



HAL
open science

Analyse numérique et expérimentale de vibrations non linéaires géométrique de structures élastiques et piézoélectriques. Modèles réduits et interactions modales

Arthur Givois

► **To cite this version:**

Arthur Givois. Analyse numérique et expérimentale de vibrations non linéaires géométrique de structures élastiques et piézoélectriques. Modèles réduits et interactions modales. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2019. Français. NNT : . tel-02596754

HAL Id: tel-02596754

<https://hal.science/tel-02596754v1>

Submitted on 15 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'ingénieur

Doctorat

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité : Génie Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Arthur GIVOIS

le 4 décembre 2019

**Analyse numérique et expérimentale de vibrations non linéaires de structures élastiques et piézoélectriques.
Modèles réduits et interactions modales**

Directeurs de thèse : **Olivier THOMAS & Jean-François DEÛ**

Jury

M. Liviu NICU, Directeur de Recherche CNRS, LAAS

M. Attilio FRANGI, Professeur, Dept. Of Civil and Environm. Eng., Politecnico di Milano

M. Jean-Jacques SINOU, Professeur des Universités, LTDS, École Centrale de Lyon

M. Jean-François DEÛ, Professeur des Universités, LMSSC, Cnam Paris

M. Marc MIGNOLET, Professeur, Fac. Of Mech. and Aerospace Eng., Arizona State University

Mme Emmanuelle SARROUY, Maître de Conférence, LMA, École Centrale de Marseille

M. Olivier THOMAS, Professeur des Universités, LISPEN, Arts et Métiers Lille

Président du jury

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

**T
H
È
S
E**

Arts et Métiers ParisTech - Campus de Lille
Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques Et Numériques (LISPEN / EA 7515)

Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC / EA 3196)

"Vous feriez mieux de ne pas vous creuser la tête ni de rêver, ingénieur, mais de vous fier résolument aux instincts de votre âge et de votre race qui doivent vous pousser à l'action. Votre formation scientifique, elle aussi, doit vous incliner vers l'idée de progrès."

Thomas Mann, *La montagne magique*

"Autant que se peut, enseigne à devenir efficace, pour le but à atteindre mais pas au delà. Au delà est fumée. Où il y a fumée il y a changement."

"Ne t'attarde pas à l'ornière des résultats."

[...]

"Vous serez une part de la saveur du fruit"

[...]

"Toute l'autorité, la tactique et l'ingéniosité ne remplacent pas une parcelle de conviction au service de la vérité. Ce lieu commun, je crois l'avoir amélioré."

[...]

"Le combat de la persévérance. La symphonie qui nous portait s'est tue. Il faut croire à l'alternance. Tant de mystères n'ont pas été pénétrés ni détruits."

[...]

"Tu ne peux pas te relire mais tu peux signer."

René Char, *Feuillets d'Hypnos* (1-2-10-35-93-96)

Remerciements

La réalisation de ma thèse doit essentiellement à toutes les personnes qui m'ont accompagnée : en cela je les remercie, et j'espère ne pas (trop) en oublier.

Je tiens à remercier en premier lieu mes encadrants de thèse, Olivier et Jean-François, d'une part de leur confiance et d'autre part pour m'avoir permis de plonger et de tenir des rennes de ces vastes sujets qui les tiennent particulièrement à cœur. Je tiens à remercier Olivier pour son énergie, son exigence, son indéfectible volonté d'aller au fond des choses et de rechercher en permanence la "substantifique moelle". Sa passion pour les sciences et sa volonté de la transmettre resteront des traits marquants au cours de ces trois années d'échange. Je tiens également à t'exprimer ma reconnaissance pour ta volonté de me transmettre un maximum d'outils et de connaissance qui me permettront d'accomplir mes projets par la suite. Merci à Jean-François pour la qualité de son encadrement malgré ma présence moins régulière à Paris. Son recul scientifique, son regard expérimenté et ses remarques pertinentes ont permis d'aiguiller efficacement mon regard sur l'ensemble des sujets abordés.

Mes remerciements vont également aux membres du jury. Je remercie Attilio Frangi et Jean-Jacques Sinou pour leur lecture attentive et exhaustive, les remarques pertinentes et l'intérêt porté à l'ensemble de ces travaux. Je tiens particulièrement à remercier Emmanuelle Sarrouy pour sa lecture détaillée et son retour efficace et constructif. Je remercie également Marc Mignolet pour son regard avisé et expert. Merci à Liviu Nicu de son intérêt pour ces travaux et d'avoir assuré avec une grande bienveillance le rôle du président au cours de la soutenance. Je remercie également Cyril Touzé, dont la présence continue au cours de la thèse et avec qui les interactions m'ont été à chaque fois bénéfiques.

De nombreuses personnes ont permis de mener à bien ces travaux de manières diverses et variées, parmi lesquelles je souhaite citer un certain nombre de chercheurs, souvent jeunes : je remercie en premier lieu Vivien Denis pour les nombreux échanges, aussi bien dans le cadre studieux du "bureau sur la passerelle", que ceux plus loin dans la thèse pour m'aiguiller sur le système de contrôle à verrouillage de phase, ou encore dans un cadre musical. Merci également à Aurélien Grolet pour ses avis constructifs, bienveillants et experts, ainsi qu'à Lucie Rouleau pour l'ensemble des conseils au cours de ces trois années. Merci également à Christophe Giraud-Audine pour l'ensemble des indications et recommandations concernant les céramiques piézoélectriques. Je remercie également Boris Lossouarn pour les nombreuses discussions sur ce même sujet. Dans un cadre extérieur aux laboratoires, merci à Arthur Paté pour l'ensemble des discussions scientifiques ainsi que sur le déroulement de la thèse, bienvenues après son arrivée à Lille. D'autres chercheurs ont contribué de façon plus ponctuelle mais aussi significativement à cette thèse via des échanges par mails : je remercie notamment Ludovic Renson, Corrado Maurini et Arnaud Deraemeker. Merci également Roger Ohayon pour les nombreuses discussions au Cnam. Je souhaite remercier Frédéric Guillerm pour la fabrication de la plaque piézoélectrique, ainsi que Geoffrey pour l'aide apportée lors de sa manipulation. L'ensemble des mesures sur la plaque piézoélectrique n'aurait pas été possible sans leur concours et leur savoir-faire. Pour le soutien quotidien, je remercie Éric (grâce à qui je peux enfin imprimer un document correctement à l'ensam avec de bonnes couleurs), Stéphane (pour les conseils pédagogiques et les discussions MPG), Philippe ('ai réussi à me connecter au CNAM, c'est tout bon!) et Vincent (sans qui mon log continuerait de se remplir à une vitesse incontrôlable). Enfin, je remercie Mickaël Abbas et Cyril Pujos pour les échanges (nourris) concernant Code_Aster et Abaqus.

La fin de la thèse est également synonyme de la fin des études. Je tiens à remercier l'ensemble des "profs" m'ayant aidé à mener à bien mon parcours universitaire depuis la licence (et avant), qui ont cultivé une passion contagieuse pour les sciences, les technologies et la recherche, et qui ont aidé à me construire. C'est en partie leur énergie et leur passion qui m'aura permis d'"aller au bout" de la thèse. Parmi tous ceux-ci, je remercie notamment Boris Doval, Hélène Dumontet et Jean-Loïc Le Carrou pour l'ensemble de leurs activités pédagogiques et de recherche (et les deux à la fois!).

L'aventure de la thèse est également celle partagée avec les camarades doctorants. Ceux et celles-ci auront joué des rôles essentiels, aussi bien à travers les bons moments passés aux labos lillois comme parisiens (autour d'un café bien sûr ! Et puis ... je prendrai ma revanche à Bohnanza, héhé !), les travaux réalisés en communs ("ah bon, le signal ne fait que saturer à la sortie de l'ampli ?"), les "petits trucs" échangés ("dis, dans une équation en latex, quel est le meilleur moyen de [...] ?"), le partage de moments de galère (parce qu'il y en aura eu pas mal), les rendez-vous des bons copains ("une pinte de [...], s'il vous plaît"), et tout le reste ... Je remercie, dans un ordre aléatoire et pour les lillois : Tiago, Emmanuel, Alexandre, Eddy, David, Sebastian, Gabriel, Youssouf, Tan, Michel, Martin, Joris, Quentin, Mouad, Pierre, Amélie, Laurent, Pierre, Thomas, François, Lamine et Miguel. J'associe naturellement Guillaume, Marie et Carine à ces remerciements. Je remercie également Antoine pour le soutien en fin de thèse. Je n'oublie pas les camarades du LMSSC à Paris, en particulier Christophe (merci beaucoup pour les discussions scientifiques autour des éléments finis), Robin (merci beaucoup pour ta précieuse relecture), Sylvain (merci beaucoup pour ces terribles parties de badminton) et Chaïma (merci beaucoup pour avoir la banane tout le temps). Je pense également à l'équipe d'orga des JJCAB17 (Aro, Adrien, Adrien, Marco, Martin) et les jeunes de Dynolin (Adrien, Diala, Samy, Gabriel, et j'en oublie ...). Merci notamment à Mathieu, Vinciane et Alessandra, avec qui j'ai eu la chance de travailler dans le cadre de la thèse. Parmi les très bons moments partagés avec tous eux, le week-end à Fieugy, l'école d'été à Fréjus, les JJCAB, les soirées jeux de société, les lendemains de rencontres MPG, la conf' de Giens [et j'en oublie évidemment] demeureront d'excellents souvenirs.

Concernant tous les moments hors-labo, je remercie d'abord chaleureusement mes colocataires, Camille, Bérenger et Léonie. Car être thésard signifie ne pas toujours être colocataire exemplaire, merci de votre patience. Merci aussi pour tous les bons moments partagés dans des occasions diverses (tisanes, chocolats, un verre de bière ou de rhum, ripaille ou discussions animées, sorties, et j'en passe ...). Je remercie l'équipe de musique ancienne du conservatoire de Lille (Dominique, Christine, Dominique, Emer, Thomas) de m'avoir permis de participer à de bons moments de musique. Je remercie Erwan, Lou, Théo, Stéphanie, Adelya, Pascale, Édouard, [...] pour l'ensemble des partitions jouées et travaillées ensemble. Je remercie particulièrement Camille et Alexandre pour leur soutien précieux. Côté sport, je remercie les badistes-lucistes (et badistes tout court) : Jean-Phi, Camille, Corentin, Justine, Guillaume, Anthony, Marion, Julien, Léa, Antoine, Nicolas, Blandine, Perrine, Clément, Marco, Caroline, Corinne, William, Simon, Marion, Mohammed, Jean-Paul, [...] pour tous les échanges de volants, permettant des moments de défoulement bienvenus, intenses et agréables tout au long de la thèse. Je remercie également les Sciences & Musico pour avoir pu réussir à se retrouver quelques moments malgré nos agendas aléatoires et l'éloignement géographique. Merci à l'équipe rock, découverte sur le tard, en particulier Valentine et Yann.

Je remercie ma famille dont le soutien a été continuellement précieux : tout d'abord mes parents, tant pour l'ensemble de leur éducation qui m'a permis d'effectuer mes propres choix au long de ma vie d'adolescent et d'adulte, que par les instants passés au logis deuillois au cours de la thèse. Je remercie Ève et Jules pour l'ensemble des moments passés ensemble malgré notre éloignement progressif et logique du foyer parental. Merci également aux grands-parents de m'avoir accueilli plusieurs fois chez Tranquard, notamment pour commencer (ou au moins essayer) la rédaction de ce manuscrit. Merci aux grands-parents absents, qui bien que partis ont permis des moments de repos salutaires et réguliers à Fieugy. Je souhaite également remercier tous les oncles, tantes, cousin.e.s, de ne m'avoir pas trop embêté sur ma thèse lorsque je les voyais (c'est bien de parler d'autres choses aussi). Je remercie en particulier Dominique pour ces "moments lillois". Je remercie finalement Adrien et Gaspard pour cette rando dans la Lauzière, au cœur des habitations de la faune locale.

Mes derniers remerciements vont à Manon : merci pour tout ton soutien dans cette difficile fin de thèse, et d'avoir continué à apporter du soleil, de l'apaisement et du bon sens malgré mon humeur évasive, une certaine nervosité et mon bazar permanent.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte et objectifs généraux	1
1.2	Motivations	1
1.2.1	MEMS et NEMS	1
1.2.2	Réduction et contrôle des vibrations	6
1.3	Généralités sur les non-linéarités en mécanique des solides	8
1.3.1	Linéaire vs non-linéaire	8
1.3.2	Sur les sources physiques des non-linéarités : classification générale	9
1.3.3	Non-linéarités géométriques dues aux grands déplacements de structures minces	10
1.4	Généralités sur les matériaux piézoélectriques	11
1.5	Verrous scientifiques	13
1.6	Démarche de la thèse et organisation du manuscrit	13
I	Modèles réduits et simulations : état de l'art et démarche de résolution	17
2	Modèles de structures minces piézoélectriques et non-linéaires géométriques	19
2.1	Modèles analytiques de milieux minces élastiques	21
2.1.1	Équations Lagrangiennes de la mécanique des milieux continus élastiques	21
	(a) Principe des travaux virtuels	21
	(b) Équations locales	22
	(c) Loi de comportement élastique linéaire : application à un matériau isotrope	23
2.1.2	Cas d'une poutre homogène	23
	(a) Déformations, contraintes et efforts intérieurs	24
	(b) Application du principe des travaux virtuels	26
	(c) Formulation forte du problème	27
	(d) Formulations en force et en déplacement du terme de membrane	27
	(e) Adimensionnement	28
2.1.3	Cas d'une plaque homogène	28
	(a) Hypothèses générales et cinématiques	28
	(b) Déformations, contraintes et efforts intérieurs	30
	(c) Application du principe des travaux virtuels	30
	(d) Formulations faible et forte du problème	31
	(e) Formulation en (w, F)	32
	(f) Formulation en (\mathbf{u}, w)	33
	(g) Adimensionnement	33
2.1.4	Bilan	34
2.2	Structures piézoélectriques et éléments finis	34
2.2.1	Matériaux piézoélectriques	35
	(a) Équations locales de l'électrostatique	35
	(b) Loi de comportement piézoélectrique linéaire	38
2.2.2	Formulation du problème électromécanique	39
	(a) Présentation du problème	39
	(b) Équations locales des problèmes électrique et mécanique	40

(c)	Formulation faible du problème couplé	41
2.2.3	Discrétisation par la méthode des éléments finis	42
(a)	Approximation du champ de déplacement et du champ électrique . .	42
(b)	Approximation des quantités locales	42
(c)	Formulation avec variables électriques locales (\mathbf{U}, ϕ)	43
(d)	Formulation en (\mathbf{U}, V, Q)	45
2.3	Réduction de modèles par projection modale	49
2.3.1	Modèle réduit modal de structures élastiques à partir de modèles analytiques	50
(a)	Cas d'une plaque circulaire et homogène : projection modale de la formulation en (w, F)	50
(b)	Projection modale des formulations en déplacement	51
(c)	Bilan	52
2.3.2	Modèles réduits modaux de structures piézoélectriques	53
(a)	Projection des équations sur les modes	53
(b)	Projection modale du problème électromécanique linéaire	54
(c)	Projection modale du problème complet	54
(d)	Synthèse	55
2.4	Conclusion du chapitre	55
3	Outils numériques de réduction de modèle et de simulation	57
3.1	Calcul de modèles réduits	58
3.1.1	Déplacements modaux imposés - STEP	59
3.1.2	Efforts modaux imposés	60
3.1.3	Condensation implicite et expansion (ICE)	63
3.1.4	Modes duaux	63
3.1.5	Dérivées modales	64
3.2	Simulations dynamiques	66
3.2.1	Méthodes d'intégration temporelle	66
(a)	Généralités	66
(b)	Exemple : le schéma de Newmark	66
(c)	Extension au cas non-linéaire : procédure itérative de Newton-Raphson	67
3.2.2	Outils numériques de calcul des solutions périodiques	68
3.2.3	Méthodes analytiques de perturbation : l'exemple des échelles multiples . . .	69
(a)	Présentation générale	69
(b)	Application à un oscillateur de Duffing	70
3.3	Méthode Asymptotique Numérique (MAN)	72
3.3.1	Continuation de systèmes non-linéaires	73
3.3.2	Développement asymptotique et mise en équation quadratique	74
3.3.3	Présentation de l'interface Manlab	75
3.3.4	Application à l'oscillateur de Duffing	76
(a)	Mise en équation quadratique	76
(b)	Implémentation avec Diamanlab	76
(c)	Comparaison des résultats avec ceux issus des échelles multiples . .	77
3.3.5	Application au problème statique de flexion d'une plaque	77
3.4	Bilan du chapitre	79
3.5	Démarche numérique adoptée	80

II	Développements de la méthode STEP	83
4	Validation et résolution de modèles réduits : application au calcul de réponses dynamiques de structures élastiques planes	85
4.1	Présentation de l'article	86
4.2	Sur le calcul des réponses en fréquence des structures planes avec non-linéarités géométriques par l'usage de modèles éléments finis réduits	87
4.3	Bilan	123
5	Modèles réduits modaux de structures piézoélectriques avec la méthode STEP	125
5.1	Extension de la méthode STEP aux coefficients piézoélectriques	126
5.1.1	Principe général	126
5.1.2	Cas des coefficients piézoélectriques linéaires	127
5.1.3	Cas des coefficients piézoélectriques non-linéaires	127
5.2	Validation des coefficients piézoélectriques linéaires	128
5.2.1	Présentation du cas-test	128
5.2.2	Modèle analytique	128
	(a) Équations d'équilibre et efforts intérieurs	128
	(b) Projection modale	130
5.2.3	Investigation numérique	131
	(a) Facteurs de couplage modaux et effectifs	131
	(b) Données du modèle	133
	(c) Choix d'une stratégie de maillage	133
5.2.4	Calcul des facteurs de couplage effectifs	135
5.2.5	Validation par comparaison des différents calculs de k_i	136
5.2.6	Validation par comparaison des fonctions de transfert	137
5.3	Effets tri-dimensionnels sur l'estimation des coefficients non-linéaires élastiques	138
5.3.1	Erreurs des coefficients non-linéaires élastiques	138
5.3.2	Recherche de la source d'erreur	139
	(a) Sensibilité des coefficients à l'amplitude	139
	(b) Sensibilité des coefficients au coefficient de Poisson	141
5.3.3	Validité de l'hypothèse des contraintes uniaxiales dans le cas 3D	142
5.3.4	Solutions proposées	144
	(a) Prise en compte de champs de déplacement supplémentaires	144
	(b) Imposition du champ de déplacement modal sur la ligne/surface moyenne	144
	(c) Imposition des déplacements transverses sur la ligne moyenne	145
5.4	Bilan du chapitre	146
III	Investigations expérimentales	149
6	Vibrations non-linéaires d'une plaque circulaire élastique	151
6.1	Cadre théorique : modes non-linéaires et résonance de phase	152
6.2	Mesures des modes non-linéaires : état de l'art	153
6.2.1	Sinus balayé pas à pas (<i>Stepped Sine Testing</i>) avec détection synchrone	154
6.2.2	Décroissance des oscillations libres	155
6.2.3	Continuation expérimentale et boucle à verrouillage de phase	155
6.3	Réponse autour du mode axisymétrique (0,1)	156
6.3.1	Dispositif expérimental et analyse modale	156
6.3.2	<i>Backbone curve</i> et réponses forcées	159
6.4	Étude d'une résonance 1 :1 autour du mode asymétrique (2,0)	160
6.4.1	Présentation de l'article	160

6.4.2	<i>Backbone curves</i> d'oscillateurs cubiques couplés en résonance interne 1 : 1 : scénarios de bifurcation, mesures et identification de paramètres	162
6.5	Bilan du chapitre	186
7	Vibrations non-linéaires d'une plaque circulaire piézoélectrique	187
7.1	Présentation de la structure	188
7.1.1	Géométrie et disposition des patches piézoélectriques	188
7.1.2	Collage des patches piézoélectriques	190
7.1.3	Analyse modale	192
7.2	Réponse autour du mode axisymétrique (0, 1)	193
7.2.1	Dispositif expérimental	193
7.2.2	Résonance de phase pour un système électromécanique	194
7.2.3	Réponses libre et forcées	196
7.3	Réponse autour du mode asymétrique (2, 0, 1)	197
7.3.1	Dispositif expérimental	197
(a)	Rapprochement des fréquences des deux modes	197
(b)	Pondérations des tensions mesurées	197
(c)	Pondérations des tensions d'entrée pour le forçage du mode A	198
(d)	Synthèse	199
7.3.2	Réponse libre	201
7.3.3	Réponses forcées	202
7.4	Bilan du chapitre	203
	Conclusion générale	207
	Bibliographie	209
	Annexes	221
A	Compléments au modèle analytique de plaque	223
A.1	Détails des développements du principe des travaux virtuels	223
A.1.1	Travail des quantités d'accélération	223
A.1.2	Travail des efforts extérieurs	223
A.1.3	Travail des efforts intérieurs	225
A.2	Détails des développements pour établir la formulation en (w, F)	225
B	Modes de la plaque circulaire encastrée à ses extrémités	227
B.1	Séparation des variables	227
B.2	Mise en équation du problème spatial	227
B.3	Expression des modes de la plaque circulaire encastrée	228
C	Complément au modèle analytique de la poutre bi-couche piézoélectrique	231
D	Modèle analytique d'une poutre tri-couche piézoélectrique avec non-linéarités de von Kármán	233
D.1	Présentation de la structure	233
D.2	Équations mécanique et électrique	233
D.3	Développement et projection sur base modale	236
E	Systèmes linéaires pour obtenir les coefficients non-linéaires par la méthode STEP	239
F	Analyse modale de la plaque piézoélectrique	241

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et objectifs généraux

Cette thèse, financée par une bourse accordée par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, s'est déroulée au Laboratoire de l'Ingénierie des Systèmes Physiques et Numériques (LISPEN) rattaché au campus lillois de l'École des Arts et Métiers, ainsi qu'au Laboratoire de Mécanique des Solides et des Systèmes Couplés (LMMSC) à Paris, et affilié au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM). Ces travaux s'inscrivent dans la continuité d'une collaboration avec l'équipe MEMS du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) basé à Toulouse.

Un objectif majeur de cette thèse réside dans le développement d'outils numériques prédictifs et efficaces de simulations de vibrations non-linéaires de structures minces piézoélectriques. De telles structures sont impliquées dans le cadre de nombreuses applications qui connaissent actuellement un fort développement. Des exemples de ces applications sont les micro ou nano-systèmes électromécaniques (MEMS ou NEMS, de l'acronyme anglais *Micro* ou *Nano ElectroMechanical Systems*), les systèmes de contrôle des vibrations ou les systèmes à récupération d'énergie. Les simulations proposées s'appuient sur une procédure de réduction de modèles fondée sur l'utilisation des modes de vibration. Les modèles réduits modaux aboutissent à des expressions d'oscillateurs qui sont très utilisées dans les applications et notamment les MEMS. L'intérêt d'employer les modes de vibrations réside d'une part dans leur fort contenu physique et leur capacité à prédire des phénomènes résonants. D'autre part, cet outil permet la prise en compte simplifiée des phénomènes d'amortissement dont les origines sont multiples et difficiles à modéliser.

Un second objectif est de tirer parti des phénomènes non-linéaires, alors que ceux-ci sont le plus souvent évités dans le cadre des applications mentionnées. Il s'agit donc ici d'utiliser les non-linéarités au lieu de les subir, ce qui peut potentiellement aboutir à des systèmes plus performants. En particulier, la prédiction et la mise en évidence expérimentale des échanges d'énergie entre des oscillateurs est recherchée. Les échanges d'énergie entre oscillateurs, connus sous le nom de *résonances internes*, seront en particulier caractérisés.

L'objet de cette introduction est dans un premier temps de présenter des exemples d'applications qui ont motivé les différentes investigations entreprises au cours de la thèse. Les deux principales thématiques abordées, les phénomènes non-linéaires géométriques et le couplage piézoélectrique, sont ensuite présentées. La démarche et l'organisation de la thèse sont exposées à la fin du chapitre.

1.2 Motivations

1.2.1 MEMS et NEMS

Les micro-systèmes électromécaniques sont des systèmes équipés à la fois d'une structure mécanique déformable de petite dimension et d'un dispositif électronique. La conversion entre énergies électrique et mécanique est réalisée par un transducteur. Un circuit électronique intégré permet de traiter le signal mesuré et de récupérer l'information utile dans le capteur. De tels systèmes sont devenus omniprésents dans des objets de la vie courante (téléphone, airbag, dispositif de géolocalisation...).

Ceci entraîne une commercialisation croissante de ces dispositifs, illustrée sur la figure 1.1.

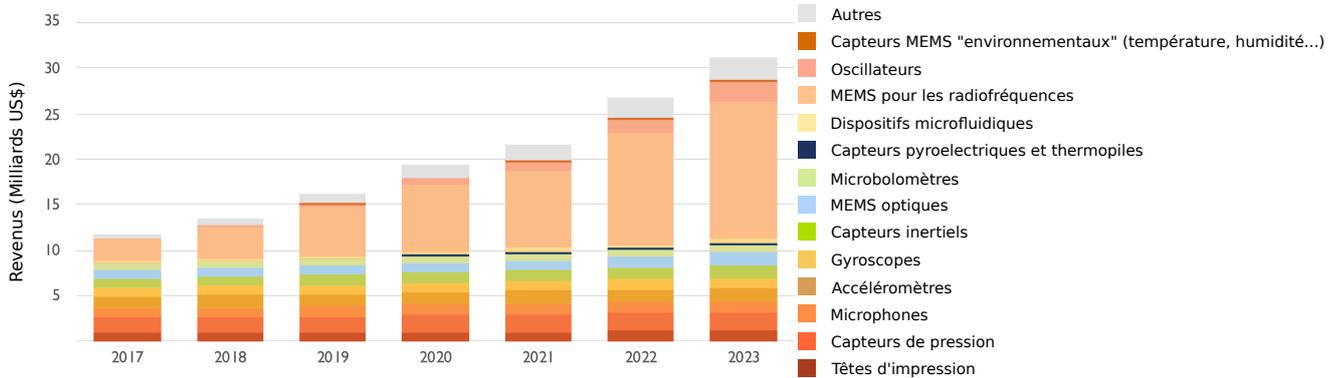


FIGURE 1.1 – État et prévision des ventes du marché de différents types de MEMS (établi par l'entreprise Yole Développement [6])

Ces systèmes peuvent utiliser différentes technologies de transduction : les transductions magnéto-statique, thermoélastique, capacitive, diélectrique ou piézoélectrique permettent l'actionnement et la détection d'oscillations mécaniques. Les mesures peuvent aussi être réalisées par détection optique. Parmi ces nombreuses technologies, la transduction piézoélectrique a pour avantage une bonne efficacité d'actionnement et l'intégrabilité possible dans un capteur MEMS sous la forme de couches minces. L'intérêt d'un tel système est de réaliser l'actionnement et la détection des vibrations avec un dispositif *complètement intégré* [17, 50]. Cet avantage rend la transduction piézoélectrique compatible avec une fabrication à grande échelle. La capacité de transduction peut être quantifiée par un facteur de couplage piézoélectrique estimé à partir d'un recalage entre des résultats expérimentaux et des prédictions issues d'un modèle mécanique réduit [50, 16]. Les matériaux piézoélectriques seront plus amplement présentés dans la section 1.4.

La miniaturisation progressive des MEMS peut atteindre des dimensions sub-micrométriques (NEMS), ce qui laisse entrevoir de nombreuses possibilités d'applications [151]. De manière générale, la figure 1.2 montre que le principe de fonctionnement des MEMS résonants fait l'objet d'un nombre croissant d'études depuis la fin du siècle dernier, où les progrès effectués pour les procédés de fabrication des MEMS tendaient vers leur miniaturisation. Des MEMS de dimensions inférieures au micromètre ont notamment été fabriqués au cours de cette période.

Un exemple d'application liée à la diminution de la taille des systèmes électromécaniques est la détection de masses infimes. La réduction progressive des dimensions, et donc de la masse mobile des capteurs, augmente leur sensibilité à des masses additionnelles. Cette sensibilité peut potentiellement atteindre l'échelle de la molécule ou de l'atome pour les plus petits capteurs existants [42, 58]. La captation et la quantification de masse à ces échelles peuvent être obtenues par l'identification d'une ou plusieurs fréquences de résonance de la partie mobile du capteur, directement proportionnelle à la masse ajoutée [158]. La figure 1.3 présente le principe de fonctionnement de ce type de capteur. Ses performances dépendent des propriétés de leurs résonances, en particulier des fréquences et des facteurs de qualité. Ceux-ci quantifient l'aspect ou la largeur de bande d'une résonance : une valeur élevée facilite notamment la détection d'une résonance. L'intérêt porté aux capteurs de masse MEMS s'explique par des enjeux de portée large. En effet, la mise en place d'un système à la fois portable, peu coûteux, précis et robuste, pour la détection de biomolécules toucherait différents secteurs d'activités liés à des problématiques contemporaines. Parmi ces secteurs, le domaine biomédical (diagnostics [79] ou recherches pharmacologiques), la défense (détection de menaces biologiques et chimiques [9]), la surveillance environnementale et l'écologie [99] (détection de polluants, ou pour

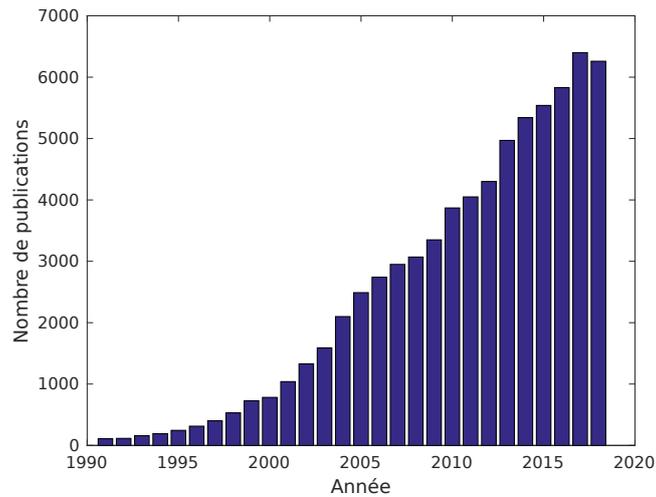


FIGURE 1.2 – Nombres de publications en lien avec les capteurs MEMS résonants, résultats de recherches sur le moteur google scholar (<https://scholar.google.com>) par année, avec les mots-clés "MEMS" "resonator" (pour attester que le résultat n'est pas biaisé par le nombre croissant des publications et des journaux, une recherche similaire a été effectuée avec le mot-clé "vibrations" : le nombre de publication associé est moins élevé en 2017 que chacune des années précédentes depuis 2004).

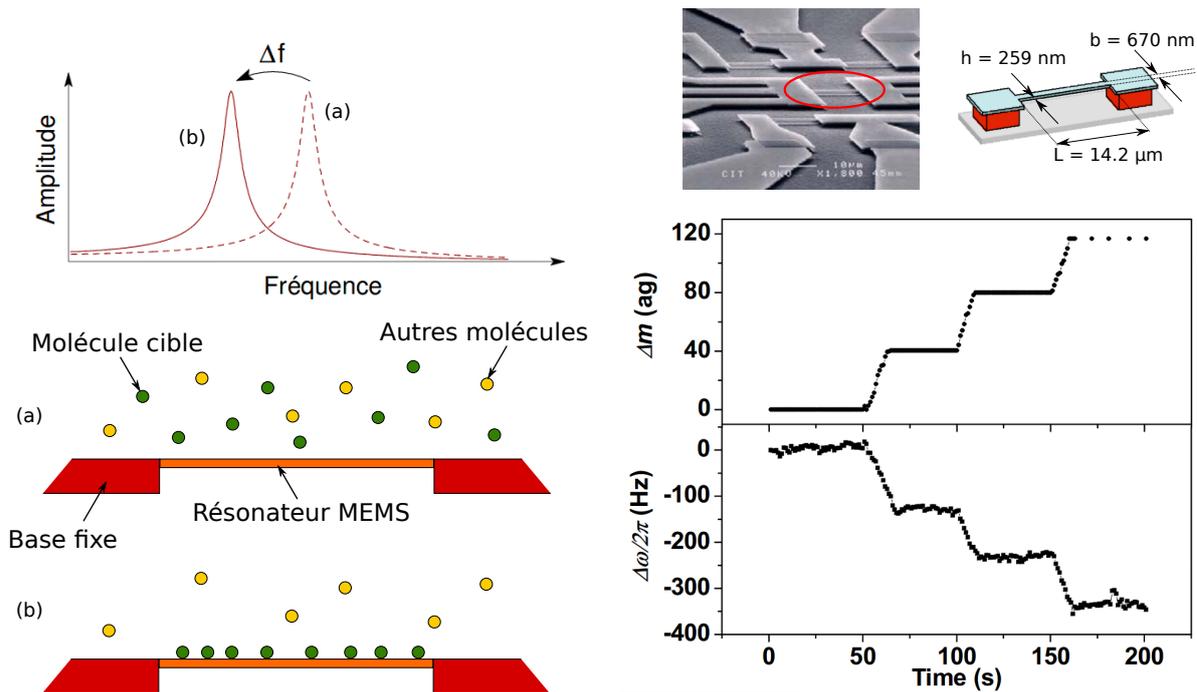


FIGURE 1.3 – Gauche : principe de fonctionnement d'un capteur de masse MEMS résonant, la fréquence de résonance diminue lorsque les molécules cibles sont adsorbées sur la partie vibrante du capteur. Droite : corrélation entre la masse ajoutée et le décalage de fréquence mesuré sur le capteur présenté, résultat issu de [59]

la facilitation les études nécessitant de nombreux prélèvements sur le terrain [100]) ou l'agroalimentaire (détection de pesticides) peuvent être évoqués. De nombreuses études se sont consacrées à l'établissement de records de sensibilité des capteurs de masse MEMS. Ces records ont diminué

progressivement de l'attogramme (10^{-18}) au zeptogramme (10^{-21}), jusqu'à atteindre le yoctogramme (10^{-24} , voir [57, 86, 200, 31, 93] par ordre décroissant de résolution obtenue). Si ces sensibilités ont été atteintes avec la fabrication de capteurs toujours plus fins, plus légers et de fréquences de résonance plus élevées, les protocoles expérimentaux dans le cadre de ces études nécessitent un matériel lourd et coûteux (utilisation d'une chambre à vide, température cryogénique) afin de limiter le bruit (et notamment le bruit d'origine thermodynamique [59, 36]). En effet, les conditions de pression ont une influence sur le facteur de qualité. Cette influence est illustrée sur la figure 1.4 : la largeur de bande augmente et l'amplitude des pics de résonance diminue avec la pression environnante, rapprochant ainsi l'amplitude du niveau de bruit ambiant. Dans ce contexte, l'optimisation du facteur de qualité est donc une question centrale, car les capteurs sont amenés à fonctionner dans des conditions atmosphériques ou dans un liquide [198, 10].

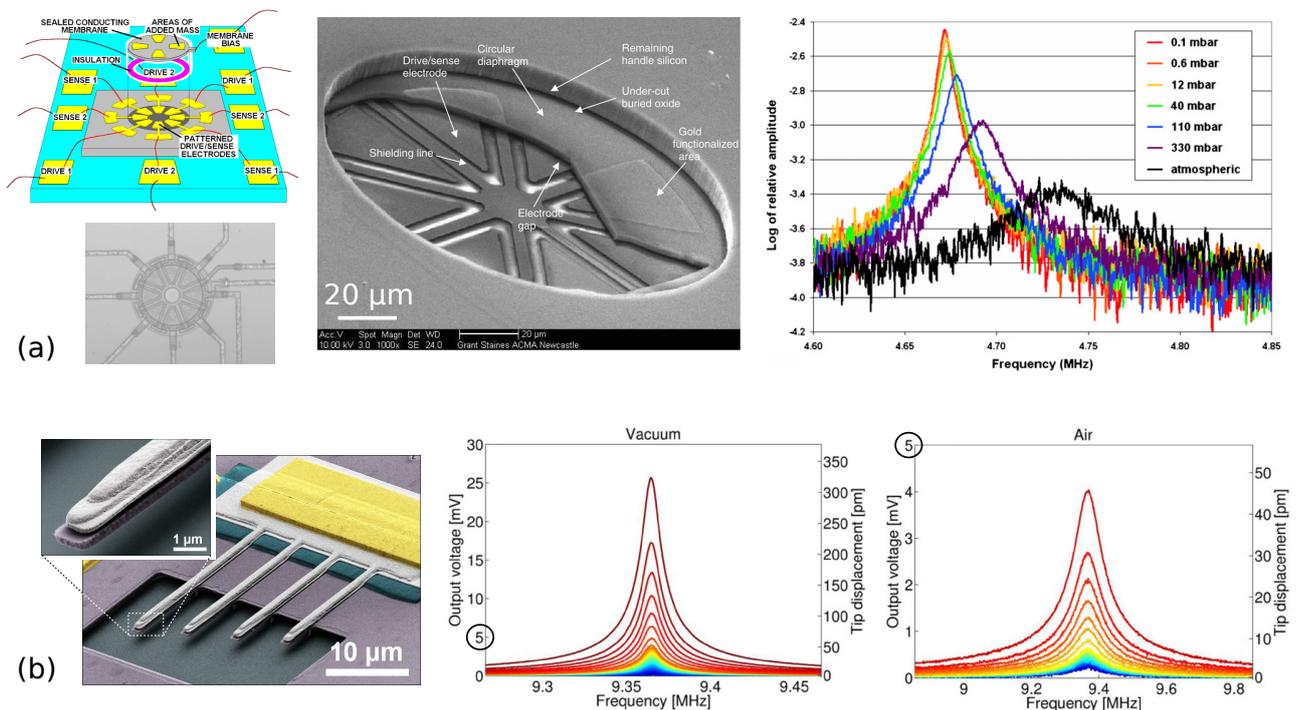


FIGURE 1.4 – Exemples de capteurs MEMS respectivement tirés de [88, 89] (a) et [50] (b), présentation des structures et réponses en fréquences sous différentes pressions. Les réponses en fréquence de (a) montre une résonance mesurée au vibromètre à une même tension d'excitation pour différentes pressions d'opération. Les réponses en fréquence de (b) mesurées en tension ont été effectuées dans une chambre à vide ($1.1 \cdot 10^{-9}$ bar, "vacuum") et dans l'air (~ 1 bar).

Avec l'exemple des capteurs de masse, on illustre que la sensibilité des MEMS résonants dépend (entre autres) du rapport entre les niveaux de signal utile et de bruit. Un moyen de réduire le bruit est d'augmenter l'amplitude des oscillations, ce qui peut engendrer des *phénomènes non-linéaires*. Ceux-ci se caractérisent par une variation de la fréquence avec l'amplitude des oscillations et par un comportement possiblement instable. Ces observations ont été reportés dès les premiers développements des capteurs MEMS (cf figure 1.5). Ces effets non-linéaires dans les oscillateurs MEMS peuvent être considérés comme nuisibles ou au contraire bénéfiques [187]. En première approche, le régime non-linéaire doit être évité afin d'estimer correctement les fréquences de résonance du capteur. Dans ce cas, la gamme de fonctionnement utile est limitée à faible amplitude par le niveau de bruit et à haute amplitude par le seuil d'apparition des non-linéarités. Cet intervalle de fonctionnement peut être particulièrement restreint [140].

En seconde approche, des régimes d'oscillations non-linéaires présentent de nombreux avantages, en

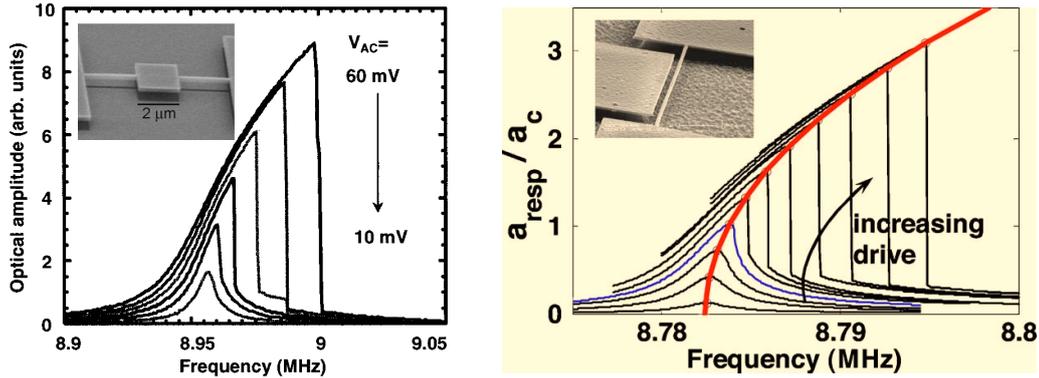


FIGURE 1.5 – Observations des phénomènes non-linéaires autour des résonances dans les travaux pionniers sur les capteurs MEMS. Ces réponses en fréquences sont respectivement issues de [60] et [112]. À droite, les amplitudes sont normalisées par rapport au seuil à partir duquel le système présente un comportement instable. La courbe rouge, qui sera nommée *backbone curve* dans la suite de ce manuscrit, est une interpolation quadratique des points à la limite de stabilité et de la fréquence de résonance linéaire mesurée à faible amplitude.

plus d’ouvrir l’étude du comportement vibratoire des MEMS à de plus grandes amplitudes [146]. L’un de ces avantages est la *réduction du bruit de phase*, qui quantifie les fluctuations aléatoires d’un signal harmonique par rapport à une sinusoïde parfaite [194]. Cette notion inclut les différentes sources de bruit, aussi bien le bruit thermodynamique que les fluctuations des paramètres de l’oscillateur (tels que la fréquence et l’amortissement) et ceux engendrés par les paramètres du dispositif électronique (erreurs dans l’estimation de la phase, bruit de l’amplificateur). Des critères d’analyse du bruit de phase dans les oscillateurs MEMS (cf. [7], ou l’article de revue [132]) ainsi que des stratégies visant à le réduire [163, 28] ont été proposés. Il a été établi qu’en régime forcé certains points d’opérations autour de la résonance permettent d’obtenir un niveau de bruit réduit : en particulier les limites de stabilité de la figure 1.5 [201, 106, 195], ou lorsqu’un régime particulier couplant deux résonances est atteint [13]. À partir de cette observation, de nombreux travaux ont proposé des méthodologies permettant d’étudier des résonances simultanées [15, 101], ou mis en évidence les phénomènes d’échanges d’énergies entre différentes résonances, appelés *résonances internes* [173, 78, 11, 83, 43, 63].

Une autre spécificité du régime non-linéaire est la possibilité d’obtenir des oscillations par *amplification paramétrique*. Cette technique consiste à superposer une excitation directe d’une résonance à une excitation également dite paramétrique. Cette excitation paramétrique repose sur l’activation d’une résonance en modifiant l’un des paramètres de l’oscillateur. Dans le cas le plus courant, la raideur est le paramètre modifié, la résonance est obtenue par une excitation directe de pulsation Ω superposée à une excitation paramétrique de pulsation double 2Ω . Cette technique a été testée avec différentes méthodes de transduction et pour différentes structures, notamment pour des miroirs (MEMS optiques) sollicités en torsion [27, 64]. Cette méthode peut aboutir à l’amélioration du facteur de qualité (cf. [103], ou [183] pour le cas d’un transducteur piézoélectrique pleinement intégré). L’amplification paramétrique peut aussi être utilisée pour réduire le bruit de phase [28].

Enfin, les MEMS résonants peuvent présenter des géométries complexes. En particulier, la transduction piézoélectrique implique le dépôt de plusieurs couches fonctionnelles constituées de différents matériaux. Deux exemples de géométries sont présentées sur la figure 1.6 : la structure représentée est multicouche et comporte des sections d’épaisseurs et de largeurs variables. Ces géométries sont aussi caractérisées par leur diversité : les termes de leviers et ponts désignent respectivement des géométries proches de poutres avec des conditions aux limites encastrées-libres et bi-encastrées. Le terme diaphragme est associé à une géométrie de plaque dont les conditions aux limites encastrées sont bien réalisées en pratique (comme le montre l’exemple de la figure 1.4 (a)). Dans le cas de diaphragmes à formes circulaire ou rectangulaire, la symétrie de la géométrie est à l’origine de modes *dégénérés*

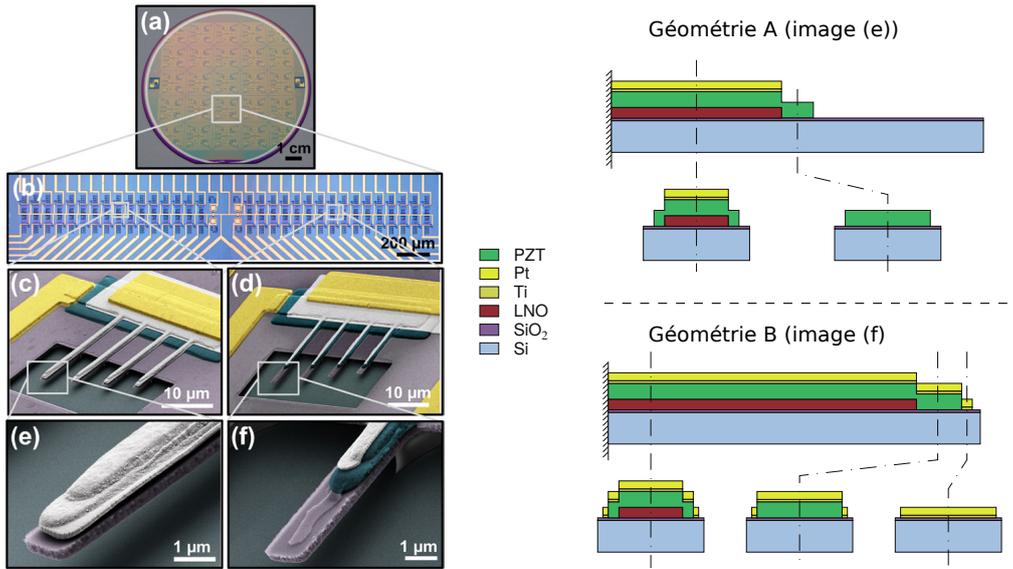


FIGURE 1.6 – Gauche : représentations de MEMS en forme de levier (géométries de poutre avec des conditions aux limites encastrées-libres) étudiées dans [50]. (a) Ensemble de puces contenues dans un wafer (plaque de silicium utilisée pour les circuits intégrés) de 100mm de côté. (b) Représentation d'une puce : chacune des puces contient 64 réseaux de 4 nanoleviers. (c-d) Détail d'un réseau avec deux géométries A et B. (e-f) Détails des extrémités de l'un des leviers pour les deux géométries. Droite : coupes transverses des géométries A et B. La base est constituée d'une couche de Silicium (Si) recouverte d'une mince couche oxydée (Oxyde de Silicium, SiO_2). La couche piézoélectrique en Titano-Zirconate de Plomb (PZT) est recouverte par une électrode inférieure en Nickel-Lanthane (LNO) et une électrode supérieure en Titane et Platine (Ti et Pt).

ou compagnons, dont les fréquences sont très proches. Un diaphragme circulaire a été conçu puis fabriqué dans [88, 89] : cet exemple est présenté sur la figure 1.7 (gauche). La symétrie circulaire a été préservée lors du placement des électrodes et se retrouve sur la déformée opérationnelle des seconds modes : ceux-ci sont dégénérés et présentent chacun un rayon nodal. Comme les deux modes réagissent de la même manière aux conditions de pression et de température, cette étude s'appuie sur la différence entre les fréquences de résonance des modes dégénérés pour améliorer la robustesse de la mesure de masse ajoutée.

Une autre investigation présentée sur la figure 1.7 (droite) s'appuie sur les propriétés de symétrie de modes dégénérés d'une membrane rectangulaire en graphène. Cette étude propose de tirer parti de la dépendance entre fréquences et amplitudes avec les réponses non-linéaires associées aux trois premières résonances du système [15]. Une autre procédure mise en œuvre dans [130] propose de tirer parti de la détection de bifurcation autour de la première résonance d'une poutre bi-encastrée. Cette procédure s'appuie sur le modèle d'une poutre élastique homogène avec un actionnement électrostatique. Plus récemment, cette démarche a été étendue au cas de réseaux de poutres identiques [18]. Ces deux dernières études démontrent la possibilité d'améliorer les performances des capteurs de masse MEMS à partir des réponses non-linéaires et de la position des masses ajoutées. Ces deux dernières investigations demeurent cependant théorique.

1.2.2 Réduction et contrôle des vibrations

Outre la détection et l'actionnement d'oscillations mécaniques pour l'étude des MEMS résonants, les éléments piézoélectriques, en général appelés patches ou pastilles piézoélectriques, sont également employés dans un contexte de contrôle ou de réduction des vibrations mécaniques.

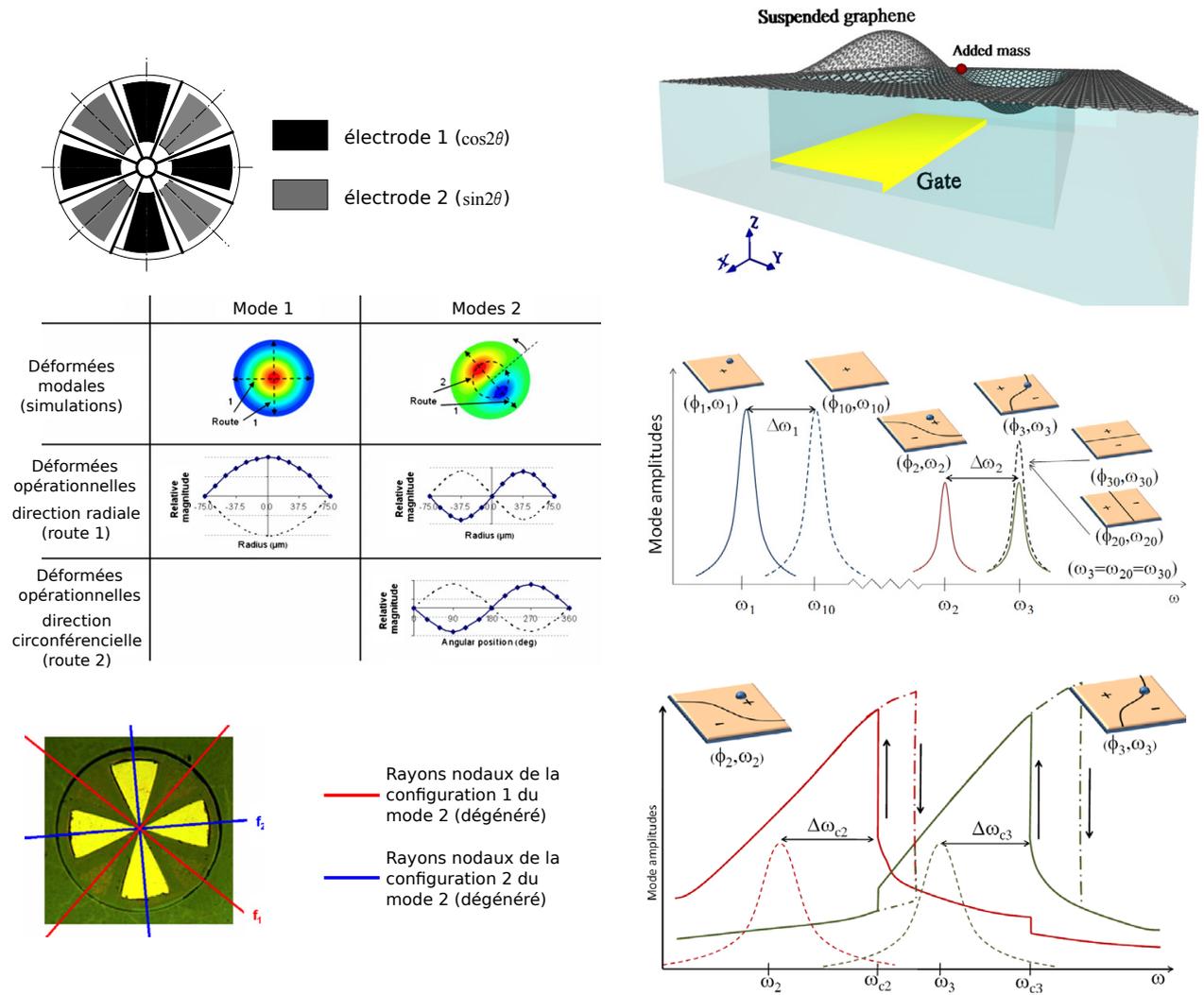


FIGURE 1.7 – Gauche : diaphragme circulaire conçu et fabriqué dans [88, 89], géométrie du diaphragme et placement des électrodes (haut), comparaison des déformées modales et opérationnelles des deux premiers modes (milieu) et détails de la position des rayons du second mode et de ses deux configurations (bas). Droite : dispositif de la membrane étudiée dans [15] (haut), changement des réponses linéaires et des déformées opérationnelles des trois modes étudiés en fonction de la position de la masse ajoutée (milieu), et réponses non-linéaires autour des deux modes dégénérés (bas).

Dans un cadre industriel, la réduction de vibrations constitue un objectif courant, auquel de nombreuses études sont consacrées (cf. l'article de revue [70], ou l'exemple de l'aube de soufflante d'un réacteur d'avion sur la figure 1.8). Une des principales techniques employées est la connexion d'un circuit électronique au circuit initial, défini par la structure mécanique et son équipement piézo-électrique. Cette connexion permet potentiellement la réduction de l'amplitude des oscillations mécaniques. L'ajout de ce nouveau circuit appelé "shunt" peut s'effectuer de plusieurs manières. Le circuit électrique ajouté peut comprendre une simple résistance (il s'agit alors d'un shunt "R" [77]) ou un circuit inductif (on parle alors de "shunt RL" [62]). Il s'agit dans les deux cas de systèmes passifs où la réduction des oscillations est effectuée par dissipation d'énergie. L'efficacité de ces systèmes a été mise en évidence dans [181, 54]. D'autres shunts plus élaborés s'appuient sur la synchronisation des cycles de fermeture et d'ouverture du circuit connecté avec la structure, de façon à ce que les fréquences des cycles soient accordées avec celles des oscillations mécaniques. Le circuit en pa-

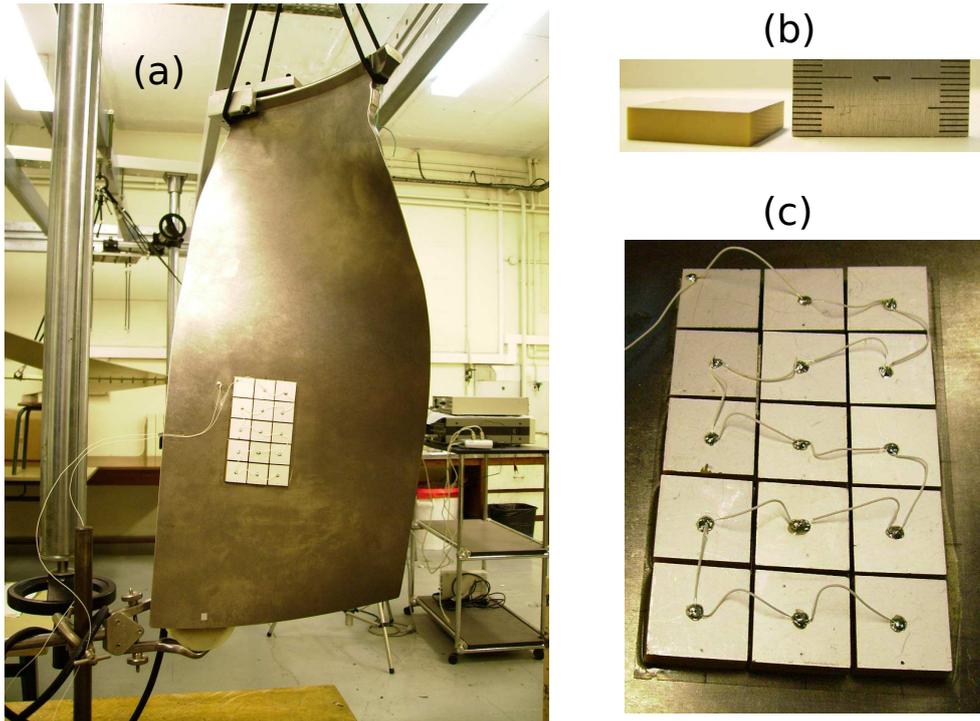


FIGURE 1.8 – Aube de soufflante d'un réacteur d'avion. (a) Aube équipée d'un réseau de patches piézoélectriques. (b) Détail d'un patch piézoélectrique, de dimensions $20 \times 20 \times 5$ mm. (c) Détail du réseau et des connexions entre les patches. Images issues de [159].

rallèle peut être constitué d'une simple résistance (shunt "SSDS", de l'anglais *Synchronized Switch Damping on Short*) ou d'un circuit RL (shunt "SSDI", de l'anglais *Synchronized Switch Damping on Inductor*). Il s'agit dans ce cas de systèmes dits semi-actifs, par opposition à des systèmes actifs qui reposent sur l'injection d'énergie mécanique par transduction piézoélectrique [148, 147]. Cela est effectué dans le cas du contrôle actif des vibrations [67, 35], dont une application originale impliquant un développement modal est la modification des résonances d'instruments de musiques à cordes ou à percussions [22, 97].

La section suivante approfondit la présentation des comportements non-linéaires et expose d'autres contextes d'apparition de ces phénomènes, ainsi que leurs différentes sources physiques.

1.3 Généralités sur les non-linéarités en mécanique des solides

Dans cette section, les systèmes non-linéaires sont d'abord définis par opposition aux propriétés des systèmes linéaires. Une classification des non-linéarités pour les calculs de structure est ensuite présentée. Enfin, les sources des non-linéarités géométriques sont ensuite détaillées. Les définitions et principes présentés dans cette section sont essentiellement issus de [177].

1.3.1 Linéaire vs non-linéaire

Afin de présenter les phénomènes non-linéaires, la définition d'un système linéaire est d'abord rappelée : un système est dit linéaire s'il obéit au principe de superposition entre un signal d'entrée et un signal de sortie, c'est-à-dire si un changement de la cause entraîne un changement de l'effet dans des mêmes proportions. Si l'entrée de ce système est une sinusoïde, alors la sortie est une sinusoïde de même fréquence, mais dont l'amplitude et la phase peuvent être modifiées suivant les propriétés du système. Une fonction de transfert dépendante de la fréquence définit alors le système linéaire.

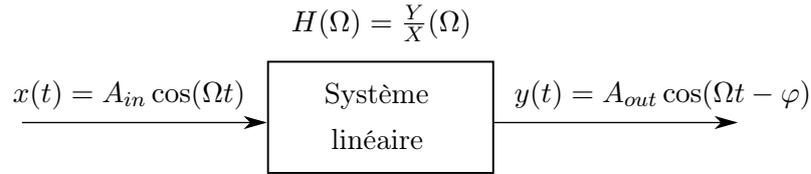


FIGURE 1.9 – Schématisation d'un système linéaire, la fonction de transfert, notée H , modifie l'amplitude et la phase φ du signal de sortie y par rapport au signal d'entrée x .

Ce principe est illustré sur la figure 1.9. Cette définition entraîne que le contenu fréquentiel n'est pas modifié par un système linéaire. Dans le cas de systèmes non-linéaires, cette propriété n'est plus vérifiée. Des phénomènes tels que la distorsion harmonique, des oscillations quasi-périodiques ou du chaos peuvent survenir. Autour des résonances, les courbes sont caractérisées par un comportement *raidissant* ou *assouplissant* suivant que les pulsations augmentent ou décroissent avec l'amplitude des vibrations [190]. La figure 1.5 montre deux exemples de comportement raidissant de MEMS. Par ailleurs, les fonctions de réponse en fréquence des systèmes non-linéaires peuvent être caractérisées par des *discontinuités* (sauts) ou des *non-régularités* (bifurcations).

1.3.2 Sur les sources physiques des non-linéarités : classification générale

Les non-linéarités en dynamique des structures peuvent être classées suivant leur source physique. Suivant la classification proposée dans [177], les principales familles de non-linéarités existantes en dynamique des structures sont les suivantes :

- les **non-linéarités géométriques** apparaissent lorsque le changement de géométrie du système sous l'action des sollicitations ne peut plus être négligé et lorsqu'elles occasionnent des changements sur ces sollicitations (position, amplitude, direction). Elles sont liées à la prise en compte des termes non-linéaires du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Celles-ci peuvent être induites soit par des *grands déplacements* transverses de structures minces, soit par des *grandes rotations* de systèmes de solides rigides. Ces travaux de thèse se concentrent sur cette famille de non-linéarités.
- les **non-linéarités matérielles** décrivent les non-linéarités intervenant dans la loi de comportement, c'est-à-dire entre les déformations et les contraintes mécaniques. Les non-linéarités sont alors induites par des *grandes déformations*. Les métaux (élasto-plastiques), élastomères et alliages à mémoire de forme sont caractérisés par ce type de non-linéarités. Les lois de comportements diffèrent par la régularité des fonctions, l'aspect réversible des déformations ou par le comportement hystérétique des matériaux. Les non-linéarités matérielles se manifestent dans un grand nombre de cas industriels (structures de génie civil, étude de crash de véhicules...). Souvent, les grandes déformations sont d'abord induites par de grands déplacements ce qui nécessite de prendre en compte les non-linéarités géométriques avec les non-linéarités matérielles.
- les **non-linéarités de contact** apparaissent à l'interface de deux objets en contact inclus dans le système étudié. Un nombre conséquent d'applications met en jeu cette classe de non-linéarités, bien que peu étudiée dans le cadre des MEMS (une étude récente a été entreprise dans [73]). Un premier cas concerne le contact permanent et localisé où la force d'interaction entre les deux objets est non-linéaire, comme le propose la loi de Hertz et les évolutions qui en ont découlé [119]. Des exemples d'application sont les liaisons pivots par éléments roulants (système de roulement à bille [166]) ou engrenages. Un second cas est le frottement sec, lorsqu'une alternance entre une phase d'adhérence et une phase de glissement est observée. Ces phénomènes ont lieu lors de la mise en vibration d'une corde par un archet [49], lors du freinage de roues [167, 65, 156] ou à l'interface entre les aubes d'un moteur et le disque situé à la base de l'arbre en rotation [113].

Dans ces cas une relation non-régulière lie la vitesse de glissement et la force de frottement. Enfin, un dernier cas regroupe les contacts intermittents, qui s'écrivent également par des sollicitations non régulières. Le contact entre aube et stator dans un moteur d'avion est un exemple de cette dernière famille [154].

- les **non-linéarités de couplage** concernent les non-linéarités associées aux effets d'un milieu non-solide couplé sur le système étudié et qui ont une influence sur son comportement. Les effets aéroélastiques, vibro-acoustiques, d'amortissement ou de couplage électrostatique font partie de cette famille. Dans le cadre des MEMS à transduction électrostatique, les non-linéarités électrostatiques interviennent dans l'actionnement et la détection [66]. En régime dynamique, ces non-linéarités se traduisent par un effet assouplissant. La combinaison d'effets non-linéaires électrostatiques (assouplissants) et géométriques (souvent raidissants) peut aboutir à un comportement "mixte" [102].

1.3.3 Non-linéarités géométriques dues aux grands déplacements de structures minces

Les travaux rapportés dans le présent manuscrit sont consacrés à l'étude des non-linéarités géométriques dues à de grands déplacements de structures minces. Ces structures sont caractérisées par un rapport de dimensions caractéristiques de l'espace : les cas unidimensionnels (structures de type poutre, barre, arche) pour lesquels deux dimensions sont d'ordre de grandeur inférieur à la dernière, sont distingués des cas bi-dimensionnels (membrane, plaque, coque). Dans ces derniers cas, une seule des dimensions est significativement plus petite que les deux autres. La direction dans laquelle les mouvements sont étudiés est appelée transverse, par rapport à au moins une autre direction dénommée longitudinale. Pour ces structures, la raideur de la direction transverse est plus faible. Ceci entraîne alors l'obtention d'amplitudes de déplacements d'ordre de grandeur comparable voire plus élevé que la dimension caractéristique associée. Dans ces travaux, les poutres et les plaques seront

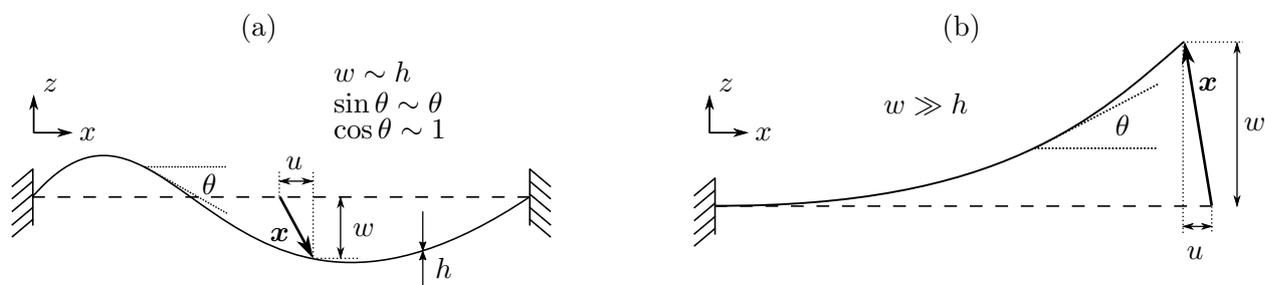


FIGURE 1.10 – Schématisation des modèles de von Kármán (a) et grandes rotations (b), respectivement dans le cas de poutres bi-encastée et encastée-libre.

principalement étudiées. Il s'agit de structures fines, planes, raides et non précontraintes. En fonction de la gamme d'amplitude des vibrations, deux grandes familles de modèle analytique sont proposées :

- Si le déplacement transverse est de même ordre de grandeur que l'épaisseur, des efforts longitudinaux appelés efforts *de membrane* sont générés. La théorie de von Kármán permet alors d'étudier le comportement de la structure en tronquant le nombre de termes à retenir dans le tenseur de Green-Lagrange.
- Si l'ordre de grandeur des déplacements transverses dépasse celui de l'épaisseur, alors d'autres termes non-linéaires des déformations doivent être conservés. On parle de modèles en *grandes rotations*, en référence aux cinématiques de poutre et de plaque où des rotations sont introduites et parfois linéarisés (c'est notamment le cas des théories linéaires et de von Kármán).

Ces deux familles de modèles sont schématisées sur la figure 1.10 pour une poutre. Le choix dépend notamment des conditions aux limites de la structure mince étudiée.

