



**HAL**  
open science

# Quantification de biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire par résonance magnétique de flux 4D

Sébastien Levilly

► **To cite this version:**

Sébastien Levilly. Quantification de biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire par résonance magnétique de flux 4D. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. École centrale de Nantes, 2020. Français. NNT : 2020ECDN0007 . tel-02880144v2

**HAL Id: tel-02880144**

**<https://hal.science/tel-02880144v2>**

Submitted on 4 Jan 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies*

*de l'Information et de la Communication*

Spécialité : Signal, Image, Vision

Par

**Sébastien LEVILLY**

**Quantification de biomarqueurs hémodynamiques en imagerie  
cardiovasculaire par résonance magnétique de flux 4D**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 12/05/2020

Unité de recherche : Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N)

## Rapporteurs avant soutenance :

Christian Heinrich  
Nadjia Kachenoura

Professeur des Universités, Université de Strasbourg, ICube, Strasbourg  
Chargé de Recherche, INSERM, LIB, Paris

## Composition du Jury :

Président : Etienne Mémin  
Examinatrice : Monica Sigovan

Directeur de Recherche INRIA, IRISA, Rennes  
Chargé de Recherche CNRS, CREATIS, Lyon

Dir. de thèse : Jérôme Idier  
Co-enc. de thèse : Perrine Paul-Gilloteaux

Directeur de Recherche CNRS, LS2N, Nantes  
Ingénieur de Recherche CNRS, SFR Santé - Institut du Thorax, Nantes

## Invité(s)

Jean-Michel Serfaty  
David Le Touzé

Professeur des Universités et Personnel Hospitalier, CHU de Nantes  
Professeur des Universités, ECN, LHEEA, Nantes



# Remerciements

Pour commencer, je souhaite remercier mon directeur de thèse, Jérôme Idier, qui m'a encadré tout au long de cette thèse. Grâce à lui, j'ai pu consolider mes connaissances sur la résolution des problèmes inverses et le traitement du signal. Plus précisément, je le remercie pour sa patience et son altruisme scientifique.

Ensuite, j'aimerais remercier l'ensemble des membres du projet *MRI-Quantif* qui m'ont permis d'interagir avec des spécialistes de différentes disciplines : traitement de l'image, mécanique des fluides et médecine. En particulier, j'aimerais saluer David Le Touzé pour sa contribution notamment avec la modélisation de la vitesse incompressible. De plus, je suis reconnaissant envers Jean-Michel Serfaty qui, par son expérience médicale, a su me guider pour trouver les axes pertinents de cette étude. Enfin, j'aimerais remercier Perrine Paul-Gilloteaux pour son expertise sur le traitement des images.

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans la contribution de membres extérieurs au projet. Grâce à Loïc Bousset et Monica Sigovan, j'ai pu utiliser des simulations numériques des fluides au sein de carotides mesurées sur des patients. Une large part de l'analyse des résultats m'aurait été impossible sans leur générosité. Ensuite, je souhaite remercier un stagiaire, Fakher Sagheer, qui a travaillé sur une idée qui me tenait à cœur : le modèle de vitesse incompressible. Enfin, je veux saluer Thomas Puiseux, désormais docteur de l'Université de Montpellier, pour nos riches discussions et sa sympathie.

Plus généralement, je suis reconnaissant du cadre de travail apporté par le Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N). En particulier, l'état d'esprit de l'équipe SIMS m'a permis de profiter d'interventions extérieures et ainsi d'élargir le spectre de mes connaissances. J'ai une pensée toute particulière pour Saïd Moussaoui, membre du projet *MRI-Quantif*, qui a fait en sorte que mes conditions de travail me permettent d'avancer sereinement tout au long de cette thèse.

Du point de vue personnel, je souhaite dédier cette thèse à mes deux parents, Florence et Edmond, qui m'ont donné l'opportunité de choisir mon avenir. J'espère, à travers le déroulement de cette thèse de doctorat, les rendre fier de mon parcours.

Enfin, la famille au sens large est un élément essentiel de mon caractère. J'ai donc une pensée pour toute ma famille. Durant ces quelques années de travail et plus encore, j'ai eu la chance de partager mon quotidien avec une personne exceptionnelle, Myriam, et je suis reconnaissant du soutien qu'elle m'a donné.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Les biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire</b>	<b>13</b>
1.1 Le système cardiovasculaire	13
1.2 Structure des vaisseaux sanguins	16
1.3 Les pathologies cardiovasculaires	17
1.3.1 Affections des vaisseaux sanguins	18
1.3.2 Affections du myocarde	18
1.4 Les biomarqueurs hémodynamiques	19
<b>2 L'acquisition par IRM de flux 4D et ses contraintes</b>	<b>25</b>
2.1 Modèle direct de l'IRM de flux 4D	26
2.1.1 Signal de Résonance Magnétique Nucléaire	27
2.1.2 Acquisition par IRM de flux 4D	29
2.2 Rapport signal sur bruit en IRM de flux 4D	36
2.2.1 Le rapport signal du bruit	36
2.2.2 Conditions d'acquisition clinique	38
2.3 Quantification des biomarqueurs hémodynamiques en IRM de flux 4D	39
2.3.1 Problématique	39
2.3.2 Axes de recherche	41
<b>3 Régularisation du champ de vitesse</b>	<b>43</b>
3.1 État de l'art	44
3.1.1 Adéquation aux données	44
3.1.2 Régularisation	44
3.2 Filtrage spatio-temporel	49
3.2.1 Espace à divergence nulle	49
3.2.2 Démarche proposée	51
3.2.3 Condition de bord	52
3.3 Observations des performances	52
3.3.1 Méthode de validation	52
3.3.2 Observation des performances	54
3.4 Discussion des résultats	57
3.4.1 Erreur de modélisation	57
3.4.2 Perspectives	58
3.5 Synthèse	61
<b>4 Vers une estimation rapide du cisaillement par modélisation locale</b>	<b>63</b>
4.1 Le cisaillement à la paroi	65

4.2	État de l'art	66
4.2.1	Simulation numérique des fluides	66
4.2.2	Calcul direct sur des mesures <i>in-situ</i>	68
4.3	Algorithme proposé : PaLMA	71
4.3.1	Modélisation locale de la paroi	72
4.3.2	Modélisation locale du champ de vitesse	73
4.3.3	Estimation du cisaillement à la paroi	76
4.3.4	Amélioration de la quantification du cisaillement à la paroi	77
4.4	Synthèse	79
<b>5</b>	<b>Modélisation locale de la paroi</b>	<b>81</b>
5.1	Modèle de paroi	82
5.1.1	Surface quadrique	82
5.1.2	Surface cubique	86
5.2	Estimation de la paroi	87
5.3	Sources d'erreur	88
5.3.1	Erreur d'approximation	89
5.3.2	Erreur sur la segmentation	91
5.4	Synthèse	92
<b>6</b>	<b>Modélisation locale du champ de vitesse</b>	<b>93</b>
6.1	Proposition de modèle de vitesse	94
6.1.1	Modèle linéaire	95
6.1.2	Modèle à fonctions séparables univariées	95
6.1.3	Modèle incompressible	96
6.2	Modèle direct de l'IRM de flux 4D	98
6.3	Démarche proposée	100
6.3.1	Norme $L_2$	104
6.3.2	Norme de Huber	106
6.4	Synthèse	108
<b>7</b>	<b>Amélioration de la quantification du cisaillement</b>	<b>109</b>
7.1	Sources d'erreur de quantification du cisaillement à la paroi	109
7.2	Stratégie pour améliorer la quantification du cisaillement à la paroi	111
7.3	Estimateur basé sur la norme quadratique	111
7.4	Estimateur basé sur la norme de Huber	112
7.5	Synthèse	114
<b>8</b>	<b>Étude de performance</b>	<b>115</b>
8.1	Méthode de validation	115
8.1.1	Critères de performance	115
8.1.2	Écoulements étudiés	117
8.1.3	Comparaison à un estimateur	118
8.2	Évaluation des solutions proposées	118
8.2.1	Choix de l'ordre des polynômes	119
8.2.2	Comparaison entre les normes $L_2$ et de Huber	121
8.2.3	Comparaison des stratégies de traitement <i>a posteriori</i>	125
8.2.4	Comparaison des modèles de vitesse	127
8.2.5	Influence du filtre IRM	129

8.2.6 Synthèse . . . . .	131
8.3 Étude de robustesse . . . . .	132
8.3.1 Étude en fonction du rapport signal sur bruit et de la résolution . . .	132
8.3.2 Étude en fonction de l'érosion/dilatation de la segmentation . . . .	136
8.4 Synthèse . . . . .	141
<b>Conclusion</b>	<b>143</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>145</b>
<b>A Écoulements analytiques et simulés</b>	<b>147</b>
A.1 Écoulement analytique de Poiseuille . . . . .	147
A.2 Écoulement analytique de Womersley . . . . .	147
A.3 Simulation numérique des fluides de 4 carotides . . . . .	149
<b>B Résultats supplémentaires</b>	<b>153</b>
B.1 Étude sur le choix de la norme . . . . .	153
B.1.1 Modèle linéaire . . . . .	153
B.1.2 Modèle à fonctions séparables univariées . . . . .	156
B.1.3 Modèle incompressible . . . . .	158
B.2 Étude sur les solutions de post-traitement . . . . .	160
B.2.1 Modèle linéaire . . . . .	160
B.2.2 Modèle incompressible . . . . .	161
B.3 Étude sur le choix du modèle de vitesse . . . . .	162
B.4 Influence du filtre IRM . . . . .	163
B.5 Étude de robustesse en fonction du rapport signal sur bruit et de la réso- lution . . . . .	164
B.5.1 $SE R^{mag}$ . . . . .	164
B.5.2 $SE R$ . . . . .	165
B.5.3 Corrélation $r$ . . . . .	167
B.5.4 Erreur angulaire moyenne $\bar{\theta}$ . . . . .	168
B.5.5 Erreur angulaire médiane $\theta_m$ . . . . .	170
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>





# Introduction

## Contexte

Cette thèse s'inscrit dans un projet nommé *MRI-Quantif*. Ce projet, financé par la région Pays de la Loire et l'École Centrale de Nantes, est multidisciplinaire. Il regroupe des membres du Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N), du Laboratoire en recherche hydrodynamique, énergétique et environnement atmosphérique (LHEEA) et de l'Institut du Thorax de Nantes. Ce projet a pour objectif d'améliorer la quantification de biomarqueurs en imagerie cardiovasculaire. Pour atteindre cet objectif, le travail a été séparé selon deux axes :

1. Développer des outils permettant l'amélioration de la quantification de biomarqueurs hémodynamiques ;
2. Valider les mesures et estimations de biomarqueurs sur un banc de test dont l'écoulement fluide est maîtrisé.

Chacun de ces axes ont fait l'objet d'une thèse. Mon travail porte alors sur le premier de ces deux axes de travail. Cependant, j'ai pu collaborer avec Jean-Michel Serfaty (CHU de Nantes-Institut du Thorax) et mon collègue doctorant Marco Castagna (ECN-LHEEA) lors de séance d'acquisition au CHU de Nantes (Hopital Laënnec). Par ailleurs, la thèse a été réalisé au sein du LS2N sous la direction de Jérôme Idier (CNRS-LS2N), et l'encadrement de David Le Touzé (ECN-LHEEA) et Perrine Paul-Gilloteaux (CNRS-SFR Santé-Institut du Thorax).

## Objectifs de la thèse

Un biomarqueur, dans le contexte de l'imagerie cardiovasculaire, est une information quantitative extraite de données mesurées permettant d'établir un lien avec une pathologie. En imagerie cardiovasculaire, il existe deux types de biomarqueur : anatomique et hémodynamique. Dans ce manuscrit, on ne s'intéresse qu'à cette seconde catégorie. L'obtention de biomarqueurs hémodynamiques est possible grâce à l'acquisition d'un champ de vitesse au sein d'un patient. De nos jours, l'imagerie par résonance magnétique (IRM) fait office de référence pour une acquisition précise de la vitesse. La routine clinique emploie majoritairement une séquence d'acquisition nommée IRM de flux ou IRM par contraste de phase. Ces séquences ne permettent d'obtenir qu'une section 2D à la fois. Depuis plus de dix ans, une nouvelle séquence d'acquisition, nommée IRM de flux 4D, se développe et se démocratise ([Markl, 2005](#); [Markl et al., 2012](#)). Elle permet de mesurer l'anatomie et les trois composantes de la vitesse en tout point d'une grille 3D + temps. L'échantillonnage de cette grille est régulier suivant l'espace et le temps. L'IRM de flux 4D a permis l'émergence de nouveaux biomarqueurs et le passage d'une évaluation 2D à une estimation 3D de biomarqueurs déjà éprouvés.

Cependant, ce passage du 2D + temps au 3D + temps intervient avec une contrepartie sur la qualité des images. En effet, le rapport signal sur bruit des images obtenues

est directement lié à la résolution spatio-temporelle des images et au temps de mesure (Andersen & Kirsch, 1996; Pelc et al., 1991). La routine clinique impose de restreindre le temps de mesure. La résolution et le niveau de bruit en sont alors dégradés. Ces différents éléments rendent le calcul de certains biomarqueurs plus complexes et moins précis (Boussel et al., 2009; David et al., 2019). L'objectif de cette thèse est de présenter des solutions permettant d'améliorer la quantification des biomarqueurs dans ce contexte. Une attention particulière est apportée au cisaillement à la paroi pour lequel la majeure partie de ce manuscrit est dédiée. Par ailleurs, le temps de calcul est une contrainte clinique importante. Ainsi, l'ensemble des développements réalisés durant cette thèse ont un temps de calcul compatible avec la routine clinique.

Un grand nombre de biomarqueurs hémodynamiques dépendent directement de la vitesse mesurée. Par conséquent, le premier axe de travail de cette thèse a été l'amélioration de la précision du champ de vitesse. Nous présentons une solution de filtrage spatio-temporel dont le calcul peut être parallélisé. Ces premiers travaux ont montré l'importance de la paroi dans la formulation d'un problème lié à l'ajustement de la vitesse. Par ailleurs, les biomarqueurs ne subissent pas de la même manière les contraintes de résolution et de bruit. Le deuxième axe de travail s'est alors concentré sur un biomarqueur, le cisaillement à la paroi, car il est présenté dans le domaine médicale comme un indicateur dans de nombreuses pathologies. Nous proposons un algorithme exploitant la connaissance de la paroi afin d'améliorer la quantification du cisaillement. Plus précisément, la vitesse est modélisée localement en s'appuyant sur la modélisation de la paroi autour d'un point d'intérêt. Le développement de cet algorithme constitue la plus importante contribution de ce manuscrit pour lequel cinq chapitres sont dédiés.

## Organisation du manuscrit

Ce manuscrit présente deux axes de travail pour améliorer la quantification de biomarqueurs. Les chapitres contributifs de ce travail de thèse traitent ces axes avec la répartition suivante :

- le Chapitre 3 présente une solution de filtrage spatio-temporel permettant d'améliorer la précision du champ de vitesse ;
- les Chapitres 4 à 8 représentent la contribution majeure de ce travail de thèse sur la quantification du cisaillement à la paroi. Le Chapitre 4 présente un algorithme en quatre étapes nommé PaLMA. Trois de ces étapes font l'objet de chapitres spécifiques (5 à 7). L'évaluation de la solution proposée, PaLMA, est réalisée dans le Chapitre 8.

Plus précisément, ce manuscrit est organisé suivant huit chapitres. Le Chapitre 1 a pour objectif de présenter le contexte cardiovasculaire ainsi que le lien entre quelques biomarqueurs et différentes pathologies. Ensuite, le Chapitre 2 est dédié à l'IRM de flux 4D et ses contraintes. Il est présenté le principe de l'acquisition par IRM de flux (voir la Section 2.1) et son modèle direct souvent approximé par un filtre (voir la Section 2.1.2.3). De plus, nous nous intéressons à la relation entre le signal anatomique et la vitesse vis-à-vis du bruit (voir la Section 2.2). Enfin, nous comparons, dans la Section 2.3, la nature des biomarqueurs et l'impact que ces conditions d'acquisitions ont sur leur quantification.

Le Chapitre 3 est dédié à l'amélioration de la précision du champ de vitesse. Pour cela, nous proposons une solution de filtrage spatio-temporel (voir la Section 3.2). Le filtre spatiale s'appuie sur l'hypothèse d'incompressibilité du fluide (voir la Section 3.2.1). Le filtre temporelle repose sur une hypothèse de régularité temporelle. Les performances

de cette solution sont évaluées, dans la Section 3.3 sur des données synthétiques avec l'écoulement analytique de Womersley. Les limites de ce type d'approche sont discutées dans la Section 3.4.

Le Chapitre 4 présente un algorithme en quatre étapes permettant d'améliorer l'estimation du cisaillement à la paroi (voir la Section 4.3). La particularité de cette approche est le développement d'une solution locale s'appuyant sur la modélisation de la paroi, dans la Section 4.3.1, pour construire un modèle de vitesse (voir la Section 4.3.2). Le cisaillement à la paroi est alors calculé analytiquement à partir du modèle de vitesse en un point d'intérêt et ses voisins (voir la Section 4.3.3). Les multiples estimations du cisaillement en un même point permettent de définir une stratégie de traitement *a posteriori* (voir la Section 4.3.4). Cet algorithme est nommé PaLMA d'après son nom anglais *Parametric Local Morphology Algorithm* et certaines de ses étapes font l'objet d'un chapitre spécifique :

- *Modélisation locale de la paroi autour d'un point d'intérêt* : le Chapitre 5 présente le choix de surface paramétrique. Différents types de surface paramétrique ont été envisagés, dans la Section 5.1, pour modéliser la paroi. La Section 5.2 présente la solution permettant d'ajuster le modèle sur les points de la segmentation. Enfin, nous discutons des sources d'erreur possibles ainsi que de perspectives en terme de choix de surface (voir la Section 5.3).
- *Modélisation locale de la vitesse* : le Chapitre 6 présente différentes solutions d'ajustement de la vitesse. Différents modèles paramétriques de vitesse incluant plus ou moins de physique sont introduits dans la Section 6.1. La mise en œuvre du filtrage IRM est présentée dans la Section 6.2. Enfin, le problème d'ajustement est formulé avec deux choix de normes  $L_2$  et Huber dans la Section 6.3.
- *Amélioration de l'estimation du cisaillement à la paroi* : le Chapitre 7 présente les deux estimateurs *a posteriori* permettant de bénéficier des évaluations multiples du cisaillement en un même point.

Enfin, le Chapitre 8 a pour objectif d'évaluer les performances de la solution proposée. Dans un premier temps, nous évaluons les différentes variantes de PaLMA en fonction du modèle de vitesse, de la norme et de la prise en compte du filtrage IRM par rapport à une solution concurrente (voir la Section 8.2). Nous comparons, dans la Section 8.3, les performances en terme de robustesse en fonction du rapport signal sur bruit, de la résolution et de la segmentation.



# Chapitre 1

## Les biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire

En imagerie cardiovasculaire, un biomarqueur est une information quantitative ou qualitative permettant d'établir une corrélation avec la présence ou le développement d'une pathologie cardiovasculaire. Le suivi de ces biomarqueurs est pertinent aussi bien au début d'une pathologie pour étudier son développement qu'à un stade avancé de la maladie pour définir le degré d'intervention. En d'autres termes, le suivi des biomarqueurs, lorsqu'il est possible, permet aux spécialistes d'ajuster les soins des patients.

Le système cardiovasculaire est un réseau d'artères, veines et capillaires alimenté par une pompe : le cœur. Dans la Section 1.1, nous présentons le fonctionnement général du système cardiovasculaire ainsi que la localisation des vaisseaux étudiés dans ce manuscrit. Dans la Section 1.2, nous présentons la structure physiologique des vaisseaux sanguins.

Le système cardiovasculaire ou simplement les vaisseaux sanguins peuvent se dégrader avec le temps provoquant différents types de pathologie. Ces dégradations peuvent avoir différentes origines : l'âge, l'hypertension, la consommation de tabac, l'alimentation, etc. Dans la Section 1.3, nous présentons quelques pathologies cardiovasculaires dont le lien avec le comportement hémodynamique est établi.

Enfin, nous introduisons, dans la Section 1.4, plusieurs biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire. Certains de ces biomarqueurs sont issus des contraintes que l'écoulement pulsé d'un fluide visqueux applique sur la paroi des vaisseaux sanguins. D'autres indiquent la présence d'une anomalie dans l'écoulement sanguin. La nature de cette anomalie guide alors le spécialiste vers le dysfonctionnement cardiovasculaire qui en est la source. Nombre de ces biomarqueurs ont un intérêt clinique important et nous discuterons plus précisément des plus pertinents.

### 1.1. Le système cardiovasculaire

Le système cardiovasculaire est un réseau de distribution de sang oxygéné dans l'ensemble des organes du corps humain. Ce système est en interaction avec l'ensemble des autres systèmes du corps humain et en particulier les systèmes respiratoires et digestifs. En effet, le sang est oxygéné lors de son passage dans les poumons. De plus, il contient les nutriments fournis par le système digestif permettant à l'ensemble des organes de fonctionner. Enfin, il a aussi le rôle de collecter les substances produites par les cellules (déchets, hormones) et de les acheminer notamment vers le système urinaire.

Le système cardiovasculaire est un réseau de distribution de sang dont la mise en mouvement est réalisé par le cœur. Ce réseau de distribution est séparé en deux composantes : les artères et les veines. On appelle artère tout vaisseau sanguin transportant du sang oxygéné et inversement pour les veines. La Figure 1.1 illustre la partie supérieure du système cardiovasculaire avec en rouge les artères et en bleu les veines. La différence structurelle de ces deux types de vaisseau sera présentée à la Section 1.2. Lorsque ces vaisseaux atteignent un diamètre très faible, on les nomme artérioles et veinules. La jonction entre ces deux vaisseaux se fait dans le lit capillaire des différents organes<sup>1</sup>.

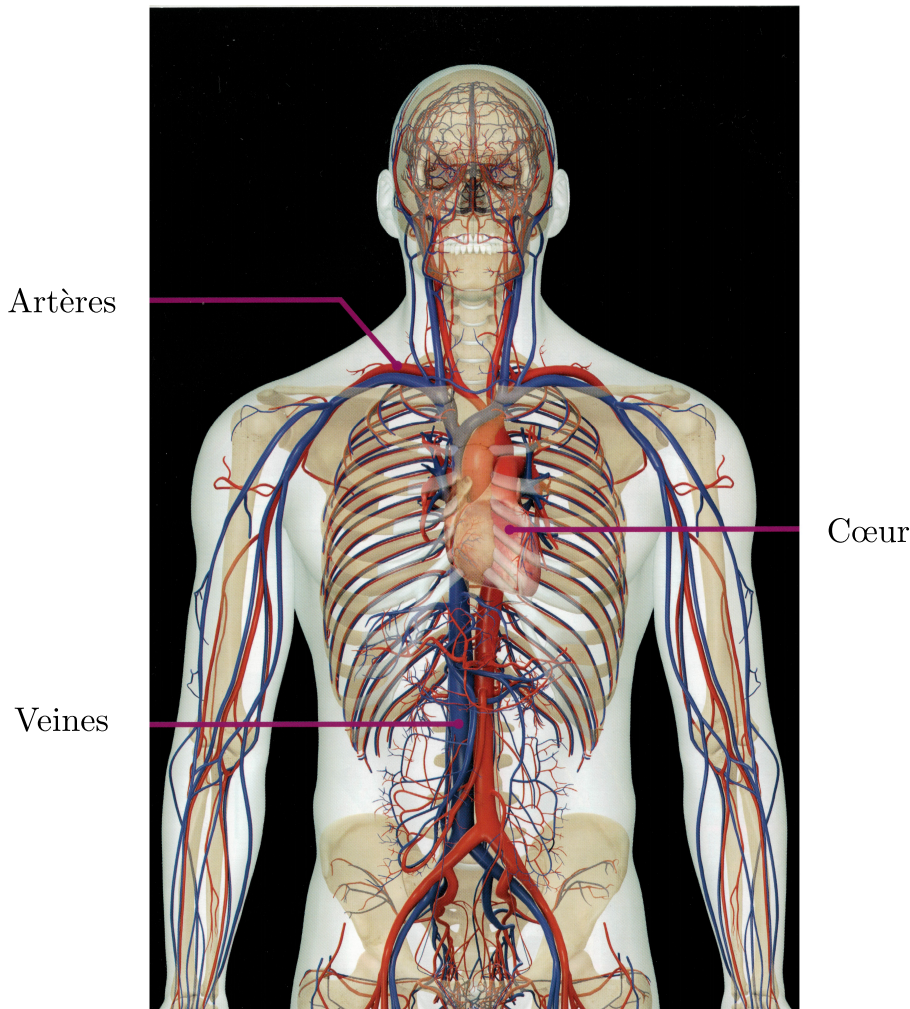


FIGURE 1.1. – Représentation du système cardiovasculaire avec en rouge les artères, en bleu les veines et au centre le cœur. Cette image est extraite de [Roberts \(2016, p. 346\)](#).

Ce réseau de distribution de sang est alimenté par le cœur qui a le rôle d'une pompe à double circulation. La Figure 1.2 illustre schématiquement le fonctionnement du cœur au sein du système cardiovasculaire. On observe que le sang désoxygéné arrive au cœur majoritairement par les veines cave supérieure et inférieure dans le ventricule droit. Chaque contraction permet au sang de passer dans le système respiratoire. Ensuite, le sang oxygéné afflue dans le ventricule gauche en attendant une contraction. Enfin, le cœur se contracte à nouveau pour envoyer le sang oxygéné dans l'ensemble du système cardiovasculaire. La

1. Ces vaisseaux de très petits diamètres ne feront pas l'objet de l'étude de ce manuscrit.

contraction rapide du cœur provoque une onde de pression ou onde de pouls qui résulte en un débit cardiaque. Par définition, on nomme la systole le temps où le débit sanguin est maximal et la diastole, la période d'attente avant une nouvelle contraction.

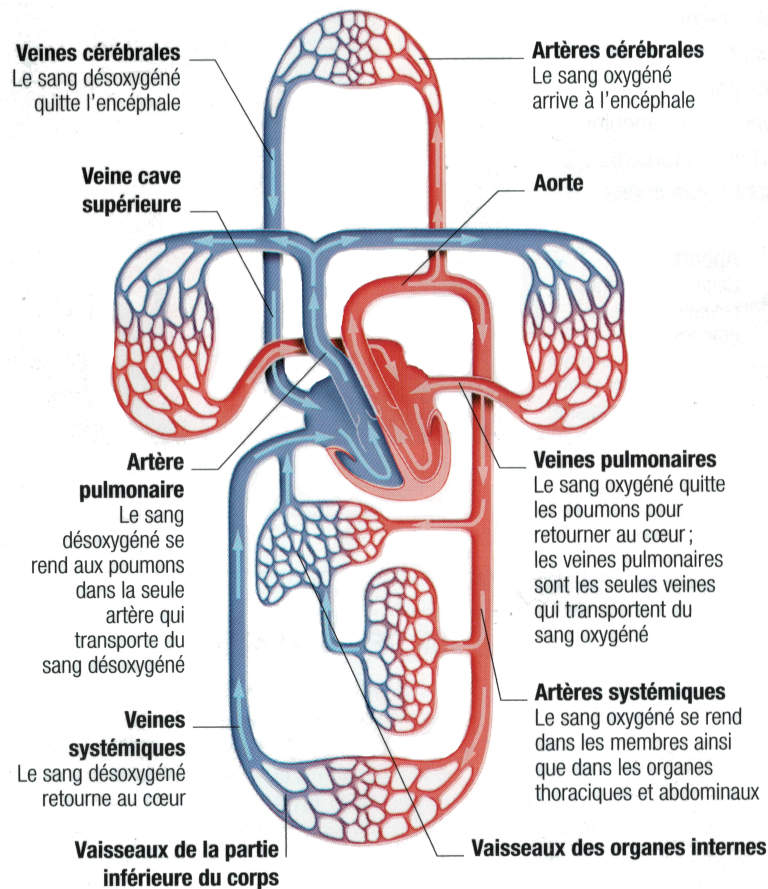


FIGURE 1.2. – Représentation de la double circulation du sang dans le système cardiovasculaire avec en rouge les artères et en bleu les veines. Cette image est extraite de [Roberts \(2016, p. 354\)](#).

L'onde de pression émise par le cœur et la pulsativité du débit sanguin diminuent en raison de l'absorption de cette énergie par les parois artérielles. Ainsi, le débit sanguin intracrânien ou encore dans les jambes est quasiment constant. Toutefois, cette forte pulsativité met en tension les vaisseaux les plus proches du cœur telle que l'aorte. En effet, l'aorte est la plus grosse artère du corps humain et joue le rôle de nourrice pour beaucoup d'organes. Une particularité de l'aorte est sa forme à la sortie du cœur. Elle s'oriente vers le haut avant de réaliser un demi-tour vers le bas du corps. Cette zone en forme de U est nommée crosse aortique. On différencie notamment l'aorte avant et après cette crosse sous les noms d'aorte ascendante et descendante. Enfin, la présence de cette crosse ajoutée à une forte pulsativité induit des écoulements sanguins complexes.

Dans ces travaux, une attention particulière est portée sur la bifurcation de la carotide. Comme l'illustre la Figure 1.3, cette bifurcation se situe en dessous de la mâchoire dans le cou. Elle présente un intérêt clinique majeur car elle répartit le sang sur le réseau extracrânien de la tête et sur le réseau intracrânien présenté dans la Figure 1.3. On nomme artère carotide commune le vaisseau avant la bifurcation. Les artères carotides interne et externe se situent après la bifurcation et alimentent les réseaux intracrânien et extracrânien.



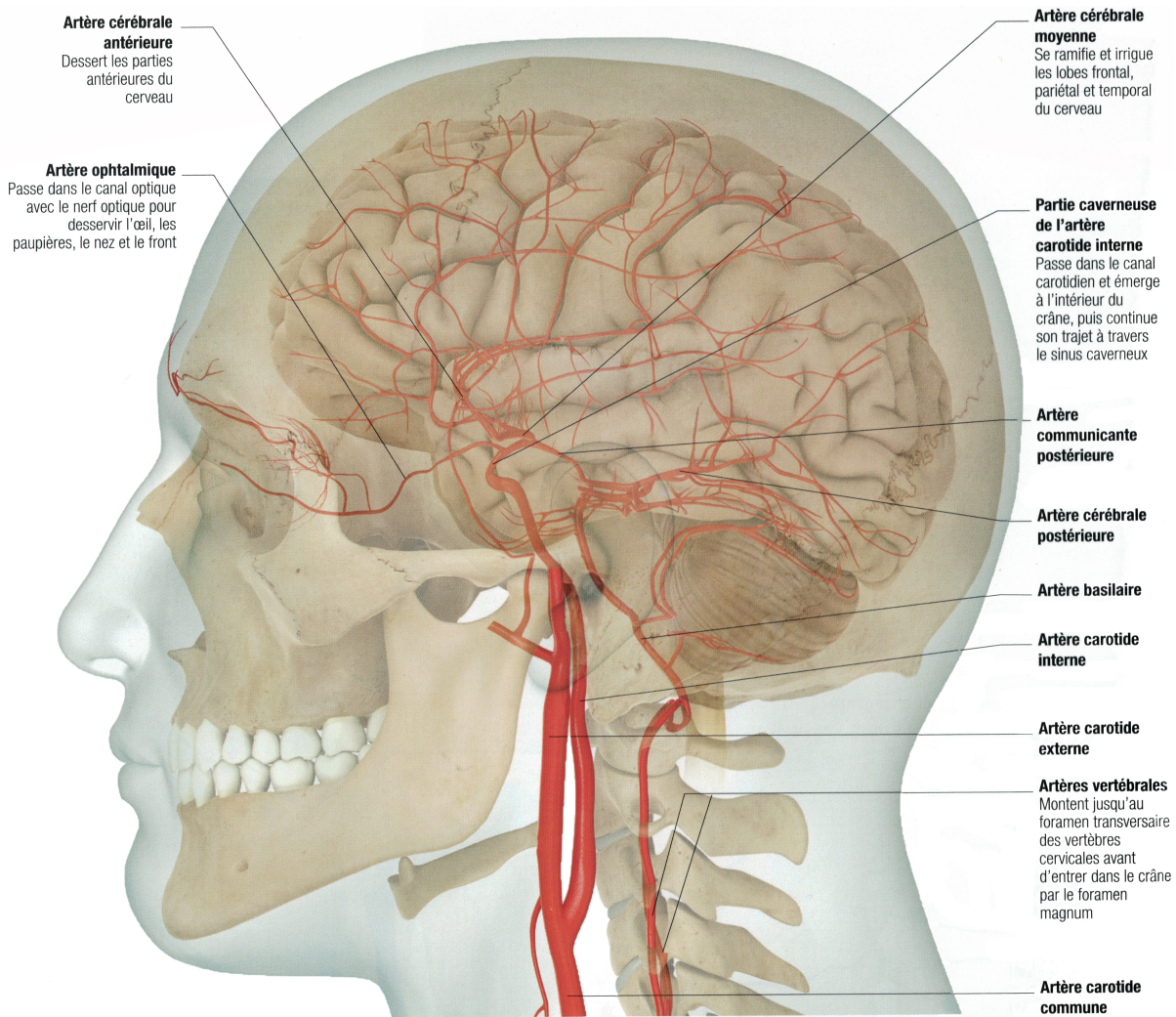


FIGURE 1.3. – Représentation des artères de l'encéphale, c'est-à-dire les artères intracrâniennes. Cette image est extraite de [Roberts \(2016, p. 128\)](#).

## 1.2. Structure des vaisseaux sanguins

Les vaisseaux sanguins sont composés de plusieurs couches comme le montre la Figure 1.4. La tunique interne, nommée endothélium, est en contact direct avec le sang. La tunique interne est entourée d'une couche de fibres élastiques qui permet notamment d'absorber l'onde de pouls. Celle-ci est enveloppée d'une couche musculaire puis d'une tunique externe nommée adventice. On nomme lumen la zone de circulation du sang au sein des vaisseaux sanguins.

Les veines présentent la même structure à l'exception de la présence de valvules au sein du lumen. Celles-ci permettent notamment d'agir comme des clapets anti-reflux. Par ailleurs, les vaisseaux les plus fins tels que les capillaires sont constitués seulement de la tunique interne.

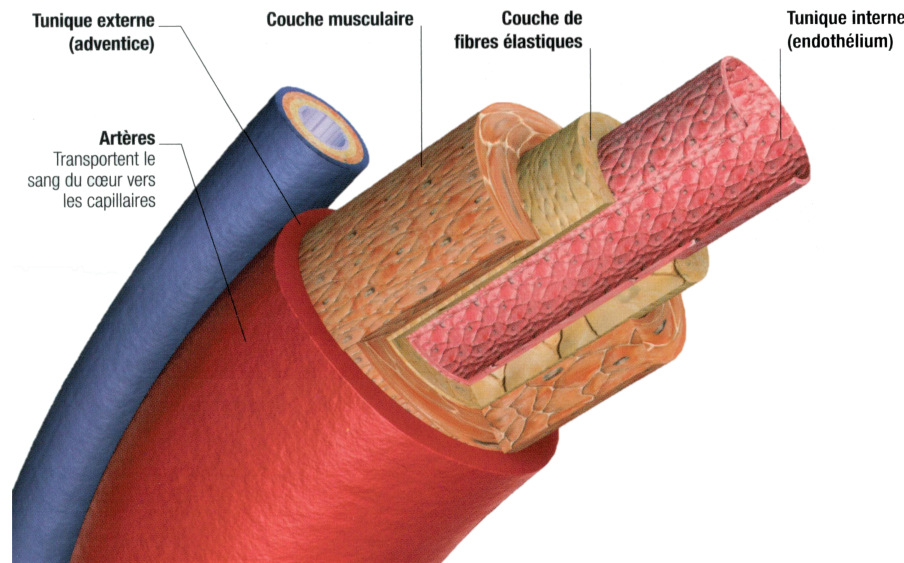


FIGURE 1.4. – Représentation de la structure d'une artère en rouge avec les différentes couches dont est composée la paroi. Cette image est extraite de [Roberts \(2016, p. 354\)](#).

### 1.3. Les pathologies cardiovasculaires

Les pathologies cardiovasculaires représentent la première cause de décès chez les femmes et la seconde pour les hommes après les tumeurs ([Fourcade et al., 2017](#)). Parmi les pathologies cardiovasculaires les plus connues, on peut citer l'accident vasculaire cérébral (AVC) et l'infarctus du myocarde.

**Accident vasculaire cérébral :** L'AVC peut avoir deux origines. La première, et la plus fréquente ( $\approx 75\%$  des AVCs ([Fourcade et al., 2017](#))), est l'AVC ischémique. Plus précisément, l'une des artères du cerveau est obstruée et ne permet plus au sang d'alimenter le cerveau en oxygène. En raison des ramifications du réseau sanguin, plus l'artère obstruée est grande plus les effets sur le cerveau sont importants. Dans ce type de situation, la raison de cet AVC doit être trouvée en seulement quelques heures pour donner au patient les plus grandes chances de récupération. Le second, plus rare ( $\approx 25\%$  des AVCs ([Fourcade et al., 2017](#))), peut intervenir suite à une hémorragie cérébrale. L'imagerie est alors nécessaire pour trouver le traitement adapté au patient.

**Infarctus du myocarde :** L'infarctus du myocarde, communément appelé crise cardiaque, est considéré comme la forme la plus sévère des cardiopathies ischémiques. L'infarctus du myocarde intervient lorsque les vaisseaux coronaires ne sont plus en mesure de distribuer le sang oxygéné pour alimenter le cœur. La zone privée d'oxygène se nécrose et ne contribue plus à l'effort du muscle cardiaque. À noter que les hommes sont plus touchés par l'infarctus du myocarde que les femmes avec environ 68 % des cas en 2013 ([Fourcade et al., 2017](#)).

Ce sont là deux exemples de maladies avancées mais de nombreuses pathologies cardiovasculaires ont plutôt des effets chroniques. Elles nécessitent alors un suivi régulier. On peut citer quelques maladies chroniques : l'insuffisance cardiaque, les maladies veineuses thromboemboliques, l'hypertension artérielle et l'hypercholestérolémie. Pour simplifier, ces maladies peuvent provenir de deux grandes catégories d'affections : soit les vaisseaux

sanguins sont endommagés soit le cœur est affaibli ou présente des anomalies. Ces deux types d'affection sont présentées dans les sections suivantes.

### 1.3.1. Affections des vaisseaux sanguins

Avec l'âge, les vaisseaux sanguins se dégradent. Un dépôt de lipide se constitue dans la paroi des artères. On nomme cette pathologie, athérosclérose, et le dépôt lui-même un athérome. Suivant les cas, cette plaque d'athérome peut se propager vers l'intérieur du vaisseau sanguin. Le diamètre intérieur de l'artère diminue allant jusqu'à s'obstruer dans les cas extrêmes. Il se forme alors une sténose dans l'écoulement sanguin. Dans ce cas de figure, il est recommandé de positionner un tuteur (un *stent* en anglais) pour s'assurer de la bonne circulation du sang. Lorsque des plaques d'athérome se trouvent sur les artères coronaires alimentant le cœur, des accidents ischémiques transitoires peuvent fragiliser le myocarde et mener à l'insuffisance cardiaque.

Dans d'autres cas, une lésion de l'endothélium causée par la plaque d'athérome provoque une thrombose. Un caillot se forme à la surface de l'endothélium. Il est constitué de lipide, globules rouges, fibrine, calcium et autres déchets sanguins. La thrombose provoque les mêmes effets que précédemment en obstruant l'écoulement sanguin. Cependant, face à la pression cette thrombose peut se décrocher de la paroi pour former ce que l'on nomme une embolie. Ce type de caillot peut être à l'origine de l'AVC ischémique ou bien de l'embolie pulmonaire.

Sous des contraintes hémodynamiques particulières, la plaque d'athérome qui fragilise le vaisseau peut faire naître un anévrisme, c'est-à-dire une protubérance. La rupture d'un anévrisme intracrânien peut provoquer un AVC hémorragique. Parmi les autres complications possibles, une dilatation aortique peut se disséquer, c'est-à-dire créer un nouveau conduit sanguin entre l'endothélium et des couches supérieures. Lorsqu'un anévrisme intracrânien ou une dilatation aortique atteint une certaine taille, l'opération chirurgicale est obligatoire car la rupture peut être fatale.

Dans ce contexte, l'hypercholestérolémie peut accélérer le développement de l'athérome et rendre l'intervention chirurgicale nécessaire. Par ailleurs, l'hypertension artérielle joue aussi un rôle. En effet, les fibres élastiques répondent moins bien à l'onde de pouls, en d'autres termes l'artère se rigidifie. Si cette dernière comporte des lésions ou des plaques d'athérome, l'hypertension artérielle peut augmenter les risques cardiovasculaires.

### 1.3.2. Affections du myocarde

Le cœur est un muscle qui doit être alimenté en oxygène. Comme dit précédemment, l'athérosclérose des artères coronaires affaiblit le cœur localement. Or, d'autres facteurs peuvent avoir un impact similaire sur le cœur telle que l'anomalie valvulaire. Plus précisément, si une valve ne se ferme pas correctement durant le relâchement du cœur, un reflux peut avoir lieu diminuant la quantité de sang éjecté. Ces situations poussent le cœur à forcer plus afin de fournir suffisamment d'oxygène. Sur le long terme, le cœur se renforce en augmentant l'épaisseur de ces parois. Or, cela diminue le volume de sang contenu dans chaque ventricule. Il s'agit d'une cardiomyopathie hypertrophique.

On peut distinguer trois autres types de cardiomyopathie : dilatée, restrictive et arythmogène. Dans le premier cas, des lésions apparaissent sur les fibres musculaires au sein des ventricules. Le cœur se dilate et n'arrive plus à pomper le sang. La cardiomyopathie restrictive intervient pour les mêmes raisons que précédemment mais le cœur se rigidifie

au lieu de se dilater. Le dernier cas apparaît lorsque des dépôts de lipides et de fibres se forment dans le cœur provoquant des battements cardiaques anormaux.

Ces différentes cardiomyopathies entraînent sur le long terme une insuffisance cardiaque. Or, il est important de pouvoir identifier le problème avant l'intervention. L'imagerie cardiaque est dans ce cas essentielle. De plus, l'imagerie des flux sanguins permet plus facilement d'identifier le problème à résoudre, notamment dans le cas d'une valve aortique dysfonctionnelle.

## 1.4. Les biomarqueurs hémodynamiques

Pour rappel, un biomarqueur en imagerie cardiovasculaire est une information quantitative ou qualitative permettant de faire un lien avec une pathologie. Certains biomarqueurs sont de nature anatomique avec par exemple le diamètre d'un anévrisme ou encore le diamètre le plus étroit d'une sténose. Cependant, il est nécessaire d'acquérir plus d'informations pour établir le bilan de santé d'un patient. Les biomarqueurs hémodynamiques fournissent des informations en lien avec l'écoulement sanguin. Comme décrit précédemment, chaque pathologie agit de manière spécifique sur la paroi des vaisseaux ou sur le cœur. Par conséquent, ces pathologies influencent différemment l'écoulement hémodynamique. On peut citer, par exemple, la sténose qui en resserrant le lumen localement va provoquer une accélération du fluide. Le diagnostic d'une sténose à partir de biomarqueurs anatomiques peut alors être confirmé par des biomarqueurs issus d'une autre modalité d'acquisition.

A ce jour, la plupart des biomarqueurs hémodynamiques sont calculés à partir de la mesure du champ de vitesse. Techniquement, l'anatomie et la vitesse sont majoritairement mesurés avec l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Plus précisément, la routine clinique emploie une séquence d'acquisition nommée IRM de flux ou IRM par contraste de phase. La pratique clinique se limite aujourd'hui à l'acquisition d'une section 2D suivant le temps (Oyre et al., 1998; Barker et al., 2010). De nombreuses études (Wood et al., 2001; Steinman et al., 2001; Glor et al., 2002; Stalder et al., 2011; Karmonik et al., 2012) exploitent ces acquisitions 2D pour alimenter des outils de simulation numérique des fluides. Cependant, cette pratique est difficile à inscrire dans la routine clinique en raison des temps de calcul et de la technicité de ces outils (voir la Section 4.2.1). Or, un nouveau type de séquence d'acquisition, l'IRM de flux 4D, tend à se démocratiser depuis plus de dix ans (Markl, 2005). Elle permet l'accès à un volume 3D suivant le temps plutôt qu'une simple section. Cette séquence a fait l'objet de nombreuses études vérifiant notamment qu'elle fournit des résultats répétables (Markl et al., 2011; David et al., 2019). Ce type de séquence d'acquisition est présenté de manière plus approfondie au Chapitre 2. Enfin, il est important de spécifier qu'il existe d'autres modalités d'acquisition permettant d'accéder au champ de vitesse. On peut citer la mesure par écho Doppler 2D (Arigovindan et al., 2007; Akagawa et al., 2016) ou encore le développement très récent de l'acquisition par écho Doppler 3D (Joos et al., 2017; Yaegashi et al., 2018).

Il existe aujourd'hui un grand nombre de biomarqueurs hémodynamiques. Ceux-ci peuvent être qualitatifs ou quantitatifs et leur calcul nécessite plus ou moins d'effort. Nous mentionnons ici une sélection de quelques biomarqueurs hémodynamiques :

**Direction du flux :** En étudiant les lignes de courant et les trajectoires des particules, Frydrychowicz et al. (2012) ont montré que la circulation en hélice était commune dans la crosse aortique. Toutefois, la présence des hélices diminuent au profit de vortex, pour

certaines avec recirculation, à cause d'altérations géométriques de l'aorte apparaissant avec l'âge.

**Excentricité du flux :** Comme l'illustre la Figure 1.5, il est possible de différencier les écoulements sanguins par l'excentricité du flux sortant de l'aorte (Sigovan et al., 2011). Ce biomarqueur a été observé chez des patients ayant une valve aortique bicuspide (et non tricuspide). De plus, il a aussi été étudié comme facteur de risque pour l'évolution des anévrismes.

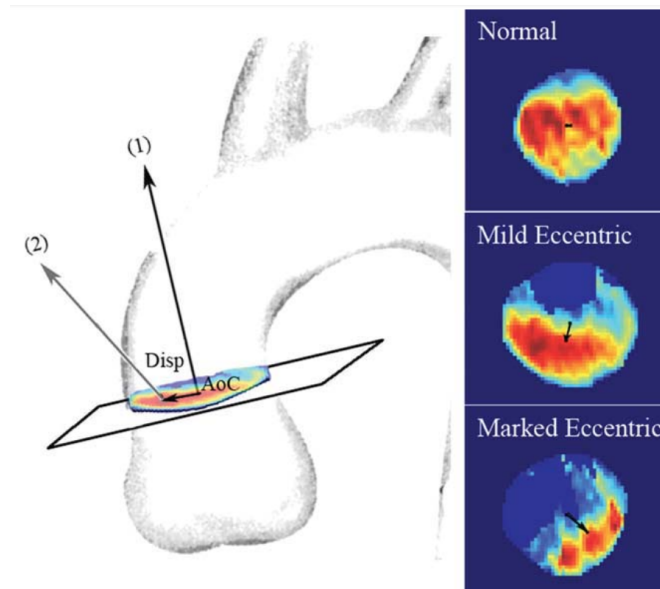


FIGURE 1.5. – Différentes excentricités du flux sanguin en sorti de l'aorte. Cette image est extraite de Sigovan et al. (2011).

**Accélération :** L'accélération du fluide peut être estimée en dérivant la vitesse mesurée ou bien en encodant directement l'accélération à la place de la vitesse dans une séquence d'acquisition (Barker et al., 2012). La Figure 1.6 illustre la différence entre ces deux solutions. Ce biomarqueur permet d'obtenir des informations sur la capacité de compliance du cœur.

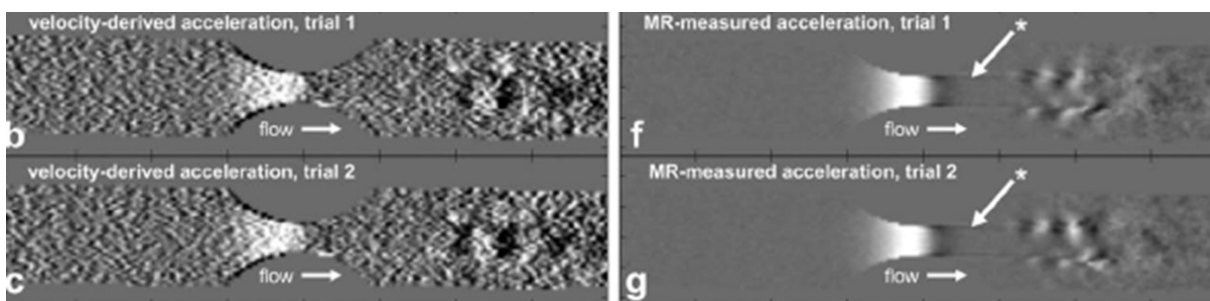


FIGURE 1.6. – Estimation de l'accélération à partir de la vitesse mesurée à gauche ou directement encodée dans la séquence à droite. Cette image est extraite de Barker et al. (2012).

**Vitesse de l'onde de pouls :** Il est possible en observant le flux sanguin suivant le temps, comme le montre la Figure 1.7, de déterminer la vitesse de l'onde de pouls. Ce biomarqueur est d'un intérêt majeur car il permet d'estimer la rigidité de la paroi. En effet, l'onde de pouls ne s'atténue que très peu si la paroi est rigide. L'énergie de cette onde est propagée en étant très peu absorbée par la couche élastique de l'aorte. Ce biomarqueur est donc un bon indicateur d'athérosclérose (Markl et al., 2010). Toutefois, il est nécessaire d'avoir une résolution temporelle suffisamment fine.

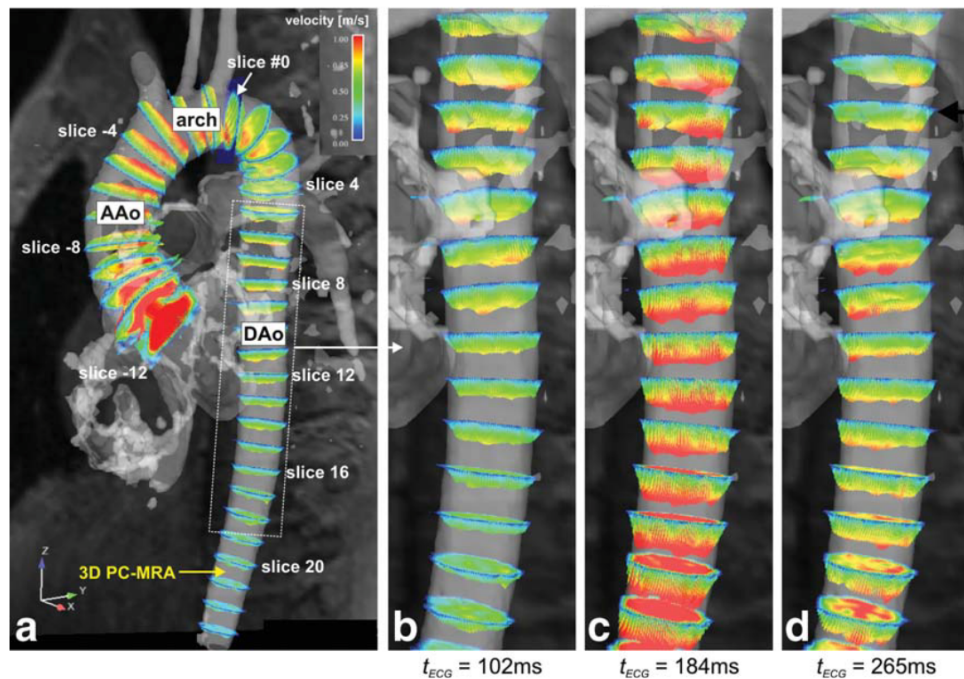


FIGURE 1.7. – Évolution du champ de vitesse suivant le temps. Cette image est extraite de Markl et al. (2010).

**Cartographie de la pression relative :** Le gradient de pression peut être déduit de la vitesse à partir des équations de la mécanique des fluides et en particulier de Navier-Stokes (voir l'équation (3.3)). Ce gradient de pression peut être estimé au sein du volume fluide et suivant le temps (Bock et al., 2011; Lamata et al., 2013). Ce biomarqueur est un bon indicateur de la sévérité de pathologies provenant d'un rétrécissement valvulaire ou bien d'une sténose.

**Énergie cinétique turbulente :** Dyverfeldt et al. (2006) ont montré qu'il est possible d'estimer l'énergie cinétique turbulente directement à partir du signal anatomique. La formulation est basée sur une décomposition de la vitesse en un champ moyen et un champ de fluctuations turbulentes. L'imagerie par contraste de phase donne le champ moyen tandis que les fluctuations de l'anatomique donne le champ des fluctuations turbulentes. La Figure 1.8 illustre la dissipation d'énergie à la sortie d'une coarctation, c'est-à-dire un étranglement local de l'aorte.

**Cisaillement à la paroi :** Le cisaillement à la paroi est un biomarqueur particulièrement intéressant notamment parce qu'il caractérise les contraintes visqueuses qu'applique le fluide sur l'endothélium (Papaioannou & Stefanadis, 2005). Une première étude a montré

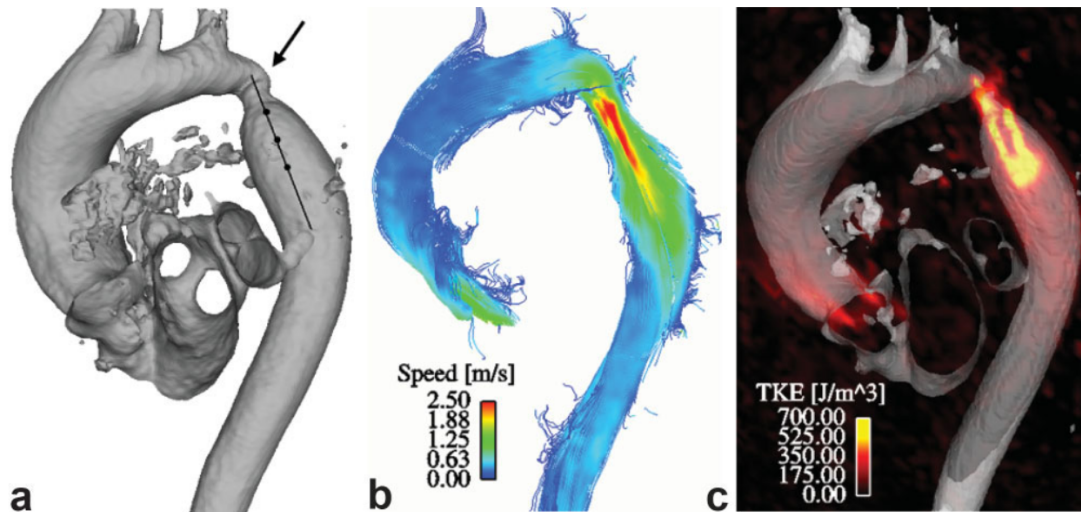


FIGURE 1.8. – Représentation de la segmentation d’une aorte avec coarctation à gauche, le champ de vitesse moyen mesuré au centre et l’énergie cinétique turbulente à droite. Cette image est extraite de [Dyverfeldt et al. \(2008\)](#).

que le cisaillement a un effet remodelant sur l’endothélium ([Malek et al., 1999](#)). La Figure 1.9 présente l’endothélium d’un bovin après avoir subi un cisaillement à la paroi physiologique, c’est-à-dire d’un niveau normal sans pathologie, et un cisaillement à la paroi faible tel qu’on peut le rencontrer dans un anévrisme. On observe très nettement que le frottement visqueux "brosse" les cellules endothéliales. Cet effet de remodelage réalise une forme de tissage des cellules ce qui renforce la paroi. [Malek et al. \(1999\)](#) ont montré qu’un cisaillement trop faible peut engendrer de l’athérosclérose alors qu’un niveau suffisant permet de protéger les artères. Cependant, au-delà d’un certain niveau, ce cisaillement à la paroi peut être à l’origine d’anévrismes intracrâniens ([Shojima et al., 2004](#); [Kulcsár et al., 2011](#)). Les frottements répétés et intenses du sang sur la paroi endommagent l’endothélium ce qui le rend moins résistant. Il en résulte une dilatation du vaisseau. Ensuite, l’augmentation du diamètre créé par l’anévrisme diminue la vitesse et ainsi diminue le cisaillement à la paroi. Or, la circulation sanguine au sein de l’anévrisme est très faible ce qui détériore plus encore l’endothélium. En présence d’un anévrisme, un cisaillement à la paroi trop faible peut alors contribuer à son développement et sa rupture ([Shojima et al., 2004](#)). De

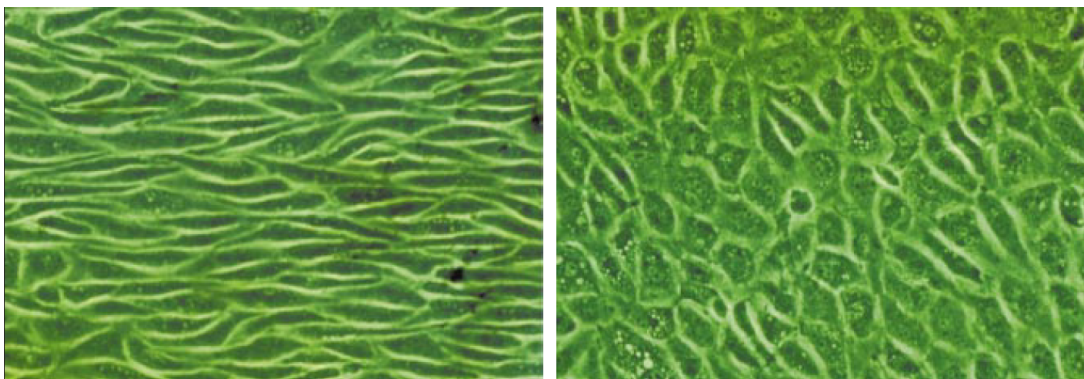


FIGURE 1.9. – Représentation des cellules endothéliales d’un bovin après la soumission à un cisaillement à la paroi physiologique à gauche et un faible cisaillement à la paroi à droite. Cette image est extraite de [Malek et al. \(1999\)](#).

plus, ce biomarqueur est tout autant pertinent dans le développement de la dilatation aortique (Bürk et al., 2012). Enfin, les récents travaux de McCormick et al. (2017) ont établi un lien entre le cisaillement à la paroi et l'expression des gènes à l'intérieur du myocarde.

Ce biomarqueur fait partie des plus étudiés à ce jour. Cependant, l'estimation du cisaillement à la paroi n'est pas simple sur des acquisitions peu résolues et bruitées. Aujourd'hui, la méthode de référence pour estimer le cisaillement à la paroi fait intervenir des outils de simulation numérique des fluides et une acquisition 2D ou 4D (Steinman et al., 2001; Renner et al., 2009; Stalder et al., 2011). Cependant, cette approche est coûteuse en temps de calcul et demande une bonne maîtrise de ces outils. L'arrivée de nouvelles séquences d'acquisition comme l'IRM de flux 4D a permis le développement de nouvelles approches pour la quantification de ces biomarqueurs et en particulier du cisaillement à la paroi.





# Chapitre 2

## L'acquisition par IRM de flux 4D et ses contraintes

Ce chapitre a pour objectif de présenter l'imagerie par résonance magnétique de flux 4D, ses contraintes et leur impact sur l'estimation de biomarqueurs cardiovasculaires. Ce type d'imagerie permet de mesurer l'anatomie ainsi que le vecteur 3D de la vitesse dans un volume d'intérêt au cours du cycle cardiaque. Par exemple, la Figure 2.1 représente les données anatomiques et les vecteurs de vitesse d'un patient présentant une dilatation aortique ainsi qu'une valve aortique bicuspide (voir le carré rouge). Le processus de mesure de l'IRM de flux 4D, ou encore modèle direct, est détaillé dans la Section 2.1. Il repose sur la mesure du signal de résonance magnétique nucléaire (voir la Section 2.1.1). Cette mesure est réalisée plusieurs fois dans une séquence d'acquisition dédiée à l'obtention du champ de vitesse (voir la Section 2.1.2).

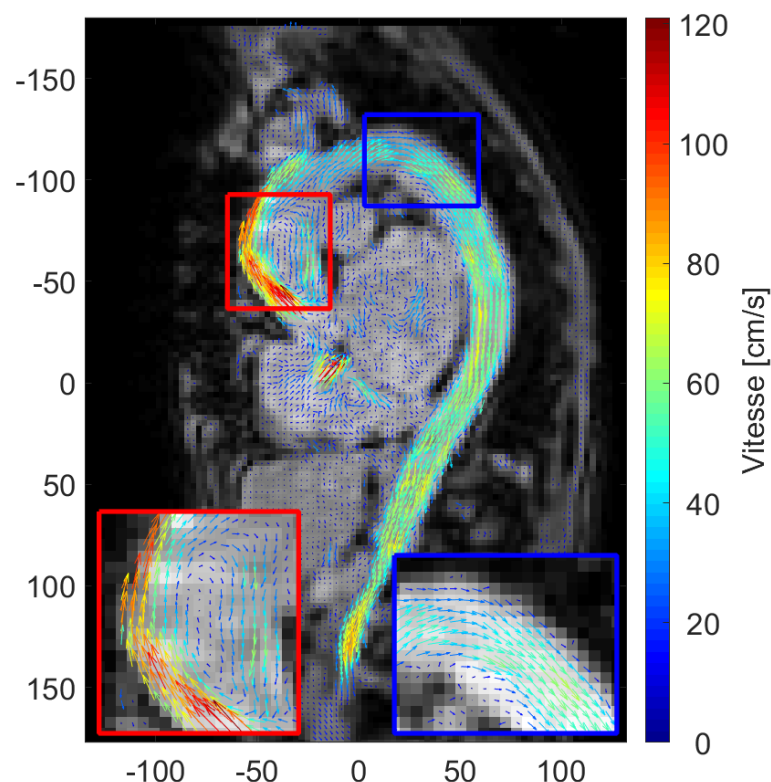


FIGURE 2.1. – Acquisition par IRM de flux 4D d'un patient présentant une dilatation aortique.

L'intérêt des médecins pour cette séquence d'acquisition tient, entre autres, à la grande quantité de données acquises. Elle permet aux spécialistes d'avoir bien plus d'informations sur lesquelles baser leur diagnostic. En effet, la routine clinique dans le contexte des pathologies cardiovasculaires suggère l'acquisition de plusieurs sections 2D. Par ailleurs, ces sections doivent être placées selon des orientations spécifiques. Cette préparation nécessite un temps opérationnel non négligeable. L'IRM de flux 4D présente l'avantage considérable d'acquérir directement un volume de données 3D dans un temps opérationnel raisonnable.

Toutefois, la résolution en IRM de flux 4D est souvent plus faible qu'en imagerie 2D. En effet, l'image obtenue est le compromis de plusieurs facteurs essentiels dans le contexte cardiovasculaire : le temps d'acquisition, la résolution de l'image et le bruit de mesure. Généralement, le temps alloué pour l'acquisition est contraint par le contexte clinique. En pratique, le compromis se situe entre la résolution et le niveau de bruit. La relation théorique entre ces éléments est présentée dans la Section 2.2. De plus, on s'intéressera aux conditions cliniques usuelles définissant un rapport signal sur bruit pour une résolution et un temps d'acquisition donnée.

La dégradation de la résolution ou bien du niveau de bruit impacte directement la mesure du champ de vitesse. D'une part, l'anatomie et le champ de vitesse sont dégradés par la baisse de la résolution. En particulier, les phénomènes hémodynamiques d'échelle fine sont plus difficilement perceptibles. De plus, la définition des bords du vaisseau est plus complexe à cause de l'effet de volume partiel. D'autre part, l'augmentation du bruit peut significativement impacter le champ de vitesse et en particulier à proximité de la paroi. Par conséquent, ce bruit peut se répercuter sur l'estimation des biomarqueurs hémodynamiques. La Section 2.3 a pour objectif de présenter l'effet de ces sources d'erreur sur l'estimation des biomarqueurs ainsi que les propositions de stratégies permettant d'y remédier.

## 2.1. Modèle direct de l'IRM de flux 4D

Cette section a pour objectif de décrire le processus de mesure par IRM de flux. Le modèle direct met en équation le processus de mesure dégradant le phénomène physique observé (avec un filtrage par exemple). L'IRM est basée sur un phénomène physique, la Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), découvert dans les années trente par l'équipe de Isaac Rabi. Elle permet, à travers l'application d'un champ magnétique permanent, d'imposer une fréquence d'oscillation aux noyaux atomiques autour de leur axe de rotation interne. Ce phénomène physique est nommé précession libre (voir la Section 2.1.1.1). La fréquence d'oscillation dépend de la nature de chaque noyau et de l'intensité du champ magnétique. La magnétisation des noyaux atomiques crée une aimantation dans la direction du champ magnétique. Grâce à une onde radio-fréquence, la précédente aimantation peut basculer dans le plan transversal du champ magnétique (voir la Section 2.1.1.2). A l'extinction de cette onde, la magnétisation revient progressivement à son état d'équilibre en précession libre (voir la Section 2.1.1.3). Cette période de relaxation de l'aimantation transversale constitue le signal RMN.

En IRM, on observe l'aimantation transversale, ou le signal anatomique, en fonction de la position au sein du patient. Or, la mesure du signal RMN a lieu dans le domaine fréquentiel. Par conséquent, la formation d'image IRM est réalisée en mesurant ce signal plusieurs fois afin de remplir le domaine fréquentiel aussi appelé espace K (voir la Section 2.1.2.1). Enfin, les séquences d'acquisition par contraste de phase permettent d'introduire un déphasage, linéairement dépendant de la vitesse, au sein du signal RMN (voir la Section 2.1.2.2).

### 2.1.1. Signal de Résonance Magnétique Nucléaire

Tous les atomes du corps humain sont constitués de nucléons et d'électrons. Les atomes, dont les noyaux sont polarisés (possédant un nombre différent de protons et de neutrons), tournent autour d'un axe interne (nommé *spin* en anglais). L'atome d'hydrogène est le seul atome dont le noyau est polarisé par un seul proton. L'abondance de l'hydrogène au sein du corps humain rend l'étude de cet atome particulièrement intéressant. Ainsi, on peut considérer en IRM que l'aimantation transversale observée est principalement due à la forte concentration en hydrogène (la fréquence d'excitation est centrée sur la fréquence de résonance de ces atomes). Dans la suite de cette section, seuls les spins d'hydrogène seront considérés.

#### 2.1.1.1. Précession libre

Dans un état naturel, les axes de rotation interne n'ont pas de direction privilégiée comme le représente la Figure 2.2a. Dès lors que l'on soumet ces spins à un champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{Z}$ , ceux-ci précessent autour de ce champ (Figure 2.2b). Dans le cas de l'hydrogène, il existe deux états d'énergie quantique stables dits de basse et haute énergie. Cela implique que les spins de basse et haute énergie sont orientés respectivement dans le sens du champ et dans le sens opposé à ce champ (Décorps, 2011). L'apport d'énergie par le champ magnétique crée la précession comme l'explique la relation d'énergie quantique suivante :  $\Delta E = \frac{\gamma h}{2\pi} \|\vec{B}_0\|$  avec  $\gamma$  le rapport gyromagnétique de l'hydrogène et  $h$  la constante de Planck. Les équations de la mécanique quantique permettent de définir la fréquence de Larmor  $\nu_{\text{Larmor}} = -\gamma \frac{\|\vec{B}_0\|}{2\pi}$  ou bien la pulsation de Larmor  $\omega_{\text{Larmor}} = -\gamma \|\vec{B}_0\|$ .

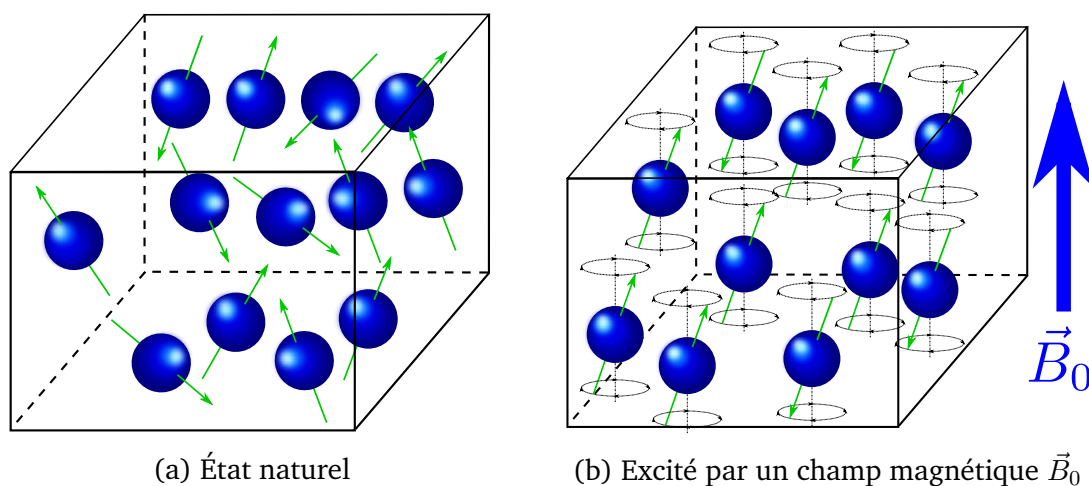


FIGURE 2.2. – Répartition de spins dans un volume donné.

L'ensemble des protons soumis au champ magnétique se répartissent en fonction des deux états d'énergie quantique. L'état de basse d'énergie étant plus stable est aussi plus favorable. Il se crée alors une inégalité dans la répartition des spins à haute et basse énergie (dont les proportions sont données par l'équation de statistique de Boltzmann (Kastler et al., 2003)). Par exemple, pour une température normale de 20°C et un champ magnétique de 1,5 Tesla, le ratio d'excédent de spins de basse énergie est de 1 pour 100000. L'ensemble des  $N$  spins en excédant crée alors une aimantation macroscopique  $M_0$  dans le

sens du champ magnétique  $\vec{B}_0$ . La valeur de cette aimantation (Décorps, 2011) peut être approximée par la relation suivante :

$$M_0 \approx N \frac{\gamma^2 \hbar^2 B_0}{16\pi^2 k_B T}$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température en Kelvin. Les différents spins sont à la même fréquence mais ne sont pas nécessairement en phase. Le déphasage de l'ensemble des spins permet à l'aimantation macroscopique de converger vers une position d'équilibre suivant l'axe du champ  $\vec{B}_0$ . La phase a un impact considérable sur la mise en équilibre de cette aimantation et son importance sera décrite dans les sections suivantes.

### 2.1.1.2. Excitation par une onde radio-fréquence

En situation d'équilibre, les spins sont en précession libre. L'aimantation macroscopique pointe dans la direction opposée à  $\vec{B}_0$ . Cette configuration est schématiquement décrite par la Figure 2.3 (à gauche). A l'équilibre, l'aimantation dans le plan transversal  $\vec{M}_\perp$  est nulle car la phase des spins se compense mutuellement.

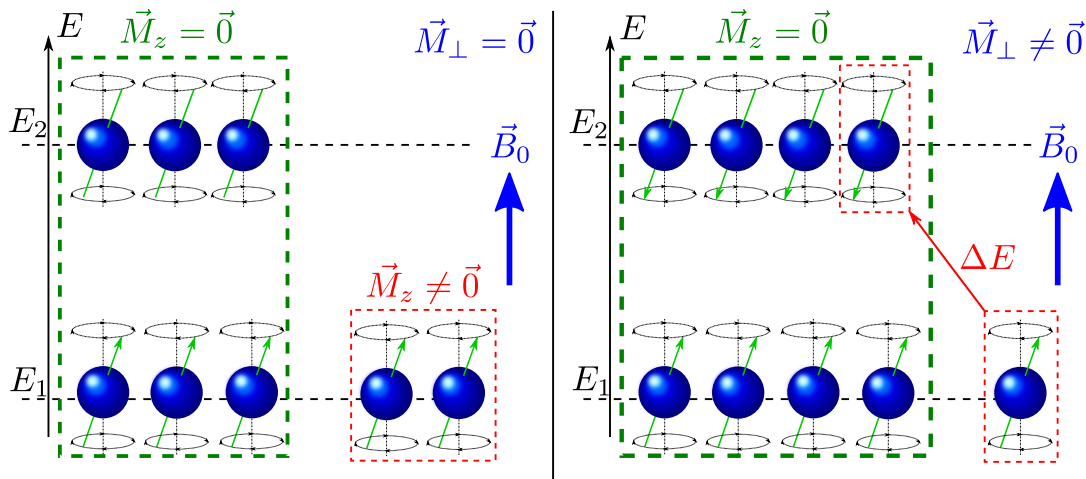


FIGURE 2.3. – Schéma représentant la répartition des spins entre deux niveaux d'énergie en équilibre (à gauche) et soumis à une excitation électromagnétique (à droite).

L'émission d'une onde radio-fréquence permet de basculer cette aimantation longitudinale dans le plan transversal (Décorps, 2011). L'apport d'une certaine quantité d'énergie permet de changer l'état quantique d'une partie de l'excédent de spins à basse énergie. Pour une impulsion dite à  $90^\circ$ , l'ensemble des spins est à l'équilibre (voir partie droite de la Figure 2.3) et l'aimantation longitudinale s'annule  $\vec{M}_z = \vec{0}$ . Ce changement d'état ne provoque aucun effet sur l'aimantation transversale. Cette dernière naît de la mise en phase de l'ensemble des spins. Ces deux phénomènes de changement d'état quantique et de rephasage apparaissent seulement si l'onde électromagnétique est à la fréquence de Larmor et fournit la bonne quantité d'énergie (Kastler et al., 2003).

Lors de l'excitation, tous les spins sont en phase et l'aimantation transversale est impulsée par l'onde électromagnétique. La période de relaxation ou remise à l'équilibre des spins est essentielle à la mesure du signal RMN.

### 2.1.1.3. Relaxation et Signal RMN

Ce phénomène de relaxation peut être interprété différemment en fonction de la direction observée. En effet, la relaxation dans la direction longitudinale est uniquement due au retour à l'équilibre (état quantique initial). La relaxation dans cette direction suit une exponentielle paramétrée par une constante de temps  $T_1$  et tend vers la valeur  $M_0$ . La relaxation transversale est due au déphasage progressif des différents spins. Généralement, le retour à l'équilibre est plus rapide selon la composante transversale. La décroissance de cette composante suit une exponentielle paramétrée par une constante de temps<sup>1</sup>  $T_2$ .

Décorps (2011) présente les équations de Bloch exprimant le lien entre le champ magnétique imposé et le comportement de l'aimantation macroscopique. La composante transversale de l'aimantation macroscopique appartient au plan transversal  $xOy$  (sachant que  $\vec{B}_0$  est selon  $Oz$ ) avec  $\vec{M}_\perp = M_x\vec{X} + M_y\vec{Y}$ . Afin de s'affranchir de la notation sous forme de vecteur, il est équivalent de se placer dans le plan complexe avec  $M_\perp = M_x + iM_y$ . Sachant que le signal provient de l'ensemble des spins à différentes positions, le signal RMN mesuré suit l'équation suivante :

$$s(t) = \iiint_{(r_x, r_y, r_z) \in D} M_0 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{2\pi i \omega_{\text{Larmor}} t} dr_x dr_y dr_z \quad (2.1)$$

avec  $D$  le domaine excité par l'onde radio-fréquence et  $t$  le temps. La mesure d'un seul signal RMN ne permet pas d'obtenir une image. La formation d'image par résonance magnétique nécessite plusieurs mesures du signal RMN en modifiant, entre autres, la fréquence de Larmor.

## 2.1.2. Acquisition par IRM de flux 4D

Les séquences d'acquisition par IRM peuvent être basées sur deux principes : l'écho de spin et l'écho de gradient. L'IRM de flux 4D s'appuie sur l'écho de gradient pour obtenir des images et seul son principe est présenté dans la Section 2.1.2.1. Ensuite, la mesure du champ de vitesse repose sur des séquences d'acquisition par contraste de phase dont le principe est introduit dans la Section 2.1.2.2. Enfin, l'échantillonnage de l'espace  $K$  et son effet sur le modèle direct de l'IRM de flux 4D est présenté dans la Section 2.1.2.3.

