



HAL
open science

Contribution to the design of control laws for Takagi-Sugeno models : non-quadratic approach and D-stability synthesis

Abdelmadjid Cherifi

► **To cite this version:**

Abdelmadjid Cherifi. Contribution to the design of control laws for Takagi-Sugeno models : non-quadratic approach and D-stability synthesis. Automatique / Robotique. Université de Reims Champagne-Ardenne, 2017. Français. NNT : . tel-02883212

HAL Id: tel-02883212

<https://hal.science/tel-02883212>

Submitted on 28 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE Choisissez un élément.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Discipline : AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE

Spécialité : Automatique

Présentée et soutenue Choisissez un élément. par

CHERIFI ABDELMADJID

Le 31 mai 2017

**Contribution à la commande des modèles Takagi-Sugeno : approche non-quadratique et
synthèse \mathcal{D} -stable**

Thèse dirigée par **KEVIN GUELTON ET LAURENT ARCESE**

JURY

M. Edouard LAROCHE,	Professeur, ,	Université de Strasbourg,	Président
M. Kevin GUELTON,	Maître de Conférences HDR,	Université de Reims Champagne Ardenne,	Directeur de thèse
M. Laurent ARCESE,	Maître de Conférences,	Université de Reims Champagne Ardenne,	Co-Directeur de thèse
M. Vincent COCQUEMPOT,	Professeur,	Université Lille 1,	Rapporteur
M. Benoît MARX,	Maître de Conférences HDR,	Université de Lorraine,	Rapporteur
M. Thierry Marie GUERRA,	Professeur,	Université de Valenciennes,	Examineur
Mme Lynda SEDDIKI,	Maître de Conférences,	Université de Paris 8,	Examineur



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Bernard Riera, directeur du CReSTIC, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire pour y effectuer mon doctorat.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Edouard Laroche pour avoir accepté la présidence de mon jury de thèse. Je remercie tout spécialement Monsieur Benoit Marx et Monsieur Vincent Cocquempot de m'avoir fait l'honneur de rapporter mon travail de thèse, ainsi que Monsieur Thierry-Marie Guerra et Madame Lynda Seddiki pour avoir accepté d'être examinateurs.

Mes remerciements vont naturellement à Kevin Guelton et Laurent Arcèse pour m'avoir encadré tout au long de ces années, pour leur aide et de leurs précieux conseils, indispensables à la réalisation de ce travail. J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des chercheurs et doctorants du CReSTIC qui m'ont aidé à différents moments de ma thèse, ainsi que Ida Lenclume pour son soutien logistique et administratif.

Enfin, un grand merci à mes parents, à ma femme, à mes frères, ainsi qu'à l'ensemble de ma famille pour leur amour et leurs encouragements permanents.

Notations

Acronymes

LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire
FLQ	Fonction de Lyapunov Quadratique
FLNQ	Fonction de Lyapunov Non-Quadratique
FLIC	Fonction de Lyapunov sous forme Intégrale Curviligne
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
DA	Domaine d'Attraction
PDC	Compensation Parallèle Distribuée (Parallel Distributed Compensation)

Ensembles, matrices et vecteurs

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	Espace réel Euclidien de dimension n
$M > 0$ (resp. < 0)	Matrice définie positive (resp. négative)
I	Matrice identité de dimensions appropriées
$\mathcal{H}(Q)$	Cette notation désigne $Q + Q^T$
M_z	Cette notation désigne $\sum_{i=1}^r h_i(z)M_i$
M_z^{-1}	Cette notation désigne $\left(\sum_{i=1}^r h_i(z)M_i\right)^{-1}$
N_{zz}	Cette notation désigne $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z)N_{ij}$
$(*)$	Désigne une quantité transposée dans une matrice
\otimes	Désigne le produit de Kronecker

Table des matières

Remerciements	i
Notations	iii
Introduction générale	1
1 Etat de l'art sur la stabilité et la stabilisation des modèles T-S	7
1.1 Introduction	9
1.2 Présentation des Modèles T-S	9
1.3 Obtention des modèles T-S	12
1.4 Analyse de stabilité des modèles T-S	15
1.4.1 Stabilité quadratique	16
1.4.2 Stabilité non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	17
1.4.3 Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	19
1.5 Synthèse de lois de commande par retour d'état pour les modèles T-S	22
1.5.1 Lois de commande	23
1.5.2 Stabilisation quadratique	24
1.5.3 Stabilisation non quadratique	26
1.5.3.1 Stabilisation non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	27
1.5.3.2 Stabilisation non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	28
1.6 \mathcal{D} -stabilité des systèmes polytopiques convexes	33

1.6.1	Définitions et propriétés usuelles et relatives à la \mathcal{D} -stabilité	34
1.6.2	Résultats préliminaires pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S	37
1.7	Conclusion	39
2	Analyse duale de la stabilité et stabilisation des modèles T-S via des fonctions de Lyapunov intégrales curvilignes	41
2.1	Introduction	43
2.2	Analyse non-quadratique duale de la stabilité des modèles T-S via une FLIC	43
2.2.1	Positionnement du problème de dualité considéré	44
2.2.2	Propriété de dualité non-quadratique des modèles T-S via une FLIC	48
2.2.3	Conditions globales de stabilité relâchées pour les modèles T-S via une FLIC - approche duale	54
2.3	Conditions LMI pour la stabilisation des modèles T-S via une FLIC	58
2.3.1	Conditions LMIs élémentaires de synthèse non-quadratique de lois de commande non-PDC	59
2.3.2	Conditions relâchées de synthèse non-quadratique de lois de commande non-PDC	60
2.3.3	Exemples numériques en stabilisation	63
2.4	Conclusion	68
3	\mathcal{D}-stabilisation des modèles T-S	69
3.1	Introduction	71
3.2	\mathcal{D} -stabilisation quadratique des modèles T-S	71
3.2.1	Synthèse de contrôleurs quadratiques \mathcal{D} -stabilisant	72
3.2.2	Exemples numériques dans le cadre quadratique	76
3.3	\mathcal{D} -stabilisation non-quadratique des modèles T-S	85
3.4	Conclusion	92
4	\mathcal{D}-stabilisation robuste des modèles T-S incertains	95
4.1	Introduction	97
4.2	Représentation d'état des modèles T-S incertains	97
4.3	\mathcal{D} -stabilisation robuste quadratique des modèles T-S incertains	99

4.3.1 Synthèse quadratique de contrôleurs PDC \mathcal{D} -stabilisants	99
4.3.2 Synthèse quadratique de contrôleurs non- PDC \mathcal{D} -stabilisants	103
4.3.3 Exemple numérique (synthèse quadratique)	104
4.4 \mathcal{D} -stabilisation non-quadratique locale des modèles T-S incertains	106
4.5 Cas des systèmes avec des non-linéarités impliquant les entrées : exemple de la \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un drone quadrirotor	111
4.6 Conclusion	120
Conclusion générale	123
A Définitions et lemmes usuels pour les intégrales curvilignes	141
B Commentaires sur la D-stabilisation non-quadratique des modèles T-S	143
C Formulations de quelques régions LMI	147

Liste des figures

1.1	Région LMI.	36
2.1	Domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 2.2 et 2.3, du théorème 4 dans [Mozelli et al., 2009a], du théorème 3 dans [Rhee and Won, 2006] et du théorème 1 dans [Guelton et al., 2014].	57
2.2	Plans de phase des modèles T-S primal et dual.	57
2.3	Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6, du théorème 2 dans [Marquez et al., 2013] et du théorème 2 dans [Guelton et al., 2014]	64
2.4	Portrait de phase en boucle fermée	65
2.5	Le système de la balle sur une poutre (ball and beam).	65
2.6	Simulation en boucle fermée : (a) Trajectoires du système, (b) Signal de commande.	67
3.1	Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 et du théorème 2 dans [Assawinchaichote, 2014].	78
3.2	Bras de robot flexible [Seidi et al., 2012].	79
3.3	Evolution de l'état en boucle fermée pour différents taux de décroissance $\beta = \{0, 3, 20\}$ (Cas 1).	80
3.4	Migration des valeurs propres de la boucle fermée pour différents taux de décroissance $\beta = \{0, 3, 20\}$ (Cas 1).	81
3.5	Comparaison de l'évolution de l'état en boucle fermée obtenu pour $\beta = 20$ et différents secteurs coniques (Cas 2).	82

3.6	Migration des valeurs propres de la boucle fermée pour $\beta = 20$ et différents secteurs coniques (<i>Cas 2</i>).	83
3.7	Réponse de la boucle fermée et migration des valeurs propres de la boucle fermée : (<i>Cas 3</i>) avec $\beta = 20$, $\gamma = 0$ et $\theta = 9\pi/20$, $q = -20$ et $s = 7$	84
3.8	Domaines de faisabilité pour $\bar{\Phi}_k = 6$, $\bar{\Phi}_k = 10$ et $\bar{\Phi}_k = 60$	89
3.9	Domaines de validité $\bar{\Phi}_\phi$ pour pour les trois cas considérés : (a) $\bar{\Phi}_k = 6$, (b) $\bar{\Phi}_k = 10$ et (c) $\bar{\Phi}_k = 60$	90
3.10	Estimations des domaines d'attraction \overline{DA}_ϕ pour les trois cas considérés : (a) $\bar{\Phi}_k = 6$, (b) $\bar{\Phi}_k = 10$, (c) $\bar{\Phi}_k = 60$, (d) Comparaison "à l'échelle" des trois estimations.	91
3.11	(a) Réponse en boucle fermée, (b) Evolution des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance, (c) Signal de commande.	92
3.12	Migration des valeurs propres en boucle fermée.	92
4.1	Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 4.1, 4.3 et 4.2.	105
4.2	Estimation du domaine d'attraction en boucle fermée	110
4.3	Simulation numérique : (a) Réponse de la boucle fermée, (b) Signal d'incertitude $\delta(t)$, (c) Evolution des dérivés temporelles des fonctions d'appartenance du cas considéré et (d) Migration des valeurs propres	110
4.4	Schéma d'un drone quadrirotor.	112
4.5	<i>Test 1</i> - Sans et avec taux de décroissance : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c).	117
4.6	<i>Test 2</i> - Sans et avec secteur conique, avec un taux de décroissance : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c).	118
4.7	<i>Test 3</i> - Sans et avec cercle : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c)	119

Introduction générale

« Qui n'a pas d'imagination n'a pas d'ailes. »

Mohammed Ali Clay

L'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires représentent un vrai défi pour les automaticiens. L'étude se révélant souvent trop complexe dans le cas général, différentes classes de modèles peuvent être considérées à des fins de simplification. Parmi celles-ci, les modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi and Sugeno, 1985] constituent une classe de systèmes polytopiques convexes permettant d'étendre certains concepts de l'automatique linéaire au cas non linéaire. De plus, un système non linéaire peut être exactement représenté par un modèle T-S sur un ensemble compact de l'espace d'état par le biais d'une décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka and Wang, 2001].

L'analyse de la stabilité, la synthèse de lois de commande et/ou d'observateurs pour les modèles T-S est généralement réalisée via la méthode directe de Lyapunov [Tanaka and Wang, 2001; Wang et al., 1996]. Dans ce contexte, le défi consiste à exprimer les conditions de stabilité sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) [Boyd et al., 1994] qui peuvent être résolues par des algorithmes d'optimisation convexe [Gahinet et al., 1995]. Les premiers résultats de stabilisation ont été obtenus à partir d'une loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation) et de Fonctions de Lyapunov Quadratiques (FLQ) [Lendek et al., 2010; Tanaka and Wang, 2001; Wang et al., 1996]. Cependant cette méthode exige de trouver une solution commune pour un ensemble de conditions LMIs ce qui introduit une source de conservatisme (voir [Sala, 2009] pour plus de détails concernant les différentes sources de conservatisme). Afin de réduire le conservatisme, d'autres fonctions de Lyapunov ont été considérées comme par exemple les fonctions de Lyapunov par morceaux [Johansson et al.,

1999], les fonctions de Lyapunov à commutations [Jabri et al., 2012; Ohtake et al., 2006a,b] et les Fonctions de Lyapunov Non Quadratiques (FLNQ) [Guerra and Vermeiren, 2004; Mozelli et al., 2009b; Tanaka et al., 2003]. Si les fonctions de Lyapunov par morceaux et à commutations permettent d'obtenir de bons résultats lorsque les polytopes composant le modèle T-S ne sont pas tous actifs à un même instant, il apparaît qu'elles ne sont pas appropriées lorsqu'une décomposition en secteurs non linéaires est employée. En effet, dans ce dernier cas, on constate souvent un recouvrement des fonctions d'appartenance sur l'ensemble du domaine de validité du modèle T-S. De ce fait, le recours à des fonctions de Lyapunov non quadratiques s'avère plus approprié. Celles-ci partagent la même structure d'interconnexion que les modèles T-S à analyser [Blanco et al., 2001; Guerra and Vermeiren, 2004; Mozelli et al., 2009b; Tanaka et al., 2003]. Néanmoins, dans le cas continu, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaissent dans les conditions de stabilité. Afin de contourner ce problème, de nombreux travaux sont basés sur l'hypothèse que ces dérivées sont bornées, et que ces bornes sont connues en amont de la synthèse de la boucle fermée [Bouarar et al., 2010; Guelton et al., 2009; Mozelli et al., 2009a; Tanaka et al., 2003, 2007], ce qui conduit à une stabilité locale. Dans le contexte non quadratique, il apparaît donc judicieux de recourir à l'estimation du Domaine d'Attraction (DA). Dans [Guerra et al., 2012; Pan et al., 2012], des conditions LMIs permettant l'estimation conjointe du DA et la synthèse d'un contrôleur ont été proposées. Néanmoins, ces approches conduisent à des conditions LMIs relativement complexes et difficiles à mettre en oeuvre par les non spécialistes. Ainsi, d'autres approches, de moindre complexité, ont été récemment proposées pour l'estimation a posteriori du domaine d'attraction [Lee et al., 2014, 2012].

D'autre part, afin de pallier l'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilité, une approche non quadratique basée sur des Fonctions de Lyapunov sous forme d'Intégrales Curvilignes (FLIC) a été proposée dans [Rhee and Won, 2006]. Néanmoins, l'obtention de conditions de stabilité LMIs par la méthode directe de Lyapunov n'est possible au travers d'une FLIC que si l'intégrale curviligne considérée est indépendante du chemin parcouru. De plus, dans [Rhee and Won, 2006], les premiers résultats en stabilisation ont été donnés en termes d'Inégalités Bilinéaires Matricielles (BMIs), qui ne permettent pas d'obtenir de solutions globales aux problèmes d'optimisation ni, le cas échéant, garantir l'absence de solutions. Aussi, depuis ces premiers travaux, de nombreux efforts ont été pro-

duits afin d'aboutir à l'obtention de conditions **LMI**s en stabilisation [Guelton et al., 2014; Marquez et al., 2013; Mozelli et al., 2009a; Tognetti et al., 2011]. Dans [Mozelli et al., 2009a], des conditions **LMI**s ont été proposées par le biais d'un changement de variable. Néanmoins, celui-ci s'avère extrêmement contraignant lorsque l'ordre ou le nombre de variables de pré-misse du modèle T-S considéré est important. Dans [Tognetti et al., 2011], un algorithme à deux passes a été proposé. Néanmoins, celui-ci souffre de conservatisme et ne permet pas de garantir une solution globale. Enfin, dans [Guelton et al., 2014, 2010a; Marquez et al., 2013], des conditions strictement **LMI**s ont été proposées, mais qui sont uniquement valables pour les modèles T-S d'ordre inférieur ou égal à deux. Sur la base de ces constatations, il apparaît donc que l'obtention de conditions non quadratiques en stabilisation, strictement **LMI**s et sans restriction d'ordre, reste à ce jour un défi lorsqu'une **FLIC** est considérée. Ce point constituera la première contribution principale de cette thèse, développée au second chapitre de ce manuscrit.

En parallèle de ces travaux traitant de la réduction de conservatisme, d'autres études ont été réalisées dans l'optique d'améliorer les performances en boucle fermée. En effet, le fait de garantir la stabilité asymptotique d'un système en boucle fermée ne permet pas d'assurer pour autant une bonne réponse de son régime transitoire. Par exemple, de nombreux travaux ont été proposés en considérant la prescription d'un taux de décroissance $\beta > 0$ en boucle fermée [Kiriakidis, 2001; Liu and Zhong, 2007; Tanaka et al., 1998; Taniguchi et al., 2001; Teixeira et al., 2003b]. Dans la pratique, ceci revient à placer les migrations des valeurs propres λ de la boucle fermée dans le demi-plan gauche du plan complexe défini par $\text{Re}(\lambda) < -\beta$. Néanmoins, si une telle approche permet de rendre la dynamique en boucle fermée plus rapide, elle peut conduire à d'importants dépassements et oscillations (parties imaginaires importantes), ou encore à l'augmentation du coût énergétique (parties réelles fortement négatives), avec d'éventuels dépassements des capacités physiques du système et de ses actionneurs. Ainsi, le concept de \mathcal{D} -stabilité a été introduit afin de contourner ces problèmes et de garantir des performances acceptables en boucle fermée. Ce concept, initialement proposée pour les modèles linéaires incertains [Chilali and Gahinet, 1996; Chilali et al., 1999], consiste à définir des contraintes **LMI**s permettant de placer la migration des valeurs propres de la boucle fermée (évolution des valeurs propres dans l'espace convexe défini par les bornes des incertitudes) dans une région spécifiée \mathcal{D} du plan complexe, ap-

pelée également région **LMI** [Bachelier, 1998]. Par la suite, afin de réduire le conservatisme des conditions **LMIs**, ce concept a été étendu au cas des modèles linéaires incertains réécrits sous la forme de modèles polytopiques convexes avec des poids constants [Peaucelle et al., 2000]. En parallèle, les premiers travaux sur la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S sont apparus dans [Hong and Langari, 2000; Hong and Nam, 2003; Joh et al., 1997] et une application à la régulation d'attelages virtuels pour les véhicules automatisés a été proposée [Toulotte et al., 2008]. Plus récemment, d'autres applications à base de modèles T-S ont vu le jour, par exemple pour la commande de drones quadrirotor [Lee et al., 2014; Sheikhpour and Shouraki, 2013; Yacef et al., 2012a,b]. Néanmoins, pour l'ensemble de ces résultats préliminaires sur la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S, les contraintes de \mathcal{D} -stabilité ont été retranscrites sous la forme de contraintes **LMIs** additionnelles au problème quadratique conventionnel et pour une région **LMI** prédéfinie particulière. Néanmoins, dans ce cas, on perd le caractère générique du concept de \mathcal{D} -stabilité, qui permet notamment aux concepteurs de spécifier des régions **LMI** selon leurs propres convenances (voir par exemple [Bachelier, 1998; Chiali et al., 1999] où différents types de régions **LMI** sont proposées). Aussi, afin de conserver ce caractère générique, une définition générale de la \mathcal{D} -stabilité a été adoptée dans [Nguang and Shi, 2006] pour les modèles non linéaires au regard de la théorie de Lyapunov. Sur la base de cette définition, la synthèse quadratique de lois de commande robustes et \mathcal{D} -stabilisantes pour les modèles T-S incertains a été considérée [Assawinchaichote, 2014]. Néanmoins, ces conditions ne tenant pas compte des techniques récentes de relaxation, elle souffrent de conservatisme. Ce point constituera donc la seconde contribution principale de cette thèse, où des conditions relâchées et génériques seront proposées pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S au chapitre 3, puis étendues au chapitres 4 pour les modèles T-S incertains.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le **premier chapitre** est dédié à la présentation des notions élémentaires nécessaires à la compréhension des travaux de cette thèse. Il permettra notamment d'introduire plus en détail la problématique traitée et les verrous mentionnés ci-dessus. Ainsi, dans un premier temps, la classe de modèles T-S considérée sera présentée. Puis, sur la base de la méthode directe de Lyapunov, les principaux résultats traitant de l'analyse de la stabilité et de la sta-

bilisation dans le cadre quadratique et non quadratique seront présentés. Enfin, le concept de la \mathcal{D} -stabilité sera défini et les premiers résultats concernant les modèles T-S seront présentés.

Le **chapitre 2** sera consacré à l'analyse de la stabilité et la stabilisation non quadratique des modèles T-S via une **FLIC**. Les résultats proposés ici sont basés sur une propriété de stabilité mutuelle du modèle T-S et de son dual (propriété de dualité). Ainsi, dans un premier temps, l'invalidité de cette propriété dans le cadre non quadratique général sera mise en avant. Puis, lorsqu'une **FLIC** est considérée, une preuve formelle de cette propriété sera proposée. Nous verrons alors que celle-ci permet d'obtenir des conditions de stabilité **LMI**s moins conservatives. Enfin, des conditions strictement **LMI**s seront établies pour la stabilisation asymptotique globale des modèles T-S sans aucune restriction d'ordre.

Dans le **chapitre 3**, de nouvelles conditions quadratiques pour la synthèse \mathcal{D} -stable de lois de commande seront proposées pour les modèles T-S. Deux types de lois de commande seront considérées : les lois de commande **PDC** et non-**PDC** (initialement proposées pour la synthèse non quadratique [Guerra and Vermeiren, 2004]). Si les lois de commande non-**PDC** ont permis par le passé d'obtenir des conditions moins conservatives, elles nécessitent l'inversion en ligne d'une matrice de gain variable, ce qui peut être considéré comme un inconvénient majeur pour les systèmes embarqués à faible capacité de calcul. Aussi, des conditions relâchées et strictement **LMI**s seront proposées pour la synthèse de contrôleurs **PDC** \mathcal{D} -stabilisants. Enfin, des conditions non quadratiques seront proposées. Celles-ci ne permettant de garantir qu'une stabilité locale, une méthode d'estimation du domaine d'attraction, inspirée de [Lee et al., 2012], sera considérée.

Le **chapitre 4** sera consacré à l'extension des résultats proposés au chapitre précédent au cas de la \mathcal{D} -stabilisation robuste des modèles T-S incertains. Si les modèles T-S incertains sont généralement considérés pour tenir compte des incertitudes paramétrique d'un système non linéaire donné, nous verrons ici qu'il peuvent également être avantageusement considérés lorsque les non-linéarités d'un modèle non linéaire dépendent à la fois de l'état et de l'entrée. Ce point sera illustré au travers d'un exemple de \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un modèle de drone quadrirotor.

Enfin, une conclusion générale et des perspectives de ces travaux seront données pour conclure ce manuscrit.

Chapitre 1

Etat de l'art sur la stabilité et la stabilisation des modèles T-S

Sommaire

1.1 Introduction	9
1.2 Présentation des Modèles T-S	9
1.3 Obtention des modèles T-S	12
1.4 Analyse de stabilité des modèles T-S	15
1.4.1 Stabilité quadratique	16
1.4.2 Stabilité non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	17
1.4.3 Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	19
1.5 Synthèse de lois de commande par retour d'état pour les modèles T-S	22
1.5.1 Lois de commande	23
1.5.2 Stabilisation quadratique	24
1.5.3 Stabilisation non quadratique	26
1.5.3.1 Stabilisation non quadratique dépendante des dérivées tem- porelles des fonctions d'appartenance	27

1.5.3.2	Stabilisation non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance	28
1.6	\mathcal{D}-stabilité des systèmes polytopiques convexes	33
1.6.1	Définitions et propriétés usuelles et relatives à la \mathcal{D} -stabilité	34
1.6.2	Résultats préliminaires pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S	37
1.7	Conclusion	39

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter les travaux préliminaires et nécessaires à la compréhension des contributions proposées dans le cadre de cette thèse. Celles-ci concernent notamment l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S. Ainsi, dans un premier temps, nous présenterons la classe des modèles T-S considérée et leurs méthodes d'obtention. Ensuite seront abordés les principes généraux de l'analyse de leur stabilité au travers de la méthode directe de Lyapunov, c'est-à-dire via l'utilisation de Fonctions de Lyapunov Quadratiques (**FLQ**), mais aussi non Quadratiques (**FLNQ**) pour la réduction du conservatisme des conditions obtenues. Ces considérations seront alors étendues à la synthèse de lois de commande pour la stabilisation des modèles T-S.

Un focus particulier sera établi sur l'emploi de Fonction de Lyapunov sous forme d'Intégrales Curvilignes (**FLIC**) qui permettent, dans le contexte non quadratique, d'obtenir des conditions globales de stabilité. Nous verrons alors que les résultats existants conduisent à des restrictions majeures pour la stabilisation. Ce point permettra de motiver notre contribution présentée au chapitre 2, où une solution sera proposée pour lever ces restrictions.

Enfin, nous aborderons la problématique de la spécification des performances en boucle fermée des modèles T-S lors de la synthèse de lois de commande. Celle-ci peut se faire au travers du concept de \mathcal{D} -stabilité dont les principes généraux seront rappelés. Nous verrons alors que les résultats existants dans la littérature souffrent d'un certain degré de conservatisme. Ceci constitue le point motivant les travaux qui seront présentés dans les chapitres 3 et 4, où de nouvelles conditions pour la synthèse de lois de commande robustes et \mathcal{D} -stabilisantes seront proposées pour les modèles T-S nominaux et incertains.

1.2 Présentation des Modèles T-S

Parmi les nombreuses représentations mathématiques des systèmes non linéaires existantes, nous adopterons la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\ u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.1)$$

où x représente le vecteur d'état, u le vecteur d'entrées de commande et y le vecteur de sorties. Les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont non linéaires et lisses, respectivement de dimension n et p .

Considérons à présent une classe particulière des systèmes non linéaires (1.1) définie par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \\ u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \\ y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ C \in \mathbb{R}^{p \times n} \\ D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{cases} \quad (1.2)$$

où $A(x(t))$, $B(x(t))$, $C(x(t))$ et $D(x(t))$ sont des matrices contenant des termes non linéaires, respectivement appelées matrices de dynamique, de commande, d'observation et d'action directe.

Hypothèse 1.1. *Le système non linéaire (1.2) est continu et borné sur un espace compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de son espace d'état, c'est à dire que ses entrées peuvent contenir des fonctions non linéaires continues, dépendantes de x et bornées dans Ω .*

Un système appartenant à cette classe de systèmes non linéaires peut être représenté par un modèle Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi and Sugeno, 1985], également appelé modèle quasi Linéaire à Paramètres Variants (quasi-LPV) [Shamma and Cloutier, 1993].

Sous sa forme historique, un modèle T-S est constitué par un ensemble de sous-modèles linéaires pondérés par des fonctions d'appartenance non linéaires décrit par les règles floues " **Si-Alors** ". Il est alors donné par :

$$\begin{aligned} R_i &: \mathbf{Si} \ z_1(t) \text{ est } M_1^i \text{ et } \dots \ z_l(t) \text{ est } M_l^i \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } M_p^i \\ \mathbf{Alors} &\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec $l \in \{1, 2, \dots, p\}$, p le nombre de variables d'état contenues dans le vecteur de prémisse, R_i la i^e règle floue " **Si-Alors** " et r le nombre de règles floues. M_l^i représentent les ensembles flous et z_l les variables de prémisse dépendant de l'état et/ou des entrées du sys-

tème. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$ sont des matrices à coefficients constants définissant la dynamique de chaque sous-modèle.

Pour chaque règle R_i , une fonction poids $w_i(z_i(t))$ est attribuée. Elle caractérise la contribution de chaque sous-modèle linéaire apparaissant dans le modèle T-S à l'instant t . A chaque instant, cette fonction de poids dépend de l'appartenance des variables de prémisse $z_p(t)$ aux sous-ensembles flous M_l^i telle que :

$$w_i(z(t)) = \prod_{l=1}^p M_l^i(z_l(t)) \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.4)$$

avec $\forall t, w_i(z(t)) \geq 0$.

On définit les fonctions d'appartenance normalisées ainsi :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.5)$$

Elle garantissent les propriétés de somme convexe, c'est à dire $0 \leq h_i(z(t)) \leq 1$ et $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$. Le système non linéaire (1.2) peut alors être représenté par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.6)$$

où $h_i(z(t))$ sont les fonctions d'appartenance convexes contenant toutes les non-linéarités dépendantes du vecteur de prémisse $z(t) \in \mathbb{R}^p$.

Remarque 1.1. Dans le cas général, les fonctions d'appartenance peuvent dépendre du vecteur d'état $x(t)$ et/ou de la loi de commande $u(t)$. Néanmoins, la présence du signal de commande dans le vecteur de prémisse entraîne l'apparition d'une boucle algébrique en stabilisation, ce qui s'avèrerait difficile, voire impossible, à mettre en oeuvre. C'est pourquoi dans la suite de ce manuscrit, nous considérons l'hypothèse 1.2 suivante.

Hypothèse 1.2. Pour la stabilisation des modèles T-S et lorsque cela n'est pas explicitement mentionné, le vecteur de prémisse est supposé dépendre uniquement de l'état (i.e. $z(t) \equiv x(t)$).

1.3 Obtention des modèles T-S

Cette section est consacrée à la description des méthodes d'obtention d'un modèle T-S à partir du système (1.1). Trois méthodes peuvent alors être considérées :

- Par identification [Gasso et al., 2000] : cette méthode repose sur l'identification des paramètres de chaque modèle local à partir des données sur les entrées / sorties.
- Par linéarisation [Tanaka and Wang, 2001] : cette approche consiste à linéariser le système non linéaire autour d'un ensemble de points de fonctionnement. Le modèle est alors obtenu par l'interpolation des modèles locaux affines avec des fonctions d'appartenance choisies judicieusement (gaussiennes, triangulaires).
- Par décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka et al., 1998] des non-linéarités du système : cette méthode permet, contrairement aux autres méthodes, d'obtenir une représentation exacte du système non linéaire dans un espace compact de l'espace d'état.

Dans la suite de ce manuscrit, les modèles T-S étudiés sont tous obtenus à partir d'une décomposition en secteurs non linéaires. Cette méthode repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.1. [Morère, 2001] Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $x \in [-b, a]$ et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur $[-b, a]$. Il existe alors deux fonctions w_1 et w_2 et deux scalaires réels α et β tels que :

$$f(x(t)) = \alpha w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t))$$

avec $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1$, $w_1(x(t)) \geq 0$ et $w_2(x(t)) \geq 0$.

Exemple 1.1 Soient α et β les scalaires réels tels que $\alpha = \min(f(x(t)))$ et $\beta = \max(f(x(t)))$ pour $x \in [-b, a]$. Il est alors possible d'écrire :

$$f(x(t)) = \alpha w_1(x(t)) + \beta w_2(x(t))$$

avec

$$w_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad w_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta}$$

Remarque 1.2. Les modèles T-S (1.6) obtenus par une décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka and Wang, 2001] sont valides dans un espace compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'espace d'état. Si toutes les non-linéarités sont bornées sur l'ensemble de l'espace d'état, le modèle T-S (1.6) représente exactement le système non linéaire (1.1). On dit alors que la décomposition en secteur non linéaire est globale. Si au moins une des non-linéarités de (1.1) n'est pas bornée, il est toujours possible de considérer un secteur non linéaire local définissant l'ensemble Ω . Le modèle T-S (1.6), représente alors localement le système non linéaire (1.1) sur Ω . Dans ce contexte, on parle de décompositions en secteurs non linéaires locales, et s'il est possible de prouver que le modèle T-S est globalement asymptotiquement stable (GAS), alors le système non linéaire (1.1) est asymptotiquement stable $\forall x(t) \in \Omega$.

Remarque 1.3. La décomposition en secteurs non linéaires n'est pas unique. En effet, plusieurs modèles T-S représentant un seul système non linéaire peuvent être obtenus selon la décomposition choisie et les variables de prémisse sélectionnées. De plus, le nombre de sous-modèles dépend d'une façon exponentielle des non-linéarités p sélectionnées et, le nombre de sous-modèles est alors égal à 2^p . Par conséquent, il est nécessaire de sélectionner judicieusement les termes non linéaires lors de la décomposition en secteurs non linéaires afin de diminuer la complexité du modèle T-S obtenu.

Afin d'illustrer l'obtention des modèles T-S par la méthode de décomposition par secteurs non linéaires, deux exemples sont proposés ci-dessous.

Exemple 1.2 Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)) x(t) \quad (1.7)$$

La fonction sinus est de classe \mathcal{C}^∞ avec $-1 \leq \sin(x(t)) \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ considéré non borné. D'après le lemme 1.1, nous pouvons réécrire le terme non linéaire comme suit :

$$\sin(x(t)) = \underbrace{\frac{\sin(x(t)) - (-1)}{2}}_{h_1(x(t))} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - \sin(x(t))}{2}}_{h_2(x(t))} \times (-1)$$

Par conséquent, nous pouvons représenter le système non linéaire (1.7) par le modèle T-S

global suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) \alpha_i x(t) \quad (1.8)$$

où $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$.

Exemple 1.3 Considérons maintenant le système non linéaire suivant où la variable t est omise afin d'alléger les notations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_1 x_2 + (2 - \cos(x_2)) u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \cos(x_2) + x_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Nous pouvons réécrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & x_1 \\ -2 \cos(x_2) & 1 \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 - \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(x)} u \quad (1.10)$$

où $x = [x_1 \ x_2]^T$.

D'après cette représentation d'état, nous pouvons distinguer deux termes en fonction des variables d'état : $f_1(x) = x_1$ et $f_2(x) = \cos(x_2)$. Pour obtenir une représentation locale, on suppose que x_1 est bornée avec $x_1 \in [-a \ b]$. D'après le lemme 1.1, ces termes peuvent être réécrits comme suit :

$$x_1 = \underbrace{\frac{x_1 + a}{b - a}}_{w_1^1(z)} \times b + \underbrace{\frac{b - x_1}{b - a}}_{w_1^2(z)} \times a,$$

$$\cos(x_2) = \underbrace{\frac{\cos(x_2) + 1}{2}}_{w_2^1(z)} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - \cos(x_2)}{2}}_{w_2^2(z)} \times (-1)$$

Les fonctions d'appartenance du modèle global sont donc : $h_1(z) = w_1^1(z) \times w_2^1(z)$, $h_2(z) = w_1^1(z) \times w_2^2(z)$, $h_3(z) = w_1^2(z) \times w_2^1(z)$ et $h_4(z) = w_1^2(z) \times w_2^2(z)$.

Par conséquent, le modèle T-S suivant représente exactement le système non linéaire (1.9) sur le sous-espace compact de son espace d'état défini par $\Omega = \{x \in [-a \ b] \times \mathbb{R}\}$.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(z) (A_i x + B_i u) \quad (1.11)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & b \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

et

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'obtention des modèles T-S étant maintenant décrite, nous nous intéresserons dans les sections suivantes à l'analyse de leur stabilité et leur stabilisation.

1.4 Analyse de stabilité des modèles T-S

L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques repose essentiellement sur la méthode directe de Lyapunov. Celle-ci consiste à étudier la convergence de l'état $x(t)$ vers un point d'équilibre x_e (généralement ramené à l'origine \mathcal{O}), à partir d'une fonction appelée fonction candidate de Lyapunov. La définition suivante précise les conditions nécessaires et suffisantes d'une fonction de Lyapunov pour démontrer la stabilité d'un système dynamique.

Définition 1.1. [Khalil, 2002] Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Considérons le système dynamique $\mathcal{S} : \dot{x}(t) = f(x(t))$ dont l'origine est notée $\mathcal{O} = \mathbf{0}_n$. V est une fonction candidate de Lyapunov si :

$$V(\mathcal{O}) = 0 \tag{1.12}$$

$$\forall x(t) \neq \mathcal{O}, \quad V(x(t)) > 0 \tag{1.13}$$

De plus, \mathcal{S} est asymptotiquement stable (au moins localement à l'origine \mathcal{O}) et V est une fonction de Lyapunov si elle est strictement décroissante, c'est-à-dire si :

$$\forall x(t) \neq \mathcal{O}, \quad \dot{V}(x(t)) < 0 \tag{1.14}$$

Enfin, \mathcal{S} est globalement asymptotiquement stable si V est radialement non bornée, c'est-à-dire si :

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \tag{1.15}$$

Sur la base de la définition 1.1, nous allons nous focaliser, dans un premier temps dans cette section, sur l'analyse de stabilité des modèles T-S autonomes décrits par :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i x \quad (1.16)$$

1.4.1 Stabilité quadratique

Considérons la Fonction de Lyapunov Quadratique (**FLQ**) suivante vérifiant les conditions (1.12), (1.13) et (1.15) :

$$V(x) = x^T P x \quad (1.17)$$

où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive dite matrice de Lyapunov.

Le modèle T-S (1.16) est globalement asymptotiquement stable si $\dot{V}(x) < 0$, c'est à dire :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i^T P + P A_i) \right) x < 0 \quad (1.18)$$

Les modèles T-S (1.16) étant des modèles polytopiques convexes, les premières conditions quadratiques de stabilité ont été données sous la forme d'un problème d'optimisation convexe, exprimé à l'aide d'un ensemble d'Inégalités Linéaires Matricielles (**LMI**), résumé par le lemme suivant.

Lemme 1.2. [*Tanaka and Sugeno, 1992*] *Le modèle T-S autonome (1.16) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, telle que les **LMIs** suivantes soient vérifiées pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$:*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (1.19)$$

Les inégalités définies à partir de (1.19) ne font apparaître aucune information sur les fonctions d'appartenance, ce qui implique que ces conditions de stabilité sont seulement des conditions suffisantes. Autrement dit, ne pas obtenir une solution au problème d'optimisation convexe ne prouve pas l'instabilité du modèle T-S. De plus, dans ce contexte quadratique, on est amené à définir une matrice P commune à l'ensemble des sous-modèles, ce qui introduit du conservatisme. Pour réduire ce conservatisme, d'autres stratégies peuvent être adoptées [*Sala and Ariño, 2007*], par exemple en considérant une fonction de Lyapunov multiple [*Guerra and Vermeiren, 2004; Tanaka et al., 2003*]. Il n'est alors plus nécessaire de

chercher une matrice commune pour l'ensemble des sous-modèles. Ces résultats préliminaires sont présentés dans la sous-section suivante.