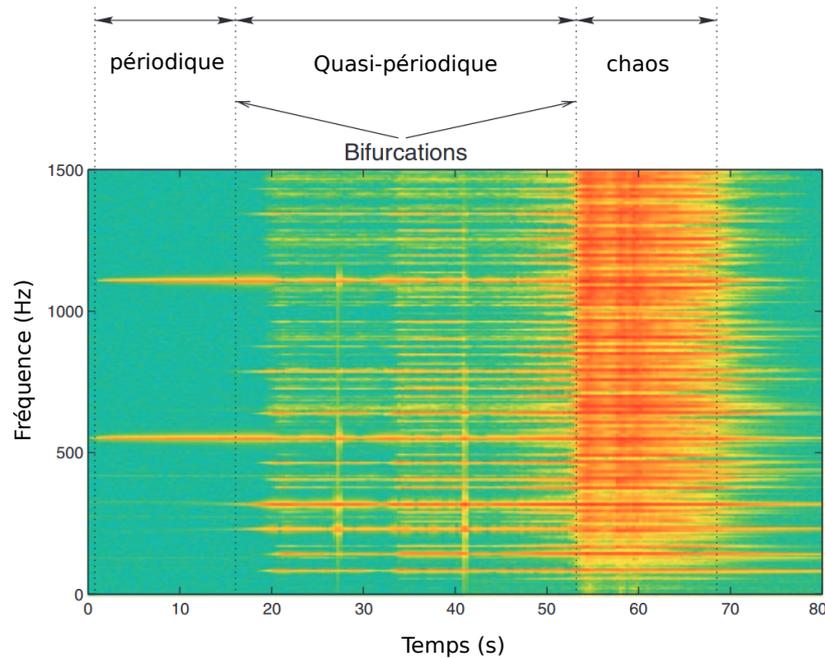


FIGURE 1.11 – Spectrogramme du signal d'accélération d'un gong, en réponse à une sollicitation harmonique d'amplitude croissante, à une fréquence proche de l'un de ses modes axisymétriques (555.4 Hz). L'excitation est générée par un système bobine-aimant. Résultat issu de [29].

Pour un système purement mécanique, l'activation des non-linéarités se traduit bien par une réponse au contenu fréquentiel potentiellement modifié par rapport à celui de l'excitation. La figure 1.11 montre l'exemple du spectrogramme d'un tam-tam chinois : il s'agit d'une structure mince et d'instrument de musique à percussion. La structure est forcée mécaniquement à une seule composante fréquentielle avec une amplitude croissante : des bifurcations vers un régime quasi-périodique puis chaotique sont observées, avec l'apparition d'autres composantes avec des rapports respectivement harmoniques et inharmoniques avec la fréquence d'excitation. Outre les capteurs MEMS et les instruments de musique à percussions [188, 176, 126, 56, 175], les non-linéarités géométriques sont étudiées pour les systèmes à récupération d'énergie [165]. Dans un contexte industriel, les non-linéarités géométriques doivent être prises en compte pour étudier les grands déplacements des aubes de moteurs d'avion [157, 72], pour des applications en génie civil (calcul de la résistance du toit d'un bâtiment), afin d'optimiser le comportement des absorbeurs pendulaires dans des chaînes de transmission automobiles [144] ou de prédire le comportement des câbles dans un véhicule automobile [41]. La liste des applications possibles n'est pas exhaustive.

1.4 Généralités sur les matériaux piézoélectriques

L'intérêt des matériaux piézoélectriques est leur capacité de couplage entre des quantités mécaniques et électriques. Dans les principes généraux de la mécanique, les effets piézoélectrique s'écrivent avec la loi de comportement. On distingue les effets piézoélectriques direct et inverse, qui traduisent respectivement :

- l'effet d'une modification de l'état mécanique du système qui entraîne un changement de l'état électrique (effet direct)
- l'effet d'une modification de l'état électrique du système qui entraîne un changement de l'état mécanique (effet inverse).

L'usage de ces deux effets permet de tirer parti de ces matériaux aussi bien pour l'actionnement que pour la détection d'oscillations mécaniques. Trois principaux types de couplages sont distingués :

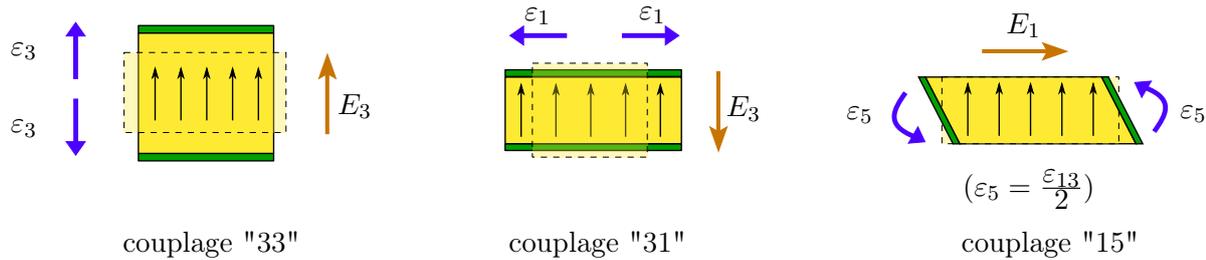


FIGURE 1.12 – Schématisation des trois principaux couplages piézoélectriques. La configuration initiale des sections piézoélectriques est indiquée en traits pointillés.

- le couplage qui décrit une déformation en compression-dilatation dans la direction colinéaire au champ électrique est dénommé effet "33"
- le couplage qui décrit une déformation en compression-dilatation dans la direction orthogonale au champ électrique est dénommé effet "31"
- le couplage qui décrit une déformation en cisaillement avec une direction de rotation orthogonale au champ électrique est dénommé effet "15".

Ces trois couplages différents sont représentés sur la figure 1.12. Dans le cas de la flexion de structures minces qui sera plus amplement présentée au chapitre 2, on ne s'intéresse principalement qu'au couplage "31".

Les matériaux piézoélectriques peuvent se présenter sous la forme de cristaux (tels que le quartz) ou de céramiques. De par le processus de fabrication, l'avantage des céramiques est de pouvoir être obtenues avec une large variété de formes et de tailles. La plupart du temps, ces structures demeurent planes pour optimiser les capacités de couplage. Le principal inconvénient des céramiques est leur fragilité. Des polymères ont également été proposés comme composants piézoélectriques. Il s'agit principalement du polyfluorure de vinylidène ou PVDF (de l'anglais *PolyVinylidene Fluoride*) [160]. Ces polymères sont plus résistants que les céramiques, mais possèdent de moins bonnes capacités de couplage et une raideur élevée. Des éléments composites ont été proposés pour répondre à un besoin de robustesse, de résistance et d'efficacité des éléments piézoélectriques. Ces composites sont des structures stratifiées, qui nécessitent d'estimer des coefficients piézoélectriques équivalents pour simplifier la loi de comportement [48, 47].

Une famille de céramiques présentant de bonnes propriétés de couplage est celle des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou *Lead-Zirconate-Titanate* en anglais) [91]. En raison de son efficacité, ce matériau est l'un des plus employés pour des structures piézoélectriques à l'échelle macroscopique. La toxicité du plomb a cependant conduit à des directives limitant l'usage du PZT et plus particulièrement son industrialisation [51]. Des recherches conduisent actuellement au développement de nouveaux matériaux piézoélectriques sans plomb [44, 149], tels que les BNT (*Sodium-Bismuth-Titanate*, cf. [174]) ou les KNN (*Potassium-Sodium-Niobate*, cf. [153]). Les restrictions concernant l'usage du PZT permettent encore des usages modérés comme dans le cas d'expériences en laboratoire. Pour les applications visées, les propriétés attendues de ces matériaux sont la linéarité des lois de conversion, la faible sensibilité à la température (une mise en évidence de cette sensibilité est proposée dans [45] pour une application en dynamique des structures) et un fort rendement d'émission.

Les propriétés de ces matériaux sont notamment utilisées pour la fabrication de capteurs de pression tels que les hydrophones, microphones ou échographes. La détection d'efforts ou d'accélération utilisent l'effet direct. Par ailleurs, le fonctionnement des horloges s'appuie sur les caractéristiques piézoélectriques du quartz, dont une des spécificités est d'être très robuste aux changements de température. Les auto-oscillations d'un résonateur à quartz présentent des fréquences particulièrement stables, qui sont décomptées à l'aide d'un circuit électronique connecté. L'effet inverse est utilisé dans

les appareils d'émission acoustique tels que les sonars ou haut-parleurs.

À l'heure actuelle, de nombreux développements sont en cours pour améliorer la robustesse et l'intégration des éléments piézoélectriques dans les dispositifs électromécaniques, dans le contexte d'une commercialisation considérable et toujours croissante de ces dispositifs. Dans le cadre de cette thèse, des céramiques piézoélectriques en PZT ont été employées.

1.5 Verrous scientifiques

On rappelle que le premier objectif de cette thèse consiste à mettre en œuvre une démarche de calcul numérique pour effectuer des simulations prédictives et efficaces de vibrations non-linéaires de structures minces piézoélectriques.

Une première difficulté concerne la diversité et la complexité des géométries à étudier. La méthode des éléments finis, largement utilisée pour des calculs mécanique de structure, répond à cette problématique. Cette méthode peut prendre en compte le couplage électro-mécanique et les non-linéarités géométriques. En revanche, les modèles éléments finis supposent une discrétisation du problème et l'introduction de systèmes de grandes tailles. Une procédure de réduction du modèle est donc nécessaire pour réaliser des calculs efficaces.

Les modèles réduits à des systèmes d'équations d'oscillateurs sont particulièrement utilisés par les physiciens des MEMS. Le développement et la projection sur la base des modes de vibration constituent une approche possible pour aboutir à de tels systèmes. Cette procédure de réduction introduit des *coefficients du modèle réduit* qui interviennent dans les équations des oscillateurs et qui quantifient les différents phénomènes étudiés. Ces coefficients doivent être estimés. Une démarche de calcul spécifique nécessite d'être choisie dans cette optique. Le choix de cette démarche est guidé par la simplicité de la procédure, afin d'optimiser l'efficacité de la modélisation et des calculs. Une autre problématique concerne la validité des modèles réduits obtenus.

Une fois les modèles réduits établis, plusieurs méthodes sont possibles pour le calcul des réponses dynamiques. On s'intéresse en particulier aux réponses en fréquence non-linéaires associées au régime permanent. Le choix de la méthode repose sur sa robustesse et son efficacité pour calculer ces réponses en fréquence, ainsi que sa capacité à prédire les phénomènes de résonance interne. À cette étape, la pertinence du développement modal n'est pas encore attestée et nécessite d'être validée.

Le second objectif consiste à caractériser expérimentalement ces résonances internes. Cela suppose de définir un protocole expérimental spécifique. On souhaite également observer et mettre en évidence des résonances internes sur une structure équipée d'un système électro-mécanique pleinement intégré.

1.6 Démarche de la thèse et organisation du manuscrit

Une étape essentielle réside dans le choix d'une **stratégie de modélisation** : dans ce travail, un code de calcul éléments finis issu du commerce est employé. Une projection des équations discrétisées du mouvement est réalisée sur la base des modes de vibration. Ces modes contiennent un fort contenu physique pour l'étude des phénomènes résonants. La projection modale conduit à des expressions d'oscillateurs très utilisées par les physiciens des MEMS. Les coefficients du modèle réduit sont calculés par l'application d'une méthode dite non-intrusive, c'est-à-dire que la procédure n'intervient pas dans les développements calculatoires et informatiques des éléments finis. Au commencement de cette thèse, ces méthodes et les coefficients résultant de leur application n'étaient pas validés. Une étape essentielle concerne donc la **validation numérique des modèles réduits**, par comparaison des coefficients obtenus avec ceux issus des modèles analytiques. Une fois les modèles réduits établis, **des réponses dynamiques sont calculées dans le domaine fréquentiel** avec une méthode de continuation de solutions périodiques. Cette approche est originale par comparaison avec des calculs

dans le domaine temporel, privilégiés dans la littérature. **La convergence modale des modèles réduits est ensuite étudiée**, à une fin de compréhension physique des phénomènes non-linéaires. Une dernière étape est consacrée à **des investigations expérimentales**. La complexité des phénomènes non-linéaires, et en particulier la mise en évidence de résonances internes, est considérée telle que tout résultat issu d'un calcul demande à être conforme à des observations phénoménologiques et mesurables.

Ainsi, le manuscrit s'organise en trois grandes parties. La première d'entre elles est entièrement consacrée à la présentation du cadre théorique et des outils numériques. Cette partie aboutit à la proposition d'une stratégie numérique. La seconde partie met en œuvre cette stratégie et expose les résultats obtenus lors du calcul et de la validation des modèles réduits ainsi que des simulations dynamiques. La dernière partie concerne les investigations expérimentales.

La première partie comporte les chapitres suivants :

- les modélisations de structures minces élastiques et piézoélectriques font l'objet d'un premier chapitre. Une classification des différents modèles est présentée en début de ce chapitre. Les modèles éléments finis, que l'on souhaite utiliser pour prédire le comportement des MEMS, sont mis en regard des modèles analytiques dont sont issus des résultats de référence. Une formulation éléments finis originale avec des variables électriques globales est proposée. La réduction de modèle est finalement obtenue avec un développement des déplacements et une projection des équations sur la base des modes de vibration. La projection modale de la formulation proposée permet d'identifier l'ensemble des coefficients du modèle réduit qui sont à déterminer.
- le second chapitre effectue un état de l'art des outils numériques existants. Dans un premier temps, des méthodes permettant de réduire des modèles éléments finis de structures élastiques sont présentées. Ces approches estiment les paramètres d'un modèle réduit sans rentrer dans le détail des formulations éléments finis et de son implémentation numérique. Pour cette raison, ces méthodes sont dites *non-intrusives*. Dans un second temps, des outils numériques de calcul de solutions périodiques sont présentés. En particulier, la méthode asymptotique numérique est détaillée. Ses avantages sont mis en évidence, et justifient son emploi dans les chapitres suivants. Une stratégie numérique d'ensemble est proposée en fin de chapitre.

La seconde partie comprend également deux chapitres :

- Le troisième chapitre met en œuvre la stratégie numérique proposée sur des cas-tests pour lesquels des modèles analytiques peuvent être établis. Les deux cas-tests sont en l'occurrence des structures planes élastiques. Les coefficients du modèle réduit sont validés par des résultats de référence issus des modèles analytiques présentés dans le premier chapitre. Cette procédure aboutit à l'obtention des réponses en fréquence de ces structures autour de leurs premières résonances. Les réponses sont également tracées dans un plan fréquences-énergies. La démarche et les résultats obtenus sont présentés sous la forme d'un article publié dans *Nonlinear Dynamics*.
- Le quatrième chapitre propose une extension de la méthode de réduction de modèles à l'estimation des coefficients de couplage électromécanique. Cette extension est originale car les méthodes non-intrusives ne concernaient jusqu'alors que l'étude de systèmes élastiques. Les coefficients de couplage électromécaniques linéaires sont calculés. Comme dans le cas de coefficients non-linéaires élastiques, une validation est entreprise par comparaison avec les coefficients d'un modèle réduit issu d'une approche analytique. Les coefficients obtenus sont également comparés aux facteurs de couplage effectifs qui sont considérés actuellement comme l'outil de référence. Ces comparaisons valident l'extension de la démarche entreprise pour estimer les coefficients piézoélectriques linéaires. En revanche, des problèmes ont été rencontrés pour les coefficients non-linéaires avec les éléments finis tri-dimensionnels : les différences de valeurs sont présentées et des solutions sont proposées.

Enfin, la dernière partie est également constituée de deux chapitres :

- Le premier d'entre eux concerne les mesures des modes non-linéaires et des résonances internes dans une structure élastique. Un état de l'art des méthodes de mesures des modes non-linéaires est d'abord effectué. La méthode de la boucle à verrouillage de phase est mise en œuvre pour mesurer les réponses non-linéaires autour d'un mode axisymétrique, puis autour de deux modes asymétriques d'une plaque élastique circulaire. Dans le second cas, des échanges d'énergie entre les deux modes asymétriques sont mesurés. Cet échange d'énergie s'effectue entre les premières composantes harmoniques des deux modes, ce qui correspond à une *résonance interne 1:1*. Ce phénomène est mis en évidence de manière détaillée : le cadre théorique, le protocole expérimental et l'identification des coefficients sont rédigés sous la forme d'un article soumis dans le journal *Meccanica*.
- Le dernier chapitre reproduit une démarche expérimentale similaire sur une plaque piézoélectrique avec un système de détection et d'actionnement pleinement intégré. La conception de la plaque piézoélectrique et sa fabrication sont d'abord présentées. Le positionnement des patches piézoélectriques s'appuie sur une stratégie identique aux études des diaphragmes MEMS présentées dans la fin de la section 1.2.1, qui se concentrent sur les résonances associées à des modes dégénérés. Le positionnement choisi permet en effet de conserver la symétrie axiale des premiers modes de la plaque circulaire, les modes dégénérés sont ici les deux premiers modes asymétriques. De la même manière que pour la plaque élastique, une réponse unimodale autour du premier mode axisymétrique est d'abord mesurée, confirmant ainsi que la boucle à verrouillage de phase peut être appliquée aux systèmes piézoélectriques. Une résonance 1:1 est ensuite mise en évidence autour des deux premiers modes asymétriques.

Première partie

Modèles réduits et simulations : état de l'art et démarche de résolution

Chapitre 2

Modèles de structures minces piézoélectriques et non-linéaires géométriques

Contents

2.1	Modèles analytiques de milieux minces élastiques	21
2.1.1	Équations Lagrangiennes de la mécanique des milieux continus élastiques	21
2.1.2	Cas d'une poutre homogène	23
2.1.3	Cas d'une plaque homogène	28
2.1.4	Bilan	34
2.2	Structures piézoélectriques et éléments finis	34
2.2.1	Matériaux piézoélectriques	35
2.2.2	Formulation du problème électromécanique	39
2.2.3	Discretisation par la méthode des éléments finis	42
2.3	Réduction de modèles par projection modale	49
2.3.1	Modèle réduit modal de structures élastiques à partir de modèles analytiques	50
2.3.2	Modèles réduits modaux de structures piézoélectriques	53
2.4	Conclusion du chapitre	55

Ce chapitre est intégralement consacré aux modèles mécaniques utilisés dans le cadre de ces travaux de thèse. Ces modèles présentent une large diversité. Leurs principaux critères de classification sont les suivants :

- (i) modèles linéaires ou non-linéaires
- (ii) modèles de structures élastiques ou piézoélectriques
- (iii) modèles tri-dimensionnels (3D) ou fondés sur des cinématiques de poutre, plaque ou coque
- (iv) modèles analytiques ou discrétisés par la méthode des éléments finis (modèles EF)
- (v) modèles écrits sur une formulation forte ou faible
- (vi) modèles complets ou modaux.

Dans ce travail, plusieurs modèles issus de ces différentes familles de modèles sont utilisés. Ceux-ci occupent différentes fonctions dans l'ensemble de la démarche proposée. Les modèles de structures uniquement élastiques sont étudiés dans un premier temps, et précèdent une extension aux structures piézoélectriques. L'objectif visé dans les deux cas est d'utiliser les modèles EF réduits pour réaliser des simulations numériques. Ces modèles EF ont l'avantage de ne pas être limités en termes de géométries et d'amplitudes de déplacements. À l'inverse, les modèles analytiques présentent ces limitations, qui sont définies avec les hypothèses préalables aux développements. Ces modèles analytiques sont cependant pertinents pour mettre en évidence des phénomènes physiques ou mécanismes mis en jeu dans les problèmes étudiés. De plus, les résultats issus de ces modélisations analytiques constituent des références utilisées à des fins de validation de la réduction des modèles EF. L'ensemble de la démarche de modélisation est présentée sur la figure 2.1.

L'ensemble des modèles se place dans les hypothèses de grands déplacements de structures minces avec des petites déformations. Ainsi, le modèle mécanique prend en compte les termes non-linéaires

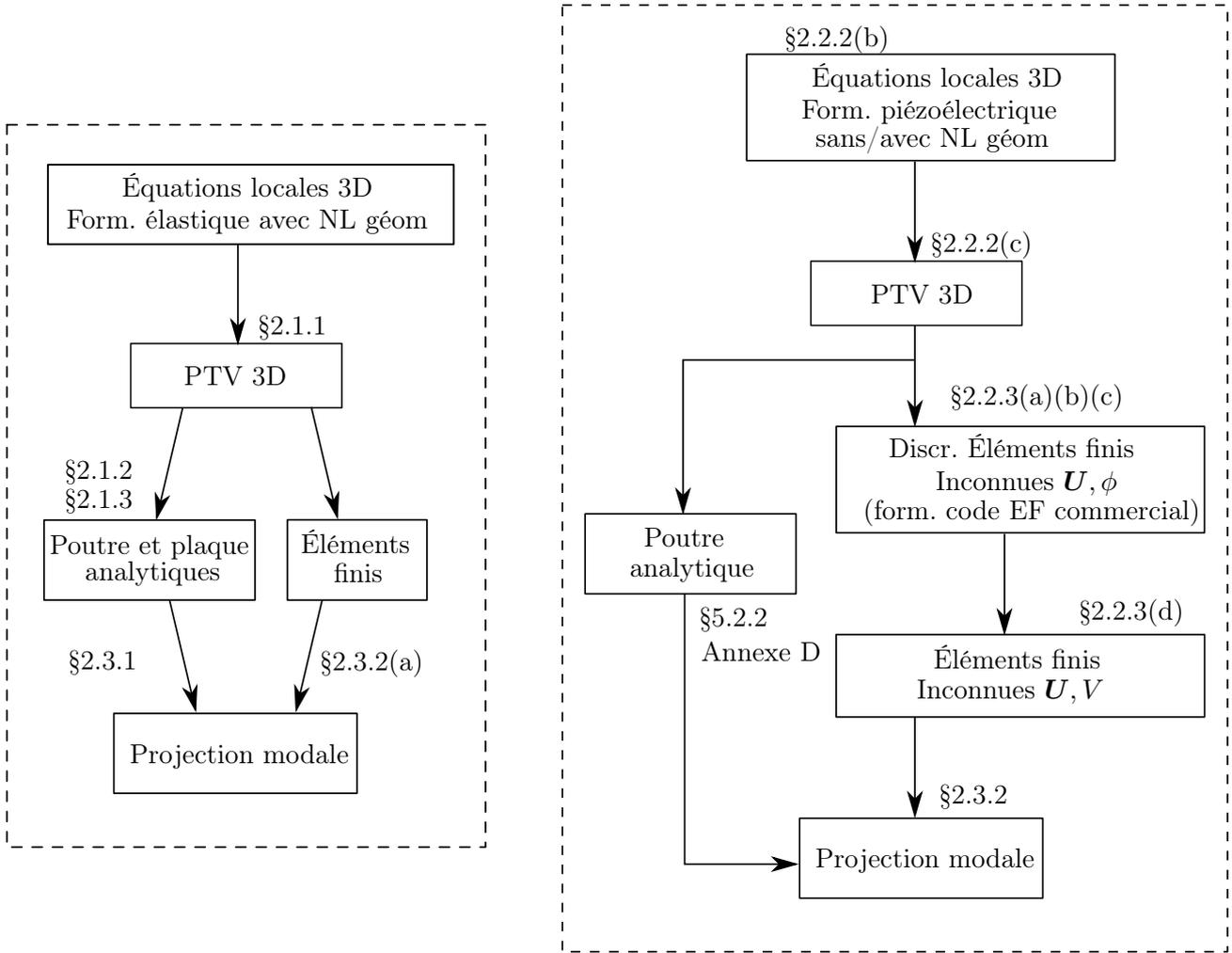


FIGURE 2.1 – Démarche de modélisation. Les abréviations sont détaillées. Form. : Formulation ; NL geom : Non-Linéarités géométriques ; PTV : Principe des Travaux Virtuels ; 3D : tri-dimensionnel ; Discr : Discrétisation. EF : Éléments finis. \mathbf{U} , ϕ et V désignent respectivement le vecteur des déplacements mécaniques, le potentiel électrique et la tension électrique.

de Green-Lagrange, mais utilise une loi de comportement élastique ou piézoélectrique linéaire de type Kirchhoff Saint-Venant.

Une majorité de ces modèles présentés est déjà connue. En particulier, les modèles de structures élastiques présentés dans la première section peuvent être trouvés dans plusieurs ouvrages tels que [68, 82]. Ces modèles classiques sont présentés afin de définir le cadre théorique de l'ensemble de la thèse et de faciliter la discussion des résultats obtenus ainsi que la présentation des méthodes développées dans les chapitres suivants.

Une formulation EF originale de structures piézoélectriques avec des non-linéarités géométriques est ensuite présentée dans la seconde section. Les fondements théoriques justifiant les équations locales de l'électrostatique, également connus et disponibles dans plusieurs ouvrages, sont préalablement rappelés. La formulation originale est ensuite détaillée dans le cas tridimensionnel avec des variables électriques locales, tel que cela est disponible dans les codes EF existants. Le problème est ensuite exprimé avec des variables électriques globales, il s'agit de la tension et de la charge électriques aux bornes des patches piézoélectriques.

La troisième section concerne la projection des équations du mouvement dans la base des modes de vibrations. Cette procédure est d'abord écrite pour les modèles analytiques de structures élastiques.

La même procédure est ensuite détaillée dans le cas de la formulation EF originale.

2.1 Modèles analytiques de milieux minces élastiques

2.1.1 Équations Lagrangiennes de la mécanique des milieux continus élastiques

Cette section présente les principales loi de la mécanique en configuration Lagrangienne. Ces développements sont bien connus et peuvent être trouvés par exemple dans [82]. Le système étudié est une structure solide occupant un domaine de l'espace Ω délimité par une frontière $\partial\Omega$, sur laquelle s'applique des efforts volumiques et surfaciques de densités respectives \mathbf{f}_v et \mathbf{f}_s . Le problème consiste à déterminer le champ de déplacement \mathbf{U} défini par $\mathbf{U} = \mathbf{X} - \mathbf{X}$, avec $\mathbf{X} = \mathbf{O}\mathbf{M}_0$ le vecteur position d'un point matériel dans une *configuration initiale* de référence, et $\mathbf{X} = \mathbf{O}\mathbf{M}$ le vecteur position du même point dans la *configuration déformée* du milieu continu solide. Dans les développements présentés dans ce chapitre, le domaine Ω correspond au volume occupé par la structure dans la configuration initiale. De plus, les opérateurs différentiels (gradient et divergence) sont exprimés par rapport aux variables d'espace dans la configuration initiale.

(a) Principe des travaux virtuels

Ce principe repose sur un équilibre entre les travaux virtuels δW_a fournis par l'accélération $\ddot{\mathbf{U}}$ du système et la somme des travaux virtuels δW_{int} et δW_{ext} fournis par les efforts intérieurs et extérieurs aux système. Il s'écrit de façon générale :

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = \delta W_a \quad \forall \delta \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \delta W_a = \iiint_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{U}} \cdot \delta \mathbf{U} \, d\Omega & (2.2a) \\ \delta W_{int} = - \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\pi} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega & (2.2b) \\ \delta W_{ext} = \iiint_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \delta \mathbf{U} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{f}_s \cdot \delta \mathbf{U} \, dS, & (2.2c) \end{cases}$$

où $\rho = \rho(\mathbf{X})$ désigne la masse volumique, $:$ le produit doublement contracté (défini pour deux tenseurs du second ordre \mathbf{A} et \mathbf{B} par $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$), $\boldsymbol{\pi}$ le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{\epsilon}$ le tenseur des déformations de Green-Lagrange et $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ sa différentielle. On rappelle que dans ces équations Ω représente le domaine en configuration initiale et que les différentes grandeurs introduites, en particulier (ρ , \mathbf{f}_v , \mathbf{f}_s) sont exprimées dans cette même configuration. Les quantités $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ sont définies par :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}) \quad (2.3)$$

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \delta \mathbf{U} + \nabla^T \delta \mathbf{U} + \nabla^T \delta \mathbf{U} \nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \nabla \delta \mathbf{U}), \quad (2.4)$$

où \mathbf{I} dénote la matrice identité, $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}$ est le tenseur gradient de la déformation, et ∇ correspond au tenseur (resp. vecteur) gradient d'un vecteur (resp. scalaire). L'introduction de l'expression de $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ (2.4) dans l'expression des efforts intérieurs (2.2b) conduit à :

$$\delta W_{int} = -\frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left(\boldsymbol{\pi} : \nabla \delta \mathbf{U} + \boldsymbol{\pi} : \nabla^T \delta \mathbf{U} + \boldsymbol{\pi} : (\nabla^T \delta \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}) + \boldsymbol{\pi} : (\nabla^T \mathbf{U} \nabla \delta \mathbf{U}) \right) d\Omega. \quad (2.5)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff a la propriété d'être symétrique [82], d'où

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{A} = \pi_{ij} A_{ij} = \pi_{ji} A_{ij} = \boldsymbol{\pi} : \mathbf{A}^T \quad \forall \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Ce dernier résultat implique d'une part que :

$$\boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\nabla}^T \delta \mathbf{U}) = \boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U}), \quad (2.7)$$

ce qui permet de simplifier les termes linéaires de l'expression (2.5). D'autre part, en considérant deux tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\pi} : (\mathbf{AB}) = \pi_{ij} A_{ik} B_{kj} = (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi}) : \mathbf{B} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} &= (\pi_{ij} B_{kj}) A_{ik} = (\boldsymbol{\pi} \mathbf{B}^T) : \mathbf{A} \\ &= (B_{kj} \pi_{ij}) A_{ik} = (\mathbf{B} \boldsymbol{\pi}^T) : \mathbf{A}^T, \end{aligned} \quad (2.9)$$

la propriété de symétrie avec l'équation (2.9) entraîne que :

$$\boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\nabla}^T \delta \mathbf{U} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{U}) = (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\pi}) : \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U} \quad (2.10)$$

tandis que l'équation (2.8) implique :

$$\boldsymbol{\pi} : (\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U}) = (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\pi}) : \boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U}. \quad (2.11)$$

L'expression (2.5) de la puissance virtuelle des efforts intérieurs devient alors :

$$\delta W_{int} = - \iiint_{\Omega} \left[(\mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\pi} \right] : (\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U}) \, d\Omega, \quad (2.12)$$

avec $(\mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla} \mathbf{U}) \cdot \boldsymbol{\pi} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}$ le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

(b) Équations locales

La formulation forte du problème consiste à exprimer les équations d'équilibre locales. Celles-ci sont équivalentes au principe des travaux virtuels présentées avec les équations (2.1) et (2.2). On utilise également le résultat du développement suivant, écrit pour toute matrice \mathbf{A} et tout vecteur \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{Ab}) &= (A_{ij} b_j)_{,i} = A_{ij,i} b_j + A_{ij} b_{j,i} = \operatorname{div}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{b} \\ \text{soit } \mathbf{A} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{b} &= -\operatorname{div}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \operatorname{div}(\mathbf{Ab}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cette dernière égalité est utilisée pour l'équation (2.12). Le théorème de Green est appliqué sur le dernier terme de l'expression (2.13), ce qui entraîne l'expression suivante des efforts intérieurs :

$$\delta W_{int} = - \iiint_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) : (\boldsymbol{\nabla} \delta \mathbf{U}) \, d\Omega = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) \cdot \delta \mathbf{U} \, d\Omega - \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{n} \, \delta \mathbf{U} \, dS. \quad (2.14)$$

L'égalité (2.14) doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel $\delta \mathbf{U}$. La séparation des intégrales de volume et de surface entraîne les équations d'équilibre suivantes :

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad \forall M \in \Omega \quad (2.15a)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad \forall M \in \partial\Omega, \quad (2.15b)$$

exprimées sur l'ensemble du domaine Ω d'une part, et sur ses frontières d'autre part. Cela montre que le principe des travaux virtuels (équation (2.1)) est équivalent aux équations d'équilibre locales (2.15).

(c) Loi de comportement élastique linéaire : application à un matériau isotrope

Pour des structures élastiques et homogènes, la loi de comportement est effectuée par une relation linéaire de Saint-Venant Kirchhoff [82] :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

où l'opérateur d'élasticité \mathbf{C} est un tenseur d'ordre 4. Si le matériau est isotrope, alors deux coefficients sont suffisants pour caractériser la loi de comportement, ainsi :

$$\boldsymbol{\pi} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.17)$$

avec (λ, μ) les coefficients d'élasticité de Lamé qui peuvent être exprimés en fonction des données du module d'Young Y et du coefficient de Poisson ν , plus couramment employées dans les travaux d'ingénierie

$$\lambda = \frac{\nu Y}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)}. \quad (2.18)$$

La relation inverse de la loi de Saint-Venant-Kirchhoff fait intervenir ces coefficients :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{Y} \boldsymbol{\pi} - \frac{\nu}{Y} \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \mathbf{I}. \quad (2.19)$$

Dans la suite, la section 2.2 présentera les lois de comportement piézoélectrique.

2.1.2 Cas d'une poutre homogène

Les raisonnements présentés dans cette section sont issus de [184], où les modèles de poutre en grande rotation et d'Euler-Bernoulli sont détaillés et comparés. Dans cette section, nous présentons uniquement la cinématique d'Euler-Bernoulli avec les termes non-linéaires de von Kármán.

La structure est une poutre représentée sur la figure 2.2(a), de section constante S et telle que $\Phi(S) \ll L$, avec L la longueur et $\Phi(S)$ une dimension caractéristique de la section. Le modèle utilisé est fondé sur les hypothèses suivantes :

- (i) toute section droite est animée d'un mouvement de solide rigide (cf figure 2.2 (b))
- (ii) la déformation de cisaillement transverse ε_{xz} est négligée (toute section droite reste droite au cours de la déformation),
- (iii) les contraintes transverses sont négligées ($\pi_{yy} = \pi_{zz} = 0$), ces deux premiers points correspondent aux hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli
- (iv) les rotations sont linéarisées (hypothèse des rotations modérées),
- (v) seul le premier terme non-linéaire dans les déformations axiales est conservé dans le tenseur des déformations de Green-Lagrange (hypothèse de von Kármán), les déplacements peuvent être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur h de la poutre ($w_m = \max w \sim h$)
- (vi) l'inertie de rotation est négligée
- (vii) l'inertie axiale est négligée
- (viii) les composantes longitudinales des efforts extérieurs sont également négligées.

D'après l'hypothèse (i), la cinématique du problème est définie par le déplacement \mathbf{U} d'un point $M(x, z)$, qui s'écrit [184] :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(G) + (\mathbf{R}(\theta) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{GM} \quad (2.20)$$

où G désigne le point d'abscisse x de la ligne moyenne et \mathbf{R} la matrice des rotations θ dont l'expression est :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

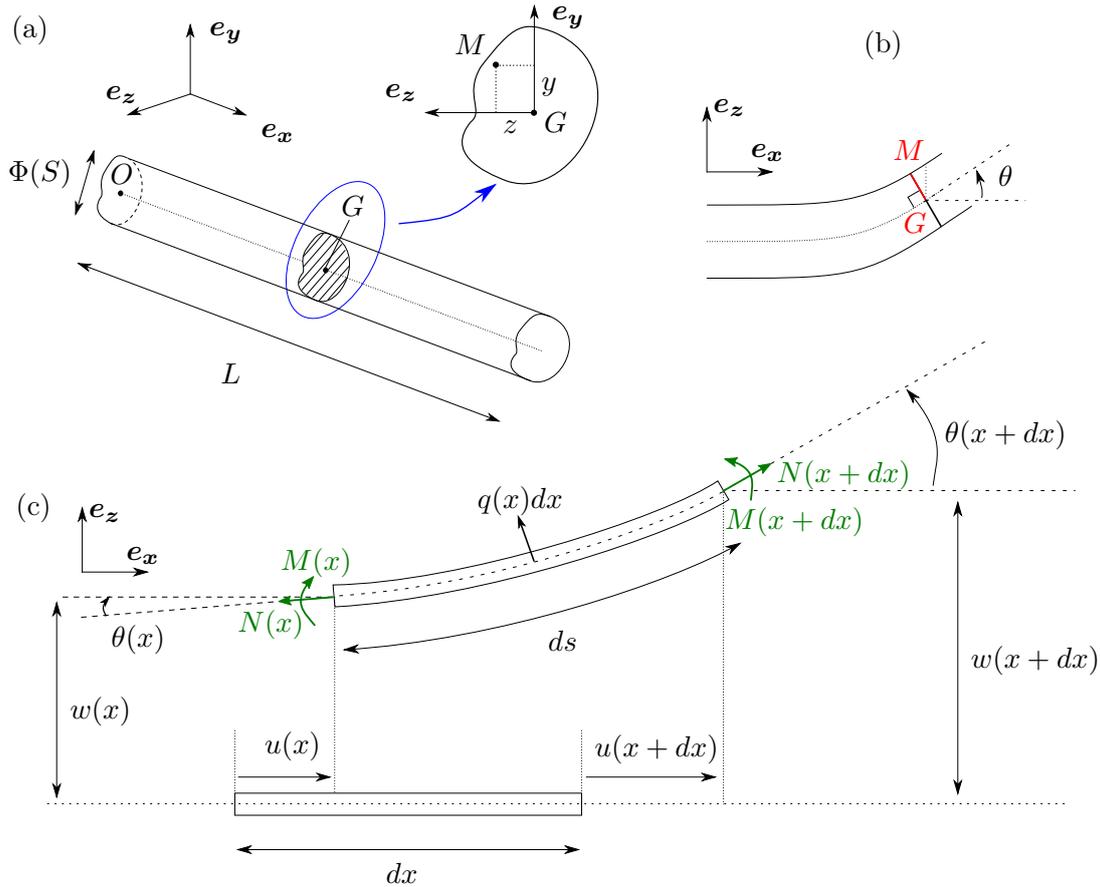


FIGURE 2.2 – (a) Représentation de la poutre étudiée et de l’une de ses sections. (b) Schématisation d’une section de poutre, la section droite correspond à l’hypothèse (ii) d’Euler-Bernoulli. (c) Schématisation d’une configuration déformée d’une section de la poutre par rapport à sa configuration initiale, avec représentation des déplacements et des efforts internes introduits.

En notant u et w les déplacements axial et transverse du point G , le déplacement $\mathbf{U}(M)$ peut alors s’écrire :

$$\mathbf{U}(M) = [u(x) + z \sin(\theta)] \mathbf{e}_x + [w(x) + z(\cos(\theta) - 1)] \mathbf{e}_z \quad (2.22)$$

comme le montre la figure 2.2(b). Conformément à l’hypothèse (iii), les rotations sont linéarisées. Cela permet de simplifier la cinématique (2.22), qui devient :

$$\mathbf{U}(M) = [u(x) + z\theta] \mathbf{e}_x + w(x) \mathbf{e}_z. \quad (2.23)$$

(a) Déformations, contraintes et efforts intérieurs

Déformations. Les déformations sont obtenues par le tenseur de Green-Lagrange (équation (2.3)). Avec la cinématique définie par l’équation (2.23), le gradient du déplacement et sa transposée s’écrivent :

$$\nabla \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{,x} + z\theta_{,x} & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ w_{,x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^T \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{,x} + z\theta_{,x} & 0 & w_{,x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

où l’indice $_{,x}$ désigne la dérivée spatiale dans la direction \mathbf{e}_x de la configuration initiale. Ceci permet d’obtenir la partie non-linéaire du tenseur des déformations :

$$\nabla^T \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \begin{pmatrix} (u_{,x} + z\theta_{,x})^2 + (w_{,x})^2 & 0 & \theta(u_{,x} + z\theta_{,x}) \\ 0 & 0 & 0 \\ w_{,x}(u_{,x} + z\theta_{,x}) & 0 & (w_{,x})^2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

où l'unique terme de von Kármán retenu d'après l'hypothèse (v) est indiqué en rouge. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange a alors pour expression :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} (u_{,x} + z\theta_{,x}) + (w_{,x})^2 & 0 & \frac{1}{2}(\theta + w_{,x}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(\theta + w_{,x}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

D'après l'hypothèse (ii), le cisaillement ε_{xz} est négligé, d'où

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\theta + w_{,x}) = 0. \quad (2.27)$$

Ceci permet alors d'exprimer les rotations :

$$\theta = -w_{,x}. \quad (2.28)$$

L'unique composante non nulle dans le problème est donc la déformation uniaxiale ε_{xx} . Finalement, le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit dans ce problème :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \varepsilon_{xx} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \quad (2.29a)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 - zw_{,xx}. \quad (2.29b)$$

La déformation ε_{xx} peut aussi s'écrire comme la somme d'une contribution d'un terme de membrane ϵ et d'un terme dépendant de la courbure κ :

$$\varepsilon_{xx} = \epsilon + z\kappa, \quad (2.30)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \kappa = \theta_{,x} = -w_{,xx}. \end{cases} \quad (2.31a)$$

$$(2.31b)$$

La différentielle de la déformation $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ s'écrit :

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta\varepsilon_{xx} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \quad (2.32a)$$

$$\text{avec} \quad \delta\varepsilon_{xx} = \delta u_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x} - z\delta w_{,xx}. \quad (2.32b)$$

Contraintes. La loi de comportement (2.19) est maintenant appliquée. Cette loi peut être simplifiée avec l'hypothèse (vii). En effet :

$$\pi_{yy} = \pi_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) = \pi_{xx} \quad (2.33)$$

et la relation (2.19) devient :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{Y}\pi_{xx} - \frac{\nu}{Y}\pi_{xx} = \frac{\pi_{xx}}{Y}, \quad \text{soit} \quad \pi_{xx} = Y\varepsilon_{xx}. \quad (2.34)$$

Efforts intérieurs. Enfin, l'effort normal N et moment le fléchissant M sont introduits. Ceux-ci sont représentés sur la figure 2.2(c) et s'écrivent :

$$\text{avec} \quad \begin{cases} N = \iint_S \pi_{xx} dS = Y S \epsilon \\ M = \iint_S z \pi_{xx} dS = Y \iint_S (z\epsilon + z^2\kappa) dS = Y I \kappa = -Y I w'', \end{cases} \quad (2.35a)$$

$$(2.35b)$$

$$\text{où} \quad I = \iint_S z^2 dS \quad (2.36)$$

désigne le moment quadratique associé à la section de la poutre.

(b) Application du principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels décrit par les équations (2.1) et (2.2) est maintenant appliqué à la poutre. Une étape préliminaire est d'écrire les déplacements virtuels et accélérations $\delta\mathbf{U}$ et $\ddot{\mathbf{U}}$, à partir de la cinématique définie par la formulation (2.23) :

$$\delta\mathbf{U} = (\delta u - z\delta w_{,x})\mathbf{e}_x + \delta w\mathbf{e}_z \quad (2.37)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = (\ddot{u} - z\ddot{w}_{,x})\mathbf{e}_x + \ddot{w}\mathbf{e}_z. \quad (2.38)$$

Les travaux virtuels des quantités d'accélération définis par l'équation (2.2a) s'écrivent alors :

$$\delta W_a = \int_0^L (\rho S \ddot{u} \delta u + \rho S \ddot{w} \delta w + \rho I \ddot{\theta} \delta \theta) dx. \quad (2.39)$$

L'inertie de rotation est négligée d'après l'hypothèse (vi), d'où :

$$\delta W_a = \int_0^L (\rho S \ddot{u} \delta u + \rho S \ddot{w} \delta w) dx. \quad (2.40)$$

Le travail des efforts intérieurs est exprimé dans un second temps. D'après les hypothèses (ii) et (iii), ce travail ne prend en compte que la composante axiale des tenseurs des contraintes et des déformations. Avec l'introduction des efforts internes définis dans les équations (2.35), l'expression (2.2b) peut alors être développée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\pi} : \delta \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = - \iiint_{\Omega} \pi_{xx} \varepsilon_{xx} d\Omega \\ &= - \int_0^L \iint_S \pi_{xx} \left(\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} - z \delta w_{,xx} \right) dS dx \\ &= - \int_0^L \left(\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} \iint_S \pi_{xx} dS \right) dx + \int_0^L \left(\delta w_{,xx} \iint_S z \pi_{xx} dS \right) dx \\ &= - \int_0^L \left(N \delta u_{,x} + N w_{,x} \delta w_{,x} - M \delta w_{,xx} \right) dx. \end{aligned}$$

Des intégrations par partie sont effectuées. Ceci amène à :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \int_0^L \left\{ N_{,x} \delta u + [(N w_{,x})_{,x} + M_{,xx}] \delta w \right\} dx \\ &\quad - \left[N \delta u + (N w_{,x})_{,x} \delta w - M \delta w_{,x} + M_{,x} \delta w \right]_0^L. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De manière classique, les quantités (n, p, q) pour désigner les densités linéiques de résultantes axiale et normale et de moment sont introduits, avec les efforts et moments axiaux appliqués sur les bords $(N_e, M_{e,x}, M_e)$. Avec ces quantités, le travail des efforts extérieurs défini par l'équation (2.2c) peut s'écrire ici :

$$\delta W_{ext} = \int_0^L (n \delta u + p \delta w - q \delta w_{,x}) dx + \left[N_e \delta u + M_{e,x} \delta w - M_e \delta w_{,x} \right]_0^L. \quad (2.42)$$

Finalement, le principe des travaux virtuels aboutit à la formulation faible du problème :

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho S \ddot{u} \delta u + \rho S \ddot{w} \delta w) dx &= \int_0^L \left\{ [N_{,x} + n] \delta u + [(N w_{,x})_{,x} + M_{,xx} + p - q_{,x}] \delta w \right\} dx \\ &\quad + \left[(N_e - N) \delta u + (M_{e,x} - M_{,x} - (N w_{,x})_{,x} + q) \delta w - (M_e - M) \delta w_{,x} \right]_0^L. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Le terme intégré correspond aux équations des mouvements axial et transverse, tandis que les termes de raccordement constituent les conditions aux limites.

(c) Formulation forte du problème

L'égalité (2.43) doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel $(\delta u, \delta w, \delta \theta)$. La formulation forte du problème est établie en séparant les différents termes de l'expression (2.43). Dans ce travail, le comportement sur l'ensemble de la poutre est principalement étudié, celui-ci est gouverné par les termes de l'expression (2.43) intégrés sur la longueur de la poutre. Cette formulation correspond alors aux équations d'équilibre de la poutre :

$$\rho S \ddot{u} - N_{,x} = n \quad (2.44a)$$

$$\rho S \ddot{w} - M_{,xx} - (Nw_{,x})_{,x} = p. \quad (2.44b)$$

Les autres termes de l'équation (2.43) correspondent aux conditions aux limites. Le couplage membrane-flexion est ici représenté par le terme $(Nw_{,w})_{,x}$ dans l'équation transverse (2.44a). En prenant en compte les expressions (2.35) des efforts internes, le système (2.44) devient :

$$\rho S \ddot{u} - N_{,x} = n \quad (2.45a)$$

$$\rho S \ddot{w} + YI w_{,xxxx} - (Nw_{,x})_{,x} = p \quad (2.45b)$$

$$N = YS\epsilon = YS\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right). \quad (2.45c)$$

Le problème est alors constitué de trois inconnues (w, u, N) pour trois équations. Ce problème peut donc être résolu.

(d) Formulations en force et en déplacement du terme de membrane

Le système (2.45) peut être simplifié avec les hypothèses (vii) et (viii), l'équation (2.45a) devient alors :

$$N_{,x} = 0. \quad (2.46)$$

Ceci signifie que l'effort axial N est constant sur la poutre. Son estimation est alors rendue possible avec l'expression (2.45c) :

$$\int_0^L N dx = LN = YS \left[\int_0^L u_{,x} + \frac{1}{2} \int_0^L (w_{,x})^2 \right] dx = YS \left[u \right]_0^L + \frac{YS}{2} \int_0^L (w_{,x})^2 dx. \quad (2.47)$$

Par ailleurs, **si les déplacements axiaux sont bloqués sur les bords**, alors l'expression de l'effort normal se simplifie, permettant d'obtenir un système à deux inconnues appelé **formulation- (w, N) du problème** :

$$\rho S \ddot{w} + YI w_{,xxxx} - (Nw_{,xx}) = p(x, t) \quad (2.48a)$$

$$N = \frac{YS}{2L} \int_0^L (w_{,x})^2 dx = \text{cste}. \quad (2.48b)$$

Ces développements montrent que **si l'un des deux bords est libre**, alors l'effort normal s'annule sur l'ensemble la poutre d'après l'équation (2.46), et **le modèle de von Kármán devient alors équivalent au modèle linéaire**. Dans les chapitres suivants, le cas d'une poutre bi-encastée est utilisé comme cas de référence. Dans l'optique d'une comparaison avec la méthode des éléments finis, qui (sauf exceptionnellement) est fondée sur une formulation en déplacement, le système (2.48) peut être exprimé avec les variables (u, w) par la combinaison des équations (2.35a) et (2.44a). Ceci permet d'obtenir :

$$\rho S \ddot{w} + YI w_{,xxxx} - YS \left(u_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^3 \right)_{,x} = p(x, t) \quad (2.49a)$$

$$\rho S \ddot{u} - YS (u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx}) = n(x, t), \quad (2.49b)$$

qui constitue la **formulation en (w, u)** du problème de vibrations non-linéaires des poutres de von Kármán.

(e) Adimensionnement

Les deux formulations obtenues peuvent être adimensionnées : l'intérêt est de montrer que le problème dynamique et le comportement non-linéaire d'une poutre sont identiques pour toutes les géométries de poutres possibles. Les variables d'adimensionnement suivantes sont introduites dans les systèmes (2.44) et (2.49) :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{w}{r_g}, & \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{t} &= \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{YI}{\rho S}} t, & \bar{u} &= \frac{L}{r_g^2} u, \\ \bar{N} &= \frac{L^2}{Y S r_g^2} N, & \bar{p} &= \frac{Y I r_g}{L^4} p, & \mu &= \frac{I}{S L^2},\end{aligned}\quad (2.50)$$

avec $r_g = \sqrt{I/S}$ le rayon de giration associé à la section de la poutre. Ceci amène à écrire la formulations en (N, w) sous la forme suivante :

$$\ddot{w} + w_{,xxxx} - N w_{,xx} = p(x, t) \quad (2.51a)$$

$$N = \frac{1}{2} \int_0^L (w_{,x})^2 dx = \text{cste}, \quad (2.51b)$$

où les barres supérieures des variables d'adimensionnement définies dans les équations (2.50) sont écartées pour ne pas alourdir les notations. La formulation en (u, w) devient :

$$\ddot{w} + w_{,xxxx} - (u_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^3)_{,x} = p(x, t) \quad (2.52a)$$

$$\mu \ddot{u} - (u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx}) = 0, \quad (2.52b)$$

où $\mu \ll 1$, ce qui justifie l'hypothèse (vii). Ces deux systèmes gouvernent le comportement dynamique non-linéaire de toute géométrie de poutre. Les solutions dynamiques ne dépendent pas des paramètres géométriques ou matériau.

2.1.3 Cas d'une plaque homogène

Similairement au cas de la poutre, les équations non-linéaires de von Kármán sont maintenant établies pour le cas d'une plaque homogène. Les raisonnements présentés reprennent ceux publiés dans [178], qui traitent le cas du problème des plaques de von Kármán dans le cas général. Dans cette section, les principaux opérateurs sont ici exprimés dans un repère cylindrique qui correspond au cas d'une plaque à géométrie circulaire. L'avantage d'une telle géométrie est l'existence de solutions analytiques au problème du calcul des modes de vibration qui seront utilisées ultérieurement.

La structure étudiée est une plaque homogène d'épaisseur h , et de rayon a avec $h \ll a$ pour l'exemple de géométrie circulaire présentée. Cette structure occupe un volume Ω de l'espace, délimité par sa frontière $\partial\Omega$. Cette frontière inclut plusieurs surfaces représentées sur la figure 2.3(a) : les bords supérieurs et inférieurs sont notés P^+ et P^- , tandis que les bords aux extrémités $r = a$ sont notés Σ . La frontière est alors l'union de ces trois surfaces : $\partial\Omega = P^+ \cup P^- \cup \Sigma$. Enfin, P et ∂P désignent respectivement la surface moyenne et le cercle composant sa frontière. Dans l'exemple d'une plaque circulaire, les coordonnées sont exprimées dans un repère cylindrique $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z})$.

(a) Hypothèses générales et cinématiques

Le modèle employé repose sur les hypothèses suivantes :

- (i) Les segments orthogonaux à P sont animés d'un mouvement de solide rigide

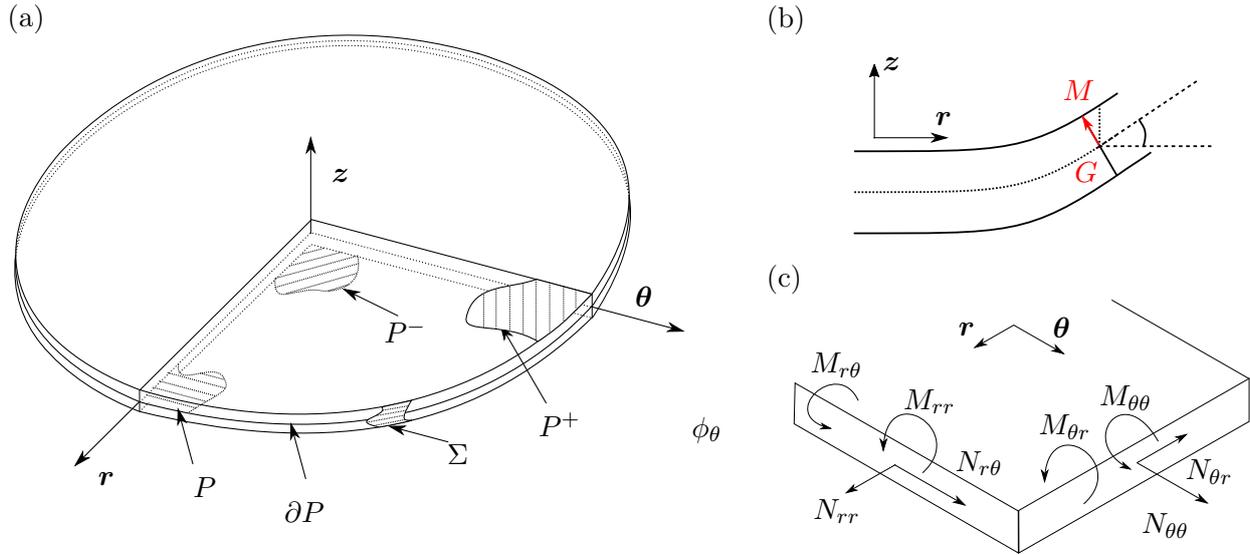


FIGURE 2.3 – (a) Représentation des domaines de la plaque étudiée. (b) Coupe transversale de la plaque dans le plan (r, z) et rotation d'un volume élémentaire placé à proximité du segment GM pour représenter les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love. (c) Schématisation des efforts internes sur une volume élémentaire de la plaque circulaire.

- (ii) les déformations de cisaillement sont négligées ($\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$) (toute section droite reste droite au cours de la déformation, cf. figure 2.3 (b)). Ces deux premières hypothèses définissent la cinématique de Kirchhoff-Love.
- (iii) les contraintes transverses sont négligées ($\pi_{zz} = 0$)
- (iv) les rotations des sections sont suffisamment petites pour être linéarisées
- (v) la relation entre déplacements et les déformations prend en compte les termes de von Kármán, les déplacements peuvent être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la structure ($w_m = \max w \sim h$)
- (vi) l'inertie de rotation est négligée
- (vii) l'inertie du mouvement dans le plan est négligée
- (viii) les composantes longitudinales des efforts extérieurs sont également négligées.

L'hypothèse (i) permet de définir la cinématique avec le déplacement d'un point $M(r, \theta, z)$ par :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{U}(G) + \boldsymbol{\varphi} \wedge (zz). \quad (2.53)$$

La linéarisation des rotations effectuée d'après l'hypothèse (iv) entraîne que :

$$\begin{cases} \cos(\varphi_r) \approx 1 \\ \sin(\varphi_r) \approx \varphi_r \approx \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos(\varphi_\theta) \approx 1 \\ \sin(\varphi_\theta) \approx \varphi_\theta \approx -\frac{\partial w}{\partial r}. \end{cases}$$

Les rotations d'une section s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \varphi_\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla w \wedge \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

La cinématique (2.53) se réécrit alors sous la forme :

$$\mathbf{U}(M) = \mathbf{u}(r, \theta) - z \nabla w + w(r, \theta) \mathbf{z} \quad (2.55)$$

avec $\mathbf{u}(r, \theta) = \begin{pmatrix} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ les déplacements de membrane.

(b) Déformations, contraintes et efforts intérieurs

D'après les hypothèses (ii) et (iii), seules les parties planes des tenseurs des déformations et contraintes ont une influence dans le principe des travaux virtuels. Comme dans le cas de la poutre, le tenseur des déformations de Green-Lagrange se décompose sous la forme de la somme des contributions des termes de membrane $\boldsymbol{\epsilon}$ et de courbure $\boldsymbol{\kappa}$. Avec les termes de von Kármán pris en compte d'après l'hypothèse (v), les déformations s'écrivent de manière générique :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} - z\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.56)$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla^T w) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla\nabla w \quad (2.57)$$

où \otimes désigne le produit tensoriel de deux vecteurs.

L'hypothèse (iii) permet de simplifier la loi de comportement de manière similaire au cas de la poutre (cf. équation (2.34), obtenue à partir de l'expression (2.19)). En notation de Voigt, la loi de comportement devient dans un repère cylindrique :

$$\begin{pmatrix} \pi_{rr} \\ \pi_{\theta\theta} \\ \pi_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{Y}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Les efforts généralisés associés, moments de flexions et efforts normaux schématisés sur la figure 2.3 (c), sont obtenus par l'intégration des contraintes sur l'épaisseur. D'après l'équation (2.56), cette opération permet d'écrire :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{rr} & N_{r\theta} \\ N_{r\theta} & N_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\pi} dz \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\theta} \\ M_{r\theta} & M_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z\boldsymbol{\pi} dz. \quad (2.59)$$

Après développements, ces efforts valent :

$$\mathbf{N} = A \left[(1-\nu)\boldsymbol{\epsilon} + \nu \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \right] \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = -D \left[(1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \nu \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{I} \right], \quad (2.60)$$

avec $A = \frac{Yh}{1-\nu^2}$ et $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$.

(c) Application du principe des travaux virtuels

Ce paragraphe présente les résultats de l'application du principe des travaux virtuels. Les détails des développements, analogues au cas de la poutre mais réalisés ici sur un problème bi-dimensionnel, font l'objet de l'annexe A. Cette annexe introduit dans les équations (2.2) les déplacements et accélérations virtuels issus de la cinématique (2.55) :

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{u} - z\nabla\delta w + \delta w\mathbf{z} \quad (2.61)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{u}} - z\nabla\ddot{w} + \ddot{w}\mathbf{z}. \quad (2.62)$$

Dans un premier temps, le **travail des quantités d'accélération** est issu du résultat (A.2) :

$$\delta W_a = m \iint_P (\ddot{\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \ddot{w}\delta w) dS - I \iint_S \Delta\ddot{w}\delta w dS + I \oint_{\partial P} (\nabla\ddot{w}\delta w) \cdot \mathbf{n} dl \quad (2.63)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal extérieur à ∂P , $m = \rho h$ la masse surfacique et $I = \frac{\rho h^3}{12}$ le moment quadratique d'un segment. Les termes intégrés sur le contour fermé ∂P correspondent à l'inertie de rotation, négligée d'après l'hypothèse (vi). Ainsi, le travail virtuel des accélérations s'écrit finalement :

$$\delta W_a = m \iint_P (\ddot{\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \ddot{w}\delta w) dS \quad (2.64)$$

Dans un second temps, le **travail des efforts extérieurs** s'écrit (cf. résultat (A.10)).

$$\delta W_{ext} = \iint_P [p_e + \text{div}(\mathbf{m}_e)] \delta w dS + \oint_{\partial P} \left[(\mathbf{N}_e \cdot \delta \mathbf{u}) + [T_e + \frac{\partial}{\partial l}(\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t})] \delta w - (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] dl, \quad (2.65)$$

où p_e et m_e désignent d'une part les densités d'effort surfaciques ramenées sur P en résultante et en moment. D'autre part, les termes $(\mathbf{N}_e + T_e \mathbf{e}_z)$ et \mathbf{M}_e dénotent les densités d'effort linéiques en résultantes (respectivement longitudinale et transverse) et en moment exprimées sur Σ . \mathbf{t} dénote le vecteur tangent à ∂P , tandis que l et n sont les coordonnées curvilignes tangentielle et normale de ∂P .

Finalement, le **travail des efforts intérieurs** est défini par les équations (2.2b) et (2.12). Son expression est celle obtenue dans l'annexe A.1.3 :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & \iint_P \left\{ \mathbf{div} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} + [\mathbf{div} \mathbf{div} \mathbf{M} + \mathbf{div}(\mathbf{N} \nabla w)] \delta w \right\} dS \\ & - \oint_{\partial P} \left\{ (\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{N} \nabla w \cdot \mathbf{n} + \mathbf{div} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial l}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}] \delta w \right\} dl \\ & + \oint_{\partial P} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl. \end{aligned} \quad (2.66)$$

(d) Formulations faible et forte du problème

La formulation faible est obtenue par l'application du principe des travaux virtuels (équation (2.1)), à partir des résultats (2.64), (2.65) et (2.66). La réorganisation de l'égalité sur les différents domaines donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \iint_P \left\{ \mathbf{div} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} + [\mathbf{div} \mathbf{div} \mathbf{M} + \mathbf{div}(\mathbf{N} \nabla w) + p_e + \text{div}(\mathbf{m}_e)] \delta w \right\} dS \\ & + \oint_{\partial S} \left\{ [-\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{N}_e] \cdot \delta \mathbf{u} + [-\mathbf{N} \nabla w \cdot \mathbf{n} - \mathbf{div} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial}{\partial l}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} + T_e + \frac{\partial}{\partial l}(\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t})] \delta w \right\} dl \\ & + \oint_{\partial S} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{M}_e) \cdot \mathbf{n} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl = m \iint_P (\ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \ddot{w} \delta w) dS. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Ces quantités, globales car intégrées sur l'ensemble du domaine occupé par le système, constituent la formulation faible du problème de vibration des plaques.

L'expression (2.67) doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel $(\delta \mathbf{u}, \delta w)$. Dans un souci de concision, seuls les termes intégrés sur P sont considérés. Ces termes correspondent aux équations du mouvement. Les autres termes correspondent aux conditions aux limites. Le système d'équations obtenu sur P s'écrit :

$$\mathbf{div} \mathbf{N} = m \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.68a)$$

$$p_e + \text{div}(\mathbf{m}_e) + \mathbf{div} \mathbf{div} \mathbf{M} + \mathbf{div}(\mathbf{N} \nabla w) = m \ddot{w} \quad (2.68b)$$

qui constitue la formulation forte du problème. L'équation (2.68a) est l'équation du mouvement longitudinale de la plaque, tandis que l'expression (2.68b) gouverne le mouvement transverse. Le terme linéaire de flexion de l'équation (2.68b) peut s'écrire :

$$\mathbf{div} \mathbf{div} \mathbf{M} = -D \Delta \Delta w. \quad (2.69)$$

En notant $p = p_e + \text{div}(\mathbf{m}_e)$, et avec l'hypothèse (vii), le système (2.68) se réécrit comme :

$$\mathbf{div} \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (2.70a)$$

$$p = m\ddot{w} + D\Delta\Delta w - \text{div}(\mathbf{N}\nabla w) \quad (2.70b)$$

Dans ce système d'équations, les non-linéarités géométriques sont comprises dans les efforts normaux \mathbf{N} , qui contient les termes de von Kármán. Le couplage membrane-flexion est en plus présent dans l'équation transverse avec le terme non-linéaire $\text{div}(\mathbf{N}\nabla w)$. Dans ce problème, le système (2.70) est constitué de trois équations scalaires (deux pour (2.70a) et une avec (2.70b)), pour quatre inconnues ($N_{rr}, N_{r\theta}, N_{\theta\theta}, w$). L'équation de compatibilité du champ de déplacement fournit une dernière équation. Celle-ci sera présentée ci-après.

(e) Formulation en (w, F)

Cette section présente une procédure pour ramener le problème non-linéaire à deux équations et inconnues. L'équation (2.70a) est équivalente à l'existence d'une fonction scalaire $F(r, \theta)$ appelée fonction d'Airy ou fonction de force, telle que :

$$\mathbf{N} = \Delta F \mathbf{I} - \nabla \nabla F \quad (2.71)$$

Dans le cas d'une géométrie circulaire, les relations entre \mathbf{N} et F s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{rr} = \frac{F_{,r}}{r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta} \\ N_{\theta\theta} = F_{,rr} \\ N_{r\theta} = \frac{1}{r^2} F_{,\theta} - \frac{1}{r} F_{,r\theta}. \end{cases} \quad (2.72)$$

On utilise par ailleurs le résultat suivant justifié en Annexe A.2 :

$$\mathbf{div}(\mathbf{N}\nabla w) = L(F, w), \quad (2.73)$$

$$\text{avec } L(F, w) = \Delta F \Delta w - \nabla \nabla F : \nabla \nabla w$$

où L , opérateur bilinéaire défini par

$$L(f, g) = f_{,rr} \left(\frac{g_{,r}}{r} + \frac{g_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + g_{,rr} \left(\frac{f_{,r}}{r} + \frac{f_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{f_{,r\theta}}{r} + \frac{f_{,\theta}}{r^2} \right) \left(\frac{g_{,r\theta}}{r} + \frac{g_{,\theta}}{r^2} \right), \quad (2.74)$$

est utilisé pour simplifier l'équation (2.68b). Celle-ci peut alors se réécrire comme :

$$m\ddot{w} + D\Delta\Delta w - L(F, w) = p. \quad (2.75)$$

La condition de compatibilité est maintenant introduite pour exprimer les efforts de membrane avec la seule inconnue F . Il s'agit d'étendre la condition utilisée dans le cas linéaire. Celle-ci est obtenue avec le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}_{lin}$, et s'écrit :

$$\Delta \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{lin}) - \text{div} \text{div} \boldsymbol{\varepsilon}_{lin} = 0. \quad (2.76)$$

La prise en compte des termes non-linéaires, effectuée en Annexe A.2, permet de justifier que :

$$-\frac{1}{2} L(w, w) = \frac{1}{Yh} \Delta \Delta F. \quad (2.77)$$

Les expressions (2.75) et (2.77) permettent d'exprimer le problème comme un système d'équation à deux variables scalaires w et F :

$$m\ddot{w} + D\Delta\Delta w - L(F, w) = p \quad (2.78a)$$

$$\Delta \Delta F = -\frac{Yh}{2} L(w, w). \quad (2.78b)$$

Ce système d'équations gouverne les mouvements transverses de plaque, en prenant en compte les efforts de membranes générés par les non-linéarités géométriques.