### 2.1.2.1. Formation d'image par écho de gradient

La formation d'image, ou le codage spatial, est réalisé en mesurant le signal RMN dans des conditions d'acquisitions différentes. Le patient est soumis à un champ magnétique permanent  $B_0$ . Durant la phase d'acquisition, des gradients magnétiques  $G$  sont appliqués dans différentes directions<sup>2</sup>. Le codage spatial a pour objectif de modifier la fréquence de Larmor du signal RMN en fonction de la position spatiale. Généralement, le signal RMN est mesuré selon le temps comme l'illustre la Figure 2.4. Le signal est mesuré après plusieurs étapes permettant le codage spatial : la sélection de la coupe, le codage en phase

1. L'inhomogénéité du champ peut introduire des disparités dans les fréquences de Larmor. La vitesse de décroissance est alors plus grande et paramétrée par  $T_2^*$ . Ces inhomogénéités peuvent provenir du champ  $\vec{B}_0$  et aussi de zones de susceptibilité magnétique.

2. L'IRM par écho de gradient porte ce nom en raison de la répétition de gradients magnétiques pour former une image.

et le codage en fréquence<sup>3</sup>. La présence du gradient bipolaire de la Figure 2.4 n'est pas utile à la formation d'image. Son utilité est présentée dans la Section 2.1.2.2.

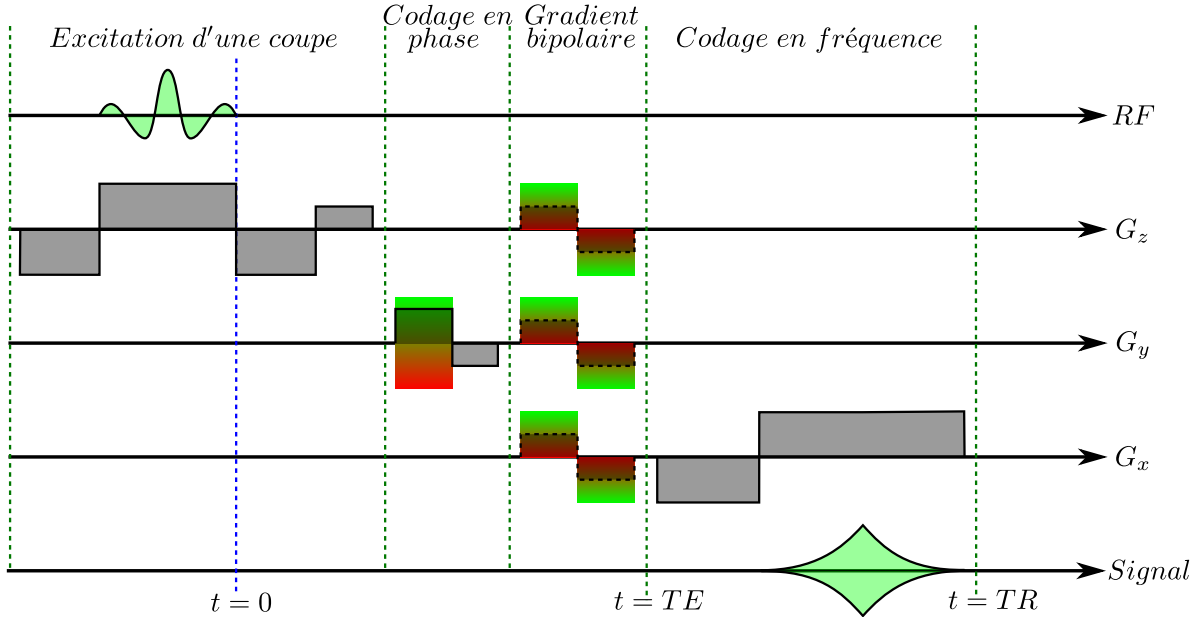


FIGURE 2.4. – Séquence d'acquisition en IRM 4D de flux avec un codage par sélection de coupe

La première étape du codage consiste à sélectionner un plan de coupe avant même l'émission de l'onde radio-fréquence. Pour cela, on applique un gradient dans la direction longitudinale comme l'illustre la Figure 2.5a. Le champ magnétique subi par le patient dépend alors de la position  $r_z$  tel que  $\vec{B}(r_z) = \vec{B}_0 + r_z G_z \vec{Z}$ . Par conséquent, l'ensemble des spins précesse à une fréquence dépendante de la position selon  $\vec{Z}$ . L'onde radio-fréquence est choisie dans une bande fréquentielle  $\delta f_z$  suffisamment fine afin de n'observer que le signal des spins provenant d'une bande  $\delta z$ . Par ailleurs, la largeur de la bande doit être choisie avec précaution. En effet, le signal est intégré selon  $\vec{Z}$  et donc, plus le  $\delta z$  est faible, moins le rapport signal sur bruit est performant. Le cadre bleu de la Figure 2.5a délimite alors la zone dans laquelle tous les spins seront excités par l'onde électromagnétique. L'équation (2.1) peut être réécrite ainsi :

$$s(t) = \int_{r_z \in \delta z} \iint_{(r_x, r_y) \in D_{xy}} M_0 e^{\frac{-t}{T_2}} e^{2\pi i \omega_{\text{Larmor}}(r_z, t)} dr_x dr_y dr_z$$

avec  $\omega_{\text{Larmor}}(r_z, t) = -\gamma B_0 - \gamma \int_0^t r_z G_z(t') dt'$ .

La seconde étape a pour objectif de décoder le signal dans le plan  $xOy$ . Le codage en fréquence comme l'illustre la Figure 2.4 applique un gradient selon la direction  $\vec{X}$  pendant la lecture du signal RMN. Le champ magnétique durant la mesure peut s'exprimer ainsi  $\vec{B}(x) = \vec{B}_0 + r_x G_x \vec{X}$ . Cela permet de modifier la phase du signal  $s(t)$  afin d'y introduire une dépendance en fonction de la position  $r_x$  dans le domaine  $D_{xy}$  (Constantinesco et al., 1984; Moran, 1982). L'équation (2.1) peut être à nouveau modifiée afin de prendre en

3. Certaines séquences appliquent un codage en phase dans deux directions pour ensuite mesurer le signal durant le codage en fréquence.

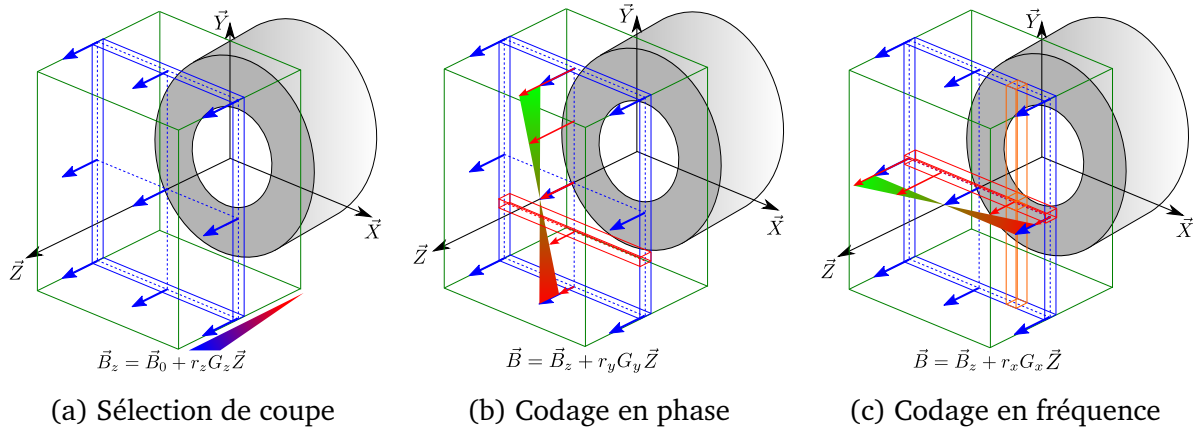


FIGURE 2.5. – Formation d'une image par résonance magnétique.

compte cette dépendance :

$$s(t) = \int_{r_z \in \delta z} \iint_{(r_x, r_y) \in D_{xy}} M_0 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{2\pi i \omega_{\text{Larmor}}(r_x, r_z, t)} dr_x dr_y dr_z$$

avec

$$\omega_{\text{Larmor}}(r_x, r_z, t) = -\gamma B_0 - \gamma \int_0^t r_x G_x(t') dt' - \gamma \int_0^t r_z G_z(t') dt'$$

A ce stade, le signal  $s(t)$  représente l'intégrale de l'aimantation transversale selon la direction  $\vec{Y}$ . Le codage en phase, illustré par la Figure 2.5b, permet donc d'introduire une dépendance en  $r_y$  de la phase du signal RMN<sup>4</sup>. Ainsi, lors du codage en fréquence, le signal RMN a une phase décrivant l'intersection du parallélépipède rouge et orange de la Figure 2.5c. Le signal RMN d'une séquence d'acquisition peut finalement s'écrire :

$$s(t) = \int_{r_z \in \delta z} \iint_{(r_x, r_y) \in D_{xy}} M_0 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{-2\pi i [\gamma B_0 + \gamma \int_0^t r_x G_x(t') dt' + \gamma \int_0^t r_y G_y(t') dt' + \gamma \int_0^t r_z G_z(t') dt']} dr_x dr_y dr_z \quad (2.2)$$

Le signal RMN, tel que l'explique l'équation (2.2), dépend du temps. Or, la mesure de ce signal a lieu dans l'intervalle  $[TE, TR]$ . Ainsi, le signal RMN, avec un temps de mesure dans cet intervalle, peut être réécrit comme un échantillon de mesure de l'espace K. L'équation (2.2) devient alors :

$$E(k_x, k_y, k_z) = \int_{r_z \in \delta z} \iint_{(r_x, r_y) \in D_{xy}} M_0 e^{-\frac{TR}{T_2}} e^{-2\pi i [\gamma B_0 + k_x r_x + k_y r_y + k_z r_z]} dr_x dr_y dr_z \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_x = \gamma \int_0^t G_x(t') dt' \\ k_y = \gamma \int_0^{TE} G_y(t') dt' \\ k_z = \gamma \int_0^{TE} G_z(t') dt' \end{cases}$$

Le triplet  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  définit la dépendance de la phase avec chaque direction. Chaque mesure d'un signal RMN permet de remplir une ligne dans la direction  $k_x$  de l'espace K. Certaines séquences ne réalisent pas de plan de coupe préalable mais intègrent un

4. Le premier codage spatial à avoir été employé en IRM appliquait la technique de rétro-projection filtrée dans le plan  $xOy$  en réalisant plusieurs mesures selon une direction  $r_x$  qui tournait dans ce plan d'acquisition (Décorps, 2011).



second gradient de phase selon la direction  $\vec{Z}$ . Dans tout les cas, la représentation physique de l'aimantation macroscopique transversale est calculé par transformée de Fourier inverse continue telle que :

$$\begin{aligned} M_{\perp}(r_x, r_y, r_z) &= M_0 e^{\frac{-TR}{T_2}} e^{-2\pi i \gamma B_0} \\ &= \int \int \int_{k_z \in \delta f_z \mathbb{R}^2} E(k_x, k_y, k_z) e^{2\pi i [k_x r_x + k_y r_y + k_z r_z]} dk_x dk_y dk_z \\ M_{\perp}(\vec{r}) &= \int \int \int_{k_z \in \delta f_z \mathbb{R}^2} E(\vec{k}) e^{2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.2.2. Séquence d'acquisition par contraste de phase

Les séquences d'acquisition par contraste de phase, ou imagerie de flux, permettent de mesurer le champ de vitesse. Durant le codage spatial, un gradient bipolaire est intercalé entre le codage en phase et en fréquence comme l'illustre la Figure 2.4. Celui-ci n'interfère pas avec le codage spatial. Il permet d'introduire une dépendance de la phase avec la vitesse mesurée (Constantinesco et al., 1984; Moran, 1982). Sous l'hypothèse que la vitesse est constante à l'échelle d'un voxel, les atomes d'hydrogène mesurés se déplacent suivant l'expression :

$$r(t) = r + vt$$

L'espace K en est modifié et chaque élément de cet espace suit l'équation suivante :

$$E^c(\vec{k}, k_{v_x}, k_{v_y}, k_{v_z}) = \int_{r_z \in \delta z} \int \int_{(r_x, r_y) \in D_{xy}} M_0 e^{\frac{-TR}{T_2}} e^{-2\pi i [\gamma B_0 + \vec{k} \cdot \vec{r}]} e^{-2\pi i [\delta_{c,1} k_{v_x} v_x + \delta_{c,2} k_{v_y} v_y + \delta_{c,3} k_{v_z} v_z]} d\vec{r} \quad (2.5)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_{v_x} = \gamma \int_0^{TR} t' G_x(t') dt' \\ k_{v_y} = \gamma \int_0^{TR} t' G_y(t') dt' \\ k_{v_z} = \gamma \int_0^{TR} t' G_z(t') dt' \end{cases} .$$

Techniquement, la valeur des gradients, dont dépend  $k_{v_x}$ ,  $k_{v_y}$  et  $k_{v_z}$ , est fixée à partir d'un paramètre utilisateur nommé vitesse d'encodage  $V_{\text{enc}}$ . Ce paramètre indique la vitesse maximale mesurable. Si ce paramètre est sous-estimé alors un effet d'aliasing apparaît sur la phase et donc sur la vitesse.

Ensuite, la transformée de Fourier inverse de l'équation (2.5) permet d'obtenir l'aimantation transverse théorique telle que :

$$\begin{aligned} M_{\perp}^c(\vec{r}) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} E^c(\vec{k}, k_{v_x}, k_{v_y}, k_{v_z}) e^{-2\pi i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \\ &= M_0 e^{\frac{-TR}{T_2}} e^{-2\pi i \gamma B_0} e^{-2\pi i [\delta_{c,1} k_{v_x} v_x + \delta_{c,2} k_{v_y} v_y + \delta_{c,3} k_{v_z} v_z]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $c$  est la composante de vitesse mesurée et  $\delta_{c,1}$  le symbole de Kronecker.

Ces deux équations établissent le modèle direct continu de l'acquisition par IRM de flux. Pour être observable, la phase dans l'équation (2.6) peut dépendre uniquement d'une composante de la vitesse à la fois<sup>5</sup>. En théorie, seulement trois mesures, avec une mesure

5. Pelc et al. (1991) ont étudié des situations dans lesquelles la phase dépend de plusieurs composantes de vitesse.

par composante de la vitesse, permet d'obtenir le champ de vitesse. Cependant, le champ magnétique  $B_0$  peut être perturbé par sa propre non-linéarité ou encore des zones de susceptibilité magnétique. Afin de s'affranchir de ces incertitudes, il est en général préféré de mesurer la phase dans un cas de référence avec ( $k_{v_x} = 0, k_{v_y} = 0, k_{v_z} = 0$ ). Ensuite, le gradient bipolaire est appliqué selon une seule direction afin d'obtenir une composante de vitesse. Il est donc nécessaire de réaliser quatre mesures pour un même temps du cycle cardiaque comme l'illustre la Figure 2.6. On remplit ainsi quatre espaces K avec un espace de référence et les phases associées aux trois composantes de la vitesse.

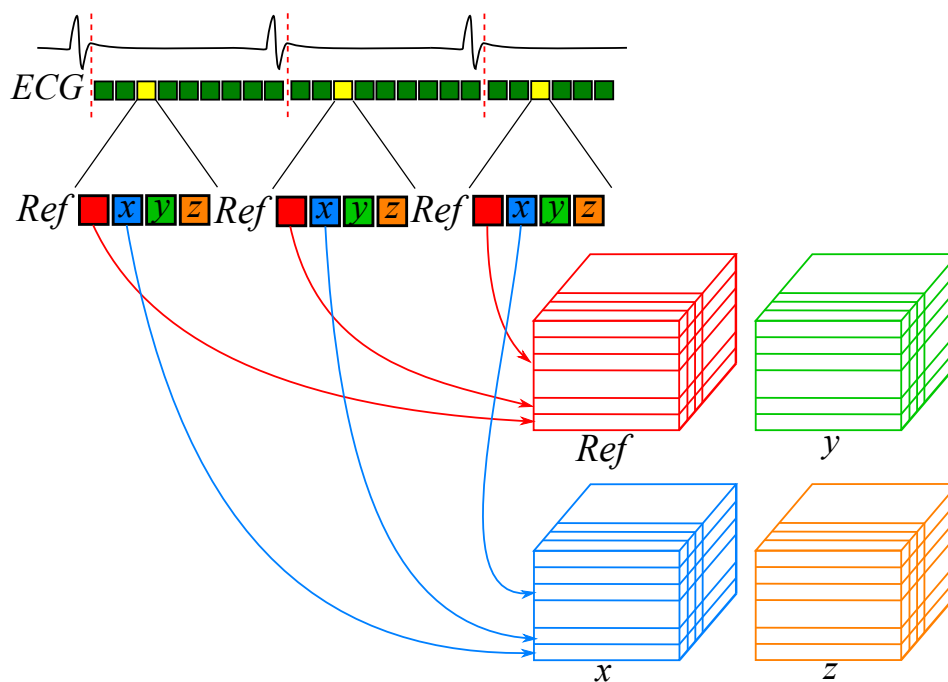


FIGURE 2.6. – Schéma du remplissage des espaces K pour les différentes composantes de la vitesse pour une synchronisation prospective.

La mesure de ces espaces K est réalisée sur différents cycles cardiaques. Il est donc nécessaire de synchroniser l'acquisition avec le rythme cardiaque. La mesure de l'électrocardiogramme (ECG) permet de suivre les battements du cœur. Deux stratégies de synchronisation sont possibles : prospectif ou rétrospectif. Dans le premier cas, la mesure est déclenchée à la fin du complexe QRS de l'ECG. Les différentes mesures sont alors synchronisées en temps et seulement 90 % des temps du cycle est mesuré. Dans le second cas, le signal est mesuré sur l'ensemble des temps du cycle cardiaque. La synchronisation est effectuée *a posteriori* à partir des pics R de l'ECG. Par ailleurs, la mise en place d'une synchronisation respiratoire est nécessaire pour l'imagerie cardio-thoracique.

### 2.1.2.3. Échantillonnage du modèle direct de l'IRM de flux 4D

L'espace K décrit par le triplet  $(k_x, k_y, k_z)$  est discrétisé d'une part lors de la lecture du signal RMN pendant le codage en fréquence et d'autre part lors de la séquence IRM qui introduit une phase spécifique durant le codage de phase. Différentes stratégies d'échantillonnage de l'espace K existent avec le remplissage matriciel, radial ou encore en spirale (Décorps, 2011). Dans la suite de ce manuscrit, l'impact de l'échantillonnage est présenté sur la base seulement d'un remplissage matriciel de l'espace K. La question de

l'échantillonnage implique la définition de deux paramètres essentiels : la résolution et le champ de vue (décrits ci-après). Le choix de ces paramètres est important car ils sont la source de deux effets : le repliement et le phénomène de Gibbs. Ce dernier correspond au modèle direct discret de l'IRM de flux 4D. Enfin, la complexité du phénomène de Gibbs vis-à-vis de la vitesse a favorisé l'emploi d'approximations linéaires présentées dans le dernier paragraphe de cette section.

**Résolution et champ de vue :** Les choix réalisés lors du remplissage de l'espace  $K$  déterminent deux éléments essentiels à la lecture d'une image : la résolution et le champ de vue. La résolution définit la dimension des pixels en 2D ou voxels en 3D. Le champ de vue fixe la taille du cadre de l'image. L'association de ces deux paramètres détermine la dimension de la matrice à acquérir.

Lors de l'échantillonnage, l'espace  $K$  est tronqué suivant chaque direction  $l$  dans un intervalle  $[-k_l^{\max}, k_l^{\max}]$  avec  $l \in \{x, y, z\}$ . La valeur  $k_{l,\max}$ , fixant la dimension de cet intervalle, influe directement sur la résolution telle que  $\Delta x = 1/k_x^{\max}$  par exemple. De la même manière, la taille du champ de vue dépend de la résolution de l'échantillonnage de l'espace  $K$  telle que  $x_{\max} = 1/\Delta k_x$ .

Le choix de ces paramètres est déterminant pour limiter l'effet de repliement ou le phénomène de Gibbs décrit dans les paragraphes suivants.

**Repliement :** Le repliement est un phénomène bien connu en traitement du signal. Le théorème de Shannon-Nyquist permet de s'en prémunir ou dans certains d'en prédire les effets. Typiquement, si la fréquence d'échantillonnage n'est pas supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal alors un phénomène de repliement apparaît dans le spectre fréquentiel.

Dans le cas de l'IRM, l'échantillonnage a lieu dans l'espace de Fourier. Le phénomène de repliement apparaît donc dans l'espace image. Le choix d'un champ de vue assez grand, et donc d'un pas d'échantillonnage  $\Delta k_l$  petit pour  $l \in \{x, y, z\}$ , permet de limiter l'apparition de cet artéfact. En général, le champ de vue peut englober un patient dans deux directions : gauche-droite et antéro-postérieur (de la poitrine au dos). Dans le contexte des maladies cardiovasculaires, le champ de vue suivant la direction de bas en haut du corps se limite à une zone précise : thoracique, crânienne, etc. L'effet de repliement dans cette direction est potentiellement problématique. Or, cet effet est supprimé en utilisant un filtre anti-aliasing sur le signal RMN analogique avant numérisation. Ce filtre ne peut s'appliquer techniquement qu'à la lecture temporelle du signal RMN, c'est-à-dire durant le codage en fréquence (voir Figure 2.4). Ainsi, l'application du codage en fréquence suivant la direction verticale du corps humain permet donc de s'affranchir d'une bonne part de ce type d'artéfact.

**Phénomène de Gibbs :** Le phénomène de Gibbs désigne l'artéfact créant un étalement sous forme de vague sur les images anatomiques. Cet artéfact naît de la troncature de l'espace de Fourier. L'anatomie d'un patient existe sur un continuum. Pour le décrire intégralement, il faudrait mesurer l'ensemble de l'espace  $K$ . Cependant, la discrétisation implique l'échantillonnage et la troncature de cet espace (Décorps, 2011). Le phénomène de Gibbs se comporte comme un filtre dont l'effet cumulé de l'échantillonnage et de la troncature peut être représenté par l'équation suivante :

$$\tilde{M}_{\perp}^c(r_x, r_y, r_z, k_{v_x}, k_{v_y}, k_{v_z}) = PSF(r_x, r_y, r_z) \otimes M_{\perp}^c(r_x, r_y, r_z, k_{v_x}, k_{v_y}, k_{v_z})$$

avec  $\otimes$  le produit de convolution sur la matrice d'acquisition discrète de dimension  $[N_x, N_y, N_z]$ . La fonction  $PSF$  représente la fonction de dispersion autour d'un point de position discrète  $(n_x \Delta x, n_y \Delta y, n_z \Delta z)$  avec  $n_x \in [1 \cdots N_x]$ ,  $n_y \in [1 \cdots N_y]$  et  $n_z \in [1 \cdots N_z]$ . Cette fonction prend la forme suivante pour un espace K tronqué par le produit de trois fenêtres rectangulaires :

$$PSF(r_x, r_y, r_z) = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \frac{\sin(\pi(r_x - n_x \Delta x)k_x^{\max})}{\sin(\pi(r_x - n_x \Delta x)k_x^{\max}/N_x)} \frac{\sin(\pi(r_y - n_y \Delta y)k_y^{\max})}{\sin(\pi(r_y - n_y \Delta y)k_y^{\max}/N_y)} \frac{\sin(\pi(r_z - n_z \Delta z)k_z^{\max})}{\sin(\pi(r_z - n_z \Delta z)k_z^{\max}/N_z)} \quad (2.7)$$

Le phénomène de Gibbs est particulièrement visible dans deux situations. Une image très contrastée fera apparaître des vagues plus intenses. Typiquement, l'imagerie anatomique des bords de vaisseaux sanguins est susceptible d'être impactée. Dans ce contexte particulier, le phénomène de Gibbs est aussi nommé effet de volume partiel. De plus, un signal intense à l'extrémité du champ de vue peut créer un effet de repliement de la fonction de dispersion. Ensuite, la faible résolution d'une image peut amplifier l'impact du phénomène de Gibbs. Afin de limiter ces effets, l'augmentation de la résolution est une solution. Toutefois, une résolution trop grande diminue la quantité de signal perceptible et par conséquent réduit significativement le rapport signal sur bruit.

Enfin, le phénomène de Gibbs désigne l'effet du processus de mesure dans un contexte discret. On note que le filtre, introduit par l'équation (2.7), est linéaire par rapport à l'anatomie. En revanche, ce n'est pas le cas en ce qui concerne la vitesse. Afin de simplifier le modèle direct sur la vitesse, plusieurs approximations linéaires ont été proposées dans la littérature.

**Approximation du modèle direct discret de l'IRM de flux 4D :** Le filtre (2.7) est non linéaire par rapport à la vitesse car celle-ci apparaît dans le terme de phase. Un tel modèle peut être utilisé pour générer des données IRM synthétiques 2D sur un écoulement de Poiseuille (Potters et al., 2014). L'application à des jeux de données plus complexes et volumineux nécessite plus de ressources informatiques. Par conséquent, plusieurs études ont préféré exploiter un modèle convolutif. Rispoli et al. (2015) exploitent, lors de la résolution d'un problème inverse, la même fonction de dispersion à base de sinus cardinal mais s'appliquant directement à la vitesse. D'autres auteurs (Stalder et al., 2008; Piatti et al., 2017), ont fait le choix de dégrader le champ de vitesse avec un filtre gaussien. Enfin, Cibis et al. (2014) et Puiseux et al. (2019) ont utilisé un filtre moyennant pour représenter le modèle direct de l'IRM de flux 4D.

Les filtres gaussiens et moyennant sont assez éloignés du filtre (2.7) comparé au filtre basé sur un sinus cardinal. Cependant, toutes les erreurs et artéfacts d'une image ne sont pas issues seulement du modèle direct (2.7). En effet, les artéfacts de mouvement ou encore d'inhomogénéité du champ magnétique y sont négligés. De plus, les stratégies d'acquisition multi-antenne mélangent l'information de plusieurs antennes (Blaimer et al., 2004). Un filtre gaussien ou moyennant considère des effets plus large que simplement l'échantillonnage. En particulier, le filtre moyennant a montré d'excellente corrélation (97 %) entre vitesse simulée numériquement puis moyennée et des données fantôme mesurées avec plusieurs antennes (Puiseux et al., 2019). Dans la suite de ces travaux, les données IRM synthétiques sont générées en appliquant un filtre moyennant sur le champ de vitesse, désigné simplement par le terme "filtre IRM".

## 2.2. Rapport signal sur bruit en IRM de flux 4D

Le rapport signal sur bruit en IRM est un élément décisif car il est l'un des facteurs limitant la résolution d'une image. En particulier, le rapport signal sur bruit de l'anatomie est directement dépendant de plusieurs facteurs dont la résolution et le temps d'acquisition. Cette relation est détaillée dans la Section 2.2.1. Nous discutons ensuite de l'importance du signal anatomique dans l'erreur de mesure en vitesse. Enfin, la Section 2.2.2 présente les conditions d'acquisition clinique (résolution, champ de vue, etc) ainsi que le rapport signal sur bruit mesuré pour plusieurs individus.

### 2.2.1. Le rapport signal du bruit

#### 2.2.1.1. Rapport signal sur bruit du signal anatomique

L'IRM de flux 4D mesure l'anatomie et le champ de vitesse et ces mesures sont entachées de bruit. La distribution du bruit s'appliquant au signal anatomique est généralement supposée suivre la loi de Rice<sup>6</sup> (Gudbjartsson & Patz, 1995). Le signal RMN, mesuré dans l'espace  $K$ , est entaché d'un bruit gaussien sur la partie réelle et imaginaire. Le signal RMN dans l'espace image subit un bruit gaussien car la transformée de Fourier d'une distribution gaussienne reste gaussienne (Abramowitz & Stegun, 1972). Le rapport signal sur bruit ( $RSB$ ) dépend de plusieurs facteurs liés à la machine IRM, aux paramètres de séquence et au patient. Macovski (1996) a établi la relation entre ces différents éléments à l'échelle d'un voxel pour une seule antenne :

$$RSB = 20 \times \log_{10} \left( \frac{\gamma B_0^2 \chi V \sqrt{\tau} N_{\text{ex}}}{\sqrt{2k_B TR}} \right) \quad (2.8)$$

avec :

- $\gamma$  le ratio gyromagnétique,
- $B_0$  le champ magnétique permanent,
- $\chi$  la susceptibilité nucléaire statique,
- $V$  le volume d'un voxel,
- $\tau$  le temps pour une acquisition,
- $N_{\text{ex}}$  le nombre de répétitions de la mesure,
- $k_B$  la constante de Boltzmann,
- $T$  la température absolue,
- $R$  la résistance effective de l'antenne.

Tout d'abord, les paramètres de la machine IRM ( $R$  et  $B_0$ ) ont un impact significatif sur le rapport signal sur bruit. Ainsi, il est préférable d'utiliser des antennes plus performantes en terme de résistance et d'acquérir des images sur des machines IRM avec un fort champ magnétique. Toutefois, les champs magnétiques puissants sont plus susceptibles de générer des artefacts d'inhomogénéités de champ.

Ensuite, la susceptibilité nucléaire statique  $\chi$  peut être augmentée pour le temps de l'examen grâce à l'utilisation de produit de contraste. Le gadolinium est un produit de contraste souvent employé dans le contexte de l'imagerie cardiovasculaire par résonance magnétique (Hess et al., 2015). Cependant, son usage n'est pas systématique afin de préserver le caractère non invasif de l'imagerie par résonance magnétique.

---

6. Les parties réelle et imaginaire de l'aimantation transversale subissent chacune un bruit de distribution gaussienne. La loi de Rice s'applique au module du signal RMN complexe.

Enfin, le reste des paramètres pouvant influencer le rapport signal sur bruit sont liés au paramétrage de la séquence IRM. Ces paramètres de séquence sont le temps d'une acquisition  $\tau$  pour le volume d'un voxel élémentaire  $V$  et le nombre de répétition de la mesure  $N_{\text{ex}}$ . En considérant le volume d'acquisition du champ de vue complet  $V_t = N_x N_y N_z V$  et son temps d'acquisition total  $\tau_t = N_{\text{ex}} N_x N_y N_z \tau$ , il est possible de reformuler l'équation (2.8) en fonction de la taille de la matrice d'acquisition  $[N_x, N_y, N_z]$  :

$$RSB = 20 \times \log_{10} \left( \frac{\gamma B_0^2 \chi V_t}{\sqrt{2k_B TR}} \times \frac{\sqrt{\tau_t N_{\text{ex}}}}{(N_x N_y N_z)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.9)$$

On observe que l'augmentation de la résolution, donc de la taille de la matrice d'acquisition  $[N_x, N_y, N_z]$ , a un effet très significatif en terme de diminution du rapport signal sur bruit. Le temps d'acquisition  $\tau_t$  et le nombre de répétition  $N_{\text{ex}}$  de la mesure peuvent améliorer le rapport signal sur bruit. Cependant, l'impact de ces deux paramètres ne permet pas d'augmenter indéfiniment la résolution. Par ailleurs, la pratique clinique nécessite un temps d'acquisition  $\tau_t$  raisonnable.

### 2.2.1.2. Rapport signal sur bruit sur la vitesse

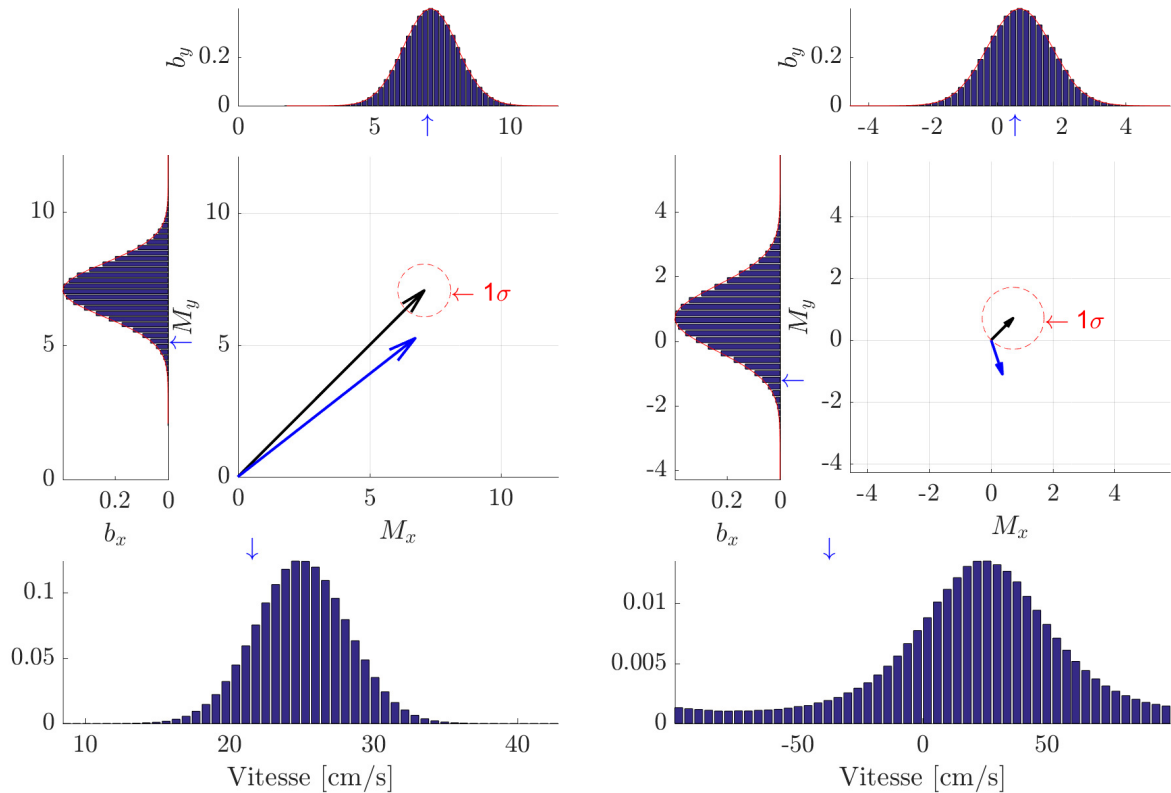
Le rapport signal sur bruit sur la vitesse est plus complexe car la vitesse appartient à la phase du signal mesuré. L'étude de Andersen & Kirsch (1996) montre l'impact de l'amplitude du signal anatomique sur la distribution de la vitesse. Cet impact est illustré par la Figure 2.7. Chacune des Figures 2.7a et 2.7b représente quatre graphes avec en haut et à gauche les distributions d'un bruit gaussien ( $b_x, b_y$ ) d'écart-type unitaire imposé à une aimantation théorique. Le graphe central illustre le plan complexe dans lequel est présenté une aimantation théorique en noir entouré en rouge de l'écart-type du bruit imposé. La flèche bleue représente l'aimantation d'un échantillon bruité. L'échantillon de bruit appliqué à l'aimantation théorique est le même pour les deux figures. La position de cet échantillon dans les différents histogrammes est donnée par une petite flèche bleue. Enfin, le graphe du bas représente la distribution de la vitesse obtenue à partir de l'aimantation théorique associée à un bruit gaussien. La vitesse d'encodage  $V_{\text{enc}}$  est fixée à 100 cm/s et la vitesse sans bruit est de 25 cm/s.

On observe que la phase associée à la flèche bleue est bien moins perturbée lorsque le rapport signal sur bruit anatomique est de 2,3 dB plutôt que 0 dB (équivalent à une aimantation de 10 et 1). De plus, la distribution en vitesse s'éloigne d'une gaussienne si le rapport signal sur bruit est trop faible. Ces figures illustrent parfaitement les conclusions présentées par Andersen & Kirsch (1996).

Toutefois, de nombreuses études (Pelc et al., 1991; Markl, 2005; Stalder et al., 2008) considèrent la distribution du bruit sur la vitesse comme gaussienne avec un écart-type dont l'expression est simplifiée :

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{V_{\text{enc}}}{RSB} \quad (2.10)$$

avec  $RSB$  désignant le rapport signal sur bruit du signal anatomique. Par la suite, les données IRM synthétiques sont simulées en considérant un bruit gaussien d'écart-type modélisé par l'expression (2.10).



(a) Rapport signal sur bruit anatomique de 2,3 dB (b) Rapport signal sur bruit anatomique de 0 dB

FIGURE 2.7. – Exemple de distribution d'une composante de vitesse pour deux rapports signal sur bruit anatomiques.

## 2.2.2. Conditions d'acquisition clinique

Les conditions d'acquisition ont un impact déterminant sur le rapport signal sur bruit comme cela a été montré à la section précédente. Certains facteurs d'impact sont contraints par l'activité clinique comme le temps d'acquisition. Par ailleurs, le volume d'intérêt est également fixé par la zone à imager. Le compromis a donc lieu entre taille de la matrice d'acquisition  $[N_x, N_y, N_z]$  et rapport signal sur bruit. En pratique clinique, la résolution dépend du volume d'intérêt. Pour une matrice d'acquisition et un rapport signal sur bruit fixe, un volume d'intérêt plus petit permet de gagner en résolution. Le Tableau 2.1 présente les résolutions spatiale et temporelle, les vitesses d'encodage  $V_{enc}$  et temps d'acquisition usuels dans la pratique clinique (Markl et al., 2012, Tab. 1). Ces paramètres sont à comparer avec l'IRM de flux 2D répandu en pratique clinique. Ces paramètres de résolution sont de 1,5-2,5 mm en spatial, 30-60 ms en temporel avec un plan de coupe de 5 à 8 mm quelle que soit la zone d'intérêt (Stankovic et al., 2014).

Le rapport signal sur bruit dépend également de différents facteurs notamment liés au patient comme la susceptibilité nucléaire statique  $\chi$ . L'usage de produits de contraste permet d'améliorer significativement le rapport signal sur bruit anatomique. Ce dernier a été quantifié par Hess et al. (2015) sur les données IRM de flux 4D thoracique de plusieurs patients. L'estimation est réalisée plus particulièrement sur l'aorte. L'étude compare l'impact de la force du champ magnétique ainsi que l'utilisation d'agent de contraste. Le Tableau 2.2 récapitule les résultats à partir de la Figure 5 de l'article de Hess et al.

Région	Résolution spatiale [mm]	Résolution temporelle [ms]	$V_{\text{enc}}$ [cm/s]	Temps d'acquisition [min]
<b>Tête</b>				
Artère intracrânienne	0,8-1,0	40-60	80	15-20
Artère carotide	1,0-1,2	40-50	100-200	10-15
<b>Thorax</b>				
Aorte	2,0-2,5	40-50	150-200	10-20
Artère pulmonaire	2,0-2,5	40-50	100-200	10-20
Cœur	2,5-3,0	40-50	100-200	10-25
<b>Abdomen</b>				
Vaisseau hépatique veineux	2,0-2,5	40-60	30-40	15-20
Vaisseau hépatique artériel	1,5-2,0	40-50	60-80	10-20
<b>Artères rénal</b>	1,0	40-80	80-120	10-20

TABLE 2.1. – Paramètres de la séquence d'acquisition par IRM de flux 4D en fonction de la région d'intérêt. Ce tableau est extrait de l'article de [Markl et al. \(2012\)](#).

(2015). La résolution spatiale de l'acquisition par IRM de flux 4D est de  $2,0 \times 2,5 \times 2,5$  mm<sup>3</sup>. Suivant l'expression de l'écart-type (2.10) et l'intervalle de valeur du Tableau 2.2, l'écart-type de la vitesse varie entre 1 et 4,5 % de la vitesse d'encodage  $V_{\text{enc}}$ .

Champ magnétique	1,5 T	3 T	7 T
RSB sans agent de contraste [dB]	20-27,3	23,9-30,4	28,3-33,4
RSB avec agent de contraste [dB]	24,4-29,6	27,4-32	31-36,2

TABLE 2.2. – Rapport signal sur bruit pour différentes valeurs de champ magnétique avec ou sans agent de contraste. Les valeurs inscrites dans ce tableau correspondent à celles estimées dans l'aorte ascendante de plusieurs patients. Ces résultats sont extraits des travaux de ([Hess et al., 2015](#), Fig. 5).

## 2.3. Quantification des biomarqueurs hémodynamiques en IRM de flux 4D

Les biomarqueurs hémodynamiques dépendent du champ de vitesse. Or, ils n'ont pas la même sensibilité aux sources d'erreur présentées précédemment. La Section 2.3.1 développe la problématique de la quantification des biomarqueurs en relation avec les différentes sources d'erreur. Dans un second temps, nous proposons deux axes de recherche, dans la Section 2.3.2, permettant de répondre à cette problématique. De plus, cette section présente les contraintes qui ont orienté les arbitrages ainsi que nos choix dans ce travail.

### 2.3.1. Problématique

Le champ de vitesse, mesuré par IRM de flux 4D, est entaché d'erreur provenant de différentes sources. Celles-ci peuvent impacter directement la mesure du champ de vitesse comme :

- les phénomènes de repliement issus du champ de vue ;
- les phénomènes de repliement issus de la vitesse d'encodage ;
- le bruit de mesure sur le signal anatomique ;



- l'inhomogénéité du champ magnétique.

D'autres erreurs proviennent de la faible résolution de l'acquisition. D'une part, l'écoulement hémodynamique n'est descriptible qu'à la résolution des données. Cela limite nécessairement l'analyse pour les écoulements complexes. D'autre part, l'effet de volume partiel, provenant du filtrage IRM, introduit un biais dans le champ de vitesse.

Comme indiqué dans les Sections 2.1.2.2 et 2.1.2.3, le phénomène de repliement du champ de vue et de la vitesse peut être évité lors de la préparation de l'acquisition. Ensuite, les inhomogénéités du champ de vitesse peuvent être pour partie corrigées en déterminant le biais de phase sur les tissus statiques (Bernstein et al., 1998). Ainsi, la résolution et le bruit de mesure sont les sources d'erreurs dominantes.

Les biomarqueurs hémodynamiques découlent du champ de vitesse plus ou moins directement. Plus précisément, la nature d'un biomarqueur peut le rendre plus ou moins sensible à ces sources d'erreur. Typiquement, les biomarqueurs peuvent être divisés en trois classes :

- les biomarqueurs de nature intégrale ;
- les biomarqueurs directs ;
- les biomarqueurs de nature dérivative.

Les biomarqueurs de nature intégrale sont issus de la contribution de plusieurs vecteurs vitesse. Dans ces conditions, le bruit de mesure est moyenné et son impact sur le biomarqueur est donc réduit (David et al., 2019). Le débit cardiaque, la vitesse moyenne ou la vitesse de l'onde de pouls rentre dans ce type de catégorie. La faible résolution peut avoir indirectement un impact si on considère que la segmentation a été réalisée à partir des données IRM de flux 4D.

Ensuite, les biomarqueurs directs proviennent de la contribution d'un seul vecteur de vitesse tel que la vitesse maximale. Ce biomarqueur en particulier n'est pas très sensible au bruit (David et al., 2019). En effet, la vitesse maximale est généralement située au centre du vaisseau et donc associée à des voxels ayant un bon rapport signal sur bruit anatomique. De plus, la vitesse maximale est proche de la vitesse d'encodage ce qui implique un bon rapport vitesse sur bruit. Sur la base de l'écart-type (2.10) introduit précédemment et de l'estimation du rapport signal sur bruit du Tableau 2.2, on peut estimer une erreur maximale de l'ordre de 5 % de la vitesse d'encodage directement imputable au bruit dans les pires conditions d'acquisitions. L'impact de la faible résolution et du lissage introduit par le filtre IRM a été estimé à 1-2 % de la vitesse d'encodage sur des données IRM synthétiques.

Enfin, les biomarqueurs de nature dérivative sont calculés à partir de la dérivée du champ de vitesse tels que le cisaillement à la paroi et la pression relative. Ces biomarqueurs sont par nature particulièrement sensibles au bruit de mesure. De plus, les petites échelles de variation locale du champ de vitesse sont filtrées par le processus de mesure et la faible résolution. Par exemple, le cisaillement à la paroi est systématiquement sous estimé d'environ 40 % sur des données synthétiques (Stalder et al., 2008). De plus, la corrélation du cisaillement entre la simulation numérique des fluides et la mesure par IRM de flux 4D sur patient est de l'ordre de 63 % (Boussel et al., 2009). Contrairement à la pression relative, le cisaillement est un biomarqueur pariétal. Il est donc aussi sensible au positionnement de la segmentation. Par conséquent, ce type de biomarqueur est potentiellement difficile à quantifier.

### 2.3.2. Axes de recherche

L'ensemble des biomarqueurs décrits précédemment dépendent du champ de vitesse. Par conséquent, un axe de recherche naturel est de travailler sur l'amélioration de la qualité du champ de vitesse. Ainsi, la quantification de l'ensemble des biomarqueurs est améliorée. Or, différents travaux (Stalder et al., 2008; Boussel et al., 2009; David et al., 2019) montrent que la difficulté de quantification se concentrent principalement sur un biomarqueur en particulier : le cisaillement à la paroi. Par conséquent, le second axe de recherche, développé dans ce document, est centré sur un unique biomarqueur afin d'obtenir un meilleur estimateur. Comme le suggèrent les résultats présentés précédemment, le cisaillement à la paroi est difficile à quantifier et peut faire l'objet d'amélioration.

Dans ce manuscrit, nous avons étudié ces deux options. Le Chapitre 3 présente une solution de régularisation du champ de vitesse en introduisant comme contrainte un champ de vitesse incompressible et une certaine régularité temporelle. Ce chapitre représente le travail de la première année de thèse. Dans un second temps, un algorithme permettant d'estimer le cisaillement à la paroi est présenté au Chapitre 4. Celui-ci s'appuie sur la modélisation de la paroi localement autour d'un point d'intérêt pour introduire une contrainte de nullité de la vitesse pariétale. Plus précisément, cet algorithme est divisé en quatre étapes successives :

1. modélisation de la paroi,
2. modélisation du champ de vitesse,
3. évaluation du cisaillement au point d'intérêt et en quelques points voisins ;
4. régularisation du cisaillement *a posteriori*.

Chacune de ces étapes peut être traitée comme un problème indépendant. Par conséquent, le Chapitre 5 a pour objectif de motiver les choix de modélisation pariétale. Ensuite, le Chapitre 6 est dédié à la modélisation du champ de vitesse. Trois types de modèle de vitesse ont été envisagés incluant plus ou moins de connaissance *a priori*. Puis, le cisaillement est évalué à la position du point d'intérêt ainsi qu'à ses points voisins. Ainsi, chaque point d'intérêt se voit affecté différentes estimations du cisaillement. Enfin, le Chapitre 7 est consacré à la régularisation *a posteriori* des multiples estimations du cisaillement à la paroi.

Le Chapitre 8 est dédié dans un premier temps à l'évaluation des différentes solutions possibles de l'algorithme proposé. L'arbitrage entre les solutions est réalisé sur plusieurs critères :

- une bonne capacité de quantification du cisaillement ;
- une bonne corrélation de Pearson par rapport à un cisaillement de référence ;
- un coût de calcul bas ;
- une complexité algorithmique limitée.

Dans un second temps, la solution choisie est évaluée sur des données IRM synthétiques. En particulier, nous étudierons l'impact de la segmentation et du rapport signal sur bruit sur la quantification du cisaillement à la paroi.



# Chapitre 3

## Régularisation du champ de vitesse

L'ensemble des biomarqueurs hémodynamiques dépendent de la résolution et de la précision du champ de vitesse. Comme l'indique le chapitre précédent, le bruit est un élément particulièrement significatif dans la quantification de biomarqueurs. Par conséquent, ce chapitre a pour objectif d'améliorer la précision du champ de vitesse dans un contexte bruité tout en respectant la contrainte de temps de la pratique clinique. Il s'agit de la première contribution de ce manuscrit.

L'état de l'art, présenté dans la Section 3.1, donne un aperçu des solutions existantes en fonction de leur complexité. D'une part, elles peuvent être différenciées par la prise en compte ou non de l'évolution temporelle du champ de vitesse (voir les Sections 3.1.2.3 et 3.1.2.4). D'autre part, on peut les distinguer par la nature physique ou générique des équations utilisées lors de la régularisation. Certains travaux traitent un problème de super-résolution (D'Elia et al., 2012; Rispoli et al., 2015) en exploitant le fort potentiel des équations de Navier-Stokes (voir les Sections 3.1.2.2 et 3.1.2.4). Or, ces équations sont non linéaires et généralement appliquées dans un cadre élément finis ou volume finis. La complexité de ces équations est telle que le coût de calcul est incompatible avec la routine clinique.

Dans ce contexte, nous présentons une solution de filtrage spatio-temporel dans la Section 3.2. À l'instar de Song et al. (1993), nous exploitons la contrainte spatiale d'incompressibilité sous la forme d'un projecteur orthogonal, précisé à la Section 3.2.1. La régularisation temporelle est introduite à travers un terme de pénalisation quadratique. La solution de filtrage spatio-temporel, présentée dans la Section 3.2.2, s'inscrit alors dans le cadre d'une combinaison de régularisation physique et générique (semblable à l'état de l'art de la Section 3.1.2.3). Nous définissons, dans la Section 3.2.3, deux types de condition de bord, *circulant* et *libre* d'après les travaux de Song et al. (1993). Enfin, le caractère indépendant des filtres spatial et temporel permet de calculer simultanément la contrainte spatiale sur tous les temps du cycle cardiaque.

Les performances des solutions avec différentes conditions de bord sont comparées en fonction du paramètre de pénalisation sur des données synthétiques dans la Section 3.3. Ces résultats ont été valorisés par un article de conférence nationale avec actes (Levilly et al., 2017a) et une présentation dans une conférence internationale (Levilly et al., 2017b). La solution optimale, avec l'hypothèse de bord *libre*, est comparée à deux approches de la littérature n'intégrant pas de régularité selon le temps. Enfin, la Section 3.4 présente les limites de ce type de solution et indique des perspectives.

## 3.1. État de l'art

Selon la théorie des problèmes inverses (Idier, 2001), la prise en compte de connaissance *a priori* permet de contrebalancer l'effet d'éléments structurels comme le modèle direct issu du processus de mesure et de perturbations comme le bruit de mesure. Généralement, la résolution de tels problèmes s'articule autour de deux composantes : l'adéquation aux données et la régularisation. Le terme d'adéquation aux données, présenté dans la Section 3.1.1, repose dans la majorité des cas sur une norme  $L_2$  appliquée à l'erreur en vitesse. Ensuite, un large panel de type de régularisation est présenté dans la Section 3.1.2. À noter que la solution développée dans ce chapitre s'inscrit dans une démarche combinant une régularisation de nature spatiale et physique, comme indiquée dans la Section 3.1.2.2, et une pénalisation temporelle générique semblable aux travaux de la Section 3.1.2.3.

### 3.1.1. Adéquation aux données

Dans la littérature, le terme d'adéquation aux données peut être formulé de deux manières :

- **Avec l'aimantation et la vitesse** : Comme présenté au Chapitre 2, le processus de mesure permet d'accéder simultanément à l'aimantation transversale et la phase linéairement liée à la vitesse. Il est alors possible de formuler un problème intégrant ces deux composantes. On trouve ce type de démarche, en particulier, dans le domaine de l'acquisition compressée ou du *Compressed Sensing* (Zhao et al., 2012; Santelli et al., 2016) dont l'objectif est d'accélérer les séquences d'acquisition en réduisant le nombre de mesures. Dans ce contexte, il ne s'agit pas seulement de réduire l'effet du bruit mais aussi de combler le manque de données grâce à la régularisation. Toutefois, l'approche bayésienne de Herment et al. (1996) utilise ce type de formulation dans l'objectif seul de réduire l'influence du bruit sur la vitesse. Plus généralement, ces formulations du terme d'adéquation aux données permettent d'utiliser un modèle d'observation plus proche du modèle direct de l'IRM tel que défini à la Section 2.1.2.3.
- **Avec la vitesse seulement** : Dans de nombreux travaux, l'aimantation transversale est ignorée au profit seulement de la vitesse (Song et al., 1993; Bostan et al., 2013; D'Elia et al., 2012). En effet, ces deux éléments sont peu corrélés en terme de valeur (hormis l'influence du bruit). Toutefois, les travaux de Busch et al. (2013) utilisent l'aimantation transversale dans la pondération afin de définir des zones d'applicabilité du critère. Enfin, l'ensemble des travaux exploitant ce type de formulation considèrent une norme  $L_2$  ce qui revient à supposer que le bruit est gaussien. On note, par ailleurs, que seul les travaux de Rispoli et al. (2015) exploitent un filtre IRM (un sinus cardinal) dans une démarche de résolution de problèmes inverses (voir la Section 2.1.2.3).

### 3.1.2. Régularisation

Quelle que soit la formulation du terme d'adéquation aux données, la résolution d'un problème mal posé nécessite l'apport d'informations *a priori*. L'information peut être introduite à travers un terme de pénalisation (comme une loi statistique *a priori* (Herment et al., 1996)) dans le critère à minimiser ou bien une contrainte limitant l'espace des solutions (Song et al., 1993; Bostan et al., 2015b). Par ailleurs, la nature de l'information

peut différer en fonction de son origine et de son support. On différenciera alors la régularisation autour de deux axes :

- **"générique/physique"** : Une régularisation "générique" est formulée à partir d'hypothèses sur le comportement de la vitesse. Typiquement, [Herment et al. \(1996\)](#) ont choisi une loi statistique *a priori* de champ de Markov du premier ordre pour représenter le comportement visqueux de l'écoulement. La régularisation dite "physique" exploite directement une équation issue de la mécanique des fluides.
- **spatial/spatio-temporel** : Le support de la régularisation peut être limité à l'évolution spatiale du champ de vitesse en ignorant la variation temporelle. Suivant les cas, la régularisation est appliquée indépendamment pour le temps et l'espace ([Bostan et al., 2013](#)) ou bien sous une équation liant espace et temps ([Rispoli et al., 2015](#)).

Une sélection des solutions de cet état de l'art est classifiée suivant ces deux axes dans la Figure 3.1. Cette classification regroupe visuellement les solutions s'appuyant sur des hypothèses similaires. Les sous-sections suivantes introduisent ces hypothèses suivant qu'elles sont purement spatiales et d'origine "générique" ou "physique", ou bien spatio-temporelles avec une combinaison "générique" et "physique" ou encore totalement "physiques".

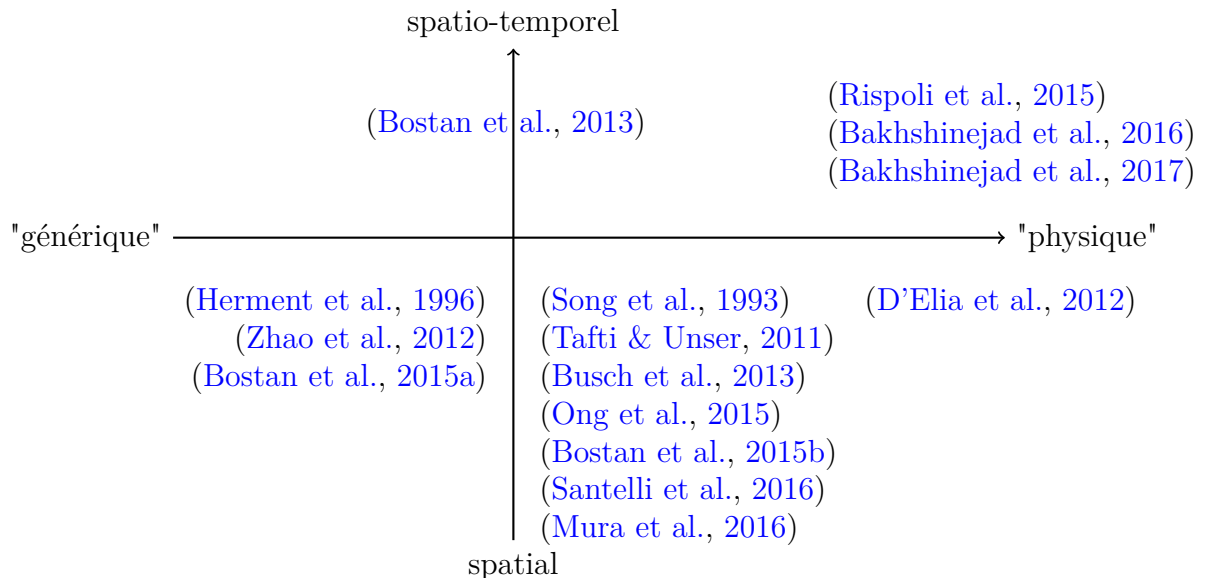


FIGURE 3.1. – Représentation de l'état de l'art en fonction de la nature physique ou non de la régularisation puis du caractère spatial ou spatio-temporel du support de la régularisation.

### 3.1.2.1. Régularisation spatiale "générique"

En traitement de l'image, il est courant d'utiliser des fonctions de régularisation dites "génériques" pouvant s'appliquer à des problèmes de nature différente. Afin d'imposer une certaine régularité, une pénalisation peut être basée sur des différences entre pixels/voxels (aussi interprétée comme des dérivés en différences finies). A titre d'exemple, la démarche mise en œuvre par [Herment et al. \(1996\)](#) introduit deux modèles *a priori* dont l'un prend la forme suivante en 2D :  $\varphi_1(v) = \sum_{x,y} \varphi(f_{x+1,y} - f_{x,y}) + \varphi(f_{x,y+1} - f_{x,y})$  avec  $f_{x,y}$  la fréquence de l'espace K associée à la vitesse et  $\varphi$  une norme  $L_2L_1$  permettant de préserver les frontières entre deux milieux au sein de l'image. Par ailleurs, le second modèle *a*

*priori* s'applique directement sur la fréquence  $f_{x,y}$  tel que  $\varphi_2 = \sum_{x,y} \varphi(f_{x,y})$  afin de limiter l'amplitude des fréquences associées à la vitesse.

La pénalisation  $\varphi_1$  est un cas particulier de régularisation variationnelle et en particulier de variation totale. Cette dernière est particulièrement adaptée pour un champ de vecteur 2D avec une seule composante de vitesse. Dans le cadre de l'IRM de flux 4D, la gestion des différentes composantes d'un champ de vecteur n'est pas directe. Ainsi, [Bostan et al. \(2015a\)](#) ont proposé une approche variationnelle s'appuyant sur la variation totale appliquée à un champ de vecteur<sup>1</sup>. Cette méthode utilise une pénalisation de norme  $L_1$  appliquée aux valeurs singulières de la matrice jacobienne de la vitesse en chaque point de mesure. L'usage de la norme  $L_1$  permet, pour ce type d'application, d'atténuer les composantes de vitesse normales à la direction dominante locale et de tolérer des valeurs importantes notamment à proximité des bords du domaine fluide.

### 3.1.2.2. Régularisation spatiale "physique"

En IRM de flux, on s'intéresse à la circulation du sang au sein du système cardiovasculaire. La régularisation spatiale peut alors s'appuyer sur des équations issues de la mécanique des fluides. Ces dernières reposent sur les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

**Principe de conservation de la masse :** Ce principe, appliqué à la mécanique des fluides, mène à l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

avec  $\vec{v}$  la vitesse en un point du domaine fluide et un temps,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $\operatorname{div}(\cdot)$  l'opérateur de divergence. Cette expression doit être vérifiée en tout point du domaine fluide et tout temps. Suivant l'équation (3.1), un fluide incompressible, c'est-à-dire ayant une masse volumique constante spatialement et temporellement, permet de réduire l'équation de continuité à l'expression  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ , vérifiée en tout point du domaine fluide et tout temps.

Cette hypothèse a été traitée par de nombreux auteurs sous la forme de pénalisation ([Tafti & Unser, 2011](#); [Mura et al., 2016](#)) ou de contrainte stricte réduisant l'espace des solutions ([Song et al., 1993](#); [Busch et al., 2013](#); [Bostan et al., 2015b](#)). La démarche pénalisée mise en œuvre par [Tafti & Unser \(2011\)](#) s'appuie sur un cadre variationnel similaire à celui de [Bostan et al. \(2015a\)](#). Celle-ci fait intervenir la pénalisation de la divergence de la vitesse ainsi que le rotationnel de la vitesse. La minimisation du rotationnel repose sur l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel, c'est-à-dire avec  $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ . Or, cette hypothèse n'est pas justifiée pour les écoulements au sein des vaisseaux sanguins. On notera, par ailleurs, que ces travaux donnent l'avantage à la pénalisation de norme  $L_1$  vis-à-vis de la norme  $L_2$ .

D'autre part, l'utilisation d'une contrainte stricte permet de réduire l'espace des solutions sans introduire de paramètre de pénalisation. Ce problème sous contrainte a été résolu de deux manières :

- en appliquant un projecteur orthogonal  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}$  avec  $\mathcal{M}$  l'espace des champs de vecteur à divergence nulle ([Song et al., 1993](#); [Bostan et al., 2015b](#)) ;

---

1. Le cadre mathématique permettant l'extension de cette pénalisation scalaire vers une version vectorielle a été développé dans les travaux de [Tafti & Unser \(2011\)](#).

- en utilisant une famille génératrice de l'espace  $\mathcal{M}$  avec, par exemple, des fonctions à base radiale (Busch et al., 2013) ou d'ondelettes (Ong et al., 2015).

Ces deux solutions proviennent de la décomposition de Helmholtz-Hodge permettant de diviser un champ de vecteur en la somme de deux champs scalaire et vectoriel (Bhatia et al., 2013). La différence entre ces deux approches est développée dans la Section 3.2.1.

**Principe de conservation de la quantité de mouvement :** L'incompressibilité est une contrainte peu régularisante car elle fournit moitié moins d'équations que d'inconnues en 2D et seulement un tiers en 3D. Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet de manipuler une équation plus régularisante mais au prix de la non-linéarité. Dans le cas d'un fluide incompressible stationnaire, le principe de conservation de la quantité de mouvement conduit à l'équation suivante :

$$\overline{\rho \text{grad}(\vec{v})} \cdot \vec{v} = \vec{f} - \overline{\text{grad}(p)} + \mu \Delta \vec{v} \quad (3.2)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\vec{f}$  les efforts au sein du domaine,  $p$  la pression interne du fluide et  $\Delta$  l'opérateur Laplacien. Les équations de Navier-Stokes sont constituées des équations différentielles résultant des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

D'Elia et al. (2012) proposent de résoudre un problème sous la contrainte introduite par les équations de Navier-Stokes d'un fluide newtonien, incompressible et stationnaire. L'équation (3.2) est linéarisée pour ensuite résoudre directement ce problème sous contrainte avec la formulation d'un Lagrangien. La résolution est menée de manière itérative afin de converger vers la solution du problème non linéarisé. L'avantage de ce type d'approche est la possibilité d'améliorer significativement la résolution du champ de vitesse.

### 3.1.2.3. Combinaison de régularisations spatiale "physique" et temporelle "générique"

Les solutions précédentes ne s'appuient que sur l'évolution spatiale du champ de vitesse. Ces solutions ne sont pas impactées par la non prise en compte du temps. Cependant, la solution de D'Elia et al. (2012) fait exception. En effet, l'hypothèse de stationnarité imposée à l'équation de Navier-Stokes n'est pas cohérente avec le caractère pulsé de l'écoulement sanguin.

Par conséquent, il est pertinent de combiner de la régularisation spatiale avec une composante temporelle. Bostan et al. (2013) définissent un problème régularisant "physiquement" l'évolution spatiale du champ de vitesse avec les hypothèses d'incompressibilité et d'irrotationnalité et de manière "générique" la dimension temporelle. Les hypothèses "physiques" sont prises en compte à travers un terme de pénalisation de norme  $L_1$  et un terme de régularisation temporelle quadratique avec  $\varphi(\vec{v}) = \|\partial_t \vec{v}\|^2$ . La comparaison des performances avec et sans pénalisation temporelle montre un gain entre 0,5 à 1 dB en faveur de la pénalisation.

### 3.1.2.4. Régularisation spatio-temporelle "physique"

Lorsque le fluide est incompressible, les équations de Navier-Stokes d'un écoulement instationnaire permettent de mettre en relation l'évolution spatiale du champ de vitesse avec son évolution temporelle. Ainsi, une première stratégie consiste à exploiter ces équations sous forme de pénalisation ou contrainte. Une autre démarche consiste à utiliser



l'apprentissage sur de nombreuses simulations numériques des fluides pour introduire un supplément de connaissance *a priori* suivant le temps et l'espace.

Par ailleurs, ces solutions ont pour objectif d'améliorer la qualité du champ de vitesse non seulement en réduisant l'impact du bruit mais aussi en améliorant la résolution. Elles sont potentiellement très intéressantes pour l'application clinique. Or, le temps de calcul associé à ce type de démarche est généralement incompatible avec la routine clinique.

**Équations de Navier-Stokes :** Suivant les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible, on obtient les équations de Navier-Stokes pour un écoulement instationnaire :

$$\begin{cases} \rho \partial_t \vec{v} + \overline{\rho \text{grad}(\vec{v})} \cdot \vec{v} = \vec{f} - \overline{\text{grad}(p)} + \mu \Delta \vec{v} \\ \text{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La non-linéarité des équations de Navier-Stokes (3.3) rend son utilisation complexe. Toutefois, Rispoli et al. (2015) proposent une solution mixant une approche pénalisée et les outils de résolution numérique employés dans le domaine de la simulation numérique des fluides. Plus précisément, le problème est formulé avec une pénalisation quadratique des équations de Navier-Stokes.

D'autres approches populaires dans le domaine de l'imagerie satellitaire et la météorologie exploitent les équations de Navier-Stokes à travers le filtre de Kalman d'ensemble (Yang et al., 2015). En IRM de flux 4D, Bakhshinejad et al. (2016) ont récemment proposé une approche de résolution employant ce type de filtre. Le filtrage de Kalman est un outil pour résoudre des problèmes linéaires. Le filtrage de Kalman d'ensemble permet de traiter des problèmes non linéaires de grande dimension ce qui le rend intéressant dans le contexte de l'IRM de flux 4D.

**Apprentissage :** Enfin, la prise en compte des équations de Navier-Stokes est difficile car cela nécessite la définition d'un maillage et la vérification de la convergence de ce maillage. Ainsi, une démarche indirecte comme l'apprentissage peut s'avérer particulièrement adaptée. Bakhshinejad et al. (2017) proposent de déterminer une matrice permettant de faire le lien entre les coefficients d'une base orthogonale haute et basse résolution. La base orthogonale est obtenue en décomposant les données en valeurs singulières. Les coefficients de base haute résolution sont extraits d'images issues de plusieurs simulations numériques des fluides. Les coefficients de base basse résolution sont directement obtenus sur les données mesurées par IRM de flux 4D. Ces travaux sont prometteurs car en plus de permettre l'apport d'informations provenant de la mécanique des fluides, ils pourraient permettre d'apprendre le modèle direct de la séquence IRM (à condition que le processus d'apprentissage soit réalisé sur des données fantôme *in-vitro*).

## 3.2. Filtrage spatio-temporel

Les deux sources d'erreur ayant le plus d'impact sur les biomarqueurs sont la résolution et le bruit. Dans l'idéal, il serait profitable de traiter ces deux éléments simultanément. A ce jour, seules des solutions employant les équations de Navier-Stokes ont permis d'obtenir un gain de résolution tout en améliorant le rapport signal sur bruit. Cependant, les coûts de calcul de ce type de démarche ne sont pas compatibles avec la contrainte de temps de la routine clinique<sup>2</sup>.

Dans la littérature, de nombreuses solutions utilisent l'hypothèse d'incompressibilité sous la forme d'un terme de pénalisation à minimiser (Tafti & Unser, 2011; Bostan et al., 2013; Santelli et al., 2016; Mura et al., 2016) ou bien sous la forme de contrainte (Song et al., 1993; Busch et al., 2013; Ong et al., 2015; Bostan et al., 2015b). Certains travaux (Tafti & Unser, 2011; Bostan et al., 2013) pénalisent le champ de vitesse de manière à ce qu'il soit de rotationnel nul. Or, cette hypothèse d'écoulement irrotationnel n'est pas adapté à la circulation du sang dans le système cardiovasculaire. Enfin, l'hypothèse de régularité temporelle exploitée par Bostan et al. (2013) est intéressante. Elle permet d'exploiter l'évolution temporelle de la vitesse sans faire intervenir d'équations complexes telles que celles de Navier-Stokes.

Ainsi, nous proposons une solution employant les hypothèses d'incompressibilité et de régularité temporelle. Or, l'incompressibilité peut être introduite sous différentes formes. La version contrainte a été privilégiée car elle permet de ne pas introduire de paramètre de pénalisation supplémentaire. Deux stratégies, développées à la Section 3.2.1, sont envisageables pour obtenir un champ de vecteurs à divergence nulle. Le problème à résoudre et sa solution sont ensuite présentés dans la Section 3.2.2. Enfin, nous proposons d'étudier différents choix de condition de bord dans la Section 3.2.3.

### 3.2.1. Espace à divergence nulle

L'hypothèse d'incompressibilité du flux sanguin se traduit par l'annulation de la divergence de la vitesse en tout point du domaine fluide et en tout temps. Dans un formalisme continu, le champ de vitesse est une fonction  $\vec{v}(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dont chaque composante peut être supposée d'énergie finie, c'est-à-dire à chaque instant  $t$ ,  $\vec{v}(\cdot, t) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3$ . L'incompressibilité se traduit par l'appartenance de  $\vec{v}(\cdot, t)$  pour tout  $t$  au sous-espace hilbertien  $\mathcal{M}$  des fonctions  $\vec{v}$  à divergence nulle :

$$\mathcal{M} = \left\{ \vec{v}(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \nabla \cdot \vec{v} = 0 \right\}.$$

avec  $\nabla \cdot$  désignant l'opérateur de divergence.

Selon le théorème de Helmholtz (Bhatia et al., 2013), l'espace  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3$  peut être séparé en deux espaces de Hilbert supplémentaires avec  $\mathcal{M}$  d'une part et d'autre part l'espace des champs de vecteur irrotationnels :

$$\mathcal{N} = \left\{ \vec{v}(\vec{x}) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)^3 \mid \nabla \times \vec{v} = \vec{0} \right\}.$$

avec  $\nabla \times$  désignant l'opérateur rotationnel. Les travaux de Hodge (Bhatia et al., 2013) ont ensuite permis de prouver que tout vecteur peut être décomposé comme le gradient d'un

---

2. On notera qu'une démarche de super-résolution compatible avec ces contraintes est possible avec l'emploi d'informations *a priori* moins complexes à gérer, c'est-à-dire linéaires.

champ scalaire  $D$  et le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{R}$  :

$$\vec{v} = \nabla D + \nabla \times \vec{R} \quad (3.4)$$

chacun représentant respectivement la part à rotationnel nul et à divergence nulle du champ de vitesse. Toutefois, il faut considérer un terme harmonique supplémentaire dont la nature dépend des conditions de bord choisies (différents de  $\mathbb{R}^3$ ). Ce terme appartient simultanément à  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  (Bhatia et al., 2013). Les deux espaces ne sont donc plus supplémentaires.

L'application d'une contrainte d'incompressibilité peut être réalisée de deux manières :

- en définissant une famille génératrice de  $\mathcal{M}$  ;
- en projetant un champ de vecteur sur  $\mathcal{M}$ .

Dans le premier cas, la décomposition non orthogonale des fonctions à divergence nulle et non nulle dans la base d'ondelettes introduite par Lemarié-Rieusset (1992) permet la formulation d'une famille génératrice de l'espace à divergence nulle<sup>3</sup>. Busch et al. (2013) ont proposé une solution, basée sur les travaux de thèse de Lowitzsch (2002), permettant de générer une famille de vecteurs à divergence nulle à partir de fonctions à base radiale (notées RBF pour *Radial Basis Functions* en anglais). Plus précisément, il s'agit d'une méthode à noyau telle qu'un champ de vecteur peut être décrit par relation :

$$\vec{v}_{\text{inc}}(\vec{x}) = \sum_i \Phi(\vec{x} - \vec{x}_i) \vec{c}_i \quad (3.5)$$

où  $\vec{c}_i$  le vecteur de coefficients associé au nœud  $\vec{x}_i$  avec le noyau :

$$\Phi(\vec{r}) = \left[ \left(1 - \frac{\|\vec{r}\|^2}{2\gamma^2}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{2\gamma^2} \vec{r} \vec{r}^T \right] e^{-\frac{\|\vec{r}\|^2}{2\gamma^2}}, \quad (3.6)$$

$\mathbf{I}$  la matrice identité et  $\gamma$  un paramètre lié à l'étalement du noyau.

Dans le second cas, il est possible d'introduire une projection orthogonale sur  $\mathcal{M}$  grâce à la décomposition de Helmholtz-Hodge. En prenant la divergence de la vitesse suivant cette décomposition (3.4), on obtient une équation de Poisson :  $\Delta D = \nabla \cdot \vec{v}$ . En insérant la solution de cette équation de Poisson dans la décomposition de Helmholtz-Hodge, on peut définir le projecteur orthogonal  $\mathcal{P}$  suivant :

$$\mathcal{P}\{\vec{v}\} = \vec{v} - \nabla(\Delta^{-1}(\nabla \cdot \vec{v})). \quad (3.7)$$

Ce projecteur est connu sous le nom de projecteur de Leray lorsque des conditions de bord périodique sont considérées et que la vitesse est décrite dans une base de Fourier (Bostan et al., 2015b). A noter que d'autres auteurs ont employé ce projecteur avec des bases différentes : différences finies pour Song et al. (1993) et ondelettes pour Bostan et al. (2015b).

Dans un cadre calculatoire usuel, le volume spatio-temporel est discrétisé sur la même grille spatio-temporelle que les mesures, sous la forme de  $N_s = N_x \times N_y \times N_z$  voxels et de  $N_t$  pas temporels. On peut alors redéfinir l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle  $\mathcal{M}_0$  comme le noyau de la matrice  $\mathbf{D}_s$  utilisée pour définir la version discrétisée de l'opérateur de divergence. Busch et al. (2013) ont limité le nombre de nœuds  $\vec{x}_i$  de l'expression (3.5) pour obtenir une solution appartenant à  $\mathcal{M}_0$ . Cette approche nécessite

---

3. Ong et al. (2015) exploitent cette décomposition afin de réaliser un filtrage doux sur les composantes à divergence non nulle. La contrainte appliquée n'est donc pas stricte.

de trouver tous les coefficients  $\vec{c}_i$  par un calcul itératif plus coûteux qu'une projection. L'approche projective a été employée par exemple dans les travaux de (Song et al., 1993; Bostan et al., 2015b) pour un coût de calcul compétitif. Pour la suite de ces travaux, nous avons donc fait le choix de travailler avec une approche projective. De plus, comme l'a proposé Song et al. (1993), l'opérateur de divergence, représenté par la matrice  $\mathbf{D}_s$ , est décrit par la méthode des différences finies.

Notons que l'opérateur de divergence  $\mathbf{D}_s$  se décompose en plusieurs opérateurs de différentiation spatiale sous la forme  $\mathbf{D}_s = (\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y, \mathbf{D}_z)$ , et que la formulation discrète du projecteur  $\mathcal{P}$  s'écrit en tant qu'opérateur matriciel :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{D}_s^T (\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^T)^{-1} \mathbf{D}_s \quad (3.8)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité et  $^T$  la transposition. On note que la matrice  $\mathbf{D}_s$  doit être de rang plein.

### 3.2.2. Démarche proposée

On note  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_{N_t}^T)^T$  le vecteur des vitesses observées pour l'ensemble des nœuds spatio-temporels. A cause du bruit de mesure, ce vecteur correspond à un champ de vitesse qui n'est pas à divergence nulle. On note également  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_{N_t}^T)^T$  le vecteur des vitesses à estimer avec  $\mathbf{v}_t$  rangé dans un ordre lexicographique (défilement des composantes  $x, y$  puis  $z$ ). On définit  $\mathbf{D}_t$  une matrice Toeplitz à blocs Toeplitz telle que  $\mathbf{D}_t \mathbf{v} = \mathbf{v}_{t+1} - \mathbf{v}_t$ , qui sera utilisée pour favoriser une certaine régularité temporelle. On se propose alors de résoudre le problème suivant :

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0} \left\{ \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{D}_t \mathbf{v}\|_2^2 \right\} \quad (3.9)$$

où, par abus de notation,  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0$  signifie que  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{M}_0$  pour tout  $t$ , et  $\lambda \geq 0$  est un paramètre de régularisation temporelle.

Soit  $\mathbf{P}$  la matrice diagonale par blocs permettant d'appliquer  $\mathbf{P}_0$  séparément à tous les  $\mathbf{v}_t$ . Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0$ ,  $\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}$  est orthogonal à  $\mathbf{P}\mathbf{w} - \mathbf{w}$ , donc

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}\|_2^2 + \|\mathbf{P}\mathbf{w} - \mathbf{w}\|_2^2. \quad (3.10)$$

Par conséquent, le problème (3.9) peut se réécrire sous la forme :  $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}_0} J(\mathbf{v})$  avec

$$J(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{D}_t \mathbf{v}\|_2^2.$$

Sans tenir compte de la contrainte, l'annulation du gradient de  $J$  se produit de façon unique au point

$$\hat{\mathbf{v}} = \left( \mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^T \mathbf{D}_t \right)^{-1} \mathbf{P}\mathbf{w}. \quad (3.11)$$

Les opérateurs  $\mathbf{P}$  et  $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^T \mathbf{D}_t)^{-1}$  correspondent respectivement à des filtrages spatial et temporel. Ils peuvent donc commuter, ce qui implique que  $\hat{\mathbf{v}}$  s'écrit aussi

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{P} \left( \mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^T \mathbf{D}_t \right)^{-1} \mathbf{w}, \quad (3.12)$$

donc que  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}_0$ . On en conclut que  $\hat{\mathbf{v}}$  est bien la solution du problème (3.9).

