



**HAL**  
open science

# Contribution à la Synthèse des Régulateurs PI Multivariables pour une Classe de Systèmes Linéaires à Retards Multiples via ILMIs

Wajdi Belhaj

► **To cite this version:**

Wajdi Belhaj. Contribution à la Synthèse des Régulateurs PI Multivariables pour une Classe de Systèmes Linéaires à Retards Multiples via ILMIs. Automatique / Robotique. Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie Tunis, 2017. Français. NNT: . tel-02866174

**HAL Id: tel-02866174**

**<https://hal.science/tel-02866174>**

Submitted on 12 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

\*\*\* \* \*\*\*

Université de Carthage

\*\*\* \* \*\*\*

Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie

## **Thèse de Doctorat**

Spécialité :

**Informatique Industrielle**

de

**Wajdi BELHAJ**

Ingénieur INSAT

---

### **Contribution à la Synthèse des Régulateurs PI Multivariables pour une Classe de Systèmes Linéaires à Retards Multiples via ILMIs**

---

Soutenue le 23 Mai 2017 devant le jury composé de :

<b>M. Ahmed Braham</b>	Professeur, INSAT	<b>Président</b>
<b>M. Tarak Damak</b>	Professeur, ENIS	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Raouf Ketata</b>	Maître de Conférences, INSAT	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Fayçal Ben Hmida</b>	Professeur, ENSIT	<b>Examineur</b>
<b>Mme. Olfa Boubaker</b>	Professeur, INSAT	<b>Directeur de thèse</b>

Cette thèse a été préparée à l'Unité de Recherche : Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO) de l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (INSAT)



À mes parents Abdelaziz et Aroussia ;

À mes sœurs Sinda et Zeineb ;

À mes grands parents ;

À toute la famille ;

À tous mes amis ;

À tous ceux qui me sont chers ;

Je vous dédie ce travail.

# Remerciements

Cette thèse a été préparée à l'Unité de Recherche : Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO) de l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (INSAT).

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame Olfa BOUBAKER, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie et Directeur de cette thèse, pour son encadrement consciencieux, sa disponibilité ainsi que sa présence et son soutien scientifique et moral tout au long de ces années. Merci pour la confiance dont vous avez fait preuve à mon égard.

Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieur Ahmed BRAHAM, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Tarak DAMAK, Professeur à l'Ecole Nationale des Ingénieurs de Sfax, et à Monsieur Raouf KETATA, Maître de Conférences à l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail, pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à cette tâche et les enrichissements divers qu'ils ont apporté à mon mémoire de thèse. Je leurs en suis reconnaissant.

Je tiens également à remercier Monsieur Faïçal BEN HMIDA, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Tunis, d'avoir examiné mon mémoire de thèse et pour ses remarques subtiles et enrichissantes.

Enfin, j'aimerais conclure en remerciant toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, au bon déroulement de cette thèse au travers de leur aide, leur soutien et leurs encouragements.

# Liste des Publications

## Revue internationale avec comité de lecture

1. W. Belhaj, O. Boubaker, "MIMO PI controllers for LTI systems with multiple time delays based on LMIs and sensitivity functions," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2017, 2017.

**IF (ISI Thomson): 0.644**

2. W. Belhaj, O. Boubaker, "PI controller for Multiple-Time Delays systems," *International Journal of Enhanced Research in Science, Technology and Engineering*, Vol. 5, N°4, pp. 107-115, April 2016.

**IF : 2.371**

3. W. Belhaj, O. Boubaker, "Multivariable PID controller via LMIs: Performances Assessment," *International Journal of Smart Sensing and Intelligent Systems*, Vol. 8, N°4, pp. 1896-1916, December 2015.

**Indexé ISI Thomson & Scopus**

## Conférences internationales avec comité de lecture :

1. W. Belhaj, O. Boubaker, "On MIMO PID control of the Quadruple-tank process via ILMI approaches: Minimum and non-minimum phase system case studies", 10th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, Mumbai (India), December 2013.

# Table des matières

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Méthodes de synthèse des régulateurs PID .....</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction .....	5
1.2 Systèmes multivariables .....	5
1.2.1 Modélisation des systèmes multivariables .....	5
1.2.2 Zéros et pôles .....	7
1.2.3 Influence néfaste des zéros à non-minimum de phase .....	10
1.2.4 Effet des couplages ou interactions .....	12
1.2.5 Effet des retards.....	13
1.3 Réglage PID .....	14
1.3.1 Principe.....	14
1.3.2 PID monovariante .....	15
1.3.3 PID multivariante .....	17
1.4 La méthode IMC .....	19
1.4.1 Cas monovariante .....	19
1.4.2 Cas multi-boucles : Approche conventionnelle [Economou & Morari, 1986] .....	26
1.4.3 Cas multi-boucles : Approche étendue [Vu & Lee, 2010b].....	30
1.5 Critères de performance .....	34
1.6 Contribution de la thèse.....	37
1.7 Conclusion.....	37
<b>Chapitre 2 : Synthèse des régulateurs PID multivariables via des approches ILMI : Analyse comparative .....</b>	<b>38</b>
2.1 Introduction .....	39
2.2. Position du problème de commande .....	39
2.3 Synthèse des correcteurs PID via des approches ILMI.....	40

2.3.1	Approche 1 [Zheng <i>et al.</i> , 2002] .....	40
2.3.2	Approche 2 [Lin <i>et al.</i> , 2004] .....	43
2.3.3	Approche 3 [He & Wang, 2006] .....	44
2.4	Application à un processus à non-minimum de phase .....	49
2.4.1	Description du processus à 4 réservoirs et modélisation mathématique .....	49
2.4.2	Synthèse des régulateurs et tests de performance .....	54
2.4.3	Indices de performance .....	57
2.4.4	Tests de robustesse .....	58
2.4.5	Synthèse des résultats .....	63
2.5	Conclusion.....	64
<b>Chapitre 3 : Contribution à la modélisation des systèmes à retards multiples par des équations aux dérivées partielles .....</b>		<b>65</b>
3.1	Introduction .....	66
3.2	Modélisation des systèmes linéaires à retards.....	66
3.2.1	Modélisation par une représentation d'état et passage vers une matrice de transfert. ....	67
3.2.2	Modélisation par une matrice de transfert et passage vers une représentation d'état. ....	67
3.2.3	Modélisation d'une variable retardée par une équation aux dérivées partielles .....	67
3.3	Approximation d'un système de dimension infinie par la méthode de collocation orthogonale.....	68
3.3.1	Principe.....	69
3.3.2	Choix des fonctions de base .....	69
3.3.3	Détermination du nombre de points de collocation .....	70
3.3.4	Détermination de la position des points de collocation.....	70
3.3.5	Mise en œuvre de la méthode.....	72
3.3.6	Analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation .....	73
3.4	Extension au cas des systèmes à retards multiples.....	74
3.5	Application .....	76
3.5.1	Exemple 1 : Réacteur ISP.....	77

3.5.2 Exemple 2 : Le processus à 4 réservoirs .....	78
3.5.3 Exemple 3 : Colonne de distillation .....	80
3.6 Conclusion.....	81
<b>Chapitre 4 : Régulateur PI multivariable pour des systèmes à retards multiples .....</b>	<b>82</b>
4.1 Introduction .....	83
4.2. Position du problème et hypothèses .....	83
4.3 Méthodologie proposée .....	85
4.3.1 Conception du correcteur PI stabilisant via ILMI.....	85
4.3.2 Optimisation des performances des régulateurs par minimisation des matrices de sensibilité.....	89
4.4 Application .....	95
4.4.1 Processus colonne de distillation.....	97
4.4.2 Réacteur ISP .....	102
4.4.3 Processus à 4 réservoirs.....	110
4.5 Analyse comparative .....	116
4.6 Conclusion.....	117
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>119</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>121</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>133</b>

# Table des Figures

Figure 1.1 – Système multivariable.....	5
Figure 1.2 – Les différents types de zéros d'un système multivariable.....	8
Figure 1.3 – Réponse néfaste d'un système à non minimum de phase.....	10
Figure 1.4 – Réponse indicielle de (1.10) .....	11
Figure 1.5 – Réponse indicielle de (1.11) .....	11
Figure 1.6 – Evolution de la structure IMC .....	21
Figure 1.7 – Structure IMC multi-boucles [Economou & Morari, 1986] .....	27
Figure 1.8 – Schéma bloc de la méthode IMC-PI étendue.....	31
Figure 1.9 – Diagramme des valeurs singulières .....	36
Figure 2.1 – Synoptique du processus à 4 réservoirs .....	51
Figure 2.2 – Test 1 : (a) Approche 1 (b) Approche 3.....	59
Figure 2.3 – Test 2 : (a) Approche 1 (b) Approche 3.....	60
Figure 2.4 – Test 3 : (a) Approche 1 (b) Approche 3.....	61
Figure 2.5 – Test 4 : (a) Approche 1 (b) Approche 3.....	63
Figure 3.1 – Modélisation d'une variable retardée par un système à paramètres distribués ....	68
Figure 3.2 – Validation des modèles (3.30) et (3.31) pour le réacteur ISP.....	78
Figure 3.3 – Validation des modèles (3.30) et (3.34) pour le processus à 4 réservoirs .....	79
Figure 3.4 – Validation des modèles (3.30) et (3.35) pour la colonne de distillation.....	81
Figure 4.1 – Schéma-bloc du système "nominal" .....	90
Figure 4.2 – Schéma-bloc du système via Loop-Shaping.....	91
Figure 4.3 – Procédure de conception Loop-Shaping.....	94
Figure 4.4 – Valeurs singulières de $G(s)$ , $G_{sh}$ , $1/\sigma(S_0)$ , $1/\sigma(S_{0sh})$ pour la colonne de distillation.....	99

Figure 4.5 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle via Loop-Shaping pour la colonne de distillation .....	99
Figure 4.6 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour la colonne de distillation .....	100
Figure 4.8 – Mesures d'interactions IMC pour le réacteur ISP : Echech de l'approche conventionnelle IMC-PID .....	104
Figure 4.9 – Valeurs singulières de $G(s)$ , $G_{sh}$ , $1/\sigma(S_0)$ , $1/\sigma(S_{0sh})$ pour le réacteur ISP ....	106
Figure 4.10 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle obtenu via Loop-Shaping pour le réacteur ISP .....	106
Figure 4.11 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour le réacteur ISP .....	108
Figure 4.12 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations pour le réacteur ISP .....	109
Figure 4.13 – Valeurs singulières de $G(s)$ , $G_{sh}$ , $1/\sigma(S_0)$ , $1/\sigma(S_{0sh})$ pour le processus à 4 réservoirs .....	112
Figure 4.14 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle via Loop-Shaping pour le processus à 4 réservoirs .....	112
Figure 4.15 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour le processus à 4 réservoirs .....	113
Figure 4.16 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations pour le processus à 4 réservoirs .....	114
Figure 4.17 – Evolution des sorties et des lois de commande sans BBG et avec BBG .....	116

# Liste des Tableaux

Tableau 1.1 – Influence des pôles et des zéros sur la dynamique d'un système multivariable ..	9
Tableau 2.1 – Position des zéros du système linéarisé en fonction des taux d'ouverture des vannes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ .....	53
Tableau 2.2 – Conditions opératoires relatives aux modèles à MP et à NMP .....	54
Tableau 2.3 – Valeurs des paramètres du processus à 4 réservoirs.....	54
Tableau 2.4 – Gains PID et pôles du système bouclé .....	55
Tableau 2.5 – Taux de convergence, paramètres de synthèse et paramètres de réglage.....	56
Tableau 2.6 – Comparaison des performances entre l'approche 1 et l'approche 3.....	56
Tableau 2.7 – Indices de performance.....	57
Tableau 3.1 – Position des points de collocation .....	72
Tableau 4.1 – Indices de performance du correcteur conçu pour la colonne de distillation ....	98
Tableau 4.2 – Analyse robuste sous $\pm 10\%$ d'incertitudes paramétriques .....	98
Tableau 4.3 – Mesures d'interactions pour le réacteur ISP : Approche conventionnelle IMC-PID .....	103
Tableau 4.4 – Paramètres du correcteur PI multi-boucles pour le réacteur ISP : Approche IMC-PI [Vu & Lee, 2010b].....	104
Tableau 4.5 – Analyse comparative des performances : Etude de cas du réacteur ISP.....	107
Tableau 4.6 – Analyse robuste sous $\pm 10\%$ d'incertitudes paramétriques : Cas du réacteur ISP .....	107
Tableau 4.7 – Analyse comparative des performances des correcteurs : Cas du processus à 4 réservoirs .....	115
Tableau 4.8 – Analyse robuste sous $\pm 10\%$ d'incertitudes paramétriques : Cas du processus à 4 réservoirs .....	115

# Notations

## Ensembles et domaines

$\mathfrak{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathfrak{R}^n$	Espace réel euclidien de dimension $n$
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble de matrices complexes de taille $n \times m$
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Ensemble de matrices réelles de taille $n \times m$
$i$	Nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$

## Matrices, opérations et lois matricielles

$P > 0$ ( $P \geq 0$ )	Matrice $P$ symétrique définie (semi-définie) positive
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$\text{tr}(X)$	Trace de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$X^T$ ( $X^{-T}$ )	Transposée de $X$ (resp. transposée de l'inverse de $X$ ) $X \in \mathfrak{R}^{n \times m}$
$X^H$	Transposée conjuguée de $X$
$X^{-1}$	Inverse de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\det(X)$	Déterminant de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\text{tr}(X)$	Trace de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\lambda_i(X)$	Valeurs propres de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\sigma(X)$	Valeur singulière de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\bar{\sigma}(X)$	Valeur singulière maximale de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\underline{\sigma}(X)$	Valeur singulière minimale de $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
$\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$	Matrice bloc-diagonale $\mathbb{C}^{n \times m}$
$\min$	Fonction minimum
$\max$	Fonction maximum

## Normes

$ x $	Valeur absolue de $x$
$\  \cdot \ $	Norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice

# Acronymes

<b>BMI</b>	<b>Bilinear Matrix Inequality</b>
FOPDT	First-Order Plus Delay Time
IAE	Integral Absolute Error
ILMI	Iterative Linear Matrix Inequality
IMC	Internal Model Control
ISE	Integral of the Squared Error
ISP	Industrial-Scale Polymerisation
ITAE	Integral of the Time-weighted Absolute Error
ITSE	Integral of the Time-weighted Squared Error
LMI	Linear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MP	Minimum Phase
NMP	Non-Minimum Phase
ODE	Ordinary Differential Equations
PDE	Partial Differential Equations
PI	Proportional-Integral
PID	Proportional-Integral-Derivative
RGA	Relative Gain Array
SISO	Single-Input Single-Output
SOF	Static Output Feedback
SOFS	Static Output Feedback Stabilisation
TITO	Two-Input Two-Output
TV	Total Variation

## Introduction générale

Depuis des décennies, le régulateur PID s'est imposé dans la plupart des boucles de régulation comme étant le régulateur industriel le plus dominant vu la simplicité de son utilisation, sa fonctionnalité claire et sa robustesse. Plusieurs méthodes empiriques et analytiques ont émergé dans ce sens depuis l'apparition de la méthode de Ziegler-Nichols pour la synthèse des régulateurs PID monovariables. Ces méthodes sont reconnues, d'une part, pour leur bonnes performances notamment un dépassement réduit, un temps de réponse assez court et une erreur nulle en régime permanent, et d'autre part, pour une bonne robustesse vis-à-vis des changements de consigne, des perturbations extérieures et des variations paramétriques. Cependant, de nos jours, plusieurs processus industriels sont plutôt de nature multivariable et demandent une certaine expertise pour la synthèse et l'autoréglage des lois de commande multivariables. Les couplages existants entre les différentes boucles ainsi que l'influence très néfaste des dynamiques des zéros instables restent des problèmes majeurs à résoudre. Peuvent s'ajouter à ces verrous des retards multiples dus aux phénomènes de transport, de propagation de matière, d'énergie et d'information et dont la présence constitue une source majeure de dégradation de performances et d'instabilité de ces systèmes.

La commande des systèmes multivariables à retards multiples via des correcteurs PI/PID est bien l'un des défis majeurs de l'automatique et de l'industrie moderne. La détérioration des performances de ces systèmes est généralement due à un mauvais auto-réglage de ces correcteurs. Peu de méthodes ont été proposées dans la littérature pour s'affranchir de ces problèmes. La méthode la plus conventionnelle est la méthode IMC (*Internal Model Control*). Malgré sa grande réputation, cette méthode n'est malheureusement applicable qu'à des systèmes stables de premier et de second ordre ou à des systèmes à intégrateurs. De plus, on oublie souvent que cette méthode est non applicable aux systèmes présentant de fortes interactions entre les différentes boucles vu que les correcteurs sont synthétisés sous l'hypothèse de faibles interactions. En effet, cette dernière difficulté représente l'inconvénient majeur de cette approche qui n'a jamais été convenablement discutée dans la littérature. Des extensions à cette approche ont été récemment proposées envisageant la conception de correcteurs PI/PID d'ordre plein. Cependant, cette dernière avancée reste uniquement applicable aux systèmes multivariables de premier ordre.

D'un autre coté, des approches de synthèse des régulateurs PI/PID multivariables basées sur des outils LMI (*Linear Matrix Inequalities*) ou ILMI (*Iterative Linear Matrix Inequalities*) ont submergé depuis une décennie. Un grand avantage de ces correcteurs est qu'ils sont d'ordre plein et qu'ils n'imposent aucune contrainte sur les interactions des différentes boucles du système à contrôler. Un autre avantage majeur de ces approches est l'utilisation des outils LMI accessibles via plusieurs boîtes à outils numériques. Cependant, à notre connaissance, aucune méthodologie pour la synthèse des correcteurs PI/PID pour des systèmes multivariables à retards multiples n'a été proposée jusqu'à nos jours. Ce problème crucial reste donc un problème de recherche encore ouvert.

Partant des difficultés liées aux différentes méthodes IMC pour la synthèse et l'autoréglage des correcteurs PI/PID multivariables pour des systèmes à retards multiples lorsque les interactions entre les différentes boucles sont assez importantes et l'absence de méthodologie LMI pour ce type de système, nous proposons dans cette thèse une nouvelle approche pour la synthèse et l'autoréglage des régulateurs PI multivariables pour des systèmes multi-retards. Le problème de conception d'un correcteur PI de dimension finie pour un système linéaire multivariable avec des retards multiples de dimension infinie est très complexe et sa résolution sera un point clé de cette thèse. Par ailleurs, cette approche ne doit pas imposer des contraintes sur les interactions entre les différentes boucles de réglage ni sur l'ordre du système ni d'ailleurs sur ses dynamiques en boucle ouverte (présence de pôles ou zéros instables). L'approche proposée sera appliquée sur trois systèmes multivariables à retards multiples : un système stable, un système instable et un système à non-minimum de phase puis comparée aux approches conventionnelles.

Ce rapport est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre rappellera les techniques de modélisation des systèmes multivariables, l'influence néfaste des pôles et des zéros instables ainsi que l'effet des interactions des différentes boucles sur le comportement dynamique de ces systèmes. Un état de l'art sur la synthèse des régulateurs PI/PID pour les deux cas monovariante et multivariable sera ensuite présenté. Dans ce cadre, nous proposons de détailler deux approches : l'approche conventionnelle IMC ainsi qu'une approche étendue. Ce chapitre se termine par un exposé des contributions de cette thèse par rapport à l'existant.

Le second chapitre se propose d'exposer les avantages et les limitations des approches ILMI pour la synthèse des régulateurs PID multivariables. Une étude comparative entre trois approches sur un processus multivariable à non-minimum de phase en se basant sur plusieurs

critères de performance et de robustesse sera établie. Les limitations de ces approches seront mises en valeurs.

Le troisième chapitre sera consacré à une nouvelle méthodologie de modélisation des systèmes linéaires multivariables à retards multiples. Nous rappellerons en premier lieu le passage d'une matrice de transfert à une représentation d'état et vis-vers-ça d'un système linéaire à retards multiples. La modélisation d'une seule variable retardée via les équations différentielles partielles (PDE) sera ensuite présentée. Nous détaillerons ensuite la méthode de collocation orthogonale qui nous permettra de transformer un système de dimension infinie en un système de dimension finie. L'extension de la modélisation d'une seule variable retardée sera enfin étendue à un système à retards multiples pour obtenir une nouvelle représentation d'état. Trois exemples numériques de systèmes stable, instable et à non minimum de phase seront appliqués afin de démontrer la validité et l'efficacité de la nouvelle représentation d'état proposée.

Le quatrième chapitre s'intéresse enfin à la synthèse et l'autoréglage des régulateurs PI multivariables pour des systèmes linéaires à retards multiples. Exploitant le travail de modélisation établi au troisième chapitre, l'approche proposée sera divisée en deux sous-problèmes l'un temporel et l'autre fréquentiel. La philosophie de la stratégie de régulation pour la classe de systèmes à retards considérée sera présentée. Nous illustrerons l'applicabilité de l'approche proposée pour différents types de systèmes : système stable, système à non-minimum de phase et système instable. Des indices de performance seront utilisés pour les cas de suivi de consigne, rejet de perturbation et des incertitudes paramétriques afin de démontrer les performances et la robustesse de la méthodologie proposée en comparaison avec des approches conventionnelles et non conventionnelles.

Une conclusion générale ainsi que des perspectives de ces travaux clôturent ce rapport.

# **Chapitre 1**

## **Méthodes de synthèse des régulateurs PID**

## 1.1 Introduction

Ce premier chapitre rappelle en premier lieu les techniques de modélisation des systèmes multivariables. Il met le point sur l'influence néfaste des pôles et des zéros instables. Un état de l'art sur la synthèse des régulateurs PID pour les deux cas des systèmes monovariables et multivariables sera présenté. Par ailleurs, la synthèse des régulateurs PI/PID par une approche conventionnelle IMC et une approche étendue IMC-PI seront bien détaillées. Les critères de performance généralement utilisés pour évaluer différentes approches seront également exposés. Ce chapitre se termine par un exposé des contributions de cette thèse.

## 1.2 Systèmes multivariables

Nous présentons dans cette section les techniques de modélisation des systèmes multivariables, l'influence néfaste des zéros à non-minimum de phase, des couplages et des retards sur la dynamique du système.

### 1.2.1 Modélisation des systèmes multivariables

Un système est dit multivariable s'il possède plus qu'une entrée et/ou plus qu'une sortie comme le montre la Figure 1.1.

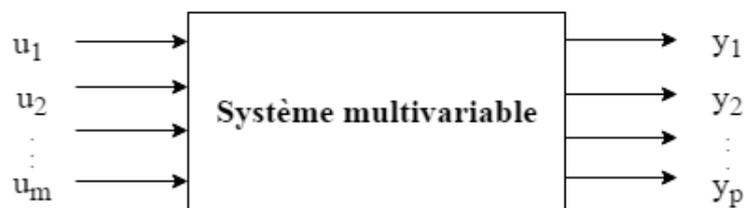


Figure 1.1 – Système multivariable

Soit  $u = [u_1 \ \dots \ u_m]^T \in \mathfrak{R}^m$  son vecteur d'entrée  $y = [y_1 \ \dots \ y_p]^T \in \mathfrak{R}^p$  son vecteur de sortie. Si le système est linéaire, stationnaire et de dimension finie, il peut être décrit par l'un des trois modèles mathématiques suivants [Rosenbrock, 1970] :

- Système différentiel,
- Matrice de transfert,
- Représentation d'état.

On note que l'équivalence entre les trois modèles ci-dessus n'est établie que si le système est commandable et observable. En effet, un système en modèle différentiel perd les modes non observables alors qu'un modèle en matrice de transfert perd les modes non observables et les modes non commandables.

La représentation d'état du système multivariable représenté par la Figure 1.1 est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état du système.  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est la matrice dynamique,  $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$  est la matrice de commande,  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie et  $D \in \mathcal{R}^{p \times m}$  est la matrice de couplage.

La matrice de transfert est définie par :

$$G = (sI - A)^{-1}B + D \quad (1.2)$$

En effectuant des transformations de Laplace de l'équation (1.1), le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $s$  est l'opérateur de Laplace. L'ensemble des équations (1.3) peuvent être réécrites sous la forme :

$$\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La matrice  $P(s)$  donnée par :

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

joue un rôle clé dans l'étude de la dynamique des zéros. Elle sera appelée matrice système [Rosenbrock, 1970].

La matrice  $G(s)$  fournit une description externe du système alors que la matrice  $P(s)$  exhibe une description interne du système. En effet, il existe une différence notable entre  $G(s)$  et  $P(s)$ .  $P(s)$  transmet plus d'informations sur le système que  $G(s)$ , qui représente uniquement le sous-système complètement commandable et complètement observable [Zadeh & Desoer, 1963]. Les différences entre les deux matrices induisent une différence dans les ensembles de zéros qui y sont associés. En général, un ensemble plus large de zéros est défini pour  $P(s)$ . Si le système est complètement commandable et complètement observable, alors les deux ensembles de zéros coïncident.

### 1.2.2 Zéros et pôles

D'un côté, il existe quatre types de zéros [MacFarlane & Karcnias, 1976] :

- Les zéros de transmission : Ils sont physiquement associés avec les propriétés de blocage-transmission du système [Davison & Wang, 1974]. Ils sont calculés via la forme de Smith-McMillan de la matrice de transmittance  $G(s)$  [Annexe A].
- Les zéros invariants : Ils correspondent au problème général de la sélection de combinaisons particulières d'entrées et d'états associés avec une valeur particulière de la fréquence complexe identique à celle des zéros invariants, de telle façon que la sortie du système est identiquement nulle. En termes de mineurs de  $P(s)$ , on peut définir un polynôme de zéros invariants  $P_1(s)$  comme étant le plus grand commun diviseur de tous les mineurs de  $P(s)$  d'ordre maximum. Les zéros invariants sont donc les zéros de ce polynôme  $P_1(s)$ .
- Les zéros de découplage : Ils ont été introduits par Rosenbrock [Rosenbrock, 1970] et sont associés avec la situation où un mouvement modal libre de l'état du système, de type exponentiel, est découplé de l'entrée ou de la sortie du système.

Ils sont associés à l'existence de modes découplés pour les systèmes qui ne sont pas complètement commandables ou complètement observables. Les zéros de découplage sont définis respectivement via la forme de Smith donnée par :

$$[sI-A \quad -B] \text{ et } \begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}$$

- Les zéros du système : Ils forment l'ensemble des zéros qui incluent les zéros de transmission et les zéros de découplage pour un système donné. Ils sont calculés via un ensemble adéquat de mineurs de  $P(s)$ , un sous-ensemble de celui-ci est utilisé pour définir les zéros invariants [MacFarlane & Karcnias, 1976].

Les principaux types de zéros d'un système multivariable sont donnés par la Figure 1.2. L'ensemble des zéros du système et zéros invariants incluent l'ensemble des zéros de transmission mais différent de celui-ci en contenant aussi des zéros de découplage. L'ensemble des zéros invariants contiennent seulement quelques zéros de découplage alors que l'ensemble des zéros du système contiennent tous les zéros de découplage. Notons que si le système est complètement commandable et complètement observable, alors l'ensemble des zéros de transmission, définis via  $G(s)$ , et l'ensemble des zéros invariants, définis via  $P(s)$ , coïncident.

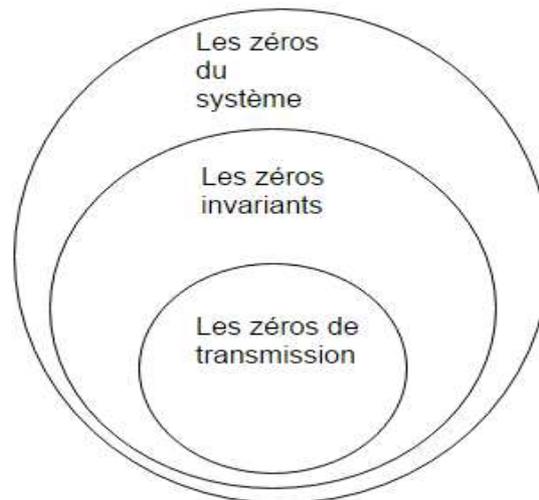


Figure 1.2 – Les différents types de zéros d'un système multivariable

On a alors : zéros de transmission  $\subseteq$  zéros invariants  $\subseteq$  zéros du système

D'un autre côté, il existe différents types de pôles multivariables [MacFarlane & Karcnias, 1976] :

- Les pôles système : Ils ne sont que les solutions de l'équation  $\det(\lambda I - A) = 0$  dénotés par  $\lambda_i(A)$  ( $i=1, \dots, n$ ).
- Les pôles de transmission : Ils ne sont que les solutions de l'équation  $\det(\lambda I - A) = 0$  si  $\{A, B, C, D\}$  est une réalisation minimale.
- Les pôles éléments : Ils sont l'union des racines des polynômes dénominateurs des fonctions de transfert monovariées de la matrice de transfert  $G(s)$ .

On a alors :

Pôles de transmission  $\subseteq$  pôles système + pôles de transmission  $\subseteq$  pôles éléments

Une étude comparative des effets des pôles et des zéros sur la dynamique d'un système multivariable est décrite par le Tableau 1.1 [Desoer & Schulman, 1974].

Tableau 1.1 – Influence des pôles et des zéros sur la dynamique d'un système multivariable

Influence des pôles	Influence des zéros
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Les pôles déterminent le comportement modal du système.</li> <li>– La stabilité du système non bouclé dépend uniquement des pôles système.</li> <li>– Les pôles du système peuvent être déplacés par feedback.</li> <li>– Résonance : La sortie <math>\ y(t)\ </math> peut être très large si les fréquences de résonance sont excitées.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Les zéros décrivent le couplage des modes à l'environnement du système.</li> <li>– Les zéros influencent le comportement entrée/sortie.</li> <li>– Les zéros invariants ne peuvent être déplacés par un retour statique.</li> <li>– Principe de l'anti-résonance : Il existe une entrée avec la fréquence du zéro et des conditions initiales telle que la sortie est identiquement zéro (appelé aussi problème du zéro de sortie).</li> </ul>

**Exemple 1 :** Soit le système multivariable défini par sa matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

On peut obtenir la forme de Smith-Mc Millan de  $G(s)$  comme suit [Annexe A] :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Les polynômes de pôles et de zéros de  $G(s)$  sont donnés par :

$$p(s) = (s+1)^2(s+2),$$

$$z(s) = (s-2).$$

Ainsi,  $G(s)$  admet des pôles système stables  $\{-1, -1, -2\}$  et un zéro de transmission positif  $\{+2\}$ .

### 1.2.3 Influence néfaste des zéros à non-minimum de phase

Les zéros d'un système dynamique représentent un aspect fondamental de la théorie de commande. Les effets des zéros sont plus délicats que ceux des pôles. En particulier, les zéros positifs appelés aussi à non-minimum de phase peuvent causer un sous dépassement initial (croissance de l'erreur initiale dans le sens inverse de l'objectif souhaité), des passages à zéro et un dépassement dans la réponse [Hoagg & Bernstein, 2007]. Dans la théorie de commande, un zéro à non-minimum de phase pour un système bouclé est sans doute la pire caractéristique que peut posséder un système [Hoagg & Bernstein, 2007]. Plusieurs systèmes et processus à non-minimum de phase ont été cités dans la littérature (système de stationnement d'une voiture, avion gagnant en altitude, chauffage d'une maison avec four à charbon ...).

Afin de mettre le point sur l'influence néfaste d'un zéro à non minimum de phase, considérons les deux exemples suivants :

#### Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert à non-minimum de phase du contrôle d'altitude du Boeing 747 dont la fonction de transfert normalisée est décrite [Franklin *et al.*, 2010] :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{6-s}{s(s^2 + 4s + 13)} \quad (1.8)$$

et dont la réponse est décrite par la Figure 1.3. Pour que l'avion monte, la déflexion ascendante des élévateurs cause une descente initiale de l'avion qui représente une réponse initiale opposée à la réponse finale souhaitée, un passage par zéro suivi par un dépassement notable. Pour vaincre ce comportement à non-minimum de phase et éviter des risques de chute, les avions de ligne utilisent souvent des dispositifs hypersustentateurs comme les becs et les volets de bord d'attaque pour annuler ce comportement néfaste.

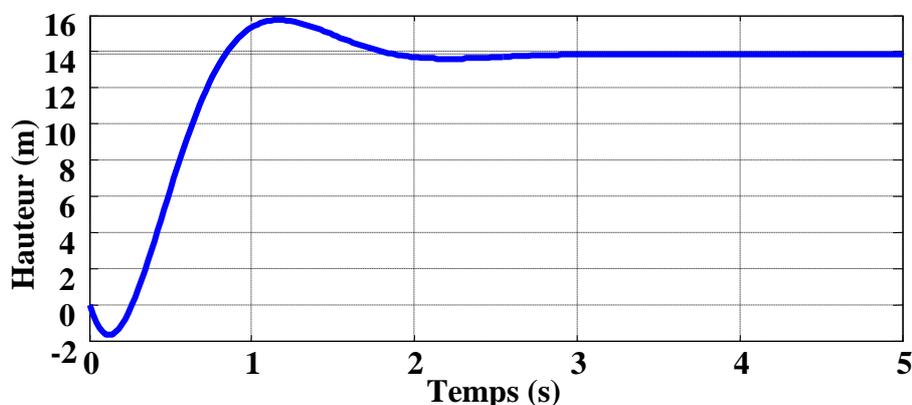


Figure 1.3 – Réponse néfaste d'un système à non minimum de phase

**Exemple 3 :** Soit la fonction de transfert d'un système à non-minimum de phase donnée par :

$$G(s) = \frac{3-s}{(s+1)(s+5)} \quad (1.9)$$

Ainsi,  $G(s)$  admet des pôles stables  $\{-1, -5\}$  et un zéro à non-minimum de phase  $\{+3\}$ .

Le comportement à non-minimum de phase peut s'expliquer de deux façons :

– En utilisant une décomposition en éléments simples, la fonction de transfert (1.9) peut s'écrire :

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+5} \quad (1.10)$$

Le comportement à non-minimum de phase peut se produire à partir d'une réponse rapide et d'une autre réponse lente de signes opposés selon la Figure 1.4.

– La fonction de transfert (1.9) peut s'écrire aussi comme suit :

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+5)} - \frac{s}{(s+1)(s+5)} \quad (1.11)$$

Sa fonction temporelle correspondante est donnée par :

$$g(t) = 3\left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-5t}\right) \quad (1.12)$$

Dans ce cas, le comportement à non-minimum de phase peut être interprété comme étant une réponse dérivée négative tel que représenté par la Figure 1.5.

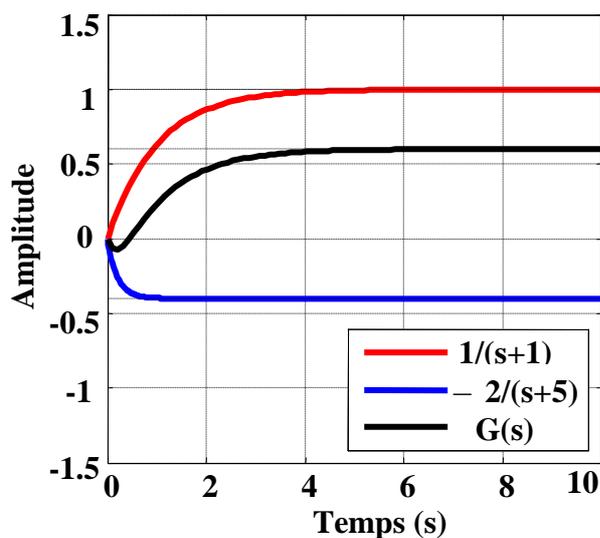


Figure 1.4 – Réponse indicielle de (1.10)

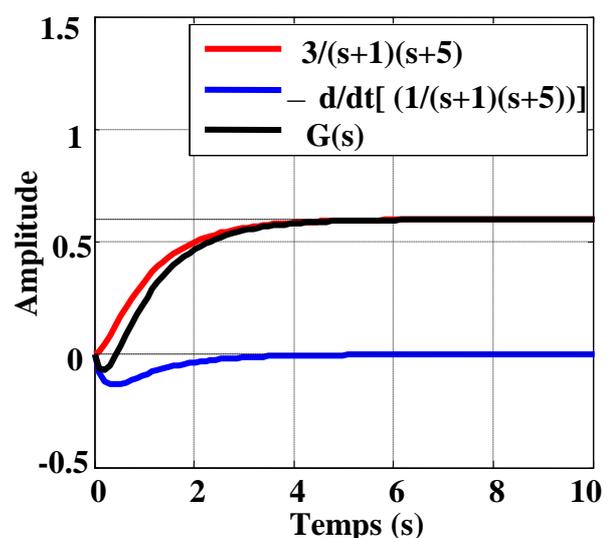


Figure 1.5 – Réponse indicielle de (1.11)

#### 1.2.4 Effet des couplages ou interactions

Le couplage dans un système multivariable est défini comme étant l'influence qu'exerce la consigne  $r_j(s)$  ou la perturbation  $d_j(s)$  sur la dynamique de plusieurs sorties ( $y_i(s), i \neq j$ ) ou alternativement, l'influence qu'exerce la sortie  $y_i(s)$  sur plusieurs consignes ( $r_j(s), i \neq j$ ) ou plusieurs perturbations  $d_j(s)$  [Desphande, 1989].

Dans toute synthèse multi-boucles, la première étape à effectuer est de choisir la configuration adéquate de commande qui permet d'assurer que les interactions entre les boucles soient très faibles. Cela permet d'appliquer le principe de la commande monovariante. Pour un système comprenant  $m$  boucles monovariantes, on aura  $m!$  configurations possibles dont une seule est prise en considération.

La procédure permettant le choix de la configuration adéquate est l'analyse des interactions. Dans ce cadre, différentes méthodes d'analyse des interactions existent [Jensen & Fisher, 1986], [Grosdidier & Morari, 1986] permettant d'évaluer le niveau d'interaction entre les boucles de régulation. On peut aussi citer dans ce sens la mesure d'interaction IMC [Economou & Morari, 1986], la méthode RGA (*Relative Gain Array*) [Bristol, 1978], et la méthode de Rijnsdorp's IM ou Nyquist Array [Grosdidier & Morari, 1986].

La présence d'un niveau d'interaction important influe sur la qualité de la régulation, l'énergie consommée et sur le coût de fonctionnement mais rend aussi la tâche de conception d'un système de commande robuste plus compliquée. Ce phénomène d'interaction caractérisant les systèmes multivariables est considéré comme étant l'un des problèmes majeurs dans l'industrie et doit être absolument résolu pour atteindre les objectifs mentionnés ci-dessus.

La commande décentralisée d'un système multivariable dépend du niveau d'interaction des boucles. D'une part, si le niveau d'interaction est négligeable, la commande du système revient à un ensemble de synthèses monovariantes et chaque boucle de régulation est séparément commandée en assurant des performances et une robustesse désirées.

D'autre part, si le niveau d'interaction est important ou non désiré, deux solutions sont possibles : Soit synthétiser une commande centralisée [Sarma & Chidambaram, 2005], [Shen *et al.*, 2014], [Wang *et al.*, 2015], soit synthétiser une commande décentralisée qui n'est autre qu'un ensemble de contrôleurs monovariants obtenus après avoir affaibli les interactions existantes dans le système. Cette dernière stratégie de commande est appelée aussi commande multi-boucles [Grosdidier & Morari, 1986], [Luyben, 1990], [Huang *et al.*, 1994], [Loh *et al.*, 1993], [Chien *et al.*, 1999], [Cha *et al.*, 2002], [Lee *et al.*, 2004], [Luan & Lee, 2010], [Vu &

Lee, 2010a], [Vu & Lee, 2010b], [Jin *et al.*, 2013] et [Luan *et al.*, 2015]. Cette dernière est très utilisée en industrie vu la simplicité d'implémentation et les performances obtenues pour chaque boucle individuelle.

### 1.2.5 Effet des retards

Lors de l'analyse et la commande des systèmes multivariables, le concepteur a tendance à négliger les retards [Niculescu, 2001], [Richard, 2003], [Loiseau *et al.*, 2009]. Or, une majorité des processus industriels admettent des retards qui ne peuvent être ignorés vu leurs effets néfastes sur la réponse du système bouclé commençant par une détérioration des performances et allant jusqu'à l'instabilité du système bouclé.

Pour tenir compte des retards, des approximations des retards sont souvent adoptées dans le modèle du processus. L'intérêt majeur d'approximer un retard réside dans l'aspiration de traiter un système de dimension infinie comme un système de dimension finie [Richard, 2003]. Approximer les retards en termes de fonctions de transfert rationnelles implique généralement des tronqués de quelques séries finies. Des exemples d'approximations très connues peuvent être cités comme les séries de Laguerre-Fourrier, les séries de Kautz, les approximations de Padé [Richard, 2003].

Dans ce qui suit, on cite les principales approximations utilisées lors de nos travaux :

- L'approximation de Padé d'ordre zéro :

$$e^{-\theta s} \approx 1 \tag{1.13}$$

où  $\theta$  est le retard du système.

- L'approximation de Padé de premier ordre :

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}, \tag{1.14}$$

- Le développement en Séries de MacLaurin au second ordre est donné par :

$$f(s) = f(0) + f'(0)s + f''(0)\frac{s^2}{2!} \tag{1.15}$$

où  $f(s)$  est un polynôme de quelques séries finies.

Une observation plus étroite à la littérature disponible pour la conception de régulateurs PI/PID, par exemple, montre que les séries de Taylor et les séries de MacLaurin ont été aussi utilisées pour approximer ces correcteurs [Sipahi *et al.*, 2011].

Cependant, remplacer un retard par une approximation de dimension finie peut être aussi une source de problèmes ou, au moins, constitue une limitation dans leur analyse. Des précautions doivent être prises en compte dans le choix de l'ordre de la troncature de ces approximations. On doit également faire face à l'ordre élevé de ces approximations, en plus des limitations des classes de modèles.

### 1.3 Réglage PID

Dans cette partie, le principe de réglage PID sera présenté ainsi qu'un état de l'art des méthodes de synthèse PI/PID pour les deux cas monovariante et multivariante.

#### 1.3.1 Principe

L'intérêt porté par la recherche au régulateur PID est justifié par le fait que la majorité des boucles de régulation dans l'industrie sont de type PID [Astrom & Haggglund, 1995 ; Astrom *et al.*, 2001; Astrom & Haggglund, 2001]. Sa popularité provient de sa facilité d'implémentation et la simplicité de son utilisation. C'est en 1940 que ces correcteurs ont vu leurs premières introductions dans l'industrie. Ils sont implantés sous différentes formes comme régulateurs analogiques ou numériques [Diracca, 1986]. La méthode de Ziegler-Nichols [Ziegler & Nichols, 1942] est considérée comme étant la première méthode utilisée pour ajuster les paramètres de ce régulateur. Dans ce contexte, plusieurs approches sont apparues depuis des décennies. Plusieurs ouvrages sont disponibles dans ce sens [Astrom & Haggglund, 1995], [Yurkevich, 2011], [Panda, 2012], [Vilanova & Visioli, 2012]. Plusieurs surveys existent aussi [Koivo & Tantt, 1991], [Astrom *et al.*, 1993], [Gorez, 1997], [O'Dwyer, 2003], [O'Dwyer, 2006] énumérant les principales méthodes de synthèse des régulateurs PI/PID monovariants, qui seront l'objet de la section suivante.

Le correcteur PID sous sa forme standard parallèle est représenté par :

$$c = k_P \left( 1 + \frac{1}{k_I s} + k_D s \right) \quad (1.16)$$

où  $k_P$ ,  $k_I$  et  $k_D$  représentent respectivement le gain proportionnel, le gain intégral et le gain dérivé. L'équation temporelle du correcteur PID est donnée alors par :

$$u(t) = k_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(s) ds + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1.17)$$

où  $u$  est la variable de commande et  $e$  est le signal d'erreur défini par  $e = r - y$  où  $r$  la consigne et  $y$  est la sortie où  $k_I = T_i$  et  $k_D = T_d$ .

Les trois actions de ce régulateur peuvent être décrites comme suit :

- L'action proportionnelle

Elle permet de réduire l'erreur en régime statique et d'augmenter la rapidité du système tant qu'il n'est pas oscillatoire.

- L'action intégrale

La fonction intégrale permet d'éliminer l'erreur en régime permanent. Cette action exige une attention particulière. En effet, lorsque le signal d'erreur est important, l'actionneur qui se situe en aval se sature rapidement et la boucle de régulation est alors ouverte. Pour plus de détails sur la modélisation et la conception des correcteurs PID anti-windup, on se réfère par exemple aux travaux de [Azar & Serrano, 2015].

- L'action dérivée

Le but de l'action dérivée est d'accélérer la réponse du système en boucle fermée. Cette action est cependant très sensible aux bruits de haute fréquence car elle les amplifie. Pour limiter l'amplification des bruits, l'action dérivée peut être alors filtrée par un système de premier ordre.

Dans ce qui suit, un état de l'art des méthodes de synthèse des paramètres des régulateurs PI/PID pour le cas SISO (Single Input Single Output) et MIMO (Multi Input Multi Output) sera établi.

### 1.3.2 PID monovariante

Les méthodes de réglage des correcteurs PID monovariants peuvent être ordonnées selon différentes classes. Les méthodes de réglage empiriques reposent sur la représentation des processus par un modèle bien précis (premier ordre ou intégrateur avec retard pur) et permettent d'ajuster les paramètres du régulateur PID à partir d'essais pratiques sur le procédé. Ziegler et Nichols [Ziegler & Nichols, 1942] ont proposé deux approches destinées à ajuster les paramètres du régulateur PID. La première méthode nécessite d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité alors que la deuxième méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler. D'autres méthodes empiriques similaires visant à améliorer la méthode de Ziegler-Nichols ont été développées comme la méthode de Cohen-Coon, la méthode de Takahashi, la méthode de Chien-Hrones-Reswick, la méthode de Broïda et la méthode de Kappa-tau [Astrom & Hagglund, 1995]. D'autre part, Astrom & Hagglund [Astrom & Hagglund, 1984] ont proposé de mesurer automatiquement le point critique en remplaçant le régulateur classique PID par un régulateur à relais. La méthode du relais représente un avantage incontestable par rapport aux autres méthodes car elle ne

nécessite pas d'atteindre la limite de stabilité du système. En effet, l'amplitude des oscillations du système est limitée puisqu'elle dépend seulement de l'amplitude du relais. Pour plus de détails, on peut se référer à [Astrom & Hagglund, 1995].

Plusieurs autres méthodologies ont été développées dans la littérature. Parmi celles-ci, on peut citer les méthodes fréquentielles qui s'appuient sur différents outils graphiques comme le plan de Bode, Nyquist, les abaques de Hall ou de Black-Nichols et le lieu des racines, la méthode de marge de gain et de phase et la méthode de facteur de résonance [Astrom & Hagglund, 1984]. On peut aussi citer la technique de LoopShaping (LS) introduite par [McFarlane & Glover, 1990] et [Zhou *et al.*, 1996] qui consiste à régler les performances désirées du système bouclé en modelant la boucle ouverte avec des fonctions de pondération choisies.