1.4.2 Stabilité non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance

Considérons maintenant une Fonction de Lyapunov Non Quadratique (FLNQ) donnée par :

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) P_i \right) x \quad (1.20)$$

Là encore, cette fonction vérifie les conditions (1.12), (1.13) et (1.15). La particularité de la FLNQ est qu'elle partage la même structure floue que les modèles T-S analysés. Cette fonction ne fait donc plus intervenir une matrice commune à l'ensemble des sous-modèles. Ainsi, avec les notations décrites en préambule de cette thèse, la dérivée temporelle de la FLNQ est donnée par :

$$\dot{V}(x) = x^T A_z^T P_z x + x^T P_z A_z x + x^T \dot{P}_z x \quad (1.21)$$

Le modèle T-S autonome (1.16) est alors stable si :

$$A_z^T P_z + P_z A_z + \dot{P}_z < 0 \quad (1.22)$$

La fonction de Lyapunov non quadratique étant une somme convexe de plusieurs matrices interconnectées par les mêmes fonctions d'appartenance que celles du modèle considéré implique, dans le cas continu, l'apparition des dérivées temporelles de ces fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilité. En effet, dans l'équation (1.22), le terme $\dot{P}_z = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z(t)) P_i$ apparaît ce qui entraîne la perte de la propriété de convexité. Pour remédier à ce problème, plusieurs approches ont été proposées. La première, présentée dans [Tana et al., 2003], consiste à faire l'hypothèse que les bornes des dérivées temporelles sont connues. Il devient donc possible de transformer ce problème en un problème convexe en

supposant que $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$:

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z(t))P_k \leq \sum_{k=1}^r \phi_k(z(t))P_k \quad (1.23)$$

Ainsi, parmi les premières conditions **LMIs** pour l'analyse de stabilité non quadratique des modèles T-S, on trouve celles données par le lemme suivant :

Lemme 1.3. [*Tanaka et al., 2003*] Supposons que $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$ pour $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Le modèle T-S autonome (1.16) est asymptotiquement stable s'il existe les matrices $P_i = P_i^T > 0$ telles que :

$$P_k \geq P_r, \quad k \in \{1, \dots, r-1\} \quad (1.24)$$

$$-\sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) + \frac{1}{2} \left(A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i \right) < 0, \quad i \leq j \quad (1.25)$$

Afin d'améliorer les résultats précédents, d'autres conditions moins conservatives ont été proposées dans [*Mozelli et al., 2009b*] en introduisant une matrice de relaxation présentée dans le lemme suivant :

Lemme 1.4. [*Mozelli et al., 2009b*] Supposons que $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$ pour $\forall k \in \{1, \dots, r\}$. Le modèle T-S autonome (1.16) est stable s'il existe les matrices $P_i = P_i^T > 0$ et X telles que :

$$P_i + X \geq 0, \quad k \in \{1, \dots, r\} \quad (1.26)$$

$$\sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) + \frac{1}{2} \left(A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i \right) < 0, \quad i \leq j \quad (1.27)$$

D'autres conditions ont également été proposées par les mêmes auteurs en introduisant cette fois-ci plusieurs matrices de relaxation [*Mozelli et al., 2009a*], ce qui a permis l'obtention de conditions résumées dans le lemme suivant :

Lemme 1.5. [*Mozelli et al., 2009a*] Supposons que $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$ pour $k = \{1, \dots, r\}$. Le modèle T-S autonome (1.16) est stable s'il existe des matrices symétriques $P_i = P_i^T > 0$, M_1 , M_2 et M_3 telles que :

$$P_i + M_3 > 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.28)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + M_3) - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & (*) \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{array} \right] < 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.29)$$

Le fait de considérer des bornes pour contourner le problème de l'apparition des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance implique que les résultats obtenus sont des résultats locaux. En effet, on peut réécrire la dérivée des fonctions d'appartenance sous la forme :

$$\dot{h}_i(z(t)) = \sum_{j=1}^p \dot{z}_j(t) \frac{\partial h_i(z_j(t))}{\partial z_j(t)} \quad (1.30)$$

Ainsi, borner $\dot{h}_i(t)$ revient alors à borner $\dot{z}(t)$ et donc à restreindre le domaine de validité du modèle T-S dans lequel la stabilité est garantie (ou domaine d'attraction garanti). Ces résultats non quadratiques ne permettent donc d'aboutir à des conditions de stabilité globales. Plus récemment, des travaux ont été proposés afin d'estimer le plus grand domaine d'attraction dans le cadre non quadratique lors de l'analyse de la stabilité [Bernal and Guerra, 2010; Guerra et al., 2012; Lee et al., 2012]. Bien qu'intéressants mais de formulation complexe, ceux-ci ne seront pas repris ici afin de ne pas alourdir la présentation de ce chapitre.

1.4.3 Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance

Afin d'éviter les problèmes sus-mentionnés et de proposer des conditions globales de stabilité non quadratique, une alternative consiste à considérer une Fonction de Lyapunov sous forme d'Intégrale Curviligne (FLIC) permettant de ne plus faire apparaître les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilité. Cette fonction est donnée par [Rhee and Won, 2006] :

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, x(t))} f^T(\psi) \cdot d\psi \quad (1.31)$$

où $\Gamma(\mathcal{O}, x(t))$ est la trajectoire de l'origine \mathcal{O} à l'état actuel $x(t)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur et $d\psi$ est un déplacement infinitésimal. $f \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur dépendant de l'état $x(t)$, qui peut être considéré physiquement comme un vecteur de force.

De plus, afin que la fonction (1.31) soit une fonction candidate de Lyapunov (cf définition 1.1), l'intégrale curviligne doit être indépendante du chemin parcouru [Guelton et al., 2010a;

[Rhee and Won, 2006]. Ainsi, en considérant $f(x) = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T$, une condition nécessaire et suffisante pour vérifier l'indépendance du chemin de (1.31) est donnée en annexe A par le lemme A.2 [Zill and Cullen, 2000]. Sur la base de ce lemme, Rhee et Won ont montré que la FLIC (1.31) est indépendante du chemin en imposant la structure suivante pour $f(x)$ [Rhee and Won, 2006] :

$$f(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i x \quad (1.32)$$

avec

$$P_i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^{\alpha_{i1}} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{1,2} & d_{2,2}^{\alpha_{i2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ p_{1,n} & \dots & p_{n-1,n} & d_{n,n}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Remarque 1.4. Il convient de noter que les éléments de la diagonale de (1.33) sont alternés en fonction des règles **Si-Alors**, réécrite dans [Rhee and Won, 2006] sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} i^{\text{e}} \text{ Règle} & : \text{ Si } z_1(t) \text{ est } M_1^{\alpha_{i1}} \text{ et } \dots z_l(t) \text{ est } M_l^{\alpha_{il}} \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } M_p^{\alpha_{ip}} \\ & \text{ Alors } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad \forall i = \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ainsi, si une variable de prémisse appartient au même ensemble flou de différentes règles, alors les éléments de la diagonale liés à cette variable seront égaux. En effet, considérons que la variable $x_j(t)$ appartienne à différents ensembles de la règle k et ω , à savoir $M_j^{\alpha_{kj}}$, alors, le j^{e} élément de la diagonale de D_k et D_ω seront différents, c'est à dire, $d_{j,j}^{\alpha_{kj}} \neq d_{j,j}^{\alpha_{\omega j}}$.

De plus, cette structure ne peut pas être employée pour les systèmes non linéaires dont une ou plusieurs non-linéarités dépendent de plusieurs variables de prémisse. Pour illustrer ce fait, considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 2 & -3x_2 \\ \sin x_2 & -1 & -2 \cos x_3 \\ \cos(x_1 x_3) & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

La matrice $A(x)$ décrivant la dynamique de ce système contient le terme $\cos(x_1 x_3)$ qui dépend de deux variables de prémisse x_1 et x_3 . Il est alors impossible de traiter les non-linéarités dans

leur intégralité pour obtenir la structure (1.32).

Considérons maintenant le système non linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos x_2 & 2 \\ -1 & x_1 \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Contrairement au cas précédent, les non-linéarités de ce système dépendent chacune d'une seule variable de prémisses, et la structure (1.32) peut être donc satisfaite en posant :

$$P_i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^i & p_{1,2} \\ p_{1,2} & d_{2,2}^i \end{bmatrix}$$

Remarque 1.5. : Comme démontré dans [Rhee and Won, 2006], et sur la base du théorème du gradient (donné en annexe A par le lemme A.1), imposer la forme (1.32) pour la FLIC permet d'obtenir la condition de stabilité suivante :

$$\dot{V}(x) = \dot{x} \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i x + x \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \dot{x} < 0 \quad (1.37)$$

qui ne dépend plus des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance [Rhee and Won, 2006]. Il est donc désormais possible d'utiliser la FLIC pour étudier la stabilité globale des modèles T-S dans ce contexte non quadratique.

Les premières conditions de stabilité proposées à partir d'une FLIC sont alors rappelées par le lemme suivant.

Lemme 1.6. [Rhee and Won, 2006] Le modèle T-S autonome (1.16) est globalement asymptotiquement stable s'il existe les matrices $P_i > 0$ (telles que définies dans (1.33)) et $X \geq 0$ telles que :

$$P_i A_i + A_i^T P_i + (s-1)X < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / 1 < s \leq r \quad (1.38)$$

$$P_i A_j + A_j^T P_i + P_j A_i + A_i^T P_j - 2X < 0, \quad i < j \quad (1.39)$$

où s représente le nombre maximal de règles floues actives simultanément ($1 < s \leq r$).

Afin de réduire le conservatisme des conditions de stabilité proposées par [Rhee and

Won, 2006] et en préambule de ce travail de thèse, nous avons proposé de nouvelles conditions relâchées présentées dans le lemme suivant.

Lemme 1.7. [Guelton et al., 2014] *Le modèle T-S autonome (1.16) est globalement asymptotiquement stable s'il existe les matrices $P_i > 0$ (telles que définies dans (1.33)), U_z et V_z telles que :*

$$\Xi_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.40a)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{ii} + \Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (1.40b)$$

avec

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} U_j A_i + A_i^T U_j^T & (*) \\ P_i + V_j A_i - U_j^T & -V_j - V_j^T \end{bmatrix}$$

Remarque 1.6. *La démonstration des conditions exprimées au lemme 1.7 n'est pas reprise ici dans la mesure où nous présenterons des conditions de moindre conservatisme au chapitre 2 de ce manuscrit.*

Remarque 1.7. *Les conditions présentées dans le lemme 1.7 généralisent celles proposées dans [Mozelli et al., 2009b] et sont donc moins conservatives. En effet, les matrices de relaxation utilisées dans le lemme 1.7 ont une structure floue contrairement à celles utilisées dans [Mozelli et al., 2009b] où les matrices de relaxation sont communes pour tous les sous-modèles. Par conséquent, les conditions proposées par le théorème 4 dans [Mozelli et al., 2009b] sont incluses dans le lemme 1.7 comme un cas particulier où $U_h = U$ et $V_h = V$.*

Dans cette section, nous avons présenté les principales approches pour l'analyse de stabilité des modèles T-S via la méthode directe de Lyapunov. Dans la section suivante, nous allons nous focaliser sur la stabilisation par retour d'état des modèles T-S.

1.5 Synthèse de lois de commande par retour d'état pour les modèles T-S

La synthèse de contrôleurs par retour d'état nécessite l'utilisation d'une loi de commande adéquate avec la structure particulière des modèles T-S. Les deux lois de commande les plus

utilisées pour stabiliser cette classe de systèmes sont :

- la loi de commande de type compensation parallèle distribuée (**PDC** : Parallel Distributed Compensation) [Wang et al., 1996],
- et la loi de commande **non-PDC** [Guerra and Vermeiren, 2004].

Celles-ci seront définies dans la section ci-dessous.

1.5.1 Lois de commande

La première loi de commande proposée pour la stabilisation des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S est la loi de commande **PDC** [Wang et al., 1996]. Celle-ci partage la même structure floue du modèle T-S à stabiliser. Cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (1.41)$$

où $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont les matrices de gain à synthétiser.

En substituant (1.41) dans (1.6), la dynamique de la boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i F_j) x(t) = (A_z + B_z F_z) x(t) \quad (1.42)$$

Dans ce contexte non quadratique, après avoir introduit la **FLNQ** pour l'analyse de stabilité des modèles T-S, il a fallu définir une nouvelle loi de commande afin d'obtenir des conditions de synthèse à base de **LMIs**. Cette loi de commande, appelée loi de commande non-PDC, est donnée par [Guerra and Vermeiren, 2004] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) H_i \right)^{-1} x(t) \quad (1.43)$$

où $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les matrices à synthétiser.

En substituant (1.43) dans (1.6), la dynamique de la boucle fermée s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) H_k \right)^{-1} \right) x(t) = (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) x(t) \quad (1.44)$$

1.5.2 Stabilisation quadratique

La stabilisation des modèles T-S (1.6) a été étudiée, en premier lieu, à partir d'une loi de commande PDC (1.41). Désormais, nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x) = x^T P^{-1} x, \quad \text{avec } P = P^T > 0. \quad (1.45)$$

À partir de la méthode directe de Lyapunov, la boucle fermée (1.42) est stable si la fonction de Lyapunov (1.45) est strictement décroissante $\forall t \geq 0$, ce qui revient à dire que sa dérivée temporelle est strictement négative. A partir de l'équation (1.45) et (1.42), on obtient la condition à vérifier suivante :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left((A_z + B_z F_z)^T P^{-1} + P^{-1} (A_z + B_z F_z) \right) x(t) < 0 \quad (1.46)$$

Ainsi, $\forall x(t)$, la condition (1.46) est vérifiée si :

$$(A_z + B_z F_z)^T P^{-1} + P^{-1} (A_z + B_z F_z) < 0 \quad (1.47)$$

En multipliant à gauche et à droite par P, la boucle fermée (1.42) est alors stable si :

$$P A_z^T + A_z P + P F_z^T B_z^T + B_z F_z P < 0 \quad (1.48)$$

La condition de stabilité (1.48) n'est pas une condition LMI en raison de la présence des produits matriciels $P F_z^T$ et $F_z P$. Pour obtenir des conditions LMIs, le changement de variable bijectif $N_z = F_z P$ est requis. Après avoir effectué ce changement de variable, on retrouve les conditions proposées dans [Wang et al., 1996] et qui sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 1.8. [Wang et al., 1996] *Le modèle T-S (1.6) est stabilisé par la loi de commande (1.41), s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &< 0, & \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} &< 0, & i < j \end{aligned} \quad (1.49)$$

avec $\Gamma_{ij} = A_i^T P + P A_i^T + B_i N_j + N_j^T B_i^T$.

De nombreux travaux ont été menés afin d'améliorer ce résultat pour l'obtention de conditions de stabilisation moins conservatives. Dans [Tuan et al., 2001], une amélioration a été proposée en introduisant un nouveau schéma de relaxation à partir de double somme. Ce schéma de relaxation est présenté dans le lemme suivant :

Lemme 1.9. [Tuan et al., 2001] : Soient Γ_{ij} , $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, des matrices de dimensions appropriées. $\Gamma_{zz} < 0$ est satisfaite si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.50)$$

$$\frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (1.51)$$

D'autres schémas de relaxation ont été proposés en introduisant des matrices libres afin de réduire le conservatisme des conditions exprimées à partir de double ou triple sommes dans [Fang et al., 2006; Kim and Lee, 2000; Liu and Zhang, 2003; Sala and Ariño, 2007; Teixeira et al., 2003a]. Dans ce manuscrit, nous avons opté pour la relaxation présentée dans le lemme 1.9 [Tuan et al., 2001], qui constitue un bon compromis entre complexité et réduction de conservatisme [Sala and Ariño, 2007].

Plus récemment, d'autres résultats ont été proposés en utilisant le lemme de Finsler [Skelton et al., 1998], qui permet de découpler les matrices du système de la matrice de Lyapunov ainsi que d'introduire des variables de décision libres contribuant à réduire le conservatisme. Nous rappelons donc ici ce lemme important pour la suite de nos travaux.

Lemme 1.10. [Skelton et al., 1998] : Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que $\text{rang}(R) < n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$x^T Q x < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, R x = 0\} \quad (1.52)$$

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad : \quad Q + X R + R^T X^T < 0 \quad (1.53)$$

Ainsi, grâce à ce lemme, de nouvelles conditions quadratiques pour la synthèse de lois de commande non-PDC (1.43) ont été proposées dans [Jaadari et al., 2012]. Elle sont résumées par le lemme suivant.

Lemme 1.11. *Le modèle T-S (1.6) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande non-PDC (1.43), s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice P symétrique définie positive et des matrices F_j et H_j , $\forall j \in \{1, \dots, r\}$ tels que les conditions (1.50) et (1.51) soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(A_i H_j + B_i F_j) & (*) \\ H_j - P + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j) & -2\varepsilon P \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Remarque 1.8. *Les conditions présentées dans le lemme 1.11 ne sont pas strictement LMIs car elles nécessitent la connaissance a priori d'un paramètre ε . Néanmoins, il a été montré dans [De Oliveira et al., 2001; Oliveira et al., 2011] que le fait de choisir ε dans une famille logarithmique telle que $\varepsilon \in \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^6\}$ suffit, dans la majorité des cas, à améliorer les résultats obtenus avec les conditions basiques.*

Remarque 1.9. *En raison de l'association de la matrice de Lyapunov et des matrices du système, les premiers contrôleurs dans le cadre quadratique ont été synthétisés à partir d'une loi de commande PDC. Grâce au lemme de relaxation de Finsler, il est possible de découpler la matrice de Lyapunov des matrices du système, et une synthèse quadratique est désormais possible pour une loi de commande non-PDC en appliquant le lemme 1.10.*

La stabilisation des modèles T-S via une **FLQ** revient à rechercher une matrice de Lyapunov constante et commune pour un ensemble de conditions **LMIs**. De ce fait, les conditions de stabilité obtenues sont conservatives [Sala, 2009]. Afin de réduire ce conservatisme, de nombreuses approches ont été proposées comme par exemple l'utilisation de fonctions de Lyapunov par morceaux [Joh et al., 1997] ou à commutations [Jabri et al., 2012; Ohtake et al., 2006a,b]. Néanmoins, ces approches sont peu appropriées aux modèles T-S obtenus à partir d'une décomposition en secteurs non linéaires. Dans ce contexte, le recours à des **FLNQ** (1.20) s'avère plus approprié. Les premiers résultats de stabilisation non quadratiques sont présentés dans la sous-section suivante.

1.5.3 Stabilisation non quadratique

Comme il a été expliqué dans la section précédente et selon la structure de la fonction de Lyapunov utilisée, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance peuvent apparaître

dans les conditions de stabilité et de stabilisation dans le contexte non quadratique. Dans cette partie nous présentons les deux cas : stabilisation non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance en utilisant une fonction de Lyapunov non quadratique standard, et la stabilisation non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance.

1.5.3.1 Stabilisation non quadratique dépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance

Considérons la fonction de Lyapunov non quadratique suivante :

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) P_i \right)^{-1} x \quad (1.55)$$

En considérant une telle fonction de Lyapunov, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaissent dans les conditions de stabilité. Comme discuté précédemment, la plupart des approches proposées pour pallier cette difficulté supposent que les dérivées temporelles sont bornées [Guerra and Vermeiren, 2004; Mozelli et al., 2009a; Tanaka et al., 2003].

En substituant (1.44) dans la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov non quadratique (1.21), la boucle fermée est stable si :

$$(A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T P_z^{-1} + P_z^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) + \dot{P}_z^{-1} < 0 \quad (1.56)$$

En multipliant à gauche et à droite par P_z , et en notant que $P_z P_z^{-1} P_z = -\dot{P}_z$, on obtient :

$$P_z (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T + (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P_z - \dot{P}_z < 0 \quad (1.57)$$

D'où, en posant $H_z = P_z$ et en supposant qu'il existe les scalaires ϕ_k tels que, $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $|\dot{h}_k(z(t))| < \phi_k$, le lemme suivant a été proposé dans [Tanaka et al., 2003].

Lemme 1.12. [Tanaka et al., 2003] Supposons qu'il existe les ϕ_k tels que $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $|\dot{h}_k(z(t))| < \phi_k$. Le modèle T-S (1.6) est localement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43), avec $H_i = P_i$, s'il existe les matrices symétriques $P_i > 0$ telles que les conditions

(1.50) et (1.51) soient vérifiées avec :

$$A_i P_j + P_j A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T - \sum_{k=1}^r \phi_k P_k < 0 \quad (1.58)$$

Notons que de nombreux travaux ont été développés afin d'obtenir des conditions moins conservatives, par exemple par l'introduction de variables relâchées dans [Mozelli et al., 2009a], par l'utilisation d'une forme descripteur [Bouarar et al., 2010], ou encore par l'utilisation du lemme de Finsler [Jaadari et al., 2012]. La littérature étant abondante sur le sujet, il n'est pas possible d'établir une liste exhaustive dans l'espace dédié à ce chapitre. Néanmoins, comme cela est le cas pour l'analyse de la stabilité, ces conditions font apparaître les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance. De ce fait, les conditions obtenues par ces approches ne garantissent que la stabilité locale dans un espace restreint de l'espace d'état appelé "domaine d'attraction". De nombreux travaux ont porté sur la stabilisation locale et l'estimation du domaine d'attraction le plus grand possible [Guerra et al., 2012; Lee et al., 2012]. Dans le chapitre 3, nous considérerons une méthode d'estimation de l'espace d'état dans lequel la stabilité est garantie en s'inspirant de la méthode présentée dans [Lee et al., 2012] afin d'établir les domaines d'attraction dans les cas étudiés.

Notons enfin que d'autres approches peuvent être considérées afin d'aboutir à une stabilisation globale dans le cadre non quadratique, notamment par l'utilisation d'une FLIC. Les premiers résultats sont proposés dans la sous-section suivante. Nous verrons néanmoins que ceux-ci comportent jusqu'ici des limitations.

1.5.3.2 Stabilisation non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance

Les premières conditions de stabilisation utilisant une fonction de Lyapunov définie à partir d'intégrale curviligne (1.31) (indépendante du chemin parcouru) ont été proposées sous forme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI) [Rhee and Won, 2006], et sont présentées dans le lemme suivant.

Lemme 1.13. [Rhee and Won, 2006] *Le modèle T-S (1.6) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande PDC (1.41) s'il existe $P_i > 0$ (avec la structure définie en*

(1.32)), F_i , et $X > 0$ telles que :

$$\Theta_{iii} + \Theta_{iii}^T + (s-1)X < 0 \quad (1.59)$$

$$\Theta_{ijj} + \Theta_{ijj}^T + \frac{1}{3}(s-3)X \leq 0, \quad i \neq j \quad (1.60)$$

$$\Theta_{ijk} + \Theta_{ijk}^T - X \leq 0, \quad i < j < k \quad (1.61)$$

avec :

$$\Theta_{iii} = P_i (A_i + B_i F_i),$$

$$\Theta_{ijj} = \frac{1}{3} (P_i (A_i + A_j + B_i F_j + B_j F_i) + P_j (A_i + B_i F_i)),$$

$$\begin{aligned} \Theta_{ijk} = & \frac{1}{6} (P_i (A_j + A_k + B_j F_k + B_k F_j) + P_j (A_i + A_k + B_i F_k + B_k F_i) \\ & + P_k (A_i + A_j + B_i F_j + B_j F_i)). \end{aligned}$$

et où s représente le nombre maximal de règles floues actives simultanément ($1 < s \leq r$).

Depuis ces premiers résultats, et puisque des conditions **BMI**s ne permettent pas de garantir une optimisation convexe globale, de nombreux travaux ont été menés afin d'obtenir des conditions **LMI**s pour la stabilisation [Guelton et al., 2014; Liu et al., 2013; Marquez et al., 2013; Mozelli et al., 2009a; Tognetti et al., 2011]. Dans ce contexte, un premier résultat significatif a été proposé dans [Mozelli et al., 2009a], qui est résumé dans le lemme suivant.

Lemme 1.14. (Théorème 7 dans [Mozelli et al., 2009a]) Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Le modèle T-S flou (1.44), est stabilisé par le contrôleur **PDC** (1.41), s'il existe des matrices $P_i > 0$ (avec la structure définie en (1.32)), $\bar{T}_i = \bar{T}_i^T > 0$, \bar{R} et \bar{S}_i , satisfaisant l'ensemble des **LMI**s (1.50) et (1.51) avec :

$$\Gamma_{ji} = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}(A_i \bar{R}^T + B_i \bar{S}_j^T) & (*) \\ \bar{T}_i - \mu(A_i \bar{R}^T + B_i \bar{S}_j^T) + \bar{R} & \mu(\bar{R} + \bar{R}^T) \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

et les changements de variables :

$$\bar{T}_i = \bar{R} P_i \bar{R}^T \quad (1.63)$$

$$F_i = \bar{S}_i^T \bar{R}^{-T} \quad (1.64)$$

Remarque 1.10. Les conditions **LMI**s proposées dans le lemme 1.14 sont obtenues à partir de la **FLIC** (1.31) et du vecteur (1.32) avec les changements de variables (1.63) et (1.64) (voir [Mozelli et al., 2009a] pour plus de détails sur la preuve). Par conséquent, comme mentionné

dans [Tognetti et al., 2011], le lemme 1.14 requiert une structure particulière de la variable de décision \bar{R} . En effet, pour obtenir P_i à partir de \bar{T}_i , les structures des matrices \bar{T}_i et \bar{R} doivent changer selon chaque configuration de P_i . Plus précisément, \bar{T}_i doit avoir la même structure que $P_0 + D_i$ et il est nécessaire d'imposer un zéro à chaque élément de la i^e ligne de \bar{R} sauf sur la diagonale. Pour illustrer ce propos, considérons, comme premier exemple, un modèle T-S d'ordre 2 où x_1 et x_2 sont des variables de prémisse. Dans ce cas, \bar{R} doit posséder la structure suivante :

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

A présent, considérons un modèle T-S d'ordre 4 où x_1 , x_2 et x_3 sont des variables de prémisse. \bar{R} doit alors être sous la forme :

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Cette structure est donc de plus en plus contraignante lorsque le nombre de variables de prémisse et/ou l'ordre du système augmente, puisque cela réduit le degré de liberté du problème LMI. Par ailleurs, il faut noter qu'avec le changement de variable (1.63), \bar{R} est commune pour tous les \bar{T}_i et P_i , ce qui conduit à l'augmentation du conservatisme. Ces points sont par conséquent considérés comme des limitations majeures de ce premier résultat.

Notons que dans [Rhee and Won, 2006] et [Mozelli et al., 2009a], des contrôleurs PDC ont été synthétisés à partir d'une FLIC au lieu de contrôleurs de type non-PDC. Ces derniers devraient être plus appropriés et moins conservatifs par rapport aux contrôleurs PDC dans le cadre non quadratique. Ainsi, d'autres résultats LMI ont été récemment proposés dans [Marquez et al., 2013] pour les modèles T-S d'ordre 2. Ils consistent à considérer la fonction de Lyapunov (1.31) avec le vecteur suivant à la place de (1.32) :

$$f(x(t)) = X^{-1}(x(t))x(t) \quad (1.67)$$

où $X(x(t))^{-1}$ doit satisfaire les conditions d'indépendance du chemin énoncées en annexe A par le lemme A.2 [Zill and Cullen, 2000]. Dans ce cas, une solution consiste à imposer la

structure de $X^{-1}(x(t))$ telle que :

$$X^{-1}(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))P_i \quad (1.68)$$

avec la structure de P_i définie en (1.33).

Ensuite, l'astuce proposée dans [Marquez et al., 2013] consiste à réécrire $X(x(t))$ telle que :

$$X(x) = P_z^{-1} = \frac{Z_z}{\det(P_z)} \quad (1.69)$$

où Z_z est la matrice adjointe de P_z et [Strang, 2005] :

$$\det(P_z) = \frac{1}{\det(X(x))} = \det(Z_z)^{n-1} > 0 \quad (1.70)$$

Ainsi, de nouvelles conditions pour la synthèse de lois de commande non-PDC (1.43) ont pu être obtenues et sont résumées par le lemme suivant.

Lemme 1.15. [Marquez et al., 2013] *Le modèle T-S (1.6) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43) s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$ et des matrices $Z_i = Z_i^T > 0$ (adjointes de P_i définies dans (1.33) et (1.68)), F_i et H_i , satisfaisant l'ensemble des conditions (1.50) et (1.51) avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} Z_i & (*) \\ H_j^T + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j)^T & H_j + H_j^T - Z_i \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Enfin, dans la continuité de ces travaux et en préambule des travaux présentés dans ce manuscrit, nous avons proposé des conditions moins conservatives via l'utilisation du lemme de Finsler (lemme 1.10). Il sont résumés par le lemme suivant.

Lemme 1.16. [Guelton et al., 2014] : *Le modèle T-S (1.6) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43) s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$ et des matrices $Z_i = Z_i^T > 0$ (adjointes de P_i définies dans (1.33) et (1.68)), F_i et H_i , satisfaisant l'ensemble des conditions (1.50) et (1.51) avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_i H_j + H_j^T A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T & (*) \\ H_j - Z_i + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j) & -2\varepsilon Z_i \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

Remarque 1.11. Les conditions des lemmes 1.15 et 1.16 sont génériques et garantissent l'indépendance du chemin de (1.31) si et seulement si on peut exprimer les matrices Z_i de telle sorte qu'elles soient les matrices adjointes de $P_0 + D_i$ définies dans (1.32), (1.68) et (1.69). Néanmoins, il n'est pas toujours trivial d'obtenir de telles matrices sous forme de **LMI**s. En effet, pour les systèmes dynamiques du premier ordre, il est facile d'obtenir ces matrices avec $Z_i = p_1$. Pour les systèmes dynamiques du second ordre, le résultat est toujours **LMI** avec :

$$Z_i = \begin{bmatrix} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} & -p_{1,2} \\ -p_{1,2} & p_{1,1}^{\alpha_{i1}} \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

où $p_{1,1}^{\alpha_{i1}}$, $p_{2,2}^{\alpha_{i2}}$ et $p_{1,2}$ sont des variables de décision scalaires. Pour les systèmes dynamiques du troisième ordre, le résultat n'est plus **LMI** mais **BMI** et peut être résolu par un algorithme en deux étapes avec :

$$Z_i = \begin{bmatrix} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} p_{3,3}^{\alpha_{i3}} - p_{2,3}^2 & (*) & (*) \\ p_{1,3} p_{2,3} - p_{1,2} p_{3,3}^{\alpha_{i3}} & p_{1,1}^{\alpha_{i1}} p_{3,3}^{\alpha_{i3}} - p_{1,3}^2 & (*) \\ p_{1,3} p_{2,3} - p_{1,3} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} & p_{1,2} p_{1,3} - p_{2,3} p_{1,1}^{\alpha_{i1}} & p_{1,1}^{\alpha_{i1}} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} - p_{1,2}^2 \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Cependant, pour le quatrième ordre, le problème n'est plus convexe et devient de plus en plus complexe à résoudre quand l'ordre des systèmes T-S augmente. Pour conclure, les conditions proposées dans [Marquez et al., 2013] ne sont **LMI**s que pour les modèles T-S d'ordre 1 et 2. Par conséquent, une telle limitation constitue un inconvénient majeur de cette approche pour la plupart des applications pratiques.

Notons que, dans l'optique de pallier les limitations mentionnées ci-dessus, d'autres conditions ont été proposées, basées sur des hypothèses qui étaient alors non démontrées et susceptibles de remettre en cause ces résultats. En effet, dans [Liu et al., 2013] et dans [Cherifi et al., 2014], des résultats encourageants pour lever la restriction d'ordre mentionnée à la remarque 1.11 ont été proposées sous l'hypothèse que la stabilité mutuelle d'un système T-S et de son dual est garantie. Néanmoins, si cette propriété de dualité est vraie dans le cadre quadratique, elle ne l'est pas lorsque qu'une **FLNQ** est employée. En revanche, lorsqu'une **FLIC** est employée, aucun résultat prouvant cette propriété de dualité n'existe dans la littérature. Celle-ci serait toutefois extrêmement intéressante dans la mesure où elle permettrait

de s'affranchir des restrictions d'ordre mentionnées ci-dessus. Ce point a donc motivé la suite de nos travaux et sera traité plus en détail au chapitre 2, où une preuve formelle de la propriété de dualité est présentée lorsqu'une **FLIC** est considérée.

1.6 \mathcal{D} -stabilité des systèmes polytopiques convexes

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à la stabilité et à la stabilisation des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S sans prendre en considération des critères de performance tels que la rapidité ou la réponse transitoire par exemple. Dans la pratique, l'amélioration du fonctionnement en régime transitoire du système à contrôler est un objectif communément recherché en automatique. Ceci peut se faire en rajoutant des contraintes lors de la synthèse de la loi de commande, par exemple en considérant le concept de \mathcal{D} -stabilité [Chilali and Gahinet, 1996]. Fondamentalement, pour les systèmes linéaires et les systèmes polytopiques convexes, ce concept consiste à vérifier si les valeurs propres d'une matrice sont comprises dans une région notée \mathcal{D} du plan complexe. Les premiers travaux s'intéressant à la localisation des valeurs propres dans le plan complexe pour les systèmes linéaires ont été proposés dans [Jury, 1971, 1974; Kalman, 1969]. Les auteurs s'interrogeaient alors sur la localisation des racines des polynômes caractéristiques dans le cas discret. D'autres résultats significatifs pour la localisation des valeurs propres d'une matrice ont été présentés dans [Gutman, 1979; Gutman and Jury, 1981]. Le concept de \mathcal{D} -stabilité, tel qu'il est présenté ci-dessous, a été introduit par [Chilali and Gahinet, 1996]. Une extension au cas des systèmes linéaires incertains réécrits sous une forme polytopique convexe a été proposée dans [Peaucelle et al., 2000] et d'autres extensions ont été proposées pour la classe des modèles T-S [Assawinchaichote, 2014; Nguang and Shi, 2006; Toulotte et al., 2004, 2008]. Dans cette section nous rappelons quelques définitions et lemmes utiles relatifs au concept de \mathcal{D} -stabilité. Ils constituent les pré-requis nécessaires pour la présentation de nos résultats proposés aux chapitres 3 et 4.

1.6.1 Définitions et propriétés usuelles et relatives à la \mathcal{D} -stabilité

De manière générale, une matrice Q est dite \mathcal{D} -stable si et seulement si ses valeurs propres sont à l'intérieur d'un sous-ensemble \mathcal{D} du plan complexe défini ci-dessous.

Définition 1.2. (Région LMI) [Chilali et al., 1999] : Un sous-ensemble \mathcal{D} du plan complexe est appelé région LMI s'il est défini par deux matrices $L = L^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telles que :

$$\mathcal{D} = \{\lambda = x + iy \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(\lambda) < 0\} \quad (1.75)$$

où la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}(\lambda)$ est donnée par :

$$f_{\mathcal{D}}(\lambda) = L + \lambda M + \bar{\lambda} M^T \quad (1.76)$$

Les conditions de \mathcal{D} -stabilité sont classiquement formulées à partir du produit de Kronecker noté \otimes . Rappelons donc ci-dessous quelques propriétés de cet opérateur.

Propriété 1.1. [Brewer, 1978; Graham, 1981] Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et des matrices A, B et C ayant des dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

$$\begin{aligned} A \otimes (B + \mu C) &= (A \otimes B) + \mu(A \otimes C) \\ (A + \mu B) \otimes C &= (A \otimes C) + \mu(B \otimes C) \\ (A \otimes C)(B \otimes D) &= (AB \otimes CD) \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \end{aligned} \quad (1.77)$$

Dans la suite, nous présentons quelques définitions utiles permettant notamment de relier le concept de \mathcal{D} -stabilité avec la théorie de Lyapunov, et donc son extension dans le cadre non linéaire.

Définition 1.3. (\mathcal{D} -stabilité) [Nguang and Shi, 2006] : Soit une région LMI définie par (1.75). Un système dynamique (e.g. la boucle fermée d'un modèle flou T-S (1.44)) est dit \mathcal{D} -stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ vérifiant $\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \in \mathcal{D}$, i.e. :

$$L \otimes 1 + M \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} + M^T \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} < 0 \quad (1.78)$$

A titre d'exemple, en considérant une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$ et à partir de la définition 1.3, on retrouve les conditions quadratiques de \mathcal{D} -stabilité des systèmes non linéaires exprimées dans le lemme suivant.

Lemme 1.17. [Nguang and Shi, 2006] Soit une région **LMI** définie par (1.75). Le système $\dot{x}(t) = A(x(t))x(t)$ est dit \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$L \otimes P + M \otimes (A(x(t))P) + M^T \otimes (A(x(t))P)^T < 0 \quad (1.79)$$

Les définitions usuelles de la \mathcal{D} -stabilité ayant été rappelées, voyons à présent comment obtenir les matrices L et M afin de spécifier une région **LMI** particulière. En automatique, pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité et de \mathcal{D} -stabilisation des systèmes dynamiques, les régions présentées ci-dessous sont la plupart du temps considérées car elle permettent de garantir des performances liées à la rapidité, à l'amortissement ainsi qu'aux dépenses énergétiques d'un système [Bachelier, 1998]. Ainsi, dans la suite de cette thèse, nous considérerons les régions **LMI** décrites par :

- Le demi-plan gauche avec un taux de décroissance β pour le critère de rapidité. Celui-ci peut être défini avec $L = 2\beta$ et $M = 1$. On notera que, par substitution dans (1.78), nous retrouvons la condition de stabilité bien connue assurant un taux de décroissance β :

$$\dot{V}(x(t)) < -2\beta V(x(t)) \quad (1.80)$$

- Le secteur conique défini par son apex situé en $(\gamma, 0)$ et son angle θ par rapport à l'axe imaginaire. Celui-ci permet le réglage d'un facteur d'amortissement global du système et peut être défini par les matrices suivantes :

$$L = \begin{bmatrix} -2\gamma \cos\theta & 0 \\ 0 & -2\gamma \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

- Le cercle défini par son centre $(q, 0)$ et son rayon r . Celui-ci permet notamment de considérer le coût énergétique en évitant un éloignement des valeurs propres dans la

partie gauche du plan complexe. Il est défini par les matrices suivantes :

$$L = \begin{bmatrix} -s & -q \\ -q & -s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

La Figure 1.1 présente l'intersection des trois régions présentées ci-dessus. Cette région tient compte à la fois des critères de rapidité, d'amortissement et de coût énergétique.