### 3.2.3. Condition de bord

Nous proposons de discrétiser la divergence par la méthode des différences finies suivant le schéma :  $\mathbf{D}_x \mathbf{v} = \mathbf{v}_{x+1} - \mathbf{v}_x$ ,  $\mathbf{D}_y \mathbf{v} = \mathbf{v}_{y+1} - \mathbf{v}_y$  et  $\mathbf{D}_z \mathbf{v} = \mathbf{v}_{z+1} - \mathbf{v}_z$ . L'hypothèse de bord conditionne la structure des matrices  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$ ,  $\mathbf{D}_z$ . En IRM de flux, le sang traverse le volume d'intérêt  $\Gamma$ , c'est-à-dire le volume total imagé, avec une vitesse non nulle. Par conséquent, le choix de la condition de bord peut avoir un impact important sur la solution.

Dans le cas de la condition de bord spatiale *libre*, les matrices  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  de dimension  $N_{sr} \times N_s$  sont Toeplitz à blocs Toeplitz et fortement creuse avec seulement  $2N_{sr}$  éléments non nuls (avec  $N_{sr} = (N_x - 1)(N_y - 1)(N_z - 1)$ ). Ainsi, la matrice  $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^T$  est de dimension  $N_{sr} \times N_{sr}$  et de rang plein. On pose  $\mathbf{L}$  la racine de  $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^T$  obtenue par factorisation de Cholesky (matrice triangulaire inférieure de dimension  $N_{sr} \times N_{sr}$ ). Le projecteur  $\mathbf{P}_0^{\text{lib}}$  prend la forme suivante :

$$\mathbf{P}_0^{\text{lib}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_s^T \mathbf{L}^{-T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}_s \quad (3.13)$$

Le calcul de  $\mathbf{L}$  est réalisé une fois pour les  $N_t$  temps et le projecteur est calculé à travers la résolution de systèmes linéaires. [Song et al. \(1993\)](#) proposent une alternative consistant à diagonaliser la matrice  $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^T$  et de l'inverser dans la base des sinus discrets<sup>4</sup>.

Par la suite, nous comparons cette condition de bord avec l'hypothèse de bord *circulant*. La structure des matrices  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  deviennent circulantes à blocs circulants de dimension  $N_s \times N_s$  et de rang  $N_s - 1$  (la déficience de rang correspondant aux vecteurs constants). Les matrices  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$  sont alors diagonalisables dans la base de Fourier 3D (sans considérer le vecteur constant). Cette hypothèse permet un calcul rapide mais n'est pas naturelle aux bords du domaine spatial  $\Gamma$ . En revanche, la périodicité du cycle cardiaque rend cette hypothèse adaptée selon le temps. On peut donc employer les propriétés de diagonalisation sur le filtre temporel  $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D}_t^T \mathbf{D}_t)^{-1}$ .

## 3.3. Observations des performances

Dans cette section, nous allons observer le gain de performance réalisé sur des données d'IRM de flux synthétiques avec un écoulement analytique : Womersley. Dans un premier temps, les conditions de simulation et les critères de performance sont présentés dans la Section 3.3.1. Ensuite, nous étudions l'impact du filtrage temporel sur la solution dans la Section 3.3.2. La solution proposée est comparée à l'approche variationnelle de [Busch et al. \(2013\)](#) permettant d'imposer l'incompressibilité.

### 3.3.1. Méthode de validation

#### 3.3.1.1. Simulation

Afin de valider notre approche, nous travaillons sur des données synthétiques respectant l'hypothèse d'incompressibilité. La morphologie des artères nous a conduit à la simulation d'un fluide au sein d'un tube cylindrique de rayon 1 cm. La simulation fluide de Womersley

---

4. À noter que le choix de ne pas imposer d'*a priori* sur les bords impose la structure de  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$ . Le laplacien, représenté par la matrice  $\mathbf{D}_s \mathbf{D}_s^T$ , a donc une structure déterminée par ces matrices. Sa structure revient à supposer une condition de Dirichlet sur le champ scalaire  $D$  lors de l'inversion du laplacien ([Song et al., 1993](#), Annexe A).

propose une solution analytique pour l'écoulement pulsé d'un fluide visqueux au sein d'un tube cylindrique (voir l'Annexe A.2 pour plus d'informations). La vitesse analytique est uni-directionnel selon l'axe du tube et n'évolue qu'en fonction de la distance radiale au centre du tube. Il est alors possible de simuler le flux sanguin à partir du débit (Puelz et al., 2017, Figure 11) sur un cycle cardiaque. Ce dernier est fixé à 60 battements par minute soit un cycle cardiaque d'une seconde. Le débit a été échantillonné suivant le temps à une résolution dix fois plus fine que le temps entre deux phases cardiaques. Cela permet de conserver les hautes fréquences pour la modélisation de la vitesse. Dans ces conditions, l'écoulement est laminaire avec une viscosité dynamique de 0,025 Pa.s, un nombre de Reynolds de 700 et un nombre de Womersley de 5,16. Par souci de réalisme, l'orientation du tube a été choisie de manière à ne pas respecter la condition de périodicité aux bords du domaine spatial (l'angle par rapport à l'axe vertical est de 23°).

La simulation d'IRM de flux a été réalisée pour une résolution spatial ISO de 2,5 mm et temporelle de 34 ms afin de correspondre au standard clinique d'acquisition thoracique (voir le Tableau 2.1). Le champ de vitesse analytique a été moyenné suivant le filtrage IRM introduit à la Section 2.1.2.3 dans le but de prendre en compte les effets de volume partiel. Enfin, un bruit gaussien centré d'écart-type fixé par l'équation (2.10) est ajouté au champ de vitesse simulé. Nous avons considéré un rapport signal sur bruit de 20 dB car il correspond au pire niveau de bruit de la pratique clinique sur un IRM de 1,5 Tesla (voir le Tableau 2.2). Enfin, le  $V_{\text{enc}}$  est fixé à 3 m/s pour une vitesse maximale systolique de 2,42 m/s.

### 3.3.1.2. Critères de performance

Pour évaluer l'amélioration de la précision du champ de vitesse, nous proposons deux indices de performance : le rapport vitesse sur bruit et la corrélation de Pearson. L'écart-type du bruit est le même que l'on soit dans le domaine fluide  $\Omega$  ou sur l'ensemble de l'image  $\Gamma$ . De plus, cet écart-type est fixé suivant le temps alors que le champ de vitesse est pulsé. Typiquement, le rapport vitesse sur bruit avant traitement est potentiellement plus élevé au temps systolique au sein du domaine fluide  $\Omega$ . Par conséquent, on définit le rapport vitesse sur bruit (RVB) tel que :

$$\text{RVB}|_{\mathcal{D},\tau}(\mathbf{v}) = 20 \times \log_{10} \frac{\|\mathbf{v}_{\text{th}}\|_2}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{th}}\|_2} \quad (3.14)$$

avec  $\mathbf{v}_{\text{th}}$  le champ de vitesse théorique,  $\mathcal{D}$  le domaine spatial et  $\tau \in \{t_s; \forall t\}$  l'intervalle de temps sur lesquels est calculé le RVB. Plus précisément,  $t_s$  désigne le temps systolique alors que  $\forall t$  implique un calcul sur tous les temps du cycle cardiaque. Ce dernier permet d'établir un niveau de performance moyen tandis que le précédent représente un pic de performance sur un domaine  $\mathcal{D}$  donné. Dans le même esprit, on définit la corrélation de Pearson telle que :

$$r|_{\mathcal{D},\tau} = \frac{1}{N_{\mathcal{D},\tau} \sigma_{\|\vec{v}_{\text{th}}\|_2} \sigma_{\|\vec{v}\|_2}} \times \sum_{n=1}^{N_{\mathcal{D},\tau}} (\|\vec{v}_n\|_2 - \|\vec{v}^*\|_2) \times (\|\vec{v}_{\text{th},n}\|_2 - \|\vec{v}_{\text{th}}^*\|_2) \quad (3.15)$$

avec  $N_{\mathcal{D},\tau}$  le nombre d'échantillons du sous-ensemble spatio-temporel  $\{\mathcal{D}, \tau\}$ ,  $\|\vec{v}_{\text{th}}^*\|_2$  et  $\sigma_{\|\vec{v}_{\text{th}}\|_2}$  la moyenne et l'écart-type de la norme de la vitesse de référence puis  $\|\vec{v}^*\|_2$  et  $\sigma_{\|\vec{v}\|_2}$  la moyenne et l'écart-type de la norme de la vitesse corrigée.

### 3.3.2. Observation des performances

Dans un premier temps, il est nécessaire de fixer le paramètre de pénalisation. Celui-ci doit être choisi de manière à maximiser le rapport vitesse sur bruit tout en préservant la corrélation de Pearson<sup>5</sup>. Les Figures 3.2 et 3.3 illustrent le rapport vitesse sur bruit et la corrélation de Pearson en fonction du paramètre de pénalisation. Chacune de ces figures présente l'indice de performance pour deux conditions de bord, *circulant* et *libre*, évalué sur un sous-ensemble spatio-temporel. Plus précisément, les graphes de gauche et de droite sont obtenus en calculant respectivement l'indice de performance pour tous les temps du cycle cardiaque et seulement sur le temps systolique. De la même manière, les graphes du haut et du bas ont été calculés sur le domaine image complet  $\Gamma$  et sur le domaine fluide seulement  $\Omega$ . Le rapport vitesse sur bruit des données est indiqué en noir.

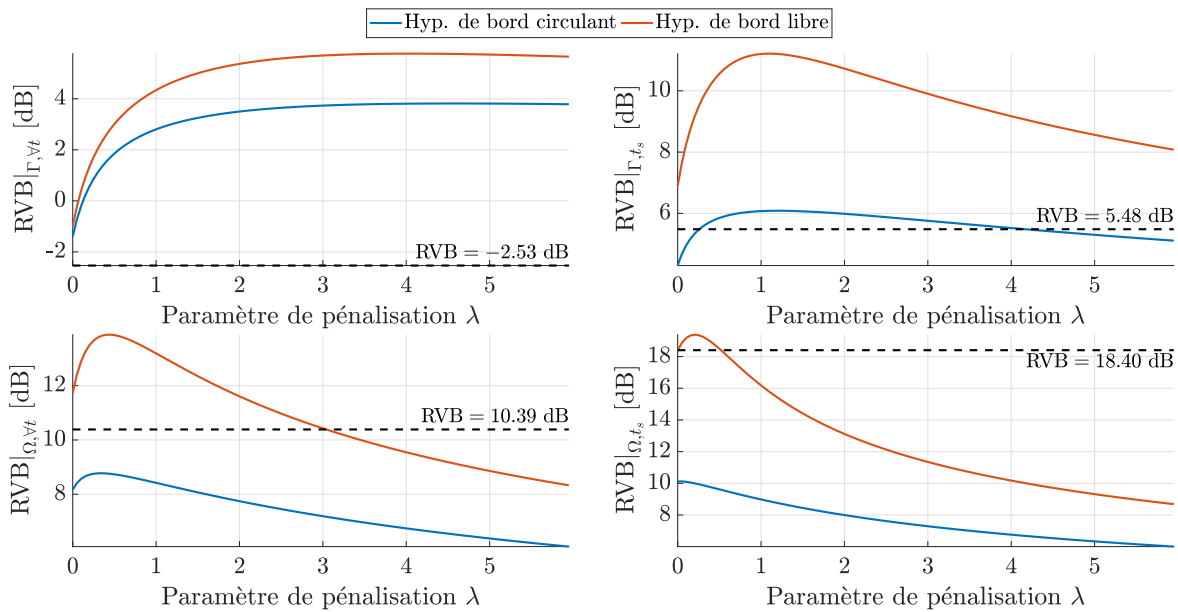


FIGURE 3.2. – Évaluation du Rapport Vitesse sur Bruit (moyenné sur 20 réalisations de bruit) en fonction du paramètre de pénalisation temporelle  $\lambda$ . Le calcul est effectué sur l'ensemble du domaine  $\Gamma$  pour les graphes supérieurs, sur le domaine fluide  $\Omega$  seulement pour les graphes inférieurs, pour tous les temps  $\forall t$  pour les graphes de gauche et pour le temps systolique seulement pour les graphes de droite. La ligne noire avec tiret indique le niveau de bruit avant l'application d'une méthode de post-traitement.

On note premièrement que les conditions de bord sont particulièrement importantes. La solution basée sur une hypothèse de bord *circulant* permet d'obtenir un gain, hors régularisation temporelle ( $\lambda = 0$ ), seulement si le calcul est mené sur le domaine image complet  $\Gamma$  et pour tous les temps du cycle cardiaque. Il s'agit de la situation la plus bruitée avec un rapport vitesse sur bruit des données de -2,53 dB. Pour les autres sous-ensembles spatio-temporels, l'erreur de modélisation des bords de  $\Gamma$  est parfois tellement importante que les performances sont plus faibles après l'application de la projection à divergence nulle. En revanche, l'hypothèse de bord *libre* permet de tirer parti de la

5. L'utilisation de données synthétiques nous permet de trouver directement le paramètre de pénalisation optimal. Dans le cas contraire, la méthode de la courbe en L (*L-curve*) serait une solution (Hansen et al., 2006).

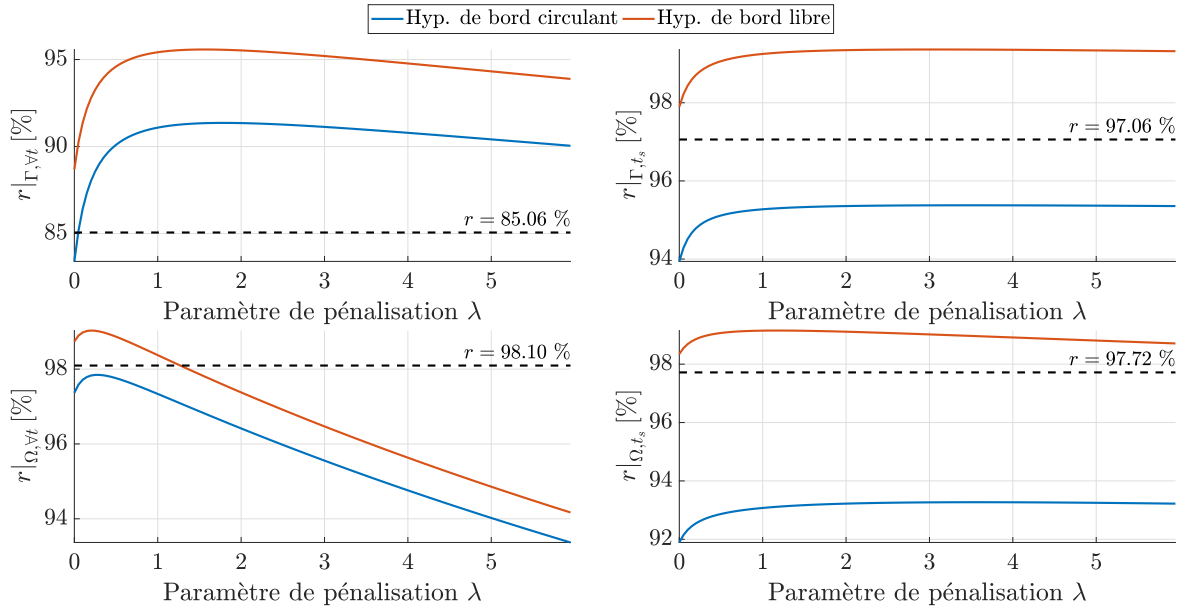


FIGURE 3.3. – Évaluation de la corrélation de Pearson (moyenne sur 20 réalisations de bruit) en fonction du paramètre de pénalisation temporelle  $\lambda$ . Le calcul est effectué sur l'ensemble du domaine  $\Gamma$  pour les graphes supérieurs, sur le domaine fluide  $\Omega$  seulement pour les graphes inférieurs, pour tous les temps  $\forall t$  pour les graphes de gauche et pour le temps systolique seulement pour les graphes de droite. La ligne noire avec tiret indique le niveau de bruit avant l'application d'une méthode de post-traitement.

contrainte d'incompressibilité quel que soit le sous-ensemble spatio-temporel considéré.

De plus, on observe que l'ajout d'une pénalisation temporelle permet d'améliorer le rapport vitesse sur bruit quel que soit le cas de figure. Le gain par rapport à la configuration sans régularisation temporelle est compris suivant les cas entre 1 et 6,8 dB pour le rapport vitesse sur bruit. Les mêmes conclusions peuvent être obtenues pour la corrélation de Pearson avec un gain allant de 0,35 à 6,9 %. Cela démontre l'intérêt de notre démarche visant à insérer une régularisation temporelle dans un cadre où l'incompressibilité est introduite sous forme de contrainte. Par ailleurs, ces résultats confirment les conclusions favorables de [Bostan et al. \(2013\)](#) sur la pénalisation temporelle. De plus, la parallélisation de l'étape de projection à divergence nulle permet de réduire le temps de calcul à un niveau cliniquement acceptable avec moins d'une minute pour 30 phases cardiaques. Enfin, ces travaux et résultats ont été valorisés par un article de conférence revue par les pairs intitulée, "*Filtrage spatio-temporel en IRM de flux sanguin 4D*" ([Levilly et al., 2017a](#)), et par une présentation dans une conférence internationale ([Levilly et al., 2017b](#)).

Désormais, on s'intéresse au choix du paramètre de pénalisation  $\lambda$ . Sachant que la zone d'intérêt vis-à-vis des biomarqueurs n'est pas l'image complète  $\Gamma$  mais le domaine fluide  $\Omega$ , il est plus judicieux de baser le choix de  $\lambda$  sur les graphes du bas. Ensuite, le paramètre de pénalisation  $\lambda$  associé au maximum du rapport vitesse sur bruit trouve un intérêt pour les deux sous-ensembles temporels :  $t_s$  et  $\forall t$ . En effet, les biomarqueurs comme le cisaillement à la paroi maximal, la vitesse maximale et le débit maximal apparaissent potentiellement au temps systolique. Or, certains biomarqueurs comme l'indice d'oscillation du cisaillement dépendent du temps ([Sotelo et al., 2016](#)).

Les  $\lambda$  optimaux sont de 0,4 pour un calcul sur tous les temps du cycle cardiaque et de



0,2 pour un calcul sur le temps systolique. Pour la suite de ces travaux, nous présenterons des résultats avec un paramètre de pénalisation de 0,2 car une majorité de biomarqueurs sont particulièrement intéressants au temps systolique. Ce choix est raisonnable car il induit une perte de performance calculée sur tous les temps du cycle relativement faible de 0,3 dB.

Dans un second temps, nous avons comparé ces résultats avec la solution de [Busch et al. \(2013\)](#)<sup>6</sup>. Le Tableau 3.1 rassemble les indices de performances, calculés sur les différents domaines spatio-temporels, des solutions de [Busch et al. \(2013\)](#), [Song et al. \(1993\)](#) et la solution proposée.

Indices de performance	RVB des données	Busch et al. (2013)		Song et al. (1993) ( $\lambda = 0$ )	Filtrage spatio-temporel ( $\lambda = 0, 2$ )
		$\gamma^* = 2$	$\gamma^* = 3$		
$\text{RVB} _{\Gamma, \forall t}$ [dB]	-2,53	0,11	4,06	-0,99	1,37
$\text{RVB} _{\Gamma, t_s}$ [dB]	5,48	8,25	11,99	6,91	9,14
$\text{RVB} _{\Omega, \forall t}$ [dB]	10,39	12,87	16,28	11,73	13,49
$\text{RVB} _{\Omega, t_s}$ [dB]	18,40	19,70	21,42	18,40	19,38
$r _{\Gamma, \forall t}$ [%]	85,06	91,3	96,27	88,69	92,79
$r _{\Gamma, t_s}$ [%]	97,06	98,46	99,24	97,9	98,71
$r _{\Omega, \forall t}$ [%]	98,10	98,9	99,4	98,74	99,03
$r _{\Omega, t_s}$ [%]	97,72	98,39	98,22	98,35	98,86

TABLE 3.1. – Indices de performance évalués sur différents domaines spatio-temporels et pour différentes solutions de l'état de l'art. Le paramètre  $\gamma^*$  désigne la taille du noyau divisée par la résolution.

Comme décrit précédemment, on observe un gain de performance avec la pénalisation temporelle. Cependant, les performances de la solution de [Busch et al. \(2013\)](#) sont nettement supérieures à celles de la solution de [Song et al. \(1993\)](#). La pénalisation temporelle permet seulement de réduire l'écart. Hormis la corrélation au sein du domaine fluide et au temps systolique, les résultats de la solution proposée ne sont pas suffisants.

L'une des raisons pouvant expliquer cette différence de performance se trouve dans la taille du noyau. En effet, la démarche proposée est construite avec une méthode de différenciation par différences finies du premier ordre non centrée. Le noyau (3.6) de la solution de [Busch et al. \(2013\)](#) est centré et s'étale sur plus d'un voxel. En particulier, les résultats du Tableau 3.1 ont été obtenus en fixant le paramètre  $\gamma$  à deux et trois fois la résolution spatiale (c'est-à-dire  $\gamma^* = 2$  ou 3). Ce choix permet de favoriser des évolutions spatiales plus lentes du champ de vitesse et par conséquent réduire l'impact d'un bruit qui ne présente pas cette caractéristique. Toutefois, un étalement trop large du noyau peut engendrer des erreurs aux bords du domaine fluide. Il s'agit d'ailleurs de la motivation première de travaux employant une norme  $L_1$  sur la divergence de la vitesse ([Tafti & Unser, 2011](#); [Bostan et al., 2013](#)). Ce point particulier est discuté dans la section suivante.

6. Nous avons exploité les codes *Matlab* mis à disposition dans les travaux de [Ong et al. \(2015\)](#).

## 3.4. Discussion des résultats

Les résultats présentés dans la section précédente ont en commun le fait que l'hypothèse d'incompressibilité est imposée sous forme de contrainte. Or, la formulation de cette contrainte est erronée aux bords du domaine fluide. En effet, le calcul de la divergence, par différences finies par exemple, fait intervenir la différence entre deux vitesses qui n'appartiennent pas au même milieu. La Section 3.4.1 présente l'erreur de modélisation introduite par l'utilisation d'une contrainte stricte. Dans un second temps, nous discutons des perspectives possibles pour améliorer la quantification des biomarqueurs (voir la Section 3.4.2).

### 3.4.1. Erreur de modélisation

L'objectif de cette section est de déterminer si l'impact de l'erreur de modélisation est potentiellement préjudiciable au calcul des biomarqueurs. Afin d'observer l'erreur de modélisation, on s'intéresse à un cas sans bruit. La Figure 3.4 illustre les vecteurs d'erreur selon une section au centre du tube dans sa longueur. S'agissant d'une erreur de modélisation spatiale, seules les cartes d'erreur des deux solutions de la littérature (Song et al., 1993; Busch et al., 2013) présentées précédemment y sont visibles. On observe en rouge les vecteurs d'erreur au sein du domaine fluide et en bleu les vecteurs d'erreur à l'extérieur.

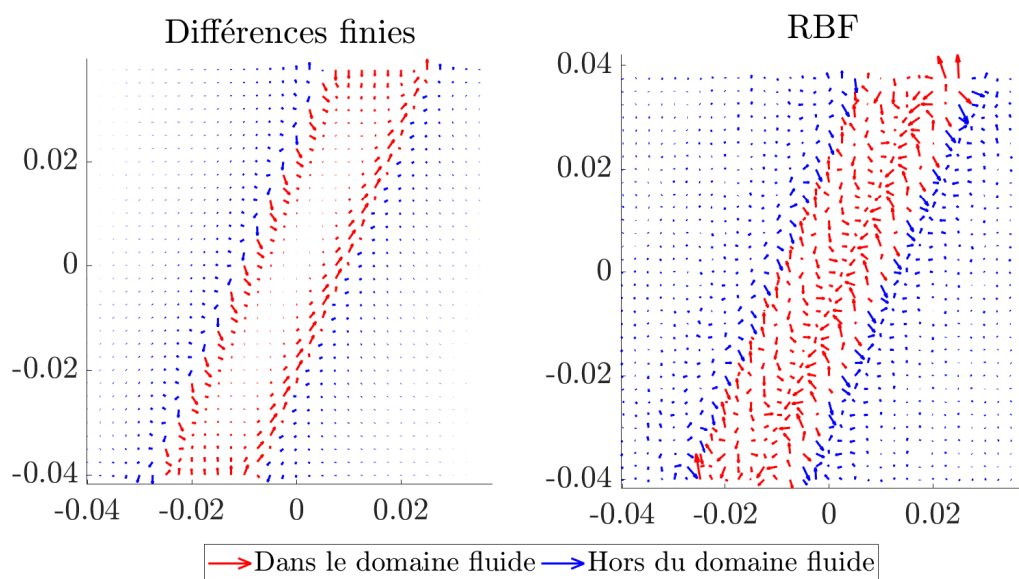


FIGURE 3.4. – Représentation d'un champ de vecteur de l'erreur de modélisation au sein du fluide (en rouge) et en dehors (en bleu) pour deux solutions contraignant le champ de vitesse à divergence nulle : Song et al. (1993) à gauche et Busch et al. (2013) à droite. Cette image est obtenue à partir de données simulées sans bruit (au temps systolique).

Ces deux cartes d'erreur illustrent nettement l'importance du changement de milieu physique. Cette erreur est particulièrement élevée à proximité de la paroi pour la solution de Song et al. (1993). L'erreur de modélisation de l'approche de Busch et al. (2013) est plus étalée notamment en raison de la taille de son noyau ( $\gamma^* = 3$ ). Quantitativement, l'écart-type de cette erreur est de 0,06 m/s (soit 2 % du  $V_{\text{enc}}$ ) pour la méthode par différences finies

et de 0,09 m/s (soit 2,8 % du  $V_{\text{enc}}$ ) pour la solution exploitant des fonctions à base radiale. Or, un rapport signal sur bruit de 20 dB correspond à un bruit avec un écart-type de 4,5 % de la vitesse d'encodage. Par conséquent, cette erreur de paroi peut être significative pour certaines conditions de bruit. Typiquement, la Figure 3.5 montre la carte d'erreur avec un rapport signal sur bruit de 30 dB. On observe que l'erreur de modélisation demeure perceptible.

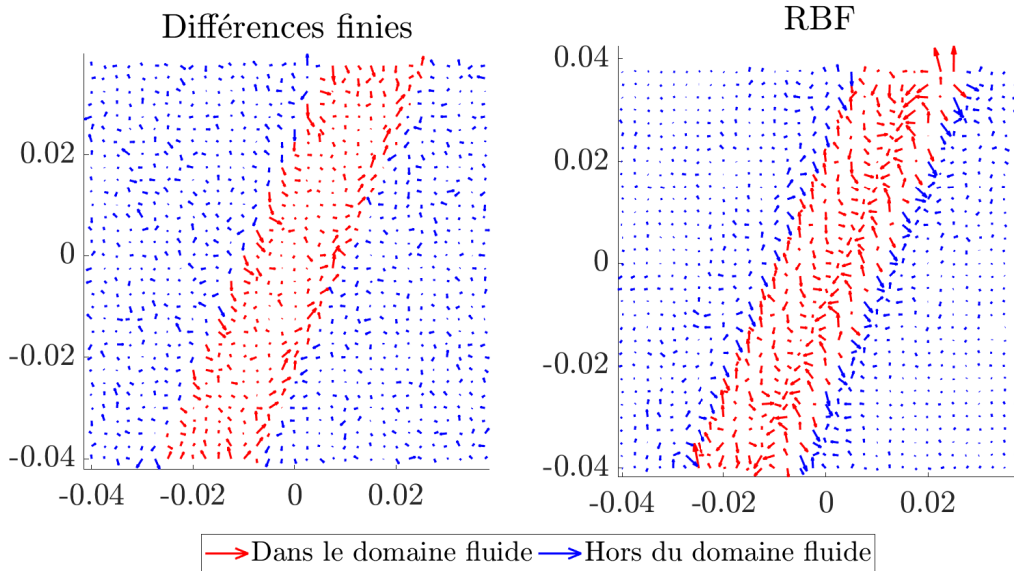


FIGURE 3.5. – Représentation d'un champ de vecteur de l'erreur de modélisation au sein du fluide (en rouge) et en dehors (en bleu) pour deux solutions contraignant le champ de vitesse à divergence nulle : [Song et al. \(1993\)](#) à gauche et [Busch et al. \(2013\)](#) à droite. Cette image est obtenue à partir de données simulées avec un rapport signal sur bruit anatomique de 30 dB (au temps systolique).

### 3.4.2. Perspectives

Dans la littérature, ce problème a été traité en employant une norme  $L_1$  sur un terme pénalisé ([Tafti & Unser, 2011](#); [Bostan et al., 2013, 2015a](#)). Dans notre cas, une première évolution possible consisterait à réorienter les dérivations par différences finies de manière à ce qu'elles n'aient lieu que dans le domaine fluide. Cette démarche est simple mais nécessite la connaissance préalable de la paroi. Par ailleurs, cette solution modifierait le caractère très structuré des matrices  $\mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{D}_y$  et  $\mathbf{D}_z$ . La solution de résolution rapide proposée par [Song et al. \(1993\)](#) ne s'appliquerait plus tandis que la démarche introduite dans la Section 3.2.2 resterait applicable.

Enfin, le manque de résolution est une difficulté essentielle pour la quantification de certains biomarqueurs. Ainsi, la solution proposée dans ce chapitre pourrait évoluer vers la super-résolution. Or, la divergence est une contrainte au pouvoir régularisant assez faible. Le Tableau 3.2 montre le ratio entre le nombre d'inconnues vis-à-vis du nombre de données et d'équations pour l'opérateur de divergence dans un contexte avec et sans super-résolution. Sachant que la résolution de ces problèmes n'est possible que si ce ratio est inférieur à 1, le facteur de super-résolution  $\alpha$  est limité à  $\sqrt{2} \approx 1,4$  pour un problème

2D et  $(3/2)^{\frac{1}{3}} \approx 1,14$  pour un problème 3D. Par conséquent, la divergence seule ne permet pas de régulariser suffisamment le problème pour permettre un facteur de super-résolution intéressant.

$N_{\text{inc}}/N_{\text{d}}+N_{\text{eq}}$	Formulation 2D	Formulation 3D
Sans super-résolution	$\frac{N_{\text{d}}}{N_{\text{d}}+N_{\text{d}/2}} = \frac{2}{3}$	$\frac{N_{\text{d}}}{N_{\text{d}}+N_{\text{d}/3}} = \frac{3}{4}$
Avec super-résolution ( $\times \alpha$ )	$\frac{\alpha^2 N_{\text{d}}}{N_{\text{d}}+\alpha^2 N_{\text{d}/2}} = \frac{2\alpha^2}{2+\alpha^2}$	$\frac{\alpha^3 N_{\text{d}}}{N_{\text{d}}+\alpha^3 N_{\text{d}/2}} = \frac{3\alpha^3}{3+\alpha^3}$

TABLE 3.2. – Rapport du nombre d’inconnues vis-à-vis du nombre d’équations et de données pour l’opérateur spatial de divergence. La variable  $N_{\text{d}}$  correspond au nombre de données. Le nombre d’inconnues  $N_{\text{inc}}$  et d’équations  $N_{\text{eq}}$  sont déduits du nombre de données.

Si on relâche la contrainte de temps de la pratique clinique, il pourrait être intéressant d’explorer une voie similaire à celle de [Rispoli et al. \(2015\)](#). En effet, l’observation d’écoulements complexes comme les carotides a montré que les variations de vitesse peuvent avoir une dynamique trois à quatre fois plus fine que la résolution des données. Les équations de la mécanique des fluides permettraient d’introduire une connaissance suffisante pour s’approcher de résultats de simulation numérique. Par conséquent, la formulation d’un problème de super-résolution prenant en compte les équations de Navier-Stokes est intéressante à envisager.

Contrairement aux travaux de [Rispoli et al. \(2015\)](#), nous proposons de travailler à l’échelle d’une grille 4D régulière plus fine que la résolution des images acquises. L’objet de cette démarche est de s’affranchir d’un formalisme introduit par les méthodes de type éléments finis ou volumes finis. Cela permet notamment d’éviter les étapes de segmentation d’une paroi possiblement mobile et de maillage pouvant s’avérer complexes et coûteuses. Ensuite, le terme de pénalisation appliqué à des équations de la mécanique des fluides aurait une norme  $\varphi$  qui permettrait de tolérer une erreur de modélisation. Typiquement, une norme de Huber ou  $L_1$  pourrait convenir. Une telle démarche a l’avantage de permettre une erreur de modélisation notamment au bord du domaine fluide. Par ailleurs, cette erreur de modélisation sur une grille super-résolue pourrait alimenter un outil de segmentation. L’une des difficultés avec les équations de Navier-Stokes est la gestion de la pression en plus de la vitesse. Or, il est possible de modifier ces équations de deux manières :

- en utilisant l’équation bilan de la quantité de mouvement en vorticité<sup>7</sup> avec la famille génératrice de l’espace à divergence nulle ([Busch et al., 2013](#)) ;
- en appliquant le projecteur à divergence nulle sur les équations de Navier-Stokes.

En considérant la première de ces possibilités, nous pouvons formuler le problème de super-résolution suivant :

$$\{\hat{v}_j\}_{j=1\dots N_{\text{HR}}} = \arg \min_{\vec{v} \in \mathbb{R}^{N_{\text{HR}}}} \left\{ \sum_{i=1}^N \|\vec{w}_i - h_i(\vec{v})\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_{\text{HR}}} \varphi(\mathcal{NS}_v(\vec{v}_j)) \right\} \quad (3.16)$$

7. Cette équation est obtenue en prenant le rotationnel de l’équation bilan de la quantité de mouvement (3.3).

avec

$$\mathcal{NS}_v(\vec{v}) = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \nu \Delta \vec{\omega}$$

où  $\nu$  désigne la viscosité cinématique,  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$  est la vorticité et  $h_i(\cdot)$  correspond à un filtre approximant le modèle direct de l'IRM de flux 4D. Les équations  $\mathcal{NS}_v$  sont exactes si on néglige les forces extérieures s'appliquant au domaine fluide et si la vitesse respecte la contrainte d'incompressibilité. Ainsi, il pourrait ˆetre intéressant d'exploiter la formulation par noyau de [Busch et al. \(2013\)](#) d'un fluide incompressible en intégrant une composante temporelle. De plus, la dérivation de la vitesse  $\vec{v}$  dans les équations  $\mathcal{NS}_v$  pourrait ˆetre réalisée au préalable sur le noyau à divergence nulle et ainsi limiter le cˆot de calcul de dérivations successives.

Enfin, ce chapitre contributif correspond à un travail préliminaire r ealis e durant la première année de thèse. Nous avons observ e dans ce chapitre l'importance de la paroi sur la régularisation du champ de vitesse. De nombreux travaux ([Tafti & Unser, 2011](#); [Bostan et al., 2013, 2015a,b](#)) ont pr esent e des solutions intéressantes permettant d'ˆetre moins sensible sur les bords du domaine fluide. La piste de la super-résolution a  ete envisagée mais l'incompressibilité ne suffisant pas ; il aurait  ete nécessaire d'utiliser les équations de Navier-Stokes. Dans le mˆeme temps, nous nous sommes int eress es au calcul des biomarqueurs et en particulier du cisaillement à la paroi. Ce dernier est difficile à quantifier dans un contexte de résolution limitée et de bruit. Au regard de nos observations sur l'impact de la paroi et du caractère pariétal du cisaillement, il nous a paru intéressant de proposer une solution exploitant la paroi.

## 3.5. Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution de filtrage spatio-temporel permettant de réduire le niveau de bruit au sein du domaine fluide. Ce filtrage est basé sur deux filtres successifs :

1. spatial en exploitant la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement [Song et al. \(1993\)](#);
2. temporel afin de tirer parti du caractère régulier et périodique de l'écoulement sanguin.

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent l'intérêt de considérer une régularisation temporelle en plus de la contrainte spatiale. En ce sens, nos conclusions vont dans la même direction que les travaux de [Bostan et al. \(2013\)](#). De plus, la solution proposée applique ces filtres successivement ce qui permet de paralléliser le filtrage spatial avant le filtrage temporel. Nous respectons par conséquent la contrainte de la routine clinique avec un temps de post-traitement inférieur à une minute pour le cas analytique de Womersley sur 30 phases cardiaques.

Ces travaux ont aussi révélé la difficulté introduite par le changement de milieu physique dans l'image. Nous avons pu remarquer que l'erreur de modélisation se situe spécifiquement à proximité de la paroi. Or, cette erreur peut avoir un impact significatif pour quelques biomarqueurs évalués sur la paroi, notamment le cisaillement.

L'emploi d'une norme  $L_1$  sur la pénalisation de la loi *a priori* permet de préserver les bords du domaine fluide ([Tafti & Unser, 2011](#); [Bostan et al., 2013](#)). Nous avons proposé une solution simple permettant de limiter ces effets tout en conservant l'application d'une contrainte stricte. Enfin, nous avons montré que l'incompressibilité n'est pas une propriété suffisante pour permettre la super-résolution. Ainsi, un problème de super-résolution intégrant ces potentielles difficultés sur les bords est envisageable.



# Chapitre 4

## Vers une estimation rapide du cisaillement à la paroi par modélisation locale

Comme décrit au Chapitre 1, le cisaillement à la paroi est un biomarqueur particulièrement intéressant pour le diagnostic des pathologies cardiovasculaires. En effet, il caractérise la contrainte qu'applique un fluide visqueux sur la paroi interne des vaisseaux sanguins : l'endothélium. La viscosité du sang est à l'origine de ces contraintes de cisaillement. Les interactions moléculaires entre particules fluides ont pour conséquence d'engendrer un frottement visqueux à l'intérieur du fluide à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, à la paroi les interactions moléculaires entre particules fluides et particules solides de paroi ont pour conséquence, à l'échelle macroscopique, que la vitesse du fluide à la paroi est égale à la vitesse de la paroi (condition d'adhérence). Le cisaillement à la paroi naît de la différence entre cette condition d'adhérence et des vitesses du fluide différentes en proche paroi. La Section 4.1 présente la formulation du cisaillement à la paroi à partir du tenseur des contraintes visqueuses. Par exemple, la Figure 4.1 illustre l'écoulement laminaire de Poiseuille au sein d'un tube droit cylindrique. Les expressions de la vitesse et du cisaillement à la paroi sont connues analytiquement. Le vecteur de cisaillement à la paroi est uni-directionnel dans l'axe du tube et vaut  $\tau_x = 2\mu V_x^{\max}/R$  avec  $\mu$  la viscosité dynamique intrinsèque du fluide,  $V_x^{\max}$  la vitesse maximale et  $R$  le rayon du tube. Ce type de modélisation a été utilisé en imagerie cardiovasculaire pour estimer le cisaillement dans l'aorte abdominale (Moore et al., 1994; Pedersen et al., 1999). Or, le calcul du cisaillement est plus difficile pour les géométries et écoulements complexes car il ne peut s'appuyer sur un modèle de vitesse purement analytique comme Poiseuille en stationnaire ou bien Womersley en écoulement pulsé.

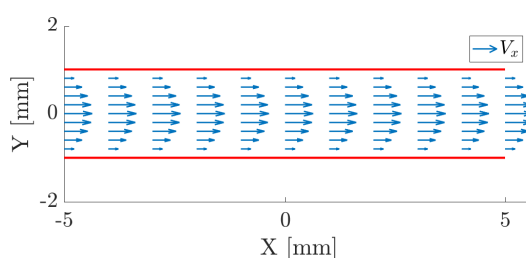


FIGURE 4.1. – Écoulement de Poiseuille au sein d'un tube droit représenté en rouge.



A ce jour, deux stratégies, détaillées dans la Section 4.2, sont employées en imagerie cardiovasculaire pour quantifier le cisaillement à la paroi :

- **Simulation numérique des fluides (CFD)** : cette solution, décrite à la Section 4.2.1, est la référence pour la quantification du cisaillement à la paroi. Il s'agit de simuler l'écoulement fluide à partir des équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes). Plus précisément, la simulation s'appuie sur la définition de deux éléments : le bord du domaine fluide et les conditions d'entrée et/ou sortie. La simulation utilise un maillage du domaine fluide dont la finesse dépend des caractéristiques de l'écoulement. En imagerie cardiovasculaire, le domaine fluide est généralement déterminé à partir de la segmentation d'images anatomiques. Ensuite, les conditions d'entrée et/ou sortie du domaine fluide sont mesurées par IRM de flux 2D ou 4D. Bien que les erreurs de simulation puissent être maîtrisées, ces mesures sont entachées d'erreur.
- **Calcul direct sur des mesures *in-situ*** : cette approche exploite directement le champ de vitesse mesuré au sein d'un patient pour calculer le cisaillement à la paroi. Or, la vitesse en IRM de flux 4D est mesurée sur une grille grossière et se trouve entachée d'erreur provenant du processus d'acquisition et du bruit de mesure (voir le Chapitre 2). Le défi de ce type d'approche réside dans sa capacité à modéliser le champ de vitesse réel pour ensuite calculer le cisaillement à la paroi. Ces difficultés sont généralement gérées en exploitant deux types d'information *a priori* : la connaissance de la paroi et la régularité du champ de vitesse. Par ailleurs, la modélisation du champ de vitesse peut être réalisée localement autour d'un point d'intérêt ou bien sur une portion plus large du vaisseau sanguin. Ces différentes approches sont discutées dans la Section 4.2.

L'algorithme proposé dans la Section 4.3 adopte cette seconde démarche. Conformément à la théorie des problèmes inverses, il exploite les deux types d'information *a priori* précédentes : la paroi et la régularité de la vitesse. Bien que notre méthode soit construite en un point d'intérêt, la morphologie locale est utilisée pour régulariser un modèle de vitesse paramétrique. La modélisation 3D du champ de vitesse permet d'ajuster les données en intégrant un filtre IRM et possiblement une contrainte physique : l'incompressibilité. Or, l'influence du filtre IRM et de l'incompressibilité sur la quantification du cisaillement n'a jamais été étudiée à ce jour. La démarche proposée s'appuie sur quatre étapes successives :

1. **Modélisation locale de la paroi autour d'un point d'intérêt** : la segmentation anatomique est modélisée localement autour d'un point d'intérêt suivant les principes introduit dans la Section 4.3.1. Le choix du modèle paramétrique est réalisé dans le Chapitre 5.
2. **Modélisation locale de la vitesse** : le modèle de vitesse est formulé de manière à imposer la nullité de la vitesse en tout point du modèle de paroi. La Section 4.3.2 décrit la démarche employée pour construire ce modèle. Le Chapitre 6 est dédié à la résolution de différents problèmes appliquant un filtre IRM pour plusieurs modèles de vitesse sous deux normes :  $L_2$  et Huber.
3. **Estimation du cisaillement à la paroi** : le cisaillement à la paroi est calculé au point d'intérêt et en ses points voisins analytiquement à partir du modèle paramétrique de vitesse (voir la Section 4.3.3).
4. **Amélioration de la quantification du cisaillement à la paroi** : suite à la modélisation du champ de vitesse sur tous les points de la segmentation, plusieurs estimations du cisaillement sont obtenues pour un point d'intérêt (voir la Section 4.3.4). Deux estimateurs ont été envisagés et sont décrits au Chapitre 7.

Enfin, le développement de cet algorithme représente la plus importante contribution de ce manuscrit à travers les cinq chapitres suivants. Ces travaux ont été valorisés par un article soumis à publication dans un journal (Levilly et al., 2020) et des résultats préliminaires ont été présentés dans une conférence internationale (Levilly et al., 2019).

## 4.1. Le cisaillement à la paroi

En mécanique des fluides, le cisaillement à la paroi  $\vec{\tau}$  est la contrainte tangentielle qu'applique un fluide visqueux sur la paroi  $\delta\Omega$ . Ce vecteur de contrainte est fonction du tenseur des contraintes visqueuses  $\bar{\bar{\tau}}$  (tenseur du second ordre) et de la normale à la paroi  $\vec{n}$  au point  $\vec{x}_{\delta\Omega}$  pointant dans le domaine fluide  $\Omega$ . Le vecteur des contraintes visqueuses s'écrit alors :

$$\vec{\tau}_v = \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{n}$$

Dans l'hypothèse d'un fluide newtonien en écoulement incompressible, c'est-à-dire un fluide visqueux homogène et isotrope, le tenseur des contraintes visqueuses est défini par :

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}}$$

avec  $\bar{\bar{D}}$  le tenseur du taux de variation des déformations du fluide. Ce tenseur est défini à partir du gradient du champ de vitesse. Le vecteur des contraintes visqueuses en un point de la paroi  $\vec{x}_{\delta\Omega}$  et au temps  $t$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_v &= 2\mu \bar{\bar{D}} \cdot \vec{n} \\ &= \mu \left( \bar{\nabla} \vec{v} + (\bar{\nabla} \vec{v})^T \right) \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec  $\vec{v} : (\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$  le vecteur de vitesse fluide. Le cisaillement à la paroi est la composante tangentielle du vecteur des contraintes visqueuses tel que :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_v - (\vec{\tau}_v \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (4.2)$$

On notera que le cisaillement est seulement lié aux variations spatiales du champ de vitesse. Ainsi, le cisaillement évolue en fonction du temps mais ne dépend directement pas de la dérivée de la vitesse suivant le temps. Le modèle de la vitesse peut se limiter à une description instantanée.

L'expression (4.1) ne dépend pas du repère choisi. Dans cette étude, seul le repère cartésien est employé bien que la nature tubulaire des vaisseaux sanguins puisse rendre le repère cylindrique intéressant. Plusieurs études e.g. (Morgan et al., 1998; Barker et al., 2010) ont exploité ce type de représentation. Dans le cas d'un repère cartésien, on définit  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  le vecteur de vitesse dans le domaine fluide  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  le vecteur normal à la paroi au point d'intérêt  $\vec{x}_{\delta\Omega}$ . Ainsi, le vecteur des contraintes visqueuses s'écrit analytiquement comme suit :

$$\vec{\tau}_v = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Cette expression est exacte sous l'hypothèse d'un fluide newtonien en écoulement

incompressible. Or, le sang est composé de nombreuses particules non fluide circulant dans les vaisseaux (globules blancs, rouges...). Dans le cas d'un fluide non newtonien, le cisaillement à la paroi suit une loi de puissance sur le tenseur  $\bar{D}$  avec une viscosité dynamique apparente modélisée par différentes lois : Ostwald de Waele, Carreau-Yasuda et Casson. Elles ont pour effet de modifier la viscosité en fonction du taux de variation des déformations du fluide (Papaioannou & Stefanadis, 2005; Shibeshi & Collins, 2005).

En général, les simulations numériques des fluides appliquées à l'étude de pathologies cardiaques utilisent l'hypothèse de fluide newtonien (Steinman et al., 2001; Renner et al., 2009). Par conséquent, cette hypothèse de viscosité dynamique invariante est valable pour les gros vaisseaux. Ainsi, notre solution se focalise sur la modélisation de la vitesse à proximité de la paroi.

## 4.2. État de l'art

### 4.2.1. Simulation numérique des fluides

La simulation numérique des fluides est à ce jour la méthode de référence pour la quantification du cisaillement. Elle permet d'atteindre une grande précision grâce à la résolution des équations de la mécanique des fluides. La simulation s'appuie sur la définition de deux éléments : la paroi et les conditions aux limites notamment l'entrée et/ou la sortie de l'écoulement. En imagerie cardiovasculaire, la paroi est déterminée à partir de la segmentation d'images anatomiques mesurées par IRM ou bien scanner. La condition d'entrée est généralement mesurée par IRM de flux 2D (Wood et al., 2001; Steinman et al., 2001; Karmonik et al., 2012) ou par IRM de flux 4D (Stalder et al., 2011). Ces informations sont utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes au sein du domaine fluide. Ce dernier est discrétisé sous la forme d'un maillage. La Figure 4.2a présente le maillage de la carotide N°1 avec en rouge le maillage de la paroi et en bleu les surfaces d'entrée et sortie du fluide. La Figure 4.2b montre les lignes de courant au sein d'un écoulement fluide. Enfin, la simulation numérique des fluides permet d'accéder aux composantes hémodynamiques telles que le cisaillement à la paroi (voir la Figure 4.2c).

En simulation numérique des fluides, les caractéristiques de l'écoulement influencent les outils de résolution des équations de Navier-Stokes. En particulier, le nombre de Reynolds définit le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses tel que :

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (4.4)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $V$  la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  une longueur caractéristique. Pour un écoulement dans un tube,  $L$  correspond au diamètre moyen. Dans ce problème, en régime stationnaire, un écoulement est considéré comme laminaire si le nombre de Reynolds est inférieur à 2000. Dans le cas contraire, on parle d'écoulement turbulent. Les écoulements cardiovasculaires non pathologiques sont majoritairement laminaires ce qui facilite la résolution directe des équations de Navier-Stokes (Steinman et al., 2001; Renner et al., 2009). L'écoulement peut être temporairement turbulent à l'entrée de l'aorte ou bien à cause de certaines pathologies avec par exemple une sténose aortique créant une accélération importante du fluide. Dans ce cas de figure, la résolution directe des équations nécessite une finesse de maillage bien plus importante. Pour traiter ce type d'écoulement hémodynamique, des outils modélisant les grandes échelles de la

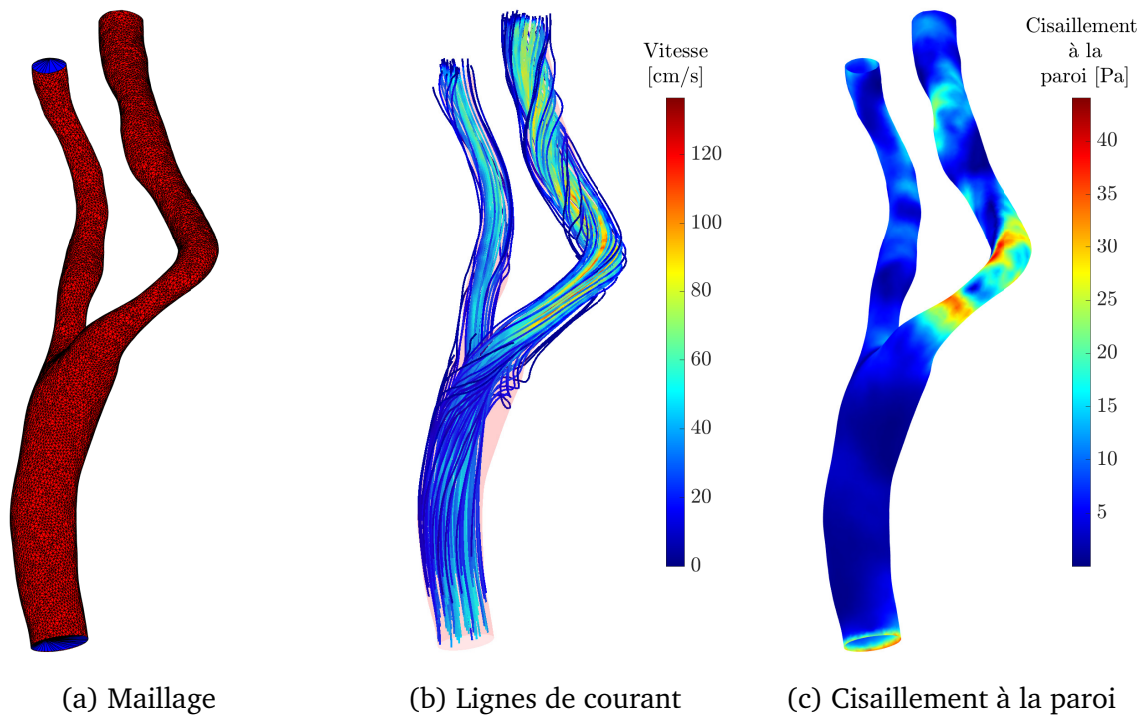


FIGURE 4.2. – Simulation numérique des fluides sur un domaine fluide issu de la segmentation d'une carotide et avec une condition d'entrée mesurée par IRM de flux 2D.

turbulence (LES pour son nom anglais *Large Eddy Simulation*) permettent de résoudre les équations de Navier-Stokes en limitant la finesse du maillage (Puiseux et al., 2019). Quel que soit l'outil de simulation, tous les biomarqueurs hémodynamiques respectent les lois de la mécanique des fluides, cisaillement à la paroi inclus.

Toutefois, la qualité de ces simulations dépend significativement de la validité de la segmentation de la paroi et de la condition d'entrée considérée. D'une part, la simulation est souvent menée sur une segmentation rigide alors que les vaisseaux peuvent se dilater en raison de l'onde de pouls. De plus, l'aorte ascendante n'est pas rigide car elle suit le cœur dans ses contractions. D'autre part, les simulations sont souvent réalisées en considérant un débit à l'entrée plutôt qu'un champ de vitesse qui aurait été mesuré par IRM de flux 2D. Le débit est souvent préféré à la mesure du champ de vitesse car les simulateurs peuvent avoir des difficultés de convergence si le champ de vitesse n'est pas assez précis.

Enfin, ce type de stratégie nécessite un temps de calcul et une expertise tels qu'il est difficile de l'employer dans la routine clinique. En effet, la simulation d'un écoulement laminaire, dont la taille du maillage est faible en comparaison avec les simulations LES, peut prendre plusieurs heures sur un ordinateur de bureau. A moins de disposer de serveur de calcul, la simulation ne peut s'inscrire dans la pratique clinique. De plus, la génération du maillage nécessite une certaine expertise. Typiquement, les résultats de la simulation sont généralement comparés avec plusieurs finesses de maillage afin d'assurer la convergence de la simulation. La multiplication des simulations et le temps de calcul élevé rend cette stratégie envisageable uniquement pour l'étude de cas spécifiques nécessitant une grande précision. Dans la pratique clinique, les spécialistes peuvent se reporter vers une seconde démarche exploitant directement les mesures *in-situ* du champ de vitesse.

### 4.2.2. Calcul direct sur des mesures *in-situ*

La quantification du cisaillement est un problème qui a été traité avant le développement des séquences d'IRM de flux 4D. Les premières estimations du cisaillement à la paroi ont été obtenues par IRM de flux 2D. En particulier, elles s'appuyaient sur un modèle parabolique, solution de l'écoulement stationnaire dans un tube droit : écoulement de Poiseuille. La seule estimation du débit cardiaque permettait alors de calculer analytiquement le cisaillement à la paroi pour toute une section. Or, le domaine d'application de ce type de démarche est limité aux écoulements uni-directionnels dans un tube droit. Cette approche a été employée dans l'aorte abdominale (Moore et al., 1994; Pedersen et al., 1999) car la pulsation  $y$  est moins forte et le vaisseau est quasiment droit. Pour les écoulements plus complexes, Oyre et al. (1998) ont assoupli ce modèle en l'appliquant, indépendamment sur chaque composante de vitesse, de manière sectorielle pour un arc circulaire de la segmentation 2D. D'autres approches (Morgan et al., 1998) ont construit leurs démarches de manière ponctuelle. On observe alors dès les premières études une différence stratégique à laquelle on va s'intéresser.

Dans un premier temps, on peut différencier les solutions à travers deux éléments de leur conception :

- le nombre de composantes du vecteur vitesse pris en compte dans le calcul du cisaillement à la paroi ;
- la dimension du support de la modélisation du champ de vitesse.

Le Tableau 4.1 présente les différents travaux avec les séquences utilisées, la conception mise en œuvre et leurs applications et validations. On observe que l'ensemble des solutions développées pour l'IRM de flux 4D utilisent les trois composantes du vecteur vitesse pour le calcul du cisaillement. En revanche, la modélisation du champ de vitesse peut être réduit à un espace 2D (Stalder et al., 2008) ou même suivant une seule direction (Potters et al., 2014).

Travaux	Séquence	Conception	Validation/Application
Petersson et al. (2012)	Synthétique 1D	1D / 1D	<i>in-silico</i> <sup>e</sup>
Morgan et al. (1998)	IRM de flux 2D	2D / 1D	<i>in-vivo</i>
Oyre et al. (1998)	IRM de flux 2D	3D / 2D	<i>in-vitro</i> <sup>a</sup>
Barker et al. (2010)	IRM de flux 2D	2D / 1D	<i>in-vitro</i> <sup>b</sup> / <i>in-vivo</i>
Sotelo et al. (2015)	IRM de flux 2D	2D / 2D	<i>in-silico</i> <sup>b</sup> / <i>in-vivo</i>
Köhler et al. (2001)	IRM de flux 4D	3D / 3D	<i>in-vitro</i> <sup>ac</sup>
Stalder et al. (2008)	IRM de flux 4D	3D / 2D	<i>in-silico</i> <sup>a</sup> / <i>in-vivo</i>
Potters et al. (2014)	IRM de flux 4D	3D / 1D	<i>in-silico</i> <sup>a</sup> / <i>in-silico</i> <sup>1c</sup> / <i>in-vivo</i>
Sotelo et al. (2016)	IRM de flux 4D	3D / 3D	<i>in-silico</i> <sup>ae</sup> / <i>in-vitro</i> <sup>d</sup> / <i>in-vivo</i>
Piatti et al. (2017)	IRM de flux 4D	3D / 3D	<i>in-silico</i> <sup>d</sup> / <i>in-vivo</i>
Masutani et al. (2018)	IRM de flux 4D	3D / 3D	<i>in-vivo</i>

TABLE 4.1. – État de l'art classé par séquence, concept et type de validation/application. Par conception, on considère deux éléments : dimension du vecteur vitesse modélisé / dimension du support du modèle de vitesse. Les validations sont réalisées sur un fantôme ou sur des données synthétiques avec différents écoulements : <sup>a</sup>Poiseuille, <sup>b</sup>Womersley, <sup>c</sup>simulation numérique des fluides sur carotide, <sup>d</sup>simulation numérique des fluides sur aorte et <sup>e</sup>modèle semi-parabolique. <sup>1</sup>Cibis et al. (2014) correspond à des travaux complémentaires.

Ensuite, l'algorithme de ces solutions peut être séparé suivant deux particularités de leur conception :

- *locale/globale* : nous qualifions de locale une méthode si la modélisation du champ de vitesse s'inscrit dans une représentation locale. Typiquement, une méthode construite autour d'un point d'intérêt est considérée comme locale. Par opposition, une méthode dite globale correspond à une stratégie visant à modéliser le champ de vitesse globalement. Dans cet esprit, les démarches modélisant la vitesse sans lien avec la position d'un point de calcul sont globales.
- *régularisation* : indépendamment de la conception locale ou globale d'une démarche, la régularisation permet de réduire la sensibilité de l'estimateur à des perturbations comme le bruit. Ainsi, les solutions faisant intervenir de l'information issue de la mécanique des fluides telle que la condition de non-glissement à la paroi sont régularisantes. L'utilisation d'un modèle paramétrique ayant moins de degrés de liberté que les données conduit à régulariser le problème. Si la base de représentation est de même dimension que les données alors il n'y a pas régularisation (même si la base est continue et différentiable).

Le Tableau 4.2 présente les différentes démarches de la littérature par rapport à ces deux particularités stratégiques. L'utilisation d'informations issues de la mécanique des fluides, en particulier la condition de non-glissement à la paroi, est systématique dans les approches locales avec régularisation. Seuls les travaux de [Sotelo et al. \(2015, 2016\)](#) utilisent cette information dans une conception globale. De plus, seuls ces derniers exploitent l'ensemble de la morphologie des vaisseaux à travers un modèle par éléments finis.

Conception	Sans régularisation	Avec régularisation
locale	Repère cylindrique et différentiation par différences finies ( <a href="#">Morgan et al., 1998</a> ) ( <a href="#">Barker et al., 2010</a> )	Modèle parabolique ( <a href="#">Pettersson et al., 2012</a> ) B-spline lissante ( <a href="#">Potters et al., 2014</a> ) Modèle parabolique sectoriel ( <a href="#">Oyre et al., 1998</a> )
globale	B-spline ( <a href="#">Stalder et al., 2008</a> ) Différences finies ( <a href="#">Masutani et al., 2018</a> )	Polynôme d'ordre 5 ( <a href="#">Köhler et al., 2001</a> ) Modèle par éléments finis ( <a href="#">Sotelo et al., 2015, 2016</a> ) Filtre de Sobel ( <a href="#">Piatti et al., 2017</a> )

TABLE 4.2. – Tableau classifiant l'état de l'art en fonction de choix stratégiques.

L'estimation du cisaillement a été validée sur des écoulements plus ou moins simples avec des conditions d'expérimentation différentes (voir le Tableau 4.1). Hormis la validation directe sur une cohorte de patient (*in-vivo*), la norme est de valider la quantification du cisaillement à la paroi sur fantôme physique (*in-vitro*) ou numérique (*in-silico*). La nature des écoulements est plus ou moins complexe avec la circulation d'un fluide dans un tube droit ou bien dans un fantôme de géométrie semblable à des vaisseaux. Pour les écoulements dans un tube droit, l'expression de la vitesse est définie analytiquement par les modèles de Poiseuille pour un écoulement stationnaire et Womersley en pulsé. Lorsque la géométrie est plus complexe, une simulation numérique des fluides est réalisée soit sur la bifurcation de la carotide, soit sur l'aorte. Enfin, la résolution diffère d'une part en fonction de la nature du vaisseau (voir le Tableau 2.1) et d'autre part avec les paramètres de la séquence IRM choisie.

Les premiers résultats en IRM de flux 4D, établi par [Köhler et al. \(2001\)](#), ont montré une erreur moyenne d'environ 20 % sur quelques sections d'un modèle de bifurcation de la carotide (bruit avec un écart-type à 5 % du  $V_{enc}$ ). Cependant, ces performances ont

été obtenues avec une résolution deux fois plus fine que la routine clinique. Les travaux de [Stalder et al. \(2008\)](#) obtiennent une sous-estimation systématique du cisaillement de 40 % sur un écoulement de Poiseuille (simulé sans bruit) filtré à la résolution clinique. Cela démontre d'une part l'importance de la résolution dans le calcul du cisaillement mais aussi l'effet de filtrage que provoque le modèle direct de l'IRM de flux 4D. Récemment, les travaux de [Potters et al. \(2014\)](#) et [Sotelo et al. \(2016\)](#) ont présenté des résultats proches sur l'écoulement de Poiseuille avec une erreur moyenne de 5 % et un écart-type de 15 à 22 % pour une résolution de 2 mm ISO et 1,5 mm ISO (bruit avec un écart-type à 10 % du  $V_{enc}$ ). De plus, l'étude de [Sotelo et al. \(2016\)](#) montre qu'il y a un bénéfice significatif à considérer la modélisation de la vitesse dans un support 3D en comparant leurs résultats à une solution équivalente 2D ([Sotelo et al., 2015](#)). Enfin, l'ensemble de ces résultats démontre la supériorité des approches avec régularisation.

### 4.3. Algorithme proposé : PaLMA

Le cisaillement est une contrainte physique apparaissant à la paroi. Par conséquent, l'algorithme proposé est construit autour d'un point d'intérêt appartenant à la paroi de manière à utiliser la morphologie du vaisseau. Comme vu précédemment, le défi réside dans le choix de modélisation locale de la vitesse afin d'adhérer au mieux aux données accessibles. Plusieurs études (Pettersson et al., 2012; Potters et al., 2014; Sotelo et al., 2016) exploitent la nullité du champ de vitesse à la paroi. Potters et al. (2014) focalisent leur modélisation suivant la normale au point d'intérêt. Cette démarche modélise alors la vitesse suivant une seule dimension. L'idée proposée a pour objectif d'améliorer la modélisation de la vitesse en profitant de la structure 3D des données. Précédemment, Oyre et al. (1998) ont présenté une approche sectorielle s'appliquant à l'IRM de flux 2D. La paroi y est approximée par des arcs de cercle sur lesquels la vitesse s'annule. La solution avancée dans cette section présente une approche 3D composant avec une morphologie plus complexe et profitant de la cohérence locale du champ de vitesse.

Pour ce faire, l'algorithme proposé suit quatre étapes successives développées dans les sections suivantes telles que l'illustre schématiquement la Figure 4.3. La paroi est modélisée par une surface paramétrique centrée au point d'intérêt qui est ajustée sur les points de la segmentation (voir la Section 4.3.1). Cette approximation est alors utilisée pour définir un modèle de vitesse garantissant la condition de non-glissement sur l'ensemble de la surface paramétrique (voir la Section 4.3.2). Ce dernier est ajusté sur les données dans un volume autour du point d'intérêt. Ainsi, le vecteur des contraintes visqueuses peut être calculé analytiquement avec l'expression (4.3) en tout point de la paroi (voir la Section 4.3.3). En particulier, ce vecteur est évalué sur tous les points de la segmentation ayant servi à ajuster la surface paramétrique. L'estimation finale du cisaillement est alors issue d'un estimateur robuste appliqué aux multiples évaluations du cisaillement en un même point et provenant de la modélisation de ses points voisins (voir la Section 4.3.4). Enfin, l'algorithme proposé est nommé PaLMA d'après son nom anglais "Parametric Local Morphology Algorithm".

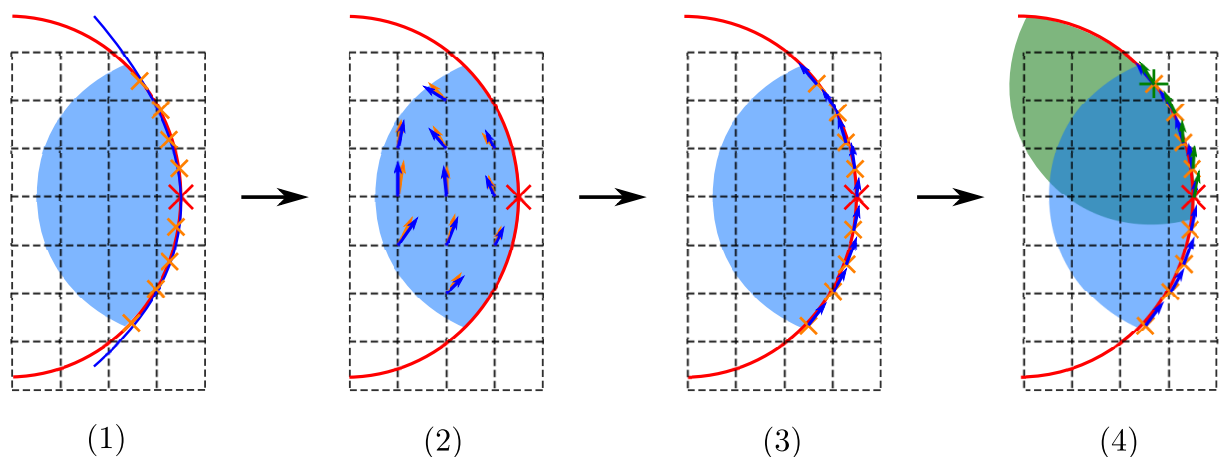


FIGURE 4.3. – Étapes de l'algorithme PaLMA en un point d'intérêt (rouge) : (1) Modélisation paramétrique de la paroi (en bleu) sur la segmentation (points orange) ; (2) Modélisation de la vitesse (en bleu) sur les données (en orange) ; (3) Évaluation du cisaillement (en bleu) sur les points locaux ; (4) Amélioration du cisaillement à partir de points voisins (en vert).



### 4.3.1. Modélisation locale de la paroi

Comme pour d'autres solutions, il existe un préalable au calcul du cisaillement : la segmentation. Celle-ci doit être définie comme un ensemble de faces et sommets. Dans ce manuscrit, nous exploitons les segmentations théoriques pour le tube droit et issues du maillage pour les simulations numériques des fluides.

PaLMA parcourt les différents points de la segmentation afin de modéliser localement la paroi. Pour chacun de ces points  $P_i$ , initialement exprimé dans le repère général  $\mathcal{R}$ , il est nécessaire de déterminer un repère local centré  $\mathcal{L}(P_i, \vec{x}_{\mathcal{L}}, \vec{y}_{\mathcal{L}}, \vec{z}_{\mathcal{L}})$  dont le vecteur de base  $\vec{z}_{\mathcal{L}}$  pointe vers l'intérieur du domaine fluide. Celui-ci est obtenu au point d'intérêt à partir des faces du maillage en contact. Dans un premier temps, les vecteurs de base  $\vec{x}_{\mathcal{L}}$  et  $\vec{y}_{\mathcal{L}}$  sont définis arbitrairement.

Ensuite, les points de la segmentation à une distance inférieure à  $R$  du point d'intérêt sont sélectionnés et exprimés dans le repère local  $\mathcal{L}$ . Comme l'illustre la Figure 4.4, ceux-ci permettent d'ajuster une surface paramétrique d'équation :

$$z = S(x, y; \boldsymbol{\theta}) \quad (4.5)$$

avec  $(x, y, z)$  exprimé dans  $\mathcal{L}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur de paramètre de  $S$ . La surface  $S$  est définie par une décomposition de Taylor autour du point d'intérêt comme cela est fait dans la communauté de la vision par ordinateur (Alexa et al., 2001; Levin, 2004; Ridel et al., 2015) et l'imagerie cardiovasculaire (Coghlan et al., 1995; Zhong et al., 2009). Toutefois, l'ordre de la décomposition est discuté dans le Chapitre 5 avec un parabolöide ou une cubique.

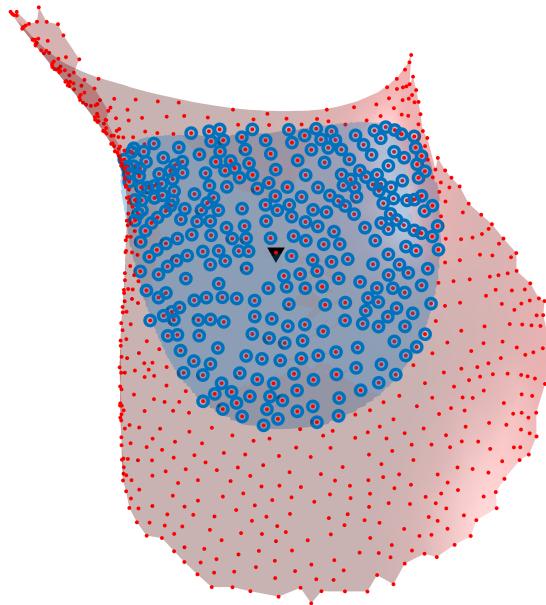


FIGURE 4.4. – Approximation de la segmentation (rouge) autour d'un point d'intérêt (triangle noir) en exploitant ces proches voisins (cercles bleus). La surface bleue représente l'approximation du vaisseau sanguin sur une zone restreinte.

Une fois les paramètres de surface connus, le repère local  $\mathcal{L}$  est ré-orienté afin que  $\vec{x}_{\mathcal{L}}$  et

$\vec{y}_{\mathcal{L}}$  pointent dans les directions associées aux plus fortes courbures. Cette ré-orientation est particulièrement importante pour l’ajustement du modèle de vitesse à fonctions uni-variées séparables (voir la Section 6.1.2). On note  $T_{\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}}$  la matrice de passage du repère local  $\mathcal{L}$  au repère général  $\mathcal{R}$ .

### 4.3.2. Modélisation locale du champ de vitesse

La vitesse d’un fluide visqueux diminue en s’approchant de la paroi pour ensuite s’y annuler. Cela est dû à la viscosité du fluide visqueux. La vitesse de l’écoulement diminue progressivement par frottement entre les particules fluides jusqu’au contact à la paroi. Dans un tube cylindrique droit, la résolution des équations de Navier-Stokes mène au modèle parabolique de Poiseuille (voir Annexe A.1) pour un écoulement stationnaire et au modèle harmonique de Womersley (voir Annexe A.2) pour un écoulement pulsé. Deux simulations de ces écoulements sont présentées avec Poiseuille en Figure 4.5a et Womersley en Figure 4.5b.

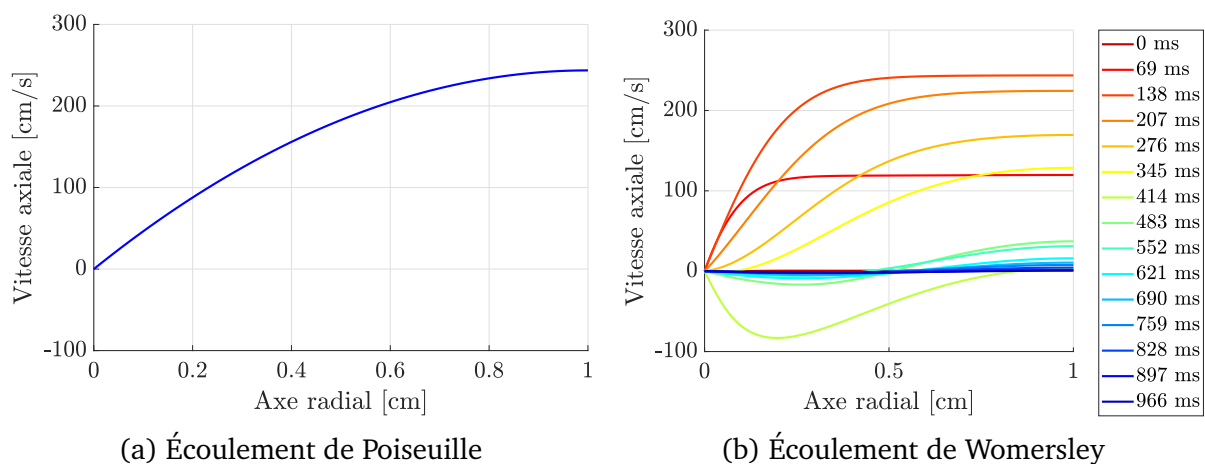


FIGURE 4.5. – Vitesse axiale en fonction de la distance radiale à la paroi pour des écoulements dans un tube droit.

Ces profils de vitesse, définis selon la radiale du tube, sont identiques dans la direction axiale du tube. Du point de vue de la paroi, la vitesse n’évolue que selon la distance normale à la paroi. La conception d’un modèle exploitant cette particularité permet de réduire l’information volumique d’une zone à un comportement radial 1D. Naturellement, la description de la vitesse dans un repère cylindrique semble adaptée à ces solutions analytiques sur géométrie simple. Cependant, elle s’applique avec difficulté sur des géométries plus complexes (sténose et anévrisme).

Une première stratégie a été étudiée en se basant sur la construction d’un repère qui s’adapte à la surface paramétrique  $S$ . Comme l’illustre la Figure 4.6, chaque point du domaine a son propre repère normal à la paroi. Le repère est alors défini par trois vecteurs de base  $\vec{t}_{1S}$ ,  $\vec{t}_{2S}$  et  $\vec{n}_S$  qui suivent la paroi. Chaque vecteur de vitesse peut être décrit dans cette base avec  $\vec{v} = (v_{t_1}, v_{t_2}, v_n)_S^T$ .

Lorsque la géométrie est plus complexe, l’ensemble du domaine fluide ne peut être expliqué par une unique composante selon la normale à la paroi. Typiquement, une zone de recirculation, c’est-à-dire une zone où le flux est partiellement inversé, ne peut pas être décrit par une fonction uni-variée (selon  $z_S$ ). L’introduction de souplesse selon  $x_S$  et  $y_S$  est nécessaire pour traiter ce type de situation. De plus, le champ de vitesse doit s’annuler

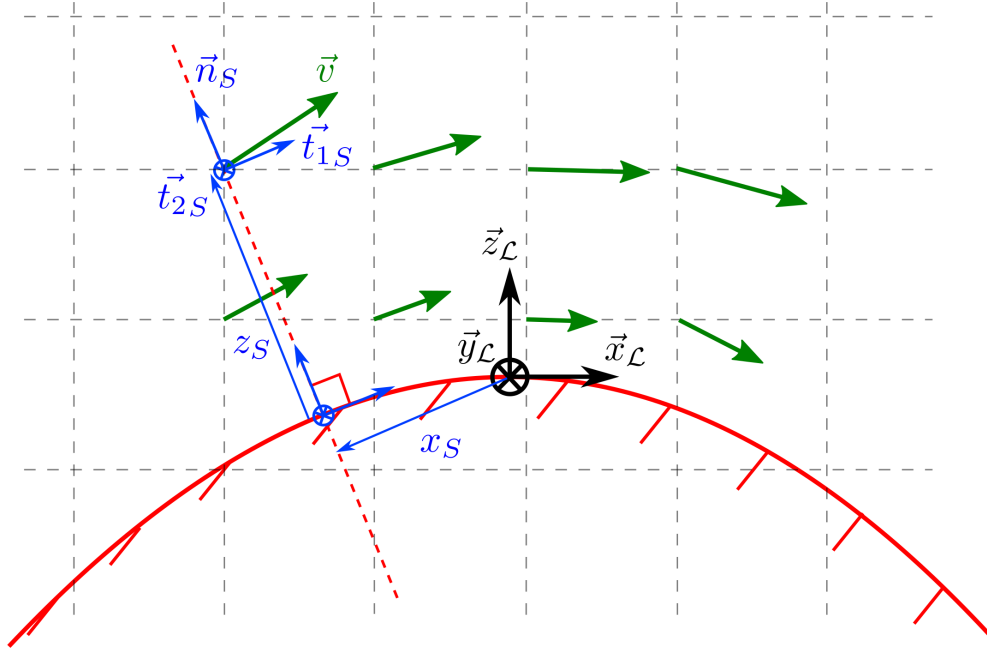


FIGURE 4.6. – Schéma de principe décrivant la construction d'un repère normal à la paroi  $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})_S$  en tout point du domaine.