D'autres méthodes ont été aussi développées dont la méthode de Naslin [Naslin, 1968] qui est une méthode analytique basée sur les polynômes dits à amortissement réglable, les méthodes optimales et robustes comme celles basées sur les critères  $H_2$  [Makila, 1984] ou  $H_\infty$  [Kristiansson & Lennartson, 2002], [Ho, 2003], la méthode de placement des pôles dominants [Wang *et al.*, 2009], la méthode d'annulation des pôles du procédé [Morari & Zafiriou, 1989], les méthodes de Kessler [Kessler, 1958], la méthode de Ziegler-Nichols modifiée [Astrom & Hagglund, 1988]. La méthode du prédicteur de Smith [Lee *et al.*, 1999], [Majhi & Atherton, 2000] est aussi connue comme étant une méthode de synthèse des correcteurs pour les systèmes qui possèdent des retards purs élevés, ce qui est relativement fréquent dans l'industrie. D'autres travaux ont permis d'aborder le réglage des régulateurs PID via des méthodes heuristiques telle que la logique floue [Ketata, 1992], [Ketata *et al.*, 1995], les réseaux de neurones [Shu & Pi, 2000], les algorithmes génétiques [Krohling & Rey, 2001], [Zhang *et al.*, 2009], l'optimisation par essaims de particules [Gaing, 2004], [Kim *et al.*, 2008].

Par ailleurs, il existe de nos jours un grand nombre de recherches et une littérature étendue autour des méthodes analytiques de réglage PID SISO. Parmi ceux-ci, il existe quelques méthodes de réglage analytiques où la fonction de transfert du correcteur est obtenue à partir des spécifications par un calcul direct comme la méthode de réglage- $\lambda$  ou la méthode de Haalman [Astrom & Hagglund, 1995]. La méthode IMC [Garcia & Morari, 1982] que nous détaillerons par la suite, est considérée comme une commande classique très répandue. Les avantages principaux de cette méthode résident dans la simplicité de synthèse du correcteur et le réglage explicite de robustesse grâce au choix d'un filtre. La méthode conventionnelle IMC SISO [Rivera *et al.*, 1986] est adoptée pour la synthèse de correcteurs PI/PID SISO pour les systèmes monovariables stables de premier et second ordre et aussi intégrateurs de Type I et

II. Cette méthode sera amplement détaillée dans la section 1.4. D'autres méthodes se sont intéressés à des classes particulières comme la classe de systèmes à non-minimum de phase [Huang *et al.*, 2001], [Uren & Schoor, 2011] et la classe des systèmes à intégrateurs [Grimholt & Skogestad, 2016].

### 1.3.3 PID multivariable

Les approches de synthèse et d'auto-réglage PI/PID monovariabiles ne peuvent être systématiquement généralisées au cas multivariable dans le cas où les couplages entre les variables d'entrée/sortie sont considérés importants. Dans ce sens, plusieurs travaux existent dans la littérature pour la synthèse des régulateurs PI/PID centralisées des systèmes MIMO [Koivo & Tantt, 1991], [Wang *et al.*, 2008], [Vilanova & Visoli, 2012]. Vu la complexité et la diversité des méthodes, nous nous intéresserons particulièrement aux méthodes les plus conventionnelles dans la littérature.

Dans la classe des méthodes empiriques, on peut citer la méthode de Ziegler-Nichols modifiée [Niederlinski, 1971] et la méthode du relais. Celle-ci a été étendue au cas multivariable en utilisant deux approches. La première approche utilise une rétroaction relais partiel utilisant une procédure itérative en réglant le système par boucle, fermant chaque boucle une fois qu'elle est réglée, jusqu'à ce que toutes les boucles soient fermées. Pour la seconde approche, une configuration par rétroaction relais est simultanément appliquée à toutes les boucles. Des exemples des différentes approches utilisant la méthode du relais ont été reportées dans les travaux de [Loh *et al.*, 1993], [Zhuang & Atherton, 1994], [Palmor *et al.*, 1995], [Hang *et al.*, 2002].

Des méthodes fréquentielles ont aussi émergé dans ce même sens telle que la méthode de la marge de gain et de phase [Ho *et al.*, 1997], la technique utilisant le concept  $H_\infty$  Loop Shaping (LS) [Tan *et al.*, 1998], [Panagopoulos & Astrom, 1999], [Genç, 2000], [Tan *et al.*, 2002]. D'autres méthodes basées sur les mêmes principes fréquentielles se sont intéressés plutôt aux fonctions de sensibilité [Wang *et al.*, 2013], [Vanavil *et al.*, 2015].

Des méthodes basées sur la commande optimale/robuste ont aussi émergé. D'une part, on peut citer quelques méthodes optimales dont les objectifs de conception de la commande sont exprimés dans la forme d'un critère de performance quadratique [Yanchevsky, 1987]. Une procédure de conception LQ robuste a été aussi reportée par [Sandelin *et al.*, 1991]. D'autre part, des méthodes robustes s'appuyant sur des critères de robustesse sont apparues : On reporte par exemple une méthode pour le réglage des contrôleurs PI décentralisés utilisant un

critère de synthèse  $\mu$  [Gagnon *et al.*, 1999]. D'autres travaux ont mis en œuvre des méthodes combinant la théorie de commande optimale mixant  $H_2 / H_\infty$  et la commande simple PID [Takahashi *et al.*, 1997], [Chen *et al.*, 1998], [Bevrani & Hiyama, 2007].

Par ailleurs, on peut citer aussi les méthodes polynomiales où les gains PID multivariables sont calculés à partir de la résolution d'équations polynomiales en utilisant le principe de commande à variance minimale [Yusof *et al.*, 1994] ou par placement de pôles dominants [Zhang *et al.*, 2002], [Wang *et al.*, 2008 - Chapitre 6].

Notons que dans la littérature, la commande la plus conventionnelle est la méthode IMC qui a été étendue au cas multivariable dans [Economou & Morari, 1986]. Cette dernière approche sera détaillée dans le paragraphe suivant afin d'expliquer ses points forts lui permettant d'être parmi les plus utilisées dans l'industrie. Des méthodes récentes s'inspirant des mêmes principes de la méthode IMC ont été aussi reportés dans la littérature conduisant à un autoréglage des paramètres PI/PID. On peut citer dans ce sens les méthodes proposées par [Dong & Brosilow, 1997], [Cha *et al.*, 2002], [Lee *et al.*, 2004], [Luan & Lee, 2010], [Vu & Lee, 2010a], [Vu & Lee, 2010b], [Jin *et al.*, 2013].

Pour finir sur cette classification des approches de synthèse et autoréglage des régulateurs PID multivariables, nous complétons cette synthèse par la classe des méthodes les plus modernes basés sur les outils LMI [Boyd *et al.*, 2016], [Shimizu, 2016], ILMI [Cao *et al.*, 1998], [Zheng *et al.*, 2002], [Lin *et al.*, 2004], [He & Wang, 2006], [Bevrani & Hiyama, 2007], [Mogrovejo *et al.*, 2016]. Des méthodes utilisant la structure PID à deux degrés de libertés ont été aussi proposées. Dans ce cadre, [Bianchi *et al.*, 2008] a conçu un correcteur PID multivariable en résolvant un problème d'optimisation avec des inégalités matricielles bilinéaires BMIs (*Bilinear Matrix Inequalities*). L'avantage de cette structure est que les réponses du système au changement de consigne et de perturbation peuvent être ajustées séparément. La majorité de ces méthodes sont basées essentiellement sur le concept de retour de sortie statique SOF (*Static Output Feedback*). L'idée de base consiste à transformer le problème de commande du système via un correcteur PID en un problème SOFS (*Static Output Feedback Stabilization*). Cela peut être réalisé en augmentant la dimension du système commandé via un correcteur PID en utilisant de nouvelles variables d'état. Ces approches feront l'objet du second chapitre où les avantages ainsi que les limitations de ces approches seront mis en surbrillance.

Finalement, on ne peut pas achever cette section sans citer quelques travaux qui ont permis de résoudre le problème de la synthèse des correcteurs PID multivariables pour des classes

spécifiques tels des systèmes MIMO avec retards multiples [Mete *et al.*, 2006], des systèmes MIMO instables avec retards sur les entrées et aussi les sorties [Gundes *et al.*, 2007] ou des systèmes MIMO à non-minimum de phase [Sarma & Chidambaram, 2005].

## 1.4 La méthode IMC

Comme son nom l'indique, la commande IMC [Saidi, 1996] incorpore une simulation du processus par un modèle interne dans sa structure de commande. La commande issue du correcteur est appliquée simultanément au procédé et à son modèle. La comparaison des sorties génère un signal d'erreur qui est utilisé pour modifier l'entrée du correcteur, afin de permettre à la commande de mieux piloter le procédé.

### 1.4.1 Cas monovariante

#### – Principes de l'approche IMC [Rivera *et al.*, 1986]

Le principe de base de l'approche IMC SISO est explicité par la Figure 1.6 où  $g$ ,  $\tilde{g}$ ,  $g_c$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $u$ ,  $y$ ,  $y'$ ,  $d$ ,  $\tilde{d}$  représentent respectivement la fonction de transfert du processus, la fonction de transfert du modèle, la fonction de transfert du correcteur IMC, la fonction de transfert du correcteur classique, la consigne, la commande, la sortie du système bouclé, la sortie du processus, la perturbation sur la sortie et l'erreur entre le processus et son modèle.

Il est clair que l'objectif de toute conception d'un système de commande est une poursuite d'une consigne précise et rapide telle qu'on a toujours :

$$y = r \quad \forall t, \quad \forall d \quad (1.18)$$

Ceci implique que les perturbations externes doivent être corrigées le plus efficacement possible telle qu'on a toujours :

$$y' = r - d \quad \forall t, \quad \forall d \quad (1.19)$$

Pour une bonne régulation, il est impératif qu'il faut aussi ajouter aux objectifs (1.18) et (1.19) une insensibilité aux erreurs de modélisation. Pour le schéma-bloc en boucle ouverte de la Figure 1.6A, la question de stabilité est non significative : Il est évident que le système global n'est stable que lorsque le correcteur est stable et que le système l'est aussi ; Dans ce cas, le correcteur est facile à concevoir. Il suffit d'avoir  $g_c = \tilde{g}^{-1}$ . Les inconvénients d'une telle proposition sont essentiellement une sensibilité aux erreurs de modélisation et l'incapacité à faire face aux perturbations non mesurables.

Si on considère actuellement l'arrangement de la boucle fermée décrit par la Figure 1.6B, la situation est inversée. Les erreurs de modélisation et les perturbations non-mesurables

peuvent être traitées efficacement alors que la synthèse du correcteur classique  $c$  est compliquée par le problème de stabilité en boucle fermée.

Des solutions possibles pour résoudre ce problème sans affecter les performances du système sont proposées par les Figures 1.6C et 1.6D : Dans la Figure 1.6C, si  $\tilde{d} = 0$ , le processus se comporte comme un système en boucle ouverte (La Figure 1.6C serait équivalente à la Figure 1.6A). Pour la Figure 1.6D, les deux blocs  $\tilde{g}$  s'annulent (La Figure 1.6D est ainsi équivalente à la Figure 1.6B). En reliant les Figures 1.6C et 1.6D à travers les définitions suivantes :

$$g_c = \frac{c}{1 + c\tilde{g}} \quad (1.20)$$

$$c = \frac{g_c}{1 - \tilde{g}g_c} \quad (1.21)$$

on arrive à la structure générale décrite par la Figure 1.6E qui admet les avantages des deux structures de la boucle ouverte et de la boucle fermée : Quand le modèle du processus est parfait ( $g = \tilde{g}$ ) et qu'il n'y a pas de perturbation ( $d=0$ ), la rétroaction n'est pas nécessaire et la structure 1.6E se comporte identiquement à la structure 1.6A. Dans le cas où il existe une erreur entre processus/modèle ou des perturbations, la structure 1.6E peut traiter ces problèmes puisqu'il s'agit d'une structure en boucle fermée équivalente à la structure 1.6B.

Puisque le modèle du processus  $\tilde{g}$  apparaît explicitement dans 1.6E, cette structure est appelée une structure de Commande à Modèle Interne (IMC). Ainsi, on peut confirmer que le correcteur de la Figure 1.6E peut être conçu facilement comme un correcteur en boucle ouverte en retenant les avantages d'un système bouclé.

A partir du schéma-bloc de la Figure 1.6E, les relations suivantes sont obtenues :

$$u = \frac{g_c}{1 + g_c(g - \tilde{g})} (r - d) \quad (1.22)$$

$$y = \frac{g g_c}{1 + g_c(g - \tilde{g})} (r - d) + d = \tilde{H}(r - d) + d \quad (1.23)$$

$$e = r - d = \frac{1 - \tilde{g}g_c}{1 + g_c(g - \tilde{g})} (r - d) = \tilde{S}(r - d) \quad (1.24)$$

où  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$  sont respectivement la fonction de sensibilité et la fonction de sensibilité complémentaire vérifiant  $\tilde{S} + \tilde{T} = 1$  et tels que :

$$\tilde{T} = \frac{g g_c}{1 + g_c(g - \tilde{g})} \quad (1.25)$$

$$\tilde{S} = \frac{1 - \tilde{g}g_c}{1 + g_c(g - \tilde{g})} \quad (1.26)$$

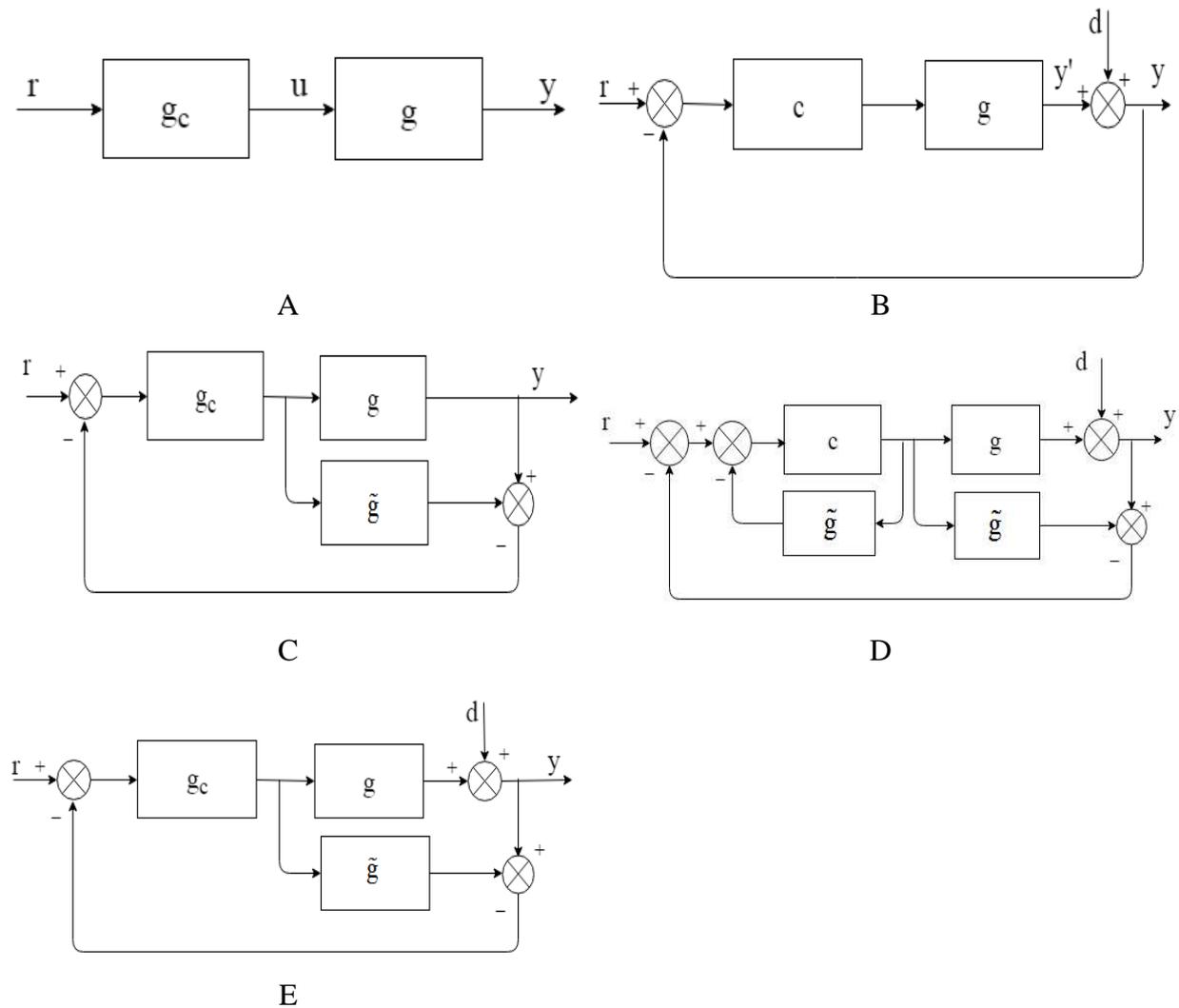


Figure 1.6 – Evolution de la structure IMC

– **Hypothèses**

Il est clair que le correcteur IMC de la Figure 1.6 ne peut être conçu que pour des systèmes vérifiant les hypothèses suivantes :

**H1 :**  $g, \tilde{g}$  et  $c$  n'admettent pas de pôles dans le demi-plan positif.

**H2 :** Les systèmes corrigés sont de Type 1 ou de Type 2 tels que [Wiberg, 1971] :

$$\text{Type 1 : } \lim_{s \rightarrow 0} s g_c \neq 0 \tag{1.27}$$

$$\text{Type 2 : } \lim_{s \rightarrow 0} s^2 g_c \neq 0 \tag{1.28}$$

Les systèmes de Type 1 et 2 exhibent une erreur asymptotique nulle pour les changements de consigne et de rampe respectivement sur  $(r-d)$ . Ainsi, les conditions suivantes seront toujours vérifiées :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{T}(s) = 1 \quad (1.29)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{S}(s) = 0 \quad (1.30)$$

**H3 :** Les processus réels considérés  $g$  sont assumés faire partie de la famille des processus linéaires de type II définie par une erreur multiplicative à norme-limité  $e_m$  tel que :

$$\Pi = \{g : |e_m| \leq l_m\} \quad (1.31)$$

où

$$e_m = \frac{g - \tilde{g}}{\tilde{g}} \quad (1.32)$$

$e_m$  est une erreur multiplicative à norme-bornée. Usuellement  $|e_m|$  approche une valeur supérieure ou égale à 1 pour les hautes fréquences.

Par ailleurs, Doyle et Stein [Doyle & Stein, 1981] ont montré que le système bouclé est stable pour tous les processus dans la famille II si et seulement si

$$|\tilde{T}| \leq \frac{1}{l_m} \quad \forall \quad \omega \quad (1.33)$$

où  $l_m$  est une incertitude en fonction de la fréquence.

### Propriétés d'une commande IMC

Une commande IMC est caractérisée par les quatre propriétés suivantes sous les hypothèses précédentes.

#### **P1 : Stabilité duale.**

Si  $g = \tilde{g}$ , la structure IMC garantit une stabilité en boucle fermée pour tous les correcteurs stables  $g_c$  et les processus stables  $g$ .

#### **P2 : Commande parfaite.**

Si  $g_c = \tilde{g}^{-1}$  on aura toujours  $y=r$  pour tout  $t > 0$  et toute perturbation  $d(t)$ .

#### **P3 : Système de type I.**

Si  $g_c(0) = \tilde{g}^{-1}(0)$  et que le système est de type 1 alors l'erreur disparaît asymptotiquement pour toutes les consignes  $r$  et les perturbations  $d$ .

#### **P4 : Système de type II.**

Si  $\left. \frac{d}{ds}(\tilde{g}g_c) \right|_{s=0} = 0$  et que le système est de type 2 alors l'erreur disparaît asymptotiquement pour toute entrée en rampe.

– **Les limitations d'une commande IMC**

Il existe plusieurs raisons qui expliquent que le correcteur IMC parfait  $g_c = \tilde{g}^{-1}$  ne peut être réalisé en pratique. Ces raisons sont détaillées dans ce qui suit.

**R1 : Les zéros dans le demi-plan droit (RHP) :** Si le modèle admet un zéro dans le demi-plan droit, le correcteur  $g_c = \tilde{g}^{-1}$  admet un pôle dans le demi-plan droit, et si  $g = \tilde{g}$ , le système en boucle fermée sera instable selon P1.

**R2 : Le retard :** Si le modèle contient un retard, le correcteur  $g_c = \tilde{g}^{-1}$  est prédictif et ne peut être réalisé.

**R3 : Les contraintes sur les variables manipulés.** Si le modèle est strictement propre, alors le correcteur parfait  $g_c = \tilde{g}^{-1}$  est impropre, ce qui implique que  $\lim_{s \rightarrow 0} |g_c| = \infty$ . Le correcteur est ainsi non réalisable physiquement.

**R4 : Erreur de modélisation.** Si  $g \neq \tilde{g}$ , P1 n'est pas vérifié et le système en boucle fermée sera généralement instable pour le correcteur  $g_c = \tilde{g}^{-1}$ .

– **Algorithme de synthèse d'un correcteur IMC  $g_c$**

En observant les limitations précédentes, le correcteur parfait IMC doit être abandonné. L'Algorithme suivant de conception du régulateur IMC résoudra ce problème en utilisant deux étapes ; premièrement, la performance est adressée sans tenir compte de la robustesse et des contraintes d'entrée. Deuxièmement, un filtre est introduit et conçu pour agir sur la robustesse sans regarder comment cela affecte la performance. L'Algorithme est conçu comme suit :

**Etape S1.** Factoriser le modèle

$$\tilde{g} = \tilde{g}_+ \tilde{g}_- \tag{1.34}$$

tel que  $\tilde{g}_+$  représente les retards et les zéros dans le demi-plan droit. Par conséquence,  $\tilde{g}_-^{-1}$  est stable et n'implique pas de prédicteurs.

**Etape S2.** Calculer le correcteur IMC  $g_c$  tel que :

$$g_c = \tilde{g}_-^{-1} f \tag{1.35}$$

où  $f$  est un filtre passe-bas qui doit être choisi tel que  $g_c$  est propre. En utilisant la définition de la factorisation (1.34),  $g_c$  est réalisable.

Ayant introduit les définitions du modèle du processus  $\tilde{g}$  (1.34) et du correcteur IMC  $g_c$  (1.35), les relations en boucle fermée (1.23) et (1.24) deviennent :

$$y = \frac{\tilde{g}_+ f(1+e_m)}{1+\tilde{g}_+ f e_m} (r-d) + d = \frac{\tilde{T}(1+e_m)}{1+\tilde{T}e_m} (r-d) + d \quad (1.36)$$

$$e = r - y = \frac{1-\tilde{g}_+ f}{1+\tilde{g}_+ f e_m} (r-d) = \frac{1-\tilde{T}(1+e_m)}{1+\tilde{T}e_m} (r-d) \quad (1.37)$$

Pour le cas particulier d'un modèle parfait du processus tel que  $g = \tilde{g}$ , on a  $e_m = 0$  alors les équations (1.36) et (1.37) se réduisent à :

$$y = \tilde{g}_+ f (r-d) + d = \tilde{T} (r-d) + d \quad (1.38)$$

$$e = (1-\tilde{g}_+ f)(r-d) = \tilde{S} (r-d) \quad (1.39)$$

Les équations (1.38) et (1.39) démontrent clairement que dans le cas où il n'existe pas d'erreur entre le modèle et le processus ( $e_m = 0$ ), la fonction de transfert en boucle fermée nominale  $\tilde{T}$  entre  $r$  et  $y$  est donnée par :

$$\tilde{T} = \tilde{g}_+ f \quad (1.40)$$

Elle est ainsi dépendante de deux paramètres importants :  $\tilde{g}_+$  et  $f$ .

Ainsi, la fonction de transfert en boucle fermée (1.40) peut être conçue directement via un choix approprié de  $\tilde{g}_+$  et  $f$  satisfaisant la condition de stabilité robuste (1.33) et les deux conditions suivantes :

$$f(s) = \frac{1}{(1+\varepsilon s)^{r_F}} \quad (1.41)$$

et

$$\tilde{g}_+(0)f(0) = 1 \quad (1.42)$$

où  $r_F$  est suffisamment large pour garantir que le correcteur IMC,  $g_c$ , soit propre.  $\varepsilon$  est un paramètre ajustable qui détermine la vitesse de réponse du système.

Plusieurs choix sont possibles pour  $\tilde{g}_+$  selon les performances requises. Pour plus de détails à ce propos, se référer à [Rivera *et al.*, 1986].

En substituant (1.34) et (1.35) dans l'expression du correcteur classique (1.21), on obtient :

$$c = \frac{g_c}{1-\tilde{g}g_c} = \frac{\tilde{g}_-^{-1}}{f^{-1}-\tilde{g}_+} \quad (1.43)$$

Il est toujours possible d'écrire ce correcteur sous forme d'un correcteur de type PID : deux structures sont généralement obtenues pour celui-ci :

- la structure donnée par (1.16).
- la structure d'un PID augmenté par un filtre donnée par :

$$c = \frac{k_P}{\tau_F s + 1} \left( 1 + \frac{1}{k_I s} + k_D s \right) \quad (1.44)$$

L'obtention de la première structure ou de la seconde dépend de deux facteurs : La complexité du modèle (premier ordre, deuxième ordre ou intégrateur, minimum/non-minimum de phase) et les exigences de performance établies par le concepteur (erreur de position et de vitesse nulle, changement de consigne/perturbation ...). L'Annexe B présente tous les cas possibles de modèles de processus qui peuvent être résolus via la méthode IMC ainsi que les paramètres de correcteurs PID obtenus. L'Annexe C présente un exemple de synthèse d'une commande IMC-PID pour un système de premier ordre avec retard.

- **Algorithme de synthèse du correcteur classique  $c$  par l'approche IMC-PID SISO :**

**Étape 1 :** Soit le processus SISO défini par sa fonction de transfert  $g(s)$ .

**Étape 2 :** Si le processus décrit par la fonction de transfert  $g(s)$  est retardé, adopter l'approximation de Padé d'ordre zéro (1.13) ou d'ordre un (1.14) pour obtenir un modèle  $\tilde{g}$  du processus, sinon aller à l'Étape 3.

**Étape 3 :** Définir  $f$  et  $\tilde{g}_+$  satisfaisant la condition de stabilité robuste (1.33) et vérifiant les relations (1.41) et (1.42).

**Étape 4 :** Dédire les paramètres du correcteur PID  $k_P$ ,  $k_I$  et  $k_D$  (et éventuellement  $\tau_F$  relatif au filtre).

**Étape 5 :** Implémenter le correcteur PID (éventuellement le correcteur PID avec filtre) obtenu pour le processus  $g(s)$ .

- **Synthèse des avantages et inconvénients d'une commande IMC-PID**

Cette méthode admet plusieurs avantages résumés comme suit :

❖ La procédure de conception IMC consiste à postuler un modèle, des objectifs de commande désirés, et à partir de ceux-ci procéder de manière directe pour obtenir la structure et les paramètres appropriés du correcteur de type P/PI/PD/PID alors que pour les méthodes classiques, on fixe une structure de commande puis on cherche à extraire l'optimalité à partir de ce correcteur.

❖ La complexité du correcteur synthétisé dépend exclusivement de deux facteurs : La complexité du modèle (premier ordre, deuxième ordre, intégrateur, non-minimum de phase) et les exigences de performance établis par le concepteur (erreur asymptotique nulle pour entrée échelon, rampe ...). Par exemple, pour le cas des entrées P-S (Annexe B), le modèle à non-minimum de phase choisi est le même mais la structure du correcteur  $c$  est variable selon les exigences de performance.

❖ La méthodologie de synthèse du correcteur PID est simple pour le cas des modèles de systèmes de premier et second ordre stables avec ou sans intégrateurs de Type 1 et 2 pouvant aussi inclure des retards (Les éléments de Padé d'ordre 0 et 1 sont utilisées pour approximer le retard). Sachant que ces modèles sont très fréquents dans l'industrie, l'applicabilité de ces résultats à différents processus stables ou intégrateurs a été réalisée avec beaucoup de succès.

❖ Tous les paramètres du correcteur de type PID sont reliés d'une manière unique et directe aux paramètres du modèle à l'exception d'un seul paramètre ajustable  $\varepsilon$  du filtre  $f$  qui détermine la vitesse de réponse du système.

Parmi les inconvénients de cette méthode, on peut citer, sa non-applicabilité aux systèmes instables et aux modèles de systèmes stables avec plusieurs intégrateurs d'ordre supérieur à 2 et sa restriction à des systèmes de type 1 et 2.

Par ailleurs, quelques solutions sont apparues pour soulever les limitations de la méthode IMC-SISO conventionnelle s'intéressant particulièrement à d'autres types de systèmes intégrateurs ou à des systèmes instables [Lee *et al.*, 2000], [Chien *et al.*, 2002], [Skogestad, 2003], [Shamsuzzoha & Lee, 2008], [Panda, 2009], [Begum *et al.*, 2016].

### **Remarque 1 :**

En présence de non-linéarités, contraintes ou interactions entre les différentes boucles, le correcteur PID se montre limité. Ces cas peuvent être traités en augmentant le correcteur d'un anti-windup [Azar & Serrano, 2015], compensateur ou découpleur.

### **1.4.2 Cas **multi-boucles** : Approche conventionnelle [Economou & Morari, 1986]**

La méthode IMC multi-boucles est une extension de la méthode IMC SISO [Rivera *et al.*, 1986] présentée dans la section précédente. Cette méthode considère les interactions entre le système et son modèle comme une sorte de perturbation qui peut être supprimée par les filtres, dans le cadre de la structure SISO. La conception du correcteur multivariable est basée sur une série de correcteurs SISO établis en fonction des mesures d'interactions du système où l'objectif est d'assurer la stabilité robuste par rapport à ces perturbations.

– **Conception du correcteur multi-boucles**

La structure IMC multi-boucles est conçue en sélectionnant le correcteur  $G_c$  et le modèle du processus  $\tilde{G}$  comme des matrices de transfert diagonales. Le schéma bloc représentatif de cette structure est donné par la Figure 1.7.

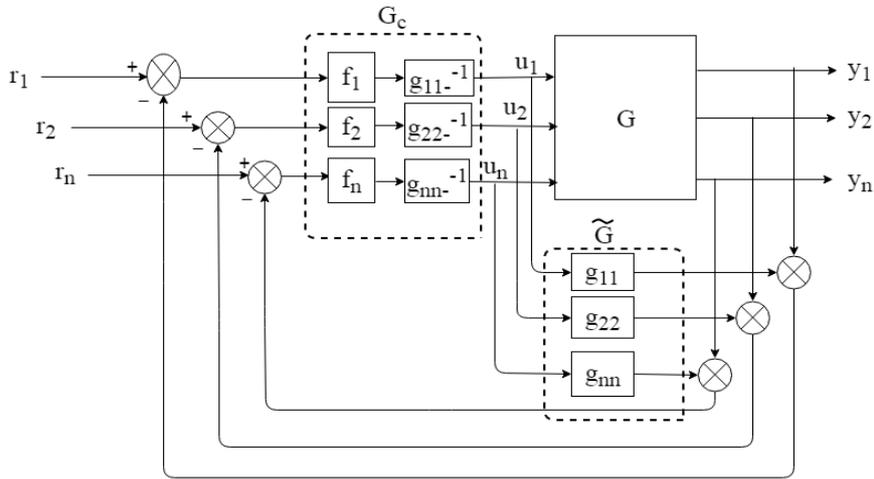


Figure 1.7 – Structure IMC multi-boucles [Economou & Morari, 1986]

Soit  $G$  la matrice de transfert du processus :

$$G = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) & \cdots & g_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

et soit le modèle IMC multi-boucles  $\tilde{G}$  approché de  $G$ , donné par :

$$\tilde{G} = \text{diag} [g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}] \quad (1.46)$$

On assume de plus que le correcteur IMC multi-boucles  $G_c$  peut être décrit par :

$$G_c = \text{diag} [g_{c1}, g_{c2}, \dots, g_{cn}] \quad (1.47)$$

avec :

$$g_{ci} = g_{ii}^{-1} f_i, \quad i=1,2,\dots, n \quad (1.48)$$

$g_{ii}^{-}$  : Élément de  $g_{ii}$  ayant tous ses pôles dans le demi-plan gauche

$f_i$  : Filtre IMC appliqué pour chaque boucle  $i$ ,  $i=1,2,\dots, n$

– **Analyse de la stabilité du système bouclé sur un correcteur IMC**

La stabilité de la structure IMC est garantie si l'une des deux conditions suivantes sont vérifiées [Doyle & Stein, 1981] :

$$\|G_c (G - \tilde{G})\| < 1 \quad (1.49a)$$

$$\|(G - \tilde{G})G_c\| < 1 \quad (1.49b)$$

où  $\| \cdot \|$  représente une norme de matrice bien déterminée.

La relation (1.49) vérifie la stabilité en boucle fermée lorsque le gain de la boucle est plus petit que 1. Ces conditions sont connues sous le nom du "Théorème de petit gain" [Doyle & Stein, 1981], qui est une extension du critère de stabilité SISO de Bode aux systèmes MIMO qui impose que :

$$\|f_i\| < \left( \|\tilde{G}^{-1}\| \|G - \tilde{G}\| \right)^{-1} \quad (1.50)$$

Le terme à droite de (1.50) dénote l'erreur de modélisation relative qui limite le filtre  $f$  qui représente la partie ajustable de la réponse en boucle fermée. La relation (1.50) montre que la largeur de bande permise de la boucle est limitée par les considérations de la stabilité robuste. Le concept fondamental qui permet un traitement rigoureux de la méthode IMC multi-boucles est le suivant : En imposant une restriction structurale du modèle diagonal (1.46), les éléments hors-diagonaux sont annulés. Par conséquent, une quantité connue de l'erreur de modélisation est introduite aux spécifications de conception. Selon la condition de stabilité robuste (1.50), le filtre IMC  $f_i$  ( $i=1,2,\dots, n$ ) doit être conçu pour préserver la stabilité robuste de la commande IMC en présence de cette erreur de modélisation. La condition de stabilité (1.50) est utilisée pour dériver des conditions suffisantes pour la stabilité de la structure IMC. La stabilité est garantie pour n'importe quel filtre IMC stable qui satisfait l'un des deux ensembles de contraintes d'inégalités suivantes :

$$\|f_i(i\omega)\| < f_{Ri}^*(i\omega) = \frac{|g_{ii}(i\omega)|}{\sum_{j \neq i} |g_{ji}(i)|} \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.51)$$

$$\|f_i(i\omega)\| < f_{Ci}^*(i\omega) = \frac{|g_{ii}(i\omega)|}{\sum_{j \neq 1} |g_{ji}(i)|} \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.52)$$

#### – Mesure des interactions IMC

Pour un système à  $m$ -entrées et  $m$  sorties,  $(m!)$  configurations sont possibles. La mesure des interactions IMC est une quantité simple à interpréter et efficace dans la distinction entre différentes configurations d'un système. Elle est définie comme une fonction des gains de filtre maximum permis dérivés de (1.51) et (1.52). Par leur définition, elle varie entre 0 et 1.

**Définition D1.** Pour la paire entrée/sortie d'une configuration particulière du système, la ligne de mesure d'interaction IMC est la quantité :

$$R_i(i\omega) = \frac{1}{1 + f_{R_i}^*(i\omega)} = \frac{\sum_{j, j \neq i} g_{ji}(i\omega)}{\sum_j |g_{ij}(i\omega)|} \quad 0 < \omega < \infty \quad (1.53)$$

**Définition D2.** Pour la même paire entrée/sortie et la même configuration, la quantité complémentaire est définie par :

$$C_i(i\omega) = \frac{1}{1 + f_{C_i}^*(i\omega)} = \frac{\sum_{j \neq i} g_{ji}(i\omega)}{\sum_{j \neq i} |g_{ji}(i\omega)|} \quad 0 < \omega < \infty \quad (1.54)$$

La mesure d'interaction IMC évalue la valeur potentielle d'une certaine configuration en général et celle d'une paire d'entrée/sortie spécifique en particulier. Lorsque le contenu de d'information de  $R_i$  et  $C_i$  est combiné, l'information suivante concernant les interactions du système est obtenue. Dans ce qui suit, "faible" correspond à des valeurs plus petites que 0.5 et "fort" est à interpréter en conséquence :

Si  $R_i$  faible et  $C_i$  faible : Il est possible de synthétiser des correcteurs PID SISO pour chaque boucle.

Si  $R_i$  faible et  $C_i$  fort ou  $R_i$  fort et  $C_i$  faible : Une pénalité est plus probable à payer dans une autre boucle à cause des interactions se produisant dans la boucle  $i$ .

Si  $R_i$  fort et  $C_i$  fort : Cette approche n'est pas applicable.

– **Algorithme de synthèse du régulateur IMC-PID multi-boucles**

**Etape 1 :** Soit le processus multi-retards décrit par la matrice de transfert (1.45).

**Etape 2 :** Tracer les courbes fréquentielles des mesures d'interactions IMC,  $R_i$  donné par (1.53) et  $C_i$  donné par (1.54) pour chaque paire du processus.  $n!$  configurations sont possibles.

**Etape 3 :** Si  $R_i$  faible et  $C_i$  faible est satisfaite pour une configuration donnée, il s'agit alors d'une paire d'entrée/sortie convenable. Pour chaque boucle, synthétiser un correcteur PID SISO. Aller à l'Etape 4. Sinon, la méthode n'est pas applicable au processus et d'autres alternatives doivent être envisagées.

**Etape 4 :** Implémenter  $n$  correcteurs PID SISO pour le processus multivariable décrit par  $G(s)$ .

– **Avantages et limitations**

La méthode IMC-PID **multi-boucles** fournit une procédure de conception rapide et efficace de synthèse multi-boucles. Elle est basée sur l'idée de traiter les termes d'interactions comme des perturbations supplémentaires. Par conséquent, des correcteurs SISO robustes sont conçus sur la base du Théorème du petit gain et synthétisés en fonction des mesures d'interactions IMC. Cette méthode est largement applicable à différents modèles de systèmes tolérables par la méthode SISO présentée dans la section précédente.

Cependant, cette méthode présente un certain nombre d'inconvénients : En effet, lorsque les mesures d'interactions IMC sont moyennes ou fortes, cette méthode n'est pas applicable et d'autres alternatives doivent être envisagées.

**1.4.3 Cas **multi-boucles** : Approche étendue [Vu & Lee, 2010b]**

Pour cette méthode, le correcteur PI standard est conçu analytiquement en se basant sur une matrice de transfert désirée du système bouclé en utilisant une matrice de gain RGA [Grosdidier & Morari, 1986], [Luyben, 1990], [Skogestad & Postlethwaite, 1996] pour l'amélioration des performances du système bouclé. Les séries de MacLaurin sont ensuite utilisées pour approximer le correcteur obtenu. Cette méthode a été appliquée aux systèmes à deux entrées/deux sorties appelée aussi TITO (Two Inputs Two Outputs) avec la dynamique d'un premier ordre avec retard pur appelé aussi FOPDT (First Order Plus Delay Time). Cette méthode de réglage ne s'applique malheureusement que pour des processus à faibles ou moyennes interactions avec une dominance diagonale.

– **Conception du correcteur**

On considère le processus multivariable en boucle ouverte à  $n$  entrées et  $n$  sorties avec la matrice de transfert stable, carré et multi-retards, représenté par (1.45), où :

$$g_{ij}(s) = \bar{g}_{ij}(s) e^{-\theta_{ij}s}, i,j=1,2,\dots,n \quad (1.55)$$

Pour une commande décentralisée,  $n$  correcteurs PI diagonaux  $\tilde{G}_c$  sont synthétisés pour le processus multivariable modélisé par la matrice de transfert  $G(s)$  décrite par (1.45). La matrice de transfert du correcteur est ainsi diagonale et donnée par  $\tilde{G}_c = \text{diag} \{g_{ci}\}, i=1,2,\dots,n$ . **d est la perturbation appliquée à la commande.** Le schéma-bloc de la méthode IMC-PI étendue est donné par la Figure 1.8.

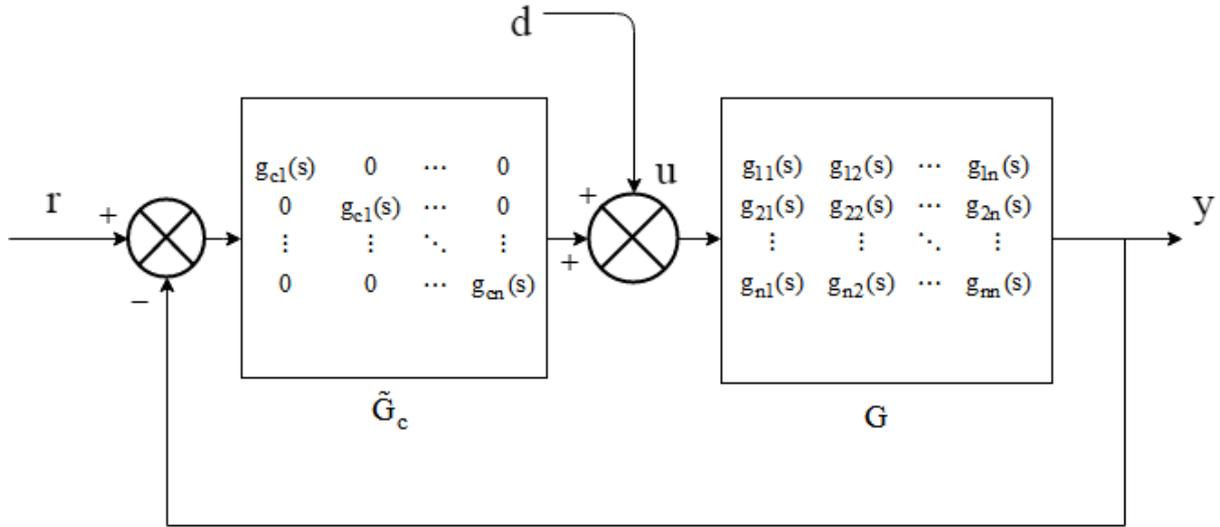


Figure 1.8 – Schéma bloc de la méthode IMC-PI étendue

Les éléments diagonaux du correcteur sont conçus tel que :

$$g_{ci}(s) = \Lambda_{ii}(s) g_{ii}^{-1}(s) \left( \frac{e^{-\theta_{ii}s} \prod_{k=1}^{q_i} \frac{z_k - s}{z_k^* - s}}{(\lambda_i s + 1)^{r_{Di}} - e^{-\theta_{ii}s} \prod_{k=1}^{q_i} \frac{z_k - s}{z_k^* - s}} \right) \quad (1.56)$$

où  $\Lambda_{ii}(s)$  est l'élément diagonal de la matrice de gain RGA dépendant de la fréquence,  $g_{ii}(s)$  est l'élément  $i,i$  de la matrice de transfert  $G(s)$ .  $\theta_{ii}$ ,  $z_k$  et  $z_k^*$  représentent respectivement le retard, les zéros instables et les zéros instables complexes conjugués de l'élément diagonal  $i$  de la matrice de fonction de transfert du processus.  $q_i$  est le nombre de zéros instables. La constante de temps du filtre IMC,  $\lambda_i$  est un paramètre ajustable contrôlant le compromis entre performance et robustesse.  $r_{Di}$  est l'ordre relatif du numérateur et du dénominateur dans  $g_{ii}(s)$ . On note que dans l'équation (1.56), la partie à non-minimum de phase de  $g_{ii}(s)$  est annulée par le retard et le zéro à non-minimum de phase dans le numérateur. Ainsi, le correcteur ne causera pas de problème de causalité ni de problème de stabilité.

#### – Approximation du correcteur

Le correcteur résultant donné par l'équation (1.56) n'a pas une forme de correcteur PI standard. Les séries de Maclaurin [Lee *et al.*, 1998] sont alors utilisées pour l'approximer tel que :

$$g_{ci}(s) = s^{-1} p_i(s) \quad (1.57)$$

où

$$p_i(s) = s\Lambda_{ii}(s)g_{ii}^{-1}(s) \left( \frac{e^{-\theta_{ii}s} \prod_{k=1}^{q_i} \frac{z_k - s}{z_k^* - s}}{(\lambda_i s + 1)^{r_{Di}} - e^{-\theta_{ii}s} \prod_{k=1}^{q_i} \frac{z_k - s}{z_k^* - s}} \right) \quad (1.58)$$

La forme d'approximation rationnelle de l'équation (1.56) peut être trouvée en développant  $g_{ci}(s)$  en utilisant les séries de MacLaurin selon (1.15) tel que :

$$g_{ci}(s) = \frac{1}{s} \left[ p_i(0) + sp_i'(0)s + p_i''(0) \frac{s^2}{2} \right] \quad (1.59)$$

Les deux premiers termes de l'équation (1.59) peuvent être constitués sous la forme d'un correcteur PI standard donné par

$$g_{ci}(s) = \frac{1}{s} (K_{Ii} + sK_{Ci}) \quad (1.60)$$

où  $K_{Ii}$  et  $K_{Ci}$  correspondent respectivement aux termes intégral et proportionnel du correcteur PI. Finalement, par analogie entre (1.59) et (1.60), les paramètres du correcteur PI proposé peuvent être trouvés tels que :

$$K_{Ci} = p_i'(0) \quad (1.61)$$

$$K_{Ii} = p_i(0) \quad (1.62)$$

### – Cas du système TITO

Jusqu'à nos jours, cette méthode n'est appliquée qu'aux processus multi-retards TITO avec uniquement des fonctions de transfert de premier ordre avec retard pur vu la complexité des développements.

La fonction de transfert de chaque élément du processus selon (1.55) est donnée par :

$$g_{ij}(s) = \frac{K_{ij}}{T_{ij}s + 1} e^{-\theta_{ij}s} \quad (1.63)$$

où  $K_{ij}$ ,  $T_{ij}$  et  $\theta_{ij}$ ,  $i,j=1,2$ , représentent respectivement le gain, la constante du temps et le retard de chaque élément de la matrice de transfert.