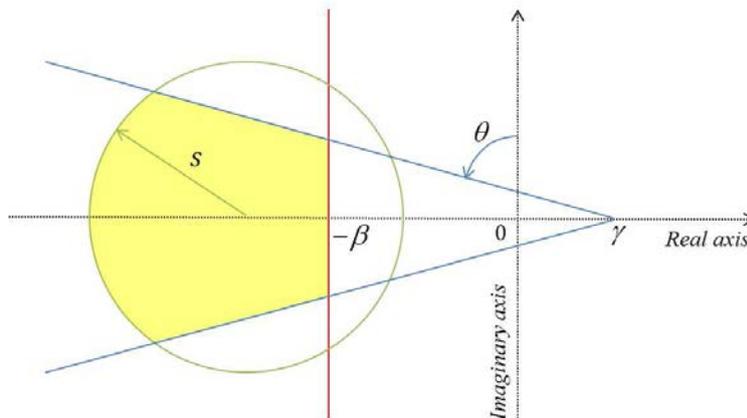


FIGURE 1.1 – Région LMI.

Cette région peut être résumée par les matrices L et M suivantes :

$$L = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & -s \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

et

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

Pour plus de détails et d'autres exemples sur la caractérisation de régions **LMI**, le lecteur pourra consulter l'Annexe C de ce manuscrit.

Remarque 1.12. *Le demi-plan gauche défini par $L = 0$ et $M = 1$ permet de retrouver, à partir de la condition (1.78), la condition standard de stabilité :*

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \quad (1.85)$$

Celle-ci constitue donc un cas particulier de (1.78) et, si la région \mathcal{D} est choisie dans le demi-plan gauche du plan complexe, alors la stabilité asymptotique du système est trivialement garantie.

1.6.2 Résultats préliminaires pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S

Les premières conditions de \mathcal{D} -stabilité, telles que définies dans ce manuscrit, ont été proposées dans [Chilali and Gahinet, 1996] pour les systèmes linéaires. Dans [Peaucelle et al., 2000], une extension de ce concept a été proposée pour des systèmes linéaires incertains représentés sous forme polytopique convexe afin de réduire le conservatisme des conditions LMIs pour les systèmes linéaires. Ensuite, ces résultats ont été étendus au cas des modèles T-S [Assawinchaichote, 2014; Bai et al., 2015; Nguang and Shi, 2006; Toulotte et al., 2004, 2008].

Dans [Toulotte et al., 2004, 2008], des contraintes LMIs additionnelles et spécifiques à chacune des régions sus-mentionnées (taux de décroissance, secteur conique et cercle) ont été ajoutées aux conditions standards de stabilisation pour les systèmes incertains. Cette approche est résumée par le lemme suivant dans le cas des systèmes sans incertitudes.

Lemme 1.18. *(Inspiré de [Toulotte et al., 2004] dans le cas des systèmes sans incertitudes) Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande PDC (1.41) s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et F_j telles que les conditions LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\Gamma_{ii}^k < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \text{ et } k \in \{1, 2, 3\} \quad (1.86)$$

$$\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i < j \text{ et } k \in \{1, 2, 3\} \quad (1.87)$$

avec

$$\Gamma_{ij}^1 = Q_{ij} + Q_{ij}^T + 2\beta P,$$

$$I_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta(Q_{ij} + Q_{ij}^T) & \sin\theta(Q_{ij} - Q_{ij}^T) \\ \sin\theta(Q_{ij}^T - Q_{ij}) & \cos\theta(Q_{ij} + Q_{ij}^T) \end{bmatrix},$$

$$I_{ij}^3 = \begin{bmatrix} -sP & -qP + Q_{ij} \\ -qP + Q_{ij} & -s \end{bmatrix},$$

et

$$Q_{ij} = A_i P + B_i F_j$$

Notons que le lemme 1.18 ne permet pas de tenir compte de toute la flexibilité du concept de \mathcal{D} -stabilité puisqu'il ne tient compte que d'une région **LMI** particulière. Ce résultat peut toutefois être généralisé pour toute région **LMI** (voire annexe C). Celui-ci est résumé par le lemme suivant :

Lemme 1.19. [Assawinchaichote, 2014] *Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande **PDC** (1.41) s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et F_j telles que les conditions **LMIs** suivantes soient vérifiées :*

$$\Upsilon_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.88)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i < j \quad (1.89)$$

avec

$$\Upsilon_{ij} = L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i P + B_i F_j)).$$

Notons que les conditions présentées aux lemmes 1.18 et 1.19 restent conservatives dans la mesure où elles ne tiennent pas compte des techniques de relaxation récentes, telles que celles mentionnées dans les sections précédentes (lemme de Tuan, lemme de Finsler ou encore approches non quadratiques). Ainsi, de nouvelles conditions **LMIs** moins conservatives pour la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes des systèmes T-S seront proposées au chapitre 2. Ensuite, leur extension au cas des systèmes incertains sera présentée dans le chapitre 3.

Remarque 1.13. Dans des articles récents [Bai et al., 2015; Lu et al., 2015], une tentative a été faite pour proposer de nouvelles conditions **LMIs** dans le cadre non quadratique pour la synthèse de contrôleurs **PDC** \mathcal{D} -stabilisant via une **FLIC**, inspirée des travaux de Rhee et Won [Rhee and Won, 2006]. Néanmoins, les résultats présentés dans [Bai et al., 2015] sont entachés

d'erreurs. Celles-ci sont détaillées dans l'annexe B de ce manuscrit, où l'on montre de plus qu'une approche générique de \mathcal{D} -stabilisation (i.e. quelle que soit la région LMI considérée) ne peut être directement obtenue avec une FLIC dans la mesure où la définition (1.78) conduirait à des conditions non convexes.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques résultats préliminaires sur les systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S. Nous avons tout d'abord rappelé les différentes méthodes utilisées pour l'analyse de stabilité et la stabilisation des modèles T-S via des fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques. De plus, nous avons abordé le concept de \mathcal{D} -stabilité afin de présenter les conditions élémentaires de synthèse de lois de commande pour les modèles T-S tenant compte de la spécification de critères de performances en boucle fermée.

A ce stade, il apparaît que les conditions de synthèse non quadratique de lois de commande pour les modèles T-S via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (FLIC), présentées dans les lemmes 1.13, 1.14, 1.15 et 1.16, sont soit BMI, soit nécessitent une restriction à l'ordre 2 des modèles T-S à stabiliser. Ainsi, dans le chapitre 2, nous présenterons tout d'abord une preuve formelle de la propriété de dualité des modèles T-S (stabilité mutuelle du primal et de son dual) lorsqu'une FLIC est employée. Nous verrons par ailleurs au travers d'un exemple numérique que, comme cela a déjà été montré dans le cadre général pour les inclusion différentielles [Goebel et al., 2006a,b], l'analyse duale de la stabilité des modèles T-S permet d'obtenir des résultats moins conservatifs. De plus, nous verrons que pour la stabilisation, la propriété de dualité permet de lever la restriction d'ordre mentionnée ci-dessus. De nouvelles conditions LMIs pour la synthèse de lois de commande non-PDC via une FLIC seront alors proposées.

Par ailleurs, il apparaît que les premiers résultats disponibles pour la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes des modèles T-S, présentés dans les lemmes 1.18 et 1.19 sont conservatifs. Les chapitres 3 et 4 de cette thèse seront donc focalisés sur la réduction de ce conservatisme. Ainsi, dans le chapitre 3, nous proposerons de nouvelles conditions LMIs pour la synthèse de lois de commande PDC et non-PDC incluant les contraintes de \mathcal{D} -

stabilité de la boucle fermée. Ensuite, l'ensemble de ces résultats sera étendu au cas des modèles T-S incertains dans le chapitre 4. Au travers d'un exemple de stabilisation en attitude d'un drone quadrirotor, nous montrerons que les modèles T-S incertains peuvent également être considérés comme une alternative lorsque les variables d'entrée sont présentes dans les non-linéarités du système considéré.

Chapitre 2

Analyse duale de la stabilité et stabilisation des modèles T-S via des fonctions de Lyapunov intégrales curvilignes

Sommaire

2.1 Introduction	43
2.2 Analyse non-quadratique duale de la stabilité des modèles T-S via une FLIC	43
2.2.1 Positionnement du problème de dualité considéré	44
2.2.2 Propriété de dualité non-quadratique des modèles T-S via une FLIC	48
2.2.3 Conditions globales de stabilité relâchées pour les modèles T-S via une FLIC - approche duale	54
2.3 Conditions LMI pour la stabilisation des modèles T-S via une FLIC	58
2.3.1 Conditions LMIs élémentaires de synthèse non-quadratique de lois de commande non-PDC	59
2.3.2 Conditions relâchées de synthèse non-quadratique de lois de com- mande non-PDC	60
2.3.3 Exemples numériques en stabilisation	63
2.4 Conclusion	68

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'analyse non quadratique de la stabilité et la stabilisation des modèles T-S via des fonctions de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (**FLIC**) sont considérées. Comme cela a été évoqué dans le chapitre précédent, à l'inverse des fonctions de Lyapunov non quadratiques conventionnelles (**FLNQ**), l'utilisation d'une **FLIC** permet de s'affranchir de l'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance au sein des conditions de stabilité et donc d'aboutir à une analyse globale sur l'ensemble de l'espace d'état du modèle considéré. Néanmoins, il apparaît que les résultats existants dans la littérature font état de conditions **BMI**s en stabilisation dans le cas général [Rhee and Won, 2006], ou **LMI**s dans le cas restreint aux modèles T-S d'ordre 2 [Guelton et al., 2014, 2010a; Marquez et al., 2013]. Les résultats présentés dans ce chapitre visent donc à généraliser ces résultats en levant ces restrictions pour aboutir à des conditions **LMI**s relâchées.

Inspiré des travaux de [Liu et al., 2013], nous avons proposé une approche encourageante pour l'obtention de conditions **LMI**s dans le cadre de la synthèse non quadratique de lois de commande non-PDC via une **FLIC** [Cherifi et al., 2014]. Cette approche se base sur l'hypothèse que la stabilité mutuelle d'un système T-S et de son dual est garantie. Néanmoins, si cette propriété de dualité est vraie dans le cadre quadratique, elle ne l'est pas lorsque qu'une **FLNQ** est employée. En revanche, lorsqu'une **FLIC** est employée, aucun résultat prouvant cette propriété de dualité n'existe dans la littérature. La première partie de ce chapitre sera donc consacrée à combler cette lacune, en proposant une preuve formelle de cette propriété de dualité. Grâce à cette propriété, de nouvelles conditions relâchées et strictement **LMI**s seront ensuite proposées en stabilisation. Ces conditions ne nécessitent aucune restriction d'ordre et apportent donc une solution à un problème soulevé en stabilisation via une **FLIC** depuis les travaux originels de [Rhee and Won, 2006].

2.2 Analyse non-quadratique duale de la stabilité des modèles T-S via une FLIC

Dans cette section, nous nous intéressons à l'analyse duale de la stabilité des modèles T-S dans le cadre non-quadratique. Tout d'abord, le positionnement du problème de dualité

sera énoncé et nous verrons que, si une telle propriété est vraie dans le contexte quadratique, il n'en est pas de même lorsque des fonctions de Lyapunov non-quadratiques sont considérées (voir par exemple [Guerra and Vermeiren, 2004; Tanaka et al., 2003]). Néanmoins, nous montrons par la suite que, lorsqu'une FLIC est considérée, une telle propriété est vérifiée. Notons qu'une telle approche duale peut conduire à des résultats moins conservatifs pour l'analyse de la stabilité des modèles T-S, comme cela a été par ailleurs montré pour les inclusions différentielles [Goebel et al., 2006a,b]. Les modèles T-S pouvant être vu comme une classe particulière d'inclusions différentielles, il va de soi qu'un tel bénéfice soit constaté. Ceci sera illustré au travers d'un exemple académique.

2.2.1 Positionnement du problème de dualité considéré

Considérons le système non-linéaire autonome, que nous dénommerons primal, donné par :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) \quad (2.1)$$

où $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état primal, $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice en fonction des variables d'état primal.

Nous définissons alors le dual de (2.1) par :

$$\dot{\xi}(t) = A^T(\xi(t))\xi(t) \quad (2.2)$$

où $\xi(t) = [\xi_1(t) \dots \xi_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état dual, $A(\xi(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est structurellement identique à $A(x(t))$ mais dépend des variables d'état du dual.

Hypothèse 2.1. *Les systèmes non-linéaires primal (2.1) et dual (2.2) sont supposés être continus, bornés et dérivables sur un sous-espace compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de leurs espaces d'états respectifs. Les matrices $A(x(t))$ et $A^T(\xi(t))$ contiennent donc des fonctions non-linéaires de $x(t)$ et de $\xi(t)$ respectivement. Ces dernières sont continues, bornées et dérivables sur Ω .*

De plus, pour être consistant avec la formulation des modèles T-S proposée par [Rhee and Won, 2006], on suppose que chacune des non-linéarités dépend uniquement d'une seule variable d'état (x_i pour le primal et ξ_i pour le dual), ou, tout au moins, qu'un difféomorphisme existe conduisant à une transformation linéaire des variables d'état telle que l'on puisse écrire $z = Lx$

avec $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ constante (voir [Gonzalez et al., 2017] pour des résultats récents lorsqu'une telle transformation linéaire existe).

Sous l'hypothèse 2.1, en utilisant une décomposition en secteurs non-linéaires [Tanaka and Wang, 2001], le système non-linéaire primal (2.1) peut être exactement réécrit sur Ω par le modèle T-S, dit primal, décrit sous sa forme compact par [Rhee and Won, 2006] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t) \quad (2.3)$$

où r est le nombre de polytopes (règles du modèle flou), $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes décrivant la dynamique de chaque polytope. De plus, notons que sous l'hypothèse 2.1 et pour être compatible avec l'utilisation d'une FLIC (comme proposée dans [Rhee and Won, 2006]), les fonctions d'appartenance normalisées sont de la forme :

$$h_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j(t))}{\sum_{\alpha_{ij}=1}^{r_j} \omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j(t))} \quad (2.4)$$

où, pour $j = 1, \dots, n$, x_j sont les variables d'état, $\omega_j^{\alpha_{ij}}(x_j(t))$ est le degré d'appartenance de l'élément x_j dans l'ensemble flou $\omega_j^{\alpha_{ij}}$ et α_{ij} précise quel ensemble flou dépendant de x_j est utilisé dans la i^e règle floue. Par exemple, $\alpha_{il} = \kappa$ signifie que le κ^e ensemble flou parmi les ensembles flous θ_l est utilisé dans la i^e règle floue, avec $1 \leq \alpha_{il} \leq r_l \quad \forall i$ (voir e.g. [Bai et al., 2015; Mozelli et al., 2009a; Rhee and Won, 2006] pour plus de détails et d'exemples sur la façon de traiter les notations α_{ij}).

De même, en suivant une logique identique pour le dual (2.2), on peut obtenir son modèle T-S dual défini par :

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) A_i^T \xi(t) \quad (2.5)$$

où $\xi(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état dual.

Remarque 2.1. Les modèles T-S primal (2.3) et dual (2.5) partagent la même enveloppe convexe définie par :

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^r \quad (2.6)$$

De plus, grâce à la convexité des fonctions d'appartenance, les variables de prémisse (variables

d'état dans le cas présent), sont ordonnées suivant le même indice pour le primal et le dual. Par exemple, pour un modèle T-S à quatre règles, si les fonctions d'appartenance du primal (2.3) sont :

$$h_i(x(t)) = \mu_1^{\alpha_{i1}}(x_1(t))\mu_2^{\alpha_{i2}}(x_2(t)), \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.7)$$

alors les fonctions d'appartenance du dual (2.5) sont :

$$h_i(\xi(t)) = \mu_1^{\alpha_{i1}}(\xi_1(t))\mu_2^{\alpha_{i2}}(\xi_2(t)), \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.8)$$

Autrement dit, cela signifie que les modèles primal et dual possèdent le même secteur non-linéaire de sorte qu'ils représentent respectivement le système primal non-linéaire (2.1) et son dual (2.2) dans le même espace compact $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Notons que, dans le cadre quadratique, il est aisé de montrer que le modèle T-S primal (2.3) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si son dual (2.5) l'est également. En effet, en considérant par exemple, la fonction de Lyapunov quadratique suivante pour le modèle T-S primal (2.3) :

$$V_{Qp}(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (2.9)$$

et sa fonction conjuguée pour le dual (2.5) :

$$V_{Qd}(\xi(t)) = \xi(t)^T P^{-1} \xi(t), \quad (2.10)$$

avec $P = P^T > 0$ une matrice constante, alors les modèles primal et dual sont globalement asymptotiquement stables si les conditions **LMIs** suivantes sont vérifiées :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} : A_i^T P + P A_i < 0 \text{ et } P = P^T > 0 \quad (2.11)$$

Malheureusement, cette propriété de dualité ne peut plus être plus globalement vérifiée lorsqu'une **FLNQ** conventionnelle est considérée [Tanaka et al., 2003]. Pour illustrer ce propos, considérons la **FLNQ** candidate pour le modèle primal (2.3) :

$$V_{NQp}(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) P_i x(t) \quad (2.12)$$

et sa conjuguée candidate pour le modèle dual (2.5) :

$$V_{\text{NQd}}(\xi(t)) = \xi^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) P_i \right)^{-1} \xi(t) \quad (2.13)$$

avec $P_i = P_i^T > 0$.

Il est facile de montrer qu'à partir de la dérivée de (2.12), le modèle T-S (2.3) est stable si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 : A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(x(t)) P_k < 0 \quad (2.14)$$

De même, à partir de (2.13), on montre que le modèle T-S (2.5) est stable si :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 : A_i^T P_j + P_j A_i - \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(\xi(t)) P_k < 0 \quad (2.15)$$

Bien évidemment, les conditions de stabilité (2.14) et (2.15) ne sont pas équivalentes puisqu'il apparaît difficile (sinon impossible) de prouver que $\sum_{k=1}^r \dot{h}_k(x(t)) P_k = - \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(\xi(t)) P_k$, sauf dans le cas où $\dot{P}_{(\cdot)} = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(\cdot) P_k = 0$, conduisant au cas quadratique $P_{(\cdot)} = P$ commune. Par conséquent, la propriété de dualité ne peut être garantie globalement dans le cadre non-quadratique avec les **FLNQ** (2.12) et (2.13).

A ce stade, on comprend donc que la propriété de dualité ne peut pas être globalement vérifiée dans le cadre général non-quadratique présenté ci-dessus en raison de l'apparition des termes $\dot{P}_{(\cdot)}$ dans les conditions de stabilité. Cependant, notons que les conditions non-quadratiques proposées dans [Rhee and Won, 2006] permettent de s'affranchir de l'apparition de tels termes lorsqu'une **FLIC** est considérée (cf. chapitre 1, section (1.4.3) et la remarque 1.5). Aussi, ce type de fonctions de Lyapunov nous est apparu intéressant pour étudier la propriété de dualité dans le contexte non-quadratique, ce qui nous a amené à énoncer le problème suivant.

Positionnement du problème : *Si la propriété de stabilité du système dual est globalement vérifiée dans le cadre quadratique, est-elle aussi valide globalement dans le cadre non-quadratique quand une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (FLIC) [Rhee and Won, 2006] est considérée?*

Cette question sera traitée dans la section suivante.

2.2.2 Propriété de dualité non-quadratique des modèles T-S via une FLIC

L'objectif de cette section est de démontrer que la propriété de dualité sus-mentionnée reste valide dans le cadre non-quadratique lorsqu'une **FLIC** est considérée, c'est-à-dire que l'existence de cette dernière garantit la stabilité asymptotique globale du modèle T-S (2.3) et de son dual (2.5). Ce résultat est résumé par le théorème suivant. Notons que sa démonstration est basée sur la définition 1.1 (conditions nécessaires) d'une fonction de Lyapunov donnée au chapitre précédent, ainsi que sur les définitions et propriétés élémentaires des intégrales et intégrales curvilignes données en annexe A.

Théorème 2.1. : Soient les modèles T-S primal et dual représentés respectivement par (2.3) et (2.5). Considérons une fonction candidate de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (**FLIC**), indépendante du chemin parcouru, donnée par :

$$V(\mu(t)) = 2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, \mu(t))} f^T(\phi) \cdot d\phi \quad (2.16)$$

où $\mu(t) = x(t)$ ou $\xi(t)$ selon que la **FLIC** est considérée pour le primal ou le dual, $\Gamma(\mathcal{O}, \mu(t))$ est le chemin de l'origine \mathcal{O} à l'état actuel $\mu(t)$, $\phi \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'intégration et $d\phi$ est un déplacement infinitésimal. $f(\mu) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de force, fonction de l'état $\mu(t)$, et qui garantit l'indépendance du chemin parcouru, c'est-à-dire :

$$f(\mu(t)) = P(\mu(t))\mu(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mu(t))P_i\mu(t) \quad (2.17)$$

avec

$$P_i = \begin{bmatrix} d_1^{\alpha_{i1}} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{1,2} & d_2^{\alpha_{i2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ p_{1,n} & \dots & p_{n-1,n} & d_n^{\alpha_{in}} \end{bmatrix}$$

Supposons qu'il existe une **FLIC** (2.16) pour l'un des modèles T-S primal (2.3) ou dual (2.5).

Alors la fonction conjuguée est donnée par :

$$V^*(\mu^*(t)) = 2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, \mu^*(t))} f^{*\top}(\phi) \cdot d\phi \quad (2.18)$$

où $\mu^*(t) = \xi(t)$ (si $\mu(t) = x(t)$) ou $\mu^*(t) = x(t)$ (si $\mu(t) = \xi(t)$), et avec le vecteur de force :

$$f^*(\mu^*(t)) = P^{-1}(\mu^*(t)) \mu^*(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(\mu^*(t)) P_i \right)^{-1} \mu^*(t) \quad (2.19)$$

est une fonction de Lyapunov pour l'autre des modèles T-S primal (2.3) ou dual (2.5).

Dans ce cas non-quadratique, la stabilité asymptotique globale des deux modèles T-S primal (2.3) et dual (2.5) est donc garantie.

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe une **FLIC** $V(\xi(t))$, indépendante du chemin parcouru, décrite en (2.16) et (2.17) pour le modèle T-S dual (2.5). Cela signifie qu'il existe des matrices $P_j > 0$, définies en (2.17), garantissant la stabilité asymptotique globale de (2.5). Dans ce cas, à partir de l'application du lemme A.1, la condition de stabilité de Lyapunov suivante est satisfaite $\forall \xi(t) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) (A_i P_j + P_j A_i^\top) < 0 \quad (2.20)$$

De plus, notons que puisque (2.20) est satisfaite, nous pouvons affirmer que la fonction quadratique de Lyapunov suivante garantit la stabilité asymptotique locale de (2.5), $\forall x(t)$ pris au voisinage de l'origine \mathcal{O} :

$$\bar{V}(\xi(t)) = \xi^\top(t) P(\mathcal{O}) \xi(t) \quad (2.21)$$

où $P(\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathcal{O}) P_i > 0$ est une matrice constante de $\mathbb{R}^{n \times n}$ (puisque $h_i(\mathcal{O})$ sont des scalaires convexes constants).

Le but est à présent de prouver que pour le primal (2.3), la fonction conjuguée $V^*(x(t))$ décrite en (2.18) est une fonction de Lyapunov. Néanmoins, notons que cette intégrale curviligne n'est pas indépendante du chemin [Guelton et al., 2010a]. De ce fait, et puisque la preuve de la stabilité du primal n'est pas encore établie, nous ne pouvons garantir à ce stade qu'il existe un chemin $\Gamma(\mathcal{O}, x(t))$ de l'origine \mathcal{O} à $x(t)$. Par conséquent, considérerons en lieu

et place de (2.18) l'intégrale généralisée donnée par :

$$V^*(x(t)) = 2 \int_{+\infty}^t f^{*\top}(x(\tau)) \cdot \dot{x}(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

avec $f^*(x(t))$ définie dans (2.19).

Nous allons à présent montrer que les conditions nécessaires et suffisantes (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15) d'une fonction de Lyapunov sont vérifiées (voir définition 1.1, chapitre 1).

D'après (2.22), il est évident que $V^*(\mathcal{O}) = 0$ puisque l'origine \mathcal{O} est un point stationnaire (d'équilibre) du primal (2.3). Ainsi la condition (1.12) est vérifiée. De plus, d'après (2.20) et puisque les fonctions d'appartenance $h(\cdot)$ sont convexes, nous pouvons établir que, dans l'espace primal, $\forall x(t) \neq \mathcal{O}$:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i P_j + P_j A_i^\top) < 0 \quad (2.23)$$

ou de façon équivalente, avec $P(x(t)) = \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) P_j$ et en multipliant (2.23) à gauche et à droite par $P^{-1}(x(t))$:

$$P^{-1}(x(t)) \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i + \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i^\top P^{-1}(x(t)) < 0 \quad (2.24)$$

ou encore, $\forall x(t)$:

$$2x^\top(t) P^{-1}(x(t)) \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t) < 0 \quad (2.25)$$

Autrement dit, compte tenu de (2.3) et (2.19), l'inégalité (2.25) peut être réécrite sous la forme :

$$-2f^{*\top}(x(t)) \cdot \dot{x}(t) > 0 \quad (2.26)$$

Maintenant, $\forall t > 0$, en intégrant (2.26) entre t et $+\infty$ et selon la propriété A.1, on obtient :

$$-2 \int_t^{+\infty} f^*(x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau > 0 \quad (2.27)$$

dont on déduit directement que, $\forall x(t) \neq \mathcal{O}$:

$$V^*(x(t)) = 2 \int_{+\infty}^t f^{*\top}(x(\tau)) \cdot \dot{x}(\tau) d\tau > 0 \quad (2.28)$$

La condition (1.13) de la définition 1.1 est donc maintenant vérifiée.

Attachons nous maintenant à montrer que la condition (1.14) est satisfaite, c'est-à-dire que (2.22) est strictement décroissante. Pour ce faire, considérons tout d'abord une fenêtre temporelle $t \in [0, t_f]$ où t_f est un temps fixe, fini et positif tel que $\forall x(0) \neq \infty, \|x(t_f)\| < +\infty$. D'après (2.26) et la propriété A.1, on peut définir l'intégrale strictement positive $\forall x(t) \neq \mathcal{O}$:

$$\mathcal{I}_{t_f} = 2 \int_{t_f}^0 f^*(x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau = C^{ste} > 0 \quad (2.29)$$

qui est évidemment une constante finie sous l'hypothèse 2.1, puisque t_f est un temps fini fixe.

Définissons maintenant, à partir de (2.26) et la propriété A.1, les intégrales strictement positives $\forall x(t) \neq \mathcal{O}$:

$$\mathcal{I}_1(x(t)) = 2 \int_t^0 f^*(x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau > 0 \quad (2.30)$$

et

$$\mathcal{I}_2(x(t)) = 2 \int_{t_f}^t f^*(x(\tau)) \dot{x}(\tau) d\tau > 0 \quad (2.31)$$

qui satisfont la relation de Chasles (propriété A.2) :

$$\mathcal{I}_{t_f} = \mathcal{I}_1(x(t)) + \mathcal{I}_2(x(t)) = C^{ste} > 0 \quad (2.32)$$

Notons que la dérivée temporelle de $\mathcal{I}_1(x(t))$ est donnée par (2.26), qui est elle-même strictement positive $\forall x(t) \neq \mathcal{O}$. De ce fait, $\mathcal{I}_1(x(t))$ est nécessairement une fonction positive et strictement croissante. Par conséquent, et puisque \mathcal{I}_{t_f} est constante, la relation de Chasles (2.31) permet d'affirmer que $\mathcal{I}_2(x(t))$ est strictement décroissante sur l'intervalle de temps fini $t \in [0, t_f]$. Ainsi, sur cet intervalle de temps fini, $\mathcal{I}_2(x(t))$ est une fonction de Lyapunov et le modèle T-S primal (2.3) se stabilise, c'est-à-dire que $\|x(t)\|$ décroît de manière monotone sur l'intervalle $[0, t_f]$. De plus, notons que :

$$V^*(x(t)) = \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{12}(x(t)) \quad (2.33)$$

La question qui se pose donc maintenant est de savoir si le passage à la limite de $\mathcal{I}_2(x(t))$ permet de garantir la décroissance de $V^*(x(t))$, c'est-à-dire, si $\mathcal{I}_{12}(x(t))$ est définie positive et

décroissante dans un intervalle de temps fini $[0, t_f]$, est-ce toujours le cas quand $t_f \rightarrow +\infty$? Pour répondre à cette question et puisqu'il s'agit d'une intégrale généralisée, considérons tout d'abords un temps fini t_f suffisamment grand pour pouvoir considérer que $x(t_f)$ soit ramené au voisinage de l'origine \mathcal{O} . Dans ce cas, et pour $t \geq t_f$, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique au voisinage de l'origine \mathcal{O} suffirait à garantir la stabilité asymptotique locale. Ainsi, $\forall t \geq t_f$ avec $x(t_f)$ au voisinage de l'origine \mathcal{O} , considérons la fonction de Lyapunov quadratique donnée par :

$$\bar{V}^*(x(t)) = x^T(t)P^{-1}(\mathcal{O})x(t), \forall t \geq t_f \quad (2.34)$$

D'après l'inégalité de Lyapunov (2.23) avec $P(\mathcal{O}) > 0$, la décroissance de (2.34) est garantie au voisinage de l'origine \mathcal{O} , c'est-à-dire :

$$\dot{\bar{V}}^*(x(t)) = 2x^T(t)P(\mathcal{O})\dot{x}(t) < 0, \forall t \geq t_f \quad (2.35)$$

Ainsi, le système primal (2.3) est localement asymptotiquement stable $\forall t \geq t_f$, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq t_f, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x(+\infty) = \mathcal{O} \quad (2.36)$$

et l'on notera que (2.34) peut être réécrite sous la forme :

$$\bar{V}^*(x(t)) = 2 \int_{+\infty}^t x^T(\tau)P^{-1}(\mathcal{O})\dot{x}(\tau)d\tau, \forall t \geq t_f \quad (2.37)$$

De ce fait, sur l'ensemble de l'intervalle de temps $t \in [0, +\infty[$, la fonction de Lyapunov (2.22) peut être réécrite sous la forme :

$$V^*(x(t)) = \begin{cases} \mathcal{I}_{12}(x(t)), \forall t < t_f \\ \bar{V}^*(x(t)) + o(x(t)), \forall t \geq t_f \end{cases} \quad (2.38)$$

où $o(x(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ avec t_f suffisamment grand.

Il est donc maintenant clair que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x(+\infty) = \mathcal{O} \quad (2.39)$$

c'est-à-dire que la fonction (2.22), équivalente à (2.38), satisfait la condition (1.14) de la définition 1.1 et, par conséquent, le modèle T-S primal (2.3) est asymptotiquement stable, au moins localement. De plus, puisque (2.39) est vérifiée et d'après (A.1), la fonction de Lyapunov (2.22) peut désormais être réécrite sous sa forme originelle :

$$V_p(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, x(t))} \phi^T P^{-1}(\phi) . d\phi \quad (2.40)$$

Afin de prouver la stabilité asymptotique globale, il convient donc maintenant de prouver que la FLIC (2.22) est radialement non bornée (condition (1.14) de la définition 1.1). Puisque $P(x(t))$ est une matrice polytopique convexe, en notant $\bar{P} = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} P_i$, on peut écrire :

$$0 < \bar{P}^{-1} \leq P^{-1}(x(t)) \quad (2.41)$$

D'où, après intégration :

$$2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, x(t))} \phi^T \bar{P}^{-1} . d\phi \leq V_p(x(t)) \quad (2.42)$$

Notons que l'intégrale de la partie gauche de l'inégalité (2.42) vérifie les conditions d'indépendance du chemin parcouru. L'inégalité 2.42 devient donc :

$$x^T(t) \bar{P}^{-1} x(t) \leq V_p(x(t)) \quad (2.43)$$

Par conséquent, si $\|x\| \rightarrow \infty$, alors $V(x) \rightarrow \infty$, qui est donc radialement non-bornée. Le modèle primal (2.3) est donc globalement asymptotiquement stable. \square

Remarque 2.2. La fonction intégrale curviligne (2.18) n'est pas indépendante du chemin [Guelton et al., 2010a]. Ainsi, l'obtention de conditions de stabilité à partir de la méthode directe de Lyapunov a constitué un défi jusqu'à ce jour et des cas particuliers pour les modèles T-S d'ordre inférieur ou égal à 2 ont été proposés [Guelton et al., 2014, 2010a; Marquez et al., 2013] (voir chapitre 1 pour plus de détails). Grâce à la démonstration de la propriété de dualité proposée ci-dessus, une telle restriction d'ordre n'est plus requise.

Remarque 2.3. La preuve du théorème 2.1 a été conduite en proposant tout d'abord des conditions de stabilité pour le modèle T-S dual (2.5) via une FLIC indépendante du chemin parcouru, puis en montrant que ces conditions garantissent la stabilité du modèle primal (2.3).

Bien entendu, la même conclusion aurait été obtenue si l'inverse avait été réalisé, c'est-à-dire si les conditions de stabilité pour le primal avait été considérées en premier lieu. De ce fait, nous pouvons affirmer que les modèles primal et dual sont globalement asymptotiquement stables s'il existe une FLIC indépendante du chemin parcouru pour l'un ou l'autre de ces modèles T-S. De plus, notons que pour éviter de surcharger inutilement les notations, une structure floue en simple somme a été considérée pour le modèle T-S primal (2.3) et son dual (2.5). Néanmoins, pour les modèles T-S comportant une structure floue en sommes multiples, par exemple :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{A}_{ij} x(t),$$

le résultat aurait été identique en considérant en lieu et place de (2.20) et (2.23)

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(\mu(t)) h_j(\mu(t)) h_k(\mu(t)) (A_{ij} P_k + P_k A_{ij}^T) < 0 \quad (2.44)$$

avec $\mu(t) = \xi(t)$ ou $x(t)$ selon le cas. Ainsi, la propriété de dualité reste valide pour les modèles T-S comportant une structure floue en sommes multiples.

La propriété de dualité étant maintenant établie lorsqu'une FLIC est considérée, la prochaine section sera dévolue à la formulation des conditions LMIs de stabilité.

2.2.3 Conditions globales de stabilité relâchées pour les modèles T-S via une FLIC - approche duale

Dans cette sous-section, et sur la base de la propriété de dualité démontrée ci-dessus, nous proposons de nouvelles conditions LMIs pour l'analyse de la stabilité des modèles T-S (2.3). Dans ce contexte, un premier résultat élémentaire est résumé par le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Le modèle T-S (2.3) et son dual (2.5) sont globalement asymptotiquement stables s'il existe des matrices $P_j > 0$, définies pour $j \in \{1, \dots, r\}$ dans (2.17), telles que les conditions LMIs (1.50) et (1.51) soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = A_i P_j + P_j A_i^T \quad (2.45)$$

Démonstration. Triviale par l'application du lemme 1.9 sur l'une ou l'autre des conditions

de Lyapunov (2.20) et (2.23). □

Les résultats proposés au théorème 2.2 sont triviaux et, hormis l'application du lemme 1.9, ne tiennent pas compte de techniques de relaxation récentes. Ainsi, afin de réduire le conservatisme de ces conditions **LMIs**, nous proposons une extension par l'application du lemme de Finsler 1.10. Celle-ci est résumée par le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Le modèle T-S (2.3) et son dual (2.5) sont globalement asymptotiquement stables s'il existe des matrices $P_j > 0$, définies pour $j \in \{1, \dots, r\}$ dans (2.17), ainsi que les matrices U_z et V_z de dimensions appropriées, telles que les conditions **LMIs** (1.50) et (1.51) soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} U_j A_i^T + A_i U_j^T & (*) \\ P_i + W_j A_i^T - U_j^T & -W_j - W_j^T \end{bmatrix}$$

Démonstration. Considérons une **FLIC** $V(\xi(t))$, indépendante du chemin parcouru, décrite en (2.16) et (2.17) pour le modèle T-S dual (2.5). Par l'application du lemme A.1, la condition de stabilité de Lyapunov peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P(\xi(t)) \\ P(\xi(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.46)$$

Réécrivons maintenant le modèle T-S dual (2.5) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_\xi^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

Considérons maintenant deux matrices libres et de dimensions appropriées U_ξ et W_ξ . En appliquant le lemme de Finsler 1.10, l'inégalité (2.46) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} 0 & P_\xi \\ P_\xi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_\xi \\ W_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\xi^T & -I \end{bmatrix} + (*) < 0 \quad (2.48)$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{bmatrix} U_\xi A_\xi^T + A_\xi U_\xi^T & (*) \\ P_\xi + W_\xi A_\xi^T - U_\xi^T & -W_\xi - W_\xi^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.49)$$

En appliquant le lemme 1.9, on obtient les conditions **LMIs** exprimées dans le théorème 2.3. Enfin, si ces conditions sont satisfaites, alors (2.46) et (2.20) le sont également. Ainsi, le théorème 2.1 permet d'affirmer que les modèles T-S primal (2.3) et (2.5) sont tout deux globalement asymptotiquement stables. \square

Remarque 2.4. Notons que le théorème 2.3 est constitué des conditions duales de celles présentées dans le lemme 2.3 [Guelton et al., 2014] (qui généralisent également celles proposées dans [Mozelli et al., 2009a], cf. remarque 1.7). En outre, comme c'est le cas pour les inclusions différentielles [Goebel et al., 2006a,b], l'approche duale, et donc le théorème 2.3, est susceptible de fournir des résultats moins conservatifs. Ce point sera illustré au travers de l'exemple numérique ci-dessous.

Exemple 2.1 Afin de comparer les conditions duales proposées dans les théorèmes 2.2 et 2.3 avec les précédents résultats [Guelton et al., 2014; Mozelli et al., 2009a; Rhee and Won, 2006], considérons les modèles T-S primal (2.3) et dual (2.5) avec 4 règles ($r = 4$) définies par les matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

où a et b sont deux paramètres dédiés à l'évaluation du conservatisme des conditions **LMIs** considérées, et les fonctions d'appartenance suivantes :

$$h_1(x(t)) = \frac{(\cos(x_1(t)) + 1)(\cos(x_2(t)) + 1)}{4}, h_2(x(t)) = \frac{(\cos(x_1(t)) + 1)(1 - \cos(x_2(t)))}{4},$$

$$h_3(x(t)) = \frac{(1 - \cos(x_1(t)))(\cos(x_2(t)) + 1)}{4}, h_4(x(t)) = \frac{(1 - \cos(x_1(t)))(1 - \cos(x_2(t)))}{4}$$

La Figure 2.2 montre les différents domaines de faisabilité obtenus pour $(a, b) \in \{-12, 0\} \times \{0, 550\}$, au travers de la **LMI Toolbox** de MATLAB [Gahinet et al., 1995]. Comme nous pouvons le constater, les conditions **LMIs** proposées dans les théorèmes 2.2 et 2.3 permettent d'obtenir des domaines de faisabilité plus larges que les résultats antérieurs [Guelton et al., 2014; Mozelli et al., 2009a; Rhee and Won, 2006]. Ceci confirme donc l'intérêt de l'analyse duale de stabilité proposée pour la réduction de conservatisme des conditions **LMIs**.