à la paroi lorsque  $z_S = 0$ . Un premier modèle de vitesse a été conçu avec cette stratégie :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} z_S \times P_{t_1}(x_S, y_S, z_S; \gamma_{t_1}) \\ z_S \times P_{t_2}(x_S, y_S, z_S; \gamma_{t_2}) \\ z_S \times P_n(x_S, y_S, z_S; \gamma_n) \end{bmatrix}_S \quad (4.6)$$

où  $\gamma_{t_1}$ ,  $\gamma_{t_2}$  et  $\gamma_n$  sont les vecteurs de paramètres des fonctions  $P_{t_1}$ ,  $P_{t_2}$  et  $P_n$ .

La mise en œuvre de ce modèle est particulièrement complexe car il n'existe pas de solution directe pour déterminer la distance normale à la paroi  $z_S$ . Celle-ci s'obtient alors itérativement avec des résultats parfois peu fiables. En effet, la projection orthogonale peut avoir plusieurs solutions ( $P_0, P_1, P_2$ ) comme l'illustre la Figure 4.7. Parmi ces solutions, il est possible de choisir la projection telle que la distance à la paroi est minimale. Or, il existe des points du domaine fluide pour lesquels la même distance à la paroi correspond à deux points distincts projetés à la paroi (voir  $P_1$  et  $P_2$ ). Cette stratégie ne peut alors pas être conservée à cause de sa complexité, sa stabilité et le surcoût lié au calcul de  $z_S$ .

Cette construction du repère est inexploitable à cause de la phase de projection normale sur la surface paramétrique. Or, cette stratégie peut être approximée en considérant un repère local translaté  $\mathcal{L}$  avec un simple changement de variable :

$$\tilde{z} = z - S(x, y; \hat{\theta}) \quad (4.7)$$

dans la direction normale à la paroi au point d'intérêt. Cela revient à utiliser la notion de distance algébrique à la place de la distance orthogonale (Zhang, 1997). Ainsi, la propriété de nullité de la vitesse pour tout point  $(x, y, z) \in \delta\Omega$  dans le repère  $\mathcal{L}$  est conservée avec le modèle suivant :

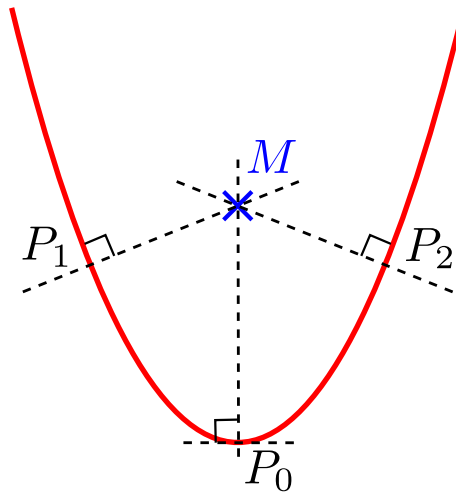


FIGURE 4.7. – Schéma de principe illustrant le problème de projection orthogonale pour un point singulier  $M$ .

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \times P_x(x, y, \tilde{z}; \gamma_x) \\ \tilde{z} \times P_y(x, y, \tilde{z}; \gamma_y) \\ \tilde{z} \times P_z(x, y, \tilde{z}; \gamma_z) \end{bmatrix}_{\mathcal{L}} \quad (4.8)$$

où  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les fonctions explicatives des variations du champ de vitesse associées aux vecteurs de paramètres  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  et  $\gamma_z$ . La Figure 4.8 montre un exemple de champ de vitesse à équidistance verticale de la paroi obtenu à partir de deux composantes  $v_x$  et  $v_z$  linéaires en fonction de  $x$ .

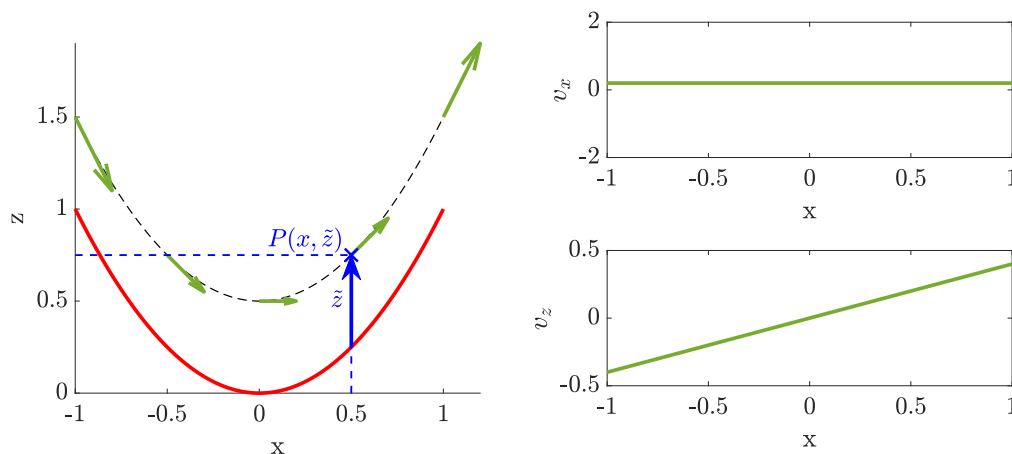


FIGURE 4.8. – Schéma de principe concernant l'utilisation de la variable  $\tilde{z}$  au point  $P$  (vecteur bleu). La courbe rouge représente une section de la surface paramétrique. Les vecteurs verts représentent la vitesse dont les composantes sont affichées sur les graphes de droite.

Ce modèle est ajusté composante par composante sur les données de vitesse au sein d'un volume d'intérêt de rayon  $R$  (voir Figure 4.9). Celui-ci est égal au rayon employé pour la modélisation de la surface paramétrique afin de garantir un modèle de paroi valide pour l'ensemble des données de vitesse. Enfin, le choix des fonctions  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  est discuté dans le Chapitre 6.

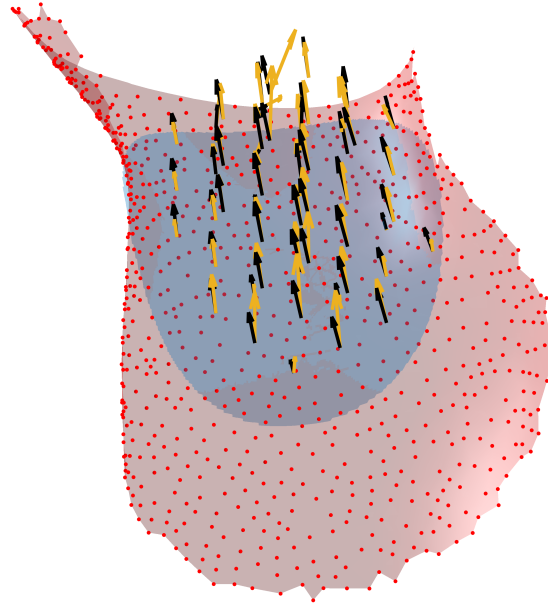


FIGURE 4.9. – Modélisation de la vitesse en bleu dans une zone restreinte de rayon  $R$ . Les vecteurs noirs représentent les vitesses de référence et jaunes la modélisation de ces vitesses.

### 4.3.3. Estimation du cisaillement à la paroi

Le cisaillement à la paroi peut être calculé analytiquement à partir de l'équation (4.2). Le modèle de vitesse (4.8) est dérivé en un point appartenant à la paroi. Ainsi, le vecteur des contraintes visqueuses s'écrit  $\vec{\tau}_v = \mu(\overline{\nabla} \vec{v} + (\overline{\nabla} \vec{v})^T) \cdot \vec{n}$  avec la jacobienne de vitesse suivante :

$$\overline{\nabla} \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \times P_x & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \times P_x + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \times P_y & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \times P_x + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \times P_z \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \times P_y + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \times P_x & 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \times P_y & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \times P_y + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \times P_z \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \times P_z + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \times P_x & \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} \times P_z + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \times P_y & 2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \times P_z \end{bmatrix}_{\mathcal{L}}. \quad (4.9)$$

On note que seule la fonction  $\tilde{z}$  doit être dérivée car les termes tels que  $\tilde{z} \times \frac{\partial P_x}{\partial x}$  sont nécessairement nuls à la paroi. En pratique, les points de la segmentation n'appartiennent pas strictement à la paroi (à l'exception du point central). Ainsi, ces points ont été projetés sur la surface paramétrique  $S$  selon la direction  $\vec{z}$  dans le repère local. Le vecteur des contraintes visqueuses est alors évalué sur l'ensemble des points dans la zone d'intérêt comme l'illustre la Figure 4.10, toujours en conservant pour normale locale la normale à la paroi.

Ensuite, ces estimations sont exprimées dans le repère général à l'aide de la matrice de passage  $T_{\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}}$ . La composante normale du cisaillement  $\vec{\tau} \cdot \vec{n}$  est annulée afin de prendre en compte seulement la composante tangentielle du vecteur des contraintes visqueuses. On retrouve l'expression du cisaillement à la paroi :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_v - (\vec{\tau}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

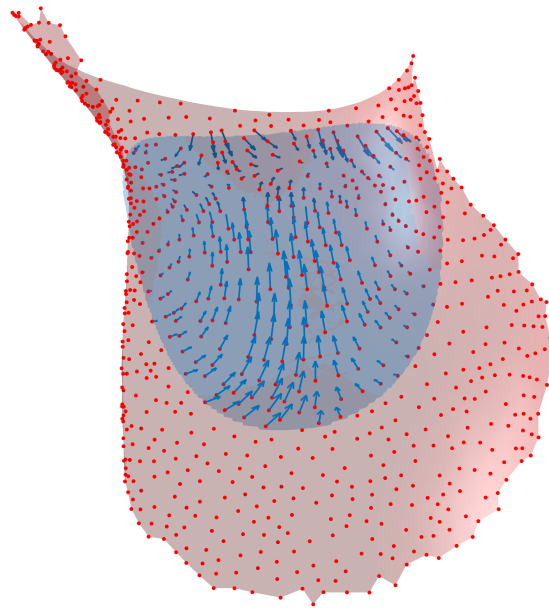


FIGURE 4.10. – Évaluation des vecteurs de cisaillement en bleu dans la zone d'intérêt en chaque point de segmentation à proximité.

#### 4.3.4. Amélioration de la quantification du cisaillement à la paroi

Lors de l'ajustement du modèle de vitesse, les dérivées en proche paroi peuvent être sérieusement impactées par la présence du bruit. Dans ce cas de figure, soit le modèle de vitesse est pénalisé ou contraint (voir Section 6.1.3) soit le cisaillement est régularisé *a posteriori*. Cette ultime étape s'inscrit dans cette dernière démarche.

Plus précisément, les étapes précédentes sont répétées sur tous les points de la segmentation. Ainsi, plusieurs estimations du cisaillement sont mémorisées pour une même position. La Figure 4.11 représente le cisaillement calculé à partir de deux zones d'intérêts (bleue et verte). Les paramètres du modèle de vitesse sont différents pour ces deux zones mais il existe une zone de recouvrement qui est décrite par ces deux jeux de paramètres différents.

Deux estimateurs sont décrits au Chapitre 7 avec une moyenne pondérée et une norme robuste (Huber). Par ailleurs, ce type de construction permet, si on le souhaite, de ne parcourir qu'une partie des points de la segmentation afin de gagner du temps. Cet aspect n'a pas été étudié afin de conserver le maximum d'information en chaque point d'intérêt<sup>1</sup>.

---

1. On remarquera notamment que la finesse du maillage de la segmentation est indépendant de la résolution des données IRM. Par conséquent, la redondance peut être artificiellement augmenté ou diminué en modifiant la finesse du maillage.

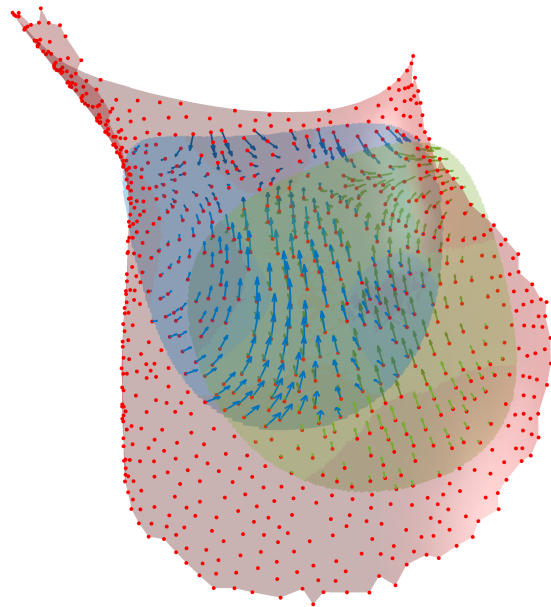


FIGURE 4.11. – Évaluation des vecteurs de cisaillement dans deux zones d'intérêts (bleue et verte) autour de deux points d'intérêt.

## 4.4. Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons comparé deux stratégies visant à estimer le cisaillement à la paroi : la simulation numérique des fluides et le calcul direct à partir de mesures de vitesse *in-situ*. La première de ces solutions est à ce jour considérée comme la référence bien qu'elle soit complexe à mettre en œuvre dans la routine clinique. Par ailleurs, la définition imparfaite de la segmentation et des conditions aux limites du domaine fluide nécessaire à la simulation peut engendrer des différences significatives entre l'écoulement simulé et observé *in-situ*. Par conséquent, la démarche consistant à calculer directement le cisaillement à la paroi à partir de mesures de vitesse *in-situ* est intéressante. Dans cette démarche, il existe plusieurs stratégies s'appuyant sur un positionnement local ou global en ce qui concerne la modélisation de la vitesse et intégrant plus ou moins de connaissance *a priori*.

L'algorithme PaLMA présenté dans ce chapitre s'inscrit dans cette dernière démarche. Plus précisément, nous proposons une solution bénéficiant de la connaissance issue de la morphologie locale de la paroi pour définir un modèle de vitesse. L'algorithme PaLMA repose sur quatre étapes successives :

1. **Modélisation locale de la paroi autour d'un point d'intérêt** : la segmentation anatomique est modélisée localement autour d'un point d'intérêt. Le choix du modèle paramétrique est réalisé dans le Chapitre 5.
2. **Modélisation locale de la vitesse** : le modèle de vitesse est formulé de manière à imposer la nullité de la vitesse en tout point du modèle de paroi. Le Chapitre 6 est dédié à la résolution de différents problèmes avec la prise en compte du filtre IRM pour plusieurs modèles de vitesse ajustés avec deux normes :  $L_2$  et Huber.
3. **Estimation du cisaillement à la paroi** : le cisaillement à la paroi est calculé analytiquement au point d'intérêt et en ses points voisins à partir du modèle paramétrique de vitesse.
4. **Amélioration de la quantification du cisaillement à la paroi** : suite à la modélisation du champ de vitesse pour tous les points de la segmentation, plusieurs estimations du cisaillement sont obtenues pour un point d'intérêt. Deux estimateurs ont été envisagés et sont décrits au Chapitre 7.





# Chapitre 5

## Modélisation locale de la paroi

Le placement de la segmentation est d'importance capitale pour la quantification du cisaillement comme le montrent différentes analyses de sensibilités ([Potters et al., 2014](#); [Sotelo et al., 2015](#)). Cette segmentation peut être obtenue à partir de différentes modalités d'acquisition avec par exemple : le scanner par tomographie computationnelle (CT), l'IRM Cine 3D ([Tavakoli & Amini, 2013](#)) ou encore l'IRM de flux 4D ([Bustamante et al., 2015](#)). En fonction de l'origine des données, la segmentation peut être plus ou moins précise. Par exemple, la résolution en imagerie thoracique est de l'ordre de  $0,4 \times 0,4 \times 0,5 \text{ mm}^3$  pour un scanner CT ([Yoshioka et al., 2018](#)),  $0,83 \times 0,83 \times 1,3 \text{ mm}^3$  en angiographie 3D par résonance magnétique ([Potthast et al., 2010](#)), et  $2,2 \times 2,2 \times 2 \text{ mm}^3$  en IRM de flux 4D ([Stankovic et al., 2014](#)).

La voxelisation de la segmentation peut entraîner des erreurs significatives en terme de cisaillement. D'ailleurs, le terme de segmentation est employé pour définir le masque du lumen ou bien la frontière externe du lumen. A l'exception de [Masutani et al. \(2018\)](#), l'ensemble des solutions proposées dans l'état de l'art établit le cisaillement sur cette frontière inter-voxel. En particulier, [Masutani et al. \(2018\)](#) ont développé une approche permettant de réaliser la segmentation dans le même temps que le calcul du cisaillement. Or, cette segmentation est un masque du lumen et le cisaillement est estimé sur la grille d'acquisition IRM. L'estimation du cisaillement se trouve alors entachée d'erreur due à une irrégularité du bord du domaine. De plus, selon [Masutani et al. \(2018\)](#), cette stratégie est prometteuse à la condition que la résolution de l'imagerie par résonance magnétique de flux 4D s'améliore.

La régularité de la paroi est parfois imposée par la méthode de calcul du cisaillement. Par exemple, les applications sur IRM de flux 2D ([Oyre et al., 1998](#); [Stalder et al., 2008](#); [Sotelo et al., 2015](#)) intègrent la modélisation de la paroi avec respectivement un arc de cercle, une fonction B-spline d'ordre 2 et un modèle élément finis. Dans ce cas, le positionnement de la paroi s'appuie sur l'expertise du médecin avec un outil spécifique dédié à cette application.

D'autres approches ([Potters et al., 2014](#); [Sotelo et al., 2016](#); [Piatti et al., 2017](#)) s'appuient sur une segmentation 3D réalisée au préalable. Toutefois, l'utilisation de la paroi dans le calcul du cisaillement est différente en fonction des approches. Typiquement, [Potters et al. \(2014\)](#) et [Piatti et al. \(2017\)](#) exploitent seulement la normale à la paroi alors que [Sotelo et al. \(2016\)](#) utilisent la morphologie complète du vaisseau. Cette dernière approche permet, à travers l'usage d'un modèle par éléments finis, de modéliser l'ensemble du fluide dans une géométrie complexe. Toutefois, la création et la gestion de la finesse du maillage peut être difficile à appréhender. Celui-ci doit être réalisé pour chaque phase du cycle cardiaque si le vaisseau se déplace ou se déforme significativement. Enfin, ce type d'approche se prête moins facilement à l'introduction de connaissances sur le filtre IRM

(si le maillage est disjoint de la grille IRM).

Afin de limiter la dimension numérique du problème tout en permettant de paralléliser le calcul, nous avons fait le choix d'une modélisation locale en un point d'intérêt. La prise en compte du modèle de paroi en 3D peut être perçue comme une extension de certaines stratégies 2D (Oyre et al., 1998; Stalder et al., 2008). Dans ces deux cas, le choix de paroi est défini par un modèle paramétrique (arc de cercle) ou semi-paramétrique (fonction B-spline). La Section 5.1 présente les choix réalisés pour construire un modèle paramétrique et local de la paroi. Ensuite, le problème d'ajustement est introduit et résolu à la Section 5.2. Enfin, nous explorons, dans la Section 5.3, les sources d'erreur pouvant impacter la quantification du cisaillement ainsi que quelques perspectives.

## 5.1. Modèle de paroi

### 5.1.1. Surface quadrique

Lorsqu'il s'agit d'approximer localement le bord d'un domaine, il est courant d'exploiter un certain type de surfaces quadriques : les paraboloides. En particulier, les paraboloides sont employés dans le domaine de la vision par ordinateur (Alexa et al., 2001; Levin, 2004; Ridel et al., 2015) ou encore sur des applications en lien avec l'imagerie cardiovasculaire (Coghlan et al., 1995; Zhong et al., 2009). L'équation générale d'une quadrique prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} + j = 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \vec{k} + j = 0$$

avec  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  l'ensemble des paramètres de surface. Dans cette étude, le point d'intérêt placé à l'origine du repère doit appartenir à la surface. Ainsi, le paramètre  $j$  est fixé à zéro. L'équation de la quadrique (5.1) permet de générer différents types de surfaces tels que l'ellipsoïde, le cône, les cylindres, les hyperboloïdes ou encore les paraboloides (Petitjean, 2002, Fig. 3). Le paraboloides est un cas dégénéré de quadrique. La Figure 5.1 illustre les deux formes que peut prendre un paraboloides : elliptique ou hyperbolique.

Plus précisément, le paraboloides correspond à toute surface d'équation (5.1) telle que la matrice  $M$  a une seule valeur propre nulle. Le signe des deux valeurs propres non nulles permet de déterminer la sous-catégorie avec un paraboloides elliptique si elles sont de même signe et un paraboloides hyperbolique sinon.

Plusieurs approches permettent d'estimer le paraboloides à partir de l'équation (5.1). Dai et al. (2007) ont développé une solution permettant de récupérer uniquement les paramètres d'un paraboloides elliptique, tandis que Coghlan et al. (1995) présentent un algorithme déterminant les paramètres d'un paraboloides (elliptique ou hyperbolique). Ils proposent d'imposer  $\vec{k}$  comme vecteur propre de  $M$  durant l'estimation des paramètres de

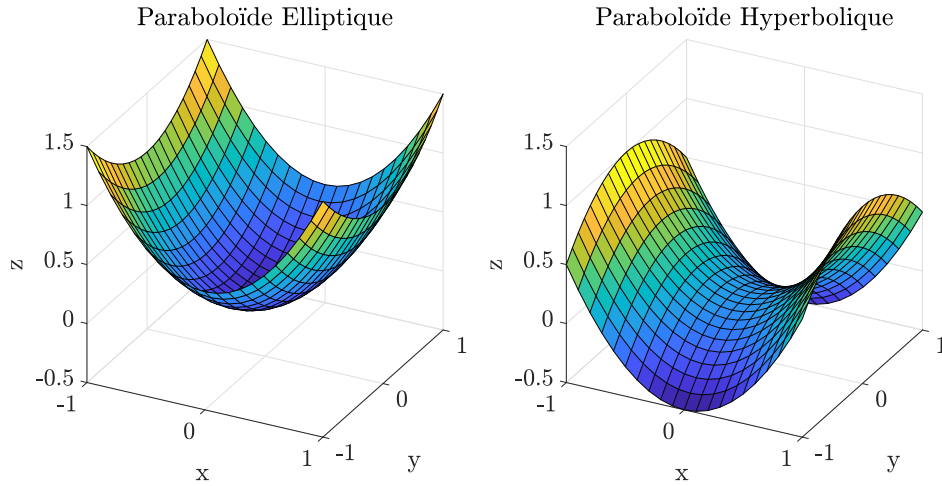


FIGURE 5.1. – Illustration des formes possibles pour un parabolôïde.

quadrique. Cette contrainte peut se formuler comme suit :

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

L'emploi de cette contrainte implique de traiter le problème en deux étapes entrelacées : estimer les inconnues dans  $M$  puis celle de  $\vec{k}$ . La résolution du problème se fait alors de manière itérative en fixant un vecteur  $\vec{k}$  initial.

Une solution plus simple consiste à fixer le vecteur normal au préalable et de modifier la base dans laquelle l'équation (5.1) est écrite. L'équation du parabolôïde s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & c' & 0 \\ c' & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d' \\ e' \\ f' \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Cette dernière approche est la solution la plus souvent employée dans la littérature (Alexa et al., 2001; Levin, 2004; Ridel et al., 2015; Zhong et al., 2009). Dans une majorité de cas, la première estimation de la normale est considérée comme suffisante pour ajuster localement le parabolôïde. Toutefois, il existe des situations pour lesquelles la solution introduite par Coghlan et al. (1995) présente des avantages. En effet, une quadrique est en partie définie à travers ses axes principaux définissant les directions selon lesquels les termes quadratiques seront déterminants. Le choix de fixer la normale par avance implique que l'axe principal suit uniquement la direction  $z$ .

La Figure 5.2 présente un cas type pour lequel une approche déterminant automatiquement le vecteur  $\vec{k}$  (voir Figure 5.2a) fournit un ajustement plus adapté. Le même cas est présenté en Figure 5.2b si le vecteur normal est fixé par avance. Typiquement, l'algorithme de Coghlan et al. (1995) présenterait de meilleures performances dans ce cas de figure car l'axe principal du parabolôïde est très éloigné de l'axe normal au point d'intérêt.

Bien que la solution de Coghlan et al. (1995) semble plus adaptée pour traiter des géométries complexes, les premiers essais ont montré une certaine sensibilité au bruit rendant difficile la convergence de la solution. De plus, le processus itératif implique un temps de calcul plus élevé ce qui va à l'encontre de notre objectif d'application clinique. Par

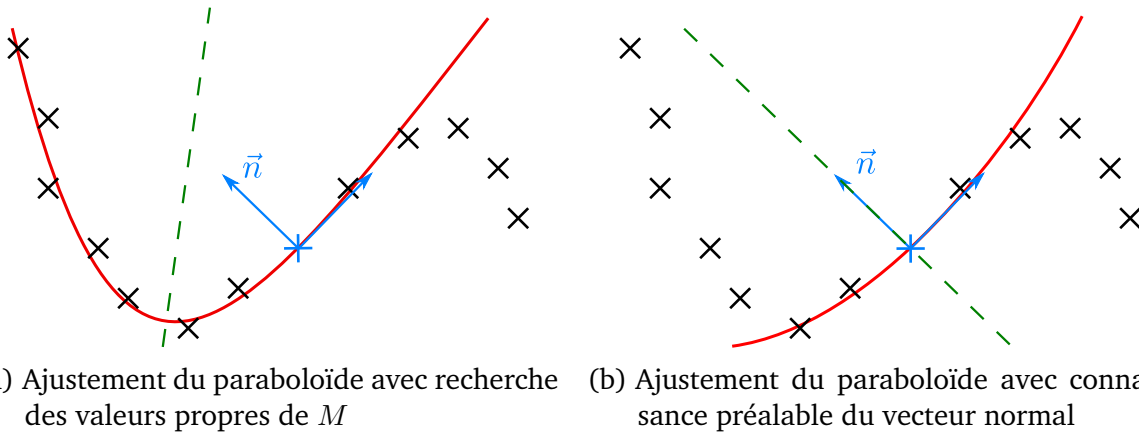


FIGURE 5.2. – Exemple d’une situation complexe pour l’ajustement du parabolôide. Les points noirs représentent les points de la paroi et le point bleu est le point d’intérêt. La courbe rouge illustre une section 2D du parabolôide et son axe de symétrie en vert.

conséquent, le contexte de cette étude se prête plus à un modèle paramétrique semblable à l’équation (5.3). L’expression linéaire du modèle permet une résolution rapide.

Lorsque l’on fixe le vecteur normal au préalable, l’équation d’un parabolôide peut être décrit comme le développement limité d’ordre 2 d’une fonction  $S : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$ . On retrouve le formalisme de l’équation de paroi (4.5) introduite au chapitre précédent. Pour un point de coordonnée  $(x_0, y_0, z_0)$ , le développement limité s’écrit :

$$z \approx z_0 + \frac{\partial S(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial S(x_0, y_0)}{\partial y} y + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial y^2} y^2 \quad (5.4)$$

avec  $z_0 = 0$  pour une surface passant par l’origine et les différentes dérivées partielles correspondant aux inconnues de l’équation (5.3) après division par  $f'$ . On note par ailleurs que cette surface présente deux symétries selon les plans  $xOz$  et  $yOz$  (voir Figures 5.1, 5.3b et 5.4b).

Généralement, la modélisation du bord avec un parabolôide est suffisant car la finesse du maillage de la segmentation est adaptée à la géométrie complexe observée. L’ajustement se fait sur quelques points à proximité du point d’intérêt dans un volume très restreint. Or, dans notre cas, le volume d’intérêt est fixé par l’étape d’ajustement du modèle de vitesse (voir chapitre 6). Afin de garantir un nombre de données de vitesse suffisant dans ce volume d’intérêt, le rayon de recherche  $R$  autour du point d’intérêt est fixé à 3 fois la résolution<sup>1</sup>. Ce même rayon est utilisé pour définir la zone de modélisation locale de la paroi. Dans ces conditions, la capacité de modélisation locale du parabolôide peut s’avérer limitée et l’approximation locale du second ordre ne suffit pas.

Les Figures 5.3b et 5.4b illustrent deux cas complexes pour le parabolôide avec respectivement la naissance d’une sténose (Figure 5.3a) et la rotation significative du vaisseau (Figure 5.4a). Dans le premier cas, le parabolôide décrit relativement bien la courbure dans l’axe du vaisseau à proximité du point d’intérêt et proche de la sténose. En

1. En pratique, une étape permet de s’assurer que le rayon garanti un nombre suffisant de données pour résoudre le problème. Le rayon  $R = 3 \times \text{Résolution}$  définit le volume minimal de recherche. Le rayon  $R$  peut augmenter de 20 % à chaque itération si le nombre de données est insuffisant.

revanche, il est en difficulté en amont car cette zone est particulièrement distendue. On observe notamment que cette difficulté est due à la présence d'un point d'inflexion. La seconde situation illustrée par la Figure 5.4b est un cas pouvant apparaître dès lors que le vaisseau sanguin réalise une rotation significative relativement à la résolution de l'IRM. L'erreur de représentation provient de la propriété de symétrie selon deux plans. Par conséquent, le modèle du paraboloïde n'est pas suffisant pour traiter ce type de problème. La stratégie de [Coghlan et al. \(1995\)](#) présenterait les mêmes défauts puisqu'il s'agit du même type de surface avec les mêmes propriétés et limitations.

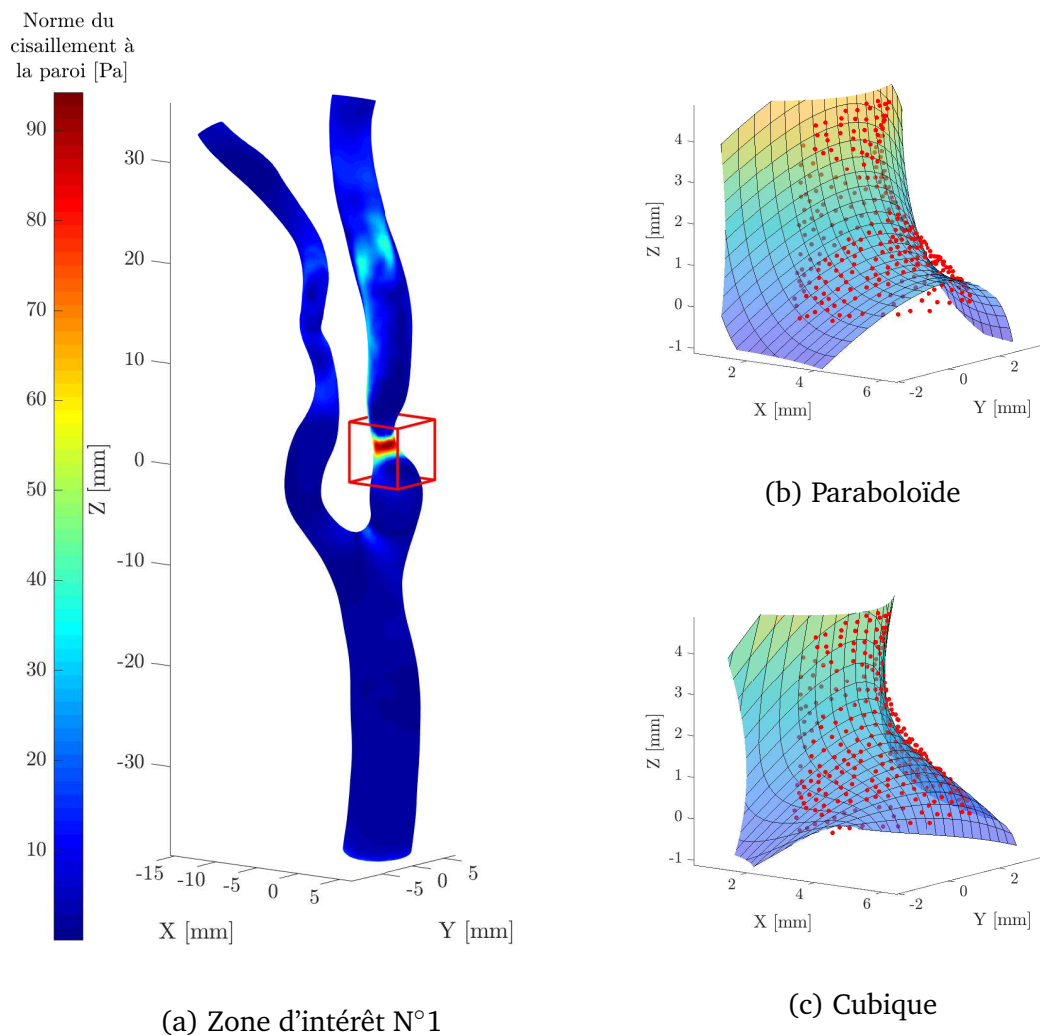


FIGURE 5.3. – Cas particulier à la naissance d'une sténose.

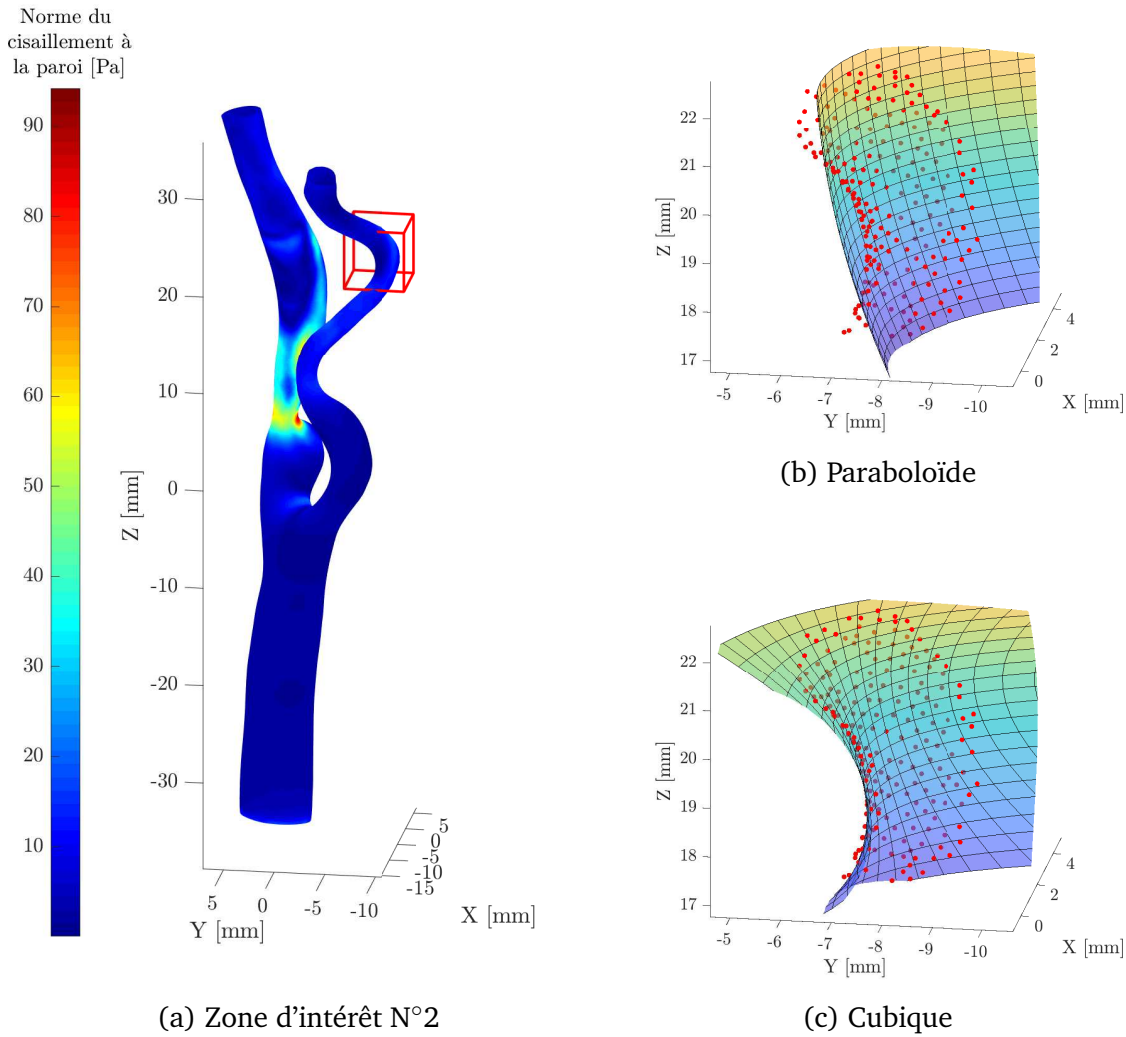


FIGURE 5.4. – Cas particulier de rotation significative du vaisseau sanguin.

### 5.1.2. Surface cubique

Un modèle plus riche s'adapte mieux à ce type de géométrie complexe. La précédente décomposition de Taylor (5.4) peut être écrite jusqu'à l'ordre 3 telle que :

$$\begin{aligned}
 z \approx z_0 &+ \frac{\partial S(x_0, y_0)}{\partial x} x + \frac{\partial S(x_0, y_0)}{\partial y} y + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 S(x_0, y_0)}{\partial y^2} y^2 \\
 &+ \frac{\partial^3 S(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + \frac{\partial^3 S(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} xy^2 + \frac{\partial^3 S(x_0, y_0)}{\partial x^3} x^3 + \frac{\partial^3 S(x_0, y_0)}{\partial y^3} y^3
 \end{aligned}
 \quad (5.5)$$

avec  $z_0$  fixé à zéro et les dérivées partielles à déterminer. Ce modèle est un cas dégénéré des fonctions cubiques. Il ne porte pas de nom spécifique comme le paraboloïde et par souci de simplicité, il sera dénommé cubique.

Les Figures 5.3c et 5.4c présentent le résultat du modèle cubique sur ces situations complexes pour le paraboloïde. Premièrement, on note une nette amélioration de l'approximation sur la région qui précède la sténose (Figure 5.3c). L'ordre du polynôme

cubique lui permet d'introduire un point d'inflexion à proximité de la zone d'intérêt. Ainsi, l'approximation est de moins grande ampleur sur les zones plus éloignées du centre. De plus, le modèle cubique est tout autant efficace sur une zone de rotation significative du vaisseau (voir Figure 5.4c). Dans ce cas, le gain se fait sur l'ensemble de la zone d'intérêt grâce au relâchement de la propriété de symétrie du paraboloïde.

Le choix et les approximations de la surface paramétrique choisie sont d'importance capitale pour la modélisation du champ de vitesse. En raison du faible nombre de données, toute erreur peut mener à une dégradation significative de l'estimateur de cisaillement à la paroi. Bien que l'approche soit construite localement autour d'un point d'intérêt, les erreurs d'approximation au bord du domaine d'intérêt sont non négligeables. En effet, le cisaillement estimé sur les points proches du point d'intérêt est exploité dans la dernière étape de PaLMA. Le modèle paramétrique cubique, simple et linéaire, semble particulièrement adapté pour résoudre notre problème.

## 5.2. Estimation de la paroi

L'ajustement d'une fonction quadrique en général (voir Eq. (5.3)) peut être réalisé de différentes manières. Hall et al. (1982) ont proposé de minimiser un critère des moindres carrés s'appliquant aux quadriques non centrées. On pose trois vecteurs de coordonnées  $\mathbf{x}_S$ ,  $\mathbf{y}_S$  et  $\mathbf{z}_S$  contenant la position des  $n_R$  points de la segmentation dans une région d'intérêt. Ces coordonnées sont exprimées dans le repère local  $\mathcal{L}$  décrit précédemment. Dans cette section, le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  contient les  $N_p$  paramètres de surface<sup>2</sup>. Le problème est alors formulé ainsi :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N_p}} \left\{ \|\mathbf{S}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}\|_2^2 \right\} \quad (5.6)$$

avec  $\mathbf{b} = [1, \dots, 1]^T$  de dimension  $(n_R, 1)$  et la matrice  $\mathbf{S}$  des coefficients linéaires :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S1} & \mathbf{y}_{S1} & \mathbf{z}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}\mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}\mathbf{z}_{S1} & \mathbf{y}_{S1}\mathbf{z}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}^2 & \mathbf{y}_{S1}^2 & \mathbf{z}_{S1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Si} & \mathbf{y}_{Si} & \mathbf{z}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}\mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}\mathbf{z}_{Si} & \mathbf{y}_{Si}\mathbf{z}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}^2 & \mathbf{y}_{Si}^2 & \mathbf{z}_{Si}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Sn_R} & \mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{z}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}\mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}\mathbf{z}_{Sn_R} & \mathbf{y}_{Sn_R}\mathbf{z}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}^2 & \mathbf{y}_{Sn_R}^2 & \mathbf{z}_{Sn_R}^2 \end{bmatrix}$$

On notera qu'il n'y a pas de pondération spécifique des données. L'ajustement optimal doit permettre la définition d'un modèle de vitesse valable sur toute la zone d'intérêt. La solution au problème des moindres carrés (5.6) est bien connue sous le nom d'équation normale  $\mathbf{S}^T\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{S}^T\mathbf{b}$  à condition que la matrice  $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$  soit inversible. Si cette condition n'est pas respectée, la solution de l'inverse généralisée peut être employée Idier (2001). La matrice  $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$  est décomposée en valeur singulière (SVD) et seules les valeurs singulières non nulles sont inversées.

Dans le cas où la surface quadrique est centrée, le vecteur  $\mathbf{b}$  est nul et ces dernières

2. Par souci de simplicité, la variable  $\boldsymbol{\theta}$  sera utilisée quel que soit le modèle paramétrique considéré.



solutions ne s'appliquent pas. Le problème est généralement posé différemment :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N_p}} \{ \|\tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \} \\ \text{sous la contrainte } \|\boldsymbol{\theta}\|_2 = 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

avec  $\tilde{\mathbf{S}} = [[1, \dots, 1]^T, \mathbf{S}]$  une nouvelle matrice incluant le terme constant. La solution à ce problème revient à calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{S}}$ . En pratique, la solution  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre la plus faible (Cao et al., 1994).

Le critère de minimisation des problèmes (5.6) et (5.7) est le carré d'une norme euclidienne. Cette norme correspond à une distance algébrique (Zhang, 1997). Typiquement, le résidu ne peut pas être interprété comme une distance selon une direction donnée. Ces solutions algorithmiques sont performantes en terme de temps de calcul mais présentent des difficultés en ce qui concerne la robustesse (Zhang, 1997). Généralement, les méthodes robustes font appel à des distances orthogonales. Ces approches sont souvent itératives et peuvent s'avérer trop onéreuse dans le contexte clinique.

Ainsi, un modèle paramétrique plus simple comme les équations (5.4) ou encore (5.5) permet d'exprimer un critère de distance euclidienne selon la direction normale au point d'intérêt. Le problème est alors formulé tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N_p}} \{ \|\mathbf{z}_S - \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}\|_2^2 \} \quad (5.8)$$

avec

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S1} & \mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}\mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}^2 & \mathbf{y}_{S1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Si} & \mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}\mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}^2 & \mathbf{y}_{Si}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Sn_R} & \mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}\mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}^2 & \mathbf{y}_{Sn_R}^2 \end{bmatrix}$$

dans le cas d'un parabolöide et :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S1} & \mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}\mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}^2 & \mathbf{y}_{S1}^2 & \mathbf{x}_{S1}^2\mathbf{y}_{S1} & \mathbf{x}_{S1}\mathbf{y}_{S1}^2 & \mathbf{x}_{S1}^3 & \mathbf{y}_{S1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Si} & \mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}\mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}^2 & \mathbf{y}_{Si}^2 & \mathbf{x}_{Si}^2\mathbf{y}_{Si} & \mathbf{x}_{Si}\mathbf{y}_{Si}^2 & \mathbf{x}_{Si}^3 & \mathbf{y}_{Si}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_{Sn_R} & \mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}\mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}^2 & \mathbf{y}_{Sn_R}^2 & \mathbf{x}_{Sn_R}^2\mathbf{y}_{Sn_R} & \mathbf{x}_{Sn_R}\mathbf{y}_{Sn_R}^2 & \mathbf{x}_{Sn_R}^3 & \mathbf{y}_{Sn_R}^3 \end{bmatrix}$$

pour un modèle cubique.

Il s'agit d'un problème de moindres carrés avec comme solution :  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{z}_S$  si  $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$  est inversible<sup>3</sup>.

### 5.3. Sources d'erreur

La paroi peut impacter le calcul du cisaillement de deux manières. D'une part, la modélisation doit être adaptée à la complexité de la segmentation sur la zone d'intérêt

3. En pratique, la fonction *lsqminnorm* de Matlab est utilisée car elle permet d'avoir le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  de norme minimale sous contrainte que  $\mathbf{z}_S = \mathbf{C}\boldsymbol{\theta}$ .

(voir Section 5.3.1). D'autre part, la segmentation peut contenir une erreur non négligeable et celle-ci impacte la quantification du cisaillement quel que soit l'estimateur considéré (voir Section 5.3.2).

### 5.3.1. Erreur d'approximation

La différence entre le paraboloïde et la cubique a révélé une meilleure adaptation du modèle cubique. Plus précisément, le niveau d'approximation suffisant est différent suivant la complexité du vaisseau et son diamètre. Typiquement, un paraboloïde et une cubique sont suffisants pour s'adapter à l'artère carotide commune. La surface cubique s'adapte mieux aux géométries des artères carotides interne et externe.

Toutefois, lorsque le vaisseau est de diamètre faible comme sur les Figures 5.3a et 5.4a, ces deux surfaces peuvent être inadaptées. Schématiquement, la zone d'intérêt, en vert, sur la carotide commune se comporte comme sur la Figure 5.5a. Le diamètre réduit des carotides interne et externe impose une zone d'intérêt plus grande par rapport au diamètre (voir Figure 5.5b). La sélection des points de paroi englobe alors des points de segmentation au-delà du rayon du vaisseau. L'enroulement de ces points est incompatible avec les modèles paramétriques définis précédemment. En pratique, nous avons exclu ces points de la sélection afin de permettre de meilleure performance lors de l'ajustement.

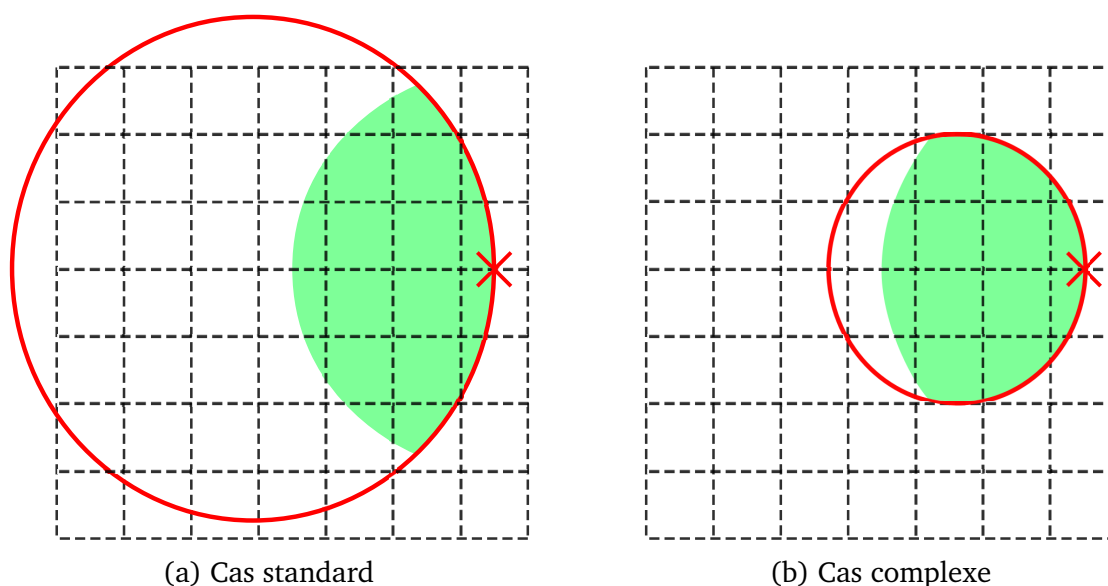


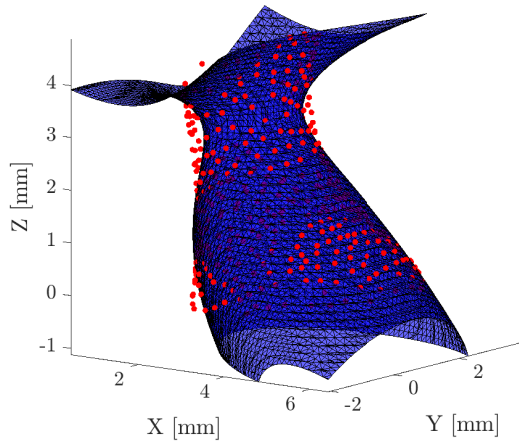
FIGURE 5.5. – Illustration des zones d'intérêt pour deux diamètres de taille suffisante (a) et de taille réduite (b).

Certaines surfaces de la famille des quadriques (ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe,...) pourraient prendre en compte l'ensemble des points de la zone d'intérêt. Les plans de symétrie des quadriques induiraient de sérieuses approximations dans les situations exposées précédemment (voir Figures 5.3 et 5.4).

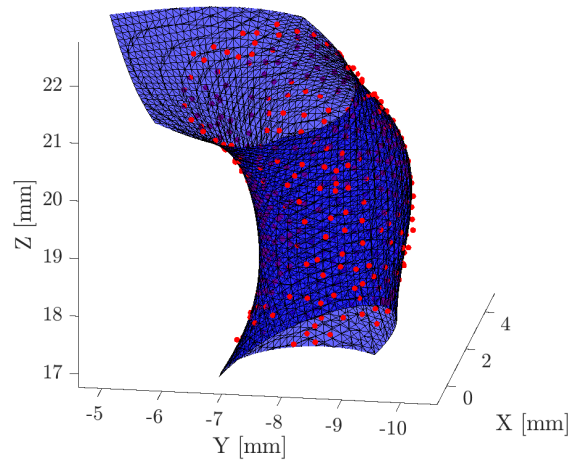
Une approche, partiellement étudiée par Sagheer (2019), un stagiaire de Master 2, pourrait contrer ces difficultés. Un modèle de surface cubique non dégénéré serait en mesure de s'ajuster sur un bord enroulé avec moins de contrainte que les quadriques. L'équation

d'une surface cubique non dégénérée s'écrit :

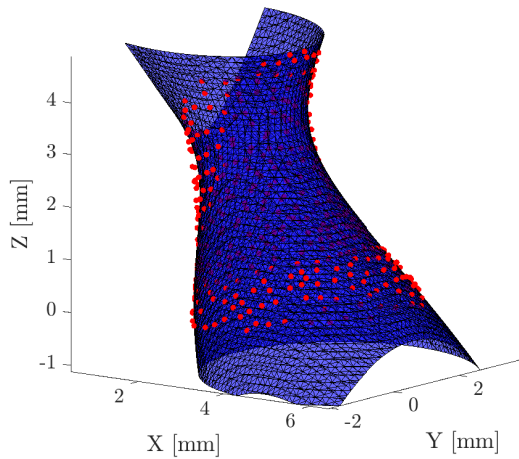
$$a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 + a_4x^2y + a_5x^2z + a_6y^2x + a_7y^2z + a_8z^2x + a_9z^2y + a_{10}xyz \quad (5.9) \\ + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}z^2 + a_{14}xy + a_{15}xz + a_{16}yz + a_{17}x + a_{18}y + a_{19}z + a_{20} = 0$$



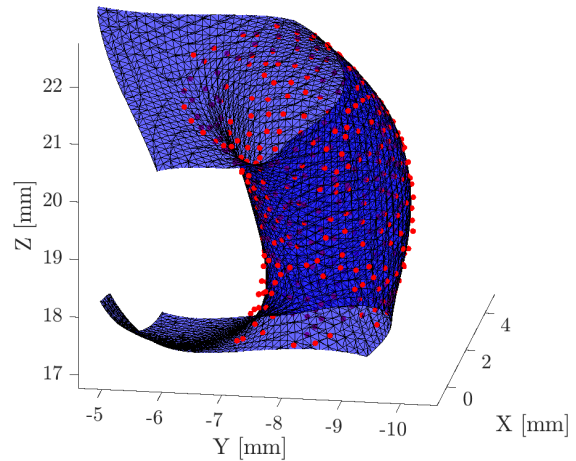
(a) Zone d'intérêt N°1 - Modèle centré



(b) Zone d'intérêt N°2 - Modèle centré



(c) Zone d'intérêt N°1 - Modèle non centré



(d) Zone d'intérêt N°2 - Modèle non centré

FIGURE 5.6. – Application d'un modèle de surface cubique non dégénérée à deux zones d'intérêt complexes.

Comme précédemment, le terme  $a_{20}$  est nul si la surface est centrée. L'ajustement d'un tel modèle se fait de la même manière que le problème (5.7). La solution s'obtient alors après calcul des vecteurs propres (Cao et al., 1994). A titre d'exemple, la Figure 5.6 illustre le résultat sur les situations complexes observées précédemment avec un modèle centré au point d'intérêt (voir Figures 5.6a et 5.6b) ou non (voir Figures 5.6c et 5.6d). L'ajustement est globalement plus précis dans le cas d'un modèle non centré. De plus, la

détermination de la valeur propre la plus faible ne donne pas nécessairement les résultats les plus réalistes. Les Figures 5.6a et 5.6b ont été obtenues en choisissant la quatrième valeur propre la plus faible. Zhang (1997) rappelle des solutions robustes et itératives, appliquées aux quadriques, permettant d'améliorer significativement cet ajustement.

Cette solution constitue une perspective sérieuse d'évolution de la modélisation de la surface. En revanche, elle s'éloigne sensiblement du choix initial de modélisation locale de la paroi. Celle-ci est modélisée pour expliquer l'évolution du champ de vitesse dans une zone qui n'appartient plus seulement à la proximité du point d'intérêt. Par ailleurs, cette approche engendre des difficultés pour la dernière étape de l'algorithme PaLMA. L'obtention des points orthogonalement projetés est un processus itératif qui peut s'avérer contraignant pour l'application clinique. Ceci justifie le choix d'un modèle plus simple et approximatif qui est le modèle cubique (5.5).

### 5.3.2. Erreur sur la segmentation

La qualité de la segmentation peut avoir un impact significatif sur la quantification du cisaillement (Potters et al., 2014; Sotelo et al., 2015). L'analyse de performance vis-à-vis de la segmentation peut être réalisée de deux manières :

1. en ajoutant une erreur de dilatation ou d'érosion sur une segmentation établie (Potters et al., 2014; Sotelo et al., 2015) ;
2. en observant la variabilité des estimations de cisaillement à partir de segmentations réalisées par plusieurs experts (Markl et al., 2011).

En général, la première démarche est employée pour valider l'estimateur développé. Cela permet d'évaluer la sensibilité du cisaillement à la paroi vis-à-vis de paramètres répétables, par exemple un coefficient de dilatation ou érosion. Dans un second temps, il est intéressant d'évaluer la solution dans un contexte clinique. En effet, la segmentation est souvent réalisée par différents experts. Cela permet d'observer l'influence de l'expert sur l'erreur d'estimation du cisaillement.

L'accès à des champs de vitesse analytique (voir les Sections A.1 et A.2) et simulés numériquement (voir la Section A.3) permet de maîtriser l'environnement de simulation d'acquisition. L'analyse de performance de quantification du cisaillement est faite en détériorant une segmentation théorique (voir la Section 8.3.2). Conformément à l'état de l'art, la segmentation peut être dilatée ou érodée aisément lorsqu'il s'agit d'un tube cylindrique. En revanche, l'analyse est plus difficile pour des géométries complexes et n'est pas explorée dans ce manuscrit.

## 5.4. Synthèse

Le paraboloïde est une surface souvent employée dans le domaine de la vision par ordinateur (Alexa et al., 2001; Levin, 2004; Ridel et al., 2015) ou encore sur des applications en lien avec l'imagerie cardiovasculaire (Coghlan et al., 1995; Zhong et al., 2009). Le paraboloïde est un cas dégénéré des quadriques. L'axe principal de la quadrique peut être fixé *a priori* (Zhong et al., 2009; Ridel et al., 2015) ou bien estimé à partir des points de la segmentation (Coghlan et al., 1995; Dai et al., 2007). Nous avons favorisé la première approche en raison de sa simplicité de la mise en œuvre et son faible temps de calcul.

Le paraboloïde possède des propriétés de symétrie qui peuvent s'avérer problématiques en présence de points d'inflexion ou d'une rotation significative du vaisseau. Un modèle cubique dégénéré présente de meilleures performances sur ces situations complexes.

Un modèle cubique non dégénéré pourrait être une solution d'amélioration de l'approximation pariétale. Toutefois, cette approche s'éloigne de la stratégie initiale d'approximation locale et introduirait une complexité supplémentaire dans la dernière étape de PaLMA.

# Chapitre 6

## Modélisation locale du champ de vitesse

La modélisation du champ de vitesse est déterminante pour l'estimation du cisaillement à la paroi car ce dernier est directement fonction des dérivées spatiales de toutes les composantes de vitesse (voir la Section 4.1). Cette modélisation a été réalisée :

- soit dans une section 2D pour des applications 1D/2D (Oyre et al., 1998; Morgan et al., 1998; Petersson et al., 2012) ou des applications 3D (Stalder et al., 2008; Sotelo et al., 2015) ;
- soit directement en 3D lorsqu'il s'agit d'application 3D (Köhler et al., 2001; Potters et al., 2014; Sotelo et al., 2016; Piatti et al., 2017; Masutani et al., 2018).

L'évolution récente de travaux avec une modélisation directement 3D tient à la démocratisation des séquences d'IRM de flux 4D.

Par ailleurs, le modèle peut être décrit dans différentes bases. Celles-ci permettent généralement un calcul plus simple des dérivées partielles du champ de vitesse. La base descriptive linéaire par morceaux mène à un calcul de différentielles par différences finies (Morgan et al., 1998; Masutani et al., 2018). Les polynômes ont souvent été employés dans le contexte de l'IRM de flux 4D pour leur capacité à décrire un milieu continu (Oyre et al., 1998; Köhler et al., 2001; Petersson et al., 2012). Les dérivées de fonctions continues peuvent aussi être exprimées à travers des bases continues et compactes telles que les fonctions B-splines (Stalder et al., 2008; Potters et al., 2014) ou encore les filtres de Sobel (Piatti et al., 2017). Enfin, les modèles par éléments finis permettent une représentation locale linéaire dans une géométrie globalement complexe (Sotelo et al., 2015, 2016).

Dans l'esprit des problèmes inverses, le positionnement de l'ensemble des travaux de l'état de l'art peut se décrire à travers un problème général :

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_v}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_d} \Phi(\vec{u}_i(\vec{x}_i) - h(\vec{v}(\vec{x}_i; \gamma))) + \lambda \mathcal{R}(\vec{v}(\vec{x}_i; \gamma)) \right\} \quad (6.1)$$

avec  $\vec{u}_i$  la donnée de vitesse au point de position  $\vec{x}_i$ ,  $\lambda$  le coefficient associé à la fonction de régularisation  $\mathcal{R}$ ,  $\Phi$  la fonction d'adéquation aux données,  $h$  l'approximation par un filtre du modèle direct de l'IRM de flux 4D,  $\vec{v}$  la vitesse modélisée paramétrée le vecteur  $\gamma$  et  $N_d$  le nombre de données. Généralement, la norme  $L_2$  est privilégiée pour la rapidité de résolution des systèmes linéaires. De même, le filtre IRM  $h$  n'est jamais employée dans la résolution de ce problème.

La régularisation d'un tel problème est soit formalisée dans la fonction  $\mathcal{R}$  (Potters et al., 2014) soit introduite sous forme de contrainte dans le modèle de vitesse. Dans ce dernier cas, la régularité du champ de vitesse peut être imposée avec le choix d'une

fonction descriptive lissante (Köhler et al., 2001; Piatti et al., 2017). De plus, certains travaux (Oyre et al., 1998; Petersson et al., 2012; Sotelo et al., 2015, 2016) considèrent la contrainte physique d’annulation de la vitesse pariétale en un point (Petersson et al., 2012), sur un ligne (Oyre et al., 1998; Sotelo et al., 2015) ou sur une segmentation complète (Sotelo et al., 2016).

Ce chapitre est consacré à l’exploration de différentes modalités dans la construction et l’ajustement d’un modèle polynômial de vitesse. Différents niveaux de contraintes sont étudiés en considérant un modèle linéaire (voir la Section 6.1.1), un modèle à fonctions séparables uni-variées (voir la Section 6.1.2) ou encore un modèle incompressible (voir la Section 6.1.3). De plus, le choix d’un filtre IRM  $h$  moyennant est présenté dans la Section 6.2 et son impact est étudié ultérieurement dans le Chapitre 7. Enfin, le problème d’ajustement est posé avec deux types de norme : une norme  $L_2$  à l’instar de l’état de l’art et une norme de Huber aussi nommée norme robuste.

## 6.1. Proposition de modèle de vitesse

Dans la démarche présentée au Chapitre 4, le modèle paramétrique est contraint afin de prendre en compte la nullité de la vitesse pariétale. L’objectif initial était d’exprimer le champ de vitesse dans un système de coordonnées orthogonal en tout point de la surface paramétrique. Par souci de simplicité, le changement de variable  $\tilde{z} = z - S(x, y; \boldsymbol{\theta})$  a été privilégié. La variable  $\tilde{z}$  représente alors la distance verticale. Pour rappel, la vitesse est décrite par l’expression (4.8) :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \times P_x(x, y, \tilde{z}; \boldsymbol{\gamma}_x) \\ \tilde{z} \times P_y(x, y, \tilde{z}; \boldsymbol{\gamma}_y) \\ \tilde{z} \times P_z(x, y, \tilde{z}; \boldsymbol{\gamma}_z) \end{bmatrix}_{\mathcal{L}}$$

en un point de coordonnées locales  $(x, y, z)_{\mathcal{L}}$  et avec les fonctions explicatives  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$ . Ces dernières ont un support 3D et sont paramétrées par trois vecteurs  $\boldsymbol{\gamma}_x$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_y$  et  $\boldsymbol{\gamma}_z$ . Ces fonctions peuvent être décomposées en fonctions à support compact telles que des fonctions B-spline, ondelettes ou même à base radiale. En particulier, certains travaux intéressants (Lowitzsch, 2002; Busch et al., 2013) appliqués aux fonctions à base radiale ont permis de définir directement une base à divergence nulle (c’est-à-dire incompressible). Malheureusement, l’utilisation de ces fonctions aux bords du domaine peut s’avérer complexe. Busch et al. (2013) présentent une approche intégrant partiellement la notion de bord. La vitesse pariétale n’est pas strictement nulle et cela peut induire une certaine approximation en terme de cisaillement. L’expression (4.8) permet de garantir cette contrainte mais n’est pas compatible avec l’emploi de fonctions à support compact. En effet, le produit par  $\tilde{z}$  permet d’annuler la vitesse pariétale mais force le modèle à avoir un support non compact.

Le modèle de paroi proposé ici est issu d’un développement limité autour du point d’intérêt (voir Chapitre 5). Il en résulte un modèle de paroi polynômial d’ordre choisi. Supposons que chaque composante de  $\vec{v}$  soit décrite par un polynôme sans le produit par  $\tilde{z}$ . L’expression (4.8) correspond à la factorisation de ces polynômes de manière à ce qu’ils soient nuls en tout point du modèle de paroi. Il paraît alors naturel d’utiliser des polynômes pour les fonctions explicatives  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$ .

Par ailleurs, le sang est supposé visqueux ce qui implique que la vitesse ralentie à proximité de la paroi. Pour un temps donné, les écoulements tubulaires de Poiseuille et

Womersley ont une vitesse axiale évoluant seulement selon la direction radiale. La vitesse est alors égale selon l'axe du tube indépendamment des points de mesure. En général, les vecteurs de vitesse évoluent spatialement et significativement selon la normale à la paroi. Par conséquent, plusieurs points à la même distance de la paroi constituent une information redondante intéressante. Une fonction polynômiale de degré faible permet d'expliquer le comportement fluide localement avec assez peu de paramètres. Ainsi, trois fonctions polynômiales ont été étudiées avec un modèle linéaire, un modèle à fonctions séparables univariées et un modèle incompressible.

### 6.1.1. Modèle linéaire

Dans cette section, chacune des fonctions  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont décrites par une fonction polynômiale de support  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément, ces fonctions sont définies ainsi :

$$\begin{cases} P_x(x, y, \tilde{z}) = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=L \\ l_1, l_2, l_3=0}} \gamma_{x, l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} \tilde{z}^{l_3} \\ P_y(x, y, \tilde{z}) = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=L \\ l_1, l_2, l_3=0}} \gamma_{y, l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} \tilde{z}^{l_3} \\ P_z(x, y, \tilde{z}) = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=L \\ l_1, l_2, l_3=0}} \gamma_{z, l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} \tilde{z}^{l_3} \end{cases} \quad (6.2)$$

avec  $L$  l'ordre du polynôme. Le nombre de paramètre à estimer dépend de l'ordre du polynôme choisi avec 4 paramètres pour un ordre 1, 10 pour un ordre 2, 20 pour un ordre 3 et 35 pour un ordre 4. Le nombre de points à proximité du bord est très limité avec entre 20 et 35 points en fonction de la configuration géométrique pour un rayon  $R$  de 3 fois la résolution d'acquisition. En pratique, seuls les ordres 1 et 2 sont étudiés car ils permettent une redondance de données essentielle dans un contexte bruité.

### 6.1.2. Modèle à fonctions séparables univariées

La vitesse pour des écoulements de Poiseuille ou Womersley pointe dans la direction du tube et ne dépend que de la distance radiale pour un temps fixé. Bien que l'écoulement au sein d'une aorte ou d'une carotide ne soit pas totalement assimilable à ceux de Poiseuille ou Womersley, certaines caractéristiques peuvent être partiellement conservées. Ainsi, la composante de vitesse dans l'axe du vaisseau resterait dominante et chacune des composantes du vecteur vitesse évoluerait principalement selon la direction normale ou encore son approximation locale  $\tilde{z}$ . Les polynômes à fonctions séparables uni-variées permettent ce type d'approximation. De plus, cela permet de réduire le nombre de paramètres à estimer de manière significative en présence d'ordre élevé. Dans ce cas, les polynômes  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  peuvent être décrits ainsi :

$$\begin{cases} P_x(x, y, \tilde{z}) = f_x(x)g_x(y)h_x(\tilde{z}) = \left( \sum_{l_1=0}^{L_{x,1}} \gamma_{x,1,l_1} x^{l_1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{L_{x,2}} \gamma_{x,2,l_2} y^{l_2} \right) \left( \sum_{l_3=0}^{L_{x,3}} \gamma_{x,3,l_3} \tilde{z}^{l_3} \right) \\ P_y(x, y, \tilde{z}) = f_y(x)g_y(y)h_y(\tilde{z}) = \left( \sum_{l_1=0}^{L_{y,1}} \gamma_{y,1,l_1} x^{l_1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{L_{y,2}} \gamma_{y,2,l_2} y^{l_2} \right) \left( \sum_{l_3=0}^{L_{y,3}} \gamma_{y,3,l_3} \tilde{z}^{l_3} \right) \\ P_z(x, y, \tilde{z}) = f_z(x)g_z(y)h_z(\tilde{z}) = \left( \sum_{l_1=0}^{L_{z,1}} \gamma_{z,1,l_1} x^{l_1} \right) \left( \sum_{l_2=0}^{L_{z,2}} \gamma_{z,2,l_2} y^{l_2} \right) \left( \sum_{l_3=0}^{L_{z,3}} \gamma_{z,3,l_3} \tilde{z}^{l_3} \right) \end{cases} \quad (6.3)$$

Contrairement au modèle précédent (6.2), ce type de polynôme n'est plus linéaire par



rapport aux paramètres. L'estimation non linéaire de ce modèle peut se faire à travers une procédure itérative impliquant la résolution successive de problèmes linéaires (voir la Section 6.3.1.2).

### 6.1.3. Modèle incompressible

La propriété d'incompressibilité d'un fluide tient à l'équation de conservation de la masse. Sous forme intégrale, il en résulte que le débit est conservé quelle que soit la section observée du domaine fluide. Sous forme différentielle, l'incompressibilité se résume à l'annulation de la divergence de la vitesse en tout point et tout temps à condition que la masse volumique du fluide soit constante spatialement et temporellement. Plus précisément, l'espace des champs de vitesse incompressible se définit ainsi :

$$\mathcal{M} = \left\{ \vec{v} \in (\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3))^3 \mid \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \right\} \quad (6.4)$$

avec  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$  l'espace des fonctions de carré intégrable. En d'autres termes,  $\mathcal{M}$  désigne le noyau de l'application de divergence appliquée à un champ de vitesse  $\vec{v}$ .

Dans ce cas d'application, le vecteur de vitesse  $\vec{v}$  est de dimension finie  $3(L+1)$  avec  $L$  l'ordre des polynômes linéaires  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$ . L'espace  $\mathcal{M}_f$  désigne l'ensemble des champs de vitesse à divergence nulle dans un espace de dimension finie :

$$\mathcal{M}_f = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^{3(L+1)} \mid \nabla \cdot \vec{v}(\gamma) = 0 \right\} \quad (6.5)$$

Ces polynômes sont linéaires par rapport aux paramètres. Dès lors que l'ordre de ces polynômes est établi, il est possible de calculer la divergence de  $\vec{v}$  :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} P_x + \tilde{z} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y} P_y + \tilde{z} \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} P_z + \tilde{z} \frac{\partial P_z}{\partial z} \quad (6.6)$$

Pour annuler la divergence en tout point, l'expression précédente (6.6) est factorisée telle que :

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{l_1=0}^{L+3} \sum_{l_2=0}^{L+3} \sum_{l_3=0}^{L+1} \beta_{l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} \quad (6.7)$$

avec  $\beta_{l_1 l_2 l_3}$  une fonction des paramètres de vitesse  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$  et de surface  $\hat{\theta}$  pour un élément de base polynômiale  $x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3}$ . Par identification, il en découle que chacune de ces fonctions  $\beta_{l_1 l_2 l_3}$  doit être annulée<sup>1</sup>. Ce système d'équations s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \mathbf{B}\gamma = \vec{0} \quad (6.8)$$

avec  $\mathbf{B}$  une matrice contenant seulement des combinaisons linéaires de paramètres de surface  $\hat{\theta}$ . Plus précisément, le noyau de  $\mathbf{B}$  dépend seulement de la surface et non des paramètres de vitesse dès lors que l'on exclut la solution triviale  $\gamma = \vec{0}$ . Celui-ci est de dimension non nulle inférieure à  $\mathbb{R}^{3(L+1)}$ , il existe alors une matrice  $\mathbf{K}$  telle que :

$$\gamma_{\text{inc}} = \mathbf{K}\alpha \quad (6.9)$$

1. En pratique, ces calculs ont été menés avec l'outil de calcul symbolique de *Matlab*.

avec  $\boldsymbol{\alpha}$  de dimension égale à celle du noyau de  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \vec{0}$ ). L'identification de  $\mathbf{K}$  peut être faite en calculant la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (6.10)$$

Les vecteurs associés aux valeurs singulières nulles sont des éléments de base de  $\mathcal{M}_f$ . Les valeurs singulières de la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}$  sont généralement triées par ordre décroissant et on note  $r_g$  le rang de cette matrice. Au delà de ce rang, les valeurs singulières sont nulles. La matrice  $\mathbf{K}$  se construit ainsi :

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{v}_{r_g+1} & \cdots & \mathbf{v}_{3(L+1)} \end{array} \right]$$

avec  $\mathbf{v}_i$  désignant le  $i^{\text{ième}}$  vecteur singulier.

L'avantage de cette approche tient à la construction d'une matrice  $\mathbf{K}$  orthogonale ce qui permet de limiter les problèmes numériques lors de la résolution du problème inverse. Toutefois, cette stratégie est soumise au calcul du rang. Numériquement, les valeurs singulières sont rarement strictement nulles et le choix d'un seuil de tolérance intervient pour établir ce rang. L'application de cette stratégie à des géométries complexes telles que les carotides a présentée certaines limites à cause de ce calcul de rang. Pour un ordre de polynôme donné, la dimension du noyau pouvait être différente d'une zone à l'autre. Certains vecteurs de base étaient conservés comme étant à divergence nulle alors que cela n'était pas le cas (Sagheer, 2019).

Pour résoudre ce problème, le système d'équations (6.8) est résolu analytiquement avec des outils de calcul symbolique. L'avantage de cette approche est la garantie que  $\mathcal{M}_f$  est de même dimension quelle que soit la géométrie considérée. Deux difficultés numériques doivent être prises en compte : la non-orthogonalité de la matrice  $\mathbf{K}$  et les indéterminations due à des surfaces paramétriques dégénérées.

Le Tableau 6.1 présente la dimension des différents espaces de paramètres en fonction du choix de l'ordre des polynômes  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$ . L'application de la contrainte à divergence nulle permet de réduire très significativement les degrés de liberté quel que soit l'ordre du polynôme. Il est intéressant de noter que la dimension de  $\boldsymbol{\alpha}$  pour un polynôme d'ordre 4 est très proche de la dimension de  $\boldsymbol{\gamma}$  pour un polynôme d'ordre 2. Il en est de même si on compare  $\boldsymbol{\alpha}$  pour un polynôme d'ordre 3 avec  $\boldsymbol{\gamma}$  pour un polynôme d'ordre 1 ( $\dim(\boldsymbol{\gamma}) = 12$ ). Ainsi, il est possible de décrire l'écoulement fluide avec un polynôme d'ordre élevé (3 ou 4) pour un coût en terme de degré de liberté très réduit.

Ordre du Polynôme	Dimension de $\boldsymbol{\gamma}$	Dimension de $\mathbf{B}$	Dimension de $\mathbf{K}$	Dimension de $\boldsymbol{\alpha}$
2	30	31×30	30×3	3
3	60	52×60	60×12	12
4	105	80×105	105×29	29

TABLE 6.1. – Tableau récapitulatif de la dimension des espaces de paramètres pour différents choix d'ordre polynômial.

Dans la suite de ces travaux, seuls les polynômes d'ordre 3 et 4 sont étudiés car ils permettent une meilleure description du domaine fluide. Par ailleurs, la notation de la matrice  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  est conservé quel que soit l'ordre du polynôme pour les problèmes imposant la divergence nulle.

## 6.2. Modèle direct de l'IRM de flux 4D

Le modèle direct décrit le processus de mesure (voir la Section 2.1). Souvent ce processus engendre une erreur systématique pouvant être expliquée par la physique de l'acquisition. Dans le cas de l'IRM de flux 4D, la mesure de vitesse se trouve dans un terme de phase. Ceci implique une certaine non-linéarité du modèle direct (2.7) par rapport à la vitesse<sup>2</sup>. Bien que la simulation du modèle direct (2.7) soit possible, son application dans la résolution d'un problème inverse peut s'avérer complexe. L'approximation linéaire est suffisante si le signal anatomique est grand par rapport au bruit (Andersen & Kirsch, 1996). Ce procédé a été employé notamment pour la simulation de données IRM. Cela revient à appliquer un filtre dont le noyau peut être : gaussien (Stalder et al., 2008; Piatti et al., 2017), un sinus cardinal (Potters et al., 2014) ou moyennant (Cibis et al., 2014; Puiseux et al., 2019). La Figure 6.1 présente une section du champ de vitesse au temps systolique d'un écoulement de Womersley. La simulation de données IRM est représentée en considérant la décimation de l'espace K et un filtrage moyennant. Théoriquement, un sinus cardinal serait plus représentatif comme filtre IRM. Or, l'utilisation de plusieurs antennes avec possiblement un facteur d'accélération peut modifier ce filtre. Les excellentes corrélations (97%) obtenues par Puiseux et al. (2019) attestent de la proximité entre données simulées par filtre moyennant et acquisitions multi-antenne sans accélération. Par conséquent, seul le noyau moyennant est étudié dans ce manuscrit.