En substituant l'expression de la fonction de transfert  $g_{ii}$  à partir de (1.63) dans les éléments diagonaux du correcteur (1.56), le correcteur obtenu est donné par :

$$g_{ci}(s) = \Lambda_{ii}(s) \frac{T_{ii}s + 1}{K_{ii}} \left( \frac{1}{(\lambda_i s + 1) - e^{-\theta_{ii}s}} \right) \quad (1.64)$$

Notons que l'ordre du filtre IMC est choisi à  $r_{Di} = 1$  pour que le correcteur soit réalisable. Par ailleurs,  $\Lambda_{ii}(s)$  est calculée comme suit :

$$\Lambda_{ii}(s) = \frac{1}{1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \frac{(T_{11}s + 1)(T_{22}s + 1)}{(T_{12}s + 1)(T_{21}s + 1)} e^{-\theta_{ei}s}} \quad (1.65)$$

Le retard effectif  $\theta_{ei}$  est défini par

$$\theta_{ei} = \theta_{12} + \theta_{21} - \theta_{11} - \theta_{22}. \quad (1.66)$$

En substituant l'équation de l'élément diagonal de la matrice de gain RGA,  $\Lambda_{ii}(s)$ , donnée par (1.65) dans l'équation de la fonction de transfert du correcteur (1.64), une loi de réglage analytique du correcteur PI multi-boucles peut être obtenue en utilisant les équations (1.61) et (1.62) comme suit :

$$K_{Ci} = \frac{\Lambda_{ii}(0)}{2K_{ii}(\lambda_i + \theta_{ii})^2} \times \left\{ \theta_{ii}^2 + 2\Lambda_{ii}(0)(\lambda_i + \theta_{ii}) [K_{ei}(T_{ei} - \theta_{ei}) + T_{ii}] \right\} \quad (1.67)$$

$$K_{fi} = \frac{\Lambda_{ii}(0)}{K_{ii}(\lambda_i + \theta_{ii})} \quad (1.68)$$

où

$K_{ei}$  représente le quotient d'interaction défini par :

$$K_{ei} = \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \quad (1.69)$$

La constante de temps effective  $T_{ei}$  est définie par

$$T_{ei} = T_{jj} - T_{ij} - T_{ji}, \quad j \neq i. \quad (1.70)$$

Les autres paramètres de (1.67) et (1.68) ont été définis précédemment.

– **Algorithme de synthèse du régulateur IMC-PI :**

**Etape 1 :** Soit le processus TITO avec FOPDT décrit par la matrice de transfert (1.45) ayant les éléments diagonaux (1.55).

**Etape 2 :** Déduire les termes  $K_{ij}$ ,  $T_{ij}$  et  $\theta_{ij}$ ,  $i,j=1,2$ , à partir de (1.63).

**Etape 3 :** Calculer les différents paramètres de la méthode  $\Lambda_{ii}(0)$ ,  $\theta_{ei}$ ,  $K_{ei}$ ,  $T_{ei}$ , à partir de (1.65), (1.66), (1.69),(1.70) et choisir  $\lambda_i$ ,  $i=1,2$ .

**Etape 4 :** En utilisant les équations (1.67) et (1.68), calculer les termes proportionnel  $K_{Ci}$  et intégral  $K_{Ii}$  de chaque correcteur appliqué à la boucle  $i$ ,  $i=1,2$ .

**Etape 5 :** Implémenter le correcteur PI diagonal  $\tilde{G}_c = \text{diag}\{g_{ci}\}$ ,  $i=1,2$ , pour le processus multivariable retardé,  $G(s)$ .

**Synthèse des avantages et inconvénients de la méthode**

Cette méthode fournit différents avantages : En effet, puisqu'elle est basée sur les correcteurs PI décentralisés connus pour leurs simples structures de commande, peu de paramètres de réglage sont calculés. On note aussi sa robustesse aux erreurs de modélisation du processus. Par ailleurs, cette méthode fournit une méthodologie analytique simple de synthèse du correcteur. Concernant les inconvénients, cette méthode a été appliquée seulement aux systèmes TITO stables de premier ordre et n'est pas valable pour d'autres classes de systèmes vu la complexité des calculs.

**1.5 Critères de performance**

Le comportement transitoire du système bouclé est souvent analysé en se basant sur la réponse indicielle. Dans ce sens, on s'intéresse souvent aux temps de montée, temps de réponse ainsi qu'au dépassement maximal de la réponse indicielle du système. Ces grandeurs reflètent la qualité du comportement transitoire. L'objectif est de minimiser le temps de montée et de réponse tout en maintenant un faible dépassement. La précision dynamique permet d'évaluer l'erreur transitoire apparaissant dans la réponse indicielle.

Quantifier l'erreur dynamique entre la sortie et la consigne peut être aussi évalué selon plusieurs critères de performance disponibles dans la vaste littérature tels que l'IAE, ISE, ITAE et ITSE définis respectivement par :

- IAE (Integral of the Absolute Value Error)

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt \quad (1.71)$$

où  $e(t)$  est l'erreur entre la sortie et la consigne,  $t$  est la variable temporelle et  $T$  est un temps choisi généralement supérieur au temps de réponse. Par ce critère, tous les éléments de la réponse transitoire sont pris en compte. Plus la réponse est nerveuse et oscillatoire, plus la valeur de cet indice est importante. Ce critère favorise les systèmes à amortissement moyen (réponse peu oscillante) et pénalise les systèmes trop énergétiques.

- ISE (Integral of the Squared Error)

$$\text{ISE} = \int_0^T (e(t))^2 dt \quad (1.72)$$

Du fait que les écarts soient élevés au carré et inférieurs à 1, on minimise l'influence des dépassements de faible amplitude. Ce critère est relativement peu sensible aux faibles erreurs par rapport aux fortes erreurs.

- ITAE (Integral of the Time-Weighted Absolute Error)

$$\text{ITAE} = \int_0^T t |e(t)| dt \quad (1.73)$$

L'introduction de la variable temporelle  $t$  favorisera les systèmes à réponse oscillante. Ce critère privilégie une faible erreur statique au prix d'un dépassement initial qui peut être important puisqu'il a lieu pour des faibles valeurs du temps.

- ITSE (Integral of the Time-Weighted Squared Error)

$$\text{ITSE} = \int_0^T t (e(t))^2 dt \quad (1.74)$$

Ce critère insiste plutôt sur l'erreur en fin de régime transitoire (effet de la variable du temps) sans trop pénaliser le début du régime transitoire.

- Le critère TV (Total Variation)

Pour évaluer l'amplitude du signal de commande, on considère le critère suivant :

$$\text{TV} = \sum_{k=1}^T |u(k+1) - u(k)| \quad (1.75)$$

TV est une bonne mesure de la loi de commande appliquée au système. Plus la variable de commande est lisse plus l'indice TV est faible.

La robustesse du correcteur est souvent évaluée en insérant une incertitude de perturbation de  $\pm 10\%$  dans les paramètres du processus notamment sur le gain et les retards [Vu & Lee, 2010b].

D'autre part, les valeurs singulières constituent une notion fréquentielle importante pour l'évaluation des performances et de la robustesse du système bouclé particulièrement multivariable. Le diagramme des valeurs singulières est une généralisation du diagramme de gain de Bode pour les systèmes MIMO. Etant donnée une fonction de transfert  $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$ , ce diagramme trace les courbes des valeurs singulières minimales  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  et maximales  $\overline{\sigma}(G(j\omega))$  de la matrice de transfert du processus  $G(s)$ . Rappelons que la plus grande valeur singulière est une norme et correspond au gain maximal. A noter aussi qu'il n'y a pas d'équivalent naturel de la phase pour les systèmes multivariables. Les valeurs singulières permettent de visualiser les bandes passantes et les bandes atténuées du système. Elles jouent donc un rôle très important pour définir les performances, la stabilité et la robustesse d'un système.

**Exemple 4 :** On considère le système avec la réalisation  $G(s)$  selon (1.2) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Le diagramme des valeurs singulières minimales et maximales de  $G(s)$  est donné par la Figure 1.9. L'Annexe D présente la définition et les propriétés importantes des valeurs singulières.

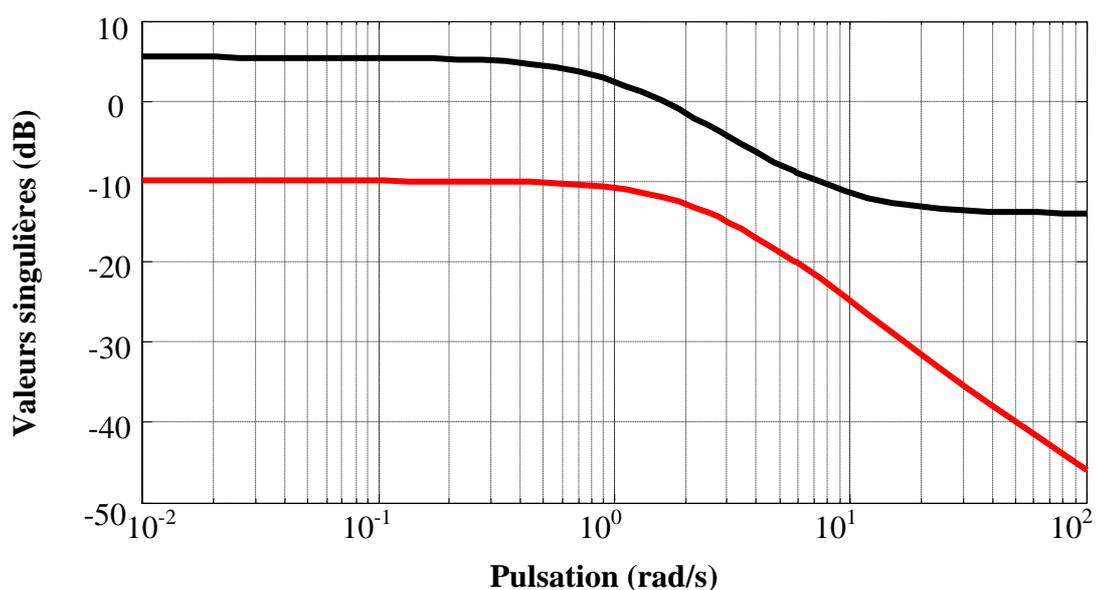


Figure 1.9 – Diagramme des valeurs singulières

### 1.6 Contribution de la thèse

Les systèmes industriels sont généralement de nature multivariable. Ils peuvent être soumis à des retards multiples sur les états et aussi sur les entrées de commande. Ils sont aussi le siège d'interactions importantes entre les différentes boucles de régulation. En supposant aussi que ces systèmes peuvent avoir aussi des comportements à non minimum de phase et des dynamiques instables avec leurs effets néfastes, il s'avère délicat et complexe d'assurer à la fois bonnes performances et robustesse en termes de changement de consigne, atténuation des perturbations, rejet des bruits, robustesse face aux perturbations ou incertitudes paramétriques. Particulièrement, lorsque la dimension du système augmente et de fortes interactions entre les différentes boucles sont considérées, des approches conventionnelles de synthèse des régulateurs MIMO PI/PID se montrent limitées. Face aux différentes exigences et problématiques citées ci-dessus, cette thèse propose une contribution à la synthèse des régulateurs PI multivariables industriels pour des systèmes linéaires MIMO avec retards multiples pour les cas des systèmes stables, instables ou à non-minimum de phase avec de fortes interactions entre les différentes boucles de régulation. La méthodologie proposée combine à la fois une approche temporelle et une approche fréquentielle permettant de synthétiser un régulateur PI performant et robuste. Une analyse comparative pour les trois cas de systèmes considérés prouvera l'efficacité de la méthodologie proposée et sa supériorité non seulement par rapport aux approches conventionnelles mais aussi à des approches non-conventionnelles.

### 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art des méthodes de synthèse des régulateurs PID. Nous avons mis en évidence l'influence néfaste des zéros instables et des couplages entre les différentes boucles de régulation et celles des retards sur les dynamiques des systèmes multivariables. Par ailleurs, nous avons aussi étalé la méthode de commande décentralisée conventionnelle IMC avec ses approches SISO et MIMO ainsi qu'une méthode étendue récente. La synthèse des avantages et des inconvénients de ces méthodes est aussi établie. Les deux méthodes conventionnelle IMC-PID et étendue IMC-PI feront l'objet de l'analyse comparative proposée dans le dernier chapitre de ce manuscrit.

Avant d'aborder le problème complexe de la synthèse des correcteurs PI pour des systèmes linéaires MIMO à multiple retards, objet de cette thèse, nous nous intéresserons dans le chapitre suivant à la synthèse des correcteurs centralisés MIMO PID via des approches ILMI afin de mettre le point sur leurs avantages et limitations.

## **Chapitre 2**

### **Synthèse des régulateurs PID multivariables via des approches ILMI : Analyse comparative**

## 2.1 Introduction

Partant des difficultés liées à la méthode IMC-PID MIMO conventionnelle particulièrement lorsque les interactions entre les différentes boucles sont assez importantes, ce chapitre traite la synthèse des régulateurs PID multivariables via des approches ILMI connus pour leur capacité à résoudre différents problèmes de stabilisation et de robustesse des systèmes multivariables en utilisant des régulateurs centralisés caractérisés par des matrices de gains pleines. La sensibilité de ces approches aux perturbations appliquées sur les mesures, aux changements de consigne, aux incertitudes paramétriques ainsi qu'aux retards multiples seront mis en valeur à travers un exemple d'un procédé à non-minimum de phase.

Ce deuxième chapitre sera organisé comme suit : Dans le second paragraphe, nous exposerons la position du problème de commande. Dans le troisième, nous détaillerons la procédure de résolution et l'Algorithme correspondant à chacune des trois approches considérées. Dans le quatrième, une application sur un processus à 4 réservoirs permettra d'évaluer les performances ainsi que les limitations et les insuffisances de ces approches lorsque le système bouclé est soumis à des incertitudes paramétriques et à des retards multiples. Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet des publications [Belhaj & Boubaker, 2013], [Belhaj & Boubaker, 2015].

## 2.2. Position du problème de commande

Considérons le système Linéaire à temps invariant multivariable décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  le vecteur de commande et  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  le vecteur de sortie. A, B et C étant respectivement la matrice d'état, la matrice de commande et la matrice de sortie de dimensions appropriées.

L'objectif est de concevoir le correcteur PID stabilisant décrit par :

$$u(t) = F_1 y(t) + F_2 \int_0^t y(t) dt + F_3 \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.2)$$

où  $F_1, F_2, F_3$  représentent respectivement les gains matriciels proportionnel, intégral et dérivé. Le problème de stabilisation de (2.1)-(2.2) est délicat et complexe.

### 2.3 Synthèse des correcteurs PID via des approches ILMI

Différentes approches issues de la théorie de commande moderne ont abordé le problème de synthèse des paramètres PID pour un système multivariable. Parmi ces approches, nous nous intéresserons à celles qui ont proposé de transformer le problème de commande PID en un problème par retour de sortie statique (SOF) équivalent. Dans la section suivante, nous détaillerons les principales approches ILMI qui ont résolu cette problématique.

#### 2.3.1 Approche 1 [Zheng *et al.*, 2002]

Soit :

$$z = \begin{bmatrix} z_1^T, z_2^T \end{bmatrix}^T$$

avec :

$$z_1 = x$$

et :

$$z_2 = \int_0^t y dt .$$

La variable  $z$  peut être considérée comme étant le vecteur d'état d'un système augmenté, dont la dynamique est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Az_1 + Bu \\ \dot{z}_2 = y = Cz_1 \end{cases}$$

ou encore :

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

avec :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En combinant l'équation (2.1) et les définitions relatives à  $z$ ,  $z_1$  et  $z_2$ , nous avons :

$$y = Cz_1 = [C \ 0]z$$

$$\int_0^t y dt = z_2 = [0 \ I]z$$

$$\frac{dy}{dt} = C\dot{x} = CAx + CBu = [CA \ 0]z + CBu$$

En dénotant par  $\tilde{C} = [\tilde{C}_1^T \ \tilde{C}_2^T \ \tilde{C}_3^T]^T$ ,  $\tilde{C}_1 = [C \ 0]$ ,  $\tilde{C}_2 = [0 \ I]$ ,  $\tilde{C}_3 = [CA \ 0]$  et  $\tilde{y} = [\tilde{y}_1^T \ \tilde{y}_2^T \ \tilde{y}_3^T]^T$ ,  $\tilde{y}_i = \tilde{C}_i z$ ,  $i=1, 2, 3$ , il est possible d'écrire pour (2.2) :

$$u = F_1 \tilde{y}_1 + F_2 \tilde{y}_2 + F_3 \tilde{y}_3 + F_3 C B u$$

ou encore :

$$(I - F_3 C B) u = F_1 \tilde{y}_1 + F_2 \tilde{y}_2 + F_3 \tilde{y}_3 \quad (2.3)$$

Pour le système augmenté  $\dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} u$ , il est toujours possible de concevoir une loi de commande par retour de sortie statique de la forme :

$$u = \tilde{F} \tilde{y} = \tilde{F}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{F}_2 \tilde{y}_2 + \tilde{F}_3 \tilde{y}_3 \quad (2.4)$$

où  $\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3]$  est un gain SOF et  $\tilde{y} = [\tilde{y}_1 \ \tilde{y}_2 \ \tilde{y}_3]^T$  est le vecteur de sortie.

Supposons que la matrice  $(I - F_3 C B)$  est inversible. En établissant l'analogie entre (2.3) et (2.4), la matrice de gains SOF  $[\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3]$  est alors donnée par :

$$\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3] = [(I - F_3 C B)^{-1} F_1 \quad (I - F_3 C B)^{-1} F_2 \quad (I - F_3 C B)^{-1} F_3] \quad (2.5)$$

Le problème de calcul des paramètres de gains MIMO PID est ainsi réduit en un problème SOF, où le système augmenté est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} u \\ \tilde{y} = \tilde{C} z \\ u = \tilde{F} \tilde{y} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{F}$  ont été définis précédemment.

Une fois la matrice de gains SOF  $[\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \tilde{F}_3]$  est trouvée, on déduit à partir de (2.5) les gains matriciels du correcteur PID  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  tels que :

$$F_3 = \tilde{F}_3 (I + C B \tilde{F}_3)^{-1} \quad (2.7)$$

$$F_2 = (I - F_3 C B) \tilde{F}_2 \quad (2.8)$$

$$F_1 = (I - F_3 C B) \tilde{F}_1 \quad (2.9)$$

**Remarque 2.1.**

La matrice  $(I + CB\tilde{F}_3)$  est inversible si et seulement si  $(I - F_3CB)$  est inversible. Dans ce cas, la matrice de transfert du système est propre et le correcteur est réalisable. La démonstration est donnée dans [Zheng *et al.*, 2002] .

**Théorème 2.1**

Le système (2.6) est stabilisable via SOF si et seulement si il existe  $P > 0$  et  $\tilde{F}$  satisfaisant l'inégalité matricielle suivante :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - P\tilde{B}\tilde{B}^T P + (\tilde{B}^T P + \tilde{F}\tilde{C})^T (\tilde{B}^T P + \tilde{F}\tilde{C}) < 0 \quad (2.10)$$

L'inégalité matricielle (2.10) est une BMI. Elle peut être résolue en utilisant l'Algorithme suivant :

**Algorithme 2.1**

Données initiales : Réalisation d'espace d'état du système  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$

**Etape 1 :** Choisir  $Q_0 > 0$  et résoudre  $P$  pour l'équation de Riccati :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} - P\tilde{B}\tilde{B}^T P + Q_0 = 0, P > 0.$$

Poser  $i=1$  et  $X_1 = P$

**Etape 2 :** Résoudre le problème d'optimisation OP1 pour  $P_i, \tilde{F}$  et  $\alpha_i$ .

OP1: Minimiser  $\alpha_i$  sous les contraintes LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{li} & (\tilde{B}^T P_i + \tilde{F}\tilde{C})^T \\ (\tilde{B}^T P_i + \tilde{F}\tilde{C}) & -I \end{bmatrix} < 0, P_i > 0 \quad (2.11)$$

Où  $\Sigma_{li} = \tilde{A}^T P_i + P_i^T \tilde{A} - X_i^T \tilde{B}\tilde{B}^T P_i - P_i^T \tilde{B}\tilde{B}^T X_i + X_i^T \tilde{B}\tilde{B}^T X_i - \alpha_i P_i$  .

Dénotons par  $\alpha_i^*$  la valeur minimale de  $\alpha_i$ .

**Etape 3 :** Si  $\alpha_i^* \leq 0$ , la paire  $(P_i, \tilde{F})$  résout le problème de stabilisation SOF. Fin. Sinon, Aller à l'Etape 4.

**Etape 4 :** Résoudre le problème d'optimisation OP2 pour  $P_i$  et  $\tilde{F}$ .

OP2 : Minimiser trace ( $P_i$ ) sous les contraintes LMI (2.11) avec  $\alpha_i = \alpha_i^*$ .

Dénotons par  $P_i^*$  la valeur optimale de  $P_i$ .

**Etape 5 :** Si  $\|X_i^T \tilde{B} - P_i \tilde{B}\| < \epsilon_{01}$ , où  $\epsilon_{01}$  est une tolérance prescrite, aller à l'Etape 6. Sinon, poser  $i := i+1$ ,  $X_i = P_i^*$  et aller à l'Etape 2.

**Etape 6 :** On ne peut pas décider par cet Algorithme si le problème SOFS est solvable. Fin.

### 2.3.2 Approche 2 [Lin et al., 2004]

Considérons le système (2.1) ainsi qu'un nouveau vecteur d'état défini par :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \int_0^t x^T(\theta) d\theta & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T$$

et une nouvelle sortie définie par :

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} y^T(t) & \int_0^t y^T(\theta) d\theta & \dot{y}^T(t) \end{bmatrix}^T.$$

Le système (2.1) peut être transformé en un système augmenté via une commande SOF donné par :

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \\ u(t) = \tilde{F}\tilde{y}(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

où

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_n \\ I_n & I_n & 0 \\ A & 0 & -I_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3].$$

Le système (2.12) est appelé système descripteur si  $\text{rang}(\tilde{E}) < \dim(\tilde{E})$ . Pour plus de détails sur les propriétés de ces systèmes, se référer à [Lin et al., 2004].

#### Théorème 2.2

Le système (2.12) est admissible si et seulement si il existe des matrices  $P$  et  $\tilde{F}$  tel que

$$\tilde{E}^T P = P^T \tilde{E} \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} - P \tilde{B} \tilde{B}^T P + (\tilde{B}^T P + \tilde{F} \tilde{C})^T (\tilde{B}^T P + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \quad (2.14)$$

L'inégalité matricielle (2.14) est une BMI. Elle peut être résolue en utilisant l'Algorithme suivant :

### Algorithme 2.2

**Etape 1** : Posons  $i=1$  et  $X_1 = I_{3n}$

**Etape 2** : Résoudre le problème d'optimisation OP1 pour  $P_i$ ,  $\tilde{F}$  et  $\alpha_i$ .

**OP1** : Minimiser  $\alpha_i$  sous les contraintes LMI suivantes :

$$\tilde{E}^T P_i = P_i^T \tilde{E} \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_i & (\tilde{B}^T P_i + \tilde{F}\tilde{C})^T \\ \tilde{B}^T P_i + \tilde{F}\tilde{C} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

où  $\Sigma_i = \tilde{A}^T P_i + P_i^T \tilde{A} - X_i^T \tilde{B} \tilde{B}^T P_i - P_i^T \tilde{B} \tilde{B}^T X_i + X_i^T \tilde{B} \tilde{B}^T X_i - 2\alpha_i \tilde{E}^T P_i$

Dénotons par  $\alpha_i^*$  la valeur minimale de  $\alpha_i$ .

**Etape 3** : Si  $\alpha_i^* \leq 0$ ,  $\tilde{F}$  est un gain SOF stabilisant. Fin. Sinon, aller à l'Etape 4.

**Etape 4** : Résoudre le problème d'optimisation OP2 pour  $P_i$ ,  $\tilde{F}$  et  $\alpha_i$ .

**OP2** : Minimiser  $\text{trace}(\tilde{E}^T P_i)$  sous les contraintes LMI (2.15) et (2.16) avec  $\alpha_i = \alpha_i^*$ .

Dénotons par  $P_i^*$  la valeur optimale de  $P_i$ .

**Etape 5** : Si  $\|\tilde{B}^T X_i - \tilde{B}^T P_i^*\| < \epsilon_{02}$ , où  $\epsilon_{02}$  est une tolérance prescrite, aller à l'Etape 6. Sinon,

posons  $i:=i+1$ ,  $X_i = P_i^*$  et aller à l'Etape 2.

**Etape 6** : Le problème SOF ne peut être résolu par cet Algorithme.

### 2.3.3 Approche 3 [He & Wang, 2006]

Pour cette approche, He & Wang considèrent un modèle plus général que celui considéré dans la problématique générale, décrit par (2.1). Le modèle considéré est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}\omega(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}\omega(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $\omega(t) \in \mathfrak{R}^r$  est le signal externe,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de

commande,  $z(t) \in \mathfrak{R}^q$  est la sortie régulée et  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  est la sortie mesurée.  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

L'hypothèse suivante est en plus considérée :

**Hypothèse 2.1:**  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable.

**Remarque 2.2:**

Si  $\omega(t) = 0$ , le problème de stabilisation par retour de sortie se réduit à trouver un correcteur SOF décrit par:

$$u(t) = Fy(t) \quad (2.18)$$

où  $F \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  tel que le système en boucle fermée :

$$\dot{x} = (A + B_2FC_2)x \quad (2.19)$$

est stable. Il est trivial que le système en boucle fermée (2.19) est stable si et seulement si il existe un  $P = P^T$  tel que

$$P(A + B_2FC_2) + (A + B_2FC_2)^T P < 0 \quad (2.20)$$

La condition (2.20) est une BMI. Elle peut être résolue selon le théorème 2.3.

**Théorème 2.3**

Pour le système (2.19), si la LMI suivante :

$$P(A + B_2FC_2) + (A + B_2FC_2)^T P - \alpha P < 0 \quad (2.21)$$

est vérifiée, alors le système bouclée (2.19) a ses valeurs propres dans le demi-plan gauche de la droite  $\alpha/2$  dans le plan complexe. Si  $\alpha \leq 0$  satisfaisant (2.21), le problème de stabilisation SOF est résolu.

La résolution du problème de régulation SOF peut être organisée en deux étapes : La première étape permet de trouver une matrice initiale  $P$ . La seconde étape permet de calculer les gains PID stabilisants via une stabilisation SOF.

La matrice  $P$  qui satisfait (2.21) ne peut être dérivée en utilisant une LMI vue la présence de l'inconnue  $F$ . En posant  $V_{P1} = PB_2F$ , (2.21) devient :

$$PA + A^T P + V_{P1}C_2 + C_2^T V_{P1}^T < 0 \quad (2.22)$$

Cependant, (2.22) ignore  $B_2$  de telle façon à ce que la matrice  $P$  ne prend pas en compte toute l'information. D'autre part, (2.20) est transformée à l'inégalité suivante en pré et post multipliant par  $L = P^{-1}$  :

$$(A + B_2FC_2)L + L(A + B_2FC_2)^T < 0 \quad (2.23)$$

En posant  $V_{P2} = FC_2L$ , (2.23) devient

$$\bar{A}L + L\bar{A}^T + B_2V_{P2} + V_{P2}^TB_2^T < 0 \quad (2.24)$$

Selon l'idée de la méthode de linéarisation du cône complémentaire [Ghaoui *et al.*, 1997],  $L = P^{-1}$  mène à  $PL = I$ , qui est relaxé avec la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} \geq 0$$

et la version linéarisée de la trace de  $(PL)$  est minimisée. Ainsi, un Algorithme itératif pour trouver un  $P$  initial peut être établi selon l'Algorithme 2.3.1.

### Algorithme 2.3.1

**Etape 1** : Posons  $i=1$ ,  $P_0 = I$  et  $L_0 = I$ .

**Etape 2** : Calculer  $P_i$  et  $L_i$  en résolvant le problème d'optimisation OP1 pour  $P_i$ ,  $L_i$ ,  $V_{P1}$  et  $V_{P2}$  :

**OP1** : Minimiser trace  $(P_iL_i + L_iP_{i-1})$  sous les contraintes LMI suivantes :

$$P_iA + A^TP_i + V_{P1}C_2 + C_2^TV_{P1}^T < 0 \quad (2.25)$$

$$\bar{A}L_i + L_i\bar{A}^T + \bar{B}_2V_{P2} + V_{P2}^T\bar{B}_2^T < 0 \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & I \\ I & L_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.27)$$

**Etape 3** : Si  $\text{trace}(P_iL_i - n) < \epsilon_{31}$ ,  $\epsilon_{31}$  une tolérance prescrite,  $P = P_i$  initial est trouvé, Fin.

**Etape 4** : Si la différence de deux itérations satisfait  $\text{trace}(P_iL_i) - \text{trace}(P_{i-1}L_{i-1}) < \epsilon_{32}$ ,  $\epsilon_{32}$  une tolérance prescrite,  $P$  initial ne peut pas être trouvé. Fin.

**Etape 5** : Poser  $i = i+1$ , et aller à l'Etape 2.

Si un  $P$  initial ne peut être trouvé par l'Algorithme 1, le problème de commande SOF pour le système (2.17) peut ne pas avoir de solutions.

Une fois le problème de la solution de  $P$  initial résolu, la seconde étape doit résoudre le problème du calcul des gains SOF. L'Algorithme 2.3.2 donne une solution à ce problème.

### Algorithme 2.3.2

**Etape 1 :** Poser  $i=1$  et  $P_1 = P$  obtenu à partir de l'Algorithme 2.3.1.

**Etape 2 :** Résoudre le problème d'optimisation OP1 pour  $F$  avec  $P_i$  donné :

**OP1 :** Minimiser  $\alpha_i$  sous la contrainte LMI suivante :

$$P_i(A + B_2FC_2) + (A + B_2FC_2)^T P_i - \alpha_i P_i < 0 \quad (2.28)$$

**Etape 3 :** Si  $\alpha_i \leq 0$ ,  $F$  est un gain SOF stabilisant. Fin.

**Etape 4 :** Poser  $i = i+1$ . Résoudre le problème d'optimisation OP2 pour  $P_i$  avec  $F$  donné :

**OP2 :** Minimiser  $\alpha_i$  sous la contrainte LMI (2.28) mentionnée ci-dessus :

**Etape 5 :** Si  $\alpha_i \leq 0$ ,  $F$  est un gain SOF stabilisant. Fin.

**Etape 6 :** Résoudre le problème d'optimisation pour  $P_i$  avec  $F$  donné et  $\alpha_i$  :

**OP3 :** Minimiser  $\text{trace}(P_i)$  sous contrainte LMI (2.28) précédente

**Etape 7 :** Si  $\|P_i - P_{i-1}\| / \|P_i\| < \delta_1$ ,  $\delta_1$  une tolérance prescrite, aller à l'Etape 8, sinon poser  $i = i+1$  et  $P_i = P_{i-1}$ , aller à l'Etape 2.

**Etape 8 :** Le système peut ne pas être stabilisable via SOF. Fin.

Les deux Algorithmes précédents 2.3.1 et 2.3.2 donnent une solution au problème SOF correspondant au système décrit par (2.17) mais pas à la synthèse du correcteur PID correspondant. Pour ce faire, on considère, à présent, le correcteur PID (2.2) à la place du correcteur SOF décrit par (2.18) où  $F_1, F_2, F_3$  représentent respectivement les gains matriciels à concevoir. Afin d'utiliser la méthode proposée dans [Zheng *et al.*, 2002], l'hypothèse suivante est indispensable.

**Hypothèse 2.2:** La matrice  $(I - F_3C_2B_2)$  est inversible.

On dénote par :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_0^t y(t)dt \end{bmatrix}$$

et

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} C_2 x(t) \\ \int_0^t y(t)dt \\ C_2 A x(t) \end{bmatrix}.$$

En utilisant (2.17) et (2.18), on a :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}x + \tilde{B}_1 \omega(t) + \tilde{B}_2 u(t) \\ z(t) = \tilde{C}_1 \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{11} \omega(t) + \tilde{D}_{12} u(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}_2 \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{21} = [C_2 \quad 0] \quad \tilde{C}_{22} = [0 \quad I] \quad \tilde{C}_{23} = [C_2 A \quad 0]$$

$$\tilde{C}_2 = [\tilde{C}_{21}^T \quad \tilde{C}_{22}^T \quad \tilde{C}_{23}^T]^T \quad \tilde{C}_1 = [C_1 \quad 0]$$

$$\tilde{D}_{11} = D_{11} \quad \tilde{D}_{12} = D_{12}$$

Le correcteur est réduit à

$$u(t) = \tilde{F} \tilde{y}(t) \quad (2.30)$$

où :

$$\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{F}_3]$$

et :

$$\tilde{F}_i = (I - F_3 C_2 B_2)^{-1} F_i, \quad i=1,2,3$$

Une fois la matrice  $\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{F}_3]$  trouvée, les gains du correcteur PID peuvent être reconstruits comme suit :

$$F_3 = \tilde{F}_3(I + C_2 B_2 \tilde{F}_3)^{-1} \quad (2.31)$$

$$F_2 = (I - F_3 C_2 B_2) \tilde{F}_2 \quad (2.32)$$

$$F_1 = (I - F_3 C_2 B_2) \tilde{F}_1 \quad (2.33)$$

Comme établi dans [Zheng *et al.*, 2002], l'inversion de la matrice  $(I + C_2 B_2 \tilde{F}_3)$  est garantie par la Lemme 2.1.

**Lemme 2.1** : La matrice  $(I + C_2 B_2 \tilde{F}_3)$  est inversible si et seulement si l'hypothèse 2.2 est vérifiée, où les matrices  $F_3$  et  $\tilde{F}_3$  sont reliés l'une à l'autre par  $\tilde{F}_3 = (I - F_3 C_2 B_2)^{-1} F_3$  ou  $F_3 = \tilde{F}_3 (I + C_2 B_2 \tilde{F}_3)^{-1}$ .

Sous l'Hypothèse 2.2, et en remplaçant les matrices  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $C_2$  respectivement par  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}_1$ ,  $\tilde{B}_2$ ,  $\tilde{C}_1$ ,  $\tilde{D}_{11}$ ,  $\tilde{D}_{12}$ ,  $\tilde{C}_2$  dans les Algorithmes 2.3.1 et 2.3.2, on peut ainsi calculer les gains PID stabilisants  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  tout en utilisant les relations (2.31), (2.32) et (2.33).

## 2.4 Application à un processus à non-minimum de phase

L'objectif de cette partie est d'implémenter les correcteurs PID présentés dans la section précédente à un processus à 4 réservoirs à non-minimum de phase et évaluer les performances de ces correcteurs PID synthétisés via ILMI en utilisant plusieurs tests et indices de performance.

### 2.4.1 Description du processus à 4 réservoirs et modélisation mathématique

Le processus à 4 réservoirs [Johansson, 2000], [Gatzke *et al.*, 2000], [Rusli *et al.*, 2004] est un processus multivariable qui comporte 4 réservoirs interconnectés et deux pompes. Le schéma synoptique de ce processus est illustré par la Figure 2.1. La sortie de chaque pompe est divisée en deux voies en utilisant une vanne 3-voies. Le débit d'entrée de chaque réservoir est mesuré par un débitmètre électromagnétique et régulé par une vanne 3-voies. Le niveau de chaque réservoir est mesuré par un capteur de niveau. Le problème de régulation a pour but de commander les niveaux d'eau dans les réservoirs inférieurs avec les deux pompes. Les deux pompes transmettent l'eau du bassin vers les 4 réservoirs. Les réservoirs supérieurs 3 et 4 déchargent l'eau dans les réservoirs inférieurs (réservoir 1 et réservoir 2, respectivement). Les

positions des vannes déterminent la position du zéro du modèle linéarisé. Si  $\gamma_1$  est le taux d'ouverture de vanne du premier réservoir, alors  $(1-\gamma_1)$  sera le taux d'ouverture de vanne du quatrième réservoir. Le voltage appliqué à la pompe est  $\vartheta_i$  et le débit correspondant est  $q_{pumpi} = k_i \vartheta_i$   $i=1,2$ . Le débit au réservoir 1 est  $\gamma_1 k_1 \vartheta_1$  et le débit au réservoir 4 est  $(1-\gamma_1) k_1 \vartheta_1$  et similairement pour les réservoirs 2 et 3, les débits respectifs sont  $\gamma_2 k_2 \vartheta_2$  et  $(1-\gamma_2) k_2 \vartheta_2$ . L'accélération de gravité est notée par  $g$ . Les signaux de niveau mesurés sont  $y_1 = k_c h_1$  et  $y_2 = k_c h_2$ .

Pour chaque réservoir  $i=1, \dots, 4$ , en considérant la loi de Bernouilli et le bilan de matière :

$$q_{out_i} = a_i \sqrt{2gh_i} \quad (2.34)$$

$$A_i \frac{dh_i}{dt} = q_{in_i} - q_{out_i} \quad (2.35)$$

où  $q_{in_i}$  est le débit entrant au réservoir  $i$  et  $q_{out_i}$  est le débit sortant du réservoir  $i$ .

En considérant le débit entrant et sortant de tous les réservoirs simultanément, la dynamique non-linéaire du processus à 4 réservoirs est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1 \vartheta_1}{A_1} \\ \frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2 \vartheta_2}{A_2} \\ \frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2) k_2 \vartheta_2}{A_3} \\ \frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1) k_1 \vartheta_1}{A_4} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

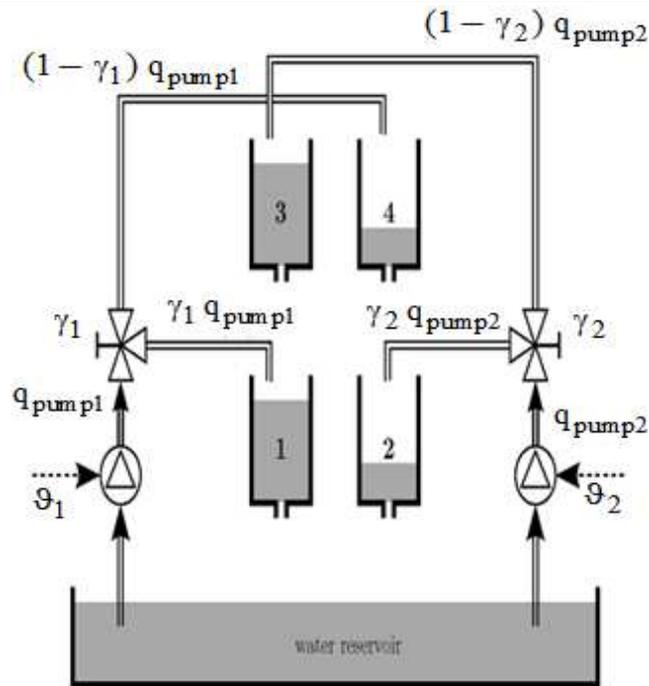


Figure 2.1 – Synoptique du processus à 4 réservoirs

### Nomenclature

$h_i$	:	Niveau d'eau dans le réservoir $i$
$a_i$	:	Surface du tube de sortie du réservoir $i$
$A_i$	:	Surface du réservoir $i$
$\gamma_1$	:	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 1 et 4
$\gamma_2$	:	Pourcentage d'eau dérivée vers les réservoirs 2 et 3
$k_1$	:	Gain de la pompe 1
$k_2$	:	Gain de la pompe 2
$k_c$	:	Gain du capteur de niveau
$g$	:	Constante de gravitation
$q_{pump,1}$	:	Débit de la pompe 1
$q_{pump,2}$	:	Débit de la pompe 2
$\vartheta_1$	:	Voltage de l'entrée 1 (pompe 1)
$\vartheta_2$	:	Voltage de l'entrée 2 (pompe 2)
$y_1$	:	Voltage du dispositif de mesure de niveau du réservoir 1
$y_2$	:	Voltage du dispositif de mesure de niveau du réservoir 2

Soient les variables  $x_i = \Delta h_i = h_i - h_i^0$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $u_j = \Delta \vartheta_j = \vartheta_j - \vartheta_j^0$ ,  $j=1, 2$  et

$y_j = \Delta y_j = y_j - y_j^0$ ,  $j=1, 2$ . Le modèle linéarisé autour des points d'équilibre  $\vartheta_1^0$ ,  $\vartheta_2^0$ ,  $h_1^0$ ,  $h_2^0$ ,

$h_3^0$ ,  $h_4^0$ ,  $y_1^0$ ,  $y_2^0$  peut être exprimé par [Johansson, 2000] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.37)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2h_1^0}} & 0 & \frac{a_3}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2h_3^0}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2h_2^0}} & 0 & \frac{a_4}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2h_4^0}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{\frac{g}{2h_3^0}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{\frac{g}{2h_4^0}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour les paramètres du processus donnés dans [Johansson, 2000], les valeurs propres du système en boucle ouverte sont données par  $-0.0159$ ,  $-0.0111$ ,  $-0.0419$  et  $-0.0333$ . Le système admet deux zéros de transmission multivariables, qui sont déterminés par les zéros de leur déterminant :

$$\det G(s) = \frac{T_1 T_2 k_1 k_2 \gamma_1 \gamma_2}{\prod_{i=1}^4 (1+sT_i)} \left[ (1+sT_3)(1+sT_4) - \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \right] \quad (2.38)$$

Ainsi, les zéros peuvent être calculés analytiquement :

$$z_1(\eta) = \frac{-(T_3 + T_4) + \sqrt{(T_3 - T_4)^2 + 4T_3 T_4 \eta}}{2 T_3 T_4} \quad (2.39)$$

$$z_2(\eta) = \frac{-(T_3 + T_4) - \sqrt{(T_3 - T_4)^2 + 4T_3 T_4 \eta}}{2T_3 T_4} \quad (2.40)$$

où :

$$\eta = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2} \in [0, \infty[$$

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}$$

Le zéro multivariable ajustable donné par (2.39) peut être assigné au demi-plan gauche ou au demi-plan droit. L'ajustement de la position des vannes détermine si le système est à minimum de phase (MP) ou à non-minimum de phase (NMP). Les résultats peuvent être exprimés en termes des taux d'ouverture des vannes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  comme indiqué dans le Tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Position des zéros du système linéarisé en fonction des taux d'ouverture des vannes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$

	$z_1$	$z_2$	Comportement du système
$1 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$	Négatif	Négatif	MP
$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$	Zéro	Négatif	Limite
$0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$	Positif	Négatif	NMP

La position des zéros multivariables dans le demi-plan gauche ou demi-plan droit a une interprétation physique simple. Soit  $q_i$  le débit à travers la pompe  $i$  et assumons que  $q_{\text{pump},1} = q_{\text{pump},2} = q$ . Ainsi le débit total des réservoirs supérieurs est  $[2 - (\gamma_1 + \gamma_2)]q$  et le débit total des réservoirs inférieurs est  $(\gamma_1 + \gamma_2)q$ . Ainsi, le débit des réservoirs inférieurs est supérieur au débit des réservoirs supérieurs si  $\gamma_1 + \gamma_2 > 1$ , c'est à dire, si le système est à minimum de phase. Le débit des réservoirs inférieurs est inférieur à celui des réservoirs supérieurs si le système est à non-minimum de phase. Dans ce cas,  $0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$ . Il est facile de commander  $y_1$  avec  $u_1$  et  $y_2$  avec  $u_2$ , si la plupart des débits s'acheminent directement aux réservoirs inférieurs. Le problème de commande est particulièrement difficile si le débit total des réservoirs à gauche (réservoirs 1 et 3) est égal au débit total s'acheminant vers les réservoirs à droite (réservoirs 2 et 4). Cela correspond à  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$  ou un zéro

multivariable à l'origine. Ainsi, il y a une relation immédiate entre la position du zéro du modèle et l'intuition physique de commander le processus à 4 réservoirs [Johansson, 2000].

Les valeurs des paramètres correspondant aux conditions opératoires pour les deux cas de modèles MP et NMP sont données par le Tableau 2.2. Les valeurs des paramètres du processus sont récapitulées dans le Tableau 2.3.

Tableau 2.2 – Conditions opératoires relatives aux modèles à MP et à NMP

Paramètres	Unité	Système à MP	Système à NMP
$h_1^0, h_2^0$	[cm]	12.4, 12.7	12.6, 13
$h_3^0, h_4^0$	[cm]	1.8, 1.4	4.8, 4.9
$\vartheta_1^0, \vartheta_2^0$	[V]	3.00, 3.00	3.15, 3.15
$k_1, k_2$	[cm <sup>3</sup> /V.s]	3.33, 3.35	3.14, 3.29
$\gamma_1, \gamma_2$	–	0.7, 0.6	0.43, 0.34

Tableau 2.3 – Valeurs des paramètres du processus à 4 réservoirs

Paramètres	Unité	Valeur
$A_1, A_3$	[cm <sup>2</sup> ]	28
$A_2, A_4$	[cm <sup>2</sup> ]	32
$a_1, a_3$	[cm <sup>2</sup> ]	0.071
$a_2, a_4$	[cm <sup>2</sup> ]	0.057
$k_c$	[V/cm]	0.5
$g$	[cm <sup>2</sup> /s]	981

## 2.4.2 Synthèse des régulateurs et tests de performance

Dans cette section, nous appliquons les trois approches ILMI présentées dans la section 2.4.1 afin de concevoir des correcteurs PID MIMO pour le processus à 4 réservoirs. Les boîtes à outils Sedumi et Yalmip [Lofberg, 2004] de Matlab sont utilisées pour résoudre le problème numérique. Les résultats de simulation pour le cas d'étude de système à non-minimum de phase sont présentés dans le Tableau 2.4. En considérant le problème de stabilisation,

l'approche 1 et l'approche 3 résolvent le problème vu que les valeurs propres du système en boucle fermée sont dans le demi-plan gauche du plan complexe. Toutefois, l'approche 2 ne peut pas résoudre le problème de stabilisation vu la présence de deux zéros figurant parmi les valeurs propres du système en boucle fermée.

Tableau 2.4 – Gains PID et pôles du système bouclé

Approche	Gains matriciels PID	Pôles
1	$F_1 = \begin{bmatrix} 2.4164 & 0.9490 \\ 1.8290 & 1.6698 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 0.2995 & 0.2334 \\ 0.2678 & 0.2447 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 41.2985 & 0.2831 \\ -0.0432 & 57.6159 \end{bmatrix}$	<p>-1.4903</p> <p>-0.3065</p> <p><math>-0.0228 \pm 0.0083i</math></p> <p>-0.0130</p> <p>-0.0173</p>
2	$F_1 = \begin{bmatrix} -0.2284 & -0.1725 \\ -0.3656 & -0.1502 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} -0.0013 & -0.0013 \\ -0.0025 & -0.0008 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} -0.1493 & 2.1896 \\ -2.9234 & -0.2977 \end{bmatrix}$	<p>-0.9398</p> <p><math>-0.9909 \pm 0.0496</math></p> <p>-1.0125</p> <p>0, 0</p>
3	$F_1 = \begin{bmatrix} 2.7242 & 1.0439 \\ 2.0398 & 1.8642 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 0.3904 & 0.3106 \\ 0.3899 & 0.3449 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 41.5157 & 2.6557 \\ 0.9236 & 59.4262 \end{bmatrix}$	<p><math>-1.4213 \pm 1.1494i</math></p> <p>-0.1311</p> <p><math>-0.0013 \pm 0.0123i</math></p> <p>-0.0612</p>

En termes de complexité d'implémentation des ILMI, les approches 1 et 2 sont complexes puisqu'elles nécessitent l'introduction de variables supplémentaires, menant à une dimension élevée des LMIs. L'approche 3 apparaît comme simple vu qu'elle permet d'éviter l'introduction de variables supplémentaires. Cependant, cela exige la convergence de deux Algorithmes indépendants. Le premier Algorithme doit trouver une matrice P initiale et un second Algorithme, utilisant la matrice P initiale, doit calculer les matrices de gains  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ . Les paramètres de réglage pour chaque approche, exposés dans le Tableau 2.5, sont considérés comme des critères de comparaison importants vu qu'un choix convenable de

chaque paramètre de réglage est requis pour conduire à de bonnes performances. A partir des résultats de simulation intensifs, nous avons pu conclure que l'approche 1 est très sensible aux variations des paramètres de réglage alors que les approches 2 et 3 sont moins sensibles.