A titre d'exemple, pour le point $(a, b) = (-5, 2)$, où seule une solution existe au travers du

théorème 2.3, les matrices de Lyapunov suivantes ont été obtenues :

$$P_i = \begin{bmatrix} d_1^i & 0,0305 \\ 0,0305 & d_2^i \end{bmatrix}$$

avec $d_1^1 = d_1^2 = 1,0887$, $d_1^3 = d_1^4 = 0,4452$, $d_2^1 = d_2^3 = 7,6135$ et $d_2^2 = d_2^4 = 30,3097$.

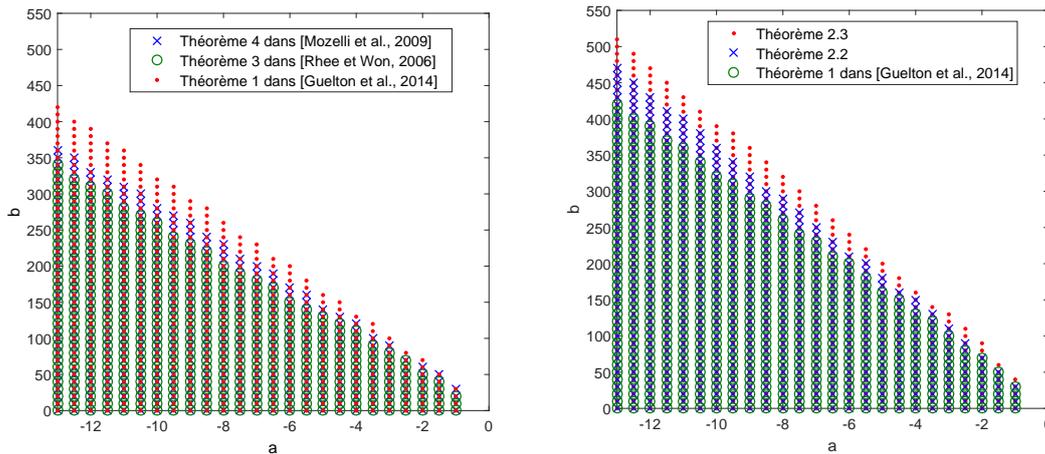


FIGURE 2.1 – Domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 2.2 et 2.3, du théorème 4 dans [Mozelli et al., 2009a], du théorème 3 dans [Rhee and Won, 2006] et du théorème 1 dans [Guelton et al., 2014].

Enfin, comme l'illustrent les plans de phase du modèle T-S considéré dans cet exemple et de son dual, tracés dans la Figure 2.2, l'existence d'une solution au théorème 2.3 permet de garantir que ces deux modèles sont globalement asymptotiquement stables.

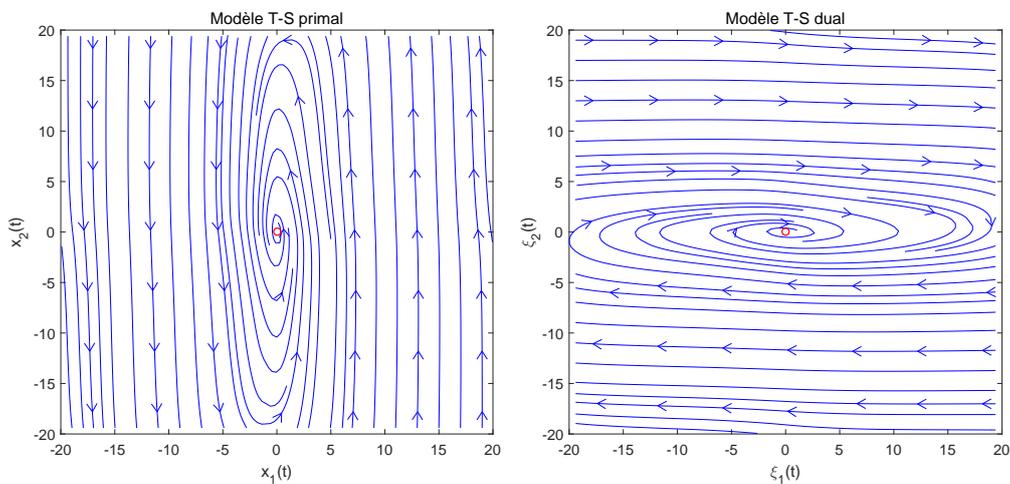


FIGURE 2.2 – Plans de phase des modèles T-S primal et dual.

2.3 Conditions LMI pour la stabilisation des modèles T-S via une FLIC

Tout d'abord, rappelons la classe des modèles T-S considérés dans la suite de ce chapitre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.50)$$

avec des fonctions d'appartenance consistantes pour l'emploi d'une **FLIC**, telles que définies en (2.4) [Rhee and Won, 2006].

Afin de stabiliser le modèle T-S (2.50), considérons, dans le cadre le plus général à ce jour, la loi de commande non-PDC donnée par [Jaadari et al., 2012] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) F_i \left(\sum_{k=1}^r h_k(x(t)) H_k \right)^{-1} x(t) \quad (2.51)$$

La dynamique en boucle fermée s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(x(t)) H_k \right)^{-1} \right) x(t) \\ &= (A_x + B_x F_x H_x^{-1}) x(t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Rappelons que, au premier abord, l'étude de la stabilité de la dynamique en boucle fermée (2.52) requiert l'utilisation de la **FLIC** $V^*(x(t))$ donnée par l'intégrale curviligne (2.18) qui n'est pas indépendante du chemin $\Gamma(\mathcal{O}, x(t))$. De ce fait, dans le cas général, il n'est pas possible d'appliquer de manière conventionnelle la méthode directe de Lyapunov pour l'obtention de conditions **LMIs**, sauf pour les cas particuliers des modèles T-S d'ordre inférieur ou égale à 2 [Guelton et al., 2014, 2010a; Marquez et al., 2013]. Néanmoins, puisque la propriété de dualité (théorème 2.1) est maintenant formellement démontrée, nous montrons ci-dessous qu'il est possible d'obtenir des conditions **LMIs** sans aucune restriction d'ordre en étudiant la stabilité du dual de (2.52) via une **FLIC** $V(\xi(t))$ (2.16), indépendante du chemin parcouru.

2.3.1 Conditions LMIs élémentaires de synthèse non-quadratique de lois de commande non-PDC

Le théorème suivant résume les conditions LMIs élémentaires de synthèse de lois de commande non-PDC proposées pour les modèles T-S sans restriction d'ordre via une FLIC.

Théorème 2.4. *Le modèle T-S (2.50) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande (2.51), s'il existe des matrices $P_j > 0$ (avec la structure définie dans (2.17)) et F_j , telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = A_i P_j + P_j A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T$$

Dans ce cas, les gains de la loi de commande non-PDC (2.51) sont donnés par les matrices F_j et $H_j = P_j$.

Démonstration. Soit la dynamique en boucle fermée (2.52), dont le dual est donné par :

$$\dot{\xi}(t) = \left(A_\xi + B_\xi F_\xi H_\xi^{-1} \right)^T \xi(t) \quad (2.53)$$

D'après le théorème 2.1, s'il existe une FLIC indépendante du chemin parcouru pour (2.53), alors (2.52) et (2.53) sont tous deux globalement asymptotiquement stables. Considérons donc une FLIC $V(\xi(t))$, indépendante du chemin parcouru, décrite en (2.16) et (2.17) pour (2.53). Avec $P_\xi > 0$ et par l'application du lemme A.1, la conditions de stabilité de Lyapunov peut être écrite sous la forme suivante :

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}^T P_\xi \xi + \xi^T P_\xi \dot{\xi} \quad (2.54)$$

ou encore, en considérant (2.53) :

$$\xi^T(t) \left(A_\xi P_\xi + P_\xi A_\xi^T + B_\xi F_\xi H_\xi^{-1} P_\xi + P_\xi H_\xi^{-T} F_\xi^T B_\xi^T \right) \xi(t) < 0 \quad (2.55)$$

qui est vérifiée, en posant $H_\xi = P_\xi$, si :

$$A_\xi P_\xi + P_\xi A_\xi^T + B_\xi F_\xi + F_\xi^T B_\xi^T < 0 \quad (2.56)$$

D'où, par l'application du lemme 1.9, on obtient les conditions **LMI**s du théorème (2.4). \square

Notons que ces conditions, bien qu'élémentaires et ne tenant pas compte des techniques de relaxation récentes, sont strictement **LMI**s et qu'aucune hypothèse sur l'ordre du système n'est requise. Elles constituent donc une avancée importante depuis les travaux originels de [Rhee and Won, 2006] au regard des différents résultats existants dans la littérature (e.g. [Guelton et al., 2014, 2010a; Marquez et al., 2013; Mozelli et al., 2009a]).

2.3.2 Conditions relâchées de synthèse non-quadratique de lois de commande non-PDC

Les conditions présentées dans le théorème (2.4) ne tenant pas compte des techniques de relaxation **LMI** récentes, nous proposons dans cette section deux extensions possibles. La première est basée sur l'application du lemme de Finsler [Skelton et al., 1998], similairement aux travaux présentés dans [Jaadari et al., 2012]. Néanmoins, nous verrons qu'il conduit à des conditions dépendantes d'un paramètre et donc non strictement **LMI**s. Une alternative sera alors proposée dans un second théorème afin de s'affranchir de ce paramètre, similairement aux travaux présentés dans [Márquez et al., 2015].

Théorème 2.5. : *Le modèle T-S (2.50) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande (2.51), s'il existe des matrices $P_j > 0$ définies dans (2.17), F_j et H_j de dimensions appropriées, telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_i H_j + H_j^T A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T & (*) \\ P_i - H_j + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j)^T & -\varepsilon(H_j + H_j^T) \end{bmatrix}$$

Démonstration. Considérons la démonstration du théorème 2.4 en réécrivant la condition de Lyapunov (2.56) telle que :

$$\dot{V}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P_\xi \\ P_\xi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.57)$$

Réécrivons la dynamique en boucle fermée (2.53) sous la forme :

$$\left[\begin{array}{c|c} \left(A_\xi + B_\xi F_\xi H_\xi^{-1} \right)^T & -I \\ \hline & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.58)$$

Soient U_ξ et V_ξ deux matrices libres, inversibles et de dimensions appropriées. L'application du lemme 1.10 (Finsler) avec (2.58) permet de garantir que l'inégalité (2.57) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} 0 & P_\xi \\ P_\xi & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_\xi \\ V_\xi \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \left(A_\xi + B_\xi F_\xi H_\xi^{-1} \right)^T & -I \\ \hline & \end{array} \right] + \begin{bmatrix} A_\xi + B_\xi F_\xi H_\xi^{-1} & \\ & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\xi^T & V_\xi^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.59)$$

c'est-à-dire, en posant $U_\xi = H_\xi^T$ et $V_\xi = \varepsilon H_\xi^T$, où ε est un scalaire positif :

$$\begin{bmatrix} A_\xi H_\xi + H_\xi^T A_\xi^T + B_\xi F_\xi + F_\xi^T B_\xi^T & (*) \\ P_\xi - H_\xi + \varepsilon (H_\xi^T A_\xi^T + F_\xi^T B_\xi^T) & -\varepsilon (H_\xi + H_\xi^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.60)$$

Finalement, en appliquant le lemme 1.9 on obtient les conditions exprimées au théorème 2.5. □

Remarque 2.5. Les conditions formulées au théorème 2.5 ont été présentées dans [Cherifi et al., 2014] sous réserve de l'existence d'une propriété de dualité qui n'était alors pas pleinement démontrée. La démonstration apportée pour le théorème (2.1) de ce chapitre complète donc ce résultat.

Remarque 2.6. En choisissant $\varepsilon = 1$ puis en effectuant une congruence par $\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}$ sur les conditions du théorème 2.5, et enfin en fixant $H_j = Q$ (une matrice de décision commune) et le changement de variable $F_j = QL_j$, on retrouve les conditions proposées dans [Liu et al., 2013] pour lesquelles la démonstration de la dualité n'était pas établie. Les conditions du théorème 2.5, associées au théorème 2.1, sont donc nécessairement moins conservatives.

Les conditions exprimées dans le théorème (2.5) ne sont pas purement **LMI**s puisqu'elles nécessitent la recherche d'un paramètre $\varepsilon > 0$ qui, comme pour les résultats proposés dans [Jaadari et al., 2012], peut être cherché dans une famille logarithmique (c.f. remarque 1.8 au chapitre 1). Afin de contourner ce problème, nous proposons les conditions **LMI**s présentées

dans le théorème suivant qui, par l'ajout de variables de décision supplémentaires, peuvent s'avérer dans certains cas moins conservatives.

Théorème 2.6. : *Le modèle T-S (2.50) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande (2.51) (avec $H_j = P_j$), s'il existe des matrices $P_j > 0$ définies dans (2.17), F_j , U_j et W_j de dimensions appropriées, telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_i U_j + U_j^T A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T & (*) \\ P_i - U_j + W_j^T A_i^T & -W_j - W_j^T \end{bmatrix}$$

Démonstration. Considérons la démonstration du théorème 2.4 jusqu'à l'inégalité (2.56). Soient des matrices arbitraires W_ξ et V_ξ , on peut définir les termes nuls :

$$A_\xi U_\xi + U_\xi^T A_\xi^T - A_\xi U_\xi - U_\xi^T A_\xi^T = 0 \quad (2.61)$$

et

$$A_\xi W_\xi A_\xi^T + A_\xi W_\xi^T A_\xi^T - A_\xi W_\xi A_\xi^T - A_\xi W_\xi^T A_\xi^T = 0 \quad (2.62)$$

Ainsi, par l'introduction de (2.61) et (2.62), l'inégalité (2.56) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{H}(A_\xi U_\xi + B_\xi F_\xi) + A_\xi (P_\xi - U_\xi + W_\xi^T A_\xi^T) + (P_\xi - U_\xi^T + A_\xi W_\xi) A_\xi^T - A_\xi (W_\xi + W_\xi^T) A_\xi^T < 0 \quad (2.63)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} I \\ A_\xi^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_\xi U_\xi + U_\xi^T A_\xi^T + B_\xi F_\xi + F_\xi^T B_\xi^T & (*) \\ P_\xi - U_\xi + W_\xi^T A_\xi^T & -W_\xi - W_\xi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A_\xi^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

L'inégalité (2.64) est alors vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} A_\xi U_\xi + U_\xi^T A_\xi^T + B_\xi F_\xi + F_\xi^T B_\xi^T & (*) \\ P_\xi - U_\xi + W_\xi^T A_\xi^T & -W_\xi - W_\xi^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.65)$$

Finalement, en appliquant le lemme 1.9, on obtient les conditions du théorème 2.6. \square

Remarque 2.7. *Notons par ailleurs que la preuve du théorème 2.6 aurait également pu être obtenue au travers des transformations LMI proposées dans [Peaucelle et al., 2000]. Néanmoins*

nous avons préféré la formulation présentée ci-dessus car il nous a semblé que l'introduction de termes nuls permettra au lecteur d'appréhender très simplement la preuve du théorème 2.6, sans artefact depuis la preuve du théorème 2.4.

Remarque 2.8. Il ne nous a pas été possible de prouver formellement qu'une inclusion respective des conditions proposées dans les théorèmes 2.5 et 2.6 existe. Néanmoins, ils incluent nécessairement les conditions présentées dans le théorème 2.4. Nous verrons par ailleurs, au travers de l'exemple numérique 2.2 ci-dessous, que les conditions du théorème 2.6 peuvent fournir, dans la pratique, les résultats les moins conservatifs (voir [Márquez et al., 2015] pour des conclusions similaires sur l'élimination du paramètre ε pour la stabilisation quadratique des descripteurs T-S).

2.3.3 Exemples numériques en stabilisation

Dans cette section, nous proposons deux exemples de synthèse de contrôleurs non-PDC (2.51) pour des modèles T-S sur la base des théorèmes présentés précédemment. Le premier exemple consiste en un modèle T-S d'ordre 2, dédié à la comparaison du conservatisme des théorèmes présentés ci-dessus avec des résultats existants dans la littérature [Guelton et al., 2014; Marquez et al., 2013; Mozelli et al., 2009a]. Le second exemple permettra de montrer la validité des résultats proposés sur un modèle T-S d'ordre supérieur à 2.

Exemple 2.2 Afin de comparer les résultats présentés dans les théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6 avec les résultats de la littérature, notamment les résultats de [Marquez et al., 2013] et [Guelton et al., 2014] qui sont limités aux modèles d'ordre 2, considérons un modèle T-S à 4 règles donné par les matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -a & -4,33 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0,89 & -5,29 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -b+6 \\ -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et les fonctions d'appartenance :

$$h_1(x(t)) = \frac{(\cos(\omega x_1(t)) + 1)(\cos(\omega x_2(t)) + 1)}{4}, h_2(x(t)) = \frac{(\cos(\omega x_1(t)) + 1)(1 - \cos(\omega x_2(t)))}{4},$$

$$h_3(x(t)) = \frac{(1 - \cos(\omega x_1(t)))(\cos(\omega x_2(t)) + 1)}{4}, h_4(x(t)) = \frac{(1 - \cos(\omega x_1(t)))(1 - \cos(\omega x_2(t)))}{4}$$

avec $\omega = 0, 1$.

Notons que, selon les variables de prémisses contenues dans les fonctions d'appartenance et, conformément à (2.17), les matrices composant la **FLIC** doivent avoir la structure suivante :

$$P_i = \begin{bmatrix} d_{11}^i & p_{12} \\ p_{11} & d_{22}^i \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

La Figure 2.3(a) montre que les domaines de faisabilité obtenus à partir du théorème 2.5 et du théorème 2 dans [Guelton et al., 2014] (qui sont strictement équivalents pour un système d'ordre 2), recouvrent celui obtenu à partir du théorème 2 dans [Marquez et al., 2013]. De plus, la Figure 2.3(b) montre que le théorème 2.6 produit les résultats les moins conservatifs, puisque son domaine de faisabilité recouvre l'ensemble des résultats testés. Enfin, notons que pour cet exemple, aucune solution n'existe pour les conditions proposées dans [Mozelli et al., 2009a].

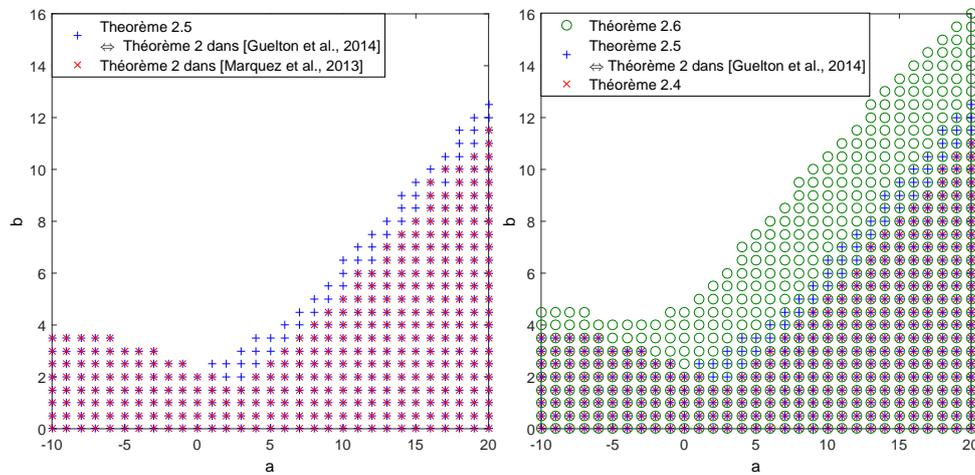


FIGURE 2.3 – Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6, du théorème 2 dans [Marquez et al., 2013] et du théorème 2 dans [Guelton et al., 2014]

Intéressons-nous désormais au point particulier $(a, b) = (20, 16)$, où seule une solution a été obtenue à partir du théorème 2.6. Dans ce cas, les gains de la loi de commande non-PDC (2.51) sont donnés par :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -27,7446 & 1,3713 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -15,2847 & 0,0455 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -51,8363 & 1,1936 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} -21,3405 & 0,9508 \end{bmatrix},$$

et

$$P_i = \begin{bmatrix} d_1^i & -0,3423 \\ -0,3423 & d_2^i \end{bmatrix}$$

avec $d_1^1 = d_1^2 = 7,2857$, $d_2^1 = d_2^3 = 0,1649$, $d_2^2 = d_2^4 = 0,4111$, $d_1^3 = d_1^4 = 10,5328$.

La Figure 2.4 montre le portrait de phase en boucle fermée du modèle T-S considéré dans cet exemple, stabilisé par la loi de commande non-PDC synthétisée à l'aide du théorème 2.6. Comme on peut le constater, la boucle fermée est désormais globalement asymptotiquement stable.

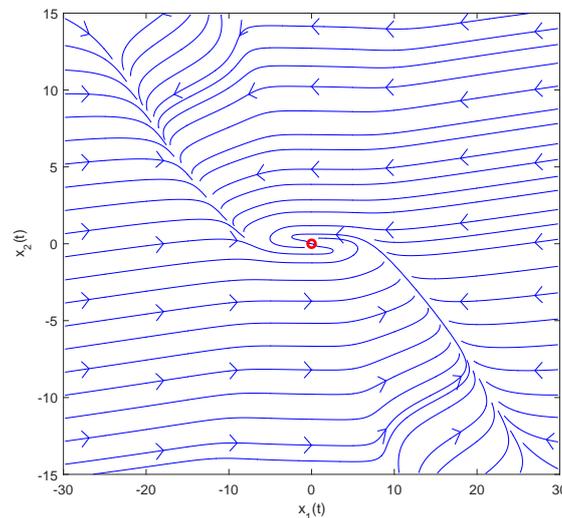


FIGURE 2.4 – Portrait de phase en boucle fermée

Exemple 2.3 Pour illustrer tout l'intérêt et l'efficacité des conditions LMI proposées pour la stabilisation d'un système d'ordre supérieur à 2, considérons l'exemple de la stabilisation d'une balle sur une poutre (ball and beam) décrit par la Figure 2.5 [Hauser et al., 1992].

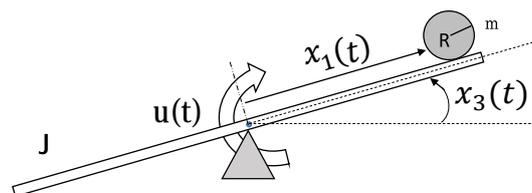


FIGURE 2.5 – Le système de la balle sur une poutre (ball and beam).

Le modèle dynamique de ce système est donné par la représentation d'état non-linéaire

suivante [Hauser et al., 1992] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ bx_4^2(t) & 0 & bg \frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.67)$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont respectivement la position et la vitesse de la balle, $x_3(t)$ et $x_4(t)$ sont respectivement la position angulaire et la vitesse angulaire de la poutre. $u(t)$ est le couple d'entrée et $b = \frac{1}{1 + \frac{J_B}{mR^2}}$ est un paramètre constant du système avec $m = 0,282 \text{ kg}$, $R = 9,5 \text{ mm}$ et $J_B = 1,0469 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, qui sont respectivement la masse, le rayon et le moment d'inertie de la balle. $g = 9,81 \text{ m/s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

On suppose que la position et la vitesse angulaire sont bornées telles que $x_3 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x_4 \in [-1, 1]$. Dans ce cas, $\text{sinc}(x_3(t)) = \frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)} \in [\alpha, 1]$ avec $\alpha = 2/\pi$, $x_4(t) \in [0, 1]$, en appliquant une décomposition en secteurs non-linéaires, le modèle T-S d'ordre 4 suivant représente le modèle non-linéaire (2.67).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) (A_i x(t)) + Bu(t) \quad (2.68)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bg\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & -bg\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & -bg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et les fonctions d'appartenance :

$$h_1(x(t)) = \frac{(1 - \text{sinc}(x_3(t))) (1 - x_4^2(t))}{1 - \alpha}, h_2(x(t)) = \frac{(1 - \text{sinc}(x_3(t))) (x_4^2(t))}{1 - \alpha},$$

$$h_3(x(t)) = \frac{(\text{sinc}(x_3(t) - \alpha)) (1 - x_4^2(t))}{1 - \alpha}, \quad h_4(x(t)) = \frac{(\text{sinc}(x_3(t) - \alpha)) (x_4^2(t))}{1 - \alpha}.$$

Ainsi, la résolution des conditions **LMI**s proposées dans le théorème 2.6 nous permet de synthétiser la loi de commande non-**PDC** (2.51) donnée par les matrices de gains :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -24,7197 & -38,9555 & -131,4302 & -5,0573 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -24,7197 & -30,7608 & -131,4302 & -5,0573 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -24,7197 & -61,1930 & -61,2467 & -5,0573 \end{bmatrix},$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} -24,7197 & -52,9983 & -61,2467 & -5,0573 \end{bmatrix},$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 31,7381 & -9,9864 & 6,8713 & -8,5318 \\ -9,9864 & 51,8155 & 8,1135 & 24,7197 \\ 6,8713 & 8,1135 & d_3^i & -6,5010 \\ -8,5318 & 24,7197 & -6,5010 & d_4^i \end{bmatrix}$$

avec $d_3^1 = d_3^3 = 5,5398$, $d_3^2 = d_3^4 = 6,9822$, $d_4^1 = d_4^2 = 131,4302$ et $d_4^3 = d_4^4 = 61,2467$.

La Figure 2.6 montre les trajectoires en boucle fermée et le signal de commande, pour la condition initiale $x(0) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, du modèle non-linéaire du "ball and beam" (2.5) stabilisé par la loi de commande non-**PDC** synthétisée.

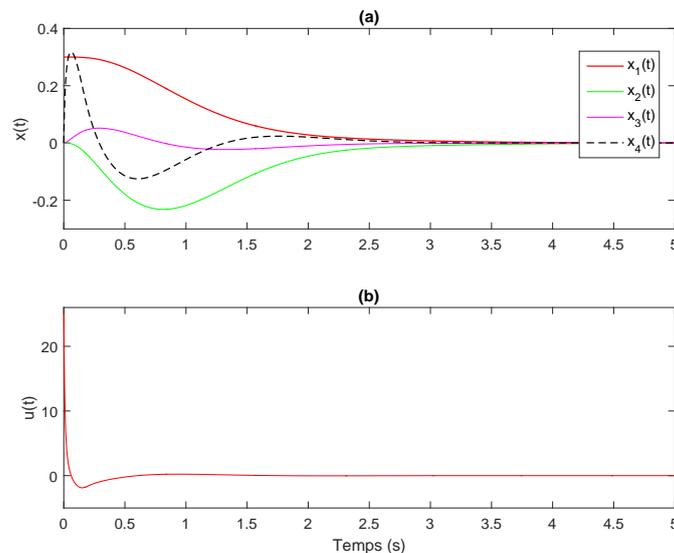


FIGURE 2.6 – Simulation en boucle fermée : (a) Trajectoires du système, (b) Signal de commande.

Cet exemple illustre donc l'intérêt de l'approche duale développée dans ce chapitre pour la stabilisation non-quadratique des modèles T-S d'ordre supérieur à 2, via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne.

2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'analyse de la stabilité et à la stabilisation non-quadratique globale des modèles T-S par l'utilisation de fonctions de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes.

Dans un premier temps, nous avons démontré que lorsqu'une telle fonction de Lyapunov est considérée, alors la stabilité mutuelle d'un modèle T-S et de son dual pouvait être garantie globalement dans ce contexte non-quadratique. Fort de cette propriété, de nouvelles conditions **LMI**s pour l'analyse duale de la stabilité ont pu être obtenues. De plus, au travers d'un exemple académique, il a été montré que l'approche duale pouvait conduire à des résultats moins conservatifs que l'approche conventionnelle.

Ensuite, de nouvelles conditions **LMI**s ont été proposées pour la synthèse de lois de commande non-PDC. Celles-ci, également obtenues grâce à la propriété de dualité, ont permis de lever une restriction importante des travaux antérieurs, notamment la limitation de ces approches aux systèmes T-S d'ordre inférieur ou égal à 2. Ces résultats ouvrent donc de nouveaux horizons dans le cadre de l'analyse et de la synthèse pour les modèles T-S au travers de fonctions de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes.

Notons que des travaux ont récemment été publiés visant à l'amélioration des performances en boucle fermée des modèles T-S par le biais de ces mêmes fonctions de Lyapunov [Bai et al., 2015; Lu et al., 2015]. Ceux-ci sont basés sur les concepts de la \mathcal{D} -stabilité qui seront repris dans les chapitres suivants de ce manuscrit. Néanmoins, il convient de souligner que les travaux publiés dans [Bai et al., 2015; Lu et al., 2015] sont entachés d'erreurs, dont les détails sont donnés en annexe B. On y montre notamment que les conditions usuelles de \mathcal{D} -stabilité, associées à l'utilisation d'une **FLIC**, ne permettent pas d'aboutir à des conditions convexes, ruinant les tentatives de mise sous forme **LMI**. Ainsi, dans les chapitres suivants, nous développerons le concept de \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S, dans le contexte quadratique, puis non-quadratique conventionnel via une **FLNQ**.

Chapitre 3

\mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S

Sommaire

3.1 Introduction	71
3.2 \mathcal{D}-stabilisation quadratique des modèles T-S	71
3.2.1 Synthèse de contrôleurs quadratiques \mathcal{D} -stabilisant	72
3.2.2 Exemples numériques dans le cadre quadratique	76
3.3 \mathcal{D}-stabilisation non-quadratique des modèles T-S	85
3.4 Conclusion	92

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis d'obtenir de nouvelles conditions de stabilité et de synthèse de contrôleurs dans le contexte non-quadratique. Néanmoins, aucune technique de spécification des performances en boucle fermée n'a été prise en compte. Afin de pallier ce problème, nous nous intéresserons ici à la synthèse de contrôleurs \mathcal{D} -stabilisants pour les modèles T-S. L'objectif est de proposer des conditions **LMI**s permettant de spécifier la dynamique en boucle fermée avec des contraintes de performance via le concept de \mathcal{D} -stabilité présenté dans le premier chapitre.

Rappelons que, comme cela est détaillé dans l'annexe B, l'application des conditions génériques de \mathcal{D} -stabilité (donnée par le lemme 1.17), associée à une **FLIC** (telle que considérée au chapitre 2), ne permet pas d'aboutir à des conditions **LMI**s. Ainsi, nous nous intéresserons dans la suite à la synthèse de lois de commande dans le contexte quadratique, puis non-quadratique par le biais de **FLNQ** conventionnelles.

Ce chapitre est organisé en deux parties principales. Dans la première partie, nous considérerons des fonctions des Lyapunov quadratiques et trois théorèmes seront proposés, visant à l'obtention de conditions **LMI**s relâchées pour la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes. Ensuite, dans la deuxième partie, des conditions non-quadratiques seront proposées au travers d'une **FLNQ** conventionnelle. Néanmoins, celles-ci conduisent à l'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance dans les conditions de Lyapunov. De ce fait, une méthode inspirée des travaux de [Lee et al., 2011, 2012] sera mise en oeuvre pour l'estimation du domaine d'attraction.

L'ensemble de ces résultats sera illustré par des exemples académiques afin de montrer l'efficacité des approches de synthèse \mathcal{D} -stable proposées.

3.2 \mathcal{D} -stabilisation quadratique des modèles T-S

L'objectif de cette section est de proposer des conditions **LMI**s relâchées pour la \mathcal{D} -stabilisation d'une classe de modèle T-S (1.6). Dans un premier temps, nous présentons une légère extension des conditions présentées dans [Assawinchaichote, 2014], suivi d'un théorème qui présente une nette réduction du conservatisme grâce à la synthèse d'un contrôleur non-**PDC** \mathcal{D} -stabilisant (1.43). Néanmoins, ces nouvelles conditions ne sont pas strictement **LMI**s

puisqu'elles font apparaître un paramètre ε qui est à préfixer ou à rechercher à l'aide d'une programmation linéaire. De plus, les contrôleurs non-PDC exigent une inversion en temps réel de matrices variantes dans le temps (H_z^{-1}), ce qui peut rendre leur implémentation difficile pour certaines applications embarquées ayant une faible capacité de calcul. Pour éviter ces inconvénients, une alternative, conduisant à des conditions relâchées et strictement LMIs, sera proposée pour la synthèse de contrôleurs PDC.

3.2.1 Synthèse de contrôleurs quadratiques \mathcal{D} -stabilisant

Considérons tout d'abord une extension des conditions de \mathcal{D} -stabilisation présentées dans [Assawinchaichote, 2014], en adoptant le schéma de relaxation exposé dans le lemme 1.9 :

Théorème 3.1. [Cherifi et al., 2015b] : Soient L et M deux matrices définissant une région LMI (voir définition 1.2). Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43) (avec $H_z = P$), s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et F_j telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i P + B_i F_j))$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P^{-1} x(t). \quad (3.1)$$

Selon la définition 1.3, la boucle fermée (1.44) est \mathcal{D} -stable si :

$$L \otimes x^T P^{-1} x + \mathcal{H}(M \otimes (x^T P^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) x)) < 0 \quad (3.2)$$

Grâce aux propriétés sur le produit de Kronecker (1.77), on peut réécrire (3.2) sous la forme :

$$(I \otimes x)^T (L \otimes P^{-1} + \mathcal{H}(M \otimes (P^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1})))) (I \otimes x) < 0 \quad (3.3)$$

qui est vérifiée $\forall x$ si :

$$L \otimes P^{-1} + \mathcal{H}(M \otimes (P^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}))) < 0 \quad (3.4)$$

En multipliant à gauche et à droite par $(I \otimes P)$, l'inégalité (3.4) est équivalente à :

$$L \otimes P + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P \right) \right) < 0 \quad (3.5)$$

En posant $H_z = P$ et en appliquant le schéma de relaxation présenté dans le lemme 1.9, nous retrouvons les conditions exprimées dans le théorème 3.1. \square

Pour obtenir les conditions **LMIs** (3.3), le choix des matrices $H_j = P$ a dû être effectué. Ceci reste toutefois conservatif puisque cela réduit les degrés de liberté de ce problème d'optimisation. Afin de contourner ce problème et réduire le conservatisme, nous proposons ci-dessous de nouvelles conditions relâchées pour la synthèse de contrôleurs non-**PDC** (1.43).

Théorème 3.2. [*Cherifi et al., 2015b*] : Soient L et M deux matrices définissant une région **LMI** (voir définition 1.2). Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-**PDC** (1.43) (où $H_i \neq P$ et H_i n'est pas nécessairement symétrique), s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, H_j, F_j et un scalaire ε tels que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i H_j + B_i F_j)) & (*) \\ M \otimes P - M \otimes H_j + \varepsilon I \otimes (H_j^T A_i^T + F_j^T B_i^T) & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_j) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. En suivant les mêmes étapes que pour la démonstration du théorème précédent jusqu'à l'inégalité (3.5), la boucle fermée (1.44) est \mathcal{D} -stable si :

$$L \otimes P + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P \right) \right) < 0 \quad (3.6)$$

Introduisons à présent les termes nuls :

$$\mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) \right) - \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{H} \left(\varepsilon I \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \right)^T \right) \\ & - \mathcal{H} \left(\varepsilon I \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \right)^T \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

où ε est un scalaire arbitraire.

En additionnant (3.6) avec (3.7) et (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned} & L \otimes P + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) \right) + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P \right) \right) \\ & - M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) + \varepsilon I \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z^T (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T \right) \\ & - \varepsilon I \otimes \mathcal{H} \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

soit de manière équivalente :

$$\begin{aligned} & L \otimes P + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) \right) \\ & + \mathcal{H} \left(\left(I \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \right) \left(M \otimes (P - H_z) + \varepsilon I \otimes \left(H_z^T (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T \right) \right) \right) \\ & + \left(I \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \right) \left(-\varepsilon I \otimes \mathcal{H} (H_z) \right) \left(I \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'inégalité (3.10) peut également se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} I \\ I \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \end{bmatrix}^T \Gamma_{zz} \begin{bmatrix} I \\ I \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

$$\text{avec } \Gamma_{zz} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) H_z \right) \right) & (*) \\ M \otimes (P - H_z) + \varepsilon I \otimes \left(H_z^T (A_z + B_z F_z H_z^{-1})^T \right) & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H} (H_z) \end{bmatrix}.$$

L'inégalité (3.11) est alors vérifiée si :

$$\Gamma_{zz} < 0 \quad (3.12)$$

En appliquant le schéma de relaxation présenté dans le lemme 1.9, on retrouve les conditions du théorème 3.2. \square

Remarque 3.1. Les conditions exprimées dans le théorème 3.2 ont une forme analogue aux précédents résultats de stabilisation, sans contrainte de \mathcal{D} -stabilité, basés sur le lemme de Finsler (voir par exemple [Jaadari et al., 2012; Oliveira et al., 2011] ou [Guelton et al., 2014]). Néanmoins, en raison de la présence du produit de Kronecker dans les conditions de \mathcal{D} -stabilité, il n'est pas possible d'obtenir des conditions LMI par l'application directe du lemme de Finsler, ce qui a motivé ce travail aboutissant au résultat résumé dans le théorème 3.2. Celui-ci constitue donc une extension des résultats standards, basée sur la relaxation de Finsler, au cas de la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S.