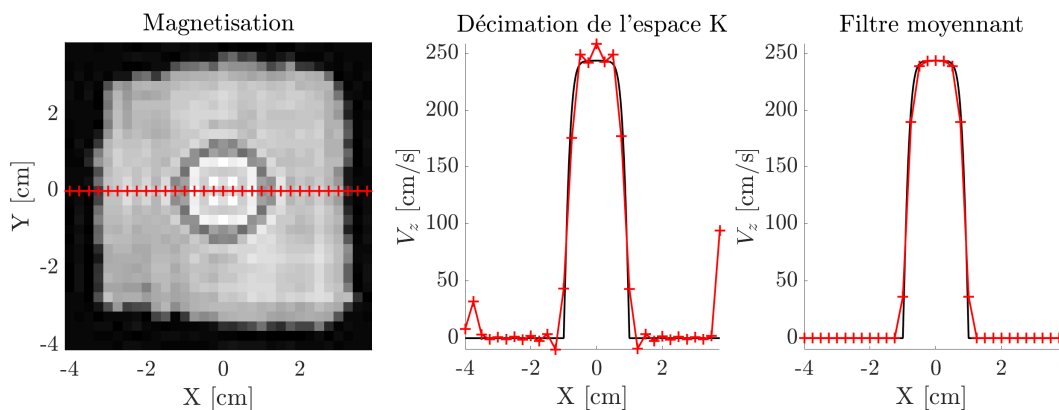


FIGURE 6.1. – Application du modèle direct (en rouge) sur l'écoulement de Womersley au temps systolique (en noir) sans bruit additif.

L'un des effets délétères du processus de mesure par IRM de flux est la création d'un volume partiel sur l'anatomie à proximité de la paroi et que l'on retrouve dans la mesure de vitesse. Celui-ci est directement lié à la résolution de l'acquisition et au modèle direct (2.7). Comme l'illustre la Figure 6.1, l'effet de ce volume partiel dans le cas d'une résolution grossière peut rendre difficile l'estimation de biomarqueurs comme le cisaillement à la paroi. En effet, le filtrage du champ de vitesse est non négligeable à proximité de la paroi où la vitesse est susceptible de varier rapidement.

Bien que le processus de mesure par IRM ait été approximé linéairement pour simuler des données IRM de flux, il n'a jamais été pris en compte pour le calcul du cisaillement à la paroi. La formulation du problème d'ajustement de la vitesse ne permet pas parfois d'intégrer simplement le filtre IRM (Stalder et al., 2008; Oyre et al., 1998; Barker et al.,

2. A contrario, dans le cas de données IRM anatomiques, le modèle direct de l'IRM est linéaire.

2010; Petersson et al., 2012; Potters et al., 2014). D'autres solutions (Sotelo et al., 2016; Piatti et al., 2017; Köhler et al., 2001) auraient pu le prendre en compte car la modélisation s'appuie sur un support 3D.

Le filtre moyennant introduit par Cibis et al. (2014) a été conçu pour créer un effet de volume partiel sur des données synthétiques. La Figure 6.2 illustre la démarche. Chaque voxel est subdivisé en  $n_{sv} \times n_{sv} \times n_{sv}$  avec  $n_{sv} = 6$  soit  $N_{sv} = n_{sv}^3 = 216$  sous-voxels. Le champ de vitesse de référence est évalué en chacun de ces sous-voxels. Enfin, la vitesse filtrée est obtenue par moyenne de ces  $N_{sv}$  sous-voxels composante par composante.

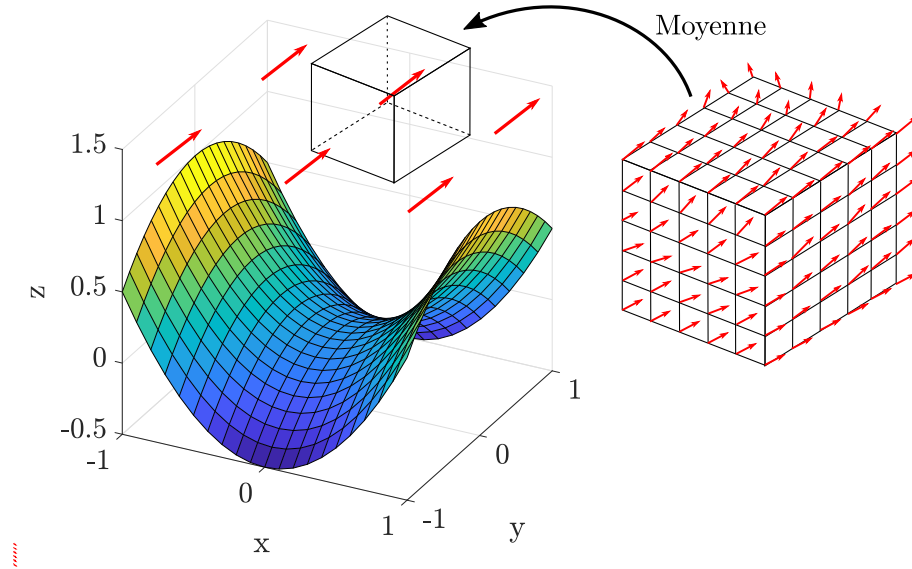


FIGURE 6.2. – Schéma d'application du filtre moyennant.

Dans le cadre des problèmes inverses, ce filtre s'applique à la vitesse à estimer ou bien à un modèle paramétrique. Plus précisément, la vitesse filtrée est calculée ainsi :

$$\begin{cases} \vec{v}_f = \sum_{i,j,k=1}^{n_{sv}, n_{sv}, n_{sv}} h_{ijk} \times \vec{v}_{\text{modèle}} \left( x + (i - i_c) \frac{\Delta x}{5}, y + (j - j_c) \frac{\Delta y}{5}, \tilde{z} + (k - k_c) \frac{\Delta z}{5}; \gamma \right) \\ \text{avec } \vec{v}_{\text{modèle}} = \vec{0} \text{ si } \tilde{z} + (k - k_c) \frac{\Delta z}{5} < 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

avec  $i_c = j_c = k_c = 3, 5$  et  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  la résolution de la grille d'acquisition. Le choix du noyau moyennant fixe la valeur de  $h_{ijk}$  à  $\frac{1}{N_{sv}}$  quel que soit  $i, j$  ou  $k$ . Toutefois, la méthodologie est similaire si le noyau est différent.

A ce jour, il n'y pas d'études spécifiquement dédiées à la forme du filtre. La démarche actuelle est empirique à travers la comparaison de différents modèles de filtre. Par ailleurs, les modalités d'une acquisition peut varier significativement avec la résolution et la taille du domaine d'acquisition, l'accélération multi-antenne et l'algorithme de reconstruction associé, la vitesse d'encodage, etc. La connaissance précise du modèle direct de l'IRM de flux 4D est donc un problème difficile en soit.

### 6.3. Démarche proposée

La démarche proposée dans cette section est formulée en considérant les précédents modèles de vitesse et une mesure d'adéquation aux données pour deux types de norme. En raison des hypothèses de travail réalisées précédemment, le problème (6.1) peut être réécrit sous une forme simplifiée :

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_v}} \left\{ \Phi_W \left( \mathbf{u} - \mathbf{H} \mathbf{v}_{\text{modèle}}(\gamma) \right) \right\} \quad (6.12)$$

avec  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_x^T, \mathbf{u}_y^T, \mathbf{u}_z^T]^T$  le vecteur des données de vitesse,  $\mathbf{H}$  la matrice appliquant le filtre IRM moyennant,  $\mathbf{v}_{\text{modèle}}$  le vecteur d'un modèle de vitesse et  $N_v$  le nombre de paramètres des polynômes.

Plus précisément,  $N_d$  vecteurs de vitesse sont sélectionnés dans le voisinage du point d'intérêt. Les positions de ces mesures sont concaténées dans trois vecteurs :  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ . Le même ordonnancement est utilisé pour concaténer chacune des composantes de la vitesse dans les vecteurs :  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$ . Par conséquent, chacun de ces vecteurs sont de taille  $(N_d \times 1)$  alors que  $\mathbf{u}$  a comme dimension :  $(3N_d \times 1)$ .

**Filtre IRM :** La taille du vecteur  $\mathbf{v}_{\text{modèle}}$  dépend du filtre IRM et donc de la matrice  $\mathbf{H}$ . Si celui-ci est ignoré alors la matrice  $\mathbf{H}$  peut être remplacée par l'identité et donc  $\mathbf{v}_{\text{modèle}}$  a la même taille que  $\mathbf{u}$ . Si l'approximation par filtre moyennant est appliquée, la matrice  $\mathbf{H}$  n'est plus carrée mais de taille  $(3N_d \times 3N_d N_{sv})$ . En effet, le modèle paramétrique doit être évalué  $N_{sv}$  fois à proximité du point de mesure considéré. Ainsi,  $\mathbf{H}$  est une matrice diagonale par blocs diagonaux telle que :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & & \\ & \mathbf{H}_0 & \\ & & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{h}_0 \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{H}_0$  de taille  $(N_d \times N_d N_{sv})$  et  $\mathbf{h}_0 = [1/N_{sv} \cdots 1/N_{sv}]$  de taille  $(1 \times N_{sv})$  si les  $N_{sv}$  sous-voxels sont dans le domaine fluide. Les colonnes associées aux sous-voxels extérieurs au domaine fluide sont mis à zéro pour être conforme à la définition (6.11).

**Modèle de vitesse :** Le vecteur  $\mathbf{v}_{\text{modèle}}$  contient l'évaluation d'un modèle paramétrique pour tous les sous-voxels de chaque point de mesure. En pratique, on définit les vecteurs  $\boldsymbol{\delta}_x$ ,  $\boldsymbol{\delta}_y$  et  $\boldsymbol{\delta}_z$  contenant les positions des sous-voxels relativement au centre du noyau. La formulation matricielle de  $\mathbf{v}_{\text{modèle}}$  dépend du modèle choisi :  $\mathbf{v}_{\text{lin}}$  pour un modèle linéaire (voir la Section 6.1.1),  $\mathbf{v}_{\text{sep}}$  pour un modèle à fonctions séparables univariées (voir la Section 6.1.2) et  $\mathbf{v}_{\text{inc}}$  pour un modèle linéaire et incompressible (voir la Section 6.1.3). Chacun de ces modèles exploite le changement de variable (4.7) qui s'écrit sous forme matricielle :

$$d\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \vdots \\ dz_i \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ dx_i & dy_i & dx_i dy_i & dx_i^2 & dy_i^2 & dx_i^2 dy_i & dx_i dy_i^2 & dx_i^3 & dy_i^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

avec  $dx_i = \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_x$ ,  $dy_i = \mathbf{y}_i + \boldsymbol{\delta}_y$  et  $dz_i = \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\delta}_z$  pour  $i \in [1, \dots, N_d]$ .

Les modèles linéaire  $\mathbf{v}_{\text{lin}}$  et incompressible  $\mathbf{v}_{\text{inc}}$  s'obtiennent à travers un simple produit

matrice vecteur tel que :

$$\mathbf{v}_{\text{lin}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{inc}} &= \mathbf{M}\boldsymbol{\gamma}_{\text{inc}} \\ &= \mathbf{M}\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (6.14)$$

avec  $\mathbf{M}$  une matrice diagonale par blocs :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & & \\ & \mathbf{M}_0 & \\ & & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{M}_0$  la matrice de Vandermonde de support 3D multipliée par  $\text{diag}\{d\tilde{\mathbf{z}}\}$  et d'ordre  $L$  :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d\tilde{z}_k & d\tilde{z}_k d\mathbf{x}_k & d\tilde{z}_k d\mathbf{y}_k & d\tilde{z}_k^2 & \cdots & d\tilde{z}_k d\mathbf{x}_k^L & d\tilde{z}_k d\mathbf{y}_k^L & d\tilde{z}_k^{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

pour  $k \in [1, \dots, N_d N_{\text{sv}}]$ .

Le modèle à fonctions séparables univariées est tri-linéaire et peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{v}_{\text{sep}} = (\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\gamma}_1) \circ (\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\gamma}_2) \circ (\mathbf{D}_z \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\gamma}_3) \quad (6.15)$$

avec  $\circ$  le produit de Hadamard,  $\mathbf{D}_z = \text{diag}\{\text{diag}\{d\tilde{\mathbf{z}}\}, \text{diag}\{d\tilde{\mathbf{z}}\}, \text{diag}\{d\tilde{\mathbf{z}}\}\}$  et  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  et  $\mathbf{M}_3$  des matrices diagonales par blocs :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x,1} & & \\ & \mathbf{M}_{y,1} & \\ & & \mathbf{M}_{z,1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x,2} & & \\ & \mathbf{M}_{y,2} & \\ & & \mathbf{M}_{z,2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x,3} & & \\ & \mathbf{M}_{y,3} & \\ & & \mathbf{M}_{z,3} \end{bmatrix}$$

Les matrices  $\mathbf{M}_{k,l}$  avec  $k \in \{x, y, z\}$  et  $l \in [1, 2, 3]$  sont des matrices de Vandermonde 1D telles que  $l$  définit la variable du polynôme univarié ( $x$  pour  $l = 1$ ,  $y$  pour  $l = 2$  et  $\tilde{z}$  pour  $l = 3$ ).

**Pondération :** La fonction  $\Phi_W$  du problème (6.12) définit à la fois l'hypothèse de distribution statistique de l'erreur d'estimation et la pondération relative entre les données. Dans la littérature, le poids relatif entre les différents vecteurs n'est pas considéré. Un vecteur proche de la paroi contribue autant à la modélisation du champ de vitesse qu'un vecteur au centre du vaisseau. En raison du volume partiel, les voxels à proximité de la paroi sont potentiellement plus biaisés. Réduire la contribution de ces voxels permet une certaine robustesse. Or, le phénomène de cisaillement est local et s'explique principalement grâce au vecteur proche du bord. Ainsi, la pondération proposée, quel que soit le modèle de vitesse, s'inspire des travaux de [Ridel et al. \(2015\)](#) afin de prendre en compte une distance  $h$  mais aussi le signal anatomique  $Mag$  :

$$\begin{cases} w(h) = Mag \times \left(1 - \left(\frac{h}{R}\right)^2\right)^4 & \text{si } 0 < h < R \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.16)$$

La Figure 6.3 illustre l'évolution de la pondération (6.16) en fonction de la distance  $h$  pour une aimantation unitaire. Contrairement à une pondération inverse à la distance,  $w(h)$  instaure une variation significative du poids au sein de la zone d'intérêt. Par ailleurs, la pondération basée sur une distance au point d'intérêt peut favoriser une donnée particulièrement bruitée et ainsi dégrader la modélisation du champ de vitesse. Une pondération s'appuyant sur la distance verticale  $\tilde{z}$  à la paroi permet de répartir le poids sur différentes données spatialement proches du bord. Le faible degré de liberté pour la modélisation du champ de vitesse et un poids équivalent sur plusieurs données limitent alors l'effet du bruit.

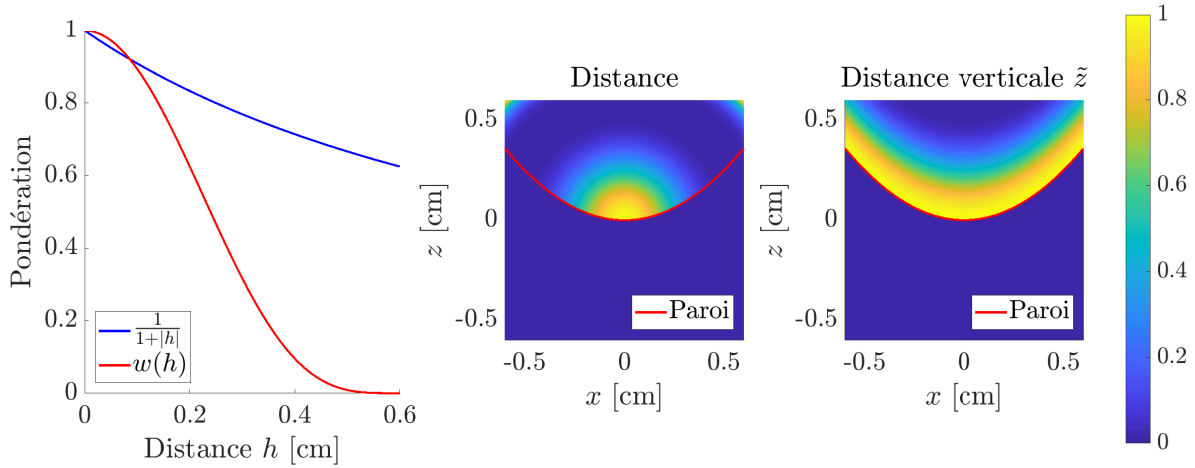


FIGURE 6.3. – Illustration 1D et 2D du choix de pondération.

**Norme :** La distribution du bruit est souvent supposée gaussienne. Selon Andersen & Kirsch (1996), si le signal anatomique est suffisamment élevé par rapport au bruit alors la distribution peut être supposée gaussienne. On définit le terme d'adéquation aux données comme la somme pondérée de la norme du vecteur d'erreur en chaque point entre la vitesse modélisée et la donnée. Plus précisément, on définit les vecteurs d'erreur entre les données et le modèle composante par composante :  $\mathbf{r}_x$ ,  $\mathbf{r}_y$  et  $\mathbf{r}_z$ . La norme  $\Phi_W$  à minimiser s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi_W(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times (\mathbf{r}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times \left( \sqrt{\mathbf{r}_{x_i}^2 + \mathbf{r}_{y_i}^2 + \mathbf{r}_{z_i}^2} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times \left( \mathbf{r}_{x_i}^2 + \mathbf{r}_{y_i}^2 + \mathbf{r}_{z_i}^2 \right)\end{aligned}$$

avec  $w_i$  le poids associé à la  $i^{\text{ième}}$  donnée.

Or, la modélisation du champ de vitesse peut s'avérer imparfaite pour certains cas spécifiques. Par exemple, la présence d'une sténose ou d'un coude peut créer un phénomène de recirculation comme illustré par la Figure 6.4. La dynamique et la complexité du champ de vitesse y deviennent particulièrement élevées. Certaines vitesses peuvent être sélectionnées pour leur proximité au point d'intérêt alors qu'elles sont de norme beaucoup

plus élevée. Ces vecteurs peuvent avoir un effet d'attraction du modèle de vitesse tel que la dynamique proche paroi est grossièrement approximée<sup>3</sup>.

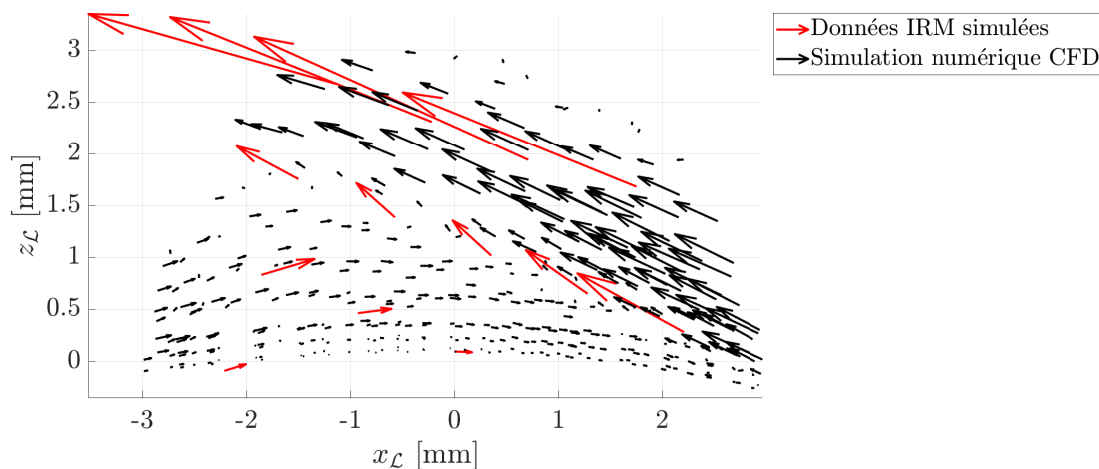


FIGURE 6.4. – Cas particulier de recirculation (carotide N°4 - point d'intérêt sur la Figure 8.8) avec en rouge les données de vitesse sélectionnées et noir le champ de vitesse référence établi par simulation numérique des fluides.

Ainsi, il serait préférable de négliger automatiquement ces vecteurs. Pour ce faire, l'hypothèse de bruit est modifiée pour prendre en compte une erreur de modélisation. La norme de Huber est particulièrement adaptée dans ce contexte. Comme l'illustre la Figure 6.5, la norme de Huber a un comportement quadratique en dessous d'un certain seuil  $\varepsilon$  et linéaire au-delà de ce seuil. Ainsi, le résidu  $r_i$  associé à une donnée incohérente avec le modèle de vitesse est inclus dans le terme d'adéquation aux données avec un poids linéaire et non quadratique. Cette norme est donc plus robuste aux erreurs de modélisation. La norme de Huber conserve un comportement quadratique pour les faibles résidus. Connaissant la valeur de l'écart-type *a priori* sur la vitesse, il est raisonnable de fixer le paramètre  $\varepsilon$  égale à  $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{V_{enc}}{RSB}$  (voir la Section 2.2.1.2).

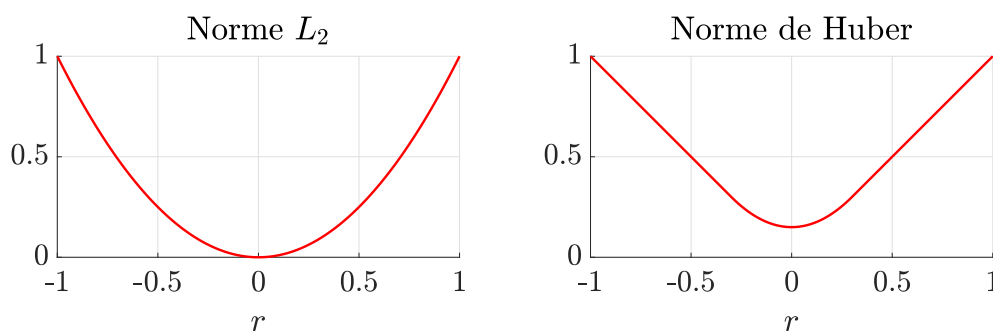


FIGURE 6.5. – Illustration des normes  $L_2$  et de Huber ( $\varepsilon = 0.3$ ).

Par conséquent, il est nécessaire d'appliquer la norme de Huber  $g(\cdot)$  sur la norme

3. Un outil graphique *Matlab* a été spécifiquement réalisé pour étudier l'ajustement du modèle de vitesse 3D.



du vecteur d'erreur. La norme  $\Phi_W$  s'écrit alors :

$$\Phi_W(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times g(\mathbf{r}_i)$$

avec

$$g(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2\varepsilon} + \frac{|\varepsilon|}{2} & \text{si } |r| \leq \varepsilon \\ |r| & \text{si } |r| > \varepsilon \end{cases}$$

Les solutions sont données pour une norme  $L_2$  avec un modèle de vitesse linéaire et incompressible puis à fonctions séparables univariées dans la sous section suivante. Ensuite, la stratégie d'optimisation est décrite pour une norme de Huber pour les différents modèles de vitesse proposés.

## 6.3.1. Norme L2

### 6.3.1.1. Modèle linéaire et version incompressible

Lorsque le problème à résoudre emploie une norme  $L_2$  et un modèle linéaire, il s'agit d'un problème de moindres carrés dont la solution exacte est explicite (Idier, 2001). Le problème pour le modèle de vitesse linéaire  $\mathbf{v}_{\text{lin}}$  s'écrit sous forme matricielle tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_v}} \{(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{W}(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma})\} \quad (6.17)$$

avec  $\mathbf{W}$  une matrice diagonale contenant la pondération des données  $w(\cdot)$  décrite précédemment. Le minimum du critère associé au problème (6.17) est obtenu en annulant son gradient par rapport au vecteur d'état  $\boldsymbol{\gamma}$ . Il en résulte les équations normales fournissant une solution exacte au problème de moindres carrés linéaire sous la condition que  $\mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{M}$  soit inversible. Le vecteur d'état  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  optimal au sens de la norme  $L_2$  s'obtient alors ainsi :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (6.18)$$

Dans le cas du modèle de vitesse incompressible, le problème est similaire à l'exception du support de  $\boldsymbol{\gamma}$  qui doit appartenir à  $\mathcal{M}_f$ . Suivant la Section 6.1.3, le problème :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \arg \min_{\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{M}_f} \{(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{W}(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\boldsymbol{\gamma})\} \quad (6.19)$$

est équivalent à :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_v}} \{(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{W}(\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha})\} \quad (6.20)$$

Comme précédemment, la solution exacte de ce problème est connue :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{K}^T \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{u} \quad (6.21)$$

et le vecteur de paramètres  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{inc}}$  se retrouve par le calcul :  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{inc}} = \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ .

### 6.3.1.2. Modèle à fonctions séparables univariées

Le modèle de vitesse à fonctions séparables univariées est tri-linéaire. Le problème à résoudre, avec une norme  $L_2$ , est le suivant :

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_v}} \left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbf{u} - \mathbf{H}((\mathbf{M}_1 \gamma_1) \circ (\mathbf{M}_2 \gamma_2) \circ (\mathbf{D}_z \mathbf{M}_3 \gamma_3)) \right)^T \\ \mathbf{W} \left( \mathbf{u} - \mathbf{H}((\mathbf{M}_1 \gamma_1) \circ (\mathbf{M}_2 \gamma_2) \circ (\mathbf{D}_z \mathbf{M}_3 \gamma_3)) \right) \end{array} \right\} \quad (6.22)$$

La structure de ce problème est particulière car les vecteurs de paramètres  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  peuvent être traité linéairement s'ils sont pris indépendamment. Ainsi, trois sous-problèmes linéaires estimant les vecteurs de paramètres  $\gamma_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  peuvent être formulés sous la forme :

$$\hat{\gamma}_i = \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_{v,i}}} \left\{ \left( \mathbf{u} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{M}}_i \gamma_i \right)^T \mathbf{W} \left( \mathbf{u} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{M}}_i \gamma_i \right) \right\} \quad (6.23)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \text{diag}\{(\mathbf{M}_2 \gamma_2) \circ (\mathbf{D}_z \mathbf{M}_3 \gamma_3)\} \mathbf{M}_1$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 = \text{diag}\{(\mathbf{M}_1 \gamma_1) \circ (\mathbf{D}_z \mathbf{M}_3 \gamma_3)\} \mathbf{M}_2$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_3 = \text{diag}\{(\mathbf{M}_1 \gamma_1) \circ (\mathbf{M}_2 \gamma_2)\} \mathbf{D}_z \mathbf{M}_3$$

Or, chacune des matrices  $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_3$  dépend de deux vecteurs d'état devant être connus. Le processus d'optimisation doit alors estimer itérativement  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$ . Après chaque résolution de sous-problème, les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_2$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_3$  sont mises à jour avec le dernier état des vecteurs de paramètres. Plus précisément, le processus itératif employé pour résoudre le problème (6.22) est décrit par l'algorithme de descente par blocs (1). Cet algorithme permet d'atteindre une solution pour environ 3 à 6 itérations.

---

**Algorithme 1** : Ajustement d'un modèle de vitesse à fonctions séparables univariées localement autour d'un point d'intérêt  $\vec{x}_{\delta\Omega}$

---

**Données** : Champ de vitesse local autour d'un point d'intérêt

**Résultat** : Vecteur des paramètres  $\hat{\gamma}$  du modèle local

- 1 Initialisation de l'itération :  $j \leftarrow 0$  ;
  - 2 Définition du maximum d'itération :  $j_{\max} \leftarrow 100$  ;
  - 3 Définition du seuil d'arrêt :  $\epsilon \leftarrow 10^{-5}$  ;
  - 4 Initialisation de la condition d'arrêt  $STOP \leftarrow \text{Faux}$  ;
  - 5 Initialisation du vecteur de paramètre (vecteur non nul) :  $\gamma^{(0)} = (\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)}, \gamma_3^{(0)})$  ;
  - 6 **tant que**  $STOP = \text{Faux}$  **faire**
  - 7     Solution du problème (6.23) pour  $i = 1$  ;
  - 8     Solution du problème (6.23) pour  $i = 2$  ;
  - 9     Solution du problème (6.23) pour  $i = 3$  ;
  - 10      $STOP \leftarrow \left\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{M}}_3^{(j)} \hat{\gamma}_3^{(j+1)} \right\|_2^2 - \left\| \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{M}}_1^{(j)} \hat{\gamma}_1^{(j)} \right\|_2^2 < \epsilon \ \& \ j < j_{\max}$  ;
  - 11     Mise à jour de  $j$  :  $j \leftarrow j + 1$  ;
  - 12 **fin**
  - 13 Préparation du résultat :  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1^{(j)T}, \hat{\gamma}_2^{(j)T}, \hat{\gamma}_3^{(j)T})^T$
-

### 6.3.2. Norme de Huber

La stratégie d'optimisation mise en place pour minimiser les critères formulés avec une norme de Huber s'appuie sur la minimisation par d'approximation majorante. La norme de Huber se comporte comme une norme  $L_1$  pour un résidu supérieur à un paramètre  $\varepsilon$ . La minimisation par approximation majorante nécessite la définition d'une fonction  $\Psi_W$  majorant la norme  $\Phi_W$ . Suivant le cadre des moindres carrés re-pondérés (R. H. Byrd, 1979), nous avons choisi une fonction majorante quadratique. Plus précisément, une fonction quadrique  $m(r, r_0)$  est utilisée comme approximation majorante de la fonction  $g(r)$  à proximité du résidu  $r_0$ . La Figure 6.6 illustre une fonction  $m(r, r_0)$  définie de manière à majorer  $g(r)$  en tout point.

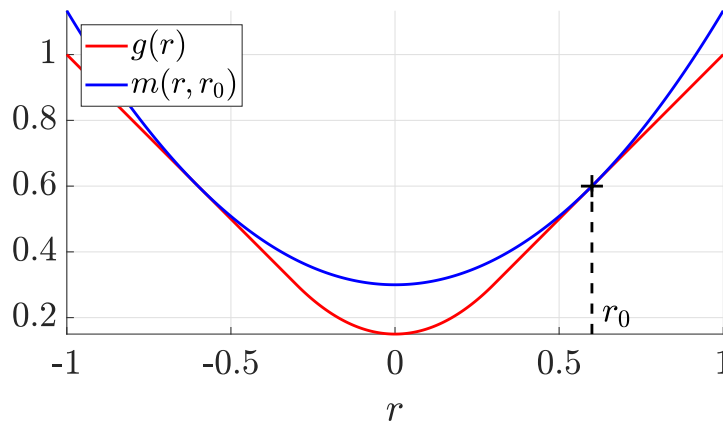


FIGURE 6.6. – Schéma montrant que la fonction  $m(r, r_0)$  est la majorante de  $g(r)$ .

En pratique, la majoration de  $\Phi_W$  par  $\Psi_W$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_W(\mathbf{r}) &\leq \Psi_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \\ \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times g(\mathbf{r}_i) &\leq \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times m(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{0,i}) \\ \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times g(\mathbf{r}_i) &\leq \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times \left( \frac{\mathbf{r}_i^2}{2|\mathbf{r}_{0,i}|} + \frac{|\mathbf{r}_{0,i}|}{2} \right) \end{aligned}$$

avec  $|\mathbf{r}_{0,i}|$  la valeur absolue du  $i^{\text{ème}}$  résidu à l'état courant d'un processus itératif. Ainsi, la solution au problème (6.12) avec une norme de Huber revient à résoudre le problème de moindres carrés suivant :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_v,1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_d} w_i \times \left( \frac{\mathbf{r}_i(\gamma)^2}{2|\mathbf{r}_{0,i}|} + \frac{|\mathbf{r}_{0,i}|}{2} \right) \right\} \\ &= \arg \min_{\gamma \in \mathbb{R}^{N_v,1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_d} \frac{w_i}{2|\mathbf{r}_{0,i}|} \times \mathbf{r}_i(\gamma)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

plusieurs fois en mettant à jour le résidu  $\mathbf{r}_0$ .

Le vecteur  $\mathbf{r}_0$  est initialisé avec le résidu de la solution de moindres carrés, présentée dans la sous section précédente, pour le même modèle de vitesse. Le processus itératif, détaillé dans l'algorithme (2), résout le problème de moindres carrés (6.24) en mettant

à jour la pondération jusqu'à la convergence du résidu. Cet algorithme s'applique de la même manière quel que soit le modèle de vitesse. Il s'appuie sur les solutions des moindres carrés, présentées dans la Section 6.3.1, en adaptant la pondération.

---

**Algorithme 2** : Ajustement d'un modèle de vitesse avec une norme de Huber localement autour d'un point d'intérêt  $\vec{x}_{\delta\Omega}$

---

**Données** : Champ de vitesse local autour d'un point d'intérêt

**Résultat** : Vecteur des paramètres  $\hat{\gamma}$  du modèle local

- 1 Initialisation de l'itération :  $j \leftarrow 0$  ;
  - 2 Définition du maximum d'itération :  $j_{\max} \leftarrow 100$  ;
  - 3 Définition du seuil d'arrêt :  $\epsilon \leftarrow 10^{-5}$  ;
  - 4 Définition de la capacité d'innovation :  $\alpha \leftarrow 0.6$  ;
  - 5 Initialisation de la condition d'arrêt  $STOP \leftarrow Faux$  ;
  - 6 Initialisation du vecteur de paramètre  $\gamma^{(0)}$  à partir d'une formulation avec une norme  $L_2$  du problème (6.12) ;
  - 7 Calcul du vecteur de résidu  $\mathbf{r}_0^{(0)}$  ;
  - 8 **tant que**  $STOP = Faux$  **faire**
    - 9 Mise à jour de la pondération :  $\mathbf{W}_r = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2|\mathbf{r}_0^{(j)}|} \right\} \mathbf{W}$  ;
    - 10 Résolution du problème (6.12) avec une norme  $L_2$  et la matrice de poids  $\mathbf{W}_r$  pour le modèle de vitesse choisi (voir la Section 6.3.1) ;
    - 11 Mise à jour du résidu :  $\mathbf{r}_0^{(j+1)} \leftarrow \alpha \mathbf{r}_0^{(j)} + (1 - \alpha) \mathbf{r}_0^{(j-1)}$  ;
    - 12 Seuillage des résidus : **si**  $\mathbf{r}_{0,i}^{(j+1)} \leq \epsilon$  **alors**
      - 13  $\mathbf{r}_{0,i}^{(j+1)} = \epsilon$
    - 14 **fin**
    - 15  $STOP \leftarrow \|\mathbf{r}_0^{(j+1)} - \mathbf{r}_0^{(j)}\|_2^2 < \epsilon \ \& \ j < j_{\max}$  ;
    - 16 Mise à jour de  $j$  :  $j \leftarrow j + 1$  ;
  - 17 **fin**
  - 18 Préparation du résultat :  $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^{(j)}$  ;
-

## 6.4. Synthèse

Le cisaillement à la paroi est très dépendant du comportement locale de la vitesse. En particulier, il est fonction des dérivées spatiales du champ de vitesse. Dans ce contexte, le modèle de vitesse ne doit pas seulement bien s'ajuster aux données mais aussi intégrer des informations *a priori* pour régulariser les dérivées spatiales. Dans cet esprit, j'ai proposé un modèle de vitesse imposant la nullité de la vitesse sur une surface paramétrique et non pas seulement en un point (Pettersson et al., 2012; Potters et al., 2014). Celui-ci est de forme polynômiale. Il dépend de ses paramètres de façon linéaire dans certaines variantes, ou bien tri-linéaire dans une autre. De plus, il permet la formulation d'un champ de vitesse incompressible linéaire (voir la Section 6.1.3) ainsi que la prise en compte du filtre IRM. Ce dernier et la formulation d'un problème incompressible n'ont pas encore été employés dans la littérature. Enfin, deux types de norme ont été considérés ( $L_2$  et Huber) pour mesurer l'adéquation aux données.

Enfin, le modèle de vitesse proposé ne dépend que de la position spatiale locale à un instant donné. De futures investigations pourraient être portées sur l'ajout du temps dans les variables explicatives du modèle de vitesse. Par exemple, il pourrait être formulé ainsi :

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}(x, y, z, t) \times P_x(x, y, \mathcal{B}(x, y, z, t); \gamma_x) \\ \mathcal{B}(x, y, z, t) \times P_y(x, y, \mathcal{B}(x, y, z, t); \gamma_y) \\ \mathcal{B}(x, y, z, t) \times P_z(x, y, \mathcal{B}(x, y, z, t); \gamma_z) \end{bmatrix}_{\mathcal{L}} \quad (6.25)$$

avec  $\mathcal{B}$  une fonction de modélisation de la paroi. Le modèle de paroi décrirait le comportement de la paroi autour d'un point et d'un temps d'intérêt. Le modèle de vitesse pourrait évoluer selon le temps et donc permettre son application à une segmentation mobile dans le temps. Cette perspective de développement peut tout à fait se combiner à celle du chapitre précédent sur la modélisation de la paroi avec un modèle paramétrique cubique non dégénéré. Cette formulation n'exclut pas la possibilité d'appliquer la contrainte d'incompressibilité dans l'esprit de la Section 6.1.3.

# Chapitre 7

## Amélioration de la quantification du cisaillement

La modélisation du champ de vitesse, détaillée au chapitre précédent, permet d'ores et déjà l'estimation du cisaillement à la paroi. En effet, les différents modèles de vitesse sont paramétriques et peuvent être dérivés analytiquement puis évalués sur la paroi (voir la Section 4.3.3). Or, l'estimation du cisaillement à la paroi demeure sensible à plusieurs facteurs. La Section 7.1 traite de l'impact de deux sources d'erreurs principales : l'échantillonnage du champ de vitesse vis-à-vis de la paroi et le bruit de mesure. Nous proposons dans ce chapitre d'exploiter la cohérence locale du champ de vitesse pour améliorer la quantification du cisaillement. La Section 7.2 présente la stratégie mise en œuvre pour régulariser le cisaillement à la paroi. Elle s'appuie sur de multiples estimations du cisaillement en un point d'intérêt. Ces estimations sont obtenues en ajustant le champ de vitesse autour de différents points voisins, puis en évaluant le cisaillement au point d'intérêt. En procédant ainsi, deux variantes de traitement *a posteriori* sont proposées. La première approche, développée dans la Section 7.3, est basée sur un estimateur de moyenne pondéré. La seconde prend en compte d'éventuelles estimations aberrantes du cisaillement issues des points voisins, via l'utilisation d'une norme de Huber (voir la Section 7.4).

### 7.1. Sources d'erreur de quantification du cisaillement à la paroi

Les modèles de vitesse polynômiaux ont l'avantage d'être plus adaptés pour des cisaillements de norme élevée mais peuvent aisément surestimer ceux de norme faible (Köhler et al., 2001; Petersson et al., 2012). En effet, ils sont particulièrement sensibles à deux éléments : l'échantillonnage des vecteurs vitesse vis-à-vis de la paroi et le niveau de bruit. Généralement, la paroi est représentée par un ensemble de point, une segmentation, n'appartenant pas nécessairement à la grille d'acquisition. Par conséquent, tout point de la paroi est à une distance inférieure ou égale à la résolution du plus proche vecteur vitesse sur la grille. En principe, cela crée un environnement favorable à l'estimation de la dérivée pariétale du champ de vitesse. Cependant, le pouvoir de quantification de la dérivée pariétale n'est pas le même pour tous les points de paroi. En particulier, un point d'intérêt avec un vecteur vitesse plus proche de la paroi présentera une meilleure capacité de quantification. De plus, la nullité de la vitesse à la paroi fixe un nœud du modèle polynômial. Ce dernier est donc sensible à l'échantillonnage du champ de vitesse par rapport au point d'intérêt. La Figure 7.1 illustre le cisaillement pour différents points

d'intérêt en fonction du temps estimé sur des données IRM synthétiques sans bruit pour l'écoulement de Womersley (graphe de gauche). Pour rappel, le cisaillement à la paroi théorique, en noir, est identique quel que soit la position sur la paroi. Les courbes de cisaillement à la paroi sont colorés par rapport aux points d'intérêt représentés sur le schéma de droite. Ces résultats sont obtenus avec la solution (6.18) du problème de moindres carrés avec un modèle polynômial linéaire d'ordre 2. On observe en particulier que le point 1 présente de moins bonnes performances de quantification à cause de son éloignement aux plus proches vecteurs vitesse (placés sur la grille en pointillé).

Ensuite, le niveau de bruit peut avoir un impact significatif. Les points d'intérêt proches de la grille de vitesse ont un pouvoir de quantification plus élevé. Ils sont pour les mêmes raisons plus sensibles à une erreur sur le champ de vitesse et en particulier sur les vecteurs vitesse à proximité de la paroi. Le choix, réalisé au Chapitre 6, d'une pondération favorisant les points proches de la paroi a permis de gagner en capacité de quantification. Cependant, cela a rendu la modélisation du champ de vitesse plus sensible aux erreurs sur les vecteurs proches paroi. La Figure 7.1, au centre, illustre le cisaillement en fonction du temps pour les mêmes points d'intérêt que précédemment mais sur des données IRM simulées avec un bruit gaussien de 20 dB (plus bas niveau de rapport signal sur bruit en IRM de flux 4D présenté à la Section 2.2.2). On observe que l'estimation du cisaillement à proximité de la systole (temps = 0,1 s) varie d'une amplitude similaire au cas sans bruit. Par ailleurs, l'estimation du cisaillement est bien plus perturbée durant la diastole (temps = [0,4; 1] s) car le champ de vitesse est de norme moins importante. Le rapport vitesse sur bruit est donc beaucoup moins favorable. On en déduit que l'effet lié à l'échantillonnage domine lorsque le niveau de bruit est faible et le cisaillement élevé, alors que le bruit a un effet particulièrement significatif pour les faibles valeurs de cisaillement.

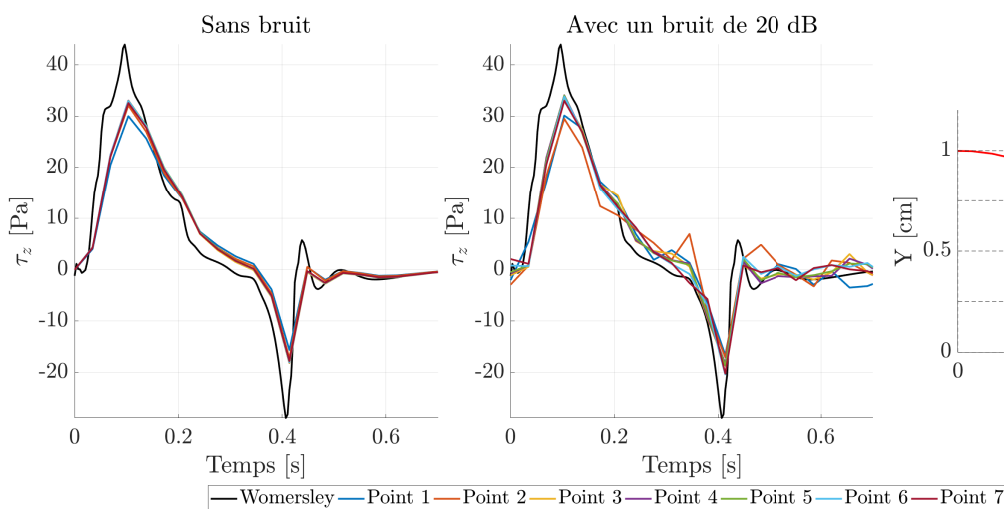


FIGURE 7.1. – Évaluation du cisaillement sur l'écoulement de Womersley pour différents points d'intérêt sur un arc du cylindre sur des données IRM synthétiques (2,5 mm ISO) sans bruit et avec un bruit de 20 dB.

## 7.2. Stratégie pour améliorer la quantification du cisaillement à la paroi

La modélisation du champ de vitesse, présentée au Chapitre 6, s'appuie sur la cohérence spatiale locale. Ce principe peut s'appliquer de la même manière lorsqu'il s'agit du cisaillement à la paroi. Or, la section précédente a montré que dans un contexte de résolution grossière et de mesure bruité, l'estimation du cisaillement peut manquer de cohérence localement.

La stratégie proposée s'appuie sur la variation des estimations du cisaillement. Certains points d'intérêt se trouvent dans une configuration d'échantillonnage favorable. Ils devraient permettre d'améliorer la quantification du cisaillement pour des points voisins de configuration moins favorable. Ainsi, la stratégie privilégiée repose sur l'estimation multiple du cisaillement en un point d'intérêt à partir de la modélisation du champ de vitesse de points voisins<sup>1</sup>. La Figure 7.2 illustre le principe en 2D. Le modèle de vitesse est ajusté en un point voisin (en bleu) du point d'intérêt (en rouge). La dérivation du modèle de vitesse permet d'avoir analytiquement l'expression du cisaillement en tout point de la paroi modélisée et donc sur le point d'intérêt rouge. Le cisaillement au point d'intérêt rouge est évalué à partir de la modélisation du champ de vitesse correspondant à la zone bleue. Cette procédure est répétée autant de fois qu'il y a de voisins au point d'intérêt. Ainsi, chaque point d'intérêt est associé à autant d'estimations du cisaillement qu'il a de points voisins.

Ces multiples estimations du cisaillement peuvent être traitées différemment. Deux variantes sont proposées dans les sections suivantes pour régulariser le cisaillement à la paroi.

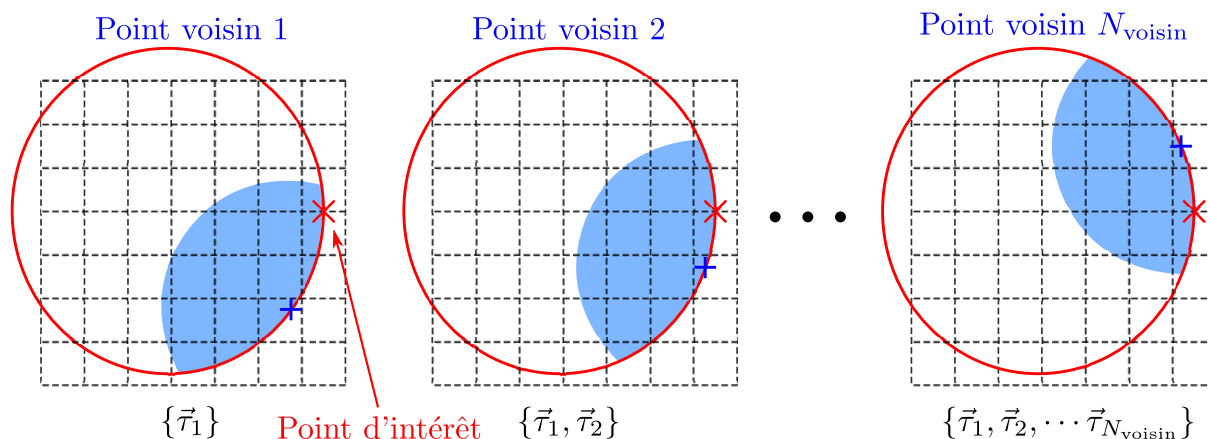


FIGURE 7.2. – Schéma représentant la stratégie permettant d'obtenir de multiples estimations du cisaillement en un point d'intérêt (en rouge) à partir de points voisins (en bleu).

## 7.3. Estimateur basé sur la norme quadratique

Dans un premier temps, un estimateur simple a été proposé. Celui-ci estime le cisaillement en un point d'intérêt sur la base d'une moyenne pondérée des cisaillements

1. La notion de point d'intérêt n'est plus associée au point auquel la vitesse est modélisée (un point bleu par exemple) mais auquel le cisaillement est estimé.



provenant de points voisins. L'estimation est réalisée indépendamment sur chaque point de la segmentation. La pondération est fonction de la distance entre le point d'intérêt et ses points voisins. Mathématiquement, l'estimateur proposé est la solution du problème suivant, pour un point d'intérêt donné :

$$\vec{\tau}_{\text{est}} = \arg \min_{\vec{\tau} \in \mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} w_i \|\vec{\tau}_i - \vec{\tau}\|_2^2 \right\} \quad (7.1)$$

avec  $\vec{\tau}_i$  l'estimé brute du  $i^{\text{ième}}$  voisin et  $w_i = w(\|\vec{x}_i - \vec{x}_{\text{pi}}\|_2)$  la pondération introduite à la Section 6.3 et dépendante de la distance au point d'intérêt de position  $\vec{x}_{\text{pi}}$ .

La solution du problème (7.1) est triviale car il s'agit de la moyenne pondérée appliquée indépendamment sur chaque composante. Plus précisément, la solution s'écrit :

$$\vec{\tau}_{\text{est}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} w_i \vec{\tau}_i}{\sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} w_i} \quad (7.2)$$

## 7.4. Estimateur basé sur la norme de Huber

L'estimateur (7.2) présenté précédemment permet d'obtenir une solution rapide et simple. Or, ce type d'approche, basé sur une norme quadratique, n'est pas robuste à d'éventuelles estimations aberrantes. Celles-ci peuvent apparaître dans plusieurs cas de figure. D'une part, un vecteur de vitesse en proche paroi particulièrement bruité, comme l'illustre la Figure 7.3, peut avoir un effet délétère. Ce cas de figure est hautement probable

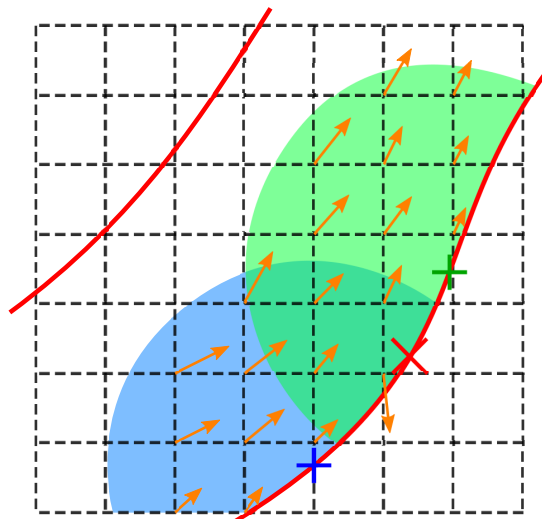


FIGURE 7.3. – Illustration représentant un cas de figure avec un vecteur de vitesse erroné et pouvant initier une mauvaise estimation du cisaillement. Le vecteur de vitesse proche du point d'intérêt en rouge est pris en compte dans la modélisation de vitesse des points voisins (en bleu et vert).

car la vitesse mesurée peut subir un effet de repliement si le signal anatomique associé à ce vecteur est faible. Or, le signal anatomique permet de distinguer les vaisseaux et par conséquent décroît significativement à proximité de la paroi. D'autre part, la présence de

recirculation au sein de l'écoulement, comme introduit à la Section 6.3, peut localement perturber l'estimation du cisaillement.

Par conséquent, un estimateur basé sur une norme plus robuste comme la norme de Huber peut être intéressant dans ce type de contexte. Un vecteur de cisaillement est considéré comme aberrant au sens de sa norme. Ainsi, la norme de Huber est appliquée à la norme du cisaillement. Le problème à résoudre s'écrit ainsi :

$$\vec{\tau}_{\text{est}} = \arg \min_{\vec{\tau} \in \mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} g(\|\vec{\tau}_i - \vec{\tau}\|_2) \right\} \quad (7.3)$$

avec :

$$g(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2\kappa} + \frac{|\kappa|}{2} & \text{si } |r| \leq \kappa \\ |r| & \text{si } |r| > \kappa \end{cases}$$

La stratégie d'optimisation est similaire à celle mise en place pour l'ajustement de vitesse (voir la Section 6.3.2). L'algorithme de minimisation par approximation majorante (Weiszfeld, 1937; R. H. Byrd, 1979) est un processus itératif détaillé dans l'algorithme 3. En particulier, il s'appuie sur des moindres carrés re-pondérés.

---

**Algorithme 3** : Estimation du cisaillement en un point d'intérêt à partir de l'évaluation du cisaillement provenant de points voisins.

---

**Données** : Multiples estimations du cisaillement en un point d'intérêt

**Résultat** : Vecteur de cisaillement  $\vec{\tau}_{\text{est}}$

- 1 Initialisation de l'itération :  $j \leftarrow 0$  ;
  - 2 Définition du maximum d'itération :  $j_{\text{max}} \leftarrow 40$  ;
  - 3 Définition du seuil d'arrêt :  $\kappa \leftarrow 10^{-3}$  ;
  - 4 Définition de la capacité d'innovation :  $\alpha \leftarrow 0.6$  ;
  - 5 Initialisation de la condition d'arrêt  $STOP \leftarrow \text{Faux}$  ;
  - 6 Initialisation du vecteur de cisaillement  $\vec{\tau}^{(0)}$  en prenant la médiane composante par composante ;
  - 7 Calcul du vecteur de résidu  $\mathbf{r}_0^{(0)}$  ;
  - 8 **tant que**  $STOP = \text{Faux}$  **faire**
  - 9     Mise à jour du vecteur de pondération :  $\mathbf{w}_r = 1/2|\mathbf{r}_0^{(j)}|$  ;
  - 10     Résolution du problème quadratique :  $\vec{\tau}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} \mathbf{w}_{r,i} \vec{\tau}_i}{\sum_{i=1}^{N_{\text{voisin}}} \mathbf{w}_{r,i}}$  ;
  - 11     Mise à jour du résidu :  $\mathbf{r}_0^{(j+1)} \leftarrow \alpha \mathbf{r}_0^{(j)} + (1 - \alpha) \mathbf{r}_0^{(j-1)}$  ;
  - 12     Seuillage des résidus : **si**  $\mathbf{r}_{0,i}^{(j+1)} \leq \kappa$  **alors**
  - 13         |  $\mathbf{r}_{0,i}^{(j+1)} = \kappa$
  - 14     **fin**
  - 15      $STOP \leftarrow \|\mathbf{r}_0^{(j+1)} - \mathbf{r}_0^{(j)}\|_2 < \kappa \ \& \ j < j_{\text{max}}$  ;
  - 16     Mise à jour de  $j$  :  $j \leftarrow j + 1$  ;
  - 17 **fin**
  - 18 Préparation du résultat :  $\vec{\tau}_{\text{est}} = \vec{\tau}^{(j)}$  ;
-

## 7.5. Synthèse

Dans cette section a été présenté l'impact de l'échantillonnage et du bruit sur la quantification du cisaillement pour l'écoulement de Womersley. Pour y remédier, une stratégie de régularisation *a posteriori* a été introduite. Celle-ci s'appuie sur de multiples estimations du cisaillement en un point d'intérêt à partir de la modélisation du champ de vitesse de points voisins. Enfin, deux propositions d'estimateurs ont été présentées.

Par ailleurs, la nécessité de régulariser le cisaillement *a posteriori* montre une certaine sensibilité du champ de vitesse aux perturbations. Une perspective de développement de l'algorithme PaLMA serait de s'appuyer sur l'ajustement de la vitesse simultanément pour tout les points d'intérêt avec un terme de régularisation spatial du cisaillement. Or, ce type de solution s'écarte de l'intention initiale ayant pour objectif de traiter tous les points d'intérêt séparément et ainsi avoir un coût de calcul allégé.

# Chapitre 8

## Étude de performance

Ce chapitre est dédié à l'étude de performance des estimateurs proposés du cisaillement à la paroi. Dans un premier temps, la Section 8.1 présente la méthode de validation. Celle-ci définit les critères de performance utilisés pour discriminer les différentes solutions, les écoulements étudiés avec les conditions de simulation puis un algorithme de référence pour l'estimation du cisaillement à la paroi (Potters et al., 2014).

Les Chapitres 6 et 7 ont présenté différents modèles et choix de normes. Par conséquent, il est possible de formuler de nombreuses variantes de l'algorithme proposé. La Section 8.2 est dédiée à la comparaison de ces variantes entre elles et avec l'estimateur de référence (Potters et al., 2014) dans un contexte bruité. La conclusion de cette section détermine la combinaison de choix de l'algorithme PaLMA.

Dans la littérature, l'étude de la robustesse d'estimateur de cisaillement à la paroi est réalisée sur deux sources d'erreur dominantes : le bruit et la qualité de la segmentation. Dans un premier temps, nous étudions la robustesse de la solution proposée PaLMA sur un intervalle de bruit plus large que celui présenté à la Section 2.2.2. Comme expliqué au Chapitre 2 dans la Section 2.2.1, le rapport signal sur bruit est directement lié à la résolution choisie. Par conséquent, nous observons aussi les performances de quantification suivant le rapport signal sur bruit pour une résolution plus fine avec 0,7 mm ISO. Enfin, l'étude de robustesse sur la segmentation est réalisée sur l'écoulement de Womersley au sein d'un tube cylindrique droit. Ces résultats font l'objet de la Section 8.3.

### 8.1. Méthode de validation

L'évaluation d'un estimateur dépend de plusieurs facteurs : le critère d'évaluation, le cas d'étude puis la comparaison à l'état de l'art. Le cisaillement à la paroi est un vecteur 3D évoluant dans l'espace et le temps. La Section 8.1.1 développera le choix de différents critères permettant de discriminer les approches. Ensuite, les écoulements en mécanique des fluides peuvent être plus ou moins complexes. Par conséquent, l'estimateur du cisaillement doit être analysé sur des écoulements représentatifs. Ce point sera discuté dans la Section 8.1.2. Enfin, l'algorithme proposé doit être comparé à l'état de l'art. Nous présenterons le choix d'une solution de référence ainsi que les bases de son fonctionnement dans la Section 8.1.3.

#### 8.1.1. Critères de performance

Le cisaillement à la paroi est un vecteur 3D dépendant des dérivées du champ de vitesse et de la normale à la paroi (voir la Section 4.1). Par nature, il évolue spatialement et

temporellement. Seuls certains écoulements ne respectent pas cette règle. Par exemple, les écoulements de Poiseuille et Womersley sont invariants spatialement et seul l'écoulement de Poiseuille est invariant temporellement.

Dans la littérature, différents indices de performance sont utilisés avec la moyenne, l'écart-type, la racine de la moyenne quadratique de l'erreur ou encore l'erreur angulaire. Par ailleurs, le caractère 3D du vecteur de cisaillement est parfois ignoré au profit de sa norme. Il n'y a pas de consensus clair sur le critère à adopter. On propose dans ce manuscrit d'utiliser cinq indices de performance permettant de prendre en compte ou non le caractère vectoriel de cisaillement, la corrélation statistique et l'erreur angulaire. De plus, les performances en terme de quantification sont normalisées de manière à comparer le gain pour des cisaillements d'amplitudes différentes. Plus précisément, on introduit les critères  $SER^{\text{mag}}$  et  $SER$  pour leurs noms anglophones : *Signal-to-Error Ratio in magnitude* et *Signal-to-Error Ratio*. Ces critères sont construits dans le même esprit qu'un rapport signal sur bruit dans lesquels le terme d'erreur est soit la norme de l'erreur en amplitude du cisaillement, soit la norme du vecteur d'erreur 3D. Ces critères représentent la capacité de quantification d'un estimateur du cisaillement. Ils sont formulés ainsi :

$$SER^{\text{mag}}(\vec{\tau}_{\text{est}}) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{\sum_{n=1}^{N_s} \|\vec{\tau}_n\|_2^2}{\sum_{n=1}^{N_s} \left| \|\vec{\tau}_n\|_2 - \|\vec{\tau}_{\text{est},n}\|_2 \right|^2} \right) \quad (8.1)$$

$$SER(\vec{\tau}_{\text{est}}) = 10 \times \log_{10} \left( \frac{\sum_{n=1}^{N_s} \|\vec{\tau}_n\|_2^2}{\sum_{n=1}^{N_s} \|\vec{\tau}_n - \vec{\tau}_{\text{est},n}\|_2^2} \right) \quad (8.2)$$

avec  $N_s$  le nombre de points de la paroi à considérer. Ce calcul peut être réalisé pour un unique temps du cycle cardiaque ou sur un sous-ensemble de points de paroi.

Ensuite, nous calculons la ressemblance statistique avec la corrélation de Pearson appliquée directement à la norme du cisaillement. Ce critère ne permet pas d'établir la capacité de quantification mais donne un indice qualitatif de la ressemblance entre l'estimation du cisaillement et la référence. La corrélation de Pearson s'écrit :

$$r(\vec{\tau}_{\text{est}}) = \frac{1}{N_s \sigma_{\|\vec{\tau}\|_2} \sigma_{\|\vec{\tau}_{\text{est}}\|_2}} \times \sum_{n=1}^{N_s} (\|\vec{\tau}_n\|_2 - \|\vec{\tau}^*\|_2) \times (\|\vec{\tau}_{\text{est},n}\|_2 - \|\vec{\tau}_{\text{est}}^*\|_2) \quad (8.3)$$

avec  $\|\vec{\tau}^*\|_2$  et  $\sigma_{\|\vec{\tau}\|_2}$  la moyenne et l'écart-type de la norme du cisaillement de référence puis  $\|\vec{\tau}_{\text{est}}^*\|_2$  et  $\sigma_{\|\vec{\tau}_{\text{est}}\|_2}$  la moyenne et l'écart-type de la norme du cisaillement de l'estimateur.

Enfin, on s'intéresse à l'erreur d'orientation du cisaillement. Cette erreur est partiellement représentée par le  $SER$ . Or ce dernier agrège l'erreur de quantification et d'orientation. Afin de mieux différencier les solutions, on observera la moyenne  $\bar{\theta}$  et la médiane  $\theta_m$  de l'erreur angulaire sur les  $N_s$  échantillons sélectionnés. Il est pertinent de comparer ces deux critères d'évaluation. En effet, l'erreur angulaire peut prendre des valeurs proches de  $180^\circ$  dans les zones de recirculation. Le critère  $\theta_m$  est moins sensible à ces valeurs aberrantes.

### 8.1.2. Écoulements étudiés

Généralement, les solutions de l'état de l'art sont calibrées sur un écoulement simple du type Poiseuille (Stalder et al., 2008; Potters et al., 2014) ou bien Womersley (Barker et al., 2010; Sotelo et al., 2015). Ces écoulements sont représentatifs pour la circulation sanguine dans l'aorte descendante. En revanche, ils n'ont pas la complexité d'un écoulement dans l'aorte ascendante ou bien d'une carotide. Dans un premier temps, nous considérons un écoulement de Womersley dont les paramètres hémodynamiques sont extraits des travaux de Puelz et al. (2017) (voir l'Annexe A.3) Le rayon est de 1 cm ce qui correspond au rayon moyen d'une aorte descendante. Les simulations IRM sont réalisées avec une résolution de 2,5 mm ISO (voir le Tableau 2.1).

Dans un second temps, nous employons, dans une démarche similaire à d'autres études (Köhler et al., 2001; Cibis et al., 2014; Piatti et al., 2017), la simulation numérique des fluides de quatre carotides pathologiques. Celles-ci nous ont été généreusement mises à disposition par Loïc Bousset et Monica Sigovan du laboratoire CREATIS. Chacune d'entre elles présente une sténose de gravité plus ou moins importante comme l'illustre la Figure 8.1. On peut constater que plus la sténose est étroite, plus la norme du cisaillement est élevée. Le cadre rouge désigne la zone locale présentant un intérêt particulier pour les spécialistes. Le lecteur trouvera plus d'informations sur ces simulations dans l'Annexe A.3. Une résolution de 1 mm ISO a été utilisée pour simuler le comportement IRM sur 16 phases du cycle cardiaque.

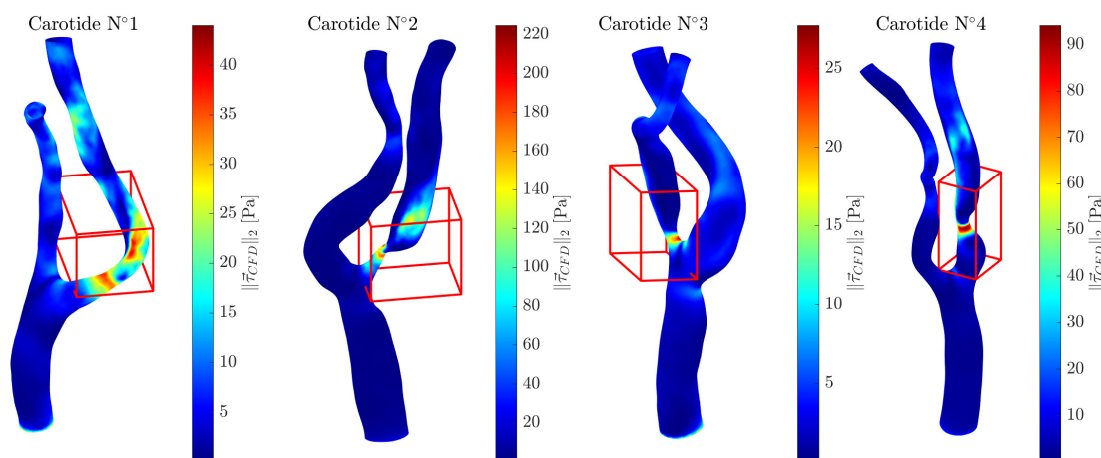


FIGURE 8.1. – Norme du cisaillement systolique de quatre carotides pathologiques avec une sténose. Le cadre rouge désigne une zone d'intérêt locale.

Enfin, ces différents écoulements ont servi de référence dans la création de données IRM synthétiques. Le modèle direct de l'IRM de flux 4D est approximé par un filtre moyennant tel que décrit dans la Section 6.2. La vitesse d'encodage est fixée à 20 % au dessus du maximum de la vitesse théorique. Puis le rapport signal sur bruit est fixé à 20 dB ( $\sigma \approx 5 \% V_{enc}$ ) afin de se placer dans le cas le plus défavorable. Les indices de performances sont moyennés sur 20 réalisations de bruit. Les études en lien avec le rapport signal sur bruit supposent une segmentation sans erreur (sans dilatation/érosion ou décalage spatial).

### 8.1.3. Comparaison à un estimateur

Tout au long du processus de validation, l'algorithme proposé est comparé à une méthode de l'état de l'art issue des travaux de [Potters et al. \(2014\)](#). Cette solution a été choisie comme référence de l'état de l'art pour plusieurs raisons. D'une part, elle a été validée intensivement avec plusieurs études appliquées à des données synthétiques similaires aux nôtres ([Cibis et al., 2014](#)), à des données fantôme ([Cibis et al., 2016b](#)) puis sur cohorte de patients ([Cibis et al., 2016a](#); [Bollache et al., 2018](#)). D'autres part, l'application de cet algorithme à des carotides présente une corrélation satisfaisante de 84 % avec leurs simulations numériques des fluides ([Cibis et al., 2016a](#)). De plus, le temps de calcul sur la carotide N°2 est d'environ 7 minutes, ce qui respecte la contrainte d'application clinique. Ce temps de calcul est obtenu en parallélisant l'estimation du cisaillement sur les 16 temps du cycle cardiaque. [Potters et al. \(2014\)](#) ont partagé le code source (*Matlab*), ce qui rend possible une comparaison sans ambiguïté sur la retranscription de l'algorithme. Enfin, cette solution présente des caractéristiques similaires à PaLMA. En particulier, ces deux solutions traitent le problème ponctuellement pour ajuster le champ de vitesse avec régularisation. PaLMA diffère de la solution de [Potters et al. \(2014\)](#) avec l'emploi d'une modélisation 3D du champ de vitesse au lieu de 1D. De plus, PaLMA considère la nullité de la vitesse sur une surface locale autour du point d'intérêt et non seulement en cet unique point.

Plus précisément l'algorithme de [Potters et al. \(2014\)](#) est basé sur trois étapes :

1. Interpolation en 3 points équidistants de la vitesse le long d'un axe normal au point d'intérêt. Il est conseillé de positionner ces trois points sur la distance d'un rayon caractéristique du vaisseau.
2. Ajustement de chaque composante de la vitesse avec une fonction B-spline lissante. La tolérance de l'ajustement est fixée à 1 % du  $V_{enc}$ .
3. Calcul du cisaillement à partir des dérivées du modèle B-spline.

Enfin, le cisaillement à la paroi issu de la simulation numérique des fluides peut aussi être considérée comme référence. En effet, il s'agit de la solution privilégiée lorsque le temps de calcul n'est pas limité. La comparaison est réalisée directement à travers les critères d'évaluation présentés précédemment pour lesquels  $\vec{\tau}$  désigne le cisaillement de référence provenant de simulations numériques des fluides ou bien de solutions analytiques. Par conséquent, l'algorithme PaLMA est comparé à la fois à une valeur de référence  $\vec{\tau}$  et une approche concurrente ([Potters et al., 2014](#)).

## 8.2. Évaluation des solutions proposées

Pour chacune des solutions présentées aux Chapitres 6 et 7, il est possible de choisir différents jeux de paramètres. Premièrement, le rayon de recherche  $R$  des données est fixée par l'étape de modélisation de la paroi (voir le Chapitre 5). En pratique, le nombre de vecteurs sélectionnés localement est de 20 à 35 pour un rayon de recherche de trois fois la résolution d'acquisition. Par conséquent, ceci limite les degrés de liberté du modèle de vitesse.

Ensuite, l'ordre des polynômes peut varier selon le modèle de vitesse choisi et selon la composante considérée. Par défaut, toutes les composantes du vecteur vitesse sont fixées avec le même ordre de polynôme. Le modèle linéaire peut être utilisé avec un polynôme d'ordre 1 ou 2. Le modèle à fonctions séparables univariées peut avoir un ordre de polynôme

différent en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Toutefois, les premiers essais n'ont pas montré un intérêt particulier à choisir un ordre différent par direction. Par conséquent, le même ordre est appliqué sur les neuf polynômes de ce modèle. Enfin, la taille du noyau pour le modèle incompressible (voir Tableau 6.1) suggère de travailler avec un polynôme d'ordre 3 à 4.

Dans la littérature, le choix des paramètres est souvent réalisé à partir d'écoulements simples tel que celui de Poiseuille (Stalder et al., 2008; Potters et al., 2014) ou bien Womersley (Barker et al., 2010; Sotelo et al., 2015). Par conséquent, la Section 8.2.1 a pour objectif de motiver les choix en terme d'ordre de polynôme. Ce choix est arrêté seulement à partir de la formulation du problème (6.12) avec une norme  $L_2$  et ne prenant pas en compte le filtre IRM dans la solution ( $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ). Les différentes solutions possibles sont comparées sur des jeux de données IRM synthétiques. Elles ne comportent aucun bruit additif afin de focaliser l'étude sur la capacité de récupération du cisaillement et non de la vitesse. En effet, un modèle de vitesse sur-paramétré permettrait de réduire le résidu entre les données et le modèle. Or, des polynômes sur-paramétrés aurait potentiellement des dérivés aberrantes sur la paroi.

Dans un second temps, le choix de la norme à employer est étudié dans la Section 8.2.2. Les performances de quantification des différents modèles et normes sont comparées sur le même jeu de données IRM synthétique sans bruit pour un écoulement de Womersley et avec le polynôme d'ordre optimal. Ensuite, les différentes variantes seront comparées sur l'écoulement au sein d'une bifurcation de la carotide N°4. En particulier, on s'intéresse à une zone locale englobant la zone de recirculation évoquée au Chapitre 6 et illustrée par la Figure 6.4. La simulation des données IRM est réalisée sans bruit afin de focaliser l'analyse sur l'erreur de modélisation. Nous sélectionnerons les variantes ayant des performances suffisantes et un temps de calcul raisonnable pour la suite de l'évaluation.

Ensuite, nous comparons les solutions de post-traitement présentées au Chapitre 7. Seuls les résultats sur carotide sont présentés dans la Section 8.2.3 car plus représentatifs d'un écoulement complexe. Nous observons le gain significatif suivant les critères d'évaluation établis dans la Section 8.1.1. À partir de cette étape, nous simulons des données IRM avec un bruit gaussien de 20 dB et analysons la moyenne des critères de performance sur 20 réalisations de bruit.

Dans un contexte similaire, nous confrontons, dans la Section 8.2.4, les performances de chaque modèle de vitesse à la solution de Potters et al. (2014). Enfin, nous étudions l'influence du filtre IRM dans la construction du problème dans la Section 8.2.5. L'influence du filtre IRM est étudié en dernier car, dans la majorité des cas, il n'est pas précisément établi.

### 8.2.1. Choix de l'ordre des polynômes

L'écoulement dans un tube cylindrique droit comme Poiseuille ou Womersley ne varie qu'en fonction de la distance radiale et du temps pour Womersley. Le vecteur de cisaillement est orienté dans l'axe du tube et ne dépend pas de la position sur le cylindre. Dans cette section, on compare le cisaillement théorique avec seulement son estimation au point d'intérêt pour différents choix de polynôme.

La Figure 8.2 représente l'une des composantes du cisaillement à la paroi pour le modèle linéaire avec son intervalle de confiance à 95 %. Bien que cet intervalle est plus grand avec un polynôme d'ordre 2, la capacité de quantification est significativement amélioré au pic systolique. Le polynôme d'ordre 2 est donc l'ordre le plus adapté pour ce type de modèle de vitesse. Le modèle de vitesse à fonctions séparables univariées présente



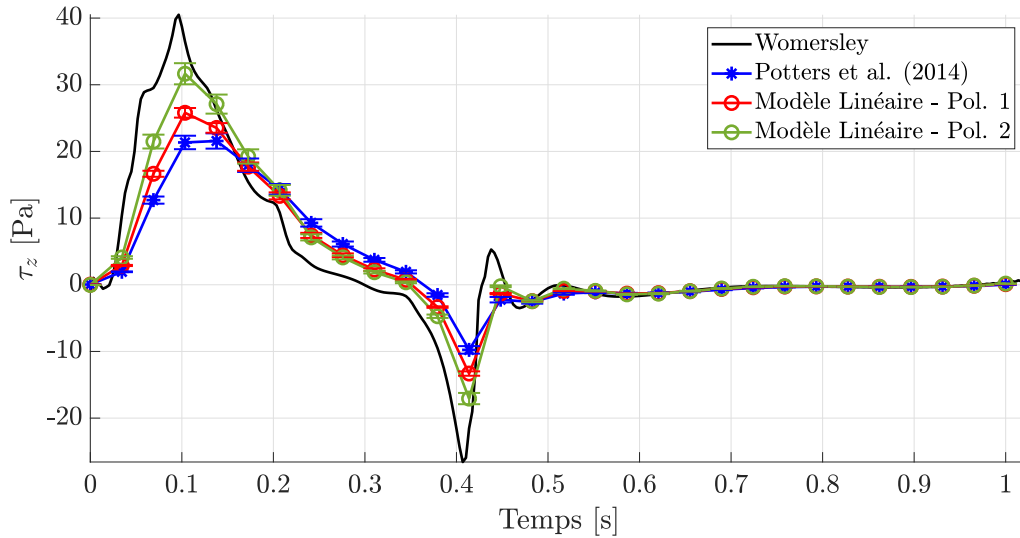


FIGURE 8.2. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle linéaire pour différents ordres de polynôme.

les mêmes caractéristiques (voir Figure 8.3). Par conséquent, l'ordre du polynôme est fixé à 2 pour toutes les fonctions univariées. Enfin, le modèle incompressible obtient de meilleures performances de quantification avec un polynôme d'ordre 4 comme l'illustre la Figure 8.4.

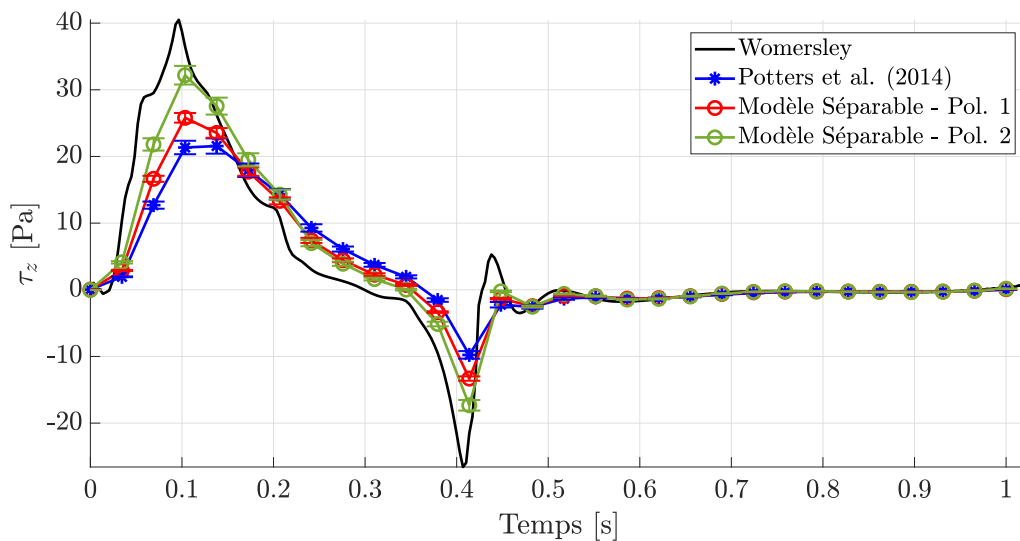


FIGURE 8.3. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle à fonctions séparables univariées pour différents ordres de polynôme.