Tableau 2.5 – Taux de convergence, paramètres de synthèse et paramètres de réglage

Approche	$\alpha_i$	Paramètres de synthèse	Paramètres de réglage
1	- 0.025	$P_i, F_i, \alpha_i$	$Q_0, \epsilon_{01}$
2	$7.62 \times 10^{-7}$	$Z_i, L_i, F_i, \alpha_i$	$X_1, \epsilon_{02}$
3	$2.88 \times 10^{-4}$	$P_i, F_i, \alpha_i, L_i, V_1, V_2$	$\epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \delta_1$

D'autre part, une comparaison entre les performances des correcteurs PID synthétisés en utilisant les approches ILMI 1 et 3 données a été établie dans le Tableau 2.6.

Tableau 2.6 – Comparaison des performances entre l'approche 1 et l'approche 3

Correcteur PID via approches ILMI	Paramètres	Système à NMP	
		Sortie 1	Sortie 2
Approche 1	Temps de montée (s)	5.69	4.46
	Temps de réponse (s)	11.7	9.89
	Pic de dépassement (%)	0.22	0.319
Approche 3	Temps de montée (s)	0.898	1.02
	Temps de réponse (s)	2.76	5.18
	Pic de dépassement (%)	4.42	6.64

Il est clair que le correcteur relatif à l'approche 3 donne de meilleures performances en termes de temps de montée et de temps de réponse respectivement pour les deux sorties du système alors que le correcteur PID relatif à l'approche 1 donne de meilleurs résultats en termes de dépassement minimal par rapport à l'approche 3 respectivement pour les deux sorties du système. Une erreur statique nulle est enregistrée pour les deux approches considérées.

### 2.4.3 Indices de performance

Pour élaborer une évaluation des performances des différentes approches ILMI, on considère les indices de performance ISE, IAE, ITAE et ITSE introduits au premier chapitre. Seules les approches 1 et 3 seront utilisées lors de cette étude comparative vu que l'approche 2 ne permet pas de stabiliser le système.

Soient les dynamiques d'erreurs définies par :

$$e_1(t) = r_1(t) - y_1(t) \quad (2.41)$$

$$e_2(t) = r_2(t) - y_2(t) \quad (2.42)$$

Nous assumons de plus que les deux entrées de référence du processus à 4 réservoirs sont soumis à un échelon unitaire  $r_1(t)=1V$  et  $r_2(t)=1V$  dans l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq 100s$ . Notons que T, le temps d'établissement utilisé pour le calcul des différents critères, est choisi égal à 100s dans tous les résultats de simulation. Les indices de performance calculés relatifs à ces résultats de simulation sont répertoriés dans le Tableau 2.7. La comparaison sur l'intervalle  $0 \leq t \leq 100s$  montre que l'approche 1 donne de meilleurs résultats en termes d'indices de performance IAE, ITAE et ITSE. Les valeurs des indices ISE sont presque identiques pour les deux approches. Le correcteur PID synthétisé par l'approche 1 fournit généralement des performances légèrement supérieures à ceux obtenus par le correcteur synthétisé par l'approche 3.

Tableau 2.7 – Indices de performance

Correcteur PID via approche ILMI	Type d'erreur	Indices de performance			
		IAE	ISE	ITAE	ITSE
Approche 1	$e_1$	0.9524	0.3866	2.9834	0.1683
	$e_2$	1.1026	0.3090	17.6191	0.1707
	Totale	2.0550	0.6956	20.6025	0.3390
Approche 3	$e_1$	1.5055	0.4785	24.9806	0.3411
	$e_2$	1.1487	0.2166	19.5771	0.1875
	Totale	2.6542	0.6950	44.5577	0.5286

#### 2.4.4 Tests de robustesse

Pour élaborer une évaluation de la robustesse des différentes approches ILMI, on considère quatre scénarios qui incluent la sensibilité du système à un bruit blanc gaussien, au changement de consigne, aux incertitudes paramétriques et enfin aux retards multiples. Rappelons que cette étude est basée sur les résultats des correcteurs PID des approches 1 et 3.

##### – Test 1 : Perturbation par un Bruit Blanc Gaussien (BBG)

Pour évaluer l'effet d'une perturbation de bruit sur les mesures du système bouclé, on perturbe les sorties du système avec un bruit blanc gaussien de variance 0.2 et de moyenne nulle. L'influence de cette perturbation est observée sur la Figure 2.2. Les résultats montrent que le système en boucle fermée pour les deux approches est très sensible à cette perturbation.

##### – Test 2 : Changement de consigne

Dans cette section, nous considérons que le processus à 4 réservoirs est soumis aux consignes suivantes :

$$r_1 = 1V, \quad 0 \leq t \leq 100s$$

$$r_2 = \begin{cases} 0V & 0 \leq t \leq 50s \\ 1V & 50 \leq t \leq 100s \end{cases}$$

A partir de la Figure 2.3, on observe que les correcteurs PID synthétisés par les deux approches sont robustes face aux changements de consignes.

##### – Test 3 : Incertitudes paramétriques

Dans cette section, nous considérons le cas du processus à 4 réservoirs sujet à une incertitude de  $\pm 20\%$  sur les taux d'ouverture des vannes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . L'influence de ces incertitudes sur les entrées de commande et sur les réponses du système bouclé est illustrée par la Figure 2.4.

La Figure 2.4(a) montre que l'approche 1 est robuste face aux incertitudes paramétriques des taux d'ouverture des vannes affectant le système nominal. Par contre, l'approche 3 est sensible à une incertitude de  $-20\%$  affectant les taux d'ouverture des vannes, comme illustré par la Figure 2.4(b).

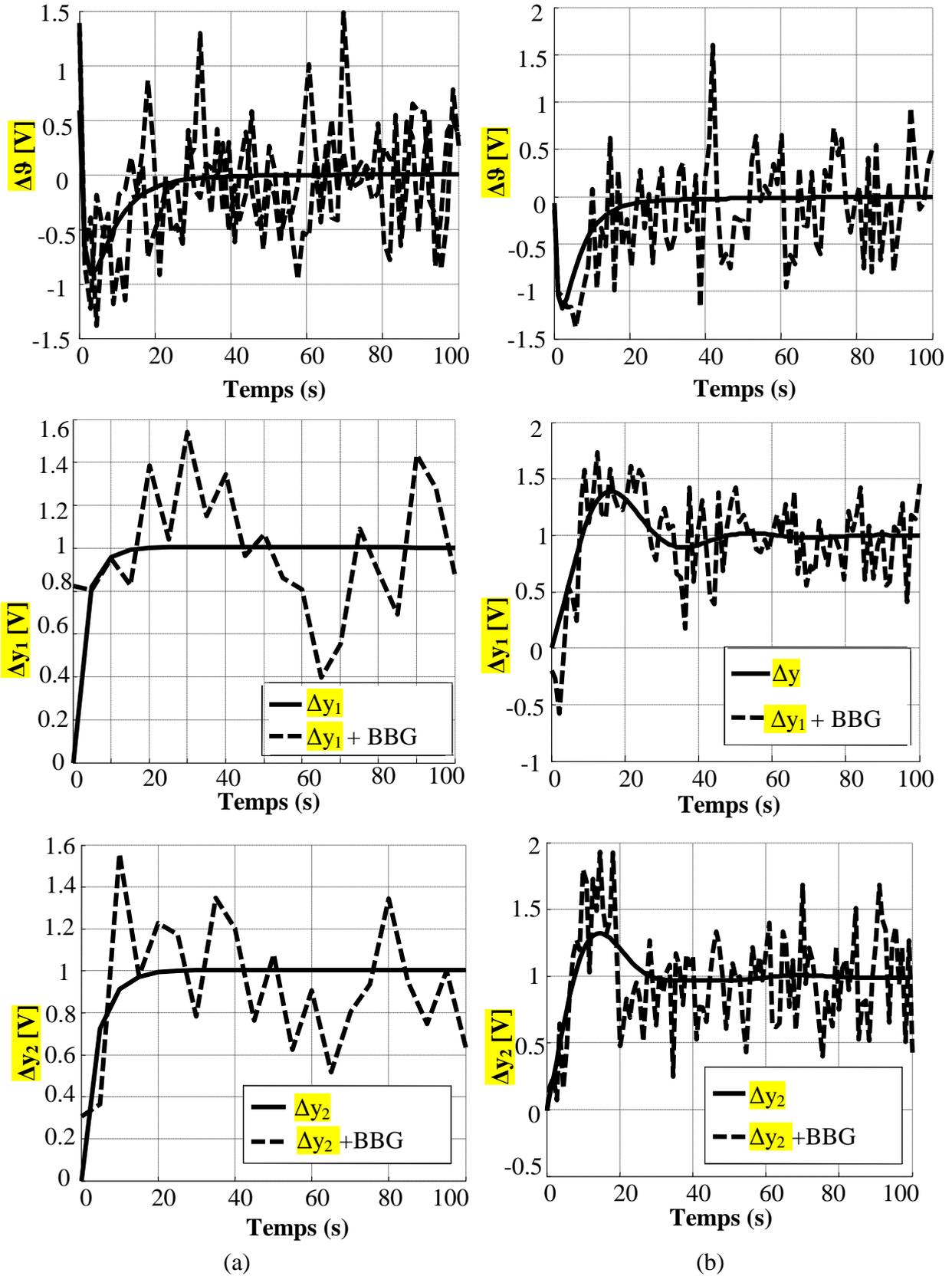


Figure 2.2 – Test 1 : (a) Approche 1 (b) Approche 3

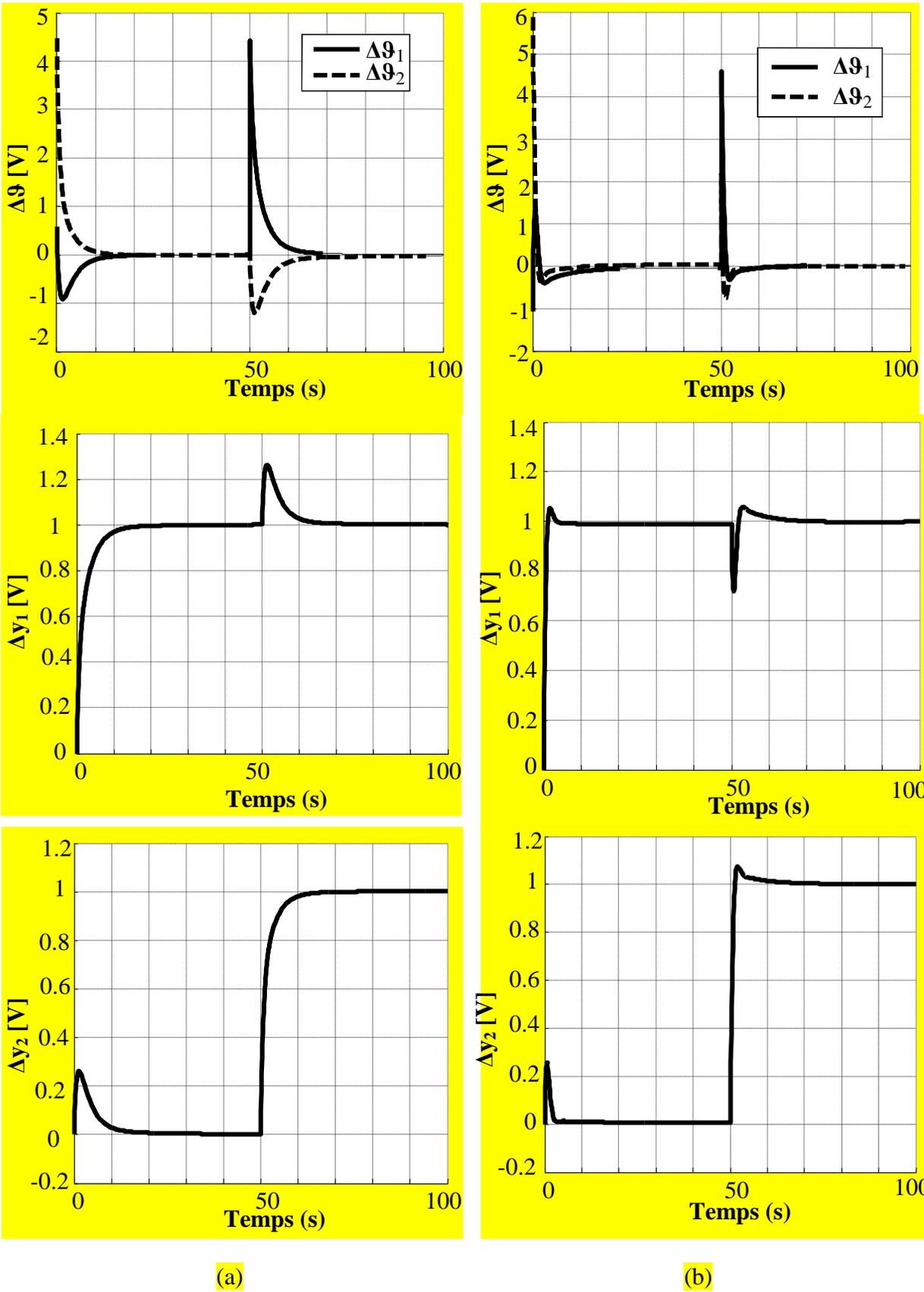


Figure 2.3 – Test 2 : (a) Approche 1 (b) Approche 3

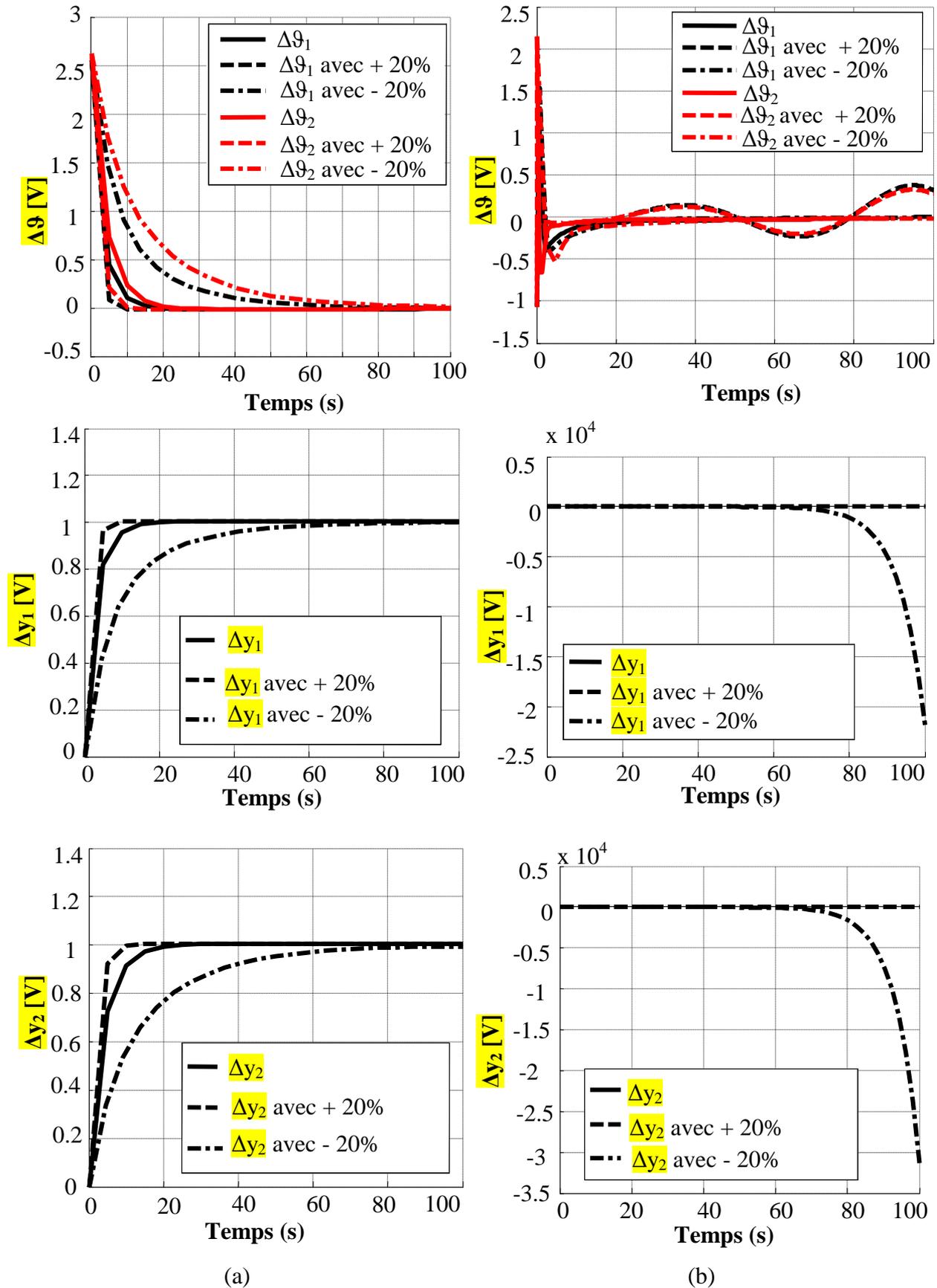


Figure 2.4 – Test 3 : (a) Approche 1 (b) Approche 3

– **Test 4 : Retards multiples**

Dans cette section, nous considérons que le système à non-minimum de phase est sujet à des retards multiples. Pour avoir une description plus réaliste du processus à 4 réservoirs, nous prenons en considération des retards de transport entre les vannes et les réservoirs. Nous considérons alors le système linéaire avec des retards dans l'état et dans les commandes décrit par [El Haoussi *et al.*, 2011]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + B_0u(t - \tau_2) + B_1u(t - \tau_3) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.43}$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur de sortie,  $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$  et  $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times m}$  sont des matrices constantes connues avec des dimensions appropriées.  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont des retards constants connus. Pour évaluer l'effet des retards, 4 cas d'études correspondant à différents retards de transport entre les réservoirs et les vannes sont considérés :

- Cas 1 :  $\tau_1 = 1s$ ,  $\tau_2 = 1s$  et  $\tau_3 = 1s$ ,
- Cas 2 :  $\tau_1 = 1.5s$ ,  $\tau_2 = 1.5s$  et  $\tau_3 = 1.5s$ ,
- Cas 3 :  $\tau_1 = 2s$ ,  $\tau_2 = 2s$  et  $\tau_3 = 2s$ ,
- Cas 4 :  $\tau_1 = 2.5s$ ,  $\tau_2 = 2.5s$  et  $\tau_3 = 2.5s$ .

La Figure 2.5 montre les lois de commande et les sorties du système pour les deux correcteurs PID correspondant aux deux approches 1 et 3. Notons que l'échelle des sorties du processus à 4 réservoirs a été normalisée pour les quatre cas afin de superposer les différentes courbes sur la même échelle. Les approches 1 et 3 apparaissent très sensibles face à des retards multiples associés aux états et entrées de commande du système. En effet, plus on augmente les valeurs du retard plus on enregistre une dégradation des performances au niveau des réponses du système bouclé voire même une instabilité du système.

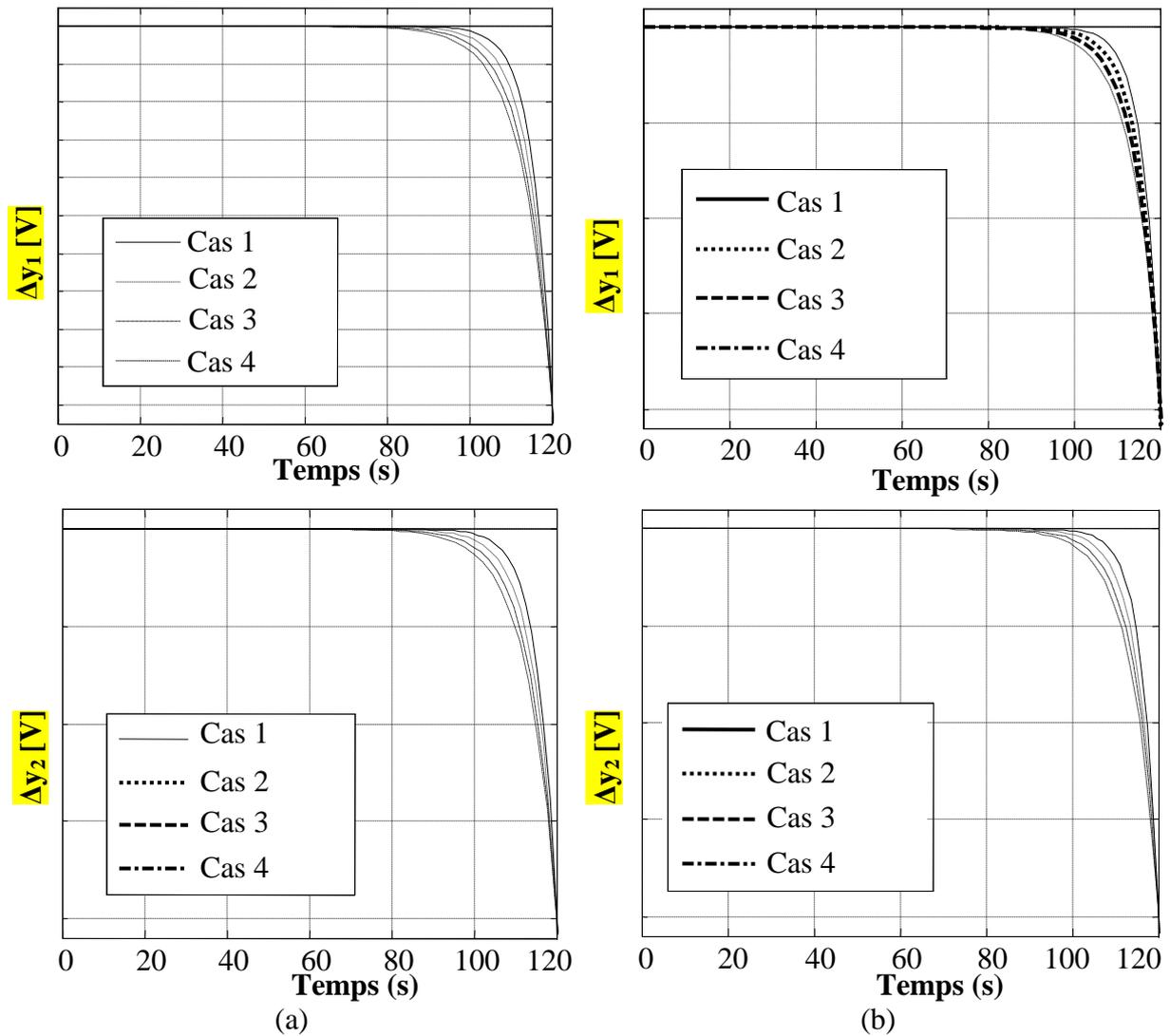


Figure 2.5 – Test 4 : (a) Approche 1 (b) Approche 3

### 2.4.5 Synthèse des résultats

L'analyse comparative basée sur les différents indices de performance prouve la supériorité du correcteur PID synthétisé par l'approche 1 par rapport à l'approche 3. En appliquant un bruit blanc gaussien sur les mesures, les deux approches sont très sensibles à cette perturbation. Pour le cas de changement de consignes, les approches 1 et 3 se montrent toutes les deux robustes. Concernant les incertitudes paramétriques sur les taux d'ouverture des vannes, l'approche 1 est robuste face à ces incertitudes alors que l'approche 3 ne l'est pas et peut même mener le système vers l'instabilité. En appliquant des retards multiples sur les états et les entrées de commande du processus nominal, les deux approches s'avèrent très limitées. En effet, lorsque le système est sujet à des retards multiples assez importants, le système devient instable.

Généralement, une comparaison des résultats des deux correcteurs PID par les deux approches 1 et 3 pour les différents tests et indices de performance prouve la supériorité de l'approche 1 sur l'approche 3. Cependant, nous notons aussi une sensibilité aux différents tests de robustesse considérés, principalement le bruit blanc appliqué sur les sorties, les incertitudes paramétriques et les retards multiples.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié trois approches de synthèse des correcteurs PID multivariables via des LMI itératives. Nous nous sommes intéressés au cas du processus à 4 réservoirs comme application à un benchmark d'un système à non-minimum de phase. Afin d'analyser chaque approche ILMI, nous avons détaillé la procédure de résolution ainsi que l'Algorithme permettant la résolution numérique de ce problème. Nous avons aussi proposé une analyse comparative en se basant sur des critères d'optimisation (faisabilité, résolution du problème de stabilisation, complexité de l'Algorithme) et sur des indices de performance et de robustesse afin d'évaluer chaque approche.

L'analyse comparative établie dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les limitations de ces approches lorsque le système est à non-minimum de phase et qu'il est sujet à des retards multiples, des incertitudes paramétriques et des perturbations extérieures. Afin de traiter le cas des retards multiples, nous proposons dans le cadre du chapitre suivant de développer un modèle d'état qui permet de résoudre le problème de la synthèse des régulateurs PID pour le cas des systèmes à retards multiples.

## **Chapitre 3**

# **Contribution à la modélisation des systèmes à retards multiples par des équations aux dérivées partielles**

### **3.1 Introduction**

La commande des systèmes à retards représente un des défis majeurs de l'automatique moderne. Les retards associés à un système LTI monovariante ou multivariante génèrent une détérioration des performances voire même une instabilité du système en boucle fermée. Une variable retardée peut être considérée comme étant un système à paramètres distribués généralement décrit par une équation à dérivées partielles. Or, les approches classiques de commande ne sont pas directement applicables aux modèles de dimension finie et elles nécessitent le plus souvent un modèle linéaire de dimension finie. Pour pouvoir répondre à ce problème, on utilisera dans ce chapitre la méthode de collocation orthogonale pour transformer un modèle retardé de dimension infinie en un modèle approché de dimension finie. L'approximation du système retardé par la méthode de collocation orthogonale exigera dans ce cas un bon réglage des paramètres de la méthode.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une nouvelle représentation d'état permettant de modéliser des systèmes LTI MIMO avec retards multiples via la méthode de collocation orthogonale. Cette modélisation permettra dans le chapitre suivant une synthèse du régulateur PI associé.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le second paragraphe, les passages d'une représentation d'état vers un modèle en matrice de transfert et vis versa d'un système linéaire à un retard seront rappelés. Dans le troisième paragraphe, le principe et le réglage des paramètres de la méthode de collocation orthogonale qui sera utilisée pour l'approximation d'un système de dimension infinie en un système de dimension finie sera exposé. On étendra dans le quatrième paragraphe le principe de l'approximation d'un seul retard au cas des retards multiples appliqués sur les états et aussi sur les entrées du système. Enfin, la méthodologie proposée sera appliquée dans le dernier paragraphe de ce chapitre sur trois exemples de processus industriels : un processus stable, un processus à non-minimum de phase et un processus instable.

### **3.2 Modélisation des systèmes linéaires à retards**

Dans cette partie, nous rappellerons respectivement la modélisation d'un système retardé par une représentation d'état ainsi que le passage vers une matrice de transfert, la modélisation du système retardé par une matrice de transfert et son passage vers une représentation d'état et enfin la modélisation d'une variable retardée par une équation aux dérivées partielles.

### 3.2.1 Modélisation par une représentation d'état et passage vers une matrice de transfert

On considère la classe particulière de système LTI MIMO avec retards multiples sur les états et sur les entrées dont la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t - \tau_2) + B_1 u(t - \tau_3) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  représentent respectivement, le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur de sortie.  $A_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_0 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $B_1 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  sont des matrices constantes.  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont les retards du système.

Le passage vers la matrice de transfert de ce système est obtenu comme suit [Richard, 2003] :

$$G(s) = \bar{C}(s) (sI_n - \bar{A}(s))^{-1} \bar{B}(s) \quad (3.2)$$

avec

$$\bar{A}(s) = A_0 + A_1 e^{-s\tau_1}$$

$$\bar{B}(s) = B_0 e^{-s\tau_2} + B_1 e^{-s\tau_3}$$

$$\bar{C}(s) = C$$

Ainsi

$$G(s) = C \left( sI_n - A_0 + A_1 e^{-s\tau_1} \right)^{-1} (B_0 e^{-s\tau_2} + B_1 e^{-s\tau_3}) \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Modélisation par une matrice de transfert et passage vers une représentation d'état

Le passage de la modélisation en matrice de transfert à une représentation d'état peut être établi pour les systèmes LTI MIMO avec retards multiples en appliquant la méthode de Gilbert [Kailath, 1980] ou en utilisant une décomposition spécifique de la matrice de transfert. Notons que la méthode de Gilbert construit directement une réalisation minimale d'où son intérêt. On trouvera dans les Annexes E-F deux exemples d'un système stable et d'un système instable détaillant le passage d'un modèle en matrice de transfert à une représentation d'état.

### 3.2.3 Modélisation d'une variable retardée par une équation aux dérivées partielles

Toute variable retardée peut être modélisée par un système à paramètres distribués décrit par une équation différentielle partielle (PDE) comme suit [Davis, 1975], [Richard, 2003] :

$$\frac{\partial X(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \quad (3.4)$$

avec la condition aux limites suivante :

$$v(t) = X(0, t) \quad (3.5)$$

augmentée de la sortie suivante :

$$v(t - \tau) = X(1, t) \quad (3.6)$$

où  $t$  et  $z$  sont respectivement la variable temporelle et la variable pseudo-spatiale. Comme exposé par la Figure 3.1,  $v(t)$ ,  $X(z, t)$  et  $v(t - \tau)$  représentent respectivement la variable d'entrée, la variable d'état et enfin la variable de sortie du bloc retard.  $\tau$  étant un retard constant.

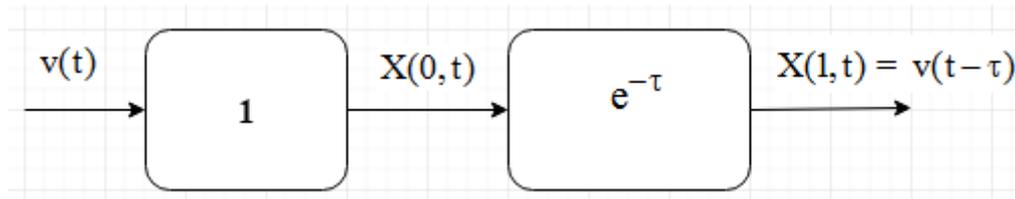


Figure 3.1 – Modélisation d'une variable retardée par un système à paramètres distribués

### 3.3 Approximation d'un système de dimension infinie par la méthode de collocation orthogonale

L'objectif de cette partie est d'examiner de façon détaillée la méthode de collocation orthogonale ainsi que l'influence de ses différents paramètres sur l'approximation de la solution. La méthode de collocation orthogonale [Damak, 1994], [Nihtila *et al.*, 1994], [Boubaker, 2000], [Lefevre *et al.*, 2000] figure parmi les méthodes des résidus pondérés les plus réputées pour différentes raisons. Cette méthode est caractérisée par plusieurs avantages ; l'établissement du système différentiel ordinaire s'effectue sans calcul d'intégrales grâce au choix de la fonction de Dirac, la nature des variables d'état est conservée contrairement aux autres méthodes et les bilans de masse et de chaleur sont conservés dans la transformation. En plus, cette méthode se distingue par sa simplicité de mise en œuvre par rapport aux autres méthodes mais au prix d'une exigence de respect de certaines règles. Elle peut mener par contre à de très mauvais résultats si certaines précautions ne sont pas prises en compte.

### 3.3.1 Principe

Le principe de la méthode de collocation orthogonale est de chercher une approximation de dimension finie pour la variable à paramètres distribués  $X(z,t)$  sous la forme [Boubaker, 2000] :

$$X(z,t) = \sum_{i=0}^{N+1} x_i(t)\phi_i(z) \quad (3.7)$$

où  $x_i$  est la valeur de  $X$  aux  $(N+2)$  points de collocation et les  $\phi_i$  sont des fonctions de base évaluées aux points de collocation. Un certain nombre de paramètres doivent être choisis convenablement pour utiliser la méthode de collocation orthogonale :

- Les fonctions de base  $\phi_i$ ,
- Le nombre des points de collocation  $N$ ,
- La position des points de collocation.

La dénomination de la méthode de collocation "orthogonale" provient du fait que les points de collocation sont confondus avec les points d'interpolation.

### 3.3.2 Choix des fonctions de base

Différentes classes de fonctions de base ont été considérées dans l'application de la méthode de collocation orthogonale. Afin de simplifier les calculs, nous choisissons d'adopter des fonctions polynômiales du fait que ces fonctions sont dérivables, intégrables et forment un espace vectoriel. Parmi ces fonctions, nous pouvons citer les polynômes de Tchebychev, Legendre, Leguerre, Hermite et Jacobi qui vérifient la relation d'orthogonalité suivante [Damak, 1994] :

$$\int_{\Omega} \phi_i(z)\phi_j(z)d\Omega = R_i^2 \delta_{ij} \quad (3.8)$$

Les polynômes de Lagrange ont été l'objet de plusieurs travaux dans la littérature grâce à leurs propriétés intéressantes. Il a été prouvé via des exemples numériques que nous pouvons obtenir une bonne approximation, facile à mettre en œuvre en utilisant les polynômes de Lagrange avec un nombre très limité des points de collocation.

Les polynômes d'interpolation de Lagrange  $L_i(z)$  de degré  $(N+1)$  définis à l'aide de  $(N+2)$  points d'interpolation  $z_i$  sont donnés par [Lefevre *et al.*, 2000] :

$$L_i^{(N)}(z) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{z - z_j}{z_j - z_i} \quad (3.9)$$

où  $z_0, z_1, \dots, z_{N+1} \in [0, 1]$  sont les points de collocation qui représentent les paramètres de la méthode.  $N$  est défini comme étant l'ordre de réduction. Les points de collocation internes considérés comme étant les zéros du polynôme de Jacobi d'ordre  $(N+2)$  seront définis ultérieurement.

Les polynômes  $L_i(z)$  doivent vérifier la propriété suivante [Boubaker, 2000] :

$$\begin{aligned} L_j(z_i) &= 1 & \text{si } j=i \\ L_j(z_i) &= 0 & \text{si } j \neq i \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous pouvons vérifier qu'en chaque point d'interpolation  $z_j$  :

$$\phi_i(z_j) = \delta_{ij} \quad i, j=0, 1, \dots, N+1 \quad (3.11)$$

d'où :

$$X(z_i, t) = x_i(t) \quad i, j=0, 1, \dots, N+1 \quad (3.12)$$

Les fonctions  $x_i(t)$  représentent donc les valeurs de la solution approximée aux points d'interpolation  $z_i$ .

### 3.3.3 Détermination du nombre de points de collocation

Le choix du nombre de points de collocation  $N$  est important dans l'utilisation de la méthode de collocation orthogonale. D'une part, il détermine l'ordre du système et par conséquent le nombre d'équations à résoudre ; d'autre part, il influe énormément sur la précision de la solution obtenue. Ce choix est dépendant de plusieurs facteurs relatifs au modèle en question tel que la dynamique, la dimension du domaine spatial des capteurs, les non-linéarités du modèle... Il est question de manière générale de chercher à résoudre un compromis entre la précision de la solution et la complexité du modèle. Sur un plan numérique, il est souhaitable de faire varier la position des points de collocation plutôt que d'augmenter le nombre de points [Damak, 1994], [Boubaker, 2000].

### 3.3.4 Détermination de la position des points de collocation

Le choix de la position des points de collocation est un critère très important vu qu'il influe

énormément sur la précision de la solution. Il a été prouvé que les positions optimales des points de collocation sont les zéros de polynômes orthogonaux [Lefevre *et al.*, 2000] .

Notons que les meilleures approximations ont été obtenues avec les polynômes de Jacobi vérifiant la relation d'orthogonalité suivante [Damak, 1994] :

$$\int_0^1 z^p (1-z)^q z^k p_N^{(p,q)}(z) dz = 0 \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.13)$$

Les paramètres  $p$  et  $q$  sont des paramètres de réglage permettant d'obtenir la meilleure solution mais il n'existe pas de méthode générale pour déterminer la valeur exacte de ces deux paramètres. Des études expérimentales ont montré qu'il est préférable de placer les points de collocation dans les zones où les non-linéarités sont les plus accentuées.

Les points de collocation internes sont considérés comme étant les zéros du polynôme de Jacobi noté  $P_N^{(p,q)}$  défini par [Lefevre *et al.*, 2000] :

$$p_N^{(p,q)} = (z - g_N(p,q)) p_{N-1}^{(p,q)} - h_N(p,q) p_{N-2}^{(p,q)} \quad (3.14)$$

avec  $p_0^{(p,q)} = 1$  et où les coefficients  $h_N(p,q)$  et  $g_N(p,q)$  sont définis comme suit :

$$h_N(p,q) := \begin{cases} \frac{(N-1)(N+p-1)(N+q-1)(N+p+q-1)}{(2N+p+q-1)(2N+p+q-2)^2(2N+p+q-3)} & \text{si } N > 2 \\ \frac{(p+1)(q+1)}{(p+q+2)^2(p+q+3)} & \text{si } N = 2 \end{cases}$$

$$g_N(p,q) := \begin{cases} 0 & \text{Sinon} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p^2 - q^2}{(2N+p+q-1)^2 - 1} \right) & \text{si } N > 1 \\ \frac{q+1}{p+q+2} & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

où  $p$  et  $q$  sont deux paramètres de réglage de la méthode de collocation.

Le Tableau 3.1 montre l'influence du couple de paramètres  $(p, q)$  sur la position des points de collocation dans le cas où le nombre de points de collocation est fixé à  $N=3$ .

Tableau 3.1 – Position des points de collocation

p	q	Remarques	Position des points de collocation pour N=3
-1/2	-1/2	Distribution symétrique de zéros	$z_0 = 0, z_1 = 0.067, z_2 = 0.5, z_3 = 0.9330, z_4 = 1$
0	0	Position uniforme de zéros	$z_0 = 0, z_1 = 0.1127, z_2 = 0.5, z_3 = 0.8873, z_4 = 1$ .
petit	>1	Davantage de zéros du coté de $z = z_{N+1}$	$z_0 = 0, z_1 = 0.4201, z_2 = 0.7339, z_3 = 0.9460, z_4 = 1$
>1	petit	Davantage de zéros du coté de $z = z_0$	$z_0 = 0, z_1 = 0.0540, z_2 = 0.2661, z_3 = 0.5799, z_4 = 1$

### 3.3.5 Mise en œuvre de la méthode

En utilisant la méthode de collocation orthogonale, la variable d'état  $X(z, t)$  est approximée par une variable  $X^*(z, t)$ , représentant une somme finie de produits de fonctions dépendants de deux variables, l'une est la variable temporelle  $t$  et l'autre est la variable pseudo-spatiale  $z$  comme suit :

$$X^*(z, t) = \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) x_i(t)$$

$$x_i(t) = X^*(z_i, t) = X(z, t)|_{z=z_i} \quad (3.15)$$

où  $z_i$  représente un nombre fini de points de collocation définis comme suit :

$$z_0 = 0 < z_1 < \dots < z_{N+1} = 1 \quad (3.16)$$

qui sont les points d'interpolation des polynômes de Lagrange  $L_i$  définis par (3.10) où les zéros du polynôme de Jacobi noté  $p_N^{(p,q)}$  définis par (3.14).

Etant donné que les dérivées temporelles et spatiales aux points de collocation  $z_i$  sont exprimées comme suit [Nihtila *et al.*, 1994] :

$$\left. \frac{\partial X^*(z, t)}{\partial t} \right|_{z=z_i} = \frac{dx_i(t)}{dt}$$

$$\left. \frac{\partial X^*(z, t)}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \sum_{j=0}^{N+1} l_{i,j} x_j(t) \quad \text{où} \quad l_{i,j} = \left. \frac{dL_j(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \quad (3.17)$$

et après calcul des points de collocation  $z_i$  et des coefficients  $l_{i,j}$ , nous obtenons un modèle approximé en substituant les approximations (3.17) dans la PDE (3.4). Ce modèle approché est exprimé en fonction d'équations différentielles ordinaires (ODE) situés en chaque point de collocation calculée par cette méthode.

### 3.3.6 Analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation est l'un des facteurs importants qui détermine la qualité de l'approximation par la méthode de collocation orthogonale. Généralement, l'erreur d'interpolation peut introduire des perturbations de la dynamique du système étudié menant même à sa déstabilisation. Nous consacrons cette partie à l'analyse théorique de l'approximation de l'erreur d'interpolation entre le modèle de dimension infinie et le modèle de dimension finie. Notons que cette analyse est valable pour tout système à retards approché via cette méthode. Dans ce qui suit, on utilisera la formule de Cauchy pour prouver que cette erreur est bornée. Notons que la position des points de collocation joue un rôle important, comme elle influe sur la convergence de l'erreur d'interpolation.

Nous considérons la formule de Cauchy pour l'erreur d'interpolation définie par [Davis, 1975] [Lefevre *et al.*, 2000]:

$$e_N(z,t) = X(z,t) - X^*(z,t) \quad (3.18)$$

et nous assumons que la solution inconnue  $X(z,t)$  est suffisamment continue dérivable. Nous avons alors [Davis, 1975] [Lefevre *et al.*, 2000] :

$$e_N(z,t) = w(z) \frac{X(z)^{N+1}(\eta(z),t)}{(N+1)!} \quad (3.19)$$

où  $w(z) := \prod_{j=0}^n (z - z_j)$  et  $\eta(z) \in [-1, +1]$ .

En conséquence, nous essayons de choisir les points de collocation intérieurs  $z_1, \dots, z_{N-1}$  qui minimisent l'erreur d'interpolation (3.19). Sans une connaissance préalable du comportement de la solution exacte, ce problème est réduit à trouver  $z_1, \dots, z_{N-1}$  tel que  $w(z)$  est minimal.

Dans ce qui suit, nous considérons l'étude de cas des polynômes de Chebyshev relatifs à la famille des polynômes de Jacobi correspondent aux valeurs des paramètres  $p = q = -1/2$ .

Les racines des polynômes de Chebyshev d'ordre  $(N - 1)$  sont données par [Lefevre *et al.*, 2000] :

$$z_k^* := \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2(N-1)}\right) \text{ pour } k = 0, \dots, N-2 \quad (3.20)$$

Qui sont solutions de ce problème. On considère aussi la norme minimale correspondante donnée par [Lefevre *et al.*, 2000] :

$$\|w(z)\|_\infty = \left\| \prod_{k=1}^{N-1} (z - z_k^*) \right\|_\infty = 2^{-(N-2)} \quad (3.21)$$

Ainsi :

$$\|e_N\|_\infty \leq \frac{\|X(z)^{N+1}(\cdot, t)\|_\infty}{(N+1)!2^{N-2}} \quad (3.22)$$

Nous démontrons à travers (3.22) que l'erreur d'interpolation pour l'approximation des variables de retards est toujours bornée pour les paramètres  $p = q = -1/2$ .

### Remarque 1

La dernière démonstration a été accomplie pour le cas des polynômes de Chebyshev relatifs à la famille des polynômes de Jacobi, dans laquelle de simples calculs aboutissent à la limitation de l'erreur d'interpolation. Les travaux de [Lefevre *et al.*, 2000] montrent que l'erreur d'interpolation est bornée aussi pour un cas plus généralisé où les paramètres de réglage  $p$  et  $q$  sont compris dans un intervalle de valeurs  $\left[-\frac{1}{2} \quad 2\right]$ .

### 3.4 Extension au cas des systèmes à retards multiples

En se basant sur les développements précédents, on se propose de développer un modèle d'état permettant l'approximation d'un système LTI MIMO avec retards multiples.

En appliquant le principe de modélisation d'une variable retardée par les PDE (3.4)-(3.6) sur chacun des vecteurs  $x(t - \tau_1)$ ,  $u(t - \tau_2)$  et  $u(t - \tau_3)$  du système (3.1) et le principe de l'approximation par la méthode de collocation orthogonale, le système (3.1) est transformé en  $3(N+1)$  équations différentielles ordinaires données par [Belhaj & Boubaker, 2016]:

$$\dot{\omega}_1(t) = -\frac{1}{\tau_1} \bar{A}_1 \omega_1(t) + \frac{1}{\tau_1} \bar{B}_1 x(t) \quad (3.23)$$

$$\dot{\omega}_2(t) = -\frac{1}{\tau_2} \bar{A}_2 \omega_2(t) + \frac{1}{\tau_2} \bar{B}_2 u(t) \quad (3.24)$$

$$\dot{\omega}_3(t) = -\frac{1}{\tau_3} \bar{A}_3 \omega_3(t) + \frac{1}{\tau_3} \bar{B}_3 u(t) \quad (3.25)$$

augmentées par les sorties suivantes :

$$x(t - \tau_1) = \omega_1(1, t) = \bar{C}_1 \omega_1(t) \quad (3.26)$$

$$u(t - \tau_2) = \omega_2(1, t) = \bar{C}_2 \omega_2(t) \quad (3.27)$$

$$u(t - \tau_3) = \omega_3(1, t) = \bar{C}_3 \omega_3(t) \quad (3.28)$$

où pour  $k=1,2,3$ , les matrices  $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, i=1,2,3$  sont calculées comme suit :

$$\bar{A}_k = [a_{k,ij}] = \left. \frac{dL_j(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, i, j = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{B}_1 = \left[ \left. \frac{dL_0(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \quad \dots \quad \left. \frac{dL_0(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \right] \in \mathfrak{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \left[ \left. \frac{dL_0(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \quad \dots \quad \left. \frac{dL_0(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \right] \in \mathfrak{R}^{n \times m}, i = 1, \dots, N+1$$

$$\bar{C}_1 = [c_{1,ij}]^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}, c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, \dots, N \\ 1 & \text{si } j = N+1 \end{cases}$$

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_3 = [c_{2,ij}]^T = [c_{3,ij}]^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}, c_{2,ij} = c_{3,ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, \dots, N \\ 1 & \text{si } j = N+1 \end{cases}$$

En substituant les équations (3.26)–(3.28) dans l'équation d'état de (3.1), la représentation d'état (3.1) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 \bar{C}_1 \omega_1(t) + B_0 \bar{C}_2 \omega_2(t) + B_1 \bar{C}_3 \omega_3(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Soit :

$$\tilde{z}_c = [x(t) \quad \omega_1(t) \quad \omega_2(t) \quad \omega_3(t)] \in \mathfrak{R}^{4n},$$

et

$$\tilde{y}_c = \tilde{C}_c \tilde{z}_c,$$

où :

$$\tilde{y}_c = y = Cx = [C \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tilde{z}_c$$

La nouvelle représentation d'état du système à retards multiples (3.1) approché via la méthode de collocation orthogonale en utilisant (3.29) et (3.23) – (3.25) est donnée ainsi par :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}_c &= \tilde{A}_c \tilde{z}_c + \tilde{B}_c u \\ \tilde{y}_c &= \tilde{C}_c \tilde{z}_c\end{aligned}\quad (3.30)$$

où

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \bar{C}_1 & B_0 \bar{C}_2 & B_1 \bar{C}_3 \\ \frac{1}{\tau_1} \bar{B}_1 & -\frac{1}{\tau_1} \bar{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2} \bar{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3} \bar{A}_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{4n \times 4n}, \quad \tilde{B}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_2} \bar{B}_2 \\ \frac{1}{\tau_3} \bar{B}_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{4n \times m},$$

$$\tilde{C}_c = (C \ 0 \ 0 \ 0) \in \mathfrak{R}^{p \times 4n}$$

### 3.5 Application

Pour valider le nouveau modèle d'état obtenu, on considère trois exemples types de systèmes à retards multiples : Un réacteur chimique ISP comme système stable, un processus à 4 réservoirs comme système à non-minimum de phase et un processus de colonne de distillation comme système instable.