(f) Formulation en (\mathbf{u}, w)

Il est aussi possible d'injecter l'expression (2.60) des efforts normaux dans le système (2.68) pour obtenir une formulation en (\mathbf{u}, w) du problème. Ce problème, qui présente alors trois équations et trois inconnues, s'écrit [176] :

$$m\ddot{w} + D\Delta\Delta w - A \left[(1-\nu)(\nabla\mathbf{u} : \nabla\nabla w + \Delta\mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nu(\operatorname{div}\mathbf{u}\Delta w + \nabla\operatorname{div}\mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nabla w \cdot \nabla\nabla w \cdot \nabla w + \frac{1}{2}(\nabla w)^2 \Delta w \right] = 0 \quad (2.79a)$$

$$m\ddot{\mathbf{u}} - \frac{A}{2} \left[(1-\nu)\Delta\mathbf{u} + (1+\nu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + (1-\nu)\Delta w\nabla w + (1+\nu)\nabla\nabla w \cdot \nabla w \right] = \mathbf{n}. \quad (2.79b)$$

Cette formulation a l'avantage d'être fondée sur une formulation en déplacements uniquement. Ce problème est analogue à la formulation (w, \mathbf{u}) de la poutre décrite par le système d'équations (2.49). Un intérêt de ces formulations est la comparaison possible avec des résultats issus de modèles éléments finis, qui sont fondés sur des formulations en déplacement.

(g) Adimensionnement

Formulation en (w, F) . Les variables d'adimensionnement suivantes

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Yh^3}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} t, \quad \bar{p} = \frac{a^4}{Dh} p, \quad \varepsilon = \frac{Yh^3}{D} = 12(1-\nu^2) \quad (2.80)$$

sont introduites dans un premier temps dans les équations (2.78). Il en résulte une forme adimensionnée de ce système d'équations, valable pour toute plaque :

$$\ddot{w} = -\Delta\Delta w + \varepsilon L(F, w) + p \quad (2.81a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{1}{2}L(w, w), \quad (2.81b)$$

où les barres supérieures sont enlevées pour alléger les notations. Le modèle prédit donc que les solutions du problème dynamique non-linéaire d'une plaque ne dépendent que du paramètre ε , ainsi que des conditions aux limites. Bien que le cas d'une géométrie circulaire soit utilisé comme exemple, cette formulation est valable pour toute plaque. Le coefficient de Poisson est l'unique paramètre pouvant modifier le comportement non-linéaire du système.

Formulation en (w, \mathbf{u}) . Les équations (2.79) sont également adimensionnées, en prenant en compte les variables suivantes complémentaires à celles présentées dans l'équation (2.80) :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{Ah^2}{D} = \frac{\varepsilon}{1-\nu^2} = 12, \quad \mu = \frac{D}{AL^2}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{L}{h^2}\mathbf{u}, \quad \bar{\mathbf{n}} = \frac{h^2}{AL}\mathbf{n}. \quad (2.82)$$

L'introduction de ces variables dans les équations (2.79) aboutit à la formulation adimensionnée suivante :

$$\ddot{w} + \Delta\Delta w - \tilde{\varepsilon} \left[(1-\nu)(\nabla\mathbf{u} : \nabla\nabla w + \Delta\mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nu(\operatorname{div}\mathbf{u}\Delta w + \nabla\operatorname{div}\mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nabla w \cdot \nabla\nabla w \cdot \nabla w + \frac{1}{2}(\nabla w)^2 \Delta w \right] = p. \quad (2.83a)$$

$$\mu\ddot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \left[(1-\nu)\Delta\mathbf{u} + (1+\nu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + (1-\nu)\Delta w\nabla w + (1+\nu)\nabla\nabla w \cdot \nabla w \right] = \mathbf{n}. \quad (2.83b)$$

Cette formulation est équivalente à l'équation (2.81), mais fait ici intervenir les variables adimensionnées en déplacement.

2.1.4 Bilan

Dans le cas d'une poutre comme dans le cas d'une plaque homogène, le problème des vibrations avec des non-linéarités géométriques de von Kármán a été établi à partir du principe des travaux virtuels. Les développements aboutissent à un système d'équations comprenant l'équation du mouvement transverse et une équation gouvernant le comportement des effets de membrane. Le comportement dynamique non-linéaire géométrique des structures minces élastiques est gouverné par les équations non-linéaires (2.51) et (2.81) lorsque le problème exprime les effets de membrane avec une fonction de force. L'adimensionnement aboutit à des formulations indépendantes des paramètres géométriques et mécaniques des structures étudiées.

Une formulation permettant d'exprimer le couplage membrane-flexion avec des variables en déplacement a été exprimée pour les modèles de poutre et de plaque. L'avantage de ces formulations est de pouvoir comparer des résultats issus des modèles analytiques avec des résultats issus de modèles éléments finis, car ceux-ci reposent également sur des formulations en déplacement.

2.2 Structures piézoélectriques et éléments finis

Cette section est consacrée à la formulation discrétisée par la méthode des éléments finis d'une structure piézoélectriques. La figure 2.4 montre une schématisation d'un tel système. La structure est constituée d'une partie élastique occupant un domaine Ω_s de frontière $\partial\Omega_s$, et un ensemble d'une ou plusieurs partie(s) piézoélectrique(s) d'indice(s) p occupant un volume Ω_p de frontières $\partial\Omega_p$. Les différents domaines ($\Omega_s, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_P$), avec P le nombre de domaines piézoélectriques distincts, constituent une partition du domaine Ω occupé par la structure.

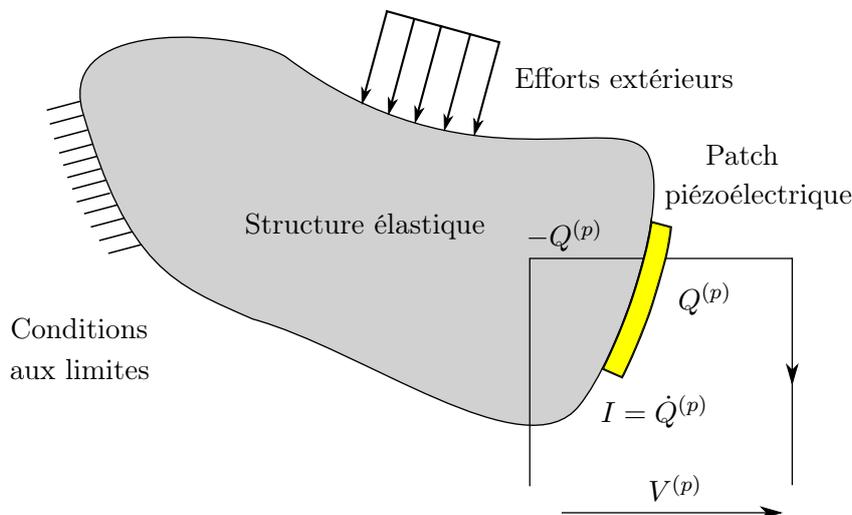


FIGURE 2.4 – Schématisation de la structure piézoélectrique modélisée.

La section 2.2.1 se concentre sur le comportement du patch piézoélectrique. Cette section expose plus particulièrement les équations locales de l'électrostatique ainsi que la loi de comportement piézoélectrique linéaire. Les développements de cette section sont bien connus.

La section 2.2.2 présente ensuite la formulation variationnelle du problème tridimensionnel électromécanique, tandis que la discrétisation de cette formulation par la méthode des éléments finis fait l'objet de la section 2.2.3. L'ensemble de la formulation propose les deux originalités suivantes :

- les non-linéarités géométriques sont prises en compte, la formulation comprend dans un premier temps les variables électriques locales utilisées dans les codes éléments finis commerciaux
- une formulation avec des variables électriques globales est ensuite proposée. Cette formulation peut être appliquée à toute formulation finie tridimensionnelle disponible dans les codes éléments finis existants.

Ces développements s'inscrivent dans le cadre d'autres études visant à modéliser des structures piézoélectriques avec la méthode des éléments finis. Cette démarche a fait l'objet d'efforts soutenus au cours du dernier demi-siècle, depuis la première proposition rapportée dans [12] suivie par de nombreux travaux (le lecteur peut notamment se référer à [139, 19, 40] ou l'article de revue plus ancien [23]). La formulation la plus courante et disponible dans les codes éléments finis existants repose sur l'utilisation de variables électriques locales (le potentiel électrique ϕ et le déplacement électrique \mathbf{D}). Il est également possible d'exprimer le problème avec des variables électriques globales (la tension $V^{(p)}$ et la charge $Q^{(p)}$ à chacun des patchs piézoélectriques). Ceci peut être réalisé soit en supposant que le potentiel électrique est linéaire dans l'épaisseur [180], soit avec une condensation des degrés de libertés électriques internes aux patchs [40]. La formulation présentée dans cette section est fondée sur une procédure de condensation.

2.2.1 Matériaux piézoélectriques

(a) Équations locales de l'électrostatique

Cette section propose une justification synthétique des équations locales de l'électrostatique d'un matériau piézoélectrique placé entre des électrodes conductrices. Ces raisonnements sont disponibles dans de nombreux ouvrages tel que [95].

Introduction des quantités électriques. Les matériaux piézoélectriques sont un exemple de milieu diélectrique, organisé de sorte que les charges électriques contenues dans le matériau sont structurées sous la forme de dipôles, c'est-à-dire par paires de charges opposées. L'application d'un champ électrique \mathbf{E} peut modifier les positions et les orientations des dipôles, ainsi qu'entraîner une modification des barycentres des charges positives et négatives dont est issu un champ de polarisation, noté \mathbf{P} . Une variation de ce champ dans ce matériau induit un excès de charges en dehors du volume considéré. Ce phénomène amène à définir une densité volumique de charges de polarisation ρ_p avec la relation :

$$\rho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P}. \quad (2.84)$$

Cette densité s'ajoute à une éventuelle densité volumique de charge libre ρ_l due à la conductivité du matériau. L'équation locale du théorème de Gauss, qui s'écrit *dans le vide* :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0\mathbf{E}) = \rho_l, \quad (2.85)$$

où ϵ_0 désigne la permittivité du vide, devient *dans le cas d'un milieu matériel diélectrique* :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0\mathbf{E}) = \rho_l + \rho_p, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{div}(\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l. \quad (2.86)$$

On peut alors définir un champ de déplacement électrique \mathbf{D} dont la divergence est liée aux charges libres :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_l. \quad (2.87)$$

En pratique, un patch piézoélectrique est, préalablement à son usage, soumis ponctuellement à un fort champ électrique, qui a pour effet de créer un état électrique initialement polarisé et stable. La dépendance entre le champ électrique \mathbf{E} et champ de polarisation \mathbf{P} peut être considérée linéaire autour de cet état et sur une plage d'amplitude donnée. D'après l'équation (2.87), la relation de linéarité peut être étendue au déplacement électrique \mathbf{D} . Cette relation s'écrit alors :

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (2.88)$$

avec ϵ la matrice de permittivité du matériau : ses différentes composantes ϵ_{ij} traduisent la dépendance aux trois directions de l'espace, et sont ici supposées indépendantes de \mathbf{D} et \mathbf{E} .

Conditions aux limites. Les conditions aux limites électriques à l'interface du milieu piézoélectrique sont issues de la formulation globale du théorème de Gauss, obtenu par l'intégration de la quantité (2.87) sur un volume Ω de frontière $\partial\Omega$ (2.86), ainsi que l'application du théorème de Green. L'ensemble s'écrit :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_l d\Omega = Q \quad (2.89)$$

où Q désigne la charge globale contenue dans Ω , et \mathbf{n} le vecteur unitaire, normal extérieur à $\partial\Omega$. On peut montrer d'après [95] que l'application de cette loi à un disque infinitésimal à l'interface Σ de deux milieux matériels de caractéristiques différentes entraîne que le déplacement électrique est discontinu à l'interface :

$$[[\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]]_{\Sigma} = q_s, \quad (2.90)$$

où q_s est une constante qui correspond à la densité surfacique de charges libres sur Σ . Les matériaux piézoélectriques sont diélectriques et donc isolants, ce qui signifie que leur densité volumique de charge libre est nulle ($\rho_l = 0$) [95]. L'équation (2.89) implique alors que **la charge globale d'un volume occupé par un matériau piézoélectrique est nulle**. Par opposition, les matériaux conducteurs sont caractérisés par la présence d'électrons libres, mais ne sont pour la plupart pas polarisables ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$) et de champ électrique nul ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$). D'après l'équation (2.88), le champ de déplacement électrique est également nul ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) dans les matériaux conducteurs. Ceci entraîne d'après l'équation (2.89) que la densité volumique de charge est aussi nulle dans un matériau conducteur, et seule une densité surfacique q_s peut être à l'origine du chargement électrique. Phénoménologiquement, **les charges dans un matériau conducteur sont réparties aux frontières du domaine**.

Équilibre électrique. Les équations de Maxwell permettent d'écrire l'équilibre électrique dans le domaine piézoélectrique Ω_p . La première équation considérée dans ce problème est celle de Maxwell-Gauss (égalité (2.89)) dans le cas du matériau piézoélectrique isolant. La seconde équation est celle de Maxwell-Faraday. L'ensemble s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (2.91)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.92)$$

avec \mathbf{B} le champ magnétique. Le problème est considéré électrostatique, car les phénomènes électrodynamiques sont supposés beaucoup plus rapides que les vibrations mécaniques, et ce même dans le cadre des NEMS dont les fréquences peuvent atteindre le GHz. En conséquence, l'équation (2.92) avec l'hypothèse électrostatique devient :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

ce qui implique l'existence d'un potentiel électrique ϕ vérifiant

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2.93)$$

Un champ électrique nul implique que le potentiel est uniforme d'après cette dernière équation. Ceci montre donc qu'**un domaine occupé par un matériau conducteur est équipotentiel**.

Application à une céramique piézoélectrique. Afin de connecter les patches piézoélectrique à une source de tension ou un circuit électronique, des électrodes conductrices sont placées sur les faces inférieures et supérieures d'un patch, sous la forme d'armatures d'épaisseur très faible devant celle du patch piézoélectrique comme le montre la figure 2.5(a). Dans cette configuration, l'équation (2.90) est alors appliquée à l'interface entre la couche piézoélectrique et l'électrode conductrice. Dans ce cas,

la normale \mathbf{n} à l'électrode est orientée vers l'extérieur du matériau piézoélectrique. Comme $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ dans l'électrode conductrice, l'équation (2.90) s'écrit :

$$[[\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]]_{\Sigma} = \mathbf{0} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_s. \quad (2.94)$$

Finalement, les équations (2.91) et (2.94) constituent la loi d'équilibre électrique d'un milieu matériel piézoélectrique :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{sur } \Omega_p, \quad (2.95a)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -q_s \quad \text{sur } \partial\Omega_p. \quad (2.95b)$$

Ce système comprend l'équation d'équilibre sur le volume Ω_p et les conditions aux limites sur les frontières $\partial\Omega_p$. Le signe négatif de l'équation est dû à l'orientation de la normale \mathbf{n} vers l'extérieur du matériau piézoélectrique. Deux potentiels électriques différents peuvent être imposés à chacune des électrodes, synonyme d'une tension non nulle ($V = \phi^+ - \phi^-$). De plus, à l'interface entre les électrodes et le patch, les densités surfaciques de charge libre rassemblées au bord des électrodes ρ_l s'équilibrent avec les densités surfaciques de charge de polarisation ρ_p du patch piézoélectrique. Dans le cadre de

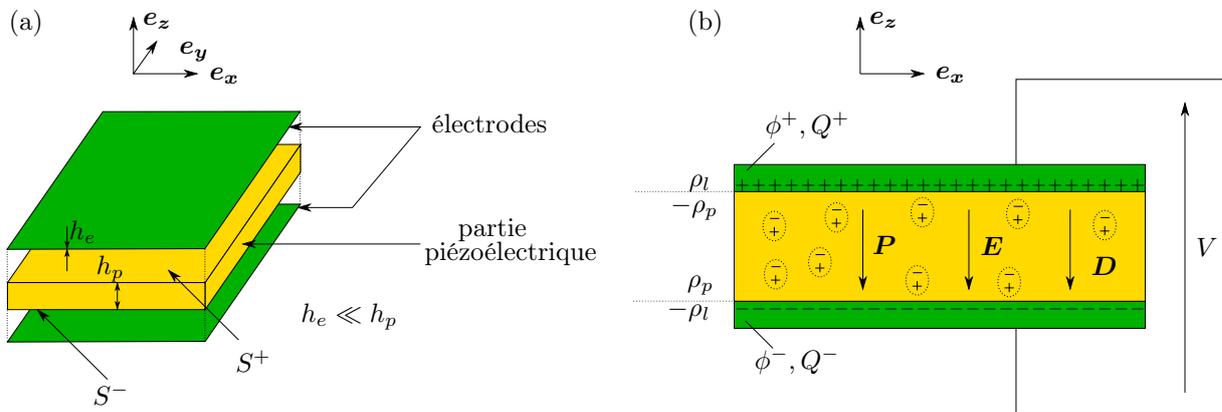


FIGURE 2.5 – (a) Schématisation de la disposition du patch piézoélectrique (diélectrique) et des électrodes (conductrices). (b) Répartition des différentes densités de charges et champs dans l'épaisseur.

cette étude, les géométries des patches sont des structures minces. Les composantes transverses des différents champs introduits (\mathbf{P} , \mathbf{E} et \mathbf{D}) sont dans ce cas prépondérantes devant les composantes longitudinales. Ces composantes longitudinales peuvent être négligées si la couche piézoélectrique est mince [142]. En conséquence, les contributions des termes (D_x, D_y) sont supposées négligeables devant le terme transverse D_z , où dans un repère local du patch piézoélectrique e_z désigne la direction transverse. La loi de Gauss globale (cf. équation (2.89)) appliquée à un volume contenant l'ensemble du patch et notamment les surfaces S^+ et S^- a alors pour expression :

$$\iint_{S^+} D_z dS - \iint_{S^-} D_z dS = Q^+ - Q^-, \quad (2.96)$$

avec Q^+ et Q^- les charges globales contenues sur S^+ et S^- . Or la charge globale d'un patch piézoélectrique est nulle ($Q = 0$), ce qui signifie que **les charges contenues dans les électrodes inférieure et supérieure sont opposées** ($Q^+ = -Q^-$). Cet équilibre de charge est schématisé sur la figure 2.5(b).

L'objectif de la section suivante est d'écrire les variations du champ de polarisation, et donc des champs électrique et de déplacement électrique, à partir de contraintes ou de déformations appliquées sur un matériau piézoélectrique. Il s'agit de **l'effet piézoélectrique direct** : suivant l'étymologie du mot piézoélectrique (du grec *piezo*, relatif à la pression mécanique), l'application d'une contrainte

mécanique modifie l'état électrique du matériau. Par opposition, l'**effet piézoélectrique inverse** a pour origine l'application d'un champ et d'un déplacement électrique, qui provoque localement un changement du champ de déformations ou de contraintes.

(b) Loi de comportement piézoélectrique linéaire

Ces effets locaux se formalisent par la loi de comportement du matériau piézoélectrique, une synthèse est proposée ici à partir de principes présentés dans diverses sources telles que [85]. Cette loi de comportement peut s'exprimer sous différentes formes, en fonction des relations entre les grandeurs mécaniques ($\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$) et (\boldsymbol{E} , \boldsymbol{D}). On utilise essentiellement deux de ces formulations. Celles-ci sont respectivement appelées formes "en \boldsymbol{e} " ou en " \boldsymbol{d} " et s'écrivent :

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{E} \quad (2.97a)$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon \boldsymbol{E} \quad (2.97b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{s}^E \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{E} \quad (2.98a)$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d} \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\epsilon}^\pi \boldsymbol{E}, \quad (2.98b)$$

où \boldsymbol{c}^E et \boldsymbol{s}^E désignent les tenseurs d'ordre quatre d'élasticité et de souplesse à champ électrique nul, tandis que \boldsymbol{e} et \boldsymbol{d} sont les tenseurs d'ordre trois des coefficients piézoélectriques. Enfin, $\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon$ et $\boldsymbol{\epsilon}^\pi$ correspondent aux matrices de permittivité diélectrique, respectivement à champ de déformations et contraintes nulles. Les matériaux piézoélectriques sont isotropes transverses, ce qui signifie que les relations sont également quantifiées dans les deux directions du plan moyen. La loi de comportement (2.97) s'écrit alors de manière explicite, avec la notation de Voigt :

$$\begin{pmatrix} \pi_1 = \pi_{11} \\ \pi_2 = \pi_{22} \\ \pi_3 = \pi_{33} \\ \pi_4 = \pi_{23} \\ \pi_5 = \pi_{13} \\ \pi_6 = \pi_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

avec $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$. Cinq coefficients mécaniques ($c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$), trois coefficients piézoélectriques (e_{31}, e_{33}, e_{15}) et deux coefficients diélectriques ($\epsilon_{11}^\varepsilon, \epsilon_{33}^\varepsilon$) permettent de caractériser cette loi de comportement piézoélectrique. Par ailleurs, la forme "en \boldsymbol{d} " introduit les coefficients dits "de l'ingénieur", c'est-à-dire les modules d'Young Y_i , coefficients de Poisson ν_{ij} et de cisaillement G_{ij} :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & -\frac{\nu_{13}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{13}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ -\frac{\nu_{13}}{Y_3} & -\frac{\nu_{13}}{Y_3} & \frac{1}{Y_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^\varepsilon & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Les structures piézoélectriques minces sont des structures stratifiées, pour lesquelles les hypothèses de structure mince peuvent être considérées [143]. De nombreuses formulations de poutres, plaques ou

coques piézoélectriques minces ont été proposées [155]. Pour attester la validité de tels modèles, des solutions de références ont été établies avec des modèles exacts, tel que cela a été fait dans [24]. Dans le cadre de ces modèles de structures minces où les contraintes transverses π_{zz} ainsi que les composantes longitudinales des quantités électriques (E_y, E_z, D_y, D_z) sont négligées, l'effet "31" (présenté dans la section 1.4 de l'introduction) est alors le principal mécanisme des matériaux piézoélectriques mis en jeu. Cet effet est notamment prépondérant par rapport aux effets "33" impliquant les contraintes transverses ou "15" impliquant les effets de cisaillement.

2.2.2 Formulation du problème électromécanique

Une formulation prenant en compte à la fois le couplage électromécanique et les non-linéarités géométriques est maintenant présentée. De par la prise en compte de ces deux effets, cette formulation est originale.

(a) Présentation du problème

La structure électromécanique étudiée représentée sur la figure 2.5 occupe dans sa configuration initiale le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. On rappelle que la partie élastique Ω_s de frontière $\partial\Omega_s$ forme avec les domaines Ω_p des P patches piézoélectriques une partition de Ω . Des chargements d'efforts volumique f_i^d ou surfacique F_i^d peuvent être respectivement appliqués sur Ω et une surface $\partial\Omega_F$, tandis qu'un champ de déplacement U_i^d peut être imposé sur des bords $\partial\Omega_u$ de la frontière, où apparaissent des efforts de réactions f_i^r . De manière analogue, une densité de charges électriques q^d peut être appliquée sur une surface $\partial\Omega_q$, tandis que des réactions de charges libres q^r apparaissent sur les surfaces $\partial\Omega_\phi$ où sont imposés des potentiels électriques. Ces différentes surfaces sont organisées telles que la surface totale $\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega_q \cup \partial\Omega_\phi$, et $\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_u = \partial\Omega_q \cap \partial\Omega_\phi = \emptyset$. Ces ensembles sont schématisés sur la figure 2.6.

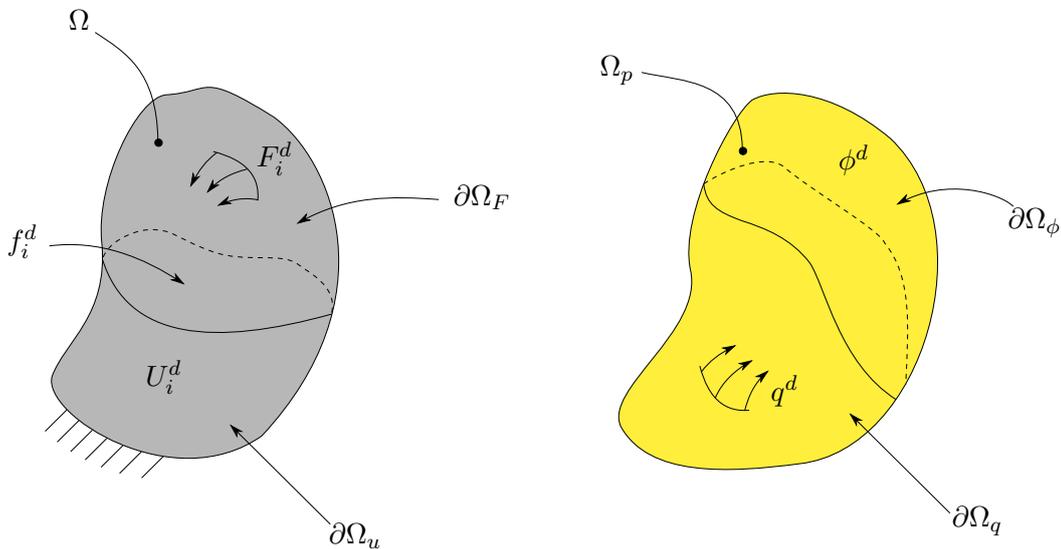


FIGURE 2.6 – Représentation des différents domaines de l'étude, pour l'ensemble de la structure (gauche) occupant un volume Ω et sur un patch piézoélectrique p (droite) occupant un volume Ω_p .

Les principales hypothèses du problème, à la suite des raisonnements présentés dans la section 2.2.1, sont les suivantes :

- (i) les matrices des coefficients piézoélectriques \mathbf{e} et \mathbf{d} sont nulles en dehors des parties piézoélectriques, la loi de comportement est donc élastique linéaire dans Ω_s
- (ii) le déplacement électrique \mathbf{D} est négligé sur Ω_s

- (iii) les électrodes inférieure et supérieure ($S_-^{(p)}, S_+^{(p)}$) d'un patch p sont équipotentielles, la tension d'un patch est définie par la différence entre ces deux potentiels ($V^{(p)} = \phi_+^{(p)} - \phi_-^{(p)}$)
- (iv) les charges contenues sur les électrodes $S_-^{(p)}$ et $S_+^{(p)}$ d'un patch p sont opposées ($Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)}$).

Les hypothèses (i) et (ii) interviennent dans l'écriture de la formulation faible à partir des équations locales. Les hypothèses (iii) et (iv) sont utilisées pour exprimer le problème avec les variables électriques globales.

Dans la formulation proposée, le problème électrique est écrit uniquement sur les domaines piézoélectriques Ω_p , car l'hypothèse (ii) justifie que la partie élastique ne contribue pas aux travaux virtuels électriques. En pratique, $\partial\Omega_s$ est en contact électrique avec l'une des deux électrodes de chaque patch piézoélectrique, sur lesquels un même potentiel de référence est appliqué.

(b) Équations locales des problèmes électrique et mécanique

Ces développements reprennent le formalisme de l'article [180] pour la prise en compte des effets piézoélectriques, *et proposent une extension du problème au cas non-linéaire géométrique*. Dans un premier temps, les équations locales sont rappelées : celles-ci correspondent aux équations (2.15) pour le problème mécanique. Avec les notations introduites, la formulation forte s'écrit :

$$(F_{ij}\pi_{jk})_{,k} + f_i^d = \rho\ddot{U}_i \quad \text{dans } \Omega \quad (2.101a)$$

$$F_{ij}\pi_{jk}n_k = F_i^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad (2.101b)$$

$$U_i = U_i^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u. \quad (2.101c)$$

À partir de ces équations locales, les formulations variationnelles du problème non-linéaire géométrique et électrique sont couplées par l'intermédiaire de la loi de comportement piézoélectrique. La formulation du problème électrique des patchs est issue de la section 2.2.1(a), en particulier des équations (2.95a) et (2.95b). La formulation forte du problème électrique a pour expression :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.102a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \partial\Omega_q, \quad (2.102b)$$

$$\phi = \phi^d \quad \text{sur } \partial\Omega_\phi. \quad (2.102c)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange et sa différentielle, définis avec les équations (2.3) et (2.4), se notent en écriture indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i} + U_{m,i}U_{m,j}) \quad (2.103a)$$

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta U_{i,j} + \delta U_{j,i} + \delta U_{m,i}U_{m,j} + U_{m,i}\delta U_{m,j}) \quad (2.103b)$$

et le champ électrique est également lié au potentiel par une opération similaire :

$$E_i = -\phi_{,i}, \quad (2.104)$$

la différentielle vaut alors $\delta E_i = -\delta\phi_{,i}$. Enfin, la loi de comportement des matériaux est écrite avec la forme "en \mathbf{e} " :

$$\pi_{ij} = \mathbf{c}_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2.105a)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^E E_k \quad (2.105b)$$

avec $e_{ijk} = 0$ sur Ω_s d'après l'hypothèse (i).

(c) Formulation faible du problème couplé

Les équations locales de la section précédente peuvent finalement s'exprimer en fonction des champs de déplacement mécanique U_i et de potentiel électrique ϕ sur Ω . On introduit les espaces des fonctions suivantes :

\mathcal{C}_u : espace des fonctions U_i régulières sur Ω

\mathcal{C}_ϕ : espace des fonctions ϕ régulières sur Ω

$\mathcal{C}_u^* = \{U_i \in \mathcal{C}_u \mid U_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$

$\mathcal{C}_\phi^* = \{\phi \in \mathcal{C}_\phi \mid \phi = \phi^d \text{ sur } \partial\Omega_\phi\}$.

Les équations d'équilibre (2.101a), (2.101b), (2.102a) et (2.102b) sont équivalentes au principe des travaux virtuels suivant :

$$\delta W_{int}^{(m)} + \delta W_{ext}^{(m)} = \delta W_a^{(m)} \quad \forall \delta U_i \quad (2.107a)$$

$$\delta W_{int}^{(e)} + \delta W_{ext}^{(e)} = 0 \quad \forall \delta \phi. \quad (2.107b)$$

Dans ces équations, le couplage entre variables mécaniques et électriques est obtenu par l'intermédiaire de la loi de comportement piézoélectrique. L'expression (2.107a) est équivalente à l'équation (2.1), les différents travaux sont identiques à ceux définis par les équations (2.2). L'égalité (2.107b) est obtenue par la multiplication d'un potentiel électrique virtuel $\delta\phi$ de l'équation électrique locale (2.102a), et l'intégration sur Ω qui peut être décomposée sur les différents domaines Ω_p . L'ensemble s'écrit alors :

$$-\int_{\Omega} \pi_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} f_i^d \delta U_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} F_i^d \delta U_i dS = \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta U_i d\Omega \quad \forall \delta U_i \in \mathcal{C}_u^* \quad (2.108a)$$

$$\int_{\Omega_p} D_{i,i} \delta \phi d\Omega = 0 \quad \forall \delta \phi \in \mathcal{C}_\phi. \quad (2.108b)$$

Le théorème de Green est appliqué au travail virtuel électrique interne :

$$\int_{\Omega_p} D_{i,i} \delta \phi d\Omega = - \int_{\Omega_p} D_i \delta \phi_{,i} d\Omega + \int_{\partial\Omega_p} D_i n_i \delta \phi dS. \quad (2.109)$$

Cette dernière équation est réécrite avec l'introduction des charges de réaction $q^r = -D_i n_i$ sur $\partial\Omega_\phi$ et en prenant en compte l'équation (2.102b) :

$$\int_{\Omega_p} D_{i,i} \delta \phi d\Omega = - \int_{\Omega_p} D_i \delta \phi_{,i} d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} q^d \delta \phi dS - \int_{\partial\Omega_\phi} q^r \delta \phi dS \quad \forall (p, \delta \phi). \quad (2.110)$$

Avec cette égalité, l'équation (2.108b) devient :

$$- \int_{\Omega_p} D_i \delta \phi_{,i} d\Omega = \int_{\partial\Omega_q} q^d \delta \phi dS + \int_{\partial\Omega_\phi} q^r \delta \phi dS \quad \forall (p, \delta \phi). \quad (2.111)$$

Les équations (2.108a) et (2.111) sont maintenant développées avec la loi de comportement (cf. équations (2.105)) et l'hypothèse (i). Les expressions (2.108) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}(U) \delta \varepsilon_{ij}(U, \delta U) d\Omega - \sum_{p=1}^P \int_{\Omega_p} e_{kij} E_k(\phi) \delta \varepsilon_{ij}(U, \delta U) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta U_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i^d \delta U_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} F_i^d \delta U_i dS \quad \forall \delta U_i \in \mathcal{C}_u. \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\int_{\Omega_p} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(U) \delta E_i(\delta \phi) d\Omega + \int_{\Omega_p} \epsilon_{ik} E_k(\phi) \delta E_i(\delta \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega_q} q^d \delta \phi dS + \int_{\partial\Omega_\phi} q^r \delta \phi dS \quad \forall \delta \phi \in \mathcal{C}_\phi. \quad (2.113)$$

Le problème consiste donc à déterminer les champs $U_i \in \mathcal{C}_u$ et $U_\phi \in \mathcal{C}_\phi$, avec $U_i = U_i^d$ sur $\partial\Omega_u$ ainsi que $\phi = \phi^d$ sur $\partial\Omega_\phi$, qui vérifient les équations (2.112) et (2.113).

2.2.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis

Une discrétisation par la méthode des éléments finis est appliquée sur la formulation variationnelle. De nombreux ouvrages sont consacrés à cette méthode, très utilisée comme outil de calcul numérique pour la mécanique. Dans le cadre de cette thèse, les ouvrages [21, 202] ont été les principales références. On écrit dans les paragraphes suivants la formulation éléments finis du problème constitué des équations (2.112) et (2.113). En particulier, l'approximation des champs de déplacement et du potentiel électrique sont introduits dans la formulation variationnelle.

(a) Approximation du champ de déplacement et du champ électrique

Le volume Ω est maintenant discrétisé par un ensemble d'éléments formant une entité appelée maillage. Un élément est défini par sa topologie, c'est-à-dire sa géométrie et le nombre de nœuds disposés sur l'élément. Les nombre d'éléments et de nœuds définissent alors la taille du maillage. Sur un élément, les champs de déplacement U_i^e et du potentiel électrique ϕ^e sont spatialement approchés par des fonctions de forme $N_{ik}^e(X)$ et $\mathcal{N}_k^e(X)$ de la manière suivante :

$$U_i^e(X, t) = N_{ik}^e(X)x_k^e(t), \quad \phi^e(X, t) = \mathcal{N}_k^e(X)\phi_k^e(t) \quad (2.114)$$

où x_k^e désigne le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément et X la position d'un point matériel de la configuration de référence. Les fonctions de forme ont des expressions analytiques, et peuvent être d'ordre linéaire, quadratique, voire cubique si des cinématiques particulières (poutre, plaque ou coque) sont introduites dans la formulation variationnelle. Le champ de déplacement sur Ω est alors obtenu par une opération d'assemblage des matrices, qui résulte en :

$$U_i(X, t) = N_{ik}(X)x_k(t), \quad \phi(X, t) = \mathcal{N}_k(X)\phi_k(t) \quad (2.115)$$

où x_k contient les déplacements sur l'intégralité des degrés de liberté mécaniques des nœuds du maillage. Les quantités virtuelles associées s'écrivent sous une forme identique :

$$\delta U_i(X, t) = N_{ik}(X)\delta x_k(t), \quad \delta \phi(X, t) = \mathcal{N}_k(X)\delta \phi_k(t). \quad (2.116)$$

(b) Approximation des quantités locales

Avec ces approximations, le champ de déformations défini par l'équation (2.103b) devient :

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijk}^{(L)}x_k + \frac{1}{2}D_{ijkl}^{(NL)}x_kx_l \quad (2.117)$$

où les opérateurs $D_{ijk}^{(L)}$ et $D_{ijkl}^{(NL)}$ sont respectivement définis par :

$$D_{ijk}^{(L)} = \frac{1}{2}(N_{ik,j} + N_{jk,i}) \quad (2.118a)$$

$$D_{ijkl}^{(NL)} = N_{mk,i}N_{ml,j}. \quad (2.118b)$$

Ces opérateurs présentent les propriétés de symétrie suivantes :

$$D_{ijk}^{(L)} = D_{jik}^{(L)} \quad \text{et} \quad D_{ijkl}^{(NL)} = D_{jilk}^{(NL)} \quad (2.119)$$

Par ailleurs, la différentielle du champ de déformations s'écrit :

$$\delta \varepsilon_{ij} = D_{ijk}^{(L)}\delta x_k + \frac{1}{2}(D_{ijkl}^{(NL)}x_k\delta x_l + D_{ijkl}^{(NL)}\delta x_kx_l). \quad (2.120)$$

Enfin, le champ électrique et sa différentielle s'écrivent :

$$E_i = -D_{ik}^{(0)}\phi_k, \quad \delta E_i = -D_{ik}^{(0)}\delta \phi_k \quad (2.121)$$

$$\text{avec} \quad D_{ik}^{(0)} = \mathcal{N}_{k,i}. \quad (2.122)$$

(c) Formulation avec variables électriques locales (U, ϕ)

Cette section détaille l'introduction des quantités locales discrétisées (cf. équations (2.117), (2.120) et (2.121)) dans la formulation variationnelle définie par les égalités (2.112) et (2.113). Les développements sont détaillés, et aboutissent à une écriture matricielle qui correspond à la formulation mise à disposition dans les codes éléments finis existants.

Équation mécanique Les efforts mécaniques, situés dans les termes à droite de l'égalité (2.112), sont traités dans un premier temps. L'injection de l'expression (2.115) dans ces termes conduit à :

$$\left(\int_{\Omega} f_i^d N_{ik} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} F_i^d N_{ik} dS \right) \delta x_k \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathbf{x}^T \mathbf{F}_m \quad (2.123)$$

où \mathbf{F}_m désigne le vecteur des efforts mécaniques. Une discrétisation similaire est effectuée avec les termes d'accélération :

$$\left(\int_{\Omega} \rho N_{ik} N_{il} d\Omega \right) \ddot{x}_k \delta x_l \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathbf{x}^T \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{x}}, \quad (2.124)$$

où la matrice mécanique de masse \mathbf{M}_m a été introduite. Le développement du premier terme du travail des efforts intérieurs est maintenant détaillé. L'introduction de la discrétisation des déformations (cf. expressions (2.117) et (2.120)) dans l'équation (2.112) amène :

$$\int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkl}^E [D_{klm}^{(L)} x_m + \frac{1}{2} D_{klmn}^{(NL)} x_m x_n] [D_{ijr}^{(L)} \delta x_r + \frac{1}{2} D_{ijrs}^{(NL)} \delta x_r x_s + \frac{1}{2} D_{ijrs}^{(NL)} x_r \delta x_s] d\Omega.$$

Avec les propriétés de symétrie du tenseur d'élasticité $c_{ijkl}^E = c_{jikl}^E = c_{ijlk}^E$ d'une part et de l'opérateur non-linéaire $D_{ijkl}^{(NL)} = D_{jilk}^{(NL)}$ d'autre part, la simplification suivante peut être réalisée pour les derniers termes non-linéaires de l'équation précédente. Il vient alors :

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^E [D_{ijrs}^{(NL)} \delta x_r x_s + D_{ijrs}^{(NL)} x_r \delta x_s] &= c_{jikl}^E D_{jisr}^{(NL)} \delta x_r x_s + c_{ijkl}^E D_{klrs}^{(NL)} x_r \delta x_s \\ &= c_{jikl}^E D_{jirs}^{(NL)} x_r \delta x_s + c_{ijkl}^E D_{ijrs}^{(NL)} x_r \delta x_s \\ &= 2c_{ijkl}^E D_{ijrs}^{(NL)} x_r \delta x_s, \end{aligned}$$

ce qui amène :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} c_{ijkl}^E [D_{klm}^{(L)} x_m + \frac{1}{2} D_{klmn}^{(NL)} x_m x_n] [D_{ijs}^{(L)} \delta x_s + D_{ijrs}^{(NL)} x_r \delta x_s] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} c_{ijkl}^E \left([D_{klm}^{(L)} D_{ijs}^{(L)}] x_m + [D_{klm}^{(L)} D_{ijns}^{(NL)} + \frac{1}{2} D_{klmn}^{(NL)} D_{ijs}^{(L)}] x_m x_n + [\frac{1}{2} D_{klmn}^{(NL)} D_{ijrs}^{(NL)}] x_m x_n x_r \right) \delta x_s d\Omega. \end{aligned}$$

Les termes de cette quantité sont regroupés en trois familles distinctes. La partie linéaire est d'abord extraite :

$$\left(\int_{\Omega} c_{ijkl}^E D_{klm}^{(L)} D_{ijs}^{(L)} d\Omega \right) x_m \delta x_s \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}_m \mathbf{x}. \quad (2.125)$$

Dans un second temps, les termes quadratiques et cubiques s'écrivent :

$$\left(\int_{\Omega} c_{ijkl}^E [D_{klm}^{(L)} D_{ijns}^{(NL)} + \frac{1}{2} D_{klmn}^{(NL)} D_{ijs}^{(L)}] d\Omega \right) x_m x_n \delta x_s \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (2.126a)$$

$$\left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} c_{ijkl}^E D_{klmn}^{(NL)} D_{ijrs}^{(NL)} d\Omega \right) x_m x_n x_r \delta x_s \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathbf{x}^T \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (2.126b)$$

où les matrices $\mathbf{K}_m^{(2)}$ et $\mathbf{K}_m^{(3)}$ sont les matrices de raideur tangente quadratique et cubique. Finalement, les termes de couplage électromécanique sont à leur tour développés avec les fonctions de forme :

$$\int_{\Omega_p} e_{kij} \delta \varepsilon_{ij} E_k d\Omega = - \int_{\Omega_p} e_{kij} [D_{ijm}^{(L)} \delta x_m + \frac{1}{2} (D_{ijmn}^{(NL)} \delta x_m x_n + D_{ijmn}^{(NL)} x_m \delta x_n)] D_{ks}^{(0)} \phi_s d\Omega. \quad (2.127)$$

Les propriétés de symétrie du tenseur sont utilisés une seconde fois, dans ce cas avec le tenseur des coefficients piézoélectriques $e_{ijk} = e_{ikj}$ et l'opérateur non-linéaire $D_{ijkl}^{(NL)} = D_{jilk}^{(NL)}$. Le terme non-linéaire de l'équation (2.127) est alors simplifié :

$$\begin{aligned} e_{kij}(D_{ijmn}^{(NL)}\delta x_m x_n + D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n) &= e_{kji}(D_{ijmn}^{(NL)}\delta x_m x_n + D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n) \\ &= e_{kji}(D_{jinm}^{(NL)}\delta x_m x_n + D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n) \\ &= e_{kji}(D_{jimn}^{(NL)}x_m \delta x_n + D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n) \\ &= 2e_{kij}D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n, \end{aligned}$$

ce qui permet de simplifier l'expression (2.127) comme :

$$-\int_{\Omega_p} e_{kij}\delta\varepsilon_{ij}E_k d\Omega = \int_{\Omega_p} e_{kij}[D_{ijn}^{(L)}\delta x_n + D_{ijmn}^{(NL)}x_m \delta x_n]D_{ks}^{(0)}\phi_s d\Omega. \quad (2.128)$$

Comme pour les termes mécaniques, les parties linéaires et non-linéaires sont écrites séparément :

$$\left(\int_{\Omega} e_{kij}D_{ijn}^{(L)}D_{ks}^{(0)}d\Omega\right)\phi_s \delta x_n \rightsquigarrow \delta\mathbf{x}^T \mathbf{K}_c \phi \quad (2.129)$$

$$\left(\int_{\Omega} e_{kij}D_{ijmn}^{(NL)}D_{ks}^{(0)}d\Omega\right)x_m \phi_s \delta x_n \rightsquigarrow \delta\mathbf{x}^T (\mathbf{P}_c \mathbf{x}) \phi \quad (2.130)$$

où \mathbf{K}_c désigne la matrice de couplage électromécanique linéaire et \mathbf{P}_c un tenseur du troisième ordre qui correspond au couplage électromécanique non-linéaire.

Équation électrique L'expression (2.113) fait maintenant l'objet d'une description terme à terme similaire. Les charges électriques, à droite de l'égalité (2.113), sont traitées dans un premier temps. L'approximation du potentiel effectuée avec l'équation (2.115) conduit à :

$$\left(\int_{\partial\Omega_q} q^d \mathcal{N}_k dS + \int_{\partial\Omega_\phi} q^r \mathcal{N}_k dS\right)\delta\phi_k \rightsquigarrow \delta\phi^T \mathbf{q} \quad (2.131)$$

où \mathbf{q} désigne le vecteur des densités de charge électrique aux nœuds. La seconde intégrale de l'équation (2.113), comprenant les termes diélectriques, est maintenant considérée. L'approximation par les fonctions de forme aboutit à :

$$\left(\int_{\Omega_p} \varepsilon_{ik}D_{il}^{(0)}D_{km}^{(0)}d\Omega\right)\phi_l \delta\phi_m \rightsquigarrow \delta\phi^T \mathbf{K}_e \phi \quad (2.132)$$

avec \mathbf{K}_e une matrice de raideur électrique. Finalement, les termes couplés, rassemblés dans la première intégrale de l'équation (2.113), sont également détaillés :

$$\int_{\Omega_p} e_{ikl}\varepsilon_{kl}\delta E_i d\Omega = -\left(\int_{\Omega_p} e_{ikl}[D_{klr}^{(L)} + \frac{1}{2}D_{klrs}^{(NL)}x_s]D_{im}^{(0)}d\Omega\right)x_r \delta\phi_m. \quad (2.133)$$

De la même manière que le couplage intervenant dans l'équation mécanique, les contributions linéaire et non-linéaire sont séparées :

$$\left(\int_{\Omega_p} e_{ikl}D_{klr}^{(L)}D_{im}^{(0)}d\Omega\right)x_r \delta\phi_m \rightsquigarrow \delta\phi^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{x} \quad (2.134)$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega_p} e_{ikl}D_{klrs}^{(NL)}D_{im}^{(0)}d\Omega\right)x_r x_s \delta\phi_m \rightsquigarrow \frac{1}{2}\delta\phi^T (\mathbf{P}_c \mathbf{x})^T \mathbf{x}. \quad (2.135)$$

Synthèse Les systèmes d'équations doivent être valable pour tout déplacement virtuel cinématiquement admissible à zéro $\delta \mathbf{x}$ et tout potentiel virtuel $\delta \phi$. Avec le rassemblement de l'ensemble des termes obtenus pour l'équation mécanique (cf. expressions (2.123), (2.124), (2.125), (2.126), (2.129), (2.130)) et pour l'équation électrique (cf. expressions (2.131), (2.132), (2.134), (2.135)), le comportement dynamique non-linéaire géométrique de toute structure piézoélectrique est posé par le système d'équations suivant :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) + [\mathbf{K}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{x}] \phi = \mathbf{F}_m \quad (2.136a)$$

$$\mathbf{K}_e \phi - [\mathbf{K}_c + \frac{1}{2} \mathbf{P}_c \mathbf{x}]^T \mathbf{x} = \mathbf{q}, \quad (2.136b)$$

où $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ est le vecteur des efforts internes non-linéaires, qui réunit la contribution des termes quadratiques et des termes cubiques.

Les différents effets physiques sont donc écrits de manière sommative dans les équations. Les termes d'inertie, de raideurs linéaires mécanique et électrique, de forçage mécanique et de charges électriques sont issus de discrétisations d'un problème mécanique ou électrique linéaire. Les trois quantités suivantes font l'originalité de la formulation proposée :

- les **non-linéarités géométriques** sont contenues dans \mathbf{f}_{nl} , dénommé vecteur des efforts internes non-linéaires. Il contient des termes d'ordres quadratique et cubique [192].
- le **couplage électromécanique linéaire** quantifié par la matrice \mathbf{K}_c fait intervenir le potentiel ϕ dans l'équation mécanique et les déplacements \mathbf{U} dans l'équation électrique avec des composantes égales. Cette matrice avait déjà été introduite dans d'autres formulations, telle que celle proposée dans [180].
- Le **couplage électromécanique lié aux non-linéarités géométriques** correspond au tenseur \mathbf{P}_c . L'ordre des non-linéarités associées à cette matrice est donc quadratique, avec des termes en $\mathbf{x}\phi$ dans l'équation mécanique et en $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ dans l'équation électrique. Ce terme quantifie les effets de l'amplification paramétrique [183, 116].

Si les termes de couplage linéaire sont identiquement quantifiés par la matrice \mathbf{K}_c , le facteur 1/2 présent devant le tenseur \mathbf{P}_c dans l'équation électrique montre que les effets électromécaniques non-linéaires ne se manifestent pas de la même façon pour les effets piézoélectriques direct et inverse. Un modèle analytique d'une poutre piézoélectrique bi-appuyée présenté en Annexe D prend en compte les non-linéarités géométriques, et confirme la présence de ce facteur entre l'équation électrique et l'équation mécanique.

(d) Formulation en (U, V, Q)

Une procédure pour exprimer le problème avec des variables électriques globales est maintenant mise en œuvre. Sur la base des hypothèses (iii) et (iv), ces variables globales comprennent à chaque patch p d'une tension $V^{(p)} = \phi_+^{(p)} - \phi_-^{(p)}$ et de la charge contenue sur l'une des électrodes $Q^{(p)}$.

Dans ce cadre, l'objectif est d'exprimer l'ensemble du problème électrique posé par l'équation (2.136b) à un problème ramené sur les surfaces inférieure et supérieure S^- et S^+ . Pour cela, une procédure est proposée sur un système constitué d'une structure élastique équipé d'un seul patch piézoélectrique. Le raisonnement présenté peut ensuite être étendu à un système comprenant plusieurs parties piézoélectriques.

Partition des degrés de liberté électriques Une partition des degrés de liberté électriques est effectuée de la manière présentée sur la figure 2.7 : les potentiels ϕ_- et ϕ_+ contenus sur S^- et S^+ sont séparés des degrés de liberté sur les nœuds internes au patch piézoélectrique. Ceux-ci sont notés ϕ_0 . Dans ces développements, les effets linéaires et quadratiques du couplage sont rassemblées : on introduit

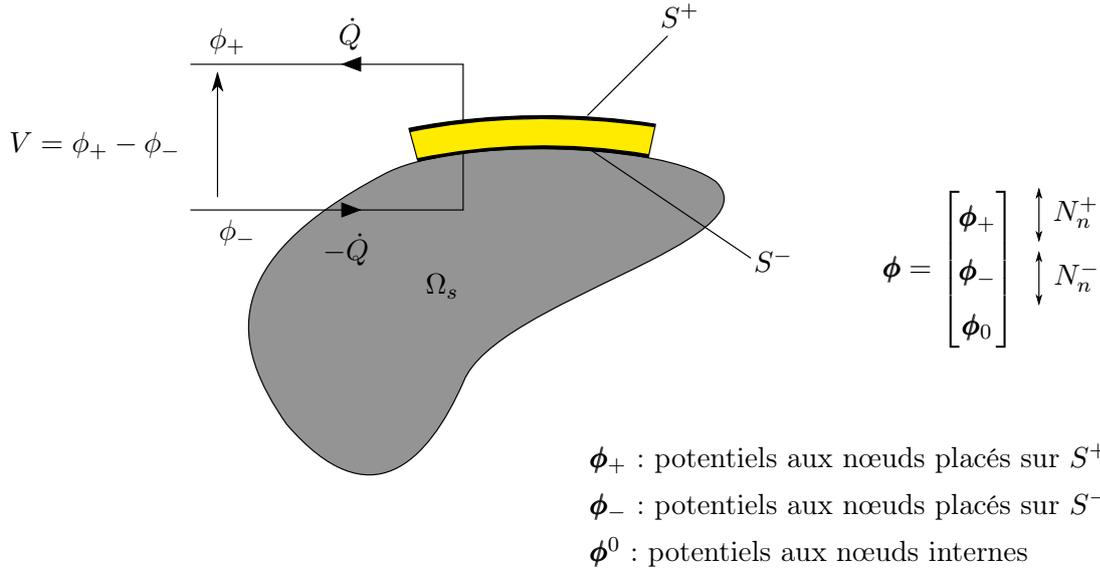


FIGURE 2.7 – Répartition des domaines d'un patch piézoélectriques pour la partition des potentiels. N_n^+ et N_n^- désignent le nombre de nœuds sur les surfaces S^+ et S^- .

les matrices de couplage $\mathcal{K}(\mathbf{x})$ et $\mathcal{K}'(\mathbf{x})$ définies par :

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{x} \quad (2.137a)$$

$$\mathcal{K}'(\mathbf{x}) = -[\mathbf{K}_c + \frac{1}{2} \mathbf{P}_c \mathbf{x}]^T. \quad (2.137b)$$

La partition effectuée sur la figure 2.7 amène à introduire les matrices de couplage entre degrés de libertés mécaniques internes et de potentiels électriques $[\phi_+ \ \phi_- \ \phi_0]$. Ces matrices sont notées \mathcal{K}_{mi} , \mathcal{K}_{m+} et \mathcal{K}_{m-} pour l'équation mécanique et \mathcal{K}'_{mi} , \mathcal{K}'_{m+} et \mathcal{K}'_{m-} pour l'équation électrique. Le système d'équations (2.136) se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\phi}_+ \\ \ddot{\phi}_- \\ \ddot{\phi}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{m+} & \mathbf{K}_{m-} & \mathbf{K}_{m0} \\ \mathcal{K}'_{m+} & \mathbf{K}_{++} & \mathbf{K}_{+-} & \mathbf{K}_{+0} \\ \mathcal{K}'_{m-} & \mathbf{K}_{-+}^T & \mathbf{K}_{--} & \mathbf{K}_{-0} \\ \mathcal{K}'_{m0} & \mathbf{K}_{+0}^T & \mathbf{K}_{-0}^T & \mathbf{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_+ \\ \phi_- \\ \phi_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{q}_+ \\ \mathbf{q}_- \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.138)$$

Les matrices \mathbf{K}_{++} , \mathbf{K}_{--} , \mathbf{K}_{00} , \mathbf{K}_{+-} , \mathbf{K}_{+0} , \mathbf{K}_{-0} forment une partition de \mathbf{K}_e , et sont définies par les équations et degrés de libertés électriques associés. L'utilisation des matrices transposées vient de la symétrie de la matrice \mathbf{K}_e , justifiée par son expression (2.132). Ceci entraîne également la symétrie de la matrice \mathbf{K}_{00} . Par ailleurs, la densité de charge aux nœuds internes est nulle d'après la loi de Gauss appliquée à une céramique piézoélectrique (équation (2.95a)) et la formulation variationnelle (équation (2.113)).

Condensation des degrés de liberté électriques internes La dernière ligne de l'équation (2.138) permet d'écrire explicitement les degrés de liberté internes :

$$\phi_0 = -\mathbf{K}_{00}^{-1} [\mathcal{K}'_{m0} \mathbf{x} + \mathbf{K}_{+0}^T \phi_+ + \mathbf{K}_{-0}^T \phi_-]. \quad (2.139)$$

Cette expression est à l'origine d'un terme quadratique du potentiel dans la direction transverse des patches piézoélectriques, dont l'existence est démontrée dans [142]. Le résultat (2.139) peut ensuite être injecté dans le système d'équations (2.138), qui devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\phi}_+ \\ \ddot{\phi}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & \bar{\mathcal{K}}_{m+} & \bar{\mathcal{K}}_{m-} \\ \bar{\mathcal{K}}'_{m+} & \bar{\mathbf{K}}_{++} & \bar{\mathbf{K}}_{+-} \\ \bar{\mathcal{K}}'_{m-} & \bar{\mathbf{K}}_{-+}^T & \bar{\mathbf{K}}_{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{q}_+ \\ \mathbf{q}_- \end{bmatrix}, \quad (2.140)$$

où les $\bar{\mathbf{K}}_{mm}$, $\bar{\mathbf{K}}_{m+}$, $\bar{\mathbf{K}}_{m-}$, $\bar{\mathbf{K}}'_{m+}$, $\bar{\mathbf{K}}'_{m-}$, $\bar{\mathbf{K}}_{++}$, $\bar{\mathbf{K}}_{+-}$, $\bar{\mathbf{K}}_{--}$ sont des matrices déduites de la condensation effectuée avec l'expression (2.139). Leurs expressions sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}}_{mm} &= \mathbf{K}_{mm} - \boldsymbol{\kappa}_{m0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{m0}, & \bar{\mathbf{K}}_{m+} &= \mathbf{K}_{m+} - \boldsymbol{\kappa}_{m0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{+0}, \\ \bar{\mathbf{K}}_{m-} &= \mathbf{K}_{m-} - \boldsymbol{\kappa}_{m0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{-0}, & \bar{\mathbf{K}}'_{m+} &= \boldsymbol{\kappa}'_{m+} - \boldsymbol{\kappa}_{+0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{m0}, \\ \bar{\mathbf{K}}'_{m-} &= \boldsymbol{\kappa}'_{m-} - \boldsymbol{\kappa}_{-0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{m0}, & \bar{\mathbf{K}}_{++} &= \mathbf{K}_{++} - \boldsymbol{\kappa}_{+0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{+0}, \\ \bar{\mathbf{K}}_{+-} &= \mathbf{K}_{+-} - \boldsymbol{\kappa}_{+0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{-0}, & \bar{\mathbf{K}}_{--} &= \mathbf{K}_{--} - \boldsymbol{\kappa}_{-0} \mathbf{K}_{00}^{-1} \boldsymbol{\kappa}'_{-0}.\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les quantités $\bar{\mathbf{K}}_{m+}$, $\bar{\mathbf{K}}_{m-}$, $\bar{\mathbf{K}}'_{m+}$ et $\bar{\mathbf{K}}'_{m-}$ restent linéaires avec \mathbf{x} . En particulier, il existe un ensemble de matrices ($\bar{\mathbf{K}}_{m+}^{(c)}$, $\bar{\mathbf{K}}_{m-}^{(c)}$) et tenseurs ($\bar{\mathbf{P}}_{m+}^{(c)}$, $\bar{\mathbf{P}}_{m-}^{(c)}$) tels que :

$$\bar{\mathbf{K}}_{m+} = \bar{\mathbf{K}}_{m+}^{(c)} + \bar{\mathbf{P}}_{m+}^{(c)} \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{m-} = \bar{\mathbf{K}}_{m-}^{(c)} + \bar{\mathbf{P}}_{m-}^{(c)} \mathbf{x} \quad (2.141a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}'_{m+} = [\bar{\mathbf{K}}_{m+}^{(c)} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}_{m+}^{(c)} \mathbf{x}]^T, \quad \bar{\mathbf{K}}'_{m-} = [\bar{\mathbf{K}}_{m-}^{(c)} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{P}}_{m-}^{(c)} \mathbf{x}]^T. \quad (2.141b)$$

Propriété d'équipotentialité des électrodes. L'hypothèse (iii) permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\phi}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \phi_+, \quad \boldsymbol{\phi}_- = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \phi_-. \quad (2.142)$$

Cette écriture peut être injectée dans le système (2.140) pour ramener les équations électriques à des termes scalaires. Cela est obtenu par la somme des termes contenus dans les 2^e et 3^e lignes du système (2.140). Pour justifier le développement suivant, le cas d'un produit dans le cas d'une matrice A_{ij} et d'un vecteur b_j de tailles respectives $M \times N$ et N est considéré :

$$A_{ij} b_j \quad \text{avec } b_j = b \quad \forall j \in [1, N] \quad \Rightarrow \quad A_{ij} b_j = b \left(\sum_{j=1}^N A_{ij} \right) = b \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N A_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N A_{Mj} \end{bmatrix}.$$

Cela signifie que la somme des termes sur les lignes du produit $A_{ij} b_j$ vaut :

$$\sum_{i=1}^M A_{ij} b_j = b \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij}.$$

À partir de cet exemple, les termes sur les lignes des équations électriques de l'égalité (2.140) ainsi que les termes linéaires en ϕ de la première ligne sont sommés. Le chargement électrique résulte alors à des charges globales sur les deux électrodes. Ces charges sont définies par :

$$Q_+ = \sum_{i=1}^{N_+} [\mathbf{q}_+]_i, \quad Q_- = \sum_{i=1}^{N_-} [\mathbf{q}_-]_i, \quad (2.143)$$

où N_- et N_+ désignent le nombre de nœuds sur S^- et S^+ . On rappelle que d'après l'hypothèse (iv), les charges sont opposées sur les deux électrodes ($Q_+ = -Q_- = Q$). En conséquence, la somme des termes entraîne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\phi}_+ \\ \ddot{\phi}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & \hat{\mathbf{K}}_{m+} & \hat{\mathbf{K}}_{m-} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{m+} & C_{++} & C_{+-} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{m-} & C_{+-} & C_{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ Q \\ -Q \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

où les vecteurs de couplage $(\widehat{\mathcal{K}}_{m+}, \widehat{\mathcal{K}}_{m-}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m+}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m-})$ et les capacités (C_{++}, C_{+-}, C_{--}) sont définis par :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{K}}_{m+} &= \sum_{j=1}^{N_+} [\overline{\mathcal{K}}_{m+}]_{ij}, & \widehat{\mathcal{K}}_{m-} &= \sum_{j=1}^{N_-} [\overline{\mathcal{K}}_{m-}]_{ij}, \\ \widehat{\mathcal{K}}'_{m+} &= \sum_{i=1}^{N_+} [\overline{\mathcal{K}}'_{m+}]_{ij}, & \widehat{\mathcal{K}}'_{m-} &= \sum_{i=1}^{N_-} [\overline{\mathcal{K}}'_{m-}]_{ij}, \\ C_{++} &= \sum_{i=1}^{N_+} \sum_{j=1}^{N_+} [\overline{\mathcal{K}}_{++}]_{ij}, & C_{--} &= \sum_{i=1}^{N_-} \sum_{j=1}^{N_-} [\overline{\mathcal{K}}_{--}]_{ij}, & C_{+-} &= \sum_{i=1}^{N_+} \sum_{j=1}^{N_-} [\overline{\mathcal{K}}_{+-}]_{ij}.\end{aligned}$$

Avec cette écriture, les vecteurs de couplage $(\widehat{\mathcal{K}}_{m+}, \widehat{\mathcal{K}}_{m-}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m+}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m-})$ s'écrivent de nouveau comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction linéaire en \mathbf{x} . En effet, en considérant les équations (2.141), le vecteur de couplage $\widehat{\mathcal{K}}_{m+}$ s'écrit alors comme la somme d'un terme constant et d'un terme linéaire en \mathbf{x} , le vecteur \mathbf{f}_c et la matrice \mathbf{P} sont introduits, tels que :

$$\widehat{\mathcal{K}}_{m+} = \sum_{j=1}^{N_+} \left([\overline{\mathcal{K}}_{m+}^{(c)}]_{ij} + [\overline{\mathbf{P}}_{m+}^{(c)}]_{ijl} x_l \right) = [\mathbf{f}_c]_i + [\mathbf{P}]_{il} x_l = \mathbf{f}_c + \mathbf{P}\mathbf{x}. \quad (2.145)$$

Des développements similaires peuvent être écrits pour les autres vecteurs $(\widehat{\mathcal{K}}_{m-}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m+}, \widehat{\mathcal{K}}'_{m-})$.

Simplification des équations électriques. Des conditions aux limites sont appliquées successivement sur (2.144) pour effectuer une dernière simplification. Le cas d'une structure bloquée est d'abord considéré. Dans ce cas, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ce qui implique pour les équations électriques :

$$C_{++}\phi_+ + C_{+-}\phi_- = Q \quad (2.146a)$$

$$C_{+-}\phi_+ + C_{--}\phi_- = -Q. \quad (2.146b)$$

On applique maintenant une différence de potentiel $V = \phi_+ - \phi_-$ aux deux électrodes de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}\phi_- = 0 &\Rightarrow \phi_+ = V, & \text{et} & & C_{++}V &= Q \\ \phi_+ = 0 &\Rightarrow \phi_- = -V, & \text{et} & & -C_{--}V &= -Q\end{aligned}$$

ce qui entraîne d'une part que :

$$C_{++} = C_{--} = C. \quad (2.147)$$

D'autre part, l'introduction de ce résultat dans le système (2.146) conduit à un système à deux équations et inconnues, par somme et différence :

$$\begin{aligned}(C - C_{+-})\phi_+ + (C_{+-} - C)\phi_- &= 2Q \\ \Rightarrow CV - C_{+-}V &= 2Q \\ \Rightarrow (C - C_{+-})V &= 2Q,\end{aligned}$$

soit $(C - C_{+-}) = 2C$, ce qui implique :

$$C_{+-} = -C. \quad (2.148)$$

L'expression de la capacité d'un patch piézoélectrique homogène de surface S et d'épaisseur h peut être obtenue par l'intégration du terme diélectrique de la formulation variationnelle du problème électrique (2.113), qui conduit d'après [180] à :

$$C = \frac{\epsilon_{33}^e S}{h}. \quad (2.149)$$

Les expressions obtenues avec les résultats (2.147) et (2.148) sont maintenant introduites dans l'équation (2.144) qui devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\phi}_+ \\ \ddot{\phi}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{mm} & \widehat{\mathbf{K}}_{m+} & \widehat{\mathbf{K}}_{m-} \\ \widehat{\mathbf{K}}'_{m+} & C & -C \\ \widehat{\mathbf{K}}'_{m-} & -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_+ \\ \phi_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ Q \\ -Q \end{bmatrix}. \quad (2.150)$$

Les 2^e et 3^e lignes de ce système s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}}'_{m+} \mathbf{x} + CV &= Q \\ \widehat{\mathbf{K}}'_{m-} \mathbf{x} - CV &= -Q \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\widehat{\mathbf{K}}'_{m+} = -\widehat{\mathbf{K}}'_{m-}. \quad (2.151)$$

Enfin, si le mouvement est bloqué ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), sans forçage mécanique ($\mathbf{F}_m = 0$), et qu'un court-circuit est en plus imposé sur le patch ($\phi_+ = \phi_- = \phi$), alors la première ligne du système (2.150) s'écrit :

$$(\widehat{\mathbf{K}}_{m+} + \widehat{\mathbf{K}}_{m-})\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathbf{K}}_{m+} = -\widehat{\mathbf{K}}_{m-}. \quad (2.152)$$

Avec les résultats (2.151) et (2.152), les 2^e et 3^e lignes de l'expression (2.150) sont équivalentes. L'une d'entre elles suffit alors pour décrire le système. L'écriture du couplage (2.145) est alors pris en compte pour $\widehat{\mathbf{K}}_{m+}$ et $\widehat{\mathbf{K}}'_{m+}$, et la tension $V = \phi_+ - \phi_-$ est introduite dans la formulation. Finalement, le système (2.150) s'écrit pour un système composé d'un seul patch :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{mm} & \mathbf{f}_c + \mathbf{P}\mathbf{x} \\ -[\mathbf{f}_c + \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathbf{x}]^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ Q \end{bmatrix}. \quad (2.153)$$

Finalement, si la structure considérée est équipée de P patches, le système (2.153) devient :

$$\mathbf{M}_{mm}\ddot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{K}}_{mm}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^P [\mathbf{f}_c^{(p)} + \mathbf{P}^{(p)}\mathbf{x}]V^{(p)} = \mathbf{F}_m \quad (2.154a)$$

$$C^{(p)}V^{(p)} - [\mathbf{f}_c^{(p)} + \frac{1}{2}\mathbf{P}^{(p)}\mathbf{x}]^T \mathbf{x} = Q^{(p)} \quad \forall p \in [1, P] \quad (2.154b)$$

où l'indice (p) désigne le patch considéré. Ce système correspond à l'expression du modèle éléments finis complet, et constitue la base de l'ensemble de la démarche de réduction de modèles entrepris dans les travaux rapportés dans ce manuscrit. Le chapitre suivant est spécifiquement consacré à la procédure de réduction.

