. 2022-2027. DOI : [10.3182/20140824-6-ZA-1003.01458](https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01458).
- [C2-7] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “Long memory models : a first solution to the infinite energy storage ability of linear time-invariant fractional models”. In : *19th IFAC World Congress*. Cape Town, South Africa, août 2014, p. 2884-2890. DOI : [10.3182/20140824-6-ZA-1003.01692](https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01692).
- [C2-8] **Asma ARIBI**, Mohamed AOUN, **Christophe FARGES**, Slaheddine NAJAR, Pierre MELCHIOR et Mohamed NACEUR ABDELKRIM. “Generalized Fractional Observers Scheme to fault detection and isolation”. In : *10th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD)*. Hammamet, Tunisia, mar. 2013, p. 1-7. DOI : [10.1109/SSD.2013.6564125](https://doi.org/10.1109/SSD.2013.6564125).

- [C2-9] **Mathieu CHEVRIÉ**, Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES**, Bernard BAVOUX et Franck GUILLEMARD. “Approche non entière pour la modélisation électrothermique d’un fil électrique et conception d’une loi de commande pour sa protection thermique grâce à un MOSFET piloté”. In : *Journées du Groupe de travail Automatique et Automobile (JAA)*. sous l’égide du club EEA, de la SEE, du Ministère de la Recherche et du GdR MACS du CNRS. Bordeaux, France, oct. 2013.
- [C2-10] **Lamine FADIGA**, **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER et Kevin SANTUGINI. “Hinfinité output feedback control of commensurate fractional order systems”. In : *12th European Control Conference (ECC)*. Zurich, Switzerland, juil. 2013, p. 4538-4543.
- [C2-11] **Lamine FADIGA**, Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “Hinfinité state feedback control of commensurate fractional order systems”. In : *6th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA)*. T. 6. Grenoble, France, fév. 2013, p. 54-59. DOI : [10.3182/20130204-3-FR-4032.00200](https://doi.org/10.3182/20130204-3-FR-4032.00200).
- [C2-12] **Asma ARIBI**, Mohamed AOUN, **Christophe FARGES**, Pierre MELCHIOR, Slaheddine NAJAR et Mohamed Naceur ABDELKRIM. “Robust dynamic parity space method for fractional order systems fault detection”. In : *The 5th Symposium on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Nanjing, China, mai 2012.
- [C2-13] **Lamine FADIGA**, Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Mathieu MOZE. “Calcul de la norme Hinfini d’un système à dérivées non entières commensurable”. In : *Septième Conférence Internationale Francophone d’Automatique (CIFA)*. Grenoble, France, juil. 2012.
- [C2-14] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et Jean-Claude TRIGEASSOU. “On state space description of fractional systems”. In : *The 5th Symposium on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Nanjing, China, mai 2012.
- [C2-15] **Lamine FADIGA**, **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER et Mathieu MOZE. “On computation of Hinfinité norm for commensurate fractional order systems”. In : *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. Orlando, Florida, USA, déc. 2011, p. 8231-8236. DOI : [10.1109/CDC.2011.6160942](https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6160942).
- [C2-16] **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER et Mathieu MOZE. “Robust stability analysis and stabilization of fractional order polytopic systems”. In : *18th IFAC World Congress*. Milano, Italy, août 2011, p. 10800-10805. DOI : [10.3182/20110828-6-IT-1002.00779](https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00779).
- [C2-17] Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES**, Huy Cuong NGUYEN, Xavieru MOREAU et Jean-Yves DELETAGE. “Transistor thermal fractional modeling for junction temperature estimation”. In : *18th IFAC World Congress*. T. 18. Milano, Italy, août 2011, p. 10806-10811. DOI : [10.3182/20110828-6-IT-1002.00780](https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00780).

- [C2-18] **Christophe FARGES**, Jocelyn SABATIER et Mathieu MOZE. “Stabilisation par retour de pseudo-état des systèmes non entiers commensurables”. In : *Conférence Internationale Francophone d’Automatique (CIFA)*. Nancy, France, juin 2010.
- [C2-19] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “A stability test for non commensurate fractional order systems”. In : *IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain, oct. 2010.
- [C2-20] Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. “On stability of commensurate fractional systems”. In : *IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain, oct. 2010.
- [C2-21] **Christophe FARGES**, Mathieu MOZE et Jocelyn SABATIER. “Pseudo state feedback stabilization of commensurate fractional order systems”. In : *European Control Conference (ECC)*. Budapest, Hungary, août 2009, p. 3395-3400.
- [C2-22] Jocelyn SABATIER, Mathieu MOZE et **Christophe FARGES**. “On stability of fractional order systems”. In : *3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications (FDA)*. Ankara, Turkey, nov. 2008.
- [C2-23] **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE, Alain THÉRON et Denis ARZELIER. “Resilient structured periodic H2 synthesis for a spacecraft in elliptical orbits”. In : *17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA)*. T. 17. Toulouse, France, juin 2007, p. 633-638. DOI : [10.3182/20070625-5-FR-2916.00108](https://doi.org/10.3182/20070625-5-FR-2916.00108).
- [C2-24] Dimitri PEAUCELLE, **Christophe FARGES** et Denis ARZELIER. “Robust LFR-based technique for stability analysis of periodic solutions”. In : *3rd IFAC Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO)*. T. 3. Saint Petersburg, Russia, août 2007, p. 263-267. DOI : [10.3182/20070829-3-RU-4912.00046](https://doi.org/10.3182/20070829-3-RU-4912.00046).
- [C2-25] Alain THÉRON, **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE et Denis ARZELIER. “Periodic H2 synthesis for spacecraft in elliptical orbits with atmospheric drag and J2 perturbations”. In : *American Control Conference (ACC)*. New York City, USA, juil. 2007, p. 2473-2478. DOI : [10.1109/ACC.2007.4282879](https://doi.org/10.1109/ACC.2007.4282879).
- [C2-26] **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE et Denis ARZELIER. “LMI Formulation For The Resilient Dynamic Output Feedback Stabilization of Linear Periodic Systems”. In : *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO)*. Cachan, France, avr. 2006.
- [C2-27] **Christophe FARGES**, Dimitri PEAUCELLE et Denis ARZELIER. “Resilient static output feedback stabilization of linear periodic systems”. In : *5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*. T. 5. Toulouse, France, juil. 2006, p. 154-159. DOI : [10.3182/20060705-3-FR-2907.00028](https://doi.org/10.3182/20060705-3-FR-2907.00028).

- [C2-28] Denis ARZELIER, Dimitri PEAUCELLE, **Christophe FARGES** et Jamal DAAFOUZ. “Robust analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs”. In : *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. Seville, Spain, déc. 2005, p. 5734-5739. DOI : [10.1109/CDC.2005.1583077](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1583077).
- [C2-29] Dimitri PEAUCELLE, Denis ARZELIER et **Christophe FARGES**. “LMI results for resilient state-feedback with Hinfinity performance”. In : *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. T. 1. Paradise Island, Bahamas, déc. 2004, p. 400-405. DOI : [10.1109/CDC.2004.1428662](https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1428662).

## D Brevets (2)

- [D-1] Laetitia PRADERE, Franck GUILLEMARD, Jocelyn SABATIER, **Christophe FARGES** et **Mathieu CHEVRIÉ**. *Dispositif d'analyse pour une prise électrique propre à être connectée à une autre prise électrique*. Brevet PSA Peugeot Citroën 2015P00170 FR. Mai 2016.
- [D-2] **Mathieu CHEVRIÉ**, Bernard BAVOUX, Laetitia PRADERE, Jocelyn SABATIER et **Christophe FARGES**. *Procédé de protection contre les sur-échauffements et/ou les surintensités d'un connecteur électrique*. Brevet PSA Peugeot Citroën 2015P00170 FR. Juil. 2015.



# Chapitre 3

## Activités pédagogiques

---

<b>3.1</b>	<b>Responsabilités pédagogiques à l'IMA/Université de Bordeaux . . .</b>	<b>30</b>
3.1.1	L'IMA/Université de Bordeaux . . . . .	30
3.1.2	Responsabilités pédagogiques . . . . .	30
3.1.3	Participation au rayonnement de la filière IMSAT . . . . .	32
<b>3.2</b>	<b>Activités d'enseignement . . . . .</b>	<b>33</b>
3.2.1	Création de ressources et charge pédagogiques . . . . .	33
3.2.2	Gestion et encadrement de projets tuteurs . . . . .	38
<b>3.3</b>	<b>Relations partenariales . . . . .</b>	<b>38</b>
3.3.1	Démarche de VAE . . . . .	38
3.3.2	Suivi de stagiaires et d'apprentis . . . . .	39
<b>3.4</b>	<b>Implication dans le fonctionnement de l'établissement . . . . .</b>	<b>39</b>
3.4.1	Démarche qualité à l'IMA/Université de Bordeaux . . . . .	39
3.4.2	Comité de pilotage de l'amélioration continue des formations . . . . .	41
3.4.3	Comités de recrutement . . . . .	42
<b>3.5</b>	<b>Innovation pédagogique et perspectives . . . . .</b>	<b>42</b>
3.5.1	Validation et vérification de lois de commande sur banc moteur . . . . .	42
3.5.2	Innovation sur les systèmes de drones : une passerelle entre l'enseignement et la recherche . . . . .	43
3.5.3	Développement à l'international . . . . .	43

---

## 3.1 Responsabilités pédagogiques à l'IMA/Université de Bordeaux

### 3.1.1 L'IMA/Université de Bordeaux

Créé en octobre 1992 par l'Université Bordeaux 1 sous l'intitulé *Institut de Maintenance aéronautique*, l'IMA fait aujourd'hui partie de l'Unité de Formation des Sciences de l'Ingénieur (UF SDI) du [collège sciences et technologies](#) de l'Université de Bordeaux. Situé au cœur de la zone aéroportuaire de Mérignac (figure 3.1), à 15 km du campus de Talence, l'IMA/Université de Bordeaux dispose d'environ 6000 m<sup>2</sup> de surface utile, de dix personnels BIATSS, d'une soixantaine d'enseignants et d'enseignants-chercheurs de l'Université de Bordeaux et d'une quarantaine de professionnels du secteur aérospatial.



FIGURE 3.1 – Vue du bâtiment principal de l'IMA/Université de Bordeaux

L'IMA/Université de Bordeaux accueille chaque année environ 400 étudiants répartis entre une Licence Professionnelle et le Coursus Master en Ingénierie et Maintenance des Systèmes pour l'Aéronautique et les Transports (CMI-IMSAT).

### 3.1.2 Responsabilités pédagogiques

Ayant dispensé mes premiers enseignements à l'IMA, j'ai aussitôt pris plaisir à intervenir dans une structure accueillante et dynamique. J'ai donc eu à cœur d'apporter rapidement ma pierre à l'édifice. J'ai ainsi repris la responsabilité de la Licence 3, alors appelée Maintenance Aéronautique (MA) et comptant une quarantaine d'étudiants, d'abord en tant que co-responsable avec Olivier Devos en 2008 puis en tant que responsable en 2010. J'ai alors participé à l'évolution du contenu de la Licence qui s'est élargi pour accueillir, outre l'option Maintenance Aéronautique, les options Systèmes Embarqués et Structures Composites et devenir ainsi la Licence 3 GSAT (Génie des Systèmes pour l'Aéronautique et les Transports). C'est également à cette époque que la Licence 3 s'est ouverte à l'alternance et en particulier à l'apprentissage avec le soutien du [CFA Sciences et Technologies](#) et grâce notamment à la forte implication de David Reungoat, Olivier Devos et Martine Inda. Ces évolutions, de fort impact du point de vue organisationnel, ont permis de faire de la Licence 3 le point d'entrée principal pour suivre le Master GSAT.

Sous l'impulsion de Franck Cazaurang, j'ai participé en 2011-2012 à la constitution de notre dossier de candidature pour faire labelliser notre formation de Licence et de Master par le réseau FIGuRe en tant que Cursus Master en Ingénierie (CMI). Un CMI est une formation en cinq ans qui prépare au métier d'ingénieur expert dans tous les domaines de l'ingénierie et qui répond à un cahier des charges portant sur le contenu des enseignements et sur un format permettant de développer des aptitudes personnelles et professionnelles, avec notamment :

- le portage par des laboratoires de recherche au sein de l'Université ;
- des enseignements dispensés par des professionnels du secteur industriel concerné et par des enseignants-chercheurs issus des laboratoires d'appui ;
- des enseignements de bases scientifiques, de spécialité et de sciences humaines et sociales ;
- des projets industriels et/ou techniques dès la première année et tout au long du cursus ;
- des stages en entreprise et en laboratoire de recherche.

Notre formation répondait, pour l'essentiel, à ces critères. S'agissant d'une formation en cinq ans, un des axes importants de travail a néanmoins été de créer les premières années (Licence 1 et 2) qui n'existaient pas : le vivier de recrutement de notre formation de Licence 3 était alors pour l'essentiel des étudiants titulaires d'un DUT ou de Licences 2 d'autres universités. Afin de construire le programme pédagogique de ces deux premières années, nous nous sommes appuyés sur les enseignements de bases scientifiques générales, et de mécanique et électronique en particulier, qui étaient déjà dispensés en Licence 1 et 2 de l'Université de Bordeaux. Nous avons complété ces enseignements par des cours d'épistémologie (grâce aux compétences de collègues en médiation des sciences de Bordeaux 1 et Bordeaux 3), d'activités de mises en situation avec notamment un projet sur turboréacteur en deuxième année dans lequel j'interviens ainsi qu'un stage en entreprise ou laboratoire. Après la labellisation de notre formation par le réseau, et afin de permettre un démarrage rapide de ces formations, j'ai assuré pendant les deux premières années (2012-2014) la responsabilité de la licence 1 et 2. J'ai été ensuite aidé dans cette tâche par Alexandrine Gracia et Tristan Dubois qui ont alors repris la responsabilité de ces deux années. Je suis néanmoins resté coordonnateur de l'ensemble des trois années de Licence et responsable de la Licence 3. À ce titre, j'ai par exemple été récemment en charge de porter l'accréditation pour notre parcours de Licence.

Un résumé de mes responsabilités pédagogiques est proposé dans le tableau 3.1.

Responsabilité	Effectifs	Années
Co-responsable Licence 3 MA	40 étudiants	2008-2010
Responsable Licence 3 MA puis IMSAT	40 étudiants en 2010 (70 en 2016)	depuis 2010
Responsable Licence IMSAT (L1 à L3)	140 étudiants	depuis 2012
Responsable Licence 1 IMSAT	40 étudiants	2012-2014
Responsable Licence 2 IMSAT	30 étudiants	2013-2014

TABLE 3.1 – Tableau récapitulatif de mes responsabilités pédagogiques

Je suis par ailleurs membre du *bureau IMSAT* depuis sa création. Ce bureau, composé de 7 personnes, se réunit tous les mois afin de mettre en commun différentes informations sur la vie de la filière, discuter des stratégies de développement et préparer le conseil IMSAT qui se réunit avec la même périodicité.

Je participe également à l'organisation du *comité formation, recherche, entreprise* se déroulant chaque année en présence de représentants de l'université, des laboratoires auxquels est adossée la formation et des entreprises partenaires. Ce comité est l'occasion de présenter les évolutions en termes d'offre de formation et de discuter des attentes industrielles pour ajuster au mieux le contenu de la formation.

### 3.1.3 Participation au rayonnement de la filière IMSAT

Outre ces responsabilités, je participe activement à la promotion de nos formations avec notamment chaque année :

- l'organisation et la participation à différents salons tels que [le salon des formations et métiers aéronautiques](#) ou [le salon International de l'Aéronautique et de l'Espace du Bourget](#) ;
- la participation aux journées du futur étudiant organisées par l'Université de Bordeaux.

Je contribue également à l'organisation et au déroulement des journées portes ouvertes de l'IMA qui permettent chaque année aux étudiants (de niveau BAC et BAC+2 principalement) de :

- comprendre le contenu de la filière IMSAT au travers de présentations ;
- découvrir les moyens pédagogiques disponibles sur le site de Mérignac par l'intermédiaire de démonstrations pratiques faisant intervenir conjointement les enseignants et les étudiants de la filière IMSAT.

J'ai par ailleurs la charge de maintenir [site internet de l'IMA](#) qui permet notamment de mettre en avant les actualités autour de la vie de la filière IMSAT.

Je participe enfin à :

- des présentations de nos formations dans les IUT Mesures Physiques (MP), Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII), Génie Mécanique et Productique (GMP) et Science et Génie des Matériaux (SGM) de notre université ;
- différents projets autour du thème des drones dans en partenariat avec l'IUT MP.

Ces dernières actions ont permis de renforcer de manière significative notre recrutement dans les IUT Bordelais.

## 3.2 Activités d'enseignement

Cette partie a pour but de présenter mes activités d'enseignement en tant que Maître de Conférences de 2007 à aujourd'hui à l'Université de Bordeaux.

### 3.2.1 Création de ressources et charge pédagogiques

Le tableau 3.2 présente une synthèse des enseignements que j'ai réalisés depuis mon arrivée à l'Université de Bordeaux en 2007. Par souci de lisibilité, les noms actuels des formations sont indiqués (les intitulés ayant changé à plusieurs reprises).

Enseignement	Filière	C	TD	TP	Période
Bureau d'études <i>bille sur rail</i>	M1 AM2AS			×	2007
Mise à niveau MATLAB	M1 AM2AS			×	2007-2010
Bases de données	M1 IMSAT			×	depuis 2007
Commande multivariable avancée ( $\mathcal{H}_\infty$ )	M2 IMSAT		×	×	2007–2016
		×			2015–2016
Maintien à poste de satellites	M2 AM2AS			×	2007-2011
	M2 IMSAT			×	depuis 2008
Initiation à la mécanique spatiale	L2 SPI	×		×	2008-2010
Bases d'Automatique	L3 IMSAT			×	depuis 2008
Commande numérique	M1 IMSAT	×	×	×	depuis 2010
Détection et localisation de défauts	M2 IMSAT	×	×	×	depuis 2010
Représentation d'état	M1 IMSAT			×	depuis 2012
Asservissement du turboréacteur DGEN 380	L2 IMSAT			×	depuis 2014

TABLE 3.2 – Synthèse de mes activités d'enseignement

Comme indiqué dans ce tableau, à l'exception d'un enseignement d'informatique, l'ensemble de mes interventions relève de l'Automatique. Un résumé du contenu, les volumes par groupe ainsi que mon implication dans ces différents enseignements est proposé dans les sections suivantes.

**Bureau d'études bille sur rail (12 h TP, M1 AM2AS, 2007)** L'objectif de ce bureau d'études, monté par Stéphane Ygorra et pour lequel je suis intervenu lors de ma première année à l'université, était l'asservissement en position d'une bille sur un rail métallique. Le rail est entraîné par un moteur électrique et la position de la bille est reconstruite à l'aide d'un traitement d'images relevé par une webcam. Les étudiants établissent dans un premier temps un modèle du comportement dynamique du moteur ainsi que du mouvement de la bille sur le rail. Les asservissements associés sont synthétisés puis implémentés sur un logiciel dédié permettant le pilotage en temps réel de la maquette.

**Mise à niveau MATLAB (4 h TP, M1 AM2AS, 2007-2010)** L'objectif de ces travaux pratiques était une remise à niveau sur le logiciel MATLAB des étudiants intégrant la formation en Master 1. Le sujet permettait aux étudiants de manipuler les fonctionnalités de calcul et graphiques, la boîte à outils *Control Toolbox*, la simulation de systèmes dynamiques avec *Simulink* ainsi que la création d'interfaces graphiques basiques.

→ *Rédaction du support de travaux pratiques.*

**Bases de données (8 h TP, M2 IMSAT, depuis 2007)** Afin de répondre à un besoin remonté pendant les suivi de stages, il a été décidé de mettre en place une initiation aux bases de données en Master 1 IMSAT. Le logiciel retenu était *Microsoft Access* pour sa disponibilité en entreprise. Le cours que j'ai construit fait d'abord intervenir une courte initiation aux bases de données relationnelles puis une mise en pratique sur le logiciel *Access* autour d'un sujet en lien avec les centres d'intérêts des étudiants : la création d'une base de données à destination d'un centre de maintenance aéronautique.

→ *Auto-formation aux bases de données et rédaction du support de travaux pratiques.*

**Commande multivariable avancée (8 h C, 10 h TD, 12 h TP, M2 IMSAT, depuis 2007)** Dans la lignée de mes travaux de thèse, j'ai eu dès mon arrivée l'opportunité de prendre la charge les travaux dirigés et travaux pratiques de commande multivariable avancée. Le type de modèle considéré est la représentation d'état de systèmes multivariables. Les performances attendues sont décrites à l'aide de gabarits fréquentiels sur différents transferts du système bouclé. Les incertitudes paramétriques et dynamiques sont considérées. Un modèle augmenté prenant en compte les incertitudes et performances est d'abord construit sous la forme d'une Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT). La loi de commande est ensuite obtenue comme solution d'un problème de minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert de performances de ce modèle augmenté.

Au départ en retraite de Benoît Bergeon, j'ai repris en 2016 la charge du cours associé. J'ai alors souhaité dispenser cet enseignement sous la forme de cours intégrés et en l'orientant plus sur les aspects méthodologiques.

→ *Évolution notable des supports de cours, travaux dirigés et travaux pratiques.*

**Maintien à poste de satellites (8 h TP, M2 IMSAT et AM2AS, depuis 2007)** Afin de diversifier les champs applicatifs des étudiants d'AM2AS et d'IMSAT, j'ai été sollicité pour construire un sujet autour de la thématique spatiale. J'ai retenu le problème du maintien à poste de satellites en orbite basse qui était l'application de mes travaux de thèse. Adapter ce sujet à un auditoire peu familier avec la mécanique spatiale et devant, en 8 h, établir le modèle, créer un simulateur et valider une loi de commande simple était une expérience intéressante. Ces séances de modélisation sont suivies de séances de synthèses de lois de commande ( $\mathcal{H}_\infty$  et CRONE) assurées par des collègues du groupe Automatique. Elles donnent lieu à des soutenances orales

qui m'ont permis de mieux comprendre la mise en oeuvre de la méthodologie de synthèse de lois de commande CRONE.

→ *Création du support du bureau d'études.*

**Initiation à la mécanique spatiale (4 h C, 4 h TP, L2 SPI, 2008-2010)** Dans le cadre d'un module d'ouverture en Licence Sciences Pour l'Ingénieur (SPI) parcours Mécanique, j'ai eu l'opportunité de dispenser un enseignement d'initiation à la mécanique spatiale. Le cours présentait les différents types d'orbites, les principaux repères et paramétrisations utilisés pour décrire la position d'un satellite. La séance de travaux pratiques concernait l'étude sous MATLAB de différentes lois de commande permettant de maintenir le satellite sur une orbite choisie.

→ *Création du diaporama de cours et du support de travaux pratiques.*

**Bases d'Automatique (8 h TP, L3 IMSAT, depuis 2008)** La première séance est une initiation au logiciel MATLAB et à ses fonctionnalités pour l'Automatique. La seconde concerne l'asservissement de l'angle de tangage d'une maquette d'hélicoptère. Cette maquette d'hélicoptère, représentée sur la figure 3.2, a été acquise suite à ma demande pour permettre aux étudiants, dès le début de la Licence 3, d'appréhender les notions théoriques vues en cours d'Automatique sur une application en lien avec le domaine aéronautique. La séance fait intervenir :

- l'établissement d'un modèle du comportement de l'engin à l'aide d'une identification ;
- l'évaluation sur le modèle obtenu de différentes lois de commande ;
- la mise en oeuvre de ces lois de commande sur la maquette.

Afin de rendre plus ludique le pilotage de l'engin et de permettre aux étudiants de mieux comprendre l'impact de la loi de commande sur le ressenti du pilote, un interfaçage avec une manette à retour d'effort a été réalisé. L'ensemble du travail réalisé autour de cette maquette avec Loïc Lavigne a donné lieu à une publication dans le Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des Sciences de l'Information et des Systèmes (CETSI) [C1-1].



FIGURE 3.2 – Maquette d'hélicoptère de la société *Feedback*

→ *Modélisation et asservissement de la maquette ayant donné lieu à une publication.*

→ *Création du support de travaux pratiques.*

**Commande numérique (12 h CI, 4 h TP, M1 IMSAT, depuis 2010)** J'ai repris cet enseignement ainsi que celui de diagnostic en 2010 suite au départ de la filière IMSAT d'un collègue. La première partie du cours est consacrée à des rappels de pré-requis en traitement du signal : échantillonnage, filtres pour reconstruire le signal continu, transformée en  $z$ , etc. Sur cette base, les modèles à temps discret sont présentés ainsi que leur analyse de stabilité et leur réponse fréquentielle notamment via la transformée en  $w$ . L'ensemble de ces notions est mis en application sur la synthèse d'un pilote automatique pour un avion de chasse.

→ *Refonte du support de cours avec intégration notamment des pré-requis en traitement du signal.*

→ *Mise en place avec l'outil AMC [7] de tests systématiques en début de séance.*

**Détection et Localisation de Défauts (18 h CI, 4 h TP, M2 IMSAT, depuis 2010)**

Après une présentation générale des méthodes de diagnostic, deux méthodes de diagnostic à base de modèles sont détaillées :

- l'espace de parité (statique puis dynamique) ;
- les méthodes basées sur des observateurs (observateur d'état puis à entrées inconnues).

Pour chaque méthode, la détection de défauts avec prise en compte des perturbations est d'abord présentée. La localisation ou isolation des défaillances est ensuite traitée. Des exemples d'applications dans le domaine aéronautique sont décrits, en lien notamment avec les thèses qui se sont déroulées dans le groupe Automatique et qui ont notamment été réalisées par d'anciens étudiants de la filière IMSAT.

→ *Création du support de cours.*

→ *La mise en place de cet enseignement m'a permis d'acquérir les notions de bases en diagnostic qui ont été mises à profit lors des travaux de thèse d'Asma Aribi.*

**Représentation d'état (8 h TP, M1 IMSAT, depuis 2012)**

Lorsque j'ai repris ces travaux pratiques qui étaient exclusivement réalisés en simulation, j'ai souhaité pouvoir proposer aux étudiants de travailler sur une maquette pédagogique. Via un travail de projet, les étudiants ont pu remettre en état de fonctionnement une maquette de régulation de niveau dans des cuves (figure 3.3). Une séance est consacrée à l'étude d'une seule cuve et fait intervenir :

- la modélisation du comportement dynamique entre le débit de la pompe et la variation de hauteur d'eau ;
- la détermination de points d'équilibre et la linéarisation autour de ces derniers ;
- le calcul et l'implantation d'une loi de commande.

La seconde séance reprend l'ensemble de ce travail mais sur le système multivariable ayant pour entrées de commande les débits délivrés par les deux pompes et comme sorties mesurées les hauteurs d'eau dans les trois cuves. La loi de commande calculée et mise en place sur la maquette est un retour d'état.



FIGURE 3.3 – Maquette de la société AMIRA pour la régulation de niveaux d'eau

- *Remise en fonctionnement de la maquette en projet.*
- *Rédaction du support de TP.*

### **Asservissement du turboréacteur DGEN 380 (24h TP, L2 IMSAT, depuis 2014)**

Lors de la création du contenu pédagogique de la Licence 2 dans le cadre de la mise en place du CMI IMSAT, nous avons décidé de mettre en place un module dédié au travail en projet sur une application aéronautique. Le démonstrateur retenu est le DGEN 380 qui est un moteur d'avion commercialisé par la société Price Induction. Lors des premières années où cet enseignement a été dispensé, nos collègues mécanicien ont fait travailler les étudiants en petits groupes pour :

- comprendre le fonctionnement général du moteur via une démonstration sur le banc disponible à l'IMA (3.4) et via des maquettes numériques 3D ;
- étudier différents systèmes (système anti-vibratoire, etc.).

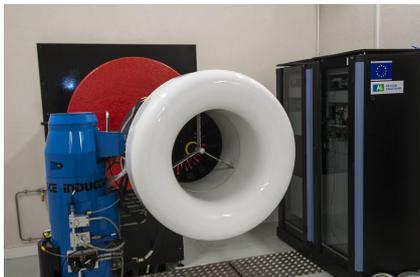


FIGURE 3.4 – Banc d'essai du moteur DGEN 380 de la plateforme AEROfan situé à l'IMA/Université de Bordeaux

Avec Loïc Lavigne, nous avons ensuite souhaité compléter ce travail par un pan relevant plus de l'Automatique. Nous avons ainsi mis en place une série de séances dans lesquelles les étudiants travaillent sur l'asservissement de la vitesse de rotation de la turbine basse pression en jouant sur le débit carburant. Les étudiants sont ainsi amenés à :

- caractériser le comportement (non linéaire) d'un modèle fourni comme une boîte noire sous MATLAB ;

- déterminer par identification (temporelle puis fréquentielle) un modèle linéaire rendant compte du comportement du moteur dans une plage de fonctionnement ;
- utiliser ce modèle pour calculer et mettre en place différentes lois de commande (notamment un correcteur proportionnel intégral).

Le défi intéressant est qu'à ce stade de la formation, les étudiants sont en train d'acquérir certaines notions liées à la modélisation (fonctions de transfert, tracé d'un diagramme de Bode) mais ne connaissent ni l'identification, ni la synthèse de lois de commande. Nous avons ainsi privilégié une approche graphique via les outils intégrés dans MATLAB et permettant de modifier la réponse fréquentielle de la boucle ouverte et d'observer notamment la réponse temporelle du système bouclé en temps réel.

→ *Création du support de TP.*

### 3.2.2 Gestion et encadrement de projets tuteurés

Les projets tuteurés font partie intégrante du modèle de formation des CMI. Nos étudiants réalisent un projet long chaque année dès la Licence 3. Du fait du rythme d'alternance, il s'agit de projets se déroulant à temps plein pendant 2 mois. J'ai ainsi proposé des projets qui m'ont aidé dans la mise en place des maquettes pédagogiques présentées dans la partie 3.2.1.

J'ai par ailleurs récemment encadré plusieurs projets autour de la thématique des drones. Le dernier projet en date est réalisé en partenariat avec une PME Bordelaise sur un sujet d'évitement d'obstacles.

## 3.3 Relations partenariales

### 3.3.1 Démarche de VAE

La Validation des Acquis de l'Expérience (VAE) de l'Université de Bordeaux permet aux personnes ayant exercé une activité professionnelle de trois ans au moins d'obtenir un diplôme en lien avec cette activité professionnelle.

J'ai eu le rôle de rapporteur dans le cadre de trois VAE :

- M. Denis Clément de l'entreprise Air France, pour l'obtention de la Licence Professionnelle Maintenance Aéronautique en 2010 ;
- M. Xavier Gabard de l'entreprise Air France, pour l'obtention de la Licence Professionnelle Maintenance Aéronautique en 2011 ;
- M. Loïc Guicheteau de l'entreprise Sabena Technics, pour l'obtention du Master GSAT support client en 2015.

Le rapporteur a pour missions d'étudier le dossier constitué par le candidat et de le rencontrer afin de faire le lien entre d'une part sa formation initiale et ce qu'il rapporte de son

expérience professionnelle et d'autre part le référentiel du diplôme demandé. C'est sur cette base qu'un rapport est rédigé et qu'une recommandation de validation partielle ou totale du diplôme est proposée au jury de VAE.

### 3.3.2 Suivi de stagiaires et d'apprentis

J'assure chaque année le suivi pédagogique de plusieurs stagiaires et alternants de la filière IMSAT. En effet, nos étudiants réalisent des stages chaque année, et ce dès la Licence 2. Le suivi consiste en une visite dans l'entreprise d'accueil de l'étudiant, la lecture du rapport et une soutenance en présence de l'étudiant, du tuteur entreprise et d'un second enseignant découvrant le contenu du stage. La visite en entreprise est l'occasion de mieux comprendre les problématiques industrielles et de se tenir au fait des évolutions technologiques. Cette activité est également essentielle pour promouvoir nos formations et débouche souvent sur de nouvelles offres de stage et d'alternance.

Ces visites conduisent parfois à cerner des problématiques communes entre les besoins industriels et mes activités d'enseignement et de recherche. Ainsi, le suivi d'un étudiant de Master 2 en stage dans une PME Bordelaise commercialisant des drones a conduit à proposer un projet en partenariat entre cette entreprise et l'IMA/Université de Bordeaux sur une thématique d'évitement. Ce partenariat pourrait se poursuivre sous la forme d'un financement de thèse.

## 3.4 Implication dans le fonctionnement de l'établissement

Outre mes responsabilités pédagogiques présentées dans la section 3.1, je suis impliqué dans le fonctionnement de l'établissement à la fois au niveau local via par exemple ma participation à la démarche qualité qui est en train d'être déployée à l'IMA mais aussi au niveau du collège en tant que membre du comité de pilotage d'amélioration continue des formations. Ces différentes activités sont détaillées dans les parties suivantes.

### 3.4.1 Démarche qualité à l'IMA/Université de Bordeaux

L'IMA/Université de Bordeaux a depuis plus de 20 ans développé un savoir-faire unique dans la conception, l'organisation et la réalisation de formations répondant à un besoin réel au niveau industriel. Ce résultat a pu être atteint grâce à la motivation et aux efforts des personnels y travaillant et au soutien des différents partenaires institutionnels.

Afin de consolider et d'améliorer notre mode de fonctionnement et d'obtenir ainsi des fondations stables indispensables au déploiement de nouveaux projets, le bureau IMSAT a souhaité la mise en place d'un système de management par la qualité. Olivier Puissant, responsable de la plateforme aéronautique de l'Université, nous accompagne depuis 2015 dans la mise en place de cette démarche et dans le développement de nos nouveaux projets.

Cette démarche a commencé par un recueil d'informations sur le fonctionnement actuel qui a permis d'établir une cartographie des principaux processus de fonctionnement de l'IMA (figure 3.5).

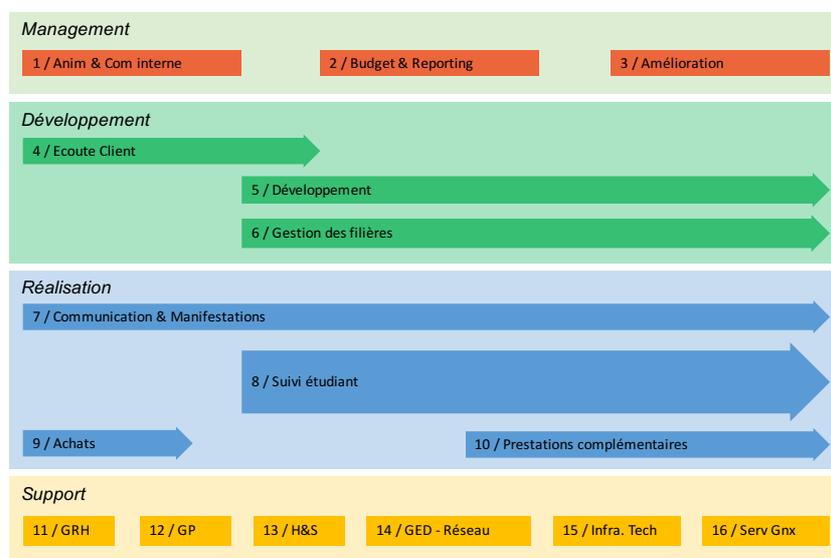


FIGURE 3.5 – Cartographie des principaux processus de l'IMA/Université de Bordeaux

A chaque processus est associé un groupe de travail dont la coordination est assurée par un pilote du processus. Ce dernier anime et suit les activités du groupe. Le travail se déroule en deux temps : d'abord une formalisation du mode de fonctionnement actuel puis une recherche d'axes d'amélioration.

En tant que pilote du processus *suivi étudiant* (processus 8 sur la figure 3.5), j'ai été en charge d'un groupe de travail impliquant les différents acteurs du processus. Les principales activités ont été les suivantes :

- analyse du fonctionnement actuel : modes opératoires, procédures, responsabilités des différents acteurs ;
- proposition d'amélioration et simplification du fonctionnement ;
- formalisation des différents outils nécessaires à la maîtrise du processus : descriptifs, procédures, outils, etc. ;
- communication et formation des différents personnels concernés pour la mise en oeuvre effective.

J'ai ainsi entre autres activités contribué à la rédaction de différentes procédures décrivant le travail effectué par l'équipe pédagogique et le secrétariat depuis le recrutement jusqu'à l'obtention du diplôme avec notamment :

- le recrutement et les inscriptions ;
- la mise en place de l'emploi du temps ;
- l'accompagnement dans la recherche puis le suivi des étudiants en stage et en alternance ;

- l'organisation des soutenances de stages et des examens ;
- la mise en évidence d'axes d'amélioration.

Ces procédures prennent la forme d'organigrammes permettant d'avoir une vue d'ensemble de leur déroulement et d'accéder aux ressources utiles. Elles sont disponibles pour l'ensemble des acteurs de la filière sur un serveur.

À court terme, ce travail permet d'avoir une vue d'ensemble, un accès simplifié aux informations et une meilleure planification des actions. À plus long terme, et c'est ce sur quoi nous allons travailler dans les prochains mois, ce travail sera une base de discussion pour identifier les améliorations à apporter.

### 3.4.2 Comité de pilotage de l'amélioration continue des formations

Suite à mon travail dans le cadre de l'accréditation de la Licence IMSAT et de la démarche qualité à l'IMA, j'ai été sollicité par l'Unité de Formation des Sciences de l'Ingénieur pour participer au comité de pilotage de l'amélioration continue des formations en sciences et technologies.

L'examen des documents d'évaluation du dossier d'accréditation de l'offre de formation a en effet mis en évidence qu'une partie des formations dispose déjà d'un ensemble de procédures pour l'amélioration continue tandis que certaines équipes pédagogiques sont en demande d'un cadrage et/ou d'un accompagnement dédié. Il a mis en exergue le rôle essentiel du conseil de perfectionnement qui exerce une veille de la qualité et de la réponse à la demande, contribuant ainsi à faire évoluer les contenus. Les grandes missions de ce comité de pilotage sont les suivantes :

- recenser les dispositifs communs et spécifiques essentiels à l'amélioration continue avec notamment l'évaluation des enseignements et le fonctionnement des comités de perfectionnement ;
- identifier précisément le ressenti et les besoins de l'ensemble du personnel impliqué dans la formation ;
- identifier et adapter des indicateurs pertinents au regard des objectifs notamment en termes d'articulation formation/recherche, d'internationalisation, de prise en compte de la demande du public étudiant et des enseignants ;
- définir les moyens de communication à mettre en œuvre pour inciter les équipes pédagogiques à contribuer à la transformation de l'offre ;
- accompagner dans la mise en place des nouveaux dispositifs.