Afin de prouver la validité des trois modèles considérés pour ces exemples : 1) le modèle d'état retardé (3.1) 2) le modèle retardé en matrice de transfert (3.3) et, 3) la nouvelle représentation d'état (3.30), on introduit les deux erreurs suivantes :

- $e_1$  : la somme des erreurs entre les sorties issues du modèle en représentation d'état (3.1) et celle de sa matrice de transfert correspondante (3.3) pour des entrées en échelons unitaires.
- $e_2$  : la somme des erreurs entre les sorties issues du modèle retardé (3.1) et la nouvelle représentation d'état (3.30) pour des entrées en échelons unitaires.

On note que la validité de ces modèles est évaluée en fonction de la convergence des erreurs mentionnées ci-dessus vers zéro.

Pour la méthode de collocation orthogonale, les paramètres optimaux sont choisis comme  $N = n - 1$  et  $p = q = -1/2$ .

### 3.5.1 Exemple 1 : Réacteur ISP

La matrice de transfert du réacteur de polymérisation ISP est donnée par [Chien *et al.*, 1999]:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.8900e^{-\tau_2 s}}{4.5720s + 1} & \frac{-11.6400e^{-\tau_3 s}}{1.8070s + 1} \\ \frac{4.6890e^{-\tau_2 s}}{2.1740s + 1} & \frac{5.8000e^{-\tau_3 s}}{1.8010s + 1} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

avec  $\tau_2 = 0.2h$  et  $\tau_3 = 0.4h$ .

L'échelle du temps est en heures, ainsi la réponse dynamique du processus est très lente avec comme perturbation le débit de la purge du réacteur.

En utilisant la méthode de Gilbert [Kailath, 1980] pour le système décrit par la matrice de transfert (3.31), le réacteur ISP peut être décrit par la représentation d'état (3.1) tel que :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5534 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5552 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 5.0660 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.1569 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6.4416 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.2204 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Les détails de cette modélisation sont donnés dans l'Annexe E.

Pour l'approximation du modèle précédent par la méthode de collocation orthogonale, les paramètres optimaux sont choisis comme  $N=3$  et  $p = q = -1/2$ . Les matrices relatives au modèle d'état (3.30) sont ainsi données par :

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 10.3923 & 1.1547 & -1.1547 & 0.8038 \\ -4.6188 & -0.0000 & 4.6188 & -3 \\ 1.1547 & -1.1547 & -10.3923 & 11.1962 \\ -1.4291 & 1.3333 & -19.9043 & 19 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \begin{pmatrix} -11.1962 & -11.1962 \\ 3 & 3 \\ -0.8038 & -0.8038 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La Figure 3.2 prouve la validité des modèles (3.30) et (3.31) obtenus. Ces deux modèles seront utilisés dans le chapitre suivant pour la synthèse du correcteur PI multivariable appropriée via une approche temporelle/fréquentielle.

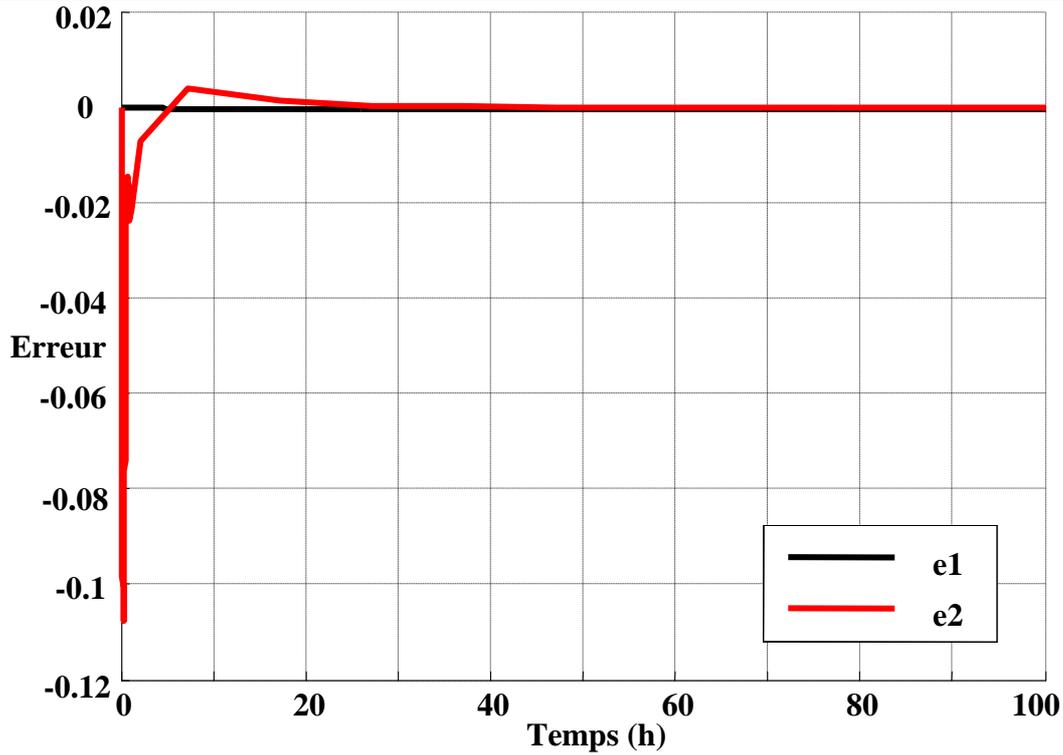


Figure 3.2 – Validation des modèles (3.30) et (3.31) pour le réacteur ISP

### 3.5.2 Exemple 2 : Le processus à 4 réservoirs

On considère le processus à 4 réservoirs avec retards multiples pour lequel les matrices associées au modèle à non-minimum de phase (3.1) sont données par [El Haoussi *et al.*, 2011]:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{pmatrix} -0.1993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1422 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0873 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0873 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 B_0 &= \begin{pmatrix} 0.0482 & 0 \\ 0 & 0.0350 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0775 \\ 0.0559 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

La matrice de transfert correspondante est calculée selon (3.3) comme suit :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.0241e^{-s\tau_2}}{s + 0.1993} & \frac{0.0047e^{-s(\tau_1 + \tau_3)}}{(s + 0.1995)(s + 0.1230)} \\ \frac{0.0024e^{-s(\tau_1 + \tau_3)}}{(s + 0.1422)(s + 0.0873)} & \frac{0.0175e^{-s\tau_2}}{s + 0.1422} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Les paramètres optimaux pour la méthode de collocation orthogonale sont choisis comme suit :  $N=3$  et  $p = q = -1/2$ . Pour les résultats de simulation, les retards constants sont choisies comme suit:  $\tau_1 = 5s$ ,  $\tau_2 = 2s$  et  $\tau_3 = 4s$ . Les matrices correspondantes au nouveau modèle d'état (3.30) sont données par :

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 10.3923 & 1.1547 & -1.1547 & 0.8038 \\ -4.6188 & 0 & 4.6188 & -3 \\ 1.1547 & -1.1547 & -10.3923 & 11.1962 \\ -1.4291 & 1.3333 & -19.9043 & 19 \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} -11.1962 & -11.1962 & -11.1962 & -11.1962 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -0.8038 & -0.8038 & -0.8038 & -0.8038 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \begin{pmatrix} -11.1962 & -11.1962 \\ 3 & 3 \\ -0.8038 & -0.8038 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La Figure 3.3 montre la validité des modèles (3.30) et (3.34) obtenus. En effet, les erreurs de modélisation convergent vers zéro.

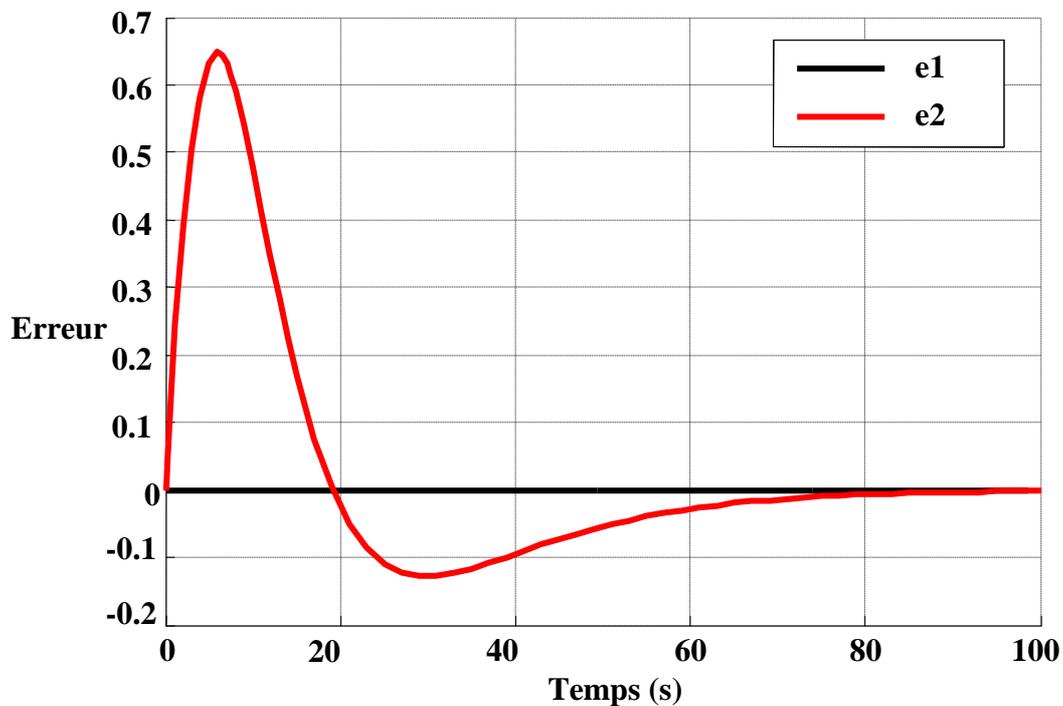


Figure 3.3 – Validation des modèles (3.30) et (3.34) pour le processus à 4 réservoirs

### 3.5.3 Exemple 3 : Colonne de distillation

On considère l'exemple typique d'une colonne de distillation [Friedland, 1986], [Mete *et al.*, 2006],[Gundes *et al.*, 2007]. La matrice de transfert de la colonne de distillation avec des retards sur les entrées de commande est décrite par [Mete *et al.*, 2006]:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{3.0400e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{-278.2000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \\ \frac{0.0520e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{206.6000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

avec  $\tau_2 = 0.5h$  et  $\tau_3 = 0.6h$ .

En appliquant la méthode de décomposition en colonnes [Kailath, 1980] pour (3.35), la représentation d'état peut être déduite comme suit :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3.0400 & -1.5455 & 1.9319 & 0.3861 \\ 0.0520 & 1.1477 & -1.4347 & 0.2869 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Les détails du calcul de ce modèle sont donnés dans l'Annexe F.

Les matrices associées à la nouvelle représentation d'état (3.30) sont données par :

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 10.3923 & 1.1547 & -1.1547 & 0.8038 \\ -4.6188 & -0.0000 & 4.6188 & -3 \\ 1.1547 & -1.1547 & -10.3923 & 11.1962 \\ -1.4291 & 1.3333 & -19.9043 & 19 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \begin{pmatrix} -11.1962 & -11.1962 \\ 3 & 3 \\ -0.8038 & -0.8038 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La Figure 3.4 illustre la validité du modèle approché (3.30) et du modèle de la matrice de transfert (3.35).

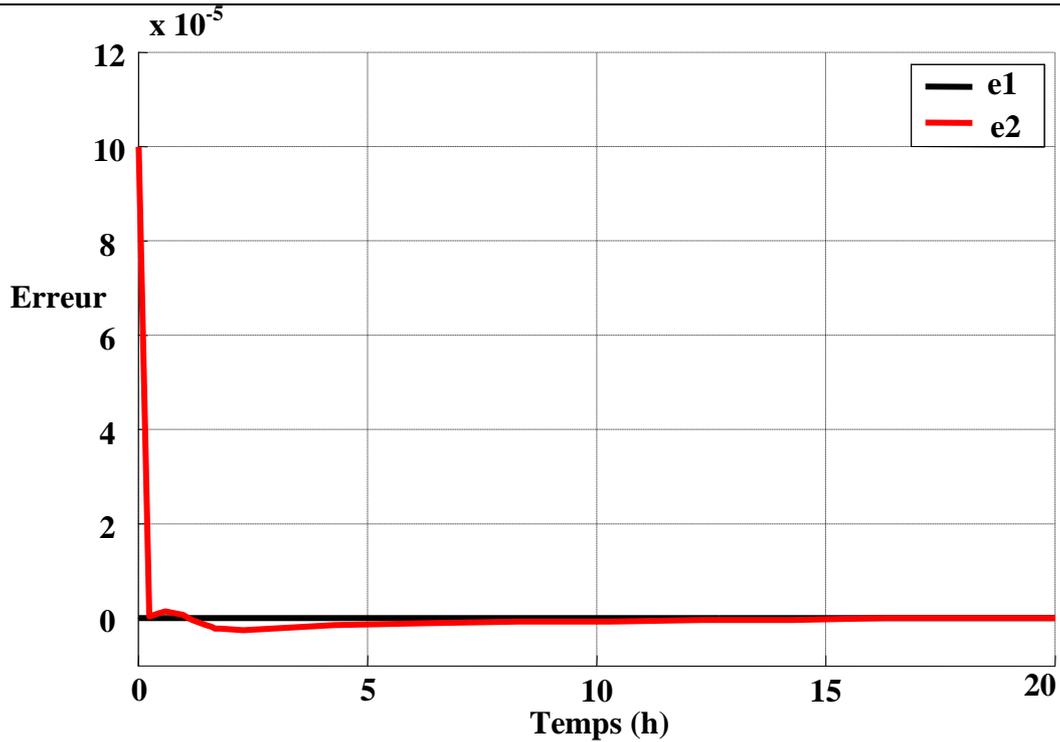


Figure 3.4 – Validation des modèles (3.30) et (3.35) pour la colonne de distillation

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation des systèmes à retards multiples, problème couramment rencontré dans l'industrie. En premier lieu, nous avons rappelé les passages entre un modèle d'état à retards multiples et le modèle en matrice de transfert correspondant et vis-vers-ça. Ensuite, nous avons fait appel à la méthode de collocation orthogonale afin de proposer une nouvelle représentation d'état des systèmes à multiple retards. La méthodologie proposée a été appliquée avec succès à différentes classes de systèmes : un système stable (un réacteur chimique ISP), un système à non-minimum de phase (le processus à 4 réservoirs) et un système instable (une colonne de distillation). Les résultats de simulation obtenus ont montré l'intérêt et la validité de la nouvelle représentation d'état proposée. Dans le chapitre suivant, nous exploiterons les modèles mathématiques considérés dans ce chapitre pour proposer une nouvelle approche de synthèse des régulateurs PI multivariables.

## **Chapitre 4**

# **Régulateur PI multivariable pour des systèmes à retards multiples**

#### 4.1 Introduction

Après avoir traité la modélisation des systèmes LTI MIMO à retards multiples via la méthode de collocation orthogonale, nous présentons dans ce chapitre la contribution essentielle de cette Thèse. Il s'agit d'une nouvelle méthodologie de synthèse d'un régulateur PI multivariable pour des systèmes linéaires à retards multiples via une technique ILMI et une approche Loop-Shaping.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans le second paragraphe, la position du problème et les hypothèses sont exposées. La méthodologie proposée via la résolution de deux sous-problèmes est présentée dans le troisième paragraphe. Le premier sous-problème est consacré à la conception d'un correcteur PI MIMO en utilisant la nouvelle représentation d'état proposée dans le chapitre précédent combinée à une transformation SOF puis résolu via ILMIs. Le deuxième sous-problème est dédié à l'amélioration des performances du correcteur proposé via une procédure Loop-Shaping par minimisation des matrices de sensibilité. Dans le quatrième paragraphe, la méthodologie proposée est appliquée à trois benchmarks : Une colonne de distillation, un réacteur ISP et un processus à 4 réservoirs. Une analyse comparative entre la méthode proposée et des méthodes conventionnelles et non conventionnelles clôturera ce chapitre.

#### 4.2. Position du problème et hypothèses

On considère le système linéaire multivariable nominal avec des retards multiples décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_0 u(t - \tau_2) + B_1 u(t - \tau_3) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  représentent respectivement, le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur de sortie.  $A_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $A_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_0 \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$  sont des matrices constantes.  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont les retards du système. Le système (4.1) est un système de dimension infinie.

L'objectif est de concevoir un correcteur PI de dimension finie décrit par :

$$u(t) = F_1 e(t) + F_2 \int_0^t e(t) dt \quad (4.2)$$

où  $e(t) = r(t) - y(t)$ ,  $r(t) \in \mathcal{R}^p$  est le vecteur de consigne et  $F_1$ ,  $F_2$  désignent respectivement le gain matriciel proportionnel et le gain matriciel intégral, qui doivent stabiliser le système (4.1) tout en lui assurant des performances de régulation des sorties vers les consignes désirées, de robustesse et de rejet des perturbations.

Soit  $G(s) \in \mathcal{R}^{p \times m}$  la matrice de transfert relative au système retardé (4.1), calculée telle que décrite dans le chapitre précédent, et  $K(s) = [K_{ij}(s)] \in \mathcal{R}^{m \times p}$  est la matrice de transfert du correcteur PI donnée par :

$$K_{ij}(s) = F_{1ij} + F_{2ij} / s \quad (4.3)$$

où

$K_{ij}(s)$  est l'élément  $ij$  de la matrice de transfert  $K(s)$ ,

$F_{1ij}$  est le gain proportionnel de l'élément  $ij$  de  $K(s)$ ,

$F_{2ij}$  est le gain intégral de l'élément  $ij$  de  $K(s)$ ,

Pour un tel correcteur PI, il existe  $2 \times m \times p$  paramètres à régler pour un système avec  $m$  entrées et  $p$  sorties.

Le problème de commande précédent est très complexe puisque le système (4.1) est un système MIMO de dimension infinie alors que le correcteur est de dimension finie. Pour relaxer ce problème, le problème de commande sera organisé en deux sous-problèmes.

#### **Sous-Problème 1 : Conception d'un correcteur stabilisant PI de dimension finie**

Dans cette étape, le système de dimension infinie (4.1) sera réduit à un système de dimension finie décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{z} \end{aligned} \quad (4.4)$$

alors que le correcteur PI (4.2) sera transformé en un correcteur SOF donné par :

$$u = \tilde{F}\tilde{y} \quad (4.5)$$

où  $\tilde{z}(t) \in \mathcal{R}^{n'}$ ,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $\tilde{y}(t) \in \mathcal{R}^{p'}$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur de sortie du système approximé.  $\tilde{A} \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$ ,  $\tilde{B} \in \mathcal{R}^{n' \times m}$ ,  $\tilde{C} \in \mathcal{R}^{p' \times n'}$  sont de nouvelles matrices à calculer et  $\tilde{F}$  est la matrice de gains SOF à concevoir sous les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 4.1** Le vecteur de consigne  $r(t)$  dans (4.2) est supposé nul ( $r(t)=0$ ).

**Hypothèse 4.2**  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont supposés des retards constants.

**Hypothèse 4.3** Le correcteur PI (4.2) est réalisable.

**Hypothèse 4.4** Le système LTI bouclé de dimension finie  $\dot{\tilde{z}} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}\tilde{C})\tilde{z}$  avec une réalisation

$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  est stabilisable via SOF.

Pour traiter le problème 1, une procédure de conception PI est proposée dans la Section 4.1.

### Sous-Problème 4.2 : Optimisation des performances du régulateur PI

L'objectif du sous-problème 2 est de concevoir un correcteur via Loop-Shaping décrit par :

$$K_{sh}(s) = V_1(s).K(s).V_2(s) \quad (4.6)$$

qui améliore la réponse du système bouclé décrit par :

$$G_{sh}(s) = V_1(s).G(s).V_2(s) \quad (4.7)$$

où  $V_1(s) \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  et  $V_2(s) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  sont des pré et post- compensateurs à choisir permettant de satisfaire, en boucle fermée, des spécifications de performances et de robustesse tels que la stabilisation des sorties vers les consignes désirées, le rejet de perturbation et la robustesse par rapport aux variations paramétriques.

Le point crucial de la procédure de conception est de trouver des matrices de pondération appropriées  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$ . On note que le "modèle" des matrices de pondération est déterminé par des spécifications de conception en boucle fermée. Une fois le modèle en boucle ouverte désiré est établi, le correcteur final  $K_{fin}(s)$  à appliquer à la matrice de transfert nominale  $G(s)$  est ainsi construit. Pour atteindre cet objectif, une procédure de conception Loop-Shaping est proposée dans la section 4.3.2.

## 4.3 Méthodologie proposée

### 4.3.1 Conception du correcteur PI stabilisant via ILMI

Dans ce qui suit, une transformation SOF du correcteur PI (4.1) sera détaillée. En utilisant les équations (3.26)-(3.28) données au chapitre précédent, le système (4.1) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 \bar{C}_1 \omega_1(t) + B_0 \bar{C}_2 \omega_2(t) + B_1 \bar{C}_3 \omega_3(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

Soit :

$$\tilde{z}^T = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1^T & \tilde{z}_2^T \end{bmatrix}$$

où :

$$\tilde{z}_1 = \begin{bmatrix} x(t) & \omega_1(t) & \omega_2(t) & \omega_3(t) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{4n}$$

$$z_2(t) = \int_0^t y(t) dt$$

et soit :

$$\tilde{y} = [\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2]^T = \tilde{C}\tilde{z}$$

où :

$$\tilde{y}_1 = y = Cx = [C \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\tilde{z}$$

$$\tilde{y}_2 = \int_0^t y(t)dt = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I]\tilde{z}$$

La représentation d'état du nouveau système augmenté commandé via un correcteur SOF est ainsi déduite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} \\ u = \tilde{F}\tilde{y} \end{cases} \quad (4.9)$$

où :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1\bar{C}_1 & B_0\bar{C}_2 & B_1\bar{C}_3 & 0 \\ \frac{1}{\tau_1}\bar{B}_1 & -\frac{1}{\tau_1}\bar{A}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_2}\bar{A}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_3}\bar{A}_3 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n' \times n'}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_2}\bar{B}_2 \\ \frac{1}{\tau_3}\bar{B}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n' \times m}$$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1^T \quad \tilde{C}_2^T]^T \in \mathfrak{R}^{p \times n'}$$

$$\tilde{C}_1 = [C \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathfrak{R}^{p \times n'}$$

$$\tilde{C}_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I_{p \times p}] \in \mathfrak{R}^{p \times n'}$$

En prenant en compte la représentation d'état (4.9) sous l'Hypothèse 4.1, la loi de commande (4.2) peut être réécrite comme suit :

$$u = -(F_1\tilde{y}_1 + F_2\tilde{y}_2) \quad (4.10)$$

D'autre part, à partir de (4.9) on a :

$$u = -(\tilde{F}_1\tilde{y}_1 + \tilde{F}_2\tilde{y}_2) \quad (4.11)$$

Ainsi la matrice  $\tilde{F} = \begin{bmatrix} -\tilde{F}_1 & -\tilde{F}_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times p'}$  est conçue tel que le système en boucle fermée (4.4)-(4.5) est asymptotiquement stable. En considérant l'analogie entre (4.10) et (4.11), les gains PI originaux peuvent être reconstruits comme suit :

$$[\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2] = [\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2] \quad (4.12)$$

**Théorème 1 [Belhaj & Boubaker, 2017] :**

Le système LTI MIMO multi-retards (4.1) est stabilisable via SOF si seulement si il existe une matrice constante  $\tilde{F} = \begin{bmatrix} -\tilde{F}_1 & -\tilde{F}_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{m \times p'}$  et une matrice symétrique définie positive  $X = X^T > 0$ ,  $X \in \mathcal{R}^{n' \times n'}$  satisfaisant l'inégalité matricielle suivante :

$$\tilde{A}^T X + X \tilde{A} - X \tilde{B} \tilde{B}^T X + (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \quad (4.13)$$

telles que :

$$\begin{aligned} F_1 &= \tilde{F}_1 \\ F_2 &= \tilde{F}_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Preuve.**

Suffisance. On note que :

$$\begin{aligned} &(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C})^T X + X(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \\ &\leq (\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C})^T X + X(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C}) + \tilde{C}^T \tilde{F}^T \tilde{F} \tilde{C} \\ &= \tilde{A}^T X + X \tilde{A} - X \tilde{B} \tilde{B}^T X + (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \end{aligned}$$

A partir de la théorie de Lyapunov, le système en boucle fermée  $\Sigma_c : \dot{\tilde{z}} = (\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C}) \tilde{z}$  est ainsi asymptotiquement stable.

Nécessité.

On suppose que  $\Sigma_c$  est asymptotiquement stable quelque soit  $\tilde{F}$ . Il existe  $X = X^T > 0$  telle que :

$$(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C})^T X + X(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C}) < 0$$

Il est facile de trouver qu'il existe un scalaire  $\rho > 0$  telle que :

$$(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C})^T X + X(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C}) + \frac{1}{\rho^2} \tilde{C}^T \tilde{F}^T \tilde{F} \tilde{C} < 0 ,$$

ou encore

$$\tilde{A}^T X + X \tilde{A} - \rho^2 X \tilde{B} \tilde{B}^T X + (\rho \tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\rho \tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \quad (4.15)$$

Evidemment, l'équation (4.15) est équivalente à :

$$\rho^2 \tilde{A}^T X + \rho^2 X \tilde{A} - \rho^4 X \tilde{B} \tilde{B}^T X + (\rho^2 \tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\rho^2 \tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \quad (4.16)$$

En substituant  $\rho^2 X$  avec  $X$  dans (4.16), on obtient l'inégalité (4.13). La condition (4.14) a été déjà prouvée dans (4.12).

A cause du terme  $-X\tilde{B}\tilde{B}^T X$ , l'équation (4.13) ne peut être simplifiée en LMI. Similairement au problème de commande SOF décrit dans [Zheng *et al.*, 2002], [Lin *et al.*, 2004] et [He & Wang, 2006], un Algorithme LMI itératif peut être adressé pour résoudre la BMI (4.13). Pour traiter le terme  $-X\tilde{B}\tilde{B}^T X$ , une variable de conception additionnelle  $Y$  est introduite. Puisque  $(Y - X)\tilde{B}\tilde{B}^T(Y - X) \geq 0$  pour n'importe quel  $Y > 0$  et  $X$  de même dimension, on obtient :

$$Y^T \tilde{B} \tilde{B}^T X + X^T \tilde{B} \tilde{B}^T Y - Y \tilde{B} \tilde{B}^T Y \leq X \tilde{B} \tilde{B}^T X \quad (4.17)$$

En combinant les équations (4.13) et (4.17), une condition suffisante pour l'existence d'une matrice de gain SOF  $\tilde{F}$  est obtenue telle que :

$$\tilde{A}^T X + X \tilde{A} - Y \tilde{B} \tilde{B}^T X - X \tilde{B} \tilde{B}^T Y + Y \tilde{B} \tilde{B}^T Y + (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) < 0 \quad (4.18)$$

En considérant une stabilisation de type  $\alpha/2$  via le concept SOF [Cao *et al.*, 1998], si l'inégalité matricielle (4.18) admet une solution ( $X > 0$ ,  $\tilde{F}$ ), alors il existe un nombre réel  $\alpha \geq 0$  et une matrice constante  $Y > 0$  telle que :

$$\tilde{A}^T X + X \tilde{A} - Y \tilde{B} \tilde{B}^T X - X \tilde{B} \tilde{B}^T Y + Y \tilde{B} \tilde{B}^T Y + (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) - \alpha X < 0 \quad (4.19)$$

En se basant sur l'idée que toutes les valeurs propres de la matrice  $(\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{F} \tilde{C})$  sont déplacées progressivement vers le demi-plan gauche à travers la réduction de  $\alpha$ , on peut conclure sur la faisabilité de (4.19) [Cao *et al.*, 1998]. En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (4.19) est équivalente à l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T X + X \tilde{A} - Y \tilde{B} \tilde{B}^T X - X \tilde{B} \tilde{B}^T Y + Y \tilde{B} \tilde{B}^T Y - \alpha X & (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C})^T \\ (\tilde{B}^T X + \tilde{F} \tilde{C}) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

L'inégalité précédente (4.20) se ramène à une approche itérative à résoudre avec  $\tilde{F}$  et  $X > 0$ , c'est à dire, si la matrice  $Y$  est fixée dans (4.20), alors elle est réduite à un problème LMI dont les inconnus sont  $\alpha$ ,  $\tilde{F}$  et  $X$ . Dans la suite, un Algorithme ILMI constructif est proposé.

#### Algorithme 4.1

**Etape 1 :** Définir les paramètres de la méthode de collocation orthogonale  $N$ ,  $p$  et  $q$ .

**Etape 2 :** Transformer le système de dimension infinie (4.1) à un système de dimension finie (3.30) en calculant les matrices  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ .

**Etape 3 :** Concevoir une transformation SOF pour obtenir une réalisation d'espace d'état  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ . Si oui, aller à l'Etape 4.

**Etape 4 :** Poser  $i=1$  et choisir  $Y_1 = I_n + \varepsilon_1$  où  $\varepsilon_1 \geq 0$ .

**Etape 5 :** Résoudre le problème d'optimisation suivant pour  $X_i$ ,  $\tilde{F}$  et  $\alpha_i$  :

OP1 : Minimiser  $\alpha_i$  sous les contraintes LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} \sum_{li} & (\tilde{B}^T X_i + \tilde{F}\tilde{C})^T \\ (\tilde{B}^T X_i + \tilde{F}\tilde{C}) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

où :  $\sum_{li} = \tilde{A}^T X_i + X_i \tilde{A} - Y_1 \tilde{B} \tilde{B}^T X_i - X_i \tilde{B} \tilde{B}^T Y_1 + Y_1 \tilde{B} \tilde{B}^T Y_1 - \alpha_i X_i < 0$ . On dénote par  $\alpha_i^*$  la valeur minimale de  $\alpha_i$ .

**Etape 6 :** Si  $\alpha_i^* \leq 0$ , les gains matriciels sont  $F_1 = \tilde{F}_1$ ,  $F_2 = \tilde{F}_2$ . Fin. Sinon, aller à l'Etape 7.

**Etape 7 :** Résoudre le problème d'optimisation suivant pour  $X_i$  et  $\tilde{F}$ .

OP2 : Minimiser  $\text{tr}(X_i)$  sujet aux contraintes LMI (4.21) avec  $\alpha_i^*$ , où  $\text{tr}$  est la trace de la matrice carrée. On dénote par  $X_i^*$  le  $X_i$  optimal. Les gains matriciels par rétroaction sont  $F_1 = \tilde{F}_1$ ,  $F_2 = \tilde{F}_2$ .

**Etape 8 :** Si  $\|Y_1 \tilde{B} - X_i^* \tilde{B}\| \leq \delta$ , où  $\delta$  est une tolérance prescrite, aller à l'Etape 9; sinon, poser  $i := i+1$ ,  $Y_i = X_i^*$  et aller à l'Etape 5.

**Etape 9 :** On ne peut pas décider par cet Algorithme si le problème SOF est solvable. Fin.

**Remarque 4.1 :**

A cause des mauvaises performances obtenues par une sélection des données initiales dans les Algorithmes ILMI telle que proposée dans [Zheng *et al.*, 2002] [Lin & Wang, 2004], on opte dans ce travail pour la sélection de  $Y_1 = I + \varepsilon_1$  où  $\varepsilon_1 \geq 0$  ce qui permettra d'avoir toujours une solution faisable.

**4.3.2 Optimisation des performances des régulateurs par minimisation des matrices de sensibilité**

Dans cette section, une approche modifiée de la technique LoopShaping [McFarlane & Glover, 1990] sera introduite pour concevoir le correcteur PI décrit par le sous-problème 2. La Figure 4.1 présente le schéma bloc du système commandé où les vecteurs  $r$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $u_G$ ,  $e$ ,  $d$  et  $d_i$  représentent respectivement la consigne, la sortie, le signal de commande, le signal de commande du processus, le signal d'erreur, une perturbation à la sortie et une perturbation de la commande.

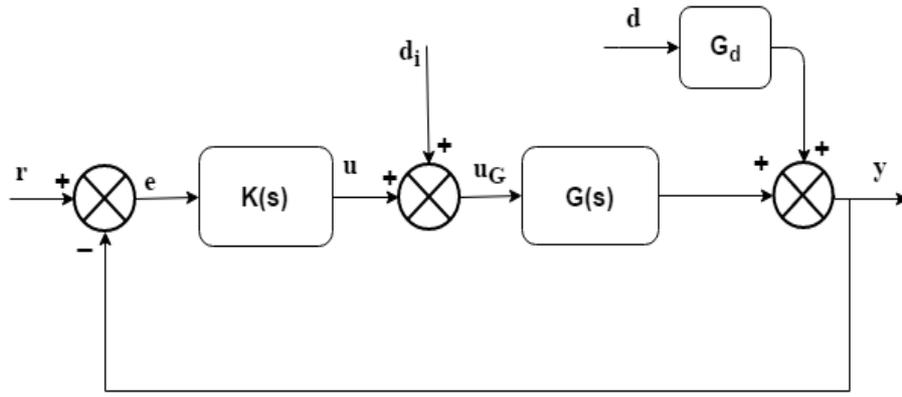


Figure 4.1 – Schéma-bloc du système "nominal"

On définit respectivement la matrice de transfert de la boucle d'entrée,  $L_i$ , la matrice de transfert de la boucle de sortie,  $L_o$ , par :

$$L_i = KG \quad , \quad L_o = GK$$

La matrice de sensibilité d'entrée est définie par la matrice de transfert entre  $d_i$  à  $u_G$  telle que :

$$S_i = (I + L_i)^{-1} \quad , \quad u_G = S_i d_i$$

et la matrice de sensibilité de sortie est définie comme la matrice de transfert entre  $d$  à  $y$  telle que :

$$S_o = (I + L_o)^{-1} \quad , \quad y = S_o G_d d$$

Les matrices de sensibilité complémentaires d'entrée et de sortie sont définies par :

$$T_i = I - S_i = L_i (I + L_i)^{-1}$$

$$T_o = I - S_o = L_o (I + L_o)^{-1}$$

Si le système bouclé est stable, il satisfait alors les équations suivantes :

$$y = T_o r + S_o G_d d_i + S_o G_d d \tag{4.22}$$

$$u = K S_o r - K S_o G_d d - T_i d_i \tag{4.23}$$

$$e = S_o (r - G_d d) - S_o G_d d_i \tag{4.24}$$

$$u_G = K S_o r - K S_o G_d d + S_i d_i \tag{4.25}$$

On peut observer à partir de l'équation (4.22) que l'influence d'une perturbation  $d$  sur la sortie du système  $y$  peut être mesurée par rapport à la taille de la sensibilité  $S_o$ . Ainsi, atténuer les perturbations en sortie revient à minimiser la matrice de sensibilité de sortie  $S_o$ , comme  $G_d$  est fixé. Similairement, à partir de l'équation (4.22), un bon suivi de consigne est établi via la minimisation de la matrice de sensibilité  $T_o$ , c'est-à-dire avoir  $I - S_o \approx I$ , soit une minimisation de la matrice de sensibilité de sortie  $S_o$ . La notion de "minimisation" pour une matrice de transfert dans une certaine bande de fréquence peut être rendue explicite en utilisant les valeurs singulières dépendant de la fréquence. Particulièrement ceci peut être assuré en minimisant  $\bar{\sigma}(S_o)$  où  $\bar{\sigma}$  est la valeur singulière maximale.

Similairement à la conception du Loop-Shaping [McFarlane & Glover, 1990] [Zhou *et al.*, 1996] conventionnelle, imposer un gabarit pour le système nominal en boucle ouverte correspond à imposer un gabarit pour le gain de boucle  $GK$  en utilisant les pré et post compensateurs  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$ . Le nouveau système de commande via Loop-Shaping est illustré par la Figure 4.2.

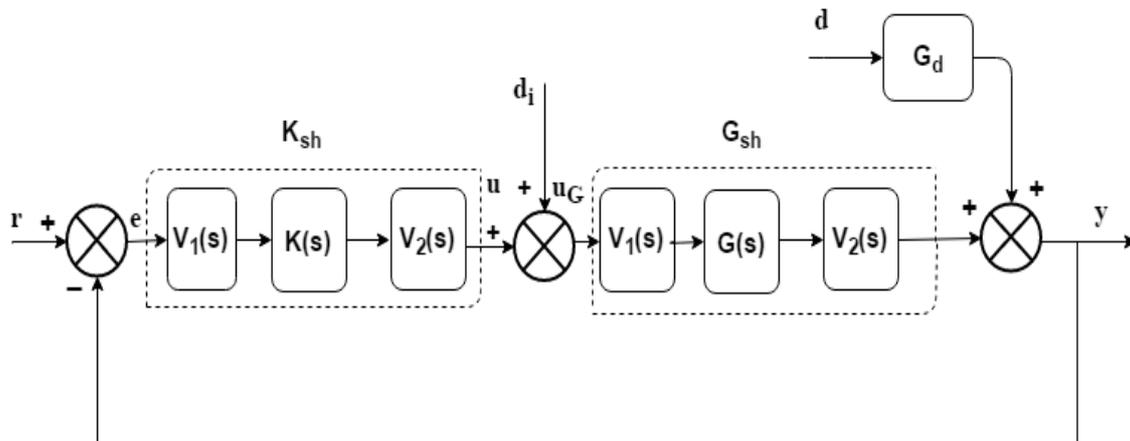


Figure 4.2 – Schéma-bloc du système via Loop-Shaping

Il est clair qu'un système asservi bien conçu doit satisfaire, au moins, les trois exigences suivantes : 1) Stabilité, 2) Suivi de consigne et 3) Atténuation des perturbations de sortie. On définit la matrice de transfert de la boucle d'entrée,  $L_{ish}$ , et la matrice de transfert de la boucle de sortie,  $L_{osh}$ , comme suit :

$$L_{ish} = K_{sh} G_{sh} \quad , \quad L_{osh} = G_{sh} K_{sh}$$

La matrice de sensibilité d'entrée est définie par la matrice de transfert entre  $d_i$  et  $u_G$  telle que :

$$S_{ish} = (I + L_{ish})^{-1}, \quad u_G = S_{ish} d_i$$

et la matrice de sensibilité de sortie est définie par la matrice de transfert entre  $d$  et  $y$  telle que :

$$S_{osh} = (I + L_{osh})^{-1}, \quad y = S_{osh} G_d d$$

Les matrices de sensibilité complémentaires d'entrée et de sortie sont définies comme suit :

$$T_{ish} = I - S_{ish} = L_{ish} (I + L_{ish})^{-1}$$

$$T_{osh} = I - S_{osh} = L_{osh} (I + L_{osh})^{-1}$$

Si le système bouclé est stable alors il doit satisfaire les équations suivantes :

$$y = T_{osh} r + S_{osh} G_{sh} d_i + S_{osh} G_d d \quad (4.26)$$

$$u = K_{sh} S_{osh} r - K_{sh} S_{osh} G_d d - T_{ish} d_i \quad (4.27)$$

$$e = S_{osh} (r - G_d d) - S_{osh} G_{sh} d_i \quad (4.28)$$

$$u_G = K_{sh} S_{osh} r - K_{sh} S_{osh} G_d d + S_{ish} d_i \quad (4.29)$$

Comme  $G_d$  est fixé, à partir de (4.26) et (4.28), un suivi de consigne et une atténuation de perturbation de sortie revient à minimiser la valeur singulière maximale de la matrice de sensibilité de sortie du système via Loop-Shaping  $\bar{\sigma}(S_{osh})$ , ce qui revient à choisir sa norme infinie la plus faible possible telle que :

$$\bar{\sigma}(S_{osh}) = \bar{\sigma}((I + G_{sh} K_{sh})^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + G_{sh} K_{sh})} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G_{sh} K_{sh})} \quad (4.30)$$

Notons que l'amélioration des performances du système bouclé via Loop-Shaping par rapport au système nominal exige que  $\bar{\sigma}(S_{osh})$  soit plus faible que  $\bar{\sigma}(S_o)$ , particulièrement dans une bande de basse fréquence où la perturbation  $d$  est usuellement significative. Comme  $G(s)$  et  $K(s)$  sont fixées par le sous-problème 1,  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  jouent un rôle clé dans la procédure de conception Loop-Shaping. Ainsi, la synthèse du correcteur via Loop-Shaping  $K_{sh}$  est réduite à choisir des matrices appropriées  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  afin de garantir des performances du système bouclé, sous les conditions :

$$\min \bar{\sigma}(S_{osh})$$

telle que

$$\bar{\sigma}(S_{osh}) < \bar{\sigma}(S_o) \quad (4.31)$$

La Figure 4.3 synthétise la procédure de conception Loop Shaping proposée. Pour résoudre le sous-problème 2, nous proposons l'Algorithme 4.2 suivant :

**Algorithme 4.2**

**Etape 1 :** On considère le correcteur PI conçu via l'Algorithme 4.1. On assume que les performances du système bouclé ne sont pas celles souhaitées et on définit des objectifs de commande assurant un rejet de perturbation et une minimisation de l'erreur statique.

**Etape 2 :** Choisir un pré-compensateur  $V_1(s)$  et un post-compensateur  $V_2(s)$  telles que les valeurs singulières du système nominal  $G(s)$  sont choisies selon un gabarit qui permet d'obtenir un modèle en boucle-ouverte désiré (gain fort en basse fréquence et gain faible en haute fréquence).

**Etape 3 :** Pour le système décrit par  $G_{sh}(s)$ , si les objectifs de commande et la contrainte (4.31) sont satisfaites alors aller à l'Etape 4. Sinon ajuster  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  et aller à l'Etape 2.

**Etape 4 :** Synthétiser un correcteur final  $K_{fin}(s)$  pour le système nominal  $G(s)$  par :

$$K_{fin}(s) = K_{sh}(s)V_1(s) \quad (4.32)$$

où  $K_{sh}(s)$  est donné dans (4.6). Pour des objectifs de réglage, on choisit  $V_2(s) = I$  alors :

$$K_{fin}(s) = V_1(s)K(s)V_1(s) \quad (4.33)$$

**Etape 5 :** Vérifier que les réponses désirées du système bouclé ont été satisfaites. Si oui Fin. Sinon ajuster  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  et aller à l'Etape 2.

**Remarque 4.2 :**

Si  $G(s)$  est une matrice non carrée tel que  $p > m$  ou  $p < m$ , alors il est clair que l'Algorithme 4.2 proposé n'est pas valable. Des modifications mineures sont requises pour traiter ce problème. En effet, la compatibilité entre les dimensions de  $G_{sh}(s)$  et du correcteur  $K_{sh}(s)$  exigent de choisir  $V_1(s)$ ,  $V_2(s)$ ,  $G(s)$  et  $K(s)$  de même dimension égale à  $(\max(p,m)) \times (\max(p,m))$ . Ainsi, les matrices  $G_{sh}(s)$  et  $K_{sh}(s)$  sont choisies de dimension  $(\max(p,m)) \times (\max(p,m))$  et la procédure de conception Loop-Shaping reste valable.

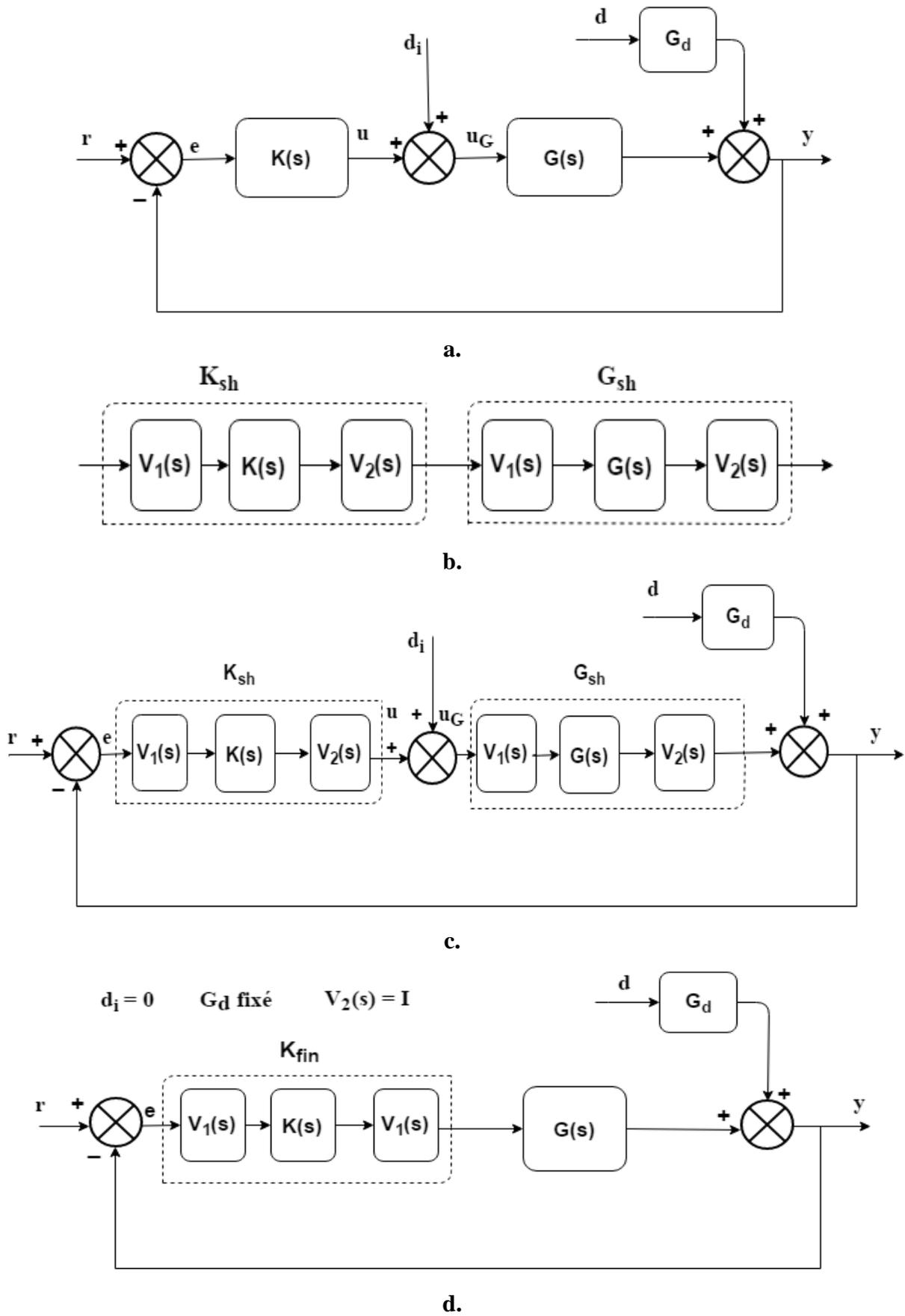


Figure 4.3 – Procédure de conception Loop-Shaping

**Remarque 4.3 :**

On note que le correcteur final PI conçu via l'Algorithme 4.2 est relié au correcteur PI conçu par l'Algorithme 4.1. En fait,  $K_{fin}(s)$ , donné par la relation (4.33), est conçu d'une part, en utilisant un correcteur PI MIMO complet donné par la relation (4.3) calculé via l'Algorithme 4.1, et d'autre part, en utilisant les fonctions de pondération  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  correctement conçues suivant l'Algorithme 4.2.