2.3 Réduction de modèles par projection modale

La **réduction des modèles** proposée ici s'appuie sur la projection des équations du mouvement sur la base des **modes propres de vibration**. Ces modes comprennent les pulsations et les déformées modales associées, et sont obtenus pour des formulations discrètes par un problème aux valeurs propres. Le développement modal est un outil couramment employé en dynamique des structures, notamment en raison de son efficacité pour l'étude des **phénomènes résonants**. À partir de la propriété d'orthogonalité des modes, la projection des termes linéaires de la base physique à la base modale permet d'obtenir des équations découplées d'oscillateurs harmoniques. En revanche, les termes non-linéaires introduisent du couplage entre les oscillateurs quantifiés par des termes de raideurs qui constituent certains des paramètres du modèle réduit.

Dans cette section, une projection modale est réalisée sur un modèle analytique et est présentée pour le cas de la plaque circulaire de la section 2.1.3, qui comprend des non-linéarités géométriques. Le développement modal pour la réduction des modèles éléments finis présentés dans la section 2.2.3 est ensuite détaillé.

2.3.1 Modèle réduit modal de structures élastiques à partir de modèles analytiques

(a) Cas d'une plaque circulaire et homogène : projection modale de la formulation en (w, F)

Développement modal Des solutions analytiques sont obtenues pour les pulsations et déformées des modes propres. Cette section présente la démarche de résolution du problème uniquement mécanique d'une plaque circulaire avec des conditions aux limites encastées. Le calcul de ces modes est rendu possible par une séparation des variables dans le repère cylindrique. Ce calcul, présenté par exemple dans [68, 117], est ici fondé sur les équations (2.81a) et (2.81b), les deux variables à projeter sur les modes sont le déplacement transverse w et les forces de membrane F . Le développement modal s'écrit :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(r, \theta) q_k(t) \quad \text{and} \quad F(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{N_F} \Upsilon_j(r, \theta) \eta_j(t), \quad (2.155)$$

où les $\Phi_k(r, \theta)$ et $\Upsilon_j(r, \theta)$ désignent les déformées des modes transverses et de membrane, et q_k et η_j sont les coordonnées modales correspondantes. À ces coordonnées et déformées modales sont associées les pulsations des modes transverses et de membrane, notées respectivement ω_k et ζ_j . Comme détaillé en Annexe B, ces pulsations sont définies par :

$$\Delta \Delta \Phi_k - \omega_k^2 \Phi_k = 0, \quad \Delta \Delta \Upsilon_j - \zeta_j^4 \Upsilon_j = 0. \quad (2.156)$$

Pour ce développement, N_w modes transverses et N_F modes de membrane ont été introduits. Ces modes ont la propriété d'être orthogonaux, c'est à dire :

$$\iint_P \Phi_k \Phi_l dS = \delta_{kl}, \quad \iint_P \Upsilon_i \Upsilon_j dS = \delta_{ij}. \quad (2.157)$$

Ces dernières équations définissent également la procédure de normalisation des modes.

Les figures 2.8 et 2.9 montrent respectivement les allures et l'ordre d'apparition des modes $\Phi_k(r, \theta)$ et $\Upsilon_j(r, \theta)$. Les premier modes transverses et les modes de membrane font apparaître des modes axisymétriques et asymétriques.

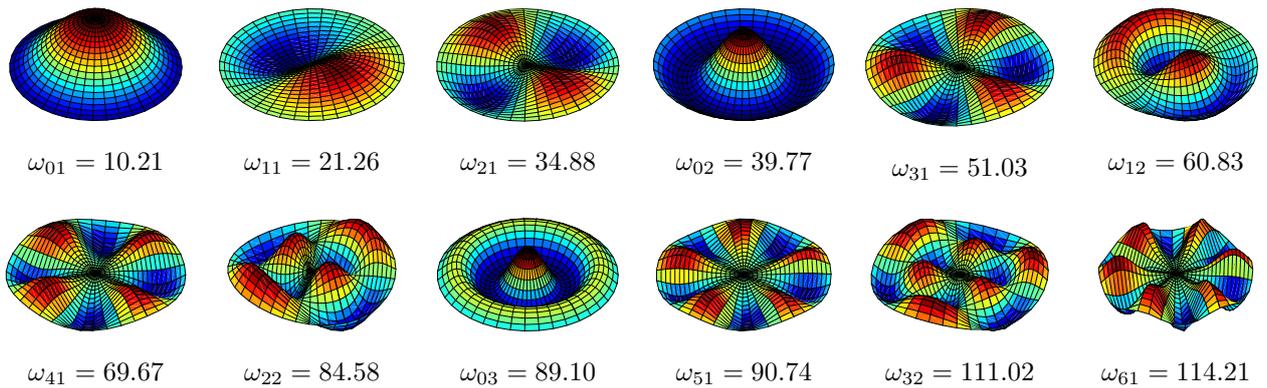


FIGURE 2.8 – Pulsations propres et déformées modales des douze premiers modes transverses de la plaque circulaire encastée.

Projection des équations sur la base modale Le développement modal réalisé avec les expressions (2.155) est maintenant introduit dans les équations du mouvement (2.81a) et (2.81b). L'utilisation de la propriété d'orthogonalité ainsi que la normalisation définies par les expressions (2.157), et

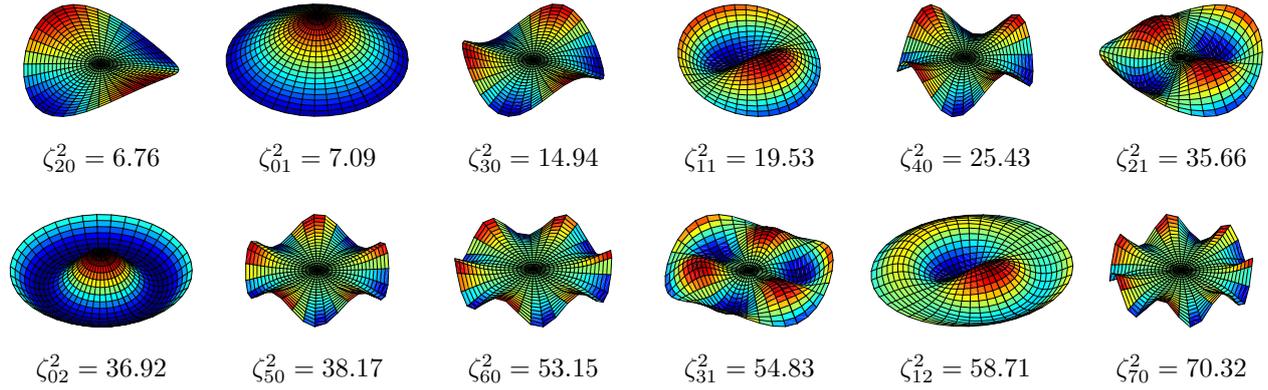


FIGURE 2.9 – Pulsations propres et déformées modales des douze premiers modes de membrane de la plaque circulaire encastree, avec $\nu = 1/3$.

l'intégration des équations sur la surface de la plaque entraînent le système d'équations suivant :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k - \varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} E_{rj}^k q_r \eta_j = Q_k(t) \quad (2.158a)$$

$$\zeta_j^4 \eta_j = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j q_p q_q, \quad (2.158b)$$

où les coefficients quadratiques non-linéaires (E_{rj}^k, H_{pq}^j) et les forçages modaux Q_k sont définis par :

$$E_{rj}^k = \iint_P \Phi_k L(\Phi_r, \Upsilon_j) dS, \quad H_{pq}^j = \iint_P \Upsilon_j L(\Phi_p, \Phi_q) dS, \quad Q_k(t) = \iint_P p \Phi_k dS. \quad (2.159)$$

Le modèle réduit obtenu est constitué d'un système d'oscillateurs couplés par des termes non-linéaires. *Les non-linéarités sont d'ordre quadratique uniquement avec cette formulation.* Le couplage est quantifié par les coefficients quadratiques, notés E_{rj}^k et H_{pq}^j , qui constituent les coefficients non-linéaires du modèle réduit associé à la formulation (w, F) du problème non-linéaire des plaques.

(b) Projection modale des formulations en déplacement

Cette partie se fonde sur les formulations (2.52) et (2.79), dont les termes de membrane sont exprimés avec les composantes axiales et longitudinales des déplacements, respectivement u et \mathbf{u} , pour la poutre et la plaque.

Les déplacements transverses et de membrane sont respectivement développés sur N_w modes transverses Φ_k et N_u modes axiaux Ψ_p (resp. longitudinaux Ψ_p) :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(x) q_k(t) \quad \text{et} \quad u(x, t) = \sum_{p=1}^{N_u} \Psi_p(x) \eta_p(t) \quad \text{pour la poutre,} \quad (2.160a)$$

$$w(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(\mathbf{r}) q_k(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(r, \theta, t) = \sum_{p=1}^{N_u} \Psi_p(r, \theta) \eta_p(t) \quad \text{pour la plaque.} \quad (2.160b)$$

où les q_k and η_p désignent les coordonnées modales des modes transverses et de membrane. Ces modes sont solutions des problèmes aux valeurs propres suivants, respectivement associés aux parties linéaires des équations (2.52) et (2.83) :

$$\Phi_{k,xxxx} - \omega_k^2 \Phi_k = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{p,xx} + \gamma_p^2 \Psi_p = 0 \quad \text{pour la poutre,} \quad (2.161a)$$

$$\Delta \Delta \Phi_k - \omega_k^2 \Phi_k \quad \text{et} \quad (1 - \nu) \Delta \Psi_p + (1 + \nu) \nabla \text{div} \Psi_p + \gamma_p^2 \Psi_p = 0 \quad \text{pour la plaque,} \quad (2.161b)$$

où les ω_k et γ_p sont les fréquences propres adimensionnées. Les modes longitudinaux vérifient les propriétés d'orthogonalité et sont normés de manière similaire aux équations (2.157). La projection modale est effectuée avec l'injection des développements (2.160) dans les équations, suivie de la multiplication des équations (2.52a) et (2.83a) par Φ_k , ainsi que des expressions (2.52b) (2.83b) par Ψ_p et Ψ_p , respectivement. Les équations (2.52) et (2.83) sont alors respectivement intégrées sur la longueur de la poutre et sur la surface de la plaque. L'intégration et les propriétés d'orthogonalité aboutissent *dans les deux cas* au modèle réduit suivant pour tout $k = 1, \dots, N_w$, et $p = 1, \dots, N_u$:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{N_w} C_{pi}^k \eta_p q_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} D_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k \quad (2.162a)$$

$$\mu \ddot{\eta}_p + \gamma_p^2 \eta_p - \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j = E_p \quad (2.162b)$$

où $\varepsilon = 1$ pour une poutre, et $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$ pour une plaque. Les termes de forçages $Q_k(t)$, $E_p(t)$ ainsi que les coefficients non-linéaires quadratiques (C_{pi}^k , G_{ij}^p) et cubiques D_{ijl}^k du modèle réduit sont définis de la manière suivante dans le cas de la poutre :

$$C_{pi}^k = - \int_0^1 (\Psi_{p,x} \Phi_{i,x})_{,x} \Phi_k \, dx, \quad G_{ij}^p = \int_0^1 \Psi_p \Phi_{i,x} \Phi_{j,xx} \, dx, \quad (2.163a)$$

$$D_{ijl}^k = - \frac{1}{2} \int_0^1 (\Phi_{i,x} \Phi_{j,x} \Phi_{l,x})_{,x} \Phi_k \, dx, \quad (2.163b)$$

$$Q_k(t) = \int_0^1 \Phi_k(x) p(x, t) \, dx, \quad E_p(t) = \int_0^1 \Psi_p(x) n(x, t) \, dx. \quad (2.163c)$$

Dans le cas de la plaque, ces coefficients non-linéaires ont pour expression :

$$C_{pi}^k = - \int_S \left[(1 - \nu) (\nabla \Psi_p : \nabla \nabla \Phi_i + \Delta \Psi_p \cdot \nabla \Phi_i) + \nu (\operatorname{div} \Psi_p \Delta \Phi_i + \nabla \operatorname{div} \Psi_p \cdot \nabla \Phi_i) \right] \Phi_k \, dS,$$

$$G_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_S \left[(1 - \nu) \Delta \Phi_i \nabla \Phi_j + (1 + \nu) \nabla \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \right] \cdot \Psi_p \, dS,$$

$$D_{ijl}^k = - \int_S \left[\nabla \Phi_i \cdot \nabla \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_l + \frac{1}{2} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \Delta \Phi_l \right] \Phi_k \, dS. \quad (2.164)$$

Le calcul des modes de vibrations des modes longitudinaux de plaque Ψ_p , proposé dans [61, 133], peut s'avérer complexe. Pour cette raison, la projection modale de la formulation (2.79) n'a pas été plus amplement développée dans ce manuscrit. Ces développements permettent cependant de montrer que **le modèle réduit modal obtenu pour une plaque est formellement identique à celui d'une poutre.**

(c) Bilan

La projection modale des problèmes dynamiques et non-linéaires géométriques a permis d'obtenir un modèle d'ordre réduit constitué d'un système d'équations couplées. La projection des formulations en déplacement aboutit à un modèle réduit couplant les développements transverses et longitudinaux de manière identique.

Les développements nécessaires pour obtenir les modèles avec des développements analytiques sont conséquents, et ce même pour une géométrie et des conditions aux limites simples qui conditionnent la faisabilité du calcul. Ces modèles sont réduits à des structures élastiques. La complexité des géométries visées ne permet pas d'envisager ce type de modélisation. Cependant, les valeurs des coefficients des modèles réduits obtenus constituent des résultats de référence.

2.3.2 Modèles réduits modaux de structures piézoélectriques

De la même manière que pour les modèles analytique, l'estimation des modes de vibration repose sur le calcul des pulsations propres et des déformées modales du problème dynamique libre, linéaire et conservatif, pour lequel des solutions harmoniques sont recherchées. Dans le cas des structures piézoélectriques, différentes conditions aux limites peuvent être considérées. Deux cas limites sont notamment possibles :

- les patchs piézoélectriques sont en **court-circuit** (CC) ($V^{(p)} = 0$)
- les patchs piézoélectriques sont en **circuit ouvert** (CO) ($Q^{(p)} = 0$).

Dans cette section, la projection modale d'un problème sans couplage électromécanique pour traiter uniquement le cas des non-linéarités géométriques est présentée dans un premier temps. La projection du problème électro-mécanique linéaire est ensuite exposée. Enfin, la formulation du problème avec le couplage électromécanique et non-linéarités géométrique est également projeté sur les modes.

(a) Projection des équations sur les modes

Le problème issu des équations (2.136) sans le couplage électro-mécanique s'écrit :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_m. \quad (2.165)$$

Le principe de superposition modale s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\phi}_k q_k(t), \quad (2.166)$$

où les $q_k(t)$ désignent les coordonnées modales et $\boldsymbol{\phi}_k$ les déformées modales. Une troncature du problème à K modes est effectuée en pratique. Les modes sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_m - \omega_k^2 \mathbf{M}_m) \boldsymbol{\phi}_k = \mathbf{0}, \quad (2.167)$$

établi par la recherche de solutions harmoniques au problème linéaire, libre et conservatif associé à l'équation (2.165). Lorsque les modes sont normés par la masse modale, les propriétés d'orthogonalité s'écrivent de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}_m \boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K}_m \boldsymbol{\phi}_j = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (2.168)$$

L'introduction du développement (2.166) ainsi que de la multiplication de l'équation du mouvement (2.165) par $\boldsymbol{\phi}_k^T$ avec l'utilisation des propriétés d'orthogonalité, conduisent au système d'oscillateurs couplés suivant :

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l = F_k \quad (2.169)$$

avec $F_k = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{F}_m$ les efforts mécaniques modaux, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j \\ \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l. \end{array} \right. \quad (2.170a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j \\ \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l. \end{array} \right. \quad (2.170b)$$

Les a_{ij}^k et b_{ijl}^k sont les **coefficients non-linéaires du modèle réduit**, respectivement pour les effets quadratiques et cubiques. Les équations (2.126) issues du principe des travaux virtuels montrent que ces termes suffisent pour rendre compte du comportement non-linéaire géométrique de toute structure.

(b) Projection modale du problème électromécanique linéaire

Ce deuxième cas néglige les non-linéarités géométriques. Les matrices concernées par ces effets sont écartées des équations (2.154), d'où :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \sum_{p=1}^P \mathbf{f}_c^{(p)} V^{(p)} = \mathbf{F}_m \quad (2.171a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - [\mathbf{f}_c^{(p)}]^T \mathbf{x} = Q^{(p)}. \quad (2.171b)$$

Ces équations montrent que le système avec tous les patches en court-circuit est équivalent au système mécanique. En effet, si $V^{(p)} = 0 \forall p$, alors la première équation est équivalente au système mécanique. Ainsi, une décomposition des déplacements sur la base des modes en court-circuit est effectuée :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\phi}_k q_k(t), \quad (2.172)$$

où les $\boldsymbol{\phi}_k$ désignent alors les déformées des modes en court-circuit. Le problème aux valeurs et vecteurs propres s'écrit de la même manière avec ces conditions aux limites :

$$(\mathbf{K}_m - \omega_k^2 \mathbf{M}_m) \boldsymbol{\phi}_k = 0, \quad \text{avec } V^{(p)} = 0 \forall p, \quad (2.173)$$

tandis que les propriétés d'orthogonalité sont conservées. Pour l'équation mécanique, la démarche utilisée est identique à celle du paragraphe (a), tandis que le développement (2.172) est simplement introduit dans l'équation électrique. Cela conduit au système algébrique couplé suivant :

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \sum_{p=1}^P \chi_k^{(p)} V^{(p)} = F_k, \quad (2.174a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - \sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k = Q^{(p)}, \quad (2.174b)$$

où les coefficients du modèle réduit sont les coefficients de couplage électromécaniques $\chi_k^{(p)}$ définis par

$$\chi_k^{(p)} = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_c^{(p)}. \quad (2.175)$$

Ces coefficients sont désignés par l'acronyme EMCC en référence à sa dénomination anglaise *Electro-Mechanical Coupling Coefficients*.

(c) Projection modale du problème complet

Enfin, la réduction de modèle s'effectue également avec les modes en court-circuit. La démarche de projection modale est identique au cas précédent et implique le système d'oscillateurs couplés suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l \\ + \sum_{p=1}^P \chi_k^{(p)} V^{(p)} + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^K \Theta_{ik}^{(p)} q_i V^{(p)} = F_k \end{aligned} \quad (2.176a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - \sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k - \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \frac{1}{2} \Theta_{ij}^{(p)} q_i q_j = Q^{(p)}. \quad (2.176b)$$

Cette réduction introduit une dernière famille de coefficients du modèle réduit, avec Θ_{ij}^p les coefficients des termes non-linéaires électromécaniques d'ordre quadratique. Ces coefficients sont définis par :

$$\Theta_{ik}^{(p)} = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{P}^{(p)} \boldsymbol{\phi}_i. \quad (2.177)$$

Comme pour l'équation physique, les termes dans l'équation électrique quantifient des effets deux fois moins élevés en détection qu'en actionnement dans l'équation mécanique. Ce résultat est nouveau par rapport à la formulation pionnière proposée dans [116] pour une cinématique de poutre. Les équations modales sont obtenues sur une poutre bi-articulée et stratifiée en Annexe D, et confirment la présence de ce facteur entre l'équation du mouvement transverse et l'équation électrique.

(d) Synthèse

La réduction de modèle est réalisée avec une projection des équations sur une base modale. En plus des pulsations propres et des capacités (qui agissent comme des raideurs mécanique et électrique dans le modèle réduit), trois familles de coefficients sont introduits pour quantifier les effets à étudier :

- les coefficients non-linéaires pour les effets non-linéaires géométriques des termes mécaniques, avec les coefficients du modèle réduit a_{ij}^k et b_{ijl}^k
- les coefficients électromécaniques linéaires, quantifiés par les coefficients $\chi_k^{(p)}$ pour l'actionnement et la détection électromécaniques linéaire
- les coefficients électromécaniques non-linéaires ou paramétriques, pris en compte avec l'introduction des coefficients $\Theta_{ik}^{(p)}$ pour l'actionnement et la détection électromécanique paramétrique.

Les valeurs de ces coefficients gouvernent le comportement dynamique de toute structure piézo-électrique mince, vibrant à des amplitudes de déplacement suffisamment élevées pour activer des non-linéarités géométriques. Ainsi, l'estimation de ces coefficients constitue un objectif principal de ces travaux. Le formalisme obtenu présente l'avantage d'écrire les différents effets de manière sommatrice dans les équations : ainsi, ceux-ci peuvent faire l'objet d'études séparées. Les deux prochains chapitres traitent uniquement le problème mécanique non-linéaire. La validité des calculs de la première famille de coefficients est discutée.

2.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a défini le cadre théorique de l'ensemble des travaux de cette thèse. Des modèles analytiques de structures minces élastiques et des modèles éléments finis de structures piézoélectriques ont été établis à partir du principe des travaux virtuels, et une projection modale a été effectuée dans les deux cas.

Les modèles analytiques de structures élastiques ont d'abord été présentés : il s'agit de modèles déjà connus et fondés sur les cinématiques d'Euler-Bernoulli pour les poutres et de Kirchhoff-Love pour les plaques. Dans les deux cas, les effets non-linéaires sont pris en compte avec les termes de von Kármán. À partir de ces hypothèses, les développements analytiques présentés mettent en évidence le couplage membrane-flexion, par la présence de termes couplés dans les formulations forte et faible du problème. Les effets de membrane peuvent être exprimés avec une formulation en force (effort axial pour la poutre ou fonction d'Airy pour la plaque) ou avec une formulation en déplacement.

Dans un second temps, une formulation éléments finis originale qui prend en compte le couplage électromécanique et les non-linéarités géométriques a été proposée. Une première écriture de ce problème met en jeu les variables électriques locales (le potentiel électrique et les densités surfaciques de charge). Cette écriture correspond à la formulation disponible dans les codes éléments finis existants. Une seconde écriture permet d'exprimer le problème avec des variables électriques globales (la tension et les charges électriques) associées à chacune des pastilles piézoélectriques. Ces deux formulations

éléments finis, ainsi que les développements permettant d'exprimer le problème des variables électriques locales aux variables électriques globales, constituent une première originalité de ces travaux de thèse.

Un développement modal a ensuite été effectué sur les modèles analytiques de structures minces élastiques et sur les modèles éléments finis de structures minces piézoélectriques. Dans les deux cas, ce développement aboutit à un système d'équations d'oscillateurs couplés, dont les termes de couplage sont quantifiés par *les coefficients du modèle réduit*. La projection modale des modèles analytiques de structures élastiques permet d'écrire précisément le couplage entre les déplacements transverses et les efforts de membrane générés par les non-linéarités géométriques. Un modèle réduit formellement identique pour les poutres et plaques lorsque la formulation exprime les effets de membrane déplacement. Dans le cas des modèles éléments finis, les inconnues mécaniques et électriques sont couplées par les non-linéarités géométriques et/ou par l'intermédiaire de la loi de comportement piézoélectrique. Les différents termes de couplages (non-linéaire, électromécanique linéaire, électromécanique non-linéaire) sont écrits de manière sommative dans les équations. Ceci permet de les étudier de manière séparée. Ce constat a défini l'approche adoptée au cours de la réalisation des travaux rapportés dans les prochains chapitres.

Dans la suite du manuscrit, les modélisations utilisées se réfèrent, développent ou complètent ceux présentés dans ce chapitre. En particulier, la formulation en déplacement axiaux du modèle analytique de poutre est utilisée pour valider les coefficients du modèle réduit issus de calculs numériques dans le chapitre 4. Cette même démarche est utilisée avec un modèle analytique d'une poutre piézoélectrique dans le chapitre 5 pour valider les coefficients électromécaniques linéaires.

Chapitre 3

Outils numériques de réduction de modèle et de simulation

Contents

3.1	Calcul de modèles réduits	58
3.1.1	Déplacements modaux imposés - STEP	59
3.1.2	Efforts modaux imposés	60
3.1.3	Condensation implicite et expansion (ICE)	63
3.1.4	Modes duaux	63
3.1.5	Dérivées modales	64
3.2	Simulations dynamiques	66
3.2.1	Méthodes d'intégration temporelle	66
3.2.2	Outils numériques de calcul des solutions périodiques	68
3.2.3	Méthodes analytiques de perturbation : l'exemple des échelles multiples	69
3.3	Méthode Asymptotique Numérique (MAN)	72
3.3.1	Continuation de systèmes non-linéaires	73
3.3.2	Développement asymptotique et mise en équation quadratique	74
3.3.3	Présentation de l'interface Manlab	75
3.3.4	Application à l'oscillateur de Duffing	76
3.3.5	Application au problème statique de flexion d'une plaque	77
3.4	Bilan du chapitre	79
3.5	Démarche numérique adoptée	80

Ce chapitre concerne dans un premier temps le calcul des coefficients des modèles réduits modaux introduits dans le chapitre précédent. Un premier état de l'art permet d'introduire les différentes méthodes d'estimation de ces coefficients. Un second état de l'art pour les méthodes de calcul des solutions dynamiques est proposé dans un second temps. De plus amples détails sont exposés pour une de ces approches, connue sous le nom de méthode asymptotique numérique, qui sera finalement retenue pour la suite de ces travaux. Une stratégie numérique de l'ensemble du problème est proposée à la fin du chapitre.

Les approches permettant d'estimer les coefficients des modèles réduits sont jusqu'ici *uniquement utilisées pour des structures élastiques*. Ces approches permettent d'estimer les coefficients non-linéaires. En particulier, on présente des outils qui s'appuient sur des codes éléments finis disponibles dans le commerce, sans intervenir dans le détail de la formulation variationnelle et de son implémentation numérique. On rappelle que pour cette raison, ces approches sont dites *non-intrusives*. Un grand nombre de ces méthodes sont présentées dans l'article de revue [124].

D'autre part, différentes approches d'estimation des solutions dynamiques non-linéaires sont exposées et discutées. En particulier, l'exemple de la méthode analytique des échelles multiples est mise en regard d'une méthode numérique, l'intégration temporelle. Cette dernière méthode est mise à disposition dans la plupart des codes éléments finis du commerce, et nécessite une procédure de prédiction-corrrection à chaque pas de temps pour la résolution d'un problème non-linéaire. Enfin,

une méthode de continuation de solutions périodiques, appelée méthode asymptotique numérique (MAN), permet de résoudre les systèmes non-linéaires dans le domaine fréquentiel et fait l'objet de la troisième section. Ce dernier outil est implémenté dans une interface numérique libre d'accès appelée MANLAB, dont les récents développements ont permis d'étudier les non-linéarités de systèmes divers [179]. Deux problèmes simples sont finalement traités en fin de chapitre pour mettre en œuvre quelques-unes des approches présentées : il s'agit un oscillateur de Duffing et un problème statique de plaque chargée ponctuellement en son centre. Pour chacun de ces deux cas, la MAN et une méthode analytique sont appliquées.

À partir de cet état de l'art et de cet exemple, une stratégie numérique pour résoudre le problème d'ensemble est proposée.

3.1 Calcul de modèles réduits

Cette section présente différentes stratégies numériques permettant de réduire les modèles éléments finis de structures minces, avec des non-linéarités géométriques. L'objectif est de calculer les coefficients a_{ij}^k et b_{ijl}^k d'une structure mince, introduits par l'équation (2.169). Le principal mouvement est la flexion de la structure, qui est essentiellement constitué des déplacements transverses. La principale difficulté réside dans la prise en compte des effets de membrane, couplés avec le mouvement de flexion. Les différentes méthodes de réduction proposées ici présentent différentes démarches pour prendre en compte ces effets. Par ailleurs, le principe des travaux virtuels a montré que les effets non-linéaires proviennent des travaux des efforts internes : en conséquence ces stratégies numériques s'appuient le plus souvent sur des calculs statiques, moins coûteuses en termes de calcul numérique.

Position du problème

Le problème étudié est celui établi avec l'équation (2.154a). Le comportement dynamique et conservatif d'un système discrétisé, avec non-linéarités géométriques et sans couplage électromécanique, est gouverné par l'équation :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e, \quad (3.1)$$

où le vecteur des efforts intérieur \mathbf{f}_{int} regroupe les termes de raideurs linéaire $\mathbf{K}_m \mathbf{x}$ et non-linéaire \mathbf{f}_{nl} . Ce vecteur s'écrit :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_m \mathbf{x} = \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (3.2)$$

d'après les équations (2.126). Cette formulation est valable pour toute discrétisation éléments finis et est indépendante du type d'élément utilisé. La projection de ces efforts est issue des relations (2.170) :

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l. \quad (3.3)$$

En pratique, l'obtention la partie non-linéaire des efforts intérieurs à partir du champ des efforts intérieurs issu du calcul éléments finis peut être effectuée avec le modèle complet, tel que le décrit l'équation (3.2). Il peut également être effectué dans la base modale si les coordonnées modales q_k associées au champ de déplacement $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\phi}_k q_k$ sont connues. Avec la propriété d'orthogonalité des modes (cf. équation (2.168)), l'opération à réaliser s'écrit :

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) - q_i \omega_i^2 \delta_{ik}. \quad (3.4)$$

La procédure de réduction de modèle nécessite de choisir une base modale $\mathcal{B} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_K]$ qui répond aux besoins du problème. Une classification des champs de déplacement à inclure dans la base modale, telle que proposée dans [110], contient :

- $\mathcal{B}(i)$ les modes transverses correspondant aux résonances situées dans la bande fréquentielle d'intérêt,
- $\mathcal{B}(ii)$ le ou les champs de déplacement de membrane complémentaires à la base (i), dont les modes associés sont en général situés à des fréquences supérieures à celle de la bande fréquentielle d'étude,
- $\mathcal{B}(iii)$ les modes transverses susceptibles d'entrer en *interaction forte* avec les modes de la base (i) par un mécanisme de résonance interne, avec une base de modes de membrane associée,
- $\mathcal{B}(iv)$ les modes transverses en *interaction faible* avec les modes de la base (i), dont l'activation est croissante avec les amplitudes de déplacement transverses, mais dont la contribution reste inférieure aux modes de la base (i). De même, une base de déplacements de membrane est associée.

L'analogie avec le modèle de poutre présenté dans la section 2.1.2 montre, avec la formulation en (u, w) (équation (2.49)) identique à celle d'un modèle élément fini, que la base $\mathcal{B}(i)$ ne suffit pas pour caractériser efficacement le comportement non-linéaire autour d'une résonance. En effet, la base $\mathcal{B}(i)$ ne prend en compte que les termes linéaires et cubiques de l'équation (2.49a), là où une base de déplacements axiaux u correspondant à la base $\mathcal{B}(ii)$ doit aussi être incluse dans le modèle.

3.1.1 Déplacements modaux imposés - STEP

Cette démarche, proposée initialement dans [127], repose sur une estimation des coefficients à partir de calculs numériques statiques où les champs de déplacements sont imposés sur la structure. L'opération réalisée par le code éléments finis est alors un calcul des efforts internes résultant d'un champ de déplacement imposé. Il s'agit donc d'une *évaluation* directe de fonctions linéaires, quadratiques et cubiques, qui s'écrit :

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}^d) = \mathbf{K}_m \mathbf{x}^d + \mathbf{K}_m^{(2)}(\mathbf{x}^d) \mathbf{x}^d + \mathbf{K}_m^{(3)}(\mathbf{x}^d) \mathbf{x}^d. \quad (3.5)$$

En général, l'inconnue du problème est le champ de déplacement \mathbf{x} en réponse à des efforts imposés \mathbf{F}^d . L'opération requiert alors une étape de prédiction et de correction du champ de déplacement, implémentée le plus souvent avec un algorithme de Newton-Raphson dans les codes éléments finis. Avec cette méthode, les efforts intérieurs évalués sont obtenus avec l'extraction des efforts intérieurs calculés aux nœuds du maillage.

Les équations (2.166) et (2.169) montrent que la projection des efforts internes sur un mode $\boldsymbol{\phi}_k$ avec $k \in [1, K]$ fait intervenir tous les modes $\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{\phi}_l$ avec $(i, j, l) \in [1, K]^3$ sur lesquels \mathbf{x}^d est décomposé. Ainsi, dans le cas où le champ imposé est un mode pondéré par un coefficient d'amplitude, c'est-à-dire si :

$$\mathbf{x}^d = \lambda \boldsymbol{\phi}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_i = \lambda \\ q_j = 0 \quad \forall j \neq i, \end{cases} \quad (3.6)$$

alors d'après l'équation (3.3) la projection des efforts internes est un scalaire dépendant linéairement de deux des coefficients du modèle réduit, a_{ii}^k et b_{iii}^k . Plus précisément, cette quantité s'écrit :

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{nl} = a_{ii}^k \lambda^2 + b_{iii}^k \lambda^3. \quad (3.7)$$

Une analogie avec le modèle modal de poutre associé à la formulation en (u, w) est effectuée. On définit alors deux modes transverses $\boldsymbol{\phi}_i$ et $\boldsymbol{\phi}_l$, et $\boldsymbol{\phi}_p$ un mode axial. Le mode $\boldsymbol{\phi}_i$ est alors imposé à la structure, c'est-à-dire que $\mathbf{x}^d = \lambda \boldsymbol{\phi}_i$ de la manière décrite par l'équation (3.6). Dans ce cas, l'équation (3.7) peut être formulée de la même manière que le système (2.162). Ce système s'écrit alors tel que :

$$\omega_i^2 q_i \delta_{il} + \lambda^3 D_{iii}^l = Q_l \quad (3.8a)$$

$$-\lambda^2 G_{ii}^p = E_p. \quad (3.8b)$$

Cela signifie que les projections des efforts sur les modes $\boldsymbol{\phi}_l$ et $\boldsymbol{\phi}_p$ permettent de calculer respectivement le coefficient cubique D_{iii}^l et le coefficient quadratique G_{ii}^p .

En choisissant deux valeurs de λ distinctes dans l'équation (3.7), un système linéaire à deux inconnues (a_{ii}^k, b_{iii}^k) et deux équations est obtenue. La procédure peut être étendue à l'imposition d'un champ, combinaison de deux modes $(i, j) \in [1, K]^2$. Dans ce cas, sept champs de déplacements différents doivent être imposés pour déterminer les trois coefficients quadratiques (a_{ii}^k, a_{ij}^k et a_{jj}^k) et quatre coefficients cubiques ($b_{iii}^k, b_{iij}^k, b_{ijj}^k$ et b_{jjj}^k). Un unique coefficient cubique b_{ijl}^k nécessite d'imposer un déplacement qui soit une combinaison linéaire de trois différents modes. Quinze autres coefficients sont également impliqués dans la réponse statique, et doivent avoir été préalablement identifiés pour déterminer ce coefficient b_{ijl}^k . Le système à seize équations et seize inconnues est détaillé en Annexe E. Dans l'équation (3.6), le scalaire λ est choisi arbitrairement, et le nombre maximal de déplacements à imposer n'est pas restreint. Ainsi, même si l'équation (3.7) nécessite au moins deux valeurs de λ pour obtenir les deux coefficients impliqués, le système peut être composé de plus d'équations que d'inconnues.

Cette méthode, beaucoup utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse, est appelée méthode STEP, acronyme anglais de *STiffness Evaluation Procedure*. Si son principe de fonctionnement est simple, une difficulté réside cependant dans la détermination des champs de déplacement de membrane. Ceux-ci sont en général associés à des modes de fréquences élevées devant celles des modes transverses auxquels ils sont complémentaires. En d'autres termes, cette méthode ne donne pas d'information sur la base $\mathcal{B}(i)$.

3.1.2 Efforts modaux imposés

Cette démarche, proposée initialement dans [123], consiste à imposer des champs d'efforts extérieurs qui s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'un ou plusieurs modes de $\mathcal{B}(i)$. L'opération réalisée par le code élément fini s'écrit donc :

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_e = \sum_{i=1}^{N_w} \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad \boldsymbol{\phi}_i \in \mathcal{B}(i) \quad (3.9)$$

dans le cas général. Ce calcul implique une procédure de prédiction-correction de la solution recherchée \mathbf{x} . Une fois ce champ de déplacement obtenu, les coordonnées modales sont calculées. L'estimation des q_k est réalisée à l'aide de la propriété d'orthogonalité ($\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = \delta_{ik}$, cf. équation (2.168)), qui entraîne que :

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{M}_m \mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{M}_m \left(\sum_{i=1}^{N_w} q_i \boldsymbol{\phi}_i \right) = \sum_{i=1}^{N_w} q_i \left(\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{M}_m \boldsymbol{\phi}_i \right) = q_k. \quad (3.10)$$

La partie non-linéaire des efforts intérieurs est alors estimée à partir de l'expression (3.4) et du résultat du calcul (3.9). L'opération effectuée s'écrit :

$$\boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) - q_i \omega_i^2 \delta_{ik} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e \quad (3.11a)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \lambda \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_e - \delta_{ik} \omega_i^2 q_i. \quad (3.11b)$$

En notant les efforts modaux $F_k = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_e$, l'équation (3.11b) devient :

$$\sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \beta_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = \lambda F_k - \delta_{ik} \omega_i^2 q_i, \quad (3.12)$$

où les coefficients β_{ij}^k et Γ_{ijl}^k diffèrent des coefficients a_{ij}^k et b_{ijl}^k par la prise en compte implicite du couplage membrane-flexion. Avec plusieurs chargements et réponses associées, un système linéaire

composé de différentes équations (3.12) peut être établi. Les coefficients β_{ij}^k et Γ_{ijl}^k à estimer sont alors les solutions de ce système. Le nombre de modes retenus dans la base $\mathcal{B}(i)$ conditionne le nombre de coefficients et de calculs statiques à effectuer.

On illustre cette méthode avec l'exemple d'un cas simplifié où, d'une part, le champ d'effort défini dans l'équation (3.9) n'est proportionnel qu'à un seul mode. Cela s'écrit :

$$\mathbf{f}_e = \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda_i = 0 \\ \lambda_j = 0 \quad \forall j \neq i, \end{cases} \quad \boldsymbol{\phi}_i \in \mathcal{B}(i).$$

On suppose d'autre part que les déplacements obtenus ne sollicitent que le mode forcé. Cette hypothèse a pour expression :

$$\mathbf{x} = \sum_{l=1}^{N_w} q_l \boldsymbol{\phi}_l \approx q_i \boldsymbol{\phi}_i \quad \text{si} \quad \mathbf{f}_e = \lambda \boldsymbol{\phi}_i. \quad (3.13)$$

Le système (3.12) devient dans ce cas :

$$\beta_{ii}^k q_i^2 + \Gamma_{iii}^k q_i^3 = F_k - \delta_{ik} \omega_i^2 q_i. \quad (3.14)$$

Dans ce cas, deux coefficients et calculs statiques sont requis. La prise en compte implicite du couplage membrane-flexion peut être expliquée par l'analogie avec le modèle analytique de poutre. Dans le cas où $\mathbf{f}_e = \lambda \boldsymbol{\phi}_i$ avec $\boldsymbol{\phi}_i$ un mode transverse, alors les équations (2.162) s'écrivent :

$$\omega_k^2 q_k + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_u} C_{pi}^k \eta_p q_i + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{N_w} D_{jlm}^k q_j q_l q_m = Q_k, \quad (3.15a)$$

$$\gamma_p^2 \eta_p - \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} G_{jl}^p q_j q_l = 0. \quad (3.15b)$$

En supposant que seul le mode forcé intervient dans la réponse, ce système *est approché* par :

$$\omega_k^2 q_k + \sum_{p=1}^{N_u} C_{pi}^k \eta_p q_i + D_{iii}^k q_i^3 = Q_k, \quad (3.16a)$$

$$\gamma_p^2 \eta_p - G_{ii}^p q_i^2 = 0. \quad (3.16b)$$

Une *condensation* de l'équation de membrane est alors effectuée, à partir de l'estimation des composantes des modes axiaux issue de l'équation (3.16a). La procédure s'écrit :

$$\eta_p = \frac{G_{ii}^p q_i^2}{\gamma_p^2} \Rightarrow \omega_k^2 q_k + \left(\sum_{p=1}^{N_u} \frac{C_{pi}^k G_{ii}^p}{\gamma_p^2} + D_{iii}^k \right) q_i^3 = Q_k, \quad (3.17)$$

$$\text{d'où} \quad \Gamma_{iii}^k = D_{iii}^k + \sum_{p=1}^{N_u} \frac{C_{pi}^k G_{ii}^p}{\gamma_p^2} \quad \text{et} \quad \beta_{ii}^k = 0. \quad (3.18)$$

Cette méthode en efforts imposés estime donc des coefficients qui prennent en compte implicitement les effets de membrane. Ceci peut être présenté comme un avantage par rapport à la méthode STEP, où les champs de déplacement associés à ces effets doivent être déterminés. En revanche, l'inconvénient majeur de cette méthode en efforts imposés réside dans l'approximation formulée avec l'expression (3.13). Les erreurs générées par cette approximation dépendent de l'activation des autres modes dans les réponses statiques calculées. Ces réponses sont potentiellement sensibles à l'amplitude des efforts imposés, quantifiée par le paramètre λ . En effet, même si le champ d'efforts extérieur n'est fonction que d'un mode, le champ de déplacement résultant peut en impliquer d'autres dans

la réponse, notamment ceux de la base $\mathcal{B}(\text{iv})$, et ce de façon dépendante de l'amplitude λ . Des travaux fondés sur cette procédure ont proposé un critère pour l'amplitude des efforts à imposer [69, 81].

Cette méthode a ici été testée avec $\boldsymbol{\phi}_k = \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_1$ le premier mode transverse d'une poutre bi-encastree. Afin de simplifier cette démarche exploratoire, l'égalité (3.13) est supposée. Les calculs ont été effectués avec $\lambda = \pm\lambda_1$, et la composante est estimée avec la procédure définie par l'équation (3.10) pour chacun des calculs. Les résultats sont notés q_{1+} et q_{1-} . Le système linéaire à résoudre est alors obtenu à partir de l'équation (3.11b) par :

$$\beta_{11}^1 q_{1+}^2 + \Gamma_{111}^1 q_{1+}^3 = \lambda_1 \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_1 - \omega_1^2 q_{1+} \quad (3.19a)$$

$$\beta_{11}^1 q_{1-}^2 + \Gamma_{111}^1 q_{1-}^3 = -\lambda_1 \boldsymbol{\phi}_1^T \boldsymbol{\phi}_1 - \omega_1^2 q_{1-}. \quad (3.19b)$$

Les résultats obtenus avec cette méthode en efforts imposés sont mis en regard avec des résultats issus de la méthode STEP. Dans les deux cas, une comparaison avec le modèle analytique de poutre est proposée. Ce modèle est celui présenté dans les sections 2.1.2 et 2.3.1(b) (le calcul des coefficients analytiques est plus amplement détaillé dans le chapitre 4). Pour les deux méthodes, plusieurs valeurs de l'amplitude λ_1 sont testées. La sensibilité à l'amplitude λ_1 est quantifiée avec le rapport du maximum d'amplitude des déplacements transverses du résultat du calcul statique $\max(w)$ et de l'épaisseur h . Deux estimations sont rapportées, avec $\max(w)/h = \frac{1}{2}$ et $\max(w)/h = \frac{1}{20}$. Les résultats présentés dans le tableau 3.1 mettent en évidence la sensibilité des résultats obtenus pour le calcul avec la méthode en efforts imposés par rapport à la méthode STEP. Si les deux approches aboutissent

	Calcul STEP (a_{11}^1, b_{111}^1)	Forces imposées ($\beta_{11}^1, \Gamma_{111}^1$)	Calcul analytique (a_{11}^1, b_{111}^1)	Calcul analytique ($\beta_{11}^1, \Gamma_{111}^1$)
$\max(w) = \frac{h}{20}$	(0, 111.13)	(0, 81.41)	(0, 111.18)	(0, 75.68)
$\max(w) = \frac{h}{2}$	(0, 111.13)	(0, 79.81)		

TABLE 3.1 – Résultats des calculs de coefficients non-linéaires adimensionnés du premier mode d'une poutre bi-encastree. Les coefficients quadratiques obtenus sont négligeables devant les cubiques.

toutes deux à des coefficients quadratiques négligeables, comme prédit par le modèle analytique, les erreurs sont élevées ($> 5\%$) avec des efforts imposés. À l'inverse, la méthode STEP est très bien corrélée avec le modèle analytique. Ces erreurs sont probablement dues à la contribution d'autres modes de la base $\mathcal{B}(\text{iv})$ qui varie avec l'amplitude du forçage. Une solution pour améliorer cette estimation serait de prendre en compte le couplage faible par l'ajout des coefficients associés à d'autres modes dans le système. Cependant, aucune information ne guide la sélection de ces modes, qui est laissée au choix de l'utilisateur. Par ailleurs, l'identification des coefficients nécessite d'autres calculs statiques, qui pourraient alors faire intervenir d'autres modes par couplage faible. Le calcul des coefficients requiert alors de prendre en compte plus de modes que la base d'étude initiale, augmentant alors le nombre de calculs numériques à effectuer.

Enfin, la nécessité de faire appel à une procédure de prédiction-corrrection pour le calcul statique non-linéaire limite la plage des amplitudes d'efforts et de déplacements possible : au-delà de $\max(w_m)/h = 2$, l'algorithme de prédiction-corrrection du code éléments ne converge plus avec la méthode en efforts imposés, là où des amplitude $\max(w_m)/h = 1000$ peuvent être atteintes avec la méthode STEP.

3.1.3 Condensation implicite et expansion (ICE)

Une stratégie proposée dans [80] s'appuie sur l'usage de la méthode en efforts imposés, ainsi que sur des relations supposées entre les champs de déplacements transverses et de membrane. L'objectif est de reconstruire les champs de déplacement de la base $\mathcal{B}(\text{ii})$ dans un calcul éléments finis. Le principe est de séparer dans le champ de déplacement \mathbf{x} les contributions des champs de déplacement de membrane et de flexion :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_m = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{X}) q_k(t) + \sum_{p=1}^P \boldsymbol{\psi}_p(\mathbf{X}) \eta_p(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\boldsymbol{\phi}_k, q_k) & \text{connus} \\ (\boldsymbol{\psi}_p, \eta_p) & \text{inconnus,} \end{cases} \quad (3.20)$$

dans l'objectif d'estimer les coordonnées η_p et les déformées $\boldsymbol{\psi}_p$ des modes de membrane.

La principale hypothèse de cette démarche consiste à supposer que les champs de déplacements de membrane s'écrivent comme des combinaisons quadratiques des modes transverses, soit :

$$[\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \dots \ \eta_{P-1} \ \eta_P] = [q_1^2 \ q_2^2 \ q_1 q_2 \ q_3^2 \ \dots \ q_{K-1} q_K \ q_K^2]. \quad (3.21)$$

Cette relation est bien valide dans le cas d'une poutre ou d'une plaque : il s'agit de l'équation (2.83b) avec une norme particulière des modes de membrane (de façon à ce que $G_{ij}^p = 1 \ \forall i, j \in [1, N_w], p \in [1, N_u]$). Dans d'autres cadres, la validité mathématique de ces relations n'est pas forcément vérifiée.

Avec l'hypothèse (3.20), la base des déplacements de membrane est alors de taille $P = K(K+1)/2$ modes, avec K le nombre de modes transverses. Cette hypothèse est appliquée à P calculs statiques issus de la méthode en efforts imposés. Les étapes de la procédure ICE sont les suivantes :

- calcul des modes et sélection de la base $\mathcal{B}(\text{i})$
- application de la méthode des forces modales imposées, avec des champs d'efforts qui s'écrivent comme des combinaisons linéaires d'un ou de deux modes. Les champs de déplacement sont rangés par colonnes : $\mathbf{W} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(P)})$
- estimation des coordonnées modales q_k avec l'expression (3.10), et calcul des coefficients $(\beta_{ij}^k, \Gamma_{ijl}^k)$
- estimation des coordonnées η_p à partir des relations (3.21)
- réorganisation des q_k et η_p dans des matrices \mathbf{Q} et \mathbf{P} . Les lignes sont les coordonnées modales k et p respectivement de $\mathcal{B}(\text{i})$ et $\mathcal{B}(\text{ii})$, les colonnes correspondent aux champs de déplacements issus des calculs statiques
- estimation des champs de déplacement de membrane. À cette fin, l'équation (3.20) est réécrite sous forme matricielle, avec $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}^{(1)}, \boldsymbol{\phi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\phi}^{(K)})$ et $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}^{(1)}, \boldsymbol{\psi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\psi}^{(P)})$:

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\phi} \mathbf{Q} + \boldsymbol{\psi} \mathbf{P}, \quad (3.22)$$

les champs de déplacements de $\mathcal{B}(\text{ii})$ sont alors obtenus par :

$$\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{W} - \boldsymbol{\phi} \mathbf{Q}] \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.23)$$

qui nécessite une pseudo-inversion de \mathbf{P} .

Cette démarche a été appliquée pour reconstruire les déplacements de membrane dans des simulations dynamiques. Bien que la relation (3.21) entre composantes de flexion et de membrane est conforme au modèle analytique de poutres et plaques, cette hypothèse n'avance pas de justification et n'est pas forcément valide si les structures sont plus complexes.

3.1.4 Modes duaux

Un autre outil, proposé dans [110], aboutit à l'identification des déplacements de la base $\mathcal{B}(\text{ii})$. La formulation théorique de cette base repose sur les hypothèses suivantes :

- la réponse des efforts et déplacements de membrane est quasi-statique, c'est-à-dire que les termes dynamiques de membrane sont négligés (équivalente aux hypothèses d'inerties axiales et longitudinales négligées dans le cadre des hypothèses de poutres et de plaques)
- la composante modale d'un effort de membrane dépend de manière linéaire de sa coordonnée modale, et de manière non-linéaire des coordonnées modales des modes transverses. Avec les notations introduites et les équations (3.3) et (3.4), ces efforts s'écrivent :

$$\boldsymbol{\psi}_p^T \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) = \omega_p^2 \eta_p + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^p q_i q_j + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^p q_i q_j q_l, \quad (3.24)$$

où les $(i, j, l) \in \mathcal{B}(i)$ et $p \in \mathcal{B}(ii)$.

De ce résultat, il est conclu que la partie non-linéaire des efforts de membrane est alors la somme de quatre contributions distinctes :

- une partie linéaire avec les déplacements de membrane, il s'agit du terme $\omega_p^2 \eta_p$. Dans ce cas la raideur linéaire peut être déterminée par

$$\omega_p^2 = \boldsymbol{\psi}_p^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_p \quad (3.25)$$

- une partie liée par des termes quadratique et cubique avec un seul mode i de $\mathcal{B}(i)$. Les raideurs de ces termes sont les coefficients a_{ii}^p et b_{iii}^p
- une partie liée par des termes quadratique et cubiques avec deux modes (i, j) de $\mathcal{B}(i)$. Les raideurs de ces termes sont les coefficients a_{ij}^p , b_{iij}^p et b_{ijj}^p avec $i < j$
- une partie liée par un terme cubique à trois des modes (i, j, l) de $\mathcal{B}(i)$. La raideur cubique à identifier est notée b_{ijl}^p avec $i < j < l$.

Les contributions non-linéaires résultent de chargements imposés à la structure. Par exemple, la seconde contribution, provenant d'un seul mode i de $\mathcal{B}(i)$, est déterminée en quatre étapes :

- l'imposition de forces d'expression $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i$
- le calcul des réponses statiques non-linéaires en déplacement associées à ce chargement, pour différentes valeurs de λ
- la projection de cet ensemble de déplacements sur la base retenue jusqu'à ce moment, composée de modes linéaires et de modes duaux déjà sélectionnés,
- la réalisation d'une "Proper Orthogonal Decomposition" (POD) pour extraire le ou les modes significatif(s) à grande énergie potentielle (cf. [124, 110]).

La troisième contribution, provenant de deux modes (i, j) de $\mathcal{B}(i)$, est obtenue selon un schéma similaire mais avec des forces qui sont des combinaisons linéaires de $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i$ et $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j$. Finalement, la dernière contribution serait construite à partir des champs de déplacements induits par des combinaisons linéaires de $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i$, $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j$, et $\lambda \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_l$. Cependant, cette dernière contribution ne semble pas significative [124].

Dès que tous les modes duaux ont été ajoutés, ils sont traités comme les modes linéaires avec des contributions à l'inertie et des termes de raideur quadratiques et cubiques. Dès lors, les modes duaux ne sont pas limités à des structures planes bien que les hypothèses de base l'étaient.

3.1.5 Dérivées modales

Une toute autre méthodologie repose sur une écriture des perturbations des modes de vibrations $\boldsymbol{\phi}_i$ de la base $\mathcal{B}(i)$ autour de leur état d'équilibre. Cette sensibilité à un paramètre p (qui sera défini ci-après) définit la dérivée modale $\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial p}$ du mode $\boldsymbol{\phi}_i$ par rapport au paramètre p . Le formalisme se fonde sur la variation de l'équation modale (2.173) par rapport au paramètre p , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left[(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i \right] &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial p} + \left(-\frac{\partial \omega_i^2}{\partial p} \mathbf{M} - \omega_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \right) \boldsymbol{\phi}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La matrice de masse est supposée indépendante de p , ainsi $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} = \mathbf{0}$. Dans l'approche initialement proposée dans [84], la dérivée modale $\boldsymbol{\theta}_{ij}$ est la variation de l'un des modes $\boldsymbol{\phi}_i$ après variation du déplacement dans la direction d'un mode $\boldsymbol{\phi}_j$ de $\mathcal{B}(i)$. Le paramètre p est donc l'amplitude q_j du mode $\boldsymbol{\phi}_j$. D'après l'équation (3.26) et l'hypothèse de matrice de masse constante, les dérivées modales sont définies par :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{q_j} \right) \boldsymbol{\phi}_i, \quad (3.27)$$

et vérifient les propriétés d'orthogonalité par rapport aux modes de $\mathcal{B}(i)$:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{q_j} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i \right)^T = 0. \quad (3.28)$$

Dans beaucoup d'applications, les termes d'inertie sont négligés, ce qui signifie que $\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} = 0$. Dans ce cas, l'expression des dérivées modales *statiques* (SMD pour son acronyme anglais *Static Modal Derivatives*) s'écrit :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{q_j} \boldsymbol{\phi}_i. \quad (3.29)$$

Par ailleurs, la matrice de raideur paramétrée s'écrit :

$$\mathbf{K}(p) = \mathbf{K}(\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j) = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j}. \quad (3.30)$$

La matrice $\frac{\partial \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j}$ est aussi la matrice de raideur tangente au déplacement $\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j$, parfois directement disponible dans les codes éléments finis du commerce. Dans un cadre défini par l'usage d'un tel code éléments finis, une approximation par un schéma aux différences finis suivants est effectué :

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j)}{\partial q_j} \Big|_{q_j=0} \approx \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} = h \boldsymbol{\phi}_j) - \mathbf{K}(\mathbf{x} = \mathbf{0})}{h}, \quad (3.31)$$

éventuellement amélioré par un schéma aux différences centrés, qui aboutit à de meilleurs résultats d'après [152] :

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x} = q_j \boldsymbol{\phi}_j)}{\partial \boldsymbol{\phi}_j} \Big|_{q_j=0} \approx \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} = h \boldsymbol{\phi}_j) - \mathbf{K}(\mathbf{x} = -h \boldsymbol{\phi}_j)}{2h}. \quad (3.32)$$

Une fois que la base comprenant les modes et les dérivées est établie, les travaux fondés sur les dérivées modales utilisent le formalisme des variétés quadratiques [92, 152]. Ces travaux cités présentent des solutions dans le domaine temporel. Par comparaison avec les résultats issus d'un modèle complet, les simulations réalisées montrent une bonne efficacité et précision pour prédire les comportements dynamiques non-linéaires, pour des cas académiques [71, 168], dans un contexte industriel [152] et avec l'usage d'un code éléments finis commercial [71, 152].

Par comparaison aux démarches présentées précédemment, un inconvénient de cette méthode est qu'elle ne repose pas sur l'écriture d'un système d'oscillateurs réduits dont le comportement non-linéaire est gouverné par les valeurs de coefficients. Par ailleurs, il est difficile d'estimer combien et quelles dérivées modales sont nécessaires pour réduire correctement un modèle. Par ailleurs, le formalisme des dérivées modales n'est pas évident à appliquer à un modèle analytique de structure mince, qui est nécessaire pour valider cette méthode à l'échelle d'un modèle réduit. Pour ces raisons, cet outil n'a pas été abordé au cours de la thèse.

3.2 Simulations dynamiques

Cette section présente un aperçu des méthodes de résolution du problème dynamique non-linéaire. Des méthodes numériques d'intégration temporelle, des approches analytiques de perturbation et une méthode de continuation sont notamment abordées. Dans cet état de l'art, deux exemples sont notamment présentés en détail. Le schéma d'intégration temporel de Newmark, implémenté dans la plupart des codes éléments finis du commerce, constitue le premier exemple. Le second exemple présenté est la méthode des échelles multiples : il s'agit d'une approche analytique de perturbation.

3.2.1 Méthodes d'intégration temporelle

(a) Généralités

Les méthodes d'intégration temporelle sont construites par différences finies, qui amènent à discrétiser le temps. Le système dynamique discrétisé en temps à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_n + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}_e(t_n). \quad (3.33)$$

Un terme d'amortissement considéré proportionnel ($\mathbf{C} = \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$) est ajouté. L'approche consiste à introduire un schéma d'intégration permettant d'obtenir les solutions au temps $n+1$ à partir des résultats au temps n , avec $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Les conditions initiales \mathbf{x}_0 et $\dot{\mathbf{x}}_0$ constituent les paramètres d'entrée du schéma d'intégration. Deux familles sont principalement distinguées :

- les **méthodes explicites** estiment le vecteur d'état au temps t_{n+1} à partir des résultats au temps précédent t_n , et sont *conditionnellement stables*, c'est-à-dire qu'il existe un pas de temps critique au-delà duquel les solutions divergent. Ces méthodes sont plus souvent employées dans des cas où la dynamique est rapide (chocs, impact, crashes de véhicules ...).
- les **méthodes implicites** calculent le vecteur d'état à t_{n+1} à partir des résultats au temps précédent, mais aussi de sa dérivée au pas de temps t_{n+1} . Elles sont généralement *inconditionnellement stables*, et préférentiellement appliquées à des cas où la dynamique est lente.

Dans le cadre d'un code éléments finis commercial et dans le cas où les non-linéarités géométriques sont étudiées, l'intégration est généralement appliquée sur les modèles complets. Différents schémas sont proposés : celui de Newmark, détaillé ci-après, est le plus fréquemment proposé. Les procédures de Hilbert-Hughes-Taylor (HHT), les θ -schémas, ou l'algorithme de Runge-Kutta constituent différents schémas d'intégration également classiquement utilisés [199]. D'autres schémas, fondés sur la conservation de l'énergie ou la symplecticité [25], sont mieux adaptés aux applications où les composantes à hautes fréquences doivent être prises en compte (telles que la synthèse de vibrations de plaques ou de cordes d'instruments de musique [55, 26, 90]).

(b) Exemple : le schéma de Newmark

Le schéma d'intégration temporel de Newmark repose sur un développement en série de Taylor au second ordre des degrés de liberté en déplacement \mathbf{x} , et un développement au premier ordre des vitesses $\dot{\mathbf{x}}$. La discrétisation par différences finies entraîne :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{x}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \right] & (3.34a) \\ \dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} \right] & (3.34b) \end{cases}$$

où les paramètres de discrétisation β et γ conditionnent la stabilité et la précision du schéma.

Les solutions \mathbf{x} sont alors obtenues à l'aide d'une phase de **prédiction-correction**. La prédiction est effectuée à partir des expressions (3.34) sans prise en compte des termes d'inertie au nouveau pas

de temps :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{x}}_n & (3.35a) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{x}}_n. & (3.35b) \end{cases}$$

Dans le cas linéaire, l'accélération $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}$ au pas de temps t_{n+1} est obtenue par les équations (3.33) au temps t_{n+1} et (3.35) :

$$(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}_e(t_{n+1}) - \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}, \quad (3.36)$$

la correction est alors effectuée en une opération, en rajoutant les termes d'inertie à la prédiction :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} & (3.37a) \\ \dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}. & (3.37b) \end{cases}$$

(c) Extension au cas non-linéaire : procédure itérative de Newton-Raphson

Dans le cas non-linéaire, la prédiction est dans un premier temps réalisée de la même façon que dans le cas linéaire, mais la correction repose ensuite sur une procédure itérative. Le critère d'arrêt des itérations est basé sur la norme du résidu d'équilibre. Dans le cas où les efforts extérieurs ne dépendent pas de \mathbf{x} mais uniquement du temps, ce résidu est défini à l'itération i par :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i)} + (\mathbf{f}_{int}(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)}) - \mathbf{f}_e(t_{n+1})). \quad (3.38)$$

Les inconnues du problème non-linéaire sont obtenues si ce résidu est suffisamment petit, c'est-à-dire si $\|\mathbf{R}_{n+1}^{(i)}\| < \varepsilon$ avec ε très petit. Dans ce cas, les inconnues sont celles calculées à la dernière itération :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n+1} &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i)}. \end{aligned}$$

Si le critère d'arrêt n'est pas vérifié, alors une correction est réalisée sur les inconnues. Les développements nécessitent alors d'introduire la matrice de raideur tangente définie par $\mathbf{K}_t(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{x}}$. La correction en déplacement $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)}$ est calculée par la résolution du système linéaire suivant :

$$\left(\mathbf{K}_t(\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)}) + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} \right) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} = -\mathbf{R}_{n+1}^{(i)}, \quad (3.39)$$

le résultat permet alors de corriger l'ensemble des degrés de libertés :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} \quad (3.40a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} \quad (3.40b)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i+1)} = \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)}. \quad (3.40c)$$

Cette procédure itérative de prédiction-correction s'appuie sur la **méthode de Newton-Raphson** avec une réactualisation de la matrice de raideur tangente. Une analogie avec une fonction à une seule variable est présentée sur la figure 3.1 pour illustrer le principe de cette méthode. Sur cet exemple les zéros de la fonction $y(x)$ sont recherchés, où y est fonction polynomiale de la variable x , en connaissant une valeur initiale de (x, y) ainsi que les tangentes à la courbe. Les zéros des tangentes successives (en vert) sont estimés, jusqu'à ce que la valeur finalement obtenue soit très proche de zéro (point bleu).

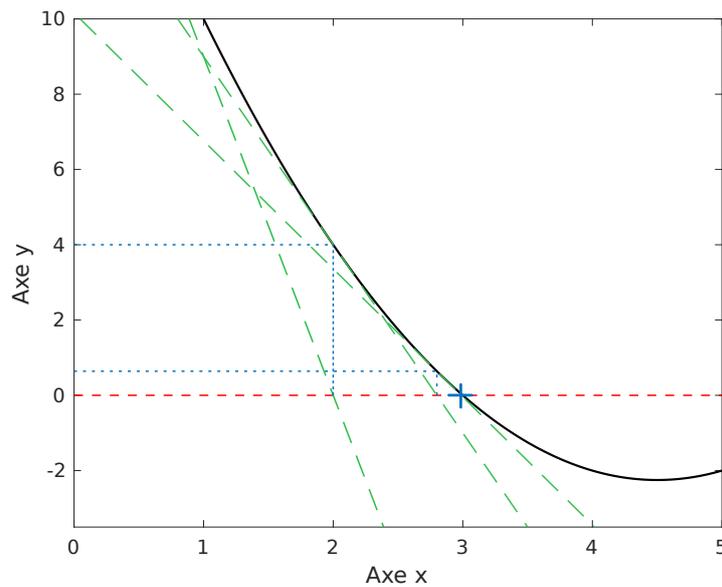


FIGURE 3.1 – Principe de la procédure itérative de Newton Raphson. En noir : résidu d'équilibre, dont les zéros (intersections avec la courbe rouge) sont recherchés. En vert : tangentes au point initial et aux différentes itérations. En bleu : coordonnées des points atteints lors des différentes itérations. La croix bleue dénote le point finalement retenu.

Cette illustration simple montre d'une part que dans le cas où deux solutions existent (probablement pour des x plus élevés sur la figure 3.1), seule l'une d'entre elles est finalement estimée. D'autre part, il peut exister des cas où l'algorithme diverge, notamment si les tangentes viennent à changer de signe. En particulier, si le système présente une bifurcation, avec au moins trois solutions possibles à son voisinage, alors la procédure de Newton-Raphson n'est pas un outil adapté.