Ce comité ayant débuté récemment, la phase actuelle est le recensement de l'existant de façon à définir des sous-groupes de travail thématique qui contribueront à la rédaction d'une synthèse à destination de la commission de la formation et de la vie universitaire.

### 3.4.3 Comités de recrutement

J'ai participé aux comités de sélection suivants :

- recrutement de Maîtres de Conférences en 2011 et 2012 ;
- recrutement d'attaché temporaire d'enseignement et de recherche (ATER) en 2011 et 2013.

Dans ce cadre, j'ai étudié les dossiers des candidats pour évaluer leur adéquation au profil d'enseignement et de recherche du poste. Ces évaluations donnent lieu à la rédaction de rapports qui aident la commission à statuer.

## 3.5 Innovation pédagogique et perspectives

Dans les sections suivantes sont présentées les axes pédagogiques sur lesquels je souhaite m'investir dans les prochaines années.

### 3.5.1 Validation et vérification de lois de commande sur banc moteur

Comme présenté dans la section 3.2, j'ai travaillé sur l'asservissement du moteur DGEN 380 dont le banc d'essai est situé sur le site de l'IMA à Mérignac dans le cadre d'un bureau d'études pour notre Licence 2. Ce travail a été réalisé en simulation à partir d'un modèle *boîte noire* fourni par le constructeur. J'aimerais poursuivre ce travail en m'intéressant à l'implantation de la loi de commande dans le calculateur de commande du moteur (FADEC). Pour ce faire, je pourrai mettre à profit la deuxième plateforme AEROfan sur le site de Bordeaux INP - ENSEIRB-Matméca (figure 3.6).



FIGURE 3.6 – Banc virtuel du moteur DGEN 380 de la plateforme AEROfan situé à Bordeaux INP - ENSEIRB-Matméca

Ce banc virtuel intègre des modèles de simulation et un FADEC identique à celui que l'on trouve sur le banc moteur de Mérignac. Cette configuration permet de mettre en œuvre une approche *hardware-in-the-loop*.

Ce travail permettra dans un premier temps de compléter le bureau d'études de Licence 2 pour présenter aux étudiants les problématiques liées à l'implantation matérielle des lois de

commande. Il me permettra aussi de faire évoluer les travaux pratiques de mon cours de commande numérique en proposant une application relevant du secteur aéronautique et très proche de la réalité industrielle.

### 3.5.2 Innovation sur les systèmes de drones : une passerelle entre l'enseignement et la recherche

Les projets que j'ai encadrés sur le thème des drones m'ont permis d'acquérir des compétences sur la modélisation de ces aéronefs ainsi que sur les systèmes électroniques embarqués qui leur sont associés (et notamment leur programmation). Je souhaite mettre à profit ce travail pour :

- contribuer à répondre à la problématique d'évitement d'obstacle par un tricoptère qui nous a été soumise par un partenaire industriel ;
- faire des premiers essais de détection de défauts sur ce tricoptère ;
- utiliser ce drone comme support applicatif pour mon cours de détection et localisation de défauts ;
- poursuivre ce travail de diagnostic sur un drone convertible dans le cadre du projet ANR *Model Identification and Control of a Convertible Aircraft* proposé par un membre de mon groupe Tudor-Bogdan Airimitoiaie et débutant en décembre 2016 [1] ;

Ce dernier point fait partie de mes perspectives de recherche et sera détaillé dans la partie 6.2.3.

### 3.5.3 Développement à l'international

En juillet 2016 était signé à l'IMA un consortium entre l'Université de Cincinnati et l'Université de Bordeaux (figure 3.7). Dans le cadre de ce partenariat a ouvert à la rentrée 2017 la formation AESOP *Aero-System Operations* permettant d'obtenir un double diplôme : un Diplôme Universitaire International (DUI) en France et un Master of Engineering (Meng) aux Etats-Unis.

Le DUI/Meng AESOP a pour objectif de permettre d'acquérir en un an, une formation aux sciences de l'ingénieur axée sur les métiers de la gestion du cycle de vie des aéronefs. Cette formation se déroule en anglais et se fait au niveau international par la mise en œuvre de deux semestres : le premier semestre a lieu aux Etats-Unis à Cincinnati et le second en France à Bordeaux. L'enseignement en France est décliné en unités d'enseignement composées d'unités modulaires, dispensées sur une semaine en général. Chaque unité est composée de 18h de formation à distance (e-learning) et d'une semaine de cours sur site (20h de travaux pratiques et dirigés).

Je vais intervenir pour ma part dans l'unité d'enseignement *maintenance avionique* et plus précisément sur les outils d'aide au diagnostic. Afin de répondre au format d'e-learning



FIGURE 3.7 – Signature du consortium entre l’Université de Cincinnati et l’Université de Bordeaux le jeudi 7 juillet 2016 à l’IMA/Université de Bordeaux

présenté plus haut, je vais adapter le contenu du cours de *détection et localisation de défauts* que je dispense en Master IMSAT (voir section 3.2.1) et le proposer en anglais. La ressource en ligne créée à cette occasion sera rendue disponible aux étudiants de la filière IMSAT. Cela leur permettra d’avoir un accès à un support en anglais. Ils pourront également se joindre, si le calendrier des formations le permet, aux séances en anglais dispensées pour les étudiants suivant la formation AESOP.

Je vais également intervenir sur le volet recherche que comporte le consortium et notamment sur la thématique drones qui est animée par le professeur [Kelly Cohen](#) de l’Université de Cincinnati. Cette activité s’inscrit ainsi dans le prolongement du travail que je souhaite effectuer dans le cadre du projet ANR évoqué dans la section 3.5.2 et sera détaillée dans la partie 6.2.3.

Deuxième partie

Activités de Recherche



# Introduction à la deuxième partie

Après un DEA et une thèse au LAAS-CNRS de Toulouse portant sur l'analyse et la synthèse robustes des systèmes linéaires périodiques via des méthodes LMI, j'ai intégré en septembre 2007 le groupe Automatique du laboratoire IMS de Bordeaux.

Mes activités de recherche se sont progressivement centrées autour des modèles faisant intervenir la dérivation non entière qui est au coeur des activités de l'équipe CRONE. Ces modèles permettent de rendre compte fidèlement et avec peu de paramètres du comportement dynamique entrée-sortie de différents systèmes dans des domaines variés tels que l'électro-chimie, la thermique, la biologie ou la mécanique. Dès lors se pose la question de l'utilisation de ces modèles dans le cadre de la synthèse de lois de commande ou de diagnostic. C'est dans cet axe que s'inscrit l'essentiel de mes travaux de recherche.

Cette partie du manuscrit est consacrée à une synthèse de mes contributions et à la présentation de différents axes de recherche pour mes travaux à venir. Le chapitre 4 présente les notions, nécessaires à la compréhension des parties suivantes, liées aux opérateurs de dérivation et d'intégration non entière avec notamment leur caractérisation fréquentielle ainsi que leur utilisation en tant qu'outil de modélisation. Le chapitre 5 présente mes différentes contributions pour l'analyse, la commande et le diagnostic basés sur les modèles non entiers. Enfin, le chapitre 6 est consacré à la présentation de différentes perspectives, notamment liées à l'étude du comportement interne des systèmes présentant du point de vue entrée-sortie un comportement dynamique de type non entier.



## Chapitre 4

# Dérivation non entière et modèles non entiers entrée-sortie

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Intégration et dérivation d'ordre non entier</b>	<b>51</b>
4.2.1	Intégration non entière	51
4.2.2	Dérivation non entière	52
4.2.3	Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel	54
<b>4.3</b>	<b>Modèles non entiers entrée-sortie</b>	<b>55</b>
4.3.1	Modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI)	56
4.3.2	Matrices de transfert non entières	57
4.3.3	Pseudo représentation d'état des modèles non entiers	59
4.3.4	Représentation associant un modèle entier et un modèle diffusif	63
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>

---

## 4.1 Introduction

Dès 1696, *Leibniz* évoque le concept de la dérivation non entière dans une lettre ouverte à l'*Hospital*. Mais lorsque ce dernier lui demande quelle pourrait bien être la dérivée d'ordre un demi d'une fonction, *Leibniz* répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences [60]. Mais ce n'est qu'au XIX<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux de Liouville et Riemann [37, 58], que la notion d'ordre de dérivation fut étendue au corps des réels et des complexes et qu'une interprétation physique lui fut trouvée.

Comme annoncé dans l'introduction de la seconde partie de ce mémoire, cet outil peut être utilisé pour modéliser finement, et à l'aide d'un nombre de paramètres réduit, le comportement entrée-sortie d'une large gamme de phénomènes physiques dans des domaines applicatifs variés tels que :

- l'électro-chimie où la diffusion des charges dans les batteries est régie notamment par des modèles de *Randles* [59, 61];
- la thermique où la solution exacte de l'équation de la chaleur dans un milieu semi-infini lie le flux thermique à la température de surface par une dérivée d'ordre 0.5 [6, 13];
- la biologie avec le comportement du muscle de grenouille [65, 66] et de salamandre [67];
- la mécanique avec les propriétés dynamiques des matériaux visco-élastiques et notamment les problèmes de propagation d'ondes dans ces matériaux [38] mais également la relaxation de l'eau sur une digue poreuse où le débit est proportionnel à la dérivée non entière de la pression dynamique à l'interface eau-digue [54];
- l'acoustique où dans un instrument à vent, la dérivée non entière est utilisée pour modéliser les pertes visco-thermiques [43];
- la robotique par la modélisation d'environnement [53];
- les réseaux de distribution électrique [20].

Par la suite, seules les dérivées non entières d'ordre réel sont considérées, ces dernières étant très majoritairement privilégiées dans la modélisation des phénomènes physiques.

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de rappeler les principales définitions et propriétés liées à la dérivation et à l'intégration non entière. Une caractérisation fréquentielle des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière est ensuite proposée. Les modèles non entiers, basés sur ces opérateurs, sont ensuite présentés ainsi que les principales représentations qui leur sont associées.

## 4.2 Intégration et dérivation d'ordre non entier

### 4.2.1 Intégration non entière

#### 4.2.1.1 Définition

Soit  $f(t)$  une fonction temporelle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continue par morceaux sur  $]t_0, +\infty[$  et intégrable sur  $[t_0, t]$  pour tout  $t > t_0$ . La formule de *Cauchy* permet d'exprimer l'intégrale entière d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $f(t)$  par :

$$\mathbf{I}_{t_0}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

En s'inspirant de la formule de *Cauchy*, *Riemann* a défini en 1847 l'expression générale de l'intégrale d'ordre  $\nu \in \mathbb{R}_+^*$  de  $f(t)$  sous la forme de l'expression suivante :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{I}_{t_0}^\nu$  est l'opérateur d'intégration non entière d'ordre  $\nu$  et  $\Gamma(\nu)$  est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx. \quad (4.3)$$

**Remarque 1.** Pour  $\nu = n \in \mathbb{N}^*$ , on montre que  $\Gamma(n) = (n-1)!$  et la définition de l'intégration à un ordre entier (4.1) devient un cas particulier de l'intégration à un ordre non entier (4.2).

#### 4.2.1.2 Sens géométrique et physique de l'intégration non entière

La difficulté d'attribuer un sens géométrique ou physique à l'opérateur d'intégration non entière n'est certainement pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté lorsqu'il a été initialement évoqué.

Néanmoins, la définition (4.2) peut être interprétée comme l'aire que définit la fonction  $f(t)$  pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction  $\mathcal{O}_\nu$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$  :

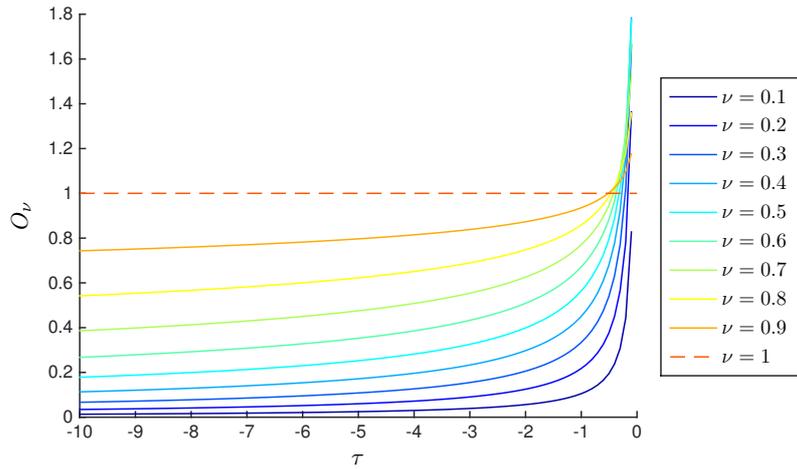
$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathcal{O}_\nu(t-\tau) f(\tau) d\tau = \mathcal{O}_\nu * f(t) \quad (4.4)$$

où

$$\mathcal{O}_\nu(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}. \quad (4.5)$$

D'après la remarque 1, dans le cas où  $\nu = 1$ , la fonction  $\mathcal{O}_\nu$  vaut 1 et  $\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t)$  est une intégrale classique (entière d'ordre 1), toutes les valeurs de  $f(t)$  ayant le même poids sur  $[t_0, t]$ . Si  $\nu$  est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de poids que les valeurs les plus anciennes. La figure 4.1 représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de  $\nu$  comprises entre 0.1 et 1.

A travers cette interprétation géométrique, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration  $\nu$  mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.


 FIGURE 4.1 – Facteur d’oubli :  $\mathcal{O}_\nu(t - \tau)$  pour  $0 < \nu \leq 1$  ( $t = 0, \tau \in [0 \cdots 10]$ )

### 4.2.1.3 Transformée de Laplace de l’intégrale non entière d’une fonction

L’écriture de l’intégration non entière comme un produit de convolution (4.4) permet de calculer la transformée de Laplace de l’intégrale non entière d’une fonction temporelle causale, soit [52] :

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{I}_0^\nu f(t) \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\nu-1} u(t)}{\Gamma(\nu)} * f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\nu-1} u(t)}{\Gamma(\nu)} \right\} \mathcal{L} \{ f(t) \} = \frac{1}{s^\nu} F(s), \quad (4.6)$$

où  $u(t)$  est la fonction de Heaviside,  $F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$  et  $s = \sigma + j\omega$  désigne la variable de Laplace.

Cette relation généralise ainsi la formule bien connue dans le cas entier :

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{I}_{t_0}^n f(t) \} = \frac{1}{s^n} F(s), \quad (4.7)$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  représente l’ordre d’intégration entier.

## 4.2.2 Dérivation non entière

Pour définir la dérivée non entière d’une fonction temporelle, les notations suivantes sont adoptées :

$$\nu = [\nu] + \{\nu\}, \quad (4.8)$$

où  $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $[\nu]$  est sa partie entière et  $\{\nu\}$  sa partie non entière telle que  $0 \leq \{\nu\} < 1$ .

### 4.2.2.1 Définition au sens de Riemann-Liouville

La dérivée d’ordre non entier  $\nu \in \mathbb{R}_+$  d’une fonction  $f(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  au sens de Riemann-Liouville est la dérivée d’ordre entier  $n = [\nu] + 1$  de l’intégrale d’ordre non entier  $[\nu] - \nu + 1$ , soit [58] :

$${}_r \mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left( \mathbf{I}_{t_0}^{[\nu]-\nu+1} f(t) \right). \quad (4.9)$$

En utilisant la définition de l'intégrale non entière (4.2), l'équation (4.9) devient :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left( \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-[\nu]}} d\tau \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t > t_0 \\ \nu > 0 \end{cases}. \quad (4.10)$$

#### 4.2.2.2 Définition au sens de Caputo

La dérivée non entière au sens de *Caputo* résulte de la permutation de la dérivée et de l'intégrale dans l'équation (4.9), soit [10] :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{I}_{t_0}^{[\nu]-\nu+1} \left( \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} f(t) \right). \quad (4.11)$$

En tenant compte de la définition de l'intégrale non entière (4.2), l'équation (4.11) devient :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \int_{t_0}^t \frac{f^{([\nu]+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\nu-[\nu]}} d\tau. \quad (4.12)$$

#### 4.2.2.3 Définition au sens de Grünwald

La définition de la dérivée non entière au sens de *Grünwald* est issue de la généralisation de la définition de *Cauchy* de la dérivée entière. En effet, la dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  d'une fonction réelle est définie par :

$$\mathbf{D}^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (4.13)$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  désigne le coefficient binomial de Newton.

Cette relation étendue à l'ordre non entier donne lieu à la définition de *Grünwald* [27] :

$${}_g\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh), \quad \nu \in \mathbb{R}^+, \quad (4.14)$$

où  $\binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)}$  désigne le coefficient binomial de Newton généralisé.

#### 4.2.2.4 Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle

Du fait de la non unicité de la définition de la dérivée non entière, l'expression de sa transformée de Laplace n'est pas unique et fait apparaître des différences dans la manière de prendre en compte les conditions initiales.

La transformée de Laplace de la dérivée entière d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathbf{D}^{n-k-1} f(t) \Big|_{t=t_0^+}. \quad (4.15)$$

Cette formule peut être généralisée au cas d'une dérivée non entière d'ordre  $\nu$  au sens de *Riemann-Liouville* comme démontré dans [62] :

$$\mathcal{L} \{ {}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \nu \rfloor} s^k \mathbf{I}_0^{1-\nu+k} f(t) \Big|_{t=t_0^+}. \quad (4.16)$$

De la même manière, il est possible de démontrer que la transformée de Laplace de la dérivée non entière d'ordre  $\nu$  au sens de *Caputo* s'écrit [57] :

$$\mathcal{L} \{ {}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \} = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{\lfloor \nu \rfloor} s^{\nu-k-1} \frac{d^k}{dt^k} f(t) \Big|_{t=t_0^+}. \quad (4.17)$$

Les valeurs initiales des dérivées entières et non entières des signaux relaxés à  $t = t_0$  sont nulles. Les expressions des transformées de Laplace des dérivées au sens de *Riemann* et de *Caputo* sont alors identiques et se réduisent à :

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{D}^\nu f(t) \} = s^\nu \mathcal{L} \{ f(t) \}. \quad (4.18)$$

### 4.2.3 Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel

Un dérivateur non entier réel est tel que sa grandeur de sortie  $y(t)$  correspond à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée  $u(t)$ , soit :

$$y(t) = \mathbf{D}^\nu u(t), \quad (4.19)$$

où  $\nu \in \mathbb{R}$  désigne l'ordre de dérivation réel ( $\nu$  pouvant être positif ou négatif, l'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur, soit un intégrateur).

A l'aide de la relation (4.18) et en supposant donc que *tout le passé du signal  $u(t)$  est nul*, la transformée de Laplace de la sortie  $y(t)$  s'écrit :

$$Y(s) = s^\nu U(s) = \mathbf{D}(s)U(s), \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{D}(s)$  désigne la transmittance du dérivateur non entier. La réponse fréquentielle de  $\mathbf{D}(s)$  est déduite en remplaçant  $s$  par  $j\omega$ , soit :

$$\mathbf{D}(j\omega) = (j\omega)^\nu. \quad (4.21)$$

Définis comme le module et l'argument de  $\mathbf{D}(j\omega)$ , le gain et la phase du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |\mathbf{D}(j\omega)| = \omega^\nu \\ \arg(\mathbf{D}(j\omega)) = \nu \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (4.22)$$

Le système d'équation (4.22) révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateur :

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente  $20\nu$  dB par décade ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée  $\varphi = \nu\frac{\pi}{2}$  rad.

La figure 4.2 représente les diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels pour des ordres de dérivation compris entre -1.5 et 1.5.

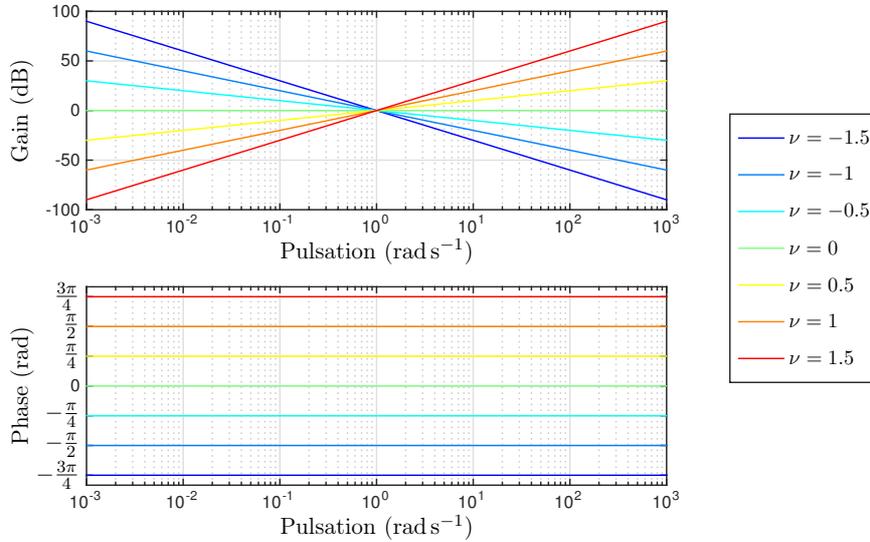


FIGURE 4.2 – Diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels

### 4.3 Modèles non entiers entrée-sortie

De nombreux systèmes physiques, tels que ceux listés dans l'introduction de ce chapitre, présentent, dans une bande de fréquences, un comportement proche de celui de l'opérateur non entier tel que décrit sur la figure 4.2. Il paraît donc naturel d'utiliser cet opérateur pour construire des modèles rendant compte de ce type de comportement entrée-sortie.

Ainsi, les modèles non entiers sont souvent définis dans le domaine fréquentiel. Deux grandes classes peuvent être différenciées : les fonctions de transfert explicites (commensurables ou non) et les fonctions de transfert implicites. Afin de bénéficier du cadre de travail de la représentation d'état tel qu'il existe pour les modèles entiers, la pseudo représentation d'état, associée aux fonctions de transfert explicites commensurables, a par la suite été introduite. Si cette dernière est similaire à une représentation d'état de par son écriture, elle ne reste qu'un modèle du type entrée-sortie et ne permet pas de rendre compte du comportement interne ou de définir correctement des conditions initiales. La représentation diffusive, présentant un état distribué de dimension infinie répond quant à elle à la définition de la représentation d'état en ce sens qu'elle permet de définir de manière correcte les conditions initiales. Elle n'en reste pas moins une représentation dédiée à la modélisation entrée-sortie pour des raisons qui seront développées plus loin dans ce manuscrit.

Cette section s'attache à présenter ces modèles entrée-sortie sur la base desquels ont été développées les méthodes d'analyse et de synthèse présentées dans le chapitre 5.

### 4.3.1 Modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI)

Dans cette première partie sont rappelées quelques définitions et propriétés communes aux différents types de modèles présentés par la suite. Ces définitions et propriétés sont énoncées de manière générale, sans faire appel à un modèle mathématique particulier.

Dans le cas général, le modèle peut être multivariable, c'est-à-dire posséder plusieurs signaux d'entrée, regroupées dans un vecteur  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , et plusieurs signaux de sortie, regroupées dans un vecteur  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Les modèles étudiés sont dynamiques et possèdent ainsi la propriété de causalité : leur comportement à un instant  $t$ , caractérisé par le vecteur  $y(t)$ , dépend des entrées  $u(t)$  présentes et passées. Ce principe de causalité peut être associé à la notion d'état.

L'état, noté  $\eta(t)$ , constitué d'un nombre fini ou infini de variables, contient les informations nécessaires pour décrire l'effet des entrées  $u(t)$  passées sur le futur comportement du modèle caractérisé par les sorties  $y(t)$ .

**Définition 1** (Etat d'un modèle dynamique [29]). *L'état  $\eta(t)$  contient le nombre minimal de variables telles que, si pour  $t = t_0$ ,  $\eta(t_0)$  est connu, alors  $y(t_1)$  et  $\eta(t_1)$  peuvent être déterminés de manière unique pour tout  $t_1 \geq t_0$  si  $u(t)$  est connu sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .*

L'ensemble des variables  $u(t)$ ,  $y(t)$  et  $\eta(t)$  décrivant le comportement dynamique du modèle sont représentées sur la figure 4.3.

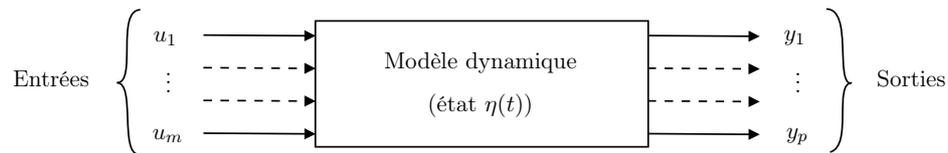


FIGURE 4.3 – Entrées, sorties et états d'un modèle dynamique

Le comportement des systèmes étudiés dans la suite de ce manuscrit sera approché par des modèles possédant les propriétés de linéarité et d'invariance dans le temps.

**Propriété 1** (Linéarité). *Soit  $y_i(t)$  la sortie d'un modèle en réponse à une entrée  $u_i(t)$ . Le modèle est dit linéaire si, pour une combinaison linéaire d'entrées :*

$$u(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (4.23)$$

la réponse  $y(t)$  est une combinaison linéaire des réponses élémentaires à chacune des entrées appliquées individuellement :

$$y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t). \quad (4.24)$$

En pratique, la majorité des modèles décrivant des systèmes physiques sont non linéaires. Leur comportement dans un domaine donné peut cependant être considéré en première approximation comme linéaire.

**Propriété 2** (Invariance dans le temps). Soit  $y(t)$  la sortie d'un modèle en réponse à une entrée  $u(t)$ . Ce modèle est dit invariant dans le temps si, pour tout  $T \geq 0$ , la même entrée décalée d'un temps  $T$  :

$$u_d(t) = u(t + T) \quad (4.25)$$

produit la même sortie décalée de  $T$  :

$$y_d(t) = y(t + T). \quad (4.26)$$

Différents types de modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI) sont présentés dans les parties suivantes.

### 4.3.2 Matrices de transfert non entières

Un outil de modélisation souvent utilisé en Automatique est la matrice de transfert qui permet de caractériser le comportement fréquentiel entrée-sortie d'un système au repos à  $t = 0$  ( $u(t) = 0 \forall t < 0$ ). Elle est obtenue en exprimant la transformée de Laplace du signal de sortie  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  en fonction de celle du signal d'entrée  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , soit :

$$Y(s) = M(s)U(s) \quad (4.27)$$

où  $M(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$  est la matrice de transfert du système. Chaque élément de cette matrice est une fonction de transfert.

Dans le cas des modèles LTI entiers, une fonction de transfert  $G(s)$  s'exprime comme une fonction rationnelle de la variable  $s$ , soit :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4.28)$$

où  $N(s)$  et  $D(s)$  sont des polynômes faisant apparaître des puissances entières de  $s$ .

Dans le cas des modèles LTI non entiers, les fonctions  $N(s)$  et  $D(s)$  font apparaître des puissances non entières. On qualifie ces fonctions de transfert d'explicites lorsque les puissances non entières sont directement appliquées sur la variable  $s$  et d'implicites lorsque les puissances non entières s'appliquent sur des polynômes impliquant la variable  $s$ .

#### 4.3.2.1 Fonctions de transfert non entières explicites

Une fonction de transfert non entière explicite est de la forme générale :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k s^{\nu_{n_k}}}{\sum_{l=1}^{N_d} \beta_l s^{\nu_{d_l}}} \quad (4.29)$$

où  $\{\alpha_k, \beta_l\} \in \mathbb{R}$ ,  $\{\nu_{n_k}, \nu_{d_l}\} \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall k \in \{1 \dots N_n\}$  et  $\forall l \in \{1 \dots N_d\}$ .

Si tous les ordres apparaissant dans la fonction de transfert sont multiples d'un même ordre, le modèle est dit commensurable.

**Définition 2** (Fonction de transfert commensurable). *La fonction de transfert (4.29) est dite commensurable si et seulement si tous les ordres de dérivation apparaissant dans son expression sont multiples d'un même ordre  $\nu = \text{pgcd}(\nu_{z_1}, \dots, \nu_{z_{N_z}}, \nu_{p_1}, \dots, \nu_{p_{N_p}}) = \text{pgcd}(\nu_{n_1}, \dots, \nu_{n_{N_n}}, \nu_{d_1}, \dots, \nu_{d_{N_d}})$  appelé ordre commensurable du modèle.*

Dans ce cas, la fonction de transfert (4.29) s'écrit aussi :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N'_n} \alpha'_k (s^\nu)^k}{\sum_{l=0}^{N'_d} \beta'_l (s^\nu)^l} = \frac{C_0 \prod_{k=1}^{N_3} ((s^\nu)^k - \mathfrak{z}_k)}{\prod_{l=1}^{N_p} ((s^\nu)^l - \mathfrak{p}_l)}. \quad (4.30)$$

Un changement de variable de la forme  $\mathfrak{s} = s^\nu$  fait apparaître  $N(s)$  et  $D(s)$  dans l'équation (4.30) comme des polynômes. Les racines de ces polynômes, notées  $\mathfrak{z}_k$  et  $\mathfrak{p}_l$ , sont respectivement appelées  $s^\nu$ -zéros et  $s^\nu$ -pôles du transfert. Un tel changement de variables permet l'extension aux fonctions de transfert explicites commensurables de diverses méthodes d'analyse et de synthèse dédiées aux fonctions de transferts entières.

### 4.3.2.2 Fonctions de transfert non entières implicites

Dans le cas le plus général, une fonction non entière implicite fait apparaître des puissances non entières de polynômes de la variable de Laplace. Dans la plupart des études, ce polynôme est du premier ordre et la fonction de transfert non entière implicite s'écrit :

$$G(s) = C_0 \frac{\prod_{k=1}^{N_z} (s - z_k)^{\nu_{z_k}}}{\prod_{l=1}^{N_p} (s - p_l)^{\nu_{p_l}}} \quad (4.31)$$

où  $C_0 \in \mathbb{R}$  et  $\{\nu_{z_k}, \nu_{p_l}\} \in \mathbb{R}_+, \forall k \in \{1 \dots N_z\}$  et  $\forall l \in \{1 \dots N_p\}$ .  $\{z_k, p_l\} \in \mathbb{C}$  sont respectivement les zéros et les pôles du transfert considéré qui peuvent être réels ou complexes conjugués.

Les fonctions de transfert implicites ont été pour la première fois introduites par Davidson et Cole pour modéliser la relaxation diélectrique dans le glycérol, le glycol propylène et le  $n$ -propanol [14]. La fonction de transfert implicite utilisée dans leur travail et faisant intervenir un seul pôle est connue dans la littérature sous le nom de fonction de transfert de Davidson-Cole.

**Remarque 2.** *Pour un nombre de paramètres donné, une fonction de transfert explicite ou implicite pourra rendre compte plus fidèlement du comportement dynamique du système à modéliser.*

**Remarque 3.** *Les fonctions de transferts non entières sont ici présentées vis-à-vis de leur capacité à capturer des comportements fréquentiels particuliers. Elles sont ainsi souvent obtenues par identification à partir de données expérimentales. Il est cependant important de noter qu'un certain nombre de phénomènes physiques conduisent à l'écriture d'équations différentielles faisant intervenir les dérivées non entières des signaux. Dans ce cas, une fonction de transfert explicite est obtenue en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle entrée-sortie. Des fonctions de transfert faisant apparaître des termes implicites peuvent quand à elles être obtenues à partir de la résolution d'équations aux dérivées partielles.*

### 4.3.3 Pseudo représentation d'état des modèles non entiers

Afin de bénéficier du cadre de travail de la représentation d'état tel qu'il est défini pour les modèles entiers, la pseudo représentation d'état, associée aux fonctions de transfert explicites commensurables, a été introduite. Si cette dernière est similaire à une représentation d'état de par son écriture, elle ne reste qu'un modèle du type entrée-sortie et ne permet pas de rendre compte du comportement interne.

#### 4.3.3.1 Pseudo représentation d'état

Une fonction de transfert explicite commensurable de la forme (4.30) peut être réécrite de manière équivalente comme la pseudo représentation d'état :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_0^\nu x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad \{x(t), u(t)\} = 0 \quad \forall t < 0 \quad (4.32)$$

où  $\nu$  est l'ordre commensurable,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le *pseudo vecteur d'état*,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  sont des matrices constantes. Une façon d'obtenir cette pseudo représentation passe par le changement de variables  $\mathfrak{s} = s^\nu$  conduisant à écrire le transfert (4.30) comme une fonction rationnelle en  $\mathfrak{s}$ . Les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont ensuite obtenues comme une réalisation de ce transfert rationnel de la même façon que dans le cas des modèles entiers et vérifiant :

$$G(\mathfrak{s}) = C(\mathfrak{s}I - A)^{-1}B + D, \quad (4.33)$$

soit :

$$G(s) = C(s^\nu I - A)^{-1}B + D. \quad (4.34)$$

Le schéma bloc associé à la représentation (4.32) est donné sur la figure 4.4.

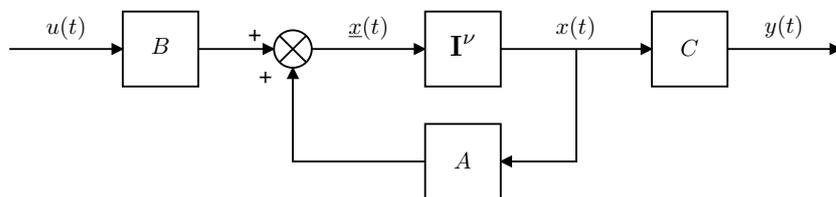


FIGURE 4.4 – Schéma bloc associé à la pseudo représentation d'état (4.32)

Ainsi, contrairement à ce que pourrait laisser penser l'écriture (4.32), la pseudo représentation d'état ne fait pas appel explicitement à l'opérateur de dérivation non entière mais uniquement à celui d'intégration non entière. Ainsi, il n'est pas nécessaire de préciser à quelle définition particulière fait appel l'opérateur de dérivation  $\mathbf{D}_0^\nu$  dans l'équation (4.32). Par ailleurs, même si le système est supposé à conditions initiales nulles à  $t = 0$ , c'est-à-dire que le système est supposé au repos ( $u(t) = y(t) = x(t) = 0, \forall t < 0$ ), il est important de préciser que  $x(t)$  ne

joue pas le rôle d'état pour le modèle non entier. Pour mieux comprendre ce phénomène, considérons dans un premier temps le cas simple d'un intégrateur pur supposé au repos à  $t = 0$ . Cet intégrateur admet une pseudo représentation d'état de la forme (4.32) où  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1$  et  $D = 0$ . Le schéma bloc associé est représenté sur la figure 4.5.

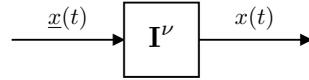


FIGURE 4.5 – Schéma bloc d'un intégrateur pur d'ordre non entier  $\nu$

Dans le cas d'un intégrateur d'ordre entier,  $\nu = 1$  et (4.32) est une représentation d'état du modèle. Plaçons-nous à un instant  $t_1 > 0$ . La valeur de  $x$  peut être calculée si les entrées appliquées entre 0 et  $t_1$  sont connues :

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} \underline{x}(\tau) d\tau = x_1 = cste. \quad (4.35)$$

Les valeurs de  $x(t)$  aux instants postérieurs à  $t_1$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \underline{x}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t_1} \underline{x}(\tau) d\tau}_{x_1 = cste} + \int_{t_1}^t \underline{x}(\tau) d\tau, \quad t > t_1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ainsi,  $x(t)$  peut être calculé en connaissant  $x(t_1)$  ainsi que les entrées  $\underline{x}$  appliquées entre  $t_1$  et  $t$ . La sortie de l'intégrateur à un instant  $t$  donné permet ainsi de résumer tout le passé du système.  $x(t)$  est bien l'état du modèle dynamique, en accord avec la définition 1.

Appliquons le même raisonnement au cas d'un intégrateur non entier d'ordre  $\nu$ . D'après l'équation (4.2) définissant l'intégration non entière, la valeur de  $x$  à un instant  $t_1 > 0$  peut être calculée si les entrées appliquées entre 0 et  $t_1$  sont connues :

$$x(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau = x_1 = cste. \quad (4.37)$$

La valeur de  $x(t)$  à tout instant  $t > t_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_1} (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau}_{\alpha(t) \neq x_1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Deux différences notables peuvent être soulignées par rapport au cas entier. La première est que le terme  $\alpha(t)$  dans l'équation (4.38) n'est pas une constante mais dépend de l'instant  $t$

considéré. De plus, la connaissance de  $x_1 = x(t_1)$  ne permet pas de calculer  $\alpha(t)$ . La sortie  $x$  de l'intégrateur n'est donc pas un état pour le modèle non entier.

Le même raisonnement peut être tenu pour le cas général d'une pseudo représentation d'état de la forme (4.32) où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont quelconques. Les sorties  $x(t)$  des intégrateurs du schéma bloc de la figure 4.4 ne peuvent ainsi être considérées comme les variables d'état du modèle.

**Remarque 4.** Pour calculer le terme  $\alpha(t)$  pour un  $t$  quelconque, il est ainsi nécessaire de connaître  $\underline{x}(t)$ ,  $\forall t \in [0; t_1]$ , soit tout le passé du système. Les modèles non entiers sont ainsi qualifiés de modèles de dimension infinie car une infinité de valeurs sont nécessaires pour résumer leur passé.

Puisque  $x$  ne représente pas l'état réel du modèle non entier (qui est de dimension infinie), il est appelé pseudo état. La représentation (4.32) ne sera donc utilisée par la suite qu'à conditions initiales nulles et pour représenter uniquement le comportement entrée-sortie d'un système.