Le théorème 3.2 est dédié à la synthèse d'un contrôleur non-PDC \mathcal{D} -stabilisant (1.43). Néanmoins, comme mentionné en préambule de cette section, l'implémentation de ce type de contrôleur exige une inversion en temps réel d'une matrice variable dans le temps (H_z^{-1}), ce qui peut être un obstacle lors de son implémentation sur des applications embarquées ayant une puissance de calcul réduite. Pour contourner cette éventuelle limitation, une alternative basée sur des conditions strictement **LMI**s pour la synthèse de contrôleurs **PDC** (1.41) est présentée dans le théorème suivant :

Théorème 3.3. : Soient L et M deux matrices définissant une région **LMI** (voir définition 1.2). Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande **PDC** (1.43) (avec $H_j = P$ commune), s'il existe les matrices $P = P^T > 0$, F_j , W_j et V_j telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}((I \otimes A_i) W_j + M \otimes B_i F_j) & (*) \\ M \otimes P - W_j + V_j^T (I \otimes A_i^T) & -\mathcal{H}(V_j) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. En se basant sur la démonstration du théorème 3.1 jusqu'à l'inégalité (3.5), la boucle fermée (1.44) est \mathcal{D} -stable si :

$$L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes A_z P) + \mathcal{H}(M \otimes B_z F_z H_z^{-1} P) < 0 \quad (3.13)$$

En introduisant des matrices arbitraires W_z et V_z , on peut écrire les termes nuls suivants :

$$\mathcal{H}(M \otimes A_z W_z) - \mathcal{H}(M \otimes A_z W_z) = 0 \quad (3.14)$$

et

$$\mathcal{H}((I \otimes A_z) V_z (I \otimes A_z^T)) - \mathcal{H}((I \otimes A_z) V_z (I \otimes A_z^T)) = 0 \quad (3.15)$$

En posant $H_j = P$ et en additionnant (3.13) avec (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} & L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z W_z + B_z F_z)) \\ & + \mathcal{H}(M \otimes (A_z P - A_z W_z)) + (I \otimes A_z) V_z (I \otimes A_z^T) \\ & - I \otimes \mathcal{H}((I \otimes A_z) V_z (I \otimes A_z^T)) < 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

soit de manière équivalente :

$$\begin{aligned}
 & L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z W_z + B_z F_z)) \\
 & + \mathcal{H}((I \otimes A_z)(M \otimes (P - W_z)) + V_z^T (I \otimes A_z^T)) \\
 & + (I \otimes A_z)(-I \otimes \mathcal{H}(V_z))(I \otimes A_z^T) < 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

L'inégalité (3.17) peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I \\ I \otimes A_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z W_z + B_z F_z)) & (*) \\ M \otimes (P - W_z) + V_z^T (I \otimes A_z^T) & -I \otimes \mathcal{H}(V_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \otimes A_z \end{bmatrix} < 0 \tag{3.18}$$

qui est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z W_z + B_z F_z)) & (*) \\ M \otimes (P - W_z) + V_z^T (I \otimes A_z^T) & -I \otimes \mathcal{H}(V_z) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.19}$$

En appliquant le schéma de relaxation présenté dans le lemme 1.9, on retrouve les conditions exprimées au théorème 3.3. \square

Remarque 3.2. *Il est facile de prouver que les théorèmes 3.2 et 3.3 sont moins conservatifs par rapport aux conditions basiques énoncées dans le théorème 3.1. En effet, à partir des conditions exprimées dans le théorème 3.2, en posant $H_j = P$ et en appliquant un complément de Schur, les conditions exprimées dans le théorème 3.1 apparaissent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. De manière similaire, à partir des conditions exprimées dans le théorème 3.3, avec $W_j = P$ et $V_j = \varepsilon I$, et en appliquant un complément de Schur, les conditions énoncées dans le théorème 3.1 apparaissent. Cependant, et en raison de la présence des termes $F_j^T B_i^T$ dans les blocs (2,1) des LMIs du théorème 3.2, et de leur absence dans les blocs (2,1) des LMIs du théorème 3.3 on ne peut pas prouver l'inclusion respective de l'un ou l'autre de ces théorèmes.*

3.2.2 Exemples numériques dans le cadre quadratique

Pour illustrer les résultats présentés dans cette section, deux exemples numériques sont proposés. Le premier est un exemple académique consacré à la comparaison des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 avec les résultats proposés dans [Assawinchaichote, 2014]. Le deuxième exemple est dédié à l'application des résultats proposés sur une plate-forme de type bras de robot

flexible [Seidi et al., 2012; Spong et al., 1987] pour montrer la flexibilité de la synthèse de contrôleurs \mathcal{D} -stabilisant en choisissant plusieurs régions **LMI**.

Exemple 3.1 : Afin d'illustrer la réduction de conservatisme des conditions présentés dans cette section par rapport aux résultats élémentaires de \mathcal{D} -stabilisation [Assawinchaichote, 2014; Cherifi et al., 2015b], considérons le modèle T-S avec deux règles floues donné par [Rhee and Won, 2006] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.20)$$

avec $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}$ et $h_1(z(t))$ et $h_2(z(t))$ des fonctions d'appartenance convexes. Dans (3.20), les paramètres a et b sont dédiés à la comparaison des domaines de faisabilité des conditions **LMIs**.

Les domaines de faisabilité, obtenus à partir des théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 et du théorème 2 dans [Assawinchaichote, 2014], sont tracés sur la Figure 3.1. Ils ont été obtenus avec la région **LMI** représentée dans la figure 1.1 et paramétrée par $s = 21$, $q = -17$, $\beta = 1$, $\theta = 3\pi/10$ et $\gamma = 9$. De plus, pour chaque point testé avec le théorème 3.2, le paramètre ε a été cherché à l'aide d'une programmation linéaire dans une famille logarithmique $\{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^6\}$ (voir remarque 1.8). Comme on peut le remarquer, le domaine de faisabilité obtenu à partir du théorème 3.2 est plus grand que celui obtenu à partir du théorème 3.3 qui est à son tour plus large que ceux obtenus par le théorème 3.1 et le théorème 2 dans [Assawinchaichote, 2014]. Ceci confirme bien la réduction du conservatisme obtenue grâce aux résultats proposés dans cette section.

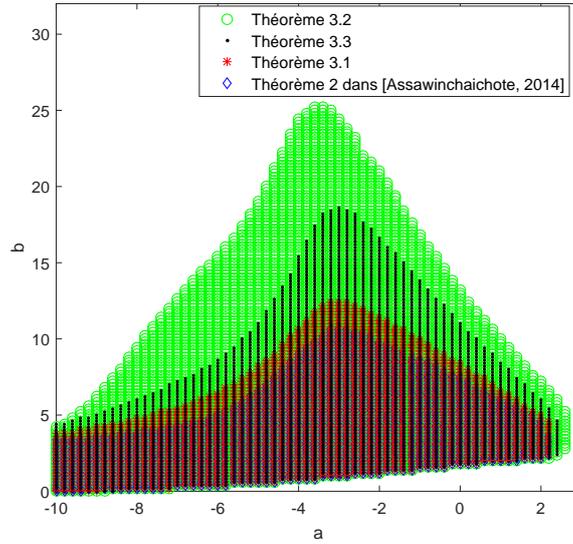


FIGURE 3.1 – Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 et du théorème 2 dans [Assawinchaichote, 2014].

Exemple 3.2 : Considérons à présent l'exemple d'un bras de robot flexible représenté par la Figure 3.2 et dont le modèle non linéaire est donné par [Seidi et al., 2012; Spong et al., 1987] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{J_1} (k(x_2(t) - x_1(t)) - mgLf(x_1(t))x_1(t)) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{J_2} (u - k(x_2(t) - x_1(t))) \end{cases} \quad (3.21)$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont respectivement les positions angulaires du bras et de l'actionneur, $J_1 = J_2 = 1 \text{ kg.m}^2$ sont respectivement les inerties de l'actionneur et du bras, $m = 1 \text{ kg}$ est la masse du bras, $L = 1 \text{ m}$ est la longueur du bras, $k = 100 \text{ N.m.rad}^{-1}$ est la raideur du ressort et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. De plus, $\forall x_1(t) \in \mathbb{R}$, $f(x_1(t)) = \text{sinc}(x_1(t)) \in [\rho; 1]$ avec $\rho = \min(\text{sinc}(x_1(t))) \approx -0,2172$.

En appliquant la décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka and Wang, 2001], on peut écrire :

$$f(x_1(t)) = \underbrace{\frac{f(x_1(t)) - \rho}{1 - \rho}}_{h_1(x_1(t))} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - f(x_1(t))}{1 - \rho}}_{h_2(x_1(t))} \times \rho \quad (3.22)$$

avec, $\forall x_1(t)$, $h_1(x_1(t)) \geq 0$, $h_2(x_1(t)) \geq 0$ et $h_1(x_1(t)) + h_2(x_1(t)) = 1$.

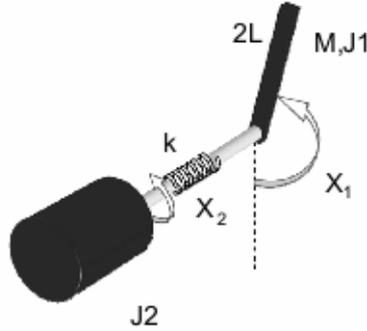


FIGURE 3.2 – Bras de robot flexible [Seidi et al., 2012].

Ainsi, un modèle T-S exact de (3.21) est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) A_i x(t) + B u(t) \quad (3.23)$$

où $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}^T$ et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k - mgL}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{-k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k - mgL\rho}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{-k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}.$$

Dans la suite, nous considérons trois cas différents pour montrer l'intérêt de placer les valeurs propres du système en boucle fermée dans des régions LMI prédéterminées. Pour chaque cas, un contrôleur non-PDC (1.43) a été synthétisé à partir des conditions LMIs du théorème 3.3 en utilisant la LMI Toolbox de MATLAB [Gahinet et al., 1995]. Dans le **Cas 1**, on considère le demi-plan gauche avec différentes valeurs du taux de décroissance β . Puis, dans le **Cas 2**, on considère le demi-plan gauche et un secteur conique, c'est à dire, avec un taux de décroissance β et les paramètres θ et γ du secteur conique. Finalement, dans le **Cas 3**, on considère le demi-plan gauche, un cercle et un secteur conique, c'est à dire, avec un taux de décroissance β , un cercle de paramètres s et q , un secteur conique de paramètres θ et γ .

- **Cas 1** : Région LMI définie par le demi-plan gauche avec différents taux de décroissance β .

Dans ce cas, l'objectif est de montrer l'influence du taux de décroissance sur la réponse ainsi que sur la migration des valeurs propres de la boucle fermée, avec les conditions initiales $x(0) = [\pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ 0]^T$. La Figure 3.3 montre l'évolution de l'état du système en boucle fermée pour différentes valeurs de $\beta = \{0, 3, 20\}$.

Il est évident que, quand β augmente, le système se stabilise plus rapidement et, comme le montre la Figure 3.3, il est possible d'obtenir une dynamique plus rapide en boucle fermée (par exemple avec $\beta = 20$). Néanmoins l'augmentation de la valeur β force la migration des valeurs propres du système en boucle fermée d'autant plus loin à gauche du plan complexe (voir Figure 3.4). Ceci conduit à une partie réelle négative des valeurs propres importante mais également une partie imaginaire élevée, pouvant se traduire par des oscillations soutenues lors de la phase transitoire.

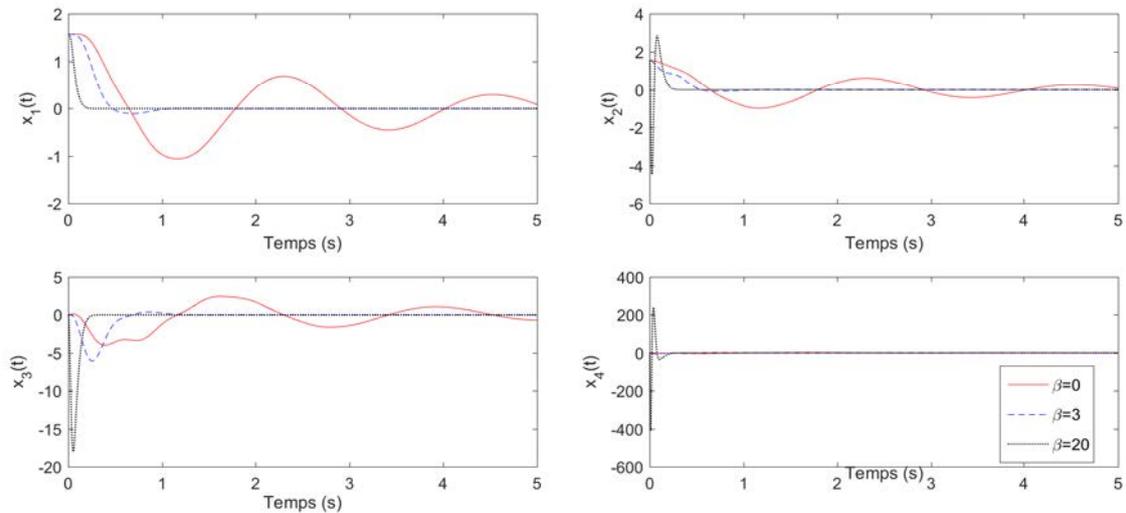


FIGURE 3.3 – Evolution de l'état en boucle fermée pour différents taux de décroissance $\beta = \{0, 3, 20\}$ (Cas 1).

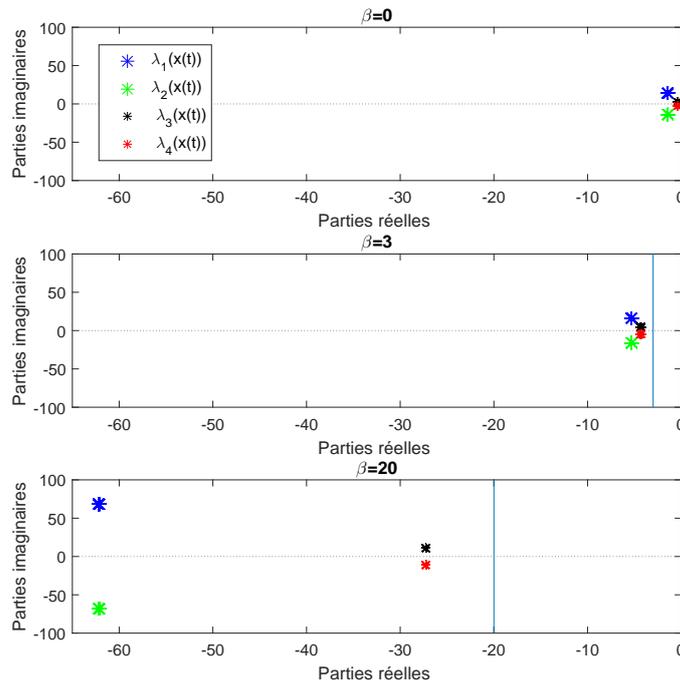


FIGURE 3.4 – Migration des valeurs propres de la boucle fermée pour différents taux de décroissance $\beta = \{0, 3, 20\}$ (Cas 1).

- **Cas 2 :** Région LMI définie par le demi-plan gauche avec un taux de décroissance $\beta = 20$ et un secteur conique avec différents facteurs d'amortissement.

En se basant sur la dynamique rapide obtenue avec $\beta = 20$ dans le **Cas 1**, l'objectif est maintenant de restreindre les parties imaginaires, c'est à dire, forcer les valeurs propres de la boucle fermée à se rapprocher de l'axe réel. Ceci peut être réalisé en ajoutant un secteur conique (voir Figure 1.1). La Figure 3.5 montre une comparaison des réponses de la boucle fermée obtenues pour $\beta = 20$ sans secteur conique, et $\beta = 20$ avec un secteur conique paramétré par $\gamma = 0$ et $\theta = \pi/6$ puis $\theta = 9\pi/20$. Notons que le paramètre θ peut être considéré comme un facteur d'amortissement global de la dynamique de la boucle fermée. Ceci est illustré sur la Figure 3.5, où l'on peut observer que l'augmentation de θ conduit à réduire les dépassements de la réponse du système en boucle fermée.

La Figure 3.6 montre la migration des valeurs propres de la boucle fermée pour les régions LMI considérées (sans puis avec secteur conique). Comme on peut le remarquer, augmenter θ conduit à avoir des valeurs propres possédant une partie réelle négative élevée. Une telle dynamique rapide exige une grande énergie qui peut dépasser la capacité physique du

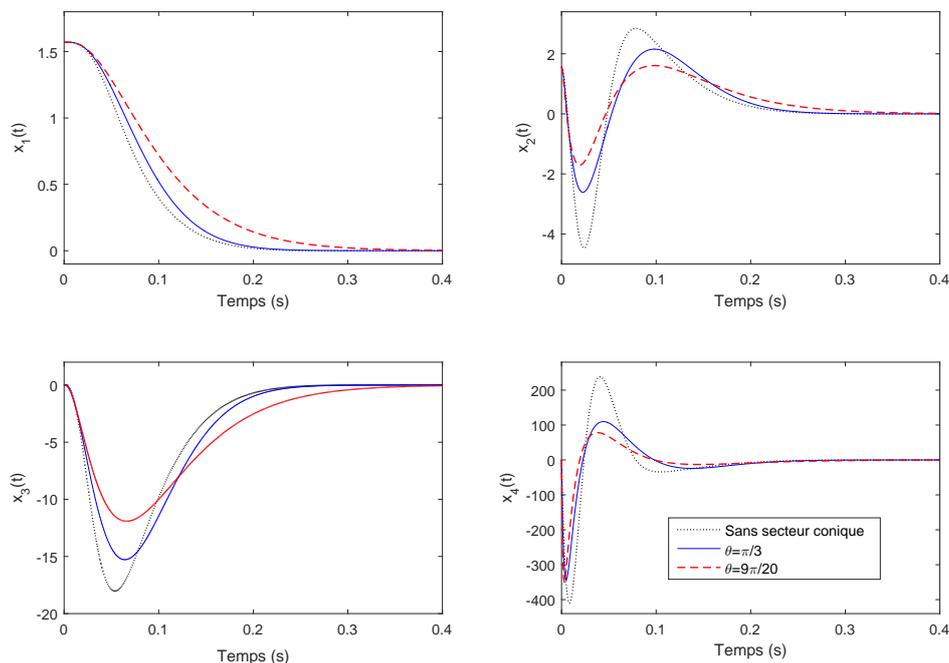


FIGURE 3.5 – Comparaison de l'évolution de l'état en boucle fermée obtenu pour $\beta = 20$ et différents secteurs coniques (*Cas 2*).

système considéré. De plus, d'un point de vue pratique, il est parfois difficile voire impossible d'implémenter des lois de commande qui imposent des contraintes aux actionneurs dépassant leurs caractéristiques techniques. Un tel inconvénient peut être évité en contraignant les valeurs propres à rester dans une région du demi-plan gauche acceptable au regard des spécificités techniques du système commandé, par exemple en ajoutant un cercle à la région LMI comme proposé dans le prochain cas.

- **Cas 3** : Région LMI définie par le demi-plan gauche avec un taux de décroissance β , un cercle paramétré par s et q , et un secteur conique caractérisé par θ et γ .

On a constaté dans le cas précédent que certaines valeurs propres possèdent une partie réelle négative importante. Le but est à présent de montrer l'intérêt de contraindre les valeurs propres à l'intérieur d'un cercle. L'ajout de cette nouvelle région aux contraintes liées à β et à un secteur conique permet de borner les parties réelles et imaginaires des valeurs propres, et ainsi d'éviter les problèmes techniques de mise en œuvre de la loi de commande sur un système physique.

Dans la Figure 3.7, les réponses et la migration des valeurs propres en boucle fermée sont

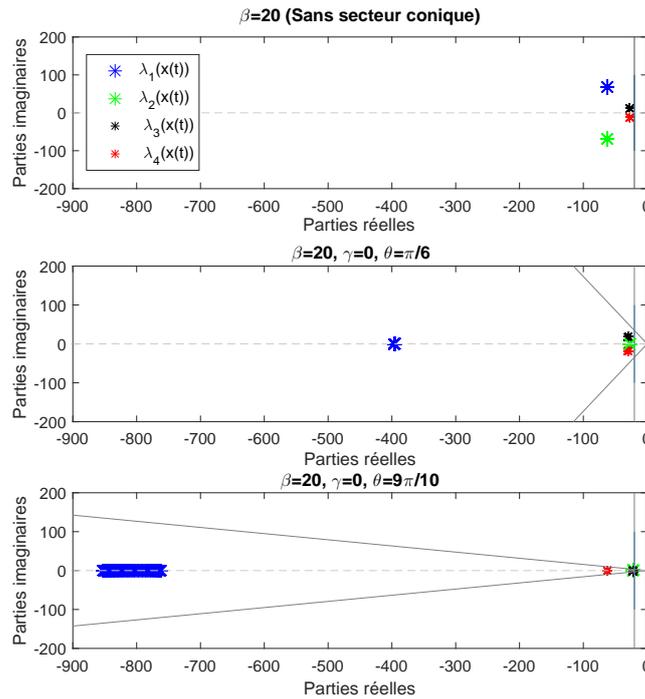


FIGURE 3.6 – Migration des valeurs propres de la boucle fermée pour $\beta = 20$ et différents secteurs coniques (Cas 2).

tracées pour la région **LMI** définie par le demi-plan gauche avec un taux de décroissance $\beta = 20$, un secteur conique avec un apex situé à $\gamma = 0$ et un angle $\theta = 9\pi/20$, ainsi qu'un cercle paramétré par son centre $q = -20$ et son rayon $s = 7$. Comme on peut le remarquer, les valeurs propres de la boucle fermée sont maintenant confinées dans la région **LMI** et la dynamique de la boucle fermée possède de meilleures performances notamment dans la phase transitoire par rapport aux précédents cas considérés.

Notons que cette simulation a été réalisée, dans ce cas, à l'aide d'une loi de commande non-**PDC** (1.43), synthétisée à partir des conditions exprimées au théorème 3.2. Les résultats de celui-ci sont donnés par les matrices de Lyapunov et de gain suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0,0268 & 0,1686 & -0,6183 & -3,8664 \\ 0,1686 & 1,1554 & -4,0896 & -27,8559 \\ -0,6183 & -4,0895 & 14,6865 & 96,5834 \\ -3,8646 & -27,8559 & 96,5834 & 690,6534 \end{bmatrix},$$

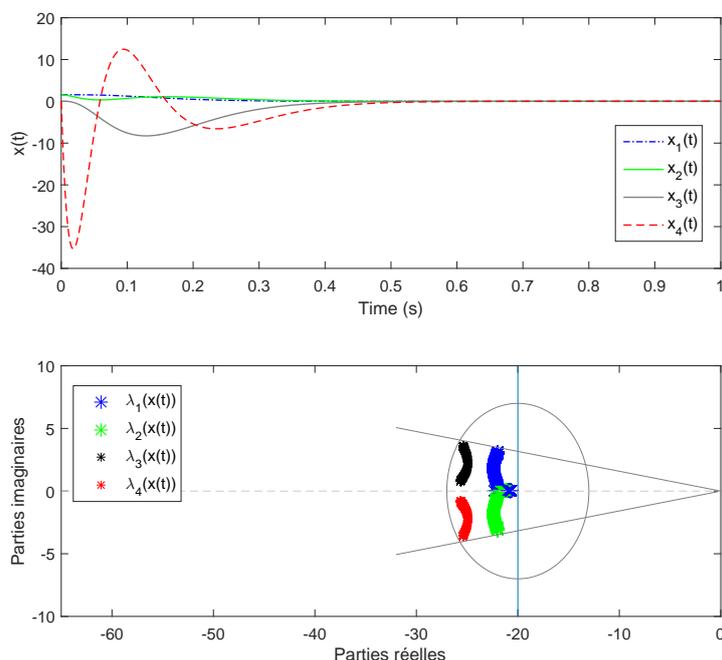


FIGURE 3.7 – Réponse de la boucle fermée et migration des valeurs propres de la boucle fermée : (Cas 3) avec $\beta = 20$, $\gamma = 0$ et $\theta = 9\pi/20$, $q = -20$ et $s = 7$.

$$H1 = \begin{bmatrix} 0,0267 & 0,1683 & -0,6175 & -3,8570 \\ 0,1685 & 1,153 & -4,0845 & -27,8053 \\ -0,6177 & -4,0835 & 14,6680 & 96,4042 \\ -3,8609 & -27,8143 & 96,4605 & 689,1743 \end{bmatrix},$$

$$H2 = \begin{bmatrix} 0,0267 & 0,1683 & -0,6173 & -3,8544 \\ 0,1684 & 1,1529 & -4,0820 & -27,7821 \\ -0,6175 & -4,0808 & 14,6601 & 96,3256 \\ -3,8590 & -27,9442 & 96,3987 & 688,8591 \end{bmatrix},$$

$$F1 = \begin{bmatrix} 102,6383 & 768,9845 & -2625,0802 & -1946,3393 \end{bmatrix},$$

$$F2 = \begin{bmatrix} 101,6943 & 762,8646 & -2602,8850 & -1932,0996 \end{bmatrix}.$$

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté des conditions **LMI**s pour la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisant dans le cadre quadratique. Dans la suite, nous allons considérer des fonctions de Lyapunov non-quadratiques afin d'obtenir des conditions

LMI moins conservatives.

3.3 \mathcal{D} -stabilisation non-quadratique des modèles T-S

La \mathcal{D} -stabilité des modèles T-S dans le cadre non-quadratique a été peu étudiée dans la littérature [Bai et al., 2015]. Néanmoins, les conditions proposées dans [Bai et al., 2015] ont été obtenues en considérant une hypothèse incorrecte (voir annexe B). Dans cette partie, nous proposons un premier résultat dans le contexte non-quadratique en considérant une **FLNQ**. Celui-ci est résumé par le théorème suivant.

Théorème 3.4. : *Le modèle T-S (1.6) est supposé lisse et $\forall k \in \{1, \dots, r\}, \exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(x)) \leq 0$, $\phi_k \neq -\infty$. Soient L et M deux matrices définissant une région LMI (voir définition 1.2). En considérant que les ϕ_k sont connus, le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43) (avec $H_i = P_i$), s'il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0$, F_j et D_{ij} telles que les conditions (3.24) et (3.25) soient vérifiées :*

$$\tilde{\Upsilon}_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (3.24a)$$

$$\frac{2}{r-1} \tilde{\Upsilon}_{ii} + \tilde{\Upsilon}_{ij} + \tilde{\Upsilon}_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (3.24b)$$

$$\Psi_{iik} > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (3.25a)$$

$$\frac{2}{r-1} \Psi_{iik} + \Psi_{ijk} + \Psi_{jik} > 0, \quad \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3 / i \neq j \quad (3.25b)$$

où

$$\tilde{\Upsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H} \left((I \otimes A_i) P_j + M \otimes B_i F_j \right) & (*) \\ M^T \otimes D_{ij} - I \otimes \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + R_{ij}) \right) & -I \otimes \mathcal{H} (D_{ij}) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Soit **FLNQ** suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P_z^{-1} x(t) \quad (3.26)$$

Selon la définition 1.3, la boucle fermée (1.44) est \mathcal{D} -stable si :

$$L \otimes x^T P_z^{-1} x + \mathcal{H} \left(M \otimes x^T \left(P_z^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) x \right) < 0 \quad (3.27)$$

Grâce aux propriétés sur le produit de Kronecker (1.77), on peut réécrire (3.27) comme :

$$(I \otimes x)^T \left(L \otimes P_z^{-1} + \mathcal{H} \left(M \otimes \left(P_z^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) \right) \right) (I \otimes x) < 0 \quad (3.28)$$

qui est vérifié $\forall x$ si :

$$L \otimes P_z^{-1} + \mathcal{H} \left(M \otimes \left(P_z^{-1} (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) + \frac{1}{2} \dot{P}_z^{-1} \right) \right) < 0 \quad (3.29)$$

En multipliant à gauche et à droite par $(I \otimes P_z)$, et sachant que $P_z \dot{P}_z^{-1} P_z = -\dot{P}_z$, l'inégalité (3.29) est équivalente à :

$$L \otimes P_z + \mathcal{H} \left(M \otimes \left((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P_z - \frac{1}{2} \dot{P}_z \right) \right) < 0 \quad (3.30)$$

Soit le terme nul :

$$\mathcal{H} (M M^T \otimes D_{zz} - M M^T \otimes D_{zz}) = 0 \quad (3.31)$$

En sommant (3.30) avec (3.31), on obtient :

$$\begin{aligned} L \otimes P_z + \mathcal{H} (M \otimes ((A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P_z)) + \mathcal{H} \left((M \otimes I) \left(M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z \right) \right) \\ - (M \otimes I) (I \otimes (D_{zz} + D_{zz}^T)) (M^T \otimes I) < 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'inégalité (3.32) peut être réécrite comme :

$$\begin{bmatrix} I \\ M^T \otimes I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L \otimes P_z + \mathcal{H} (M \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P_z) & (*) \\ M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z & I \otimes (D_{zz} + D_{zz}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M^T \otimes I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

L'inégalité (3.33) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} L \otimes P_z + \mathcal{H} (M \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P_z) & (*) \\ M^T \otimes D_{zz} - I \otimes \frac{1}{2} \dot{P}_z & I \otimes (D_{zz} + D_{zz}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

Notons que $\sum_{i=1}^r \dot{h}_i(x) = 0$. Pour toutes matrices $R_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on peut écrire :

$$\dot{P}_z = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z) (P_k + R_{ij}) \quad (3.35)$$

Par conséquent, le modèle T-S (1.6) étant lisse, $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(x)) \leq 0$, $\phi_k \neq -\infty$ et, avec $R_{ij} = R_{ij}^T$ et les contraintes $P_k + R_{ij} > 0$, on peut écrire :

$$\dot{P}_z \geq \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + R_{ij}) \quad (3.36)$$

En substituant (3.36) dans (3.34), posant $H_z = P_z$ et en appliquant le schéma de relaxation présenté dans le lemme 1.9, nous retrouvons les conditions exprimées dans le théorème 3.4. □

Rappelons que les conditions non-quadratiques proposées ci-dessus ne permettent pas de garantir la stabilité asymptotique globale du modèle T-S considéré. En effet, celles-ci font intervenir les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$. Les paramètres ϕ_k doivent donc être connus a priori pour appliquer les conditions **LMIs** présentées au théorème 3.4. Cependant, il s'avère difficile (voire impossible) de les estimer avant même d'avoir synthétisé la boucle fermée.

Des résultats récents ont été proposés afin de permettre une estimation conjointe des domaines d'attraction lors de la synthèse **LMI** (voir par exemple [Guerra et al., 2012; Lee et al., 2014]). Néanmoins, ces résultats s'avérant relativement complexes, nous avons choisi de ne pas intégrer ces conditions dans le théorème 3.4 afin de ne pas alourdir la présentation des résultats en \mathcal{D} -stabilisation.

En pratique, les ϕ_k doivent être choisis les plus grands possibles afin de garantir une stabilisation locale avec le plus grand domaine d'attraction possible. De plus, sur la base des solutions du théorème 3.4, une estimation a posteriori du domaine d'attraction peut être réalisée. Dans la suite, nous nous inspirons des travaux présentés dans [Lee et al., 2011, 2012] pour l'estimation a posteriori du domaine d'attraction. Pour réaliser cette estimation, rappelons tout d'abord qu'un modèle T-S représente exactement un modèle non linéaire de

type $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$ sur un sous-espace compact de son espace d'état défini par :

$$\Omega := \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n \mid A(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x)A_i, B(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x)B_i \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.37)$$

De plus, nous pouvons définir le sous-espace compact donné par :

$$\Pi_\phi := \bigcap_{k=1}^r \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid |\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k, k \in \{1, \dots, r\}\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.38)$$

De ce fait, une restriction du domaine de validité du modèle T-S sous les contraintes $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$ est donné par l'espace compact :

$$\Phi_\phi = \Pi_\phi \cap \Omega \quad (3.39)$$

De manière générale, le domaine d'attraction (**DA**) total d'un modèle dynamique est défini par :

$$DA := \left\{ x(0) \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \right\} \quad (3.40)$$

De plus, définissons l'ensemble des équipotentielles de Lyapunov donné par :

$$\Lambda(c) := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid V(x(t)) \leq c\} \quad (3.41)$$

où c est un scalaire positif.

Une estimation du domaine d'attraction garantie par le théorème 3.4 peut donc être obtenue telle que :

$$\overline{DA}_\phi := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{c} = \max c, \Lambda(\bar{c}) \subseteq \Phi_\phi\} \subseteq DA \quad (3.42)$$

c'est-à-dire en trouvant la plus grande équipotentielle $V(x(t)) = \bar{c}$ incluse dans Φ_ϕ .

Exemple 3.3 : Afin d'illustrer l'efficacité des conditions proposées dans le théorème 3.4 dans le contexte non-quadratique et l'estimation du domaine d'attraction associée, considérons à nouveau le modèle T-S donné dans l'exemple 3.1, avec les fonctions d'appartenance convexes données par :

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)) \quad (3.43)$$

Dans ce contexte, considérons la région **LMI** représentée dans la Figure 1.1 avec $s = 21$, $q = -17$, $\beta = 10$, $\theta = 4\pi/10$ et $\gamma = 9$. Notons que cette région ne permet pas de trouver une solution quadratique à partir des théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3.

La Figure 3.8 présente les domaines de faisabilité des conditions **LMI**s du théorème 3.4 (en fonction des paramètres a et b du modèle T-S (3.20)) pour différentes valeurs de $\phi_k \in \{6, 10, 60\}$. Comme nous pouvions nous y attendre, plus les ϕ_k sont grand, plus le domaine de faisabilité est petit. Ceci illustre le conservatisme lié au choix des bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance.

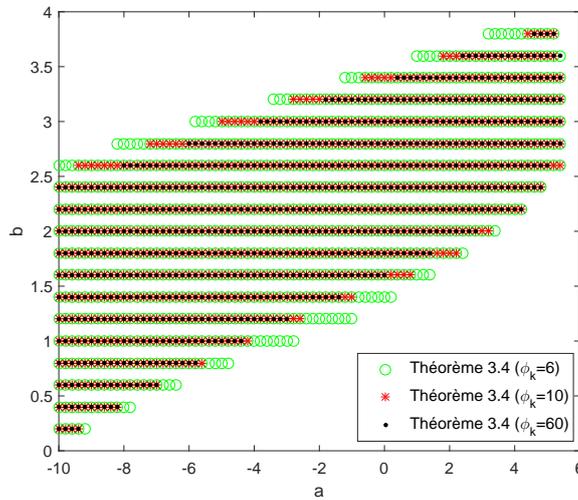


FIGURE 3.8 – Domaines de faisabilité pour $\Phi_k = 6$, $\Phi_k = 10$ et $\Phi_k = 60$.

Dans la suite, nous considérons le cas particulier du modèle T-S considéré avec $a = 1$ et $b = 1, 6$. La Figure 3.9 représente les espaces compacts Φ_{ϕ_k} de validité du modèle T-S pour les trois cas considérés, i.e pour $\phi_k = 6$, $\phi_k = 10$ et $\phi_k = 60$. Sur cette figure, nous pouvons distinguer : en **bleu** le domaine tracé qui correspond à la zone d'exclusion, i.e l'ensemble des points $x(t)$ tel que $h_k(z(t)) > \phi_k$; le domaine tracé en **blanc** qui correspond à l'espace de validité Φ_{ϕ_k} ; la frontière entre le domaine de validité et la zone d'exclusion, tracée en **noir**, et qui correspond aux courbes $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$, pour $k = 1$ et $k = 2$. Comme on peut le constater, le sous-espace Π (les espaces tracés en blanc et en noir) grandit lorsque la valeur de Φ_k augmente.

La Figure 3.10 présente les estimations \overline{DA}_{ϕ} des domaines d'attraction pour les trois valeurs considérées de ϕ_k . Bien entendu, le plus grand domaine d'attraction est ici garanti pour la plus grande valeur considérée de $\phi_k = 60$. Dans chaque cas, la plus grande équipotentielle

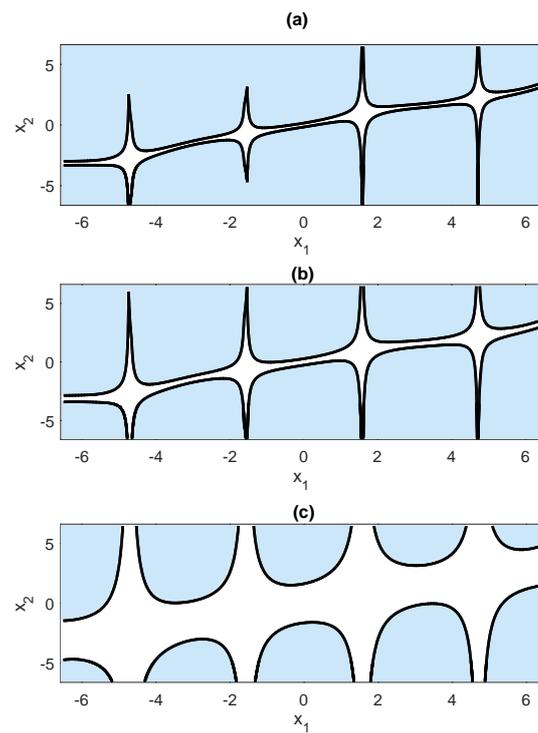


FIGURE 3.9 – Domaines de validité Φ_ϕ pour les trois cas considérés : (a) $\Phi_k = 6$, (b) $\Phi_k = 10$ et (c) $\Phi_k = 60$.

de la fonction de Lyapunov obtenue, incluse dans le domaine de validité Φ_ϕ , a été tracée. Les domaines d'attraction estimés se trouvent donc à l'intérieur de ces équipotentiels.