3.2.2 Outils numériques de calcul des solutions périodiques

Les méthodes numériques de résolution des systèmes dynamiques nécessitent souvent d'exprimer les solutions dans l'espace d'état, par l'introduction de la variable $\mathbf{y}(t)$ définie par :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (3.41)$$

et l'équation dynamique du mouvement s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)). \quad (3.42)$$

S'il est admis que des *solutions périodiques* d'un problème dynamique formulé avec l'expression (3.42) existent, alors ces solutions vérifient la propriété suivante :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t + T) \quad (3.43)$$

où T désigne la période des oscillations. Pour les estimer, différentes stratégies ont été proposées :

- Les méthodes des tir (provenant de l'anglais *shooting*) consistent à identifier dans un premier temps les conditions initiales \mathbf{y}_0 du système. L'opération réalisée est une correction des quantités \mathbf{x}_0 et T de manière à minimiser le résidu \mathbf{R} défini par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{y}_0, T) = \mathbf{y}(\mathbf{y}_0, t = T) - \mathbf{y}_0. \quad (3.44)$$

À cette fin, une intégration temporelle est réalisée sur la durée T avec les conditions initiales \mathbf{y}_0 . L'avantage par rapport à l'intégration temporelle présentée précédemment est que le régime permanent est obtenu rapidement. En pratique, la correction décrite par l'équation (3.44) est réalisée avec une procédure de Newton-Raphson. Un avantage de cette méthode est de pouvoir être implémentée dans un code éléments finis commercial.

- La collocation orthogonale : cette technique consiste à discrétiser la période en intervalles, formalisés par des fonctions polynomiales par morceaux. Celle-ci est implémentée dans le code de calcul AUTO [52].
- L'équilibrage harmonique : il s'agit dans ce cas de développer la solution $\mathbf{y}(t)$ en série de Fourier, puisque l'on s'intéresse au régime permanent :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^0 + \sum_{h=1}^H (\mathbf{y}^{hc} \cos(h\omega t) + \mathbf{y}^{hs} \sin(h\omega t)), \quad (3.45)$$

où l'exposant h dénote la composante harmonique, allant jusqu'à un ordre d'harmoniques H défini par l'utilisateur. Les $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}^{hc}, \mathbf{y}^{hs})$ sont les coefficients de la série de Fourier des solutions, respectivement statiques et relatifs aux termes en sinus et cosinus. Ces termes sont indépendants du temps. L'injection de ce développement dans les équations du mouvement entraîne l'écriture d'une équation dont les différentes composantes harmoniques sont regroupées. En considérant que les équations doivent être vérifiées pour tout instant t , les termes des différentes composantes (statiques, en cos et en sin) sont égalisées ou *équilibrées*. Un nouveau vecteur d'inconnues est défini par :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y^0 & y^{1c} & y^{1s} & y^{2c} & \dots & y^{Hc} & y^{Hs} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

et le problème dynamique (3.42) peut s'écrire sous la forme d'un système algébrique à résoudre appelé résidu et noté \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}(\mathbf{Y}, \omega) = \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

Les inconnues algébriques sont alors les coefficients de la série de Fourier de l'ensemble des inconnues \mathbf{y} . Cette méthode, à l'inverse des précédentes, est fondée sur une formulation fréquentielle du problème.

3.2.3 Méthodes analytiques de perturbation : l'exemple des échelles multiples

(a) Présentation générale

Ces méthodes reposent sur l'hypothèse que les termes non-linéaires sont de faible amplitude devant l'ensemble de la quantité considérée. Un développement asymptotique peut donc être effectué sur les solutions recherchées. Parmi elles, la méthode des échelles multiples, présentée notamment dans [129], est employée dans diverses applications. Elle est notamment utilisée pour estimer les solutions de modèles réduits de MEMS (voir [87, 11], ou [76] pour une poutre piézoélectrique stratifiée). Cette approche nécessite d'avoir préalablement réduit la taille du modèle. Son principe repose sur l'observation que les grandeurs associées au signal de déplacement (en particulier des périodes et amplitudes des oscillations) varient plus lentement que les oscillations elles-même. Sur ce raisonnement, différentes échelles T_n du temps t sont introduites, avec un développement asymptotique suivant un "petit" paramètre ε . Ces différentes échelles s'écrivent :

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad (3.48)$$

et le développement asymptotique d'un déplacement x a alors pour expression :

$$x(t) = x_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + O(\varepsilon^2) \quad (3.49)$$

D'après la définition des échelles de temps (3.48), les dérivées temporelles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (3.50)$$

ainsi que :

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (3.51)$$

Le principe de la méthode consiste à appliquer ces développements dans des systèmes réduits d'oscillateurs non-linéaires, tels que ceux présentés dans les équations (2.158), (2.162) ou (2.176).

(b) Application à un oscillateur de Duffing

Cette section présente les développements appliqués à l'oscillateur de Duffing, qui consiste en une équation d'un oscillateur à laquelle est rajoutée une non-linéarité cubique. Ce système extrêmement réduit permet de caractériser les non-linéarités géométriques d'un grand nombre de systèmes (en particulier, on montrera dans le chapitre suivant que cet oscillateur peut caractériser toutes les structures planes autour de leurs résonances jusqu'à certaines amplitudes). Cet oscillateur a fait l'objet d'un grand nombre d'études analytiques, et peut se présenter sous diverses variantes [111]. La forme la plus courante a pour expression :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon 2\xi \omega_0 \dot{x} + \varepsilon \Gamma x^3 = \varepsilon F \cos(\omega t) \quad (3.52)$$

où ω_0 désigne la pulsation propre de l'oscillateur linéaire, ξ est un amortissement visqueux, F le forçage et Γ la raideur cubique de l'oscillateur. Par hypothèse, la pulsation varie peu au cours des oscillations, ainsi sa variation σ est paramétrée par ε autour de la pulsation de l'oscillateur linéaire ω_0 , ce qui s'écrit :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma. \quad (3.53)$$

Les développements asymptotiques (3.49), (3.50), (3.51) et (3.53) sont introduits dans l'équation de l'oscillateur (3.52). Les termes sont regroupés suivant le degré de la variable ε . Les termes présents au premier ordre sont :

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (3.54)$$

qui correspond à l'expression d'un oscillateur harmonique, dont les solutions s'écrivent sous la forme :

$$x_0 = A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + c.c., \quad (3.55)$$

où $c.c.$ désigne le complexe conjugué du premier terme. De plus, l'amplitude A est fonction de T_1 et a pour expression :

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{j\varphi(T_1)}, \quad (3.56)$$

où l'amplitude et la phase (a, φ) sont des inconnues du problème. Le regroupement des termes en ε donne :

$$D_0 x_1 + \omega_0^2 x_1 = F \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) - \Gamma x_0^3 - 2\xi \omega_0 D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0. \quad (3.57)$$

Il s'agit d'une équation différentielle dans laquelle le résultat du premier ordre (équation (3.55)) peut être introduit. Ceci entraîne que :

$$D_0 x_1 + \omega_0^2 x_1 = \left(\frac{1}{2} F e^{j\sigma T_1} - 3\Gamma A^2 \bar{A} - 2j\omega_0 \left(A\omega_0 \xi + \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) \right) e^{j\omega_0 T_0} - \Gamma A^3 e^{3j\omega_0 T_0} + c.c., \quad (3.58)$$

où \bar{A} dénote le conjugué de A . Par hypothèse, l'oscillateur est étudié au voisinage de sa résonance et de la pulsation propre ω_0 . Ceci implique que les solutions x_1 de l'équation (3.58) sont résonants et non

bornés. Ces termes, appelés termes *séculaires*, sont annulés car une solution bornée est recherchée. Ceci conduit à :

$$\frac{1}{2}F_e^{j\sigma T_1} - 3\Gamma A^2 \bar{A} - 2j\omega_0 \left(A\omega_0 \xi + \frac{\partial A}{\partial T_1} \right) = 0. \quad (3.59)$$

Après l'injection de l'expression de A (équation (3.56)), la précédente expression est multipliée par $e^{-j\varphi}$. La séparation des parties réelles et imaginaires aboutit au système d'équations suivant :

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \varphi) \quad (3.60a)$$

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = -\xi \omega_0 a + \frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \varphi). \quad (3.60b)$$

L'introduction du paramètre $\zeta = \sigma T_1 - \varphi$ dans les équations (3.60) permettent d'obtenir un système autonome :

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \cos(\zeta) = a\sigma - \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^3 \quad (3.61a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \sin(\zeta) = \xi \omega_0 a \quad (3.61b)$$

où on a injecté l'hypothèse de solutions stationnaires en T_1 :

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial T_1} = 0.$$

L'amplitude et la phase peuvent alors être déduites de l'oscillateur :

$$\frac{F^2}{4\omega_0^2} = a^2 \left(\xi^2 \omega_0^2 + \left(\sigma - \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^2 \right)^2 \right) \quad (3.62)$$

$$\tan \zeta = \frac{\xi \omega_0}{\sigma - \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^2}. \quad (3.63)$$

L'équation en amplitude se met alors sous la forme :

$$\sigma = \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^2 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4a^2 \omega_0^2} - \xi^2 \omega_0^2}. \quad (3.64)$$

Ces solutions sont tracées sur la figure 3.2. En fonction du signe du coefficient Γ , l'oscillateur peut présenter un comportement assouplissant ($\Gamma < 0$) ou raidissant ($\Gamma > 0$). Si le forçage en entrée du système est un signal dont la pulsation est monotone, alors le modèle prédit des phénomènes de saut, associés à un changement de la stabilité du système. La solution libre et conservative ($F = 0$ et $\xi = 0$) décrit la variation entre amplitude et pulsation suivant une relation quadratique :

$$\sigma = \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^2. \quad (3.65)$$

Avec la définition du désaccord (équation (3.53)), cette dernière équation permet d'écrire la pulsation non-linéaire ω_{nl} comme :

$$\omega_{nl} = \omega_0 \left(1 + \frac{3\Gamma}{8\omega_0^2} \varepsilon a^2 \right). \quad (3.66)$$

Les réponses forcées s'articulent donc autour de la réponse libre, appelée *backbone curve* ou *courbe maîtresse*, et ceci quel que soit le type de comportement et indépendamment du forçage. Cette propriété est illustrée sur la figure 3.3. Les courbes des oscillateurs raidissants présentent une allure similaire à celles des réponses dynamiques des MEMS présentés dans l'introduction, ce qui laisse envisager que les modèles réduits à un oscillateur avec un terme non-linéaire cubique pourraient suffire pour décrire le comportement de systèmes électromécaniques complexes. Cette méthode présente l'avantage de discuter en détail du comportement d'un système. En revanche, afin de limiter les développements, le modèle doit être réduit à une expression très simple. De plus, le choix de l'ordre du développement asymptotique dépend du problème, et est difficile à estimer préalablement. Les développements se sont ici arrêtés au premier ordre dans un souci de concision.

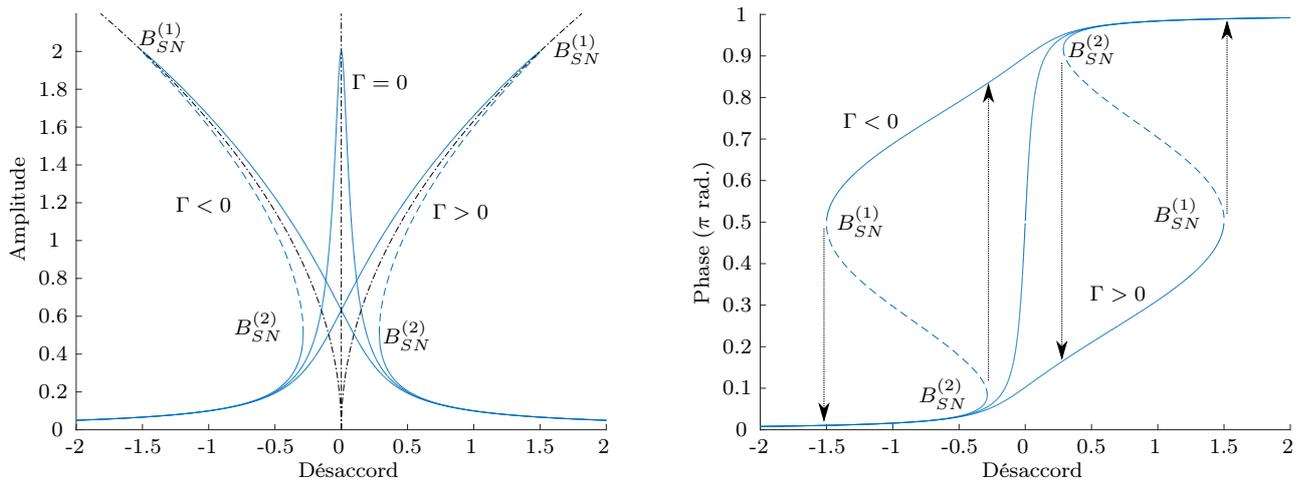


FIGURE 3.2 – Amplitudes et phases de l'oscillateur de Duffing forcé et amorti, obtenues par la méthode des échelles multiples. Les courbes sont tracées pour $\Gamma = (-1, 0, 1)$, $\omega_0 = 1$, $\xi = 0.05$ et $F = 0.2$. Les zones instables sont tracées en ligne pointillées, et les réponses libres en noires. Les flèches en noir sur la courbe des phases indiquent les sauts visibles si le forçage est une sinusoïde balayée en fréquence. Les B_{SN} sont les points de bifurcations noeud-col (SN pour "Saddle-Node" en anglais).

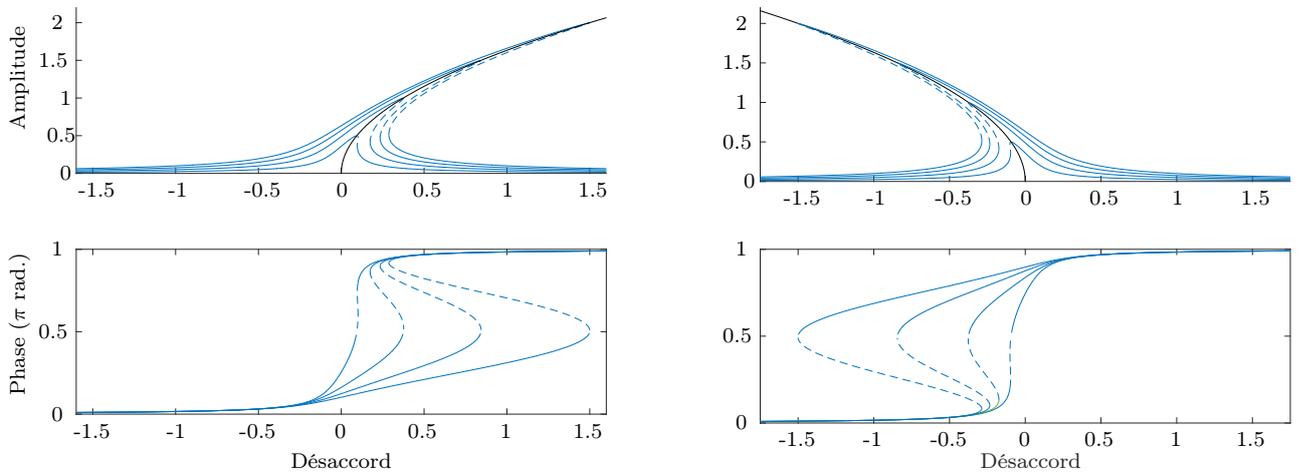


FIGURE 3.3 – Comportement du Duffing forcé et articulation autour de la réponse libre (en noir) pour différentes valeurs de forçages ($F = [0.05, 0.1, 0.15, 0.2]$). Gauche : $\Gamma = 1$ (Duffing raidissant). Droite : $\Gamma = -1$ (Duffing assouplissant). Les réponses sont tracées avec les solutions obtenues par la méthode des échelles multiples.

3.3 Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

Cette approche numérique est développée depuis la fin des années 80 afin d'estimer les solutions d'un système d'équations non-linéaires algébriques. **Pour les systèmes dynamiques, la méthode d'équilibrage harmonique est préalablement appliquée et permet d'établir un système algébrique**, conformément à ce qui a été présenté dans la section 3.2.2. Cette section présente les principes de cette méthode, à laquelle l'ouvrage [37] est consacré. L'interface Manlab, dans laquelle les calculs numériques sont implémentés, est ensuite présentée. Les solutions de l'oscillateur de Duffing sont également calculées, ce qui permet d'effectuer une comparaison avec les solutions issues de la

méthode des échelles multiples.

3.3.1 Continuation de systèmes non-linéaires

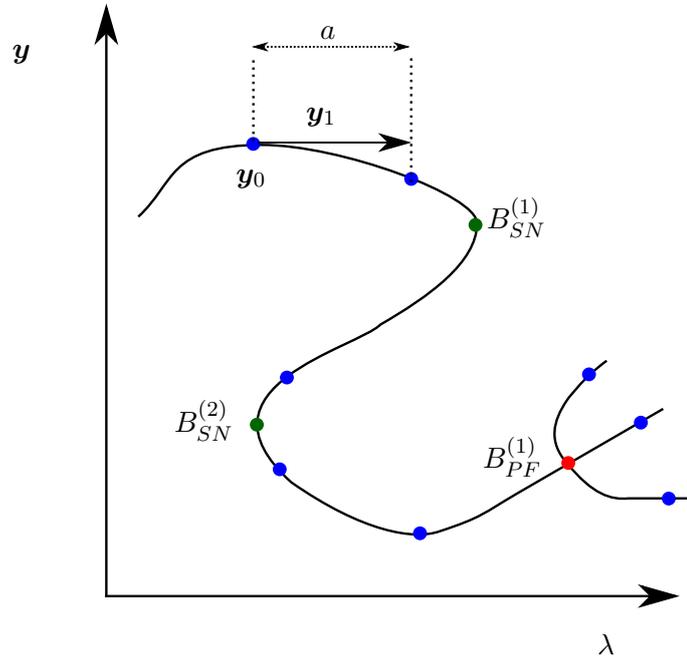


FIGURE 3.4 – Représentation des chemins des solutions en fonction du paramètre λ . Les points bleu représentent les points de calcul du développement asymptotique, les point rouges et vert correspondent respectivement à une bifurcation fourche (PF pour l'anglais "PitchFork") et une bifurcation noeud-col, caractérisée par une tangente verticale.

La méthode se place dans le cadre théorique d'un système gouverné par une quantité résiduelle à minimiser, dépendante d'inconnues \mathbf{y} de taille N et d'un paramètre scalaire λ . Le vecteur des inconnues est alors noté $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \lambda)$. Le problème s'écrit :

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}, \quad \text{avec } \mathbf{R} : \begin{cases} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ \tilde{\mathbf{y}} & \rightarrow \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{y}}). \end{cases} \quad (3.67)$$

Le théorème des fonctions implicites, qui s'applique si \mathbf{R} est continûment différentiable suivant la variable ($\tilde{\mathbf{y}}$) et si la dérivée $\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{y}$ est inversible, certifie l'existence d'une fonction $\mathbf{g}(\lambda)$ qui vérifie :

$$\mathbf{g} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N & (3.68a) \\ \lambda \rightarrow \mathbf{g}(\lambda) = \mathbf{y}. & (3.68b) \end{cases}$$

Les variables de \mathbf{y} sont donc fonctions de λ , une représentation est proposée sur la figure 3.4, où des exemples de bifurcations sont représentées. Le principe de la **continuation** est de calculer les solutions \mathbf{y} pour un ensemble de paramètres λ . Pour cela, les données du problème sont exprimées comme des fonctions d'un paramètre scalaire de chemin a :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}(a) \\ f(\tilde{\mathbf{y}}, a) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{y}}(a)) = \mathbf{0} \\ f(\tilde{\mathbf{y}}, a) = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

où l'opérateur f est la définition de la longueur d'arc a . Parmi différents outils de paramétrisation [161], une méthode par pseudo-longueur d'arc est choisie pour l'implémentation de la MAN. Celle-ci

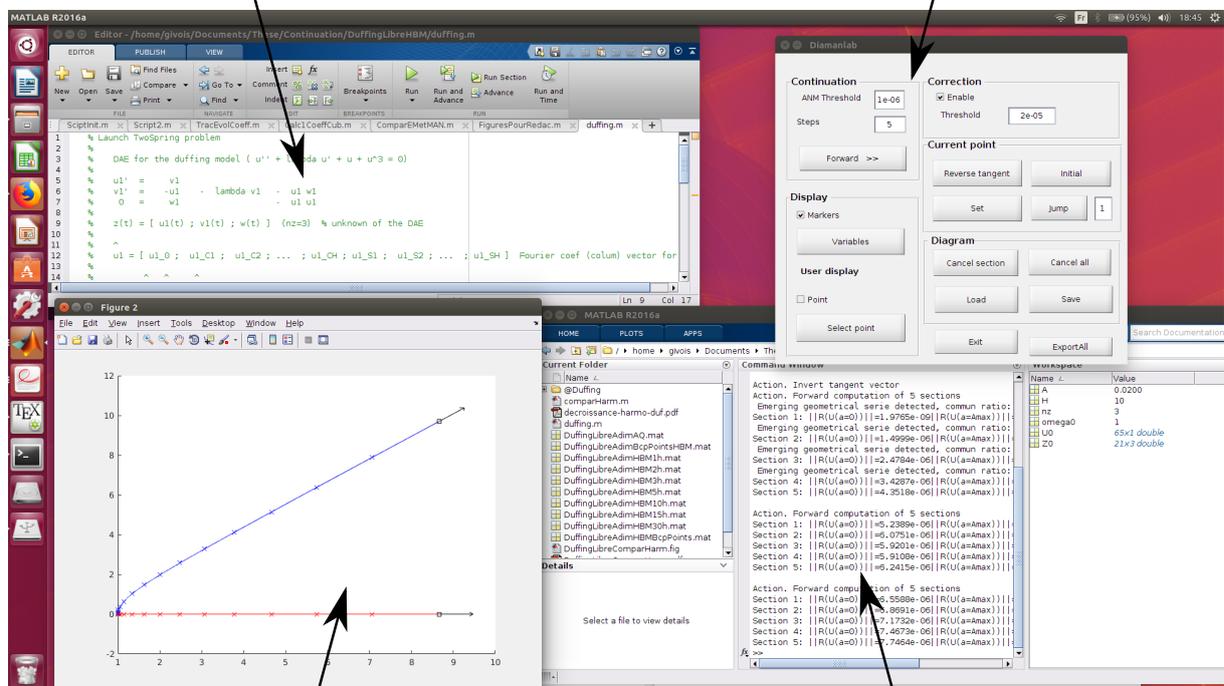
où a_{max} dépend de l'ordre du développement asymptotique. En général, une vingtaine de termes suffisent pour estimer correctement les branches de solutions [14]. Le paramètre ε est laissé au choix de l'utilisateur.

3.3.3 Présentation de l'interface Manlab

Code de lancement :

- définition de $\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{y}}), \tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{C}, \mathbf{L}, \mathbf{Q}$
- nombre d'harmoniques H

- Interface interactive
- calcul des branches
 - export des données
 - Saut (procédure de NR)
 - choix de ε



Visualisation des solutions

Informations sur les calculs

- Calcul des branches
- détection de bifurcations

FIGURE 3.5 – Représentation de l'interface de DiaManlab.

L'ensemble de ces opérations a été implémenté dans le code de calcul numérique Matlab, et rendu disponible, téléchargeable en libre accès à l'adresse url du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille [1]. Deux principales versions ont été utilisées dans le cadre de cette thèse : la version DiaManlab [30], et la version 4.0, qui comprend notamment la détection de bifurcation obtenue à l'aide des variations des multiplicateurs de Floquet [115]. Les développements des versions successives de Manlab ont fait l'objet de différentes thèses (cf. [14, 104, 74] ou [75] pour les calculs de solutions quasi-périodiques, dans une thèse en cours). L'interface est détaillée sur la figure 3.5, l'ensemble

comprend :

- les codes Matlab préalables au lancement du calcul, dans lesquels les principales données du problème sont définies ($\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{y}}), \tilde{\mathbf{y}}_0, \mathbf{C}, \mathbf{L}, \mathbf{Q}$, ainsi que le nombre d'harmoniques H pour un problème dynamique)
- une interface interactive, sur laquelle l'utilisateur peut lancer le calcul des branches de solutions, permet aussi de redéfinir le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_0$ sur une branche déjà calculée. Il est aussi possible de rechercher une solution voisine à une solution calculée dans le cas où une bifurcation est détectée
- un tracé de Matlab, sur lequel certains termes de $\tilde{\mathbf{y}}$ choisis par l'utilisateur sont tracés.
- l'espace de travail de Matlab, affichant des informations sur le calcul (divergence, ou identification d'une série géométrique qui caractérise une bifurcation, le lecteur peut se reporter à [38] pour plus de détails).

3.3.4 Application à l'oscillateur de Duffing

(a) Mise en équation quadratique

La méthode asymptotique numérique est ici appliquée à l'équation (3.52). Conformément à la démarche présentée dans la section 3.3.2, l'équation (3.52) est réécrite dans l'espace d'état, puis mise sous forme quadratique. Ceci implique de considérer alors trois variables (u, v, w) :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F \cos(\omega t) - \omega_0^2 x - 2\xi\omega_0 v - \Gamma x w \\ 0 = w - x^2, \end{cases} \quad (3.74)$$

où w désigne la variable auxiliaire. Les trois variables sont alors (x, v, w) . Le système ne présente que des non-linéarités quadratiques et est donc adapté au formalisme de la MAN. Dans le cas d'un oscillateur de Duffing libre, les solutions sont définies à une constante de phase près. Une procédure définie dans [105] permet de fixer la valeur de cette constante, avec l'imposition de la valeur de l'inconnue λ à 0. Cela est effectué avec l'ajout d'un terme $\lambda\dot{x}$ ajouté à l'équation de Duffing libre non amorti, qui s'écrit alors :

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \Gamma x^3 = 0. \quad (3.75)$$

Le système (3.74) s'écrit alors dans le cas libre :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega_0^2 x - \lambda v - \Gamma x w \\ 0 = w - x^2. \end{cases} \quad (3.76)$$

(b) Implémentation avec Diamanlab

Après développement en série de Fourier, le vecteur des inconnues s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{y}} = [x^0 \ x^{1c} \ x^{1s} \ x^{2c} \ \dots \ x^{Hc} \ x^{Hs} \ v^0 \ v^{1c} \ v^{1s} \ \dots \ v^{Hc} \ v^{Hs} \ w^0 \ \dots \ w^{Hs}]^T. \quad (3.77)$$

Cette organisation n'est à prendre en compte que lors du traitement des données, dans une étape ultérieure au calcul. L'interface Manlab propose un traitement des données qui permet d'éviter le développement en série de Fourier par l'utilisateur. Ce développement est en effet directement réalisé dans le code source. Le paramètre λ est également pris en compte implicitement dans le formalisme proposé. Pour l'utilisateur, les inconnues à considérer sont $\tilde{\mathbf{y}} = [x \ v \ w]^T$. Ainsi, la forme proposée par Diamanlab pour l'écriture d'un système dynamique s'écrit :

$$\mathbf{d}(\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{C}_0 + \lambda\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0(\tilde{\mathbf{y}}) + \lambda\mathbf{L}_1(\tilde{\mathbf{y}}) + \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}}), \quad (3.78)$$

où le terme \mathbf{d} est un opérateur linéaire en $\dot{\mathbf{y}}$ ajouté pour des systèmes dynamiques. Dans la version DiaManlab, les termes harmoniques peuvent être précisés dans un formalisme par tenseurs creux : le forçage est alors rangé dans matrices des termes constants \mathbf{C}_0 , et le formalisme des tenseurs creux permet de préciser que ce terme est en $\cos(\omega t)$ dans l'équilibrage harmonique. La constante sera noté F^{1c} . Les variables constantes, linéaires et quadratiques s'écrivent dans le cas forcé :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ F = F^{1c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} v \\ -\omega_0^2 x - 2\xi\omega_0 v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Gamma x w \\ -x^2 \end{pmatrix},$$

et dans le cas libre :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} v \\ -\omega_0^2 x \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Gamma x w \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, l'amplitude et la phase de la première composante sont obtenues par

$$x = \sqrt{(x^{1c})^2 + (x^{1s})^2}$$

$$\zeta = \arctan\left(\frac{x^{1s}}{x^{1c}}\right),$$

où x^{1c} et x^{1s} désignent respectivement les composantes de la série de Fourier à l'harmonique 1 en $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$.

(c) Comparaison des résultats avec ceux issus des échelles multiples

Les résultats issus du calcul numérique avec Manlab sont comparés avec les résultats issus de la méthode des échelles multiples sur la figure 3.6. Cette comparaison met en évidence le domaine de validité des résultats des échelles multiples. Pour le régime libre, ce domaine est mis en évidence par des croix. Les solutions analytiques et numériques sont superposées pour des amplitudes modérées, et des écarts sont ensuite constatés pour de plus grandes amplitudes. Une solution au second ordre écrite dans [176] est également présentée : celle-ci est superposée sur une plus grande gamme d'amplitudes, ce qui confirme que les écarts s'expliquent bien par le domaine de validité des échelles multiples. Le même constat est réalisé avec les résultats en régime forcé. Les solutions sont bien superposées pour de faibles forçages et des non-linéarités peu activées, et des écarts sont également observés lorsque l'amplitude du forçage augmente.

3.3.5 Application au problème statique de flexion d'une plaque

Un cas simple de calcul non-linéaire de structure est maintenant étudié. Le problème est celui de la déflexion d'une plaque circulaire encadrée sur ses extrémités, en réponse à une force ponctuelle appliquée en son centre tel que le présente la figure 3.7 (gauche). Trois méthodes de calculs présentées ci-après ont été mises en œuvre pour résoudre ce problème axisymétrique.

Calcul fondé sur un développement asymptotique. Un calcul analytique est proposé dans [34, pp. 117-119], dont la démarche repose sur l'estimation des coefficients d'un développement en série de Taylor du déplacement. La symétrie du problème permet de réduire les expressions. Celles-ci ne seront cependant pas présentées ici dans un souci de concision. Ce calcul s'appuie sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love et les non-linéarités de von Kármán, qui correspondent au modèle présenté dans la section 2.1.3. L'estimation de ces coefficients a été réalisée avec un calcul symbolique avec Matlab : une quarantaine d'heures étaient nécessaires pour obtenir les dix premiers coefficients de la série.

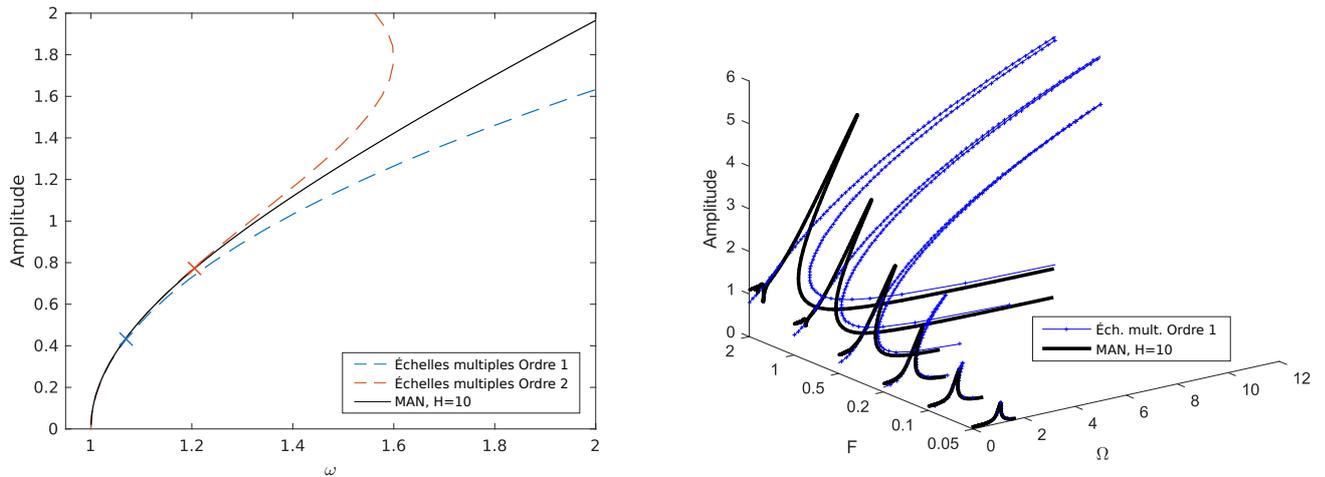


FIGURE 3.6 – Amplitudes des réponses de l'oscillateur de Duffing : comparaison des résultats obtenus par la méthode des échelles multiples et la méthode asymptotique numérique, pour les régimes libre (gauche) et forcé (droite). Pour ces calculs les paramètres utilisés sont $\omega_0 = 1$, $\Gamma = 1$ et $\xi = 0.05$ pour les réponses forcées. 10 harmoniques ont été prises en compte dans les calculs avec la méthode asymptotique numérique.

Calcul éléments finis avec prédiction-correction. Ce calcul est réalisé avec la méthode des éléments finis, à partir d'un modèle complet établi avec le code commercial *Code_Aster* [4]. Des éléments de coques à quatre nœuds fondés sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love (DKQ) ont été utilisés. Le maillage utilisé comprend 4050 éléments et est présenté sur la figure 3.7. Les non-linéarités géométriques sont activées par l'option de calcul GROT_GDEP de l'opérateur STAT_NON_LINE. La procédure comprend une étape de prédiction-correction avec la procédure de Newton-Raphson. Le calcul est effectué de façon incrémentale : cela signifie que l'amplitude du forçage augmente continuellement, et les déplacements sont estimés à partir de l'état à l'incrément qui précède. L'algorithme de Newton ne converge plus lorsque $w/h > 3$ environ.

Calcul modal. Un modèle réduit fondé sur une projection modale, présenté dans la section 2.3.1, est également mis en œuvre. Le système d'équation (2.158) sans les termes dynamiques est implémenté dans Manlab, et seuls les modes axisymétriques sont pris en compte dans le calcul. L'introduction de variables auxiliaires n'est pas nécessaire, car le système est déjà mis sous forme quadratique. Le calcul est effectué avec différents nombres de modes de flexion et de membrane, afin de mettre en évidence la convergence de la solution avec le nombre de modes retenus dans la base. Une dizaine d'heures s'est révélée nécessaire pour effectuer le calcul le plus coûteux (associé à une base comprenant 60 modes de flexion et 150 modes de membrane).

Une solution linéaire, dont l'expression est issue de [186], apparaît également dans les résultats.

Les résultats présentés sur la figure 3.7 montrent dans un premier temps que le domaine de validité de la solution obtenue avec la méthode analytique est limité. À partir d'une amplitude atteignant le double de l'épaisseur (marqué par une croix), les résultats sous-estiment le déplacement. Ce constat est similaire à celui constaté avec les solutions d'un oscillateur de Duffing : les méthodes asymptotiques, bien qu'intéressantes pour la compréhension des problèmes, ne restent valables que pour de faibles non-linéarités.

Dans un second temps, une convergence avec le nombre de modes de flexion et de membrane est bien constatée dans le cas du modèle modal. La superposition des différentes méthodes montre que les déplacements calculés par l'approche modale tend à se rapprocher des solutions estimées avec d'autres méthodes lorsque le nombre de modes retenus dans la base augmente. Par rapport aux résultats du

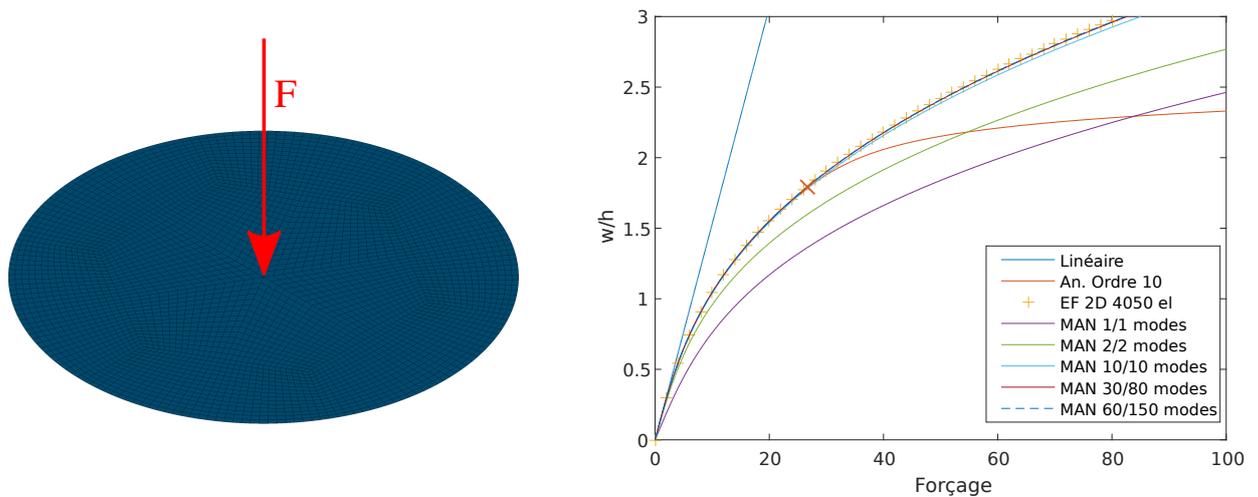


FIGURE 3.7 – Schématisation du problème de la plaque circulaire encastrée soumise à une force ponctuelle, et comparaison des résultats obtenus avec différentes méthodes de calculs.

modèle éléments finis et du modèle analytique sur sa plage de validité, 10 modes de flexion et 10 modes de membrane suffisent pour estimer correctement la solution sur le même intervalle que celui permis par le calcul éléments finis.

3.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, un état de l'art des outils non-intrusifs de réduction de modèles ainsi que des méthodes de calcul de solutions de systèmes non-linéaires a été effectué.

Dans le cadre de la réduction de modèles, la principale difficulté réside dans l'estimation des champs de déplacement de membrane complémentaires à la base des modes étudiés. Ces champs de déplacement sont nécessaires pour prendre en compte le couplage membrane-flexion associé aux non-linéarités géométriques. Ces méthodes peuvent nécessiter des traitements numériques coûteux, et les différentes étapes de calculs à effectuer ne sont pas proposées par les codes éléments finis existants. En particulier, la méthode STEP nécessite de résoudre des problèmes avec des champs de déplacements imposés. Ce calcul est peu réalisé dans des problèmes courants des sciences de l'ingénieur. Pour cette raison, ces calculs ne font pas l'objet d'une procédure spécifiquement dédiée dans les codes éléments finis existants. Dans le cadre de ces méthodes, la validation des calculs numériques par des résultats issus de modèles analytiques n'est que très occasionnellement entreprise. Parmi l'ensemble des approches numériques présentées, la méthode STEP présente l'avantage de s'appuyer sur les résultats d'une évaluation d'un calcul statique non-linéaire. Les calculs réalisés ne nécessitent pas de procédure de prédiction-corréction. Un calcul simple de quelques coefficients non-linéaire d'un modèle éléments finis d'une poutre montre que la méthode STEP présente une meilleure précision, fiabilité et robustesse que la méthode des forces imposées.

Les dérivées modales diffèrent des précédentes méthodes, par son approche et sa formulation du problème. Une procédure de validation par rapport à un modèle analytique paraît complexe à mettre en œuvre. La mise en équation analytique de cette méthode n'a encore fait l'objet d'aucune proposition publiée. De plus, l'établissement de solutions dans le domaine fréquentiel avec cet outil n'a pour l'instant été réalisée que dans un nombre très restreint d'études.

Des méthodes de calculs de solutions périodiques de systèmes non-linéaires ont également été exposées. Des avantages de la méthode asymptotique numérique (MAN) pour résoudre les systèmes

issus de modèles réduits ont été mis en évidence. La continuation de solutions périodiques permet d'éviter une procédure de prédiction-correction, souvent implémentée avec un algorithme de Newton-Raphson dans les codes éléments finis existants. L'équilibrage harmonique, utilisé pour les systèmes dynamiques, permet d'obtenir les solutions directement dans le domaine fréquentiel. De plus, l'implémentation dans une interface interactive constitue un autre argument justifiant son emploi dans le cadre de ces travaux de thèse. La MAN est également une méthode originale par rapport aux autres outils numériques de calcul des solutions périodiques de systèmes réduits. En effet, la combinaison de la méthode de tir et d'une procédure de continuation par pseudo-longueur d'arc proposée dans [135] est actuellement une méthode parmi les plus couramment employées lorsqu'un code éléments finis commercial prend part à la démarche numérique [114]. Cette technique nécessite cependant de multiples intégrations temporelles avec le code éléments finis commercial. Enfin, le cadre interactif de la MAN facilite l'étude de phénomènes physiques pertinents dans le cadre de la dynamique non-linéaire, tels que les bifurcations, les résonances internes ou l'influence du nombre de modes sur les résultats. La convergence modale établie pour le problème statique de la plaque circulaire a permis d'illustrer ces avantages.

Enfin, les méthodes non-intrusives n'ont pas encore été appliquées à des problèmes piézoélectriques, ce qui constitue une originalité de l'étude rapportée dans ce manuscrit.

3.5 Démarche numérique adoptée

La démarche entreprise dans les deux prochains chapitres comprend deux principales étapes de calcul numérique :

- l'implémentation de la méthode STEP pour la réduction de modèle avec un code éléments finis existant
- le calcul des solutions périodiques des systèmes réduits avec la méthode asymptotique numérique.

Les différentes procédures et les codes ou interfaces numériques utilisés pour l'ensemble de ce travail sont schématisés sur la figure 3.8.

La méthode STEP a été mise en oeuvre avec deux codes éléments finis existants : *Code_Aster* [4] a été utilisé dans un premier temps pour des structures élastiques. Ce code propose des opérateurs de calcul bien documentés, notamment dans le cas de la commande `STAT_NON_LINE` qui lance l'opération de calcul statique non-linéaire. Le code *Abaqus* [5] a été utilisé dans un second temps avec l'extension de l'étude à des structures piézoélectriques. Afin de contrôler finement les différentes étapes de calcul et valider les données par rapport à des quantités issues d'un calcul analytique, de nombreux échanges entre le code éléments finis et l'interface de calcul numérique *Matlab* ont été effectués lors des premières implémentations de la méthode STEP. En conséquence, seuls le maillage et l'opération de calcul statique non-linéaire ont finalement été réalisés par le code éléments finis pour l'implémentation de la méthode STEP avec *Code_Aster*. En particulier, le calcul des modes a été réalisé avec la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres (défini par l'équation (2.167)) sur l'interface *Matlab*. Cette tâche était précédée de l'extraction des matrices de masse et de raideur depuis *Code_Aster* à l'aide de routines écrites avec le langage de programmation *Python*. Ce choix a été motivé par la nécessité de vérifier et donc de visualiser les données des différents calculs, parmi lesquelles les modes occupent un rôle central. Après validation de la méthode STEP, et notamment lors de son implémentation avec *Abaqus*, le calcul des modes a été assigné au code éléments finis. Pour cette implémentation, l'intégralité des codes de calculs en dehors de ceux réalisés par le code éléments finis ont été rédigés avec le langage *Python*.

Une fois les coefficients des modèles réduits obtenus, les simulations dynamiques sont réalisées avec la méthode asymptotique numérique et l'interface de calcul *Manlab*. Cet outil est intégralement im-

plémenté dans le code de calcul *Matlab*. Les réponses en fréquences sont finalement tracées à partir des coefficients des séries de Fourier, par reconstitution temporelle des solutions comme le décrit l'équation (3.45).

Une implémentation permettant le calcul automatique de l'intégralité des tâches numériques, depuis la définition des données géométriques jusqu'au calcul des solutions dynamiques, n'a pas été effectuée au cours de cette thèse. La raison est liée aux nombreux problèmes rencontrés lors de la validation des coefficients par rapport à des valeurs de référence ici issues de modèles analytiques. Dans la démarche mise en œuvre, la compréhension de l'ensemble des méthodes implémentées et de leurs résultats a été privilégiée à l'automatisation de l'ensemble des calculs.

Réduction de modèles

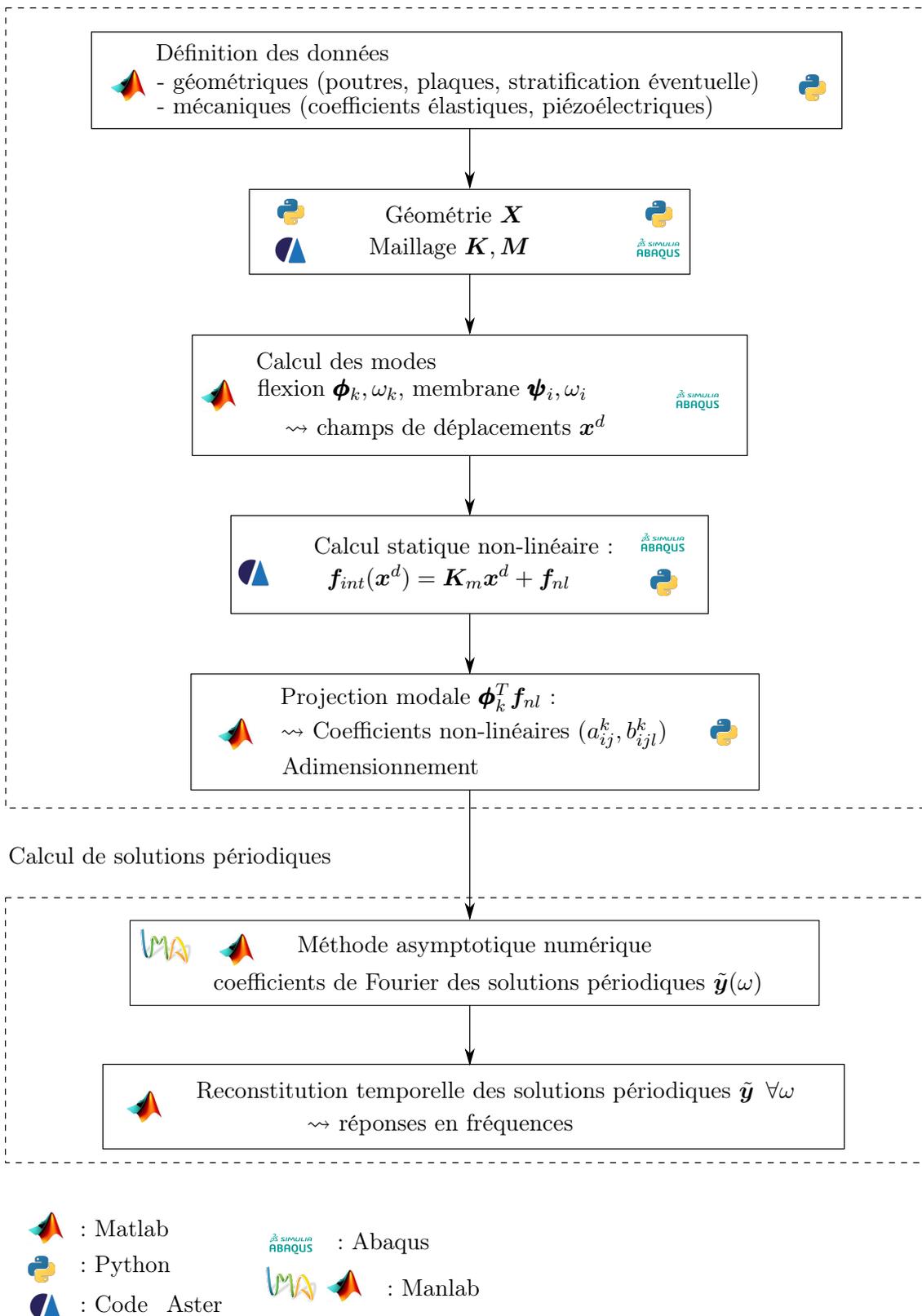


FIGURE 3.8 – Schématisation des principales étapes de calculs numériques, avec les interfaces de programmation correspondantes

Deuxième partie

Développements de la méthode STEP

Chapitre 4

Validation et résolution de modèles réduits : application au calcul de réponses dynamiques de structures élastiques planes

Contents

4.1	Présentation de l'article	86
4.2	Sur le calcul des réponses en fréquence des structures planes avec non-linéarités géométriques par l'usage de modèles éléments finis réduits . . .	87
4.3	Bilan	123

Ce chapitre présente des résultats sous la forme d'un article publié dans la revue *Nonlinear Dynamics*. La méthode est appliquée à des structures élastiques minces et planes, un premier objectif est d'attester la validité de la méthode STEP à l'échelle des coefficients, par rapport à des résultats issus de modèles analytiques. Dans le cas de structures planes, les calculs analytiques permettent de justifier que les modèles réduits par la méthode STEP ne font intervenir que des termes non-linéaires cubiques. Ce résultat est démontré comme étant valable *pour toute structure plane*, et permet ainsi une simplification des étapes de calcul de la méthode STEP.

Par ailleurs, des calculs de réponses en fréquence sont réalisés à l'aide de la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode d'équilibrage harmonique. Dans un premier temps les réponses forcées amorties des premiers modes sont estimées et mises en regard autour de leurs réponses libres conservatives : comme attendu, les réponses forcées s'articulent autour des libres, indépendamment de l'amplitude du forçage. L'article se concentre sur le calcul des réponses libres, car celles-ci suffisent pour caractériser le comportement non-linéaire d'un système dynamique. Les réponses libres conservatives sont aussi appelés les *modes non-linéaires* [108]. Ces calculs permettent de prédire les phénomènes de *résonance interne*, qui sont mis en évidence par l'augmentation d'une amplitude des composantes harmoniques de modes de plus hautes fréquences. Des représentations des réponses sous une forme énergétique, connues sous le nom de Frequency-Energy Plot (FEP), sont employées pour caractériser le comportement en basses et moyennes fréquences des structures étudiées. Lors de l'activation d'une résonance interne, ces courbes mettent en évidence le processus d'échange d'énergie.

L'ensemble de la démarche est appliqué à deux cas-tests, une poutre et une plaque encastree, pour lesquels des modèles analytiques existent et pour lesquels les coefficients constituent des résultats de référence. Dans une dernière section de l'article, l'ensemble de la démarche est appliqué à une structure plane, dont la géométrie ne permet pas de proposer un modèle analytique simple. Les calculs de réponse en fréquence se concentrent sur deux modes dont les pulsations propres sont proches. Les résultats permettent de prédire l'apparition d'une résonance interne 1:1.

Une présentation propose préalablement de guider la lecture de l'article, et un bilan résume les résultats en conclusion du chapitre afin de contextualiser les travaux dans l'ensemble de la thèse.

4.1 Présentation de l'article

Les travaux réalisés pour cet article se placent dans le cadre de la réduction de modèles éléments finis par des approches non-intrusives pour étudier les réponses dynamiques de structures avec des non-linéarités géométriques.

L'introduction effectue un état de l'art élargi des modèles modaux et des méthodes non-intrusives. Un certain nombre d'applications de ces dernières méthodes sont exposées. Comme dans l'ensemble du présent manuscrit, les modèles analytiques sont mis en regard des méthodes de réduction numérique.

La section 2 est consacrée au traitement des modèles analytiques. La section 2.1 de l'article présente en détail la projection modale du modèle de poutre présenté dans la section 2.1.2 de la thèse, avec la formulation en (u, w) . Le modèle réduit (équations (7)) est identique à celui exprimé par les équations (2.162). La projection aboutit à un modèle modal, dont les équations des mouvements transverse et axial font apparaître trois familles de coefficients :

- des coefficients quadratiques, couplant deux modes transverses dans l'équation du mouvement axial
- des coefficients quadratiques, couplant un mode transverse et un mode axial dans l'équation transverse
- des coefficients cubiques couplant trois modes transverses dans l'équation transverse.

Les valeurs de ces coefficients pour la poutre bi-encastée sont données dans la Table (9) en Annexe A. Dans un second temps, une *condensation* des termes quadratiques axiaux dans les termes quadratiques du mouvement transverse est effectué ; ceci est rendu possible par une faible inertie de membrane. En conséquence, le comportement non-linéaire de la poutre est gouverné par des termes cubiques uniquement, comme le montrent les équations (9) et (10).

La section 2.2 fait référence à une formulation (\mathbf{u}, w) du problème des vibrations de plaque avec non-linéarités de von Kármán, principalement gouverné par les équations (54) dans l'Annexe B afin de mettre en évidence les similarités des équations des poutres avec celles des plaques. En particulier, une projection modale aboutit aux mêmes termes non-linéaires que le modèle de poutre, avec trois familles distinctes. Toute structure plane étant une plaque, l'article étend sa portée à toutes les structures planes. Une condensation des termes quadratiques est également effectuée, permettant d'écrire le problème avec des non-linéarités cubiques uniquement. Les résultats de référence des coefficients cubiques condensés sont présentés dans le Tableau 10 de l'Annexe D. Ces résultats ont été obtenus avec la formulation (w, F) de la section 2.1.3, car les modes planaires d'une formulation en déplacement n'ont pas été calculés ici. Les coefficients analytiques de la formulation (w, F) ainsi que les coefficients condensés Γ de la plaque circulaire encastée ont pu être validés à l'aide des codes de calcul en libre accès *VK-Gong* [3].

La section 3 détaille l'application de la méthode STEP, et les conséquences des remarques de la section 2. En particulier, réduire l'estimation des coefficients non-linéaires d'une structure plane aux trois familles présentées plus haut et dans la Table 1 diminue le nombre de calculs numériques à effectuer. La figure 1 met en évidence la réduction de coefficients à estimer. Finalement, l'équation (28) présente l'équation non-linéaire de toute structure plane après projection modale, qui est identique à celle des modèles analytiques de poutre et plaque.

La méthode STEP est appliquée à deux cas-tests dans la section 4 : il s'agit d'une poutre et d'une plaque élastiques encastées. Les caractéristiques des deux structures et leurs modes sont présentées dans les Tables 2 à 4. Un ensemble de modes transverses et planaires sont gardés dans la base. Ces derniers sont volontairement nombreux (750 modes planaires pour la plaque) afin que les déplacements de membrane soient suffisamment bien représentés avec les modes choisis. Pour la poutre,

les coefficients issus de la méthode STEP peuvent être comparés à ceux du modèle analytique avec la formulation des déplacements axiaux. La sensibilité aux paramètres numériques peut alors être étudiée : en particulier, la figure 3 montre l'influence de l'amplitude du déplacement imposé sur la valeur du coefficient estimé. Les limites des hypothèses de von Kármán sont mises en évidence pour $w/h > 10$. L'effet de la condensation sur les coefficients cubiques est présenté pour les deux structures sur les figures 4 et 5, permettant d'identifier les couplages entre modes transverses et modes planaires. Cet effet se traduit par une *réduction de la valeur des coefficients cubiques*. Comme les coefficients sont positifs, les effets de membrane sont assouplissants.

Les simulations dynamiques sont effectuées avec la MAN : pour cela une procédure automatique, permettant de simuler n'importe quel système d'oscillateur avec des termes non-linéaires statiques quadratiques et cubiques, a été implémenté dans Diamanlab. Les équations (33) montrent l'exemple de termes uniquement cubiques. Les calculs de solutions périodiques sont effectués avec plusieurs bases de modes possibles. La figure 7 montre l'articulation des réponses forcées autour du mode non-linéaire. Les modes non-linéaires sont présentés ensuite sous la forme de diagrammes Fréquences-Énergies (FEPs de l'anglais *Frequency-Energy Plot*, sur les figures 8 et 9 pour la poutre et la plaque) ; le calcul des énergies est réalisé à partir de l'expression d'un système Hamiltonien qui entraîne une symétrie des coefficients. Les détails de ces calculs est exposé en Annexe F. Sur les FEPs, toutes les résonances montrent des comportements raidissants ; des bifurcations et résonances internes sont également visibles sur les courbes. Ces phénomènes sont détaillés sur les figures 10 et 11, d'une part en terme de correspondance fréquentielle à l'origine d'un échange d'énergie comme le montrent les détails des FEPs, et d'autre part en termes d'activation des harmoniques et modes supérieurs. L'exemple d'une résonance 1:1 entre deux modes asymétriques de la plaque circulaire, à l'origine de l'apparition d'ondes tournantes, est présenté sur la figure 12. Cette résonance prend naissance après une bifurcation fourche.

La convergence des résultats avec le nombre d'harmoniques de modes est ensuite discutée. En termes de nombre d'harmoniques, la figure 13 montre qu'un nombre minimum de 2, voire 3 harmoniques est nécessaire pour l'ensemble des simulations. Une seule composante devrait être suffisante, mais la mise sous forme quadratique de la MAN génère probablement des échanges d'énergie avec des termes d'ordre 2 lors des simulations. En termes de nombre de modes, la figure 14 montre que la réduction à un mode donne de bons résultats sur une gamme d'amplitude de déplacements modérés (à l'exception des résonances internes interagissant avec le mode initial). Au-delà de cet intervalle d'amplitude, la prise en compte des modes voisins dans la base est nécessaire.

Une structure plane originale est étudiée dans la section 6 : ses caractéristiques géométriques, mécaniques, son maillage et ses modes sont présentés sur la figure 15 et dans les Tableaux 7 et 8. En particulier, sa géométrie se caractérise par la présence de deux poutres symétriques, placées aux alentours du centre de la plaque. Deux modes sollicitant ces poutres en flexion, en phase et en opposition de phase, sont situées à des fréquences proches : il s'agit des modes 7 et 8 dans le Tableau 8. Les calculs des coefficients, ainsi que leur condensation, sont effectués de la même manière que la poutre et la plaque. Enfin, une procédure de tri des coefficients est effectuée sur la base de tests effectués sur la poutre. Les résultats de cette opération sont présentés sur la figure 18, et montrent une réduction sensible du nombre de coefficients pris en compte dans la simulation. Un critère défini par l'équation (43) entraîne une sélection des coefficients considérés comme significatifs. Comme pour les plaques, le calcul des modes non-linéaires montre la présence d'une bifurcation fourche et l'émergence d'une résonance interne 1:1 lorsque l'un des deux modes est activé.

4.2 Sur le calcul des réponses en fréquence des structures planes avec non-linéarités géométriques par l'usage de modèles éléments finis réduits



On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models

Arthur Givois · Aurélien Grolet ·
Olivier Thomas · Jean-François Deü

Received: 31 October 2018 / Accepted: 17 May 2019
© Springer Nature B.V. 2019

Abstract This paper presents a general methodology to compute nonlinear frequency responses of flat structures subjected to large amplitude transverse vibrations, within a finite element context. A reduced-order model (ROM) is obtained by an expansion onto the eigenmode basis of the associated linearized problem, including transverse and in-plane modes. The coefficients of the nonlinear terms of the ROM are computed thanks to a non-intrusive method, using any existing nonlinear finite element code. The direct comparison to analytical models of beams and plates proves that a lot of coefficients can be neglected and that the in-plane motion can be condensed to the transverse motion, thus giving generic rules to simplify the ROM. Then, a continuation technique, based on an asymptotic numerical method and the harmonic balance method, is used to compute the frequency response in free (nonlinear mode computation) or harmonically forced vibrations. The whole procedure is tested on a straight beam, a clamped circular plate and a free perforated plate for which some nonlinear modes are computed, including internal resonances. The convergence with harmonic numbers and

oscillators is investigated. It shows that keeping a few of them is sufficient in a range of displacements corresponding to the order of the structure's thickness, with a complexity of the simulated nonlinear phenomena that increase very fast with the number of harmonics and oscillators.

Keywords Geometric nonlinearities · Non-intrusive stiffness evaluation procedure · Reduced-order finite element model · Continuation method

1 Introduction

Recent advances in non-intrusive reduced-order finite element modeling of geometrically nonlinear structures offer new perspectives for nonlinear prediction in structural computation. These geometrical nonlinearities are due to large transverse displacements of thin structures which induce a non-negligible stretching in the plane of the structure known as membrane-bending coupling phenomena. They are involved in a wide range of applications, among others: micro-electromechanical systems (MEMS) developments [1–3], energy harvesting [4], vibroacoustics of music instruments [5,6], dynamics of blades and rotors [7], and aerospace engineering [8]. In a finite element context, since geometrical nonlinearities couple all the displacement degrees of freedom, the computation of models with a large number of variables is found to be a tough challenge, for which strategies for model

A. Givois (✉) · A. Grolet · O. Thomas
Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Physiques et Numériques (LISPEN EA 7515), Arts et Métiers ParisTech, 8 boulevard Louis XIV, 59046 Lille, France
e-mail: arthur.givois@ensam.eu

A. Givois · J.-F. Deü
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC EA 3196), Conservatoire National des Arts et Métiers, 2 rue Conté, 75003 Paris, France

reduction have been the focus of sustained efforts since the 1980s [9,10]. In vibration analyses, the expansion of displacements on a reduced basis of vibration eigenmodes is an efficient and well-known approach to study structural dynamics at low and middle frequencies. This article addresses the use of this kind of modal reduced-order models (ROMs) to compute the frequency response of geometrically nonlinear thin structures.

Modal ROMs are the most used technique to solve analytical models of thin structures like beams, plates and shells. Nonlinear models based on the Von Kármán assumptions [11] are well known and able to capture the membrane–bending coupling. The interested reader can refer to [12] for an overview of the most popular cases, [13,14] for plate models, [15] for beam models and [16] that shows the similarities between beam and plate models. Since the coefficients of the ROM depend on the structure’s geometries as well as its boundary conditions, a huge literature is available for a large set of particular cases. Among others, the reader can refer to [17] for beams with doubly hinged ends, to [7] for an assembly of clamped/free boundary conditions with cyclic symmetry, to [18] for clamped circular plates, to [19] for free circular plates and to [20] for rectangular plates with several boundary conditions. In those analytical models, the in-plane inertia is usually neglected, which enables to use a mixed formulation, in which a transverse motion (described with a displacement field) is coupled to the in-plane motion described by a force unknown: an Airy stress function in the case of plates [14] and the axial force for beams [15].

To address complex geometries out of the scope of analytical models, modal ROMs can be obtained from numerical models. It can be first achieved by explicit computations, based on finite element discretization [21,22]. *p*-type finite elements (high-order elements of large size) have also been applied to geometrically nonlinear vibrations of beams and plates in a family of papers [23,24]. However, with the increasing spread of commercial finite element codes, non-intrusive methods—i.e., using the finite element code as a “black box” without modifying it—have been proposed. Two main families of methods have been introduced, both relying on static finite element computations, since the geometrical nonlinearities are concentrated in the stiffness part of the model (the internal force vector). On the one hand, one can impose static loads as linear combination of eigenmodes [25], and

on the other hand, static displacement fields, also as linear combination of eigenmodes [26], can be prescribed. These methods—and particularly the second one called “STiffness Evaluation Procedure” (STEP) on which this paper focuses—have retained a large attention in the past two decades (see, e.g., the review [27]), motivated by the perspective to compute nonlinear responses of structures with arbitrary geometries. More recently, a variant of the STEP has been proposed in [28], which enables to reduce the number of static computations by using the tangent stiffness matrix. In the past few years, those reduced-order models have been validated by combining computational and experimental investigations [29,30]. They have been applied to problems of increasing difficulty, such as fatigue life estimation of thin gauges [31], calibration of a perforated plate [32] and dynamical simulations of composite plates [27,33], of a nine-bay panel structure [28] or of an electromechanical nanobeam [34].

In the above-cited methods, one major issue lies in the selection of the linear modal basis to perform nonlinear structural calculations. In-plane modes must be included to account for bending–membrane coupling, whereas only transverse modes constitute most of the times the modal basis in linear dynamic analysis since in-plane modes are located at higher frequencies than transverse ones. To capture these effects, several methods have been proposed. The most natural one consists in keeping in the ROM basis several in-plane modes in addition to transverse one. Since numerous in-plane modes are necessary, some authors propose to reduce the ROM size by condensing the in-plane modes into the transverse oscillators by neglecting the membrane inertia [27,35,36]. In the case of flat/transversely symmetric structures, it is also possible to reduce the number of computed coefficients of the ROM by observing that a lot of them are zero. This sparsity property has been mentioned in [27,37], but no precise proof is available, to the knowledge of the authors. It is also possible to select the most relevant in-plane modes by using proper/smooth orthogonal decomposition (P/SOD) [38,39]. These strategies are efficient but rely on the drawback of requiring the preliminary time integration of the full-scale model. Some authors propose strategies to naturally compute relevant in-plane displacement field with prescribed modal loads, with so-called implicit condensation with expansion approach [35] or dual modes strategies [33]. These methods have the drawback that the ROM coef-

ficients are sensitive to the size of the transverse modal basis and the amplitudes of the prescribed loads [40]. A last family of method is based on the addition of a modal derivative subspace to the transverse linear basis [41]. It enables to capture efficiently the relevant in-plane displacement associated with a transverse linear mode [42]. Since the size of the subspace grows quadratically with the number of investigated eigenmodes, the concept of quadratic manifold has been proposed to minimize the number of unknowns [43]. The computation of the modal derivatives with a commercial finite elements code is based on a finite difference scheme that requires the extraction of the tangent stiffness matrix, which renders the strategy more intrusive [44]. An asymptotic expansion of a full finite element discretization proposed in [45] can lead to build a different reduction basis than the modal one which gives satisfactory results [46].

When the reduced-order model has been built, the dynamical nonlinear responses of the structures at low and middle frequencies can be investigated. Most of the early studies about modal ROMs investigate transient responses and rely on direct time integration [27, 33, 35, 39]. Conversely, it is possible to investigate the frequency response by computing the nonlinear modes of the structure, because they constitute the skeleton of the dynamics, since the harmonically forced responses lies around [47]. The so-called nonlinear normal modes—(NNMs) can be represented as frequency energy plots (or amplitude–frequency plots, also called “backbone curves” [12]) and computed by various analytical [48] or numerical [49] methods. Among these last, a method combining shooting and pseudo-arclength continuation proposed in [50] enables to compute NNMs from reduced-order finite element models: with a homemade finite element beam formulation [42, 51] or some finite element commercial codes [52], the energy is computed by injecting the result of the ROM in the full FE model.

Among the huge literature described above, the present article addresses the computation of the nonlinear frequency response of thin structures using a continuation method and finite element modal reduced-order models, obtained by the STEP. Within this subject, we focus on two main points: (i) a precise validation of the STEP using reference analytical models of flat structures (beams and plates) and (ii) the modal convergence of the ROMs, especially when internal resonance is involved. This study is restricted to flat structures since

simple analytical models are available and in order to provide reference benchmarks that can be used to test algorithms, potentially adapted to more complex structures such as shells or thin structures with stiffeners. Moreover, the flat geometry gives a natural separation of in-plane and transverse modes in terms of the ROM convergence, which is especially addressed. Since in-plane modes are condensed into the transverse motion, we first analyze the convergence of the ROM in terms of in-plane modes at the coefficient level and its convergence in terms of transverse modes is studied in a second step, with frequency response computations. For the STEP validation, several topics are proposed: (a) a systematic validation of the ROM coefficients value with reference analytical models; (b) the proof of the sparsity structure of the coefficients matrices of the ROM and its consequences on the computation time saving; (c) the proof of the robustness of the STEP in terms of static prescribed displacement amplitude; (d) an heuristic rule to filter significant ROM coefficients to reduce the ROM size. We show that the STEP is perfectly validated on two reference cases (a clamped–clamped beam and a clamped circular plate) for which analytical models are known. Finally, the method is applied to a perforated plate, for which no analytical solutions are known. Convergence results are obtained, showing that very reduced ROM, composed of a few transverse oscillators coupled by cubic terms only, is efficient to compute nonlinear modes even in the case of internal resonances and vibration localization.