### 4.3.3.2 Simulation en utilisant l'approximation par pôles et zéros récursifs

Plusieurs méthodes de simulation d'un modèle non entier existent. La méthode utilisée dans ce manuscrit, basée sur la pseudo représentation d'état (4.32), repose sur l'approximation de l'opérateur d'intégration non entière apparaissant dans le schéma bloc de simulation de la figure 4.5 par un modèle rationnel d'ordre  $N$  borné en fréquences noté  $\mathcal{I}_\nu^N(s)$ .

La synthèse de ce modèle approximé, basée sur une approche fréquentielle, se déroule en deux temps. L'intégrateur non entier est d'abord limité à une bande de fréquences. Son comportement fréquentiel est ensuite approximé sur cette bande de fréquences par une fonction de transfert faisant apparaître une distribution récursive de pôles et de zéros.

Soit  $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]}$  un opérateur d'intégration non entier d'ordre  $\nu$  limité à la bande fréquentielle  $[\omega_A, \omega_B]$  :

$$\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]} = \begin{cases} \frac{1}{s^\nu} & \forall \omega \in [\omega_A, \omega_B], \\ \frac{1}{s} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.39)$$

Cet intégrateur borné en fréquence  $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]}$  peut se décomposer comme la mise en série d'un intégrateur entier et d'un dérivateur non entier borné en fréquence tel que décrit dans [55], soit :

$$\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]} = C(\nu) \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}}\right)^{1-\nu} \frac{1}{s}, \quad 0 < \nu < 1, \quad (4.40)$$

où  $\omega_b < \omega_h$ , le gain  $C(\nu)$  étant fixé de manière à obtenir un gain unitaire à la pulsation  $1 \text{ rad.s}^{-1}$  :

$$C(\nu) = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\omega_h}}{1 + j\frac{1}{\omega_b}} \right|^{\nu-1} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{1-\nu} \left(\frac{1 + \omega_b^2}{1 + \omega_h^2}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}. \quad (4.41)$$

**Remarque 5.** *Le choix d'imposer un comportement intégrateur en dehors de la bande de fréquence  $[\omega_A, \omega_B]$ , plutôt qu'un gain constant par exemple, permet d'éviter des problèmes d'erreur statique lors des simulations et d'obtenir un meilleur conditionnement numérique (comportement passe-bas en haute fréquence).*

L'approximation par une fonction de transfert rationnelle d'ordre  $N$  du dérivateur non entier apparaissant dans (4.40) repose sur une distribution récursive de zéros et de pôles réels :

$$\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{1-\nu} \approx D_N(s) \quad (4.42)$$

où :

$$D_N(s) = \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^{1-\nu} \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}}, \quad (4.43)$$

avec :

$$\omega_u = (\omega_h \omega_b)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.44)$$

Les fréquences  $\omega_k$  et  $\omega'_k$ , correspondant respectivement aux zéros et pôles de rang  $k$ , sont déterminées par les relations récursives suivantes :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^{1-\nu} &= \left( \frac{\omega_b}{\omega_u} \right)^{1-\nu} = \frac{1}{\alpha^{N+\frac{1}{2}}} \\ \omega'_0 &= \alpha^{-\frac{1}{2}} \omega_u, \quad \omega_0 = \alpha^{\frac{1}{2}} \omega_u \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} &= \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta > 1 \\ \frac{\omega_{k+1}}{\omega'_k} &= \alpha > 0, \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 0 \\ \nu &= \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha \eta)}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Les rapports  $\alpha$  et  $\eta$ , définis dans (4.45), sont appelés facteurs récursifs. Pour obtenir une approximation satisfaisante de  $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$  dans la bande  $[\omega_A, \omega_B]$ , les pulsations  $\omega_b$  et  $\omega_h$  sont fixées de part et d'autre de  $[\omega_A, \omega_B]$  conformément à  $\omega_b = \chi^{-1} \omega_A$  et  $\omega_h = \chi \omega_B$ ,  $\chi$  étant généralement fixé à 10 ou 100 [55].

Le nombre  $N$  de pôles et de zéros utilisés résulte d'un compromis entre la précision souhaitée et le temps de simulation. Il est généralement fixé à  $N = 2$  fois le nombre de décades apparaissant dans la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$ . Le choix de  $\omega_b$  s'effectue par rapport à la durée  $\Delta T$  du signal d'entrée tandis que  $\omega_h$  est choisi par rapport à sa période d'échantillonnage  $T_e$  :

$$\omega_b \approx \frac{2\pi}{\Delta T}, \quad \omega_h \approx \frac{2\pi}{T_e}. \quad (4.46)$$

Afin d'illustrer la qualité d'approximation selon l'ordre  $N$  choisi, les diagrammes de Bode d'un intégrateur non entier d'ordre 0.5 approximé sur une bande de fréquences sont présentés sur la figure 4.6.

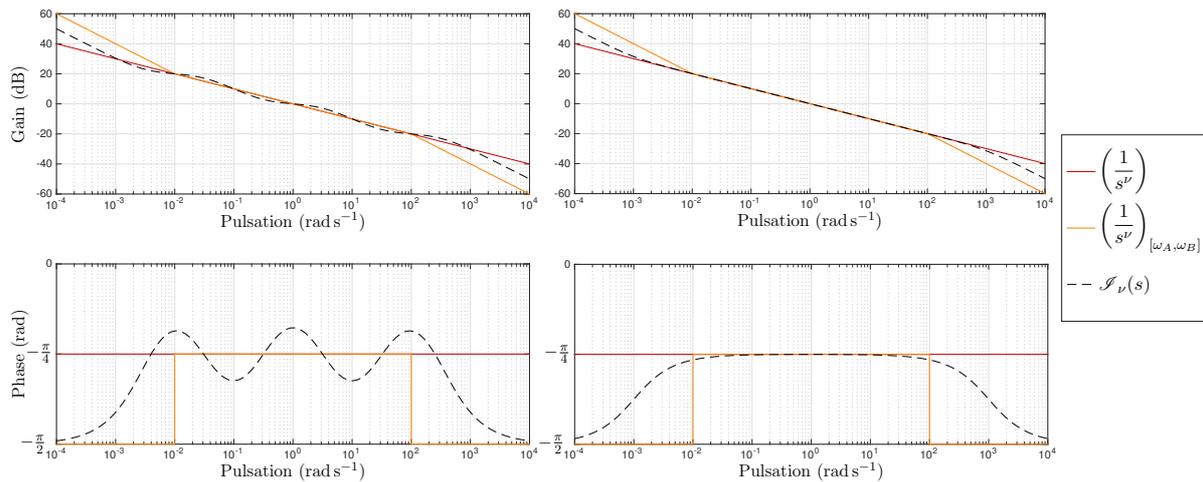


FIGURE 4.6 – Diagrammes de Bode de l'intégrateur  $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)$  d'ordre  $\nu = 0.5$ , de sa version bornée en fréquence  $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]}$  avec  $\omega_A = 1 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}$  et  $\omega_B = 1 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$  et de son approximation  $\mathcal{J}_\nu(s)$  (avec  $N = 3$  pôles pour les tracés de gauche et  $N = 8$  pour les tracés de droite).

La simulation de la pseudo représentation d'état (4.32) pourra ainsi être réalisée à l'aide d'un logiciel de simulation numérique tel que MATLAB/SIMULINK en remplaçant l'intégrateur non entier apparaissant dans le schéma 4.5 par son approximation  $\mathcal{J}_\nu^N(s)$ , tel qu'indiqué sur la figure 4.7.

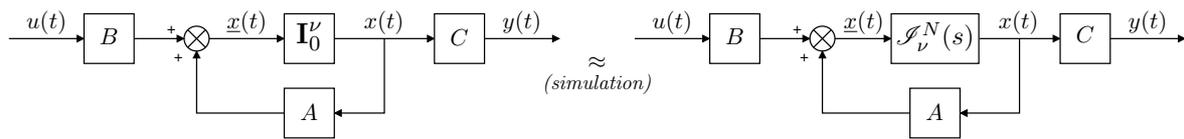


FIGURE 4.7 – Schéma bloc de simulation d'une pseudo représentation d'état non entière

#### 4.3.4 Représentation associant un modèle entier et un modèle diffusif

La représentation décrite dans cette partie résulte de la décomposition de la réponse impulsionnelle d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique (décomposition décrite dans le cas monovariante dans l'ouvrage [55]). La partie exponentielle est décrite comme la réponse d'un modèle entier et la partie apériodique comme celle d'un modèle diffusif tel qu'introduit dans [46]. Le modèle non entier est ainsi décomposé en un sous-modèle entier et un sous-modèle diffusif. Les développements présentés dans cette partie concernent le cas multivariable et sont issus de [A-13].

#### 4.3.4.1 Décomposition modale d'un modèle non entier

Comme pour les modèles entiers, la décomposition modale du système différentiel (4.32) est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x_J(t) &= Jx_J(t) + B_J u(t) \\ y(t) &= C_J x_J(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (4.47)$$

où  $J$  est une matrice de Jordan dont la diagonale est composée des valeurs propres de la matrice  $A$  notées  $\lambda_l$ ,  $l \in \{1, \dots, r\}$  de multiplicité  $n_l$ .

Si le système est au repos à l'instant  $t = 0$  et en utilisant la transformée inverse de Laplace, la sortie  $y(t)$  est donnée par :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( C_J (s^\nu I - J)^{-1} B_J \right) * u(t) + Du(t) \quad (4.48)$$

avec

$$(s^\nu I - J)^{-1} = \text{diag} \left( (s^\nu I - J_{n_1}(\lambda_1))^{-1}, \dots, (s^\nu I - J_{n_l}(\lambda_l))^{-1}, \dots, (s^\nu I - J_{n_r}(\lambda_r))^{-1} \right), \quad (4.49)$$

où l'on suppose que la variable de Laplace  $s$  appartient à un sous-espace de  $\mathbb{C}$  dans lequel  $(s^\nu I - J)^{-1}$  existe et chaque bloc de Jordan est donné par :

$$(s^\nu I - J_{n_l}(\lambda_l))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} & \left( \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^2 & \dots & \left( \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^{n_l} \\ & \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} & & \vdots \\ & & \ddots & \left( \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^2 \\ & & & \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \end{bmatrix}, \quad \sum_{l=1}^r n_l = n. \quad (4.50)$$

La sortie  $y(t)$  est donc une combinaison linéaire de  $n$  termes appelés modes et définis par :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left( \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^q \right\}, \quad q \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in \{1, \dots, r\}. \quad (4.51)$$

#### 4.3.4.2 Calcul des modes

Les modes  $h^{\lambda_l, q}(t)$  définis par la relation (4.51) peuvent tous être décomposés en deux parties [55] :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + h_{ap}^{\lambda_l, q}(t), \quad (4.52)$$

où  $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$ , similaire à la réponse impulsionnelle d'un modèle entier, est la partie exponentielle du mode tandis que  $h_{ap}^{\lambda_l, q}(t)$  est sa partie apériodique.

### Partie exponentielle

La partie exponentielle  $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$  est déduite du calcul des résidus des pôles du mode  $h^{\lambda_l, q}(t)$ . Contrairement aux modèles entiers, ces pôles ne correspondent pas aux valeurs propres de la pseudo matrice d'état  $A$  car ils sont solutions de l'équation :

$$s^\nu - \lambda_l = 0. \quad (4.53)$$

Une valeur propre  $\lambda_l$  de la matrice  $A$  ne génère de pôles que si l'ensemble  $\mathbb{K}_{\lambda_l}$  défini par

$$\mathbb{K}_{\lambda_l} = \left\{ k \in \mathbb{Z} : -\frac{\nu}{2} - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} < k < \frac{\nu}{2} - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} \right\}, \quad (4.54)$$

n'est pas vide. Dans ce cas,  $n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}} = \text{card}(\mathbb{K}_{\lambda_l})$  pôles  $p_j^{\lambda_l}, j \in \{1, \dots, n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}}\}$  peuvent être associés à  $\lambda_l$ . Ces pôles sont définis par :

$$p_j^{\lambda_l} = |p_j^{\lambda_l}| e^{j\theta_j^{\lambda_l}}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |p_j^{\lambda_l}| = |\lambda_l|^{\frac{1}{\nu}} \\ \theta_j^{\lambda_l} = \frac{1}{\nu} \arg(\lambda_l) + \frac{2k\pi}{\nu} \\ k \in \mathbb{K}_{\lambda_l} \end{cases}. \quad (4.55)$$

$h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$  est donc définie par :

$$h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) = \sum_{j=1}^{n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}}} \frac{p_j^{\lambda_l}}{\lambda_l^q} Q_{q-1} \left( \frac{1}{\nu}, t p_j^{\lambda_l} \right) e^{t p_j^{\lambda_l}}, \quad (4.56)$$

où  $Q_k(\alpha, \beta)$  est un polynôme défini par [55] :

$$\begin{cases} Q_0(\alpha, \beta) = \alpha \\ Q_k(\alpha, \beta) = (\alpha\beta + \alpha - \beta) Q_{k-1}(\alpha, \beta) + \alpha\beta \frac{\partial}{\partial \beta} Q_{k-1}(\alpha, \beta) \end{cases}. \quad (4.57)$$

### Partie apériodique

Comme démontré dans [55, 42],  $h_{ap}^{\lambda_l}(t)$  est définie par :

$$h_{ap}^{\lambda_l}(t) = \int_0^{+\infty} \mu^{\lambda_l, q}(\chi) e^{-t\chi} d\chi, \quad (4.58)$$

avec

$$\mu^{\lambda_l, q}(\chi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \binom{q}{j} (\lambda_l)^j \chi^{\nu(q-j)} \sin(\nu\pi(q-j))}{(\chi^{2\nu} - 2\lambda_l \chi^\nu \cos(\nu\pi) + \lambda_l^2)^q}, \quad \binom{q}{j} = \frac{q!}{j!(q-j)!}. \quad (4.59)$$

### 4.3.4.3 Représentation d'un modèle non entier par l'association d'un modèle entier et d'un modèle diffusif

Comme pour les modes, la réponse  $y(t)$  du modèle (4.32) avec  $D = 0$ , peut être représentée comme la somme :

$$y(t) = y_{exp}(t) + y_{ap}(t), \quad y_{exp}(t) \in \mathbb{R}^p, \quad y_{ap}(t) \in \mathbb{R}^p \quad (4.60)$$

avec

$$y_{exp}(t) = \int_0^t C_J \begin{bmatrix} h_{exp}^{\lambda_1}(\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & h_{exp}^{\lambda_r}(\tau) \end{bmatrix} B_J u(t - \tau) d\tau \quad (4.61)$$

$$y_{ap}(t) = \int_0^t C_J \begin{bmatrix} h_{ap}^{\lambda_1}(\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & h_{ap}^{\lambda_r}(\tau) \end{bmatrix} B_J u(t - \tau) d\tau, \quad (4.62)$$

et

$$h_{exp}^{\lambda_l}(\tau) = \begin{bmatrix} h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) & h_{exp}^{\lambda_l,2}(\tau) & \cdots & h_{exp}^{\lambda_l,n_l}(\tau) \\ & h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) & & \vdots \\ & & \ddots & h_{exp}^{\lambda_l,2}(\tau) \\ & & & h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) \end{bmatrix}, \quad h_{ap}^{\lambda_l}(\tau) = \begin{bmatrix} h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) & h_{ap}^{\lambda_l,2}(\tau) & \cdots & h_{ap}^{\lambda_l,n_l}(\tau) \\ & h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) & & \vdots \\ & & \ddots & h_{ap}^{\lambda_l,2}(\tau) \\ & & & h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

En utilisant la relation (4.58) donnant l'expression de la partie aperiodique d'un mode, la relation (4.62) devient :

$$y_{ap}(t) = C_J \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \mu^{\lambda_1}(\chi) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{\lambda_r}(\chi) \end{bmatrix} w(\chi, t) d\chi = C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \quad (4.64)$$

avec

$$\mu^{\lambda_l}(\chi) = \begin{bmatrix} \mu^{\lambda_l,1}(\chi) & \mu^{\lambda_l,2}(\chi) & \cdots & \mu^{\lambda_l,n_l}(\chi) \\ & \mu^{\lambda_l,1}(\chi) & & \vdots \\ & & \ddots & \mu^{\lambda_l,2}(\chi) \\ & & & \mu^{\lambda_l,1}(\chi) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w(\chi, t) = \int_0^t e^{-\tau\chi} B_J u(t - \tau) d\tau \quad (4.65)$$

d'où

$$\dot{w}(\chi, t) = -\chi w(\chi, t) + B_J u(t), \quad w(\chi, t) \in \mathbb{R}^m, \quad \chi \in \mathbb{R}^+. \quad (4.66)$$

Les relations (4.64) et (4.66) permettent de définir le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{w}(\chi, t) = -\chi w(\chi, t) + B_J u(t) \\ y_{ap}(t) = C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \end{cases}, \quad (4.67)$$

où les conditions initiales sont définies par  $w(\chi, 0) = \rho(\chi)$ . Le système (4.67) peut être réécrit :

$$\begin{cases} \dot{w}(\chi, t) &= -\chi w(\chi, t) + B_J u(t) \\ y_{ap}(t) &= \frac{1}{2} C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi + \frac{1}{2} C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \end{cases} \quad (4.68)$$

En faisant les changements de variables  $z = \frac{\sqrt{\chi}}{2\pi}$  pour la première intégrale de la relation (4.68) et  $z = -\frac{\sqrt{\chi}}{2\pi}$  pour la seconde intégrale,  $\Psi(z, t) = w(4\pi^2 z^2, t)$  représentant la transformée de Fourier de la fonction  $\Phi(\zeta, t)$  avec  $\Psi(z, 0) = \rho(4\pi^2 z^2)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , il est démontré dans [46] que pour un modèle commensurable, la relation (4.68) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} &= (2i\pi z)^2 \Psi(z, t) + B_J \mathcal{F}\{u(t)\} \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 z \mu(4\pi^2 z^2) e^{-2i\pi z \zeta} dz \right) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases} \quad (4.69)$$

En appliquant le changement de variable  $\tilde{z} = -z$  au système (4.69) et en prenant sa transformée de Fourier inverse, celle-ci devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\zeta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \Phi(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + B_J u(t) \delta(\zeta) \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} m(\zeta) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases}, \quad (4.70)$$

avec :

$$m(\zeta) = \mathcal{F}\{-4\pi^2 \tilde{z} \mu(4\pi^2 \tilde{z}^2)\} \quad \text{et} \quad \Phi(\zeta, 0) = \mathcal{F}^{-1}\{\rho(4\pi^2 \tilde{z}^2)\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (4.71)$$

Etant donnée la relation (4.61), tout modèle non entier peut s'écrire :

$$y(t) = y_{exp}(t) + y_{ap}(t) \quad (4.72)$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) &= P\eta(t) + B_P u(t) \\ y_{exp}(t) &= C_P \eta(t) \end{cases} \quad (4.73)$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\zeta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \Phi(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + B_J u(t) \delta(\zeta) \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} m(\zeta) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases}. \quad (4.74)$$

La représentation d'état du modèle de réponse impulsionnelle  $h_{exp}^{\lambda_l}(t)$  générée par  $\lambda_l$  est :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_l(t) &= P_l \eta_l(t) + B_l u(t) \\ y_l(t) &= C_l \eta_l(t) \end{cases}. \quad (4.75)$$

La transformée de Laplace de la relation (4.56) avec  $q = 1$  permet de déduire les matrices du système (4.75) :

$$P_l = \begin{bmatrix} p_1^{\lambda_l} & & \\ & \cdots & \\ & & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l} \end{bmatrix}, \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{p_1^{\lambda_l}}{\nu \lambda_l} b_{l1} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_l}}{\nu \lambda_l} b_{lm} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l}}{\nu \lambda_l} b_{l1} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l}}{\nu \lambda_l} b_{lm} \end{bmatrix}, \quad C_l = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1l} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{pl} & \cdots & c_{pl} \end{bmatrix}}_{n_{\mathbb{K}\lambda_l} \text{ colonnes}} \quad (4.76)$$

Les matrices  $C_P$ ,  $P$  et  $B_P$  sont déduites de la mise en commun de toutes les représentations d'état (4.75) :

$$C_P = \left[ \begin{array}{c|c|c} c_{11} & \cdots & c_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline c_{p1} & \cdots & c_{p1} \end{array} \right] \cdots \left[ \begin{array}{c|c} c_{1n} & c_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \hline c_{pn} & c_{pn} \end{array} \right], \quad (4.77)$$

$n_{\mathbb{K}\lambda_1}$  colonnes                       $n_{\mathbb{K}\lambda_n}$  colonnes

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c} p_1^{\lambda_1} & & \\ \vdots & & \\ & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1} & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & p_1^{\lambda_n} \\ & & \vdots \\ & & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n} \end{array} \right], \quad B_P = \left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{p_1^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{11} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{11} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{1m} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \frac{p_1^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{n1} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{n1} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{nm} \end{array} \right]. \quad (4.78)$$

Un modèle non entier peut ainsi être vu comme un modèle de dimension infinie décrit par un ensemble d'équations de diffusion associé à un modèle d'ordre entier classique, comme représenté sur la figure 4.8.

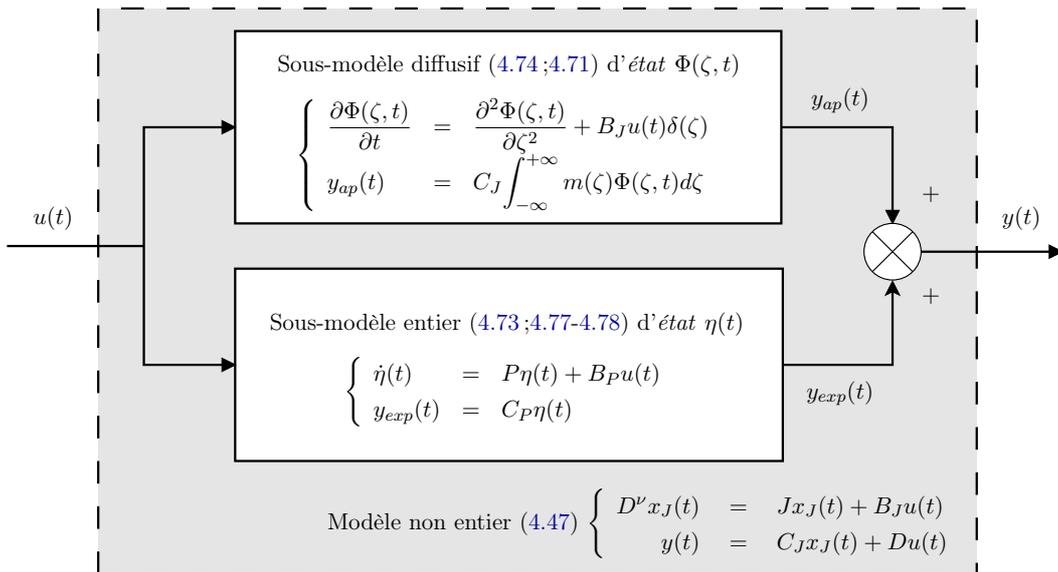
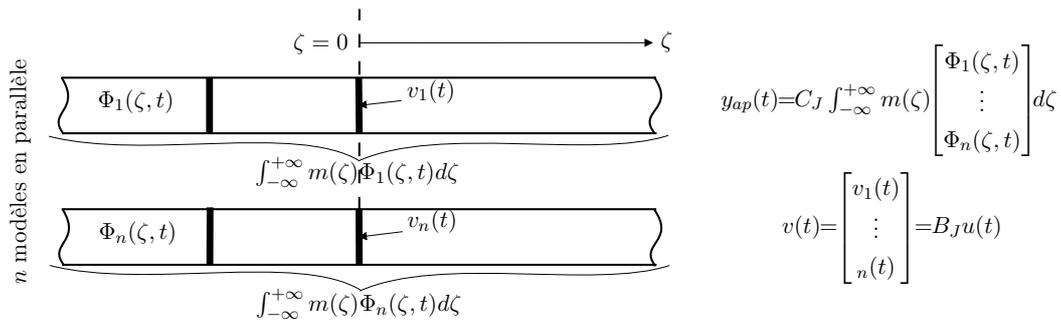


FIGURE 4.8 – Représentation d'un modèle non entier comme l'association d'un modèle entier classique et d'un modèle parabolique

La figure 4.9 illustre l'interprétation du sous-modèle diffusif de sortie  $y_{ap}(t)$ .  $\Phi(\zeta, t)$  est le vrai vecteur d'état du sous-système qui est de dimension infinie par rapport à  $\zeta$ .  $u(t)$  est le signal d'entrée du modèle linéaire entier et du modèle de dimension infinie. Notons que pour ce dernier, il est appliqué à  $\zeta = 0$ .

FIGURE 4.9 – Représentation du modèle de sortie  $y_{ap}(t)$ 

L'interprétation de la figure 4.9 met également en évidence qu'un modèle non entier est doublement infini : infini du fait du caractère distribué de l'état, mais également sur un espace de dimension infinie [A-13].

## 4.4 Conclusion

Les paragraphes précédents ont été consacrés à la description de l'opérateur de dérivation non entière et à son utilisation en modélisation.

Après avoir introduit l'opérateur d'intégration non entière et ses propriétés, différentes définitions de la dérivation non entière ont été présentées. Les propriétés inhérentes à l'opérateur d'intégration non entière ont permis de révéler son aptitude à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion. Différents modèles faisant intervenir cet opérateur ont ensuite été présentés : les fonctions de transferts explicites (commensurables ou non), les fonctions de transferts implicites, la pseudo-représentation d'état et une représentation associant un modèle diffusif et un modèle entier. Il est à noter que ces modèles se limitent à la retranscription du comportement entrée-sortie des systèmes modéliser. Enfin, la méthode utilisée dans ce mémoire pour simuler ces modèles a été décrite : l'approximation par pôles et zéros récursifs des intégrateurs mis en jeu dans la pseudo représentation d'état.

Si les modèles non entiers sont bien adaptés pour rendre compte fidèlement et avec un nombre de paramètres réduit du comportement entrée-sortie de nombreux phénomènes physiques, l'étude de leurs propriétés et leur utilisation pour la synthèse de lois de commande ou de modules de diagnostic nécessite des outils spécifiques. Ainsi, le prochain chapitre s'attache à décrire des méthodes d'analyse et de synthèse dédiées à ces modèles auxquelles j'ai contribué dans le cadre de mon travail dans l'équipe CRONE.



## Chapitre 5

# Méthodes d'analyse et de synthèse basées sur des modèles non entiers entrée-sortie

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>72</b>
<b>5.2</b>	<b>Analyse et synthèse basées sur la reformulation d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain</b>	<b>73</b>
<b>5.3</b>	<b>Méthodes d'analyse et de synthèse dédiées aux modèles non entiers commensurables</b>	<b>80</b>
5.3.1	Analyse de stabilité et stabilisation	80
5.3.2	Commande $\mathcal{H}_\infty$	89
5.3.3	Diagnostic	99
<b>5.4</b>	<b>Contributions relatives aux autres classes de modèles non entiers</b>	<b>104</b>
5.4.1	Analyse de stabilité des modèles non commensurables	104
5.4.2	Formules analytiques pour le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ des modèles implicites	108
<b>5.5</b>	<b>Conclusion et autres contributions</b>	<b>112</b>

---

## 5.1 Introduction

Les modèles présentés dans le chapitre 4 mettent à profit l'opérateur de dérivation non entière pour décrire, de manière compacte (au sens du nombre de paramètres mis en jeu) et fidèle, le comportement dynamique entrée-sortie de systèmes à mémoire longue. Dès lors se pose la question de leur utilisation dans le cadre de la synthèse de lois de commande ou de diagnostic.

La plupart des problèmes présentés dans cette partie sont formulés à partir du modèle standard de la figure 5.1. Les signaux d'entrée sont classés en signaux de perturbations  $w \in \mathbb{R}^{m_w}$  et en signaux de commande  $u \in \mathbb{R}^m$ . De même, les signaux de sortie sont séparés en signaux mesurés  $y \in \mathbb{R}^p$  et en signaux contrôlés  $z \in \mathbb{R}^{p_z}$ . Le transfert ainsi défini entre  $w$  et  $z$ , noté  $T_{wz}$ , permet d'analyser les performances du système de commande en termes de normes systèmes telles que les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . L'étude des caractéristiques du système bouclé  $\Sigma_{bf}$  par une loi de commande  $K$  donnée porte le nom d'analyse. Celle-ci peut porter sur la stabilité ou sur les performances traduites sous formes de contraintes sur le transfert  $T_{wz}$ . Si le modèle  $\Sigma$  est affecté par des incertitudes  $\Delta$ , on parle d'analyse robuste. Il s'agit alors de garantir les propriétés de  $\Sigma_{bf}$  quelle que soit la valeur de  $\Delta$  appartenant à un domaine  $\mathbb{A}$ . Le problème de synthèse de lois de commande consiste quant à lui à déterminer  $K$  permettant de garantir la stabilité et un niveau de performance donné pour  $\Sigma_{bf}$ . Le problème de diagnostic vise enfin à déterminer un générateur de signaux indicateurs de défauts ou résidus dont l'analyse permet de générer des alarmes synonymes de l'occurrence d'une défaillance ainsi que de localiser l'élément défaillant.

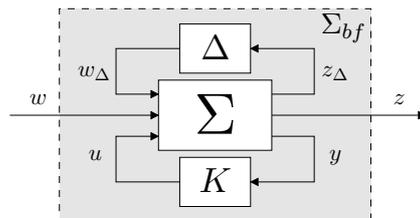


FIGURE 5.1 – Modèle standard pour l'analyse des systèmes de commande à contre-réaction

Ce chapitre s'attache à présenter différents résultats que j'ai contribué à développer et qui permettent de résoudre différents problèmes d'analyse et de synthèse lorsque le modèle considéré  $\Sigma$  est non entier. La première approche, détaillée dans la partie 5.2, consiste à construire un modèle entier incertain dont l'ensemble des réalisations possibles contient le modèle non entier étudié. Ce type d'approche, bien qu'introduisant artificiellement une incertitude, permet l'utilisation de méthodes éprouvées d'analyse et de synthèse robustes développées dans le cas des modèles entiers. Dans la partie 5.3 sont présentés des résultats d'analyse et de synthèse développés spécifiquement pour les modèles non entiers commensurables décrits sous la forme de pseudo représentation d'état. Ces résultats permettent de traiter les problèmes suivants : analyse de stabilité et stabilisation ; analyse et commande  $\mathcal{H}_\infty$  ; diagnostic. Enfin, la partie 5.4 est consacrée aux résultats dédiés aux autres classes de modèles non entiers : l'analyse de stabilité des modèles non commensurables et le calcul analytique de la norme  $\mathcal{H}_2$  des modèles implicites.

## 5.2 Analyse et synthèse basées sur la reformulation d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain

### 5.2.1 Introduction

Pour traiter un problème de commande impliquant un système dynamique décrit par un modèle non entier, une approche simple consiste à l'approximer par un modèle entier, à l'aide par exemple de l'approximation par pôles et zéros récurrents décrite au paragraphe 4.3.3.2. Les méthodes d'analyse et de synthèse développées dans le cas entier peuvent alors être utilisées. Une telle approche présente l'intérêt de ne pas nécessiter le développement de nouvelles méthodes de synthèse. Cependant, si l'erreur d'approximation n'est pas prise en compte, cette méthode ne permet pas de garantir la validité des résultats obtenus.

Ainsi, comme annoncé en introduction de ce chapitre, l'idée développée ici est de décrire le modèle non entier  $H(s)$  comme un modèle entier  $H_0(s)$  affecté d'une incertitude dynamique  $\delta(s)$  (figure 5.2). Le modèle non entier initial est alors vu comme une réalisation du modèle entier incertain  $H^i(s) = F_u(H_0(s), \delta(s))$  pour une valeur donnée de  $\delta(s)$ .

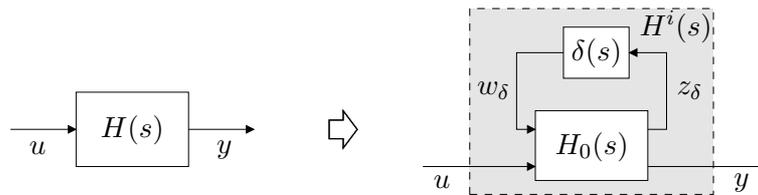


FIGURE 5.2 – Description d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain

Les techniques d'analyse et de commande robuste développées dans le cas entier peuvent alors être utilisées afin d'obtenir un résultat garanti quelle que soit la valeur de  $\delta(s)$  appartenant au domaine incertain  $\Delta$ . L'incertitude ainsi introduite va néanmoins conduire à un certain pessimisme des résultats. Se pose donc la question de la détermination du modèle incertain  $H^i(s)$ , et en particulier du modèle nominal entier  $H_0(s)$ . Dans ce travail, réalisé dans le cadre des travaux de thèse de Lamine Fadiga, notre choix s'est porté sur la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique introduite dans la partie 4.3.4. En effet, cette dernière décrit naturellement le modèle non entier comme l'interconnexion d'un modèle entier et d'un modèle diffusif.

### 5.2.2 Décomposition du modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique

Soit  $H(s)$  la fonction de transfert d'un modèle non entier d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{l=0}^q q_l s^{\beta_l}}{\sum_{k=0}^m r_k s^{\alpha_k}}, \quad (5.1)$$

avec  $\beta_{l+1} \geq \beta_l \geq 0$  et  $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \geq 0$ . Sa décomposition en éléments simples est donnée par :

$$H(s) = \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^{n_l} \left( \frac{1}{(s^\nu - \lambda_l)} \right)^q = \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^{n_l} H^{\lambda_l, q}(s). \quad (5.2)$$

où  $\lambda_l$ ,  $l \in \{1 \dots r\}$  sont les  $r$   $s^\nu$ -pôles de  $H(s)$  de multiplicité  $q \in \{1 \dots n_l\}$ . Comme montré dans la partie 4.3.4.3, chaque mode  $h^{\lambda_l, q}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H^{\lambda_l, q}(s)\}$  se décompose en une partie exponentielle et une partie apériodique, soit :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + h_{ap}^{\lambda_l, q}(t). \quad (5.3)$$

La partie exponentielle  $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$  étant donnée par (4.55–4.56) et la partie apériodique  $h_{ap}^{\lambda_l, q}(t)$  par (4.58–4.59), la réponse impulsionnelle  $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\}$  s'écrit :

$$h(t) = h_{exp}(t) + h_{ap}(t), \quad (5.4)$$

où  $h_{exp}(t)$  et  $h_{ap}(t)$  correspondent à la somme des réponses impulsionnelles de chaque mode :

$$h_{exp}(t) = \sum_l \sum_q h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) \quad , \quad h_{ap}(t) = \int_0^{+\infty} \mu(\chi) e^{-t\chi} d\chi \quad (5.5)$$

avec

$$\mu(\chi) = \sum_l \sum_q \mu^{\lambda_l, q}(\chi). \quad (5.6)$$

La transformée de Laplace de (5.4) conduit au schéma bloc de la figure 5.3 avec :

$$H(s) = \mathcal{L} \{h(t)\} = \mathcal{L} \{h_{exp}(t)\} + \mathcal{L} \{h_{ap}(t)\} = H_{exp}(s) + H_{ap}(s). \quad (5.7)$$

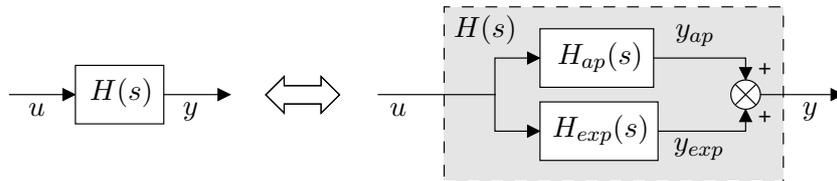


FIGURE 5.3 – Décomposition d'un modèle non entier en partie exponentielle et apériodique

### 5.2.3 Traitement de la partie aperiodique comme une incertitude

Le schéma bloc de la figure 5.3 permet d'écrire le modèle non entier  $H(s)$  comme un modèle entier affecté d'une incertitude dynamique additive, comme représenté sur la figure 5.4 où  $\gamma_{ap} = \|H_{ap}(s)\|_{\infty}$  et où le modèle nominal  $H_0(s)$  dépend de  $\gamma_{ap}$  et de  $H_{exp}(s)$ . Une telle approche est adoptée dans [30].

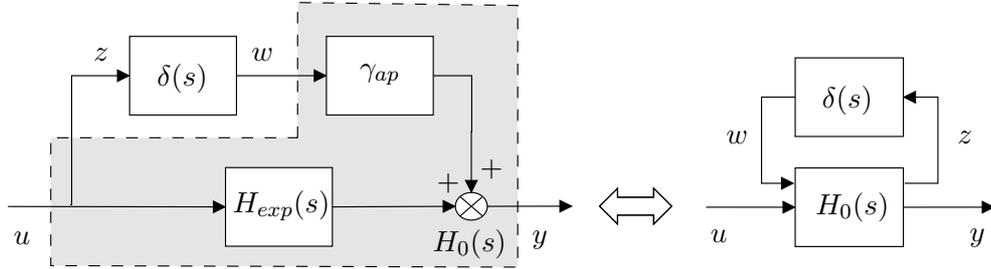


FIGURE 5.4 – Ecriture de  $H(s)$  comme un modèle entier affecté d'une incertitude additive

Dans ce cas, l'ensemble de la partie aperiodique est traitée comme une incertitude de modèle. L'inconvénient de cette approche est que la partie aperiodique peut être prépondérante devant la partie exponentielle. Cette dernière peut même être nulle dans certains cas, comme lorsque aucun  $s^{\nu}$ -pôle ne génère de pôle (c.f. section 4.3.4.2). C'est par exemple le cas du transfert suivant :

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.2} + 1}. \quad (5.8)$$

$H(s)$  ne génère pas de pôle car pour  $\nu = 0.2$  et  $\lambda_l = -1$ , l'ensemble  $\mathbb{K}_{\lambda_l}$  défini par la relation (4.54) s'écrit

$$\mathbb{K}_{-1} = \{k \in \mathbb{Z} : -0.6 < k < -0.4\} = \emptyset. \quad (5.9)$$

C'est pourquoi nous proposons au paragraphe suivant d'inclure une partie du comportement aperiodique dans le modèle nominal.