**Remarque 4.4 :**

Il doit être noté qu'il existe de sérieuses limitations lorsque la procédure de conception Loop-Shaping conventionnelle est utilisée pour les systèmes MIMO comme discuté dans [Zhou *et al.*, 1996]. Parmi ces limitations, il est difficile de trouver un correcteur stabilisant  $K_{sh}$  si  $G_{sh}$  est un système à non-minimum de phase ou un système instable. Cependant, notre méthodologie réussit à surmonter ces limitations grâce à la première étape de la procédure de conception qui garantit une stabilité interne du système bouclé.

**4.4 Application**

Dans cette partie, les résultats de simulation seront appliqués sur trois exemples types de systèmes à retards multiples : La colonne de distillation (système instable), le réacteur ISP (système stable) et le processus à 4 réservoirs (système à non-minimum de phase). Par ailleurs, on illustrera la supériorité de la méthodologie proposée par rapport à des méthodes existantes pour les 3 cas suivants : Changement de consigne, rejet de perturbation et incertitudes paramétriques. L'étude comparative sera établie avec les approches suivantes :

- Le correcteur PI conçu et proposé via les Algorithmes 4.1 et 4.2 combinés.
- Le correcteur PI conçu via l'Algorithme 4.1.
- Le correcteur PID proposé par [Zheng *et al.*, 2002]
- Le correcteur IMC-PI de l'approche étendue [Vu & Lee, 2010b]
- Le correcteur IMC-PID via l'approche conventionnelle [Economou & Morari, 1986]

Les boîtes à outils Sedumi et Yalmip [Lofberg, 2004] sous Matlab sont utilisées pour résoudre l'Algorithme 4.1. Afin d'évaluer les performances du système bouclé, les critères de l'Erreur Intégrale Absolue (IAE) et la Variation Totale (TV) présentés au premier chapitre sont considérés. Ils sont définis respectivement par [Vu & Lee, 2010b] :

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt \quad (4.34)$$

$$\text{TV} = \sum_{k=1}^T |u(k+1) - u(k)| \quad (4.35)$$

où  $T$  est un temps fini choisi comme la valeur statique de l'approche intégrale et  $e(t)$  est définie comme l'erreur totale entre les consignes et les sorties.

Pour les différents cas de simulation, des scénarios de changement de consignes et de perturbations en échelon unitaire sont considérés. Par ailleurs, la robustesse du correcteur est évaluée en considérant une incertitude de  $\pm 10\%$  dans les paramètres importants du système, particulièrement, les gains statiques et les retards.

Pour la méthode de collocation orthogonale, les paramètres optimaux choisis sont  $N=3$  et  $p = q = -1/2$ . Les différents tracés des valeurs singulières sont donnés en fonction de  $1/\bar{\sigma}(S_o)$  et  $1/\bar{\sigma}(S_{osh})$  en notant que  $\max 1/\bar{\sigma}(S_{osh})$  est égale à  $\min \bar{\sigma}(S_{osh})$ .

**Remarque 4.5 :**

A cause des mauvaises performances obtenues via le correcteur PID conçu via l'approche [Zheng *et al.*, 2002], un filtre additif est ajouté à l'action dérivée afin d'atténuer les perturbations. Ainsi, la matrice de transfert considérée du correcteur PID avec filtre,

$K_{\text{PID},f}(s) = \left[ K_{\text{PID},f,ij} \right] \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ , est donnée par :

$$K_{\text{PID},f,ij}(s) = F_{1,\text{PID},ij} + \frac{F_{2,\text{PID},ij}}{s} + F_{3,\text{PID},ij} \times \frac{s}{\tau_D s + 1}, \quad \tau_D > 0 \quad (4.36)$$

où

$K_{\text{PID},f,ij}$  est l'élément  $ij$  de la matrice de transfert  $K_{\text{PID},f}(s)$ ,

$F_{1,\text{PID},ij}$  est le gain proportionnel de l'élément  $ij$  de  $K_{\text{PID},f}(s)$ ,

$F_{2,\text{PID},ij}$  est le gain intégral de l'élément  $ij$  de  $K_{\text{PID},f}(s)$ ,

$F_{3,\text{PID},ij}$  est le gain intégral de l'élément  $ij$  de  $K_{\text{PID},f}(s)$ ,

Il doit être noté que le correcteur PID avec filtre (4.36) est appliqué au système stable et au système à non-minimum de phase. A cause des mauvais résultats de simulation obtenus pour le système instable avec ce correcteur, les résultats de simulation associés à ce cas de figure n'ont pas été présentés.

**Remarque 4.6 :**

Les équations (4.26) et (4.29) montrent l'influence des perturbation  $d$  et  $d_i$  sur le vecteur de sortie  $y$  et le vecteur du signal de commande  $u_G$ . Cela peut être clairement réduit en minimisant respectivement la matrice de sensibilité de sortie  $S_{osh}$  et la matrice de sensibilité d'entrée  $S_{ish}$ . En d'autres termes, une bonne atténuation des perturbations en entrée est dépendante d'une décroissance rapide des matrices de sensibilité  $1/S_{osh}$  et  $1/S_{ish}$  en basses fréquences supérieure ou égale à 20 dB/décade. Ce dernier point sera discuté pour chacun des trois exemples considérés.

**4.4.1 Processus colonne de distillation**

Soit l'exemple typique de la colonne de distillation décrite par la matrice de transfert [Mete *et al.*, 2006], [Friedland, 1986], [Gundes *et al.*, 2007]:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{3.0400e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{-278.2000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \\ \frac{0.0520e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{206.6000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

La représentation d'état (4.1) associée est donnée par [Annexe F] :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3.0400 & -1.5455 & 1.9319 & 0.3861 \\ 0.0520 & 1.1477 & -1.4347 & 0.2869 \end{pmatrix}$$

pour  $\tau_2 = 0.5h$  et  $\tau_3 = 0.6h$ .

La résolution de l'Algorithme 4.1 avec  $\epsilon_1 = 0.0001$  et  $\delta = 0.1000$  pour  $\alpha = 1.5000$ , les gains optimaux du régulateur PI (4.3) sont obtenus comme suit :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1945 & 0.2953 \\ 0.1946 & 0.2955 \end{bmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{bmatrix} 0.0432 & 0.0006 \\ 0.0429 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice de transfert du correcteur PI est donnée par :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1945s + 0.0432}{s} & \frac{0.2953s + 0.0006}{s} \\ \frac{0.1946s + 0.0429}{s} & \frac{0.2955s + 0.0006}{s} \end{bmatrix}$$

La Figure 4.4 prouve que la procédure de conception du correcteur PI satisfait les

spécifications désirées pour un pré-compensateur  $V_1(s)$  et un post-compensateur  $V_2(s)$  choisis comme suit :

$$V_1(s) = \begin{bmatrix} 1.8000 \frac{s+1}{s+1.0400} & 0 \\ 0 & 2 \frac{s+1}{s+1.0200} \end{bmatrix} \text{ et } V_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Afin d'augmenter le gain en basse fréquence et minimiser l'erreur statique,  $V_1(s)$  est choisi comme un correcteur de forme approchée PI.

Une atténuation de plus de 20 dB/décade pour des pulsations variant entre 0.01 rad/s et 1 rad/s est observée avec des valeurs de 31 dB/décade pour  $1/S_{osh}$  et 33.5 dB/décade pour  $1/S_{ish}$  démontrant une bonne atténuation des perturbations pour ce processus selon la Figure 4.5.

Les indices de performance résultants pour le système nominal et perturbé sont résumés par le Tableau 4.1 et Tableau 4.2. Il est clair que le correcteur proposé donne de meilleures performances que celui conçu en appliquant uniquement l'Algorithme 4.1 (voir Figures 4.6 et 4.7). A partir des Tableaux 4.1 et 4.2, il est clair que le correcteur conçu par la méthode proposée donne des performances supérieures en termes du critère IAE pour les scénarios de changement de consigne, changement de perturbation et incertitudes paramétriques. Des valeurs acceptables d'indice TV sont obtenues par la méthode proposée pour ce processus.

Tableau 4.1 – Indices de performance du correcteur conçu pour la colonne de distillation

Méthode de réglage	Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	175.16	19.82	453.14	19.77
Correcteur PI	494.05	1.810	1366.10	6.69

Tableau 4.2 – Analyse robuste sous  $\pm 10\%$  d'incertitudes paramétriques

Méthode de réglage	Colonne de distillation (+10%)				Colonne de distillation (-10%)			
	Consigne		Perturbation		Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	166.17	60.42	453.14	19.77	189.34	11.97	371.23	15.83
Correcteur PI	457.45	1.82	1366.10	6.69	537.84	1.80	1118	5.18

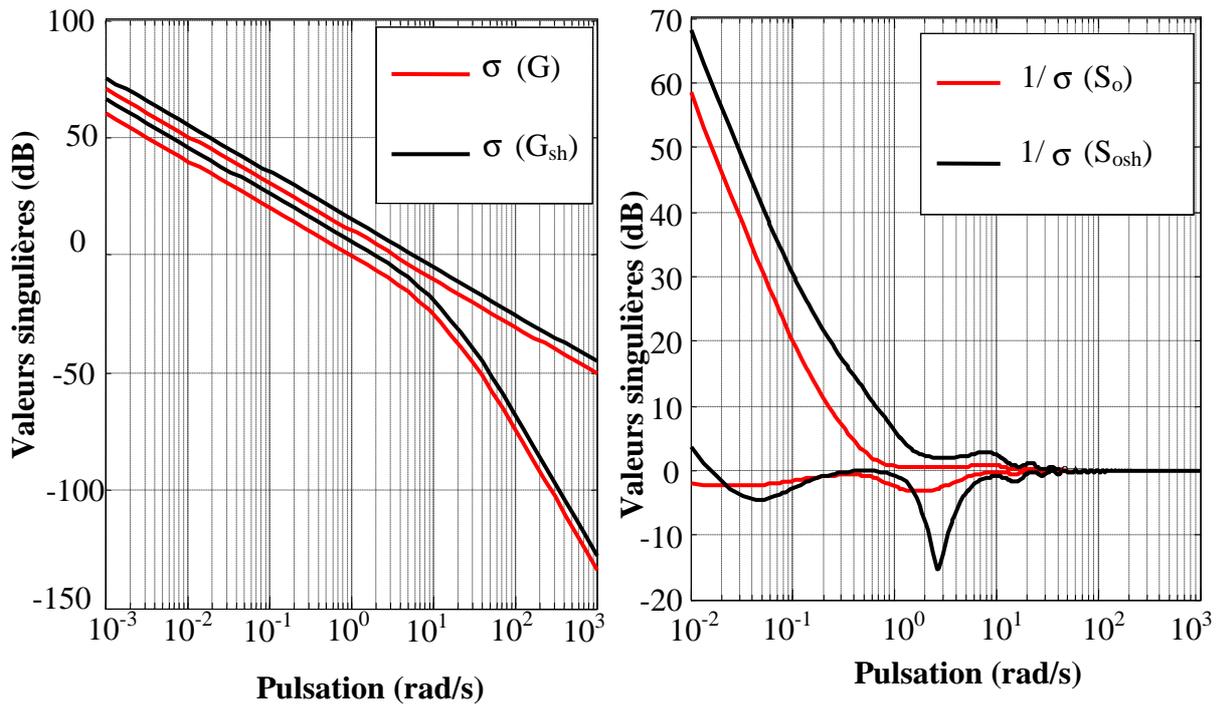


Figure 4.4 – Valeurs singulières de  $G(s)$ ,  $G_{sh}$ ,  $1/\sigma(S_o)$ ,  $1/\sigma(S_{osh})$  pour la colonne de distillation

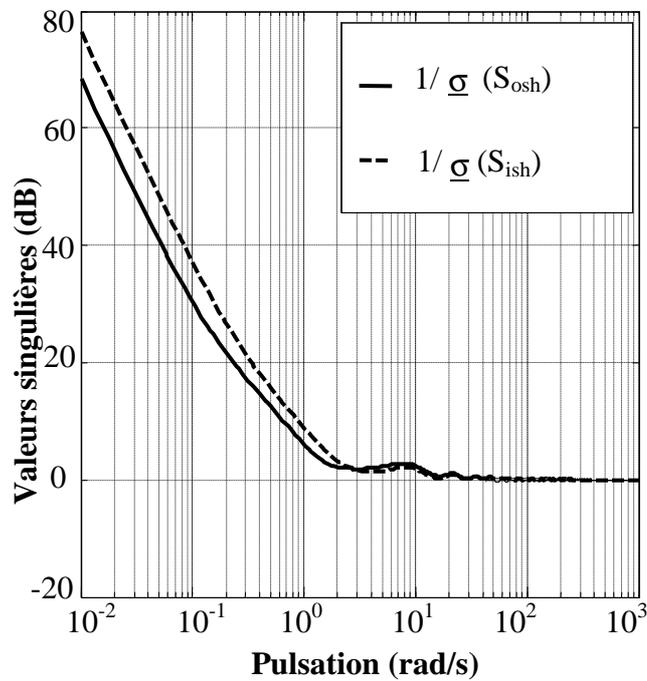


Figure 4.5 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle via Loop-Shaping pour la colonne de distillation

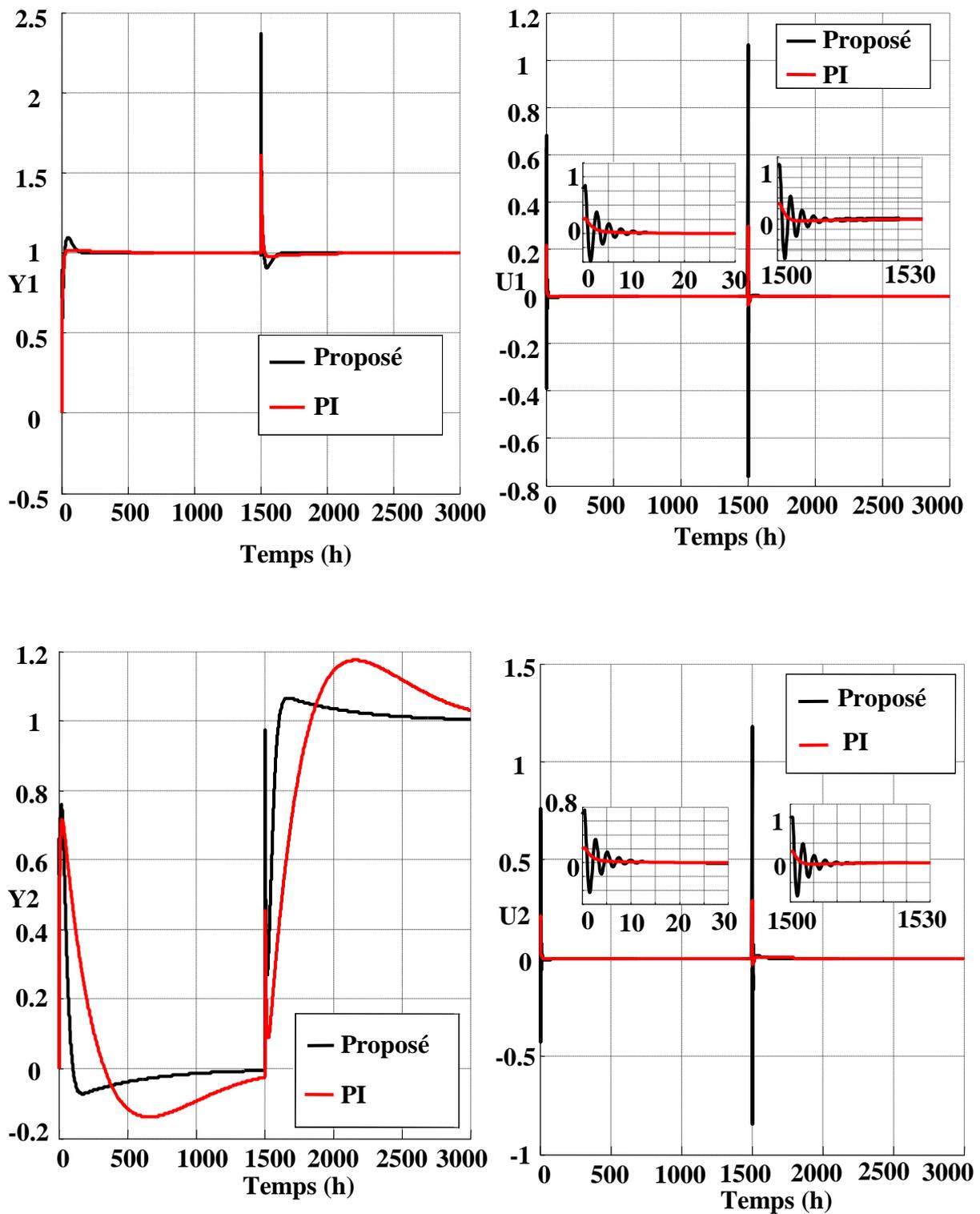


Figure 4.6 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour la colonne de distillation

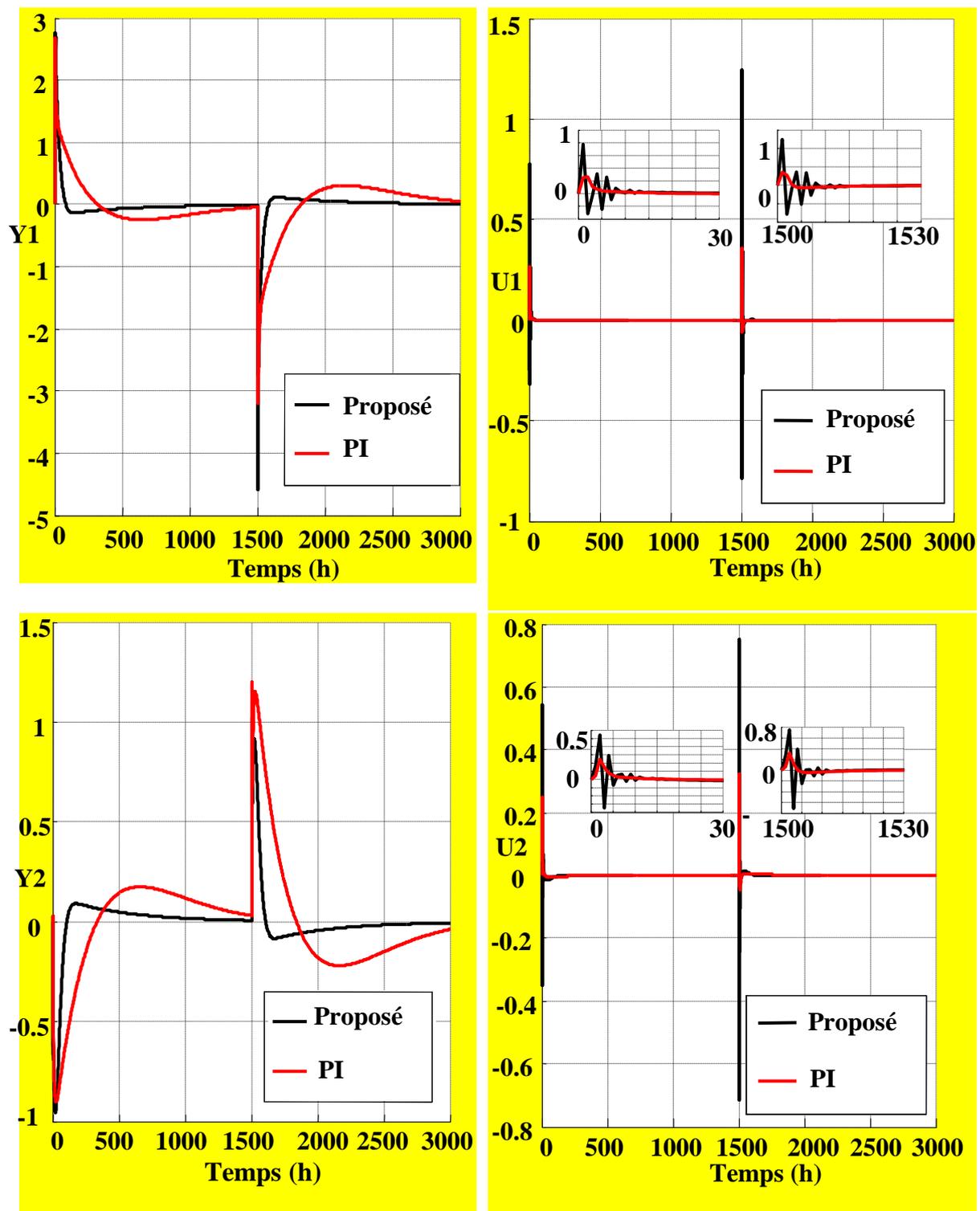


Figure 4.7 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations pour la colonne de distillation

#### 4.4.2 Réacteur ISP

On considère le réacteur ISP décrit par sa matrice de transfert donnée par [Chien *et al.*, 1999]:

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.8900e^{-\tau_2 s}}{4.5720s + 1} & \frac{-11.6400e^{-\tau_3 s}}{1.8070s + 1} \\ \frac{4.6890e^{-\tau_2 s}}{2.1740s + 1} & \frac{5.8000e^{-\tau_3 s}}{1.8010s + 1} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Sa réalisation minimale via la méthode de Gilbert donne le modèle d'état (4.1) [Annexe E] :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5534 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5552 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 5.0660 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.1569 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6.4416 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.2204 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour  $\tau_2 = 0.2h$  et  $\tau_3 = 0.4h$ .

L'approche IMC-PID conventionnelle proposée par Economou & Morari [Economou & Morari, 1986] présentée au premier chapitre sera à présent testée sur cet exemple.

Pour le réacteur ISP, la matrice de transfert (4.38) peut être réécrite comme suit :

$$G(s) = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22.8900e^{-\tau_2 s}}{4.5720s + 1} & \frac{-11.6400e^{-\tau_3 s}}{1.8070s + 1} \\ \frac{4.6890e^{-\tau_2 s}}{2.1740s + 1} & \frac{5.8000e^{-\tau_3 s}}{1.8010s + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}e^{-\theta_{11}} & g_{12}e^{-\theta_{12}} \\ g_{21}e^{-\theta_{21}} & g_{22}e^{-\theta_{22}} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Le Tableau 4.3 présente les mesures d'interactions IMC pour chaque paire d'entrée/sortie. La Figure 4.8 présente les mesures d'interactions IMC respectivement pour les paires originales  $u_1 / y_1$  et  $u_2 / y_2$  et les paires inverses et prouve ainsi l'échec de cette approche.

Tableau 4.3 – Mesures d'interactions pour le réacteur ISP : Approche conventionnelle IMC-PID

Mesure d'interaction IMC	$R_i$	$C_i$
Paire		
$(u_1, y_1) = (1,1)$	$R_i(i\omega) = \frac{ g_{12} }{ g_{11}  +  g_{12} }$	$C_i(i\omega) = \frac{ g_{21} }{ g_{11}  +  g_{21} }$
$(u_2, y_2) = (2,2)$	$R_i(i\omega) = \frac{ g_{21} }{ g_{21}  +  g_{22} }$	$C_i(i\omega) = \frac{ g_{12} }{ g_{12}  +  g_{22} }$
$(u_2, y_1) = (1,2)$	$R_i(i\omega) = \frac{ g_{11} }{ g_{11}  +  g_{12} }$	$C_i(i\omega) = \frac{ g_{22} }{ g_{12}  +  g_{22} }$
$(u_1, y_2) = (2,1)$	$R_i(i\omega) = \frac{ g_{22} }{ g_{21}  +  g_{22} }$	$C_i(i\omega) = \frac{ g_{11} }{ g_{11}  +  g_{21} }$

On applique maintenant l'approche IMC PI proposée par [Vu & Lee, 2010b] et présentée au premier chapitre pour laquelle les différents paramètres sont déduits comme suit :

$$K_{11} = 22.8900, \quad K_{12} = -11.6400, \quad K_{21} = 4.6890, \quad K_{22} = 5.8000, \quad T_{11} = 4.5720, \\ T_{12} = 1.8070, \quad T_{21} = 2.1740, \quad T_{22} = 1.8010, \quad \theta_{11} = 0.2000, \quad \theta_{12} = 0.4000, \quad \theta_{21} = 0.2000, \\ \theta_{22} = 0.4000, \quad \lambda_1 = 0.0900, \quad \lambda_2 = 0.6900, \quad K_{ei} = -0.4111, \quad T_{ei} = -2.1800.$$

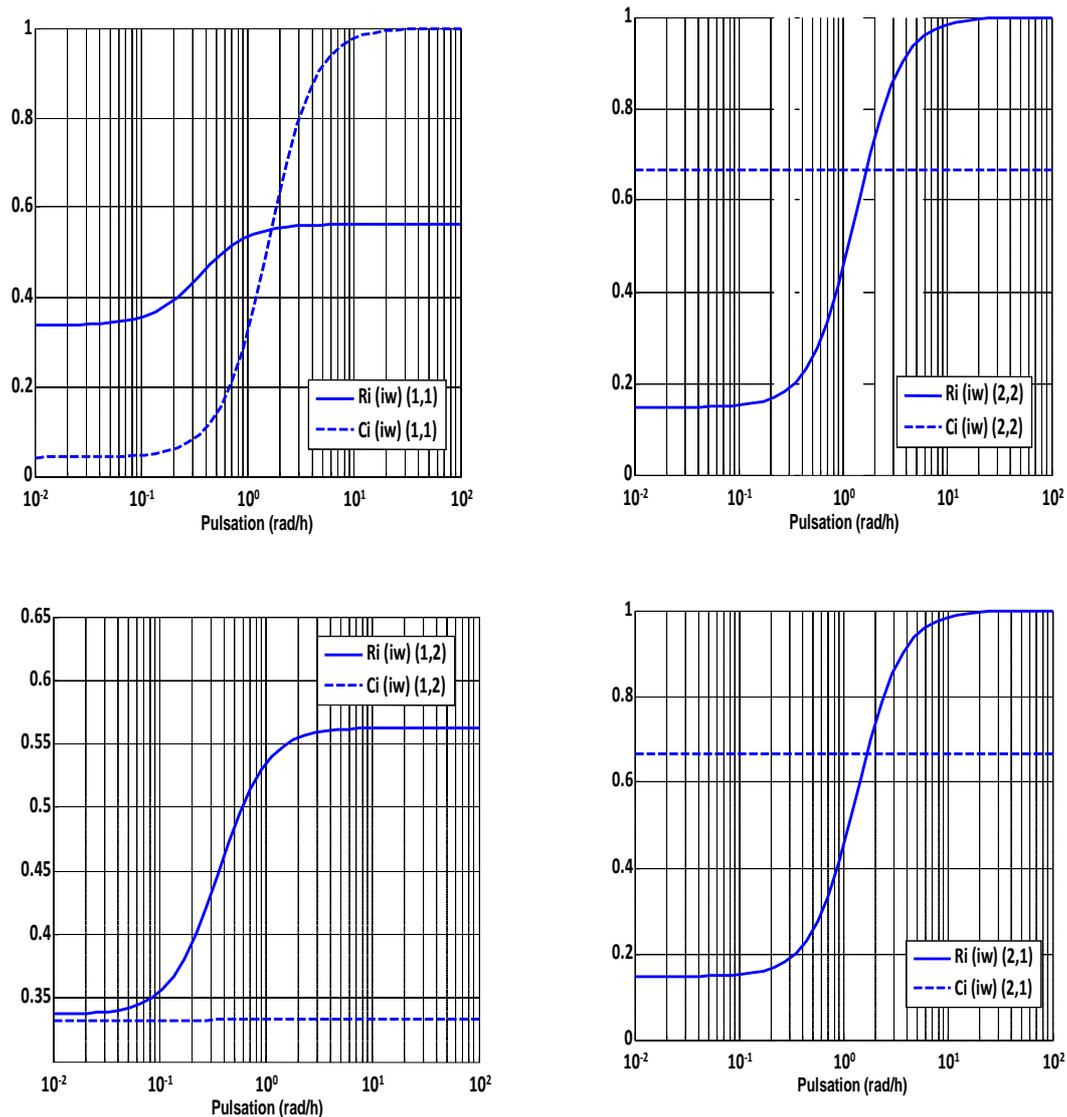


Figure 4.8 – Mesures d'interactions IMC pour le réacteur ISP : Echec de l'approche conventionnelle IMC-PID

Le gain  $\Lambda_{ii}(0) = 0.7087 < 1$ , ce qui prouve que le gain du système en boucle fermée est supérieur au gain en boucle ouverte. Le réacteur ISP n'exhibe pas de dominance diagonale en boucle ouverte. Les paramètres du correcteur PI sont donnés par le Tableau 4.4.

Tableau 4.4 – Paramètres du correcteur PI multi-boucles pour le réacteur ISP : Approche IMC-PI [Vu & Lee, 2010b]

Boucle	$K_{ci}$	$K_{fi}$
1	0.4211	0.1068
2	0.1320	0.1121

Pour  $\tau_2 = 0.2h$  et  $\tau_3 = 0.4h$ , le modèle réduit (4.4) est obtenu via la méthode de collocation orthogonale. La résolution de l'Algorithme 4.1 en utilisant les paramètres  $\varepsilon_1 = 0.0020$  et  $\delta = 0.1000$  donnent  $\alpha = 0.7549$ . Les gains PI MIMO sont ainsi déduits tels que :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.2059 & 0.3061 \\ 0.2062 & 0.3060 \end{bmatrix} \text{ et } F_1 = \begin{bmatrix} 0.0302 & 0.0332 \\ 0.0292 & 0.0335 \end{bmatrix}$$

La matrice de transfert du correcteur PI MIMO est ainsi donnée par :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.2059s + 0.0302}{s} & \frac{0.3061s + 0.0332}{s} \\ \frac{0.2062s + 0.0292}{s} & \frac{0.3060s + 0.0335}{s} \end{bmatrix}$$

L'implémentation de l'Algorithme de l'approche [Zheng *et al.*, 2002] fournit les gains PID MIMO suivants :

$$F_{1,PID} = \begin{bmatrix} 0.0187 & 0.2988 \\ 0.0192 & 0.2989 \end{bmatrix}, F_{2,PID} = \begin{bmatrix} -0.0132 & 0.0812 \\ -0.0135 & 0.0812 \end{bmatrix} \text{ et } F_{3,PID} = \begin{bmatrix} 0.0151 & 0.0661 \\ 0.0151 & 0.0660 \end{bmatrix}$$

La Figure 4.9 présente les tracés des valeurs singulières du système nominal  $G$ , celui du système modelé via Loop-Shaping  $G_{sh}(s)$ , des performances du système nominal  $S_o$  et celles obtenues via Loop-Shaping  $S_{osh}$ . La Figure 4.9 prouve que la procédure de conception PI satisfait les spécifications désirées pour un pré-compensateur  $V_1(s)$  et un post-compensateur  $V_2(s)$  choisis comme suit :

$$V_1(s) = \begin{bmatrix} 3.5000 \times \frac{0.5000s + 1}{s + 1} & 0 \\ 0 & 3 \times \frac{0.1500s + 1}{s + 1} \end{bmatrix} \text{ et } V_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Afin d'augmenter le gain en basse fréquence et obtenir une erreur statique quasi-nulle, le pré-compensateur  $V_1(s)$  est ainsi choisi comme une forme approximée du correcteur PI.

Par ailleurs, on observe une atténuation des perturbations correcte en entrée pour ce processus pour des pulsations variant entre 0.01 rad/s et 1 rad/s avec des valeurs de 20 dB/décade pour  $1/S_{osh}$  et 20 dB/décade pour  $1/S_{ish}$  comme indiqué par la Figure 4.10.

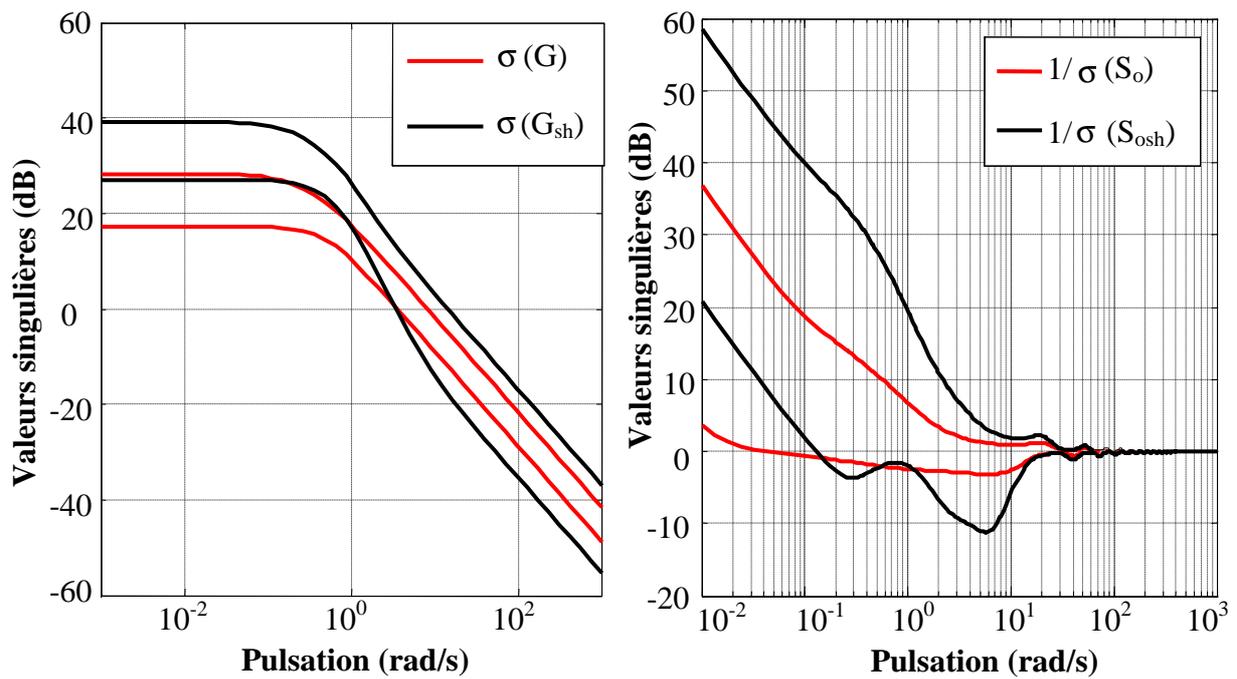


Figure 4.9 – Valeurs singulières de  $G(s)$ ,  $G_{sh}$ ,  $1/\sigma(S_0)$ ,  $1/\sigma(S_{osh})$  pour le réacteur ISP

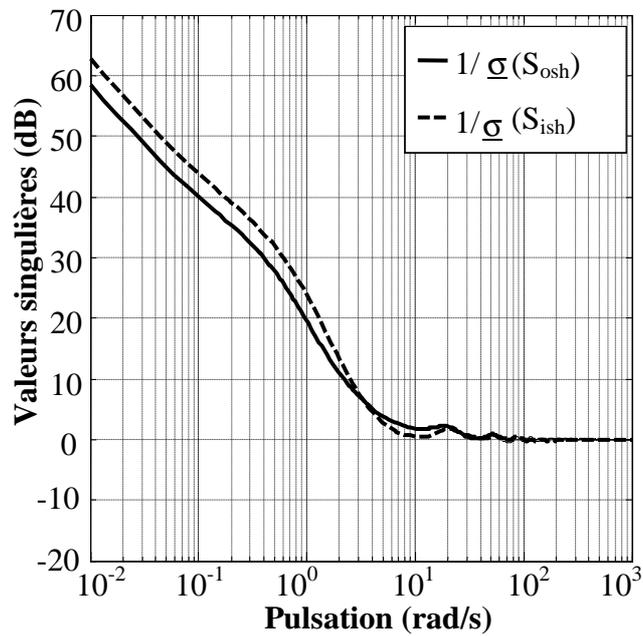


Figure 4.10 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle obtenu via Loop-Shaping pour le réacteur ISP

Les indices de performance résultants obtenus respectivement pour le correcteur conçu via l'approche proposée, le correcteur PI et le correcteur PID obtenus via l'approche ILMI et enfin le correcteur obtenu via la méthode IMC-PI proposée par [Vu & Lee, 2010b] pour les modèles nominal et perturbé sont résumés par les Tableaux 4.5 et 4.6. Pour un changement d'échelon dans les consignes à  $t=0$  et  $t=600h$ , on peut remarquer que le correcteur proposé admet un temps de montée et un temps de réponse plus rapides que ceux des approches ILMI (Voir Figure 4.11).

Le modèle de perturbation  $G_d$  est décrit par [Chien *et al.*, 1999] :

$$G_d = \begin{bmatrix} \frac{-4.2430e^{-0.4s}}{3.4450s+1} & \frac{-0.6010e^{-0.4s}}{1.9820s+1} \end{bmatrix}^T$$

La Figure 4.12 présente l'évolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations dans les deux boucles. Les indices de performance résultants pour le cas du système nominal et du système perturbé pour différentes méthodes de réglage sont donnés par les Tableaux 4.5 et 4.6.

Tableau 4.5 – Analyse comparative des performances : Etude de cas du réacteur ISP

Méthode de réglage	Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	20.24	10.74	123.08	2.66
PI	174.42	1.97	224.96	1.33
PID [Zheng <i>et al.</i> , 2002]	440.57	4.93	417.66	1.48
IMC-PI [Vu & Lee, 2010b]	3.97	1.98	49.05	9.13

Tableau 4.6 – Analyse robuste sous  $\pm 10\%$  d'incertitudes paramétriques : Cas du réacteur ISP

Méthode de réglage	ISP (+10%)				ISP (-10%)			
	Consigne		Perturbation		Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	19.75	8.72	120.67	2.90	21.28	9.27	127.46	2.54
PI	158.68	1.95	224.06	1.33	193.50	1.94	225.85	1.33
PID (avec filtre)	404.24	4.82	415.56	1.28	482.68	4.94	418.84	1.52
IMC-PI [Vu & Lee, 2010b]	4.36	2.05	48.33	8.26	3.58	1.92	49.95	10.32

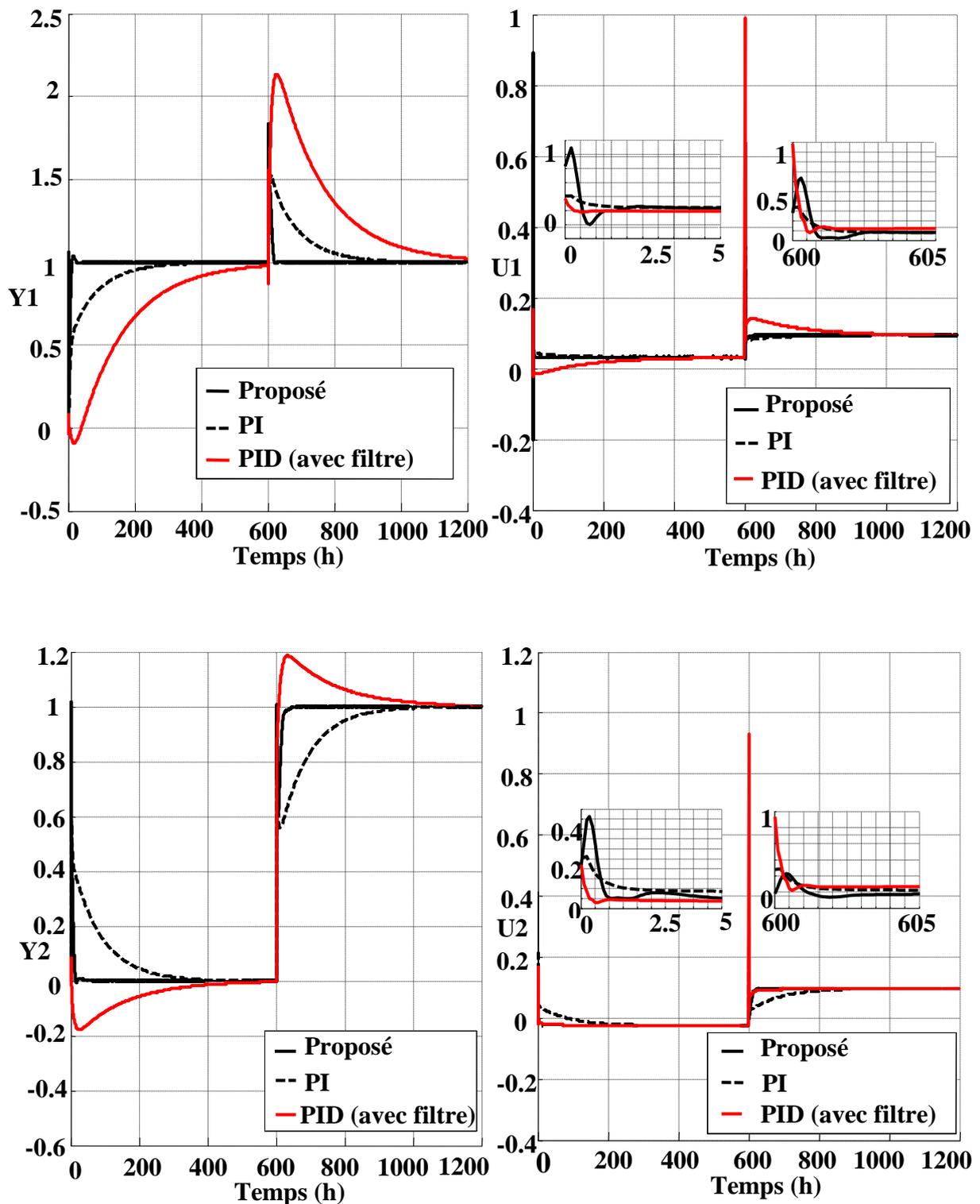


Figure 4.11 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour le réacteur ISP

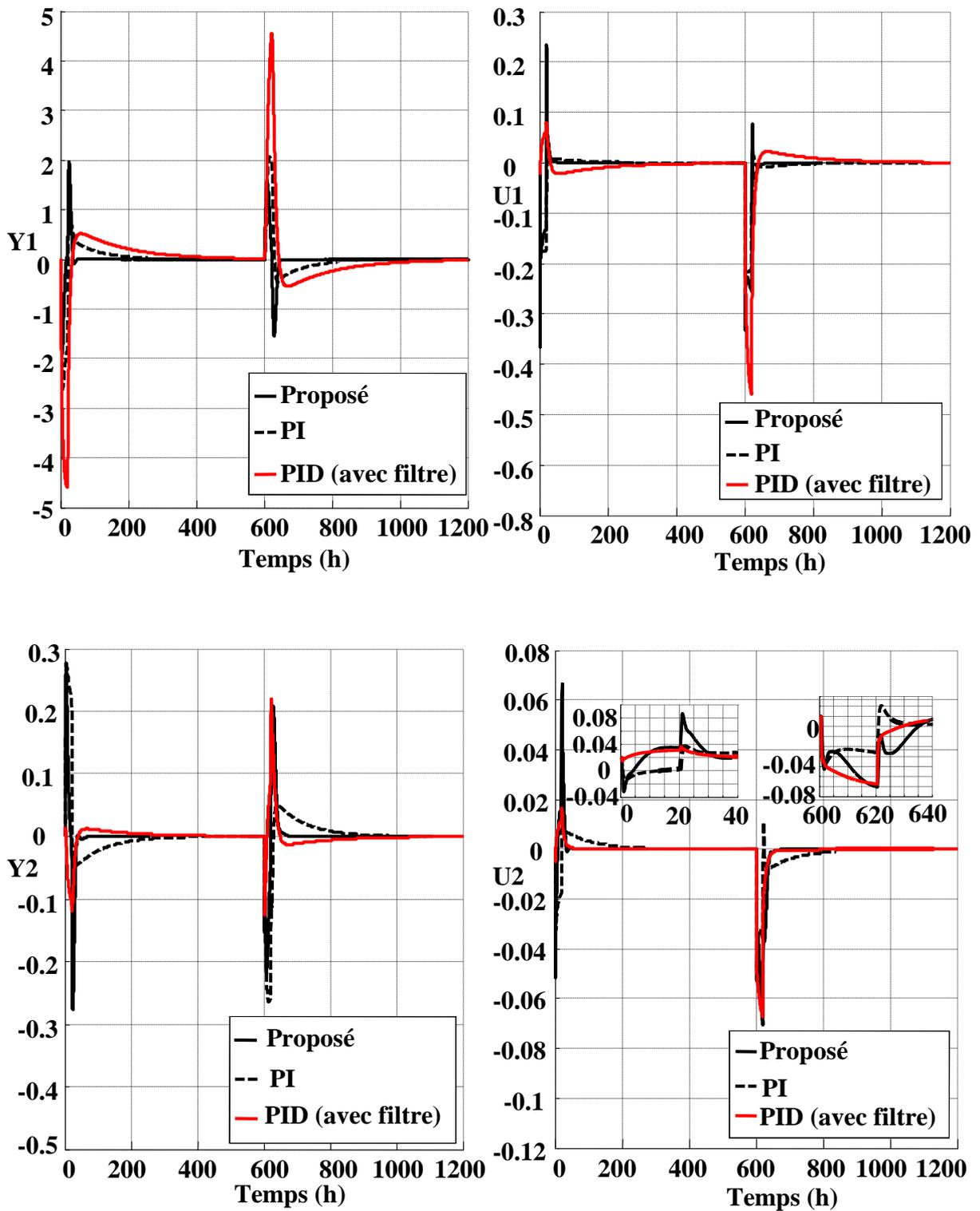


Figure 4.12 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations pour le réacteur ISP

Le correcteur PI MIMO proposé fournit des performances supérieures à ceux du correcteur PI et du correcteur PID conçus par des approches ILMI en termes du critère de performance IAE. Des valeurs TV acceptables sont aussi obtenues par la méthode proposée.