On observe que quel que soit le modèle de vitesse, les performances de quantification dépassent significativement celles de Potters et al. (2014). De plus, ces résultats sont particulièrement intéressants au pic systolique et au début de la diastole avec un pic de régurgitation ( $t = 0,4$  s). L'une des raisons de cette amélioration est le traitement local à la résolution des données. Potters et al. (2014) interpolent le champ de vitesse de manière à avoir 3 points sur une distance correspondant au rayon. Ce faisant, leur approche perd en

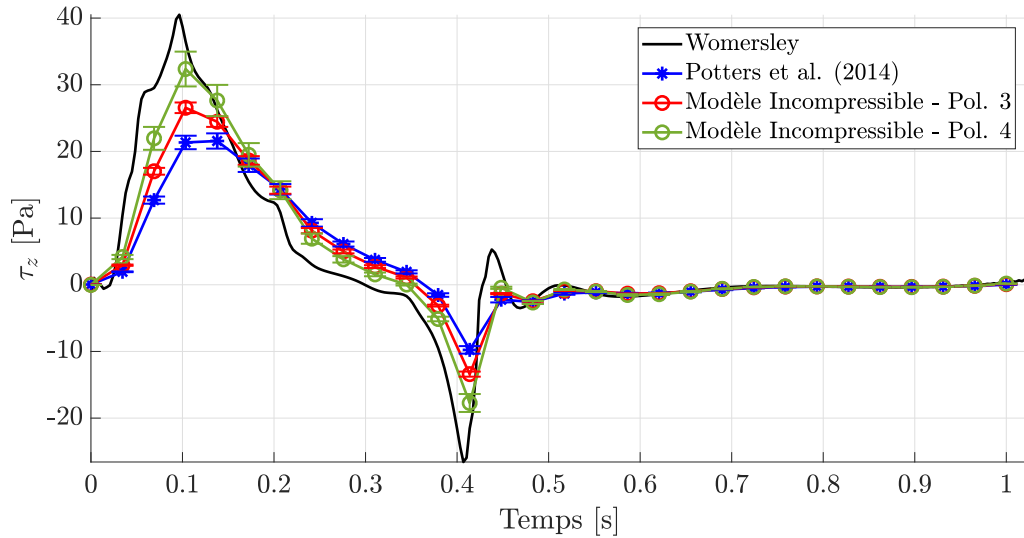


FIGURE 8.4. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle linéaire pour différents ordres de polynôme.

capacité de quantification. La résolution est en effet l'élément essentiel en ce qui concerne la quantification du cisaillement. La construction locale de l'approche proposée permet de mieux décrire l'écoulement et donc mieux estimer le cisaillement.

Par ailleurs, l'intervalle de confiance pour un temps donné reflète la variation des estimations du cisaillement pour un même champ de vitesse mais échantillonné différemment. En particulier, cet intervalle de confiance représente la sensibilité d'un modèle à l'échantillonnage du champ de vitesse. La solution de Potters et al. (2014) est donc légèrement moins sensible à l'échantillonnage du champ de vitesse que les différentes solutions proposées. Toutefois, la différence en terme d'intervalle de confiance ne permet pas pour autant de disqualifier les solutions proposées.

### 8.2.2. Comparaison entre les normes $L_2$ et de Huber

Cette section a pour objectif de comparer l'effet de la norme sur la quantification du cisaillement. Tout d'abord, cette comparaison est réalisée sur le jeu de données synthétique avec un écoulement de Womersley. Ensuite, on étudie la zone d'écoulement complexe qui suit la sténose de la carotide N°4. La norme de Huber a été introduite dans l'esprit de limiter l'impact d'une erreur de modélisation dans ce type de contexte. Les simulations ne sont donc pas entachées de bruit afin d'observer directement l'intérêt de cette norme.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'écoulement de Womersley et l'influence de la norme sur l'estimation du cisaillement suivant le temps pour les modèles linéaire (voir Figure 8.5), à fonctions séparables univariées (voir Figure 8.6) et incompressible (voir Figure 8.7). On observe que la norme de Huber ne permet pas d'obtenir un gain significatif sur la quantification du cisaillement. Les performances sont très légèrement inférieures à la norme  $L_2$  sachant que la norme de Huber a un coût de calcul supérieur.

La différence entre les deux normes n'étant pas suffisamment significative sur l'écoulement de Womersley, la zone de recirculation introduite précédemment avec la Figure 6.4 est étudiée plus précisément. Les Figures 8.8, 8.9 et 8.10 représentent la norme du cisaillement avec les solutions associées aux normes  $L_2$  et Huber pour respectivement les

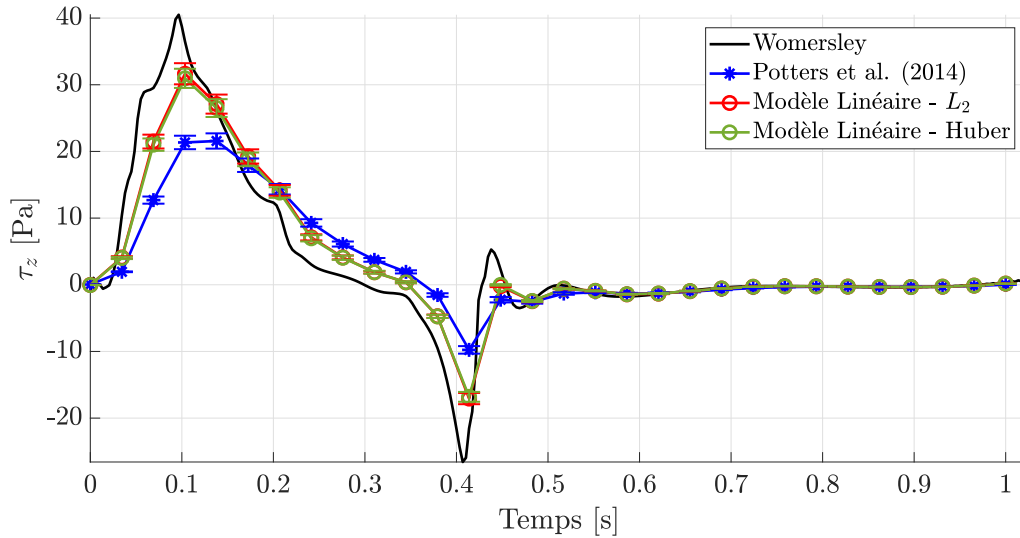


FIGURE 8.5. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle linéaire pour une norme  $L_2$  et de Huber.

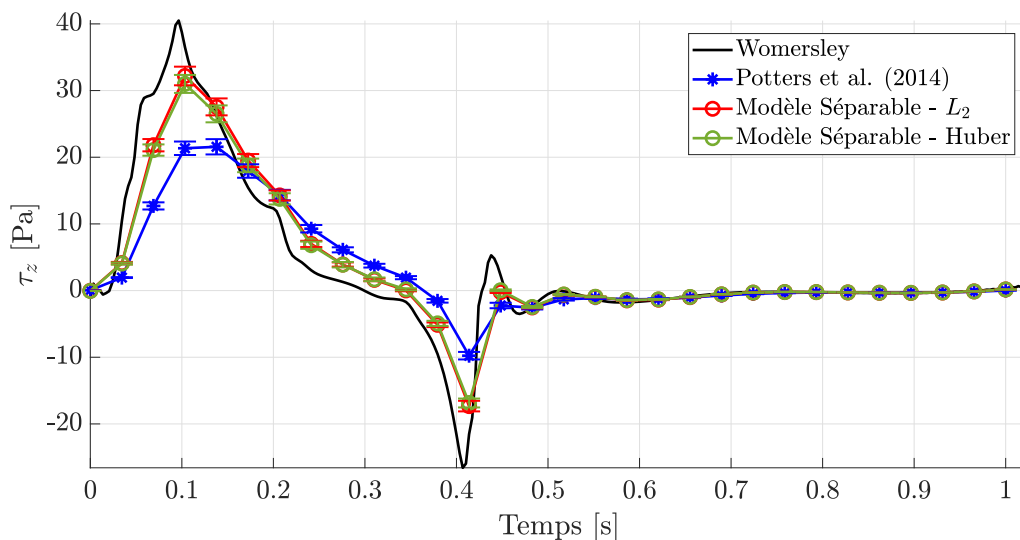


FIGURE 8.6. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle à fonctions séparables univariées pour une norme  $L_2$  et de Huber.

modèles linéaire, séparables à fonctions univariées et incompressible. Le carré rouge y positionne le point d'intérêt utilisé pour réaliser la Figure 6.4.

Le cisaillement sur la simulation numérique des fluides est marqué par une zone de forte valeur s'atténuant en remontant la carotide. Ce motif est visible quelle que soit la solution considérée. En revanche, il semble plus étalé avec les solutions proposées par rapport à celle de Potters et al. (2014). La formulation avec la norme de Huber présente un motif plus étalé et intense que la norme  $L_2$ . D'autres expérimentations ont montré que cet étalement est influencé à la fois par la résolution du jeu de données et par le rayon  $R$ . Un rayon plus faible permet d'obtenir un motif plus proche de la simulation. Cependant, les performances se dégradent significativement avec l'introduction de bruit. Enfin, la zone

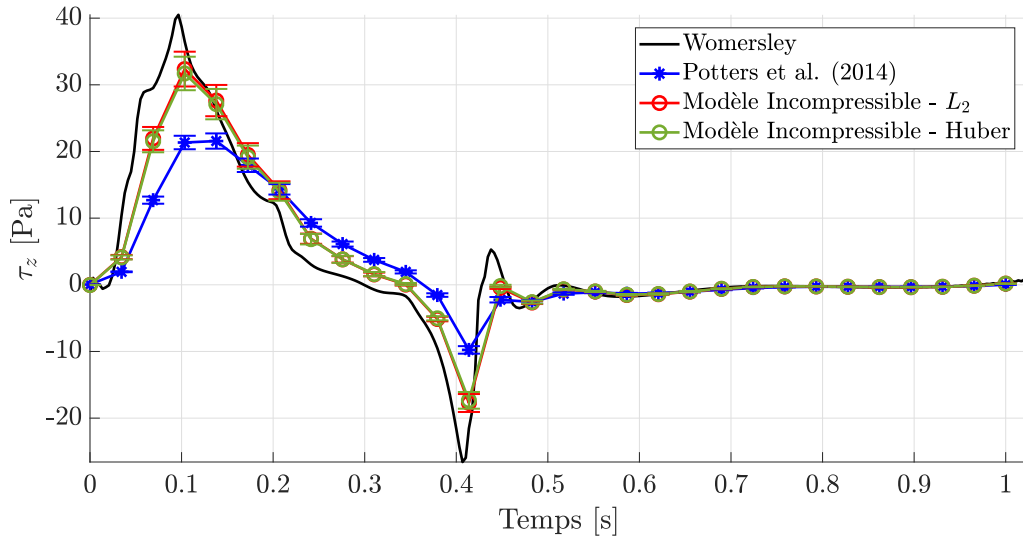


FIGURE 8.7. – Évaluation du cisaillement en fonction du temps sur l'écoulement de Womersley avec le modèle incompressible pour une norme  $L_2$  et de Huber.

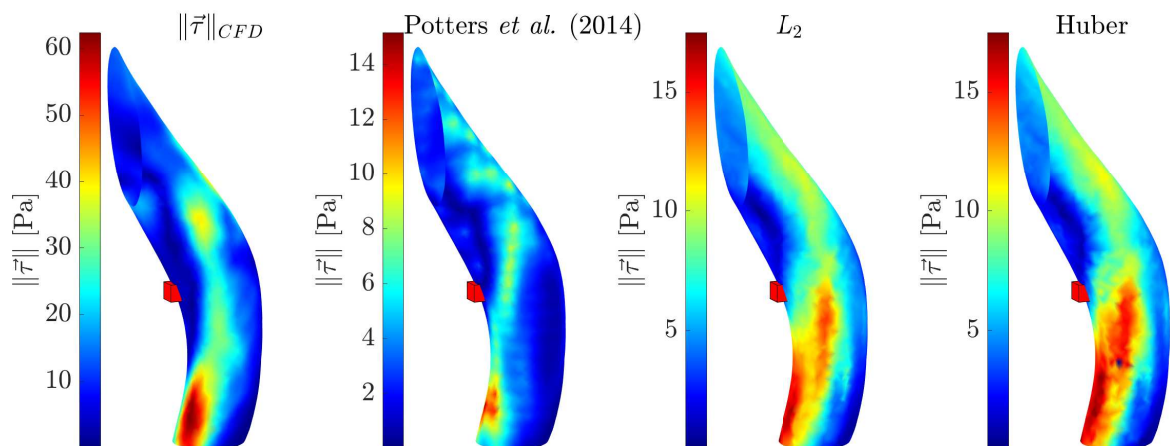


FIGURE 8.8. – Évaluation du cisaillement au temps systolique sur la carotide N°4 avec le modèle linéaire avec une norme  $L_2$  et de Huber.

de recirculation est semblable quel que soit la solution considérée.

Afin de départager les solutions avec une norme  $L_2$  ou Huber, on s'intéresse à la corrélation de Pearson  $r$  et au  $SER^{mag}$ . Pour rappel,  $r$  évalue la corrélation statistique entre la norme du cisaillement référence et estimé puis  $SER^{mag}$  détermine le pouvoir de quantification. Le Tableau 8.1 présente ces indices de performances pour les différentes solutions considérées en comparaison au travaux de Potters et al. (2014). On observe qu'il y a un gain en corrélation et en quantification quels que soient les modèles et normes employés. La norme de Huber permet d'obtenir une légère amélioration de la quantification du cisaillement mais au détriment de la corrélation. Cette dernière représente aussi la cohérence spatiale avec le cisaillement de référence. De plus, l'utilisation de la norme de Huber impose de résoudre plusieurs fois un problème de moindres carrés. Cela peut avoir un impact non négligeable sur le temps de calcul. Par conséquent, j'ai choisi de n'utiliser pour la suite que la norme  $L_2$  par rapport à ces résultats satisfaisants et son temps de

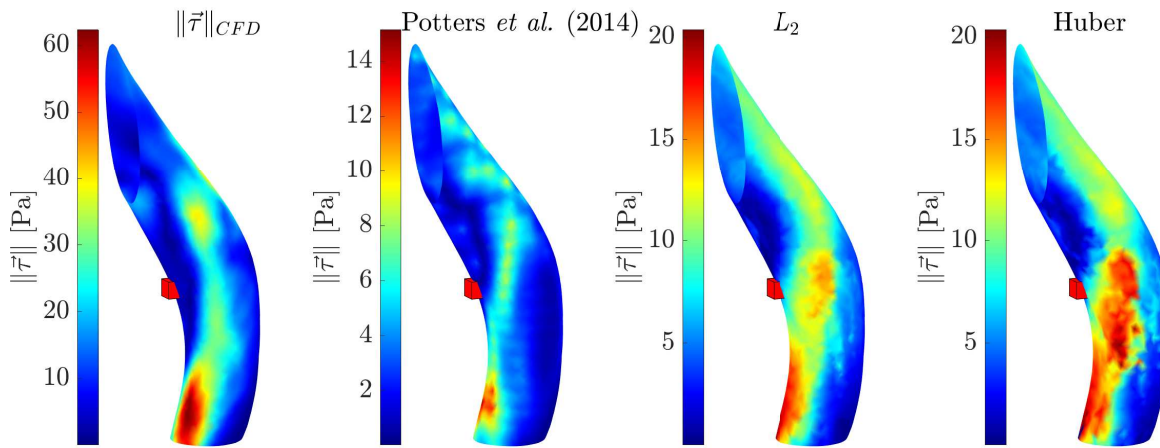


FIGURE 8.9. – Évaluation du cisaillement au temps systolique sur la carotide N°4 avec le modèle à fonctions séparables univariées pour une norme  $L_2$  et de Huber.

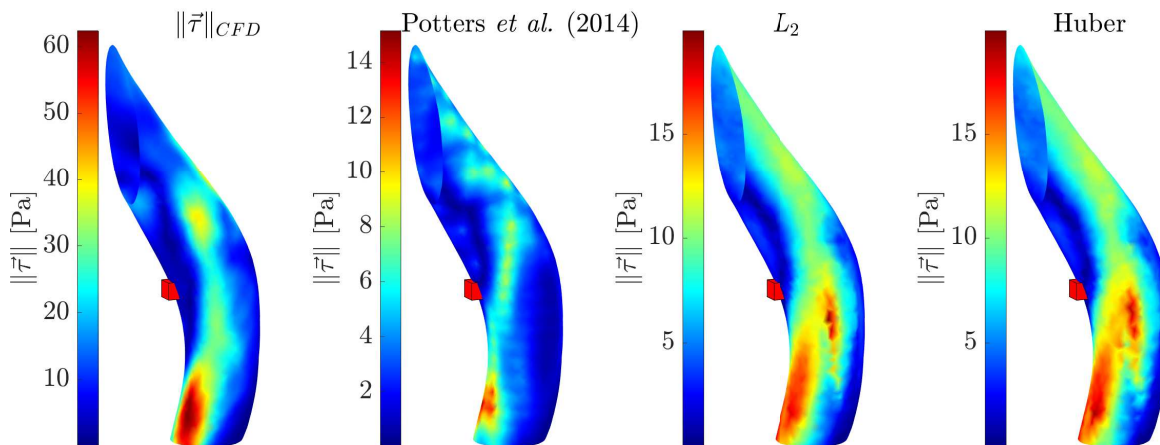


FIGURE 8.10. – Évaluation du cisaillement au temps systolique sur la carotide N°4 avec le modèle incompressible pour une norme  $L_2$  et de Huber.

	Corrélations [%]			$SER^{\text{mag}}$ [dB]		
	Potters et al. (2014)	$L_2$	Huber	Potters et al. (2014)	$L_2$	Huber
$\vec{\tau}_{\text{lin}}$	67.84	72.86	71.94	1.77	3.39	3.54
$\vec{\tau}_{\text{sep}}$	67.84	68.35	68.11	1.77	3.59	3.85
$\vec{\tau}_{\text{inc}}$	67.84	77.32	76.56	1.77	3.74	3.80

TABLE 8.1. – Tableau de comparaison entre les solutions basées sur une norme  $L_2$ , une norme de Huber et les travaux de Potters et al. (2014).

calcul compétitif. Par ailleurs, le modèle à fonctions séparables univariées présente les mêmes inconvénients : faible corrélation et complexité algorithmique supérieure. Ainsi, j'ai choisi ne pas conserver ce modèle dans la suite de ce manuscrit.

Par ailleurs, cette décision est aussi motivée par les résultats sur les quatre carotides dans un contexte bruité (RSB de 20 dB). Ceux-ci sont présentés en annexe à la Section B.1 pour les différents modèles de vitesse. Les critères de performance sont évalués globalement et localement pour le temps systolique et tous les temps du cycle cardiaque. On observe

que la norme  $L_2$  présente des résultats plus stables et performants que la norme de Huber sur l'ensemble des carotides. L'observation précédente sur la corrélation pour le modèle à fonctions séparables univariées est confirmée nettement pour les performances estimées globalement. Ainsi, les prochains résultats ne s'appuieront que sur la norme  $L_2$  lors de l'ajustement du modèle de vitesse.

### 8.2.3. Comparaison des stratégies de traitement *a posteriori*

Cette section a pour objectif de comparer les stratégies de post-traitement, introduites dans le Chapitre 7, appliquées aux modèles linéaire et incompressible. Les Figures 8.11 et 8.12 représentent les différents critères de performance du modèle linéaire évalués

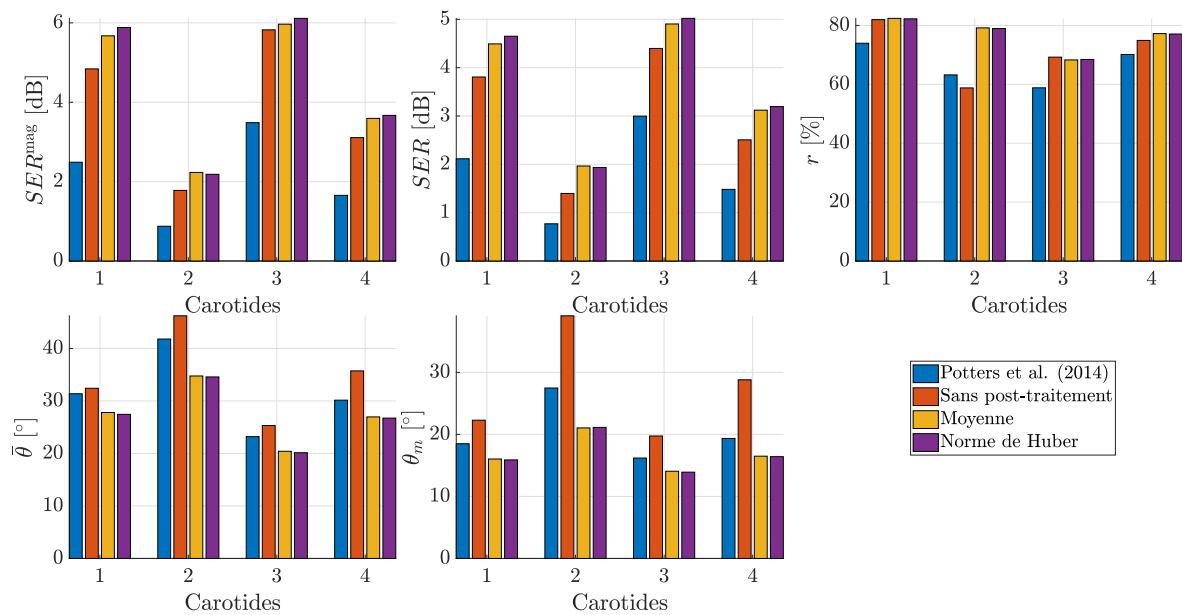


FIGURE 8.11. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

globalement et localement. Les critères de performance pour le modèle incompressible sont illustrés par les Figures 8.13 et 8.14. Seuls les résultats au temps systolique sont présentés dans cette section car les observations sont similaires pour l'analyse sur tous les temps. Toutefois, ces résultats sont regroupés dans l'annexe à la Section B.2.

Quel que soit le modèle de vitesse, les résultats de post-traitement présentent dans l'ensemble un gain de performance tant en terme de quantification que de corrélation ou encore d'erreur angulaire. Plus précisément, le  $SE R^{mag}$  avec post-traitement est favorable pour toutes les carotides globalement et localement à l'exception de la carotide N°3 localement. Dans la majorité des cas, le second estimateur, basé sur la norme de Huber du cisaillement, est plus performant en terme de quantification qu'une moyenne pondérée. Le  $SE R$  agrège l'erreur d'estimation en amplitude et d'orientation. Cet indice de performance confirme l'intérêt d'une solution de post-traitement. La moyenne pondérée est légèrement supérieure à la norme de Huber pour le modèle incompressible et inversement pour le modèle de vitesse linéaire. En terme de corrélation, le post-traitement présente un intérêt et en particulier pour la carotide N°2 quel que soit le modèle de vitesse. Pour ce critère, les

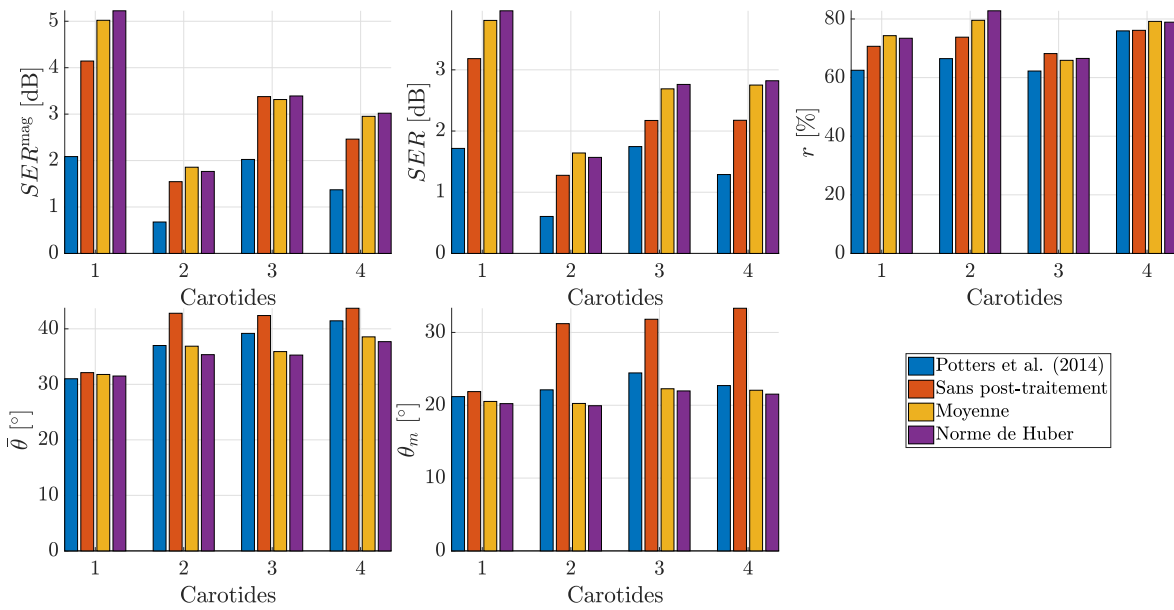


FIGURE 8.12. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

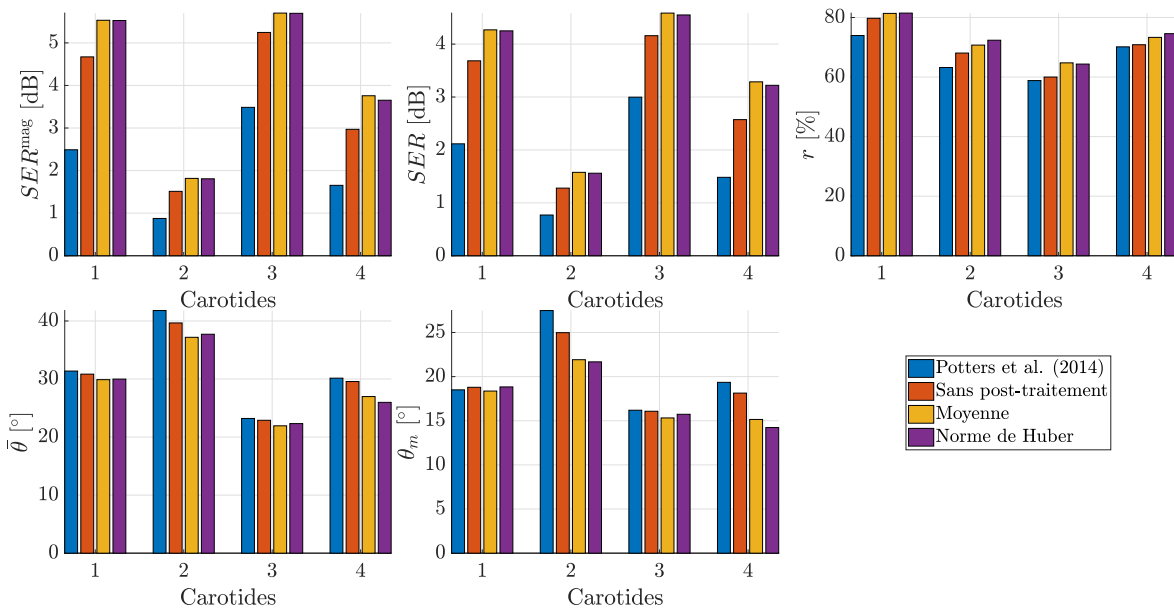


FIGURE 8.13. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

deux estimateurs de post-traitement obtiennent des performances similaires dont l'avantage oscille suivant les carotides et la zone de calcul. Enfin, l'erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  ou médiane  $\theta_m$  est significativement améliorée par l'usage d'un traitement *a posteriori*. La comparaison entre les deux estimateurs, moyenne pondérée ou norme de Huber, montre des performances similaires suivant la carotide ou le modèle de vitesse considéré. Ainsi,

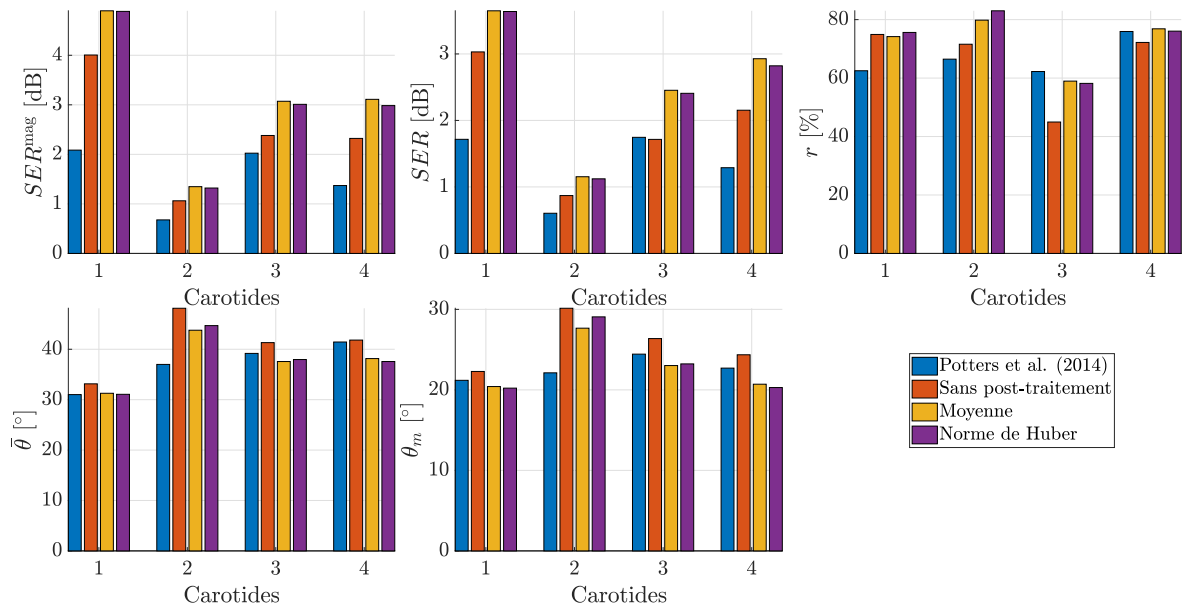


FIGURE 8.14. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

l'estimateur employant la norme de Huber a été choisi pour son gain majoritaire sur la quantification. Les prochains résultats exploiteront ce post-traitement.

Par ailleurs, on observe que l'algorithme PaLMA présente un avantage structurel sur l'approche de Potters et al. (2014). En effet, la solution proposée est majoritairement plus performante quel que soit le modèle de vitesse utilisé.

### 8.2.4. Comparaison des modèles de vitesse

Cette section a pour objectif de déterminer, parmi les modèles de vitesse introduits au Chapitre 6, celui qui obtient les meilleures performances. Les Figures 8.15 et 8.16 présentent les différents indices de performance évalués sur l'ensemble de la carotide ou localement sur une zone d'intérêt (cube rouge de la Figure 8.1). Ces résultats sont obtenus pour le temps systolique. Ces mêmes graphes évalués sur tous les temps du cycle cardiaque sont regroupés dans l'annexe à la Section B.3.

Les deux modèles de vitesse sont tout deux compétitifs vis-à-vis de la solution de Potters et al. (2014). En particulier, le modèle linéaire présente de meilleures performances du point de vue de la quantification, de la corrélation et de l'angle d'erreur. Le modèle incompressible est notamment en difficulté sur l'erreur angulaire locale de la carotide N°2. Pourtant, celui-ci obtient un léger avantage sur la carotide N°4.

Ces résultats sont surprenants car on attendrait du modèle incompressible qu'il soit plus efficace que le modèle simplement linéaire. D'une part, le bruit peut jouer un rôle plus important sur le modèle incompressible. L'ordre du polynôme de la solution incompressible est de 4 alors qu'il est de 2 pour le modèle linéaire bien que les degrés de liberté soient proches avec respectivement 29 et 30. Une analyse ponctuelle des champs de vitesse incompressible et linéaire a montré que le cisaillement issu du modèle incompressible est plus sensible dans un contexte bruité. Il peut notamment plus aisément permettre des fortes



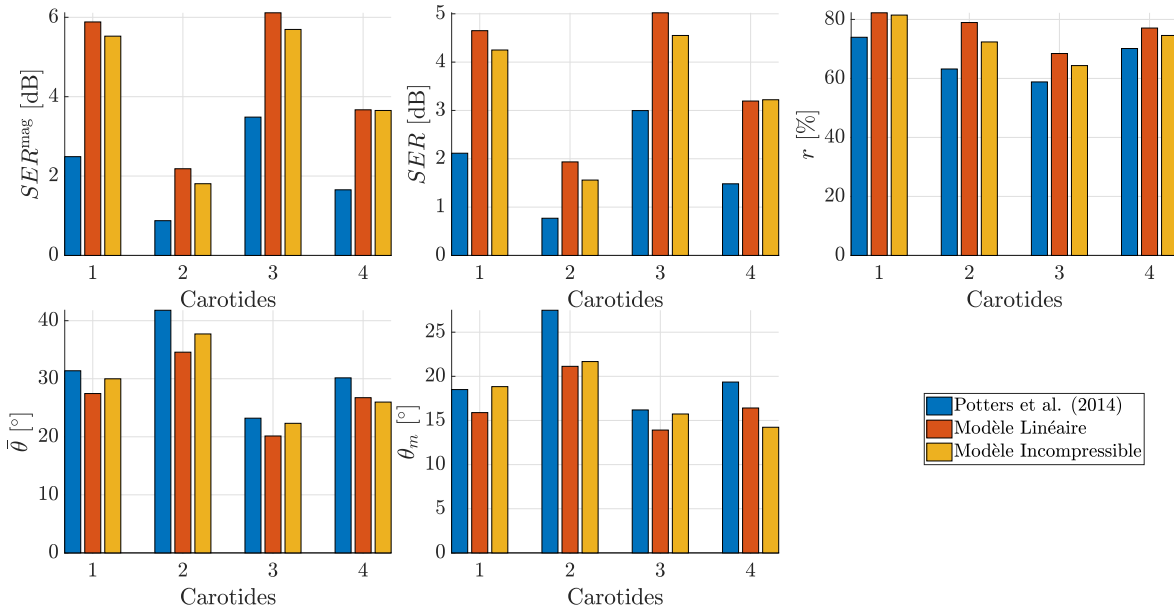


FIGURE 8.15. – Critères de performance moyennés en fonction des modèles de vitesse pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

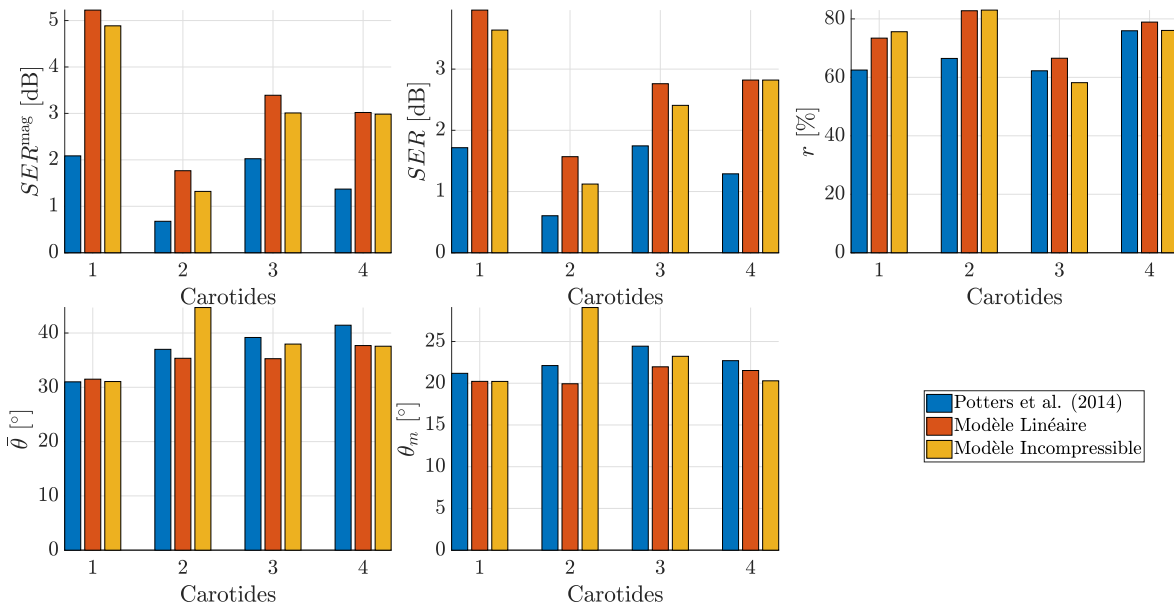


FIGURE 8.16. – Critères de performance moyennés en fonction des modèles de vitesse pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

variations du champ de vitesse et par conséquent de forts cisaillements. D'autres part, la baisse de performance peut provenir de la représentation incomplète de la paroi. La Figure 8.16 illustre les performances de quantification autour de la sténose et au temps systolique c'est-à-dire au temps de vitesse maximale. Le rapport de la vitesse moyenne sur le niveau de bruit est donc localement favorable. Cela démontre que le bruit seul ne permet pas d'expliquer des performances inférieures au modèle linéaire. La représentation incomplète

de la paroi impacte directement le modèle de vitesse et sa version incompressible. Ce type de modèle serait potentiellement plus performant si la paroi était représentée par une surface cubique non dégénérée tel qu'introduit à la Section 5.3.1. En raison de l'ensemble des résultats obtenus, seul le modèle linéaire est considéré pour la suite de ce manuscrit.

### 8.2.5. Influence du filtre IRM

Cette section a pour objectif de déterminer l'influence du filtre IRM sur l'ajustement du modèle de vitesse et par conséquent sur l'estimation du cisaillement à la paroi. Les Figures 8.17 et 8.18 présentent les indices de performance globalement et localement sur les quatre carotides. Ces indices sont évalués uniquement pour le temps systolique. Toutefois, les résultats estimés sur l'ensemble des temps du cycle cardiaque sont regroupés dans l'annexe à la Section B.4.

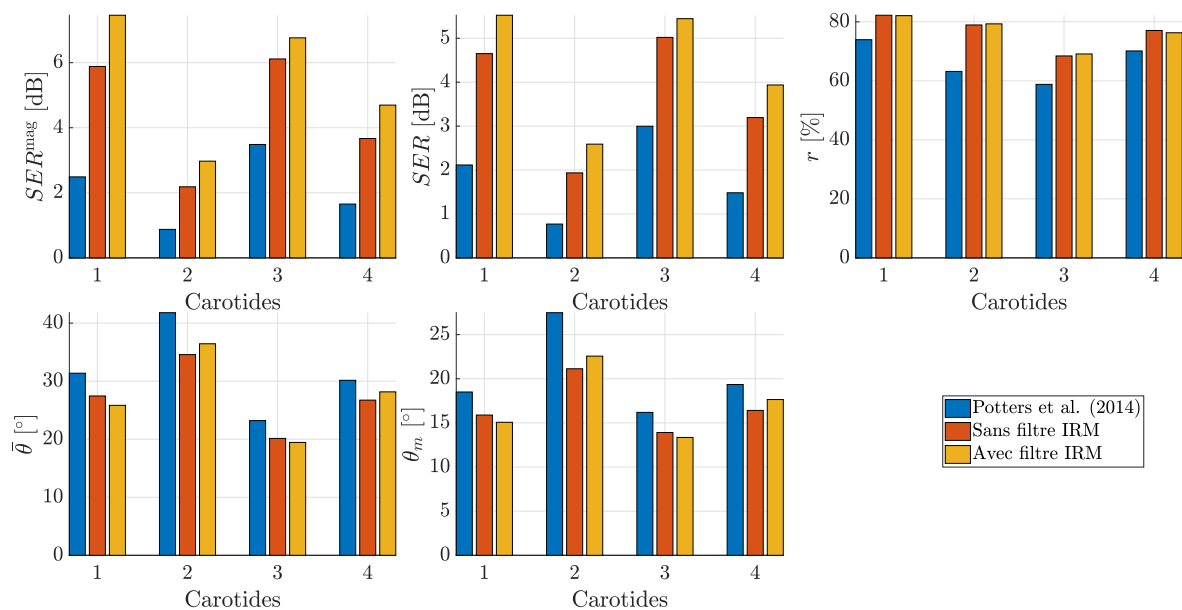


FIGURE 8.17. – Critères de performance moyennés en fonction de la prise en compte du filtre IRM pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

La prise en compte du filtre IRM permet d'obtenir un gain significatif en terme de quantification avec une amélioration du  $SE R^{mag}$  et du  $SE R$  allant jusqu'à 1 dB. Cette hausse du  $SE R^{mag}$  et du  $SE R$  se fait aussi au détriment de l'erreur angulaire globale sur deux carotides (N°2 et N°4). La corrélation n'est que très peu impactée par l'introduction du filtre IRM. Par conséquent, la solution nommée PaLMA désigne l'algorithme présenté au Chapitre 4 avec un modèle de vitesse polynômial linéaire d'ordre 2 ajusté avec un filtre IRM moyennant et un post-traitement exploitant la norme de Huber.

Le filtre IRM a une influence positive sur la quantification du cisaillement à la paroi. Toutefois, il est appliqué dans un cadre de simulation pour lequel il est maîtrisé. Les performances pourraient être moins favorable sur une application à des données réelles dont le modèle direct de l'IRM n'est pas établi précisément. Par ailleurs, le coût de calcul engendré par le filtre IRM n'est pas négligeable. En effet, il est nécessaire d'évaluer le modèle paramétrique de la vitesse sur un grand nombre de sous-voxels ce qui impacte

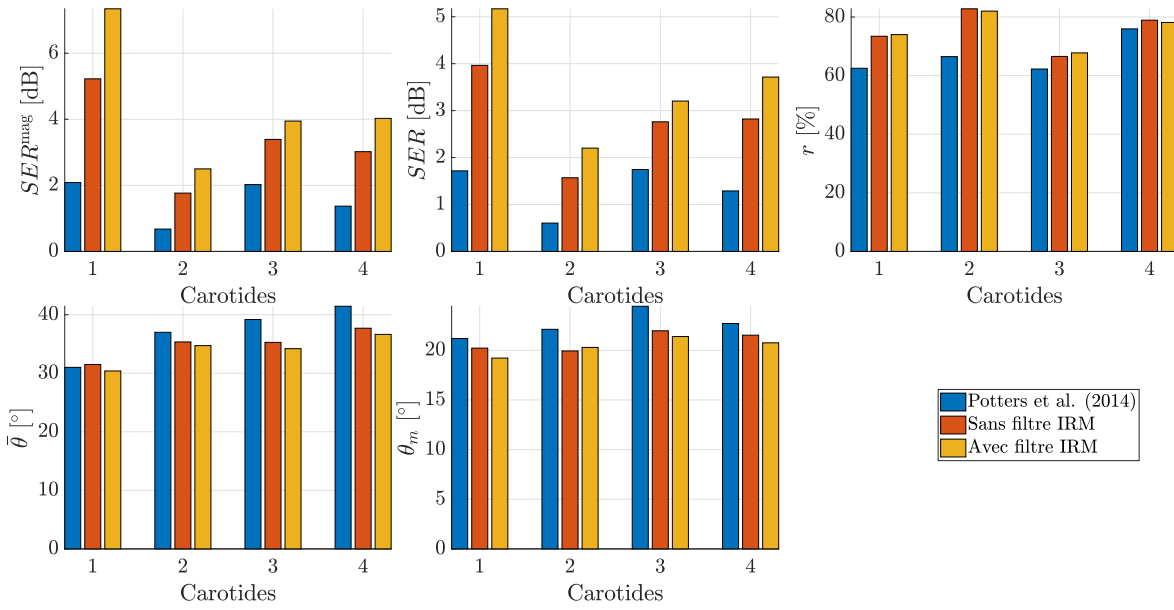


FIGURE 8.18. – Critères de performance moyennés en fonction de la prise en compte du filtre IRM pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

directement le temps de calcul. À titre d'exemple, le Tableau 8.2 présente le temps de calcul sur un ordinateur possédant un processeur Intel Core i7-6820HQ (2,7 GHz) et 32 Gb de RAM. Le calcul est parallélisé sur 8 cœurs logiques en traitant le problème sur 8 temps du cycle cardiaque simultanément. On observe que le temps de calcul de la version sans filtre IRM est autour de 3 fois plus rapide que la démarche de Potters et al. (2014). Lorsque le filtre IRM est utilisé, le temps de calcul est moins favorable et même défavorable pour les carotides N°2 et N°4. En l'état, il est préférable d'utiliser le filtre IRM uniquement s'il est établi ou bien de réduire le nombre de sous-voxels, pour ne pas engendrer de coût de calcul inutile. Par ailleurs, la solution proposée modélise le champ de vitesse pour l'ensemble des points de la paroi. Une perspective permettant de gagner en temps de calcul serait de modéliser seulement un sous-ensemble de points de la paroi et de calculer le cisaillement sur leurs voisins. Ces points seraient judicieusement choisis afin de couvrir l'ensemble du vaisseau. Plus précisément, tout point de ce sous-ensemble doit être à une distance inférieure à  $R$ , le rayon de sélection, de son plus proche voisin du sous-ensemble.

Carotide	N°1	N°2	N°3	N°4
Potters et al. (2014)	6,2	5,9	6,6	5,5
PaLMA sans filtre IRM	2	2,1	2,5	1,9
PaLMA avec filtre IRM	6,1	6,82	8,3	5,9

TABLE 8.2. – Tableau récapitulatif des temps de calcul [min].

### 8.2.6. Synthèse

Chaque étape de l'algorithme PaLMA, présenté au Chapitre 4, a été étudiée séparément dans les Chapitres 5 pour la modélisation de la paroi, 6 pour la modélisation de la vitesse et 7 pour le traitement *a posteriori* sur le cisaillement. Certains degrés de liberté sur le modèle de vitesse et le post-traitement ont été comparés afin de choisir la solution la plus robuste et efficace. Ainsi, le modèle linéaire s'est avéré plus performant que le modèle incompressible ou à fonctions séparables univariées. L'ordre de ce modèle a été fixé à 2. Ensuite, l'ajustement du modèle de vitesse permettait une meilleure quantification du cisaillement avec une norme  $L_2$  plutôt qu'une norme de Huber. Par ailleurs, l'utilisation du filtre IRM permet de gagner significativement en terme de quantification. Pour finir, le post-traitement est globalement bénéfique pour la quantification du cisaillement avec un léger avantage pour la norme de Huber par rapport à la moyenne pondérée. Pour résumer, la solution optimale exploite un modèle de vitesse polynômial linéaire d'ordre 2 ajusté avec un filtre IRM moyennant sous une norme  $L_2$  et un post-traitement exploitant la norme de Huber.

Dans le même temps, nous avons pu constater la capacité de quantification du cisaillement de PaLMA vis-à-vis de l'approche de [Potters et al. \(2014\)](#). Les performances sont meilleures en terme de quantification, de corrélation et d'erreur angulaire sur des écoulements complexes dans un contexte bruité. Des résultats préliminaires ont été présentés en conférence ([Levilly et al., 2019](#)) et un article intitulé, "*Towards Quantitative Evaluation of Wall Shear Stress from 4D Flow Imaging*", a été soumis à publication ([Levilly et al., 2020](#)).

### 8.3. Étude de robustesse

Cette section a pour objectif d'étudier trois sources d'erreur importantes pour la quantification du cisaillement : le bruit, la résolution et la segmentation. Dans un premier temps, nous comparons les performances de PaLMA sur un intervalle de rapport signal sur bruit cliniquement réaliste. Le niveau de bruit étant directement lié à la résolution de l'acquisition, il est intéressant d'étudier les performances de quantification sur ce même intervalle mais pour une résolution plus fine : 0,7 mm. Dans un second temps, nous étudions l'impact d'une dilatation ou d'une érosion sur la segmentation sur la capacité de PaLMA à quantifier le cisaillement à la paroi.

#### 8.3.1. Étude en fonction du rapport signal sur bruit et de la résolution

Dans cette section, nous étudions l'impact de deux sources d'erreur significatives en IRM de flux 4D. D'une part, le bruit introduit une erreur sur le champ de vitesse se répercutant sur les biomarqueurs comme le cisaillement à la paroi. D'autre part, la résolution est généralement contrainte par les conditions d'acquisition clinique liées au temps de mesure et au rapport signal sur bruit. Ce point a été discuté en détail dans la Section 2.2. En particulier, on sait que le rapport signal sur bruit dépend de la force du champ magnétique, de l'utilisation d'agent de contraste, etc. Il est donc intéressant d'observer les performances de quantification du cisaillement à la paroi sur un intervalle de rapport signal sur bruit plus large [10,  $\dots$ , 40] que l'usage clinique (voir le Tableau 2.2). Un rapport signal sur bruit de 10 dB correspond à un écart-type sur la vitesse de 14,2 % du  $V_{enc}$ .

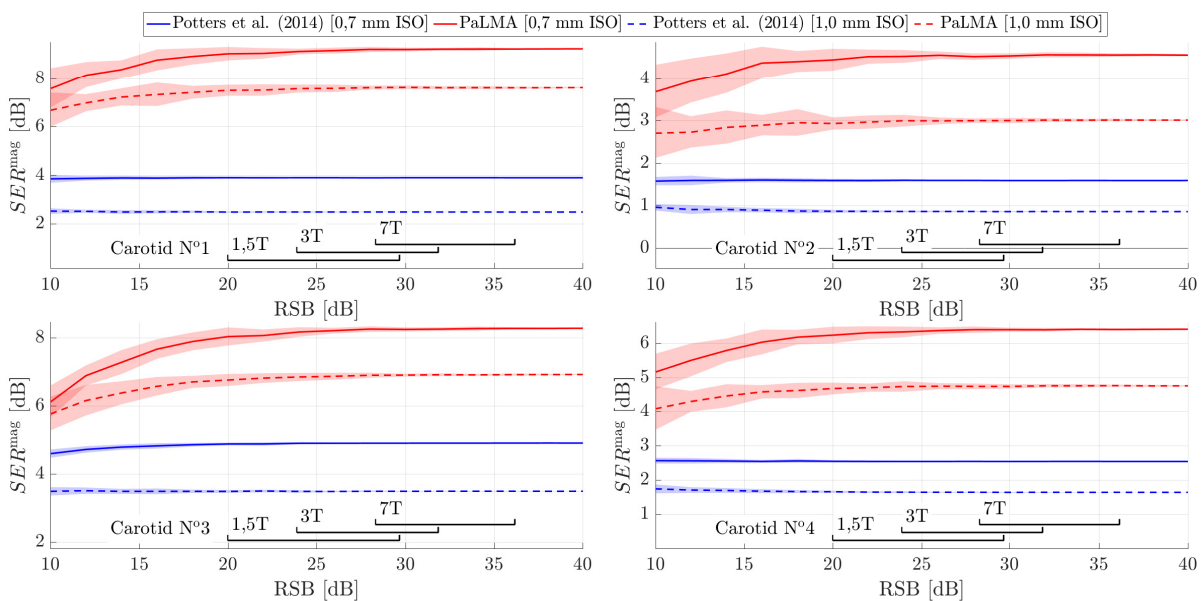


FIGURE 8.19. –  $SER^{mag}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SER^{mag}$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

Dans un premier temps, on s'intéresse à trois indices de performance évalués au temps

systolique localement ou sur l'ensemble de la carotide : le  $SE R^{\text{mag}}$  pour l'erreur sur la norme du cisaillement, la corrélation  $r$  et l'erreur angulaire médiane  $\theta_m$ . Le reste des résultats est regroupé dans l'annexe à la Section B.5 ( $SE R$  et  $\bar{\theta}$  calculés sur tous les temps du cycle cardiaque). Les Figures 8.19 et 8.20 représentent le  $SE R^{\text{mag}}$  de PaLMA et de la solution de Potters et al. (2014) en fonction du rapport signal sur bruit. On observe aussi le  $SE R^{\text{mag}}$  pour deux résolutions : clinique avec 1 mm ISO et plus fine avec 0,7 mm ISO. Cette dernière correspond à la résolution utilisée par Potters et al. (2014) pour valider son étude. L'évolution de la corrélation est illustrée par la Figure 8.21 pour un calcul sur l'ensemble de la carotide et par la Figure 8.22 pour un calcul local. Enfin, les Figures 8.23 et 8.24 représentent l'erreur angulaire médiane en fonction du rapport signal sur bruit.

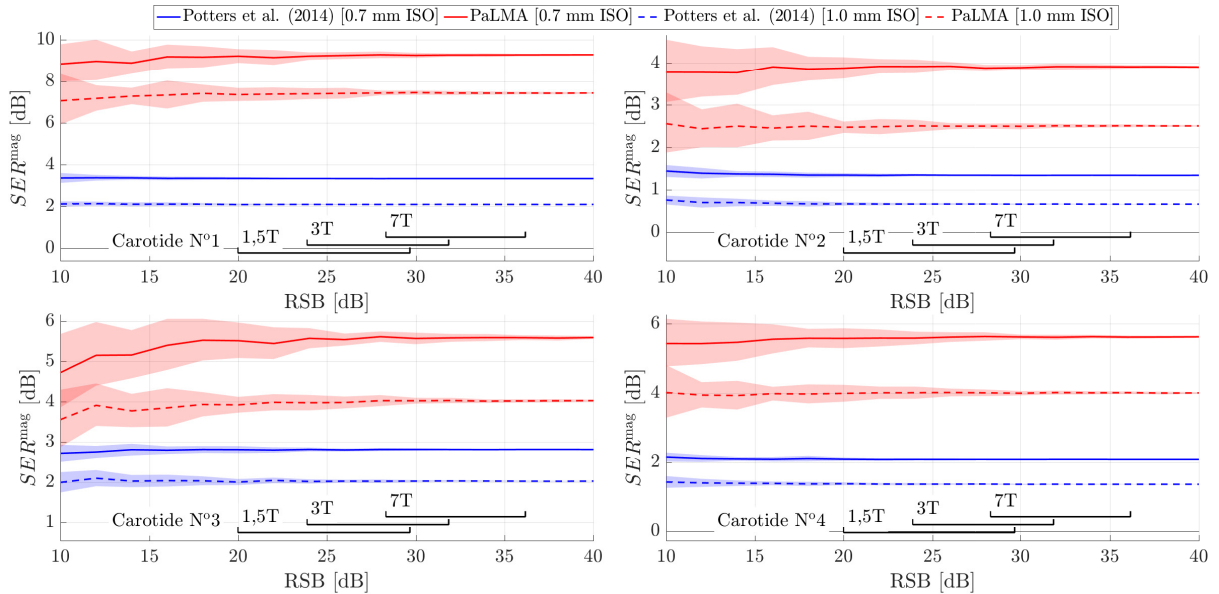


FIGURE 8.20. –  $SE R^{\text{mag}}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SE R^{\text{mag}}$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

Les résultats de PaLMA, à la résolution clinique, présentent des performances supérieures à l'algorithme de Potters et al. (2014) sur l'ensemble de l'intervalle de rapport signal sur bruit. Plus précisément, le  $SE R^{\text{mag}}$  est à minima 1,5 dB au dessus de la méthode concurrente localement ou sur l'ensemble de la carotide. La corrélation est de plus 5 % meilleure que l'approche concurrente à l'exception de la carotide N°4 avec environ 2 % de gain localement. L'erreur angulaire médiane est favorable à PaLMA et particulièrement pour les carotides N°1 et N°3.

La carotide N°4 a une sténose sévère asymétrique avec un pic de cisaillement supérieur à 90 Pa. L'une des conséquences est la création d'écoulements complexes en sortie de sténose. La modélisation du champ de vitesse est donc plus difficile car les variations sont potentiellement plus forte. De plus, il peut se créer des tourbillons d'échelle assez fine vis-à-vis de la résolution. L'un des moyens pour résoudre ce problème est d'utiliser une résolution plus fine. Par exemple, on note que le gain par rapport à l'approche de Potters et al. (2014) est supérieur avec une résolution de 0,7 mm. Par ailleurs, l'augmentation de la résolution bénéficie aux deux approches. Le gain est particulièrement significatif sur la corrélation et le  $SE R^{\text{mag}}$  avec respectivement au moins 5 % et 1 dB d'amélioration.

Ensuite, on observe que la tendance du  $SE R^{\text{mag}}$  pour les faibles rapports signal sur bruit est différente suivant que le calcul est fait localement ou sur l'ensemble de la

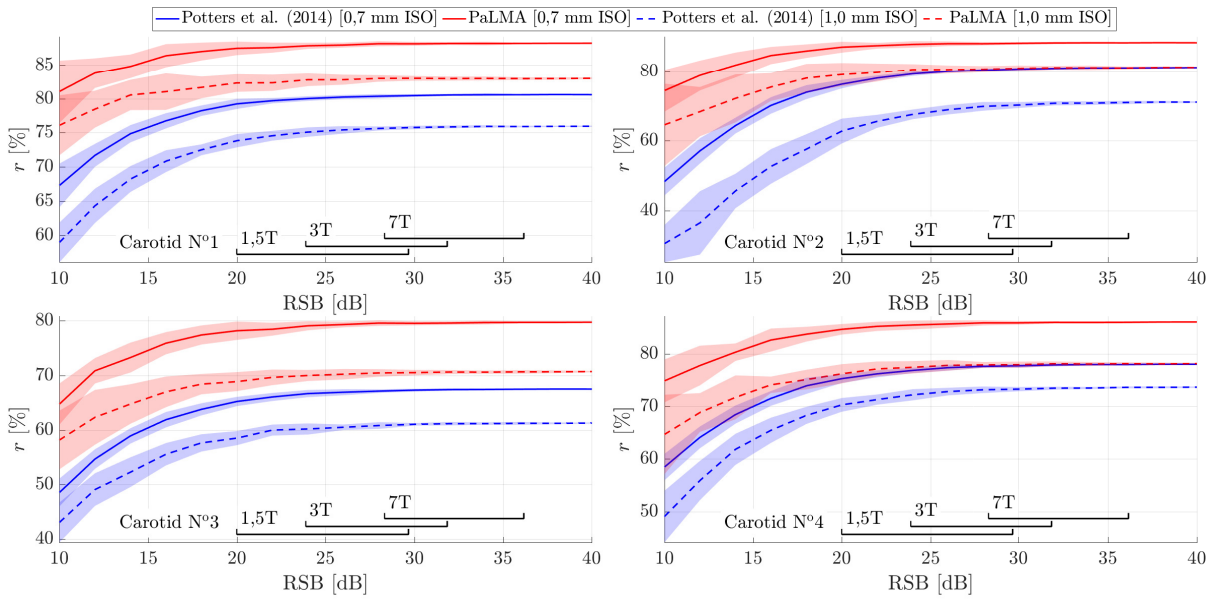


FIGURE 8.21. – Corrélation  $r$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. La corrélation  $r$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

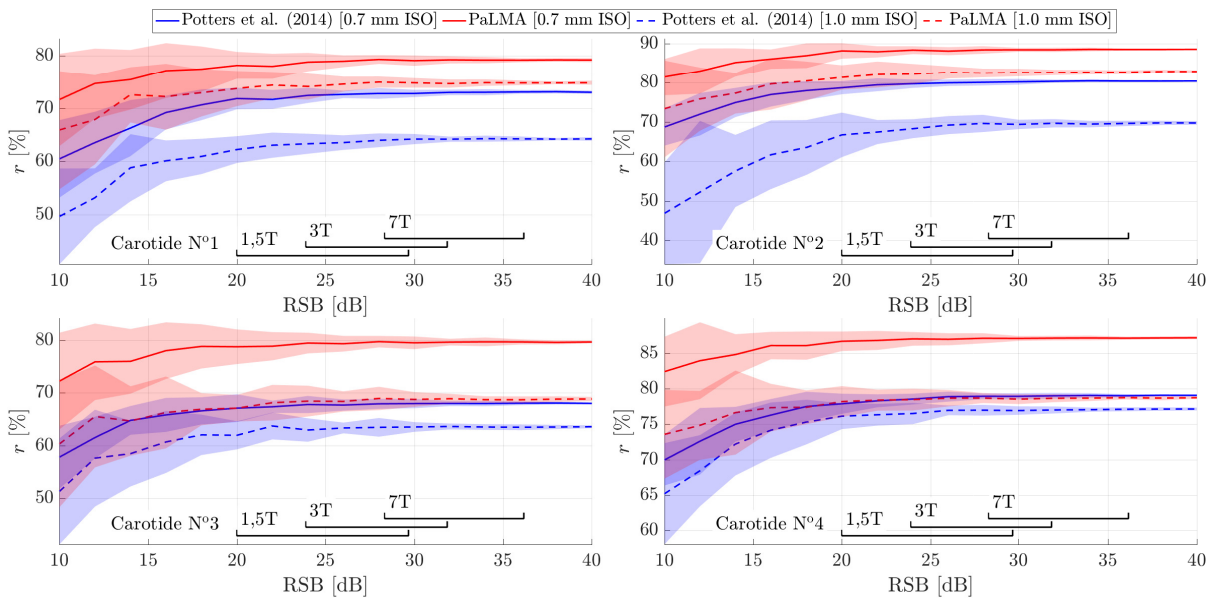


FIGURE 8.22. – Corrélation  $r$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. La corrélation  $r$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

carotide. En particulier, les performances ne décroissent que très peu localement avec la diminution du rapport signal sur bruit alors qu'elles diminuent progressivement en considérant toute la carotide. Cette différence tient à la répartition des vitesses. La zone d'intérêt contient la sténose et la norme de la vitesse  $y$  est importante. L'écart-type du bruit (2.10) dépend directement de la vitesse d'encodage. Par conséquent, le rapport de la vitesse moyenne sur l'écart-type du bruit est particulièrement favorable dans la zone

d'intérêt. Si on considère l'ensemble de la carotide, ce rapport est moins favorable car la vitesse moyenne sur l'ensemble de la carotide est plus faible. Cette remarque est valable spatialement et temporellement. Comme l'illustrent les figures de l'Annexe B.5, les indices de performance évalués sur tous les temps du cycle cardiaque sont plus impactés par le bruit. Toutefois, les critères de performances évalués sur tous les temps du cycle cardiaque restent favorables à la solution PaLMA.

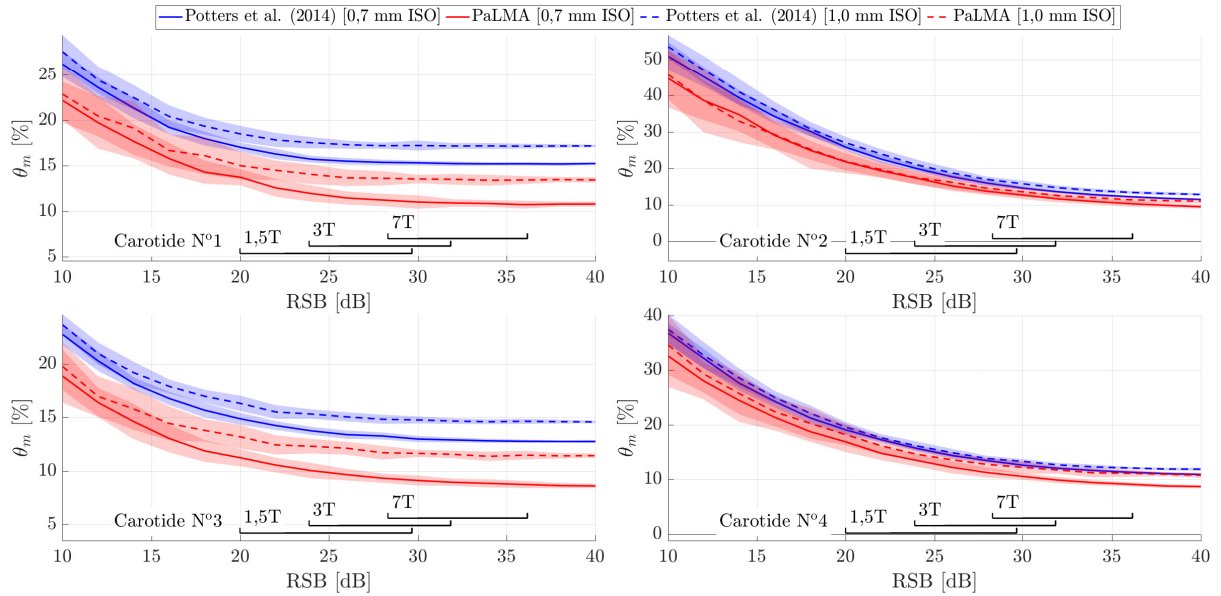


FIGURE 8.23. – Erreur angulaire médiane  $\theta_m$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire médiane  $\theta_m$  et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

Enfin, une résolution plus fine permet d'améliorer la quantification du cisaillement. Or, nous savons que le rapport signal sur bruit est dégradé avec l'augmentation de la résolution. Il est alors intéressant de quantifier la perte de rapport signal sur bruit à prendre en compte pour obtenir une résolution de 0,7 mm ISO. Ainsi, il est possible de déterminer s'il est plus favorable d'améliorer le rapport signal sur bruit ou plutôt la résolution. Sur la base de l'équation (2.9), on peut définir un rapport signal sur bruit de référence clinique pour un champ de vue et un temps d'acquisition fixe :

$$RSB_{cl} = 20 \times \log_{10} \left( \frac{\gamma B_0^2 \chi V_t}{\sqrt{2k_B T R}} \times \frac{\sqrt{\tau_t N_{ex}}}{(N_x^{cl} N_y^{cl} N_z^{cl})^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (8.4)$$

avec  $[N_x^{cl}, N_y^{cl}, N_z^{cl}]$  la matrice d'acquisition suivant un protocole clinique. On peut désormais introduire un coefficient d'augmentation de la résolution  $\alpha$  tel que la matrice d'acquisition soit :  $[\alpha N_x^{cl}, \alpha N_y^{cl}, \alpha N_z^{cl}]$ . Le rapport signal sur bruit s'écrit alors ainsi :

$$\begin{aligned} RSB_{HR} &= 20 \times \log_{10} \left( \frac{\gamma B_0^2 \chi V_t}{\sqrt{2k_B T R}} \times \frac{\sqrt{\tau_t N_{ex}}}{(\alpha N_x^{cl} \alpha N_y^{cl} \alpha N_z^{cl})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= RSB_{cl} - 90 \times \log_{10}(\alpha) \end{aligned} \quad (8.5)$$

En appliquant cette équation à notre cas d'étude, le coefficient  $\alpha$  vaut  $\frac{1}{0,7} \approx 1,43$ . Ainsi,



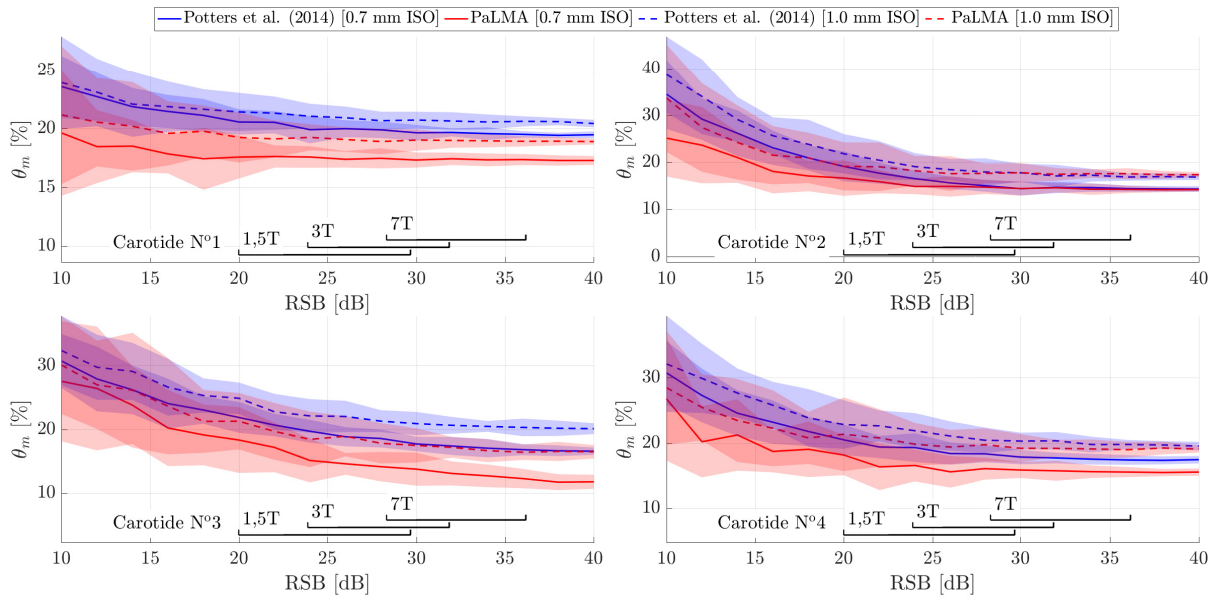


FIGURE 8.24. – Erreur angulaire médiane  $\theta_m$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire médiane  $\theta_m$  et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

l'amélioration de la résolution jusqu'à 0,7 mm ISO implique une perte de rapport signal sur bruit d'environ 14 dB. Dans ces conditions, la démarche consistant à augmenter la résolution est intéressante vis-à-vis de la quantification du cisaillement si le rapport signal sur bruit de référence est suffisamment élevé. Typiquement, cette stratégie est applicable sur des données IRM 3T ou 7T.

### 8.3.2. Étude en fonction de l'érosion/dilatation de la segmentation

L'étude de la segmentation est généralement conduit en appliquant une dilatation ou érosion de la paroi sur un cas d'étude simple. Potters et al. (2014) ont validé leur démarche sur l'écoulement de Poiseuille tandis que Sotelo et al. (2015) ont évalué leur solution 2D sur l'écoulement de Womersley. Ces études ont montré que le positionnement de la segmentation est important car il peut avoir un impact très significatif sur l'estimation du cisaillement à la paroi.

Par conséquent, l'évaluation de PaLMA a été effectuée sur l'écoulement de Womersley en comparaison avec les travaux de Potters et al. (2014). Le cisaillement à la paroi est estimé sur des données synthétiques non bruitées et avec l'application du filtre IRM. Comme précédemment, l'écoulement de Womersley est simulé dans un tube de rayon 1 cm. En revanche, la segmentation utilisée pour calculer le cisaillement à la paroi est dilatée ou érodée jusqu'à plus ou moins la résolution des données. La Figure 8.25 représente le *SER* calculé pour tous les temps en fonction du biais introduit sur le rayon de la segmentation. De la même manière, les Figures 8.26 et 8.27 représentent la corrélation et l'erreur angulaire moyenne en fonction de l'érosion ou la dilatation introduite. Ces graphes illustrent les indices de performance de PaLMA avec une ligne pleine rouge, de PaLMA sans prise en compte du filtre IRM avec une ligne rouge (avec tiret) et avec une ligne bleue pour la solution de Potters et al. (2014).

Les performances pour l'abscisse nul correspondent aux résultats sans erreur de

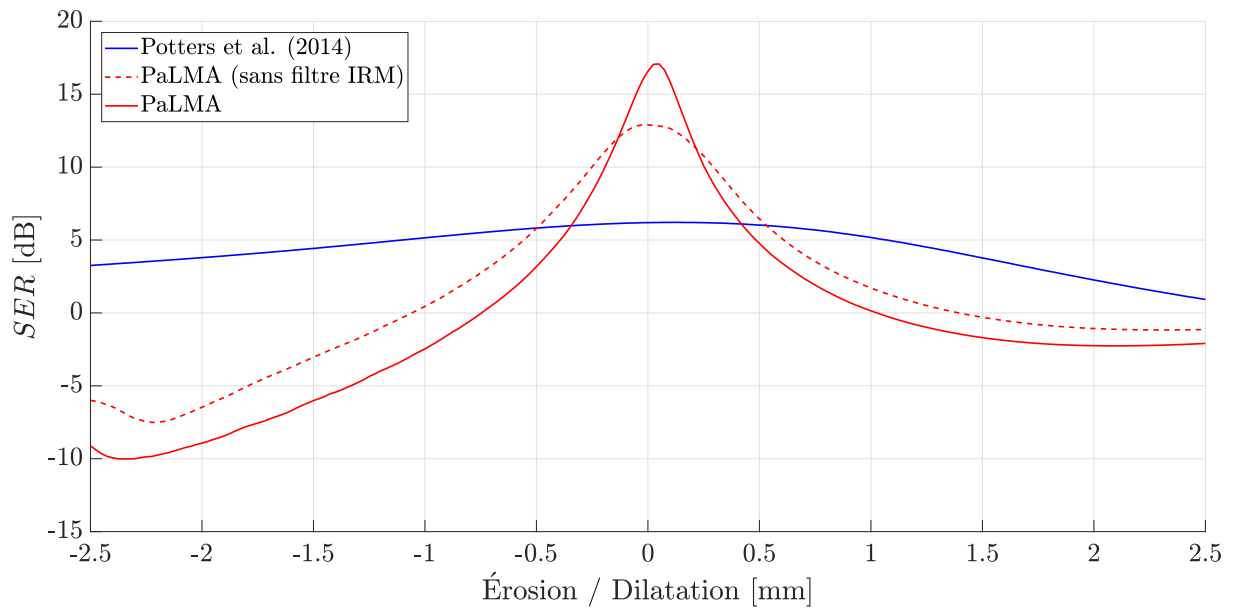


FIGURE 8.25. –  $SER$  en fonction de l'érosion/dilatation de la segmentation. Il s'agit d'une érosion si l'abscisse est négatif et d'une dilatation si positif. Le  $SER$  est calculé pour tous les temps du cycle cardiaque sur une simulation IRM sans bruit.

segmentation (et sans bruit). En terme de quantification, PaLMA est significativement impacté par l'erreur de segmentation avec une légère asymétrie au profit de la dilatation. Afin de conserver des performances supérieures à [Potters et al. \(2014\)](#), l'erreur de segmentation doit être 5 fois plus fine que la résolution. La prise en compte du filtre IRM permet un sérieux gain sans erreur de segmentation. Cependant, la sensibilité à l'erreur de segmentation augmente et cela réduit l'intervalle permettant un gain vis-à-vis de l'état de l'art. En terme de corrélation, le comportement est plus favorable à PaLMA. En effet, PaLMA est supérieur à [Potters et al. \(2014\)](#) quel que soit le niveau d'érosion introduit. Les performances s'améliorent même jusqu'à une dilatation de 0,5 mm. En revanche, une chute de la corrélation apparaît pour une dilatation entre 0,5 et 1,5 mm. Cette chute de corrélation est liée à la simulation des données synthétiques. Les données proches du domaine fluide sont incluses dans la zone de modélisation de la vitesse avec une pondération élevée (voir [Eq. \(6.16\)](#)). D'une part, celle-ci est élevée à cause de la proximité des nouvelles données avec le point d'intérêt. D'autre part, le domaine fluide a été entouré de données ayant une aimantation transversale non négligeable lors de la simulation des données synthétiques<sup>1</sup>. L'influence de ces points augmente alors fortement dans la solution puis diminue en s'éloignant du point d'intérêt. Par ailleurs, PaLMA est plus rapidement impacté que son équivalent n'utilisant pas le filtre IRM car il est plus sensible à l'ajout de nouvelles données erronées. En terme d'erreur angulaire, les conclusions sont similaires à la corrélation. PaLMA est assez peu sensible à l'érosion de la segmentation. Toutefois, l'erreur augmente significativement à partir de la dilatation pour laquelle la corrélation chute.