### 5.2.4 Réduction de l'incertitude par inclusion d'une partie du comportement aperiodique dans le modèle nominal

Le transfert  $H_{ap}(s)$  associé à la partie aperiodique est donné par :

$$H_{ap}(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^{+\infty} \mu(\chi) e^{-t\chi} d\chi \right\} = \int_0^{\infty} \frac{\mu(\chi)}{s + \chi} d\chi. \quad (5.10)$$

En utilisant le changement de variable  $\chi = e^{-z}$  et donc  $d\chi = -e^{-z} dz$ , la relation (5.10) devient :

$$H_{ap}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz. \quad (5.11)$$

L'intégrale apparaissant dans (5.11) peut être découpée en trois parties, conduisant à :

$$H_{ap}(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z_N} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^1(s)} + \underbrace{\int_{z_N}^{z_M} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^2(s)} + \underbrace{\int_{z_M}^{\infty} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^3(s)}. \quad (5.12)$$

où  $\mu(e^{-z})$  peut s'écrire comme suit, d'après les relations (5.6) et (4.59) :

$$\mu(e^{-z}) = \sum_l \sum_q \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \binom{q}{j} (\lambda_l)^j e^{-z\nu(q-j)} \sin(\nu\pi(q-j))}{(e^{-2z\nu} - 2\lambda_l e^{-z\nu} \cos(\nu\pi) + \lambda_l^2)^q}. \quad (5.13)$$

Afin de déterminer un modèle incertain associé à  $H_{ap}(s)$ , des majorants en terme de gain pour les transferts  $H_{ap}^1(s)$ ,  $H_{ap}^2(s)$  et  $H_{ap}^3(s)$  ont été déterminés dans le cadre des travaux de thèse de Lamine Fadiga et sont rappelés ici (les détails des calculs sont disponibles dans la référence [A-5]).

#### 5.2.4.1 Détermination d'un majorant de $H_{ap}^1$

En conservant les termes prépondérants lorsque  $z \rightarrow -\infty$  dans l'expression de  $\mu(e^{-z})$  donnée par (5.13), le transfert  $H_{ap}^1(s)$  peut être majoré en terme de gain par la constante  $\overline{H_{ap}^1}$  comme indiqué dans l'expression suivante :

$$|H_{ap}^1(j\omega)| \leq M_1 |K_N| \int_{-\infty}^{z_N} e^{\tau_N z} dz = \underbrace{M_1 |K_N| e^{\tau_N z_N}}_{\overline{H_{ap}^1}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (5.14)$$

où  $M_1$  est un réel supérieur à 1,  $\tau_N \in \mathbb{R}_+$  est fonction de  $\nu$ ,  $q$  et  $K_N \in \mathbb{R}$ .

#### 5.2.4.2 Détermination d'un majorant de $H_{ap}^3$

En procédant de la même manière lorsque  $z \rightarrow +\infty$ , le transfert  $H_{ap}^3(s)$  peut être majoré par une fonction de transfert rationnelle (entière)  $\overline{H_{ap}^3}(s)$  :

$$|H_{ap}^3(j\omega)| \leq \frac{M_3 |K_M|}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z_M}} + 1 \right|} \int_{z_M}^{\infty} e^{-\tau_M z} dz = \underbrace{\frac{M_3 |K_M|}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z_M}} + 1 \right|} e^{-\tau_M z_M}}_{\overline{H_{ap}^3}(j\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (5.15)$$

où  $M_3$  est un réel supérieur à 1,  $\tau_M \in \mathbb{R}_+$  est fonction de  $\nu$ ,  $q$  et  $K_M \in \mathbb{R}$ .

#### 5.2.4.3 Détermination d'un majorant de $H_{ap}^2$

$H_{ap}^1(s)$  et  $H_{ap}^3(s)$  ont été majorés en prenant la limite de leurs expressions pour  $z$  tendant vers  $-\infty$  et  $+\infty$  respectivement. Une telle procédure n'est pas possible pour  $H_{ap}^2(s)$ . Nous avons

choisi d'utiliser la méthode des trapèzes avec  $N$  intervalles pour discrétiser l'intégrale apparaissant dans l'expression de  $H_{ap}^2(s)$ .

Le transfert  $H_{ap}^2(s)$  peut ainsi être approximé comme suit :

$$|H_{ap}^2(j\omega)| = \left| \tilde{H}_{ap}^2(j\omega) \right| + E_{ap}^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (5.16)$$

où  $\tilde{H}_{ap}^2(s)$  est une fonction rationnelle (entière) :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ap}^2(s) = & \frac{e^{-z_N}}{s + e^{-z_N}} \int_{z_N}^{z_N+h} \mu(e^{-z}) \left( \frac{z_{N+h} - z}{z_{N+h} - z_N} \right) dz \\ & + \frac{e^{-(z_N+Nh)}}{s + e^{-(z_N+Nh)}} \int_{z_N+(N-1)h}^{z_N+Nh} \mu(e^{-z}) \left( \frac{z - z_N + (N-1)h}{z_{N+Nh} - z_N - (N-1)h} \right) dz \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{e^{-z_N-kh}}{s + e^{-z_N-kh}} \left( \int_{z_N+(k-1)h}^{z_N+kh} \mu(e^{-z}) \left( \frac{z - z_N - (k-1)h}{h} \right) dz + \right. \\ & \left. \int_{z_N+kh}^{z_N+(k+1)h} \mu(e^{-z}) \left( \frac{z_N + (k+1)h - z}{h} \right) dz \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Un majorant en termes de gain entre  $H_{ap}^2(s)$  et son approximation  $\tilde{H}_{ap}^2(s)$  est donné par :

$$\overline{E_{ap}^2}(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{30}} h^{\frac{5}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} I_{\mu,k} \max_{z \in [z_N+kh, z_N+(k+1)h]} \left| \frac{\frac{\omega}{e^{-z}}}{\left( \frac{\omega^2}{e^{-2z}} + 1 \right)} \right|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (5.18)$$

où :

$$h = \frac{z_M - z_N}{N}, \quad (5.19)$$

et où  $I_{\mu,k} = [\|\mu(e^{-z})\|_{L_2}]_{[z_k, z_{k+1}]}$  peut être calculé avec une très grande précision car le pas de discrétisation utilisé pour évaluer cette intégrale n'a aucune incidence sur la complexité de l'approximation obtenue.

#### 5.2.4.4 Majoration du modèle non entier par un modèle entier associé à une erreur dynamique non rationnelle

Les développements précédents permettent de déterminer un majorant  $\overline{H_{ap}}(s)$  de la partie a périodique  $H_{ap}(s)$  tel que  $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$  :

$$|H_{ap}(j\omega)| \leq |\overline{H_{ap}}(j\omega)| = \left| \tilde{H}_{ap}^2(j\omega) \right| + \overline{E_{ap}}(\omega) \quad (5.20)$$

avec :

$$\overline{E_{ap}}(\omega) = \overline{E_{ap}^2}(\omega) + \overline{H_{ap}^1} + \left| \overline{H_{ap}^3}(j\omega) \right| \quad (5.21)$$

où  $\overline{H_{ap}^1}$  est une constante donnée par (5.14),  $\tilde{H}_{ap}^2(s)$  et  $\overline{H_{ap}^3}(s)$  sont des transferts entiers respectivement donnés par (5.15) et (5.16) et  $\overline{E_{ap}^2}(\omega)$  est une fonction de  $\omega$  donnée par (5.18).

Ayant défini un majorant de la partie aperiodique, l'ensemble du modèle non entier peut être majoré par le transfert  $\overline{H}(s)$  tel que  $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$  :

$$|H(j\omega)| \leq |\overline{H}(j\omega)| = |H_0(j\omega)| + \overline{E_{ap}}(\omega) \quad (5.22)$$

où  $|H_0(j\omega)|$  est le gain du transfert entier :

$$H_0(s) = H_{exp}(s) + \tilde{H}_{ap}^2(s). \quad (5.23)$$

Le modèle non entier est ainsi majoré, en termes de gain, par un modèle entier  $H_0(s)$  donné par (5.23) associé à une erreur dynamique  $\overline{E_{ap}}(\omega)$  non rationnelle donnée par (5.21).

### 5.2.4.5 Écriture du modèle non entier comme un modèle entier affecté d'une incertitude additive

Afin de réécrire  $\overline{H}(s)$  comme un modèle incertain, l'approche la plus directe est d'utiliser une forme additive comme suggéré par la forme de l'équation (5.22). Si l'on majore l'erreur non rationnelle  $\overline{E_{ap}}(\omega)$  par sa valeur maximale, on obtient le modèle incertain suivant :

$$H_i^a(s) = H_0(s) + \left\| \overline{E_{ap}}(\omega) \right\|_{\infty} \delta(s) \quad (5.24)$$

où  $\left\| \overline{E_{ap}}(\omega) \right\|_{\infty} = \sup_{\omega} \overline{E_{ap}}(\omega)$  et  $\delta(s)$  est une incertitude dynamique normalisée telle que  $\|\delta(s)\|_{\infty} < 1$ .

Afin de réduire l'incertitude, une fonction de transfert rationnelle  $W_{ap}(\omega)$  majorant en termes de gain  $\overline{E_{ap}}(\omega)$  peut être déterminée, conduisant au modèle incertain suivant :

$$H_i^{W_a}(s) = H_0(s) + W_{ap}(s)\delta(s) \quad (5.25)$$

où  $\delta(s)$  est une incertitude dynamique vérifiant  $\|\delta(s)\|_{\infty} < 1$ . Le schéma bloc associé est donné sur la figure 5.5.

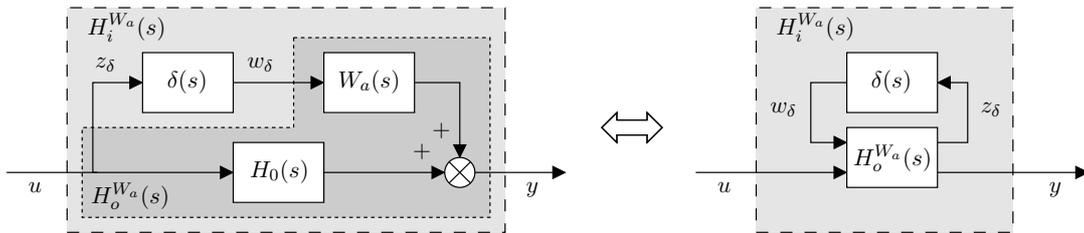


FIGURE 5.5 – Représentation de  $H(s)$  comme un modèle entier affecté d'incertitudes additives et forme standard associée

L'erreur d'approximation  $\overline{E_{ap}}(\omega)$  étant constante en hautes fréquences, une des réalisations possibles du modèle incertain  $H_i^{W_a}(s)$  présentera un gain constant en hautes fréquences. Ceci présente un certain nombre de désavantages tels que par exemple une norme  $\mathcal{H}_2$  infinie pour le modèle incertain.

### 5.2.4.6 Écriture du modèle non entier comme un modèle entier affecté d'une incertitude multiplicative

Pour palier l'inconvénient d'un gain constant en hautes fréquences, nous avons finalement utilisé une forme multiplicative pour les incertitudes en nous basant toujours sur le même modèle nominal. L'erreur relative  $E^r(s)$  entre le modèle non entier  $H(s)$  et le modèle entier  $H_0(s)$  s'écrit alors :

$$E^r(s) = \frac{H(s)}{H_0(s)} - 1. \quad (5.26)$$

$E^r(s)$  n'étant pas un transfert entier, on introduit un filtre  $W_m(s)$  vérifiant :

$$|E^r(j\omega)| \leq |W_m(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.27)$$

et permettant de redéfinir  $H(s)$  comme le modèle entier incertain :

$$H_i^{W_m}(s) = H_0(s) (1 + W_m(s)\delta(s)) \quad (5.28)$$

où  $\delta(s)$  est une incertitude dynamique vérifiant  $\|\delta(s)\|_\infty < 1$ . Le schéma bloc associé est donné sur la figure 5.6.

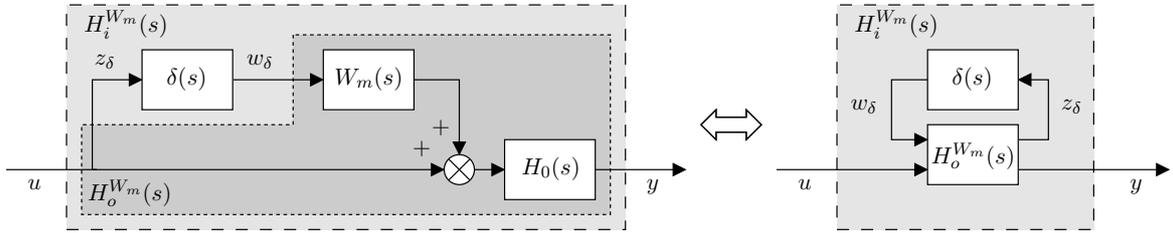


FIGURE 5.6 – Représentation de  $H(s)$  comme un modèle entier affecté d'incertitudes multiplicatives et forme standard associée

### 5.2.5 Conclusion

Que ce soit sous forme additive comme représenté sur la figure 5.5 ou sous forme multiplicative comme représenté sur la figure 5.6, la réécriture d'un modèle non entier sous la forme d'un modèle entier  $H_0(s)$  affecté d'une incertitude présente l'avantage de pouvoir utiliser les méthodes d'analyse et de commande robustes dédiées aux modèles entiers.

Dans la méthode proposée ici et détaillée dans la publication [A-5], le choix du modèle entier  $H_0(s)$  est lié notamment à celui des bornes  $z_N$  et  $z_M$  ainsi que du nombre d'intervalles  $N$  utilisé dans la discrétisation de l'intervalle. Ce choix résulte d'un compromis entre la taille de l'incertitude affectant le modèle (taille impactant le pessimisme des résultats obtenus à partir du modèle incertain) et l'ordre du modèle entier  $H_0(s)$ .

Afin de ne pas souffrir d'un tel pessimisme, je me suis attaché à développer différentes méthodes d'analyse et de synthèse dédiées spécifiquement aux modèles non entiers. Ces méthodes sont présentées dans les parties 5.3 et 5.4.

## 5.3 Méthodes d'analyse et de synthèse dédiées aux modèles non entiers commensurables

Dans cette partie sont présentées différentes contributions relatives à l'analyse, à la commande et au diagnostic pour les modèles non entiers commensurables.

### 5.3.1 Analyse de stabilité et stabilisation

La stabilité est une notion dont l'importance pour la commande de systèmes dynamiques est connue depuis les débuts de l'automatique et qui peut être définie de différentes manières. Aussi, la définition retenue dans ce chapitre est d'abord rappelée ainsi que sa caractérisation à partir de la valeur des pôles de la fonction de transfert. Sont ensuite présentées des méthodes d'analyse de stabilité spécifiques aux modèles commensurables et formulées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). L'accent est mis sur l'une d'entre elles, basée sur le formalisme des régions LMI généralisées, et fournissant une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Cette méthode d'analyse est enfin mise à profit pour la synthèse de lois de commande stabilisantes.

#### 5.3.1.1 Stabilité entrée-sortie des modèles non entiers

Les modèles non entiers considérés dans ce chapitre étant uniquement capables de rendre compte du comportement entrée sortie des systèmes modélisés, seule la stabilité entrée-sortie, également appelée stabilité externe, est étudiée. Un système est dit stable du point de vue entrée-sortie si l'application de tout signal d'entrée borné au sens d'une norme  $\mathfrak{L}_q$  génère un signal de sortie lui-même borné.

**Définition 3** (Stabilité  $\mathfrak{L}_q$  [33]). *Un système  $\Sigma$  d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ , associé à une matrice de transfert  $G(s)$ , est dit  $\mathfrak{L}_q$ -stable,  $1 < q < \infty$ , si et seulement si :*

$$\sup_{u \in \mathfrak{L}_q, u \neq 0} \frac{\|g * u\|_p}{\|u\|_p} < \infty \quad , \quad (5.29)$$

où  $g(t)$  représente la réponse impulsionnelle du système.

Lorsque la norme  $\mathfrak{L}_\infty$  est utilisée dans la définition précédente, on parle alors de stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output).

**Définition 4** (Stabilité BIBO [41]). *Un système LTI non entier de réponse impulsionnelle  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  est BIBO stable si et seulement si  $\forall u(t) \in \mathfrak{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $y(t) = g(t) * u(t) \in \mathfrak{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .*

Différentes méthodes permettent d'évaluer la stabilité entrée-sortie d'un système dynamique selon la définition utilisée (stabilité  $\mathfrak{L}_q$  ou stabilité BIBO).

Si l'on utilise la définition 4, il est bien connu qu'un modèle entier est BIBO stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative. Ce résultat a été étendu au cas des systèmes non entiers comme rappelé dans [8].

**Théorème 1. (Caractérisation de la stabilité BIBO via le calcul des pôles [8])**

Soit un modèle non entier strictement propre décrit par sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (5.30)$$

où  $N(s)$  et  $D(s)$  n'ont aucune racine commune. Alors  $G$  est BIBO stable si et seulement si  $G$  a tous ses pôles dans le domaine de stabilité :

$$\mathcal{D}_s = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < 0\}, \quad (5.31)$$

c'est-à-dire si  $\text{Re}(p_i) < 0 \forall i$  où  $p_i$  désigne la  $i$ -ème racine de  $D(s)$ .

Contrairement au cas des modèles entiers,  $D$  n'est pas un polynôme de la variable  $s$ . Dans le cas d'une fonction de transfert implicite donnée par (4.31), l'expression  $D(s) = \prod_{l=1}^{N_p} (s - p_l)^{\nu_{p_l}}$  fait directement apparaître les pôles  $p_l$  et il est aisé de conclure sur la stabilité. Dans le cas d'une fonction de transfert explicite donnée par (4.29), l'expression  $D_s(s) = \sum_{l=1}^{N_d} \beta_l s^{\nu_{d_l}}$  ne fait pas directement apparaître les pôles et leur calcul est plus complexe que dans le cas où  $D(s)$  est un polynôme.

**5.3.1.2 Analyse de stabilité dans le cas des modèles explicites commensurables**

Comme annoncé dans la partie précédente, la stabilité d'un modèle explicite décrit par une fonction de transfert de la forme (4.29) dépend du signe de la partie réelle des  $N_p$  pôles  $p_l$ , c'est-à-dire des racines de :

$$D(s) = \sum_{l=1}^{N_d} \beta_l s^{\nu_{d_l}}. \quad (5.32)$$

Dans le cas d'un modèle commensurable, les ordres de dérivation sont tous multiples d'un même ordre  $\nu$ , et comme indiqué par l'équation (4.30) de la partie 4.3.2.1,  $D(s)$  s'écrit alors :

$$D(s) = \sum_{l=0}^{N'_d} \beta'_l (s^\nu)^l. \quad (5.33)$$

Le changement de variables  $\mathfrak{s} = s^\nu$  fait alors apparaître  $D$  comme un polynôme de la variable  $\mathfrak{s}$  :

$$D(\mathfrak{s}) = \sum_{l=0}^{N'_d} \beta'_l \mathfrak{s}^l. \quad (5.34)$$

Les racines de  $D(\mathfrak{s})$ , appelées  $s^\nu$ -pôles et notées  $\mathfrak{p}_l$ , peuvent être déterminées à l'aide des outils couramment utilisés dans le cas entier. Pour conclure sur la stabilité du modèle non entier,

il reste à caractériser le lien entre le signe des  $N_p$  pôles  $p_l$  et les valeurs des  $N'_p$   $s^\nu$ -pôles  $\mathbf{p}_l$ . Formulé différemment, il convient d'étudier la transformation du domaine de stabilité pour les pôles  $\mathcal{D}_s$  en domaine de stabilité pour les  $s^\nu$ -pôles  $\mathcal{D}_s$  via le changement de variables  $\mathfrak{s} = s^\nu$ .

Le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  donné par (5.31) s'écrit :

$$\mathcal{D}_s = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < 0\}. \quad (5.35)$$

En posant  $s = \rho e^{i\theta}$ , il vient :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ s = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| > \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (5.36)$$

Le changement de variables  $\mathfrak{s} = s^\nu$  conduit donc à :

$$\mathcal{D}_s = \{\mathfrak{s} = s^\nu \in \mathbb{C} : s \in \mathcal{D}_s\}. \quad (5.37)$$

soit :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ \mathfrak{s} = \left( \rho e^{i\theta} \right)^\nu = \rho^\nu e^{i\nu\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| > \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (5.38)$$

En posant  $\mathfrak{s} = \rho' e^{i\theta'}$ , l'argument des  $s^\nu$ -pôles est donné par  $\theta' = \nu\theta$ . La condition  $|\theta| > \frac{\pi}{2}$  implique donc  $|\theta'| > \nu\frac{\pi}{2}$  et le domaine de stabilité devient :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ \mathfrak{s} = \rho' e^{i\theta'} \in \mathbb{C} : |\theta'| > \nu\frac{\pi}{2} \right\}. \quad (5.39)$$

Il est ainsi possible de caractériser la stabilité BIBO d'une fonction de transfert explicite commensurable selon l'appartenance des  $s^\nu$ -pôles au domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$ . Par ailleurs, comme détaillé dans la partie 4.3.3.1, une pseudo représentation d'état associée à la fonction de transfert  $G(s)$  est une réalisation du transfert rationnel  $G(\mathfrak{s})$ . Les valeurs propres de la matrice  $A$  de la pseudo représentation d'état sont donc les pôles de  $G(\mathfrak{s})$ , c'est à dire les  $s^\nu$ -pôles de  $G(s)$ . Le critère de stabilité associé à la fonction de transfert et à la pseudo représentation d'état sont ainsi donnés par le théorème 2.

**Théorème 2. (Caractérisation de la stabilité BIBO à partir de la fonction de transfert ou de la pseudo représentation d'état)** *Un modèle non entier explicite commensurable de fonction de transfert :*

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N'_n} \alpha'_k (s^\nu)^k}{\sum_{l=0}^{N'_d} \beta'_l (s^\nu)^l}, \quad (5.40)$$

et de pseudo représentation d'état :

$$\begin{cases} \mathbf{D}'_0 x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad \{x(t), u(t)\} = \mathbf{0} \quad \forall t < 0, \quad (5.41)$$

est BIBO stable si et seulement si les  $s^\nu$ -pôles de  $G(s)$ , qui sont également les valeurs propres de la matrice  $A$ , appartiennent au domaine de stabilité :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ \mathfrak{s} = \rho' e^{i\theta'} \in \mathbb{C} : |\theta'| > \nu\frac{\pi}{2} \right\}. \quad (5.42)$$

Le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  décrit par l'équation (5.42) est représenté sur la figure 5.7.

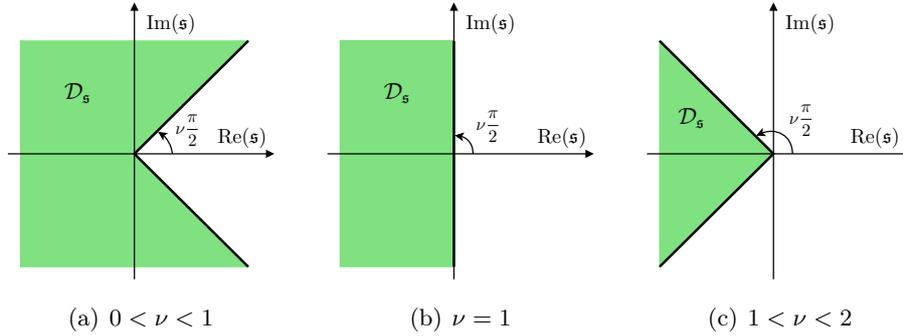


FIGURE 5.7 – Domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$

**Remarque 6.** Le critère de stabilité du théorème 2 a été mis en avant dans les travaux de Denis Matignon [41] dans le cas de la pseudo représentation d'état. Il s'agit également d'une conséquence directe du calcul explicite des pôles de la fonction de transfert détaillé dans l'ouvrage d'Alain Oustaloup [55]. Une autre preuve basée sur le théorème de Cauchy est également proposée dans les références [C2-20, A-12].

### 5.3.1.3 Critères LMI pour l'analyse de stabilité des modèles commensurables

Si le calcul explicite des  $s^\nu$ -pôles de  $G(s)$  ou des valeurs propres de la matrice  $A$  permet de conclure sur la stabilité, différents travaux ont été consacrés à la caractérisation de leur appartenance au domaine  $\mathcal{D}_s$  conduisant notamment à l'obtention de critères formulés à l'aide de LMIs. Ces critères LMIs se classent en deux catégories selon l'ordre commensurable  $\nu$ .

Lorsque  $1 < \nu < 2$ , le domaine  $\mathcal{D}_s$  représenté sur la figure 5.7(c) est convexe et la caractérisation de l'appartenance des valeurs propres de  $A$  à ce domaine peut être résolue en utilisant le formalisme des régions LMI introduit par Mahmoud Chilali [12] puis généralisée par Dimitri Peaucelle [56] à travers la notion de  $\mathbb{D}_R$  stabilité des systèmes d'ordre entier. Ces résultats ont été étendus au cas des modèles non entiers notamment dans le cadre des travaux de Mathieu Moze ayant conduit au critère LMI du théorème 3.

**Théorème 3** ([48]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $1 < \nu < 2$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est stable si et seulement s'il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  telle que :*

$$\begin{bmatrix} (XA^T + AX) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) & (XA^T - AX) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \\ (AX - XA^T) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) & (XA^T + AX) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.43)$$

Lorsque  $0 < \nu < 1$ , le domaine de stabilité représenté sur la figure 5.7(a) n'est pas convexe et ne peut pas être obtenu en utilisant le formalisme des régions LMI. Différents critères LMI étaient néanmoins disponibles dans la littérature lors de mon arrivée dans l'équipe CRONE

et sont récapitulés dans les références [C2-22, A-17]. Ces résultats sont à présent rappelés et commentés vis-à-vis de leur pessimisme respectif ainsi que de leur capacité à être réutilisés dans le cadre de la synthèse de lois de commande.

La première méthode repose sur une transformation algébrique du système en considérant que l'ordre non entier  $\nu$  est rationnel, ce qui permet d'aboutir au théorème 4.

**Théorème 4** ([45]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $0 < \nu < 1$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est BIBO stable si  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  telle que :*

$$\left(A^{\frac{1}{\nu}}\right)^T P + P \left(A^{\frac{1}{\nu}}\right) < 0. \quad (5.44)$$

Cette méthode, relativement simple à mettre en place, s'avère pessimiste car le domaine de stabilité n'est pas entièrement caractérisé par la LMI (5.44). Il ne s'agit donc que d'une condition suffisante de stabilité [48].

Une condition nécessaire et suffisante a été obtenue dans [48] en effectuant une transformation géométrique du domaine de stabilité dans le cas  $0 < \nu < 1$ .

**Théorème 5** ([48]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $0 < \nu < 1$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est BIBO stable si et seulement si  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  telle que :*

$$\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\nu}}\right)^T P + P \left(-(-A)^{\frac{1}{2-\nu}}\right) < 0. \quad (5.45)$$

Il est démontré dans [48] que le domaine de stabilité d'un modèle non entier d'ordre  $0 < \nu < 1$  est entièrement caractérisé par le théorème 5, ce qui confirme son caractère nécessaire et suffisant. Bien que ce résultat soit intéressant pour le problème d'analyse, en déduire une LMI pour la synthèse de correcteurs s'avère difficile du fait de la non linéarité vis-à-vis de la matrice  $A$ . En effet, considérons l'exemple d'une loi de commande par retour d'état  $u(t) = r(t) - Kx(t)$  où  $r(t)$  représente le signal de référence et  $K$  est un gain matriciel constant. La matrice dynamique du système bouclé vaut  $(A - BK)$ . Le critère de stabilité du théorème 5 peut être utilisé afin de caractériser la stabilité de ce dernier et conduit à l'inégalité matricielle :

$$\left(-(-A + BK)^{\frac{1}{2-\nu}}\right)^T P + P \left(-(-A + BK)^{\frac{1}{2-\nu}}\right) < 0. \quad (5.46)$$

L'élévation de la matrice d'état en boucle fermée à la puissance  $\frac{1}{2-\nu}$  complique la mise en place d'un changement de variable linéarisant permettant la synthèse du gain  $K$ .

Une autre condition de stabilité, basée sur la caractérisation du domaine d'instabilité est aussi issue de [48]. En effet, pour  $0 < \nu < 1$ , le domaine d'instabilité d'un modèle non entier commensurable est convexe.

**Théorème 6** ([48]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $0 < \nu < 1$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est BIBO stable si et seulement s'il n'existe aucune matrice hermitienne non négative  $Q$  telle que :*

$$rAQ + \bar{r}QA^T < 0 \quad (5.47)$$

avec  $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$ .

Bien que le théorème 6 fournisse une condition nécessaire et suffisante de stabilité, l'algorithme utilisé pour la résolution de la LMI (5.47) doit être choisi avec soin. En effet, la non convergence de cette LMI vers une matrice  $Q$  implique la stabilité du système. Un défaut de l'algorithme peut donc facilement entraîner de mauvaises conclusions. En outre, aucune LMI de synthèse ne peut être déduite du théorème 6 car la LMI de stabilité est basée sur la non existence d'une matrice.

Les résultats des théorèmes 4, 5 et 6 sont donc soit pessimistes, soit inadaptés à la synthèse de lois de commande. Mes premiers travaux réalisés avec Mathieu Moze et Jocelyn Sabatier se sont donc attachés à développer un nouveau critère LMI de stabilité.

Afin de contourner le problème de non convexité du domaine de stabilité d'un système non entier commensurable d'ordre  $0 < \nu < 1$ , nous avons utilisé le concept des régions LMI généralisées (de l'anglais *Generalized LMI* ou GLMI), introduit par Mahmoud Chilali [12] et développé par Olivier Bachelier [4, 5].

**Définition 5** (Région GLMI [12]). *Une région  $\mathcal{D}$  du plan complexe est une région GLMI d'ordre  $l$  si  $\exists \theta_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ,  $\psi_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ,  $H_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$  et  $J_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ , tels que*

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists w = [w_1 \cdots w_m]^T \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } f_{\mathcal{D}}(z, w) < 0, g_{\mathcal{D}}(w) = 0 \right\}, \quad (5.48)$$

où

$$f_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{k=1}^m (\theta_k w_k + \theta_k^* \bar{w}_k + \psi_k z w_k + \psi_k^* \bar{w}_k \bar{z}) \quad (5.49)$$

et

$$g_{\mathcal{D}}(w) = \sum_{k=1}^m (H_k w_k + J_k \bar{w}_k). \quad (5.50)$$

Le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  représenté sur la figure 5.7(a) peut être vu comme l'union de deux demi-plans :

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{s1} \cup \mathcal{D}_{s2}. \quad (5.51)$$

Comme indiqué sur la figure 5.8, les domaines  $\mathcal{D}_{s1}$  et  $\mathcal{D}_{s2}$  résultent de rotations du demi-plan complexe gauche d'angles  $\varphi_1 = \varphi$  et  $\varphi_2 = -\varphi$  respectivement où  $\varphi = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ , soit :

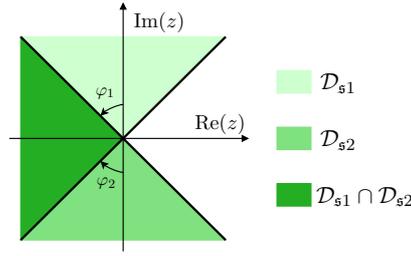
$$\mathcal{D}_{si} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z e^{j\varphi_i}) < 0 \}, \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (5.52)$$

qui peut également s'écrire :

$$\mathcal{D}_{si} = \{ z \in \mathbb{C} : \exists w_i \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } e^{j\varphi_i z w_i} + e^{-j\varphi_i \bar{z} \bar{w}_i} < 0 \}. \quad (5.53)$$

Or il est montré dans [4] que l'union de  $m$  régions convexes de la forme :

$$\mathcal{D}_k = \{ z \in \mathbb{C} : f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0 \}, \forall k \in \{1 \cdots m\}, \quad (5.54)$$


 FIGURE 5.8 – Domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  vu comme l'union de deux demi-plans

est une région GLMI de la forme (5.48) d'ordre  $l = m + 1$  avec :

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & \mathbb{0}_{1 \times m} \\ \mathbb{0}_{m \times 1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_k & \mathbb{0}_{1 \times m} \\ \mathbb{0}_{m \times 1} & \mathbb{0}_m \end{bmatrix}, \quad \Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1}, \quad (5.55)$$

où  $\varepsilon_p^q \in \mathbb{R}^{q \times q}$  est défini ainsi :  $\varepsilon_p^q(\rho, \sigma) = 1$  si  $\rho = \sigma = p$ ,  $\varepsilon_p^q(\rho, \sigma) = 0$  sinon.

Ainsi, les régions  $\mathcal{D}_{si}$  données par (5.53) étant de la forme (5.54)-(5.55) avec  $\alpha_k = 0$  et  $\beta_k = e^{j\varphi_k}$ , le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  est une région GLMI de la forme (5.48) d'ordre  $l = 3$  avec :

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{bmatrix} e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} e^{-j(1-\nu)\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Un lemme permettant de tester l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région GLMI du plan complexe a aussi été développé par Mahmoud Chilali au travers du concept de  $\mathcal{D}$ -stabilité.

**Définition 6** ( $\mathcal{D}$ -stabilité d'une matrice). *Une matrice  $A$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si ses valeurs propres sont strictement situées dans la région  $\mathcal{D}$  du plan complexe.*

**Lemme 1** ([12]). *Soient  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\mathcal{D}$  une région GLMI.  $A$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si  $\exists$   $m$  matrices  $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que :*

$$\sum_{k=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0 \quad (5.58)$$

et

$$\sum_{k=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = \mathbb{0}_{nl \times nl}. \quad (5.59)$$

L'application du lemme 1 sur la région GLMI  $\mathcal{D}_s$  du plan complexe définie par (5.48)-(5.50) et (5.56)-(5.57) permet d'obtenir la condition LMI nécessaire et suffisante de stabilité d'un système non entier d'ordre  $0 < \nu < 1$  suivante.

**Théorème 7** ([C2-21, C2-18, A-16]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $0 < \nu < 1$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est stable si et seulement s'il existe une matrice  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  définie positive telle que :*

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0 \quad (5.60)$$

où  $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$ .

Contrairement aux autres résultats de la littérature, la LMI (5.60) caractérise entièrement le domaine de stabilité d'un modèle non entier d'ordre  $0 < \nu < 1$  et permet, comme nous allons le voir dans la partie suivante, la synthèse de correcteurs stabilisants.

### 5.3.1.4 Méthodes LMI pour la stabilisation par retour de pseudo état des modèles commensurables

Le problème considéré ici est celui de la synthèse d'une loi de commande par retour de pseudo état de la forme :

$$u(t) = y_r(t) + Kx(t), \quad (5.61)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est un gain matriciel constant et  $y_r(t) \in \mathbb{R}^m$  est le signal de référence. L'application de la loi de commande (5.61) au modèle (5.41) conduit au système bouclé :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_0^\nu x(t) &= (A + BK) x(t) + B y_r(t) \\ y(t) &= (C + DK) x(t) + D y_r(t) \end{cases} \quad (5.62)$$

D'après le théorème 2, la synthèse d'un tel correcteur peut être formulée comme suit.

**Problème 1.** *Pour une paire de matrices ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ) donnée, trouver une matrice réelle  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que :  $|\text{Arg}(\lambda(A + BK))| > \nu\frac{\pi}{2}$ .*

Lorsque  $1 < \nu < 2$ , l'application du théorème 3 au modèle bouclé (5.62) conduit à conclure que le système bouclé sera stable s'il existe  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $X \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  telles que :

$$\begin{bmatrix} (X(A+BK)^T + (A+BK)X) \sin(\nu\frac{\pi}{2}) & (X(A+BK)^T - (A+BK)X) \cos(\nu\frac{\pi}{2}) \\ ((A+BK)X - X(A+BK)^T) \cos(\nu\frac{\pi}{2}) & (X(A+BK)^T + (A+BK)X) \sin(\nu\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.63)$$

L'inégalité 5.63 n'est cependant alors plus linéaire. Afin de formuler le problème de synthèse sous forme LMI, le changement de variables classiquement utilisé dans le cas entier  $Y = KX$  peut être utilisé et conduit au théorème suivant.

**Théorème 8** ([48]). *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $1 < \nu < 2$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est stabilisable par retour de pseudo état si et seulement s'il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que :*

$$\begin{bmatrix} (XA^T + Y^T B^T + AX + BY) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) & (XA^T + Y^T B^T - AX - BY) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \\ (AX + BY - XA^T - Y^T B^T) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) & (XA^T + Y^T B^T + AX + BY) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.64)$$

Le gain du correcteur stabilisant est alors donné par :

$$K = YX^{-1}. \quad (5.65)$$

Trouver un tel changement de variables dans le cas où  $0 < \nu < 1$  peut apparaître plus difficile car la variable  $X$  apparaissant dans la LMI (5.60) est complexe alors que le gain du correcteur  $K$  à déterminer est réel. Cependant, la LMI (5.60) du théorème 7 a été formulée de telle manière à faire apparaître le terme  $(rX + \bar{r}\bar{X})$  qui est réel. En appliquant le changement de variables  $Y = K(rX + \bar{r}\bar{X})$ , le théorème suivant est obtenu.