#### 4.4.3 Processus à 4 réservoirs

On considère le processus à 4 réservoirs présenté en détail au second chapitre. Le modèle correspondant avec des retards multiples est décrit dans [El Haoussi *et al.*, 2011]. En considérant les valeurs numériques correspondant au modèle à non-minimum de phase trouvées dans [Johansson, 2000], le système (4.1) est donné par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.1993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1422 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0873 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0873 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0.0482 & 0 \\ 0 & 0.0350 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0775 \\ 0.0559 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de sortie est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sa matrice de transfert est décrite par [Johansson, 2000] :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.0241e^{-s\tau_2}}{s + 0.1993} & \frac{0.0047e^{-s(\tau_1+\tau_3)}}{(s + 0.1995)(s + 0.1230)} \\ \frac{0.0024e^{-s(\tau_1+\tau_3)}}{(s + 0.1422)(s + 0.0873)} & \frac{0.0175e^{-s\tau_2}}{s + 0.1422} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Pour les résultats de simulation, les retards constants sont choisis comme suit :

$$\tau_1 = 5s, \tau_2 = 2s \text{ et } \tau_3 = 4s.$$

L'implémentation de l'Algorithme 4.1 en utilisant les paramètres  $\varepsilon_1 = 0.2050$ ,  $\delta = 0.1000$  et  $\alpha = 0.2500$ , donne les gains matriciels PI suivants :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1569 & 0.1532 \\ 0.0236 & 0.0154 \end{bmatrix} \text{ et } F_2 = \begin{bmatrix} 0.1569 & 0.1532 \\ 0.0236 & 0.0154 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la matrice de transfert du correcteur PI est donnée par :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1569s + 0.1569}{s} & \frac{0.1532s + 0.1532}{s} \\ \frac{0.0236s + 0.0236}{s} & \frac{0.0154s + 0.0154}{s} \end{bmatrix}$$

Les gains PID conçus en implémentant l'Algorithme de l'approche [Zheng *et al.*, 2002] sont donnés comme suit :

$$F_{1,PID} = \begin{bmatrix} 0.1562 & 0.1515 \\ 0.0231 & 0.0150 \end{bmatrix}, F_{2,PID} = \begin{bmatrix} 0.1562 & 0.1515 \\ 0.0231 & 0.0150 \end{bmatrix} \text{ et } F_{3,PID} = \begin{bmatrix} -3.7924 & 5.5584 \\ -3.7924 & 5.5584 \end{bmatrix}$$

La Figure 4.13 montre que la procédure de conception PI satisfait les spécifications désirées pour un pré-compensateur  $V_1(s)$  et un post-compensateur  $V_2(s)$  choisis comme suit :

$$V_1(s) = \begin{bmatrix} 3 \times \frac{2s+1}{s+1} & 0 \\ 0 & 3 \times \frac{3s+1}{s+1} \end{bmatrix} \text{ et } V_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de la Figure 4.14, il est clair que l'atténuation des perturbations en entrée pour ce processus n'est pas efficace. En effet, pour des pulsations variant entre 0.01 rad/s et 1 rad/s des valeurs de 17.5 dB/décade pour  $1/S_{osh}$  et 18 dB/décade pour  $1/S_{ish}$  sont obtenues.

Les indices de performance résultants pour le correcteur multivariable par la méthode proposée, et celles des correcteurs PI et PID calculés par la méthode ILMI sont résumés par les Tableaux 4.7 et 4.8. Pour un changement d'échelon unitaire dans la consigne et la perturbation, les Figures 4.15 et 4.16 comparent les réponses du système en boucle fermée obtenues par le correcteur proposé avec celles données par le correcteur PI et PID avec filtre. Le modèle de perturbation  $G_d$  est pris comme une incertitude de perturbation de +10% dans le gain et le retard du processus actuel, simultanément. A partir des Tableaux 4.7 et 4.8, le correcteur PI MIMO proposé fournit ainsi des performances supérieures que celles des correcteurs PI et PID conçus via les approches ILMI en termes de minimisation des valeurs IAE et TV. De fortes valeurs TV sont expliquées par la présence du zéro à non-minimum de phase de ce système.

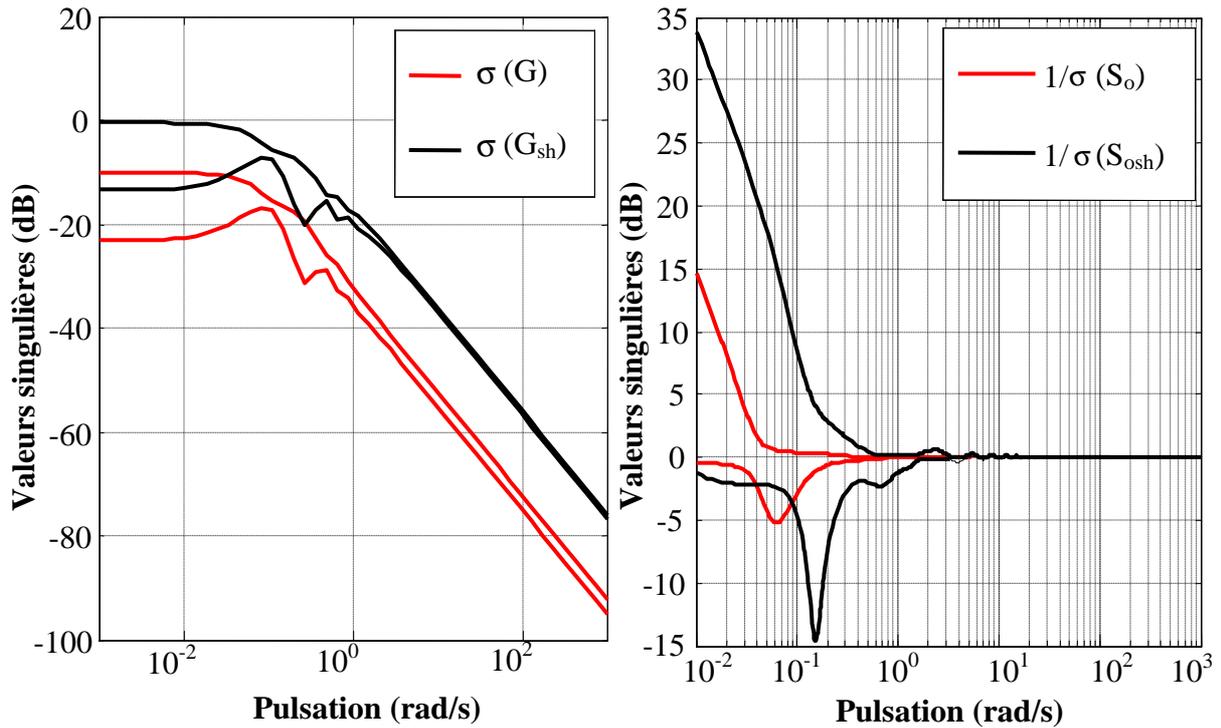


Figure 4.13 – Valeurs singulières de  $G(s)$ ,  $G_{sh}$ ,  $1/\sigma(S_o)$ ,  $1/\sigma(S_{osh})$  pour le processus à 4 réservoirs

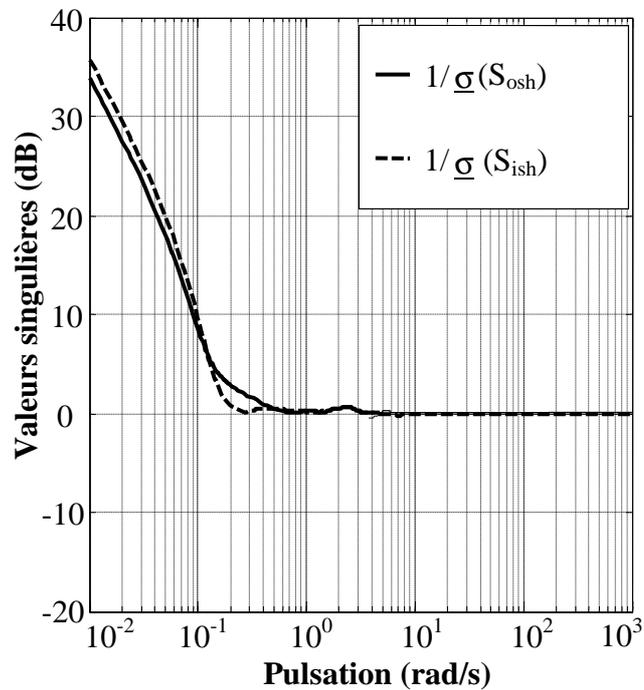


Figure 4.14 – Valeurs singulières des matrices de sensibilité d'entrée et de sortie du modèle via Loop-Shaping pour le processus à 4 réservoirs

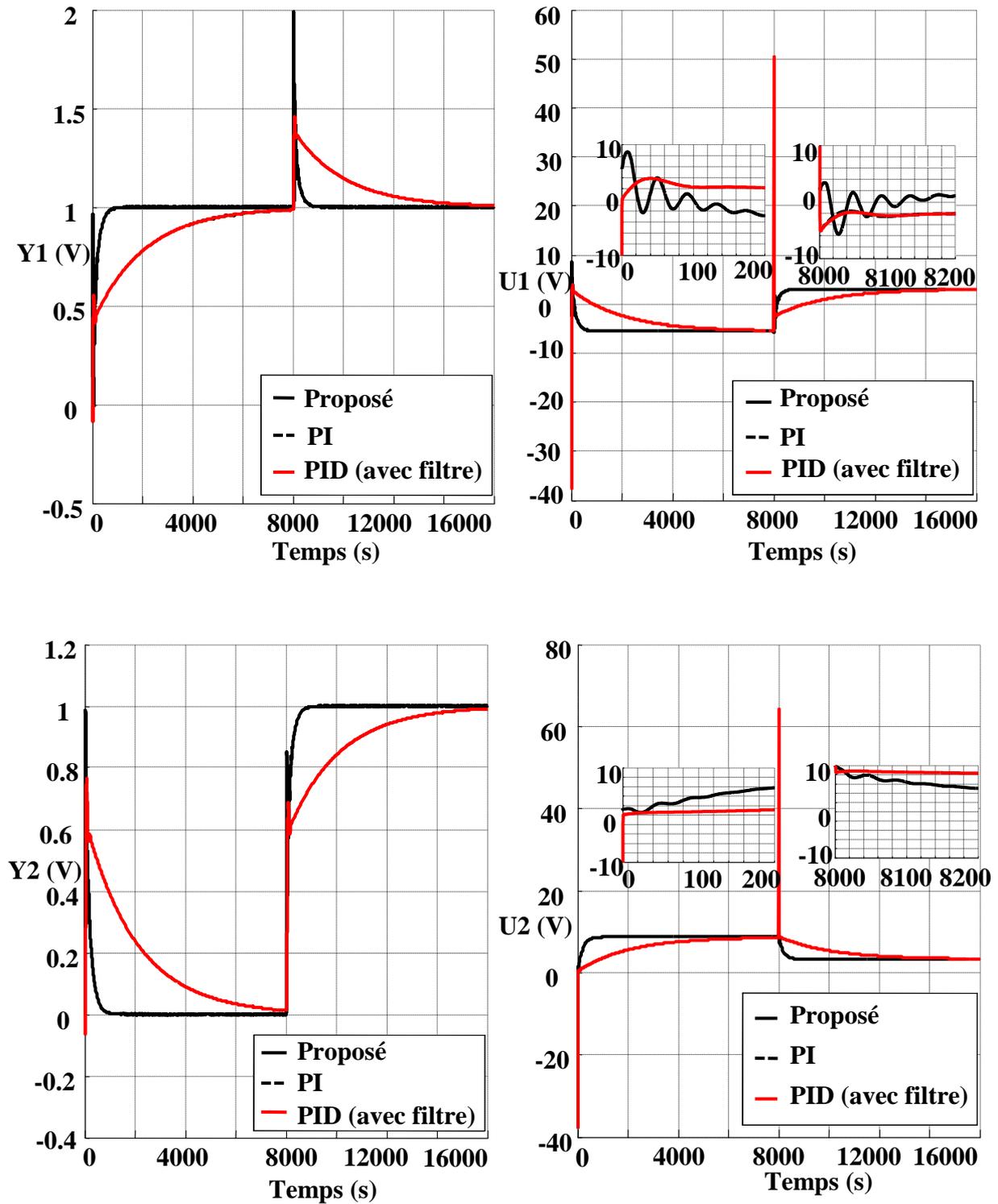


Figure 4.15 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans la consigne pour le processus à 4 réservoirs

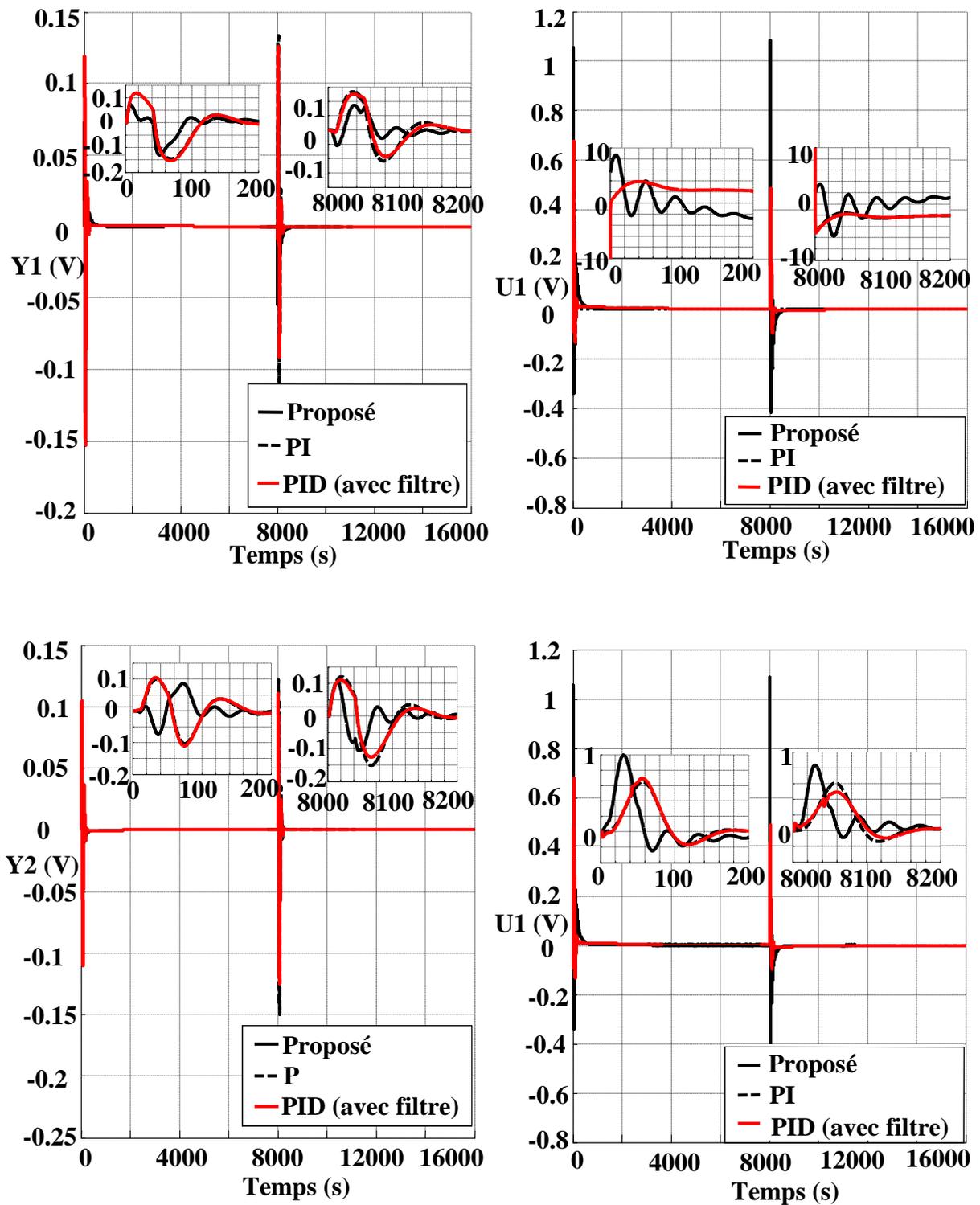


Figure 4.16 – Evolution des sorties et des lois de commande en réponse à un changement d'échelon unitaire dans les perturbations pour le processus à 4 réservoirs

Par ailleurs, le rejet des bruits en hautes fréquences est aussi connu comme une exigence importante dans la conception du système de commande. Afin d'évaluer l'effet de ce bruit sur les performances du système bouclé de l'exemple le plus complexe considéré, des résultats de simulation ont été conduits en prenant en compte les mesures de bruit blanc gaussien (BBG) avec une variance de 0.01 V et une moyenne nulle. Il est apparent à partir de la Figure 4.17 que les sorties ne sont pas sensibles aux mesures BBG alors que des fluctuations acceptables sont cependant observées pour les entrées de commande. L'amélioration de ces performances sera considérée dans des futurs travaux.

Tableau 4.7 – Analyse comparative des performances des correcteurs : Cas du processus à 4 réservoirs

Méthode de réglage	Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	479.04	119.47	98.24	15.20
PI	4005.50	39.10	105.91	11.48
PID (avec filtre)	4100.80	338.06	105.22	6.75

Tableau 4.8 – Analyse robuste sous  $\pm 10\%$  d'incertitudes paramétriques : Cas du processus à 4 réservoirs

Méthode de réglage	Le processus à 4 réservoirs (+10%)				Le processus à 4 réservoirs (-10%)			
	Consigne		Perturbation		Consigne		Perturbation	
	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV	IAE	TV
Proposée	418.26	120.51	99.43	15.84	510.06	98.66	94.85	13.21
PI	3678.10	37.14	106.96	11.99	4383.80	41.88	102.31	11.58
PID (avec filtre)	3768.90	333.93	106.24	7.04	4482.50	339.06	101.65	5.76

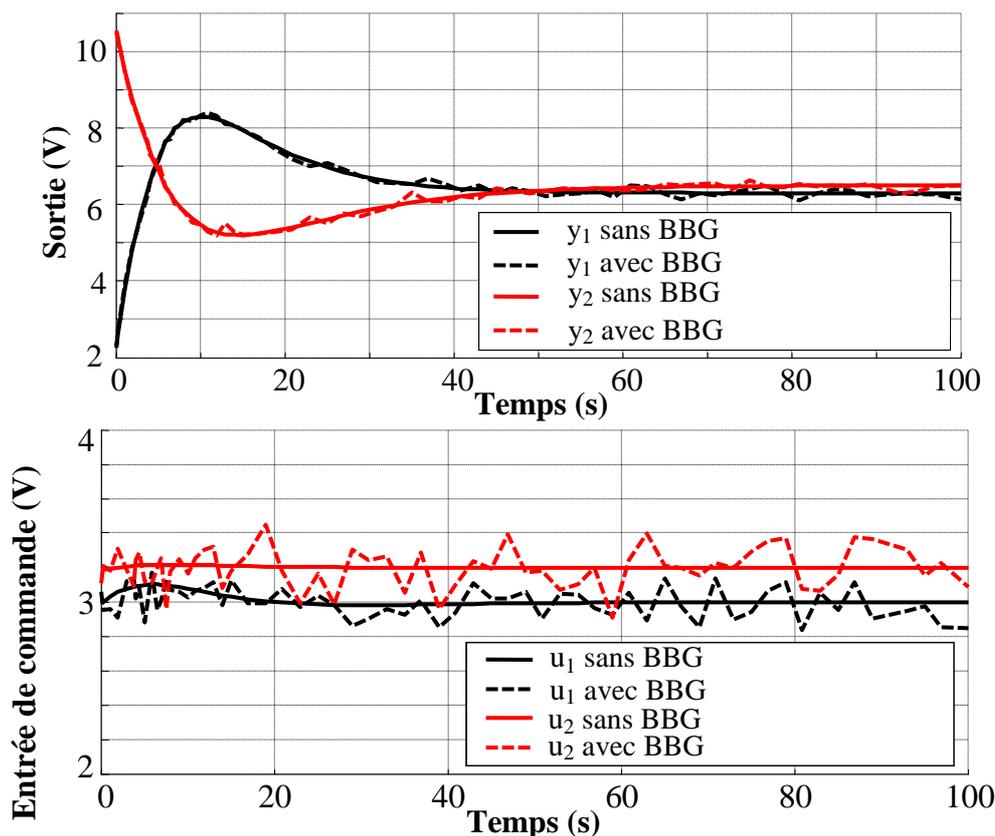


Figure 4.17 – Evolution des sorties et des lois de commande sans BBG et avec BBG

**Remarque 4.7 :**

Le calcul du correcteur PID en utilisant de la méthode IMC-PID MIMO conventionnelle présentée au premier chapitre pour le processus à 4 réservoirs est présenté en Annexe G.

**4.5 Analyse comparative**

Les résultats précédents peuvent être analysés comme suit :

- Même si la procédure de conception du correcteur n'a pas considéré le principe de découplage des systèmes multivariables, l'approche proposée fournit généralement des performances supérieures par le plus faible IAE pour les cas de changement de consigne, changement de perturbation et d'incertitudes paramétriques comparés aux autres méthodes ILMI (Pour le processus colonne de distillation, de faibles valeurs IAE=175.16 et IAE=453.14 sont obtenues par l'approche proposée, comparés aux valeurs IAE=494.05 et IAE= 1366.1 obtenues par le correcteur PI via ILMI selon le Tableau 4.1. Pour le réacteur ISP, l'approche proposée fournit des valeurs IAE=20.24 et IAE=123.08 minimales par rapport aux valeurs IAE=174.42 et IAE=224.96 obtenues par le correcteur PI via ILMI et

IAE=440.57 et IAE=417.66 obtenues par le correcteur PID avec filtre via ILMI selon le Tableau 4.5. Pour le processus à 4 réservoirs et selon le Tableau 4.7, l'approche proposée présente de faibles valeurs IAE=479.04 et IAE=98.24 comparés aux valeurs de IAE=4005.5 et IAE=105.91 obtenues par le correcteur PI via ILMI et IAE=4100.8 et IAE=105.22 obtenues par le correcteur PID avec filtre via ILMI).

De faibles valeurs d'indice de performance TV sont également enregistrées pour le cas du réacteur ISP par le correcteur proposé (TV=2.66, TV=2.90 et TV=2.54) comparés à celles du correcteur IMC-PI étendue ((TV=9.13, TV=8.26 et TV=10.32) respectivement pour les modèles nominal et perturbé pour le cas de changement de perturbation.

- La méthode proposée réussit à synthétiser un correcteur PI MIMO pour le réacteur ISP alors que la méthode IMC-PID conventionnelle échoue à cause des fortes mesures d'interactions pour la paire originale et la paire inverse. Par ailleurs, le correcteur proposé donne une réponse plus lisse pour le cas du rejet de perturbation comparée à celle générée par la méthode IMC-PI.
- La méthode proposée est applicable au processus à 4 réservoirs alors que la méthode IMC-PI étendue est non applicable à cause de la présence des fonctions de transfert de second ordre dans la matrice de transfert.
- La méthode proposée est applicable au processus colonne de distillation alors que les méthodes IMC-PID conventionnelle et IMC-PI étendue ne le sont pas vue la présence de fonctions de transfert d'ordre 3.
- Pour le processus à 4 réservoirs, quelques larges valeurs IAE et TV (IAE=479.04, TV=119.47 et IAE=98.24, TV=15.20 respectivement pour le cas de changement de consigne et de changement de perturbation comme indiqué par le Tableau 4.7) sont obtenues à cause des zéros à non-minimum de phase ; il est clair que le zéro à non-minimum de phase cause une détérioration des performances des réponses du système bouclé (sous-dépassement initial, dépassement et passage à zéro) et augmente les valeurs des indices de performance IAE et TV.

### 4.6 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé à la synthèse d'un correcteur PI pour les systèmes multivariables à retards multiples en combinant une approche temporelle et une approche fréquentielle. Le problème de la synthèse du correcteur final PI MIMO avec des pré et post-compensateurs est transformé en deux sous-problèmes à résoudre. Le premier est résolu en utilisant une approche ILMI et conduit à des gains PI MIMO stabilisants. Le second est résolu via une

approche fréquentielle et une procédure de conception Loop-Shaping qui vise à minimiser les matrices de sensibilité.

Cette approche conduit à des réponses optimisées du système en boucle fermée en termes de suivi de consignes et de rejet de perturbations par rapport à celles obtenues via la résolution du sous-problème 1. Le réacteur ISP, le processus à 4 réservoirs et la colonne de distillation, comme benchmarks de processus stable, à non-minimum de phase et instable ont été appliqués pour illustrer la validité et l'efficacité de la méthodologie proposée. En considérant trois scénarios possibles (suivi de consigne, rejet de perturbation et incertitudes paramétriques), nous avons établi une analyse comparative entre l'approche proposée et d'autres méthodes de réglage en utilisant les indices IAE et TV. Pour le cas des systèmes multivariables avec retards multiples considérés, cette analyse a montré que l'approche proposée dans cette Thèse est supérieure en termes d'applicabilité, de performances et de robustesse aux méthodes existantes pour le cas du système nominal et du système perturbé.

## Conclusion générale

Les travaux menés dans le cadre de cette thèse proposent une nouvelle approche de synthèse et d'autoréglage des régulateurs PI multivariables pour des systèmes linéaires à retards multiples constants où des couplages importants entre les différentes boucles de régulation et des effets néfastes de pôles instables et de zéros à non minimum de phase peuvent exister. Elaborée en deux étapes, la conception proposée s'appuie à la fois sur une approche temporelle basée essentiellement sur des outils ILMI où des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont établies et sur une approche fréquentielle usant du concept de Loopshaping et des matrices de sensibilité où un gabarit fréquentiel est imposé au système bouclé.

L'idée de base développée dans ces travaux est de transformer le problème complexe de commande PI multivariable d'un système linéaire à retards multiples en un problème de commande SOF standard. Pour ce faire, une nouvelle représentation d'état du système a été établie où le modèle retardé initial du système de dimension infinie décrit par des équations aux dérivées partielles a été réduit en un système de dimension finie décrit par des équations aux dérivées ordinaires en utilisant la méthode de collocation orthogonale. Des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité formulées sous forme de ILMIs sont alors établies sur la base de cette nouvelle représentation d'état.

Afin d'optimiser les performances du régulateur proposé, une re-conception de celui-ci est élaborée, dans une deuxième étape, en se basant sur une procédure Loop-Shaping par minimisation des matrices de sensibilité du processus où un nouveau gabarit fréquentiel est imposé au système bouclé et un nouveau filtre est introduit dans cette boucle.

Les solutions proposées sont implantées avec succès sur trois benchmarks caractérisés par des propriétés dynamiques différentes dont le réacteur ISP, considéré comme processus industriel multivariable stable avec des retards multiples, le processus à 4 réservoirs caractérisé par des dynamiques retardées à non-minimum de phase et enfin une colonne de distillation dont le modèle retardé est caractérisé par des dynamiques instables.

En considérant différents critères de performance (IAE et TV), les résultats obtenus par application des régulateurs proposés sur les trois benchmarks considérés montrent la supériorité de l'approche proposée par rapport aux méthodes IMC-PI/PID et ILMI existantes pour des tests incluant des incertitudes paramétriques, des changements de consigne et des changements de perturbations. Cette supériorité s'est traduite en termes d'applicabilité, performances et robustesse pour le cas des trois systèmes multivariables avec retards multiples considérés (réacteur ISP, processus à 4 réservoirs et colonne de distillation). Par ailleurs, les résultats de simulation ont montré que le bruit de mesure, particulièrement sur le signal de sortie, reste un point limitant pour l'approche proposée. Un approfondissement de ce point serait délicat mais nécessaire. La synthèse d'un correcteur de type PID/ $H_\infty$  pourrait constituer aussi une voie envisageable.

Quoique les contributions présentées dans le cadre de ces travaux de thèse semblent être à caractère théorique, les retombées sur un plan industriel sont certaines. En effet, l'implémentation des correcteurs PI proposés sur site réel serait sans aucune difficulté pourvu que le modèle du processus soit disponible et que le filtre conçu soit réalisable. Bien que la méthodologie proposée admette un certain nombre d'hypothèses spécifiques, l'application de cette approche n'impose aucune restriction sur l'ordre du modèle, la présence de pôles ou des zéros instables ou aussi des couplages importants entre les différentes boucles de régulation. Ces aspects constituent ainsi des avantages majeurs de cette approche par rapport à des approches annexes.

Les travaux de thèse exposés dans ce mémoire ont proposé des solutions à des problèmes d'une grande importance mais restent encore ouverts à de nouvelles voies. Parmi ces perspectives, on envisage d'étendre ces résultats aux systèmes à retards multiples sur les entrées et les sorties pour le cas de retards variables en fonction du temps. L'investigation d'autres types de régulateurs à deux degrés de liberté (PI-D, I-PD, PI-PD) pourrait être aussi une voie pour l'amélioration des résultats obtenus.

## Bibliographie

[Astrom & Hagglund, 1984] K.J. Astrom, T. Hagglund, “Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins,” *Automatica*, Vol. 20, N°5, pp. 645–651.

[Astrom & Hagglund, 1988] K.J. Astrom, T. Hagglund, “Automatic tuning of PID controllers,” ISA, North Carolina.

[Astrom *et al.*, 1993] K.J. Astrom, T. Hagglund, C.C. Hang, W.K. Ho “Automatic tuning and adaptation for PID controllers - a survey,” *Control Engineering Practice*, Vol. 1, N°4, pp. 699–714.

[Astrom & Hagglund, 1995] K.J. Astrom, T. Hagglund, “PID Controllers: Theory, Design and Tuning,” ISA, North Carolina.

[Astrom & Hagglund, 2001] K.J. Astrom, T. Hagglund, “The future of PID control,” *Control Engineering Practice*, Vol. 9, N°11, pp. 1163–1175.

[Astrom *et al.*, 2001] K.J. Astrom, P. Albertos, J. Quevedo, “PID control,” *Control Engineering Practice*, Vol. 9, N°11, pp. 1159–1161.

[Azar & Serrano, 2015] A.T. Azar, F.E. Serrano, “Design of anti windup PID controllers,” *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. 319, pp. 1–44.

[Begum *et al.*, 2016] K.G. Begum, T.K. Radharkrishnan, A.S. Rao, M. Chidambaram, “IMC based PID controller tuning of series cascade unstable systems,” *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 49, N°1, pp. 795–800.

[Belhaj & Boubaker, 2013] W. Belhaj, O. Boubaker, “On MIMO PID control of the Quadruple-tank process via ILMI approaches: Minimum and non-minimum phase system case studies,” *10th International IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, Mumbai (India), pp. 481–486.

[Belhaj & Boubaker, 2015] W. Belhaj, O. Boubaker, “Multivariable PID controller via LMIs: Performances Assesment,” *International Journal of Smart Sensing and Intelligent Systems*, Vol. 8, N°4, pp. 1896–1916.

[Belhaj & Boubaker, 2016] W. Belhaj, O. Boubaker, “PI controller for Multiple-Time Delays systems,” *International Journal of Enhanced Research in Science, Technology and Engineering*, Vol. 5, N°4, pp. 107–115.

[Belhaj & Boubaker, 2017] W. Belhaj, O. Boubaker, “MIMO PI controllers for LTI systems with multiple time delays based on ILMIs and sensitivity functions,” *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2017, 2017.

[Bevrani & Hiyama, 2007] H. Bevrani, T. Hiyama, “Multiobjective PI/PID Control Design Using an Iterative Linear Matrix Inequalities Algorithm,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 5, N°4, pp. 117–127.

[Bianchi *et al.*, 2008] F.D. Bianchi, R.J. Mantz, C.F. Christiansen, “Multivariable PID control with set-point weighting via BMI optimization,” *Automatica*, Vol. 44, N° 2, pp. 472–478.

[Boubaker, 2000] O. Boubaker, “Estimation et commande à structure variable des systèmes de dimension infinie,” Thèse de doctorat en Génie Electrique de l'Ecole Nationale d'ingénieurs de Tunis.

[Boyd *et al.*, 2016] S. Boyd, M. Hast, K.J. Astrom, “MIMO PID tuning via iterated LMI restriction,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 26, N°8, pp. 1718–1731.

[Bristol, 1978] E.H. Bristol, “Recent results on interactions in multivariable process control,” In: *American Institute of Chemical Engineers Annual Meeting, Florida*, p. 78b.

[Cao *et al.*, 1998] Y.Y. Cao, J. Lam, Y.X. Sun, “Static output feedback stabilization: An ILMI approach,” *Automatica*, Vol. 34, N°12, pp. 1641–1645.

[Cha *et al.*, 2002] S. Cha, D. Chun, J. Lee, “Two step IMC-PID method for multi-loop control system design,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 41, N°12, pp. 3037–3041.

[Chen *et al.*, 1998] B.S. Chen, Y.M. Cheng, C.H. Lee, “A genetic approach to mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> optimal PID control,” *IEEE Control Systems*, Vol. 15, N°5, pp. 51–60.

[Chien *et al.*, 1999] I.L. Chien, H.P. Huang, J-C Yang, “A simple multiloop tuning method for PID controllers with no proportional kick,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 38, N°4, pp. 1456–1468.

[Chien *et al.*, 2002] I-L. Chien, S.C. Peng, J.H. Liu, “Simple control method for integrating processes with long deadtime,” *Journal of Process Control*, Vol. 12, N°3, pp. 391–404.

[Damak, 1994] T. Damak, “Modélisation, estimation et commande de procédés biotechnologiques de type hyperbolique,” Thèse de doctorat en Automatique de l'université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport LAAS N°94022 N° d'ordre 1671.

[Davis, 1975] P.J. Davis, “Interpolation and Approximation,” Dover, New York.

[Davison & Wang, 1974] E.J. Davison, S.H. Wang, “Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable systems,” *Automatica*, Vol. 10, N°6, pp. 643–658.

[Desphande, 1989] P.B- Desphande, “Multivariable process control,” Instrument Society of America, Carolina.

[Desoer & Schulman, 1974] C.A. Desoer, J.D. Schulman, “Zeros and poles of matrix transfer functions and their dynamical interpretation,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 21, N°1, pp. 3–8.

[Diracca, 1986] C. Diracca, “Etude comparative de PID numériques auto-ajustables : applications à la commande d'un télépointeur,” Thèse de Doctorat Nice.

[Dong & Brosilow, 1997] J. Dong, C.B. Brosilow, “Design of robust multi-variable PID controllers via IMC,” In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Albuquerque (Etats-Unis), Vol. 5, pp. 3380–3384.

[Doyle & Stein, 1981] J. C. Doyle, G. Stein, “Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, N°1, pp. 4–16.

[Economou & Morari, 1986] C.G. Economou, M. Morari, “Internal Model Control. 6. Multi-loop design,” *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, Vol. 25, N°2, pp. 411–419.

[El Haoussi *et al.*, 2011] F. El Haoussi, E.H. Tissir, F. Tadeo, A. Hmamed, “Delay-dependent stabilisation of systems with time-delayed state and control: application to a quadruple-tank process,” *International Journal of Systems Science*, Vol. 42, N°1, pp. 41–49.

[Franklin *et al.*, 2010] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Baeini, “Feedback control of dynamic systems,” 6th edition, Pearson, New Jersey.

[Friedland, 1986] B. Friedland, “Control System Design An Introduction to State Space Methods,” Dover Publications, New York.

[Gagnon *et al.*, 1999] E. Gagnon, A. Pomerleau, A. Desbiens, “ $\mu$ -synthesis of robust decentralized PI controllers,” *IEE Proceedings in Control Theory Applications*, Vol. 146, N°4, pp. 289–294.

[Gaing, 2004] Z-L. Gaing, “A particle swarm optimization approach for optimum design of PID controller in AVR system,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 19, N°2, pp. 384–391.

[Garcia & Morari, 1982] C.E. Garcia, M. Morari, “Internal model control. 1. A unifying review and some new results,” In: *Industrial and Engineering Chemical Process Design and Development*, Vol. 21, N°2, pp. 308–323.

[Gatzke *et al.*, 2000] E.P. Gatzke, E.S. Meadows, C. Wang, F.J. Doyle, “Model based of a four-tank system,” *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 24, N° 2–7, pp. 1503–1509.

[Genç, 2000] A. Umut Genç, “A state-space algorithm for designing  $H_\infty$  Loop Shaping PID controllers,” technical report, Cambridge University Press, Cambridge.

[Ghaoui *et al.*, 1997] L.E. Ghaoui, F. Oustry, M. AitRami, “A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, N°8, pp. 1171–1176.

[Gorez, 1997] R. Gorez, “A survey of PID auto-tuning methods: Feature issue controller tuning,” *Journal A*, Vol. 38, N°1, pp. 3–10.

[Grimholt & Skogestad, 2016] C. Grimholt, S. Skogestad, “Optimal PID control of double integrating processes,” *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 49, N°7, pp. 127–132.

[Grosdidier & Morari, 1986] P. Grosdidier, M. Morari “Interaction measures for systems under decentralized control,” *Automatica*, Vol. 22, N°3, pp. 309–319.

[Gundes *et al.*, 2007] A.N. Gundes, H. Ozbay, A.B. Ozguler, “PID controller synthesis for a class of unstable MIMO plants with I/O delays,” *Automatica*, Vol. 43, N°1, pp. 135–142.

[Hang *et al.*, 2002] C.C. Hang, K.J. Astrom, Q.G. Wang, “Relay feedback auto-tuning of process controllers - A tutorial review,” *Journal of Process Control*, Vol. 12, N°1, pp. 143–162.

[He & Wang, 2006] Y. He, Q.G. Wang, “An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, N°10, pp. 1678–1683.

[Ho, 2003] M.T. Ho, “Synthesis of  $H^\infty$  PID controllers. A parametric approach,” *Automatica*, Vol. 39, N°6, pp. 1069–1075.

[Ho *et al.*, 1997] W.K. Ho, T.H. Lee, O.P. Gan, “Tuning of multiloop proportional-integral-derivative controllers based on gain and phase margin specifications,” *Industrial Engineering Chemical Research*, Vol. 36, pp. 2231–2238.

[Hoagg & Bernstein, 2007] J.B. Hoagg, D.S. Bernstein, “Non-minimum phase zeros - much to do about nothing,” *IEEE Control Systems*, Vol. 27, N°3, pp. 45–57.

[Holt & Morari, 1985] B. R. Holt, M. Morari, “Design of resilient processing plants - VI. The effect of right-half-plane zeros on dynamic resilience,” *Chemical Engineering Science*, Vol. 40, N°1, pp. 59–74.

[Huang *et al.*, 1994] H.P. Huang, M. Oshima and L. Hashimoto, “Dynamic interaction and multiloop control system design,” *Journal of Process Control*, Vol. 4, N°1, pp. 15–27.

[Huang *et al.*, 2001] Y.J. Huang, Y-J Wang, “Robust PID controller design for non-minimum phase time delay systems,” *ISA Transactions*, Vol. 40, N°1, pp. 31–39.

[Jensen & Fisher, 1986], N. Jensen, D.G. Fisher, S.L. Shah, “Interaction analysis in multivariable control systems,” *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 32, N°6, pp. 959–970.

[Jin *et al.*, 2013] Q. Jin, F. Hao, Q. Wang, “IMC-PID controller based on diagonal equivalent model for multivariable systems with multiple time delays,” *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 46, N°3, pp. 209–218.

[Johansson, 2000] K.H. Johansson, “The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 8, N°3, pp. 456–465.

[Kailath, 1980] T. Kailath, “*Linear Systems*,” Prentice-Hall, New Jersey.

[Kessler, 1958] C. Kessler, “Das Symmetrische Optimum,” *Regelungstechnik*, Vol. 6, N°11, pp. 432–436.

[Ketata, 1992] R. Ketata “*Méthodologies de régulation numérique incluant la logique floue*,” Thèse de doctorat en Automatique de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, France.

[Ketata *et al.*, 1995] R. Ketata, D. De Geest, A. Titli, “Fuzzy controller: design, evaluation and hierarchical combination with a PID controller,” *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 71, N°1, pp.113–129.

[Kim *et al.*, 2008] T-H Kim, I. Maruta, T. Sugie, “Robust PID controller tuning based on the constrained swarm optimization,” Vol. 44, N°4, pp. 1104–1110.

[Koivo & Tantt, 1991] H.N. Koivo, J.T. Tantt, “Tuning of PID controllers: survey of SISO and MIMO techniques,” *Proceedings of the IFAC Intelligent Tuning and Adaptive Control Symposium*, Singapore (Singapore), pp. 75–80.

[Kristiansson & Lennartson, 2002] B. Kristiansson, B. Lennartson, “Robust and optimal tuning of PI and PID controllers,” *IEEE Proceedings Control Theory Applications*, Vol. 149, N°1, pp.17–25.

[Krohling & Rey, 2001] R.A. Krohling, J.P. Rey, “Design of optimal disturbance rejection PID controllers using genetic algorithms,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 5, N°1, pp. 78–82.

[Laroche, 2011] E. Laroche. *Commande robuste*. <http://eavr.ustarsbg.fr/~laroche/student/MasterISTI/ComRob.pdf>.

[Lee *et al.*, 1999] D. Lee, M. Lee, S. Sung, I. Lee, “Robust PID tuning for Smith predictor in the presence of model uncertainty,” *Journal of Process Control*, Vol. 9, N°1, pp. 79–85.

[Lee *et al.*, 2000] Y. Lee, J. Lee and S. Park, “PID controller tuning for integrating and unstable processes with time delay,” *Chemical Engineering Science*, Vol. 55, N°17, pp. 3481–3493.

[Lee *et al.*, 2004] M. Lee, K. Lee, C. Kim, J. Lee, “Analytical design of multi-loop PID controllers for desired closed-loop responses,” *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 50, N°7, pp. 1631–1635.

[Lefevre *et al.*, 2000] L. Lefevre, D. Dochain, S. Feyeo de Azevedo, A. Magnus, “Optimal selection of orthogonal polynomials applied to the integration of chemical reactor equations by collocation methods,” *Computers and Chemical Engineers*, Vol. 24, N°12, pp. 2571–2588.

[Lin *et al.*, 2004] C. Lin, Q.G. Wang, T.H. Lee, “An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach,” *Automatica*, Vol. 40, N° 3, pp. 519–525.

[Lofberg, 2004] J. Lofberg, “Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, 2004, pp. 284–289.

[Loh *et al.*, 1993] A.P. Loh, C.C. Hang, C.K. Quek, V.U. Vasnani, “Autotuning of multiloop proper integral controllers using relay feedback,” *Industrial Engineering Chemistry Research*, Vol. 32, N°6, pp. 1102–1107.

[Loiseau *et al.*, 2009] J.J. Loiseau, S.-I. Niculescu, W. Michiels, R. Sipahi, “Topics in Time Delay Systems, Analysis, Algorithms and Control,” Springer Verlag, Heidelberg.

[Luan *et al.*, 2015] X. Luan, Q. Che, F. Liu, “Equivalent transfer function based multi-loop PI control for high dimensional multi variable systems,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 13, N°2, pp. 346–352.

[Luan & Lee, 2010] T.N. Luan Vu, M. Lee, “Independent design of multi-loop PI/PID controllers for interacting multivariable processes,” *Journal of Process Control*, Vol. 20, N°8, pp. 922–933.

[Luyben, 1990] W. Luyben, “Process modelling, simulation and control for chemical engineers,” McGraw-Hill, New York.

[McFarlane & Glover, 1990] D. McFarlane, K. Glover. “Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions,” Lecture Notes in Control and Information Science, Springer Verlag, Berlin.

[MacFarlane & Karcanias, 1976] A.G.J. MacFarlane, N. Karcanias, “Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory,” International Journal of Control, Vol. 24, N°1, pp. 33–74.

[Majhi & Atherton, 2000] S. Majhi, D.P. Atherton, “Obtaining controller parameters for a new smith predictor using autotuning,” Automatica, Vol. 36, pp. 1651–1658.

[Makila, 1984] P.M. Makila, “A self-tuning regulator based on optimal output feedback theory,” Automatica, Vol. 20, N°5, pp. 671–679.

[Mete *et al.*, 2006] A.N. Mete, A.N. Gundes and H. Ozbay, “Decoupled PID controller synthesis for MIMO plants with I/O delays,” Proceedings of the IEEE Conference on Decision & Control, San Diego (Etats-Unis), 13–15 Décembre.

[Mogrovejo *et al.*, 2016] D. Mogrovejo, E. Granado, W. Colmenares, J. Zumbrano, F. Quizhpi, “Robust multivariable PID control for quadruple-tank process using an ILMI approach,” 2016 IEEE Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM), Guayaquil (Ecuador).

[Morari & Zafiriou, 1989] M. Morari, E. Zafiriou, “Robust process control,” Prentice-Hall, New Jersey.

[Naslin, 1968] P. Naslin, “Technologie et calcul pratique des systèmes asservis,” Dunod, Paris.

[Niculescu, 2001] S.-I. Niculescu, “Delay Effects on Stability,” Springer, New York.

[Niederlinski, 1971] A. Niederlinski, “A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control system,” Automatica, Vol. 7, N°6, pp. 691–701.

[Nihtila *et al.*, 1994] M.T. Nihtila, T. Damak, J.P. Babary, “Recursive input delay estimation in linear systems,” In Proceedings of the IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Juillet 1994.

[O'Dwyer, 2003] A. O'Dwyer, “PID compensation of time delayed processes 1998-2002: a survey,” Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado, (USA), pp. 1494–1499.

[O'Dwyer, 2006] A. O'Dwyer, “PI and PID controller tuning rules: an overview and personal perspective,” In Proceedings of the IET Irish signals and Systems Conference, Dublin (Ireland), pp. 161–166.

[Palmor *et al.*, 1995] Z.J. Palmor, Y. Halevi, T. Efrati, “A general and exact method for determining limit cycles in decentralized relay systems,” *Automatica*, Vol. 31, N°9, pp. 1333–1339.

[Panagopoulos & Astrom, 1999] H. Panagopoulos, K.J. Astrom, “PID control design and  $H_{\infty}$  loop shaping,” Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications, Hawai (Etats-Unis), pp. 103–108.