2 Reference analytical models of flat structures

The purpose of this section is to recall classical analytical models for flat structures, firstly to serve as a reference for the validations of the STEP proposed in the upcoming sections and secondly to systematically prove that a lot of coefficients of the modal reduced-order models are null. Here, only models relying on the von Kármán theory have been selected since they are valid for most of practical cases of 2D (plate) structures and 1D (beam) structures with immovable ends in the axial direction. In those cases, large rotation “geometrically exact” models give the same results in the same range of amplitude of vibration and are thus not necessary. Von Kármán models can be viewed as an intermediate and consistent model between linear models and full large rotation models [53, 54]. On the contrary,

large rotation models have to be considered in the other cases (beams with ends free to move such as cantilever beams, see [55,56]), out of the scope of the article.

2.1 Straight beam model

In this section, we consider a non-prestressed beam of length L of uniform rectangular cross section of area S and second moment of area I , made in an homogeneous and isotropic material of Young’s modulus E and density ρ . Only the bending motion is under concern, and $w(x, t)$ and $u(x, t)$ denote, respectively, the transverse and axial displacements at time t and abscissa x .

Following the von Kármán assumptions and with a linear elastic constitutive law, the equations of motions can be written:

$$\rho S \ddot{w} + EI w_{,xxxx} - ES \left[u_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^3 \right]_{,x} = p(x, t), \tag{1a}$$

$$\rho S \ddot{u} - ES (u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx}) = n(x, t). \tag{1b}$$

where $\circ_{,x} = \partial \circ / \partial x$. All details about this formulation can be found in “Appendix A”.

To obtain a generic formulation as well as to scale the different terms in the equations, the following dimensionless parameters are introduced:

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{L}{h^2} u, \tag{2}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} t, \quad \bar{p} = \frac{L^4}{EI h} p, \tag{2}$$

$$\bar{n} = \frac{L^3}{ES h^2} n, \quad \varepsilon = \frac{S h^2}{I}, \quad \mu = \frac{I}{S L^2}. \tag{3}$$

where the scaling of the transverse displacement has been chosen as the thickness h of the beam. Then, Eqs. (1a, b) are rewritten as:

$$\ddot{\bar{w}} + w_{,xxxx} - \varepsilon \left[u_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^3 \right]_{,x} = p(x, t), \tag{4a}$$

$$\mu \ddot{\bar{u}} - (u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx}) = n(x, t), \tag{4b}$$

where the overbars have been dropped for simplification.

The bending and axial displacements are expanded onto a linear basis of, respectively, N_w transverse

modes Φ_k and N_u axial modes Ψ_p :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(x) q_k(t) \quad \text{and}$$

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{N_u} \Psi_p(x) \eta_p(t) \tag{5}$$

with time dependencies governed by unknown modal coordinates q_k and η_p . The modes are chosen to satisfy the following two eigenproblems associated with the linear parts of Eqs. (4a, b):

$$\Phi_{k,xxxx} - \omega_k^2 \Phi_k = 0 \tag{6a}$$

$$\Psi_{p,xx} - \gamma_p^2 \Psi_p = 0 \tag{6b}$$

where ω_k and γ_p are the transverse and axial dimensionless eigenfrequencies. Finally, by multiplying (4a, b), respectively, by Φ_k and Ψ_p , integrating on the length of the beam and using the orthogonality properties, the following ROM is obtained, for all $k = 1, \dots, N_w$, $p = 1, \dots, N_u$:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{N_w} C_{pi}^k \eta_p q_i$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} D_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k \tag{7a}$$

$$\mu \ddot{\eta}_p + \gamma_p^2 \eta_p - \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j = E_p \tag{7b}$$

where the forcing terms $Q_k(t)$, $E_p(t)$ and the coefficients of the nonlinear terms C_{pi}^k , D_{ijl}^k and G_{ij}^p are defined in “Appendix A”. Notice that the value of those coefficients depends on the mode normalization.

The above dimensionless form of the equations shows that because of the slender geometry of the beam ($h/L \ll 1$), the axial displacement u is one order of magnitude smaller than the transverse displacement w , which leads to neglect the axial inertia because $\mu \ll 1$. In this case, if no axial external forcing is prescribed ($n(x, t) = 0 \Rightarrow E_p = 0$), Eq. (7b) leads to write the axial modal coordinates modes as:

$$\eta_p = \frac{1}{\gamma_p^2} \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j, \tag{8}$$

and to condense them in the transverse equation of motion (7a) to obtain, for all $k = 1, \dots, N_w$:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k \quad (9)$$

with

$$\Gamma_{ijl}^k = D_{ijl}^k + \sum_{p=1}^{N_u} \frac{G_{ij}^p C_{pi}^k}{\gamma_p^2} \quad (10)$$

Initial problem (7a, b) has been replaced by a reduced one composed of only N_w transverse equations with cubic nonlinear terms only.

2.2 Plate model

In the same way as the beam, we consider here a thin plate of thickness h with a boundary of arbitrary shape, made in an homogeneous and isotropic material of Young’s modulus E , Poisson’s ratio ν and density ρ . The transverse and in-plane displacements are written $w(\mathbf{r}, t)$ and $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ at time t and position \mathbf{r} . The vectors \mathbf{u} and \mathbf{r} are two-dimensional vectors of the mid-plane of the plate. The equations of motions can be written [57]:

$$\rho h \ddot{w} + D \Delta \Delta w - \text{div}(N \nabla w) = p(\mathbf{r}, t), \quad (11a)$$

$$\rho h \ddot{\mathbf{u}} - \text{div} \mathbf{N} = \mathbf{n}(\mathbf{r}, t). \quad (11b)$$

where N is the membrane forces tensor, function of \mathbf{u} and w , div and div are the scalar/vector divergence of a vector/tensor field, Δ is the Laplacian of a scalar field, $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ is the bending stiffness and p, \mathbf{n} are transverse and in-plane external forces by unit area.

By eliminating N between Eqs. (50) and (11a, b), one obtains a (\mathbf{u}, w) -formulation written in terms of displacement unknowns only. Then, by expanding w and \mathbf{u} on a linear basis of, respectively, N_w transverse modes Φ_k and N_u axial modes Ψ_p , one obtains exactly the same ROM than in the case of beams, namely Eqs. (7a, b), which has the form of a set of N_w transverse and N_u in-plane oscillators, coupled by quadratic and cubic terms of coefficients C_{pi}^k, D_{ijl}^k and G_{ij}^p . Finally, it can also be proven that for the same

reasons, the in-plane unknowns can be condensed in the transverse equations to obtain exactly the same ROM (9), composed of only N_w transverse equations with cubic nonlinear terms. All details are provided in “Appendix B”.

2.3 Synthesis on analytical models for flat structures

The previous two sections have shown two main results, *valid for any flat structure (beam or flat plate)*.

- First, in the case of a ROM written in term displacements unknowns only (the (u, w) -formulation for beams and the (\mathbf{u}, w) -formulation for plates) expanded on the linear eigenmodes basis, the form of the ROM is the one of Eqs. (7a, b), with only a few nonzero nonlinear terms:
 - quadratic terms in the transverse- q_k oscillators that couple the transverse and in-plane coordinates: $C_{pi}^k \eta_p q_k$;
 - quadratic terms in the in-plane- η_p oscillators that involve only transverse coordinates: $G_{ij}^p q_i q_j$;
 - cubic terms in the transverse- q_k oscillators that couple only transverse coordinates: $D_{ijl}^k q_i q_j q_l$.
- Second, by neglecting the in-plane inertia, it is possible to condense the in-plane coordinates into the transverse oscillators, which leads to set (9), a ROM composed of N_w transverse oscillators only, without additional oscillators for the in-plane motion, coupled by cubic terms only.

Another interesting result comes from the dimensionless form of the equations. For beams, if the axial inertia is neglected ($\mu \ll 1$), there is only one free parameter in the equations of motion (4a, b), which is $\varepsilon = h^2/i^2$ with $i = \sqrt{I/S}$ the radius of gyration of the beam’s cross section. If the transverse motion would have been scaled by i [$\bar{w} = w/i$ in place of Eq. (2)], ε would be equal to 1, which means that the nonlinear dynamics of any straight slender beam with a uniform cross section depends only on its boundary conditions, whatever be the geometry of the cross section and its length. For plates, an analogous result holds if w is scaled by $h/\sqrt{12(1 - \nu^2)}$. In this case, $\varepsilon = 1$ in Eq. (59) and the nonlinear dynamics of any flat plate of uniform thickness depends only on the geometry of the mid-plane (circular, rectangular...) and the boundary conditions. That is why, the numerical values of the

nonlinear coefficients of Tables 9 and 10 can serve as references.

3 Finite element reduced-order model

3.1 Finite element model and expansion on a linear modal basis

The general expression of a conservative nonlinear dynamical system with smooth (geometrical) nonlinearities, discretized with a finite element method, can be written in the following form:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e, \tag{12}$$

where \mathbf{x} , M , \mathbf{f}_i and \mathbf{f}_e denote, respectively, the vector of unknown displacements, the mass matrix, the internal and external force vectors. This model is obtained after any discretization of the displacement field in a finite element context. In this article, shell finite elements have been used, but the method is valid in the case of any displacement-based finite elements (beams, 3D...).

It is convenient to split the internal force vector into a linear part and a purely nonlinear part. Assuming that the equilibrium point is at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, the tangent stiffness matrix K writes:

$$K = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \tag{13}$$

so that the nonlinear internal force vector is defined by:

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) - K\mathbf{x}, \tag{14}$$

and the equations of motion are rewritten:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e, \tag{15}$$

where the geometrically nonlinear part of the problem is concentrated in the nonlinear internal force vector $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$.

The displacements are expanded on a basis of N eigenmodes (ω_r, Φ_r) of the linearized counterpart of (15):

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r(t). \tag{16}$$

where $q_r(t)$ is the r th unknown modal coordinate. The eigenmodes are solutions of:

$$(K - \omega_r^2 M)\Phi_r = 0. \tag{17}$$

By introducing Eq. (16) into Eq. (15), multiplying by Φ_r^T and using the orthogonality properties, one obtains the following set of differential equations verified by the modal coordinates $q_r(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=\alpha}^N a_{\alpha\beta}^r q_\alpha q_\beta \\ + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=\alpha}^N \sum_{\gamma=\beta}^N b_{\alpha\beta\gamma}^r q_\alpha q_\beta q_\gamma = Q_r, \end{aligned} \tag{18}$$

where $Q_r = \Phi_r^T \mathbf{f}_e / m_r$ is the modal force and $m_r = \Phi_r^T M \Phi_r$ is the r th modal mass, usually equal to 1 with a suitable normalization of the mode shapes Φ_r . In set (18), we have written the nonlinear force vector expansion $\Phi_r^T \mathbf{f}_{nl}$ in the form of quadratic and cubic coupling terms. It is the result of an implicit Taylor expansion of $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$ around $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, truncated to the third order in q_r , $r = 1, \dots, N$. Depending on the formulation of the geometrical nonlinearities in the finite element discretization, this expansion can be exact (it is the case for 3D elements or for shell/plate/beam elements with a von Kármán strain/displacement nonlinear law [22,34]) or truncated, for instance in the case of large rotation elements (such as geometrically exact beam elements for which the internal force vector include sine and cosine functions of the rotation degrees of freedom of the cross section [56,58]). Notice that Eq. (18) is written in an upper triangular form by organizing the coupling terms such that $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

3.2 Computation of the nonlinear coefficients

In ROM (16,18), parameters ω_r , Φ_r and Q_r are obtained by the linear modal analysis of Eq. (17), available in any finite element code. The main issue is thus to compute the coefficients $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ of the nonlinear terms. As stated in the Introduction section, several methods are available for this and we propose here to

use the STiffness Evaluation Procedure (STEP) introduced in [26]. It consists in two steps.

- First, one has to prescribe a set of displacement vectors \mathbf{x} which are linear combination of selected linear mode shapes Φ_r and computing the corresponding nonlinear force vector $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$. This operation is available in any finite element code and is a simple evaluation of $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$ by knowing \mathbf{x} . It thus does not require to solve any nonlinear system, for instance with a Newton–Raphson technique.
- Second, it is shown that the unknown coefficients $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ are solutions of linear systems for which the second members are known functions of the $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$ computed at the previous step.

To illustrate the method, we first show the computation of coefficients $a_{\alpha\alpha}^r$ and $b_{\alpha\alpha\alpha}^r$. We prescribe the following time-independent displacements to the structure:

$$\mathbf{x}_1 = \pm\lambda\Phi_\alpha \Rightarrow \begin{cases} q_\alpha = \lambda \\ q_i = 0 \quad \forall i \neq \alpha \end{cases} \quad (19)$$

where λ refers to an amplitude coefficient of the mode Φ_α whose value will be addressed hereafter. The second part of the above equations comes from Eq. (16), which states that since the modes are orthogonal, imposing \mathbf{x} on the α th is equivalent to setting to zero all modal coordinates but the α th. Since \mathbf{x}_1 is time independent, introducing Eq. (19) into Eqs. (15) and (18) leads to, for all $r = 1, \dots, N$:

$$\lambda^2 a_{\alpha\alpha}^r + \lambda^3 b_{\alpha\alpha\alpha}^r = \Phi_r^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda\Phi_\alpha) / m_r, \quad (20a)$$

$$\lambda^2 a_{\alpha\alpha}^r - \lambda^3 b_{\alpha\alpha\alpha}^r = \Phi_r^T \mathbf{f}_{nl}(-\lambda\Phi_\alpha) / m_r. \quad (20b)$$

As announced, the problem thus reduces to solve the above linear system which unknowns are the nonlinear coefficients $a_{\alpha\alpha}^r$ and $b_{\alpha\alpha\alpha}^r$.

On a same way, the expansion on two or three modes (α, β, γ) of the prescribed displacement

$$\mathbf{x}_2 = \pm\lambda_\alpha\Phi_\alpha \pm \lambda_\beta\Phi_\beta \quad (21a)$$

$$\mathbf{x}_3 = \pm\lambda_\alpha\Phi_\alpha \pm \lambda_\beta\Phi_\beta \pm \lambda_\gamma\Phi_\gamma, \quad (21b)$$

leads to other linear systems enabling to compute the $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ with $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ (see [26] for details).

In the above developments, the values of the λ coefficients can be arbitrarily chosen, which means that for a given number of nonlinear coefficients to estimate,

an infinite number of equations can be took into consideration. As Eqs. (19) and (21) show, the overdetermination comes from the amplitude as well as from the sign of the modal amplitude coefficients λ . Thus, the linear system whose unknowns are the nonlinear coefficients could be overdetermined as well as minimal. In the first case, the overdetermined system is solved in a least square sense, as it has been done in [59,60]. The second case needs to dispose the minimal set of prescribed loads and nonlinear static computations. It is the approach chosen in this work.

For a linear mode basis of size N , the number N_c of coefficients to compute is equal to:

$$N_c = N \left[\binom{N}{2} + \binom{N}{3} \right] = \frac{N^4}{6} + N^3 + \frac{5N^2}{6}, \quad (22)$$

where the number of combinations of size k with repetition in a given set of size n is the multiset number:

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

where the binomial coefficient is

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

and $\bullet!$ is the factorial of integer \bullet . Equation (22) shows that the computational burden increases with the power four of N . Figure 1 gives the evolution of N_c as a function of N . One has to notice that the number of static computations necessary to obtain the N_c coefficients is much less than N_c : In Eq. (20), computing solely the two vectors $\mathbf{f}_{nl}(\pm\lambda\Phi_\alpha)$ leads to obtain the $2N$ coefficients $a_{\alpha\alpha}^r$ and $b_{\alpha\alpha\alpha}^r$ with $r = 1, \dots, N$.

3.3 Significant coefficients for flat structures

As stated in the previous section, the number of coefficients $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ greatly increases with the number N of retained modes in the reduction basis. A question arises naturally: Does all the coefficients have the same impact on the nonlinear dynamics of the structure, or, to begin with, is there some of the coefficients that are simply zero? To precise this idea, we compare the

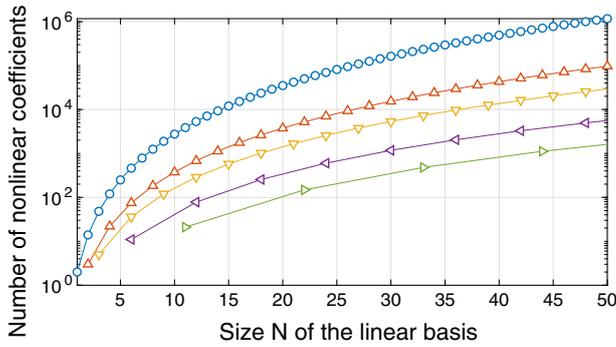


Fig. 1 Order of coefficients of the ROM as a function of the number N of modes in the expansion basis. ‘o’: N_c from Eq. (22); ‘Δ,’ ‘▽,’ ‘▷,’ ‘◁’: N'_c from Eq. (24), with $N = N_u + N_w$ and with, respectively, $N_u = N_w$, $N_u = 2N_w$, $N_u = 5N_w$ and $N_u = 10N_w$

present finite element formulations with the analytical models of flat structures described in Sect. 2.

Since the structures under consideration are flat, the bending and in-plane motion are uncoupled at the linear stage and their modes Φ_r [solutions of eigenproblem (17)] are either pure bending modes $\Phi_r^{(w)}$ or pure in-plane modes $\Phi_r^{(u)}$. It is then possible to separate them in the modal basis, which is now written $\{\Phi_1^{(w)}, \dots, \Phi_{N_w}^{(w)}, \Phi_1^{(u)}, \dots, \Phi_{N_u}^{(u)}\}$ with N_w and N_u the number of bending and in-plane mode, respectively. In practice and in the case of plate/shell/beam finite elements, these modes can be calculated separately in most finite element codes, by separating the degrees of freedom involved in bending and in in-plane. This approach considerably reduces the computation time of in-plane modes which are located at higher frequency than bending modes.

Then, since the results obtained in Sect. 2 for analytical models of flat plates are valid for any flat structure with an arbitrary edge geometry, reduced-order model (7) can be identified to the one obtained with present finite element formulation (18), showing that a large number of coefficients $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ are in fact zero for flat structures. More precisely, it depends on the values of α , β and γ that correspond to a bending mode $\Phi_r^{(w)}$ or a in-plane mode $\Phi_r^{(u)}$. Table 1 gathers those results.

As a consequence, we rewrite the finite element ROM of Eqs. (18) by separating the modal coordinates into bending ones and in-plane ones and keeping only nonzero nonlinear coefficients. For this, indices $i, j, k, l \in \{1, \dots, N_w\}$ will refer to bending coordinates (BC), whereas $p \in \{N_w + 1, \dots, N_w + N_u\}$ will refer to in-plane coordinates (MC). One obtains:

$$\text{BC: } \forall k_{1, \dots, N_w} \quad \ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{p=N_w+1}^{N_w+N_u} \sum_{i=1}^{N_w} a_{pi}^k q_i q_p + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} b_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k, \tag{23a}$$

$$\text{MC: } \forall p_{N_w+1, \dots, N_w+N_u} \quad \ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} a_{ij}^p q_i q_j = Q_p, \tag{23b}$$

which is a set of oscillators of the same form than the one obtained for analytical models (Eqs. (7)).

The number of nonzero coefficients to be computed with this approach is:

$$N'_c = N_w \left[N_w N_u + \binom{N_w}{3} \right] + N_u \binom{N_w}{2}, \tag{24}$$

$$= \frac{N_w^4}{6} + \frac{N_w^3}{2} + \frac{3N_w^2 N_u}{2} + \frac{N_w^2}{3} + \frac{N_u N_w}{2}.$$

In practice—it will be discussed in Sects. 4, 5 and 6—one often includes a larger number of in-plane modes than transverse ones in the modal basis, which means $N_w \ll N_u$. To illustrate this point, Fig. 1 shows N'_c as a function of the number of modes in the ROM expansion basis $N = N_u + N_w$, for several values of N_u as a function of N_w ($N_u = i N_w$ with $i \in \{1, 2, 5, 10\}$). To illustrate the gain in the number of coefficients to be computed, N_c as a function of N , from Eq. (22), is also plotted in Fig. 1. One can observe that the number N_c of coefficients to be computed in the present approach can be largely reduced. Moreover, for a given modal basis size $N = N_u + N_w$, the number of coefficients N'_c to be computed largely decreases with the ratio $i = N_u/N_w$. In addition, as shown in ‘‘Appendix E’’, the required number of static computations N'_{sc} is one order of power smaller than N'_c :

$$N'_{sc} = \frac{N_w^3}{6} + \frac{N_w^2}{2} + \frac{N_w}{3} + N_u N_w. \tag{25}$$

In practice, N_c can be reduced to a factor of about 1000 if $N_u = 10N_w$. For instance, if 4 transverse modes and 40 in-plane modes are retained ($N_w = 4$, $N_u = 40$) and the total number of modes is $N = 44$, the total number of coefficients is $N_c = 711,480$, which becomes $N'_c = 1120$ by considering only the nonzero coefficients, with a requirement of only $N'_{sc} = 180$ static computations.

Table 1 Nonzero coefficients $a_{\alpha\beta}^r$ and $b_{\alpha\beta\gamma}^r$ of nonlinear terms for flat structures as a function of the type (bending $\Phi_r^{(w)}$ or in-plane $\Phi_r^{(u)}$) modes involved

	Type of coupled LM (α, β, γ)	Type of oscillator q_r	
		Bending $r = k$	In-plane $r = p$
Cubic coeff. $b_{\alpha\beta\gamma}^r$	3 Bending LMs (i, j, l)	$b_{ijl}^k \neq 0$	0
	1 In-plane—2 bending LMs (m, i, j)	0	0
	2 In-plane—1 bending LMs (m, p, i)	0	0
	3 In-plane LMs (m, p, s)	0	0
Quadratic coeff. $a_{\alpha\beta}^r$	2 Bending LMs (i, j)	0	$a_{ij}^p \neq 0$
	1 In-plane—1 bending LMs (p, i)	$a_{pi}^k \neq 0$	0
	2 In-plane LMs (m, p)	0	0

3.4 Condensation of the in-plane coordinates

A further simplification of the finite element ROM can be obtained. In the same way than what was done for analytical models (Sect. 2), if the in-plane inertia is neglected and if no in-plane forcing is applied, the in-plane coordinates are found to be quadratically linked to the transverse oscillators by Eq. (23b), for all $p = 1, \dots, N_u$:

$$q_p = -\frac{1}{\omega_p^2} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} a_{jl}^p q_j q_l. \tag{26}$$

The above in-plane coordinates can thus be condensed in transverse oscillators (23a), to obtain the following set of equations:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k - \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \left(\sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \frac{a_{pi}^k a_{jl}^p}{\omega_p^2} \right) q_i q_j q_l + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} b_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k \tag{27}$$

which leads to:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k, \tag{28}$$

where the coefficients of the cubic terms are defined in accordance with the upper triangular form chosen for the above equation, with $l > j > i$:

$$\Gamma_{iii}^k = b_{iii}^k - \sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \frac{a_{pi}^k a_{ii}^p}{\omega_p^2}, \quad \forall k, i \tag{29a}$$

$$\Gamma_{ijj}^k = b_{ijj}^k - \sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \frac{(a_{pi}^k a_{ij}^p + a_{pj}^k a_{ii}^p)}{\omega_p^2} \quad \forall k, i, j > i \tag{29b}$$

$$\Gamma_{ijj}^k = b_{ijj}^k - \sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \frac{(a_{pi}^k a_{jj}^p + a_{pj}^k a_{ij}^p)}{\omega_p^2} \quad \forall k, i, j > i \tag{29c}$$

$$\Gamma_{ijl}^k = b_{ijl}^k - \sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \frac{(a_{pi}^k a_{jl}^p + a_{pj}^k a_{il}^p + a_{pl}^k a_{ij}^p)}{\omega_p^2}, \quad \forall k, i, j > i, l > j \tag{29d}$$

ROM (28), valid if the in-plane inertia is neglected, is the most reduced since it involves only transverse coordinates, with all the in-plane motion embedded in the cubic coupling terms. It is also the most natural since it is very similar to classical linear modal models in which one considers only transverse modes. The issue of truncation of this model remains, but has been simplified since the choice of the in-plane modes to keep in the basis has been solved by the condensation.

4 Validation on beam and plate test cases

4.1 Definition of the two test cases

In order to test the finite element reduced-order modeling procedure of Sect. 3, two test cases have been selected, for which analytical solutions are at hand with the models of Sect. 2. Those two test cases are described in Table 2: a clamped-clamped straight beam of length

Table 2 Mesh, geometrical and mechanical characteristics of the finite element beam and plate test cases

Test case	Clamped–clamped beam	Clamped circular plate
Geometry	$L \times b \times h = 1 \times 0.05 \times 0.001$ m	$R \times h = 0.3 \times 0.001$ m
Material	$E = 210$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m ³	
	$\nu = 0$	$\nu = 1/3$
FE nodes	$5 \times 101 = 505$	4141
FE dof.	3030	24846

The FE dof. row gives the number of degrees of freedom of the finite elements model

L and uniform rectangular cross section of width b and thickness h and a clamped circular plate of radius R and thickness h , both made in a homogeneous and isotropic material of Young’s modulus E , Poisson’s ratio ν and density ρ . The numerical values of those parameters used for the computations are given in Table 2, even if they have no influence on the final results since, as stated in Sect. 2.3, they depend only on the shape of the plate (rectangular and circular in our cases) and the boundary conditions.¹ For this reason, only dimensionless results are given in the following. The open-source finite element software Code_Aster [61] has been used for all computations of the present article, with DKQ four-noded shell elements with large rotation geometrical nonlinearities (GROT_GDEP option).

The reduction basis consists of N_u in-plane modes and N_w bending modes, with a total of $N = N_w + N_u$ linear modes (LMs) kept in the ROM of Eq. (18). The first transverse and in-plane LMs of the two test cases, solutions of eigenproblem (17), are shown in Tables 3 and 4. Since one of the purpose of the present study is to evaluate the effect on the ROM quality of the in-planes modes kept in the reduced basis, a more larger number of in-plane than transverse LMs is took into account, as shown in Table 5.

4.2 Numerical validation of significant coefficients

The purpose of this section is to numerically validate the results of Sect. 3.3 in which structures with a flat

¹ In fact, the in-plane frequencies normalized values depend on parameter μ defined by Eqs. (2), (53) but have a priori a negligible influence on the transverse motion.

geometry are considered. The results presented in this paragraph were computed on the clamped beam, with a discretization consisting of 100 element in the length and 4 element in the width of a beam (see the mesh in Table 2), and maximum of modal amplitudes for the static nonlinear STEP computations fixed at

$$\lambda_r \max_i |[\Phi_r]_i| = h/20, \tag{30}$$

with $r = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ (see Sect. 3.2) and $[\Phi_r]_i$ the i th displacement² component of vector Φ_r . In order to validate the numerical values of coefficients of nonlinear terms obtained with the STEP, they are compared to those obtained by the analytical model of Sect. 2.1 (the numerical values of some of them are given in Table 9). Since the coefficients value depend on the mode shapes normalization, the same normalization must be applied to both FE and analytical mode shapes. For this, the following dimensionless parameters are defined and applied to the FE model:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_r}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\Phi}_r = \nu_r \Phi_r, \tag{31}$$

where x_r, t_0 are defined in the same way than for analytical models (Eq. (2)): $x_r = h$ (resp. $x_r = h^2/L$) for the components of \mathbf{x} related to transverse (resp. in-plane) motion; $t_0 = L^2 \sqrt{\rho S/EI}$. The mode shape scaling ν_r is chosen to obtain the same maximal amplitude for the analytical and FE mode shapes. Introducing those parameters into Eq. (16,18) leads to replace them by

² We consider here only the transverse displacement degrees of freedom and not the eventual rotation ones, encountered in Timoshenko (shear deformation) 1D finite elements.

Table 3 Order of appearance in the basis (#), eigenfrequencies and shapes of the first transverse and axial modes for the clamped–clamped beam. The axial mode shapes are shown with

arrows showing the in-plane vector field corresponding to $\Phi_p^{(u)}$, with colors related to their length

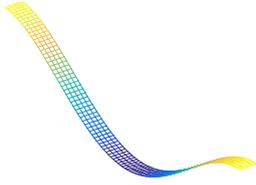
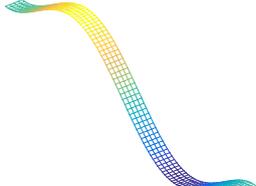
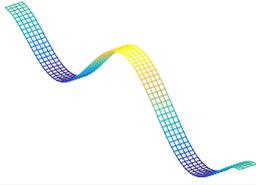
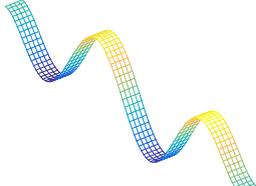
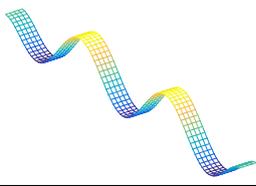
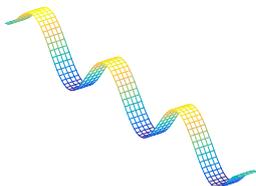
#	$\omega_k/(2\pi)$ [Hz]	Bending modes		#	$\omega_k/(2\pi)$ [Hz]	Axial modes	
		ω_k/ω_1	Shape			ω_k/ω_1	Shape
1	5.33	1		1	2594.4	486	
2	14.70	2.76		2	5189.0	973	
3	28.82	5.40		3	7783.8	1460	
4	47.64	8.93		4	10,379.2	1947	
5	71.17	13.34		5	12,975.2	2435	
6	99.41	18.64		6	15,572.0	2923	

Table 4 Label, number of appearance in the basis (#), eigenfrequencies and shapes of the first transverse and in-plane modes for the clamped circular plate. The in-plane mode shapes are shown with arrows showing the in-plane vector field corresponding to

$\Phi_p^{(u)}$, with colors related to their length. The labels of the transverse modes are a doublet (k, n) with k the number of nodal diameters and n the number of nodal circles

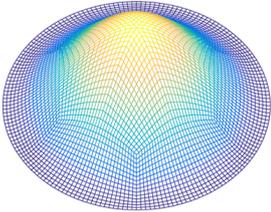
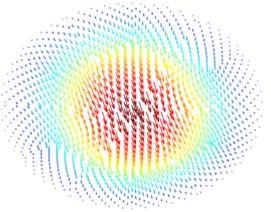
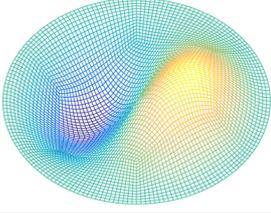
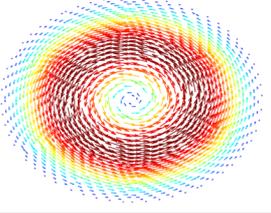
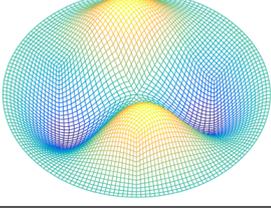
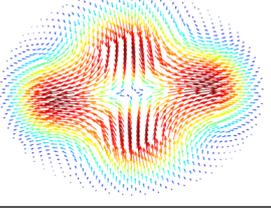
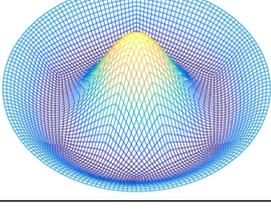
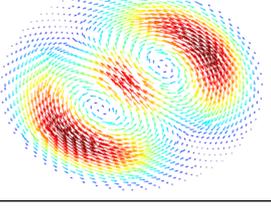
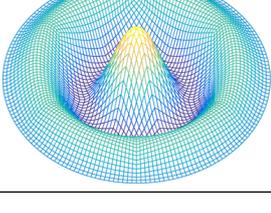
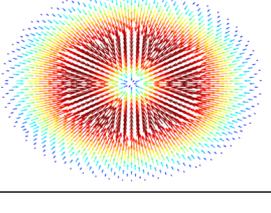
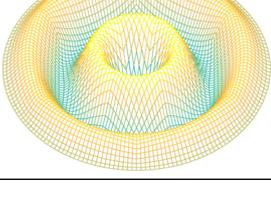
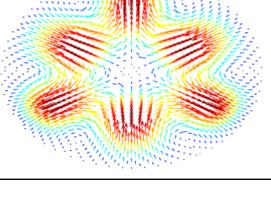
	Bending modes			Shape	In-plane modes		
	#	$\omega_k/(2\pi)$ [Hz]	ω/ω_1		$\omega_k/(2\pi)$ [Hz]	ω/ω_1	Shape
(0,1)	1	28.69	1		5673.9	197.74	
(1,1)	2	59.70	2.08		6463.2	222.25	
(2,1)	4	97.90	3.41		8808.7	306.99	
(0,2)	6	111.68	3.89		9077.1	316.43	
(0,3)	15	143.15	4.99		11,189.3	389.96	
(0,4)	30	170.71	5.95		11,413.1	397.76	

Table 5 Modal basis of the two test cases for which the coefficients of the ROMs are computed

Test case	Type of LM	Number of LMs in the ROM
Beam	Transverse	10
	Axial	31
Plate	Axisymmetric transverse	5
	Asymmetric transverse	2 × 23
	Total transverse	51
	In-plane	750

identical ones that now depend on scaled modal coordinate \bar{q}_r and coefficients $\bar{a}_{\alpha\beta}^r$ and $\bar{b}_{\alpha\beta\gamma}^r$, defined by:

$$\begin{aligned} \bar{q}_r &= \frac{q_r}{v_r x_r}, \quad \bar{a}_{\alpha\beta}^r = t_0^2 \frac{x_\alpha x_\beta}{x_r} \frac{v_\alpha v_\beta}{v_r} a_{\alpha\beta}^r, \\ \bar{b}_{\alpha\beta\gamma}^r &= t_0^2 \frac{x_\alpha x_\beta x_\gamma}{x_r} \frac{v_\alpha v_\beta v_\gamma}{v_r} b_{\alpha\beta\gamma}^r. \end{aligned} \tag{32}$$

The two formulations are compared by analyzing the coupling coefficients of an expansion basis composed of three modes of the beam: the first transverse mode and the first two axial modes (in Table 3: mode 1 of the first column and modes 1,2 of the second column). Table 6 gathers the results. It shows that the estimation of the coefficients from the two formulations (FE with the STEP and analytic (u, w) – formulation, see “Appendix A” for details) is equivalent. In particular, the coefficients computed by the STEP that should be nonzero according to the theory of Sect. 3.3 are accurately obtained with at least 3 identical digits. For those that should be zero, values less than 10^{-10} are obtained. One can notice that the analytical model

shows that some coefficients G_{ij}^p and C_{pi}^k are zero: This is due to the chosen modes and the symmetry properties of the structure.

4.3 Sensitivity of the coefficients to the finite element discretization

In this section, we analyze the convergence of the numerical values of the coefficients computed by the STEP as a function of the FE mesh refinement. Figure 2 shows the convergence of (a) the eigenfrequencies ω_k and (b) the cubic coefficient $D_{kkk}^k \equiv b_{kkk}^k$, for $k = 1 \dots 5$, computed with the FE code, as a function of the number of finite elements in the length of the beam. While the first eigenfrequencies are fastest converging toward the analytic ones, the convergence of the numerical estimations of cubic coefficients D_{kkk}^k is slower. A non-monotonic convergence of the coefficients is also noticed. It could be explained by the dependency of the nonlinear coefficients to the nodal force evolution along the axial direction, governed in the case of the beam by Eq. (44b): The zeros of the internal axial force would match the number of nodes of the mesh to be correctly approximated. Those tendencies are found identical to the one noticed in [34] in the case of a beam with a Euler–Bernoulli kinematics.

4.4 Sensitivity of the coefficients to the modal displacement amplitude

As explained in Sect. 3.2, the computation of the coefficients a_{ij}^k and b_{ijl}^k depends on free parameters λ_r ,

Table 6 Comparison of nonlinear stiffness coefficient estimations with one bending mode $\Phi_1 = \Phi_1^{(w)}$ and two axial modes $\Phi_2 = \Phi_1^{(u)}$ and $\Phi_3 = \Phi_2^{(u)}$

Quadratic								
STEP	a_{11}^1	a_{11}^2	a_{11}^3	a_{12}^1	a_{13}^1	a_{22}^1	a_{23}^1	a_{33}^1
	-9.10^{-12}	-1.10^{-9}	-4.831	-2.10^{-9}	9.664	8.10^{-15}	1.10^{-15}	7.10^{-16}
Analytic		G_{11}^1	G_{11}^2	C_{11}^1	C_{21}^1			
	0	0	-4.832	0	9.664	0	0	0
Cubic								
STEP	b_{111}^1	b_{222}^2	b_{111}^2	b_{222}^1				
	111.20	3.10^{-10}	-2.10^{-14}	6.10^{-22}				
Analytic	D_{111}^1							
	111.18	0	0	0				

very small transverse amplitudes ($w_{\max}/h < 10^{-4}$), the estimated coefficients present a random variation, probably due to the fact that nonlinearities are not activated enough. On the contrary, if displacements are too large ($w_{\max}/h > 100$), estimated values of nonlinear coefficients are underestimated, in a smooth tendency. This can be explained by considering that expansion (18), which includes quadratic and cubic terms only, is exact for moderate rotation models of the von Kármán type, as shown in Sect. 2. Those von Kármán models are known to be valid for moderate transverse amplitudes, of the order of the thickness h of the structure. On the contrary, the FE used for the STEP includes a large rotation formulation (the GROT_GDEP option is used in Code_Aster; see Sect. 4.1), valid for any displacement amplitude, that would activate geometrical nonlinearities of a higher order than 3, not included in the model of Eq. (18).

In the case of coefficients $C_{pi}^i \equiv b_{pi}^i$ [Fig. 3(right)], which involves both axial and bending modes, there is also an accuracy plateau that cease to exist for $u_{\max}/h \simeq 10$. Above this critical amplitude, an erratic behavior is observed, which can probably be explained by observing that this critical amplitude is very large (ten times the thickness h of the beam), since the axial

motion is physically one order of magnitude in h/L smaller than the transverse motion.

Those numerical experiments tend to show that the thickness h of the structure is the average order of magnitude of proper values of w_{\max} and u_{\max} . Consistently to these results, modal displacements amplitudes will thereafter be chosen as 1/20 of the thickness of the investigated structures (Eq. (30)).

4.5 Convergence of the cubic coefficients and in-plane motion condensation

As explained in Sect. 3.4, the in-plane/bending coupling inherent to the correct simulation of the geometrical nonlinearities in thin structures can be included in the cubic Γ_{ijl}^k coefficients, which depend on the quadratic coefficients a_{pi}^k and a_{ij}^p associated with the in-plane modes of the expansion basis of the ROM, as defined by Eqs. (29a–d). In this section, we analyze the convergence of the numerical values of some typical Γ_{ijl}^k with the number of in-plane modes retained in the summations of Eqs. (29a–d). The two test structures of Table 2 are considered here with the reference numerical values of the Γ_{ijl}^k coefficients, from the analytical models of Sect. 2, given in Table 10.

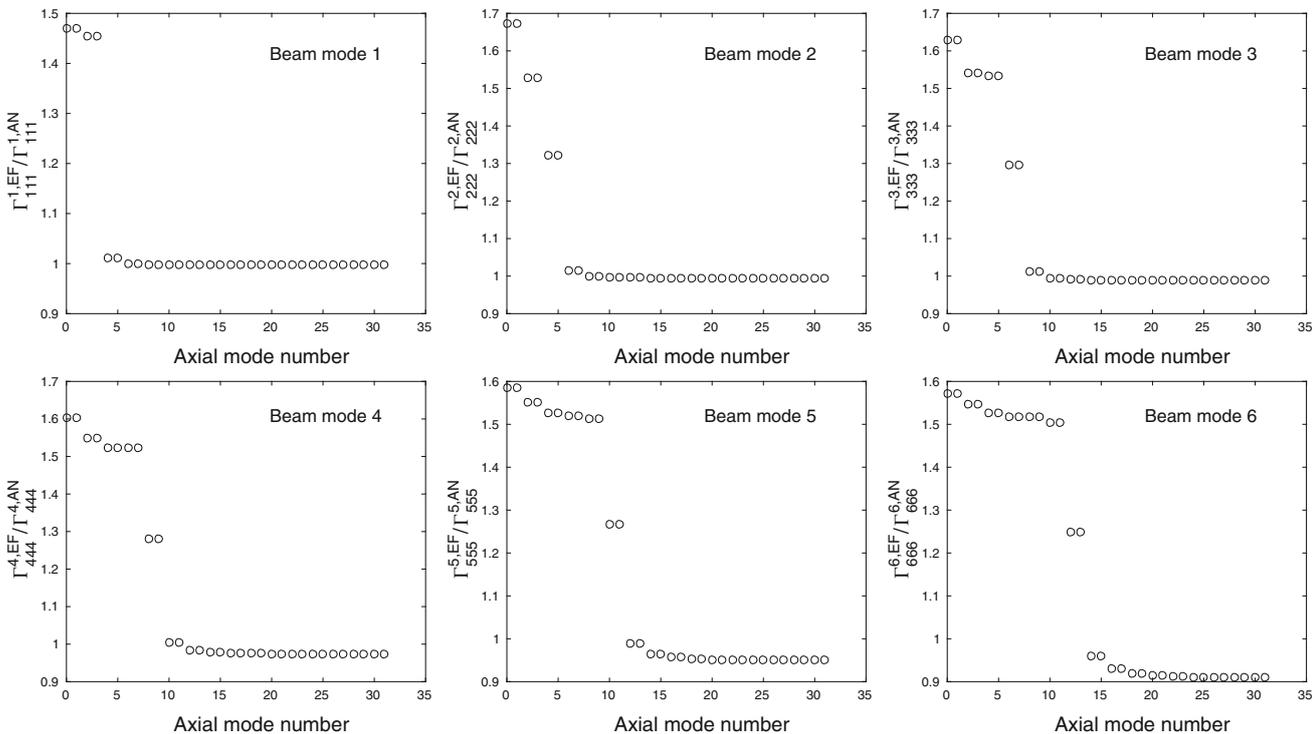


Fig. 4 Evolution of nonlinear beam cubic coefficients Γ_{iii}^i with regard to the number of axial modes retained in the summations of Eqs. (29a), for the first six transverse modes of the beam (1st column of Table 3, $i = 1, \dots 6$)

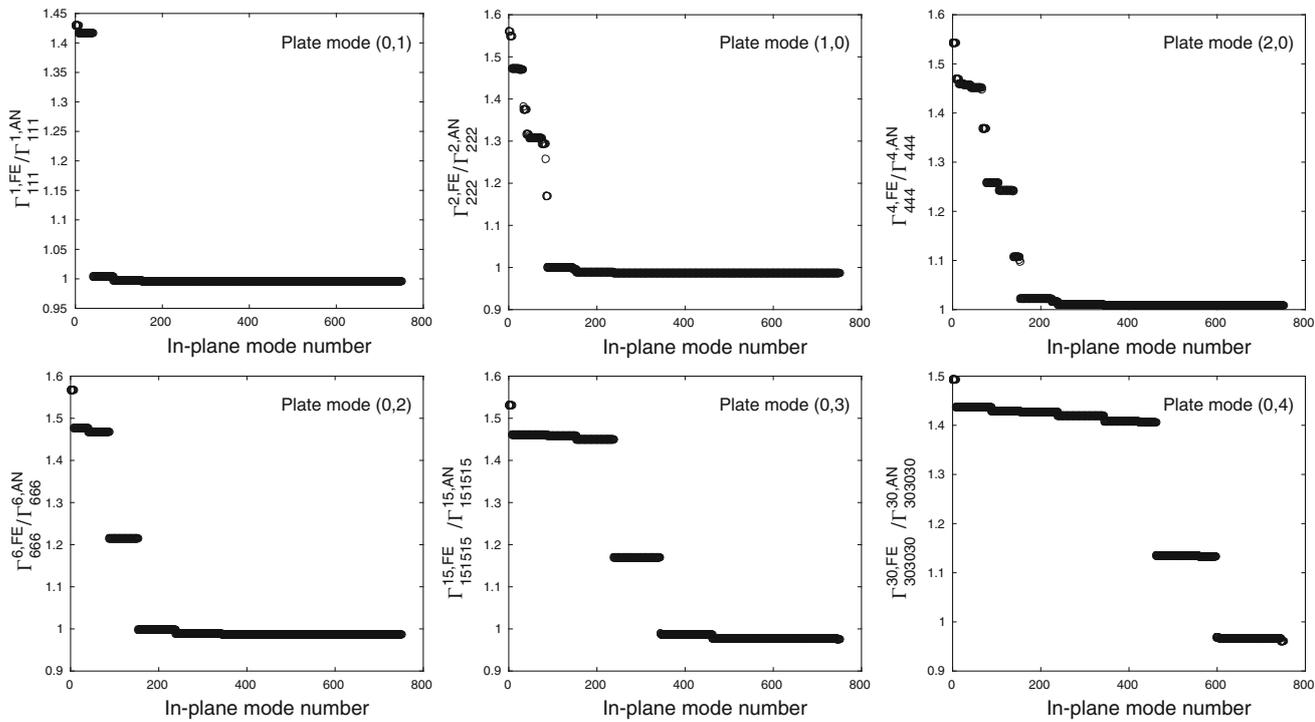


Fig. 5 Evolution of nonlinear plate cubic coefficients Γ_{iii}^i , with regard to number of in-plane modes retained in the summations of Eqs. (29a), for the six transverse modes of the 1st column of Table 4, $i = 1, 2, 4, 6, 15, 30$

Figure 4, in the case of the clamped–clamped beam, and Fig. 5, in the case of the clamped circular plate, highlight that a set of in-plane LMs are needed to converge to a nearly constant value of coefficients Γ_{iii}^i . It indicates also which of these oscillators participate in the nonlinear response of the structure. Thus, in the case of the beam, it is possible to associate a given transverse mode to a set of axial LMs, thus giving an indication of which axial modes are nonlinearly linked to a particular bending mode at large amplitude. Indeed, Fig. 4 shows that the first bending mode is mainly linked to the fourth axial mode, the second bending mode is notably associated with the second, fourth and sixth axial ones, whereas the third bending mode is linked to the second, sixth and eighth axial modes. For higher orders, the convergence could be nearly reached by retaining only two axial modes in the condensation. Figure 4 also shows that the second axial mode has an effects on all cubic coefficient Γ_{iii}^i , although for some of them it could be considered as negligible. In the case of the plate, analogous results can be drawn by analyzing Fig. 5.

Since Figs. 4 and 5 show coefficients Γ_{iii}^i computed with the STEP normalized by their analytical value (obtained by Eq. (10) and given in “Appendix D”), one can notice that the STEP has a tendency to underesti-

mate the values of the coefficients, since the asymptotic value in Fig. 4 is slightly smaller than 1, the more and more as the order of the involved modes is increasing. It can be due to the mesh refinement, which is correct for low-order modes with a large wavelength and that brings errors for higher-order modes with a smaller wavelength.

Notice that this condensation has always the effect of decreasing the absolute value of the cubic coefficients by taking into account the contribution of in-plane modes. In the case of the beam, most of the time, more than one axial mode has a significant effect on the transverse motion, except in the case of the first bending mode. This holds true as well for the circular plate—see Fig. 5—whose modal convergence needs more in-plane modes because of the strong density of asymmetric LMs.

5 Dynamical responses of structures

5.1 Solving of the nonlinear system

A continuation method is used to compute the dynamical response of reduced-order model (28). The con-

tinuation method used in this text is the asymptotic numerical method (ANM) coupled to the harmonic balance method (HBM) [62], implemented in the software Manlab [63]. For this, the system is first rewritten in the state space. Secondly, a quadratic form is used, which considerably improve the performance of the continuation procedure. By introducing the state variable $v_k = \dot{q}_k$ and the product of two modal coordinates $S_{ij} = q_i q_j$, $j \geq i$, set (28) is replaced by:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = v_k \\ \dot{v}_k = Q_k - \omega_k^2 q_k - 2\xi_k \omega_k v_k - \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k S_{ij} q_l \\ 0 = S_{ij} - q_i q_j \end{cases} \quad (33)$$

with all the unknowns gathered in the following unknown vector:

$$\mathbf{u} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{N_w} \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N_w} \ S_{11} \ S_{12} \ \dots \ S_{N_w N_w}] \quad (34)$$

A linear modal damping terms of factor ξ_k has been added in the model.

Periodic solutions of this system are computed. Following the HBM, \mathbf{u} is expanded in Fourier series:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \sum_{h=1}^H [\mathbf{u}_h^c \cos(h\Omega t) + \mathbf{u}_h^s \sin(h\Omega t)] \quad (35)$$

where Ω is the angular frequency of the periodic motion. Introducing the above equation into (33), one obtains an algebraic quadratic system:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \Omega) = 0, \quad (36)$$

where

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1^c \ \mathbf{u}_1^s \ \dots \ \mathbf{u}_H^c \ \mathbf{u}_H^s], \quad (37)$$

is the vector of unknowns that gathers all the Fourier components of the unknowns.

In the software Manlab [63] used for the computations, system (33) is given as input. Then, the application of the HBM to write algebraic system (36) is automatic and final algebraic system (36) is solved by the ANM, which computes \mathbf{U} and Ω as Taylor series of a pseudo-arclength parameter a [62]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + \dots + a^n \mathbf{U}_n, \\ \Omega &= \Omega_0 + a\Omega_1 + \dots + a^n \Omega_n \end{aligned} \quad (38)$$

where n is the order of the series, chosen by the user ($n = 20$ in the present study). Then, (\mathbf{U}_0, Ω_0) are solutions of a nonlinear algebraic system solved by a Newton–Raphson algorithm, whereas $\mathbf{U}_i, i = 1, \dots, n$ are solutions of a cascade of linear systems.

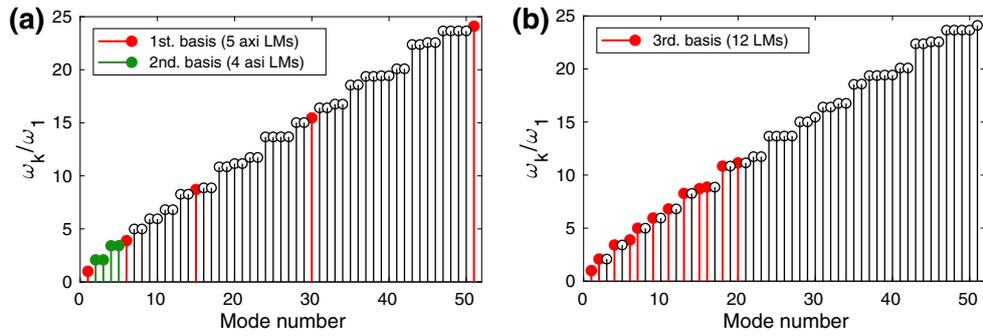
In this text, two kinds of computations are done:

- the first one is the free conservative response of the investigated system, i.e., the backbone curve of a given nonlinear mode (NNM), which means the system of Eqs. (33) with $Q_k = 0$ and $\xi_k = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, N_w\}$. In this case, as proposed in [64], a perturbation term $-\lambda v_k$ is added to the second line of Eq. (33) at each oscillator k , where λ is an explicit continuation parameter, which enables to add a phase condition. According to [65], it ensures that the computed solutions are those of the unperturbed and conservative system of Eqs. (28) and (33). The phase conditions used in this work consist in setting to zero the sine component of the first harmonic of q_i in (35) if the i th NNM is computed. Moreover, the initial Newton–Raphson algorithm (to compute \mathbf{U}_0 in Eq. (38)) needs to be initialized in the vicinity of a given NNM. In this work, for the i th NNM, the unknowns are initialized on the corresponding linear mode: $q_i(t) = q_0 \cos \omega_i t$, $v_i(t) = -\omega_i q_0 \sin \omega_i t$, $S_{ii} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_i t)$, $\Omega = \omega_i$ and all the other unknowns are set to zero. The amplitude q_0 is chosen small with respect to the plate thickness h .
- The second one is the harmonically forced response of the system, considering consistent values of Q_k and ξ_k .

The size of algebraic system (36) increases fast with the number of harmonics and transverse oscillators retained in the basis. In practice, there is generally no simplification allowing to neglect the coupling between two oscillators, which infers that all additional variables S_{ij} must be included in \mathbf{u} . Then, the size N_s of the final unknown vector \mathbf{U} of a system with N_w oscillators is given by:

$$N_s = (2H + 1) \left(2N_w + \frac{N_w(N_w + 1)}{2} \right). \quad (39)$$

Fig. 6 Organization of the two bases of the ROMs for the circular plate computations: eigenfrequencies of the modes as a function of their number. **a** First basis and **b** second basis



5.2 Modal bases of the ROMs

Since condensed model (9) is used for the computations, the expansion basis has to be selected in two steps:

- firstly, one has to select a given set of N_w transverse modes to be retained in ROM (9);
- secondly, one has to select a larger set of $N_u \gg N_w$ modes used to compute the quadratic coefficients a_{pi}^k and a_{ii}^p necessary for the estimations of the cubic coefficients Γ_{ijl}^k (see Eqs. (28)) with the condensation of the in-plane motion into the bending motion.

In the results presented in the next paragraphs and figures, we assume that all cubic coefficients Γ_{ijl}^k have attained convergence with a suitable number N_u of in-plane modes. Those computations are made offline before the computation of the dynamical response with Manlab.

For the beam examples, the basis composed of the first 10 bending modes has been used. For the circular plate simulations, one has to consider that asymmetric modes appear in pair in the basis (so-called companion modes). Three different bases are used, in regard to possible modal interactions between axisymmetric and companion asymmetric modes. The first modal basis is presented in Fig. 6a and is composed of the first 5 axisymmetric modes; the second one includes the two first pairs of asymmetric modes (4 modes) also shown in Fig. 6a; the third one is composed of the first 12 LMs of the circular plate, but includes only one of the companion modes associated with each asymmetric mode shape, as shown in Fig. 6b.

5.3 Nonlinear normal modes and forced responses

A useful property of NNM is that all nonlinear forced responses of the system are distributed around the computed free undamped response. This is illustrated in Fig. 7 which presents the forced responses of the clamped beam and the clamped circular plate around their first NNM.

More precisely, a point harmonic excitation at location ζ of amplitude F and frequency Ω has been selected, for which the value of the modal forcing in Eqs. (28), (33) is

$$Q_k = \Phi_k(\zeta) P \cos(\Omega t). \tag{40}$$

where $\Phi_k(\zeta)$ is the transverse modal amplitude at location ζ . The forced response of the beam is computed with a damping value of each LMs fixed at $\xi_k = 2\%$ and the excitation point chosen at $x = L/\pi$, such that all LMs are involved in the displacement response. For the plate, the damping values are $\xi_k = 5\%$ and the excitation point is located at $r = 0.5461$.

A tongue is noticeable on the free response of the two structures. It corresponds to 1:5 and 1:7 internal resonances, respectively, for the beam and the plate. This phenomena are not visible on the forced response, and it would appear if the dampings of the interacting LMs were reduced.

Figure 7 enables to draw generic results. As announced, the free response (also known as the NNM or the backbone curve) represents the skeleton of the dynamics since it connects all the forced responses at their resonance point. Since it is obtained in a single continuation, it appears to be an efficient way of characterizing the dynamics of the structure. In the following, the free responses of the beam and the plate are considered to analyze the behavior and the efficiency of the numerical method.

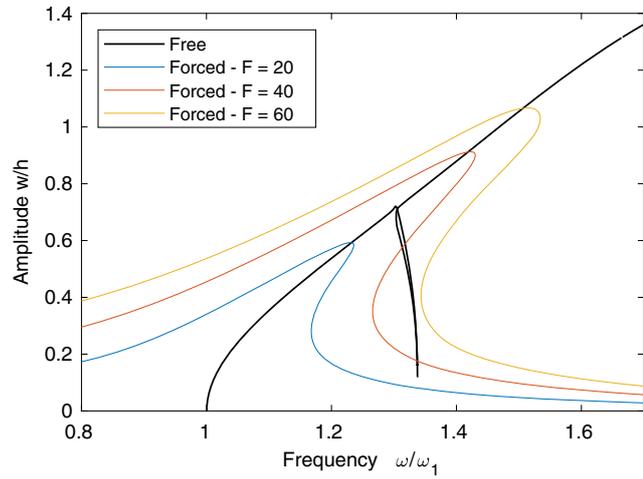
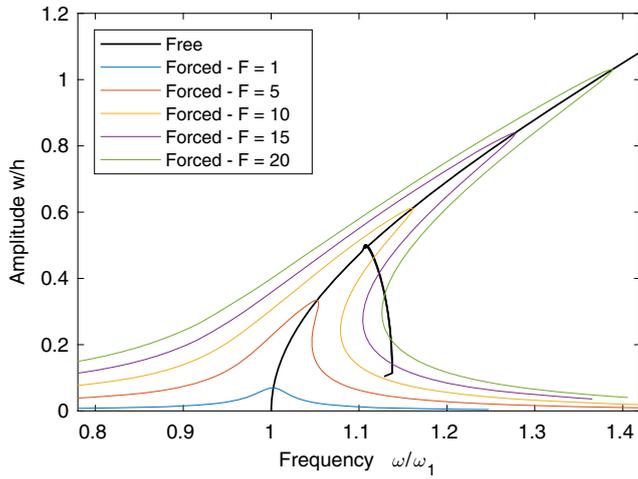
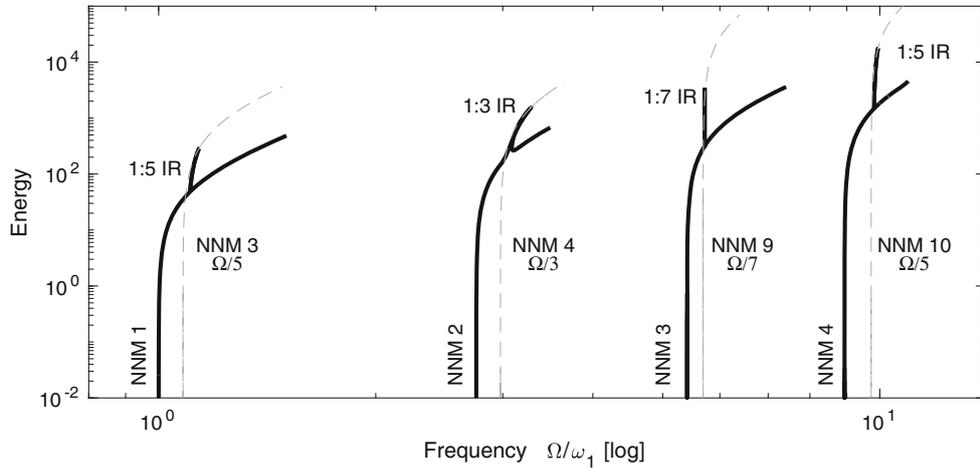


Fig. 7 Maximum amplitude of the transverse displacement of the periodic response of the beam (left) and circular plate (right) around their first NNM. The x -axis is scaled by the first eigenfrequency ω_1 of the structure. Free response in black and forced

responses in color. The responses are computed at $x = L/\pi$ and with modal dampings $\xi_k = 2\%$ for the beam, and at $r = 0.5461$ and with modal dampings $\xi_k = 5\%$ for the plate. $H = 10$ harmonic components are used for the computations

Fig. 8 Backbone curve of the first four NNMs of the clamped–clamped beam in a frequency energy plot. The internal resonance (IR) tongues are labeled, and the backbones of the associated NNMs are plotted in gray dashed lines as a function of their divided frequency (for a $1 : n$ IR, the associated NNM is plotted as a function of Ω/n)



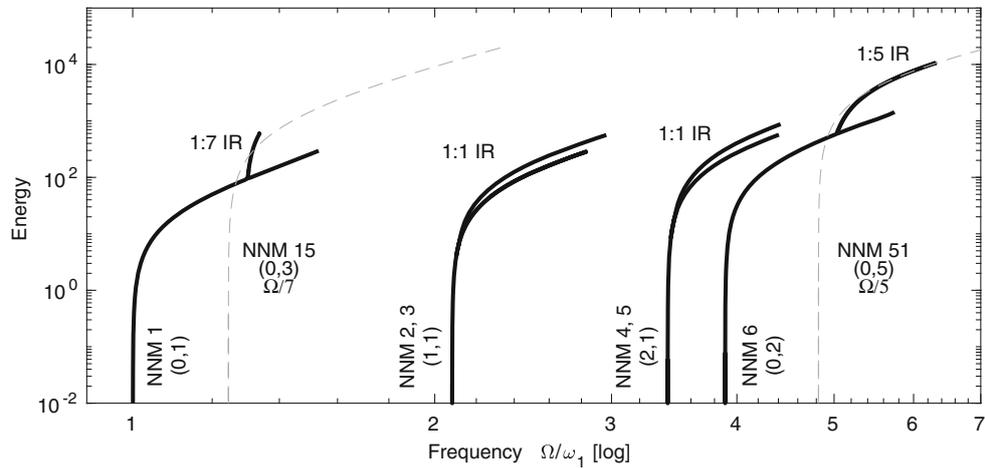
5.4 Nonlinear modes of the plane structures

In this section, we present an overview of the dynamical response of the clamped beam and the circular plate, through their first four NNMs, shown in Figs. 8 and 9 as frequency energy plots (FEP). In fact, NNMs are the free conservative oscillations of the structure (with $Q_k = 0$ and $\xi_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N_w\}$ in Eqs. (33)), for which the mechanical energy \mathcal{H} is an invariant at any given amplitude. Here, the energy can be written:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_w} (\dot{q}_k^2 + \omega_k^2 q_k^2) + \mathcal{V}_{nl} \quad (41)$$

where \mathcal{V}_{nl} denotes the nonlinear part of the energy defined in “Appendix F”. In practice, the backbone curves shown in Figs. 8 and 9 are computed with the ANM/HBM method (see Sect. 5.1) and \mathcal{H} is computed in post-processing in the time domain, with the Fourier coefficients of q_k and \dot{q}_k , by taking the mean value over one period of Eq. (41). $H = 10$ harmonic components are used for the computations. The 10 first LMs compose the reduction basis for the computation of the beam FEP (Fig. 8). For the plate FEP (Fig. 9), the first basis (Fig. 6a) is used for the axisymmetric NNMs (0,1) and (0,2), whereas the second one is used for the asymmetric ones (1,1) and (2,1).

Fig. 9 Backbone curve of the first four NNMs of the circular plate in a frequency energy plot. The internal resonance (IR) tongues are labeled, and the backbones of the associated NNMS are plotted in gray dashed lines as a function of their divided frequency (for a $1 : n$ IR, the associated NNM is plotted as a function of Ω/n)



All the NNMs show the same qualitative behavior. First, since both structures are plane, all the NNMs have a hardening behavior, which globally bends the backbone curves toward the high frequencies (indeed, the Γ_{iii}^i coefficients are all positive; see “Appendix D”). Secondly, some internal resonances modify the topology of the backbone curve, which is described more precisely in the next section.

5.5 A focus on internal resonances

On the FEP of Figs. 8 and 9, only simple internal resonances of the form $1:n$ with $n \in \mathbb{N}$ are observed. They are characterized by a strong coupling between two NNMs (the i th and the j th) when the following frequency relation is fulfilled:

$$\omega_{jnl} \simeq n\omega_{inl}, \tag{42}$$

where $\omega_{inl}, \omega_{jnl}$ are the oscillation frequencies of the two involved NNMs, which are read on the x -axis of the FEP. This kind of internal resonance appears here in two distinct ways, which can be gathered in two families.

The first family gathers $1:n$ internal resonance that naturally appears at high energy levels because of the bending of the backbone curves. At low energy, ω_{inl} and ω_{jnl} are close to the natural frequencies ω_i and ω_j , which are far from fulfilling $\omega_j = n\omega_i$. Then, because of the bending of the backbones, the oscillations frequencies $\omega_{inl}, \omega_{jnl}$ change and Eq. (42) is fulfilled at high energy. This kind of internal resonances always shows the same features, illustrated by Figs. 10 and 11:

- if an IR tongue emerges from the main backbone curve in the FEP, it is characterized in terms of frequency content by a transfer of energy between the first harmonics q_{i1} (H1) of mode i and the n th harmonics q_{jn} (Hn) of mode j .
- there is always a particular point on the IR tongue, close to its tip, for which Eq. (42) is an equality ($\omega_{jnl} = n\omega_{inl}$). At this point, denoted B in Figs. 10 and 11, the tongue of the i th NNM is connected to the backbone curve of the j th NNM. Precisely, it is the curve $\mathcal{H} = f(\omega_{inl})$ that is connected to the curve $\mathcal{H} = f(\omega_{jnl}/n)$, shown in gray dashed line in Figs. 8, 9, 10 and 11.
- when following the tongue from its emergence from the i th backbone (point A) to point B , a transfer of energy is observed from the first harmonics of mode i to the n th harmonics of mode j . Indeed, the latter increases while the former decreases, giving a continuous change of the dynamics between mode i oscillating at Ω and mode j oscillating at $n\Omega$. At point B , mode i is zero and the dynamics only involves mode j oscillating at $n\Omega$.
- since the observed internal resonances tongues are with n odd, they naturally emerge from the main backbone without any bifurcation point.