**Theorem 9.** *Un modèle non entier d'ordre commensurable  $0 < \nu < 1$  et de pseudo représentation d'état (5.41) est stabilisable par retour de pseudo état si et seulement s'il existe une matrice  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n} > 0$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que :*

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) + Y^T B^T + BY < 0 \quad (5.66)$$

où  $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$ . Le gain du correcteur stabilisant est alors donné par :

$$K = Y(rX + \bar{r}\bar{X})^{-1}. \quad (5.67)$$

Le théorème 9 est la première formulation LMI nécessaire et suffisante du problème de synthèse d'un retour de pseudo état pour les modèles non entiers. Nous avons par ailleurs étendu ce résultat à la synthèse de correcteurs stabilisant de manière robuste les modèles non entiers affectés d'incertitudes polytopiques, comme détaillé dans les références [C2-16, A-14].

### 5.3.2 Commande $\mathcal{H}_\infty$

La thèse de Lamine Fadiga a été l'occasion de mener plus avant les travaux portant sur l'extension aux modèles non entiers de résultats LMI. Ainsi, suite aux résultats d'analyse de stabilité et de stabilisation présentés dans la partie 5.3.1, nous avons développé dans cette thèse des outils LMI pour analyser et améliorer les performances d'un modèle non entier, performances mesurées au travers de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert  $T_{wz}$  du modèle standard de la figure 5.1.

**Définition 7** (Norme  $\mathcal{H}_\infty$  [26]). *La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert stable  $T_{zw}$  est définie par :*

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) \quad (5.68)$$

où  $\bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega))$  est la plus grande valeur singulière de  $T_{zw}(j\omega)$  à la pulsation  $\omega$ .

Cette partie recense les principaux résultats obtenus dans le cadre de ces travaux pour lesquels le modèle généralisé est écrit sous la forme de la pseudo représentation d'état suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \mathbf{D}_0^v x(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yu} u(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (5.69)$$

Dans les parties 5.3.2.1 et 5.3.2.2 sont présentées différentes méthodes LMI de calcul de la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , basées respectivement sur l'évaluation des valeurs propres d'une pseudo matrice Hamiltonienne et sur le lemme de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [32]. Ces résultats d'analyse sont ensuite mis à profit pour obtenir les résultats de commande  $\mathcal{H}_\infty$  par retour de pseudo état et par retour de sortie dynamique présentés dans la partie 5.3.2.3.

#### 5.3.2.1 Méthodes basées sur l'utilisation d'une pseudo matrice hamiltonienne

Dans le cas d'un modèle entier, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système peut être calculée de manière itérative en évaluant à chaque pas de l'algorithme la localisation des valeurs propres d'une matrice hamiltonienne particulière. Cette méthode est connue sous le nom de  $\gamma$ -itération [9]. Ce problème peut être également formulé à l'aide de LMI, conduisant au lemme borné réel [23].

L'extension de cette approche aux modèles non entiers a été initiée par Mathieu Moze [49] puis poursuivie dans la thèse de Lamine Fadiga.

#### Définition de la pseudo matrice hamiltonienne d'un modèle non entier

D'après la définition 9, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert  $T_{zw}(s)$  du modèle stable  $\Sigma$  défini par la pseudo représentation d'état (5.69) est inférieure à  $\gamma$  si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \max_{i=\{1 \dots \min(m,p)\}} \sqrt{\lambda_i(T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega))} < \gamma, \quad (5.70)$$

qui peut encore s'écrire comme un problème de définie positivité :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \Phi(j\omega) = (\gamma^2 I - T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega)) > 0. \quad (5.71)$$

L'inégalité (5.71) est de dimension infinie car elle dépend de  $\omega \in \mathbb{R}$ . Cependant, si l'on remarque que la fonction  $\Phi(j\omega)$  est continue et positive lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , l'inégalité (5.71) est équivalente à la non singularité de  $\Phi(j\omega)$ . Ainsi, le problème se ramène à vérifier si  $\phi(s) = \gamma^2 I - T_{zw}(s)^* T_{zw}(s)$  n'a pas de zéro imaginaire pur, c'est à dire que  $\phi(s)^{-1}$  n'a pas de pôle imaginaire pur, ou encore que  $\phi(s)^{-1}$  n'a pas de  $s^\nu$ -pôles sur  $\mathbb{C}_{\nu 0} = \{(j\omega)^\nu = |\omega|^\nu e^{\text{sign}(\omega)\nu j \frac{\pi}{2}}, \omega \in \mathbb{R}\}$ .

Soit  $H_\gamma$  la matrice dynamique associée à une pseudo représentation d'état de  $\phi(s)^{-1}$  lorsque  $\omega > 0$  et  $H_\gamma^-$  celle lorsque  $\omega < 0$ .  $\phi(s)^{-1}$  n'a pas de  $s^\nu$ -pôles sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}$  si  $H_\gamma$  n'a pas de valeur propre sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^+\}$  et si  $H_\gamma^-$  n'a pas de valeur propre sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^- = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^-\}$ . Puisque  $T_{zw}(j\omega)$  est une fonction paire de  $\omega$ , il est possible de montrer que les valeurs propres de  $H_\gamma$  et de  $H_\gamma^-$  sont conjuguées.  $H_\gamma$  a donc une valeur propre sur le segment  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  si et seulement si  $H_\gamma^-$  a une valeur propre conjuguée sur le segment  $\mathbb{C}_{\nu 0}^-$ . Ainsi, il est uniquement nécessaire d'évaluer si  $H_\gamma$  a des valeurs propres sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  comme indiqué dans le théorème suivant.

**Théorème 10.** Soit la pseudo représentation d'état stable (5.69), un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$  et  $R = (\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw})^{-1}$ .  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si la pseudo matrice hamiltonienne :

$$H_\gamma \triangleq \begin{bmatrix} A + B_w R D_{zw}^T C_z & B_w R B_w^T \\ e^{\nu j \pi} C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & e^{\nu j \pi} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

n'a pas de valeur propre sur la demi-droite  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  représentée sur la figure 5.9 et définie comme suit :

$$\mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \{(j\omega)^\nu = |\omega|^\nu e^{\nu j \frac{\pi}{2}}, \omega \in \mathbb{R}^+\}. \quad (5.73)$$

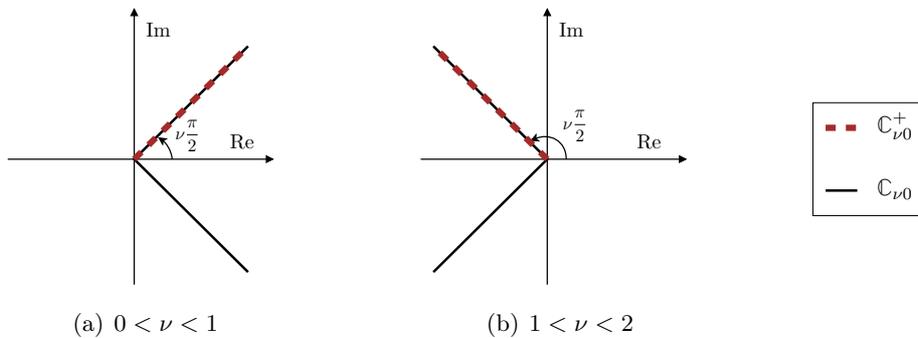


FIGURE 5.9 – Ensemble  $\mathbb{C}_{\nu 0}$  et demi-droite  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  en fonction de l'ordre commensurable  $\nu$

Une dichotomie sur la valeur de  $\gamma$  permet alors d'obtenir la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du modèle non entier en appliquant de manière itérative le théorème 10.

### Formulation LMI basée sur une inégalité de Riccati

Dans le cas des modèles entiers, il existe un résultat similaire au théorème 10 pour lequel la pseudo matrice hamiltonienne  $H_\gamma$  est remplacée par une matrice hamiltonienne  $H$  et la demi-droite  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  par l'axe imaginaire. Le théorème suivant peut ainsi être utilisé dans le cas entier.

**Théorème 11.** Soient  $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $S = S^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La matrice

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{A} & S \\ -Q & -\tilde{A}^* \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

est une matrice hamiltonienne et n'a aucune valeur propre sur l'axe imaginaire si et seulement s'il existe une matrice hermitienne  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifiant l'inégalité de Riccati :

$$\tilde{A}^* X + X \tilde{A} + X S X + Q < 0. \quad (5.75)$$

Dans le cas non entier, la matrice  $H_\gamma$  est complexe et n'a pas les propriétés d'une matrice hamiltonienne. De plus, lorsque  $\|T_{zw}(s)\|_\infty > \gamma$ , les valeurs propres de  $H_\gamma$  sont sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  et non sur l'axe imaginaire. Aussi, deux transformations sont appliquées à  $H_\gamma$ .

Dans un premier temps, la matrice  $H'_\gamma = e^{j\theta} H_\gamma$  est obtenue par rotation de la matrice  $H_\gamma$  d'un angle  $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, si  $H_\gamma$  n'a aucune valeur propre sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$  alors  $H'_\gamma$  n'a aucune valeur propre sur le demi-axe  $\mathbb{C}_0^+$  des imaginaires purs à partie imaginaire positive.

Dans un second temps, une transformation de similarité par la matrice  $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & rI \end{bmatrix}$  avec  $r = e^{j\theta}$  permet d'obtenir une matrice hamiltonienne  $H = U H'_\gamma U^{-1}$ . Le théorème 11 peut donc être appliqué avec :

$$\tilde{A} = r(A + B_w R D_{zw}^T C_z), \quad (5.76)$$

$$S = B_w R B_w^T \quad \text{et} \quad Q = C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z. \quad (5.77)$$

Après application à deux reprises du complément de Schur, le théorème suivant est obtenu.

**Théorème 12.** Soient la pseudo représentation d'état stable (5.69), un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$  et l'inégalité suivante avec  $r = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}$  :

$$\begin{bmatrix} \bar{r} A^T X + X r A & X B_w & \bar{r} C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ r C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.78)$$

**Cas 1** ( $1 < \nu < 2$ ) :  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que (5.78).

**Cas 2** ( $0 < \nu < 1$ ) : S'il existe  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que (5.78), alors  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ .

Comme montré dans [21], le fait que le théorème 11 teste l'appartenance des valeurs propres de  $H$  à l'axe imaginaire et non pas seulement à  $\mathbb{C}_0^+$  introduit un certain pessimisme dans le théorème 12 (uniquement dans le cas où  $0 < \nu < 1$ ).

Par ailleurs, si la contrainte  $X > 0$  est ajoutée au théorème 12, celui-ci permet de vérifier également la stabilité du modèle. Dans le cas où  $1 < \nu < 2$ , cela n'ajoute pas de pessimisme supplémentaire au résultat obtenu. Dans le cas où  $0 < \nu < 1$ , le pessimisme ajouté est important.

Enfin, le terme  $\gamma^2$  apparaissant de manière linéaire dans la LMI (5.78), le théorème 12 peut être modifié pour faire apparaître un problème d'optimisation conduisant à  $\|T_{zw}\|_\infty$ .

### Formulation LMI basée sur l'utilisation des régions GLMI

L'intérêt du théorème 12 est de proposer un critère semblable au lemme borné réel qui a pour avantage de pouvoir être étendu au problème de synthèse d'un correcteur stabilisant. Il est cependant pessimiste pour des ordres non entiers tels que  $0 < \nu < 1$ . Dans ce paragraphe, le formalisme des régions GLMI, utilisé dans la partie 5.3.1.3 pour l'analyse de stabilité, permet d'obtenir une condition LMI nécessaire et suffisante pour  $0 < \nu < 1$  comme pour  $1 < \nu < 2$ .

Le théorème 10 indique que  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si  $H_\gamma$  n'a aucune valeur propre sur  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ . L'idée est ici d'utiliser les régions GLMI pour tester si  $H_\gamma$  a toutes ses valeurs propres dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  privé de  $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ , noté  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ . En effet, comme indiqué sur la figure 5.10, l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$  peut s'écrire comme une région GLMI puisqu'il s'agit de l'union de trois demi-plans :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \mathcal{D}_{s1} \cup \mathcal{D}_{s2} \cup \mathcal{D}_{s3}, \quad (5.79)$$

où  $\mathcal{D}_{s1}$  et  $\mathcal{D}_{s2}$  s'obtiennent respectivement par rotation du demi-plan gauche d'angle  $\varphi_1 = (\nu - 1)\frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi_2 = (1 + \nu)\frac{\pi}{2}$  tandis que  $\mathcal{D}_{s3}$  correspond au demi-plan droit pour  $1 < \nu < 2$  (soit  $\varphi_3 = \pi$ ) ou au demi-plan gauche pour  $0 < \nu < 1$  (soit  $\varphi_3 = 0$ ).

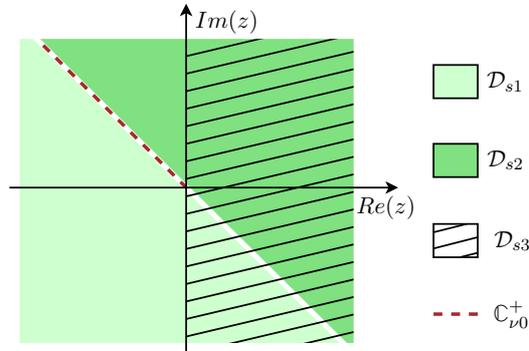


FIGURE 5.10 –  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$  vu comme l'union de trois demi-plans pour  $1 < \nu < 2$

Ainsi, les régions  $\mathcal{D}_{s_i}$  décrites ci-dessus étant de la forme (5.54) avec  $\alpha_k = 0$  et  $\beta_k = e^{-j\varphi_k}$ , l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$  est une région GLMI de la forme (5.48)-(5.50) d'ordre  $l = 4$  dont les matrices  $\theta_k$ ,  $\psi_k$ ,  $H_k$  et  $J_k$  sont données par (5.54)-(5.55). Le lemme 1 conduit alors au résultat suivant.

**Théorème 13** ([C2-15, C2-13]). Soient la pseudo représentation d'état stable (5.69) et un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ .  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe  $X_1 = X_1^*$ ,  $X_2 = X_2^*$  et  $X_3 = X_3^* \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  telles que :

$$r_1 H_\gamma X_1 + \bar{r}_1 X_1 H_\gamma^* + r_2 H_\gamma X_2 + \bar{r}_2 X_2 H_\gamma^* - \text{signe}(\nu-1) (H_\gamma X_3 + X_3 H_\gamma^*) < 0 \quad (5.80)$$

où  $r_1 = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$ ,  $r_2 = e^{-j(1+\nu)\frac{\pi}{2}}$ , la matrice  $H_\gamma$  étant définie par (5.72).

Bien que la LMI (5.80) permette d'évaluer efficacement la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un modèle commensurable stable, son extension au problème de synthèse est délicate pour les raisons suivantes :

- des variables complexes sont utilisées alors que les paramètres d'un correcteur sont réels ;
- plusieurs variables sont utilisées alors qu'un seul correcteur doit être calculé ;
- cette condition n'assurera pas la stabilité du système bouclé.

### 5.3.2.2 Méthodes basées sur l'utilisation du lemme KYP généralisé

Les méthodes proposées dans ce paragraphe font suite aux travaux de [36]. Elles font appel au lemme de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) généralisé pour caractériser le domaine  $\mathbb{C}_{\nu 0}$ .

**Lemme 2** (Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [32]). Soient les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\Theta = \Theta^* \in \mathbb{C}^{n_u \times n_u}$ ,  $\Phi = \Phi^* \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  et  $\Psi = \Psi^* \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  et l'ensemble  $\Lambda$  défini par :

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}. \quad (5.81)$$

Considérons les hypothèses suivantes :

1. si  $H(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{-1} B$ , alors

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda ; \quad (5.82)$$

2. il existe  $P, Q \in \mathbb{H}_n$ ,  $Q > 0$  telles que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0. \quad (5.83)$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) est toujours vrai. Si de plus,  $\Lambda$  représente une courbe dans  $\mathbb{C}$ , alors (2)  $\Leftrightarrow$  (1).

D'après la définition (6.37), la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du modèle (5.69) est donnée par :

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) = \sup_{\omega \geq 0} \left[ C_z (\lambda(\omega)I - A)^{-1} B_w + D_{zw} \right] \quad (5.84)$$

où  $\lambda(\omega) = e^{j\nu\frac{\pi}{2}} \omega^\nu$ ,  $\omega \geq 0$ , est une demi-droite du plan complexe, pouvant aussi être représentée par un ensemble  $\Lambda$  défini comme dans la relation (5.81) avec :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \nu \\ 1 - \nu & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

De plus, d'après l'équation (5.71),  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  s'écrit aussi :

$$T_{zw}(j\omega)T_{zw}^*(j\omega) - \gamma^2 I < 0, \forall \omega \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0, \forall \lambda \in \Lambda \quad (5.86)$$

avec :

$$H(\lambda) = (\lambda I_n - A^T)^{-1} C_z^T, \quad \Theta = \begin{bmatrix} B_w B_w^T & B_w D_{zw}^T \\ D_{zw} B_w^T & D_{zw} D_{zw}^T - \gamma^2 I_n \end{bmatrix}. \quad (5.87)$$

Ainsi, d'après le lemme 2, la relation (5.86) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, \exists Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, Q > 0 \text{ t.q.} \\ & \begin{bmatrix} A^T & C_z^T \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \otimes P + \begin{bmatrix} 0 & 1-\nu \\ 1-\nu & 0 \end{bmatrix} \otimes Q \right) \begin{bmatrix} A^T & C_z^T \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w B_w^T & B_w D_{zw}^T \\ D_{zw} B_w^T & D_{zw} D_{zw}^T - \gamma^2 I_n \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.88)$$

où  $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ . Après application du complément de Schur, cette LMI s'écrit :

$$\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, \exists Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, Q > 0 \text{ t.q.} \begin{bmatrix} \text{Sym}\{A(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q)\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.89)$$

La LMI (5.89), proposée par LIANG et al. [36], fournit une condition nécessaire et suffisante pour calculer la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un modèle commensurable stable quel que soit l'ordre  $\nu$ . Nous avons par ailleurs montré dans [21] qu'il est possible d'améliorer ce résultat puisque, d'après le théorème 12, il est possible de prendre  $Q = 0$  sans rajouter de pessimisme pour  $1 < \nu < 2$ , ce qui conduit aux théorèmes suivants.

**Théorème 14.** Soient la pseudo représentation d'état stable (5.69) et un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ .  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si les LMI suivantes, où  $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ , sont vérifiées.

**Cas 1** ( $1 < \nu < 2$ ) :  $\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.90)$$

**Cas 2** ( $0 < \nu < 1$ ) :  $\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que

$$Q > 0, \quad \begin{bmatrix} \text{Sym}\{A(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q)\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.91)$$

Bien que le caractère nécessaire et suffisant du théorème 14 présente un intérêt certain pour l'analyse, le fait qu'il nécessite une vérification *a priori* de la stabilité du modèle limite son intérêt pour la synthèse. Afin de vérifier également la stabilité, la version modifiée du lemme 2 suivante peut être utilisée.

**Lemme 3** ([36]). Si l'ensemble  $\Lambda(\Phi, \Psi)$  du lemme 2 est remplacé par l'ensemble :

$$\Upsilon(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \quad (5.92)$$

alors la condition (5.82) est vraie  $\forall \lambda \in \Upsilon$  si  $\exists P, Q > 0$  vérifiant la condition LMI (5.83).

En choisissant les matrices  $\Phi$  et  $\Psi$  comme précédemment selon (5.85), LIANG et al. [36] ont obtenu le théorème suivant.

**Théorème 15** ([36]). Soient la pseudo représentation d'état (5.69) et un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ . Le modèle est stable et  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si les LMI suivantes, où  $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ , sont vérifiées.

**Cas 1** ( $1 < \nu < 2$ ) :  $\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} \text{Sym} \{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.93)$$

**Cas 2** ( $0 < \nu < 1$ ) :  $\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}, Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que

$$P > 0, \quad Q > 0, \quad \begin{bmatrix} \text{Sym} \{A(e^{j\theta}P + e^{-j\theta}Q)\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}P + e^{-j\theta}Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.94)$$

De plus, dans le 1<sup>er</sup> cas, la condition LMI (5.93) est aussi nécessaire.

Nous avons montré dans [21] que le nombre de variables peut être réduit sans pessimisme en posant  $X = P$  et  $\bar{X} = Q$ , ce qui conduit aux théorèmes suivants.

**Théorème 16.** Soient la pseudo représentation d'état (5.69) et un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ . Le modèle est stable et  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si les LMI suivantes, où  $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ , sont vérifiées.

**Cas 1** ( $1 < \nu < 2$ ) :  $\exists P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} \text{Sym} \{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.95)$$

**Cas 2** ( $0 < \nu < 1$ ) :  $\exists X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que

$$X > 0, \quad \begin{bmatrix} \text{Sym} \{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X}) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.96)$$

De plus, dans le 1<sup>er</sup> cas, la condition LMI (5.95) est aussi nécessaire.

Dans le cas  $0 < \nu < 1$ , la condition (5.96) faisant apparaître le terme réel  $(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})$  se prête mieux au problème de synthèse que celle du théorème 15.

### 5.3.2.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour de pseudo état et par retour de sortie dynamique

Dans cette partie, les conditions LMI développées dans les paragraphes précédents, permettant d'analyser la stabilité et les performances des modèles non entiers, vont permettre d'aborder le problème de synthèse de correcteurs  $\mathcal{H}_\infty$ . L'idée est d'appliquer ces conditions LMI d'analyse au système bouclé. Les paramètres du correcteur étant également des variables, les inégalités matricielles obtenues ne sont plus linéaires. Il s'agit alors d'appliquer des changements de variables linéarisants afin d'obtenir des conditions LMI de synthèse.

Par ailleurs, le but d'un asservissement étant de garantir des objectifs de performances tout en assurant la stabilité du système bouclé, seules les conditions LMI des théorèmes qui calculent la norme  $\mathcal{H}_\infty$  tout en vérifiant la stabilité peuvent être utilisées.

#### Retour de pseudo état

Dans cette partie, le théorème 12 (obtenu via l'inégalité de Riccati) et le théorème 14 (basé sur l'utilisation du lemme KYP) sont utilisés pour la synthèse du gain  $K$  d'une loi de commande par retour de pseudo état de la forme (5.61).

Considérons dans un premier temps le théorème 12 et multiplions à gauche et à droite l'inégalité 5.78 par la matrice  $\text{diag}\{X^{-1}, I, I\}$ . En posant  $P = X^{-1}$ , la LMI suivant est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}PA^T + rAP & B_w & \bar{r}PC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_zP & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.97)$$

En remplaçant la matrice  $A$  par la matrice dynamique  $A + BK$  du modèle bouclé (5.62) et la matrice  $C_z$  par  $C_z + D_zK$  puis en posant  $Q = KP$ , le théorème suivant est obtenu.

**Théorème 17** ([C2-11]). *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (5.69) est BIBO stabilisable par le retour de pseudo état (5.61) s'il existe  $P = P^* \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  telles que :*

$$\begin{bmatrix} \bar{r}PA^T + \bar{r}Q^T B_u^T + rAP + rB_uQ & B_w & \bar{r}PC_z^T + \bar{r}Q^T D_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_zP + rD_{zu}Q & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}. \quad (5.98)$$

$K = QP^{-1}$  est le gain du correcteur stabilisant garantissant  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

Il est important de noter que les variables matricielles  $P$  et  $Q$  du théorème 17 sont réelles bien que la LMI (5.98) soit déduite de la LMI complexe (5.78). Ce choix permet de synthétiser des correcteurs réels mais introduit un certain pessimisme. Ainsi, la LMI (5.78) était une condition d'analyse nécessaire et suffisante pour  $1 < \nu < 2$  alors que la condition de synthèse (5.98) n'est

que suffisante. De même, lorsque  $0 < \nu < 1$ , le pessimisme dû au choix des variables réelles pour la synthèse vient s'ajouter au pessimisme déjà présent dans la LMI d'analyse.

Une autre méthode de synthèse peut être obtenue en remplaçant  $A$  par  $A + B_u K$  et  $C_z$  par  $C_z + D_z K$  dans les LMI (5.95) et (5.96) du théorème 16 et en utilisant les changements de variables linéarisants  $Q = KP$  et  $Y = K(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})$  dans les cas 1 et 2.

**Théorème 18.** *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (5.69) est BIBO stabilisable par le retour de pseudo état (5.61) si les conditions LMI suivantes sont satisfaites.*

**Cas 1** ( $1 < \nu < 2$ ) : *il existe des matrices  $P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{Ae^{j\theta}P + B_u e^{j\theta}Q\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P + D_{zu} e^{j\theta}Q & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (5.99)$$

$K = QP^{-1}$  est le gain du correcteur stabilisant garantissant  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

**Cas 2** ( $0 < \nu < 1$ ) : *il existe des matrices  $X \in \mathbb{C}^{n \times n} > 0$  et  $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  telles que*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X}) + B_u Y\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X}) + D_{zu}Y & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.100)$$

$K = Y(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})^{-1}$  est le gain du correcteur stabilisant garantissant  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

Les résultats des théorèmes 17 et 18 ont été appliqués au problème d'isolation vibratoire d'un pont dans la référence [A-10]. Ils permettent d'effectuer la commande  $\mathcal{H}_\infty$  de modèles non entiers par retour de pseudo état, ce qui suppose que toutes les pseudo variables d'état du modèle soient mesurables. Dans le cas contraire, un retour de sortie dynamique peut être utilisé.

### Retour de sortie dynamique

Soit la pseudo représentation d'état d'une loi de commande par retour de sortie dynamique :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (5.101)$$

La pseudo représentation d'état du modèle (5.69) bouclé par la loi de commande (5.101) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu \tilde{x}(t) &= \mathcal{A}\tilde{x}(t) + \mathcal{B}w(t) \\ z(t) &= \mathcal{C}\tilde{x}(t) + \mathcal{D}w(t) \end{cases} \quad (5.102)$$

où  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad x_K^T(t)]^T$  est le pseudo vecteur d'état du système bouclé et :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_w + BD_K D_w \\ B_K D_w \end{bmatrix}, \quad (5.103)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_z + D_z D_K C & D_z C_K \end{bmatrix} \quad , \quad \mathcal{D} = D_{zw} + D_z D_K D_w . \quad (5.104)$$

Le théorème de synthèse suivant est alors obtenu en appliquant au modèle bouclé (5.102)-(5.104) le changement de variable linéarisant proposé par [63] pour des modèles entiers .

**Théorème 19** ([C2-10]). *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (5.69) est BIBO stabilisable par le retour de sortie dynamique (5.101) s'il existe  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $\hat{C} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  et  $\hat{D} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  telles que :*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{\bar{r}(AZ + B_u \hat{C})\} & * & * & * \\ \bar{r}\hat{A} + r(A + B_u \hat{D}C_y)^T & \text{Sym}\{\bar{r}(YA + \hat{B}C_y)\} & * & * \\ (B_w + B_u \hat{D}D_{yw})^T & (YB_w + \hat{B}D_{yw})^T & -\gamma^2 I & * \\ r(C_z Z + D_{zu} \hat{C}) & r(C_z + D_{zu} \hat{D}C_y) & D_{zw} + D_{zu} \hat{D}D_{yw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} Z & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (5.105)$$

Les matrices de la pseudo représentation d'état du correcteur sont alors données par :

$$\begin{cases} D_K &= \hat{D} \\ C_K &= (\hat{C} - D_K C_y X) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{B} - Y B_u D_K) \\ A_K &= N^{-1} (\hat{A} - N B_K C_y X - Y B_u C_K M^T - Y (A + B_u D_K C_y) X) M^{-T} \end{cases} \quad (5.106)$$

où  $M$  et  $N$  sont des matrices non singulières telles que  $MN^T = I - ZY$ .

Étant issu du théorème 12, le théorème 19 souffre donc du même pessimisme lorsque  $0 < \nu < 1$ . Par ailleurs, comme pour le retour d'état, les variables matricielles de la LMI (5.105) ont dû être choisie réelles afin d'obtenir un correcteur dynamique réel.

Le théorème 16, basé sur le lemme KYP, offre une LMI d'analyse réelle et peu pessimiste lorsque  $0 < \nu < 1$ . Malheureusement celle-ci est difficilement extensible à la synthèse par retour de sortie car le changement de variable linéarisant utilisé ci-dessus n'est plus applicable.

Notons enfin que l'ensemble des résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet d'un chapitre dans l'ouvrage [B-1].

### 5.3.3 Diagnostic

Les outils présentés dans les sections 5.3.1 et 5.3.2 permettent de calculer des lois de commande en se basant sur des modèles non entiers commensurables. Une telle approche permet de tirer parti de la capacité de ces modèles à retranscrire fidèlement et avec peu de paramètres le comportement dynamiques des systèmes à mémoire longue. Cette compacité des modèles non entiers a été de la même manière mise à profit dans le cadre des travaux de thèse d'Asma Aribi pour la synthèse de modules de diagnostic.

L'objectif général d'un module de diagnostic est de détecter et localiser des défauts pouvant affecter le bon fonctionnement du système. Dans le cadre d'une approche à base de modèles telle qu'illustrée sur la figure 5.11, il s'agit dans un premier temps de synthétiser un générateur de résidus capable de calculer en temps réel des signaux indicateurs de défauts, appelés résidus et notés  $r(t)$ , à partir des signaux de commande  $u(t)$  et de mesure  $y(t)$  disponibles sur le système.

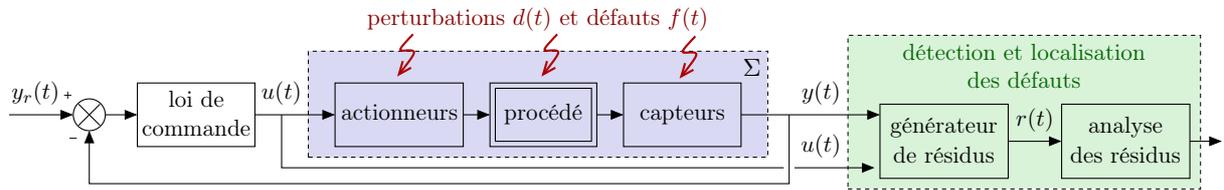


FIGURE 5.11 – Détection et localisation de défauts

Le générateur de résidus est calculé, à partir d'un modèle du système  $\Sigma$  (comprenant le procédé, les capteurs et les actionneurs), de sorte que les résidus soient nuls en fonctionnement normal et non nuls en fonctionnement défaillant. Du fait des erreurs de modélisation et des perturbations pouvant affecter  $\Sigma$ , le résidu est en réalité non nul même en fonctionnement normal. Une déviation sensible de sa valeur est néanmoins synonyme d'un défaut. Une analyse des résidus est ainsi réalisée dans un second temps afin de générer des alarmes mais aussi de localiser l'origine de la panne.

Dans les travaux de thèse d'Asma Aribi, deux approches ont été utilisées pour la synthèse de générateurs de résidus : l'espace de parité et le diagnostic à base d'estimateurs. Ces deux approches constituent l'extension de méthodes développées dans le cas entier au cas des modèles non entiers commensurables de pseudo représentation d'état :

$$\Sigma : \begin{cases} \mathbf{D}^\nu x(t) = A x(t) + B_u u(t) + B_d d(t) + B_f f(t) \\ y(t) = C x(t) + D_u u(t) + D_d d(t) + D_f f(t) \end{cases}, \quad (5.107)$$

où  $d(t)$  représentent les perturbations et  $f(t)$  les défauts à détecter.

### 5.3.3.1 Méthode de l'espace de parité

L'approche de l'espace de parité dynamique développée dans le cas entier consiste à exploiter les redondances existant entre les signaux de mesures et de commande ainsi que leurs dérivées. Afin de faire apparaître ces redondances, le modèle dynamique est d'abord réécrit sous une forme statique obtenue en prenant les dérivées successives des signaux de sortie. Nous avons appliqué la même approche dans la cas non entier en prenant les dérivées successives d'ordre non entier  $\nu$  du signal de sortie du modèle (5.107). Ainsi, la dérivée d'ordre  $\nu$  de  $y(t)$  est donnée par :

$$\mathbf{D}^\nu y(t) = C\mathbf{D}^\nu x(t) + D_u\mathbf{D}^\nu u(t) + D_d\mathbf{D}^\nu d(t) + D_f\mathbf{D}^\nu f(t). \quad (5.108)$$

L'utilisation de l'équation dynamique du modèle (5.107) permet alors d'écrire :

$$\mathbf{D}^\nu y(t) = CAx(t) + CB_u u(t) + CB_d d(t) + C f_u f(t) + D_u\mathbf{D}^\nu u(t) + D_d\mathbf{D}^\nu d(t) + D_f\mathbf{D}^\nu f(t). \quad (5.109)$$

En répétant l'opération  $k$  fois, l'ensemble de relations obtenues peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$Y(t, k) - H_u(k)U(t, k) = H_x(k)x(t) + H_d(k)D(t, k) + H_f(k)F(t, k) \quad (5.110)$$

où :

$$Z(t, k) = [ z^T(t) \quad \mathbf{D}^\nu z^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{D}^{k\nu} z^T(t) ]^T, \quad z = \{y, u, d, f\}, \quad (5.111)$$

$$H_x(k) = [ C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^k)^T ]^T, \quad (5.112)$$

et :

$$H_{u,d,f}(k) = \begin{bmatrix} D_{u,d,f} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CB_{u,d,f} & D_{u,d,f} & 0 & \dots & 0 \\ CAB_{u,d,f} & CB_{u,d,f} & D_{u,d,f} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{k-1}B_{u,d,f} & CA^{k-2}B_{u,d,f} & \dots & CB_{u,d,f} & D_{u,d,f} \end{bmatrix}. \quad (5.113)$$

Le résidu est alors obtenu comme une combinaison linéaire décrite par une matrice  $W$  des signaux connus  $u$  et  $y$  et de leurs dérivées non entières selon :

$$r(t) = W(Y(t, k) - H_u(k)U(t, k)). \quad (5.114)$$

L'équation (5.114) est appelée forme de calcul et sera implantée dans le générateur de résidu. La forme d'évaluation suivante, obtenue à l'aide de l'équation (5.110), permet d'analyser la sensibilité du résidu aux perturbations et aux défauts :

$$r(t) = WH_x(k)x(t) + WH_d(k)D(t, k) + WH_f(k)F(t, k). \quad (5.115)$$

La matrice  $W$ , appelée matrice de parité, est choisie de sorte que le résidu  $r(t)$  soit nul en fonctionnement idéal (lorsque  $d(t)$  et  $f(t)$  sont nuls). D'après l'équation (5.115), cela implique de trouver  $W$  telle que :

$$WH_x(k) = 0. \quad (5.116)$$

L'existence d'une matrice vérifiant (5.116) et le nombre de résidus obtenus dépendent du nombre de dérivées  $k$  et du rang de la matrice  $H_x(k)$ . Pour une matrice  $W$  donnée, la forme d'évaluation (5.115) permet d'apprécier *a posteriori* la sensibilité du résidu vis-à-vis des perturbations et des défauts.

Afin d'obtenir un meilleur résidu, il est possible de générer un unique résidu scalaire  $\bar{r}(t)$  obtenu comme une combinaison linéaire des composantes de  $r(t)$  :

$$\bar{r}(t) = v^T r(t), \quad (5.117)$$

où le vecteur  $v$  est appelé sélecteur de résidus. En remplaçant  $r(t)$  par son expression (5.115) dans l'équation (5.117), on obtient :

$$\bar{r}(t) = v^T W H_d(k) D(t, k) + v^T W H_f(k) F(t, k). \quad (5.118)$$

Afin de minimiser l'influence des perturbations  $d(t)$  tout en maximisant celle des défauts  $f(t)$  sur le résidu, le critère suivant est introduit :

$$J = \frac{\|v^T W H_d(k)\|_2^2}{\|v^T W H_f(k)\|_2^2} = \frac{v^T W H_d H_d^T W^T v}{v^T W H_f H_f^T W^T v}, \quad (5.119)$$

où  $W$  vérifie (5.116). Le sélecteur optimal au sens du critère (5.119) est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre du faisceau matriciel  $(v^T \Omega H_d H_d^T \Omega^T v, v^T \Omega H_f H_f^T \Omega^T v)$  [24]. Ce résultat est détaillé dans la référence [C2-12].

Dans ces travaux, nous nous sommes également intéressés à la localisation des défauts par deux méthodes : l'analyse de l'orientation du vecteur de résidus  $r$  et la synthèse de résidus structurés sensibles à des sous-ensembles de pannes.

### 5.3.3.2 Méthodes à base d'estimateurs

La seconde approche développée dans la thèse est le diagnostic à base d'estimateurs. Deux types d'estimateurs ont été considérés.

Le premier est un estimateur de pseudo état de la forme :

$$\begin{cases} D^\nu \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + B_u u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.120)$$

où  $L$  est le gain de l'estimateur. En utilisant les équations (5.120) et (5.107), la dynamique de l'erreur d'estimation  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  s'écrit :

$$D^\nu \varepsilon(t) = (A - LC)\varepsilon(t) + (B_d - LD_d)d(t) + (B_f - LD_f)f(t). \quad (5.121)$$

Afin que l'erreur d'estimation soit décroissante, il convient de choisir  $L$  telle que les valeurs propres de  $(A - LC)$  appartiennent au domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  donné par (5.42), soit :

$$|\arg \{\lambda(A - LC)\}| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (5.122)$$

Le choix de la localisation des valeurs propres dans ce domaine résultera d'un compromis entre sensibilité aux perturbations et rapidité de convergence de l'erreur et donc du résidu qui est obtenu comme l'écart entre la sortie mesurée et son estimation :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (5.123)$$

La valeur du gain  $L$  est alors obtenue par simple placement de valeurs propres.