[Panda, 2009] R.C. Panda, “Synthesis of PID controller for unstable and integrating processes,” *Chemical Engineering Science*, Vol. 64, N° 17, pp. 2807–2816.

[Panda, 2012] R.C. Panda, “Introduction to PID controllers – Theory, tuning and application to frontier areas,” InTech, Rijeka.

[Richard, 2003] J.P. Richard, “Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems,” *Automatica*, Vol. 39, N°10, pp. 1667–1694.

[Rivera *et al.*, 1986] D.E. Rivera, M. Morari, S. Skogestad, “Internal model control. 4. PID controller design,” *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development*, Vol. 25, N°1, pp. 252–265.

[Rosenbrock, 1970] H.H. Rosenbrock, “State space and multivariable theory,” Nelson, London.

[Rusli *et al.*, 2004] E. Rusli, S. Ang, D.R. Braatz, “A Quadruple Tank Process Control Experiment,” *Chemical Engineering Education*, Vol. 38, pp. 174–181.

[Saidi, 1996] L. Saidi, “Commande à modèle interne : Inversion et équivalence structurelle,” Thèse de Doctorat de l'Université de Savoie, Chambéry (France).

[Sandelin *et al.*, 1991] P.M. Sandelin, H.T. Toivonen, M. Osters, K.V. Waller, “Robust multi-objective linear quadratic control of distillation using low-order controllers,” *Chemical & Engineering Science*, Vol. 46, N°11, pp. 2815–2827.

[Sarma & Chidambaram, 2005] K.L.N. Sarma, M. Chidambaram, “Centralized PI/PID controllers for nonsquare systems with RHP zeros,” *Journal of the Indian Institute of Science*, Vol. 85, N°4, pp. 201–214.

[Shamsuzzoha & Lee, 2008] M. Shamsuzzoha & M. Lee, “Analytical design of enhanced PID filter controller for integrating and first order unstable processes with time delay,” *Chemical Engineering Science* 63, N°10, pp 2717-2731.

[Shen *et al.*, 2014] Y. Shen, Y. Sun, W. Xu, “Centralized PI/PID controller design for multivariable processes,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 53, N°25, pp. 10439–10447.

[Shimizu, 2016] K. Shimizu, “Dynamic output feedback control and dynamic PID control for linear MIMO systems via LMI,” *IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, Buenos Aires (Argentina), pp. 978–983.

[Shu & Pi, 2000] H. Shu, Y. Pi, “PID neural networks for time-delay systems,” *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 24, N°2–7, pp. 859–862.

[Sipahi *et al.*, 2011] R. Sipahi, S.-I. Niculescu, C.T. Abdallah, W. Michiels, “Stability and stabilization of systems with time delay,” *IEEE Control Systems*, Vol. 31, N°1, pp. 38–65.

[Skogestad & Postlethwaithe, 1996] S. Skogestad & I. Postlethwaithe “Multivariable feedback control analysis and design,” John Wiley & Sons, New York.

[Skogestad, 2001] S. Skogestad, “Probably the best simple PID tuning rules in the world,” *AIChE Annual Meeting (Reno, Nevada, USA)*.

[Skogestad, 2003] S. Skogestad, “Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning,” *Journal of Process Control*, Vol. 13, N°4, pp. 291–309.

[Takahashi *et al.*, 1997] R.H.C. Takahashi, P.L.D. Peres, P.A.V. Ferreira, “Multiobjective  $H_2/H_\infty$  guaranteed cost PID design,” *IEEE Control Systems*, Vol. 17, N° 5, pp. 37–47.

[Tan *et al.*, 1998] W. Tan, J. Liu, P.K.S. Tam, “PID tuning based on loop-shaping  $H_\infty$  control,” *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, Vol. 145, N°6, pp. 485–490.

[Tan *et al.*, 2002] W. Tan, T. Chen, H.J. Marquez, “Robust controller design and PID tuning for multivariable processes,” *Asian Journal of Control*, Vol. 4, N°4, pp. 439–451.

[Uren & Schoor, 2011] K. Uren, G.V. Schoor, “Predictive PID control of non-minimum phase systems,” In *Advances in PID Control : Advanced PID Control Techniques*, InTech.

[Vanavil *et al.*, 2015] B. Vanavil, K.K. Chaitanya, A.S. Rao, “Improved PID controller design for unstable time delay processes based on direct synthesis method and maximum sensitivity,” *International Journal of Systems Science*, Vol. 46, N°8, pp. 1349–1366.

[Vilanova & Visioli, 2012] R. Vilanova, A. Visioli, “PID control in the third millennium – advances in industrial control,” Springer, New York.

[Vu & Lee, 2010a] T.N.L. Vu, M. Lee, “Analytical design of robust multi-loop PI controller for multi-time delay processes,” *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Vol. 48, pp. 95–108.

[Vu & Lee, 2010b] T.N.L. Vu, M. Lee, “Multi-loop PI controller design based on the direct synthesis for interacting multi-time delay processes,” *ISA Transactions*, Vol. 49, N°1, pp. 79–86.

[Wang *et al.*, 2008] Q-G. Wang, Z. Ye, W-J. Cai, C.C. Hang, “PID control for multivariable processes,” Springer-Verlag, Berlin.

[Wang *et al.*, 2009] Q-G. Wang, Z. Zhang, K.J. Astrom, L.S. Chek , “Guaranteed dominant pole placement with PID controllers,” *Journal of Process Control*, Vol. 19, N°2, pp. 349–352.

[Wang *et al.*, 2013] D.J Wang, W. Li, M-L Guo, “Tuning of  $PI^\lambda D^\mu$  controllers based on sensitivity constraint,” *Journal of Process Control*, Vol. 23, N°6, pp. 861–867.

[Wang *et al.*, 2015] Z.Q Wang, X.L. Luan, F. Liu, “Analytical scheme of centralized PI controller for non-square processes with time-delays,” *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 48, N°8, pp. 501–506.

[Wiberg, 1971] D.M. Wiberg, “State space and Linear Systems,” Schaum, T., Ed.; McGraw-Hill: New York.

[Yanchevsky, 1987] A.E. Yanchevsky, “Optimal decentralised controller design for multivariable plants,” *International Journal of Systems Science*, Vol. 18, N°1, pp. 177–187.

[Yurkevich, 2011] Valery D. Yurkevich, “Advances in PID Control,” InTech, Rijeka.

[Yusof *et al.*, 1994] R. Yusof, S. Omatu, M. Khalid, “Self-tuning PID control: A multivariable derivation and application,” *Automatica*, Vol. 30, N°12, pp. 1975–1981.

[Zadeh & Desoer, 1963] L.A. Zadeh, C.A. Desoer, “Linear System Theory,” McGrawHill, New York.

[Zhang *et al.*, 2002] Y. Zhang, Q-G. Wang, K.J. Astrom, “Dominant pole placement for multi-loop control systems,” *Automatica*, Vol. 38, N°7, pp. 1213–1220.

[Zhang *et al.*, 2009] J. Zhang, J. Zhuang, H. Du, S. Wang, “Self-organizing genetic algorithm based tuning of PID controllers,” *Information Sciences*, Vol. 179, N°7, pp. 1007–1018.

[Zheng *et al.*, 2002] F. Zheng, Q. G. Wang, T. H. Lee, “On the design of multivariable PID controllers via LMI approach,” *Automatica*, Vol. 38, N°3, pp. 517–526.

[Zhou *et al.*, 1996] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, “Robust and optimal control,” Prentice Hall, New Jersey.

[Zhuang & Atherton, 1994] M. Zhuang, D.P. Atherton “PID controller design for a TITO system,” *IEEE Proceedings –Control Theory and Applications*, Vol. 141, N°2, pp. 111–120.

[Ziegler & Nichols, 1942] J.G. Ziegler, N.B. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” *Transactions of American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 64, pp. 759–768.

## **Annexes**

## Annexe A :

### Calcul des pôles et des zéros d'une matrice rationnelle par la méthode de Smith McMillan

#### Définition A1

Soit  $G(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}$  une matrice rationnelle de rang  $r_c$  et  $D(s)$  le plus petit commun multiple

normalisé des dénominateurs de  $G(s)$  telle que  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ .

Soit  $\Lambda(s)$  la forme de Smith de  $N(s)$ . Il existe deux matrices unimodulaires  $U_1(s)$  et  $U_2(s)$  telles que

$$U_1(s).G(s).U_2(s) = \frac{\Lambda(s)}{D(s)}$$

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \delta_1(s) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{r_c}(s) & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\delta_i(s)$ ,  $i=1, \dots, (r_c - 1)$  sont appelés les polynômes invariants de  $G(s)$ . Ils sont uniques, normalisés - unitaires- et vérifient :

**Propriété A1** : Pour  $i=1, \dots, (r_c - 1)$ ,  $\delta_i(s)$  divise  $\delta_{i+1}(s)$ .

Posons

$$\frac{\Lambda(s)}{D(s)} = \text{diag} \left\{ \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \right\}$$

et notons par  $\varepsilon_i(s)$  et  $\psi_i(s)$  des polynômes premiers entre eux tels que :

$$\frac{\delta_i(s)}{D(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$$

La forme de Smith McMillan de  $G(s)$  est alors la matrice  $M(s)$  définie par les équations suivantes :

$$U_1(s).G(s).U_2(s) = M(s)$$



$$* G_{1,2}^{1,2}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ s^2 + s + 4 & 2s^2 - s - 8 \end{array} \right| = \frac{3s^2 - 12}{(s+1)(s+2)} = \frac{3(s^2 - 4)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3(s-2)}{s+1}$$

$$* G_{1,2}^{1,3}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{array} \right| = \frac{3s^2 - 12}{(s+1)(s+2)} = \frac{3(s^2 - 4)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3(s-2)}{s+1}$$

$$* G_{1,2}^{2,3}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \left| \begin{array}{cc} s^2 + s + 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{array} \right| = \frac{3s(s^2 - 4)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3s(s-2)}{s+1}$$

Les mineurs d'ordre 1 sont :

$$G_1^1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, G_1^2(s) = \frac{s^2 + s - 4}{(s+1)(s+2)}, G_1^3(s) = \frac{s^2 - 4}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-2}{s+1},$$

$$G_2^1(s) = \frac{-1}{(s+1)(s+2)}, G_2^2(s) = \frac{2s^2 - s - 8}{(s+1)(s+2)}, G_2^3(s) = \frac{2s^2 - 8}{(s+1)(s+2)} = \frac{2(s-2)}{s+1}$$

En utilisant la définition de  $p(s)$  (Définition A3), la considération de tous les mineurs de tous les ordres montre que :

$$p(s) = (s+1)^2 (s+2)$$

Ainsi, les mineurs normalisés d'ordre  $r_c=2$  (ajustement des mineurs avec comme dénominateur  $p(s)$ ) sont :

$$\bar{G}_{1,2}^{1,2}(s) = \frac{3(s-2)}{(s+1)^2(s+2)}, \bar{G}_{1,2}^{1,3}(s) = \frac{3(s-2)}{(s+1)^2(s+2)}, \bar{G}_{1,2}^{2,3}(s) = \frac{3s(s-2)}{(s+1)^2(s+2)}$$

En utilisant la définition de  $z(s)$  (Définition A3), la considération des mineurs d'ordre  $r_c = 2$  montre que :

$$z(s) = (s-2)$$

La forme de Smith McMillan de  $G(s)$  est donnée alors par :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s-2)}{(s+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Annexe B : Calcul des paramètres du correcteur PID basé sur la méthode IMC

	Modèle	$y/r = \tilde{g}_+ f$	Correcteur c	$k_P$	$k_I$	$k_D$	$\tau_F$	
A	$\frac{k}{\tau s + 1}$	$\frac{1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{1}{k} \frac{\tau s + 1}{\varepsilon s}$	$\frac{\tau}{\varepsilon}$	$\tau$	–	–	–
B	$\frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	$\frac{1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{k \varepsilon s}$	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\varepsilon}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$	–	–
C	$\frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}$	$\frac{1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}{k \varepsilon s}$	$\frac{2\xi \tau}{\varepsilon}$	$2\xi \tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$	–	–
D	$k \frac{-\beta s + 1}{\tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{\tau s + 1}{k(\beta + \varepsilon)s + 1}$	$\frac{\tau}{\beta + \varepsilon}$	$\tau$	–	–	2, 3, 5
E	$k \frac{-\beta s + 1}{\tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{(\beta s + 1)(\varepsilon s + 1)}$	$\frac{\tau s + 1}{k(\beta \varepsilon s + 2\beta + \varepsilon)s}$	$\frac{\tau}{2\beta + \varepsilon}$	$\tau$	–	$\frac{\beta \varepsilon}{2\beta + \varepsilon}$	1, 4
F	$k \frac{-\beta s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}{k(\beta + \varepsilon)s}$	$\frac{2\xi \tau}{\beta + \varepsilon}$	$2\xi \tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$	–	2, 3, 5
G	$k \frac{-\beta s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{(\beta s + 1)(\varepsilon s + 1)}$	$\frac{\tau^2 s^2 + 2\xi \tau s + 1}{k(\beta \varepsilon s + 2\beta + \varepsilon)s}$	$\frac{2\xi \tau}{2\beta + \varepsilon}$	$2\xi \tau$	$\frac{\tau}{2\xi}$	$\frac{\beta \varepsilon}{2\beta + \varepsilon}$	1, 4
H	$\frac{k}{s}$	$\frac{1}{\varepsilon s + 1}$	$\frac{1}{k \varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon}$	–	–	–	–

I	$\frac{k}{s}$	$\frac{2\epsilon s + 1}{(\epsilon s + 1)^2}$	$\frac{2\epsilon s + 1}{k\epsilon^2 s}$	$\frac{2}{\epsilon}$	$2\epsilon$	–	–	6
J	$\frac{k}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{1}{\epsilon s + 1}$	$\frac{\tau s + 1}{\epsilon s}$	$\frac{1}{\epsilon}$	–	$\tau$	–	–
K	$\frac{k}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{2\epsilon s + 1}{(\epsilon s + 1)^2}$	$\frac{(\tau s + 1)(2\epsilon s + 1)}{k\epsilon^2 s}$	$\frac{2\epsilon + \tau}{\epsilon^2}$	$2\epsilon + \tau$	$\frac{2\epsilon\tau}{2\epsilon + \tau}$	–	6
L	$k\frac{-\beta s + 1}{s}$	$\frac{-\beta s + 1}{\epsilon s + 1}$	$\frac{1}{k(\beta + \epsilon)}$	$\frac{1}{\beta + \epsilon}$	–	–	–	2, 3, 5
M	$k\frac{-\beta s + 1}{s}$	$\frac{-\beta s + 1}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)}$	$\frac{1}{k(\beta\epsilon s + 2\beta + \epsilon)s}$	$\frac{1}{2\beta + \epsilon}$	–	–	$\frac{\beta\epsilon}{2\beta + \epsilon}$	1, 4
N	$k\frac{-\beta s + 1}{s}$	$\frac{(-\beta s + 1)((\beta + 2\epsilon)s + 1)}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)}$	$\frac{(\beta + 2\epsilon)s + 1}{k(\beta + \epsilon)^2 s}$	$\frac{\beta + 2\epsilon}{(\beta + \epsilon)^2}$	$\beta + 2\epsilon$	–	–	5, 6
O	$k\frac{-\beta s + 1}{s}$	$\frac{(-\beta s + 1)((\beta + 2\epsilon)s + 1)}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)}$	$\frac{2(\beta + \epsilon)}{k(\beta\epsilon^2 s + \epsilon^2 + 4\beta\epsilon + 2\beta^2)s}$	$\frac{2(\beta + \epsilon)}{2\beta^2 + 4\beta\epsilon + \epsilon^2}$	$2(\beta + \epsilon)$	–	$\frac{\beta^2}{2\beta^2 + 4\beta\epsilon + \epsilon^2}$	4, 6
P	$k\frac{-\beta s + 1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{-\beta s + 1}{\epsilon s + 1}$	$\frac{\tau s + 1}{k(\beta + \epsilon)}$	$\frac{1}{\beta + \epsilon}$	–	$\tau$	–	2, 3, 5
Q	$k\frac{-\beta s + 1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{-\beta s + 1}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)}$	$\frac{\tau s + 1}{k(\beta\epsilon s + 2\beta + \epsilon)}$	$\frac{1}{2\beta + \epsilon}$	–	$\tau$	$\frac{\beta\epsilon}{2\beta + \epsilon}$	1, 4
R	$k\frac{-\beta s + 1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{(-\beta s + 1)((\beta + 2\epsilon)s + 1)}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)}$	$\frac{(\tau s + 1)(2(\beta + \epsilon)s + 1)}{k(\beta + \epsilon)^2 s}$	$\frac{\beta + 2\epsilon + \tau}{(\beta + \epsilon)^2}$	$\beta + 2\epsilon + \tau$	$\frac{\tau(\beta + 2\epsilon)}{\beta + 2\epsilon + \tau}$	–	5, 6
S	$k\frac{-\beta s + 1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{(-\beta s + 1)((\beta + 2\epsilon)s + 1)}{(\beta s + 1)(\epsilon s + 1)^2}$	$\frac{(\tau s + 1)(2(\beta + \epsilon)s + 1)}{k(\beta\epsilon^2 s + \epsilon^2 + 4\beta\epsilon + 2\beta^2)s}$	$\frac{2(\beta + \epsilon) + \tau}{2\beta^2 + 4\beta\epsilon + \epsilon^2}$	$2(\beta + \epsilon) + \tau$	$\frac{2\tau(\beta + \epsilon)}{2(\beta + \epsilon) + \tau}$	$\frac{\beta^2}{2\beta^2 + 4\beta\epsilon + \epsilon^2}$	4, 6

Pour les systèmes à non-minimum de phase, deux choix pour la sélection de  $\tilde{g}_+f$  sont possibles :

**Choix 1 :**

$$\tilde{g}_+f = \left( \frac{-\beta s + 1}{\beta s + 1} \right) \frac{1}{\varepsilon s + 1} \quad (\text{B.1})$$

(B.1) est optimal au sens du critère ISE au changement de consigne lorsque  $\varepsilon = 0$  [Holt & Morari, 1985].

**Choix 2 :**

$$\tilde{g}_+f = \frac{-\beta s + 1}{\varepsilon s + 1} \quad (\text{B.2})$$

Pour des entrées en échelon, (B.2) est optimal au sens du critère IAE lorsque  $\varepsilon = 0$  et ISE optimal lorsque  $\varepsilon = \beta$  [Holt & Morari, 1985].

Les numérotations mentionnées au niveau de la dernière colonne du Tableau ci-dessus sont détaillées comme suit :

1. ISE optimal pour des changements de consigne lorsque  $\varepsilon = 0$ .
2. IAE optimal pour des changements de consigne de type échelon lorsque  $\varepsilon = 0$ .
3. ISE optimal pour des changements de consigne lorsque  $\varepsilon = \beta$ .
4. Filtre/Factorisation selon le choix 1 (B.1). Recommandation pratique pour  $\varepsilon > \beta/2$ .
5. Filtre/Factorisation selon le choix 2 (B.2). Recommandation pratique pour  $\varepsilon > \beta$ .
6. Erreur de vitesse nulle pour les changements de consigne/perturbation de type rampe.

## Annexe C : Synthèse d'une commande IMC-PID pour un système de premier ordre avec retard

On considère la fonction de transfert du système de premier ordre avec retard :

$$g(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (\text{C.1})$$

et soit  $f$  le filtre de premier ordre choisi pour la synthèse du correcteur IMC non idéal :

$$f = \frac{1}{\varepsilon s + 1} \quad (\text{C.2})$$

D'autre part, soit l'approximation de Padé d'ordre 1 de  $e^{-\theta s}$  donnée par :

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s} \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, en substituant (C.3) dans (C.1), le modèle du processus  $\tilde{g}(s)$  de  $g$  (C.1) est donné par :

$$\tilde{g}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s} \quad (\text{C.4})$$

Le modèle  $\tilde{g}$  peut être factorisé comme un produit de deux facteurs  $\tilde{g}_+$  et  $\tilde{g}_-$  où :

$$\tilde{g}_-(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{1}{1 + \frac{\theta}{2}s} \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{g}_+(s) = 1 - \frac{\theta}{2}s \quad (\text{C.6})$$

Sachant que le correcteur classique  $c$  est donné par

$$c = \frac{\tilde{g}_-^{-1}f}{1 - \tilde{g}_+f} \quad (\text{C.7})$$

$\tilde{g}_+f$  s'écrit alors :

$$\tilde{g}_+f = \frac{-\frac{\theta}{2}s + 1}{\varepsilon s + 1} \quad (\text{C.8})$$

et  $\tilde{g}_-^{-1}f$  s'écrit :

$$\tilde{g}_-^{-1}f = \frac{\tau s + 1}{k} \frac{1 + \frac{\theta}{2}s}{\varepsilon s + 1} \quad (\text{C.9})$$

En substituant (C.8), (C.9) dans (C.7), l'expression du correcteur  $c$  devient :

$$c = \frac{1 + \tau s}{k} \frac{1 + \frac{\theta}{2}s}{(\frac{\theta}{2} + \varepsilon)s} \quad (\text{C.10})$$

En développant (C.10), on obtient :

$$c = \frac{1}{k} \times \frac{2\tau + \theta}{2\varepsilon + \theta} \left( 1 + \frac{2}{2\tau + \theta} \frac{1}{s} + \frac{\tau\theta}{2\tau + \theta} s \right) \quad (\text{C.11})$$

Or la forme du correcteur PID est donnée par :

$$c = k_P \left( 1 + \frac{1}{k_I s} + k_D s \right) \quad (\text{C.12})$$

Par identification, les paramètres du correcteur PID pour la fonction de transfert de premier ordre avec retard (C.1) sont donnés par le Tableau C.1.

Tableau C.1 – Paramètres PID basés sur la méthode IMC pour  $g(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$

Paramètres	$k_P$	$k_I$	$k_D$
Correcteur			
PID	$\frac{1}{k} \times (2\tau + \theta) / (2\varepsilon + \theta)$	$\tau + (\theta/2)$	$\tau\theta / (2\tau + \theta)$

Pour le cas du système (C.1), le choix recommandé de  $\varepsilon$  est  $\varepsilon / \theta > 0.8$  [Rivera *et al.*, 1986]. Pour  $k=1$ ,  $\tau=10$ ,  $\theta=2$  et en choisissant  $\varepsilon=2$ , les paramètres du correcteur PID calculés selon le Tableau C.1 sont donnés par  $k_P = 3.6667$ ,  $k_I = 11$  et  $k_D = 0.9091$ . La réponse du système bouclé de  $g(s) = e^{-2s}/(10s+1)$  via le correcteur IMC-PID conçu est présentée alors par la Figure C.1.

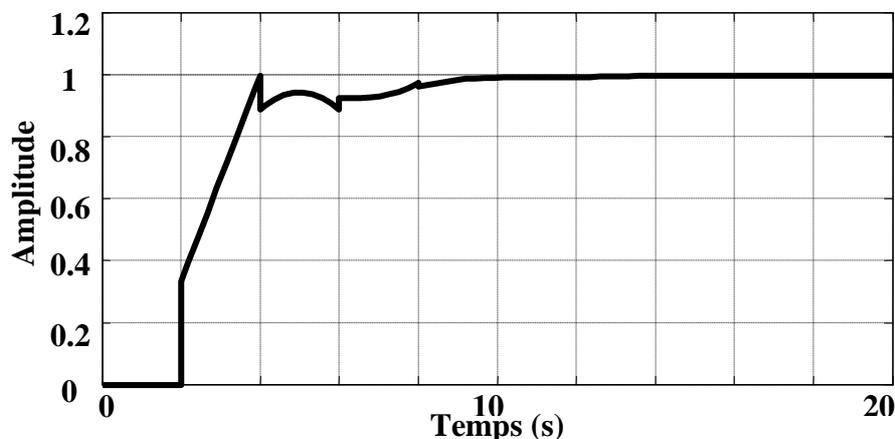


Figure C.1 – Réponse indicielle en boucle fermée de  $g(s) = \frac{e^{-2s}}{10s+1}$  via IMC-PID

## Annexe D : Valeurs singulières

**Définition** [Laroche, 2011]

Les valeurs singulières d'une matrice complexe  $M$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $M^H M$  où  $M^H$  est le hermitien (transposé conjugué) de  $M$ . On les note  $\sigma_i(M)$ .

**Propriétés importantes** [Laroche, 2011]

Soient  $\underline{\sigma}(M)$  la valeur singulière minimale de  $M$  et  $\overline{\sigma}(M)$  la valeur singulière maximale de  $M$ . Les principales propriétés de valeurs singulières sont données comme suit :

- $\overline{\sigma}(\lambda M) = |\lambda| \overline{\sigma}(M)$
- $\overline{\sigma}(M + N) \leq \overline{\sigma}(M) + \overline{\sigma}(N)$
- $\overline{\sigma}(MN) \leq \overline{\sigma}(M) \overline{\sigma}(N)$
- $M$  est inversible si et seulement si ( $\underline{\sigma}(M) > 0$ ), alors :

$$\overline{\sigma}(M) = \frac{1}{\underline{\sigma}(M^{-1})} \text{ et } \underline{\sigma}(M) = \frac{1}{\overline{\sigma}(M^{-1})}.$$

On en déduit les propriétés suivantes :

- $\underline{\sigma}(\lambda M) = |\lambda| \underline{\sigma}(M)$
- $\underline{\sigma}(M + N) \geq \underline{\sigma}(M) + \underline{\sigma}(N)$
- $\overline{\sigma}(M) \underline{\sigma}(N) \leq \overline{\sigma}(MN)$

## Annexe E : Passage de la matrice de transfert à la représentation d'état par la méthode de Gilbert : Cas du réacteur ISP

Considérons la matrice de transfert du réacteur ISP [Chien *et al.*, 1999] décrite par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89000e^{-\tau_2 s}}{4.5720s+1} & \frac{-11.64000e^{-\tau_3 s}}{1.8070s+1} \\ \frac{4.6890e^{-\tau_2 s}}{2.1740s+1} & \frac{5.8000e^{-\tau_3 s}}{1.8010s+1} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

La matrice de transfert normalisée s'écrit :

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{5.0660e^{-\tau_2 s}}{s+0.2187} & \frac{-6.4416e^{-\tau_3 s}}{s+0.5534} \\ \frac{2.1569e^{-\tau_2 s}}{s+0.46} & \frac{3.2204e^{-\tau_3 s}}{s+0.5552} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Une décomposition en éléments simples permet d'écrire  $G(s)$  sous cette forme :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 5.0660e^{-\tau_2 s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+0.2187} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -6.4416e^{-\tau_3 s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+0.5534} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.1569e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix}}{s+0.4600} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.2204e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s+0.5552}$$

Soit les matrices de transfert élémentaires :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5.0660e^{-\tau_2 s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -6.4416e^{-\tau_3 s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.1569e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.2204e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}$$

on a alors :

$$r_{G1} = \text{rang}(M_1) = 1, r_{G2} = \text{rang}(M_2) = 1, r_{G3} = \text{rang}(M_3) = 1 \text{ et } r_{G4} = \text{rang}(M_4) = 1.$$

L'ordre du système est donc :

$$n = \sum_{i=1}^4 r_{Gi} = r_{G1} + r_{G2} + r_{G3} + r_{G4} = 4$$

et il existe des matrices  $C_i \in \mathfrak{R}^{\ell \times r_{Gi}}$  et  $B_i \in \mathfrak{R}^{r_{Gi} \times m}$  ( $\ell = 2, m=2$ ) vérifiant :

$$C_1:(2,1), C_2:(2,1), C_3:(2,1), C_4:(2,1), B_1:(1,2), B_2:(1,2), B_3:(1,2) \text{ et } B_4:(1,2)$$

telle qu'on a de plus :

$$M_1 = C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.0660e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6.4416e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = C_3 B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1569e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = C_4 B_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3.2204e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}$$

Une écriture possible de  $G(s)$  est donnée par :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.0660e^{-0.2s} & 0 \end{pmatrix}}{s+0.2187} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6.4416e^{-0.4s} \end{pmatrix}}{s+0.5534} + \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.1569e^{-0.2s} & 0 \end{pmatrix}}{s+0.46} + \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3.2204e^{-0.4s} \end{pmatrix}}{s+0.5552}$$

On peut donc déduire la réalisation suivante de  $G(s)$  (E.2) sous la forme (3.1) :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5534 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5552 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 5.0660 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.1569 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6.4416 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.2204 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\tau_2 = 0.2h$  et  $\tau_3 = 0.4h$ .

Ainsi, le résultat (3.32) de la section 3.5 est vérifié.

## Annexe F : Passage de la matrice de transfert à la représentation d'état par la méthode de Gilbert : Cas de la colonne de distillation

Considérons la matrice de transfert de la colonne de distillation décrite par [Mete *et al.*, 2006]:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3.0400e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{-278.2000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \\ \frac{0.0520e^{-\tau_2 s}}{s} & \frac{206.6000e^{-\tau_3 s}}{s(s+6)(s+30)} \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

Une décomposition en éléments simples permet d'écrire :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 3.0400 \\ 0.0520 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} -278.2000 \\ +206.6000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s(s+6)(s+30)} \quad (F.2)$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

On décompose  $G_2(s)$  en éléments simples :

$$G_2(s) = \frac{M_{21}}{s} + \frac{M_{22}}{s+6} + \frac{M_{23}}{s+30}$$

$$M_{21} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_2(s) = \frac{\begin{pmatrix} -278.2000 \\ 206.6000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{180} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -278.2000 \\ 0 & 206.6000 \end{pmatrix}}{180} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5455 \\ 0 & 1.1477 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \lim_{s \rightarrow -6} (s+6)G_2(s) = \frac{\begin{pmatrix} -278.2000 \\ 206.6000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{(-6) \times 24} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -278.2000 \\ 0 & 206.6000 \end{pmatrix}}{-144} = \begin{pmatrix} 0 & 1.9319 \\ 0 & -1.4347 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \lim_{s \rightarrow -30} (s+30)G_2(s) = \frac{\begin{pmatrix} -278.2000 \\ 206.6000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}{(-30) \times 24} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -278.2000 \\ 0 & 206.6000 \end{pmatrix}}{720} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3861 \\ 0 & 0.2869 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $G(s)$  peut être écrite comme suit :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 3.0400e^{-\tau_2 s} & 0 \\ 0.0520e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1.5455e^{-\tau_3 s} \\ 0 & 1.1477e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1.9319e^{-\tau_3 s} \\ 0 & -1.4347e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s+6} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0.3861e^{-\tau_3 s} \\ 0 & 0.2869e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s+30}$$

On a alors :

$$r_{G1} = \text{rang}(M_1) = 1, r_{G2} = \text{rang}(M_2) = 1, r_{G3} = \text{rang}(M_3) = 1 \text{ et } r_{G4} = \text{rang}(M_4) = 1.$$

L'ordre du système est donc :

$$n = \sum_{i=1}^4 r_{Gi} = r_{G1} + r_{G2} + r_{G3} + r_{G4} = 4$$

et il existe des matrices  $C_i \in \mathfrak{R}^{\ell \times r_{Gi}}$  et  $B_i \in \mathfrak{R}^{r_{Gi} \times m}$  ( $\ell = 2, m=2$ ) vérifiant les dimensions des vecteurs  $B_i$  et  $C_i$  :

$$C_1:(2,1), C_2:(2,1), C_3:(2,1), C_4:(2,1), B_1:(1,2), B_2:(1,2), B_3:(1,2) \text{ et } B_4:(1,2)$$

telles qu'on a de plus :

$$M_1 = C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 3.04 \\ 0.052 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = C_2 B_2 = \begin{pmatrix} -1.54 \\ 1.14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix},$$

$$M_3 = C_3 B_3 = \begin{pmatrix} 1.93 \\ -1.43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix},$$

$$M_4 = C_4 B_4 = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}$$

Une écriture possible de  $G(s)$  (F.1) est :

$$G(s) = \frac{\begin{pmatrix} 3.0400 \\ 0.0520 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau_2 s} & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} -1.5455 \\ 1.1477 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 1.9319 \\ -1.4347 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s+6} + \frac{\begin{pmatrix} 0.3861 \\ 0.2869 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\tau_3 s} \end{pmatrix}}{s+30}$$

dont la représentation modale associée est décrite par le modèle à multiple retard (3.1) avec :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3.0400 & -1.5455 & 1.9319 & 0.3861 \\ 0.0520 & 1.1477 & -1.4347 & 0.2869 \end{pmatrix}$$

avec  $\tau_2 = 0.5h$  et  $\tau_3 = 0.6h$ .

Le résultat (3.36) de la section 3.5 est ainsi vérifié.

---

## Annexe G : Synthèse du correcteur multi-boucles IMC-PID

### MIMO : Cas du processus à 4 réservoirs

On considère le processus à 4 réservoirs à retards multiples décrit par [El Haoussi *et al.*, 2011]:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.0241e^{-s\tau_2}}{s+0.1993} & \frac{0.0047e^{-s(\tau_1+\tau_3)}}{(s+0.1995)(s+0.1230)} \\ \frac{0.0024e^{-s(\tau_1+\tau_3)}}{(s+0.1422)(s+0.0873)} & \frac{0.0175e^{-s\tau_2}}{s+0.1422} \end{pmatrix} \quad (G.1)$$

Les courbes fréquentielles des mesures d'interactions IMC pour la paire originale et la paire inverse du processus à 4 réservoirs sont données respectivement par les Figures G.1, G.2, G.3 et G.4.

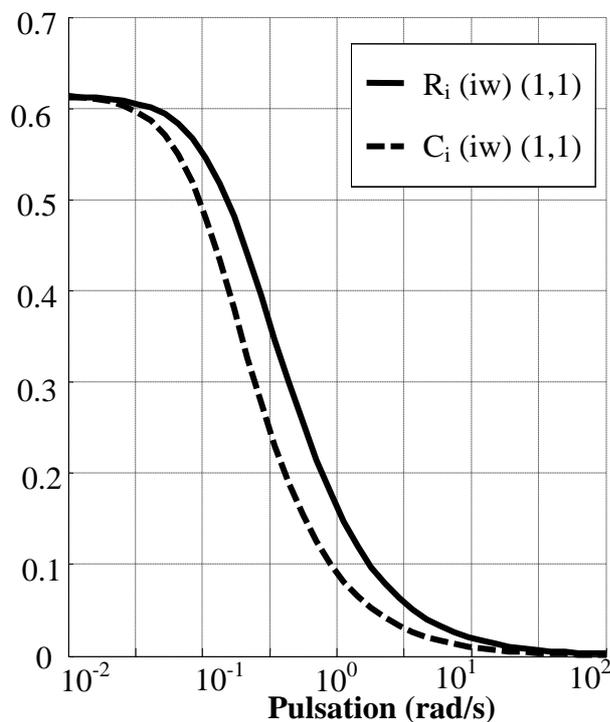


Figure G.1 : Mesures d'interaction  $R_i$  et  $C_i$  pour la paire (1,1)

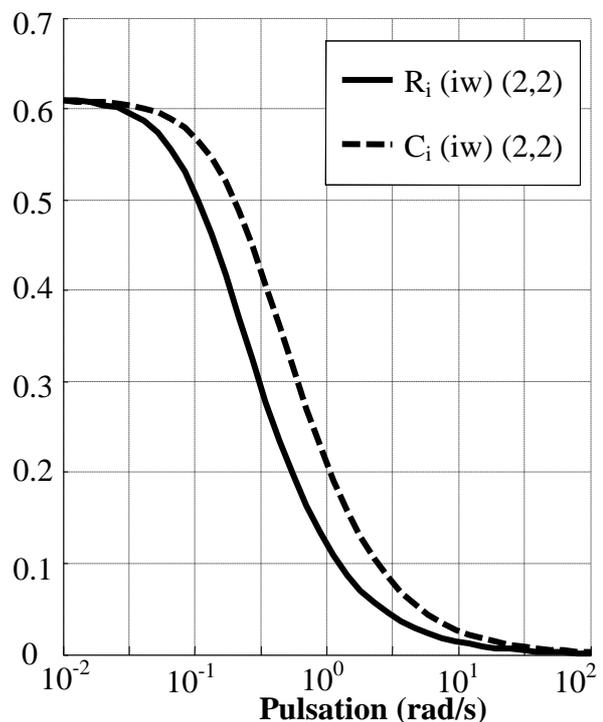


Figure G.2 : Mesures d'interaction  $R_i$  et  $C_i$  pour la paire (2,2)

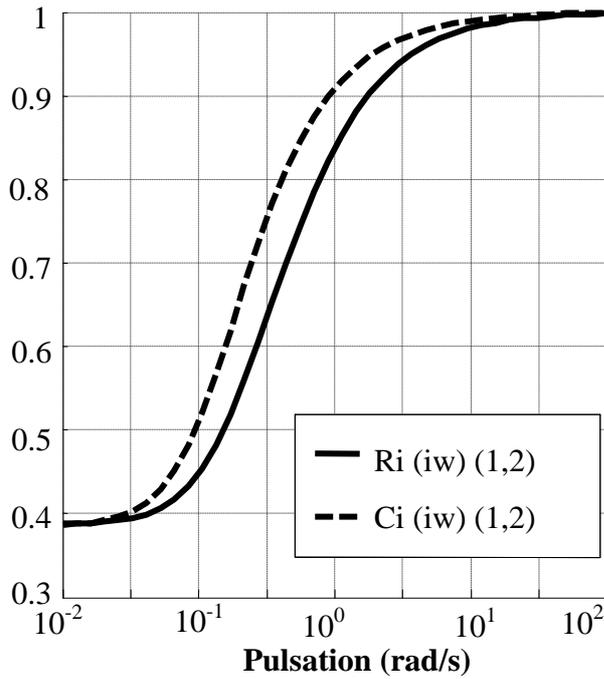


Figure G.3 : Mesures d'interactions  $R_i$  et  $C_i$  pour la paire (1,2)

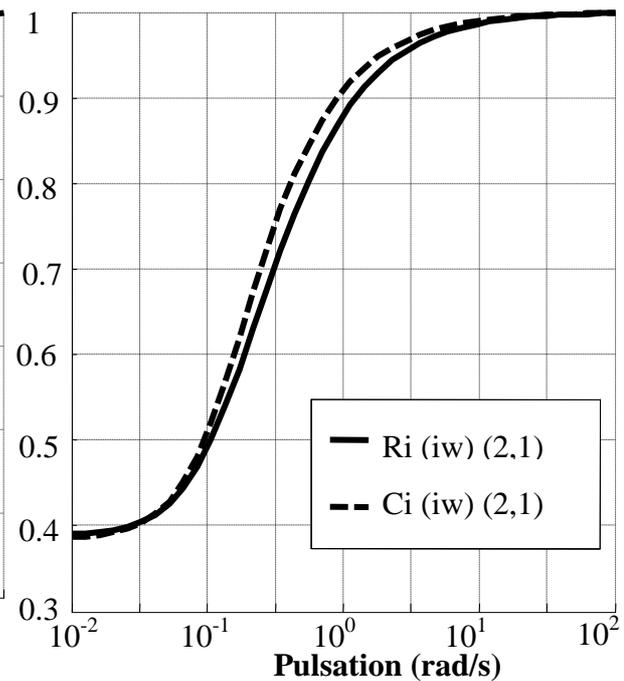


Figure G.4 : Mesures d'interactions  $R_i$  et  $C_i$  pour la paire (2,1)

Les tableaux G.1 et G.2 synthétisent les interactions du processus à 4 réservoirs pour la paire originale et celle inverse en utilisant les mesures d'interactions IMC.

**Tableau G.1 : Interactions du processus à 4 réservoirs : Paire originale**

	Fréquences		
	Basses	Intermédiaires	Hautes
1 ( $u_1, y_1$ )	$R_i$ fort à faible + $C_i$ fort à faible, problèmes dues aux interactions.	$R_i$ faible + $C_i$ faible, bonne paire.	$R_i$ faible + $C_i$ faible, bonne paire.
2 ( $u_2, y_2$ )	$R_i$ fort à faible + $C_i$ fort à faible, problèmes dues aux interactions, un correcteur SISO peut être utilisé.	$R_i$ faible + $C_i$ faible, bonne paire.	$R_i$ faible + $C_i$ faible, bonne paire.
Conclusion	Bonne paire en utilisant la mesure d'interaction de la colonne et les correcteurs SISO.	Bonne paire en utilisant la mesure d'interaction de la colonne et les correcteurs SISO.	Bonne paire en utilisant la mesure d'interaction de la colonne et les correcteurs SISO.

**Tableau G.2 : Interactions du processus à 4 réservoirs : Paire inverse**

	Fréquences		
	Basses	Intermédiaires	Hautes
1 ( $u_2, y_1$ )	$R_i + C_i$ faible à fort, problèmes dues aux interactions.	$R_i$ fort + $C_i$ fort, interactions significatives	$R_i$ fort + $C_i$ fort, interactions significatives
2 ( $u_1, y_2$ )	$R_i + C_i$ faible à fort, problèmes dues aux interactions.	$R_i$ fort + $C_i$ fort, interactions significatives	$R_i$ fort + $C_i$ fort, interactions significatives
Conclusion	Détérioration de performances en utilisant un correcteur SISO	L'utilisation d'un correcteur SISO n'est pas suggérée	L'utilisation d'un correcteur SISO n'est pas suggérée

A partir des Tableaux G.1 et G.2, on choisit la paire originale ((1,1) et (2,2)) vu que la condition d'avoir une bonne paire ( $R_i > 0$  et  $C_i \leq 0.5$ ) est vérifiée sur une grande bande fréquentielle. Le modèle  $\tilde{G}(s)$  de la matrice de transfert  $G(s)$  est ainsi donné par :

$$\tilde{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.0241e^{-s\tau_2}}{s+0.1993} & 0 \\ 0 & \frac{0.0175e^{-s\tau_2}}{s+0.1422} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le correcteur PID SISO peut être appliqué à chacune des deux boucles du processus à 4 réservoirs. Les paramètres PID sont synthétisés suivant le Tableau C.1 de l'Annexe C.

### Boucle 1 :

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{0.0241e^{-s\tau_2}}{s+0.1993} = \frac{0.0417/0.1993e^{-s\tau_2}}{(1/0.1993)s+1} = \frac{0.1209e^{-s\tau_2}}{5.0176s+1} = \frac{ke^{-s\theta}}{\tau s+1}$$

avec  $k = 0.1209$ ,  $\tau = 5.0176$ ,  $\theta = 2s$ ,  $\varepsilon = 2$  ( $\varepsilon$  est choisi tel que  $\varepsilon / \theta > 0.8$ ).

Selon l'annexe C, les paramètres PID SISO pour la boucle 1 sont :

$$k_{P1} = 2.0059, k_{I1} = 6.0176 \text{ et } k_{D1} = 0.8338.$$

**Boucle 2 :**

$$\frac{y_2}{u_2} = \frac{0.0175e^{-s\tau_2}}{s+0.1422} = \frac{(0.0314/0.1406)e^{-s\tau_2}}{(1/0.1406)s+1} = \frac{0.2233e^{-s\tau_2}}{7.1124s+1} = \frac{ke^{-s\theta}}{\tau s+1}$$

avec  $k = 0.2233$ ,  $\tau = 7.1124$ ,  $\theta = 2s$ ,  $\varepsilon = 2$  ( $\varepsilon$  est choisi tel que  $\varepsilon/\theta > 0.8$ ).

Selon l'annexe C, les paramètres PID SISO pour la boucle 2 sont :

$$k_{P2} = 2.6774, \quad k_{I2} = 8.0323 \text{ et } k_{D2} = 0.8755.$$

Le correcteur multivariable multi-boucles synthétisé par l'approche IMC-PID MIMO, à appliquer au processus à 4 réservoirs est donné alors par :

$$C(s) = \begin{pmatrix} 2.0059\left(1 + \frac{1}{6.0176*s} + 0.8338*s\right) & 0 \\ 0 & 2.6774\left(1 + \frac{1}{8.0323*s} + 0.8755*s\right) \end{pmatrix}$$

Les réponses indicielles des deux sorties du processus sont données par les Figures G.5 et G.6.

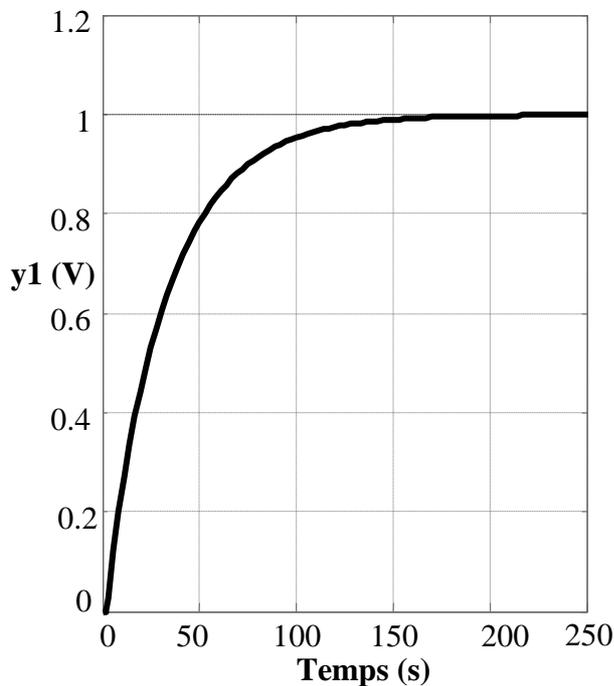


Figure G.5 : Réponse de la sortie 1 à un échelon unitaire

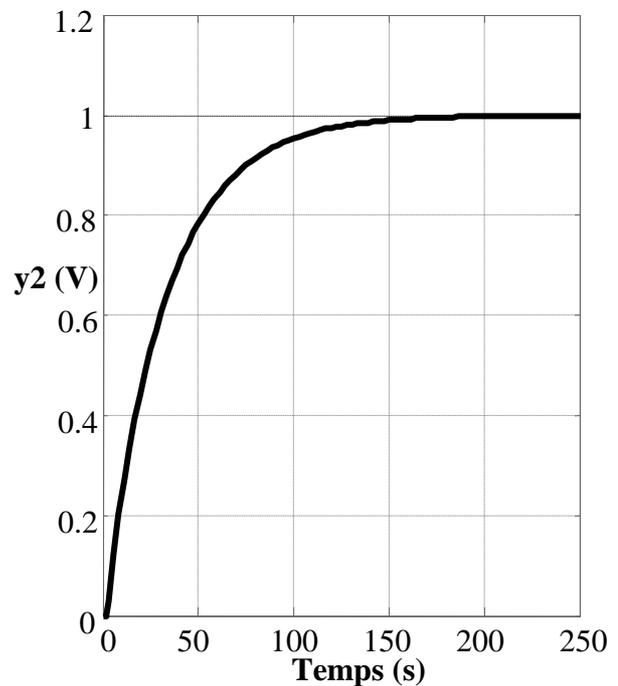


Figure G.6 : Réponse de la sortie 2 à un échelon unitaire