Dans l'ensemble, cette comparaison est plutôt favorable à la solution de [Potters et al. \(2014\)](#) et il existe plusieurs raisons à cela. D'une part, la vitesse est modélisée sur un support 1D avec seulement trois points équidistants s'étalant sur un rayon. Avec un rayon

1. L'objectif était de considérer l'épaisseur des couches supérieures à l'endothélium.

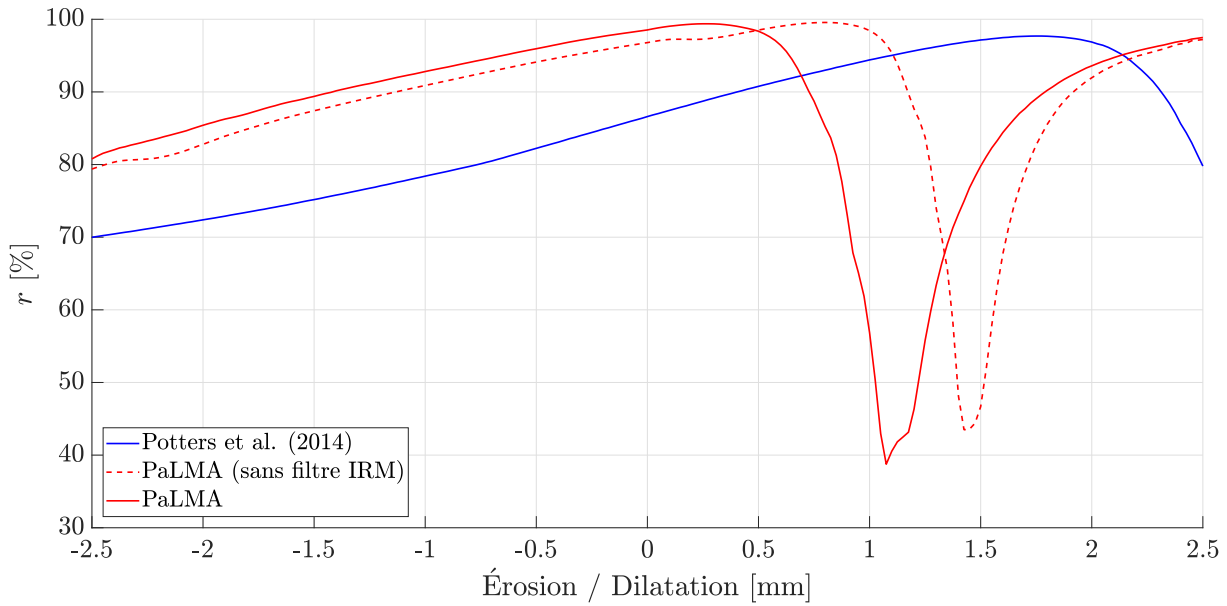


FIGURE 8.26. – Corrélation  $r$  en fonction de l'érosion/dilatation de la segmentation. Il s'agit d'une érosion si l'abscisse est négatif et d'une dilatation si positif. La corrélation  $r$  est calculée pour tous les temps du cycle cardiaque sur une simulation IRM sans bruit.

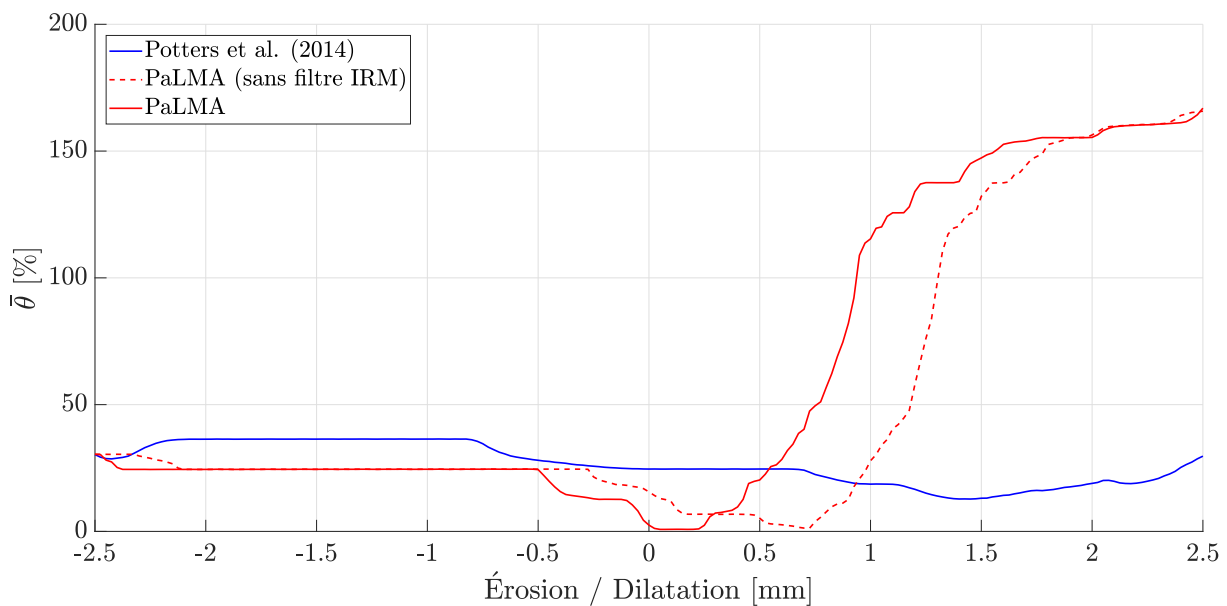


FIGURE 8.27. – Erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  en fonction de l'érosion/dilatation de la segmentation. Il s'agit d'une érosion si l'abscisse est négatif et d'une dilatation si positif. L'erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  est calculée pour tous les temps du cycle cardiaque sur une simulation IRM sans bruit.

de simulation à 1 cm, le point le plus proche de la paroi est à 3,3 mm. Par conséquent, l'impact de nouvelles données potentiellement corrompues est assez limité. La recherche d'une tendance au sein du domaine fluide leur permet de conserver des performances non négligeables. D'autre part, PaLMA est construit en partant d'un point d'intérêt au bord. L'impact d'une erreur de segmentation est d'autant plus importante que nous donnons un fort poids aux points proches de la paroi. Les performances de PaLMA pourraient être

améliorées en s’inspirant de ces éléments. D’une part, le retrait de la pondération ou une version moins sensible permettrait sûrement de gagner en robustesse (mais au risque de perdre en performance avec une segmentation précise). D’autre part, la modélisation de la vitesse basée sur une surface cubique non dégénérée (voir Eq. (5.9)) aurait l’avantage toujours considérer les points centraux du domaine fluide, et cela même dans le cas d’une dilatation.

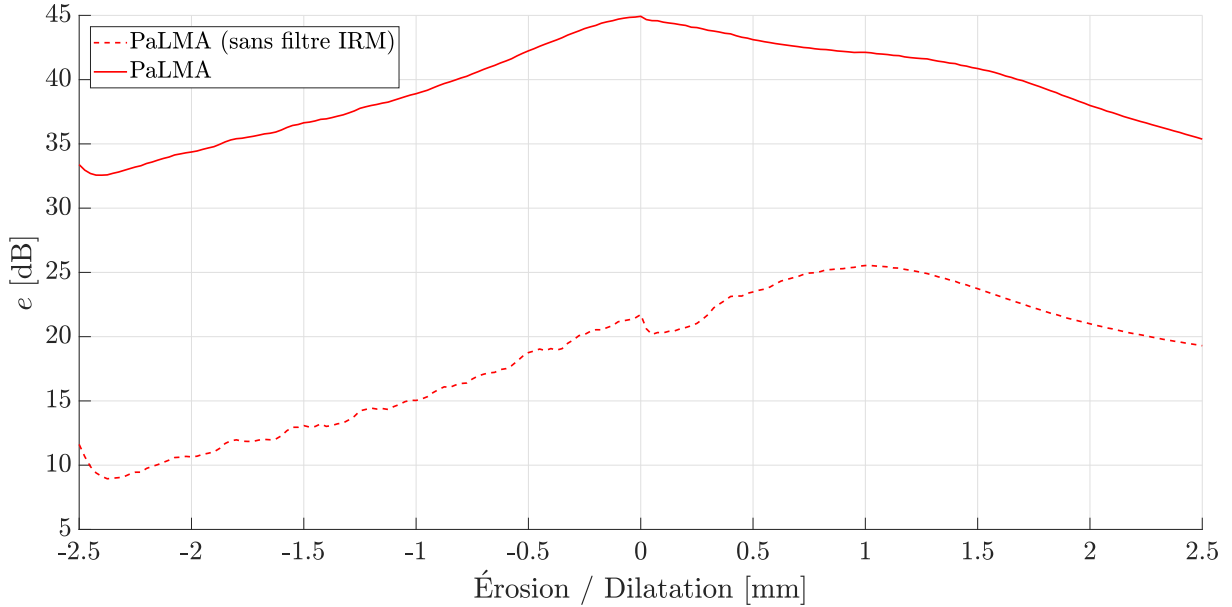


FIGURE 8.28. – Résidu normalisé moyen de l’ajustement en vitesse  $e$  en fonction de l’érosion/dilatation de la segmentation. Il s’agit d’une érosion si l’abscisse est négatif et d’une dilatation si positif. Le résidu normalisé  $e$  moyen est calculé pour tous les temps du cycle cardiaque sur une simulation IRM sans bruit.

Par ailleurs, la sensibilité de PaLMA à l’érosion ou dilatation peut servir à repositionner la paroi à condition que le résidu de l’ajustement du modèle de vitesse évolue dans ce sens. On définit alors le résidu normalisé sous la forme suivante :

$$e = 10 \times \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_d} w_i \|\vec{u}_i\|_2^2}{\sum_{i=1}^{N_d} w_i \|\vec{u}_i - \vec{v}_i\|_2^2} \right) \quad (8.6)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur vitesse issu des données,  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse modélisé et  $w$  la pondération telle que défini par l’équation (6.16). La Figure 8.28 représente le résidu normalisé  $e$  en fonction de la dilatation et l’érosion. On observe que le résidu normalisé de PaLMA atteint un pic en zéro. En d’autres termes, la différence entre le modèle de vitesse et les données diminue lorsque la paroi approche de sa position théorique. Par conséquent, il serait possible de modifier le modèle de vitesse de PaLMA afin de prendre en compte un biais de positionnement de la paroi. On observe par ailleurs que la solution PaLMA sans le filtre IRM atteint un pic vers 1 mm de dilatation. Cela démontre l’importance de la prise en compte du filtre IRM dans une telle démarche.

Pour conclure, la version actuelle de PaLMA doit être employée lorsque la segmentation est suffisamment précise pour garantir une bonne quantification du cisaillement à la paroi. Toutefois, une erreur systématique de dilatation ou érosion ne reflète pas les erreurs pouvant être réalisées lors de la segmentation. Afin de traiter ce sujet sur les carotides, nous avons

envisagé une autre stratégie. Celle-ci s'appuie sur l'ajout d'une perturbation, c'est-à-dire un bruit, sur la segmentation. Afin de conserver une segmentation globalement lisse, cette perturbation est filtrée spatialement avec un filtre moyennant. L'erreur peut être à la fois une érosion en un point du vaisseau et une dilatation pour un autre. L'amplitude de cette erreur est contrôlée entre zéro et la taille d'un voxel. Les résultats préliminaires, non présentés dans ce manuscrit, sont encourageants car ils montrent une décroissance des performances plus rapide pour PaLMA mais restant supérieur à [Potters et al. \(2014\)](#) sur un intervalle allant jusqu'à une résolution.

## 8.4. Synthèse

L'algorithme présenté au Chapitre 4 peut prendre la forme de différentes variantes de solution suivant le modèle de paroi, le modèle de vitesse et le traitement *a posteriori* du cisaillement. Nous avons défini la meilleure variante à partir de l'analyse de données IRM synthétiques (RSB = 20 dB) sur l'écoulement de Womersley et les écoulements complexes de quatre carotides présentant une sténose. Ces résultats ont montré le gain de PaLMA vis-à-vis de la littérature autant en terme de quantification que de corrélation ou même d'erreur angulaire. De plus, nous avons étudié pour la première fois l'influence du filtre IRM sur l'estimation du cisaillement à la paroi. En conséquence, PaLMA exploite un modèle de vitesse polynômial linéaire d'ordre 2 ajusté avec un filtre IRM moyennant sous une norme  $L_2$  et un post-traitement exploitant la norme de Huber. Des résultats préliminaires ont été présentés dans une conférence internationale (Levilly et al., 2019) et un article intitulé, "*Towards Quantitative Evaluation of Wall Shear Stress from 4D Flow Imaging*", a été soumis à publication (Levilly et al., 2020).

PaLMA a ensuite été évalué en fonction de différentes sources d'erreur en IRM de flux 4D. La solution proposée présente de meilleures performances par rapport à Potters et al. (2014) dans un intervalle de bruit représentatif de la pratique clinique. Les résultats sont positifs qu'ils soient observés sur l'ensemble de la carotide, sur une zone d'intérêt, et cela pour tous les temps ou seulement pour le temps systolique. De plus, PaLMA bénéficie plus largement de l'amélioration de la résolution. Cet aspect rend PaLMA plus intéressant encore pour l'application à de futures séquences d'IRM de flux 4D potentiellement mieux résolues. Enfin, la segmentation a un impact important sur la quantification du cisaillement à la paroi, comme attendu d'après la littérature. Cependant, nous avons montré que les bonnes performances de PaLMA sont conditionnées à la précision de la segmentation. La sensibilité de PaLMA à l'érosion ou la dilatation nous a permis d'envisager une perspective visant à introduire un biais de positionnement de la paroi à estimer lors de l'ajustement en vitesse.



# Conclusion

## Synthèse des travaux

L'objectif de cette thèse est le développement de solutions permettant d'améliorer la précision d'estimation de biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaire. Afin d'atteindre cet objectif, nous avons investigué deux axes de recherche. Le premier consiste à améliorer la précision du champ de vitesse mesuré afin que l'ensemble des biomarqueurs hémodynamiques soient améliorés. Le second axe de travail se focalise spécifiquement sur un biomarqueur d'intérêt de la communauté médicale : le cisaillement à la paroi. Celui-ci est un indicateur pour de nombreuses pathologies cardiovasculaires mais il est difficile à quantifier dans un contexte sous-résolu et bruité.

Dans un premier temps, nous avons proposé une solution permettant d'appliquer un filtrage spatio-temporel sur les données bruitées. Ce filtrage se compose de deux filtres indépendants : un spatial et un temporel. Le premier s'écrit en formulant le projecteur sur l'espace des champs de vecteurs vitesse incompressibles. Le second s'appuie sur une hypothèse de régularité temporelle en introduisant un terme de pénalisation quadratique circulant de la dérivée temporelle de la vitesse. La solution proposée présente un gain de performance, en terme de quantification et corrélation, avec la régularité temporelle et cela même si l'incompressibilité est imposée sous forme de contrainte. De plus, la formulation proposée permet d'accélérer le temps de calcul en parallélisant l'application du filtre spatial sur tous les temps du cycle cardiaque.

Dans un second temps, une nouvelle solution a été proposée pour la quantification du cisaillement à la paroi. Cet algorithme, PaLMA, s'appuie sur la modélisation de la paroi pour construire un modèle de vitesse paramétrique. De plus, une étape de régularisation finale permet de gagner en robustesse. Le modèle de paraboloïde utilisé classiquement ne s'avère pas assez riche pour représenter localement la paroi. Nous avons donc proposé une formulation cubique plus adaptée à nos besoins. Dans ces travaux, le filtre IRM a été inclus pour la première fois dans la formulation du problème. Celui-ci permet un gain significatif en terme de quantification. Par ailleurs, différents modèles de vitesse basés plus ou moins sur la mécanique des fluides ont été envisagés. En particulier, un modèle local de vitesse incompressible a été formulé, pour la première fois, pour l'estimation du cisaillement à la paroi. PaLMA a été évalué sur des données synthétiques avec un écoulement analytique, Womersley, ou la simulation numérique des fluides de quatre carotides présentant une sténose. L'écoulement de Womersley a été choisi pour représenter le flux sanguin au sein de l'aorte descendante. Les simulations numériques des fluides au sein des carotides, mesurées sur patient, ont permis de confronter l'algorithme proposé à des écoulements complexes. De plus, nous avons évalué PaLMA en fonction du rapport signal sur bruit, de la résolution et de la segmentation utilisée. Nous avons aussi pris soin d'estimer ses performances spatialement à l'échelle globale et locale ainsi que temporellement avec le comportement moyen sur tout le cycle cardiaque et un focus sur le temps systolique. Dans les conditions de bruit les plus défavorables, nous avons observé un gain en terme de quantification supérieur à 1,5 dB et d'au moins 3 % en terme de corrélation par rapport à l'état de l'art.



Par ailleurs, la capacité de quantification de PaLMA avec une meilleure résolution est plus importante que l'état de l'art. Par conséquent, nous pensons que PaLMA permettra d'exploiter au mieux les futures séquences d'acquisition potentiellement mieux résolues.

## Perspectives

L'évaluation de ce travail sur des données synthétiques devrait être complétée par une analyse plus approfondie avec des données réelles. En effet, les données réelles contiennent des erreurs non modélisées dans notre démarche comme les artéfacts de mouvement, l'inhomogénéité du champ magnétique, etc. Par conséquent, l'étude d'un cas *in-vitro* permettrait de compléter les résultats présentés dans ce manuscrit. Par ailleurs, nous avons observé une différence significative entre l'écoulement de Womersley et celui de carotides. En toute rigueur, une étude sur une géométrie complexe serait plus représentative pour évaluer PaLMA.

L'expérimentation sur données synthétiques a permis de guider le travail de développement. Typiquement, l'analyse de ces données a révélé que la contrainte spatiale imposée par l'incompressibilité est inadaptée au niveau des bords du domaine fluide. En effet, la contrainte n'est exacte que dans le domaine fluide et non sur l'ensemble de l'image. Ainsi, l'application de la contrainte seulement dans le domaine fluide constituerait une première évolution possible de nos développements. Suivant l'analyse des résultats de l'algorithme PaLMA, l'amélioration de la résolution des données serait une perspective ambitieuse mais réalisable. Nous avons proposé une solution qui pourrait potentiellement respecter la contrainte de temps de la routine clinique, grâce à la parallélisation sur carte graphique.

Les résultats obtenus avec PaLMA sont satisfaisants. Toutefois, certaines pistes intéressantes mériteraient d'être étudiées. Tout d'abord, la modélisation de la paroi s'est limitée à des surfaces dégénérées ne permettant pas de gérer le caractère tubulaire des vaisseaux. L'utilisation d'un modèle cubique non dégénéré permettrait de modéliser la paroi de manière plus fidèle. De plus, il serait intéressant de modéliser la vitesse sous contrainte d'incompressibilité avec ce type de surface. La conservation du débit d'un fluide incompressible, appliquée à ce type de surface, permettrait potentiellement de régulariser le problème de manière significative. Ensuite, les modèles de vitesse utilisés se limitaient à un support spatial. Or, les résultats du premier axe de travail ont montré que l'apport d'information temporelle permet de mieux régulariser. Un modèle de vitesse spatio-temporel, s'adaptant à une paroi potentiellement en mouvement suivant le temps, serait une perspective intéressante.

# Liste des publications

- Castagna, M., Levilly, S., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., Rousset, J.-M., Bonnefoy, F., Idier, J., Serfaty, J.-M., & Le Touzé, D. Validation of PC-MRI derived wall shear stress with computational fluid dynamics and laser doppler velocimetry. *En soumission : Magnetic Resonance in Medicine*, Janvier 2020.
- Levilly, S., Idier, J., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., & Serfaty, J.-M. Filtrage spatio-temporel en IRM de flux sanguin 4D. In *Actes du XXVIème colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-Les-Pins, France, Juillet 2017a.
- Levilly, S., Idier, J., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., & Serfaty, J.-M. Spatio-temporal filtering of blood flow in 4D phase-contrast MRI. In *Society for Magnetic Resonance Angiography, 29th Annual International Conference (SMRA 2017)*, Stellenbosch, South-Africa, Septembre 2017b.
- Levilly, S., Idier, J., Le Touzé, D., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., & Serfaty, J.-M. Spatio-temporal filtering of blood flow in 4D phase-contrast MRI. In *Colloque de Recherche Inter-Écoles Centrales (CRIEC)*, Nantes, France, Septembre 2018.
- Levilly, S., Idier, J., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., & Serfaty, J.-M. Wall shear stress quantification in the context of 4D flow MRI simulation on carotids. In *Society for Magnetic Resonance Angiography, 31st Annual International Conference (SMRA 2019)*, Nantes, France, Août 2019.
- Levilly, S., Castagna, M., Idier, J., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Paul-Gilloteaux, P., Saïd, M., & Serfaty, J.-M. Toward quantitative evaluation of wall shear stress from 4D flow imaging. *En soumission : Magnetic Resonance Imaging*, Janvier 2020.



# Annexe A

## Écoulements analytiques et simulés

### A.1. Écoulement analytique de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est souvent employé dans la littérature pour vérifier la démarche proposée (Bostan et al., 2015a; Potters et al., 2014; Sotelo et al., 2016). Cet écoulement est la solution aux équations de Navier-Stokes sous plusieurs hypothèses. On suppose tout d'abord que le fluide est newtonien (visqueux). Le fluide circule dans un tube droit de longueur infinie et de section circulaire. Enfin, l'écoulement est supposé stationnaire, laminaire et incompressible. La résolution des équations de Navier-Stokes permet de montrer que la vitesse est uni-directionnelle et constante suivant l'axe du tube  $\vec{e}_x$ . De plus, la vitesse n'est fonction que la distance radiale  $r$  telle que :

$$\vec{v}(r) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \vec{e}_x \quad (\text{A.1})$$

où  $R$  est le rayon du tube,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est un gradient de pression uniforme et  $\mu$  la viscosité dynamique. Le débit  $Q$  dans une section du tube s'obtient analytiquement avec :

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi R^4}{8\mu} \quad (\text{A.2})$$

Le modèle de vitesse étant défini analytiquement, il est possible d'écrire le cisaillement à la paroi d'un fluide Newtonien tel que :

$$\vec{\tau} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{R}{2} = \frac{4\mu Q}{\pi R^3} \quad (\text{A.3})$$

### A.2. Écoulement analytique de Womersley

La solution des équations de Navier-Stokes au sein d'un tube droit et dans un cadre pulsé a été montré pour la première fois dans les travaux de Womersley (1955). L'écoulement de Womersley a été développé dans le but de modéliser la vitesse d'un fluide visqueux au sein des artères. Des travaux récents (Barker et al., 2010; Sotelo et al., 2015) exploitent ce modèle afin de valider une application sur des données synthétiques pertinentes. En effet, l'écoulement de Poiseuille ne reflète pas la complexité d'un écoulement sanguin pulsé. L'écoulement de Womersley est basé sur les mêmes hypothèses que Poiseuille à l'exception

de la stationnarité du gradient de pression.

En effet, le gradient de pression n'est plus constant mais modulé sinusoidalement tel que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{Re} \left[ G_1 e^{i\omega t} \right] \quad (\text{A.4})$$

avec la pulsation  $\omega = 2\pi f$  et  $G_1$  l'amplitude complexe du gradient de pression. En résolvant les équations de Navier-Stokes avec ce gradient de pression, la vitesse axiale s'écrit :

$$\vec{v}_1(r, t) = \text{Re} \left[ \frac{G_1 R^2}{i\mu\alpha^2} \left( 1 - \frac{J_0(i^{3/2}\alpha r/R)}{J_0(i^{3/2}\alpha)} \right) e^{i\omega t} \right] \vec{e}_x \quad (\text{A.5})$$

$$= \text{Re} \left[ v_1^*(r/R) e^{i\omega t} \right] \vec{e}_x \quad (\text{A.6})$$

où  $\alpha = R\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}}$  désigne le nombre de Womersley,  $v_1^*$  est l'amplitude complexe du profil de vitesse et  $J_n$  représente les fonctions de Bessel de première espèce. On en déduit le débit à travers une section de surface  $S$  tel que :

$$Q_1(t) = \int_S v_1(r/R, t) dS \quad (\text{A.7})$$

$$= \text{Re} \left[ \frac{\pi G_1 R^4}{\mu i \alpha^2} \left( 1 - \frac{2}{i^{3/2}\alpha} \frac{J_1(i^{3/2}\alpha)}{J_0(i^{3/2}\alpha)} \right) e^{i\omega t} \right] \quad (\text{A.8})$$

et le cisaillement à la paroi :

$$\vec{\tau}_1(r, t) = -\mu \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial r}(r = R, t) \quad (\text{A.9})$$

$$= \text{Re} \left[ -\frac{G_1 R i^{1/2}}{\alpha} \frac{J_1(i^{3/2}\alpha)}{J_0(i^{3/2}\alpha)} e^{i\omega t} \right] \vec{e}_x \quad (\text{A.10})$$

Lorsque le gradient de pression est plus complexe qu'une seule sinusoïde, il peut être décomposé en un terme stationnaire, correspondant à Poiseuille, et plusieurs termes de pulsations différentes. Cette démarche peut être réalisée directement sur le débit avec une transformée de Fourier discrète afin de déterminer toutes les composantes  $G_1$  du gradient de pression.

La simulation utilisée dans ce travail a été réalisée à partir du débit présenté dans les travaux de (Puelz et al., 2017, Fig. 11). L'écoulement est supposé laminaire avec une viscosité dynamique de 0,025 Pa.s, un nombre de Reynolds de 700 et un nombre de Womersley de 5,16 pour un diamètre de 2 cm. Le rythme cardiaque est fixé à 60 battements par seconde. Le débit, illustré par la Figure A.1a, a été échantillonné sur 300 temps de manière à obtenir une description fine de l'écoulement. Le reste de l'étude a été mené avec seulement 30 phases cardiaques régulièrement espacées. La Figure A.1b représente la vitesse axiale suivant l'axe radial pour la moitié des 30 phases cardiaques sélectionnées.

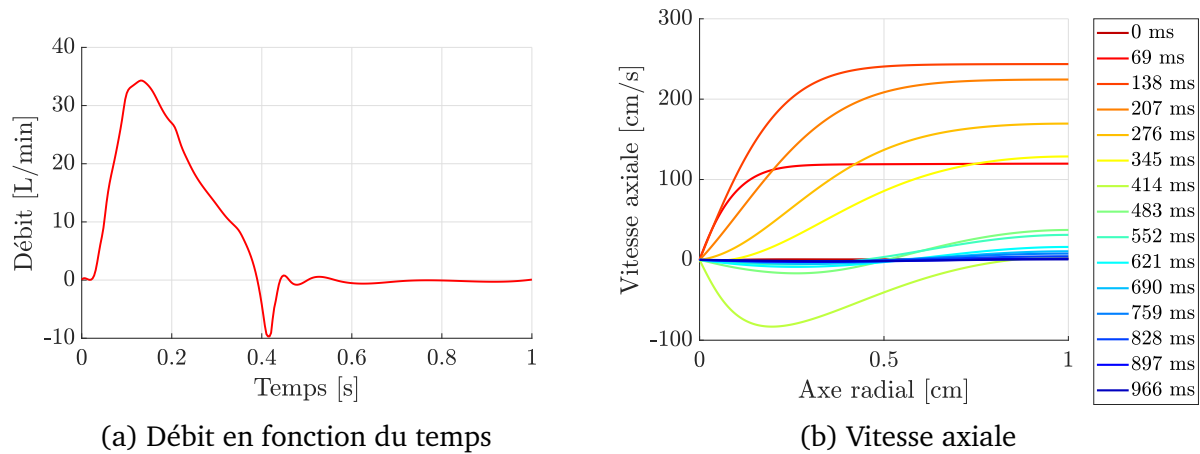


FIGURE A.1. – Débit sanguin en fonction du temps en (a). Vitesse axiale en fonction de la distance radiale à la paroi pour des écoulements dans un tube droit (b).

### A.3. Simulation numérique des fluides de 4 carotides

Les simulations numériques des fluides ont été réalisées par Monica Sigovan (CREATIS, Lyon) suivant la démarche présentée à la Section 4.2.1. La Figure A.2 montre les maillages qui ont servi pour la simulation des carotides. On observe en rouge la paroi où la vitesse est supposée nulle, en raison du caractère visqueux du fluide, et en bleu les surfaces d'entrée et sortie du fluide. Le débit est imposé directement à l'entrée des carotides (surface bleue du bas). La Figure A.3 regroupe quelques lignes de courant au temps systolique pour les trois carotides restantes. On observe des phénomènes de recirculation après les bifurcations et les sténoses. À noter que la sténose de la carotide N°2 est la plus sévère des cas étudiés. La carotide N°4 présente une sténose asymétrique créant des recirculations très complexes et de petite dimension par rapport à la résolution. Les Figures A.4, A.5, A.6 et A.7 présentent le cisaillement à la paroi de chaque carotide pour trois temps du cycle cardiaque, le premier étant le temps systolique. Enfin, tous ces écoulements sont laminaires car leur nombre de Reynolds est inférieur à 2000 (voir le Tableau A.1).

	Carotide N°1	Carotide N°2	Carotide N°3	Carotide N°4
Rayon de 2 mm	192	141	110	137
Rayon de 5 mm	480	354	275	343

TABLE A.1. – Tableau regroupant les nombres de Reynolds pour les rayons minimal et maximal.

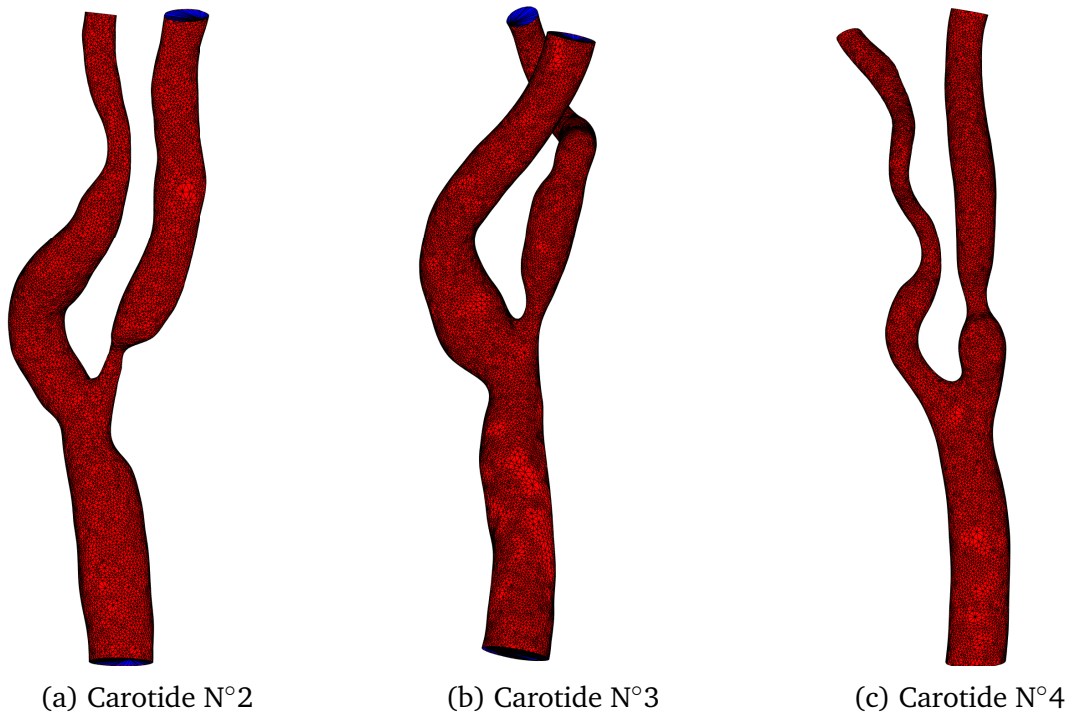


FIGURE A.2. – Maillage utilisé pour la simulation avec en rouge la paroi et en bleu les surfaces d'entrée et sortie.

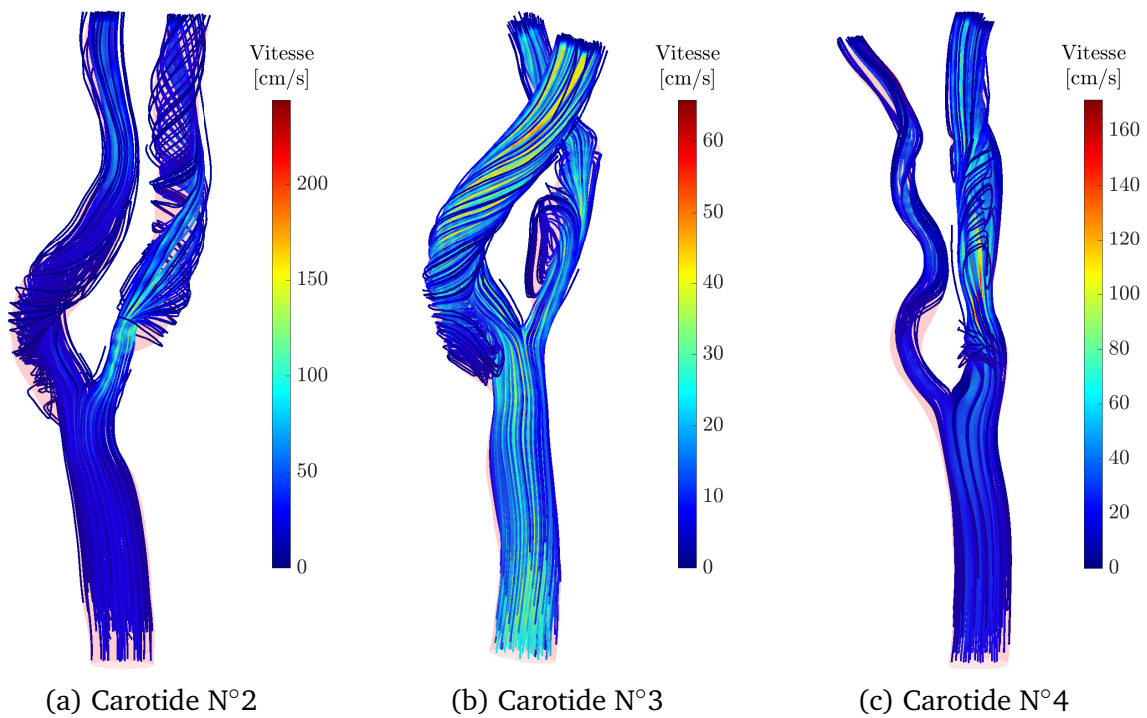


FIGURE A.3. – Lignes de courant au temps systolique des simulations numériques des fluides.

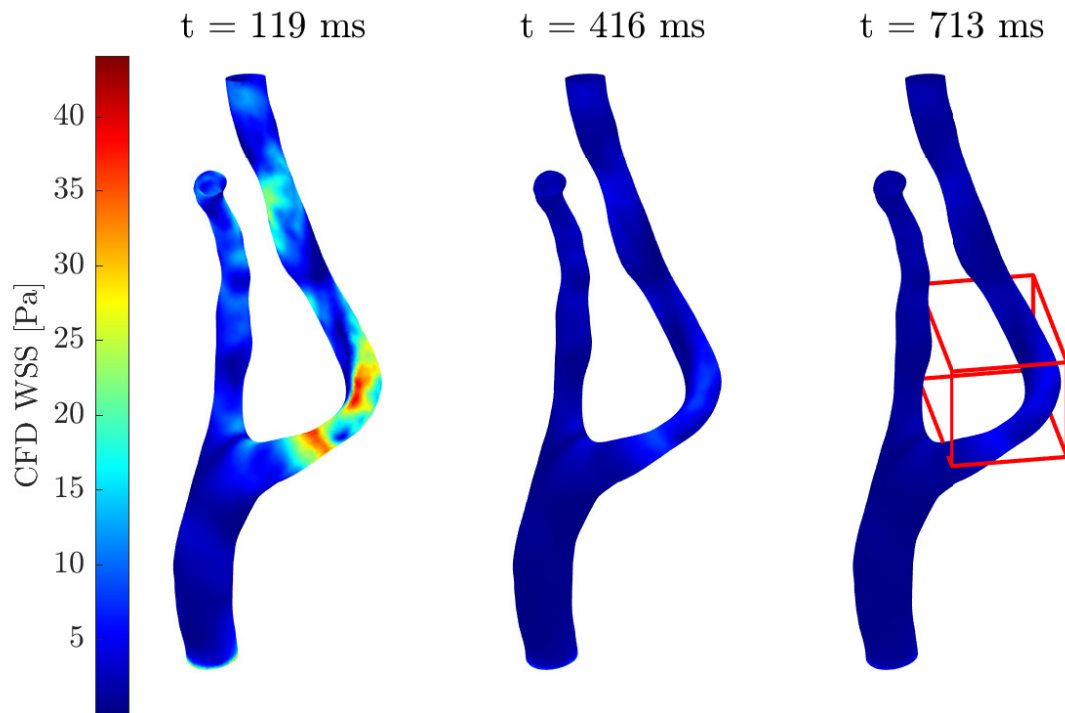


FIGURE A.4. – Norme du cisaillement de la carotide N°1. Le cadre rouge désigne une zone d'intérêt locale autour d'une sténose.

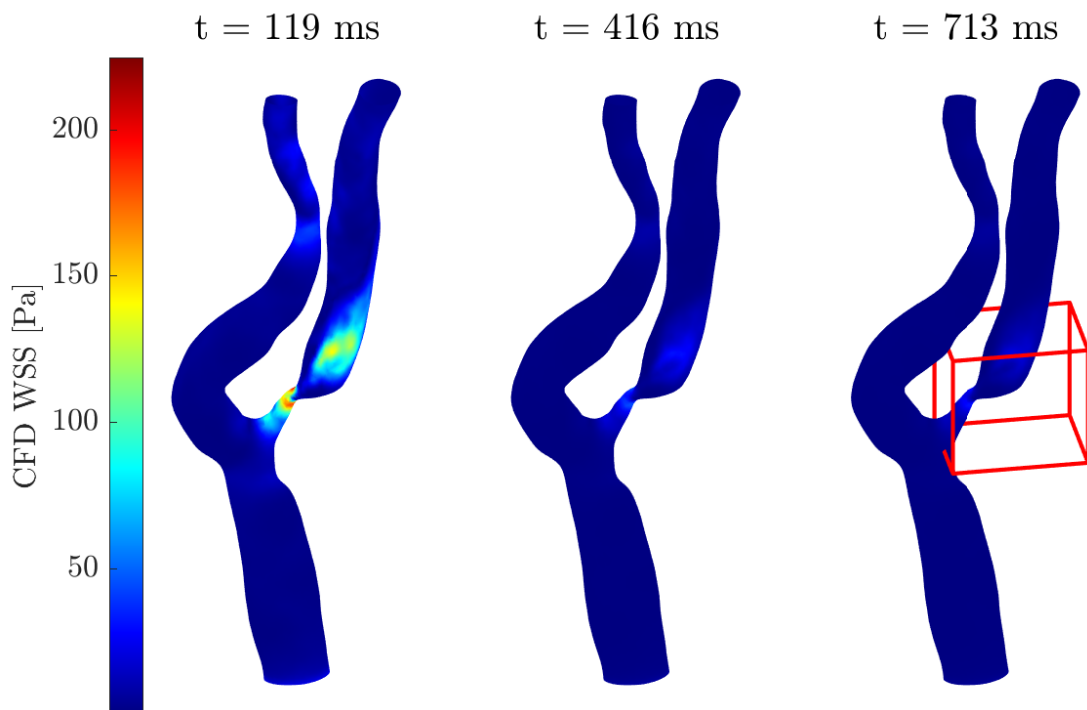


FIGURE A.5. – Norme du cisaillement de la carotide N°2. Le cadre rouge désigne une zone d'intérêt locale autour d'une sténose.



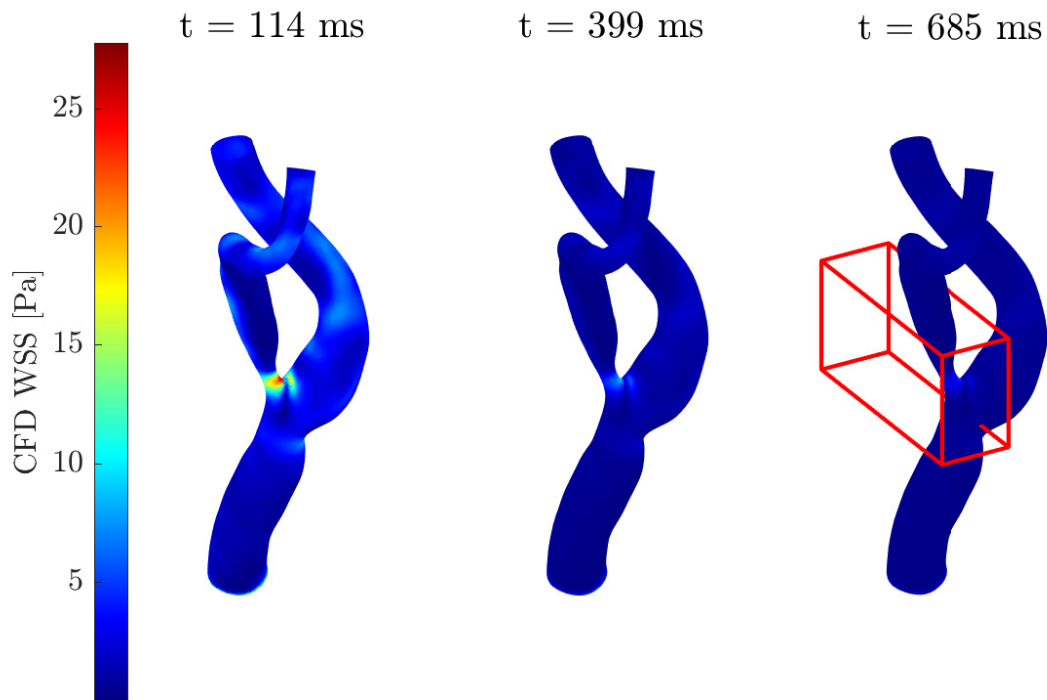


FIGURE A.6. – Norme du cisaillement de la carotide N°3. Le cadre rouge désigne une zone d'intérêt locale autour d'une sténose.

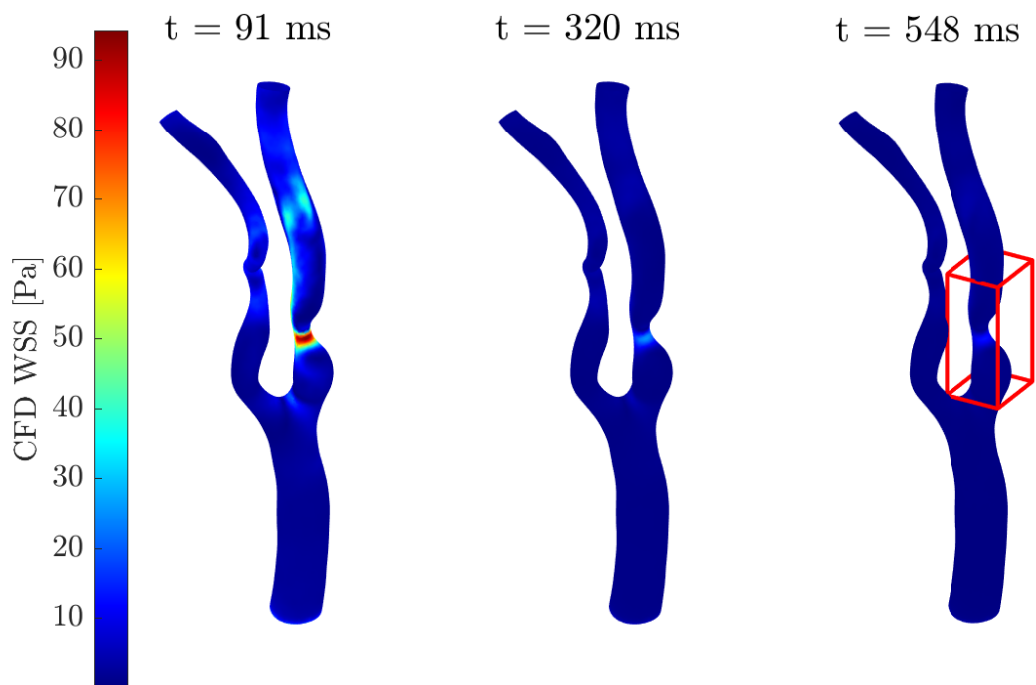


FIGURE A.7. – Norme du cisaillement de la carotide N°4. Le cadre rouge désigne une zone d'intérêt locale autour d'une sténose.

# Annexe B

## Résultats supplémentaires

### B.1. Étude sur le choix de la norme

#### B.1.1. Modèle linéaire

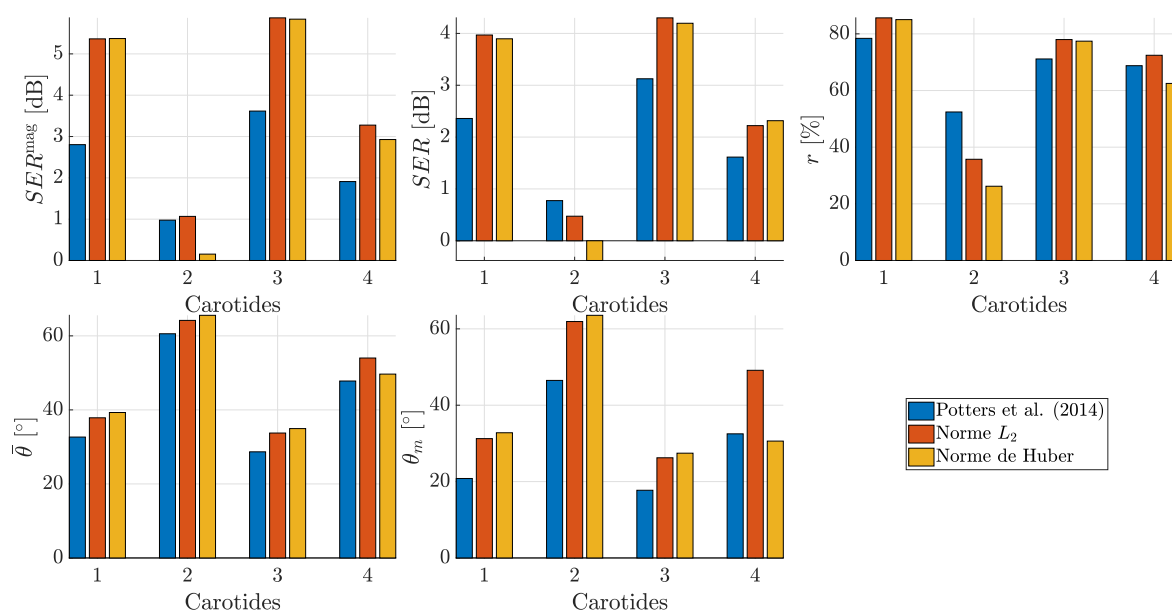


FIGURE B.1. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

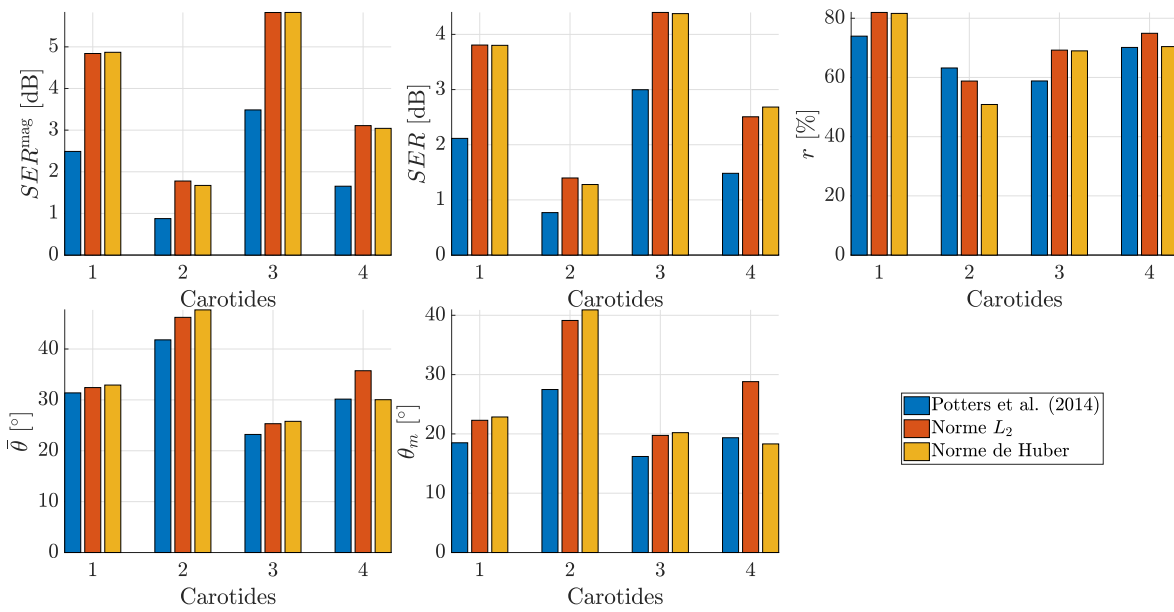


FIGURE B.2. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

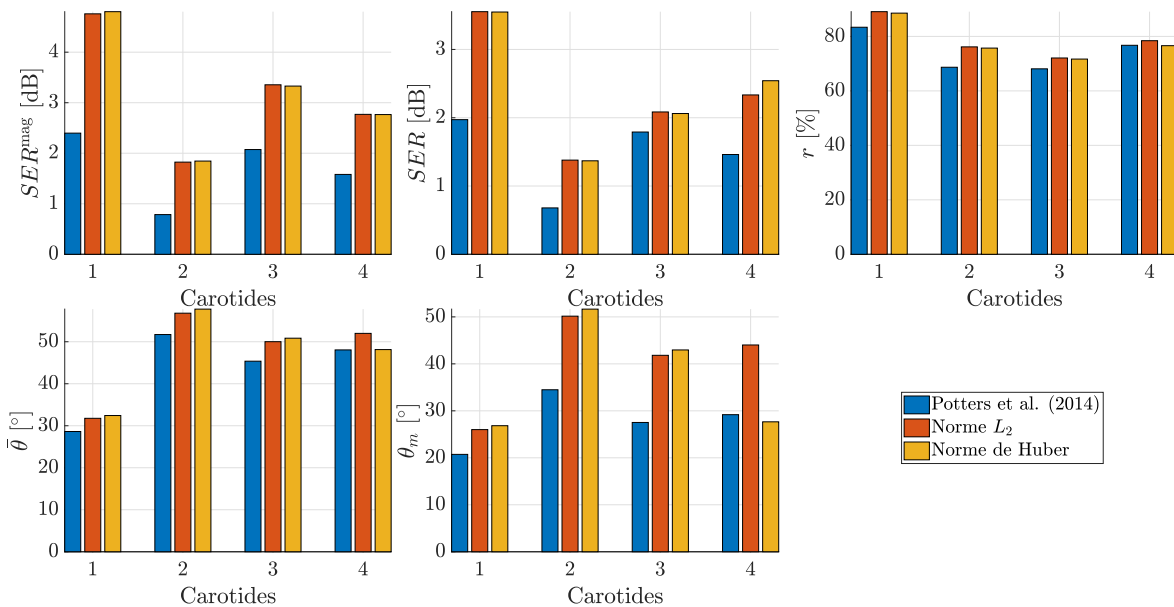


FIGURE B.3. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

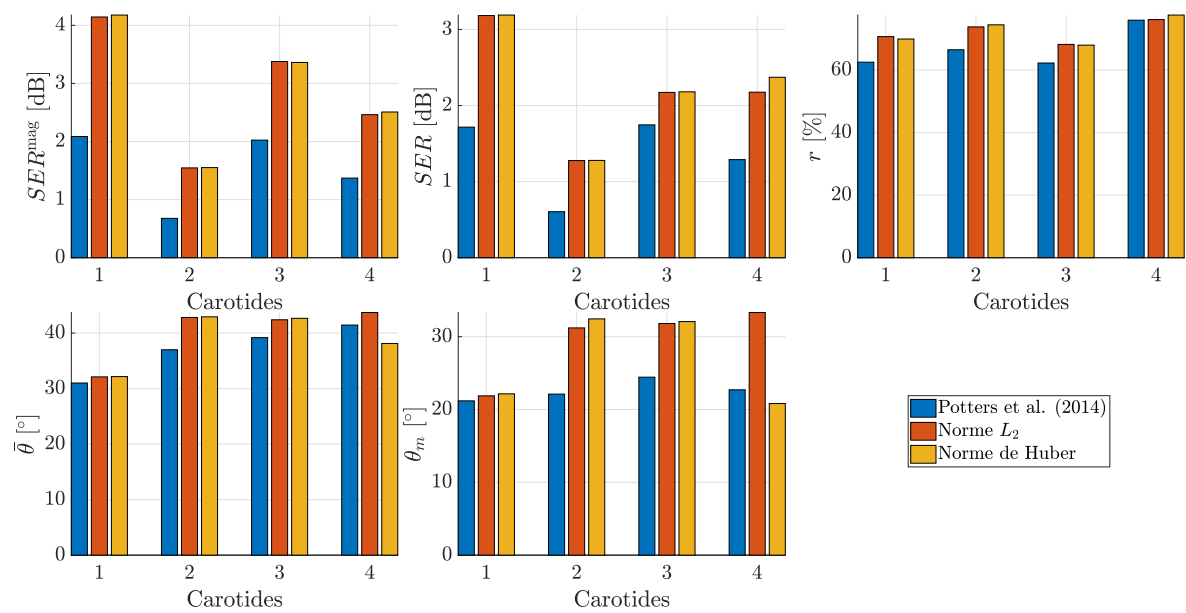


FIGURE B.4. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

### B.1.2. Modèle à fonctions séparables univariées

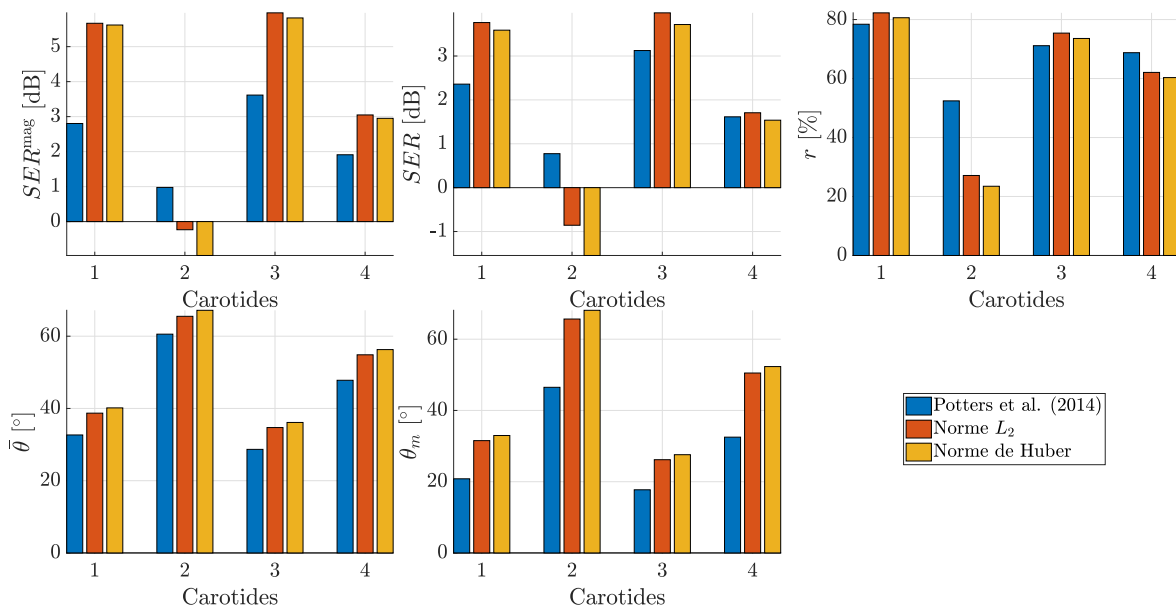


FIGURE B.5. – Critères de performance moyennés du modèle à fonctions séparables univariées en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

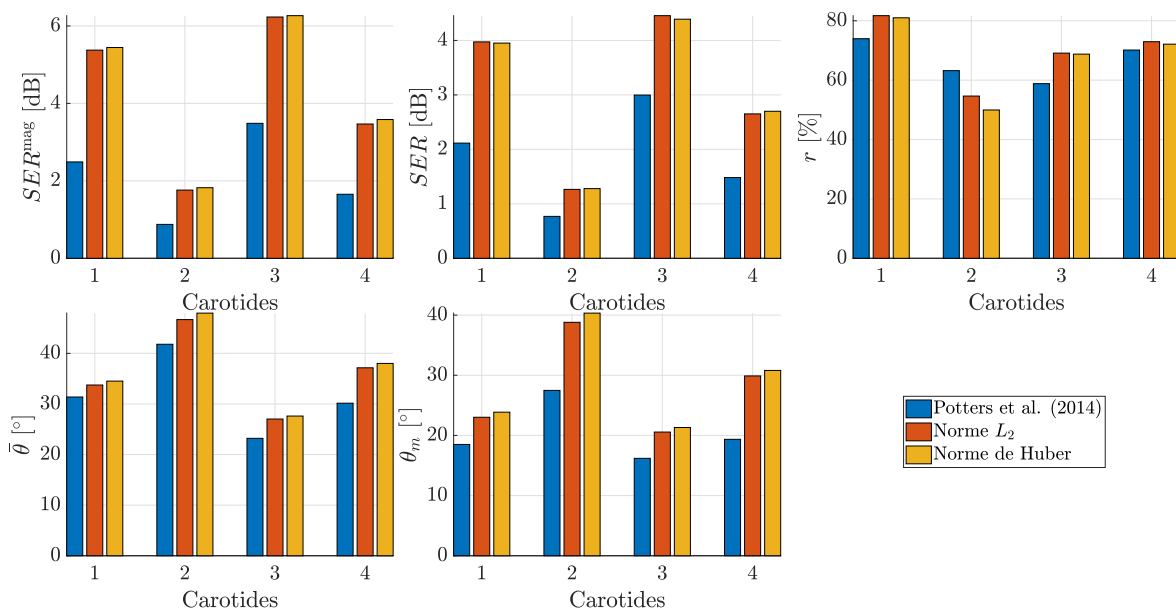


FIGURE B.6. – Critères de performance moyennés du modèle à fonctions séparables univariées en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

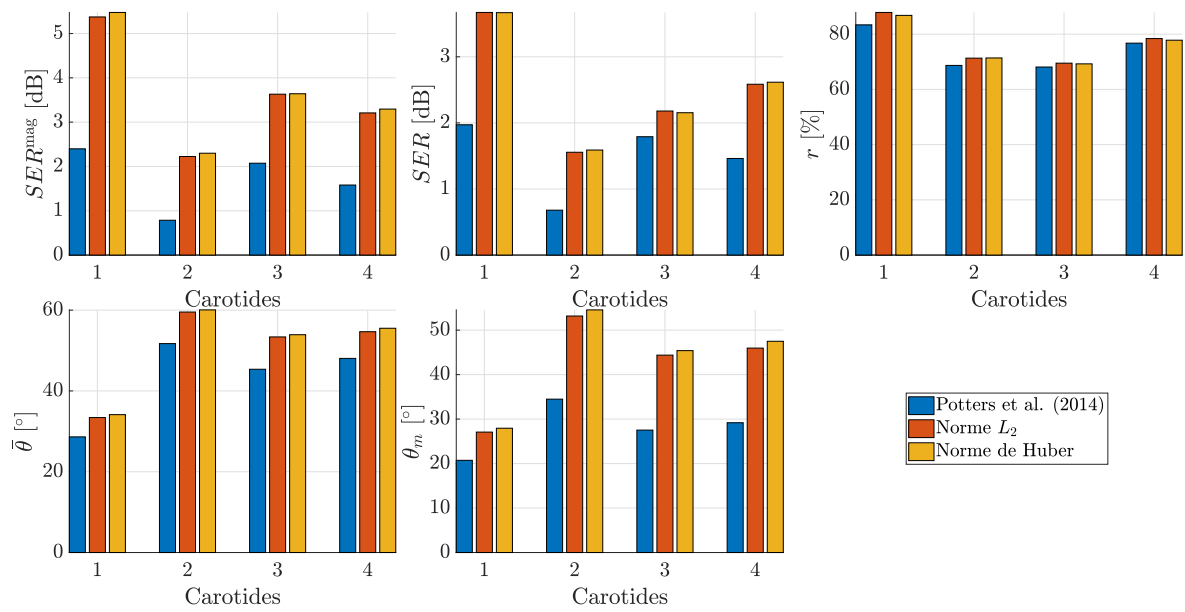


FIGURE B.7. – Critères de performance moyennés du modèle à fonctions séparables univariées en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

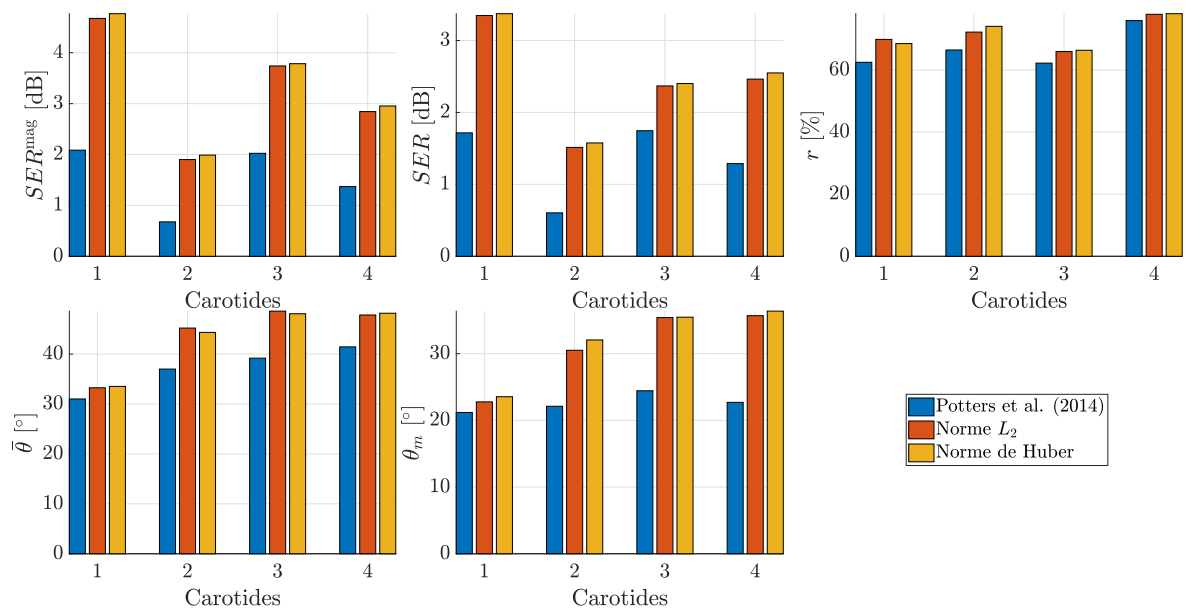


FIGURE B.8. – Critères de performance moyennés du modèle à fonctions séparables univariées en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

### B.1.3. Modèle incompressible

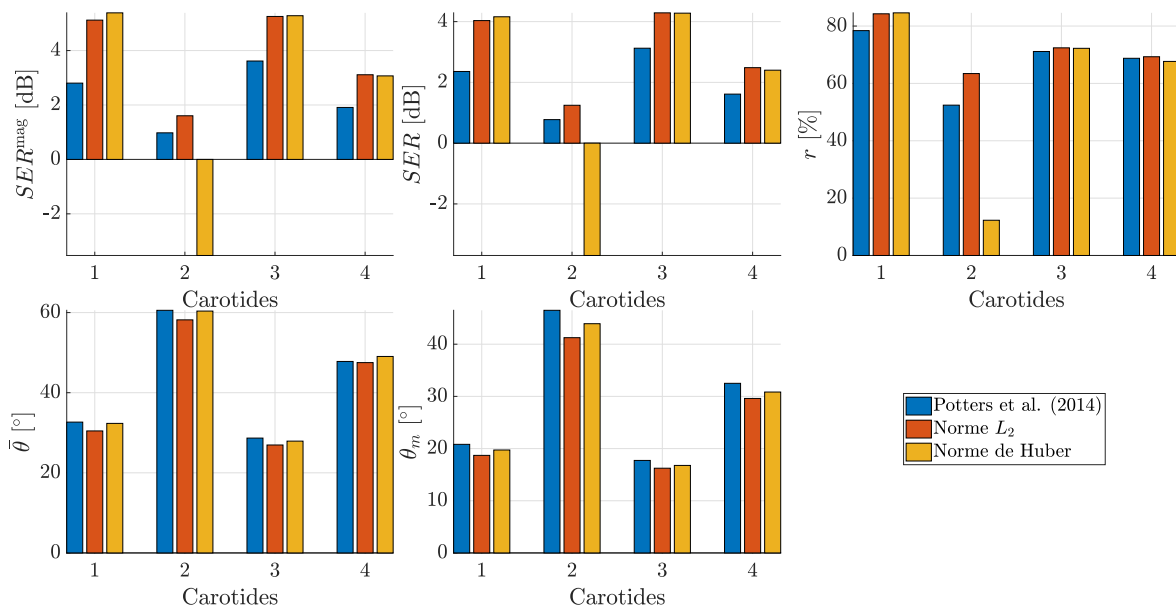


FIGURE B.9. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

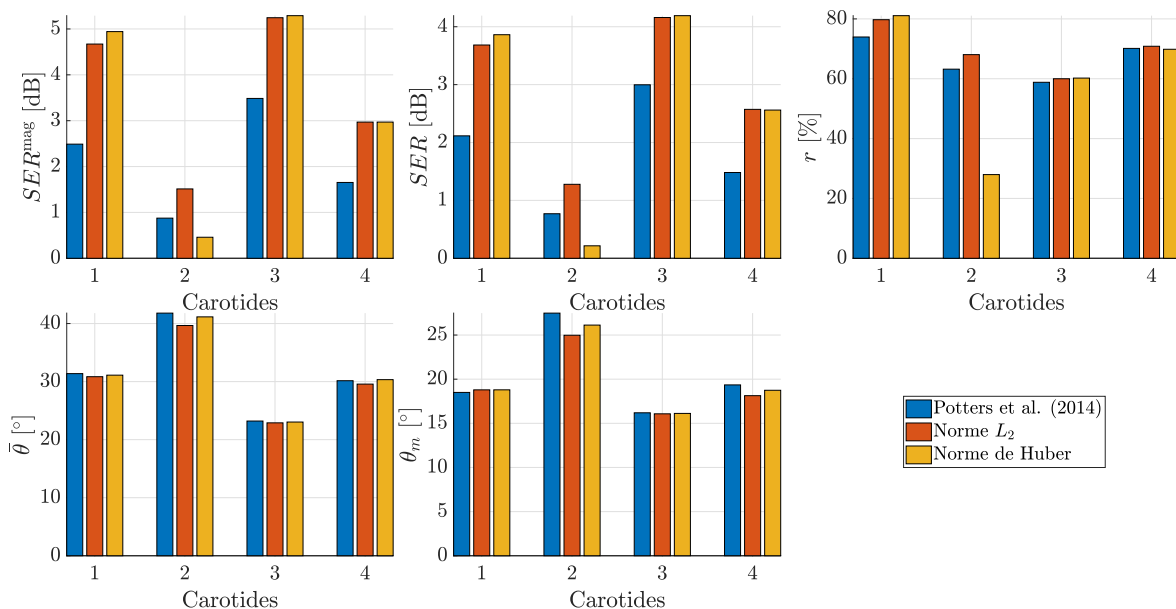


FIGURE B.10. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

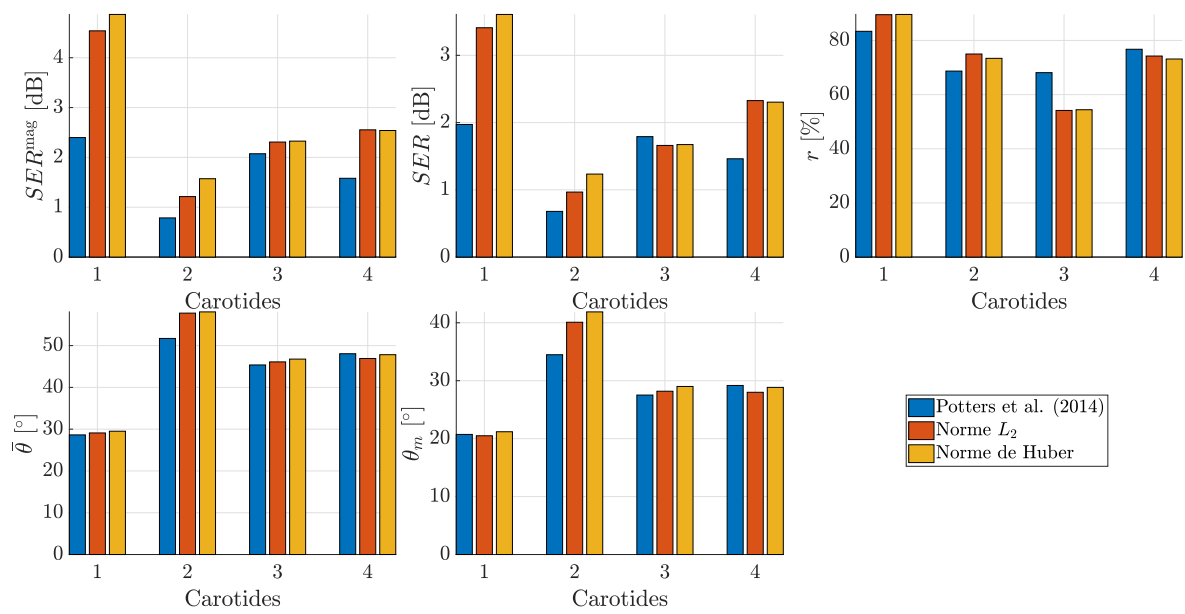


FIGURE B.11. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

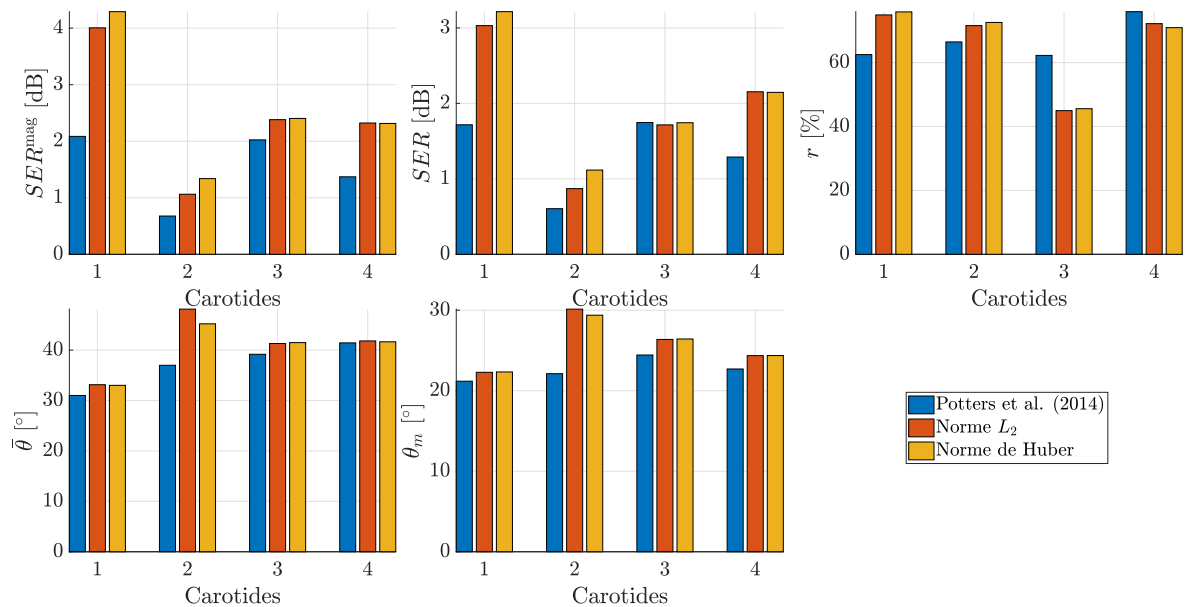


FIGURE B.12. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du choix de la norme pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.