Le second type d'estimateur est l'estimateur à entrées inconnues. Son principe est d'estimer à la fois la sortie mais aussi la perturbation  $d(t)$  (entrée inconnue) de sorte à obtenir un générateur de résidu délivrant un résidu insensible aux perturbations. Nous avons étendu cette approche développée dans le cas entier [17] au cas non entier. L'estimateur utilisé est similaire à l'estimateur de pseudo état (5.120) mais intègre dans son équation dynamique une estimée  $\hat{d}(t)$  de la perturbation  $d(t)$  selon :

$$\begin{cases} D^\nu \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + B_d \hat{d}(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}. \quad (5.124)$$

L'estimation de  $d(t)$  est obtenue en dérivant à l'ordre  $\nu$  l'équation de sortie du modèle (5.107) et en isolant le terme  $d(t)$  :

$$d(t) = M(D^\nu y(t) - CAx(t) - CB_u u(t)), \quad (5.125)$$

où  $M = \left( (CB_d)^T (CB_d) \right)^{-1} (CB_d)^T$  désigne la pseudo-inverse de  $CB_d$ . Le seul signal inconnu dans (5.125) est  $x(t)$ . Ce-dernier est donc remplacé par son estimation conduisant à :

$$\hat{d}(t) = M(D^\nu y(t) - CA\hat{x}(t) - CB_u u(t)). \quad (5.126)$$

En remplaçant  $\hat{d}(t)$  par son expression (5.126) dans (5.124), l'estimateur à entrées inconnues suivant est obtenu :

$$\begin{cases} D^\nu \hat{x}(t) = (A - B_d M C A) \hat{x}(t) + (B - B_d M C B) u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + M B_d D^\nu y(t) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}. \quad (5.127)$$

Le calcul de l'erreur d'estimation  $\varepsilon(t)$  conduit à :

$$D^\nu \varepsilon(t) = (A - LC - B_d M C A) \varepsilon(t) + (B_f - L D_f) f(t), \quad (5.128)$$

et confirme une insensibilité vis-à-vis des perturbations contrairement à l'erreur (5.121) obtenue dans le cas de l'estimateur de pseudo état. L'estimateur (5.127) requiert le calcul de  $D^\nu y(t)$ . Ce calcul peut être néanmoins évité en introduisant un nouveau pseudo état  $z(t)$  selon :

$$z(t) = \hat{x}(t) - B_d M y(t). \quad (5.129)$$

Les calculs développés dans [A-8] montrent ainsi que le générateur de résidus suivant permet d'obtenir un résidu insensible aux perturbations  $d(t)$  sans nécessiter de dériver la mesure  $y(t)$  :

$$\begin{cases} D^\nu z(t) = Gz(t) + TBu(t) + Ky(t) \\ r(t) = -Cz(t) + (I - CB_dM)y(t) \end{cases}, \quad (5.130)$$

où les matrices inconnues  $G$ ,  $T$ ,  $K$  et  $M$  sont obtenues comme suit :

1. calculer la pseudo-inverse  $M = \left( (CB_d)^T (CB_d) \right)^{-1} (CB_d)^T$  de  $CB_d$ ;
2. en déduire  $T = (I - B_dMC)$ ;
3. choisir le gain  $L$  de sorte à vérifier que  $|\arg \{ \text{spec}(TA - LC) \}| > \nu \frac{\pi}{2}$ ;
4. en déduire les matrices  $G$  et  $K$  selon  $G = TA - LC$  et  $K = (TA - LC)B_dM + L$ .

Le problème de localisation a été également traité dans le cadre de ces travaux par la mise en place de bancs d'estimateurs sensibles à des sous-ensembles de défauts [C2-8].

## 5.4 Contributions relatives aux autres classes de modèles non entiers

Contrairement au cas des modèles explicites commensurables pour lesquels des outils d'analyse efficaces ont été développés, la littérature dédiée à l'étude des autres classes de modèles non entiers est moins fournie. Cette partie présente des résultats auxquels j'ai contribué et qui sont dédiés aux modèles explicites non commensurables ainsi qu'aux modèles implicites.

### 5.4.1 Analyse de stabilité des modèles non commensurables

Tout comme pour les modèles commensurables, l'approche la plus directe pour étudier la stabilité consisterait à calculer les pôles et vérifier s'ils appartiennent au domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  donné par (5.31). Cependant, le calcul direct des pôles  $p_l$ , solutions de  $D(s) = \sum_{l=1}^{N_d} \beta_l s^{\nu_{d_l}} = 0$ , est une tâche difficile car  $D(s)$  n'est pas un polynôme et il n'existe pas de changement de variable comme dans le cas commensurable permettant de ramener l'étude des pôles à l'étude des racines d'un polynôme.

Hwang et Cheng envisagent dans [31] la possibilité d'évaluer la stabilité d'un modèle non commensurable en utilisant le principe de l'argument de Cauchy. Seule la stabilité étant étudiée, la fonction de transfert non commensurable considérée est la suivante (elle ne fait pas apparaître de zéros) :

$$F(s) = \frac{1}{a_n s^{\nu_n} + a_{n-1} s^{\nu_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\nu_1} + 1}, \quad (5.131)$$

avec  $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $0 < \nu_1 < \dots < \nu_n$ .

**Théorème 20** (Principe de l'argument de Cauchy [34]). *Soit une fonction de transfert  $G(s)$  et  $G(\Gamma)$  l'image d'un contour fermé  $\Gamma$  du plan complexe par  $G$ . Le nombre de fois que  $G(\Gamma)$  entoure l'origine est donné par :*

$$T_{G(\Gamma)} = Z_{G,\Gamma} - P_{G,\Gamma} \quad (5.132)$$

où  $Z_{G,\Gamma}$  et  $P_{G,\Gamma}$  respectivement le nombre de zéros et de pôles de  $G(s)$  entourés par le contour  $\Gamma$ . Les tours effectués autour de l'origine sont comptés positivement s'ils sont réalisés dans le même sens que le contour original et négativement s'ils sont réalisés dans le sens opposé.

L'application du principe de l'argument à un contour spécifique délimitant la région d'instabilité (appelé contour de Nyquist) permet ainsi de conclure sur la stabilité du système si le nombre de zéros instables de  $G(s)$  est connu.

**Définition 8** (Contour de Nyquist [51]). *Le contour de Nyquist  $\Gamma_N$  est défini comme le chemin du plan complexe composé de l'axe imaginaire privé des singularités de  $G(s)$  et du demi-cercle de rayon infini centré en  $(0, 0)$  et entourant entièrement le demi-plan complexe droit dans le sens horaire.*

Le contour de Nyquist est représenté sur la figure 5.12 comme l'union de 4 chemins :

$$\Gamma_N = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad (5.133)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho \rightarrow +\infty, \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right] \right\} & \Gamma_2 &= \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho \in ]+\infty; 0[, \theta = -\frac{\pi}{2} \right\} \\ \Gamma_3 &= \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho \rightarrow 0, \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right] \right\} & \Gamma_4 &= \left\{ \rho e^{i\theta} : \rho \in ]0; +\infty[, \theta = +\frac{\pi}{2} \right\} \end{aligned} \quad (5.134)$$

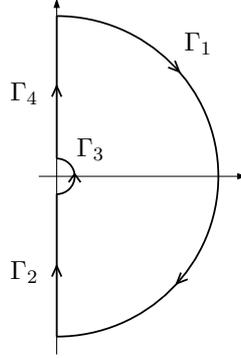


FIGURE 5.12 – Contour de Nyquist

En particulierisant le théorème 20 au contour de Nyquist  $\Gamma_N$ , le théorème suivant est obtenu :

**Théorème 21.** Soit  $G(s)$  une fonction de transfert et  $G(\Gamma_N)$  l'image du contour de Nyquist  $\Gamma_N$  par la fonction  $G$ . Le nombre de fois que  $G(\Gamma_N)$  entoure l'origine dans la direction horaire est donné par :

$$\overset{\circ}{T}_{G(\Gamma_N)} = Z_G^+ - P_G^+ \quad (5.135)$$

où  $Z_G^+$  et  $P_G^+$  sont respectivement le nombre de zéros et de pôles instables de  $G(s)$ .

Comme la fonction de transfert  $F(s)$  définie par (5.131) n'a pas de zéros ( $Z_F^+ = 0$ ), le théorème 21 permet de conclure sur la stabilité du modèle :

$$P_F^+ = -\overset{\circ}{T}_{F(\Gamma_N)} = \overset{\circ}{T}_{F(\Gamma_N)} \quad (5.136)$$

où  $\overset{\circ}{T}_{F(\Gamma_N)}$  désigne le nombre de tours de  $F(\Gamma_N)$  autour de l'origine dans la direction antihoraire.

L'image de  $\Gamma_N$  par  $F$  peut être évaluée numériquement par discrétisation de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_4$  définis par (5.134). Cependant, comme mentionné dans [31], le problème est que le contour de Nyquist est infini ( $\rho \rightarrow +\infty$  dans  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ ) et il n'y a pas de règle pour choisir  $\rho_{max}$ . En effet, si pour un  $\rho_{max}^1$  donné,  $\tilde{G}(\Gamma_N)$  n'encercle pas le point critique, il pourrait le faire pour un autre choix de  $\rho_{max} > \rho_{max}^1$  et il n'est donc pas possible de conclure de manière définitive sur la stabilité.

Dans [68], Trigeassou et al. proposent une méthode basée sur l'utilisation du théorème de Nyquist. Dans ce travail, il est montré que des fonctions de transfert non commensurables de la forme :

$$H(s) = \frac{1}{s^{\nu_n} + a_{n-1}s^{\nu_{n-1}} + \dots + a_1s^{\nu_1} + a_0} \quad (5.137)$$

ont les mêmes pôles qu'un système bouclé  $\tilde{H}(s)$  dont la boucle ouverte s'écrit :

$$H_{BO}(s) = \frac{a_{n-1}}{s^{\nu_n - \nu_{n-1}}} + \frac{a_{n-2}}{s^{\nu_n - \nu_{n-2}}} + \cdots + \frac{a_0}{s^{\nu_n}}. \quad (5.138)$$

D'après le théorème de Nyquist, la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(s)$  n'ayant pas de pôle à partie réelle strictement positive ( $H_{BO}(s)$  ayant tous ses pôles à l'origine), la fonction de transfert en boucle fermée  $\tilde{H}(s)$  (et donc  $H(s)$ ) est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist par  $H_{BO}$  n'encercle pas le point de coordonnées  $(-1, 0)$ . Cette approche a permis aux auteurs de développer des critères similaires à ceux de Routh pour des modèles faisant apparaître au plus deux ordres de dérivation. Pour des ordres de dérivations plus nombreux, cette approche est limitée par le problème évoqué par Hwang et Cheng du calcul de la réponse fréquentielle sur un intervalle de fréquence infini.

Dans [C2-19, A-11], nous avons proposé une autre réalisation faisant appel à des boucles imbriquées. La réalisation par boucles imbriquées associée à  $F(s)$  est donnée sur la figure 5.13.

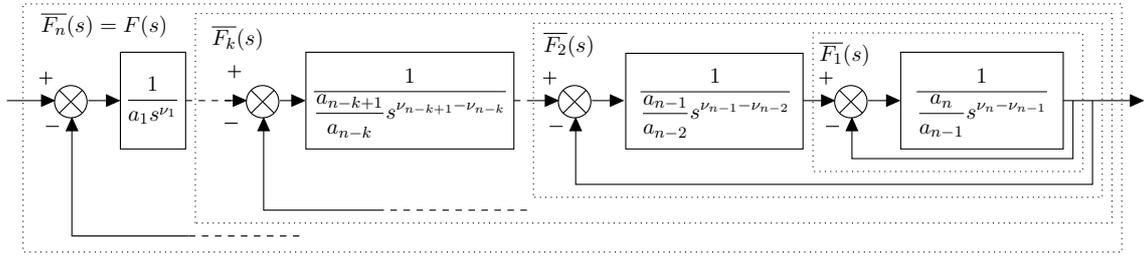


FIGURE 5.13 – Réalisation par boucles imbriquées de  $F(s)$

La première boucle fermée  $\overline{F}_1(s)$  s'écrit :

$$\overline{F}_1(s) = \frac{F_1(s)}{F_1(s) + 1} \quad (5.139)$$

où  $F_1(s)$  est la boucle ouverte correspondante :

$$F_1(s) = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}} s^{\nu_n - \nu_{n-1}}}. \quad (5.140)$$

Les boucles suivantes,  $\overline{F}_k(s)$  avec  $k \in \{2 \cdots n\}$ , s'écrivent :

$$\overline{F}_k(s) = \frac{F_k(s)}{F_k(s) + 1}. \quad (5.141)$$

où  $F_k(s)$  sont les boucles ouvertes correspondantes données par :

$$F_k(s) = \frac{1}{\frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}} s^{\nu_{n-k+1} - \nu_{n-k}}} \overline{F}_{k-1}(s). \quad (5.142)$$

L'idée est alors d'utiliser le principe de l'argument de manière récursive pour évaluer le nombre de pôles instables  $P_{F_k}^+$  et de zéros instables  $Z_{F_k}^+$  de chaque boucle imbriquée  $\overline{F}_k(s)$ , en débutant par  $\overline{F}_1(s)$ .

La première boucle  $\overline{F}_1(s)$  fait intervenir un intégrateur pur dans la boucle ouverte  $F_1(s)$  donnée par (5.140). Comme détaillé dans [A-11], l'image du contour de Nyquist peut être évaluée analytiquement. Le nombre de zéros instables est alors donné par :

$$Z_{\overline{F}_1}^+ = 0 \quad (5.143)$$

et le nombre de pôles instables par :

$$\begin{cases} P_{\overline{F}_1}^+ = \overset{\circ}{T}_{1+F_1}(\Gamma_N) = 1 + \left\lfloor \frac{\nu_n - \nu_{n-1} - 1}{2} \right\rfloor & \text{si } \frac{a_n}{a_{n-1}} < 0, \\ P_{\overline{F}_1}^+ = \overset{\circ}{T}_{1+F_1}(\Gamma_N) = \left\lfloor \frac{\nu_n - \nu_{n-1}}{2} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.144)$$

Pour les boucles suivantes, l'image du contour de Nyquist ne peut plus être déterminée analytiquement et doit être évaluée numériquement. La valeur de  $\rho$  dans le contour de Nyquist (5.133-5.134) ne peut alors plus appartenir à l'intervalle  $]0; +\infty[$ . Il convient alors de choisir, à chaque pas  $k$ , une réalisation numérique du contour, notée  $\Gamma_N^k$ , pour laquelle l'intervalle de variation de  $\rho$  est limité à  $]\rho_k^{\min}; \rho_k^{\max}[$ . Les développements menés dans [A-11] permettent de réévaluer de manière itérative  $\rho_k^{\min}$  et  $\rho_k^{\max}$  de sorte à garantir qu'aucun encerclement de l'origine ne puisse être omis. Pour  $k \geq 2$ , les bornes de l'intervalle sont données par :

$$\rho_k^{\min} = \begin{cases} \rho_{k-1}^{\min} & \text{si } \left| \left( \frac{a_{n-k}}{a_n} \right)^{\frac{1}{\nu_n - \nu_{n-k}}} \right| < \rho_{k-1}^{\min}, \\ \left| \left( \frac{a_{n-k}}{a_n} \right)^{\frac{1}{\nu_n - \nu_{n-k}}} \right| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.145)$$

$$\rho_k^{\max} = \begin{cases} \rho_{k-1}^{\max} & \text{si } \left| \left( \frac{a_{n-k}}{a_{n-k+1}} \right)^{\frac{1}{\nu_{n-k+1} - \nu_{n-k}}} \right| > \rho_{k-1}^{\max}, \\ \left| \left( \frac{a_{n-k}}{a_{n-k+1}} \right)^{\frac{1}{\nu_{n-k+1} - \nu_{n-k}}} \right| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.146)$$

en définissant :

$$\rho_1^{\min} = \rho_1^{\max} = \left( \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^{\frac{1}{\nu_n - \nu_{n-1}}}. \quad (5.147)$$

Le nombre de zéros et de pôles instables de la  $k^e$  boucle ( $k \geq 2$ ) est alors donné par :

$$Z_{\overline{F}_k}^+ = 0 \quad , \quad P_{\overline{F}_k}^+ = \overset{\circ}{T}_{1+F_k}(\Gamma_N^k) + P_{\overline{F}_{k-1}}^+. \quad (5.148)$$

Lors de la dernière étape, le nombre de pôles instables de  $F(s) = \overline{F}_n(s)$  est obtenu. Le test de stabilité est ainsi décrit par l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** Test de stabilité d'un modèle non entier non commensurable

---

- 1: Déterminer la réalisation par boucles imbriquées de  $F(s)$
  - 2: Déterminer le nombres de zéros instables  $Z_{F_1}^+$  et de pôles instables  $P_{F_1}^+$  de la première boucle selon (5.143) et (5.144)
  - 3: **pour**  $k = 2$  à  $n$  **faire**
  - 4: Déterminer  $\rho_k^{\min}$ ,  $\rho_k^{\max}$  et la réalisation du contour de Nyquist  $\Gamma_N^k$  selon les relations (5.145-5.146-5.147)
  - 5: Calculer l'image du contour  $\Gamma_N^k$  par la fonction  $1 + F_k$  et déterminer le nombre d'encerclements de l'origine  $\overset{\circ}{T}_{1+F_k(\Gamma_N^k)}$
  - 6: En déduire le nombre de zéros instables  $Z_{F_k}^+$  et de pôles instables  $P_{F_k}^+$  de la  $k$ -ième boucle selon (5.148)
  - 7: **fin pour**
  - 8: Le nombre de pôles instables de  $F(s)$  est  $P_F^+ = P_{F_n}^+$
- 

### 5.4.2 Formules analytiques pour le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ des modèles implicites

Dans le cadre des travaux de thèse de Mathieu Chevrié, nous nous sommes intéressés d'un point de vue théorique au calcul de la norme  $\mathcal{H}_2$  définie pour un modèle stable  $G(s)$  de réponse impulsionnelle  $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}$  par :

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (5.149)$$

Des résultats existaient dans la littérature dans le cas de transferts explicites [39] mais pas dans le cas de transferts implicites de la forme (4.31). Sous hypothèse de ne pas avoir de zéros, un tel transfert peut s'écrire comme la mise en série :

— d'un intégrateur non entier d'ordre  $\mu$  de la forme :

$$F_I(s) = \frac{1}{s^\mu}; \quad (5.150)$$

— de transferts implicites de 1<sup>re</sup> espèce ayant un unique pôle réel  $-\lambda$  de multiplicité  $\nu$  :

$$F_1(s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\nu}; \quad (5.151)$$

— de transferts de 2<sup>e</sup> espèce ayant des pôles complexes conjugués  $\{-\lambda, -\bar{\lambda}\}$  :

$$F_2(s) = \frac{1}{(s + \lambda)^\nu (s + \bar{\lambda})^\nu}. \quad (5.152)$$

Nous avons déterminé l'expression analytique des normes  $\mathcal{H}_2$  des transferts élémentaires de première et de seconde espèce en série avec des intégrateurs non entiers (sections 5.4.2.1 et 5.4.2.2). Le cas de la mise en série de fonctions de transferts de même espèce a également été traité mais n'est pas présenté ici.

### 5.4.2.1 Norme $\mathcal{H}_2$ des fonctions de transfert implicite de première espèce

Le théorème suivant permet de déterminer de manière analytique la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert implicite stable de première espèce en série avec un intégrateur non entier.

**Théorème 22** ([C2-6, A-6]). *Un modèle de 1<sup>re</sup> espèce de la forme (5.151) en série avec un intégrateur non entier de la forme (5.150) a pour norme  $\mathcal{H}_2$  :*

$$\left\| \tilde{F}_1(s) \right\|_2^2 = \|F_I(s)F_1(s)\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \nu + \mu \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \mu \geq \frac{1}{2} \\ \frac{B(\frac{1}{2}-\mu, \nu+\mu-\frac{1}{2})}{2\pi\lambda^{2\nu+2\mu-1}} & \text{si } \nu + \mu > \frac{1}{2} \text{ et } \mu < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.153)$$

où  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  est la fonction Beta d'Euler [25], la fonction  $\Gamma$  étant donnée par (4.3).

Il est à noter que l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  se déduit immédiatement de (5.153) et reste valable en remplaçant  $\mu$  par 0. De plus, en se basant sur la formule de Stirling de la fonction Gamma [25], il peut être démontré que pour  $\mu = 0$  :

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left\| \tilde{F}_1 \right\|_2 = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|F_1\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \infty & \text{si } 0 < \lambda < 1 \end{cases}. \quad (5.154)$$

La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  donnée par (5.151) lorsque  $\mu = 0$  est calculée avec le résultat du théorème 22 pour différentes valeurs de  $\lambda$  puis tracée sur la figure 5.14. La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_1(s)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers  $\frac{1}{2}$  conformément à (5.153). En outre, la limite de  $\|F_1\|_2$  quand  $\nu$  tend vers  $+\infty$  est conforme à (5.154).

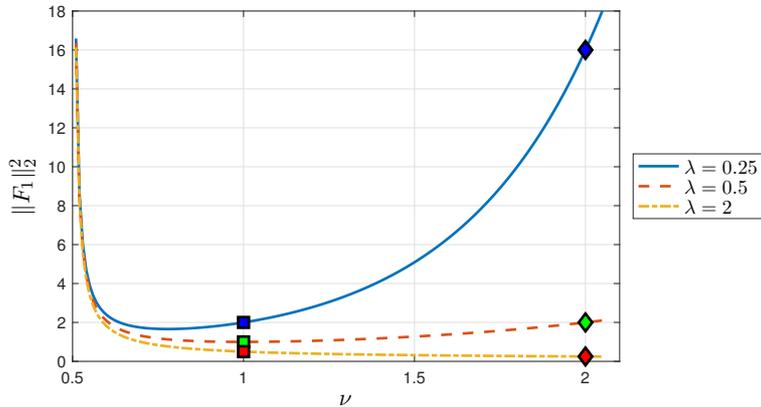


FIGURE 5.14 – Norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de  $F_1(s)$  en fonction de  $\nu$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

Lorsque  $\nu$  est un nombre entier, la fonction de transfert (5.151) devient entière et les formules analytiques établies en premier lieu dans [3] pour  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  sont retrouvées. Ces formules analytiques, mises en œuvre dans la fonction `norm` du logiciel MATLAB, sont appliquées pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  lorsque  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  et sont respectivement représentées par les carrés et les losanges dans la figure 5.14.

### 5.4.2.2 Norme $\mathcal{H}_2$ des fonctions de transfert implicite de seconde espèce

Le théorème suivant permet de déterminer de manière analytique la norme  $\mathcal{H}_2$  d'une fonction de transfert implicite stable de seconde espèce en série avec un intégrateur non entier.

**Théorème 23** ([C2-6, A-6]). *Un modèle de 2<sup>e</sup> espèce de la forme (5.152) en série avec un intégrateur non entier de la forme (5.150) a pour norme  $\mathcal{H}_2$  :*

$$\|F_I(s)F_2(s)\|_2^2 = \begin{cases} \infty & \text{si } \mu \geq \frac{1}{2} \text{ ou } 2\nu + \mu \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)B(2\nu+\mu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\mu)P_{\mu+\nu-1}^{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{\lambda^2+\bar{\lambda}^2}{2\lambda\bar{\lambda}}\right)}{\pi 2^{\frac{3}{2}-\nu}(\lambda\bar{\lambda})^{\mu+2\nu-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{\lambda^2+\bar{\lambda}^2}{2\lambda\bar{\lambda}}\right)^2-1\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}} & \text{si } \mu < \frac{1}{2} \text{ et } 2\nu + \mu > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.155)$$

où  $P_\alpha^\beta(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\beta}{2}} {}_2F_1(-\alpha, \alpha+1; 1-\beta; \frac{1-z}{2})$  est la fonction de Legendre de degré  $\alpha$  et d'ordre  $\beta$  [25],  ${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$  étant la fonction hypergéométrique de Gauss où  $(q)_k$  est le  $q$ -symbole de Pochhammer tel que  $(q)_k = \frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(q)}$  si  $q > 0$  et  $(q)_k = \frac{(-1)^k \Gamma(1-q)}{\Gamma(1-q-k)}$  si  $q \leq 0$ .

Il est à noter que l'expression de la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_2(s)$  se déduit immédiatement de (5.155) et reste valable en remplaçant  $\mu$  par 0.

Comme précédemment, la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_2(s)$  donnée par (5.152) lorsque  $\mu = 0$  est calculée avec le résultat du théorème 23 pour différentes valeurs de  $\lambda$  puis tracée sur la figure 5.15. La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $F_2(s)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers  $\frac{1}{4}$  conformément à (5.155).

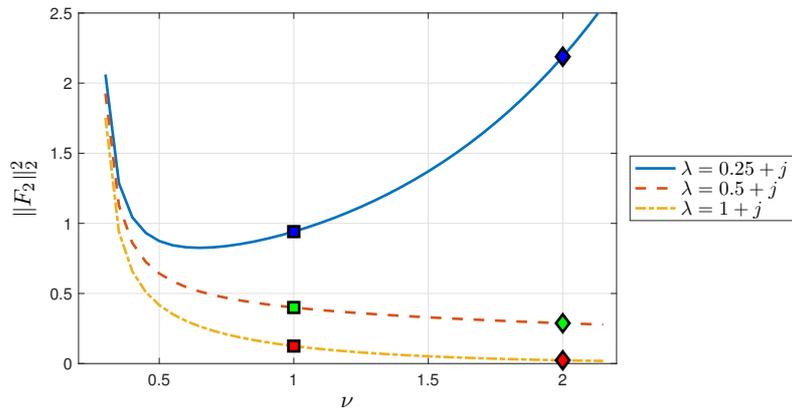
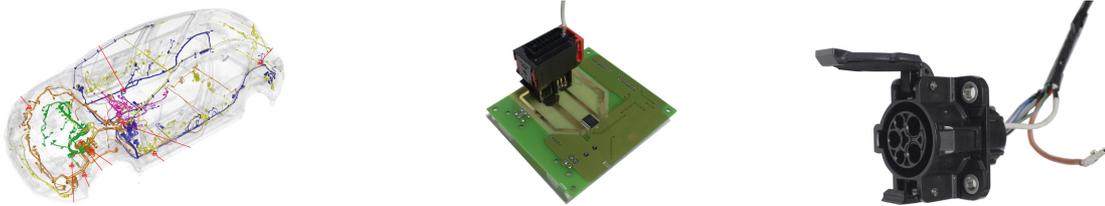


FIGURE 5.15 – Norme  $\mathcal{H}_2$  (au carré) de  $F_2(s)$  en fonction de  $\nu$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

Lorsque  $\nu$  est un nombre entier, la fonction de transfert (5.151) devient entière et les formules analytiques établies dans [3] pour  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  sont retrouvées et utilisées pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  lorsque  $\nu = 1$  et  $\nu = 2$  et respectivement représentée par les carrés et les losanges dans la figure 5.14.

### 5.4.2.3 Application au maillage optimal d'un fil électrique

D'un point de vue applicatif, cette thèse réalisée en partenariat avec le groupe PSA avait également pour but de développer des outils pour la surveillance thermique des connecteurs de l'architecture électrique et électronique d'une automobile (figure 5.16(a)). Un connecteur électrique automobile est en effet le siège de points de contact soumis à des échauffements par effet Joule provoqués par leur résistance. Au long des cycles d'utilisation, la résistance de contact peut être dégradée, provoquant des échauffements potentiellement critiques au niveau des points de contact.



(a) Architecture électrique et électronique (b) Carte électronique et connecteur (c) Prise de recharge et faisceau

FIGURE 5.16 – Architecture électrique et électronique d'une automobile et connecteurs associés

Les travaux de thèse ont ainsi conduit à développer deux approches pour détecter les variations anormales des résistances de contact. La première, appliquée à un connecteur de boîtier électronique automobile (figure 5.16(b)), repose sur un diagnostic à base de modèle et en particulier sur la méthode de l'espace de parité tel que décrite dans le cas non entier dans la partie 5.3.3.1 [A-2]. La seconde, appliquée à un connecteur de recharge de véhicule électrique (figure 5.16(c)), consiste d'abord à estimer un flux de chaleur lié à l'effet Joule provoqué par la résistance de contact (cette dernière étant ensuite estimée grâce à la méthode des moindres carrés) [A-3]. Ces deux approches reposent sur des modèles électrothermiques des connecteurs considérés et de leurs environnements qui ont également été développés dans cette étude. Ces modèles reposent notamment sur l'optimisation du maillage d'un fil électrique basée sur la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  de l'erreur entre un modèle maillé d'ordre entier et un modèle analytique de référence d'ordre non entier. Ce dernier modèle s'apparente aux fonctions de transferts implicites de première espèce présentées plus haut mais fait également intervenir un terme exponentiel. Nous avons donc développés d'autres résultats théoriques dédiés à cette classe particulière de modèles [C2-3, A-7] et les avons ensuite appliqués au maillage de fils électriques [C2-2, A-1].

Les résultats applicatifs liés à la détection des suréchauffements dans les boîtiers électroniques et dans les connecteurs de recharge ont fait l'objet de deux brevets [D-2, D-1].

## 5.5 Conclusion et autres contributions

Ce chapitre visait à faire la synthèse de mes principales contributions en analyse, commande et diagnostic basés sur des modèles non entiers. Certaines contributions ont été détaillées, et d'autres en lien avec ces dernières et ayant fait l'objet de publications, ont été uniquement citées. Enfin, d'autres résultats ne sont pas présentés dans ce manuscrit et concernent :

- la mise en évidence des limitations de la pseudo représentation d'état et la proposition d'outils de modélisation alternatifs [C2-14, A-9, C2-4] ;
- l'étude des propriétés et notamment de l'observabilité des modèles non entiers à partir de la représentation diffusive [A-13, C2-7, A-4] ;
- l'initialisation des équations aux dérivées partielles non entières [C2-1] ;
- l'établissement de conditions de bornitude pour la norme  $\mathfrak{L}_p$  de la réponse impulsionnelle des fonctions de transfert implicites [C2-5] ;
- l'estimation de température de jonction d'un transistor de puissance à l'aide d'un modèle non entier [C2-17, A-15].

## Chapitre 6

# Perspectives en analyse, commande et diagnostic de modèles entiers et non entiers et sur l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	114
<b>6.2</b>	<b>Perspectives en analyse, commande et diagnostic de modèles entiers et non entiers</b>	114
6.2.1	Commande $\mathcal{H}_2$ basée sur des modèles non entiers explicites	114
6.2.2	Extension de la méthode $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_-$ aux modèles non entiers explicites	119
6.2.3	Commande tolérante aux défauts d'un drone	120
<b>6.3</b>	<b>Perspectives sur l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue</b>	122
6.3.1	Capteurs à ondes de Love et dépôt avec rebond	123
6.3.2	Stockage d'hydrogène et absorption de particules	129
6.3.3	Axes de recherche possibles autour de cette thématique	132

---

## 6.1 Introduction

Dans ce chapitre sont présentées différentes thématiques de recherche que je souhaite développer dans les années à venir. Dans la continuité des travaux présentés dans le chapitre 5, la partie 6.2 présente ainsi différentes perspectives en analyse, commande et diagnostic à base de modèles entiers et non entiers. Dans la partie 6.3 sont proposées d'autres perspectives liées à l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue dont le comportement entrée-sortie peut être retranscrit à l'aide de modèles non entiers.

## 6.2 Perspectives en analyse, commande et diagnostic de modèles entiers et non entiers

### 6.2.1 Commande $\mathcal{H}_2$ basée sur des modèles non entiers explicites

Comme décrit dans la partie 5.4.2, j'ai contribué à l'obtention de formules analytiques pour calculer la norme  $\mathcal{H}_2$  des modèles non entiers implicites. Des formules existent également dans la littérature pour les modèles explicites [39]. Ces dernières sont bien adaptées à l'analyse mais leur utilisation pour la synthèse de lois de commande minimisant la norme  $\mathcal{H}_2$  d'un transfert de performances conduirait à un problème d'optimisation non linéaire.

Plus précisément, le problème considéré est le suivant. Soit un modèle non entier pour lequel le modèle généralisé est écrit sous la forme de la pseudo représentation d'état suivante :

$$\Sigma_{NE} \begin{cases} \mathbf{D}'_0 x(t) = A x(t) + B_2 w_2(t) + B u(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{z_2 w_2} w_2(t) + D_{z_2 u} u(t) \\ y(t) = C x(t) + D_{y w_2} w_2(t) \end{cases} . \quad (6.1)$$

L'objectif est de synthétiser une loi de commande  $K$  minimisant la norme  $\mathcal{H}_2$  du transfert  $T_{w_2 z_2}(\Sigma_{NE} \star K)$  correspondant au transfert entre le signal  $w_2$  et le signal  $z_2$  du modèle  $\Sigma_{NE}$  bouclé par  $K$ .

#### 6.2.1.1 Approche basée sur une reformulation entière incertaine

Une première approche pour aborder ce problème est de passer par la reformulation du modèle non entier comme un modèle entier incertain. L'application de la méthodologie présentée dans la partie 5.2 conduit à réécrire le modèle (6.1) comme une réalisation possible d'un modèle entier incertain  $\Sigma_I$  résultant de l'interconnexion d'un modèle entier  $\Sigma_E$  :

$$\Sigma_E \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_\Delta w_\Delta(t) + \tilde{B}_2 w_2(t) + \tilde{B} u(t) \\ z_\Delta(t) = \tilde{C}_\Delta \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{z_\Delta w_\Delta} w_\Delta(t) + \tilde{D}_{z_\Delta u} u(t) \\ z_2(t) = \tilde{C}_2 \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{z_2 w_2} w_2(t) + \tilde{D}_{z_2 u} u(t) \\ y(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{y w_\Delta} w_\Delta(t) + \tilde{D}_{y w_2} w_2(t) \end{cases} , \quad (6.2)$$

et d'une incertitude  $\Delta$  telle que  $\|\Delta(s)\|_\infty < 1$  comme indiqué sur la figure 6.1.

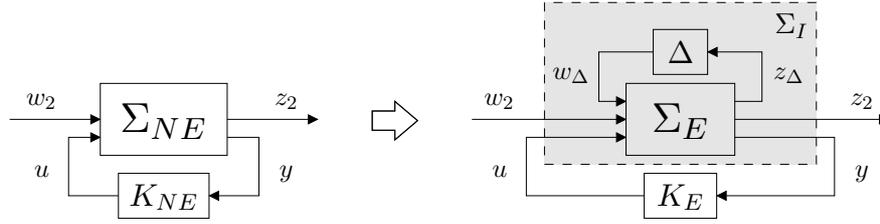


FIGURE 6.1 – Forme standard pour la synthèse à partir du modèle non entier et sa reformulation basée sur l'utilisation d'un modèle entier incertain

Le problème initial :

$$\gamma_2 = \min_{K_{NE}} \|T_{w_2 z_2}(\Sigma_{NE} \star K_{NE})\|_2, \quad (6.3)$$

où  $K_{NE}$  est une loi de commande d'ordre non entier de la forme (5.101), devient :

$$\tilde{\gamma}_2 = \min_{K_E} \|T_{w_2 z_2}(\Sigma_E \star K_E)\|_2, \quad (6.4)$$

t.q.  $\|T_{w_\Delta z_\Delta}(\Sigma_E \star K_E)\|_\infty < 1$ ,

où  $K_E$  est une loi de commande par retour de sortie d'ordre entier de représentation d'état :

$$K_E \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_K(t) &= \tilde{A}_K \tilde{x}_K(t) + \tilde{B}_K y(t) \\ u(t) &= \tilde{C}_K \tilde{x}_K(t) + \tilde{D}_K y(t) \end{cases}. \quad (6.5)$$

Le problème (6.4) est un problème de synthèse  $\mathcal{H}_2$  optimale sous contrainte  $\mathcal{H}_\infty$  qui est un cas particulier de synthèse multiobjectifs. Si les problèmes de synthèse  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  pris séparément admettent des conditions de synthèse LMI nécessaire et suffisantes, il n'existe pas à ce jour de méthode de synthèse LMI permettant de résoudre le problème de synthèse multiobjectifs sans pessimisme. Une première approche pour aborder ce problème, connue dans la littérature sous l'appellation de synthèse quadratique, consiste à utiliser des variables de Lyapunov identiques pour les problèmes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Ce choix introduit un certain pessimisme mais permet d'obtenir une formulation LMI. Il s'agit de l'approche proposée dans la référence [63] et rappelée dans le théorème suivant.

**Théorème 24.** Soit le problème d'optimisation suivant :

$$\Gamma_2 = \min_{X=X^T>0, Y=Y^T>0, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, Q} \text{trace}(Q) \quad (6.6)$$

sous les contraintes LMI (6.7)-(6.9) et la contrainte égalité (6.10) définies comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}X + X\tilde{A}^T + \tilde{B}\hat{C} + (\tilde{B}\hat{C})^T & * & * & * \\ \hat{A} + (\tilde{A} + \tilde{B}\hat{D}\tilde{C})^T & \tilde{A}^T Y + Y\tilde{A} + \hat{B}\tilde{C} + (\hat{B}\tilde{C})^T & * & * \\ (\tilde{B}_\Delta + \tilde{B}\hat{D}\tilde{D}_{yw_\Delta})^T & (Y\tilde{B}_\Delta + \hat{B}\tilde{D}_{yw_\Delta})^T & -I & * \\ \tilde{C}_{z_\Delta} X + \tilde{D}_{z_\Delta u}\hat{C} & \tilde{C}_{z_\Delta} + \tilde{D}_{z_\Delta u}\hat{D}\tilde{C} & \tilde{D}_{z_\Delta w_\Delta}\hat{D}\tilde{D}_{yw_\Delta} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}X + X\tilde{A}^T + \tilde{B}\hat{C} + (\tilde{B}\hat{C})^T & \star & \star \\ \hat{A} + (\tilde{A} + \tilde{B}\hat{D}\tilde{C})^T & \tilde{A}^T Y + Y\tilde{A} + \hat{B}\tilde{C} + (\hat{B}\tilde{C})^T & \star \\ (\tilde{B}_2 + \tilde{B}\hat{D}\tilde{D}_{yw_2})^T & (Y\tilde{B}_2 + \hat{B}\tilde{D}_{yw_2})^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.8)$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I & Y & \star \\ \tilde{C}_2 X + \tilde{D}_{z_2 u} \hat{C} & \tilde{C}_2 + \tilde{D}_{z_2 u} \hat{D} \tilde{C} & Q \end{bmatrix} > 0, \quad (6.9)$$

$$\tilde{D}_{z_2 w_2} + \tilde{D}_{z_2 u} \hat{D} \tilde{D}_{yw_2} = 0. \quad (6.10)$$

Soient  $\Gamma_2$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  et  $Q$  les solutions du problème d'optimisation (6.7)-(6.10). Les matrices de la représentation d'état de la loi de commande  $K_E$  sont reconstruites comme suit :

1. Trouver  $M$  et  $N$  telles que  $MN^T = I - XY$  (choisir par exemple  $M = (XY - I)^{\frac{1}{2}}$  et  $N = -M^T$ );
2. Déterminer ensuite  $\tilde{A}_K$ ,  $\tilde{B}_K$ ,  $\tilde{C}_K$  et  $\tilde{D}_K$  selon les relations :

$$\tilde{D}_K = \hat{D}, \quad (6.11)$$

$$\tilde{C}_K = (\hat{C} - \tilde{D}_K \tilde{C} X) M^{-T}, \quad (6.12)$$

$$\tilde{B}_K = N^{-1} (\hat{B} - Y \tilde{B} \tilde{D}_K), \quad (6.13)$$

$$\tilde{A}_K = N^{-1} (\hat{A} - N \tilde{B}_K \tilde{C} X - Y \tilde{B} \tilde{C}_K M^T - Y (\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{D}_K \tilde{C}) X) M^{-T}. \quad (6.14)$$

Le correcteur d'ordre entier (6.5) dont les matrices sont données par (6.11)-(6.14) est un correcteur sous-optimal pour le problème (6.4).