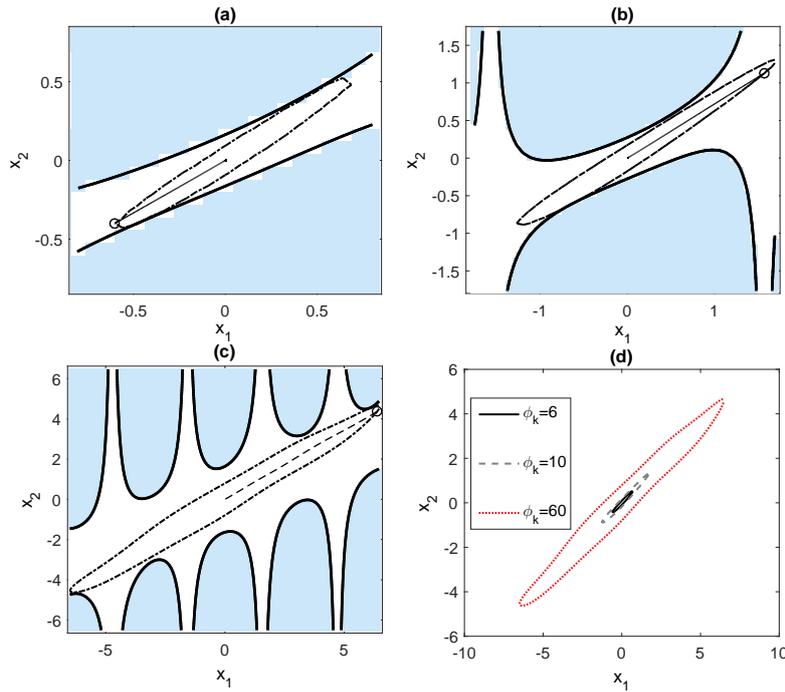


FIGURE 3.10 – Estimations des domaines d'attraction \overline{DA}_ϕ pour les trois cas considérés : (a) $\Phi_k = 6$, (b) $\Phi_k = 10$, (c) $\Phi_k = 60$, (d) Comparaison "à l'échelle" des trois estimations.

Intéressons nous maintenant à la réponse en boucle fermée pour le cas $\phi_k = 60$. La solution du théorème 3.4 est donnée par les matrices de gain de la loi de commande non-PDC (1.43) suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,382 & 0,961 \\ 0,961 & 0,693 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1,408 & 1,016 \\ 1,016 & 0,751 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,1938 & -0,1515 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -0,7490 & -0,6094 \end{bmatrix}.$$

La réponse du système en boucle fermée, l'évolution des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance et le signal de commande sont tracés sur la Figure 3.11 pour $x(0) = [6,38 \ 4,38]$, correspondant à un point situé sur la limite du domaine d'attraction estimé (voir Figure 3.10c). Notons que, puisque l'état initial $x(0)$ se trouve à l'intérieur du domaine d'attraction estimé, la condition $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k = 60$ est toujours garantie, ce qui est confirmé par la Figure 3.11.

Enfin, la Figure 3.12 présente la migration des valeurs propres en boucle fermée. Bien entendu, l'ensemble des valeurs propres reste à l'intérieur de la région LMI prescrite. Ceci confirme l'efficacité des conditions de \mathcal{D} -stabilisation proposées au théorème 3.4 dans le cadre non-quadratique.

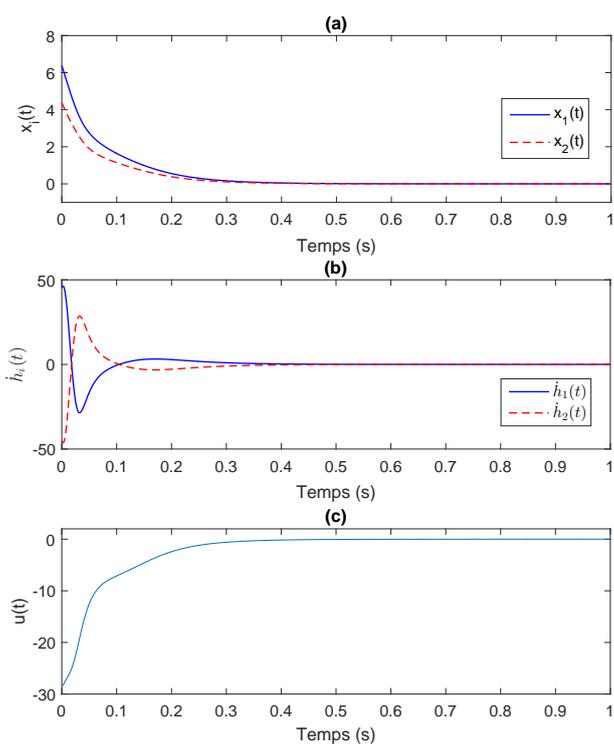


FIGURE 3.11 – (a) Réponse en boucle fermée, (b) Evolution des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance, (c) Signal de commande.

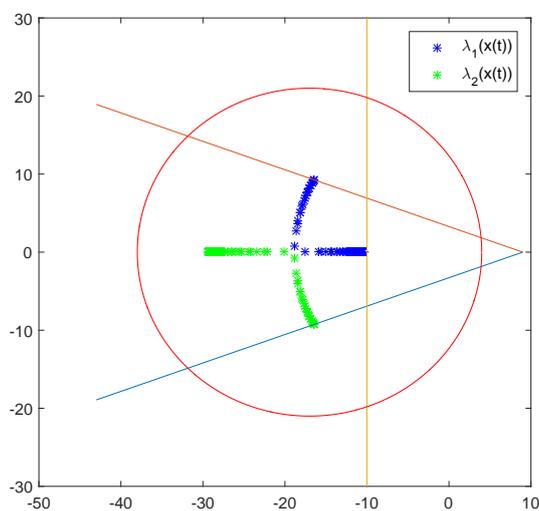


FIGURE 3.12 – Migration des valeurs propres en boucle fermée.

3.4 Conclusion

La synthèse de contrôleurs permettant l'amélioration des performances en régime transitoires des modèles T-S en boucle fermée a été abordée dans ce chapitre. Sur la base du

concept de \mathcal{D} -stabilité, de nouvelles conditions **LMI**s, moins conservatives que celles existantes dans la littérature, ont été proposées.

Dans la première partie de ce chapitre, trois théorèmes permettant la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes ont été proposées dans le cadre quadratique et leur intérêt illustré. L'efficacité de ceux-ci a été illustrée au travers de deux exemples. Le premier exemple, dédié à la comparaison du degré de conservatisme de chacun des théorèmes par rapport aux résultats existants dans la littérature, et le second, illustrant la flexibilité de la méthodologie de synthèse via le concept de \mathcal{D} -stabilité, ont montré l'efficacité des résultats proposés.

Dans la seconde partie de ce chapitre, des premières conditions non-quadratiques pour la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes ont été proposées. Celles-ci ne permettant de garantir la stabilité de la boucle fermée que localement, une méthode simple d'estimation a posteriori du domaine d'attraction a été considérée. Notons que l'intérêt des approches non-quadratiques réside dans le fait que lorsqu'une solution quadratique globale est inexistante, il est toujours possible d'obtenir une solution locale, même si cela doit conduire à des domaines d'attraction relativement restreints.

Notons néanmoins que les conditions proposées dans ce chapitre ne sont valables que si le vecteur de prémisses du modèle T-S considéré ne dépend qu'uniquement des variables d'état (voir remarque 1.1 et l'hypothèse 1.2, page 11 du chapitre 1). De plus, les conditions présentées ne permettent pas de garantir la robustesse face aux erreurs de modélisation du système non linéaire. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la \mathcal{D} -stabilisation robuste des modèles T-S incertains, et nous verrons grâce à un exemple qu'il peut être utile de s'affranchir de l'hypothèse 1.2 (i.e. de traiter le cas des modèles non linéaires dont l'entrée intervient dans les non-linéarités).

Chapitre 4

\mathcal{D} -stabilisation robuste des modèles T-S incertains

Sommaire

4.1 Introduction	97
4.2 Représentation d'état des modèles T-S incertains	97
4.3 \mathcal{D}-stabilisation robuste quadratique des modèles T-S incertains	99
4.3.1 Synthèse quadratique de contrôleurs PDC \mathcal{D} -stabilisants	99
4.3.2 Synthèse quadratique de contrôleurs non- PDC \mathcal{D} -stabilisants	103
4.3.3 Exemple numérique (synthèse quadratique)	104
4.4 \mathcal{D}-stabilisation non-quadratique locale des modèles T-S incertains	106
4.5 Cas des systèmes avec des non-linéarités impliquant les entrées : exemple de la \mathcal{D}-stabilisation en attitude d'un drone quadricoptère	111
4.6 Conclusion	120

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, de nouvelles conditions **LMI** permettant la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stabilisantes pour les modèles T-S ont été proposées. Celles-ci permettent, lorsqu'un modèle non-linéaire fidèle du système à commander est disponible, de spécifier les performances en boucle fermée par le biais de la prescription d'une région **LMI** adéquate. Notons que jusqu'ici, les conditions proposées ne tiennent pas compte d'éventuelles erreurs de modélisation ou encore de la variation de paramètres incertains et/ou non-mesurés. Aussi, afin de garantir la robustesse face à de telles imprécisions, l'objectif de ce chapitre est, dans un premier temps, d'étendre l'ensemble des résultats proposés au cas des modèles T-S incertains. Par ailleurs, jusqu'ici l'ensemble des résultats proposés en stabilisation suppose que l'hypothèse 1.2 est respectée, c'est-à-dire que le vecteur de pré-misse dépend uniquement des variables d'état ($z(t) \equiv x(t)$). En effet, par la simple application d'une décomposition en secteurs non-linéaires, cette hypothèse ne permet pas de traiter directement le cas des systèmes non linéaires dont les non-linéarités dépendraient à la fois de l'état et de l'entrée. Nous verrons néanmoins, au travers d'un exemple en simulation pour la \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un modèle de drone quadrirotor, qu'une modélisation T-S incertaine permet de contourner ce problème. En effet, partant du fait que les signaux d'entrée sont généralement limités par les capacités physiques des actionneurs, l'idée est ici de reporter les non-linéarités dépendantes des variables d'entrée au sein des incertitudes.

4.2 Représentation d'état des modèles T-S incertains

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilisation des systèmes non-linéaires incertains, dont les incertitudes sont structurées, décrits par une représentation d'état non-linéaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = (A(x(t)) + \Delta A(x(t)))x(t) + (B(x(t)) + \Delta B(x(t)))u(t) \quad (4.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont les matrices de la partie nominale. $\Delta A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\Delta B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices bornées décrivant les incertitudes structurées.

En appliquant les techniques d'obtention des modèles T-S décrites au premier chapitre, un modèle T-S incertain, représentant le système non-linéaire incertain (4.1), est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u(t)) \quad (4.2)$$

où $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ représentent les parties incertaines du modèle T-S, et qui peuvent être réécrite, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, sous la forme [Zhou and Khargonekar, 1988] :

$$\Delta A_i(t) = E_i^a \delta^a(t) L_i^a \quad (4.3)$$

et

$$\Delta B_i(t) = E_i^b \delta^b(t) L_i^b \quad (4.4)$$

où E_i^a , E_i^b , L_i^a et L_i^b sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées, $\delta^a(t)$ et $\delta^b(t)$ sont des matrices inconnues vérifiant les propriétés suivantes, $\forall t \geq 0$:

$$(\delta^a(t))^T \delta^a(t) \leq I \quad (4.5)$$

et

$$(\delta^b(t))^T \delta^b(t) \leq I \quad (4.6)$$

Considérons maintenant la stabilisation robuste des modèles T-S incertains (4.2) par une loi de commande non-PDC (1.43). La dynamique en boucle fermée est donnée par :

$$\dot{x}(t) = (A_z + B_z F_z H_z^{-1} + \Delta A_z + \Delta B_z F_z H_z^{-1}) x(t) \quad (4.7)$$

L'objectif de ce chapitre est de proposer de nouvelles conditions pour la synthèse des matrices de gain F_i et H_i permettant la stabilisation robuste de (4.2) tout en garantissant la \mathcal{D} -stabilité de la boucle fermée (4.7), c'est à dire en assurant que la migration des valeurs propres restera confinée dans une région LMI prédéfinie du plan complexe (voir chapitre 1 pour plus de détails sur le concept de \mathcal{D} -stabilité).

Avant de présenter les contributions de ce chapitre, nous énonçons ci-dessous deux lemmes utiles à leurs formulations.

Lemme 4.1. [*Xie and De Souza, 1992*] : Pour toutes matrices X, Y et $T = T^T > 0$ de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\mathcal{H}(X^T \Delta(t) Y) \leq X^T T X + Y^T T^{-1} Y, \quad \forall \Delta^T(t) \Delta(t) \leq I \quad (4.8)$$

Lemme 4.2. (Complément de Schur) [*Boyd et al., 1994*] : Soient M, R et $S = S^T$ des matrices de dimensions appropriées. Si S est inversible et définie négative, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$M - R^T S R < 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} M & R^T \\ R & S^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

4.3 \mathcal{D} -stabilisation robuste quadratique des modèles T-S incertains

L'objectif est ici d'étendre les résultats présentés au chapitre précédent au cas de la \mathcal{D} -stabilisation quadratique des modèles T-S incertains (4.2). Dans ce contexte, une fonction de Lyapunov quadratique (1.17) est considérée et des résultats sont proposés pour la synthèse d'un contrôleur PDC, puis non-PDC. Pour conclure cette section, un exemple numérique permettra de discuter les résultats obtenus en terme de conservatisme.

4.3.1 Synthèse quadratique de contrôleurs PDC \mathcal{D} -stabilisants

Considérons dès à présent la synthèse de lois de commande PDC (1.41) robuste. On rappelle que celle-ci constitue un cas particulier de la loi de commande non-PDC (1.43) avec les matrices de gain $H_i = P$ communes. Le théorème suivant résume les conditions LMI obtenues dans ce cadre. Il constitue une extension du théorème 3.1 au cas incertain, ainsi qu'une généralisation des conditions proposées dans [Toulotte et al., 2008], puisque ces dernières étaient données pour une région LMI particulière, i.e. sans flexibilité de choix des régions LMI au travers des matrices L et M .

Théorème 4.1. [*Cherifi et al., 2016*] Soient L et M deux matrices définissant une région LMI prédéfinie (voir définition 1.2). S'il existe les matrices $P = P^T > 0$ et F_j , pour $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$,

telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i P + B_i F_j)) + I \otimes \left(\tau_{ij}^a E_i^a (E_i^a) + \tau_{ij}^b E_i^b (E_i^b)^T \right) & (*) & (*) \\ & M \otimes L_i^a P & -I \otimes \tau_{ij}^a & (*) \\ & M \otimes L_i^b F_j & 0 & -I \otimes \tau_{ij}^b \end{bmatrix}$$

alors le modèle T-S incertain (4.2) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande PDC (1.41).

Démonstration. En considérant le modèle T-S incertain (4.2) et en suivant les mêmes étapes que pour la démonstration du théorème 3.1, la boucle fermée (4.7) est \mathcal{D} -stable si :

$$L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z + B_z F_z H_z^{-1}) P) + \mathcal{H}(M \otimes (\Delta A_z + \Delta B_z F_z H_z^{-1}) P) < 0 \quad (4.11)$$

soit, en posant $H_z = P$ commune :

$$\underbrace{L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_z P + B_z F_z))}_{\Upsilon_{zz}} + \underbrace{\mathcal{H}(M \otimes (\Delta A_z P + \Delta B_z F_z))}_{\Delta \Upsilon_{zz}} < 0 \quad (4.12)$$

Tout d'abord, intéressons-nous à la partie incertaine $\Delta \Upsilon_{zz}$. Selon (4.3) et (4.4), elle peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta \Upsilon_{zz} = \mathcal{H} \left(M \otimes \left(E_z^a \delta^a(t) L_z^a P + E_z^b \delta^b(t) L_z^b F_z \right) \right) \quad (4.13)$$

ou, d'après les propriétés du produit de Kronecker (voir propriété 1.1) :

$$\Delta \Upsilon_{zz} = \mathcal{H} \left((I \otimes E_z^a) (I \otimes \delta^a(t)) (M \otimes L_z^a P) \right) + \mathcal{H} \left((I \otimes E_z^b) (I \otimes \delta^b(t)) (M \otimes L_z^b F_z) \right) \quad (4.14)$$

soit encore, de manière équivalente :

$$\Delta \Upsilon_{zz} = \mathcal{H} (X_z^T \tilde{\delta}(t) Y_z) \quad (4.15)$$

$$\text{avec } X_z^T = \begin{bmatrix} I \otimes E_z^a & I \otimes E_z^b \end{bmatrix}, \tilde{\delta}(t) = \begin{bmatrix} I \otimes \delta^a(t) & 0 \\ 0 & I \otimes \delta^b(t) \end{bmatrix}, \delta^T(t) \delta(t) \leq I \text{ et } Y_z = \begin{bmatrix} M \otimes L_z^a P \\ M \otimes L_z^b F_z \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en considérant (4.15) et en appliquant le lemme 4.1, l'inégalité (4.11) est satisfaite si :

$$\Upsilon_{zz} + X_z^T \bar{T}_z X_z + Y_z^T \bar{T}_z^{-1} Y_z < 0 \quad (4.16)$$

avec $T_z = \begin{bmatrix} I \otimes \tau_{zz}^a & 0 \\ 0 & I \otimes \tau_{zz}^b \end{bmatrix}$ et les quantités scalaires $\tau_{zz}^a > 0$ et $\tau_{zz}^b > 0$.

Ensuite, en appliquant le complément de Schur (lemme 4.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{zz} + X_z^T \bar{T}_z X_z & Y_z^T \\ Y_z & T_z \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

Ce qui conduit, après l'expansion des matrices et l'application du lemme 1.9, aux conditions exprimées dans le théorème 4.1. \square

Les conditions **LMIs** proposées dans le théorème 4.1 sont conservatives et ne tiennent pas compte des récentes avancées en terme de relaxation. Nous présentons donc ci-dessous, des conditions **LMIs** relâchées pour la synthèse de lois de commande **PDC** robuste pour les modèles T-S incertains. Celles-ci constituent une extension de celles présentées au chapitre 3 (théorème 3.3) pour les modèles T-S sans incertitudes.

Théorème 4.2. [*Cherifi et al., 2017b*] Soient L et M deux matrices définissant une région **LMI** prédéfinie (voir définition 1.2). S'il existe des matrices $P = P^T > 0$, F_j , \tilde{W}_j et \tilde{V}_j telles que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ M \otimes (P - \tilde{W}_j) + \tilde{V}_j (I \otimes A_i^T) & -I \otimes \mathcal{H}(\tilde{V}_j) & (*) & (*) \\ M \otimes L_i^a \tilde{W}_j & (I \otimes L_i^a) \tilde{V}_j & -I \otimes \tau_{ij}^a & (*) \\ M \otimes L_i^b F_j & 0 & 0 & -I \otimes \tau_{ij}^b \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)} = L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i \tilde{W}_j + B_i F_j)) + I \otimes \left(\tau_{ij}^a E_i^a (E_i^a)^T + \tau_{ij}^b E_i^b (E_i^b)^T \right)$$

alors le modèle T-S incertain (4.2) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande **PDC** (1.41).

Démonstration. En suivant les mêmes étapes que pour la preuve du théorème 3.3 jusqu'à l'inégalité (3.19), avec l'expression de la dynamique en boucle fermée (4.7), celle-ci est \mathcal{D} -stable si :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathcal{H}(\mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_z \tilde{\mathbf{W}}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{F}_z)) & (*) \\ \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{W}}_z) + \tilde{\mathbf{V}}_z (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_z^T) & -\mathbf{I} \otimes \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{V}}_z) \end{bmatrix}}_{\Xi_{zz}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbf{M} \otimes (\Delta \mathbf{A}_z \tilde{\mathbf{W}}_z + \Delta \mathbf{B}_z \mathbf{F}_z)) & (*) \\ \tilde{\mathbf{V}}_z (\mathbf{I} \otimes \Delta \mathbf{A}_z^T) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Delta \Xi_{zz}} < \mathbf{0} \quad (4.19)$$

En considérant (4.3) et (4.4), le terme $\Delta \Xi_{hh}$ peut être réécrit sous la forme :

$$\Delta \Xi_{zz} = \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{X}}_z^T \tilde{\delta}(t) \tilde{\mathbf{Y}}_z) \quad (4.20)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{X}}_z^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_z^a & \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}_z^b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\delta}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \otimes \delta^a(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \otimes \delta^b(t) \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{Y}}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \otimes \mathbf{L}_z^a \tilde{\mathbf{W}}_z & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{L}_z^a) \tilde{\mathbf{V}}_z \\ \mathbf{M} \otimes \mathbf{L}_z^b \mathbf{F}_z & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, à partir de (4.20) et en appliquant le lemme 4.1, l'inégalité (4.19) est satisfaite si :

$$\Xi_{zz} + \tilde{\mathbf{X}}_z^T \tilde{\mathbf{T}}_z \tilde{\mathbf{X}}_z + \tilde{\mathbf{Y}}_z^T \tilde{\mathbf{T}}_z^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_z < \mathbf{0} \quad (4.21)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{T}}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \otimes \tau_{zz}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \otimes \tau_{zz}^b \end{bmatrix} \text{ et les quantités scalaires } \tau_{zz}^a > 0 \text{ et } \tau_{zz}^b > 0.$$

Ensuite, en appliquant le complément de Schur (lemme 4.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Xi_{zz} + \mathbf{X}_z^T \tilde{\mathbf{T}}_z \mathbf{X}_z & \mathbf{Y}_z^T \\ \mathbf{Y}_z & \tilde{\mathbf{T}}_z \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Ce qui conduit, après l'expansion des matrices et l'application du lemme 1.9, aux conditions exprimées dans le théorème 4.2. \square

Les conditions exprimées dans les théorèmes 4.1 et 4.2 permettent la synthèse d'une loi de commande **PDC** (1.43) (avec $H_j = P$ commune). Rappelons que celle-ci présente l'avantage de ne pas nécessiter l'inversion en ligne d'une matrice de gain variable, ce qui peut s'avérer judicieux pour réduire le coût de calcul dans le cadre d'applications embarquées. Néanmoins, lorsqu'aucune solution satisfaisante n'existe pour les théorèmes 4.1 et 4.2, la synthèse d'une loi de commande non-**PDC** (1.43) peut constituer une alternative. Dans ce cadre, des conditions **LMIs** relâchées sont proposées dans la sous-section suivante.

4.3.2 Synthèse quadratique de contrôleurs non-PDC \mathcal{D} -stabilisants

Le théorème suivant résume les conditions proposées pour la synthèse de lois de commande robuste non-PDC (1.43) \mathcal{D} -stabilisantes pour les modèles T-S incertains (4.2). Il constitue une extension du théorème 3.2, présentée au chapitre 3 pour les modèles T-S sans incertitudes.

Théorème 4.3. [Cherifi et al., 2016] Soient L et M deux matrices définissant une région LMI prédéfinie (voir définition 1.2). S'il existe les matrices $P = P^T > 0$, H_j , F_j et un scalaire $\varepsilon > 0$ tels que les conditions du lemme 1.9 soient vérifiées avec :

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ M \otimes (P - H_j) + \varepsilon (H_j^T A_i^T + F_j^T B_i^T) & -I \otimes \varepsilon \mathcal{H}(H_j) & (*) & (*) \\ M \otimes L_i^a H_j & I \otimes \varepsilon L_i^a H_j & -I \otimes \tau_{ij}^a & (*) \\ M \otimes L_i^b F_j & I \otimes \varepsilon L_i^b F_j & 0 & -I \otimes \tau_{ij}^b \end{bmatrix}$$

et

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)} = L \otimes P + \mathcal{H}(M \otimes (A_i H_j + B_i F_j)) + I \otimes \left(\tau_{ij}^a E_i^a (E_i^a)^T + \tau_{ij}^b E_i^b (E_i^b)^T \right)$$

alors le modèle T-S incertain (4.2) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (1.43).

Démonstration. En suivant les mêmes étapes que pour la preuve du théorème 3.2 jusqu'à l'inégalité (3.12), mais cette fois en considérant la boucle fermée (4.7), celle-ci est \mathcal{D} -stable si :

$$\Psi_{zz} + \Delta \Psi_{zz} < 0 \quad (4.23)$$

$$\text{avec } \Psi_{zz} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \mathcal{H}(A_z H_z + B_z F_z) & (*) \\ M \otimes (P - H_z) + I \otimes \varepsilon (\Delta A_z H_z + \Delta B_z F_z)^T & -I \otimes \mathcal{H}(\varepsilon H_z) \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \Delta \Psi_{zz} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(M \otimes (\Delta A_z H_z + \Delta B_z F_z)) & (*) \\ I \otimes \varepsilon (H_z^T \Delta A_z^T + F_z^T \Delta B_z^T) & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de (4.3) et (4.4), $\Delta \Psi_{zz}$ peut être réécrit sous la forme :

$$\Delta \Psi_{zz} = \mathcal{H}(\bar{X}_z^T \bar{\delta}(t) \bar{Y}_z) \quad (4.24)$$

$$\text{où } \bar{X}_z^T = \begin{bmatrix} I \otimes E_z^a & I \otimes E_z^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\delta}(t) = \begin{bmatrix} I \otimes \delta^a(t) & 0 \\ 0 & I \otimes \delta^b(t) \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{Y}_z = \begin{bmatrix} M \otimes L_z^a H_z & I \otimes \varepsilon L_z^a H_z \\ M \otimes L_z^b F_z & I \otimes \varepsilon L_z^b F_z \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en considérant (4.24) et en appliquant le lemme 4.1, l'inégalité (4.23) est satisfaite si :

$$\Psi_{zz} + \bar{X}_z^T \bar{T}_z \bar{X}_z + \bar{Y}_z^T \bar{T}_z^{-1} \bar{Y}_z < 0 \quad (4.25)$$

où $\bar{T}_z = \begin{bmatrix} I \otimes \tau_{zz}^a & 0 \\ 0 & I \otimes \tau_{zz}^b \end{bmatrix}$ et les quantités scalaires $\tau_{zz}^a > 0$ et $\tau_{zz}^b > 0$.

En appliquant le complément de Schur (lemme 4.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{zz} + X_z^T \bar{T}_z X_z & Y_z^T \\ Y_z & \bar{T}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

Ce qui conduit, après l'expansion des matrices et l'application du lemme 1.9, aux conditions exprimées dans le théorème 4.3. \square

Remarque 4.1. Notons que, comme pour le théorème 3.2, les conditions exprimées au théorème 4.3 ne sont pas strictement **LMIs**. En effet, elles requièrent l'obtention d'un paramètre $\varepsilon > 0$, de manière similaire aux récents résultats obtenus au travers de l'application du lemme de Finsler. La remarque 1.8 s'applique donc encore ici.

4.3.3 Exemple numérique (synthèse quadratique)

Afin de comparer les théorèmes présentés dans cette section en terme de conservatisme, considérons un modèle T-S incertain d'ordre 4 ($n = 4$) à deux règles ($r = 2$) donné par les matrices et fonctions d'appartenance suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 5 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,2 \\ -0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}, L_{a1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,1 \\ 0,5 \end{bmatrix}^T, E_{b1} = E_{b2} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, L_{a2} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,8 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}^T,$$

$$L_{b1} = 0,5, L_{b2} = -0,5, h_1(x_3(t)) = \cos^2(x_3(t)) \text{ et } h_2(x_3(t)) = \sin^2(x_3(t)).$$

Dans cet exemple académique, les paramètres a et b sont dédiés à l'étude du conservatisme des conditions LMIs proposées. Ainsi, la Figure 4.1 montre les domaines de faisabilité du théorème 4.1, du théorème 4.3 et du théorème 4.2 pour $a \in [-6, 1]$ et $b \in [1, 7]$, en considérant la région LMI (voir Figure 1.1) définie par $s = 21$, $q = -17$, $\beta = 0$, $\gamma = 9$ et $\theta = 3\pi/10$. De plus, pour chaque point testé avec le théorème 4.3, le paramètre ϵ a été cherché à l'aide d'une programmation linéaire dans une famille logarithmique $\{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^6\}$ (voir remarque 4.1).

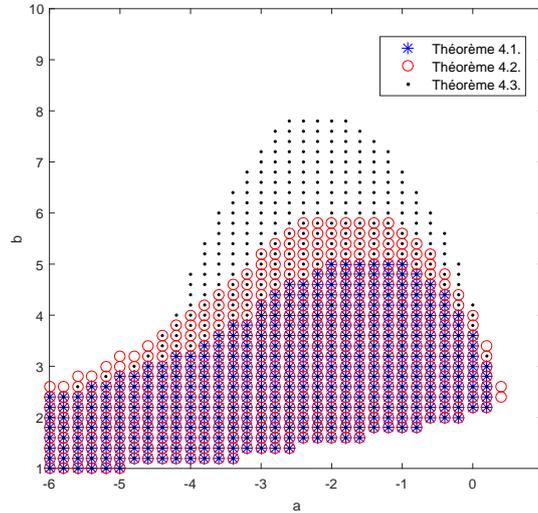


FIGURE 4.1 – Comparaison des domaines de faisabilité obtenus à partir des théorèmes 4.1, 4.3 et 4.2.

Remarque 4.2. *Comme pour les résultats présentés au chapitre 3 (voir remarque 3.2), Il est facile de montrer que les conditions proposées par les théorème 4.2 et 4.3 sont moins conservatives que celles présentées dans le théorème 4.1. En effet, à partir des conditions exprimées dans le théorème 4.2, avec $W_j = P$ et $V_j = \epsilon I$, en appliquant un complément de Schur puis en choisissant $\epsilon \rightarrow 0$, on retrouve les conditions exprimées dans le théorème 4.1. Similairement, à partir des conditions exprimées dans le théorème 4.2, en posant $H_j = P$ et en appliquant un complément de Schur, puis en choisissant $\epsilon \rightarrow 0$, on retrouve les conditions exprimées dans le théorème 4.1. Cependant, en raison de la présence de termes différents dans les blocs (2,1) des LMIs des théorèmes 4.2 et 4.3, on ne peut pas prouver formellement leur inclusion mutuelle. Il n'est donc pas possible de conclure sur la supériorité de l'un sur l'autre en terme de conservatisme.*

Comme on peut le remarquer sur la Figure 4.1, les domaines de faisabilité obtenus à partir des théorème 4.2 et 4.3 englobent celui obtenu à partir du théorème 4.1. Néanmoins, on remarque que les résultats obtenus pour les théorème 4.2 et 4.3 ne se recouvrent pas totalement sur la fenêtre étudiée, ce qui confirme les faits relatés à la remarque 4.2.

Dans cette section, nous avons étendu les résultats de \mathcal{D} -stabilisation quadratique proposés au chapitre 3 au cas des modèles T-S incertains. Rappelons que les approches quadratiques souffrent d'un certain degré de conservatisme puisqu'elles nécessitent l'obtention d'une matrice de Lyapunov commune, solution d'un ensemble de conditions **LMI**s. Aussi, lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir une solution quadratique, la recherche de solutions non-quadratiques, bien que locales, peut être utile. Ces conditions non-quadratiques font l'objet de la section suivante.

4.4 \mathcal{D} -stabilisation non-quadratique locale des modèles T-S incertains

Dans cette section, nous proposons des conditions non-quadratiques pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S incertains (4.2). Celles-ci constituent une extension des conditions non-quadratiques proposées au théorème 3.4 du chapitre 3 pour les modèles T-S sans incertitudes. Elles sont obtenues sous l'hypothèse que les dérivés temporelles des fonctions d'appartenance sont bornées. Cependant, cette hypothèse conduit à l'obtention de conditions locales [Guerra et al., 2012]. De ce fait, une estimation du domaine d'attraction de la boucle fermée synthétisée doit être réalisée. L'approche retenue pour cette estimation est inspirée de [Lee et al., 2012]. Ainsi, dans la suite de cette section, nous proposons dans un premier temps les conditions **LMI**s pour la synthèse non-quadratique de lois de commande non-**PDC** \mathcal{D} -stabilisantes. Puis, un exemple académique sera présenté afin d'illustrer l'efficacité des conditions proposées ainsi que l'estimation du domaine d'attraction.

Théorème 4.4. [Cherifi et al., 2017a] *On suppose que, $\forall \in \{1, \dots, r\}$, $\exists \phi_k$ tels que $|\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k$. Soient L et M deux matrices définissant une région **LMI** prédéfinie (voir définition 1.2). Le modèle T-S (1.6) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-**PDC** (1.43), s'il existe des matrices*

$P_i = P_i^T > 0$, F_j et D_{ij} telles que les conditions (4.28) et (4.27) soient vérifiées :

$$\tilde{\Lambda}_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (4.27a)$$

$$\frac{2}{r-1} \tilde{\Lambda}_{ii} + \tilde{\Lambda}_{ij} + \tilde{\Lambda}_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (4.27b)$$

$$\Xi_{iik} > 0, \quad \forall (i, k) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad (4.28a)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{iik} + \Xi_{ijk} + \Xi_{jik} > 0, \quad \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3 / i \neq j \quad (4.28b)$$

où

$$\tilde{\Lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_{ij}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ \mathbf{M}^T \otimes D_{ij} + \mathbf{I} \otimes \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \phi_k (\mathbf{P}_k + \mathbf{R}_{ij}) \right) & -\mathbf{I} \otimes \mathcal{H}(D_{ij}) & (*) & (*) \\ \mathbf{M} \otimes L_i^a P_j & 0 & -\mathbf{I} \otimes \tau_i^a & (*) \\ \mathbf{M} \otimes L_i^b F_j & 0 & 0 & -\mathbf{I} \otimes \tau_i^b \end{bmatrix}$$

avec

$$\tilde{\Lambda}_{ij}^{(1,1)} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathcal{H}(\mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{P}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j)) + \mathbf{I} \otimes \left(\tau_i^a \mathbf{E}_i^a (\mathbf{E}_i^a)^T + \tau_i^b \mathbf{E}_i^b (\mathbf{E}_i^b)^T \right)$$

et

$$\Xi_{ijk} = \mathbf{P}_k + \mathbf{R}_{ij}.$$

Démonstration. En suivant les mêmes étapes que pour la preuve du théorème 3.4 jusqu'à l'inégalité (3.34) et en sachant que $\forall k, |\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k$, la boucle fermée (4.7) est \mathcal{D} -stable si (en posant $\mathbf{H}_z = \mathbf{P}_z$) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L} \otimes \mathbf{P}_z + \mathcal{H}(\mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_z \mathbf{P}_z + \mathbf{B}_z \mathbf{F}_z)) & (*) \\ \mathbf{M}^T \otimes D_{zz} + \mathbf{I} \otimes \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \phi_k (\mathbf{P}_k + \mathbf{R}_{ij}) & \mathbf{I} \otimes (D_{zz} + D_{zz}^T) \end{bmatrix}}_{\tilde{\Upsilon}_{zz}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathbf{M} \otimes (\Delta \mathbf{A}_z \mathbf{P}_z + \Delta \mathbf{B}_z \mathbf{F}_z)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz}} < 0 \quad (4.29)$$

A partir de (4.3) et (4.4), le terme $\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz}$ peut être réécrit sous la forme :

$$\Delta \tilde{\Upsilon}_{zz} = \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{X}}_z^T \tilde{\delta}(t) \tilde{\mathbf{Y}}_z) \quad (4.30)$$

$$\text{où } \bar{X}_z^T = \begin{bmatrix} I \otimes E_z^a & I \otimes E_z^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\delta}(t) = \begin{bmatrix} I \otimes \delta^a(t) & 0 \\ 0 & I \otimes \delta^b(t) \end{bmatrix}, \text{ et } \bar{Y}_z = \begin{bmatrix} M \otimes L_z^a P & 0 \\ M \otimes L_z^b F_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en considérant (4.30) et en appliquant le lemme 4.1, l'inégalité (4.29) est satisfaite si :

$$\tilde{\Upsilon}_{zz} + \bar{X}_z^T \tilde{T}_z \bar{X}_z + \bar{Y}_z^T \tilde{T}_z^{-1} \bar{Y}_z < 0 \quad (4.31)$$

$$\text{où } \tilde{T}_z = \begin{bmatrix} I \otimes \tau_z^a & 0 \\ 0 & I \otimes \tau_z^b \end{bmatrix} \text{ et les quantités scalaires } \tau_z^a > 0 \text{ et } \tau_z^b > 0.$$

En appliquant un complément de Schur (lemme 4.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Upsilon}_{zz} + \bar{X}_z^T \tilde{T}_z \bar{X}_z & \bar{Y}_z^T \\ \bar{Y}_z & \tilde{T}_z \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

Ce qui conduit, après expansions matricielles et l'application du lemme 1.9, aux conditions exprimées dans le théorème 4.4. \square

Rappelons que les conditions non-quadratiques proposées conduisent à une stabilité locale de la boucle fermée, puisque celles-ci font intervenir les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$. Dans la pratique, les paramètres ϕ_k doivent être choisis les plus grands possibles afin de garantir une stabilisation locale avec le plus grand domaine d'attraction possible. Tout comme pour les résultats non-quadratiques présentés au chapitre 3, une estimation a posteriori du domaine d'attraction peut être réalisée. Celle-ci consiste à chercher la plus grande équipotentielle $V(x(t)) = \bar{c}$ incluse dans :

$$\Phi_\phi = \bigcap_{k=1}^r \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid |\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k, k \in \{1, \dots, r\}\} \cap \Omega \quad (4.33)$$

L'estimation du domaine d'attraction garanti par le théorème 4.4 est donc donnée par :

$$\overline{\text{DA}}_\phi := \{x(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{c} = \max c, \Lambda(\bar{c}) \subseteq \Phi_\phi\} \subset \text{DA} \quad (4.34)$$

Pour plus de détail sur la méthode conduisant à l'estimation du domaine d'attraction, le lecteur peut se référer à la section 3.3 du chapitre 3, ainsi qu'aux travaux présentés dans [Lee et al., 2014, 2012].

Exemple 4.1 . Afin d'illustrer l'efficacité des conditions non-quadratiques présentées au théorème 4.4, considérons le modèle T-S incertain d'ordre 2 donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i) x(t) + (B_i + \Delta B_i) u(t)) \quad (4.35)$$

avec $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ainsi que les matrices d'incertitudes ΔA_i et ΔB_i , données respectivement sous la forme (4.3) et (4.4) par :

$$E_1^a = E_2^a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_1^b = E_2^b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L_1^a = L_2^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, L_1^b = L_2^b = 0,03$$

et les fonctions d'appartenance convexes $h_1(z(t)) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}$ et $h_2(z(t)) = \frac{1 + \sin(x_1)}{2}$.

Le théorème 4.4 avec $\phi_1 = \phi_2 = 60$ et pour la région **LMI** (voir Figure 1.1), définie par $s = 21$, $q = -17$, $\beta = 10$, $\gamma = 9$ et $\theta = \pi/3$, fournit les matrices de gain de la loi de commande non-PDC (1.43) suivantes :

$$F_1 = \begin{bmatrix} -88,50 & -75,03 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -50,67 & -49,58 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7,00 & 4,96 \\ 4,96 & 3,67 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 6,66 & 5,42 \\ 5,42 & 4,59 \end{bmatrix}.$$

La Figure 4.2 montre l'estimation du domaine d'attraction \overline{DA}_ϕ de la boucle fermée synthétisée dans cet exemple. Il est délimité par la plus grande équipotentielle de Lyapunov (tracée en tirets-points) incluse dans le domaine de validité Φ_ϕ (zone blanche) du modèle T-S incertain sous la contrainte $|\dot{h}_k(z)| \leq \phi_k$.