## B.2. Étude sur les solutions de post-traitement

### B.2.1. Modèle linéaire

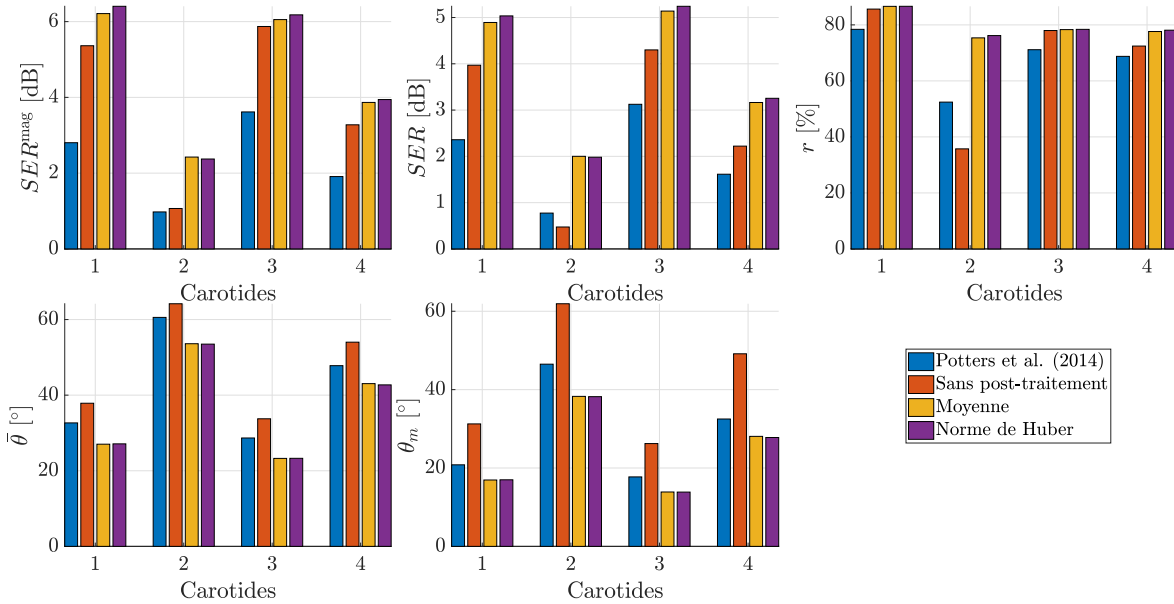


FIGURE B.13. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

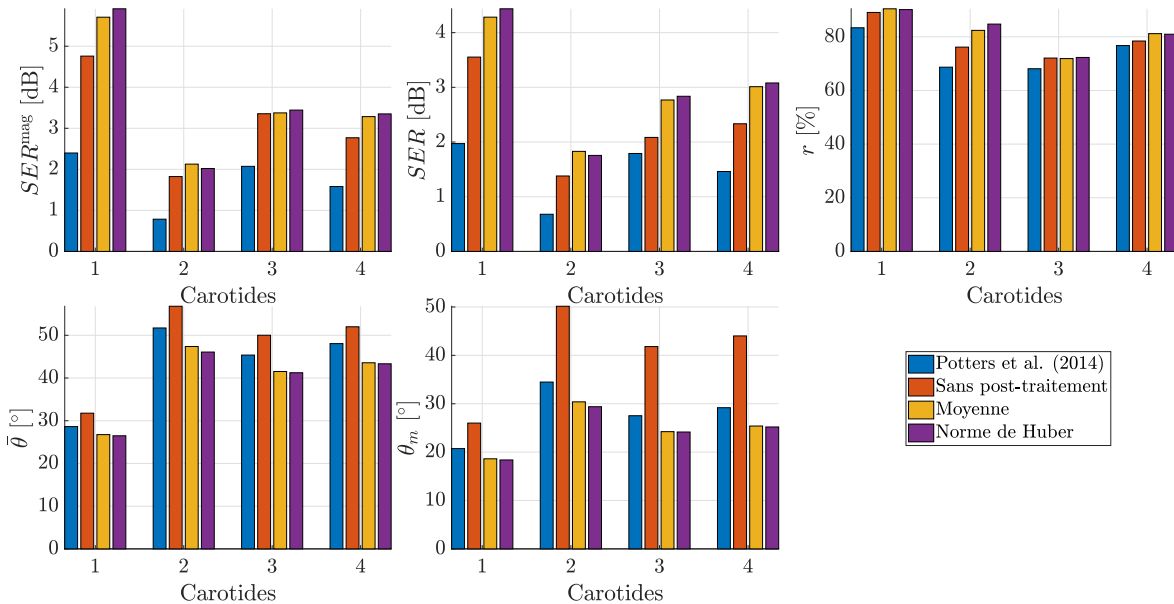


FIGURE B.14. – Critères de performance moyennés du modèle linéaire en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

### B.2.2. Modèle incompressible

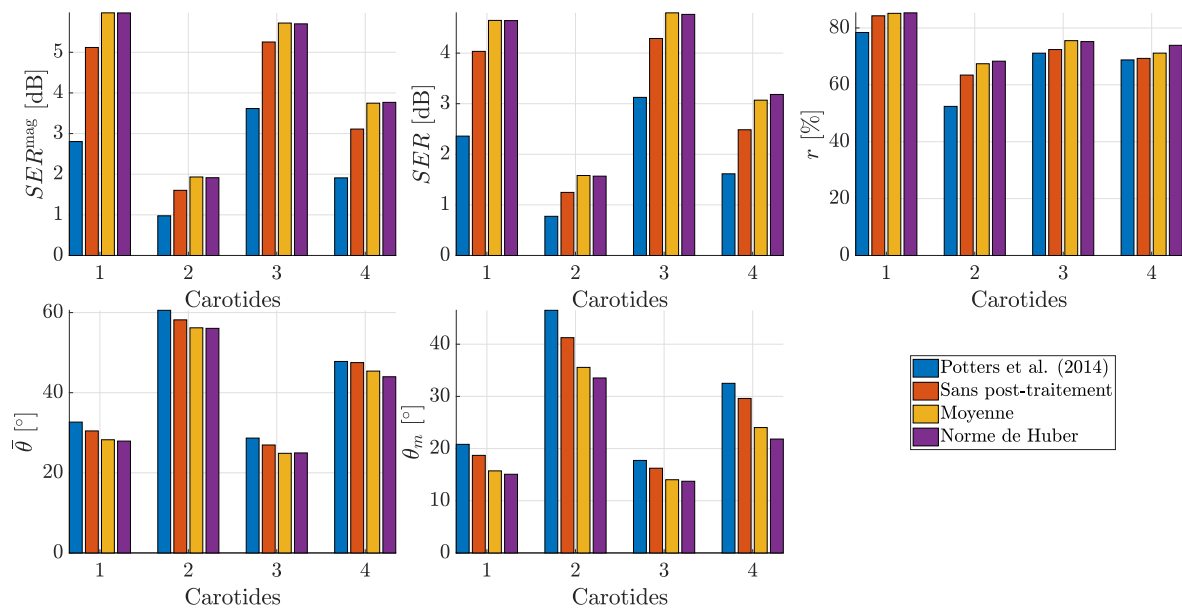


FIGURE B.15. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l’ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

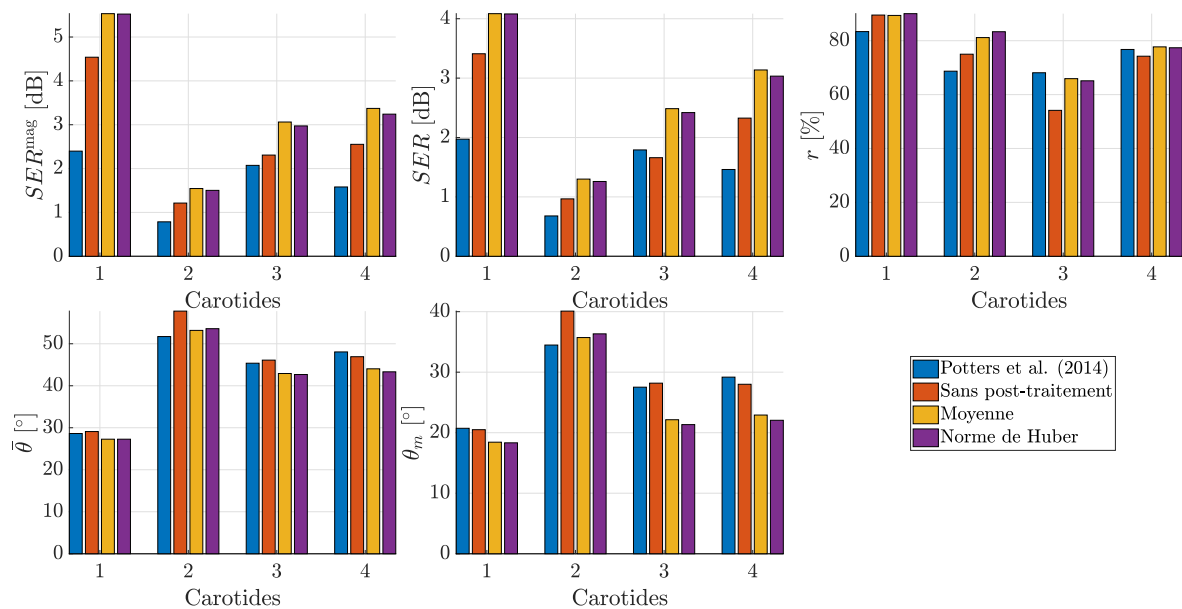


FIGURE B.16. – Critères de performance moyennés du modèle incompressible en fonction du type de post-traitement pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

### B.3. Étude sur le choix du modèle de vitesse

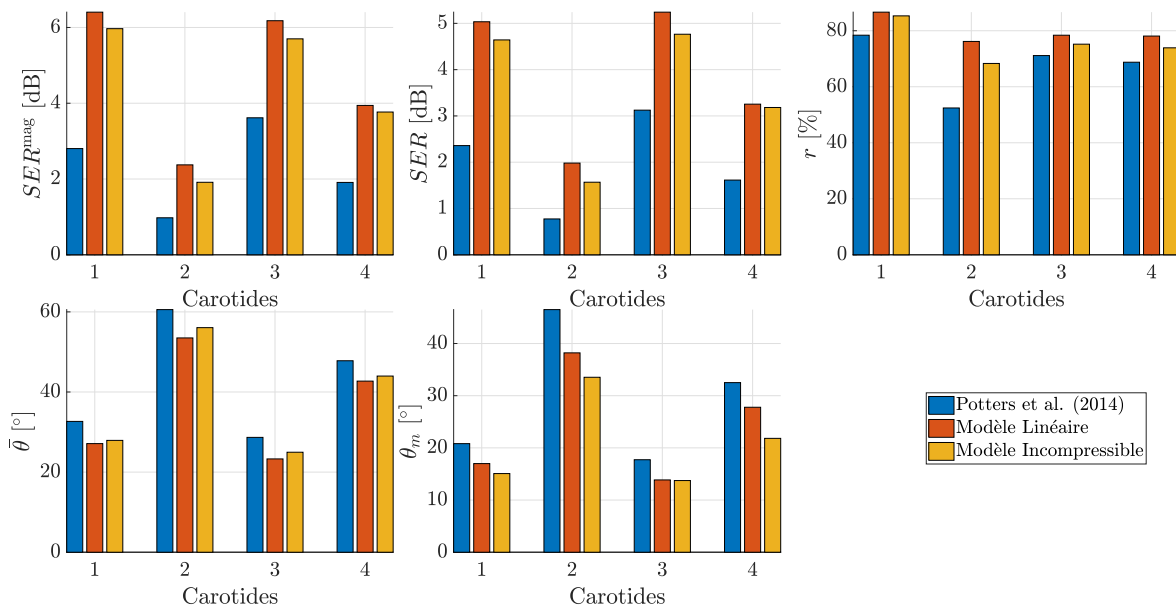


FIGURE B.17. – Critères de performance moyennés en fonction des modèles de vitesse pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

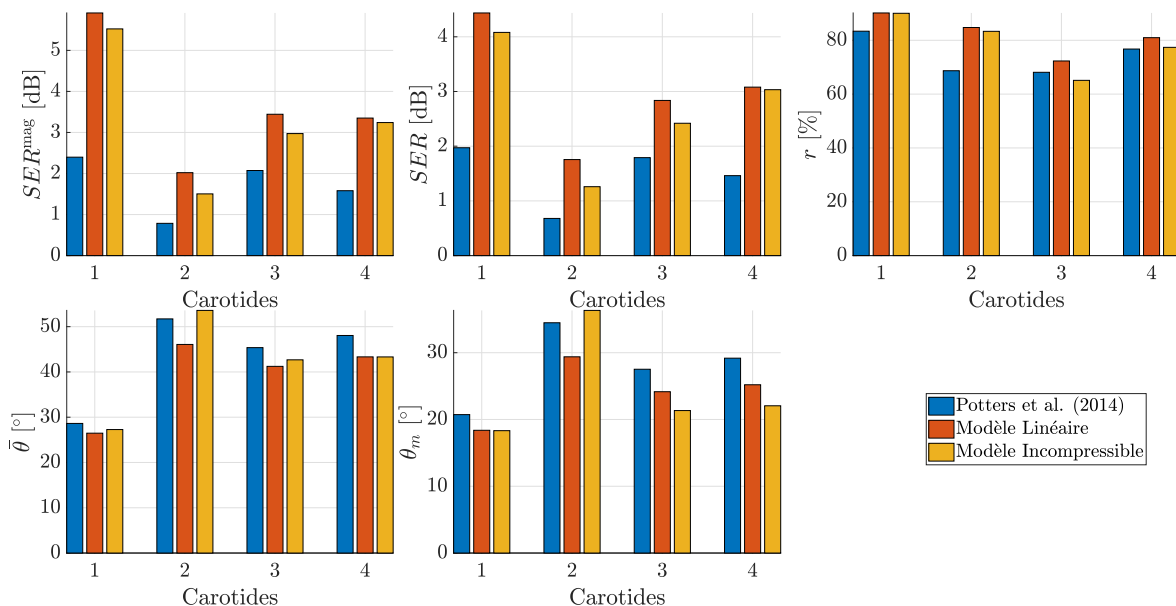


FIGURE B.18. – Critères de performance moyennés en fonction des modèles de vitesse pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

## B.4. Influence du filtre IRM

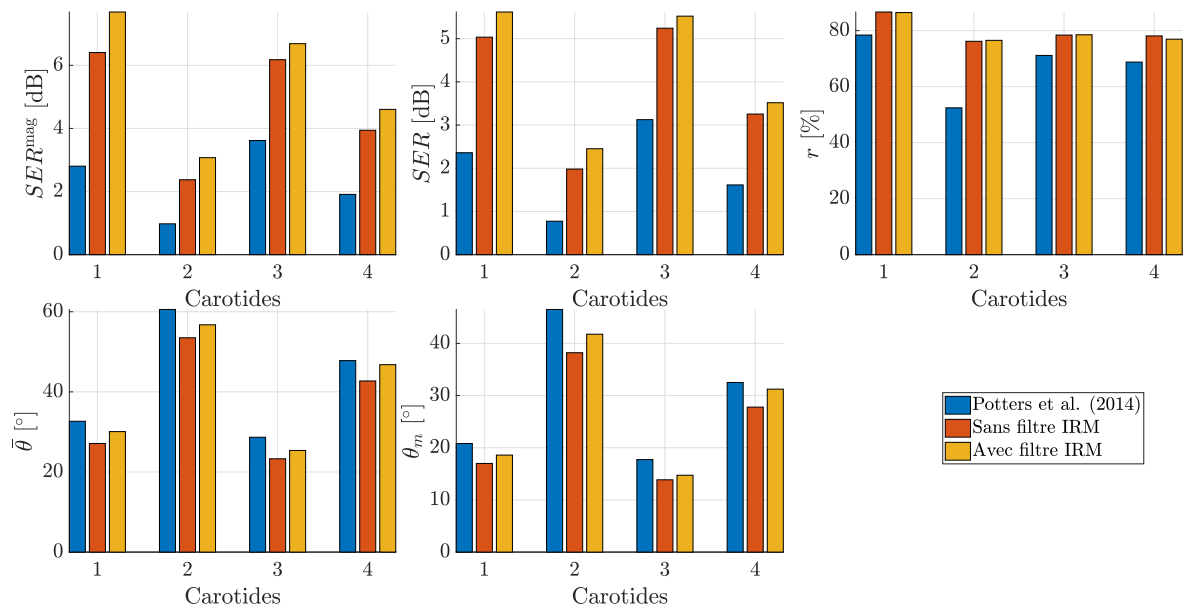


FIGURE B.19. – Critères de performance moyennés en fonction de la prise en compte du filtre IRM pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé sur l'ensemble de la carotide et pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

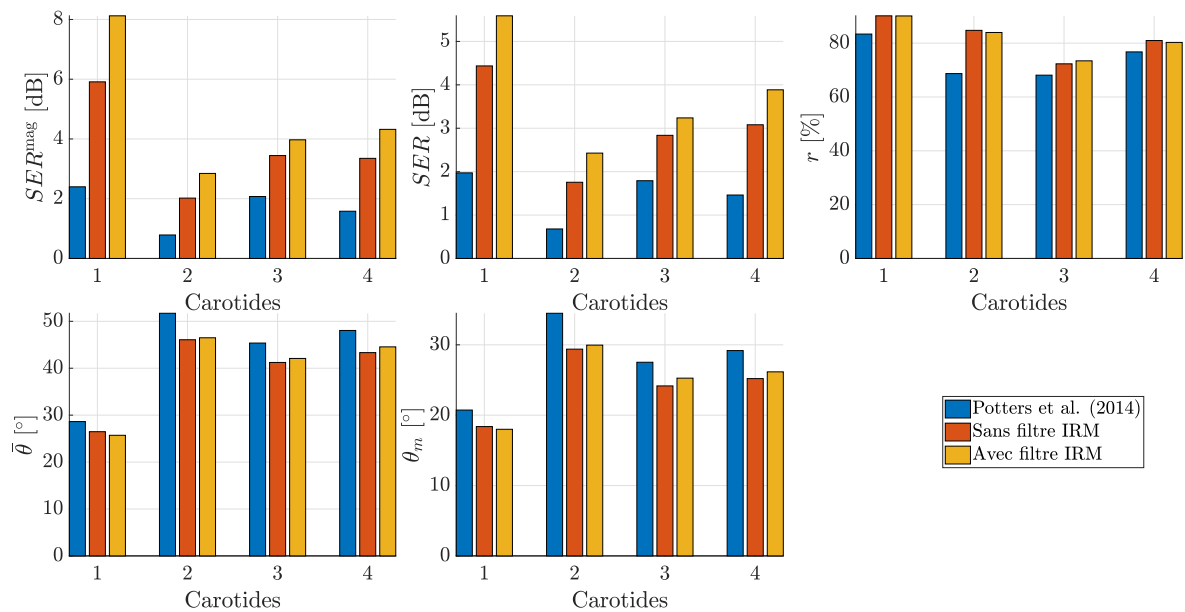


FIGURE B.20. – Critères de performance moyennés en fonction de la prise en compte du filtre IRM pour quatre carotides sténosés. Chaque critère est calculé localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM avec un RSB de 20 dB.

## B.5. Étude de robustesse en fonction du rapport signal sur bruit et de la résolution

### B.5.1. $SE R^{mag}$

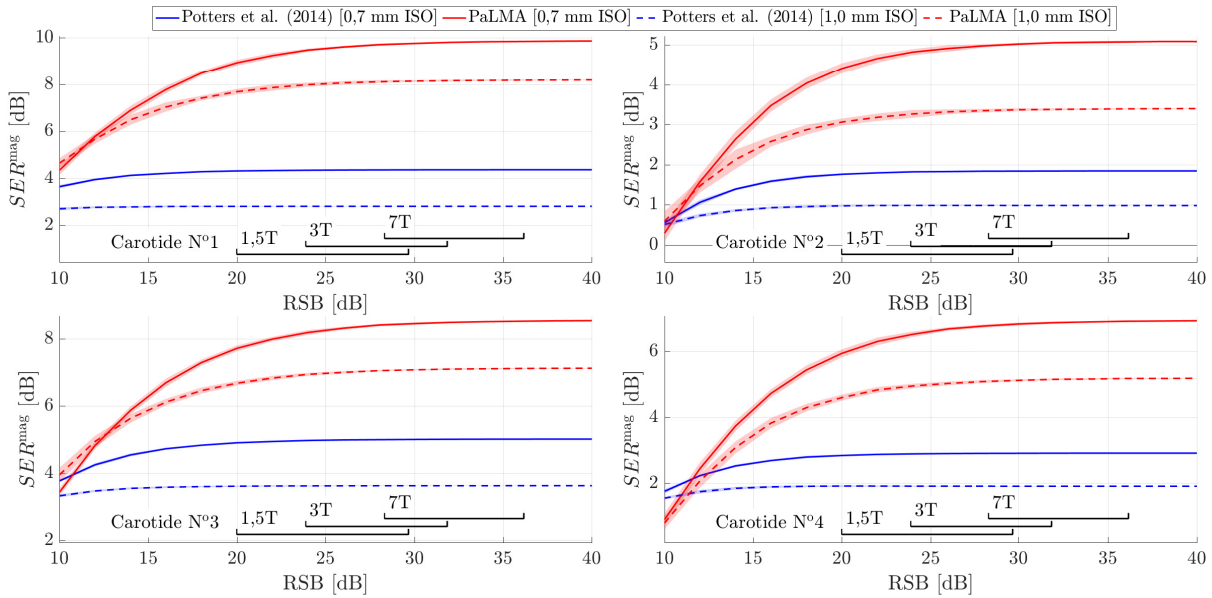


FIGURE B.21. –  $SE R^{mag}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SE R^{mag}$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

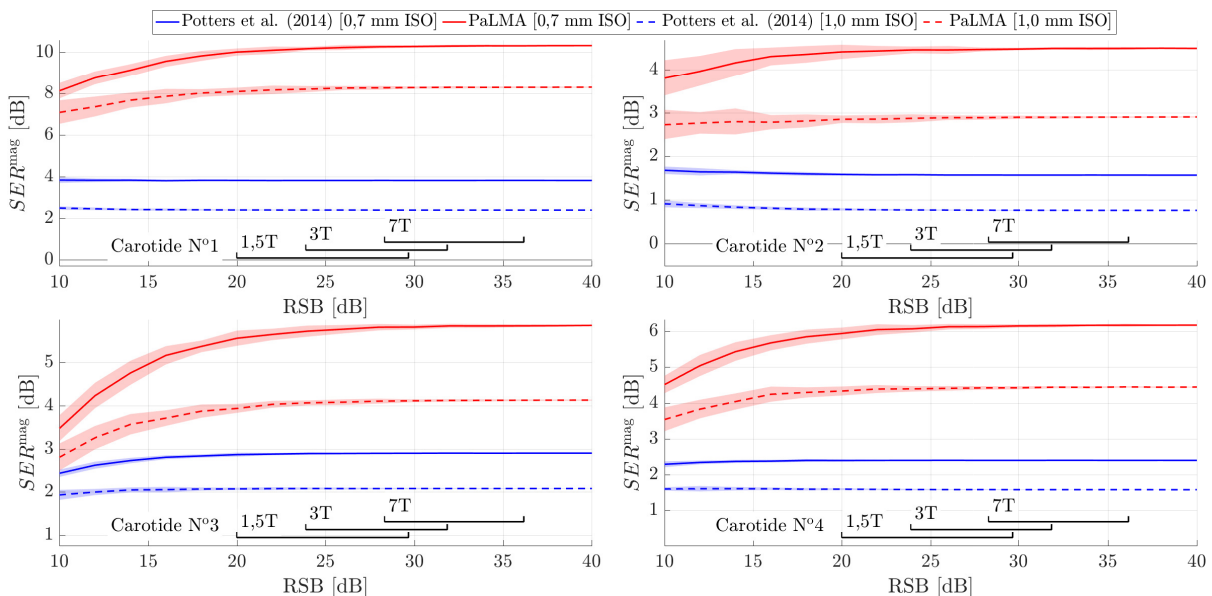


FIGURE B.22. –  $SE R^{mag}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SE R^{mag}$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

**B.5.2. SER**

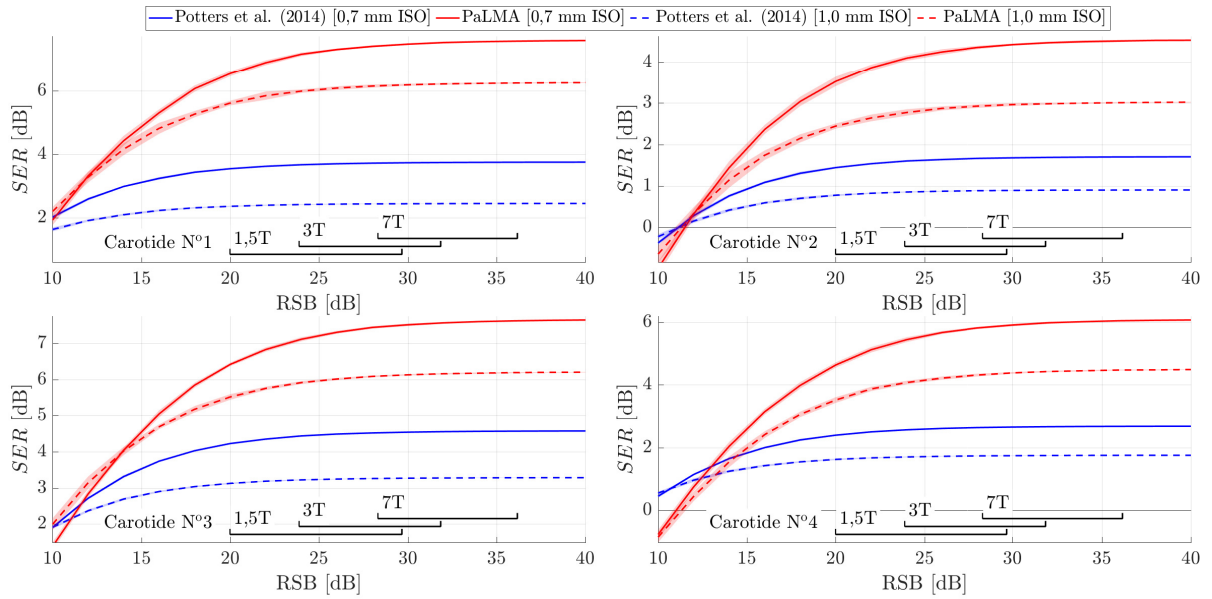


FIGURE B.23. – *SER* en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le *SER* moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

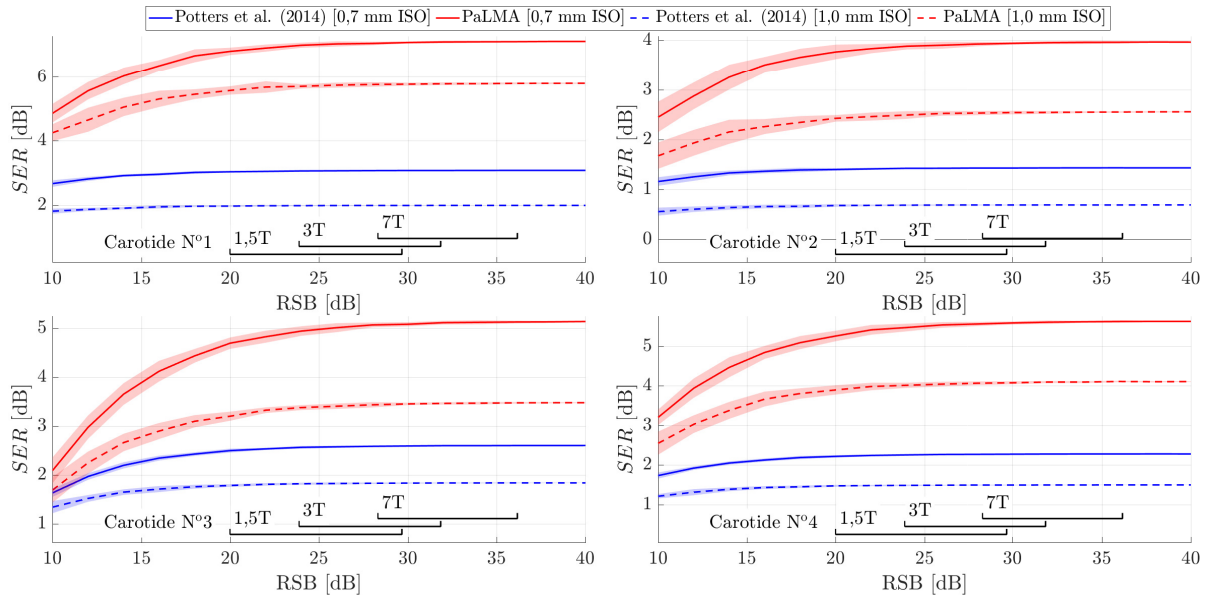


FIGURE B.24. – *SER* en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le *SER* moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

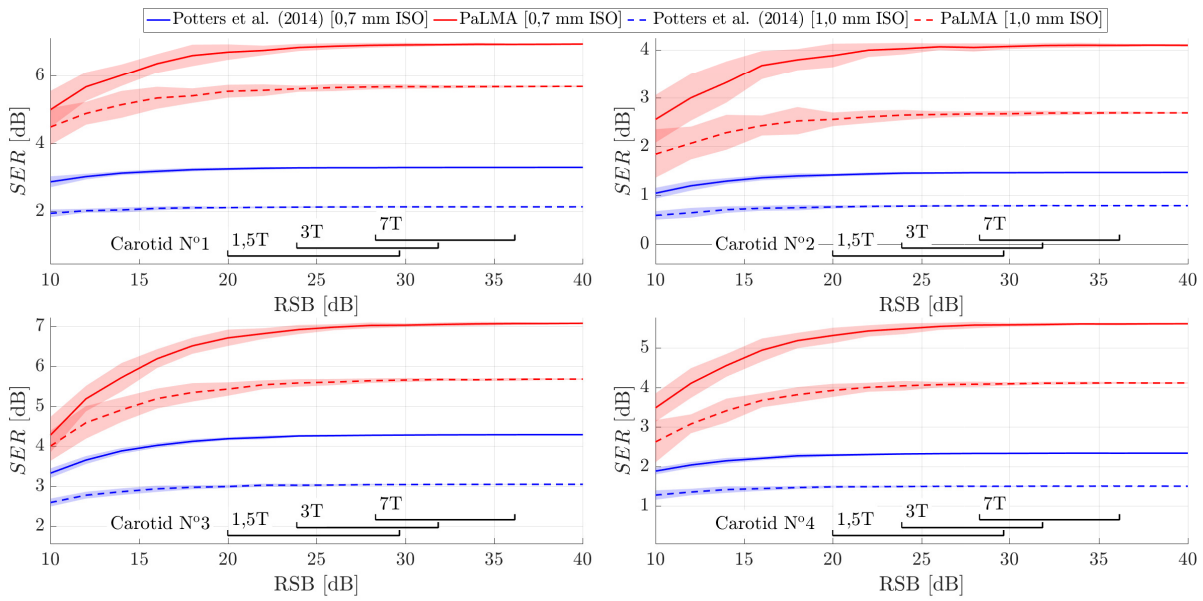


FIGURE B.25. –  $SER$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SER$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

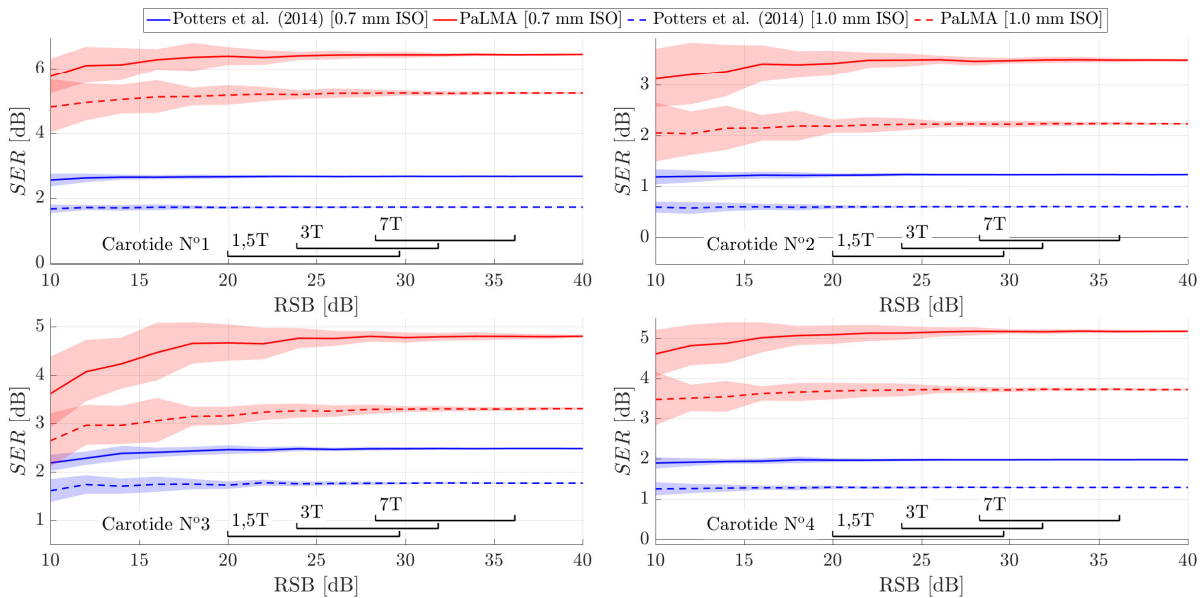


FIGURE B.26. –  $SER$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. Le  $SER$  moyen et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

### B.5.3. Corrélation $r$

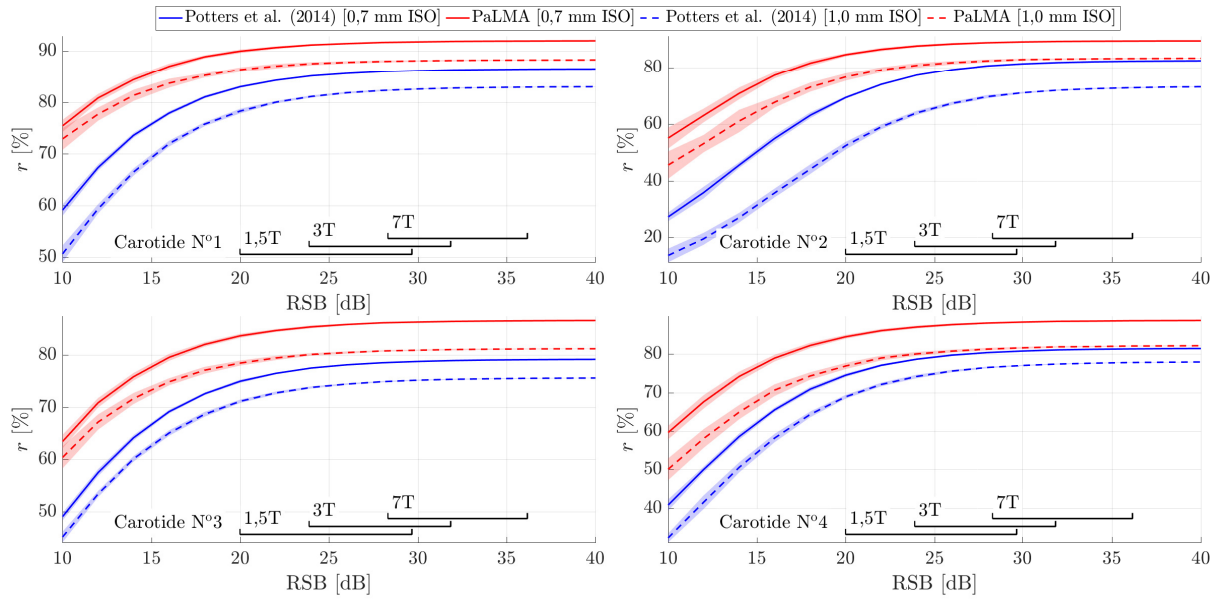


FIGURE B.27. – Corrélation  $r$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. La corrélation  $r$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

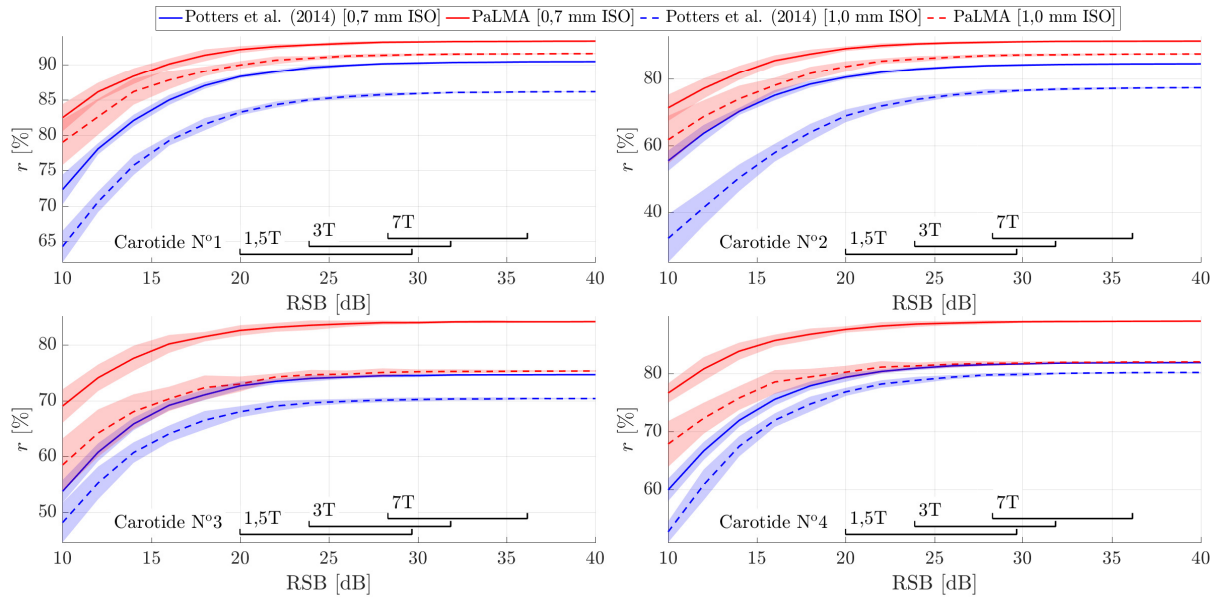


FIGURE B.28. – Corrélation  $r$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. La corrélation  $r$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.



### B.5.4. Erreur angulaire moyenne $\bar{\theta}$

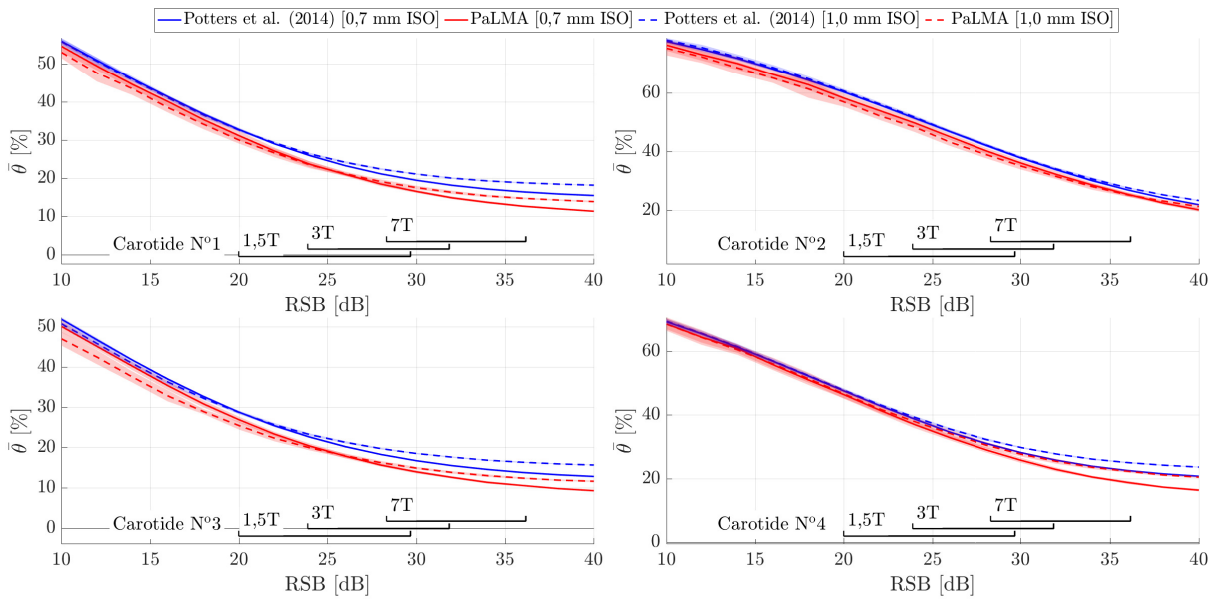


FIGURE B.29. – Erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire  $\bar{\theta}$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

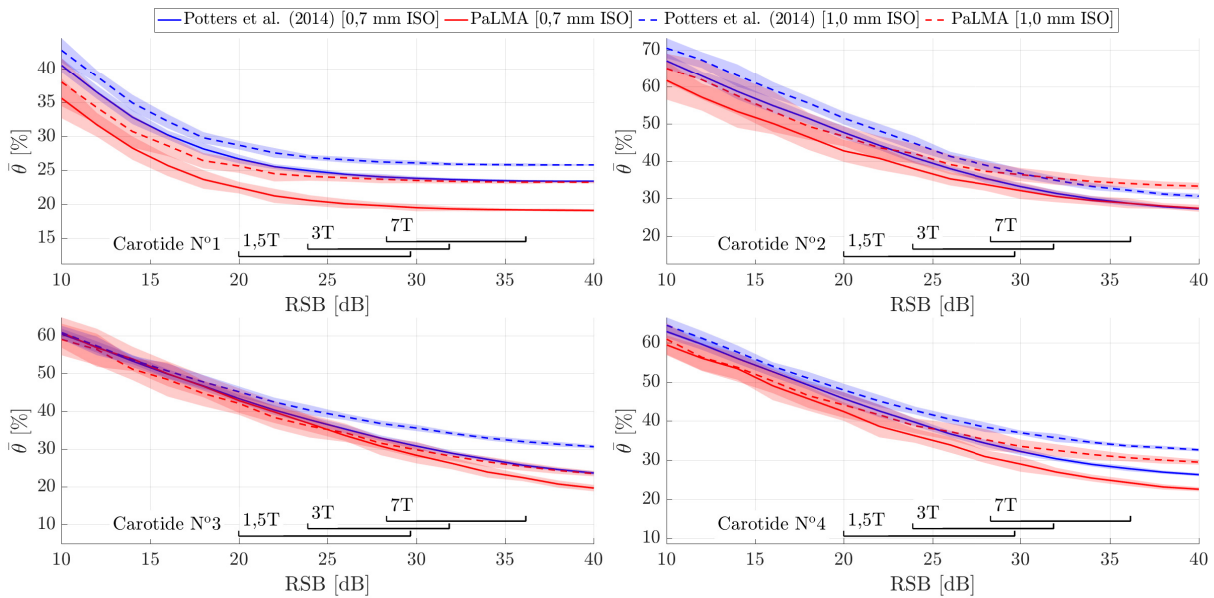


FIGURE B.30. – Erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire  $\bar{\theta}$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

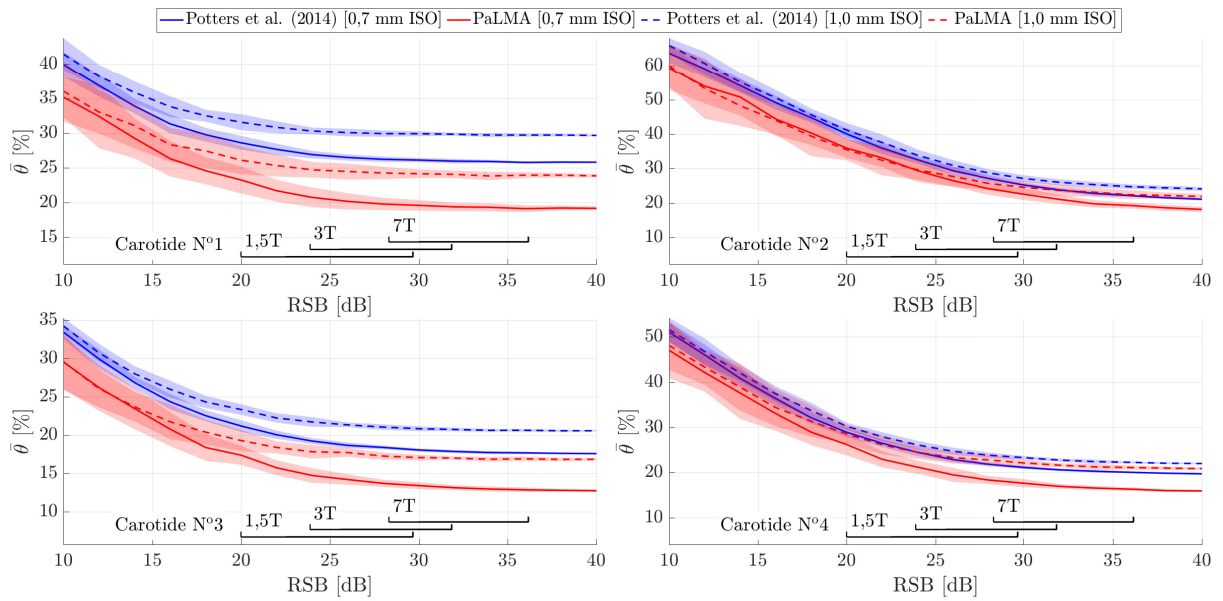


FIGURE B.31. – Erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire  $\bar{\theta}$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

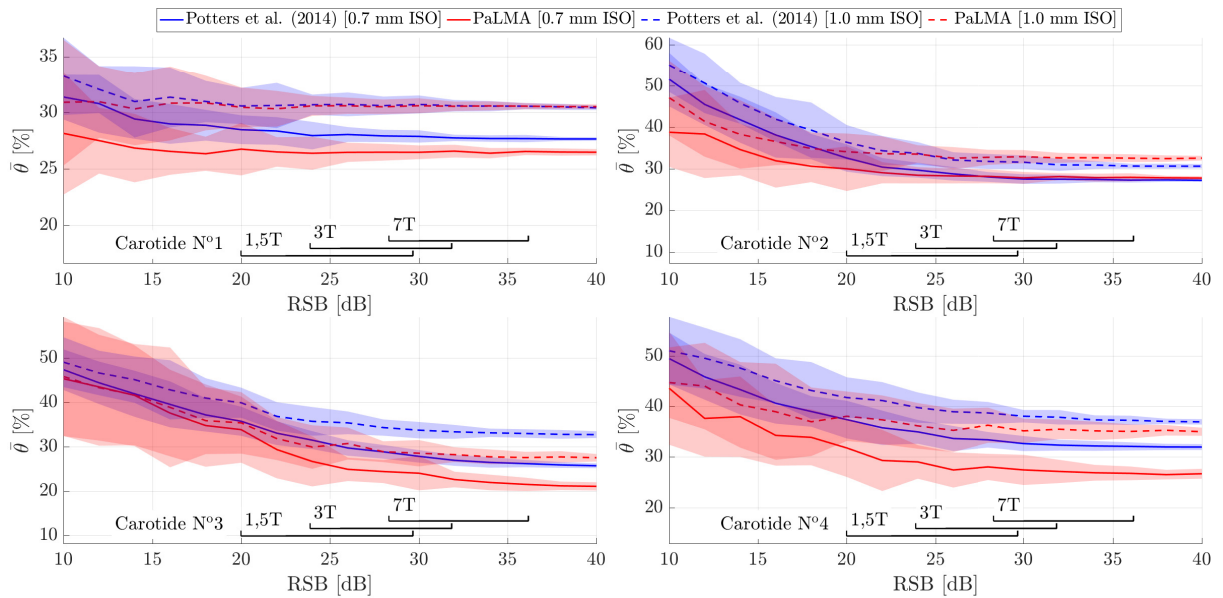


FIGURE B.32. – Erreur angulaire moyenne  $\bar{\theta}$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire  $\bar{\theta}$  moyenne et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour le temps systolique sur 20 simulations IRM.

### B.5.5. Erreur angulaire médiane $\theta_m$

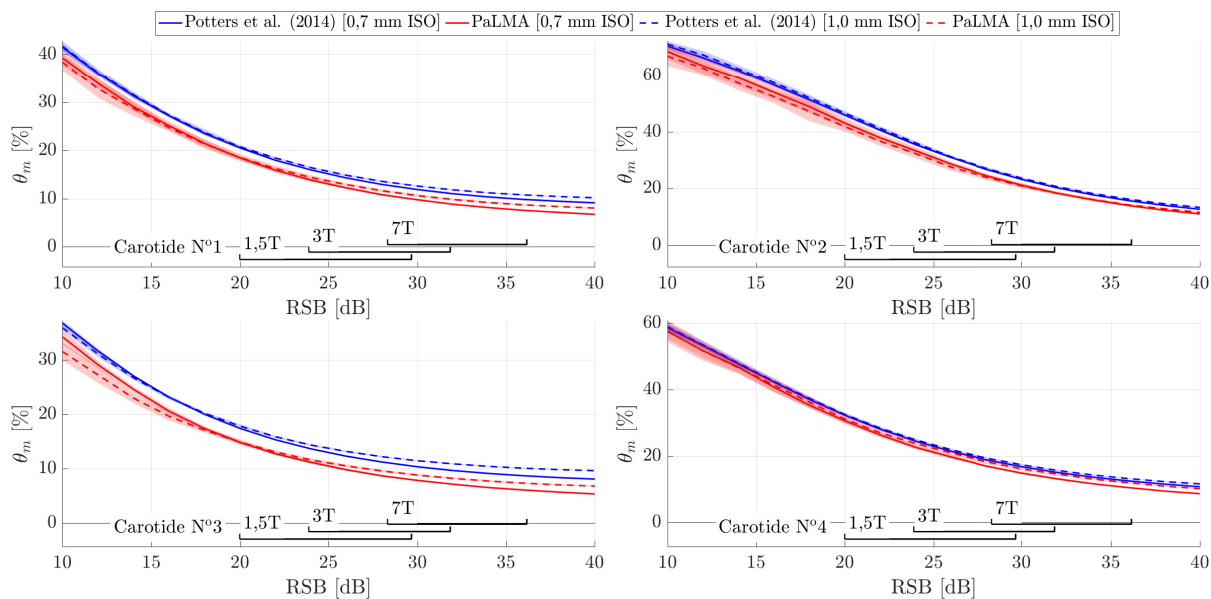


FIGURE B.33. – Erreur angulaire médiane  $\theta_m$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire médiane  $\theta_m$  et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés pour l'ensemble de la carotide pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

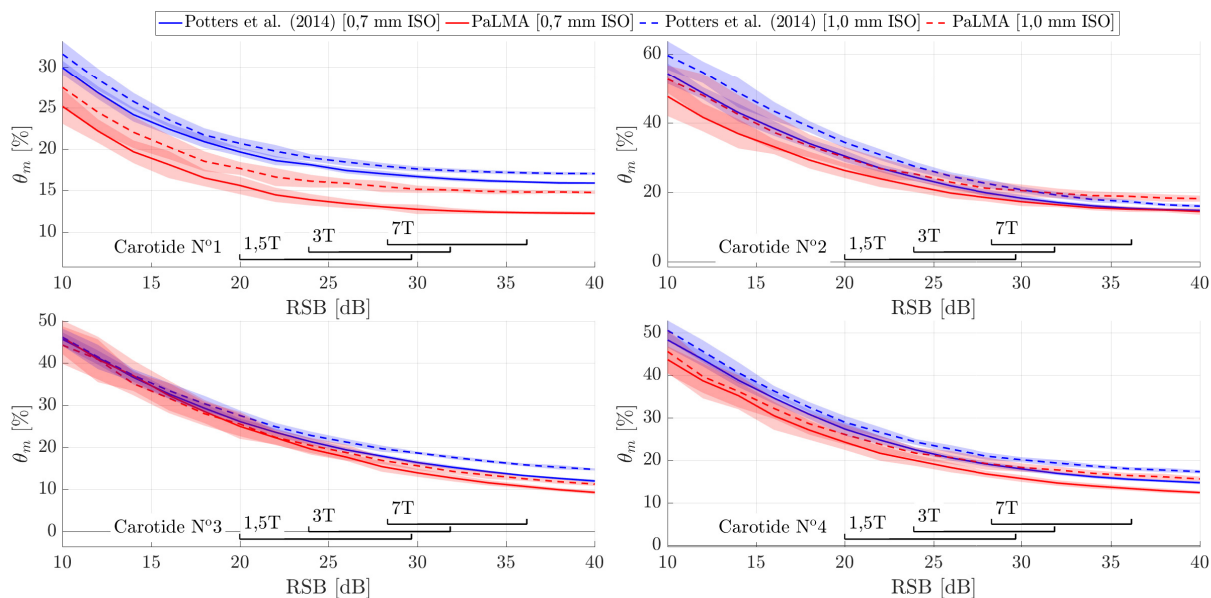


FIGURE B.34. – Erreur angulaire médiane  $\theta_m$  en fonction du rapport signal sur bruit pour deux résolutions de simulation. L'erreur angulaire médiane  $\theta_m$  et son intervalle de confiance à 95 % sont calculés localement pour tous les temps du cycle cardiaque sur 20 simulations IRM.

# Bibliographie

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Books on Mathematics, 9th printing edition, 1972.
- Akagawa, O., Fukazu, K., Nagaoka, R., & Saijo, Y. Two-dimensional blood flow vector and wall shear stress of carotid artery obtained with dual-angle Doppler method. In *2016 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, pages 1–4, 09 2016.
- Alexa, M., Behr, J., Cohen-Or, D., Fleishman, S., Levin, D., & Silva, C. T. Point set surfaces. In *Proceedings of the Conference on Visualization '01, VIS '01*, pages 21–28, Washington, DC, USA, 2001. IEEE Computer Society.
- Andersen, A. H. & Kirsch, J. E. Analysis of noise in phase contrast MR imaging. *Medical Physics*, 23(6) :857–869, 1996.
- Arigovindan, M., Suhling, M., Jansen, C., Hunziker, P., & Unser, M. Full motion and flow field recovery from echo Doppler data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(1) : 31–45, 2007.
- Bakhshinejad, A., Rayz, V., & D'Souza, R. M. Reconstructing blood velocity profiles from noisy 4D-PCMR data using ensemble kalman filtering. In *Biomedical Engineering Society (BMES) 2016 Annual Meeting, Minneapolis, MN, USA*, 10 2016.
- Bakhshinejad, A., Baghaie, A., Vali, A., Saloner, D., Rayz, V. L., & D'Souza, R. M. Merging computational fluid dynamics and 4D flow MRI using proper orthogonal decomposition and ridge regression. *Journal of Biomechanics*, 58 :162–173, 2017.
- Barker, A. J., Lanning, C., & Shandas, R. Quantification of hemodynamic wall shear stress in patients with bicuspid aortic valve using Phase-Contrast MRI. *Annals of Biomedical Engineering*, 38(3) :788–800, 03 2010.
- Barker, A. J., Staehle, F., Bock, J., Jung, B. A., & Markl, M. Analysis of complex cardiovascular flow with three-component acceleration-encoded MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 67(1) :50–61, 2012.
- Bernstein, M. A., Zhou, X. J., Polzin, J. A., King, K. F., Ganin, A., Pelc, N. J., & Glover, G. H. Concomitant gradient terms in phase contrast MR : Analysis and correction. *Magnetic Resonance in Medicine*, 39(2) :300–308, 1998.
- Bhatia, H., Norgard, G., Pascucci, V., & Bremer, P.-T. The Helmholtz-Hodge decomposition - a survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 19(8) : 1386–1404, 08 2013.
- Blaimer, M., Breuer, F., Mueller, M., Heidemann, R. M., Griswold, M. A., & Jakob, P. M. Review SMASH, SENSE, PILS, GRAPPA How to choose the optimal method, 2004.

- Bock, J., Frydrychowicz, A., Lorenz, R., Hirtler, D., Barker, A. J., Johnson, K. M., Arnold, R., Burkhardt, H., Hennig, J., & Markl, M. In vivo noninvasive 4D pressure difference mapping in the human aorta : Phantom comparison and application in healthy volunteers and patients. *Magnetic Resonance in Medicine*, 66(4) :1079–1088, 2011.
- Bollache, E., Guzzardi, D. G., Sattari, S., Olsen, K. E., Martino, E. S. D., Malaisrie, S. C., van Ooij, P., Collins, J., Carr, J., McCarthy, P. M., Markl, M., Barker, A. J., & Fedak, P. W. Aortic valve-mediated wall shear stress is heterogeneous and predicts regional aortic elastic fiber thinning in bicuspid aortic valve-associated aortopathy. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, 156(6) :2112–2120, 2018.
- Bostan, E., Vardoulis, O., Piccini, D., Tafti, P. D., Stergiopoulos, N., & Unser, M. Spatio-temporal regularization of flow-fields. In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, pages 836–839, 2013.
- Bostan, E., Lefkimmiatis, S., Vardoulis, O., Stergiopoulos, N., & Unser, M. Improved variational denoising of flow fields with application to phase-contrast MRI data. *IEEE Signal Processing Letters*, 22(6) :762–766, 2015a.
- Bostan, E., Unser, M., & Ward, J. P. Divergence-free wavelet frames. *IEEE Signal Processing Letters*, 22(8) :1142–1146, 2015b.
- Boussel, L., Rayz, V., Martin, A., Acevedo-Bolton, G., Lawton, M. T., Higashida, R., Smith, W. S., Young, W. L., & Saloner, D. Phase-contrast magnetic resonance imaging measurements in intracranial aneurysms in vivo of flow patterns, velocity fields, and wall shear stress : comparison with computational fluid dynamics. *Magnetic resonance in medicine : official journal of the Society of Magnetic Resonance in Medicine / Society of Magnetic Resonance in Medicine*, 61 :409–417, 02 2009.
- Bürk, J., Blanke, P., Stankovic, Z., Barker, A., Russe, M., Geiger, J., Frydrychowicz, A., Langer, M., & Markl, M. Evaluation of 3D blood flow patterns and wall shear stress in the normal and dilated thoracic aorta using flow-sensitive 4D CMR. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, 14(84), 12 2012.
- Busch, J., Giese, D., Wissmann, L., & Kozerke, S. Reconstruction of divergence-free velocity fields from CINE 3D phase-contrast flow measurements. *Magnetic Resonance Medicine*, 69(1) :200–210, 2013.
- Bustamante, M., Petersson, S., Eriksson, J., Alehagen, U., Dyverfeldt, P., Carlhäll, C.-J., & Ebbers, T. Atlas-based analysis of 4D flow CMR : Automated vessel segmentation and flow quantification. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, 17(85), 2015.
- Cao, X., Shrikhande, N., & Hu, G. Approximate orthogonal distance regression method for fitting quadric surfaces to range data. *Pattern Recognition Letters*, 15(8) :781–796, 1994.
- Cibis, M., Potters, W. V., Gijssen, F. J. H., Marquering, H., vanBavel, E., van der Steen, A. F. W., Nederveen, A. J., & Wentzel, J. J. Wall shear stress calculations based on 3D cine phase contrast MRI and computational fluid dynamics : a comparison study in healthy carotid arteries. *NMR in Biomedicine*, 27(7) :826–834, 2014.

- Cibis, M., Potters, W. V., Selwaness, M., Gijssen, F. J., Franco, O. H., Lorza, A. M. A., de Bruijne, M., Hofman, A., van der Lugt, A., Nederveen, A. J., & Wentzel, J. J. Relation between wall shear stress and carotid artery wall thickening MRI versus CFD. *Journal of Biomechanics*, 49(5) :735–741, 2016a.
- Cibis, M., V. Potters, W., Gijssen, F., Marquering, H., Ooij, P., Vanbavel, E., Wentzel, J., & J. Nederveen, A. The effect of spatial and temporal resolution of cine phase contrast MRI on wall shear stress and oscillatory shear index assessment. *PLoS ONE*, 11 :e0163316, 09 2016b.
- Coghlan, L., Singleton, H. R., Dell’Italia, L. J., Linderholm, C. E., & Pohost, G. M. Measurement of three-dimensional normal vectors, principal curvatures, and wall thickness of the heart using cine-MRI. In Hoffman, E. A., editor, *Medical Imaging 1995 : Physiology and Function from Multidimensional Images*, volume 2433 of *SPIE*, pages 292–302, 05 1995.
- Constantinesco, A., Mallet, J., Bonmartin, A., Lallot, C., & Briguet, A. Spatial or flow velocity phase encoding gradients in NMR imaging. *Magnetic Resonance Imaging*, 2(4) : 335–340, 1984.
- Dai, M., Newman, T. S., & Cao, C. Least-squares-based fitting of paraboloids. *Pattern Recognition*, 40(2) :504 – 515, 2007.
- David, A., Touze, D. L., Warin-Fresse, K., Paul-Gilloteaux, P., Bonnefoy, F., Idier, J., Moussaoui, S., Guerin, P., & Serfaty, J.-M. In-vitro validation of 4D flow MRI measurements with an experimental pulsatile flow model. *Diagnostic and Interventional Imaging*, 100(1) :17–23, 2019.
- Décors, M. *Imagerie de Résonance Magnétique - Bases Physiques et Méthodes*. EDP Sciences, cnrs editions edition, 2011.
- D’Elia, M., Perego, M., & Veneziani, A. A variational data assimilation procedure for the incompressible Navier-Stokes equations in hemodynamics. *Journal of Scientific Computing*, 52(2) :340–359, 2012.
- Dyverfeldt, P., Sigfridsson, A., Kvitting, J.-P. E., & Ebbers, T. Quantification of intravoxel velocity standard deviation and turbulence intensity by generalizing phase-contrast MRI. *Magnetic Resonance Medicine*, 56(4) :850–858, 2006.
- Dyverfeldt, P., Kvitting, J.-P. E., Sigfridsson, A., Engvall, J., Bolger, A. F., & Ebbers, T. Assessment of fluctuating velocities in disturbed cardiovascular blood flow : In vivo feasibility of generalized phase-contrast mri. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 28(3) :655–663, 2008.
- Fourcade, N., Lennep, F. v., Isabelle, G., & Bourdillon, F. L’état de santé de la population en France. Technical report, Santé Publique France et Direction de la Recherche, des Études, de l’Évaluation et des Statistiques, 2017.
- Frydrychowicz, A., Berger, A., Del Rio, A., Russe, M., Bock, J., Harloff, A., & Markl, M. Interdependencies of aortic arch secondary flow patterns, geometry, and age analysed by 4-dimensional phase contrast magnetic resonance imaging at 3 Tesla. *European Radiology*, 22(5) :1122–1130, 05 2012.

- Glor, F., Westenberg, J., Vierendeels, J., Danilouchkine, M., & Verdonck, P. Validation of the coupling of magnetic resonance imaging velocity measurements with computational fluid dynamics in a U bend. *Artificial Organs*, 26(7) :622–635, 2002.
- Gudbjartsson, H. & Patz, S. The rician distribution of noisy MRI data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34(6) :910–914, 1995.
- Hall, E. L., Tio, J. B. K., McPherson, C. A., & Sadjadi, F. A. Measuring curved surfaces for robot vision. *Computer*, 15(12) :42–54, 12 1982.
- Hansen, P., Nagy, J., & O’Leary, D. *Deblurring Images*. SIAM, 2006.
- Herment, A., Giovannelli, J.-F., Mousseaux, E., Idier, J., De Cesare, A., & Bittoun, J. Regularized estimation of flow patterns in MR velocimetry. In *IEEE International Conference on Image Processing*, pages 291–294, Lausanne, Switzerland, 09 1996.
- Hess, A. T., Bissell, M. M., Ntusi, N. A., Lewis, A. J., Tunnicliffe, E. M., Greiser, A., Stalder, A. F., Francis, J. M., Myerson, S. G., Neubauer, S., & Robson, M. D. Aortic 4D flow : Quantification of signal-to-noise ratio as a function of field strength and contrast enhancement for 1.5T, 3T, and 7T. *Magnetic Resonance in Medicine*, 73(5) :1864–1871, 2015.
- Idier, J., editor. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traité IC2, Série traitement du signal et de l’image, Hermès, Paris, 11 2001.
- Joos, P., Liebgott, H., Varray, F., Petrusca, L., Garcia, D., Vray, D., & Nicolas, B. High-volume-rate 3-D ultrasound imaging based on motion compensation : A feasibility study. In *2017 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*, 09 2017.
- Karmonik, C., Partovi, S., Müller-Eschner, M., Bismuth, J., Davies, M. G., Shah, D. J., Loebe, M., Böckler, D., Lumsden, A. B., & von Tengg-Kobligk, H. Longitudinal computational fluid dynamics study of aneurysmal dilatation in a chronic DeBakey type III aortic dissection. *Journal of Vascular Surgery*, 56(1) :260–263, 2012.
- Kastler, B., Vetter, D., Patay, Z., & Germain, P. *Comprendre l’IRM - Manuel d’auto-apprentissage*. Elsevier Masson, 2003.
- Köhler, U., Marshall, I., Robertson, M. B., Long, Q., Xu, X. Y., & Hoskins, P. R. MRI measurement of wall shear stress vectors in bifurcation models and comparison with CFD predictions. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 14(5) :563–573, 10 2001.
- Kulcsár, Z., Ugron, A., Marosfői, M., Berentei, Z., Paál, G., & Szikora, I. Hemodynamics of cerebral aneurysm initiation : The role of wall shear stress and spatial wall shear stress gradient. *American Journal of Neuroradiology*, 32(3) :587–594, 03 2011.
- Lamata, P., Pitcher, A., Krittian, S., Nordsletten, D., Bissell, M. M., Cassar, T., Barker, A. J., Markl, M., Neubauer, S., & Smith, N. P. Aortic relative pressure components derived from four-dimensional flow cardiovascular magnetic resonance. *Magnetic Resonance Medicine*, 72(4) :1162–1169, 2013.
- Lemarié-Rieusset, P. Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle. *Revista matemática iberoamericana*, 8(2) :221–238, 01 1992.

- Levin, D. Mesh-independent surface interpolation. In Brunnett, G., Hamann, B., Müller, H., & Linsen, L., editors, *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, pages 37–49, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Berlin Heidelberg.
- Lowitzsch, S. *Approximation and interpolation employing divergence-free radial basis function with applications*. PhD thesis, Texas A&M University, 05 2002.
- Macovski, A. Noise in MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 36(3) :494–497, 1996.
- Malek, A. M., Alper, S. L., & Izumo, S. Hemodynamic shear stress and its role in atherosclerosis. *Journal of American Medical Association*, 282(21) :2035–2042, 1999.
- Markl, M. Velocity encoding and flow imaging. *University Hospital Freiburg, Dept. of Diagnostic Radiology, Germany*, 2005.
- Markl, M., Wallis, W., Brendecke, S., Simon, J., Frydrychowicz, A., & Harloff, A. Estimation of global aortic pulse wave velocity by flow-sensitive 4D MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 63(6) :1575–1582, 2010.
- Markl, M., Wallis, W., & Harloff, A. Reproducibility of flow and wall shear stress analysis using flow-sensitive four-dimensional MRI. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 33(4) :988–994, 2011.
- Markl, M., Frydrychowicz, A., Kozerke, S., Hope, M., & Wieben, O. 4D Flow MRI. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 36(5) :1015–1036, 2012.
- Masutani, E. M., Contijoch, F., Kyubwa, E., Cheng, J., Alley, M. T., Vasanaawala, S., & Hsiao, A. Volumetric segmentation-free method for rapid visualization of vascular wall shear stress using 4D Flow MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 80(2) :748–755, 2018.
- McCormick, M. E., Manduchi, E., Witschey, W. R., Gorman, R. C., Gorman, J. H., Jiang, Y.-Z., Stoeckert, C. J., Barker, A. J., Yoon, S., Markl, M., & Davies, P. F. Spatial phenotyping of the endocardial endothelium as a function of intracardiac hemodynamic shear stress. *Journal of Biomechanics*, 50 :11–19, 2017. Biofluid mechanics of multitude pathways : From cellular to organ.
- Moore, J., Xu, C., Glagov, S., Zarins, C., & Ku, D. Fluid wall shear stress measurements in a model of the human abdominal aorta : oscillatory behavior and relationship to atherosclerosis. *Atherosclerosis*, 110(2) :225–240, 10 1994.
- Moran, P. R. A flow velocity zeugmatographic interlace for NMR imaging in humans. *Magnetic Resonance Imaging*, 1(4) :197–203, 1982. Second Annual Meeting of the Society for Magnetic Resonance Imaging.
- Morgan, V. L., Graham, T., Roselli, R., & Lorenz, C. Alterations in pulmonary artery flow patterns and shear stress determined with three-dimensional phase-contrast magnetic resonance imaging in Fontan patients. *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, 116(2) :294–304, 09 1998.
- Mura, J., Pino, A. M., Sotelo, J., Valverde, I., Tejos, C., Andia, M. E., Irarrázaval, P., & Uribe, S. Enhancing the velocity data from 4D flow MR images by reducing its divergence. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 35(10) :2353–2364, 10 2016.



- Ong, F., Uecker, M., Tariq, U., Hsiao, A., Alley, M. T., Vasanaawala, S. S., & Lustig, M. Robust 4D flow denoising using divergence-free wavelet transform. *Magnetic Resonance in Medicine*, 73(2) :828–842, 2015.
- Oyre, S., Ringgaard, S., Kozerke, S., Paaske, W. P., Scheidegger, M. B., Boesiger, P., & Pedersen, E. M. Quantitation of circumferential subpixel vessel wall position and wall shear stress by multiple sectorized three-dimensional paraboloid modeling of velocity encoded cine MR. *Magnetic Resonance in Medicine*, 40(5) :645–655, 08 1998.
- Papaoiannou, T. G. & Stefanadis, C. Vascular wall shear stress : Basic principles and methods. *Hellenic Journal of Cardiology*, 46 :9–15, 01 2005.
- Pedersen, E., Oyre, S., Agerbæk, M., Kristensen, I., Ringgaard, S., Boesiger, P., & Paaske, W. Distribution of early atherosclerotic lesions in the human abdominal aorta correlates with wall shear stresses measured in vivo. *European Journal of Vascular and Endovascular Surgery*, 18(4) :328–333, 1999.
- Pelc, N. J., Bernstein, M. A., Shimakawa, A., & Glover, G. H. Encoding strategies for three-direction phase-contrast MR imaging of flow. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 1(4) :405–413, 1991.
- Petersson, S., Dyverfeldt, P., & Ebbers, T. Assessment of the accuracy of MRI wall shear stress estimation using numerical simulations. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 36(1) :128–138, 2012.
- Petitjean, S. A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. *ACM Comput. Surv.*, 34 :211–262, 06 2002.
- Piatti, F., Pirola, S., Bissell, M., Nesteruk, I., Sturla, F., Corte, A. D., Redaelli, A., & Votta, E. Towards the improved quantification of in vivo abnormal wall shear stresses in BAV-affected patients from 4D-Flow imaging : Benchmarking and application to real data. *Journal of Biomechanics*, 50 :93–101, 2017. Biofluid mechanics of multitude pathways : From cellular to organ.
- Potters, W. V., Ooij, P., Marquering, H., vanBavel, E., & Nederveen, A. J. Volumetric arterial wall shear stress calculation based on cine phase contrast MRI. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 41(2) :505–516, 01 2014.
- Potthast, S., Mitsumori, L., Stanescu, L. A., Richardson, M. L., Branch, K., Dubinsky, T. J., & Maki, J. H. Measuring aortic diameter with different MR techniques : Comparison of three-dimensional (3D) navigated steady-state free-precession (SSFP), 3D contrast-enhanced magnetic resonance angiography (CE-MRA), 2d T2 black blood, and 2D cine SSFP. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 31(1) :177–184, 2010.
- Puelz, C., Čanić, S., Rivière, B., & Rusin, C. G. Comparison of reduced models for blood flow using Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods. *Applied Numerical Mathematics*, 115 :114–141, 2017.
- Puiseux, T., Sewonu, A., Meyrignac, O., Rousseau, H., Nicoud, F., Mendez, S., & Moreno, R. Reconciling PC-MRI and CFD : An in-vitro study. *NMR in Biomedicine*, 32(5), 2019. e4063 nbm.4063.

- R. H. Byrd, D. A. P. Convergence of the iteratively reweighted least squares algorithm for robust regression. *Rapport Interne 313, The Johns Hopkins Univ.*, 06 1979.
- Renner, J., Gårdhagen, R., Ebbers, T., Heiberg, E., Länne, T., & Karlsson, M. A method for subject specific estimation of aortic wall shear stress. *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, 6(3) :49–57, 2009.
- Ridel, B., Guennebaud, G., Reuter, P., & Granier, X. Parabolic-cylindrical moving least squares surfaces. *Comput. Graph.*, 51 :60–66, 10 2015.
- Rispoli, V. C., Nielsen, J. F., Nayak, K. S., & Carvalho, J. L. Computational fluid dynamics simulations of blood flow regularized by 3D phase contrast MRI. *Biomedical engineering online*, 14(1) :110, 2015.
- Roberts, A. *Le grand guide visuel du corps humain*. Pearson (France), 2nd édition edition, 2016.
- Sagheer, F. Exploitation of the incompressibility of the fluid to improve the quantification of wall shear stress. Technical report, Master 2, École Centrale de Nantes, 2019.
- Santelli, C., Loecher, M., Busch, J., Wieben, O., Schaeffter, T., & Kozerke, S. Accelerating 4D flow MRI by exploiting vector field divergence regularization. *Magnetic Resonance Medicine*, 75(1) :115–125, 2016.
- Shibeshi, S. S. & Collins, W. E. The rheology of blood flow in a branched arterial system. *Applied rheology (Lappersdorf, Germany : Online)*, 15(6) :398–405, 2005.
- Shojima, M., Oshima, M., Takagi, K., Torii, R., Hayakawa, M., Katada, K., Morita, A., & Kirino, T. Magnitude and role of wall shear stress on cerebral aneurysm. *Stroke*, 35 : 2500–2505, 11 2004.
- Sigovan, M., Hope, M. D., Dyverfeldt, P., & Saloner, D. Comparison of four-dimensional flow parameters for quantification of flow eccentricity in the ascending aorta. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 34(5) :1226–1230, 2011.
- Song, S. M., Napel, S., Glover, G. H., & Pelc, N. J. Noise reduction in three-dimensional phase-contrast MR velocity measurements. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 3 (4) :587–596, 1993.
- Sotelo, J., Urbina, J., Valverde, I., Tejos, C., Irrarrázaval, P., Hurtado, D. E., & Uribe, S. Quantification of wall shear stress using a finite-element method in multidimensional phase-contrast MR data of the thoracic aorta. *Journal of Biomechanics*, 48(10) : 1817–1827, 2015.
- Sotelo, J., Urbina, J., Valverde, I., Tejos, C., Irrarrázaval, P., Andia, M. E., Uribe, S., & Hurtado, D. E. 3D quantification of wall shear stress and oscillatory shear index using a finite-element method in 3D CINE PC-MRI data of the thoracic aorta. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 35(6) :1475–1487, 06 2016.
- Stalder, A., Russe, M., Frydrychowicz, A., Bock, J., Hennig, J., & Markl, M. Quantitative 2D and 3D phase contrast MRI : Optimized analysis of blood flow and vessel wall parameters. *Magnetic Resonance in Medicine*, 60(5) :1218–1231, 2008.

- Stalder, A., Liu, Z., Hennig, J., Korvink, J., Li, K., & Markl, M. *Patient Specific Hemodynamics : Combined 4D Flow-Sensitive MRI and CFD*, pages 27–38. Springer, New York, NY, 05 2011.
- Stankovic, Z., Allen, B. D., Garcia, J., Jarvis, K. B., & Markl, M. 4D flow imaging with MRI. *Cardiovascular Diagnosis and Therapy*, 4(2), 2014.
- Steinman, D. A., Thomas, J. B., Ladak, H. M., Milner, J. S., Rutt, B. K., & Spence, J. D. Reconstruction of carotid bifurcation hemodynamics and wall thickness using computational fluid dynamics and MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 47(1) : 149–159, 2001.
- Tafti, P. D. & Unser, M. On regularized reconstruction of vector fields. *IEEE Transactions Image Processing*, 20(11) :3163–3178, 2011.
- Tavakoli, V. & Amini, A. A. A survey of shaped-based registration and segmentation techniques for cardiac images. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(9) : 966–989, 2013.
- Weiszfeld, E. Sur le point pour lequel la somme des distances de n points données est minimum. *Tôhoku Mathematical Journal*, 43 :355–386, 1937.
- Womersley, J. R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of Physiology*, 127(3) : 553–563, 1955.
- Wood, N. B., Weston, S. J., Kilner, P. J., Gosman, A. D., & Firmin, D. N. Combined MR imaging and CFD simulation of flow in the human descending aorta. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 13(5) :699–713, 2001.
- Yaegashi, S., Maeda, M., & Nagaoka, R. Estimation of three-dimensional blood flow with ultrasound - continuity equation on multiplane dual-angle Doppler imaging. In *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society.*, pages 3173–3176, 07 2018.
- Yang, Y., Robinson, C., Heitz, D., & Mémin, E. Enhanced ensemble-based 4DVar scheme for data assimilation. *Computers & Fluids*, 115 :201–210, 2015.
- Yoshioka, K., Tanaka, R., Takagi, H., Ueyama, Y., Kikuchi, K., Chiba, T., Arakita, K., Schuijff, J. D., & Saito, Y. Ultra-high-resolution CT angiography of the artery of adamkiewicz : a feasibility study. *Neuroradiology*, 60(1) :109–115, 01 2018.
- Zhang, Z. Parameter estimation techniques : a tutorial with application to conic fitting. *Image and Vision Computing*, 15(1) :59–76, 1997.
- Zhao, F., Noll, D. C., Nielsen, J.-F., & Fessler, J. A. Separate magnitude and phase regularization via compressed sensing. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 31(9) : 1713–1723, 09 2012.
- Zhong, L., Su, Y., Yeo, S.-Y., Tan, R.-S., Ghista, D. N., & Kassab, G. Left ventricular regional wall curvedness and wall stress in patients with ischemic dilated cardiomyopathy. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 296(3) :573–584, 2009. PMID : 19122166.



**Titre :** Quantification de biomarqueurs hémodynamiques en imagerie cardiovasculaires par résonance magnétique de flux 4D

**Mots clés :** cisaillement à la paroi, simulation numérique des fluides, IRM de flux 4D, carotide

**Résumé :** En imagerie cardiovasculaire, un biomarqueur est une information quantitative permettant d'établir une corrélation avec la présence ou le développement d'une pathologie cardiovasculaire. Ces biomarqueurs sont généralement obtenus grâce à l'imagerie de l'anatomie et du flux sanguin. Récemment, la séquence d'acquisition d'IRM de flux 4D a ouvert la voie à la mesure du flux sanguin dans un volume 3D au cours du cycle cardiaque. Or, ce type d'acquisition résulte d'un compromis entre le rapport signal sur bruit, la résolution et le temps d'acquisition. Le temps d'acquisition est limité et par conséquent les données sont bruitées et sous-résolues. Dans ce contexte, la quantification de biomarqueurs est difficile. L'objectif de cette thèse est d'améliorer la quantification de biomarqueurs et en particulier du cisaillement à la paroi. Deux stratégies ont été mises en œuvre pour atteindre cet objectif. Une première solution permettant le filtrage spatio-temporel du champ de vitesse a été proposée.

Cette dernière a révélé l'importance de la paroi dans la modélisation d'un champ de vitesse. Une seconde approche, constituant la contribution majeure de cette thèse, s'est focalisée sur la conception d'un algorithme estimant le cisaillement à la paroi. L'algorithme, nommé PaLMA, s'appuie sur la modélisation locale de la paroi pour construire un modèle de vitesse autour d'un point d'intérêt. Le cisaillement est évalué à partir du modèle de la vitesse. Cet algorithme intègre une étape de régularisation *a posteriori* améliorant la quantification du cisaillement à la paroi. Par ailleurs, une approximation du filtre IRM est utilisée pour la première fois pour l'estimation du cisaillement. Enfin, cet algorithme a été évalué sur des données synthétiques, avec des écoulements complexes au sein de carotides, en fonction du niveau de bruit, de la résolution et de la segmentation. Il permet d'atteindre des performances supérieures à une méthode de référence dans le domaine, dans un contexte représentatif de la pratique clinique.

**Title :** Hemodynamic biomarkers quantification in cardiovascular imaging by 4D phase-contrast magnetic resonance

**Keywords :** wall shear stress, computational fluid dynamics, 4D Flow MRI, carotid

**Abstract :** In cardiovascular imaging, a biomarker is quantitative information correlated with an existing or growing cardiovascular pathology. Biomarkers are generally obtained by anatomy and blood flow imaging. Recently, the 4D Flow MRI sequence opened new opportunities in measuring the blood flow within a 3D volume along the cardiac cycle. However, this sequence is a compromise between signal-to-noise ratio, resolution and acquisition time. Allocated time being limited, velocity measurements are noisy and low resolution. In that context, biomarkers' quantification is challenging. This thesis's purpose is to enhance biomarkers' quantification and particularly for the wall shear stress (WSS). Two strategies have been investigated to reach that objective. A first solution allowing the spatiotemporal filtering of the velocity field has been proposed.

It revealed the importance of the wall for the velocity field modelization. A second approach, being the major contribution of this work, focused on the design of a WSS quantification algorithm. This algorithm, named PaLMA, is based on the local modelization of the wall to build a velocity model near a point of interest. The WSS is computed from the velocity model. This algorithm embeds an *a posteriori* regularization step to improve the WSS quantification. Besides, a blurring model of 4D Flow MRI is used for the first time in the WSS quantification context. Finally, this algorithm has been validated over synthetic datasets, with carotids' complex flows, concerning the signal-to-noise ratio, the resolution, and the segmentation. The performances of PaLMA are superior to a reference solution in that domain, within a clinical routine context.