Le théorème 24 fournit un premier résultat permettant la synthèse d'une loi de commande  $K_E$  d'ordre entier permettant un coût  $\mathcal{H}_2$  garanti en boucle fermée pour le système entier incertain  $\Sigma$  et donc pour le modèle non entier initial  $\Sigma_{NE}$  de valeur  $\sqrt{\Gamma_2}$ . La loi de commande  $K_E$  reste néanmoins sous optimale pour deux raisons : l'incertitude introduite lors de la reformulation du modèle non entier sous forme d'un modèle entier incertain ; l'utilisation de l'approche quadratique pour obtenir une formulation LMI du problème de synthèse multiobjectif. Ainsi, selon les notations introduites précédemment, le coût  $\mathcal{H}_2$  obtenu vérifie :

$$\gamma_2 < \tilde{\gamma}_2 < \sqrt{\Gamma_2}. \quad (6.15)$$

Comme détaillé dans la partie 5.2, la taille du domaine incertain obtenue lors de l'approximation du modèle non entier peut être réduite en augmentant l'ordre du modèle entier nominal. La valeur de  $\tilde{\gamma}_2$  sera d'autant plus proche de  $\gamma_2$  que cet ordre sera élevé. Néanmoins, cette augmentation d'ordre se répercutera de manière directe sur l'ordre du correcteur  $K_E$  obtenu. L'écart entre  $\sqrt{\Gamma_2}$  et  $\tilde{\gamma}_2$  peut quant à lui être réduit par l'utilisation de variables de Lyapunov additionnelles et différentes pour la contrainte  $\mathcal{H}_2$  et la contrainte  $\mathcal{H}_\infty$  du problème multiobjectifs comme décrit notamment dans l'ouvrage [18].

### 6.2.1.2 Approche directe

Afin de ne pas souffrir du pessimisme associé à l'approche précédente, je souhaiterais développer des critères LMI basés directement sur le modèle non entier  $\Sigma_{NE}$  décrit par (6.1) et permettant de résoudre le problème (6.3) où  $K_{NE}$  peut représenter un retour de pseudo état de la forme (5.61) ou un retour de sortie de la forme (5.101).

Pour ce faire, une première étape est d'obtenir une formulation LMI du calcul de la norme  $\mathcal{H}_2$  du modèle non entier (6.1). Dans le cas entier, une façon d'obtenir cette formulation LMI fait appel aux grammiens. Cette démarche est rappelée dans les paragraphes suivants et son extension au cas des modèles non entiers est discutée.

**Rappel du cas entier** – Soit un modèle entier stable de représentation d'état :

$$\tilde{G} \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_2 w_2(t) \\ z_2(t) = \tilde{C}_2 \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (6.16)$$

et dont la réponse impulsionnelle  $\tilde{g}(t)$  est donnée par :

$$\tilde{g}(t) = \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{B}_2. \quad (6.17)$$

Selon la définition (5.149), la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\tilde{G}$  s'écrit :

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \int_{t=0}^{\infty} \text{trace} (\tilde{g}^T(t) \tilde{g}(t)) dt \quad (6.18)$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} \text{trace} (\tilde{B}_2^T e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{B}_2) dt \quad (6.19)$$

$$= \text{trace} \left( \tilde{B}_2^T \int_{t=0}^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} dt \tilde{B}_2 \right) \quad (6.20)$$

$$= \text{trace} (\tilde{B}_2^T \tilde{W} \tilde{B}_2) \quad (6.21)$$

où  $\tilde{W}$  est le grammien d'observabilité :

$$\tilde{W} = \int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} dt. \quad (6.22)$$

Le grammien  $\tilde{W}$  peut être calculé comme l'unique solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\tilde{A}^T \tilde{W} + \tilde{W} \tilde{A} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 = 0. \quad (6.23)$$

Le fait que  $\tilde{W}$  soit solution de (6.23) peut être montré en observant que :

$$\frac{d}{dt} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} = \tilde{A}^T e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} + e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{A}. \quad (6.24)$$

En effet, l'intégration par rapport au temps l'égalité (6.24) entre 0 et  $\infty$  conduit à (6.23) :

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} dt = \int_0^{\infty} \left( \tilde{A}^T e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} + e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{A} \right) dt \quad (6.25)$$

$$e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} \Big|_0^{\infty} = \tilde{A}^T \left( \int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} dt \right) + \left( \int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}t} dt \right) \tilde{A} \quad (6.26)$$

$$-\tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 = \tilde{A}^T \tilde{W} + \tilde{W} \tilde{A}, \quad (6.27)$$

le passage de (6.26) à (6.27) étant lié à la convergence vers 0 du terme  $e^{\tilde{A}t}$  quand  $t \rightarrow \infty$  du fait de la stabilité du modèle considéré.

La norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\tilde{G}$  est ainsi donnée par (6.21) où  $\tilde{W}$  est solution de (6.23). Ceci peut être reformulé de manière équivalente comme le problème d'optimisation LMI suivant :

$$\|\tilde{G}\|_2^2 = \min_{\tilde{W}=\tilde{W}^T>0} \text{trace} \left( \tilde{B}_2^T \tilde{W} \tilde{B}_2 \right) \quad \text{t.q.} \quad A^T \tilde{W} + \tilde{W} \tilde{A} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 < 0 \quad (6.28)$$

**Extension au cas non entier** – Afin d'étendre au cas non entier les résultats présentés au paragraphe précédent, rappelons d'abord que de la réponse impulsionnelle d'un modèle non entier de pseudo représentation d'état :

$$G \begin{cases} \mathbf{D}_0^\nu x(t) = A x(t) + B_2 w_2(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) \end{cases} \quad (6.29)$$

peut s'exprimer comme suit [69] :

$$g(t) = C_2 t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(At^\nu) B_2, \quad (6.30)$$

où  $E$  est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (6.31)$$

Selon la définition (5.149), la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $G$  s'écrit :

$$\|G\|_2^2 = \int_{t=0}^{\infty} \text{trace} (g^T(t)g(t)) dt \quad (6.32)$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} \text{trace} (B_2^T E_{\nu,\nu}(A^T t^\nu) t^{\nu-1} C_2^T C_2 t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(At^\nu) B_2) dt \quad (6.33)$$

$$= \text{trace} \left( B_2^T \int_{t=0}^{\infty} E_{\nu,\nu}(A^T t^\nu) t^{\nu-1} C_2^T C_2 t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(At^\nu) dt B_2 \right) \quad (6.34)$$

$$= \text{trace} (B_2^T W B_2) \quad (6.35)$$

où  $W$  peut être défini comme un pseudo grammien d'observabilité :

$$W = \int_{t=0}^{\infty} E_{\nu,\nu}(A^T t^\nu) t^{\nu-1} C_2^T C_2 t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(At^\nu) dt. \quad (6.36)$$

La dénomination de pseudo grammien d'observabilité est liée au fait que  $W$  est défini à partir de la pseudo représentation d'état et ne possède pas les propriétés du grammien dans le cas entier (notamment vis-à-vis de la propriété d'observabilité).

La difficulté réside dans le fait de déterminer une équation linéaire telle que (6.23) permettant de calculer  $W$ . En effet, la fonction de Mittag-Leffler remplace à présent l'exponentielle et n'a pas les mêmes propriétés que cette dernière, notamment vis-à-vis de sa dérivation. Une étude



réponde aux spécifications suivantes :

$$\|T_{dr}(s)\|_{\infty} < \gamma_{\infty} , \quad (6.40)$$

$$\|T_{fr}(s)\|_{-}^{[\omega_1, \omega_2]} > \gamma_{-} , \quad (6.41)$$

où  $T_{dr}(s)$  représente le transfert entre perturbations et résidu et  $T_{fr}(s)$  représente le transfert entre défauts et résidu.

La contrainte (6.40) impose un degré de robustesse du résidu vis-à-vis des perturbations tandis que la contrainte (6.41) garantit un degré de sensibilité du résidu vis-à-vis des défauts.

Une formulation LMI pour résoudre le problème ci-dessus est proposée dans [28] lorsque  $\Sigma$  est décrit par un modèle entier. Cette approche passe par la reformulation de la contrainte (6.41) comme une contrainte  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Cette reformulation introduit néanmoins un certain pessimisme, de même que son agrégation avec la contrainte (6.40) permettant de formuler l'ensemble des contraintes (6.40) et (6.41) sous la forme d'une unique contrainte  $\mathcal{H}_{\infty}$ . Les auteurs proposent de réaliser une  $\mu$ -analyse de sorte à vérifier a posteriori le degré de performances réellement atteint.

Il n'existe pas à ce jour une telle approche lorsque  $\Sigma$  est décrit par un modèle non entier. En utilisant les résultats LMI présentés dans la partie 5.3.2, il devrait être possible d'étendre au cas non entier la méthodologie présentée dans [28]. Il faut cependant noter qu'au pessimisme de l'approche dans le cas entier s'ajoute le pessimisme des LMI  $\mathcal{H}_{\infty}$  développées dans le cas non entier.

### 6.2.3 Commande tolérante aux défauts d'un drone

Enfin, fort de l'expérience obtenue via différents projets pédagogiques, j'ai récemment commencé à travailler sur un drone convertible dans le cadre du projet ANR Model Identification and Control of a Convertible Aircraft (MICA) animé par un membre de mon groupe de recherche Tudor Airimitoiaie [1]. Un drone convertible est un aéronef capable de décoller et d'atterrir verticalement comme un multicoptère ainsi que de réaliser des phases de vol de croisière comme un avion. Ce type d'engin présente l'avantage d'être capable de parcourir de grandes distances grâce à la portance apportée par la présence d'ailes sans toutefois nécessiter de piste pour les phases de décollage et d'atterrissage. Intégrer ce type d'engin dans des zones de forte population requiert un certain niveau de sécurité. Ainsi, la spécificité du drone MICA sera d'embarquer différents algorithmes permettant de détecter des pannes et de reconfigurer l'engin, aussi bien du point de vue des actionneurs utilisés que des trajectoires suivies, afin de mener à bien la mission en toute sécurité.

Il existe deux solutions techniques principales pour permettre la conversion de la configuration de vol stationnaire à celle du vol horizontal : incliner les rotors ou incliner les ailes. Cette seconde solution, illustrée sur la figure 6.3, est celle retenue pour le projet car elle permet de minimiser la consommation énergétique de l'engin dans la phase de transition entre les deux configurations.

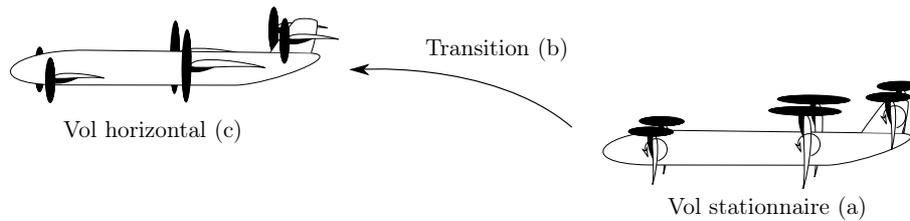


FIGURE 6.3 – Phases de vol d’un drone convertible à voilure inclinable

Comme illustré sur la figure 6.3, le convertible MICA possède trois paires d’ailes :

- canards (à l’avant) ;
- principales (au centre du fuselage) ;
- élévateurs (à l’arrière).

Chaque paire d’ailes peut tourner autour d’un axe perpendiculaire au fuselage et possède deux rotors. En vol stationnaire, les rotors équipant les ailes principales sont inutilisés et l’engin est piloté comme un quadricoptère à l’aide des rotors des ailes canards et des élévateurs. En vol horizontal, seuls les rotors équipant les ailes principales sont utilisées. Ainsi, les hélices sont choisies pour avoir un rendement optimal vis-à-vis de la phase de vol considérée.

Ce choix d’hexacoptère présente également une redondance d’actionneurs qui permet d’envisager un vol en mode dégradé. Ainsi, en cas de défaillance d’un des moteurs, une nouvelle trajectoire pourra être calculée et la loi de pilotage pourra être reconfigurée afin de tirer parti des rotors inutilisés.

Je participe actuellement à l’établissement d’un modèle de l’engin capable de décrire son comportement dynamique dans les différentes phases de vol. Nous travaillons également sur l’étude de la platitude du modèle. La platitude, introduite dans [22], est une propriété de certains modèles non linéaires permettant d’obtenir un modèle dynamique inverse. Parmi les applications possibles de la théorie de la platitude, nous pourrions mettre à profit dans le cadre de ce projet les résultats proposés dans la littérature pour la génération de trajectoire [47], la synthèse de lois de commandes non linéaires [35] et la détection et localisation de défauts [40].

Des premiers résultats concernant le développement du modèle et l’analyse de sa platitude sont en cours d’évaluation pour publication dans les actes d’un congrès [2]. Nous espérons pouvoir mener ce projet jusqu’à la réalisation matérielle de l’engin grâce aux moyens disponibles à l’IMA de Mérignac.

### 6.3 Perspectives sur l'étude du comportement interne des systèmes à mémoire longue

Jusqu'ici mes activités de recherche ont été principalement consacrées au développement de méthodes d'analyse et de synthèse basées sur des modèles non entiers retranscrivant le comportement entrée-sortie des systèmes à mémoire longue. Au cours de ces travaux, j'ai été amené à manipuler différents types de modèles qui sont pour l'essentiel récapitulés dans la partie 4.3.

J'ai notamment utilisé la pseudo représentation d'état qui, de par sa similitude d'écriture avec le cas entier, m'a permis de contribuer aux résultats présentés dans la partie 5.3 concernant la stabilité ou encore la commande  $\mathcal{H}_\infty$ . Lors de ces travaux, j'ai été amené à me questionner sur la nature du vecteur  $x(t)$ . Ce dernier ne permet pas de résumer le passé du système et ne peut donc être considéré comme son état. Pourtant, notamment au travers du travail d'évaluations pour des revues et communications, j'ai constaté un nombre conséquent d'utilisation de  $x(t)$  comme état du système conduisant bien souvent à des conclusions erronées. Je me suis donc intéressé à délimiter le cadre d'utilisation de ce type de modèle dans différents travaux et notamment [A-9].

J'ai également utilisé la représentation de la figure 6.4 faisant apparaître un sous-système diffusif associé à un sous-système entier (cette représentation est issue de la décomposition de la réponse impulsionnelle d'un modèle non entier décrite dans la partie 4.3.4). L'état du modèle, de dimension infinie, est alors constitué de l'association de  $w(\chi, t)$ ,  $\chi \in \mathbb{R}_+$  et de  $\eta(t)$ . Cet état est bien à même de résumer le passé du système en ce sens que la condition initiale  $\{w(\chi, 0), \chi \in \mathbb{R}_+; \eta(0)\}$  permet de déterminer de manière unique le futur comportement du système.

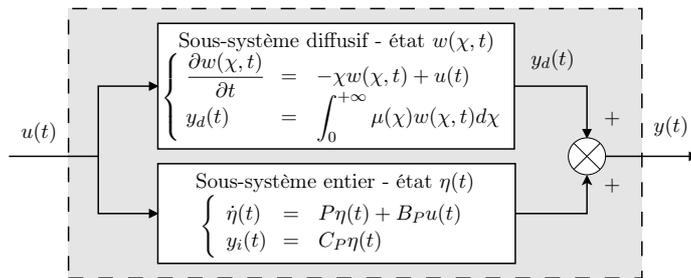


FIGURE 6.4 – Représentation diffusif d'un modèle non entier

La représentation diffusif apparaissait alors comme la représentation adéquate pour étudier les propriétés internes du système : commandabilité, observabilité, etc. J'ai travaillé en ce sens notamment dans l'article [A-13]. À l'occasion de ces travaux, je me suis questionné sur les raisons de la dimension infinie de l'état  $w(\chi, t)$  vis-à-vis des phénomènes physiques modélisés ainsi que sur la possibilité de lier cet état à des grandeurs caractéristiques du système. J'ai ainsi cherché sans succès des références permettant d'obtenir une représentation diffusif, à partir d'un phénomène physique donné et en utilisant une approche interne. En fait, cette représentation est obtenue comme la réalisation d'un comportement entrée-sortie et il apparaît alors délicat de lier la grandeur  $w(\chi, t)$  à une grandeur physique.

Aussi, je souhaite travailler sur la mise en place d'outils de modélisation permettant de faire apparaître un état interne que l'on soit capable de relier à des grandeurs physiques. Dans les paragraphes suivants sont présentées plusieurs approches stochastiques qui pourraient, je l'espère, permettre de répondre à cette problématique.

### 6.3.1 Capteurs à ondes de Love et dépôt avec rebond

Une première piste est issue de discussions avec des collègues de l'IMS, et notamment avec Hamida Hallil Abbas de l'équipe Microsystèmes de Détection à ondes Acoustiques et alternatives (MDA), au sujet de capteurs délivrant des mesures caractéristiques d'un comportement à mémoire longue. Ce type de capteurs est décrit dans les paragraphes suivants et des résultats préliminaires d'identification sur des données mesurées avec un capteur réel confirment cette constatation. En partant du phénomène physique se produisant à l'échelle microscopique au niveau du capteur et engendrant un comportement entrée-sortie à mémoire longue, une approche stochastique de modélisation est proposée. Des premiers résultats de simulation associés à cette approche sont enfin présentés.

#### 6.3.1.1 Un capteur présentant un comportement entrée-sortie de type non entier

Le principe de fonctionnement d'un capteur à ondes de Love, représenté sur la figure 6.5(a), est le suivant [50]. Un signal sinusoïdal  $V_e(t)$  est appliqué à un transducteur interdigité (IDT) émetteur. Ce dernier étant appliqué sur un matériau piézoélectrique crée une onde élastique résultant des compressions et expansions du matériau. Cette onde se propage alors en surface le long de la couche guidante et sa propagation dépend des caractéristiques des matériaux traversés. L'onde altérée est enfin transformée en tension  $V_s(t)$  par le procédé inverse au niveau de l'IDT récepteur. Entre l'émetteur et le récepteur est déposée une couche sensible. L'espèce chimique que l'on souhaite détecter (espèce cible) réagit avec cette couche induisant une perturbation de ses propriétés et notamment de sa masse. Cet effet de masse vient modifier la propagation de l'onde permettant de déterminer la concentration de l'espèce cible. La fréquence du signal  $V_e(t)$  est choisie pour amener le dispositif sur une résonance en l'absence d'éléments cibles. La présence d'éléments cibles va créer via l'effet de masse une variation de cette fréquence de synchronisme.

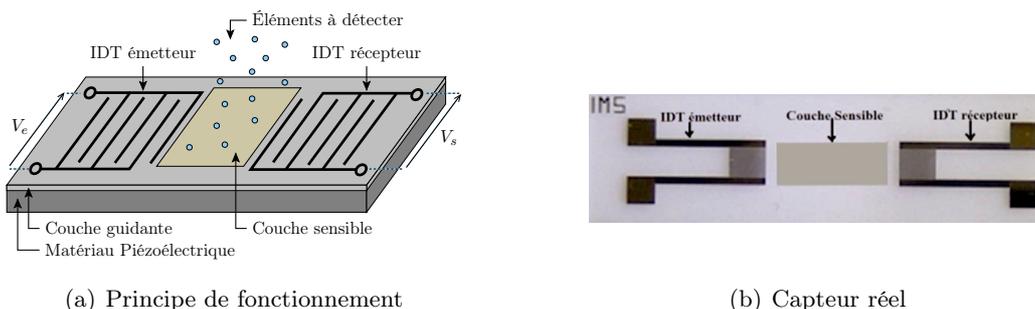


FIGURE 6.5 – Capteur à ondes de Love

Des capteurs fonctionnant sur ce principe ont été réalisés à l'IMS (figure 6.5(b)) avec des couches sensibles à l'humidité ou au toluène. Des mesures expérimentales réalisées par l'équipe MDA sont tracées sur la figure 6.6 dans le cas du capteur d'humidité. Elles représentent l'écart de fréquence mesuré en réponse à une augmentation du taux d'humidité de 1 ppm à  $t = 0$  s.

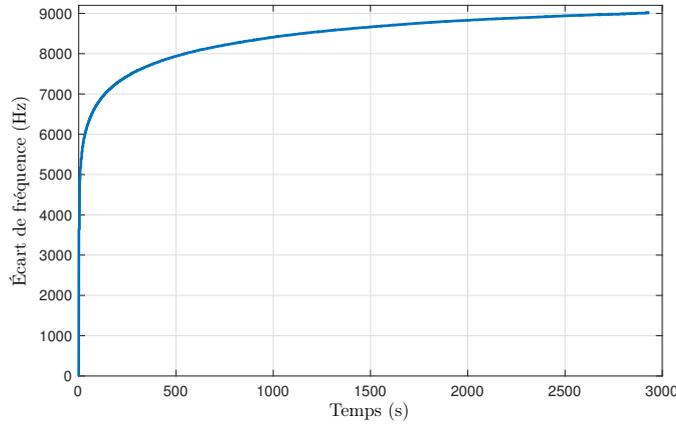


FIGURE 6.6 – Réponse du capteur à une augmentation du taux d'humidité

Les relevés expérimentaux de la figure 6.6 font apparaître un comportement entrée-sortie s'apparentant à celui d'un modèle non entier. Pour mettre cela en évidence, rappelons que sur les temps courts un modèle non entier explicite de sortie  $y(t)$  et d'entrée  $u(t)$  peut être approximé par un transfert de la forme :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^\nu}. \quad (6.42)$$

La réponse indicielle du transfert (6.42) s'écrit donc dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = \frac{K}{s^\nu} U(s) = \frac{K}{s^\nu} \frac{1}{s} = \frac{K}{s^{\nu+1}}, \quad (6.43)$$

soit dans le domaine temporel :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s^{\nu+1}} \right\} = \frac{K}{\Gamma(\nu)} t^\nu. \quad (6.44)$$

En prenant le logarithme du signal de sortie donné par (6.44), on obtient donc :

$$\log(y(t)) = \nu \log(t) + (K - \log(\Gamma(\nu))), \quad (6.45)$$

soit l'équation d'une droite de pente  $\nu$  entre  $\log(y(t))$  et  $\log(t)$ . Si le modèle est entier, la pente de cette droite est donc un nombre entier. Dans le cas contraire, le modèle présente une dynamique non entière pour les temps courts.

Traçons donc le logarithme des mesures du capteur d'humidité en fonction du logarithme du temps. Le tracé de la figure 6.7(a) fait apparaître une caractéristique linéaire sur les 100 premières secondes. La pente de cette droite indiquée sur la figure 6.7(b) est non entière, confirmant que le comportement entrée-sortie du capteur peut être retranscrit à l'aide d'un modèle non entier.

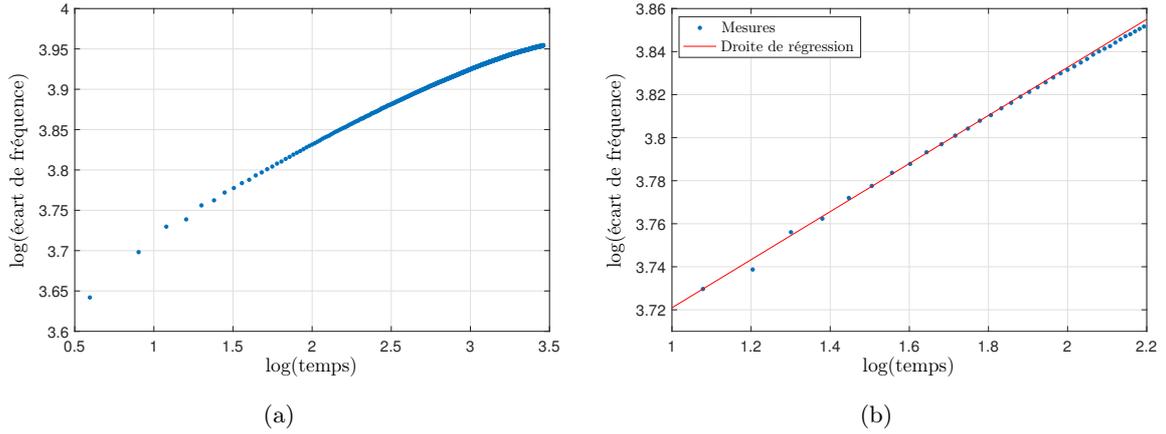


FIGURE 6.7 – Mise en évidence d'une dynamique rapide de type non entier pour le capteur

Différents modèles ont été identifiés à partir de ce jeu de mesures en considérant comme entrée le taux d'humidité et comme sortie l'écart de fréquences. Les modèles entiers, notés  $H_{ij}^h(s)$  où  $i$  et  $j$  représentent respectivement le nombre de pôles et de zéros du modèle, ont été obtenus avec la fonction `tfest` de MATLAB. Le modèle non entier est choisi comme étant explicite de première espèce et ses paramètres ont été obtenus par optimisation avec la fonction `fmincon`. Le transfert non entier obtenu est :

$$H_{ne}^h(s) = \frac{5916}{s^{0.22} + 1}. \quad (6.46)$$

Les sorties de ces modèles ainsi que les erreurs de sortie correspondantes sont représentées sur la figure 6.8. Il est clair d'après ces tracés que le modèle non entier donne un meilleur résultat.

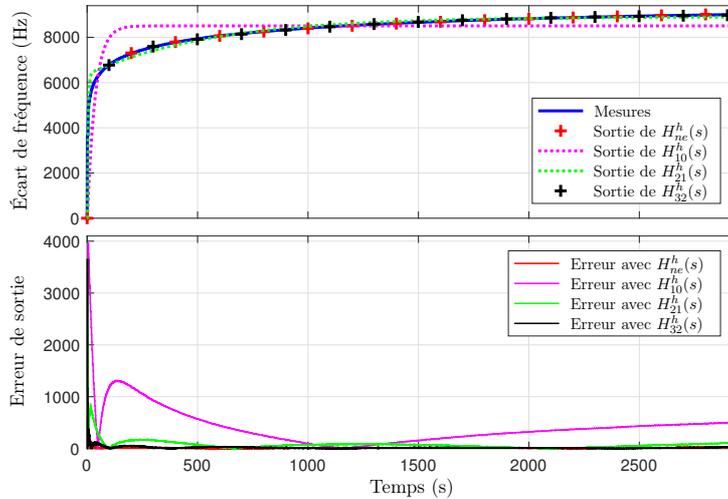


FIGURE 6.8 – Mesures, sorties des modèles identifiés (haut) et erreurs de sortie (bas) dans le cas du capteur d'humidité

Ceci est confirmé par le calcul de la précision des modèles via la Normalized Root Mean Squared Error (NRMSE) définie comme suit et indiquée dans le tableau 6.1 :

$$P_{NRMSE} = 1 - \frac{\|y_{\text{mesuré}} - y_{\text{modèle}}\|_2}{\|y_{\text{mesuré}} - \bar{y}_{\text{mesuré}}\|_2}. \quad (6.47)$$

Modèle	$H_{10}^h$	$H_{21}^h$	$H_{32}^h$	$H_{43}^h$	$H_{ne}^h$
$P_{NRMSE}$	60.75%	90.54%	94.57%	94.87%	<b>98.07%</b>

TABLE 6.1 – Précision des modèles identifiés dans le cas du capteur d'humidité

La même démarche a été utilisée avec un autre jeu de mesures correspondant à un capteur de toluène exposé à une augmentation du taux de l'espèce à détecter de 30 ppm à l'instant  $t = 0$  s. Des modèles entiers  $H_{ij}^t(s)$  ont été identifiés ainsi qu'un modèle non entier de première espèce :

$$H_{ne}^t(s) = \frac{480}{\frac{s^{0.16}}{0.39} + 1}. \quad (6.48)$$

Les mesures, les sorties des modèles identifiés ainsi que les erreurs de sortie correspondantes sont représentées sur la figure 6.9.

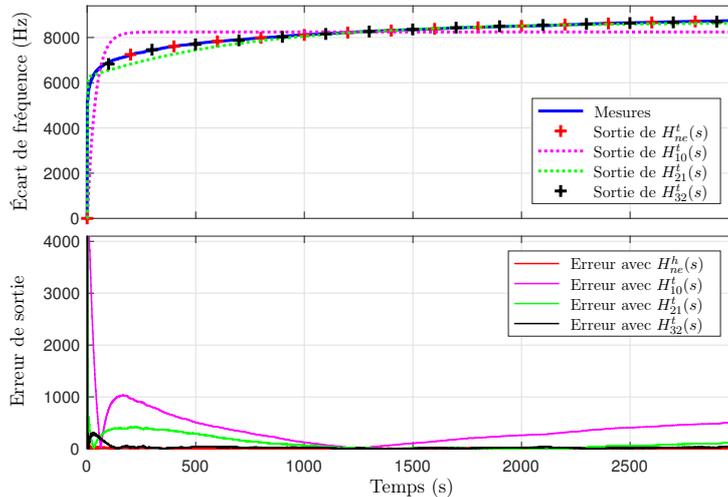


FIGURE 6.9 – Mesures, sorties des modèles identifiés (haut) et erreurs de sortie (bas) dans le cas du capteur de toluène

La précision de ces modèles est indiquée sur le tableau 6.2. Ces différents résultats confirment la capacité des modèles non entiers à capturer le comportement entrée-sortie de ce type de capteur.

Modèle	$H_{10}^t$	$H_{21}^t$	$H_{32}^t$	$H_{ne}^t$
$P_{NRMSE}$	71.37%	81.99%	86.9%	<b>97.24%</b>

TABLE 6.2 – Précision des modèles identifiés dans le cas du capteur de toluène

### 6.3.1.2 Une explication stochastique du comportement entrée-sortie observé

Le comportement entrée sortie de type non entier observé est dû à l'effet de masse sur la couche sensible. Cet effet de masse résulte lui-même du recouvrement progressif de la surface par les particules cibles. Suite à différentes discussions avec Jocelyn Sabatier, nous proposons ici de considérer en première approximation ce recouvrement comme la résultante d'un phénomène stochastique de dépôt avec rebond. Dans les paragraphes suivants, ce phénomène stochastique est étudié et la capacité d'un modèle non entier à capturer le comportement entrée-sortie associé est mise en évidence à l'aide de simulations numériques.

Le problème étudié est la caractérisation dynamique de la surface couverte  $S_c(t)$  par des cubes selon le processus stochastique illustré sur la figure 6.10 qui peut être décrit comme suit.

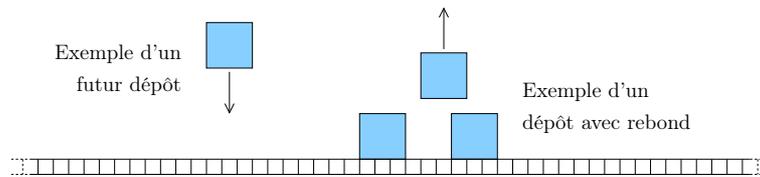


FIGURE 6.10 – Phénomène de dépôt avec rebond

La surface considérée, de taille très grande par rapport aux cubes, peut être décomposée en espaces élémentaires. À intervalle de temps régulier, des cubes, de la taille de 3 espaces, tombent depuis un réservoir sur la surface. Si un cube trouve sa place, il reste sur la surface. Si la place est partiellement ou totalement occupée par d'autres cubes, il revient dans le réservoir.

Ce processus a été codé sous MATLAB pour une surface contenant 40000 espaces élémentaires, un débit de 1 cube par seconde et nombre d'itérations égal à 150000. Le résultat de la simulation conduit à l'évolution temporelle de la surface couverte de la figure 6.11.

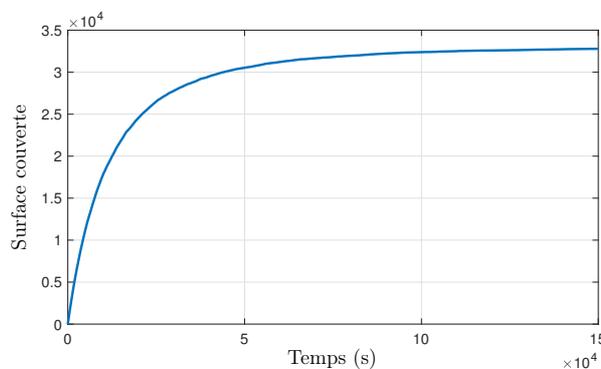


FIGURE 6.11 – Surface couverte en réponse à un débit de 1 cube par seconde

Comme précédemment avec les mesures expérimentales du capteur, mettons en évidence le comportement non entier entrée-sortie en traçant le logarithme de la surface couverte en fonction

du logarithme du temps. Les tracés de la figure 6.15 confirment une caractéristique linéaire en début de simulation avec une pente de l'ordre de 0.9.

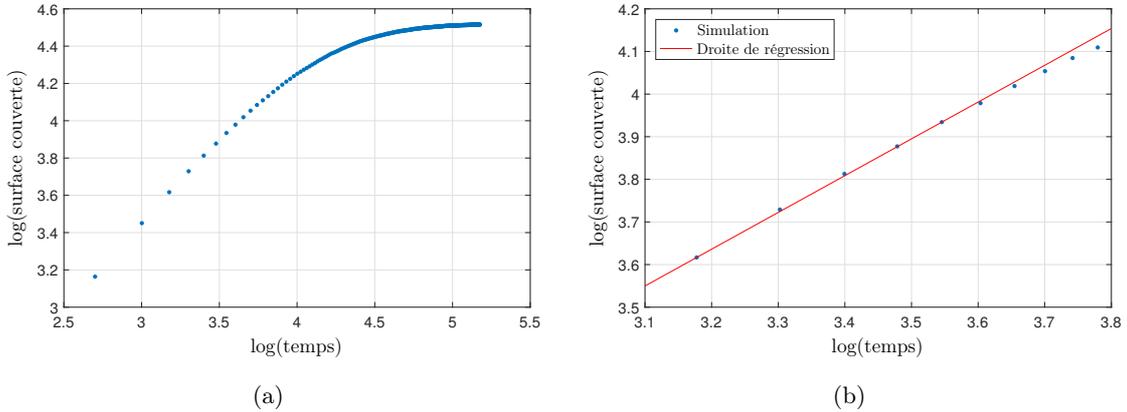


FIGURE 6.12 – Mise en évidence d'une dynamique rapide de type non entier

Le modèle non entier suivant a ensuite été identifié à partir de ces résultats de simulation :

$$H_{ne}^{sc}(s) = \frac{33424}{\frac{s^{0.88}}{2.97 \cdot 10^{-4}} + 1}. \quad (6.49)$$

Un modèle entier avec un pôle  $H_{10}^{sc}(s)$  a été également identifié pour comparaison. Les sorties de ces modèles sont comparées aux résultats de la simulation du processus stochastique sur la figure 6.13. La précision des modèles, évaluée à l'aide du critère NRMSE, est indiquée sur le tableau 6.3. Ces différents résultats confirment qu'un modèle non entier permet de rendre compte fidèlement du comportement entrée-sortie du phénomène stochastique de dépôt avec rebond.

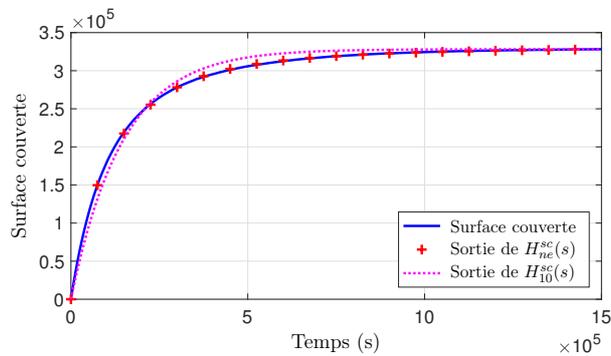


FIGURE 6.13 – Évolution de la surface couverte et sorties des modèles identifiés

Modèle	$H_{10}^{sc}$	$H_{ne}^{sc}$
$P_{NRMSE}$	86.83%	<b>98.5%</b>

TABLE 6.3 – Précision des modèles identifiés évaluée via la Normalized Root Mean Squared Error

### 6.3.2 Stockage d'hydrogène et absorption de particules

Dans cette partie est présenté un second exemple de phénomène physique dont le comportement interne pourrait être décrit par une approche stochastique et dont le comportement entrée-sortie peut être capturé à l'aide d'un modèle non entier.

#### 6.3.2.1 Principe du stockage solide de l'hydrogène

Le développement des énergies propres renouvelables telles que le photovoltaïque ou l'éolien rend la gestion des réseaux électriques complexes du fait du caractère intermittent de ces technologies. Dans ce cadre, l'hydrogène, gaz trois fois plus énergétique que le pétrole à masse donnée, pourrait constituer un nouveau vecteur d'énergie par la conversion de l'électricité en hydrogène au moyen d'un électrolyseur puis sa restitution à la demande au moyen d'une pile à combustible. Un des verrous du développement de cette filière est le stockage de l'hydrogène. Les modes de stockage les plus répandus sont le stockage sous forme gazeuse (jusqu'à  $62 \text{ kg m}^{-3}$  à 700 bar) et liquide (jusqu'à  $71 \text{ kg m}^{-3}$ ) [16].