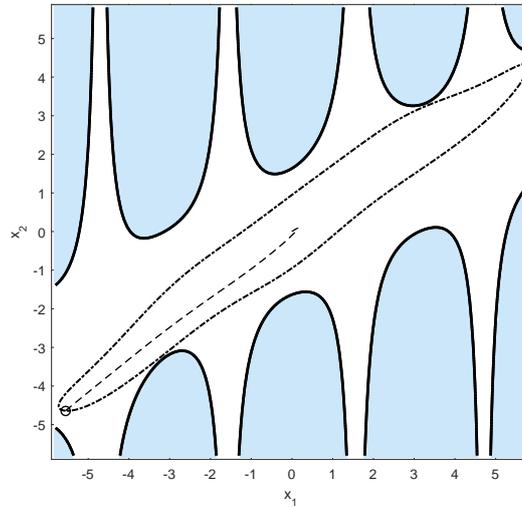


FIGURE 4.2 – Estimation du domaine d'attraction en boucle fermée

De plus, afin d'illustrer par une simulation le comportement dynamique en boucle fermée, choisissons maintenant un état initial situé à la frontière du domaine d'attraction estimé, par exemple $x(0) = \begin{bmatrix} -5,56 & -4,64 \end{bmatrix}^T$. Cette simulation est présentée à la Figure 4.3.

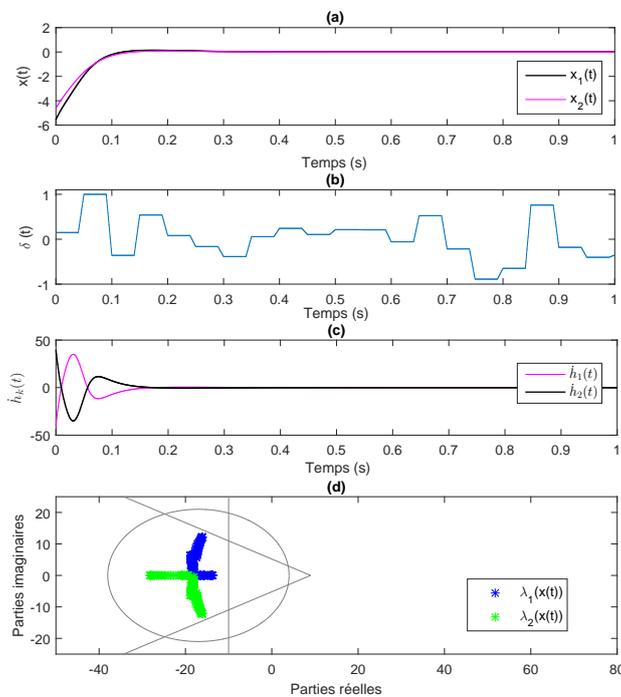


FIGURE 4.3 – Simulation numérique : (a) Réponse de la boucle fermée, (b) Signal d'incertitude $\delta(t)$, (c) Evolution des dérivés temporels des fonctions d'appartenance du cas considéré et (d) Migration des valeurs propres

Comme on peut le remarquer sur la Figure 4.3(a), la loi de commande non-PDC synthétisée stabilise le modèle T-S incertain (4.35). Pour cette simulation, un signal d'incertitude $\delta(t)$ a été considéré (voir Figure 4.3(b)). De plus, comme le montre la Figure 4.3(c), la condition initiale appartenant à \overline{DA}_ϕ , les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance ne dépassent jamais la borne prédéfinie $\phi_k = 60$. Finalement, la Figure 4.3(d) montre que la migration des valeurs propres en boucle fermée reste cantonnée à l'intérieur de la région LMI prédéfinie malgré la présence d'incertitudes. Ceci confirme la robustesse de la loi de commande synthétisée, ainsi que l'efficacité des conditions proposées au théorème 4.4.

4.5 Cas des systèmes avec des non-linéarités impliquant les entrées : exemple de la \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un drone quadrirotor

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la \mathcal{D} -stabilisation des systèmes non-linéaires comportant des non-linéarités dépendantes uniquement des variables d'état afin d'obtenir une représentation T-S dont les variables de prémisse ne dépendent pas de l'entrée (voir l'hypothèse 1.2 au chapitre 1). En effet, lorsque ces variables dépendent de l'entrée, la loi de commande (PDC ou non-PDC synthétisée ne peut être implémentée puisque cela conduirait à une boucle algébrique. L'objectif de cette section est de montrer, à travers un exemple classique de l'automatique, que ce problème peut être contourné simplement lorsque les entrées sont physiquement bornées, grâce aux conditions proposées dans ce chapitre. En effet, considérons maintenant la classe de systèmes non-linéaires représentée par :

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(x(t), u(t)) x(t) + \tilde{B}(x(t), u(t)) u(t) \quad (4.36)$$

L'idée est ici de séparer les termes de chaque matrice de manière à ne laisser dans la partie nominale que les non-linéarités ne dépendant que de l'état, et de reporter celles contenant l'entrée dans la partie incertaine. On obtient alors :

$$\dot{x}(t) = (A(x(t)) + \Delta A(u(t))) x(t) + (B(x(t)) + \Delta B(u(t))) u(t) \quad (4.37)$$

Partant du principe que pour la majorité des applications réelles, les variables d'entrées sont naturellement bornées par les capacités physiques des actionneurs, i.e pour $p = 1, \dots, m$, $|u_p(t)| < \bar{u}_p$, et en posant :

$$\delta(t) = \text{Diag} \left[\frac{u_1(t)}{\bar{u}_1} \quad \dots \quad \frac{u_p(t)}{\bar{u}_p} \quad \dots \quad \frac{u_m(t)}{\bar{u}_m} \right] \quad (4.38)$$

qui vérifie $\delta^T(t)\delta(t) \leq I$, il est toujours possible de réécrire les incertitudes sous la forme (4.3) et (4.4).

De ce fait, un modèle T-S incertain (4.2), dont les variables de prémisse ne dépendent que de l'état, peut être obtenu et une loi de commande robuste **PDC** (1.41) ou non-**PDC** (1.43) peut être synthétisée au travers des théorèmes présentés dans ce chapitre.

Exemple 4.2. Afin d'illustrer la démarche proposée dans cette section, considérons la stabilisation en attitude d'un drone quadrirotor, schématiquement représenté par la Figure 4.4.

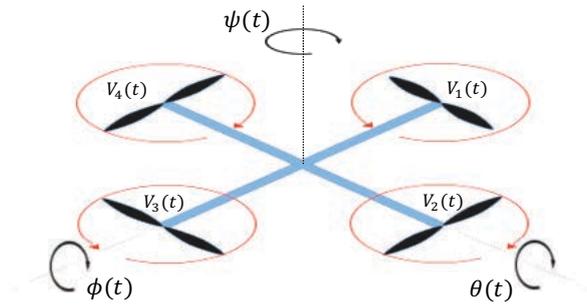


FIGURE 4.4 – Schéma d'un drone quadrirotor.

Un modèle de la dynamique en attitude du drone est donné par [Bouabdallah, 2007] :

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) &= \frac{J_r \dot{\theta}(t)}{I_{xx}} u_g(t) + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\theta}(t) \dot{\psi}(t) + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{J_r \dot{\phi}(t)}{I_{xx}} u_g(t) + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\phi}(t) \dot{\psi}(t) + u_2(t) \\ \ddot{\psi}(t) &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\phi}(t) \dot{\theta}(t) + u_3(t) \end{cases} \quad (4.39)$$

où $\phi(t)$, $\theta(t)$ et $\psi(t)$ représentent respectivement les angles de roulis, de tangage et de lacet. $u_g(t)$ est l'effet gyroscopique sur les dynamiques du roulis et du tangage, qui est fonction des tensions d'entrée $V_1(t)$ à $V_4(t)$ appliquées à chaque moteur, tel que :

$$u_g(V_1(t), \dots, V_4(t)) = K_v(V_1(t) - V_2(t) + V_3(t) - V_4(t)) \quad (4.40)$$

$u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ sont les accélérations angulaires engendrées par les actionneurs (moteurs + hélices). Elles constituent les entrées de commande du modèle dynamique (4.39) et peuvent être réécrites en fonction des tensions d'entrée des moteurs telles que [Bouabdallah, 2007] :

$$u_1(t) = \frac{b l K_v^2}{I_{xx}} (V_2^2(t) - V_4^2(t)) \quad (4.41)$$

$$u_2(t) = \frac{b l K_v^2}{I_{yy}} (V_3^2(t) - V_1^2(t)) \quad (4.42)$$

$$u_3(t) = \frac{d K_v^2}{I_{zz}} (V_1^2(t) - V_2^2(t) + V_3^2(t) - V_4^2(t)) \quad (4.43)$$

Enfin, les paramètres du modèle sont donnés dans le tableau 4.1. Leurs valeurs numériques sont celles de la maquette Quanser quadrotor 3DoF [Lendek et al., 2013; Pitarch and Sala, 2014].

Symbole	Signification	Type	Unités
K_v	Constante de transformation	54,945	$rad.s/s$
J_r	Inerties des rotors	6×10^{-5}	$kg.m^2$
I_{xx}	Inertie suivant l'axe X	0,0552	$kg.m^2$
I_{yy}	Inertie suivant l'axe Y	0,0552	$kg.m^2$
I_{zz}	Inertie suivant l'axe Z	0,1104	$kg.m^2$
b	Coefficient de poussée	$3,9935139 \times 10^{-6}$	$N.V^{-1}$
d	Coefficient de traînée	$1,192464 \times 10^{-7}$	$Nm.V^{-1}$
l	Distance entre le centre de gravité et le moteur	0,1969	m
m	Masse	2,85	kg
g	Accélération de la pesanteur	9,81	$m.s^{-2}$

TABLEAU 4.1 – Paramètres du quadrirotor [Lendek et al., 2013; Pitarch and Sala, 2014]

Notons que, si les accélérations angulaires $u_1(t), \dots, u_3(t)$, engendrées par les actionneurs, sont les signaux d'entrées du modèle dynamique (4.39) du drone, l'effet gyroscopique $u_g(t)$ est lié aux signaux d'entrées au travers des tensions d'alimentation des moteurs. Par conséquent, $u_g(t)$ ne peut pas être considéré comme une variable de prémisses pour la synthèse d'une loi de commande **PDC** (ou non-**PDC**), car cela engendrerait une boucle algébrique pour l'implémentation d'une telle loi de commande. Néanmoins, $u_g(t) \in [\underline{u}_g, \bar{u}_g]$ est bornée

puisque'il est fonction des tensions d'alimentation des moteurs qui sont elles-mêmes physiquement limitées. Par conséquent, nous proposons de reporter les termes contenant $u_g(t)$ au sein d'une matrice d'incertitude bornée, ce qui permet de réécrire (4.39) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = (A(x(t)) + \Delta A(u_g(t)))x(t) + Bu(t) \quad (4.44)$$

où $x(t) = [x_1(t) \dots x_6(t)]^T = [\phi(t) \dot{\phi}(t) \theta(t) \dot{\theta}(t) \psi(t) \dot{\psi}(t)]^T$ est le vecteur d'état et $u(t) = [u_1(t) u_2(t) u_3(t)]^T$ le vecteur d'entrée. Les matrices décrivant la dynamique du système sont données par :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yzx}x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zxy}x_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{xyz}x_4(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(u_g(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_r}{I_{xx}}u_g(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{J_r}{I_{xx}}u_g(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dès lors, et de manière similaire aux hypothèses effectuées dans [Pitarch and Sala, 2014] et [Lendek et al., 2013], on suppose que les tensions d'alimentation des moteurs sont limitées telles que $V_i \in [-\bar{V}, \bar{V}]$. Dans ce cas et en considérant (4.40), on a $u_g(t) \in [-4K_v\bar{V}, 4K_v\bar{V}]$, et $\Delta A(u_g(t))$ peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta A(u_g(t)) = E_a \delta_a(t) L_a \quad (4.45)$$

avec :

$$\delta_a(t) = \frac{u_g(t)}{4K_v\bar{V}}, \delta_a^2(t) \leq 1, E_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{et } L_a = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4K_v\bar{V}J_r}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4K_v\bar{V}J_r}{I_{xx}} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il convient donc maintenant de proposer un représentant T-S du modèle (4.44). Pour ce faire, on suppose que les vitesses de tangage et de roulis sont bornées, i.e. $(x_2(t), x_4(t)) \in [-\alpha, \alpha]$. Ces bornes définissent un espace compact Ω de l'espace d'état où, en utilisant une décomposition par secteurs non-linéaires [Tanaka and Wang, 2001], le modèle T-S incertain suivant représente exactement (4.44) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(x(t)) [A_i + \Delta A(u_g(t))] x(t) + Bu(t) \quad (4.46)$$

avec

$$h_1(x(t)) = \frac{(\alpha - x_2(t))(\alpha - x_4(t))}{4\alpha^2}, \quad h_2(x(t)) = \frac{(\alpha - x_2(t))(x_4(t) + \alpha)}{4\alpha^2},$$

$$h_3(x(t)) = \frac{(x_2(t) + \alpha)(\alpha - x_4(t))}{4\alpha^2}, \quad h_4(x(t)) = \frac{(x_2(t) + \alpha)(x_4(t) + \alpha)}{4\alpha^2},$$

et les matrices :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_{yzx} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_{zxy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{xyz} \bar{x}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha I_{yzx} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_{zxy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{xyz} \bar{x}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha I_{yzx} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha I_{zxy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{xyz} \bar{x}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha I_{yzx} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha I_{zxy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{xyz} \bar{x}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rappelons que les drones quadrirotors sont des systèmes embarqués et que, par conséquent, leurs lois de commande doivent avoir un coût de calcul le plus faible possible. Ainsi, nous proposons la synthèse d'un contrôleur **PDC** robuste plutôt qu'un contrôleur non-**PDC** qui nécessite l'inversion en ligne d'une matrice de gain variable. Cette synthèse sera réalisée au travers des conditions **LMIs** relâchées, proposées au théorème 4.2. Afin d'implémenter

ces conditions, les vitesses de roulis et de tangage maximales ont été choisies suffisamment large, i.e. $\alpha = 25\pi \text{ rad.s}^{-1}$, pour permettre une stabilisation en attitude dans des conditions extrêmes. De plus, conformément aux données constructeur du banc d'essai Quanser quadrirotor 3DoF, la tension maximale des moteurs a été choisie telle que $\bar{V} = 10\text{V}$ [Lendek et al., 2013; Pitarch and Sala, 2014].

Afin de montrer la flexibilité de la méthodologie de synthèse de lois de commande **PDC** \mathcal{D} -stabilisantes à partir des conditions **LMI**s présentées dans le théorème (4.2), trois tests ont été considérés pour la stabilisation du quadrirotor représenté par le modèle incertain (4.46). En premier lieu, on ne considère que la région du demi-plan gauche sans et avec un taux de décroissance. Ensuite, pour un taux de décroissance donné, un secteur conique est ajouté. Finalement, l'ensemble de la région LMI présentée dans la Figure 1.1 est considérée, i.e. le demi-plan gauche, le secteur conique et le cercle. Notons que dans la suite, toutes les simulations en boucle fermée ont été effectuées avec les mêmes conditions initiales, i.e. $x(0) = \begin{bmatrix} \pi & -\pi & \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

- **Test 1** : Demi-plan gauche sans et avec un taux de décroissance.

Pour ce test, l'objectif est de montrer l'influence du taux de décroissance sur la réponse du système ainsi que sur la migration des valeurs propres en boucle fermée. La Figure 4.5 (a) montre les trajectoires de l'état en boucle fermée pour $\beta = 0$ (i.e. sans taux de décroissance) et pour $\beta = 15$, conduisant à une stabilisation plus rapide. Évidemment, plus on augmente la valeur de β , plus la dynamique de la boucle fermée converge rapidement. Néanmoins, comme montré dans la Figure 4.5 (b), ceci se traduit par l'obtention de valeurs propres avec des parties réelles et imaginaires importantes conduisant à des dépassements importants en phase transitoire et, dans ce cas, les tensions d'entrée, représentées sur la Figure 4.5 (c), dépassent les tensions maximales admissibles des moteurs ($\bar{V} = 10\text{V}$). Par conséquent, le fait de considérer uniquement un taux de décroissance comme contrainte de \mathcal{D} -stabilité n'est pas totalement satisfaisant pour le système considéré. Afin de pallier ces problèmes, le test suivant permettra de réduire l'amplitude des parties imaginaires et le test 3, celle des parties réelles.

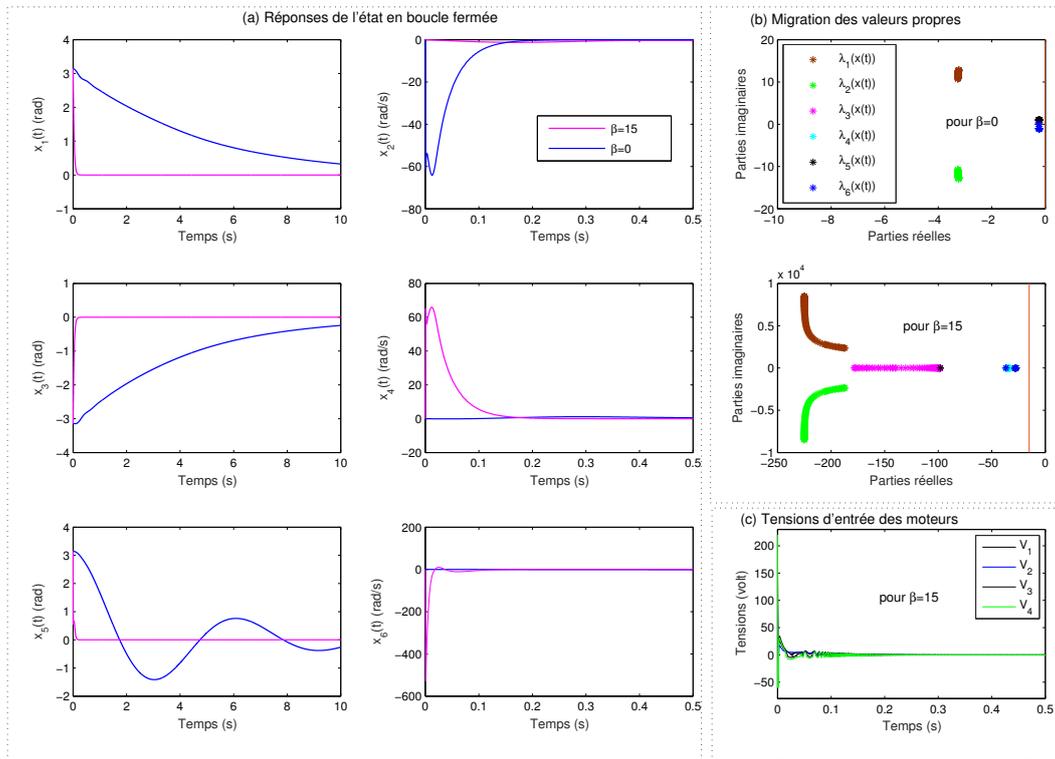


FIGURE 4.5 – *Test 1* - Sans et avec taux de décroissance : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c).

- **Test 2** : Ajout d'un secteur conique au test précédent.

Sur la base de la dynamique rapide, obtenue au test précédent avec $\beta = 15$, notre but est maintenant de restreindre l'amplitude des parties imaginaires, c'est-à-dire de forcer les valeurs propres de la boucle fermée à rester proche de l'axe réel. Ceci peut être réalisé en ajoutant un secteur conique. La Figure 4.6 (a) montre une comparaison des réponses en boucle fermée sans et avec un secteur conique paramétré par son sommet placé en $\gamma = 0$ et un angle de $\theta = 14\pi/30$. On observe que le fait d'ajouter le secteur conique conduit à réduire les dépassements du système en boucle fermée. La Figure 4.6 (b) montre la migration des valeurs propres en boucle fermée pour les régions LMI considérées (sans puis avec secteur conique). On observe qu'en considérant le secteur conique, les parties imaginaires sont significativement réduites. En effet, leurs amplitudes maximales passent d'environ 10^4 à moins de 200. Néanmoins, on remarque également que l'ajout d'un secteur conique conduit à obtenir des parties réelles placées loin à gauche du plan complexe. Ceci implique un coût énergétique

important de la loi de commande synthétisée qui se traduit par des pics importants de tensions d'entrée des moteurs, dépassant les valeurs maximales admissibles ($\bar{V} = 10V$), visibles au début de la simulation sur la Figure 4.6 (c). Un tel inconvénient peut être contourné en contraignant les valeurs propres à rester plus proches de la limite droite du demi-plan gauche, par exemple en ajoutant une contrainte de région de type cercle, comme considéré dans le test suivant.

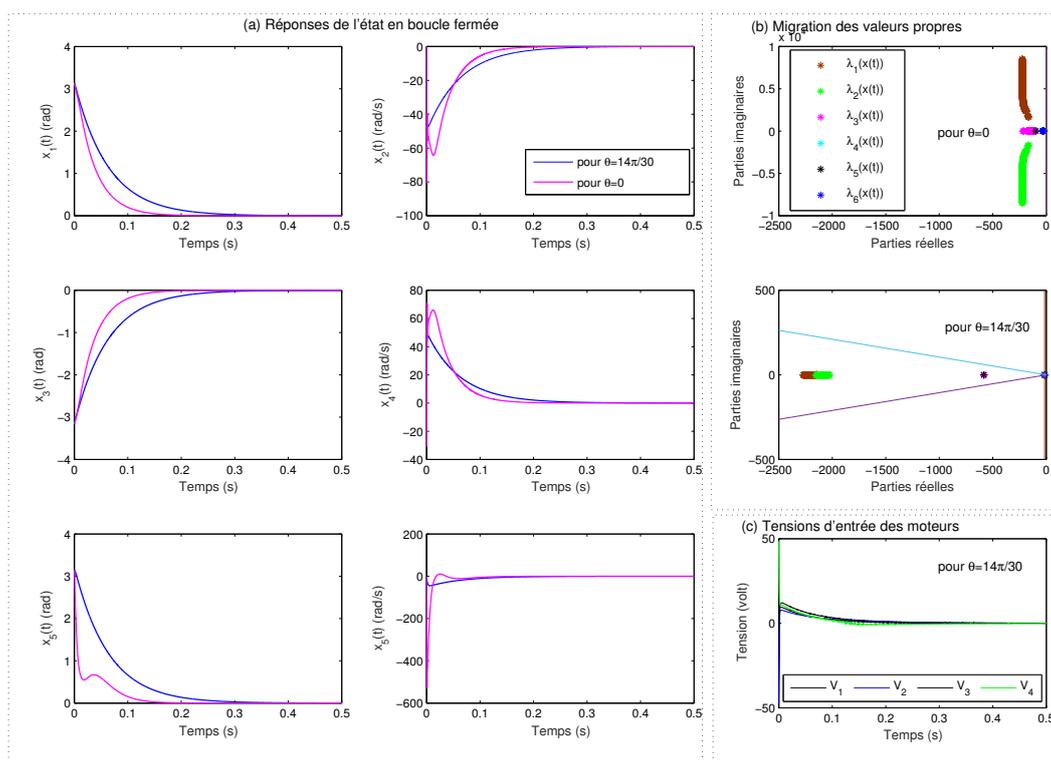


FIGURE 4.6 – Test 2 - Sans et avec secteur conique, avec un taux de décroissance : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c).

- **Test 3 :** Ajout d'une contrainte de type cercle au test précédent.

L'objectif est désormais de montrer que le fait d'ajouter une contrainte de type cercle à la région LMI prédéfinie est un moyen pratique de faire face aux problèmes de dépassement des capacités physiques des actionneurs rencontrés au test précédent. En effet, la contrainte de type cercle est dédiée à forcer les valeurs propres du système en boucle fermée à rester confinées dans une région proche de la limite droite du demi-plan gauche. Ainsi, dans ce test, on considère la région LMI présentée dans la Figure 1.1 dans sa globalité et paramétrée

par le demi-plan gauche avec un taux de décroissance $\beta = 15$, un secteur conique possédant un sommet placé en $\gamma = 0$ et un angle $\theta = 14\pi/30$, et un cercle avec un centre placé en $q = -15$ et un rayon $s = 8$. La Figure 4.7 montre la comparaison entre les simulations obtenues avec le précédent test et celui-ci (c'est-à-dire sans et avec la contrainte de type cercle). On remarque que les tensions d'entrée ne dépassent plus leurs valeurs maximales admissibles ($V_i \leq 10$) (Figure 4.7 (c)). Enfin, les valeurs propres en boucle fermée restent confinées dans la région LMI considérée (Figure 4.7 (b)).

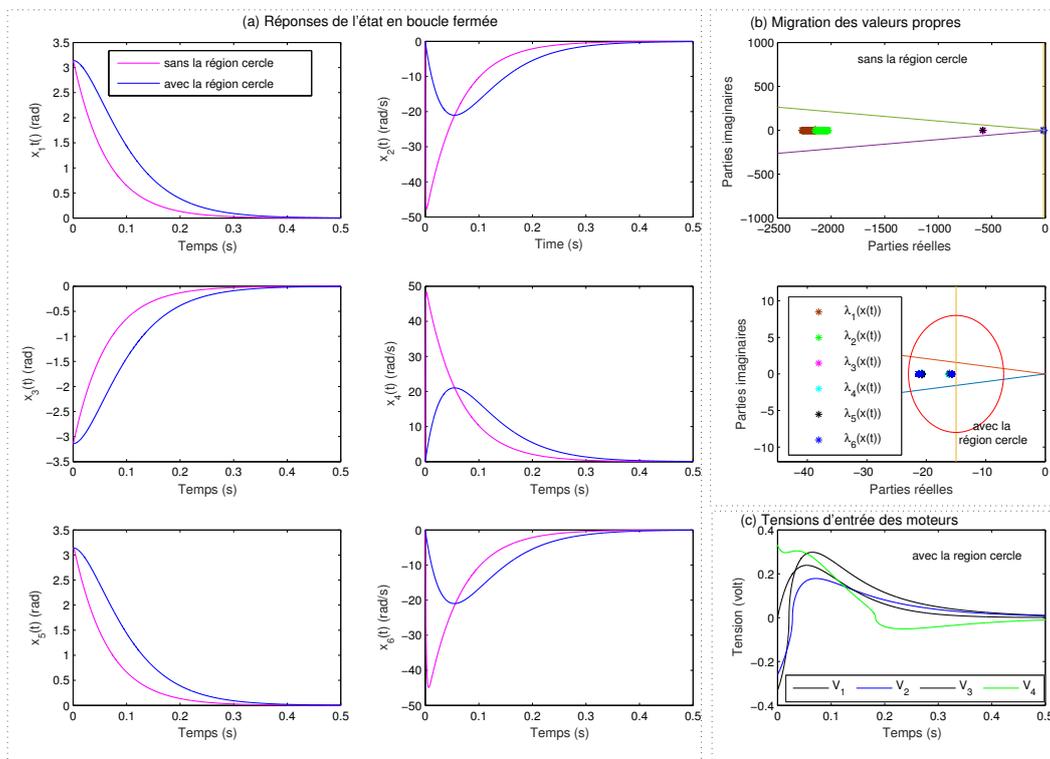


FIGURE 4.7 – Test 3 - Sans et avec cercle : trajectoires d'état en boucle fermée (a), migration des valeurs propres (b), tensions d'entrée (c) .

Pour conclure cet exemple, on peut affirmer qu'en considérant la région prédéfinie pour le (Test 3), les performances de la dynamique en boucle fermée ont été significativement améliorées par rapport aux précédents tests. De plus, dans ce dernier test, il n'y a plus de dépassement des capacités physiques des actionneurs ($V_i \leq 10$ Volt) et on observe que la restriction du domaine de validité de la modélisation T-S considérée est respectée, c'est-à-dire $(x_3, x_4) \in [-20\pi, 20\pi]^2$ ($rad.s^{-1}$). La méthodologie de synthèse de lois de commande PDC robuste apparaît donc appropriée à la stabilisation en attitude du drone quadrirotor

représenté par le modèle (4.39). Notons enfin que pour le dernier test considéré (avec la région LMI incluant le taux de décroissance, le secteur conique et le cercle), les gains suivants ont été obtenue pour la loi de commande PDC synthétisée à partir du théorème 4.2.

$$P = \begin{bmatrix} 0,4710 & -5,8030 & -0,0 & 0,0 & -0,0 & 0,0 \\ -5,8030 & 79,2486 & 0,0 & -0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -0,0 & 0,0 & 0,4710 & -5,8030 & -0,0 & -0,0 \\ 0,0 & -0,0 & -5,8030 & 79,2486 & 0,0 & -0,0 \\ -0,0 & 0,0 & -0,0 & 0,0 & 0,3012 & -3,3993 \\ 0,0 & 0,0 & -0,0 & -0,0 & -3,3993 & 41,8784 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 77,4443 & -1194,3128 & -0,0659 & 0,4930 & 267,0078 & -3289,1354 \\ -0,0659 & 0,4930 & 77,4443 & -1194,3128 & -267,0078 & 3289,1354 \\ 0,0303 & -0,2510 & -0,0303 & 0,2510 & 40,3391 & -564,1947 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 77,4443 & -1194,3128 & 0,0659 & -0,4930 & -267,0078 & 3289,1354 \\ 0,0659 & -0,4930 & 77,4443 & -1194,3128 & -267,0078 & 3289,1354 \\ -0,0303 & 0,2510 & -0,0303 & 0,2510 & 40,3391 & -564,1947 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 77,4443 & -1194,3128 & 0,0659 & -0,4930 & 267,0078 & -3289,1354 \\ 0,0659 & -0,4930 & 77,4443 & -1194,3128 & 267,0078 & -3289,1354 \\ 0,0303 & -0,2510 & 0,0303 & -0,2510 & 40,3391 & -564,1947 \end{bmatrix},$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 77,4443 & -1194,3128 & -0,0659 & 0,4930 & -267,0078 & 3289,1354 \\ -0,0659 & 0,4930 & 77,4443 & -1194,3128 & 267,0078 & -3289,1354 \\ -0,0303 & 0,2510 & 0,0303 & -0,2510 & 40,3391 & -564,1947 \end{bmatrix}.$$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la synthèse de lois de commande robuste et \mathcal{D} -stabilisantes pour les modèles T-S incertains. Trois théorèmes ont été proposés dans ce contexte. Le théorème 4.1 constitue une extension directe des conditions de \mathcal{D} -stabilité au cas de la stabilisation robuste des modèles T-S incertains. Des conditions de moindre conservatisme ont été proposées au travers du théorème 4.2 pour la synthèse d'une

loi de commande **PDC** robuste, puis au travers du théorème 4.3 pour la synthèse d'une loi de commande non-PDC. Notons que les lois de commande non-PDC ont été historiquement proposées afin réduire le conservatisme. Néanmoins, il a été montré au travers d'un exemple académique que les domaines de faisabilité des théorèmes 4.2 et 4.3 ne se recouvraient pas totalement et, par conséquent, il n'est pas possible d'établir la supériorité de l'un ou l'autre en terme de réduction de conservatisme. Rappelons toutefois que l'utilisation d'une loi de commande **PDC** permet de s'affranchir de l'inversion en ligne d'une matrice variable. De ce fait, une telle loi de commande peut s'avérer avantageuse, lorsqu'elle existe, pour des applications embarquées avec une faible capacité de calcul. De plus, dans l'éventualité où une solution quadratique ne serait pas obtenue pour la \mathcal{D} -stabilisation robuste d'un modèle T-S incertain, des conditions non-quadratiques locales pour la synthèse d'une loi de commande non-PDC, avec estimation du domaine d'attraction, ont été proposées.

Enfin, si les conditions proposées au cours de ce chapitre sont principalement dédiées à la synthèse de contrôleurs \mathcal{D} -stabilisants pour les modèle T-S incertains, nous avons montré qu'elles peuvent être utilisées, à bon escient, pour les systèmes dont les variables d'entrée pourraient intervenir au sein des non-linéarités. En effet, la décomposition en secteurs non-linéaires d'une non-linéarité contenant des variables d'entrée conduirait à l'obtention d'un modèle T-S avec des variables de prémisses dépendantes de ces mêmes entrées. Ceci n'étant pas souhaitable pour la commande, nous proposons, dans la pratique, de reporter ces non-linéarités au sein d'une matrice d'incertitude et, de ce fait, de synthétiser un contrôleur robuste ne tenant compte que des variables d'état comme variables de prémisses. Cette démarche a été illustrée au travers d'un exemple d'application à la \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un drone quadrirotor, pour lequel des résultats encourageants ont été obtenus en simulation.

Conclusion générale

Durant ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la stabilisation en boucle fermée des systèmes non-linéaires représentés par des modèles T-S, au travers de l'application de la méthode directe de Lyapunov. Si une grande partie des résultats de la littérature ont été obtenus via une Fonction de Lyapunov Quadratique (**FLQ**), des travaux plus récents ont été proposés, afin de réduire le conservatisme des conditions **LMIs**, en considérant des fonctions non-quadratiques. Dans ce dernier cas, deux approches sont généralement considérées. La première consiste à utiliser des Fonctions de Lyapunov Non-Quadratiques (**FLNQ**) partageant la même structure d'interconnexion que le modèle T-S étudié. Celles-ci conduisent néanmoins à l'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance dans les conditions de stabilité, menant à la synthèse de contrôleurs localement stabilisants. La seconde approche permet, en s'affranchissant de l'apparition de ces dérivées dans les conditions de stabilité, d'aboutir à une méthodologie de synthèse globale. Celle-ci est basée sur l'utilisation de Fonctions de Lyapunov sous forme d'Intégrales Curvilignes (**FLIC**). Néanmoins, les résultats de la littérature aboutissent en stabilisation à des conditions **BMI**s, ou **LMI**s pour les seuls modèles T-S d'ordre inférieur ou égal à 2. Notons par ailleurs que, dans la plupart des travaux dévolus à la stabilisation des modèles T-S, la spécification des performances en boucle fermée est peu ou pas considérée. Ces constatations nous ont donc conduit à orienter nos travaux de manière à proposer les deux contributions principales suivantes :

- L'obtention de conditions de synthèse non-quadratiques de lois de commande, strictement **LMI**s et sans restriction d'ordre, pour les modèles T-S via des fonctions de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes. Celles-ci ont été obtenues grâce à une propriété de dualité, dont une preuve a été proposée dans ce contexte non-quadratique.
- L'obtention de conditions **LMI**s pour la synthèse (quadratiques et non-quadratiques)

de lois de commande, tenant compte de la spécification des performances en boucle fermée. Celles-ci ont été obtenues par l'application du concept de \mathcal{D} -stabilité, étendu présentement au cas des modèles T-S.

Dans le **premier chapitre**, les notions élémentaires et nécessaires à la compréhension des contributions proposées au cours de ce travail de thèse ont été présentées. Ainsi, après avoir présenté la classe des modèles T-S considérée, des résultats significatifs pour l'analyse de leur stabilité et de leur stabilisation, dans les contextes quadratique et non-quadratique, ont été rappelés. De plus, les définitions, lemmes usuels et résultats préliminaires, relatifs au concept de \mathcal{D} -stabilité, ont été présentés. Enfin, tout au long de ce chapitre, une analyse critique des résultats présentés a permis de mettre en évidence les problématiques traitées dans les chapitres suivants.

Le **second chapitre** a été consacré à la présentation de notre contribution sur l'analyse de la stabilité et la stabilisation des modèles T-S par l'utilisation d'une **FLIC**. Ainsi, dans un premier temps et après avoir montré qu'elle ne s'applique pas dans le contexte non-quadratique général, la validité d'une propriété de dualité (stabilité mutuelle du modèle considéré et de son dual) a été démontrée lorsqu'une **FLIC** est considérée. De plus, nous avons montré, au travers d'un exemple académique, que lorsque les conditions de stabilité sont obtenues au travers du modèle dual, une réduction de conservatisme pouvait être constatée. Enfin, fort de cette propriété de dualité, des conditions relâchées, strictement **LMIs** et sans restriction d'ordre, pour la synthèse de contrôleurs stabilisants globalement les modèles T-S ont pu être proposées.

Dans le **troisième chapitre**, nous nous sommes intéressés à la synthèse de contrôleurs pour les modèles T-S permettant de spécifier des performances en boucle fermée au travers du concept de \mathcal{D} -stabilité. Ainsi, plusieurs théorèmes basés sur l'utilisation d'une **FLQ** ont été proposés dans l'optique de réduire le conservatisme des conditions **LMIs**. Dans ce contexte, la synthèse de contrôleurs **PDC** et non-**PDC** a été considérée. Notons que, à l'inverse des lois de commande **PDC**, les lois de commande non-**PDC** nécessitent l'inversion en ligne d'une matrice de gain variable, ce qui peut être un inconvénient pour des applications embarquées dont les capacités de calculs sont limitées. Néanmoins, nous avons montré au travers de plusieurs exemples que les conditions relâchées proposées fournissent des résultats satisfaisant en terme de conservatisme pour ces deux types de contrôleurs, ce qui

permet de laisser aux concepteurs, selon l'application ciblée, le choix du type de lois de commande à employer. Enfin, des conditions non-quadratiques ont été proposées au travers d'une **FLNQ**. Celles-ci conduisant à une \mathcal{D} -stabilisation locale, une méthode d'estimation du domaine d'attraction a été considérée.

Enfin, dans le **quatrième chapitre**, l'ensemble des résultats du chapitre précédent a été étendu à la \mathcal{D} -stabilisation robuste des modèles T-S incertains. Ceux-ci sont généralement considérés pour tenir compte des incertitudes paramétriques d'un système non-linéaire donné. Là encore, des exemples de simulation ont permis d'évaluer le degré de conservatisme des différents théorèmes proposés. De plus, notons que l'ensemble des résultats présentés en stabilisation au cours des chapitres 1, 2 et 3 ne sont applicables que pour les modèles non-linéaires dont les non-linéarités ne dépendent que de l'état (hypothèse 1.2). Néanmoins, nous avons montré dans ce chapitre, au travers d'un exemple de \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un modèle de drone quadrirotor, que les modèles T-S incertains pouvaient également être avantageusement considérés lorsque les non-linéarités d'un modèle non-linéaire dépendent à la fois de l'état et de l'entrée. L'idée est ici de reporter les termes non-linéaires dépendants de l'entrée au sein des matrices d'incertitude du modèle T-S incertain, sans toutefois perdre le caractère exact de la modélisation sur un sous-espace compact de l'espace d'état.