The second family gathers the $1:1$ internal resonances observed in the backbone curves of the asymmetric modes of the circular plate (modes (1,1) and (2,1) of Figs. 9 and 12), for which the natural frequencies of the companion modes are naturally tuned and fulfill Eq. (42). In this case, well documented in [19,66], the backbone curve of one of the companion modes becomes unstable after a pitchfork bifurcation (denoted by PF in Fig. 12), appearing at very low

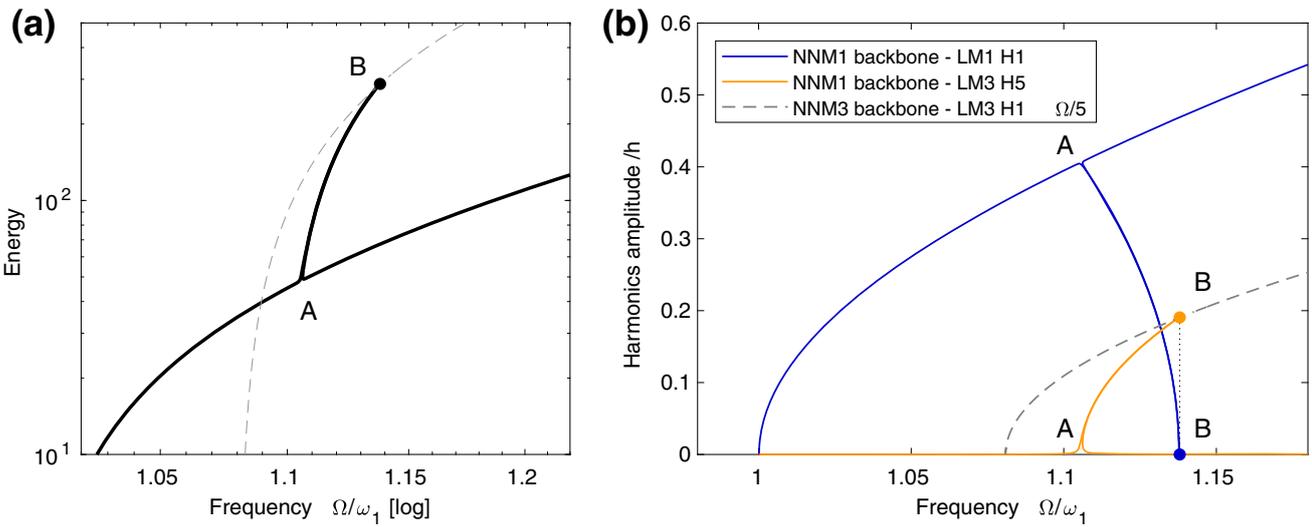


Fig. 10 Topology of the 1:5 internal resonance of NNM1 with NNM3 of the clamped–clamped beam. **a** Zoom of the FEP of Fig. 8 and **b** harmonics amplitude of NNM1 (H1 of LM1 in blue

and H5 of LM3 in orange) and NNM3 (H1 of LM3 in gray dashed line, as a function of $\Omega/5$)

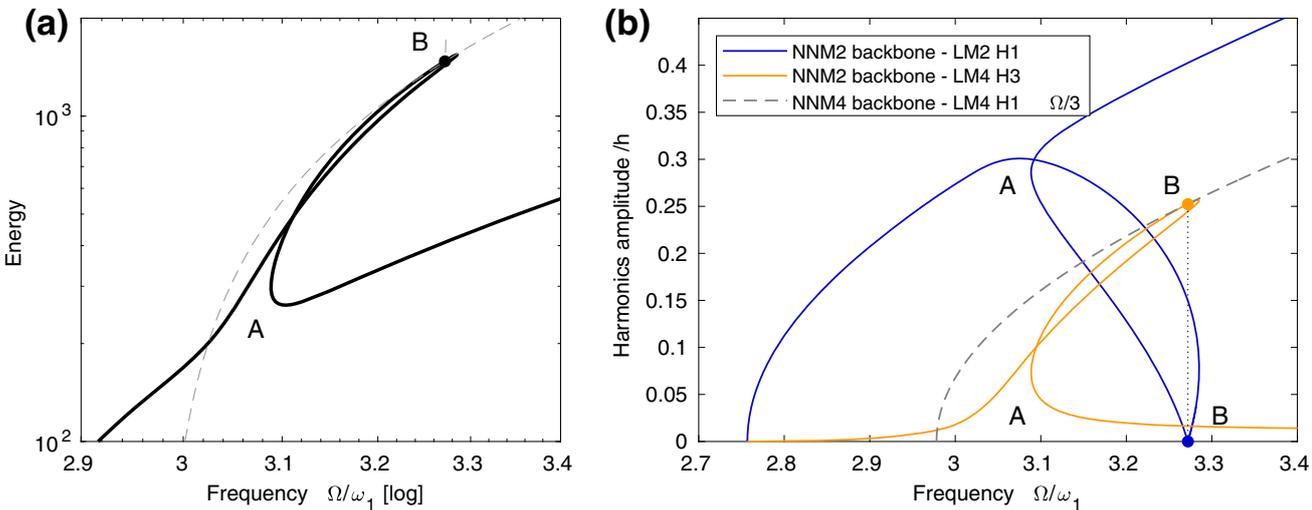


Fig. 11 Topology of the 1:3 internal resonance of NNM2 with NNM4 of the clamped–clamped beam. **a** Zoom of the FEP of Fig. 8 and **b** harmonics amplitude of NNM2 (H1 of LM2 in blue

and H5 of LM4 in orange) and NNM4 (H1 of LM4 in gray dashed line, as a function of $\Omega/3$)

energy. It gives rise to a new branch, for which both companion modes have nonzero energy and oscillate with a quadrature phase shift, giving rise to a traveling wave.

On the FEPs of Figs. 8 and 9, the internal resonances are labeled as “1:n IR,” with the mode in interaction specified by “NNM $_j$ Ω/n .” For instance, the first NNM of the beam shows a 1:5 internal resonance with the third NNM.

5.6 Convergence with the number of harmonic components

Figure 13 presents the free response of the beam around its first NNM with a varying number of harmonic components retained in the Fourier series expansion of Eq. (35), with a converged (see next section) number of transverse modes [$N_w = 10$ in Eqs. (28), (33)] retained in the ROM basis. It shows that $H = 3$ harmonics are

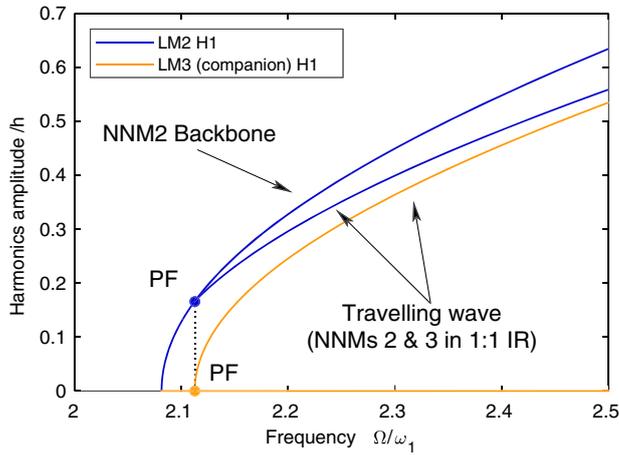


Fig. 12 Topology of the 1:1 internal resonance of NNM2 with companion NNM3 of the circular plate. First harmonics amplitude of NNM2 and NNM3 for the two branches, the

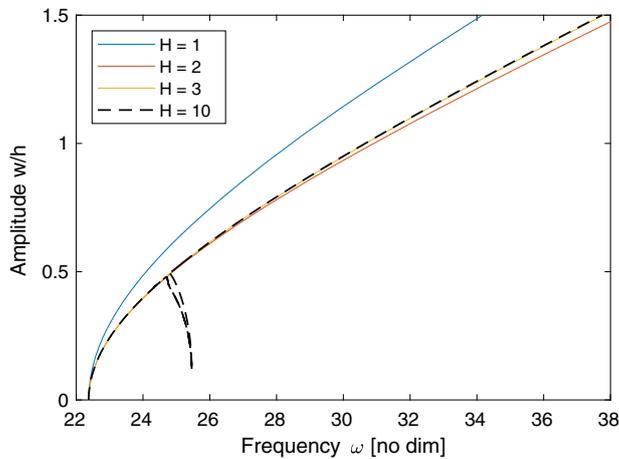


Fig. 13 Convergence with the number of harmonic components of the free responses of the beam around its first NNM. Maximum amplitude of the transverse displacement of the periodic response computed at $x = L/\pi$ with $N_w = 10$ transverse LMs. The x -axis is scaled by the first eigenfrequency ω_1 of the beam

sufficient to predict correctly the backbone curve anywhere out of the internal resonance tongue. One would expect that $H = 1$ harmonics would have been sufficient with the HBM, whereas $H = 3$ is necessary here. This can be explained by the quadratic recast imposed by the HBM (see Eq. (33)), which imposes the introduction of the quadratic variables S_{ij} which need at least two harmonics to accurately embed the nonlinear response.

When more harmonics are retained, the free response changes only with the apparition of the internal resonance. In this case, since it is a 1:5 internal resonance,

at least $H = 5$ harmonics are necessary to correctly compute it.

5.7 Modal convergence of NNMs

We investigate now the convergence of the computation of the free response of the first NNMs of the beam and the plate as a function of the number of modes retained in the ROM basis. For the first NNM of the clamped beam, Fig. 14a shows that a correct computation is obtained with only the first oscillator—the first LM of the clamped beam—for a range of transverse displacements w until half the thickness h . The contribution of the second LM is negligible, whereas the effect of the third LM is significant on a larger range of displacement. The convergence of the backbone curve is thus achieved with the first and third linear modes only. The internal resonances need to retain the LMs interacting with the first oscillator: Indeed, the second internal resonance involves here a LM of higher order than the third and then cannot be computed with three oscillators. The second NNM shows analogous results. The third NNM needs to take more LMs into account to limit the error in comparison with the reference solution, as shown in Fig. 14c. Adding an oscillator to the system has either a softening or an hardening effect on the response: It is associated with the sign of the nonlinear coefficients Γ which involve the retained LMs. In particular, the LMs of lower order than the computed NNM must be retained in the basis: The softening effect of the first oscillator on the third NNM cannot be neglected.

In the case of the plate, the convergence is shown in Fig. 15 for the first two axisymmetric NNMs (mode (0,1) and mode (0,2)) and the first asymmetric one (mode (1,1)), by comparing several modal basis and $H = 3$ and $H = 10$ harmonic components. As for the beam case, the reduction to only one oscillator is correct on a moderate range of displacements, the responses needing to include more LMs in the basis after a certain value of the displacements. One can notice that an example of modal interaction between axisymmetric and asymmetric modes is exhibited in the case of NNM (0,2) (Fig. 15b): The internal resonance which is noticeable here needs asymmetric modes in the basis to be obtained.

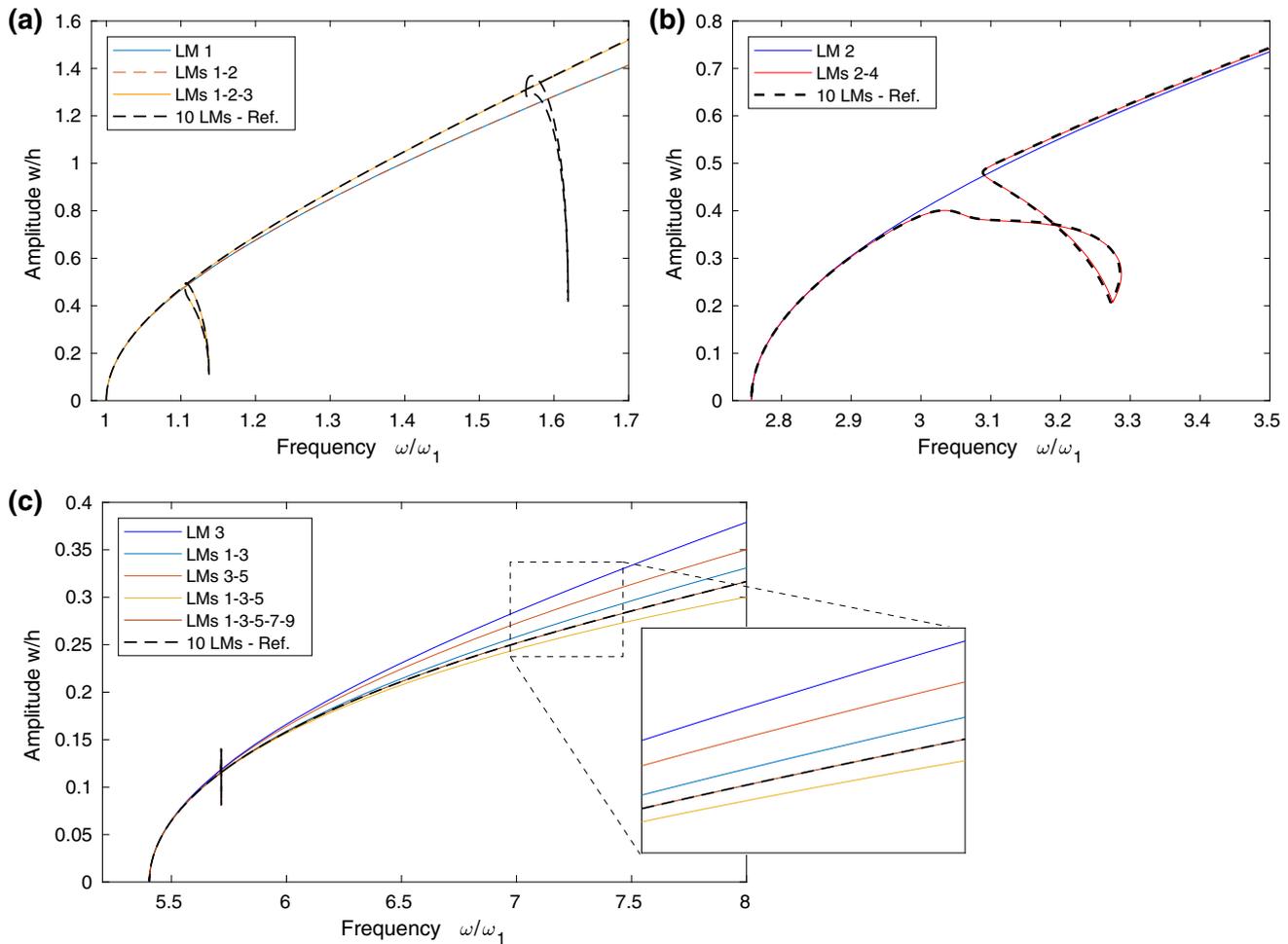


Fig. 14 Modal convergence with the number of transverse modes of the free responses of the beam around the **a** first, **b** second and **c** third NNMs of the beam. Maximum amplitude of

the transverse displacement of the periodic response computed at $x = L/\pi$ with $H = 10$ harmonic components. The x -axis is scaled by the first eigenfrequency ω_1 of the beam

6 Nonlinear dynamics of a perforated plate

In this section, we test the proposed method on a plane structure with an original geometry, for which we want to compute the nonlinear dynamics. It has the form of a perforated rectangular plate with three rectangular holes that delineate two beams at the center, as shown in Fig. 16. The main parameters of the model are gathered in Table 7. The dimensions of this structure have been adjusted in order to obtain two linear modes (LM) which present mode shapes similar to those of the first LM of a clamped–clamped beam, respectively, with an in-phase and an out-of-phase motion between the two beams. This is verified by analyzing the modal basis of the structure, shown in Table 8, for which the 7th and 8th modes have the required shape. They are similar

to the two first modes of a structure composed of two clamped–clamped beams connected by a linear spring of small stiffness. This particular structure has been selected to analyze and compute the nonlinear dynamics of those two beam-like modes and their bifurcation to a localized motion on one of the beams [67,68].

6.1 Computation of the nonlinear coefficients of the ROM

Since the studied structure is a plate with a particular boundary, all the theory described in the present article can be applied. We then compute its nonlinear dynamics with the reduced-order model of Eq. (28) in which the Γ_{ijl}^k includes the in-plane motion effect,

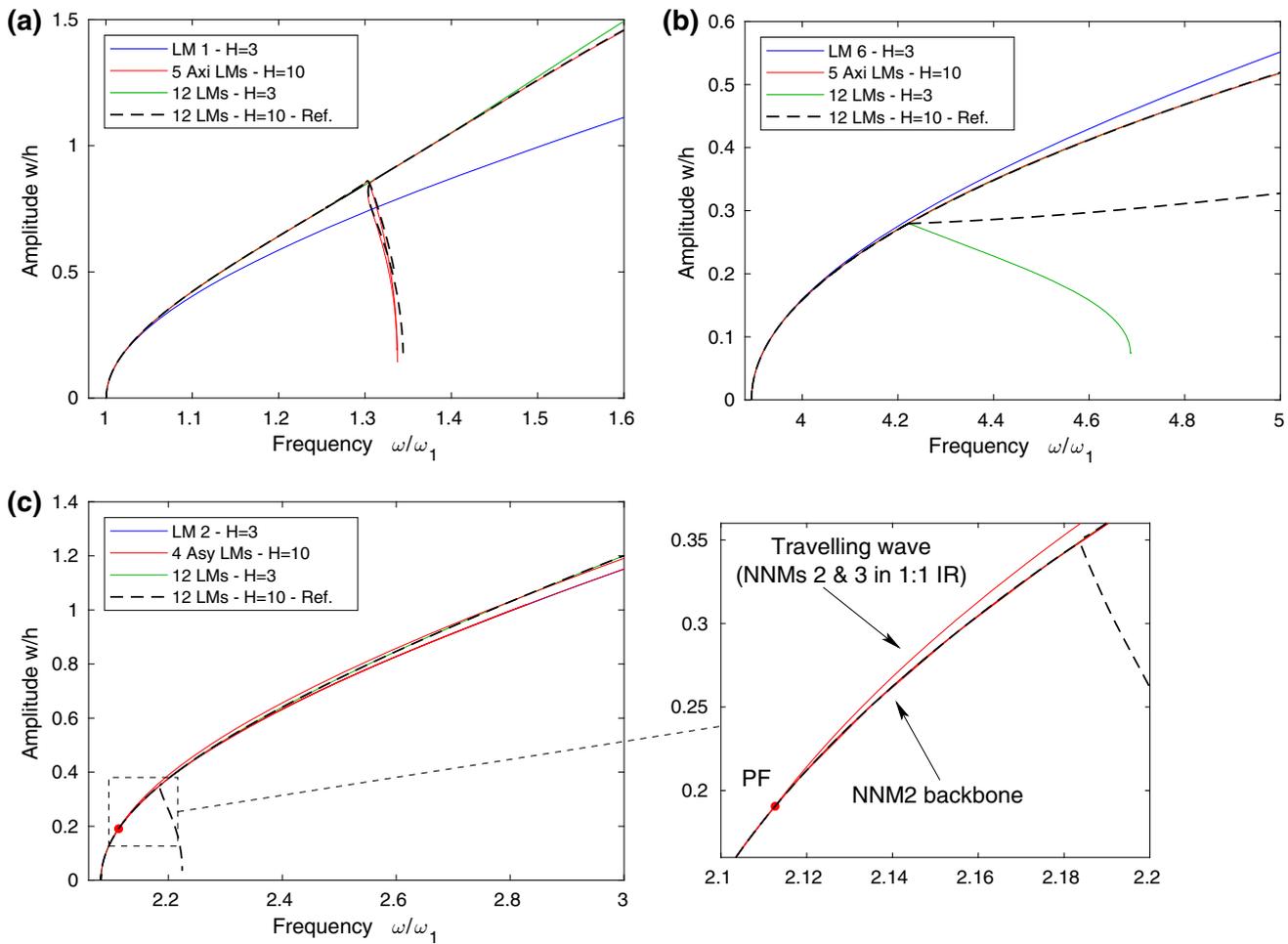


Fig. 15 Modal convergence with the number of transverse modes of the free responses of the circular plate around some NNMs: **a** first axisymmetric (0,1) (NNM 1), **b** second axisymmetric (0,2) (NNM 6) and **c** first asymmetric (1,0) (NNM 2).

Maximum amplitude of the transverse displacement of the periodic response computed at $r = 0.5461$ with $H = 3$ or $H = 10$ harmonic components. The x -axis is scaled by the first eigenfrequency ω_1 of the plate

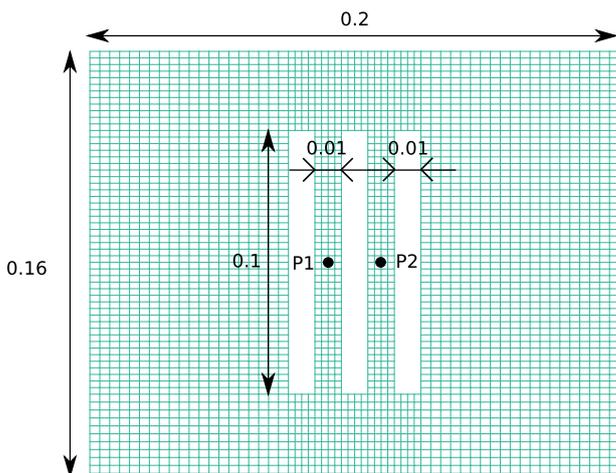


Fig. 16 Geometry and mesh of the structure

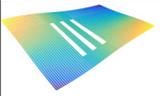
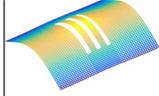
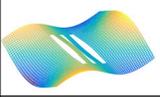
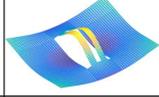
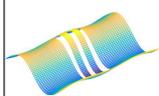
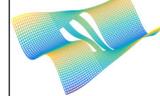
Table 7 Parameters of the model

Parameters	Values
Thickness	1 mm
Young modulus	210 GPa
Poisson's ratio	0.38
Number of transverse LMs	16
Number of in-plane LMs	1000

which has been condensed thanks to Eqs. (29a–d). Only the nonzero coefficients a_{ij}^k and b_{ijl}^k are computed (see Table 1) with the STEP.

Figure 17 shows the convergence of the condensation of coefficients Γ_{ijl}^k as a function of the number N_u

Table 8 Natural frequencies and shapes of the first twelve transverse LMs of the free perforated plate

Order of appearance #	1	2	3	4
Natural frequency [Hz]	184.8	189.1	405.3	480.1
ω/ω_1	1.00	1.023	2.193	2.598
Shape				
Order of appearance #	5	6	7	8
Natural frequency [Hz]	508.3	561.7	736.7	867.3
ω/ω_1	2.750	3.039	3.987	4.693
Shape				
Order of appearance #	9	10	11	12
Natural frequency [Hz]	918.6	1017.0	1156.0	1309.1
ω/ω_1	4.970	5.503	6.255	7.083
Shape				

The 7th and 8th LMs, investigated in this study, are shown in bold

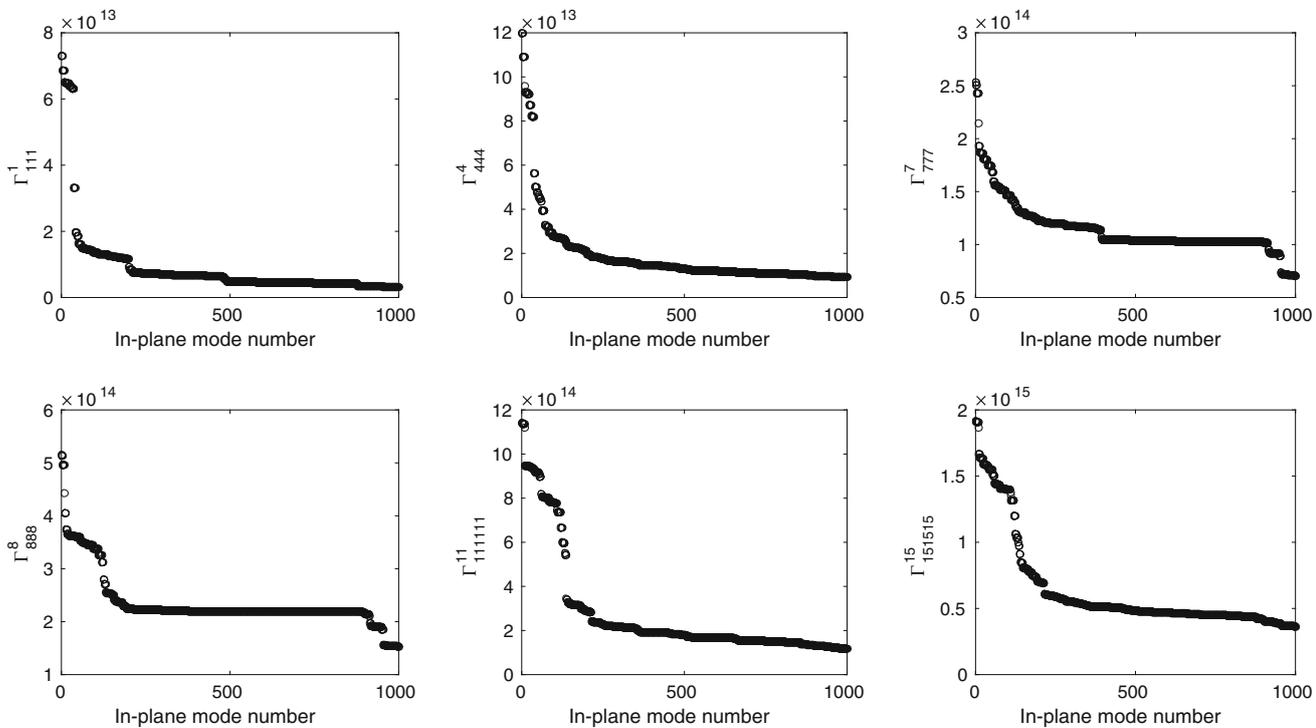


Fig. 17 Evolution of the physical nonlinear coefficients Γ_{iii}^i of the perforated plate in regard to the number of in-plane modes

of in-plane modes retained in Eq. (29). This number has been chosen voluntarily high—1000 in-planes LMs—in order to discuss the convergence of cubic coefficients throughout the condensation. Although numerous in-plane modes are included in the modal basis, the evolution of the nonlinear cubic condensed coeffi-

cients presented in Fig. 17 seems to need more in-plane modes to converge toward a stable value. This could be explained by the high density of the platelike LMs. As for the beam and circular plate, the value of the coefficients decreases with the number of condensed in-plane LMs, which then have a softening effect on the non-

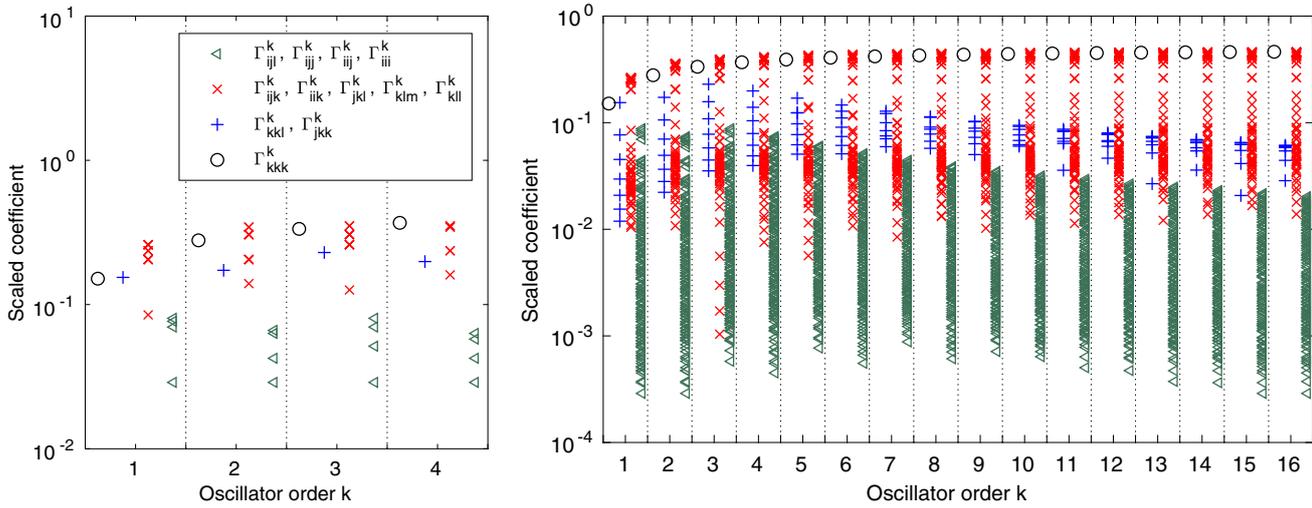


Fig. 18 Scaled cubic coefficients Γ_{ijl}^k of Eq. (43), for the clamped–clamped beam, as a function of k . (left) ROM with 4 bending modes $i, j, l, k \in \{1, \dots, 4\}$; (right) ROM with 16 bending modes $i, j, l, k \in \{1, \dots, 16\}$

linear system. Notice that the ratio between the initial and final value of the cubic coefficients is greater than those of the beam and the plate. The low-order in-plane modes have a strong influence on the cubic coefficients related to platelike transverse modes. For the coefficients Γ_{777}^7 and Γ_{888}^8 , there is a large range of in-plane LMs which does not influence the condensation.

6.2 Sorting and selection of the ROM coefficients

After those operations, the computation time of the nonlinear dynamics by the ANM/HBM is mainly sensitive to the number of nonlinear terms associated with coefficients Γ_{ijl}^k in Eqs. (33). Among this set of cubic coefficients, many of them are still negligible. Consequently, an heuristic filtering procedure is applied. First, coefficients Γ_{ijl}^k are scaled with Eqs. (31), (32), with $x_r = h$, $t_0 = 1/\omega_1$ and $v_r = 1$. Then, observing Eq. (32) naturally shows that the nonlinear coefficients are scaled by t_0^2 , equivalent to the inverse of the square of a frequency and because Γ_{ijl}^k depends on modes i, j, l, k , we propose to remove from system (28) all coefficients such that:

$$\frac{\bar{\Gamma}_{ijl}^k}{\sqrt{\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \bar{\omega}_l \bar{\omega}_k}} < \epsilon, \quad \text{with} \quad \bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_1}, \quad \bar{\Gamma}_{ijl}^k = \frac{h^2}{\omega_1^2} \Gamma_{ijl}^k. \tag{43}$$

with the filtering criteria chosen as $\epsilon = 10^{-3}$.

To verify this scaling, Fig. 18 shows the application of this filtering process on the cubic coefficients of the clamped–clamped beam of Sects. 2 and 4 (see Table 10). First of all, one can observe that the scaling of Eq. (43) almost counterbalances the increasing the cubic coefficient with their order k : Coefficients Γ_{kkk}^k are of the order of magnitude of 1 independently of k . Then, the other scaled coefficients decrease with the natural frequency distance between the involved modes i, j, l and k . With $\epsilon = 10^{-3}$, a 1000 factor is kept between the higher and the smaller cubic coefficient. In this case, all beam coefficients for $i, j, l, k \in \{1, \dots, 4\}$ are kept, whereas the smallest of them are neglected for higher ranges of variation of i, j, l, k .

6.3 A two LMs reduced-order model

At first, a reduced-order model composed of the 7th and 8th oscillators only, associated with mode 7 and 8 of interest, has been selected. The two backbone curves of the corresponding NNMs are shown in Fig. 19 for an increasing number of harmonics. This plot shows the classical picture of a nonlinear localization of the motion. NNM7, of lower frequency, has a standard hardening backbone curve. On the contrary, NNM8 shows a pitchfork bifurcation that give birth to two branches on which the motion is a coupling between mode 7 and 8, which are associated with a localization of the motion on beam 1 or beam 2 (depending on the considered branch). A minimal number of three

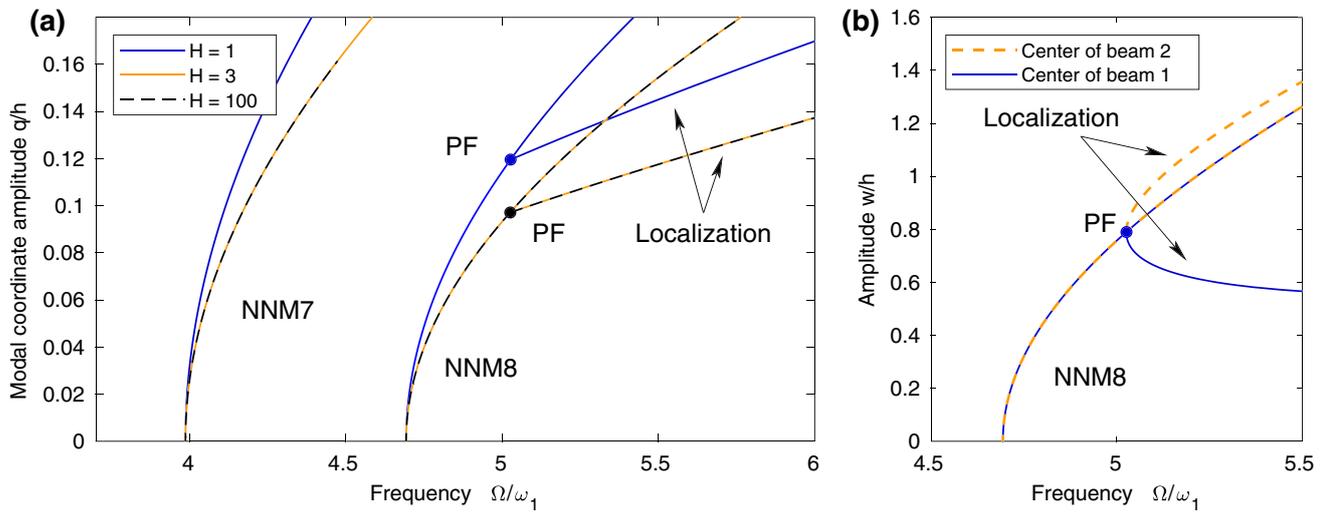


Fig. 19 Response of the two LMs reduced-order model. **a** Convergence as a function of the number of harmonics components of the modal coordinates q_7 and q_8 on the backbones of NNMs

7 and 8. **b** Maximal displacement of the periodic response of the center of the two beams (points P_1 and P_2 of Fig. 16)

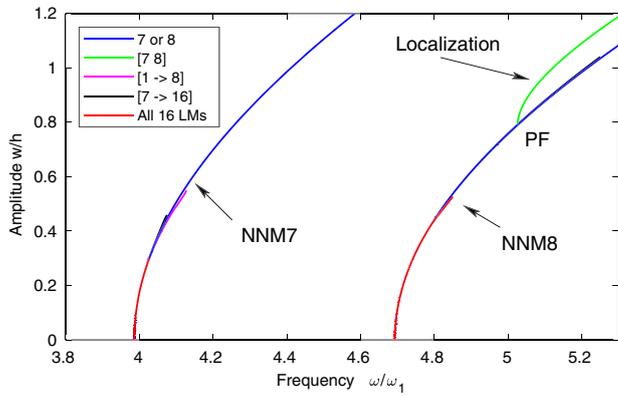


Fig. 20 Modal convergence with the number of transverse LMs retained in the basis, for NNMs 7 and 8. Displacements at the center of one of the beams

harmonic components in the harmonic balance formulation is necessary to reach convergence.

6.4 Convergence in terms of LMs

We now consider an enrichment of the 2 degrees of freedom basis of the previous section by including the first 16 transverse modes in the ROM basis. The Fig. 20 shows that this enrichment does not significantly change the geometry of the backbone curves but renders the computations tedious since more degrees of freedom are involved. It thus validates, in this case, the two LM model of the previous section.

7 Conclusion

In this paper, a complete procedure to compute the geometrically nonlinear frequency response of flat structures by using reduced finite element models has been proposed.

A study at the coefficient level has confirmed that a large part of the ROM coefficients are equal to zero, which enables to significantly reduce the computational burden of the stiffness evaluation procedure, in terms of number of coefficients to compute (and stock) and number of nonlinear static problems. The resulting reduced-order model can be further simplified by condensing the in-plane motion to the transverse one, such that only transverse modes coupled by cubic nonlinearities appear in the system. A convergence of the cubic coefficients is reached when a sufficient number of in-plane modes is retained. At this stage of the procedure, all coefficients of the ROMs of a straight beam and circular plate have been validated by a direct comparison with analytical models. It is shown that the ROM coefficient value is independent of the prescribed displacement amplitude on a large range, attesting the robustness of the method and providing some guidelines for the STEP. Moreover, an heuristic rule, to filter the significant ROM coefficients, is also provided. It is validated for flat structures and could be applied with no restriction to more complex geometries, extending the relevance of the present study.

An original coupling of the obtained nonlinear systems with a ANM-HBM following-path method allows to equally compute the forced as well as the free response of the plane structures. In accordance with previous studies, the distribution of the forced response around the free response and the backbone curve was attested with this method.

Finally, the computation of the free responses—also known as nonlinear modes—highlights many typical nonlinear phenomena as hardening behaviors and internal resonances. These latter can complexify the resolution procedure when too many oscillators and harmonics are retained in the reduced-order model, because of the computation of all modal interactions which occur between the retained oscillators. At each resonance, a very reduced model, where only one transverse oscillator is kept and with $H = 3$ harmonics, has been found sufficient to compute the backbone curves with a negligible error on an acceptable range of motion amplitude. In the case of a 1:1 internal resonance, in axisymmetric structures or linked to vibration localization, a model with only the two transverse modes involved in the internal resonance seems sufficient in a large range of amplitude.

Acknowledgements The French Ministry of Research is warmly thanked for the financial support of this study, through the Ph.D. Grant of the first author.

Compliance with ethical standards

Conflict of interest The authors declare that they have no conflict of interest

Appendix A: The beam (u,w) model

The beam model of Eq. (1) is here discussed. Using Hamilton principle, one obtained the classical equations of motion for the axial and transverse motion of the beam, which are:

$$\rho S \ddot{w} + EI w_{,xxxx} - (N w_{,x})_{,x} = p(x, t) \tag{44a}$$

$$\rho S \ddot{u} - N_{,x} = n(x, t). \tag{44b}$$

where $p(x, t)$ and $n(x, t)$ are distributed transverse and in-plane forces per unit length and where the axial force in the beam is:

$$N = ES \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right). \tag{45}$$

Equations (45) and (44a, b) constitute the classical von Kármán model describing the transverse motion of a beam with geometrical nonlinearities [12, 15, 16]. Then, eliminating N between Eqs. (45) and (44a, b) leads to the (u, w) model of Eq. (1).

After the modal expansion of Sect. 2.1, the analytical expressions of the coefficients of nonlinear terms in Eq. (7a, b) are:

$$C_{pi}^k = - \frac{\int_0^1 (\Psi_{p,x} \Phi_{i,x})_{,x} \Phi_k dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx},$$

$$G_{ij}^p = \frac{\int_0^1 \Psi_p \Phi_{i,x} \Phi_{j,xx} dx}{\int_0^1 \Psi_p^2 dx} \tag{46a}$$

$$D_{ijl}^k = - \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 (\Phi_{i,x} \Phi_{j,x} \Phi_{l,x})_{,x} \Phi_k dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx}, \tag{46b}$$

$$Q_k(t) = \frac{\int_0^1 \Phi_k(x) p(x, t) dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx},$$

$$E_p(t) = \frac{\int_0^1 \Psi_p(x) n(x, t) dx}{\int_0^1 \Psi_p^2 dx}. \tag{46c}$$

The modes are here normalized as:

$$\int_0^1 \Phi_k^2(x) dx = \int_0^1 \Psi_p^2(x) dx = 1. \tag{47}$$

In the case of a clamped–clamped boundary conditions, the transverse mode shapes are solution of Eq. (6a) and can be written:

$$\Phi_k(x) = \kappa_k [(\sin \beta_k - \sinh \beta_k)(\cos \beta_k x - \cosh \beta_k x) - (\cos \beta_k - \cosh \beta_k)(\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x)]. \tag{48}$$

with $\cos \beta_k \cosh \beta_k - 1 = 0$, $\omega_k = \beta_k^2$ for all $k > 1$ and κ_k is numerically computed to verify Eq. (47). The

Table 9 Numerical values, computed with a trapezoidal rule, of some nonlinear coefficients of a the clamped–clamped beam model (Eqs. (46a, b)). Scaling of Eqs. (2) and mode normalization of Eqs. (47)

	$\gamma_1 = 3.141$	$\gamma_2 = 6.283$	$\gamma_3 = 9.425$	$\gamma_4 = 12.566$	$\gamma_5 = 15.708$
$\omega_1 = 22.37$	$D_{111}^1 = 111.2$				
	$G_{11}^1 = 0$	$G_{11}^2 = -4.832$	$G_{11}^3 = 0$	$G_{11}^4 = 51.35$	$G_{11}^5 = 0$
	$C_{11}^1 = 0$	$C_{21}^1 = 9.663$	$C_{31}^1 = 0$	$C_{41}^1 = -102.7$	$C_{51}^1 = 0$
$\omega_2 = 61.67$	$D_{222}^2 = 1773.7$				
	$G_{22}^1 = 0$	$G_{22}^2 = 55.02$	$G_{22}^3 = 0$	$G_{22}^4 = -130.8$	$G_{22}^5 = 0$
	$C_{12}^2 = 0$	$C_{22}^2 = -110.0$	$C_{32}^2 = 0$	$C_{42}^2 = 261.6$	$C_{52}^2 = 0$
$\omega_3 = 120.9$	$D_{333}^3 = 7970.2$				
	$G_{33}^1 = 0$	$G_{33}^2 = 91.97$	$G_{33}^3 = 0$	$G_{33}^4 = 55.24$	$G_{33}^5 = 0$
	$C_{13}^3 = 0$	$C_{23}^3 = -183.9$	$C_{33}^3 = 0$	$C_{43}^3 = -110.5$	$C_{53}^3 = 0$

axial mode shapes are solutions of Eq. (6b) and can be written:

$$\Psi_p(x) = \sqrt{2} \sin \gamma_p x, \quad \gamma_p = p\pi. \tag{49}$$

They naturally verify Eq. (47). The values of some of these coefficients are given in Table 9.

Appendix B: On the plate (u, w)-formulation ROM

Some details about the analytical plate model of Sect. 2.2 are given here. The in-plane forces in the plate are represented by a two-dimensional tensor N , which, with the von Kármán assumptions, can be written [14]:

$$N = A [(1 - \nu)\epsilon + \nu \text{tr} \epsilon \mathbf{1}],$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla w) \tag{50}$$

where ϵ is the in-plane strain tensor, $A = Eh/(1 - \nu^2)$ is the in-plane stiffness of the plate, ∇ denotes the vector/tensor gradients of scalar/vector fields, tr is the trace of a tensor \otimes is the tensor product of two vectors and $\mathbf{1}$ is the identity tensor.

By eliminating N between Eqs. (50) and (11a, b), one obtains the following (u, w)-formulation:

$$\rho h \ddot{w} + D \Delta \Delta w - A [(1 - \nu) (\nabla \mathbf{u} : \nabla \nabla w + \Delta \mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nu (\text{div} \mathbf{u} \Delta w + \nabla \text{div} \mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nabla w \cdot \nabla \nabla w \cdot \nabla w + \frac{1}{2} (\nabla w)^2 \Delta w] = 0. \tag{51a}$$

$$\rho h \ddot{\mathbf{u}} - \frac{A}{2} [(1 - \nu) \Delta \mathbf{u} + (1 + \nu) \nabla \text{div} \mathbf{u}$$

$$+ (1 - \nu) \Delta w \nabla w + (1 + \nu) \nabla \nabla w \cdot \nabla w] = 0. \tag{51b}$$

where $:$ denotes the doubly contracted product of two tensors, Δ the vector Laplacian of a vector field and \cdot the dot product.

With the following dimensionless variables:

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Eh^3},$$

$$\bar{\epsilon} = 12(1 - \nu^2), \quad \bar{t} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} t, \quad \bar{p} = \frac{L^4}{Dh} p, \tag{52}$$

$$\bar{\tilde{\epsilon}} = \frac{Ah^2}{D} = \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \nu^2} = 12, \quad \bar{\mu} = \frac{D}{AL^2},$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{L}{h^2} \mathbf{u}, \quad \bar{N} = \frac{L^2}{Eh^3} N. \tag{53}$$

where L is a characteristic dimension of the middle plane of the plate (its diameter for instance). The (u, w)-formulation is then rewritten:

$$\ddot{w} + \Delta \Delta w - \bar{\tilde{\epsilon}} [(1 - \nu) (\nabla \mathbf{u} : \nabla \nabla w + \Delta \mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nu (\text{div} \mathbf{u} \Delta w + \nabla \text{div} \mathbf{u} \cdot \nabla w) + \nabla w \cdot \nabla \nabla w \cdot \nabla w + \frac{1}{2} (\nabla w)^2 \Delta w] = 0. \tag{54a}$$

$$\mu \ddot{\mathbf{u}} - [(1 - \nu) \Delta \mathbf{u} + (1 + \nu) \nabla \text{div} \mathbf{u} + (1 - \nu) \Delta w \nabla w + (1 + \nu) \nabla \nabla w \cdot \nabla w] = 0. \tag{54b}$$

The bending and in-plane displacements are expanded onto a linear basis of, respectively, N_w transverse

modes Φ_k and N_u axial modes Ψ_p :

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(\mathbf{r})q_k(t) \quad \text{and}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{p=N_w+1}^{N_u+N_w} \Psi_p(x)\eta_p(t). \tag{55}$$

The modes are chosen to satisfy the following two eigenproblems associated with the linear parts of Eqs. (54a, b):

$$\Delta \Delta \Phi_k - \omega_k^2 \Phi_k = 0 \tag{56a}$$

$$(1 - \nu)\Delta \Psi_p + (1 + \nu)\nabla \text{div} \Psi_p - \gamma_p^2 \Psi_p = 0 \tag{56b}$$

where ω_k and γ_p are the transverse and in-plane dimensionless eigenfrequencies (the frequency equation of the in-plane vibrations of a clamped circular plate has been derived in [69]). Then, by multiplying (54a, b), respectively, by Φ_k and Ψ_p , integrating on the mid-plane surface S and using the orthogonality properties, the ROM of Eqs. (7a, b) is obtained, with:

$$C_{pi}^k = - \frac{\int_S \left[(1 - \nu) \left(\nabla \Psi_p : \nabla \nabla \Phi_i + \Delta \Psi_p \cdot \nabla \Phi_i \right) + \nu \left(\text{div} \Psi_p \Delta \Phi_i + \nabla \text{div} \Psi_p \cdot \nabla \Phi_i \right) \right] \Phi_k \, dS}{\int_S \Phi_k^2 \, dS}, \tag{57a}$$

$$G_{ij}^p = \frac{\int_S \left[(1 - \nu) \Delta \Phi_i \nabla \Phi_j + (1 + \nu) \nabla \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \right] \cdot \Psi_p \, dS}{\int_S \Psi_p^2 \, dS}, \tag{57b}$$

$$D_{ijl}^k = - \frac{\int_S \left[\nabla \Phi_i \cdot \nabla \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_l + \frac{1}{2} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \Delta \Phi_l \right] \Phi_k \, dS}{\int_S \Phi_k^2 \, dS}. \tag{57c}$$

The above developments are not analytically investigated in this study: They have been reported here for a sake of completeness and to precisely demonstrate the results of Sect. 2.3.

Appendix C: On the plate (w, F) -formulation ROM

In the literature dealing with analytical models of plates, the (\mathbf{u}, w) -formulation of the previous section is never used since it would lead to tedious—maybe

impossible—computations in an analytical context (see Eq. (51)) and also because there are three unknown displacement fields (w and the two components of \mathbf{u}). In most of the cases, the in-plane inertia is neglected and Eq. (11b) reduces to $\text{div} \mathbf{N} = \mathbf{0}$, which enables the introduction of an Airy stress function $F(\mathbf{r}, t)$ defined by:

$$\Delta F \mathbf{1} + \nabla \nabla F = \mathbf{N}. \tag{58}$$

Then, by adding a compatibility condition, one obtains the following (w, F) -formulation (all details can be found in [14]):

$$\ddot{w} + \Delta \Delta w = \varepsilon \phi(w, F) + p(\mathbf{r}, t) \tag{59a}$$

$$\Delta \Delta F = -\frac{1}{2} \phi(w, w) \tag{59b}$$

where the overbars have been dropped and where $\phi(\cdot, \cdot)$ is a bilinear operator [14]. Similarly to the beam case, the transverse displacements and the force function are expanded on a linear basis of vibration modes Φ_k and Υ_j :

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(\mathbf{r})q_k(t) \quad \text{and}$$

$$F(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_F} \Upsilon_j(\mathbf{r})\eta_j(t) \tag{60}$$

where the q_k and η_j are time-dependent modal coordinates, respectively, associated with bending and in-plane eigenmodes, which verify:

$$\Delta \Delta \Phi_k - \omega_k^2 \Phi_k = 0, \tag{61a}$$

$$\Delta \Delta \Upsilon_j + \zeta_j^4 \Upsilon_j = 0. \tag{61b}$$

After multiplying equation (59a) by a mode Φ_l , equation (59b) by a mode Υ_m and integrating on the surface of the plate, the orthogonality property of the eigenmodes yields:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k - \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} E_{rj}^k q_r \eta_j = Q_k(t) \tag{62a}$$

$$\zeta_j^4 \eta_j = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j q_p q_q, \quad (62b)$$

where nonlinear quadratic coefficients (E_{rj}^k, H_{pq}^j) and modal load Q_k are defined in ‘‘Appendix C’’. Finally, eliminating $\eta_j(t)$ between Eqs (62a, b) leads to the same set of N_w coupled transverse oscillators with cubic nonlinearities than in the case of beams, Eq. (9), with the following values of the condensed cubic coefficients:

$$\Gamma_{pqr}^k = \sum_{j=1}^{N_F} \frac{E_{rj}^k H_{pq}^j}{2\zeta_j^4}. \quad (63)$$

Again, the above-defined nonlinear coefficients depend on the mode normalization, defined by Eq. (65).

The analytical expressions of the coefficients of nonlinear terms in Eq. (63) are:

$$E_{rj}^k = \frac{\int_S \Phi_k L(\Phi_r, \Upsilon_j) dS}{\int_S \Phi_k^2 dS},$$

Table 10 Numerical values of the cubic coefficients Γ_{ijl}^k of Eq. (9), for the clamped–clamped beam [(u, w)-formulation, Eq. (10), scaling of Eq. (2) and mode normalization of Eq. (47)]

Beam coefficients Γ_{ijl}^k			Plate coefficients Γ_{ijl}^k		
$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\omega_1 = 22.37$	$\omega_2 = 61.67$	$\omega_3 = 120.9$	$\omega_1 = 10.22$	$\omega_2 = 21.26$	$\omega_3 = 21.26$
$\Gamma_{111}^1 = 75.68$	$\Gamma_{111}^2 = 0$	$\Gamma_{111}^3 = 59.86$	$\Gamma_{111}^1 = 8.606$	$\Gamma_{111}^2 = 0$	$\Gamma_{111}^3 = 0$
$\Gamma_{112}^1 = 0$	$\Gamma_{112}^2 = 283.3$	$\Gamma_{112}^3 = 0$	$\Gamma_{112}^1 = 0$	$\Gamma_{112}^2 = 28.01$	$\Gamma_{112}^3 = 0$
$\Gamma_{122}^1 = 283.3$	$\Gamma_{122}^2 = 0$	$\Gamma_{122}^3 = 224.1$	$\Gamma_{122}^1 = 28.01$	$\Gamma_{122}^2 = 0$	$\Gamma_{122}^3 = 0$
$\Gamma_{222}^1 = 0$	$\Gamma_{222}^2 = 1060.3$	$\Gamma_{222}^3 = 0$	$\Gamma_{222}^1 = 0$	$\Gamma_{222}^2 = 62.01$	$\Gamma_{222}^3 = 0$
$\Gamma_{113}^1 = 179.6$	$\Gamma_{113}^2 = 0$	$\Gamma_{113}^3 = 703.1$	$\Gamma_{113}^1 = 0$	$\Gamma_{113}^2 = 0$	$\Gamma_{113}^3 = 28.01$
$\Gamma_{133}^1 = 703.1$	$\Gamma_{133}^2 = 0$	$\Gamma_{133}^3 = 1443.6$	$\Gamma_{133}^1 = 28.01$	$\Gamma_{133}^2 = 0$	$\Gamma_{133}^3 = 0$
$\Gamma_{223}^1 = 224.1$	$\Gamma_{223}^2 = 0$	$\Gamma_{223}^3 = 2277.3$	$\Gamma_{223}^1 = 0$	$\Gamma_{223}^2 = 0$	$\Gamma_{223}^3 = 62.01$
$\Gamma_{233}^1 = 0$	$\Gamma_{233}^2 = 2277.3$	$\Gamma_{233}^3 = 0$	$\Gamma_{233}^1 = 0$	$\Gamma_{233}^2 = 62.01$	$\Gamma_{233}^3 = 0$
$\Gamma_{333}^1 = 481.2$	$\Gamma_{333}^2 = 0$	$\Gamma_{333}^3 = 4891.1$	$\Gamma_{333}^1 = 0$	$\Gamma_{333}^2 = 0$	$\Gamma_{333}^3 = 62.01$
$\Gamma_{123}^1 = 0$	$\Gamma_{123}^2 = 448.1$	$\Gamma_{123}^3 = 0$	$\Gamma_{123}^1 = 0$	$\Gamma_{123}^2 = 0$	$\Gamma_{123}^3 = 0$

$$H_{pq}^j = \frac{\int_S \Upsilon_j L(\Phi_p, \Phi_q) dS}{\int_S \Upsilon_j^2 dS},$$

$$Q_k(t) = \frac{\int_S \Phi_k p(\mathbf{r}, t) dS}{\int_S \Phi_k^2 dS}. \quad (64)$$

The modes are here normalized as:

$$\int_S \Phi_k^2 dS = \int_S \Upsilon_p^2 dS = 1. \quad (65)$$

Appendix D: Numerical values of beam and plate cubic ROM coefficients

The numerical values of the Γ_{ijl}^k coefficients of Eq. (9), in the case of the clamped–clamped beam and the circular plate, are gathered in Table 10. They have been computed by the analytical models (Eq. (10) and (63)) and are identical to those computed by the STEP (Sect. 3.2).

and the clamped circular plate [(w, F)-formulation of section C, Eq. (63), scaling of Eqs. (52) and mode normalization of Eqs. (65)]

Appendix E: Details of STEP

We develop here the details to compute only the nonzero coefficients of (23) with the method of [26]. We refer to the notations C_{pi}^k , D_{ijl}^k and G_{ij}^p of Eq. (7). Four distinct steps are necessary, by separating bending modes (BM) and in-plane modes (MM). We also consider unitary modal masses ($m_r = 1 \forall r$).

Step 1 Imposing a displacement on a single BM, $\mathbf{x}_1 = \lambda \Phi_\alpha$, and expanding the result on either a BM Φ_k or a MM Ψ_p leads to:

$$\lambda^3 D_{\alpha\alpha\alpha}^k = \Phi_k^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda \Phi_\alpha), \tag{66}$$

$$\lambda^2 G_{\alpha\alpha}^p = \Psi_p^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda \Phi_\alpha). \tag{67}$$

Consequently, only N_w static computations are necessary to obtain coefficients $D_{\alpha\alpha\alpha}^k$ and $G_{\alpha\alpha}^p$.

Step 2 Imposing displacements on two BM, $\mathbf{x}_2 = \lambda_\alpha \Phi_\alpha \pm \lambda_\beta \Phi_\beta$, with $\beta > \alpha$, and expanding the result on either a BM Φ_k or a MM Ψ_p leads to:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^2 \lambda_\beta D_{\alpha\alpha\beta}^k + \lambda_\alpha \lambda_\beta^2 D_{\alpha\beta\beta}^k &= \Phi_k^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Phi_\beta) \\ &\quad - \lambda_\alpha^3 D_{\alpha\alpha\alpha}^k - \lambda_\beta^3 D_{\beta\beta\beta}^k, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_\alpha^2 \lambda_\beta D_{\alpha\alpha\beta}^k + \lambda_\alpha \lambda_\beta^2 D_{\alpha\beta\beta}^k &= \Phi_k^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda_\alpha \Phi_\alpha - \lambda_\beta \Phi_\beta) \\ &\quad - \lambda_\alpha^3 D_{\alpha\alpha\alpha}^k + \lambda_\beta^3 D_{\beta\beta\beta}^k \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \lambda_\beta G_{\alpha\beta}^p &= \Psi_p^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Phi_\beta) \\ &\quad - \lambda_\alpha^2 G_{\alpha\alpha}^p + \lambda_\beta^2 G_{\beta\beta}^p \end{aligned} \tag{70}$$

where the last part of the second members is known from the first step. At this step, since $\beta > \alpha$, $N_w(N_w - 1)$ static computations are required.

Step 3 Imposing displacements on one BM and one MM, $\mathbf{x}_3 = \lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Psi_\beta$, and expanding the result on a BM Φ_k leads to:

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta C_{\alpha\beta}^k = \Phi_k^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Psi_\beta) - \lambda_\alpha^3 D_{\alpha\alpha\alpha}^k \tag{71}$$

Since $\alpha = 1, \dots, N_w$ and $\beta = 1, \dots, N_u$, the computation of the coefficients $C_{\alpha\beta}^k$ thus requires $N_w N_u$ static computations.

Step 4 Imposing a displacement on a three BM, $\mathbf{x}_4 = \lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Phi_\beta + \lambda_\gamma \Phi_\gamma$, and expanding the result on a BM Φ_k leads to:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma D_{\alpha\beta\gamma}^k &= \Phi_k^T \mathbf{f}_{nl}(\lambda_\alpha \Phi_\alpha + \lambda_\beta \Phi_\beta + \lambda_\gamma \Phi_\gamma) \\ &\quad - \sum_{\substack{i,j,l \in \{\alpha,\beta,\gamma\} \\ l \geq j \geq i \\ ij l \neq \alpha\beta\gamma}} \lambda_i \lambda_j \lambda_l D_{ijl}^k. \end{aligned} \tag{72}$$

This computation of the $D_{\alpha\beta\gamma}^k$ coefficients thus requires $N_w^3/6 - N_w^2/2 + N_w/3$ static computations.

Appendix F: Computation of the energy for the FEPs

The nonlinear part of the potential energy in Eq. (41) writes:

$$\begin{aligned} V_{nl} &= \sum_{i=1}^{N_w} \Gamma_{iii}^i \frac{q_i^4}{4} + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j>i}^{N_w} \left(\Gamma_{ijj}^i \frac{q_i^3 q_j}{3} + \Gamma_{ijj}^j \frac{q_i^2 q_j^2}{3} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{ijj}^j \frac{q_j^3 q_i}{3} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^{N_w} \left(\frac{\Gamma_{ijk}^i}{2} q_i^2 q_j q_k + \frac{\Gamma_{ijk}^j}{2} q_i q_j^2 q_k \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma_{ijk}^k}{2} q_i q_j q_k^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j>i}^{N_w} \sum_{k>j}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} \Gamma_{ijkl}^l q_i q_j q_k q_l. \end{aligned} \tag{73}$$

To obtain this equation, the starting point is the general expression of a dynamical system with cubic nonlinearities:

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=i}^{N_w} \sum_{l=j}^{N_w} \Gamma_{ijl}^k q_i q_j q_l = Q_k, \tag{74}$$

which can also be written $\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$, where \mathbf{f} denotes the internal forces vector. It derives from a potential and can be integrated over time if and only if the following condition on the crossed derivatives

is verified:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad \forall i \neq j. \quad (75)$$

According to the developments of [14], it is established for some classical boundary conditions of plates—including the clamped one—that the symmetry properties of the bilinear operator L lead to the following equality between the nonlinear coefficients of the (w, F) -formulation ROM presented in “Appendix B”:

$$H_{pq}^j = E_{pj}^q, \quad H_{pq}^j = H_{qp}^j. \quad (76)$$

It results after some developments to some equalities between the non-upper triangular form coefficients $\bar{\Gamma}_{ijl}^k$, $i, j, l, k \in [1, N_w]$, which are written:

$$\bar{\Gamma}_{ijl}^k = \bar{\Gamma}_{jil}^k = \bar{\Gamma}_{kjl}^i = \bar{\Gamma}_{klj}^i = \bar{\Gamma}_{lki}^j = \bar{\Gamma}_{kli}^j = \bar{\Gamma}_{jki}^l = \bar{\Gamma}_{kji}^l, \quad (77)$$

thus, the upper triangular form yields

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^i &= 3\Gamma_{iii}^i, & \Gamma_{ijj}^i &= \Gamma_{ijj}^j, & \Gamma_{ijj}^j &= 3\Gamma_{jjj}^i \quad \forall j > i \\ \Gamma_{ijl}^j &= 2\Gamma_{jjl}^i = 2\Gamma_{ijj}^l, & \Gamma_{ijl}^i &= 2\Gamma_{iij}^l = 2\Gamma_{iil}^j, \\ \Gamma_{ijl}^l &= 2\Gamma_{ill}^j = 2\Gamma_{ijl}^l \quad \forall l > j > i \\ \Gamma_{ijl}^k &= \Gamma_{ijk}^l = \Gamma_{ilk}^j = \Gamma_{jlk}^i \quad \forall k > l > j > i, \end{aligned} \quad (78)$$

which allows to verify the condition of Eq. (75). The general expression of the energy in Eq. (73) is then obtained by multiplying the equation of the k th oscillator of Eq. (74) by the modal velocity \dot{q}_k and integrating over time.