Une solution plus récente consiste à stocker l'hydrogène sous forme solide en profitant de la capacité de certains composés métalliques d'absorber de manière réversible l'hydrogène lorsqu'ils sont soumis à une certaine pression. Ce processus, illustré sur la figure 6.14, conduit à la formation d'hydrures métalliques permettant de stocker l'hydrogène avec une densité volumique supérieure au stockage liquide (jusqu'à  $106 \text{ kg m}^{-3}$  avec du magnésium voire  $200 \text{ kg m}^{-3}$  avec d'autres composés) [15].

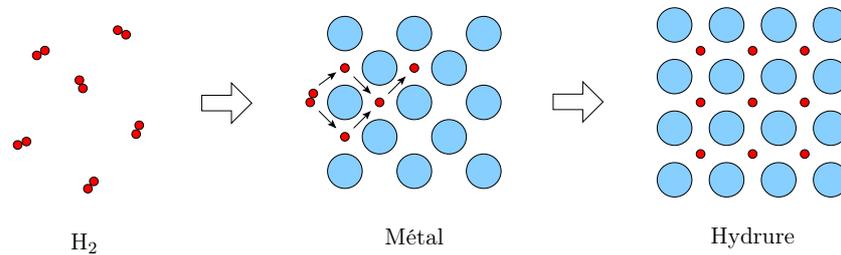


FIGURE 6.14 – Dissociation de l'hydrogène en surface, diffusion dans le métal et formation d'hydrure

La cinétique d'absorption de l'hydrogène dépend de nombreux paramètres tels que la température, la pression, la finesse de la poudre métallique utilisée liée à sa durée de broyage ou la nature du composé solide. Les courbes des figures 6.15(a) et 6.15(b), empruntées à la référence [15], font apparaître respectivement les cinétiques d'absorption et de désorption dans le cas de l'hydrure de Magnésium ( $\text{MgH}_2$ ) pour différentes durées de broyage du magnésium.

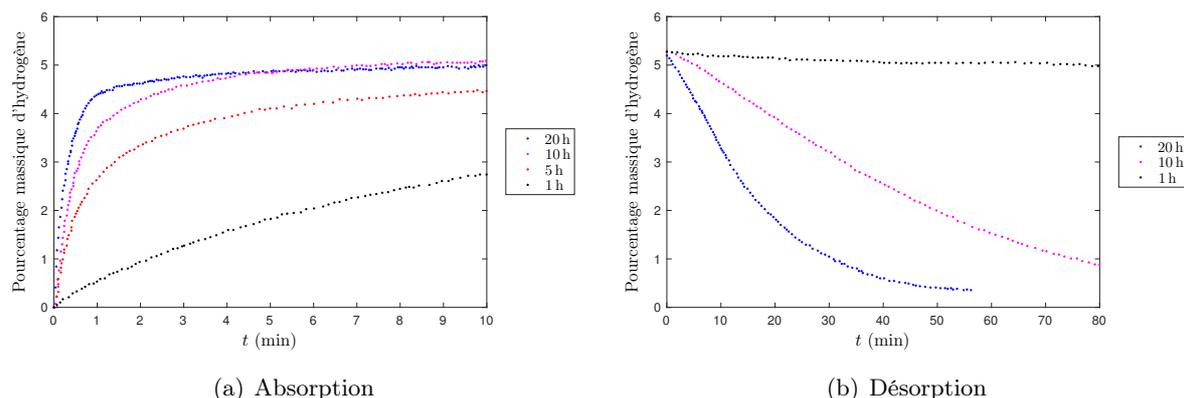


FIGURE 6.15 – Absorption et désorption d’hydrogène en fonction de la durée de broyage

Les dynamiques apparaissant sur les figures 6.15(a) et 6.15(b) sont similaires à celles des capteurs à onde de Love présentés dans la partie 6.3.1, notamment pour des durées de broyage élevées, et sont caractéristiques de comportements à mémoire longue (des identifications ne sont pas réalisées ici par faute de mesures disponibles pour l’instant).

Dans le paragraphe suivant, il est montré en simulation qu’une approche stochastique basée sur le processus de formation d’hydrures métalliques présente un comportement entrée-sortie similaire.

### 6.3.2.2 Une explication stochastique du comportement entrée-sortie observé

Un processus stochastique inspiré du processus d’absorption des particules d’hydrogène dans une poudre métallique est illustré sur la figure 6.16.

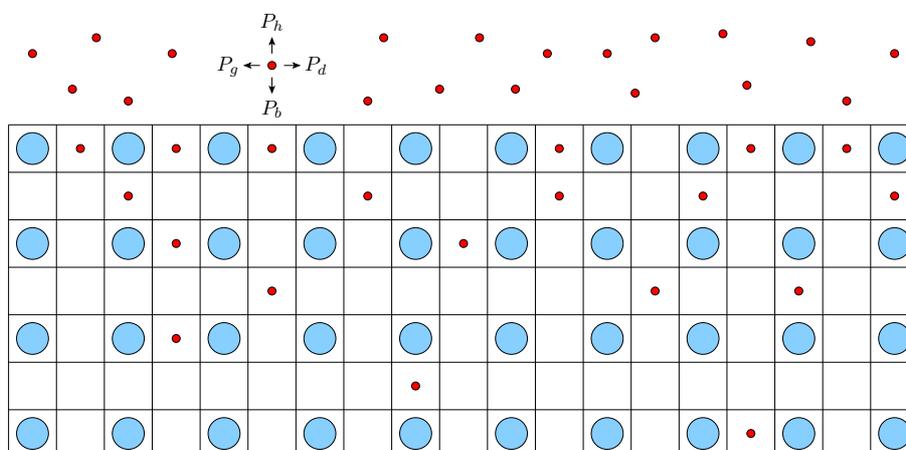


FIGURE 6.16 – Processus stochastique inspiré du processus d’absorption des particules d’hydrogène dans une poudre métallique

La structure de la poudre métallique est assimilée à un tableau dont une partie des places est occupée par des particules métalliques (en bleu sur la figure), les autres places étant initialement vacantes. À l'instant initial, la poudre est mise en contact au niveau de sa surface avec de l'hydrogène. Les particules d'hydrogène (en rouge sur la figure) pénètrent alors dans la structure et remplissent une partie des places vacantes sur la première ligne du tableau. À chaque instant, de nouvelles particules viennent prendre place sur la première ligne tandis que les particules déjà présentes dans le tableau se déplacent aléatoirement vers de nouvelles places si ces dernières sont vacantes. Plus précisément, à chaque itération, pour chaque particule, un tirage aléatoire est réalisé pour déterminer la direction de déplacement. La probabilité de se déplacer vers le haut est notée  $P_h$ , vers le bas  $P_b$ , vers la gauche  $P_g$  et vers la droite  $P_d$  avec  $P_h + P_b + P_g + P_d = 1$ . Si la nouvelle place déterminée par le tirage est occupée, la particule reste à sa place. Dans le cas contraire, elle se déplace vers la place vacante. Afin que les particules viennent se cumuler dans la structure, on choisit  $P_b > P_h$ .

Ce processus stochastique est simulé pour un tableau de taille  $1000 \times 1000$  et avec les probabilités suivantes de déplacement des particules d'hydrogène dans la structure :  $P_d = 0.2$ ,  $P_g = 0.2$ ,  $P_h = 0.1$  et  $P_b = 0.5$ . Le résultat de simulation est présenté sur la figure 6.17. On peut noter que l'allure de la courbe est similaire à celle de la figure 6.15(a) pour une durée de broyage de 20 h.

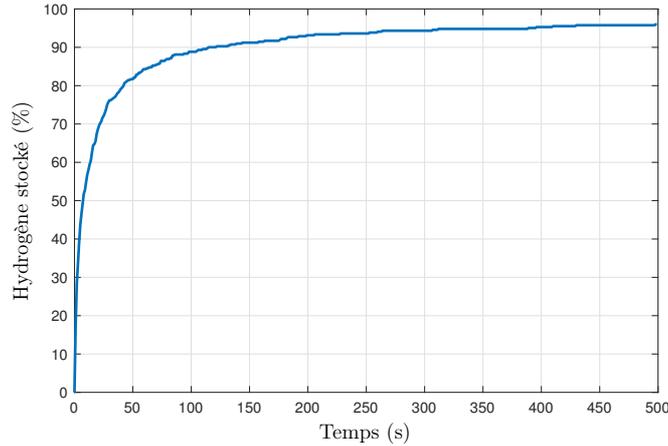


FIGURE 6.17 – Pourcentage d'hydrogène stocké vis-à-vis des places initialement vacantes

Afin d'évaluer la capacité d'un modèle non entier à rendre compte fidèlement du comportement entrée-sortie d'un tel phénomène, différents modèles ont été identifiés. Les modèles d'ordre entier sont notés  $H_{ij}^{hy}(s)$  où  $i$  et  $j$  représentent le nombre de pôles et de zéros du modèle. Un modèle non entier explicite de première espèce est également identifié :

$$H_{ne}^{hy}(s) = \frac{99.34}{s^{0.66} + 1}. \quad (6.50)$$

Les mesures, les sorties des modèles identifiés ainsi que les erreurs de sortie des différents modèles identifiés sont représentées sur la figure 6.18.

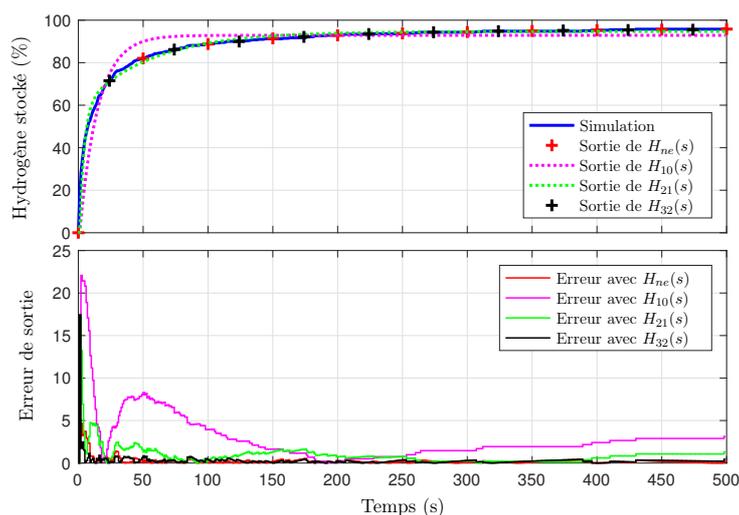


FIGURE 6.18 – Résultat de la simulation stochastique, sorties des modèles identifiés (haut) et erreurs de sortie (bas)

La précision de ces modèles est indiquée sur le tableau 6.4. Ces différents résultats confirment la capacité des modèles non entiers à capturer le comportement entrée-sortie de ce processus stochastique.

Modèle	$H_{10}$	$H_{21}$	$H_{32}$	$H_{ne}$
$P_{NRMSE}$	60.58%	85.68%	91.87%	<b>95.49%</b>

TABLE 6.4 – Précision des modèles identifiés évaluée via la Normalized Root Mean Squared Error

### 6.3.3 Axes de recherche possibles autour de cette thématique

Dans les paragraphes suivants sont présentés différents axes de recherche sur lesquels je souhaite travailler dans les années à venir.

#### 6.3.3.1 Mise en évidence d'un lien analytique entre le processus stochastique et le comportement entrée-sortie à mémoire longue observé

Bien que préliminaires, les résultats d'identification des parties 6.3.1 et 6.3.2 semblent indiquer une corrélation forte entre un comportement interne régi par des processus stochastiques et un comportement entrée-sortie à mémoire longue qui peut être retranscrit par des modèles non entiers.

Au-delà de cette constatation basée sur des simulations numériques, je souhaite contribuer à la mise en évidence d'un lien analytique entre les équations probabilistes qui régissent ces processus et les modèles non entiers qui en résultent. À terme, un objectif serait notamment d'établir un lien entre l'ordre non-entier  $\nu$  observé du point de vue entrée-sortie et les paramètres

du processus stochastique sous-jacent (taille des cubes dans le cas du phénomène de dépôt avec rebond, probabilités de déplacement dans le cas du stockage de l'hydrogène, dimension fractale, etc.).

Une première piste pour essayer de répondre à ce problème est peut-être l'analyse des modèles dynamiques associés au mouvement brownien [19]. Ce mouvement résulte du phénomène stochastique de marche aléatoire représenté sur la figure 6.19.

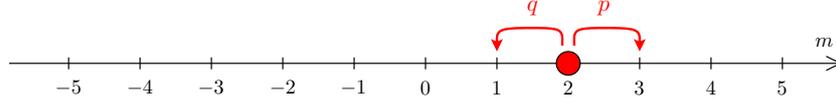


FIGURE 6.19 – Marche aléatoire

Soit une particule partant à l'instant  $k = 0$  de la position  $m = 0$ . Elle fait un pas à chaque instant (temps et espace discrets). La probabilité d'aller à droite est de  $p$  et à gauche de  $q = 1 - p$ . On peut montrer que la probabilité que la particule soit à la position  $m$  au bout de  $N$  pas est :

$$P(m, N) = \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}. \quad (6.51)$$

Un passage à la limite lorsque  $N \rightarrow \infty$  conduit à :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(m, N) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\delta_m^2}{\sigma_m^2}}, \quad \sigma_m^2 = 4Npq, \quad \delta_m = m - (p - q)N. \quad (6.52)$$

Le passage en temps et espace continu est obtenu en posant  $x = m\Delta x$  et  $t = N\Delta t$ . La probabilité que la particule soit à une distance  $x$  à l'instant  $t$  est alors :

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}, \quad v = (p - q) \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad D = 2pq \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \quad (6.53)$$

La probabilité précédente est solution de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.54)$$

Lorsque  $p = q = \frac{1}{2}$ , le terme  $v$  devient nul et l'équation (6.54) devient identique à celle de la chaleur (équation de Fourier) décrivant le phénomène de conduction thermique (la température remplaçant la probabilité  $P$ ) dans un milieu semi-infini. Un modèle non entier est alors retrouvé en prenant la transformée de Laplace de l'équation puis en résolvant l'équation en imposant comme conditions aux limites  $P(\infty, t) = P(-\infty, t) = 0$  et  $P(x, 0) = \delta(x)$ .

Des études existent sur le lien entre modèles non entiers et marche aléatoire [44]. Je souhaiterais dans un premier temps approfondir ces résultats pour être en mesure de les étendre à la modélisation des phénomènes stochastiques des parties 6.3.1.2 et 6.3.2.2. Ce travail permettrait également de comprendre les conditions permettant de faire apparaître un modèle non entier (passage à la limite, etc.).

### 6.3.3.2 Définition de modèles internes stochastiques adaptés à l'Automatique

Une seconde étape sera de m'intéresser aux différentes classes de modèles utilisées pour rendre compte du comportement de processus stochastiques [64]. L'objectif serait d'identifier ceux mieux à même de décrire le comportement interne des systèmes présentant un comportement entrée-sortie à mémoire longue tels que ceux des parties 6.3.1 et 6.3.2. L'idée serait de déterminer une classe de modèles présentant un comportement entrée-sortie à mémoire longue (comme les fonctions de transferts, la pseudo représentation d'état ou la représentation diffusive) mais qui permettrait l'analyse des propriétés internes du système : définition des conditions initiales sans nécessiter une infinité de variables, caractérisation de la commandabilité et de l'observabilité, etc.

Pour mieux comprendre cela, revenons sur le processus stochastique de la partie 6.3.2.2 associé au stockage d'hydrogène. Comme nous l'avons vu, un modèle non entier est tout à fait adapté à la modélisation du comportement entrée-sortie de ce système en considérant comme sortie la quantité d'hydrogène stocké. Pour la simulation considérée, la fonction de transfert (6.50) rendait précisément compte de ce comportement et ceci avec un nombre de paramètres très réduit.

Considérons maintenant la définition de conditions initiales pour un tel système. Il est possible d'associer à la fonction de transfert (6.50) une réalisation sous la forme de la pseudo représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{0.66}x(t) &= -0.19 x(t) + 18.87 u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases}, \quad (6.55)$$

en choisissant comme pseudo-état  $x(t)$  la quantité d'hydrogène stockée. Le pseudo vecteur d'état  $x(t)$  (de dimension 1) n'est cependant pas adapté pour décrire une condition initiale pour le système puisque, pour les raisons détaillées dans la partie 4.3.3.1, une même valeur de  $x(t_0)$  peut conduire à des valeurs de  $x(t)$  différentes pour  $t > t_0$ . Pour initialiser la pseudo représentation d'état, il faudrait connaître la valeur de  $x(t)$  pour tout le passé du système (pour tout  $t < t_0$ ). L'initialisation nécessiterait donc une infinité de valeurs (ce qui par la suite induit une perte d'observabilité par exemple).

Une représentation diffusive, telle que présentée en début de la partie 6.3, peut également être associée à la fonction de transfert (6.50). Cette représentation, illustrée sur la figure 6.4, fait intervenir un état de dimension infinie constitué de l'association de  $w(\chi, t)$ ,  $\chi \in \mathbb{R}_+$  et de  $\eta(t)$ . Cet état permet de définir une condition initiale pour le système sous la forme  $\{w(\chi, t_0), \chi \in \mathbb{R}_+; \eta(t_0)\}$ . Cette condition initiale est néanmoins infinie du fait du caractère distribué de  $w(\chi, t_0)$ .

Dans les deux représentations, cette dimension infinie est introduite du fait de l'outil de modélisation choisi. En effet, si l'on revient au niveau du processus stochastique interne générant le comportement entrée sortie considéré, il est clair qu'un nombre fini de conditions initiales est suffisant. En effet, il suffit de connaître la position des particules d'hydrogène dans le tableau

de taille  $1000 \times 1000$  considéré, soit un vecteur de conditions initiales de taille 1000000. Si l'on revient sur le système physique modélisé, ce nombre de conditions initiales serait encore plus élevé (mais pas infini) si l'on considère la position de l'ensemble des atomes d'hydrogène. Pour autant, si seul l'aspect de la dynamique de stockage est important, la connaissance de la position exacte de chaque particule n'est pas nécessaire. En effet, il existera des répartitions différentes des atomes qui conduiront à un comportement identique. En réalité, seule la répartition, ou plus précisément la densité de probabilité de trouver des particules en fonction de la profondeur dans le tableau, apparaît nécessaire. Ainsi, les modèles non entiers, s'ils permettent de reproduire le comportement entrée-sortie, imposent donc des contraintes qui n'apparaissent pas nécessaires.

### 6.3.3.3 Définition de processus stochastiques inspirés de différents phénomènes physiques et expérimentation sur bancs d'essais

Les processus stochastiques de dépôt avec rebond (associé au capteur à ondes de Love) et d'absorption de particules (associé au stockage d'hydrogène) présentés précédemment doivent être affinés vis-à-vis des phénomènes physiques mis en jeu.

Ceci pourra être réalisé notamment dans le cadre des Grands Projets d'Unité (GPU) mis en place au laboratoire et qui visent à favoriser les échanges scientifiques autour de différentes thématiques. En effet, les capteurs à ondes de Love sont utilisés dans le cadre du GPU environnement pour mesurer la pollution de l'air ambiant. C'est ainsi au travers de premiers échanges avec le groupe ondes qui participe à ce GPU que nous avons obtenu les mesures expérimentales utilisées dans la partie 6.3.1.1. Je souhaiterais donc poursuivre plus avant ce travail et bénéficier de l'expertise de ce groupe pour mieux comprendre le comportement du capteur et affiner les processus stochastiques associés. J'aimerais également être en mesure de dégager un lien entre les caractéristiques physiques du capteur (éléments cibles, propriétés de la couche sensible, etc.) et les comportements stochastiques et dynamiques associés.

Pour le stockage d'hydrogène, des mesures expérimentales pourront être réalisées au niveau du banc d'essai de la figure 6.20 mis en place par Jocelyn Sabatier au niveau de la plateforme du véhicule du futur du groupe Automatique. En effet, la bouteille d'hydrogène utilisée fonctionne sur le principe de stockage solide présenté dans la partie 6.3.2.1.



FIGURE 6.20 – Banc d'essai pour le stockage d'hydrogène au laboratoire IMS

Enfin, je souhaite étudier la pertinence de cette approche pour modéliser d'autres systèmes présentant des comportements à mémoire longue tels que :

- la charge (et la décharge) des supercapacités pour laquelle un banc d'essais est également disponible à l'IMS ;
- la charge des batteries au lithium via le phénomène d'intercalation qui fait l'objet d'une étude dans le cadre d'une collaboration entre l'équipe CRONE et la société Bosch ;
- la production d'hydrogène par hydrolyse sur laquelle Jocelyn Sabatier travaille en collaboration avec l'Institut de Chimie de la Matière Condensée de Bordeaux (ICMCB) et dont une plateforme est installée à l'IUT de Bordeaux.

# Références bibliographiques

- [1] Tudor-Bogdan AIRIMITOAIIE. *Model Identification and Control of a Convertible Aircraft*. MICA project, Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs (JCJC), Appel à projets générique 2016 ANR, Défi 6 - Mobilité et systèmes urbains durables. Déc. 2016. URL : <http://www.agence-nationale-recherche.fr/?Project=ANR-16-CE22-0003>. Site du projet : <http://tudor-bogdan.airimitoaiie.name/mica/>.
- [2] Tudor-Bogdan AIRIMITOAIIE, Gemma PRIETO AGUILAR, Loïc LAVIGNE, Christophe FARGES et Franck CAZAURANG. “Flatness analysis of the dynamical model for a convertible aircraft”. In : *Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATMOD)*. Vienna, Austria, fév. 2018. Evaluation.
- [3] Karl Johan ASTRÖM. *Introduction to stochastic control theory*. Sous la dir. d’Academic PRESS. New York, USA : Academic Press New York, 1970.
- [4] Olivier BACHELIER. “Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en d-stabilité”. Thèse de doct. Toulouse, France : INSA, 1998. 1998ISAT0028.
- [5] Olivier BACHELIER et Bernard PRADIN. “Bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of subregions”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9.6 (mai 1999), p. 333-359. DOI : [10.1002/\(SICI\)1099-1239\(199905\)9:6<333::AID-RNC408>3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199905)9:6<333::AID-RNC408>3.0.CO;2-7).
- [6] Jean-Luc BATTAGLIA, Olivier COIS, L. PUIGSEGUR et Alain OUSTALOUP. “Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model”. In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44.14 (2001), p. 2671-2680. ISSN : 0017-9310. DOI : [10.1016/S0017-9310\(00\)00310-0](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00310-0).
- [7] Alexis BIENVENÛE, Frédéric BRÉAL et Benjamin ABEL. *Auto Multiple Choice*. <http://home.gna.org/auto-qcm/>. 2008.
- [8] Catherine BONNET et Jonathan R. PARTINGTON. “Coprime factorizations and stability of fractional differential systems”. In : *Systems & Control Letters* 41.3 (2000), p. 167-174. DOI : [10.1016/S0167-6911\(00\)00050-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00050-5).

- [9] Stephen BOYD, Venkataramanan BALAKRISHNAN et Pierre KABAMBA. “A bisection method for computing the  $H_\infty$  norm of a transfer matrix and related problems”. In : *Mathematics of Control, Signals and Systems* 2.3 (sept. 1989), p. 207-219. DOI : [10.1007/BF02551385](https://doi.org/10.1007/BF02551385).
- [10] Michele CAPUTO. “Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent - II”. In : *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13.5 (1967), p. 529-539. ISSN : 1365-246X. DOI : [10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x).
- [11] Jie CHEN et Ron John PATTON. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. The International Series on Asian Studies in Computer and Information Science. Springer US, 1999. DOI : [10.1007/978-1-4615-5149-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5149-2).
- [12] Mahmoud CHILALI. “Méthodes LMI Pour L’analyse Et la Synthèse Multi-critère”. Thèse de doct. Paris, France : Paris IX - Dauphine, 1996.
- [13] Olivier COIS. “Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique”. Thèse de doct. Bordeaux, France : University of Bordeaux, juil. 2002. URL : <http://www.theses.fr/2002BOR12534>.
- [14] D. W. DAVIDSON et R. H. COLE. “Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n-Propanol”. In : *The Journal of Chemical Physics* 19.12 (1951), p. 1484-1490. DOI : [10.1063/1.1748105](https://doi.org/10.1063/1.1748105).
- [15] Patricia DE RANGO, Albin CHAISE, Jean-Baptiste CHARBONNIER, Daniel FRUCHART, Michel JEHAN, Philippe MARTY, Salvatore MIRAGLIA, Sophie RIVOIRARD et Natalia SKRYABINA. “Nanostructured magnesium hydride for pilot tank development”. In : *Journal of Alloys and Compounds* 446 (2007), p. 52-57. DOI : [10.1016/j.jallcom.2007.01.108](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2007.01.108).
- [16] Patricia DE RANGO, Daniel FRUCHART et Philippe MARTY. *Le stockage solide de l’hydrogène au service des énergies renouvelables*. 2011. URL : [http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/Auteurs2011/13\\_DeRango.htm](http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/Auteurs2011/13_DeRango.htm).
- [17] Steven X. DING. *Model based Fault Diagnosis Techniques : Schemes, Algorithms and Tools*. Springer, 2008. ISBN : 9783540763031. DOI : [10.1007/978-3-540-76304-8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-76304-8).
- [18] Yoshio EBIHARA, Dimitri PEAUCELLE et Denis ARZELIER. *S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control*. 1<sup>re</sup> éd. Communications and Control Engineering. London : Springer-Verlag, 2015. DOI : [10.1007/978-1-4471-6606-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-6606-1).
- [19] Albert EINSTEIN. “On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat”. In : *Annalen der Physik (Leipzig)* 17 (1905), p. 549-560.
- [20] Octavian ENACHEANU. “Modélisation fractale des réseaux électriques”. Thèse de doct. Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2008. URL : <http://www.theses.fr/2008GRE10159>.

- 
- [21] Lamine FADIGA. “Commande Hinfini à base de modèles non entiers”. Thèse de doct. University of Bordeaux, juin 2014.
- [22] Michel FLIESS, Jean LÉVINE, Philippe MARTIN et Pierre ROUCHON. “Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples”. In : *International Journal of Control* 61.6 (1995), p. 1327-1361. DOI : [10.1080/00207179508921959](https://doi.org/10.1080/00207179508921959).
- [23] Pascal GAHINET et Pierre APKARIAN. “A linear matrix inequality approach to  $H_{\infty}$  control”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4.4 (1994), p. 421-448. DOI : [10.1002/rnc.4590040403](https://doi.org/10.1002/rnc.4590040403).
- [24] Felix Ruvimovich GANTMACHER. *The theory of matrices*. T. 1. The Theory of Matrices. Chelsea Pub. Co., 1960.
- [25] Izrail Solomonovich GRADSHTEYN et Jossif Moissejewitsch RYZHIK. *Table of integrals, series, and products*. Amsterdam : Elsevier/Academic Press, 2007. ISBN : 978-0-12-373637-6 ; 0-12-373637-4.
- [26] Michael GREEN et David J. N. LIMEBEER. *Linear robust control*. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1995. ISBN : 0-13-102278-4.
- [27] Anton Karl GRÜNWARD. “Zeitschrift für Mathematik und Physik”. In : Leipzig : Verlag von B.G. Teubner, 1867. Chap. XVIII Ueber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, p. 441-480.
- [28] David HENRY et Ali ZOLGHADRI. “Design and analysis of robust residual generators for systems under feedback control”. In : *Automatica* 41.2 (2005), p. 251-264. DOI : [10.1016/j.automatica.2004.09.013](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.09.013).
- [29] Diederich HINRICHSEN et Anthony J. PRITCHARD. *Mathematical Systems Theory I : Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. 1<sup>re</sup> éd. T. 48. Springer-Verlag, 2005. DOI : [10.1007/b137541](https://doi.org/10.1007/b137541).
- [30] Richard HOTZEL et Michel FLIESS. “Gain Estimation for Fractional Linear Systems”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 31.18 (1998), p. 221-226. ISSN : 1474-6670. DOI : [10.1016/S1474-6670\(17\)41995-1](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)41995-1).
- [31] C. HWANG et Y.C. CHENG. “A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems”. In : *Automatica* 42.5 (2006), p. 825-831.
- [32] T. IWASAKI et S. HARA. “Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 50.1 (jan. 2005), p. 41-59. DOI : [10.1109/TAC.2004.840475](https://doi.org/10.1109/TAC.2004.840475).
- [33] Hassan K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. Third edition. Pearson Education. New Jersey, USA : Prentice Education International, 2000.
- [34] Steven G KRANTZ. *Handbook of Complex Variables*. Sous la dir. de SPRINGER. 1<sup>re</sup> éd. Birkhäuser Basel, 1999. DOI : [10.1007/978-1-4612-1588-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1588-2).

- [35] Loïc LAVIGNE, Franck CAZAURANG et Benoît BERGEON. “Modeling of Disturbed Flat System for Robust Control Design”. In : *5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2001*. T. 34. 6. St Petersburg, Russia, 4-6 July 2001, juil. 2001, p. 759-762. DOI : [10.1016/S1474-6670\(17\)35270-9](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35270-9). URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017352709>.
- [36] Shu LIANG, Yi-Heng WEI, Jin-Wen PAN, Qing GAO et Yong WANG. “Bounded real lemmas for fractional order systems”. In : *International Journal of Automation and Computing* 12.2 (avr. 2015), p. 192-198. DOI : [10.1007/s11633-014-0868-4](https://doi.org/10.1007/s11633-014-0868-4).
- [37] Joseph LIOUVILLE. “Mémoire sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions”. In : *Journal de l'École Polytechnique* 13 (1832), p. 71-162.
- [38] Francesco MAINARDI. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London, UK : Imperial College Press, 2010. ISBN : 978-1848163294.
- [39] Rachid MALTI, Mohamed AOUN, François LEVRON et Alain OUSTALOUP. “Analytical computation of the H2-norm of fractional commensurate transfer functions”. In : *Automatica* 47.11 (2011), p. 2425-2432. DOI : [10.1016/j.automatica.2011.08.021](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.021).
- [40] César MARTÍNEZ TORRES, Loïc LAVIGNE, Franck CAZAURANG, Efraín ALCORTA GARCÍA et David DÍAZ ROMERO. “Fault detection and isolation on a three tank system using differential flatness”. In : *European Control Conference (ECC)*. Zürich, Switzerland, juil. 2013, p. 2433-2438.
- [41] Denis MATIGNON. “Stability Results For Fractional Differential Equations With Applications To Control Processing”. In : *Computational Engineering in Systems Applications*. 1996, p. 963-968.
- [42] Denis MATIGNON. *Stability properties for generalized fractional differential systems*. T. 5. ESAIM Proc, 1998, p. 145-158. DOI : [10.1051/proc:1998004](https://doi.org/10.1051/proc:1998004).
- [43] Denis MATIGNON, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Philippe DEPALLE et Alain OUSTALOUP. “Viscothermal losses in wind instruments : a non integer model”. In : *International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)* (Regensburg, Germany, August 1993).
- [44] Mark M. MEERSCHAERT et Sikorskii ALLA. *Stochastic Models for Fractional Calculus*. De Gruyter, 2011. DOI : [10.1515/9783110258165](https://doi.org/10.1515/9783110258165).
- [45] Shaher Mohammad MOMANI et Reyad EL-KHAZALI. “Stability analysis of composite fractional systems”. In : *Intelligent Systems and Control*. Tampa, Florida, 2001.
- [46] Gérard MONTSENY. “Diffusive representation of pseudo-differential time-operators”. In : *ESAIM : Proc.* 5 (1998), p. 159-175. DOI : [10.1051/proc:1998005](https://doi.org/10.1051/proc:1998005).

- [47] Vincent MORIO, Franck CAZAURANG et Philippe VERNIS. “Flatness-based hypersonic reentry guidance of a lifting-body vehicle”. In : *Control Engineering Practice* 17.5 (2009), p. 588-596. ISSN : 0967-0661. DOI : [10.1016/j.conengprac.2008.10.018](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2008.10.018).
- [48] Mathieu MOZE et Jocelyn SABATIER. “LMI tools for stability analysis of fractional order systems”. In : *ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. Long Beach, CA, USA, sept. 2005, p. 1-9.
- [49] Mathieu MOZE, Jocelyn SABATIER et Alain OUSTALOUP. “On bounded real lemma for fractional systems”. In : *17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea, juil. 2008.
- [50] Ioannis NIKOLAOU, Hamida HALLIL, Véronique CONÉDÉRA, George DELIGEORGIS, Corrine DEJOURS et Dominique REBIÈRE. “Inkjet-Printed Graphene Oxide Thin Layers on Love Wave Devices for Humidity and Vapor Detection”. In : *IEEE Sensors Journal* 16.21 (nov. 2016), p. 7620-7627. DOI : [10.1109/JSEN.2016.2600269](https://doi.org/10.1109/JSEN.2016.2600269).
- [51] Harry NYQUIST. “Regeneration Theory”. In : *Bell System Technical Journal* 11.1 (1932), p. 126-147. ISSN : 1538-7305. DOI : [10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x](https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x).
- [52] Keith B. OLDHAM et Jerome SPANIER. *The fractional calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. T. 111. Dover books on mathematics. New-York et London : Academic Press, 1974. ISBN : 0125255500.
- [53] Bruno ORSONI. “Dérivée généralisée en planification de trajectoire et génération de mouvement”. Thèse de doct. Université de Bordeaux : LAPS, 2002.
- [54] Alain OUSTALOUP. *La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier*. Traité des nouvelles technologies. Série Automatique. Hermes Science Publications, 1991. ISBN : 9782866012892.
- [55] Alain OUSTALOUP. *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Traité des nouvelles technologies. Série Automatique. Paris, France : Hermès, 1995.
- [56] Dimitri PEAUCELLE. “Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres”. Thèse de doct. Toulouse, France : Université Toulouse III, Paul Sabatier, juil. 2000.
- [57] Igor PODLUBNY. *Fractional differential equations*. *Mathema*. T. 198. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1999.
- [58] Bernhard RIEMANN. “Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass”. In : Leipzig : Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1876. Chap. XIX - Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, p. 331-344.
- [59] Shalini RODRIGUES, N. MUNICHANDRAIAH et A.K. SHUKLA. “A review of state-of-charge indication of batteries by means of a.c. impedance measurements”. In : *Journal of Power Sources* 87.1-2 (2000), p. 12-20. ISSN : 0378-7753. DOI : [10.1016/S0378-7753\(99\)00351-1](https://doi.org/10.1016/S0378-7753(99)00351-1).

- [60] Bertram ROSS. “The development of fractional calculus 1695–1900”. In : *Historia Mathematica* 4.1 (1977), p. 75-89. ISSN : 0315-0860. DOI : [10.1016/0315-0860\(77\)90039-8](https://doi.org/10.1016/0315-0860(77)90039-8).
- [61] Jocelyn SABATIER, Mohamed AOUN, Alain OUSTALOUP, Gilles GRÉGOIRE, Franck RAGOT et Patrick ROY. “Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation”. In : *Signal Processing* 86.10 (oct. 2006), p. 2645-2657. DOI : [10.1016/j.sigpro.2006.02.030](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.02.030).
- [62] Stefan G. SAMKO, Anatoly A. KILBAS et Oleg I. MARICHEV. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon et Breach Science Publishers, 1993.
- [63] C. SCHERER, P. GAHINET et M. CHILALI. “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.7 (juil. 1997), p. 896-911. ISSN : 0018-9286. DOI : [10.1109/9.599969](https://doi.org/10.1109/9.599969).
- [64] Christos H. SKIADAS et Charilaos SKIADAS. *Chaotic Modelling and Simulation : Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms*. Sous la dir. de Taylor & Francis Group CRS PRESS. Boca Raton, Florida, USA : CRC Press, oct. 2008. ISBN : 9781420079005.
- [65] Laurent SOMMACAL, Pierre MELCHIOR, Jean-Marie CABELGUEN, Alain OUSTALOUP et Auke Jan IJSPEERT. “Fractional model of a gastrocnemius muscle for tetanus pattern”. In : *20th ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, ASME IDETC/CIE’05*. California, USA, sept. 2005.
- [66] Laurent SOMMACAL, Pierre MELCHIOR, Jean-Marie CABELGUEN, Alain OUSTALOUP et Auke Jan IJSPEERT. “Fractional multimodels of the gastrocnemius frog muscle”. In : *2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications* 39.11 (Porto, Portugal, July 2006), p. 254-259. DOI : [10.3182/20060719-3-PT-4902.00047](https://doi.org/10.3182/20060719-3-PT-4902.00047).
- [67] Laurent SOMMACAL, Pierre MELCHIOR, Jean-Marie CABELGUEN, Alain OUSTALOUP et Auke Jan IJSPEERT. “Fractional Multimodels of the Gastrocnemius Muscle for Tetanus Pattern”. In : *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Sous la dir. de Jocelyn SABATIER, Om Prakash AGRAWAL et J. A. Tenreiro MACHADO. Sabatier, J. and Agrawal, O. P. and Tenreiro Machado, J. A. (Eds). Springer, 2007. Chap. Fractional Multimodels for the Gastrocnemius Muscle for Tetanus Pattern, p. 271-285. DOI : [10.1007/978-1-4020-6042-7\\_19](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6042-7_19).
- [68] Jean-Claude TRIGEASSOU, Amel BENCHELLAL, Nezha MAAMRI et Thierry POINOT. “A frequency approach to the stability of fractional differential equations”. In : *Transactions on Systems, Signals and Devices* 4.1 (2009), p. 1-25.

- [69] Blas Manuel VINAGRE et YangQuan CHEN. “Lecture notes on fractional calculus applications in automatic control and robotics”. In : *41st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas, USA, déc. 2002, p. 1-310.
- [70] Maiying ZHONG, Steven X. DING, James LAM et Haibo WANG. “An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems”. In : *Automatica* 39.3 (2003), p. 543-550. DOI : [10.1016/S0005-1098\(02\)00269-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00269-8).