L'ensemble des travaux effectués au cours de cette thèse ouvre la voie à de nombreuses perspectives.

Concernant les approches non-quadratiques proposées au second chapitre par la considération d'une **FLIC**, le principal verrou pour l'obtention de conditions **LMIs** en stabilisation ayant été levé et généralisé pour les modèles T-S sans restriction d'ordre, la voie est aujourd'hui ouverte pour l'extension de ces travaux à des problèmes plus complexes de l'automatique comme, par exemple pour le suivi de trajectoires [[Mansouri et al., 2009](#)], le retour de sortie [[Bouarar et al., 2013](#); [Guelton et al., 2009](#)], la synthèse d'observateurs et le diagnostic [[Ichalal et al., 2010](#); [Lendek et al., 2010](#); [Orjuela et al., 2009](#); [Zouari et al., 2011](#)], la synthèse de lois de commande ou d'observateurs pour les systèmes descripteurs [[Aouaouda et al., 2013](#); [Bouarar et al., 2010](#); [Marx et al., 2007](#)], etc.

De plus, notons qu'en raison de la nécessité de garantir l'indépendance du chemin des **FLIC** considérées, cette approche est limitée aux modèles T-S ne présentant pas de couplages non-linéaires des variables de prémisse (voir remarque 1.4). En d'autres termes, chacune des non-linéarités du modèle considéré ne peut dépendre que d'une variable d'état. Néanmoins, des travaux très récents ont permis de d'étendre cette approche pour l'analyse de la stabilité des modèles T-S dont les variables de prémisse peuvent être des combinaisons linéaires de plusieurs variables d'état, c'est-à-dire $z(t) = Lx(t)$ où L est une matrice constante réelle [Gonzalez et al., 2017]. Il conviendrait donc d'étendre ce résultat récent au cas de la stabilisation par le biais de l'approche duale proposée au second chapitre de ce manuscrit, mais aussi de poursuivre nos efforts pour une généralisation au cas des modèles T-S présentant des couplages non-linéaires des variables de prémisse.

Par ailleurs, la propriété de dualité présentée au chapitre 2 permet d'analyser la stabilité non-quadratique globale des modèles T-S via une **FLIC**. De plus, il a été montré, au travers d'un exemple numérique, que lorsque les conditions **LMI**s sont obtenues à partir du modèle dual, des résultats moins conservatifs pouvaient être obtenus. Ceci confirme les observations faites dans le cadre plus général de l'analyse duale de la stabilité des inclusion différentielles [Goebel, 2013; Goebel et al., 2006a,b]. Aussi, si la propriété de dualité ne peut être garantie globalement pour les modèles T-S lorsqu'une **FLNQ** classique est considérée, elle peut l'être au moins localement. Il serait donc intéressant de vérifier dans ce cas si une telle réduction de conservatisme peut être constatée. En outre, les modèles T-S constituant une classe particulière d'inclusions différentielles, une unification des résultats pourrait s'avérer particulièrement intéressante.

En ce qui concerne les résultats présentés pour la spécification de performances en boucle fermée des modèles T-S via le concept de \mathcal{D} -stabilité, là encore de nombreuses pistes de recherche peuvent être évoquées. Tout d'abord, et puisque nous n'avons traité que le cas de la \mathcal{D} -stabilisation, nous pourrions étendre ces travaux au cas du retour de sortie, du suivi de trajectoires où encore d'autres problèmes de l'automatique avancée. De plus, n'ayant considéré que le cas des incertitudes paramétriques au chapitre 4, une simple extension par la prise en compte d'un critère H_∞ permettrait de minimiser l'influence des perturbations externes. Ceci pourrait s'avérer particulièrement utile pour des applications telles que la stabilisation d'un drone quadrirotor, notamment pour améliorer la robustesse face aux perturbations ex-

ternes que pourrait représenter l'action du vent.

De plus, nous avons pu constater, au travers des différents exemples proposés aux chapitres 3 et 4, que le choix de la région **LMI** permet d'influencer la dynamique en boucle fermée du système considéré. Notamment, lorsque les valeurs propres s'éloignent fortement dans la partie gauche du plan complexe, les signaux de commande nécessitent des énergies importantes susceptibles d'outrepasser les capacités physiques des actionneurs. A contrario, le fait de ramener les valeurs propres dans une région moins éloignée de l'origine du plan complexe permet de diminuer le coût énergétique de la commande et donc d'éviter ces dépassements. Aussi, il serait intéressant d'étudier l'influence du choix des régions **LMI** pour identifier les liens avec d'autres techniques, telles l'utilisation de contraintes ou saturations sur l'entrée (voir par exemple [Bernal and Husek, 2005; Nguyen et al., 2016]).

En outre, les conditions de \mathcal{D} -stabilisation proposées au cours de ces travaux de thèse ne permettent que le choix d'une unique région **LMI** pour placer l'ensemble des valeurs propres du système considéré. Ainsi, l'approche proposée n'a de sens que pour les systèmes dont les variables d'état répondent à des dynamiques de nature similaire. Or, de nombreux systèmes présentent des dynamiques de natures différentes (lentes et/ou rapides). C'est le cas par exemple des systèmes mécatroniques faisant intervenir, au sein d'un même modèle, des dynamiques plus rapides pour leur partie électrique (électronique embarquée, modèles d'actionneurs et/ou capteurs) que pour leur partie mécanique. Ainsi, il pourrait donc être judicieux de nous intéresser à la spécification de régions **LMI** multiples pour l'amélioration des performances de tels systèmes. Cela pourrait être envisagé par exemple en s'inspirant d'approches de synthèse de lois de commande décentralisées [Guelton et al., 2010b; Jabri et al., 2011, 2009].

Enfin, notons que les résultats non-quadratiques proposés aux chapitres 3 et 4 pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S ont été obtenus au travers d'une **FLNQ** classique. Dans ce contexte, seule la stabilité asymptotique locale de la boucle fermée peut être garantie et l'estimation du domaine d'attraction a été proposée. Afin d'obtenir des conditions globales de \mathcal{D} -stabilisation non-quadratiques il apparaîtrait judicieux d'employer une **FLIC**. Une telle approche a été considérée dans [Bai et al., 2015; Lu et al., 2015]. Néanmoins, ces travaux récents sont entachés d'erreurs et ne sont donc pas valides (voir remarque 1.13 ainsi que l'annexe B pour plus de détails). De plus, remarquons que la définition de la \mathcal{D} -stabilité (dé-

inition (1.78)), associée à une **FLIC** (1.31) indépendante du chemin parcouru, conduirait pour un modèle T-S autonome à la condition de Lyapunov suivante :

$$2L \otimes \int_{\Gamma(\mathcal{O},x)} \psi^T P_\psi \cdot d\psi + M \otimes x^T (A_z P_z + P_z^T A_z^T) x < 0 \quad (4.47)$$

qui ne permet pas, en l'état, d'aboutir à des conditions **LMIs** du fait de la présence du terme intégral. Ainsi, la convexification de la condition (4.47) reste un problème ouvert et l'obtention de conditions **LMIs** garantissant la \mathcal{D} -stabilité globale et générique lorsqu'une **FLIC** est considérée constituerait un réel défi. Ceci permettrait, si une solution existe à ce problème, de proposer une généralisation des travaux préliminaires de [Rhee and Won, 2006], où des contraintes de \mathcal{D} -stabilité ont été introduites indépendamment pour chaque polytope constituant le modèle T-S, sans toutefois pouvoir garantir la \mathcal{D} -stabilité du modèle T-S dans sa globalité au regard de la théorie de Lyapunov.

Bibliographie

- Aouaouda, S., Chadli, M., Cocquempot, V., and Tarek Khadir, M. (2013). Multi-objective H-/ H_∞ fault detection observer design for Takagi–Sugeno fuzzy systems with unmeasurable premise variables : descriptor approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 27(12) :1031–1047.
- Assawinchaichote, W. (2014). Further results on robust fuzzy dynamic systems with LMI D-stability constraints. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 24(4) :785–794.
- Bachelier, O. (1998). *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en D-stabilité*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Toulouse, France.
- Bai, J., Lu, R., Liu, X., Xue, A., and Shi, Z. (2015). Fuzzy regional pole placement based on fuzzy Lyapunov functions. *Neurocomputing*, 167 :467–473.
- Bernal, M. and Guerra, T. M. (2010). Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(4) :815–822.
- Bernal, M. and Husek, P. (2005). Non-quadratic performance design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 15(3) :383.
- Blanco, Y., Perruquetti, W., and Borne, P. (2001). Non quadratic stability of nonlinear systems in the Takagi-Sugeno form. In *Control Conference (ECC), 2001 European*, pages 3917–3922. IEEE.
- Bouabdallah, S. (2007). *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.

- Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2010). Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi–Sugeno descriptors. *ISA transactions*, 49(4) :447–461.
- Bouarar, T., Guelton, K., and Manamanni, N. (2013). Robust non-quadratic static output feedback controller design for Takagi–Sugeno systems using descriptor redundancy. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(2) :739–756.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Brewer, J. W. (1978). Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(9) :772–781.
- Chadli, M. and Borne, P. (2012). *Multiple models approach in automation : Takagi-Sugeno fuzzy systems*. John Wiley & Sons.
- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2014). Non-PDC Controller Design for Takagi-Sugeno Models via Line-Integral Lyapunov Functions. In *IEEE World Congress on Computational Intelligence / IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2444–2450, Beijing, China.
- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2015a). LMI Conditions for Non-Quadratic Stabilization of T-S Models with Pole Placement Assignment. In *3rd International Conference on Control, Engineering and Information Technology (CEIT'2015)*, pages 1–6, Tlemcen, Algérie. IEEE.
- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2015b). Quadratic Design of D-Stabilizing Non-PDC Controllers for Quasi-LPV/T-S Models. In *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems (LPVS 2015), IFAC-PapersOnLine*, volume 48, pages 164–169, Grenoble.
- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2016). Quadratic Design of Robust Controllers for Uncertain TS Models with D-Stability Constraints. In *4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences (ICONS 2016), IFAC-PapersOnLine*, volume 49, pages 19–24, Reims, France. Elsevier.

- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2017a). Local D-stabilization of Uncertain T-S Fuzzy Models via Fuzzy Luapunov Functions. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2017)*, Naples, Italy.
- Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2017b). Uncertain T-S model-based robust controller design with D-stability constraints - A simulation study of quadrotor attitude stabilization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, (soumis en seconde lecture après révisions mineures).
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367.
- Chilali, M., Gahinet, P., and Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2270.
- De Oliveira, M., Skelton, R., and Moheimani, S. R. (2001). Perspectives in Robust Control. *Perspectives in Robust Control*, 268.
- Fang, C.-H., Liu, Y.-S., Kau, S.-W., Hong, L., and Lee, C.-H. (2006). A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of TS fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3) :386–397.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J., and Chilali, M. (1995). *MATLAB LMI control toolbox*.
- Gasso, K., Mourot, G., and Ragot, J. (2000). Fuzzy rule base optimisation : a pruning and merging approach. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 2000*, volume 1, pages 67–72 vol.1.
- Goebel, R. (2013). Lyapunov Functions and Duality for Convex Processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(4) :3332–3350.
- Goebel, R., Hu, T., and Teel, A. R. (2006a). Dual matrix inequalities in stability and performance analysis of linear differential/difference inclusions. In *Current trends in nonlinear systems and control*, pages 103–122. Springer.
- Goebel, R., Teel, A. R., Hu, T., and Lin, Z. (2006b). Conjugate convex Lyapunov functions for dual linear differential inclusions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(4) :661–666.

- Gonzalez, T., Sala, A., Bernal, M., and Robles, R. (2017). A Generalisation of Line-Integral Lyapunov Function for Takagi-Sugeno Systems. In *IFAC World Congress*, Toulouse.
- Graham, A. (1981). *Kronecker products and matrix calculus : with applications*, volume 108. Horwood England, UK.
- Guelton, K., Bouarar, T., and Manamanni, N. (2009). Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems-A descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19) :2796–2811.
- Guelton, K., Cherifi, A., and Arcese, L. (2014). Some Refinements on Stability Analysis and Stabilization of Second Order T-S Models Using Line-Integral Lyapunov Functions. In *19th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pages 6209–6214, Cape Town, South Africa.
- Guelton, K., Guerra, T.-M., Bernal, M., Bouarar, T., and Manamanni, N. (2010a). Comments on Fuzzy Control Systems Design via Fuzzy Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B*, 40(3) :970–972.
- Guelton, K., Manamanni, N., and Jabri, D. (2010b). H-infinity decentralized Static Output Feedback controller design for large scale Takagi-Sugeno systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–7. IEEE.
- Guerra, T.-M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.
- Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5) :823–829.
- Gutman, S. (1979). Root clustering of a real matrix in an algebraic region. *International Journal of Control*, 29(5) :871–880.
- Gutman, S. and Jury, E. (1981). A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :853–863.

- Hauser, J., Sastry, S., and Kokotovic, P. (1992). Nonlinear control via approximate input-output linearization : the ball and beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3) :392–398.
- Hong, S.-K. and Langari, R. (2000). An LMI-based H-infinity fuzzy control system design with TS framework. *Information sciences*, 123(3) :163–179.
- Hong, S. K. and Nam, Y. (2003). Stable fuzzy control system design with pole-placement constraint : an LMI approach. *Computers in Industry*, 51(1) :1–11.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2010). Brief paper : State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5) :897–908.
- Jaadari, A., Guerra, T.-M., Sala, A., Bernal, M., and Guelton, K. (2012). New controllers and new designs for continuous-time Takagi-Sugeno models. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–7, Brisbane, Australia.
- Jabri, D., Guelton, K., and Manamanni, N. (2011). Decentralized control of large scale switched Takagi-Sugeno systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 322–328. IEEE.
- Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., and Abdelkrim, M. N. (2009). Fuzzy Lyapunov decentralized control of Takagi-Sugeno interconnected descriptors. In *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (CICA)*, pages 34–40. IEEE.
- Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A., and Chinh, C. D. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 14(2) :40–49.
- Joh, J., Langari, R., Jeung, F. T., and Chung, W. J. (1997). A new design method for continuous Takagi-Sugeno fuzzy controller with pole placement constraints : An LMI approach. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 3, pages 2969–2974.
- Johansson, M., Rantzer, A., and Arzen, K. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(7) :713–722.

- Jury, E. (1971). "Inners" approach to some problems of system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(3) :233–240.
- Jury, E. (1974). *Inners Stability of Dynamic Systems*.
- Kalman, R. (1969). Algebraic characterization of polynomials whose zeros lie in certain algebraic domains. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 64(3) :818–823.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems, 3rd edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Kim, E. and Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy algebraic-equation systems which control-dependent state space. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 8(8) :523–533.
- Kiriakidis, K. (2001). Robust stabilization of the Takagi-Sugeno fuzzy model via bilinear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2) :269–277.
- Lee, D. H., Joo, Y. H., and Tak, M. H. (2014). Local stability analysis of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems : a fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, 257 :163–175.
- Lee, D. H., Park, J. B., and Joo, Y. H. (2011). A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(4) :785–791.
- Lee, D. H., Park, J. B., and Joo, Y. H. (2012). A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, 185(1) :230–248.
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2010). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, volume 262. Springer.
- Lendek, Z., Sala, A., Garcia, P., and Sanchis, R. (2013). Experimental application of Takagi-Sugeno observers and controllers in a nonlinear electromechanical system. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 15(3) :3 – 14.

- Liu, G., Liu, X., and Zeng, Y. (2013). A New Lyapunov Function Approach to Stability Analysis and Control Synthesis for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. In *25th Chinese Control and Decision Conference*, pages 3068–3073.
- Liu, X. and Zhang, Q. (2003). Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for TS fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(6) :830–839.
- Liu, X. and Zhong, S. (2007). T-S fuzzy model-based impulsive control of chaotic systems with exponential decay rate. *Physics Letters A*, 370(3) :260–264.
- Lu, R., Wang, M., Bai, J., Xue, A., and Zou, H. (2015). Pole placement with LMI constraint of fuzzy descriptor system. *Journal of the Franklin Institute*, 352(7) :2665–2678.
- Mansouri, B., Manamanni, N., Guelton, K., Kruszewski, A., and Guerra, T.-M. (2009). Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models. *Information Sciences*, 179(4) :446–457.
- Márquez, R., Guerra, T. M., Bernal, M., and Kruszewski, A. (2015). Eliminating the parameter-dependence of recent LMI results on controller design of descriptor systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6. IEEE.
- Marquez, R., Guerra, T.-M., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2013). Improvements on Non-quadratic Stabilization of Takagi-Sugeno Models via Line-Integral Lyapunov Functions. In *IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Science*, pages 473–478.
- Marx, B., Koenig, D., and Ragot, J. (2007). Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis. *IET Control Theory & Applications Applications*, 1(5) :1487–1495.
- Morère, Y. (2001). *Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis.
- Mozelli, L., Palhares, R., and Avellar, G. (2009a). A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179(8) :1149–1162.

- Mozelli, L. A., Palhares, R. M., Souza, F. O., and Mendes, E. M. A. M. (2009b). Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, 45 :1580–1583.
- Nguang, S. K. and Shi, P. (2006). Robust H-infinity output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic D-stability constraints : An LMI approach. *Information Sciences*, 176(15) :2161–2191.
- Nguyen, A.-T., Dambrine, M., and Lauber, J. (2016). Simultaneous Design of Parallel Distributed Output Feedback and Anti-windup Compensators for Constrained Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *Asian Journal of Control*.
- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2006a). Switching fuzzy controller design based on switching Lyapunov function for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 36(1) :13–23.
- Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2006b). Switching Fuzzy Model-based Control for Dynamical Systems with Input Nonlinearity. In *IEEE International Conference on Fuzzy systems*, pages 285–290, Vancouver, Canada.
- Oliveira, R. C. C. F., Oliveira, M. C. D., and Peres, P. L. D. (2011). Robust State Feedback LMI Methods for Continuous-Time Linear Systems : Discussions, Extensions and Numerical Comparisons. In *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pages 1038–1043, Denver, USA.
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2009). On the simultaneous state and unknown input estimation of complex systems via a multiple model strategy. *IET Control Theory & Applications*, 3(7) :877–890.
- Pan, J.-T., Guerra, T. M., Fei, S.-M., and Jaadari, A. (2012). Nonquadratic stabilization of continuous T-S fuzzy models : LMI solution for a local approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(3) :594–602.
- Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O., and Bernussou, J. (2000). A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30.

- Pitarch, J. and Sala, A. (2014). Multicriteria fuzzy-polynomial observer design for a 3DoF nonlinear electromechanical platform. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 30 :96 – 106.
- Rhee, B. J. and Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1211–1228.
- Sala, A. (2009). On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Review in Control*, 33(1) :48–58.
- Sala, A. and Ariño, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24) :2671–2686.
- Seidi, M., Hajiaghamemar, M., and Segee, B. (2012). Fuzzy control systems : LMI-based design. In Iqbal, S., Boumella, N., and Garcia, J. F., editors, *Fuzzy Controllers-Recent Advances in Theory and Applications*, chapter 18, pages 441–464. InTech.
- Shamma, J. S. and Cloutier, J. R. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2) :256–263.
- Sheikhpour, S. and Shouraki, S. B. (2013). A model-based fuzzy controller using the parallel distributed compensation method for quadrotor attitude stabilization. In *2013 21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, pages 1–6. IEEE.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K. M. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor and Francis, London.
- Spong, M., Khorasani, K., and Kokotovic, P. (1987). An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 3(4) :291–300.
- Strang, G. (2005). *Linear Algebra*, Spring 2005.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132.

- Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4) :582–589.
- Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :250–265.
- Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H. O. (2007). A Descriptor System Approach to Fuzzy Control System Design via Fuzzy Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3) :333–341.
- Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2) :135–156.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4) :525–538.
- Teixeira, M., Assunção, E., and Avellar, R. G. (2003a). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5) :613–623.
- Teixeira, M. C., Assuncao, E., and Avellar, R. G. (2003b). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5) :613–623.
- Tognetti, E. S., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. P. (2011). Improved stabilisation conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems via fuzzy integral Lyapunov functions. In *American Control Conference*, pages 4970–4975.
- Toulotte, P., Delprat, S., Guerra, T., and Boonaert, J. (2004). Robust fuzzy control with pole placement in LMI region : application to an automated vehicle. *IEEE VTS-VPP*, 4.
- Toulotte, P.-F., Delprat, S., Guerra, T.-M., and Boonaert, J. (2008). Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in LMI region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(5) :756–768.

- Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2) :324–332.
- Wang, H., Tanaka, K., and Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23.
- Xie, L. and De Souza, C. E. (1992). Robust H infinity control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191.
- Yacef, F., Boudjedir, H., Bouhali, O., Khebbache, H., and Boudjema, F. (2012a). Quadrotor Attitude Stabilization Using State Feedback Controller : an LMI Approach. In *Proceeding of International Conference on Electrical Engineering (ICEE'12)*.
- Yacef, F., Bouhali, O., Khebbache, H., and Boudjema, F. (2012b). Takagi-Sugeno model for quadrotor modelling and control using nonlinear state feedback controller. *International Journal of Control Theory and Computer Modelling (IJCTCM)*, 2(3) :9–24.
- Zhou, K. and Khargonekar, P. P. (1988). Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10(1) :17–20.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2000). *Advanced Engineering Mathematics, second edition*. Jones and Bartlett.
- Zouari, T., Pekpe, K. M., Cocquempot, V., and Ksouri, M. (2011). Data projection method for sensor Fault Detection and Isolation on nonlinear systems based on Takagi Sugeno model. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pages 109–114. IEEE.

Annexe A

Définitions et lemmes usuels pour les intégrales curvilignes

Dans cet annexe, nous rappelons les définitions, théorèmes et notions élémentaires nécessaires à la démonstration de la propriété de dualité 2.1 présentée dans le chapitre 2.

Rappelons tout d'abord la définition d'une intégrale curviligne.

Définition A.1. [Zill and Cullen, 2000] : Soit $v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel. Soient $\tau \in [t_0, t]$ et $\Gamma(\mu(t_0), \mu(t)) \in \Omega$ une courbe lisse par morceaux, où les extrémités sont données par $\mu(t_0)$ et $\mu(t)$. L'intégrale curviligne le long de Γ dans la direction de τ est définie par :

$$\mathcal{I}(\mu(t)) = \int_{\Gamma(\mu(t_0), \mu(t))} v(\phi) \cdot d\phi = \int_{t_0}^t v(\mu(\tau)) \cdot \dot{\tau} d\tau \quad (\text{A.1})$$

où ϕ est un vecteur fictif pour l'intégrale curviligne, $d\phi$ est un déplacement infinitésimal et " \cdot " représente un produit scalaire.

Le théorème du gradient permet alors d'obtenir la dérivée d'une intégrale curviligne lorsque celle-ci est indépendante du chemin parcouru.

Lemme A.1. (Théorème du gradient, [Zill and Cullen, 2000]) : Si le champ vectoriel v est le gradient d'un champ scalaire V , c'est-à-dire si $v(\mu(t)) = \nabla V(\mu(t))$, alors v est dit conservatif et :

$$\mathcal{I}(\mu(t)) = \int_{\Gamma(\mu(t_0), \mu(t))} v(\phi) \cdot d\phi = V(\mu(t)) - V(\mu(t_0)) \quad (\text{A.2})$$

Dans ce cas, l'intégrale curviligne est indépendante du chemin parcouru et sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{\mathcal{J}}(\mu(t)) = \nabla V(\mu(t)) \cdot \dot{\mu}(t) = v(\mu(t)) \cdot \dot{\mu}(t) \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir l'indépendance du chemin de l'intégrale sont données par le lemme suivant.

Lemme A.2. (Conditions de l'indépendance du chemin, [Zill and Cullen, 2000]) : Soit $v(\mu) = [v_1(\mu), \dots, v_n(\mu)]^T$ et $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que (A.1) soit indépendante du chemin parcouru sont :

$$\frac{\partial v_i(\mu)}{\partial \mu_j} = \frac{\partial v_j(\mu)}{\partial \mu_i}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (\text{A.4})$$

Rappelons enfin quelques propriétés élémentaires des intégrales, utilisées pour la démonstration du théorème 2.1.

Propriété A.1. (Positivité de l'intégrale) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors si $f > 0$, on a pour des scalaires réels quelconques $a < b$ et $\forall s \in [a, b]$ et $f(s) > 0$, les propriétés suivantes :

$$\int_a^b f(s) ds > 0 \quad (\text{A.5})$$

De plus,

$$\int_a^b f(s) ds = - \int_b^a f(s) ds \quad (\text{A.6})$$

Propriété A.2. (Relation de Chasles) : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \leq b \leq c$. On a alors :

$$\int_a^c f(s) ds = \int_a^b f(s) ds + \int_b^c f(s) ds \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Commentaires sur la D-stabilisation non-quadratique des modèles T-S

Dans deux articles récents [Bai et al., 2015; Lu et al., 2015], une tentative a été menée dans le but de proposer de nouvelles conditions de \mathcal{D} -stabilité non-quadratique, indépendantes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance, pour les modèles T-S. L'objectif de cet annexe est de mettre en évidence que ces résultats ne sont pas corrects et que l'obtention de conditions globales de \mathcal{D} -stabilité dans le cadre non-quadratique avec une FLIC reste à ce jour un problème ouvert. Nous focaliserons ici uniquement sur le résultat proposé dans [Bai et al., 2015] puisque celui de [Lu et al., 2015] n'est autre qu'une extension directe au cas des systèmes descripteurs.

Ainsi, dans [Bai et al., 2015], les résultats principaux sont proposés sous la forme d'un lemme préliminaire (référéncé lemme 1 dans cet article et rappelé ci-dessous par le lemme B.1) comme des conditions suffisantes de \mathcal{D} -stabilité pour les modèles T-S autonomes (2.3). Les autres résultats de cette étude (référéncés dans l'article par les Théorèmes 1, 2 et Corollaire 1) sont basés sur ce lemme préliminaire. Nous nous focalisons donc sur la preuve de ce lemme qui peut être remise en cause par les trois points mentionnés ci-dessous.

Lemme B.1. (Lemme 1 dans [Bai et al., 2015]) *Le modèle T-S (2.3) est \mathcal{D} -stable s'il existe des matrices $P_z = \sum_{i=1}^r h_i(z)P_i$, N_1 et N_2 satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\begin{bmatrix} L \otimes P_z - I \otimes (A_z N_1 + N_1^T A_z^T) & M \otimes P_z + I \otimes N_1^T - I \otimes A_z N_2 \\ (*) & I \otimes (N_2 + N_2^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.1})$$

avec

$$P_i = \begin{bmatrix} d_1^{\alpha_{il}} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{1,2} & d_2^{\alpha_{il}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ p_{1,n} & \dots & p_{n-1,n} & d_n^{\alpha_{il}} \end{bmatrix}$$

Point 1. Dans la preuve du lemme B.1 proposée dans [Bai et al., 2015], une erreur a été commise en considérant un cas particulier (avec P_i donné ci-dessus) d'une Fonction candidate de Lyapunov Non Quadratique (FLNQ) conventionnelle donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t)P_z x(t) \quad (\text{B.2})$$

au lieu d'une FLIC [Rhee and Won, 2006] :

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(\mathcal{O}, x(t))} \phi^T P_\phi \cdot d\phi \quad (\text{B.3})$$

Évidemment, (B.2) n'est pas équivalente à (B.3). De plus, on ne peut pas parler d'indépendance du chemin parcouru pour (B.2) et donc, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance devraient apparaître dans les conditions de stabilité telles que :

$$\dot{V}(x(t)) = 2x^T(t)P_z \dot{x}(t) + x^T(t)\dot{P}_z x(t) \quad (\text{B.4})$$

qui dépend des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance $\dot{P}_z = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(x(t))P_i$. Une première réserve concernant les travaux de [Bai et al., 2015] réside dans le fait que ces dérivées n'apparaissent pas dans les conditions suffisantes proposées dans le lemme B.1.

Remarque B.1. On peut ajouter que (B.2) est un cas particulier inutile d'une FLNQ standard (puisque une structure spéciale est imposée pour $P_0 + P_i$). Dans ce contexte, poser $P_z = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))P_i$ avec P_i libres semble plus approprié pour obtenir des résultats moins conservatifs. Des conditions non-quadratiques générales pour la \mathcal{D} -stabilisation des modèles T-S peuvent être trouvées dans [Cherifi et al., 2015a].

Point 2. La preuve du lemme B.1 dans [Bai et al., 2015] est basée sur l'hypothèse que la propriété de dualité (stabilité mutuelle du modèle primal et de son dual) est valide dans la cadre

non-quadratique général. Bien entendu, dans cet article, aucune preuve de cette propriété n'a été fournie et nous avons vu, dans le second chapitre de ce manuscrit, que si elle pouvait être garantie lorsqu'une **FLIC** est considérée, ce n'est pas le cas lorsque des **FLNQ** conventionnelles le sont. Ce point fait donc l'objet de notre seconde critique vis-à-vis des travaux présentés dans [Bai et al., 2015].

Point 3. Supposons que les points 1 et 2 mentionnés ci-dessus aient été résolus, i.e. qu'une **FLIC** ait été considérée à la place d'une **FLNQ** dans la preuve du lemme (B.1) proposée dans [Bai et al., 2015] (le point 2 ayant été démontré dans ce cas au chapitre 2 de ce manuscrit). Notons qu'en considérant le modèle T-S (2.3) et la **FLIC** (B.3), à partir de (B.4) on a :

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) = x^T(t)P_z A_z^T x(t) = x^T(t)A_z P_z x(t) \quad (\text{B.5})$$

En considérant la condition de \mathcal{D} -stabilité donnée dans la définition 1.3, on obtient :

$$L \otimes 2 \int_{\Gamma(0,x(t))} \Psi^T P_\Psi \cdot d\Psi + M \otimes \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) + M^T \otimes \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) < 0 \quad (\text{B.6})$$

Évidemment, du fait de la présence du terme intégral dans (B.6), il est difficile (voire impossible) d'aboutir à une solution convexe, c'est-à-dire d'obtenir des conditions **LMIs** de \mathcal{D} -stabilité à partir de la définition 1.3, comme proposées dans [Bai et al., 2015]

Remarque B.2. Comme mentionné dans le point 3 et en raison de la structure intégrale de la **FLIC** (B.3), il n'est pas possible d'obtenir des conditions globales de \mathcal{D} -stabilité à partir de la définition 1.3 pour les modèles T-S dans le cadre non-quadratique. Un compromis a été proposé dans [Rhee and Won, 2006] (voir l'annexe D dans [Rhee and Won, 2006]). Celui-ci consiste à appliquer des contraintes de \mathcal{D} -stabilité pour chacun des sous-modèles avec des fonctions de Lyapunov quadratiques valables localement. Mais, en considérant une telle approche locale, aucune garantie ne peut être apportée quant à la \mathcal{D} -stabilité du modèle T-S dans sa globalité.

En conclusion, sur la base des remarques faites dans les points 1, 2 et 3 ci-dessus, les résultats proposés dans [Bai et al., 2015] sont incorrectes. De plus, ces résultats ont été étendus au cas des modèles descripteurs en suivant les mêmes étapes dans [Lu et al., 2015]. Ces derniers sont donc également incorrectes.

Annexe C

Formulations de quelques régions LMI

Dans cet annexe, nous présentons la formulation des matrices L et M , utiles pour l'application de la définition générique 1.2 de la \mathcal{D} -stabilité, permettant de définir plusieurs régions LMI [Bachelier, 1998; Chadli and Borne, 2012; Chilali and Gahinet, 1996].

- Demi-plan gauche ouvert :

Cette région LMI est décrite par :

$$R(\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda + \bar{\lambda} < 0 \quad (\text{C.1})$$

Il suffit donc de prendre $L = 0$ et $M = 1$. Dans ce cas, on se ramène aux conditions usuelles de stabilité.

- Demi-plan gauche défini par $Re(\lambda) < -\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+$:

Cette région LMI est décrite par :

$$Re(\lambda) < -\beta \Leftrightarrow 2\beta + \lambda + \bar{\lambda} < 0 \quad (\text{C.2})$$

Il suffit donc de prendre $L = 2\beta$ et $M = 1$. Dans ce cas, on se ramène aux conditions classiques de stabilité avec un taux de décroissance β .

Demi-plan droit défini par $Re(\lambda) > -\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}_+$: Cette région est décrite par :

$$Re(\lambda) > -\beta \Leftrightarrow -2\beta - \lambda - \bar{\lambda} < 0 \quad (C.3)$$

Il suffit donc de prendre $L = -2\beta$ et $M = -1$.

- Bande verticale : Une bande verticale est définie par deux bornes β_1 et β_2 , avec $\beta_2 > \beta_1 \in \mathbb{R}_+$.

Elle est décrite par :

$$-\beta_2 < R(\lambda) < -\beta_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\beta_1 + \lambda + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & -2\beta_2 - (\lambda + \bar{\lambda}) \end{bmatrix} < 0 \quad (C.4)$$

Il suffit donc de prendre $L = \begin{bmatrix} 2\beta_1 & 0 \\ 0 & -2\beta_2 \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- Bande horizontale : Une bande horizontale est définie par deux bornes $-a$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Elle est décrite par :

$$|\text{Im}(\lambda)| < a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2a & \lambda - \bar{\lambda} \\ -\lambda + \bar{\lambda} & 2a \end{bmatrix} < 0 \quad (C.5)$$

Il suffit donc de prendre $L = \begin{bmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Cercle : Un cercle de centre $(q; 0)$ et de rayon r peut être décrit par :

$$|\lambda - q| < r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & \lambda - q \\ \bar{\lambda} - q & -r \end{bmatrix} < 0 \quad (C.6)$$

Il suffit donc de prendre $L = \begin{bmatrix} -r & -q \\ -q & -r \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Secteur conique : Un secteur conique orienté à gauche et défini par son apex γ et un angle θ

est décrit par :

$$|\operatorname{Im}(\lambda)| < -\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (\operatorname{Re}(\lambda) + \gamma) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta(\lambda + \bar{\lambda} + 2\gamma) & \sin\theta(\lambda - \bar{\lambda}) \\ \sin\theta(-\lambda + \bar{\lambda}) & \cos\theta(\lambda + \bar{\lambda} + 2\gamma) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.7})$$

Il suffit donc de prendre $L = \begin{bmatrix} 2\gamma \cos\theta & 0 \\ 0 & 2\gamma \cos\theta \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Contribution à la commande des modèles Takagi-Sugeno : approche non-quadratique et synthèse \mathcal{D} -stable

Ce travail de thèse traite de l'analyse de la stabilité et la stabilisation des systèmes non-linéaires représentés par des modèles T-S. L'objectif est de réduire le conservatisme des conditions de stabilité, obtenue par la méthode directe de Lyapunov, et écrites, dans la mesure du possible, sous forme de LMIs. Dans ce cadre, deux contributions principales ont été apportées. Tout d'abord, nous avons proposé de nouvelles conditions de synthèse non-quadratique de lois de commande, strictement LMIs et sans restriction d'ordre, pour les modèles T-S via des FLICs. En effet, dans ce contexte, les résultats de la littérature ne sont valables que pour les modèles T-S d'ordre inférieur ou égal à 2. Afin de lever cette restriction, les conditions ont été obtenues grâce à la démonstration d'une propriété de dualité. Ensuite, peu de travaux traitant de la spécification des performances en boucle fermée, de nouvelles conditions LMIs (quadratiques et non-quadratiques) ont été proposées via le concept de \mathcal{D} -stabilité. Dans un premier temps, la synthèse de lois de commande PDC et non-PDC \mathcal{D} -stabilisantes a été proposée pour les modèles T-S nominaux. Ensuite, ces résultats ont été étendus au cas des modèles T-S incertains. De plus, nous avons mis en évidence, au travers d'un exemple de \mathcal{D} -stabilisation en attitude d'un modèle de drone quadricoptère, que les modèles T-S incertains pouvaient être avantageusement considérés lorsque les non-linéarités d'un modèle non-linéaire dépendent à la fois de l'état et de l'entrée.

Modèles Takagi-Sugeno (**T-S**), Stabilisation robuste, Inégalités Linéaires Matricielles (**LMIs**), Fonctions de Lyapunov Intégrales Curvilignes (**FLIC**), \mathcal{D} -stabilité.

Contribution to the design of control laws for Takagi-Sugeno models: non-quadratic approach and \mathcal{D} -stability synthesis

This work deals with the stability analysis and the stabilization of nonlinear systems represented by T-S models. The goal is to reduce the conservatism of the stability conditions, obtained through the direct Lyapunov method and written, when it is possible, as LMIs. In this framework, two main contributions have been proposed. First of all, we have proposed some new conditions based on FLICs, strictly LMIs and without any order restrictions, for the non-quadratic design of control laws devoted to stabilize T-S models. Indeed, in this non-quadratic context, the existing works are only available for 2nd order T-S models. In order to unlock this restriction, the proposed conditions have been obtained based on the proof of a dual property. Then, starting from the fact that few works deals with the closed-loop performances specification, some new LMI conditions (quadratic and non-quadratic) have been proposed via the \mathcal{D} -stability concept. As a first step, \mathcal{D} -stabilizing PDC and non-PDC controller design has been considered for nominal T-S models. Then, these results have been extended to uncertain T-S models. Moreover, it has been highlighted, from an example of the attitude \mathcal{D} -stabilization of a quadrotor model, that we can make use of uncertain T-S models to cope with nonlinear models involving nonlinearities depending on both state and input variables.

Takagi-Sugeno (**T-S**) models, Robust stabilization, Linear Matrix Inequalities (**LMIs**), Line Integral Lyapunov Functions (**FLIC**), \mathcal{D} -stability.

Discipline : AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE

Spécialité : AUTOMATIQUE

Université de Reims Champagne-Ardenne

EA 3804, Centre de recherche en Sciences et Techniques
de l'Information et de Communication

UFR Sciences Exactes et Naturelles Moulin de la Housse BP
1039, 51687 Reims CEDEX 2 FRANCE