References

- Chen, C., Zanette, D.H., Czaplowski, D.A., Shaw, S., López, D.: Direct observation of coherent energy transfer in nonlinear micromechanical oscillators. *Nat. Commun.* **8**, 15523 (2017)
- Thomas, O., Mathieu, F., Mansfield, W., Huang, C., Trolhier-McKinstry, S., Nicu, L.: Efficient parametric amplification in MEMS with integrated piezoelectric actuation and sensing capabilities. *Appl. Phys. Lett.* **102**(16), 163504 (2013). <https://doi.org/10.1063/1.4802786>
- Dezest, D., Thomas, O., Mathieu, F., Mzenq, L., Soyer, C., Costecalde, J., Remiens, D., Deü, J.-F., Nicu, L.: Wafer-scale fabrication of self-actuated piezoelectric nanoelectromechanical resonators based on lead zirconate titanate (PZT). *J. Micromech. Microengineering* **25**(3), 035002 (2015)
- Quinn, D.D., Triplett, A.L., Vakakis, A.F., Bergman, L.A.: Energy harvesting from impulsive loads using intentional essential nonlinearities. *J. Vib. Acoust.* **133**(1), 011004 (2011)
- Ducceschi, M., Touzé, C.: Modal approach for nonlinear vibrations of damped impacted plates: application to sound synthesis of gongs and cymbals. *J. Sound Vib.* **344**, 313–331 (2015)
- Monteil, M., Thomas, O., Touzé, C.: Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan. *Appl. Acoust.* **89**, 1–15 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2014.08.008>
- Grolet, A., Thouverez, F.: Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry: application to a simplified model. *J. Sound Vib.* **331**(12), 2911–2928 (2012)
- Renson, L., Noël, J.P., Kerschen, G.: Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure: numerical continuation and normal modes. *Nonlinear Dyn.* **79**(2), 1293–1309 (2015)
- Noor, A.K.: Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Comput. Struct.* **13**(1–3), 31–44 (1981)
- Slaats, P.M.A., Jongh, J.D., Sauren, A.A.H.J.: Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Comput. Struct.* **54**(6), 1155–1171 (1995)
- von Kármán, T.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Encykl. Math. Wiss.* **4**(4), 311–385 (1910)
- Nayfeh, A.H., Mook, D.T.: *Nonlinear Oscillations*. Wiley, London (2008)
- Chu, H.-N., Herrmann, G.: Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *J. Appl. Mech.* **23**, 532–540 (1956)
- Thomas, O., Bilbao, S.: Geometrically non-linear flexural vibrations of plates: in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *J. Sound Vib.* **315**(3), 569–590 (2008)
- Woinowski-Krieger, S.: The effect of axial force on the vibration of hinged bars. *J. Appl. Mech.* **17**(2), 35–36 (1950)
- Eisley, J.G.: Nonlinear vibration of beams and rectangular plates. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* **15**(2), 167–175 (1964)
- Ho, C.H., Scott, R.A., Eisley, J.G.: Non-planar, non-linear oscillations of a beam. part II: Free motions. *J. Sound Vib.* **47**(3), 333–339 (1976)
- Sridhar, S., Mook, D.T., Nayfeh, A.H.: Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II: asymmetric responses of circular plates. *J. Sound Vib.* **59**(2), 159–170 (1975)
- Touzé, C., Thomas, O., Chaigne, A.: Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I: theory. *J. Sound Vib.* **258**(4), 649–676 (2002). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5143>
- Ducceschi, M., Touzé, C., Bilbao, S., Webb, C.J.: Nonlinear dynamics of rectangular plates: investigation of modal interaction in free and forced vibrations. *Acta Mech.* **22**(1), 213–232 (2014)
- Capiez-Lernout, E., Soize, C., Mignolet, M.P.: Computational stochastic statics of an uncertain curved structure with geometrical nonlinearity in three-dimensional elasticity. *Computational Mechanics* **49**(1), 87–97 (2012)

22. Touzé, C., Vidrascu, M., Chapelle, D.: Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models. *Comput. Mech.* **54**(2), 567–580 (2014)
23. Ribeiro, P., Petyt, M.: Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite element method. *J. Sound Vibr.* **224**(4), 591–624 (1999)
24. Stoykov, S., Ribeiro, P.: Periodic geometrically nonlinear free vibrations of circular plates. *J. Sound Vibr.* **315**, 536–555 (2008)
25. McEwan, M.I., Wright, J.R., Cooper, J.E., Leung, A.Y.T.: A combined modal/finite element analysis technique for the dynamic response of a non-linear beam to harmonic excitation. *J. Sound Vibr.* **243**(4), 601–624 (2001)
26. Muravyov, A.A., Rizzi, S.A.: Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Comput. Struct.* **81**(15), 1513–1523 (2003)
27. Mignolet, M.P., Przekop, A., Rizzi, S., Spottswood, S.: A review of indirect/non-intrusive reduced-order modeling of nonlinear geometric structures. *J. Sound Vibr.* **332**(10), 2437–2460 (2013)
28. Perez, R., Wang, X.Q., Mignolet, M.P.: Nonintrusive structural dynamic reduced-order modeling for large deformations: enhancements for complex structures. *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **9**(3), 031008 (2014)
29. Murthy, R., Wang, X.Q., Perez, R., Mignolet, M.P., Richter, L.A.: Uncertainty-based experimental validation of nonlinear reduced-order models. *J. Sound Vibr.* **331**(5), 1097–1114 (2012)
30. Claeys, M., Sinou, J.-J., Lambelin, J.-P., Alcoverro, B.: Multi-harmonic measurements and numerical simulations of nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19**, 4196–4212 (2014)
31. O'Hara, P., Hollkamp, J.J.: Modeling vibratory damage with reduced-order models and the generalized finite element method. *J. Sound Vibr.* **333**(24), 6637–6650 (2014)
32. Ehrhardt, D.A., Allen, M.S., Bebermiss, T.J., Neild, S.A.: Finite element model calibration of a nonlinear perforated plate. *J. Sound Vibr.* **392**, 280–294 (2017)
33. Kim, K., Radu, A.G., Wang, X.Q., Mignolet, M.P.: Nonlinear reduced-order modeling of isotropic and functionally graded plates. *Int. J. Non-linear Mech.* **49**, 100–110 (2013)
34. Lazarus, A., Thomas, O., Deü, J.-F.: Finite elements reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to NEMS. *Finite Elem. Anal. Des.* **49**(1), 35–51 (2012)
35. Hollkamp, J., Gordon, R.: Reduced-order models for nonlinear response prediction: implicit condensation and expansion. *J. Sound Vibr.* **318**(4), 1139–1153 (2008)
36. Kim, K., Khanna, V., Wang, X., Mignolet, M.: Nonlinear reduced order modeling of flat cantilevered structures. In: *Proceedings of the 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, p. 2492 (2009)
37. Nash, M.: *Nonlinear structural dynamics by finite element modal synthesis*, Ph.D. thesis, Imperial College—University of London (1978)
38. Rizzi, S.A., Przekop, A.: System identification-guided basis selection for reduced-order nonlinear response analysis. *J. Sound Vibr.* **315**(3), 467–485 (2008)
39. Przekop, A., Guo, X., Rizzi, S.A.: Alternative modal basis selection procedures for reduced-order nonlinear random response simulation. *J. Sound Vibr.* **331**(17), 4005–4024 (2012)
40. Kuether, R.J., Deaner, B., Hollkamp, J.J., Allen, M.S.: Evaluation of geometrically nonlinear reduced-order models with nonlinear normal modes. *AIAA J.* **53**(11), 3273–3285 (2015)
41. Idelsohn, S.R., Cardona, A.: A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **49**(3), 253–279 (1985)
42. Sombroek, C.S.M., Tiso, P., Renson, L., Kerschen, G.: Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace. *Comput. Struct.* **195**, 34–36 (2018)
43. Jain, S., Tiso, P., Rutzmoser, J.B., Rixen, D.J.: A quadratic manifold for model order reduction of nonlinear structural dynamics. *Comput. Struct.* **188**, 80–94 (2017)
44. Rutzmoser, J.B., Rixen, D.J., Tiso, P., Jain, S.: Generalization of quadratic manifolds for reduced order modeling of nonlinear structural dynamics. *Comput. Struct.* **192**, 196–209 (2017)
45. Boumediene, F., Miloudi, A., Cadou, J., Duigou, L., Boutyour, E.: Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method. *Comput. Struct.* **87**(23–24), 1508–1515 (2009)
46. Boumediene, F., Duigou, L., Boutyour, E., Miloudi, A., Cadou, J.: Nonlinear forced vibration of damped plates coupling asymptotic numerical method and reduction models. *Comput. Mech.* **47**(4), 359–377 (2011)
47. Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J.C., Vakakis, A.F.: Nonlinear normal modes, part I: a useful framework for the structural dynamicist. *Mech. Syst. Signal Process.* **23**(1), 170–194 (2009)
48. Lamarque, C.-H., Touzé, C., Thomas, O.: An upper bound for validity limits of asymptotic analytical approaches based on normal form theory. *Nonlinear Dyn.* **70**(3), 1931–1949 (2012)
49. Renson, L., Kerschen, G., Cochelin, B.: Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *J. Sound Vibr.* **364**, 177–206 (2016)
50. Peeters, M., Vigiúí, R., Sérandour, G., Kerschen, G., Golinval, J.-C.: Nonlinear normal modes, part II: toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mech. Syst. Signal Process.* **23**(1), 195–216 (2009)
51. Sombroek, C.S.M., Renson, L., Tiso, P., Kerschen, G.: Bridging the gap between nonlinear normal modes and modal derivatives. *Nonlinear Dyn.* **1**, 349–361 (2016)
52. Kuether, R.J., Allen, M.S.: A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models. *Mech. Syst. Signal Process.* **46**(1), 1–15 (2014)
53. Ciarlet, P.G.: A justification of the von-Kármán equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis* **73**, 349–389 (1980)
54. Millet, O., Hamdouni, A., Cimetière, A.: A classification of thin plate models by asymptotic expansion of non-linear three-dimensional equilibrium equations. *Int. J. Non-linear Mech.* **36**(1), 165–186 (2001)

55. Lacarbonara, W., Yabuno, H.: Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: theory and experiment. *Int. J. Solids Struct.* **43**, 5066–5084 (2006)
56. Thomas, O., Sénéchal, A., Deü, J.-F.: Hardening/softening behaviour and reduced order modelling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dyn.* **86**(2), 1293–1318 (2016)
57. Bilbao, S., Thomas, O., Touzé, C., Ducceschi, M.: Conservative numerical methods for the full von Kármán plate equations **31**(6), 1948–1970 (2015). <https://doi.org/10.1002/num.21974>
58. Cottanceau, E., Thomas, O., Véron, P., Alochét, M., Deligny, R.: A finite element/quaternion/asymptotic numerical method for the 3D simulation of flexible cables. *Finite Elem. Anal. Des.* **139**, 14–34 (2017)
59. Chang, Y., Wang, X., Capiez-Lernout, E., Mignolet, M., Soize, C.: Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures. In: International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2011, AAAF-AIAA, Paper-IFASD (2011)
60. Grolet, A.: Dynamique non-linéaire des structures mécaniques: application aux systèmes à symétrie cyclique. Ecully, Ecole centrale de Lyon (2013). Ph.D. thesis
61. Électricité de France: <https://www.code-aster.org/forum2/viewtopic.php?id=21537>
62. Cochelin, B., Vergez, C.: A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *J. Sound Vibr.* **324**(1), 243–262 (2009)
63. Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M.: Méthode asymptotique numérique. Hermes Lavoissier, Paris (2007)
64. Karkar, S., Cochelin, B., Vergez, C.: A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions: The case of non-polynomial nonlinearities. *J. Sound Vibr.* **332**(4), 968–977 (2013)
65. Munoz-Almaraz, F., Freire, E., Galán, J., Doedel, E., Vanderbauwhede, A.: Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems. *Phys. D: Nonlinear Phenom.* **181**(1–2), 1–38 (2003)
66. Manevitch, A., Manevitch, L.: Free oscillations in conservative and dissipative symmetric cubic two-degree-of-freedom systems with closed natural frequencies. *Meccanica* **38**, 335–348 (2003)
67. King, M., Vakakis, A.: Mode localization in a system of coupled flexible beams with geometric nonlinearities. *Z. Angew. Math. Mech.* **75**(2), 127–139 (1995)
68. Grolet, A., Thouverez, F.: Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases. *Mech. Syst. Signal Process.* **52–53**, 529–547 (2015)
69. Park, C.I.: Frequency equation for the in-plane vibration of a clamped circular plate. *J. Sound Vibr.* **313**(1), 325–333 (2008)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

4.3 Bilan

Bien que les calculs réalisés soient limités aux structures planes, cette étude valide la procédure des calculs des coefficients par la méthode STEP avec l'emploi d'un code éléments finis du commerce. Les résultats montrent la capacité de la démarche adoptée à prédire le comportement non-linéaire géométrique autour des résonances. Pour le cas particulier des structures planes, les modèles analytiques montrent qu'une grande partie des coefficients sont nuls, ce qui permet de réduire la procédure de réduction de modèle. De plus, une condensation statique des équations du mouvement longitudinal dans les équations du mouvement transverse peut être effectuée : ceci aboutit à des systèmes d'oscillateurs couplés par des termes non-linéaires d'ordres cubiques uniquement. Ce constat permet de réduire le nombre de termes non-linéaires et d'oscillateurs à prendre en compte dans les simulations.

Des tests de convergence avec le nombre de modes et d'harmoniques ont été réalisés. Ceux-ci attestent que la réduction du problème à un nombre restreint de modes et d'harmoniques peut être suffisante pour caractériser correctement le comportement non-linéaire d'une résonance. En particulier, un seul mode linéaire et trois harmoniques permettent d'estimer correctement les solutions autour d'une résonance et sur une gamme d'amplitude pouvant aller jusqu'à l'épaisseur de la structure mince.

La méthode asymptotique numérique s'est révélée un outil efficace pour mettre en évidence les phénomènes de bifurcation et de résonances internes. L'organisation des variables, répartie suivant les modes et les termes de la série de Fourier, aboutit à visualiser de manière compréhensible l'activation des composantes harmoniques et des modes supérieurs lors d'une résonance interne.

Les coefficients de la méthode STEP n'ont été validés ici que pour des éléments de coques fondés sur une théorie de Kirchhoff-Love (Discrete Kirchhoff Quadrangle, DKQ), et pour des structures limitées à des conditions aux limites encastrées. Dans le cas de la poutre, les résultats sont validés à condition de négliger de négliger l'effet Poisson ($\nu = 0$ dans le tableau 2). La procédure a aussi été testée avec des éléments tridimensionnels : les coefficients identifiés sont systématiquement surestimés. Cette remarque sera plus amplement discutée au chapitre suivant.

Chapitre 5

Modèles réduits modaux de structures piézoélectriques avec la méthode STEP

Contents

5.1	Extension de la méthode STEP aux coefficients piézoélectriques	126
5.1.1	Principe général	126
5.1.2	Cas des coefficients piézoélectriques linéaires	127
5.1.3	Cas des coefficients piézoélectriques non-linéaires	127
5.2	Validation des coefficients piézoélectriques linéaires	128
5.2.1	Présentation du cas-test	128
5.2.2	Modèle analytique	128
5.2.3	Investigation numérique	131
5.2.4	Calcul des facteurs de couplage effectifs	135
5.2.5	Validation par comparaison des différents calculs de k_i	136
5.2.6	Validation par comparaison des fonctions de transfert	137
5.3	Effets tri-dimensionnels sur l'estimation des coefficients non-linéaires élastiques	138
5.3.1	Erreurs des coefficients non-linéaires élastiques	138
5.3.2	Recherche de la source d'erreur	139
5.3.3	Validité de l'hypothèse des contraintes uniaxiales dans le cas 3D	142
5.3.4	Solutions proposées	144
5.4	Bilan du chapitre	146

Dans ce chapitre, la méthode STEP est étendue au calcul des coefficients de couplage électromécaniques $(\chi_k^{(p)}, \Theta_{ij}^{(p)})$ du modèle réduit présenté dans les sections 2.3.2(c) et défini par le système d'équations (2.176). L'expression de ce système est d'abord rappelée :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K a_{ij}^k q_i q_j + \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \sum_{l=j}^K b_{ijl}^k q_i q_j q_l \\ + \sum_{p=1}^P \chi_k^{(p)} V^{(p)} + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^K \Theta_{ik}^{(p)} q_i V^{(p)} = F_k \end{aligned} \quad (5.1a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - \sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k - \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \frac{1}{2} \Theta_{ij}^{(p)} q_i q_j = Q^{(p)}. \quad (5.1b)$$

On rappelle que les variables du problème sont les coordonnées des modes en court-circuit q_k et les tensions aux bornes des patchs piézoélectriques $V^{(p)}$. Les sollicitations mécaniques et électriques quantifient les efforts modaux F_k et la charge $Q^{(p)}$ aux bornes des patchs piézoélectriques. ω_k désigne la pulsation des modes de la structure en court-circuit, tandis que $C^{(p)}$ dénote les capacités de patchs. Enfin, (a_{ij}^k, b_{ijl}^k) désignent les raideurs mécaniques non-linéaires quadratiques et cubiques.

Dans ce chapitre, la méthodologie pour estimer les coefficients $(\chi_k^{(p)}, \Theta_{ij}^{(p)})$ est d'abord présentée. La démarche de validation des coefficients de couplage linéaire fait l'objet de la seconde section. Un cas-test est notamment proposé pour calculer des coefficients de couplage de référence. Les coefficients obtenus sont aussi comparés avec les facteurs de couplages *effectifs* (notés EEMCF, de l'anglais *Effective Electro-Mechanical Coupling Factor*) plus fréquemment employés dans la littérature.

Des difficultés pour estimer correctement les coefficients non-linéaires ont été rencontrées avec des maillages tri-dimensionnels. Pour cette raison, le calcul des coefficients électro-mécaniques $\Theta_{ij}^{(p)}$ non-linéaires avec la méthode STEP n'a pas été entrepris. La troisième section est spécifiquement consacrée aux observations des problèmes rencontrés pour le calcul (avec un modèle éléments finis 3D) des coefficients non-linéaires élastiques (a_{ij}^k, b_{ijl}^k) d'une poutre bi-encastée. Les erreurs dans l'estimation des coefficients non-linéaires élastiques par rapport aux valeurs de référence sont caractérisées. Des approches pour identifier la source de ces écarts et des solutions pour surmonter ce problème sont ensuite proposées. Une de ces stratégies permet le calculs des coefficients $(\beta_{ij}^k, \Gamma_{ijl}^k)$ prenant implicitement en compte les effets du couplage membrane-flexion.

Pour cette étude, le code élément fini doit posséder une formulation éléments finis avec à la fois des non-linéarités géométriques et un couplage piézoélectrique. Les codes existants *Ansys* ou *Abaqus* proposent des éléments finis tri-dimensionnels (tétraédriques ou hexaédriques) pour lesquels ces formulations sont implémentées. Dans cette étude, le code *Abaqus* est choisi, en raison notamment de la mise à dispositions de licences et jetons de calculs par l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

5.1 Extension de la méthode STEP aux coefficients piézoélectriques

Cette section porte sur le calcul des coefficients de couplage piézoélectriques linéaires et non-linéaires, respectivement définis par les équations (2.175) et (2.177). La méthodologie est similaire à la méthode STEP : le principe repose sur le modèle modal (cf. équations (5.1)) et sur des résultats issus de calculs statiques avec des déplacements imposés. L'application de la méthode STEP avec une formulation piézoélectrique implémentée dans un code éléments finis du commerce est originale. Jusqu'alors, les coefficients piézoélectriques du modèle réduit pouvaient être obtenus par projection modale des termes de couplage piézoélectriques du modèle complet (vecteur $\mathbf{f}_c^{(p)}$ et matrice $\mathbf{P}^{(p)}$ de l'équation (2.154)) : ces termes ont été calculés directement dans un code avec des éléments de poutre dans [116]. Avec un code commercial, les coefficients du modèle réduit ont été calculés à l'aide de l'analogie entre les formulations thermoélastiques et piézoélectriques [137, 197].

5.1.1 Principe général

De la même manière que la méthode STEP, les champs de déplacements imposés sont des combinaisons d'un ou plusieurs modes. **Les calculs réalisés sont effectués avec des patches piézo-électriques en court-circuit** ($V^{(p)} = 0$). L'identification des coefficients du modèle réduit électro-mécanique se fonde cette fois-ci sur le calcul des **charges électriques résultantes**, analogues aux efforts internes calculés pour les calculs élastiques. Le court-circuit implique que l'équation électrique d'un patch (5.1b) devienne :

$$-\sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k - \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \frac{1}{2} \Theta_{ij}^{(p)} q_i q_j = Q^{(p)}. \quad (5.2)$$

L'équation physique associée est celle issue de l'expression (2.154b) avec $V^{(p)} = 0$:

$$-\left[\mathbf{f}_c + \frac{1}{2} \mathbf{P}(\mathbf{x})\right]^T \mathbf{x} = Q^{(p)}, \quad (5.3)$$

Le terme $Q^{(p)}$ correspond à la valeur de la charge cumulée sur l'électrode supérieure, et peut être obtenue numériquement. On a en effet montré avec l'équation (2.143) que la charge globale contenue sur une électrode d'un patch p est calculée avec la somme de la densité de charge sur les $N_{el}^{(p)}$ nœuds du maillage de l'électrode considérée, soit :

$$Q^{(p)} = \sum_{n=1}^{N_{el}^{(p)}} [q]_n. \quad (5.4)$$

Dans le code *Abaqus*, la variable *Reactive electrical nodal charge* (RCHG) donne accès à la quantité $[q]_n$.

5.1.2 Cas des coefficients piézoélectriques linéaires

Le problème linéaire est d'abord considéré afin de calculer les coefficients $\chi_i^{(p)}$. L'approche proposée consiste à **imposer un champ de déplacement composé d'un seul mode avec des patches en court-circuit**. D'après les relations (2.174), l'équation (5.3) devient avec le développement modal :

$$-\sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k = Q^{(p)}. \quad (5.5)$$

Cela signifie que la charge de réaction à un déplacement imposé défini par :

$$\mathbf{x}^d = \lambda \boldsymbol{\phi}_i \Rightarrow \begin{cases} q_i = \lambda \\ q_j = 0 \quad \forall j \neq i, \end{cases} \quad (5.6)$$

permet d'estimer directement un coefficient de couplage électromécanique imposé. L'opération à effectuer est la suivante :

$$\chi_i^{(p)} = -\frac{Q^{(p)}}{\lambda}. \quad (5.7)$$

L'identification d'un coefficient linéaire nécessite donc deux calculs par le code éléments finis : il s'agit du calcul modal et du calcul statique linéaire. L'effort computationnel requis est approximativement équivalent à celui du calcul du facteur de couplage effectif (EEMCF). Celui-ci requiert deux analyses modales, avec des patches en court-circuit et en circuit-ouvert.

5.1.3 Cas des coefficients piézoélectriques non-linéaires

L'extension de cette procédure à des problèmes non-linéaires géométriques est fondée sur le développement modal de l'équation (5.3). Son expression, tirée de la relation (2.176b), s'écrit avec des patches en court-circuit :

$$-\sum_{k=1}^K \chi_k^{(p)} q_k - \sum_{i=1}^K \sum_{j=i}^K \frac{1}{2} \Theta_{ij}^{(p)} q_i q_j = Q^{(p)}. \quad (5.8)$$

La procédure est présentée avec l'exemple d'un unique coefficient $\Theta_{ii}^{(p)}$. Le coefficient linéaire est calculé avec les opérations présentées dans la section (5.1.2). Un calcul statique avec un champ de déplacement identique à celui défini par l'équation (5.6) et des patches en court-circuit est ensuite effectué **avec des non-linéarités activées**. L'équation (5.8) s'écrit dans ce cas :

$$-\lambda \chi_i^{(p)} - \frac{\lambda^2}{2} \Theta_{ii}^{(p)} = Q^{(p)} \Rightarrow \Theta_{ii}^{(p)} = -\frac{2(Q^{(p)} + \lambda \chi_i^{(p)})}{\lambda^2}. \quad (5.9)$$

Comme pour le cas des coefficients a_{ij}^k et b_{ijl}^k , les coefficients électromécaniques non-linéaires $\Theta_{ij}^{(p)}$ peuvent être obtenus après un nombre de calculs statiques non-linéaires égal à celui des coefficients compris dans la base des modes retenus. Des systèmes linéaires similaires à ceux présentés dans l'annexe E pour des structures élastiques peuvent être établis de la même manière pour calculer les coefficients.

5.2 Validation des coefficients piézoélectriques linéaires

Cette section est consacrée au calcul et à la validation des coefficients piézoélectriques linéaires. La validation est réalisée à partir des résultats issus d'un cas-test dont le modèle analytique est présenté dans un premier temps. Les facteurs de couplage effectifs sont considérés comme une grandeur de référence, car ils permettent de quantifier le couplage électromécanique avec un nombre réduit d'opérations numériques [170, 77, 33, 8, 180], et sont également utilisés pour les comparaisons. Leur estimation nécessite un calcul modal en circuit-ouvert. La procédure réalisée pour imposer ces conditions aux limites est également détaillée.

5.2.1 Présentation du cas-test

Ce paragraphe présente le cas d'une d'une poutre bi-couche à section rectangulaire de longueur L , largeur b et d'épaisseurs (h_b, h_p) , avec deux parties b et p respectivement constituées d'un matériau élastique et d'un matériau piézoélectrique. Le profil de la structure est représenté sur la figure 5.1.

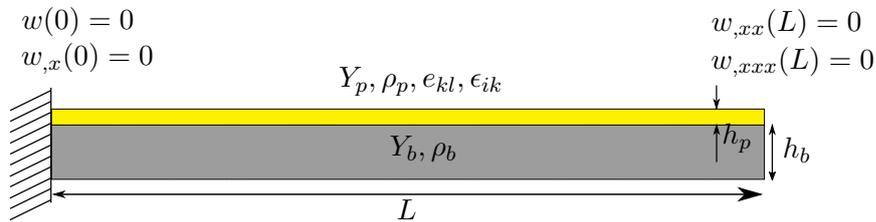


FIGURE 5.1 – Présentation du cas-test et de ses principales propriétés.

5.2.2 Modèle analytique

(a) Équations d'équilibre et efforts intérieurs

Le modèle analytique correspond à l'un des modèles publiés dans [54]. Les principes de cette modélisation ont aussi été utilisés dans [116, 50]. Ce modèle s'appuie sur les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli. Les équations d'équilibre s'écrivent de manière identique à celles du modèle d'une poutre homogène présenté dans la section 2.1.2 (expressions (2.44a) et (2.44b)). La différence réside dans l'expression des efforts intérieurs N et M (cf. équation (2.35)), où l'effet de la stratification intervient lors de l'intégration dans la direction transverse [143]. Pour ce cas-test, les conditions aux limites sont de type encastree-libre. Cela permet d'affirmer d'après les remarques de la section 2.1.2 que le modèle de von Kármán est équivalent au modèle linéaire. Les résultats issus des hypothèses et des équations locales de l'électrostatique 2.2.2 sont utilisés. Dans ce contexte, on part dans un premier temps des équations d'équilibre (équations (2.44)) qui sans les non-linéarités géométriques s'écrivent :

$$-N_{,x} + m\ddot{u} = 0, \quad (5.10a)$$

$$m\ddot{w} - M_{,xx} = p(x, t) \quad (5.10b)$$

$m = b(h_b\rho_b + h_p\rho_p)$ désigne la masse linéique dans la direction de la poutre. N correspond à l'effort normal et M au moment fléchissant. Les conditions aux limites encastree-libre sont formalisées par :

$$u = 0, \quad w = 0, \quad w_{,x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad (5.11)$$

$$N = 0, \quad M = 0, \quad M_{,x} = 0 \quad \text{en } x = L. \quad (5.12)$$

Ces deux quantités sont définies dans les équations (2.35), qui nécessitent d'exprimer les contraintes axiales sur l'ensemble de la poutre. Dans un calcul linéaire, la déformation axiale a pour expression

$\varepsilon_{xx} = u_{,x} - zw_{,xx}$. La loi de comportement s'écrit $\pi_{xx} = Y_b \varepsilon_{xx}$ dans la couche élastique. Dans la couche piézoélectrique, son expression est :

$$\pi_{xx} = Y_p \varepsilon_{xx} - \bar{e}_{31} E_z \quad (5.13a)$$

$$D_z = \bar{e}_{31} \varepsilon_{xx} + \bar{e}_{33} E_z. \quad (5.13b)$$

De plus, pour écrire la composante E_z , on suppose que l'expression du potentiel est linéaire avec les variables d'espace. D'après les équations (2.93), il vient que les composantes du champ électrique sont constantes. La composante transverse du champ électrique s'écrit alors :

$$E_z = -V/h_p. \quad (5.14)$$

Les coefficients mécanique, électromécanique et diélectrique Y_p , \bar{e}_{31} , \bar{e}_{33} du modèle réduit sont obtenus à partir des hypothèses de poutre, leurs expressions sont données dans l'Annexe C. Les efforts intérieurs (N, M) sont finalement estimés par les expressions suivantes :

$$N = Au_{,x} - Bw_{,xx} + \Xi V, \quad (5.15a)$$

$$M = Bu_{,x} - Dw_{,xx} + \Theta V, \quad (5.15b)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = b(Y_b h_b + Y_p h_p) & (5.16a) \\ B = b(Y_b h_p h_b + Y_p h_p^2)/2 & (5.16b) \\ D = bY_b h_b^3/12 + bY_p \left(\frac{h_p h_b^2}{4} + \frac{h_p^2 h_b}{2} + \frac{h_p^3}{3} \right) & (5.16c) \\ \Theta = \frac{b\bar{e}_{31}(h_p + h_b)}{2}. & (5.16d) \end{cases}$$

Négliger l'inertie longitudinale entraîne que :

$$N_{,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \text{cste}, \quad \text{d'où } N = 0 \quad (5.17)$$

d'après la condition au bord libre de l'effort axial présentée dans l'équation (5.12). Ceci permet alors d'exprimer les déplacements axiaux u , en effet :

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{,x} = \frac{B}{A} w_{,xx} - \frac{\Xi}{A} V. \quad (5.18)$$

L'introduction de ce dernier résultat dans l'équation (5.15b), qui aboutit à :

$$M = -\hat{D}w_{,xx} + \hat{\Theta}V \quad (5.19)$$

avec $\hat{D} = D - B^2/A$ et $\hat{\Theta} = \Theta - \Xi B/A$. Injecter cette dernière expression du moment dans l'équation d'équilibre (5.10b) entraîne l'équation du mouvement suivante :

$$\hat{D}w_{,xxxx} - (\hat{\Theta}V)_{,xx} + m\ddot{w} = p(x, t). \quad (5.20)$$

Une solution au problème statique $\hat{D}w_{,xxxx} = (\hat{\Theta}V)_{,xx}$ avec une tension imposée peut être immédiatement établie. En effet, dans le cas où une tension V est appliquée à la couche piézoélectrique, la poutre a pour déformée $w(x) = \frac{\hat{\Theta}Vx^2}{2\hat{D}}$ en tenant compte des conditions aux limites à l'encastrement. Ce résultat peut être directement comparé à celui issu d'un code élément fini. Dans ce cas, la présence du second terme $-(\hat{\Theta}V)_{,xx}$ est équivalent à l'imposition d'un moment à l'extrémité libre de la poutre. Cet effet peut être écrit comme une condition aux limites en moment, ce qui donne

$$\hat{D}w_{,xxxx} + m\ddot{w} = p(x, t), \quad (5.21a)$$

$$w = 0, \quad w_{,x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad (5.21b)$$

$$\hat{D}w_{,xx} = \hat{\Theta}V, \quad w_{,xxx} = 0 \quad \text{en } x = L, \quad (5.21c)$$

La discontinuité du terme piézoélectrique peut aussi être exprimée à l'aide de la fonction de Heavyside H . Dans ce cas, l'expression (5.20) devient :

$$\hat{D}w_{,xxxx} + [H(x-L)]_{,xx} \hat{\Theta}V + m\ddot{w} = p(x, t). \quad (5.22)$$

La charge électrique est calculée dans un second temps. Suivant les raisonnements de la section 2.2.1 (a) et d'après l'équation (2.96), la charge Q contenue dans l'électrode supérieure du patch a pour expression :

$$Q = \oint_{S^+} [[D_z]]_{h_p+h_b-\epsilon}^{h_p+h_b+\epsilon} dS = b \int_0^L D_z(z = \frac{h_p + h_b}{2}) dx. \quad (5.23)$$

qui après intégration et application des conditions aux limites (équations (5.11)) aboutit à :

$$Q = -\Xi u(L) + \Theta w_{,x}(L) + CV. \quad (5.24)$$

avec $\Xi = b\bar{\epsilon}_{31}$ et $C = \bar{\epsilon}_{33}bL/h_p$. Le premier terme de l'équation (5.24) est obtenu à partir de l'annulation de l'effort axial. L'équation (5.18) est exprimée à l'extrémité libre comme :

$$Au_{,x} - Bw_{,xx} + \Xi V = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[u(x) \right]_0^L = \frac{B}{A} w_{,x}(L) - \frac{\Xi}{A} V \quad \Rightarrow \quad u(L) = \frac{B}{A} w_{,x}(L) - \frac{\Xi}{A} V.$$

L'équation (5.24) de la charge devient alors :

$$Q = \hat{\Theta}w_{,x} + \hat{C}V \quad (5.25)$$

avec $\hat{C} = C + \frac{\Xi^2 L}{A}$.

Finalement, les équations (5.25) et (5.20) formalisent le problème électromécanique couplé :

$$\hat{D}w_{,xxxx} + [H(x-L)]_{,xx} \hat{\Theta}V + m\ddot{w} = p(x, t) \quad (5.26a)$$

$$Q = \hat{\Theta}w_{,x} + \hat{C}V. \quad (5.26b)$$

Les grandeurs adimensionnées suivantes sont alors introduites dans les équations (5.26a) et (5.26b) :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{t} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{\hat{D}}{m}} t, \quad \alpha = \hat{\Theta} \sqrt{\frac{L}{\hat{C}\hat{D}}}, \quad \bar{V} = h \sqrt{\frac{\hat{D}}{L^3\hat{C}}} V, \quad \bar{Q} = h \sqrt{\frac{\hat{D}\hat{C}}{L^3}} Q.$$

Après simplifications et étant donné que $[H(x-L)]_{,x} = \delta(x-L)$ (avec δ fonction de Dirac), les expressions (5.26) deviennent :

$$w_{,xxxx} + \alpha [\delta(x-1)]_{,x} V + \ddot{w} = p(x, t) \quad (5.27a)$$

$$Q = \alpha w_{,x}(1) + V. \quad (5.27b)$$

Les notations avec les barres supérieures sont par la suite écartées dans un souci de concision.

(b) Projection modale

Les équations (5.27) montrent que les modes de la structure en court-circuit sont ceux d'une poutre homogène. Le mouvement transverse est alors étendu sur la base des modes linéaires :

$$w(x) = \sum_{k=1}^K \Phi_k q_k \quad (5.28)$$

qui vérifient les propriétés d'orthogonalité et sont normés de sorte que :

$$\int_0^1 \Phi_i \Phi_j dx = \delta_{ij}. \quad (5.29)$$

La partie linéaire de l'expression (5.27a) s'écrit de la même manière que pour une poutre encastree-libre homogène. Ainsi, les modes en court-circuit avec ces conditions aux limites sont identiques à ceux d'une poutre homogène. Ceux-ci sont présentés en Annexe C, et vérifient notamment que :

$$\max(\Phi_i) = \Phi_i(1) = 2. \quad (5.30)$$

Les projections des équations modales sont obtenues par le développement de l'expression (5.28) du mouvement transverse dans les équations (5.27), puis l'intégration de l'équation du mouvement (5.27a) sur la longueur de la poutre. Dans l'équation mécanique, le coefficient de couplage est obtenu à l'aide d'une propriété de la fonction de Dirac ($\int_0^L [\delta(x-L)]_{,x} \Phi(x) dx = -\Phi_{,x}(L)$). Ces opérations aboutissent aux équations modales du mouvement mécanique et électrique :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + k_i^{(AN)} \omega_i V = P_i(t) \quad (5.31a)$$

$$Q = - \sum_{i=1}^N k_i^{(AN)} \omega_i q_i(t) + V, \quad (5.31b)$$

où $P_i(t) = \int_0^1 \Phi(x) i p(x, t) dx$. De plus, $k_i^{(AN)}$ désigne le facteur de couplage modal électromécanique : l'introduction de la pulsation dans ce terme de couplage permet de normer cette quantité entre 0 et 1, ce facteur est donc exprimé en pourcentage. L'indice (AN) signifie que le coefficient est estimé à partir d'un calcul analytique. Cette grandeur recherchée s'écrit donc en fonction des données de l'étude :

$$k_i^{(AN)} = - \frac{\alpha \Phi_i'(1)}{\omega_i}. \quad (5.32)$$

Ce modèle analytique aboutit donc à une expression simple du coefficient de couplage. La principale hypothèse formulée pour ce modèle (en plus de celles présentées pour les modèles de poutre et des patchs piézoélectriques dans le chapitre 2) est que l'expression du potentiel est linéaire dans l'épaisseur.

5.2.3 Investigation numérique

Cette section concerne le calcul numérique des coefficients piézoélectriques linéaires. La méthode décrite dans la section 5.1.2 est mise en œuvre et comparée aux résultats analytiques mais aussi aux facteurs effectifs qui sont plus fréquemment employés dans la littérature. Un premier paragraphe définit précisément ces facteurs effectifs et les différences avec les facteurs de couplages modaux. Le modèle numérique est ensuite présenté, et le calcul des facteurs effectifs est détaillé. Finalement, les différents résultats (facteurs de couplage numériques obtenus avec l'approche proposée, facteurs de couplage analytiques et facteurs effectifs) sont comparés.

(a) Facteurs de couplage modaux et effectifs

Les résultats présentés ici sont tirés de [180]. On considère ici les équations (5.1) restreintes au cas linéaire et à un seul patch :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + \chi_i V = F_i \quad (5.33a)$$

$$CV - \sum_{i=1}^K \chi_i q_i = Q. \quad (5.33b)$$

Le cas du court-circuit entraîne pour l'équation mécanique :

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F_i \quad (5.34)$$

tandis que le circuit ouvert implique pour l'équation électrique que :

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \sum_{k=1}^K \frac{\chi_k}{C} q_k \quad (5.35a)$$

$$\text{soit } \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + \chi_i \sum_{k=1}^K \frac{\chi_k}{C} q_k = F_i \quad (5.35b)$$

par injection du premier résultat dans l'équation mécanique (5.33a). L'équation en circuit ouvert s'écrit sous une forme découplée comme

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_{i,co}^2 q_i(t) = F_i \quad (5.36)$$

qui n'est pas équivalente aux équations (5.35b) qui présentent des oscillateurs couplés. En pratique, une approximation à un degré de liberté est réalisée en circuit ouvert :

$$\ddot{q}_i(t) + \left(\omega_i^2 + \frac{\chi_i^2}{C} \right) q_i = F_i \quad (5.37)$$

On définit alors la pulsation $\hat{\omega}_k$ par :

$$\hat{\omega}_i^2 = \left(\omega_i^2 + \frac{\chi_i^2}{C} \right) \quad (5.38)$$

La comparaison des équations (5.36) et (5.37) permet d'écrire l'approximation effectuée :

$$\hat{\omega}_i^2 \approx \omega_{i,co}^2. \quad (5.39)$$

Ainsi, le facteur effectif $k_{\text{eff},i}$ défini par [170] :

$$k_{\text{eff},i} = \sqrt{\frac{(\omega_{i,co})^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}} \quad (5.40)$$

est alors approché de la manière suivante :

$$k_{\text{eff},i} \approx \sqrt{\frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}} = \frac{\chi_i}{\sqrt{C}\omega_i} = k_i \quad (5.41)$$

Avec le cas-test présenté dans la section 5.2.1, la capacité de la couche piézoélectrique est définie comme un cas particulier de l'équation (2.149) :

$$C = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^e b L}{h_p}. \quad (5.42)$$

Bien que les facteurs χ_i et k_i caractérisent tous deux le couplage électromécanique, ces deux coefficients ne sont pas utilisés dans le même contexte [182]. En effet :

- le facteur modal χ_i est plus pertinent dans le cadre de l'étude des MEMS car il quantifie la capacité d'actionnement et de détection d'une structure piézoélectrique.
- le facteur k_i est plus souvent employé dans un cadre de réduction de vibration, il quantifie mieux la capacité d'un système à atténuer les vibrations, notamment dans le cadre des shunts [54].

Dans la suite de cette section, les facteurs de couplage calculés à partir du modèle analytique et avec l'extension de la méthode STEP sont respectivement notés $k_i^{(AN)}$ et $k_i^{(EF)}$.

(b) Données du modèle

En raison de la disponibilité des formulations existantes dans les codes éléments finis du commerce et plus particulièrement *Abaqus*, la couche piézoélectrique est nécessairement modélisée avec des éléments tri-dimensionnels. En l'occurrence, les éléments choisis sont des éléments hexaédriques à vingt nœuds (de référence C3D20E dans *Abaqus*). Des lois de comportements élastiques et piézoélectriques sont assignées à chacune des couches. Les coefficients de la couche élastique correspondent aux propriétés de l'aluminium, tandis que les coefficients affectés à la couche piézoélectrique sont ceux utilisés dans les thèses [159, 136], obtenus après demande auprès du fabricant *PI Ceramic* [2]. Leurs valeurs, ainsi que les caractéristiques géométriques sont données dans le tableau 5.1. Un rapport $h_e/h_p = 5$ est choisi pour ce cas-test.

Y_e (GPa)	ν_e	$C_{11} = C_{22}$ (GPa)	C_{33}	C_{12}	$C_{13} = C_{23}$	$C_{44} = C_{55}$	C_{66}	ρ_e (kg.m ⁻³)	ρ_p
72.0	0.3	107.6	100.4	63.12	63.85	19.62	22.24	2700	7760

L (m)	b (m)	h_e (m)	h_p (m)	d_{31} (pm.V ⁻¹)	d_{33}	d_{15}	$\epsilon_{33}^\epsilon = \epsilon_{22}^\epsilon$ (nF.m ⁻¹)	ϵ_{33}^ϵ
1	0.02	0.005	0.001	-214	423	600	9.83	7.54

TABLE 5.1 – Ensemble des paramètres utilisés pour la modélisation numérique de la poutre bi-couche. Les coefficients présentés sont, dans l'ordre : constantes élastiques et masses volumiques des couches élastique (e) et piézoélectrique (p), les dimensions, et coefficients piézoélectriques et diélectriques.

(c) Choix d'une stratégie de maillage

La partie élastique peut également être modélisée avec des éléments tri-dimensionnels pour que le maillage soit homogène en termes de types d'éléments. Elle peut aussi être discrétisée avec des éléments de coque comme cela a été fait pour les structures élastiques dans le chapitre 4. La seconde solution peut éventuellement permettre de réduire le nombre de degrés de liberté total. Les deux mo-

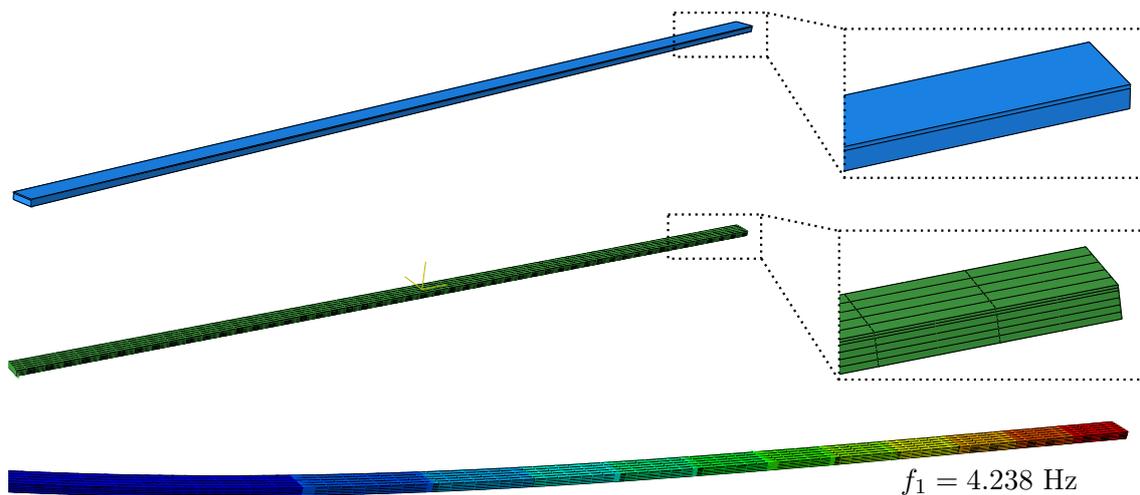


FIGURE 5.2 – Géométrie, maillage, et déformée modale associée au premier mode de la poutre bi-couche avec des éléments tri-dimensionnels.

délisations ont été envisagées. Dans le premier cas, des tests ont été réalisés sur un maillage constitué de deux géométries 3D assemblées comme le montre la figure 5.2 avec 5 éléments dans la largeur. L'épaisseur est quant à elle maillée avec 4 et 2 éléments, respectivement dans la couche élastique et la couche piézoélectrique. Le cas de l'assemblage des maillages avec éléments de coques et éléments

tri-dimensionnels a aussi été testé avec le code *Abaqus* : la continuité des déplacements des nœuds communs à l'interface entre les deux maillages est alors imposé par l'opérateur "Constraints/Tie" du module "Interaction". Le maillage résultant est présenté sur la figure 5.3. L'épaisseur de la partie élastique est incluse dans la formulation. La géométrie visible est donc celle de la ligne moyenne qui n'est pas en contact avec la partie élastique. Des tests de convergence sont réalisés avec une variation

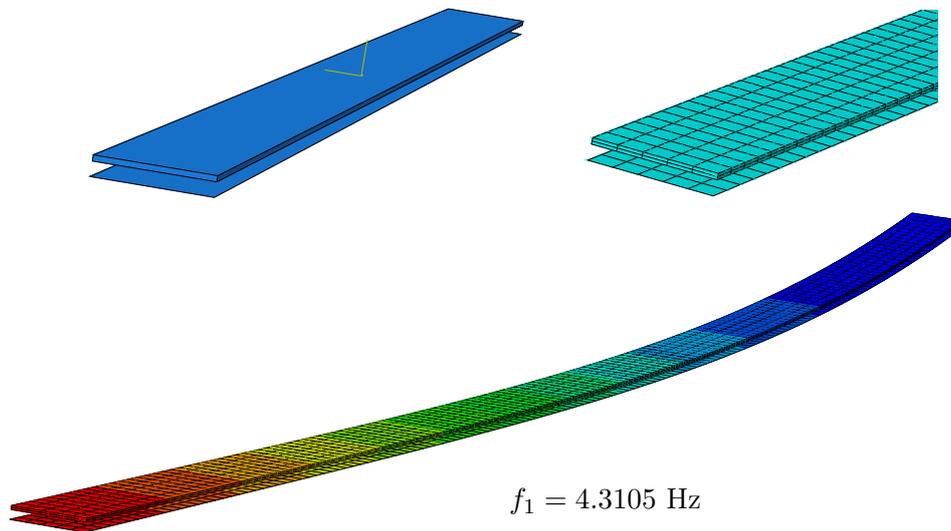


FIGURE 5.3 – Géométrie, maillage, et allure du premier mode de la poutre bi-couche avec des éléments de types coque et 3D.

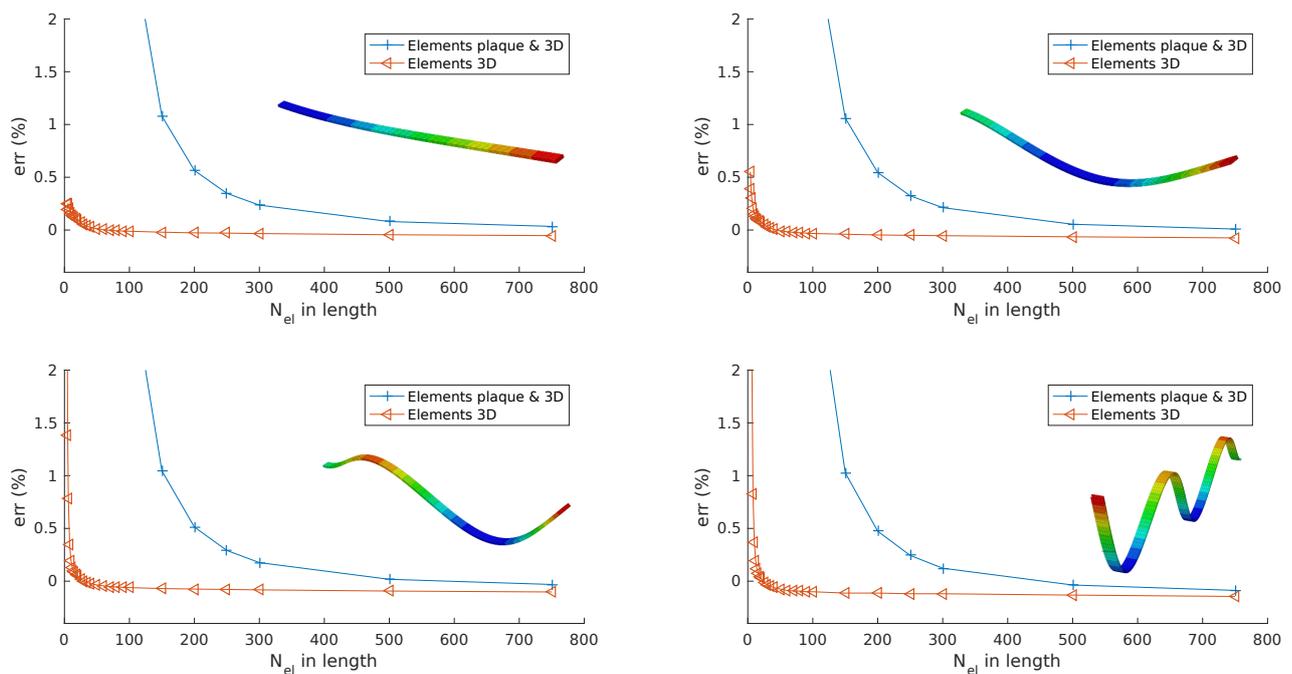


FIGURE 5.4 – Convergence des quatre premiers modes de flexion de la poutre bi-couche en fonction du maillage et du nombre d'éléments dans la longueur.

du nombre d'éléments dans la longueur de la poutre. La figure 5.4 montre la convergence des pulsations des quatre premiers modes transverses par rapport aux pulsations analytiques. L'expression de l'erreur entre une quantité numérique v^{EF} et analytique v^{AN} est donnée par :

$$\text{err}(v) = \frac{v^{EF} - v^{AN}}{v^{AN}}. \quad (5.43)$$

La convergence est mauvaise dans le cas de l'assemblage entre des éléments coques et 3D en comparaison avec le maillage constitué uniquement d'éléments 3D. Cela peut être dû à des conditions de continuité insuffisamment bien imposées aux nœuds communs de l'interface. En conséquence, un maillage constitué uniquement d'éléments tri-dimensionnels est conservé pour la suite de l'étude. Le choix du nombre d'éléments repose sur un compromis entre le coût de calcul et la précision des résultats. Dans cette étude, un maillage avec 30 éléments dans la longueur est retenu.

5.2.4 Calcul des facteurs de couplage effectifs

L'expression du facteur de couplage électromécanique effectif (5.40) montre que deux calculs modaux sont nécessaires pour estimer ces coefficients, avec un calcul en court-circuit et un calcul en circuit ouvert.

Le cas du court-circuit est traité en imposant un même potentiel sur les deux électrodes. En pratique, la référence est souvent fixée à $\phi = 0$, soit $\phi^+ = \phi^- = 0$. Le cas du circuit ouvert nécessite d'imposer d'abord une référence à l'une des électrodes, puis d'appliquer une contrainte d'équipotentialité sur la seconde électrode. Ce dernier calcul est plus coûteux, car il nécessite d'imposer une équation supplémentaire au problème, qui s'écrit sur la maillage d'une électrode :

$$\phi_{No_1}^+ - \phi_{No_n}^+ = 0 \quad \forall n = \{2, 3, \dots, N_{el}^{(p)}\} \quad (5.44)$$

où No_1 désigne l'un des nœuds de l'électrode supérieure. Dans l'interface graphique d'Abaqus, l'outil "Contrainte/Équation" du module "Interaction" permet d'imposer cette contrainte. Les deux ensembles forment ainsi une partition des nœuds du maillage de l'électrode supérieure. Les nœuds associés sont représentés par les points rouges sur la figure 5.5. Le tableau 5.2 compare les facteurs

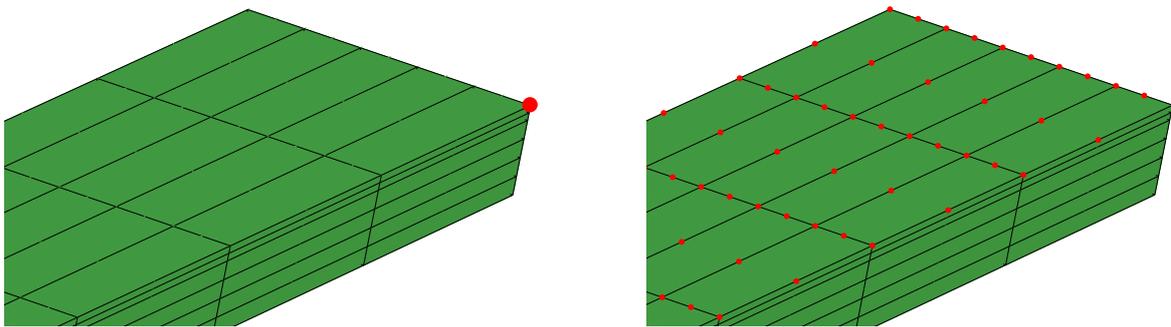


FIGURE 5.5 – Sélection des nœuds où la condition d'équipotentialité ϕ^+ est imposée : la valeur du potentiel au nœud No_1 représenté à gauche est égal au potentiel de chacun des autres nœuds de l'électrode, ceux-ci sont représentés à droite.

de couplage effectifs du premier mode calculés avec et sans contrainte d'équipotentialité (EP). Ces deux valeurs sont comparées au coefficient de couplage obtenu avec le modèle analytique présenté dans la section 5.2.2. Les résultats montrent donc que la contrainte d'équipotentialité est nécessaire pour que les estimations du facteur de couplage effectif soient valables.

$k_1^{(AN)}$	$k_{\text{eff},1} (S^+ \text{ non EP})$	$k_{\text{eff},1} (S^+ \text{ EP})$
18.58%	26.67%	20.43%

TABLE 5.2 – Comparaison des facteurs de couplage effectifs associés au premier mode transverse du cas-test avec le coefficient issu de l’expression (5.32).

5.2.5 Validation par comparaison des différents calculs de k_i

La procédure décrite dans la section 5.1.2 est maintenant mise en œuvre. Dans un premier temps, les valeurs des fréquences analytiques $f_i^{(AN)}$, élastiques $f_i^{(el)}$ et en court-circuit $f_{i,cc}^{(EF)}$ sont présentées dans le tableau 5.3. Les fréquences $f_i^{(el)}$ et $f_{i,cc}^{(EF)}$ sont issues du modèle numérique. Le cas élastique est obtenu avec l’annulation des valeurs des coefficients piézoélectriques du matériau (cf. hypothèse (i) de la section (a)).

Mode transverse	1	2	3	4	5	6
$f_i^{(AN)}$ analytique (Hz)	4.229	26.50	74.20	145.41	240.37	359.07
$f_i^{(el)}$ numérique (Hz)	4.235	26.54	74.287	145.53	240.48	359.08
$f_{i,cc}^{(EF)}$ numérique (Hz)	4.238	26.55	74.332	145.61	240.62	359.30
Erreur ($f_i^{(el)}, f_i^{(AN)}$) (%)	0.14	0.15	0.12	0.08	0.05	≈ 0
Erreur ($f_{i,cc}, f_i^{(el)}$) (%)	0.07	0.04	0.06	0.05	0.06	0.03

TABLE 5.3 – Comparaison des résultats analytiques et numériques des fréquences propres en court-circuit. Les fréquences propres élastiques obtenues par le modèle éléments finis sont également présentés.

Les différents résultats présentent une excellente correspondance, avec des erreurs inférieures à 0.2% pour les fréquences des six premiers modes. Les faibles écarts entre les $f_i^{(el)}$ et les $f_i^{(AN)}$ montrent que le maillage approche précisément les résultats. Les écarts entre les $f_{i,cc}^{(EF)}$ et les $f_i^{(el)}$ sont dus à un potentiel induit, d’ordre quadratique dans l’épaisseur [142]. Les faibles écarts constatés montrent que l’effet de ce potentiel induit est négligeable. En d’autres termes, ces résultats attestent aussi la validité du modèle analytique qui repose sur l’hypothèse d’un potentiel linéaire dans l’épaisseur.

Le tableau 5.4 présente les résultats des différents coefficients de couplage calculés. Ces erreurs sont variables suivant l’ordre des modes. Deux sources distinctes peuvent expliquer les écarts constatés :

- la modélisation 1D de la structure peut d’une part occulter certains effets tri-dimensionnels liés à la stratification ou au potentiel quadratique induit. La stratification peut générer des effets de cisaillement ou entraîner l’apparition de contraintes non négligeables pour la composante π_{yy} [122].
- d’autre part, l’approximation liée à la projection modale en court-circuit permet de justifier les écarts entre les facteurs effectifs et les autres coefficients, conformément aux développements présentés dans la section 5.2.3(a).

Les écarts constatés entre les différents facteurs ne dépassent pas 10%, ce qui valide globalement la méthode. Les facteurs effectifs surestiment systématiquement les facteurs modaux avec une erreur supérieure à 5%, ce qui montre que l’effet de l’approximation et de la projection modale semble systématique et amène à surestimer le couplage, indépendamment du mode étudié. Les écarts entre les valeurs issues du modèle analytique et de la méthode proposée sont moins élevés et présentent une plus forte variabilité suivant les modes. Les écarts dus aux effets tri-dimensionnels sont donc moins évidents à caractériser.

Mode transverse	1	2	3	4	5	6
$\chi_i^{(EF)}$ numérique (C.m ⁻¹)	0.002837	-0.009698	0.01640	-0.02199	0.02996	-0.03418
$k_i^{(EF)}$ numérique (%)	-0.1926	0.1051	-0.06346	0.04346	-0.03582	0.02737
$k_i^{(AN)}$ analytique (%)	-0.1858	0.1030	-0.06038	0.04317	-0.03357	0.02747
$k_{i,\text{eff}}$ EEMCF (%)	0.2047	0.1123	0.06787	0.04689	0.03869	0.02890
Erreur (k_i^{EF}, k_i^{AN}) (%)	3.66	2.04	5.13	0.69	6.55	0.37
Erreur ($k_i^{EF}, k_{i,\text{eff}}$) (%)	6.28	6.85	6.88	7.82	8.10	5.59

TABLE 5.4 – Comparaison des résultats analytiques et numériques des coefficients de couplages modaux, électromécaniques modaux et effectifs.

5.2.6 Validation par comparaison des fonctions de transfert

Le calcul d'une fonction de transfert autour des premiers modes est finalement proposée. L'objectif est de discuter les écarts constatés en termes de coefficients. Le calcul effectué est réalisé d'une part à partir des modèles réduits avec les paramètres (ω_i, χ_i) . L'expression de la fonction de transfert $H(\Omega)$ du système (2.174a) sans forçage mécanique entre le déplacement w et une tension d'excitation $V = V_0 e^{j\Omega t}$ s'écrit :

$$H(x, \Omega) = \frac{\hat{w}}{V_0}(x, \Omega) = \sum_{k=1}^K \Phi_k(x) \frac{\hat{q}_k(\Omega)}{V_0} = \sum_{k=1}^K \frac{\chi_k \Phi_k(x)}{\Omega^2 - \omega_k^2 - 2j\xi_k \omega_k \Omega} \quad (5.45)$$

avec $j = \sqrt{-1}$ et ξ_k un amortissement supposé modal fixé ici à $\xi_k = 0.5\%$. Dans le cadre de ces simulations, six modes transverses sont retenus dans la base. La fonction de transfert est estimée avec la réponse à un actionnement $V_0 = 1$ V entre 0 et 100 Hz. Trois fonctions de transfert sont estimées, avec les paramètres issus du modèle analytique, les paramètres issus du modèle éléments finis réduit avec la méthode proposée, et enfin les paramètres éléments finis avec le facteur de couplage effectif.

Une simulation numérique est également effectuée avec le modèle éléments finis complet avec *Abaqus*. La fonction de transfert obtenue est ici notée $\mathbf{Z}(\Omega)$ et est définie par :

$$\mathbf{Z}(\Omega)\mathbf{x}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (5.46)$$

où $\mathbf{F}(\Omega)$ désigne le forçage extérieure. L'option "Steady-State dynamics" est utilisée pour ce calcul. Cet opérateur réalise à chaque pulsation Ω la résolution d'un système linéaire défini dans cette étude par :

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 \mathbf{M}_m + j\Omega \mathbf{C}_m + \mathbf{K}_m)\mathbf{x} &= V_0 \mathbf{f}_c e^{j\Omega t} \\ \text{soit } \mathbf{Z}(\Omega) &= (-\Omega^2 \mathbf{M}_m + j\Omega \mathbf{C}_m + \mathbf{K}_m) \end{aligned}$$

où $\mathbf{C}_m = \alpha \mathbf{M}_m$ désigne un amortissement proportionnel à la matrice de masse, de façon à ce que l'amortissement modal soit égal à $\xi_k = \frac{\alpha}{2\omega_k}$. Pour cette simulation sa valeur a été fixée à $\alpha = 0.3$. L'amplitude de la fonction de transfert $\mathbf{Z}(\Omega)$ est extraite à un point situé à l'extrémité libre de la poutre, pour les résultats issus des calculs effectués à chaque pas de fréquence $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ défini pour cette étude.

Les amplitudes des différentes fonctions de transfert sont comparées sur la figure 5.6. Les résultats montrent que la réponse du modèle complet se confond parfaitement avec celle issue de l'équation (5.45) avec les coefficients estimés par la méthode présentée dans la section 5.1.2. Le modèle analytique est le moins précis en amplitude, tandis que les facteurs effectifs surestiment très légèrement la réponse.

Finalement, l'extension de la méthode STEP au calcul des coefficients piézoélectriques linéaires constitue une nouvelle approche pour quantifier le couplage électromécanique modal. Cette nouvelle

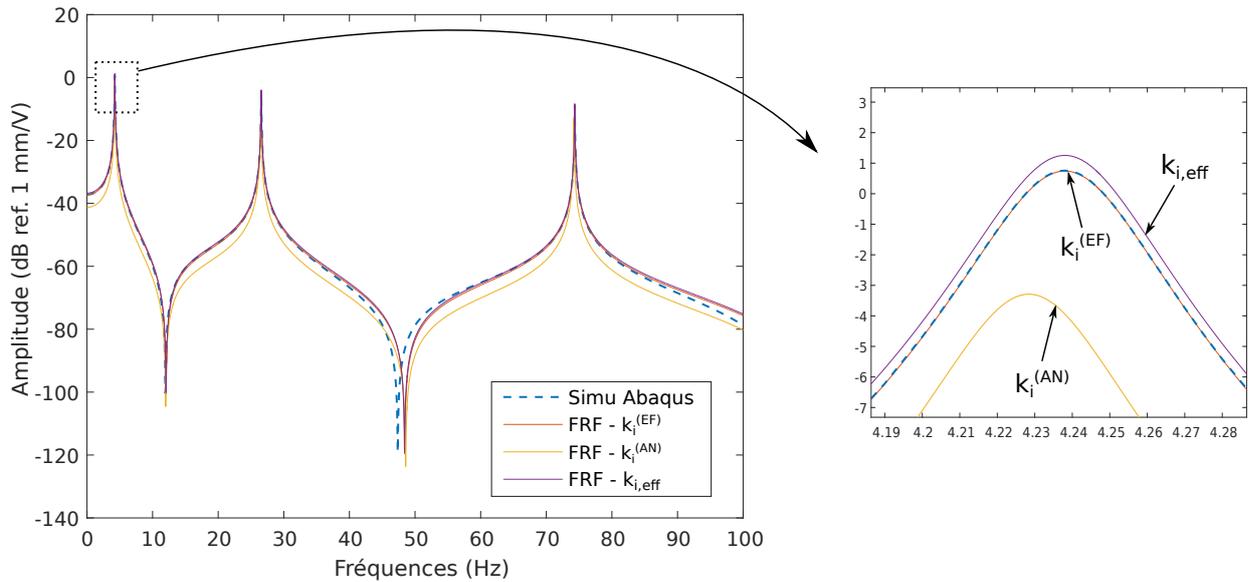


FIGURE 5.6 – Comparaison des fonctions de transfert issues du modèle éléments finis complet, du modèle analytique réduit, et des modèles numériques réduits avec les facteurs effectifs et avec les coefficients issus de la méthode proposée. Les réponses du modèle éléments finis complet (en orange) et du modèle réduit par la méthode proposée (en bleu pointillé) sont confondues.

méthode propose une alternative au calcul du facteur de couplage effectif qui est le plus couramment réalisé. Si la méthode proposée n’apporte pas particulièrement de gain en termes de calculs numériques, elle permet d’estimer le coefficient de couplage exact, à l’inverse du coefficient effectif dont le calcul repose sur une approximation due à la projection modale. En ce sens, l’intérêt de la méthode proposée réside dans sa précision.

5.3 Effets tri-dimensionnels sur l’estimation des coefficients non-linéaires élastiques

Pour étendre la réduction de modèles aux coefficients électromécaniques non-linéaires, la procédure définie dans la section 5.1.3 doit être appliquée à une formulation électromécanique et donc constituée d’éléments tri-dimensionnels. Cela n’a pas pu être réalisé, en raison des écarts constatés dans l’estimation des coefficients non-linéaires par rapport aux valeurs de référence. L’exemple de la poutre bi-encastree est utilisé dans cette section pour étudier ce problème.

5.3.1 Erreurs des coefficients non-linéaires élastiques

Les trois familles de coefficients non-linéaires significatifs ($D_{ijl}^k, C_{pi}^k, G_{ij}^p$) introduits dans les équations (2.162) et calculés dans le chapitre 4 sont estimés avec la méthode STEP et un maillage tri-dimensionnel. Les dimensions et les matériaux de la poutre utilisée pour le cas-test proposé dans le chapitre 4 (cf tableau 2) sont ici réemployées, à l’exception du coefficient de Poisson fixé à $\nu = 0.3$. Les valeurs de référence sont issues du tableau 9 du chapitre 4. Le tableau 5.5 met en évidence la sensibilité des valeurs au type de maillage et au coefficient de Poisson. Les écarts sont particulièrement élevés pour le maillage 3D et un coefficient de Poisson caractéristique d’un matériau (i.e. non nul), avec des valeurs au moins égales au double des valeurs de référence pour les coefficients D_{iii}^i .

	D_{111}^1	D_{222}^2	C_{22}^2	G_{22}^2
Calcul analytique	111.18	1773.7	-110.0	55.02
STEP éléments de coques, $\nu = 0$	111.2	1773.6	-110.4	55.08
STEP éléments de coques, $\nu = 0.3$	121.47	1952.8	-110.4	55.30
STEP éléments 3D, $\nu = 0$	222.39	3547.2	-110.15	55.02
STEP éléments 3D, $\nu = 0.3$	430.56	6592.4	-110.8	61.28

TABLE 5.5 – Résultats des calculs de coefficients non-linéaires adimensionnés du premier mode d'une poutre bi-encastée, avec un coefficient de Poisson non nul ($\nu = 0$ et $\nu = 0.3$). Pour ces calculs, l'amplitude des déplacements a été fixée à $h/20$.

5.3.2 Recherche de la source d'erreur

Cette section tente d'expliquer les écarts constatés avec les valeurs de référence du modèle de poutre. On cherche d'abord à établir un domaine de validité en amplitude conformément au résultat établi sur la figure 3 du chapitre 4.

(a) Sensibilité des coefficients à l'amplitude

Comme effectué sur la figure 3 du chapitre 4, les coefficients sont calculés pour des valeurs définies sur un intervalle $\max(w)/h \in [10^{-6}; 10^3]$. Les calculs sont effectués pour des échantillons des trois familles de coefficients ($D_{iii}^i, C_{pi}^i, G_{ii}^i$).

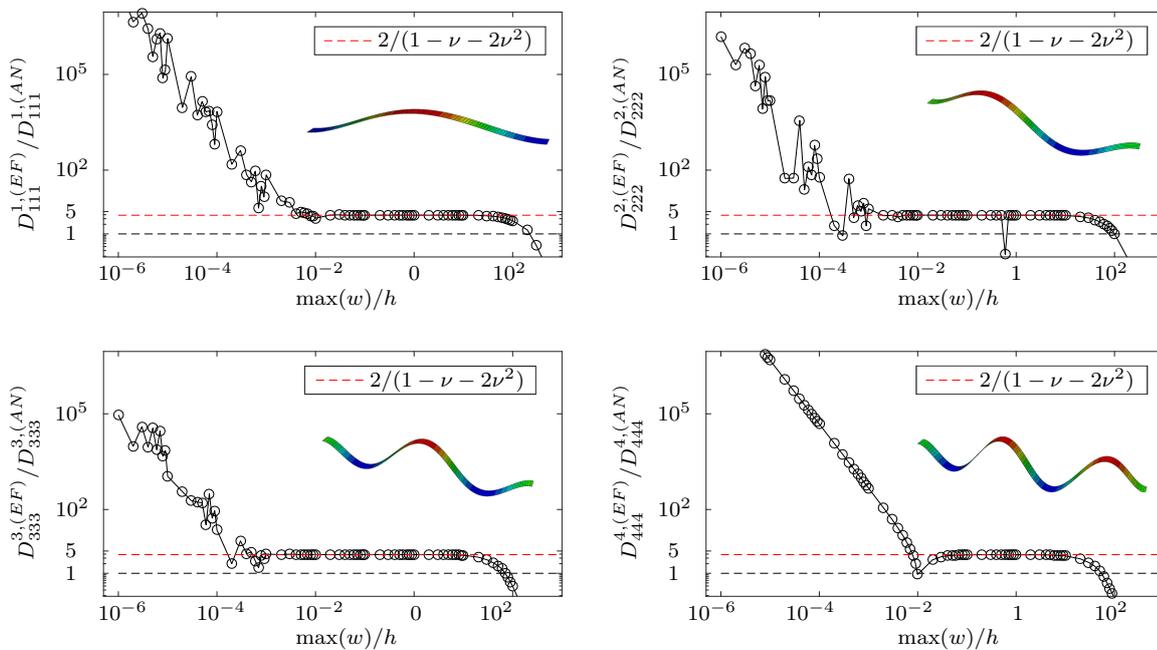


FIGURE 5.7 – Évolution des coefficients D_{iii}^i des quatre premiers modes transverse en fonction de l'amplitude de déplacement imposé, et comparaison avec la valeur théorique. La valeur recalée est tracée en pointillés rouges pour tous les coefficients. La valeur théorique est tracée en pointillés noirs.

Les figures 5.7, 5.8 et 5.9 présentent les valeurs des coefficients en fonction de l'amplitude des déplacements imposés. Ces trois figures montrent qu'un domaine de validité pour les amplitudes de déplacement peut être défini. Dans le cas des coefficients D_{iii}^i présentés sur la figure 5.7, l'écart avec les valeurs de référence est particulièrement élevé (≈ 4). Un facteur dépendant du coefficient de Poisson a été proposé pour recalculer l'erreur : le facteur $2/(1 - \nu - 2\nu^2)$ semble correspondre à la valeur obtenue sur le domaine d'amplitude où les coefficients sont constants. Pour des amplitudes transverses inférieures à $10^{-2}h$, les estimations sont supérieures à la valeur stabilisée dans les quatre cas présentés. Une décroissance vers les valeurs stabilisées est observée, alors qu'elle ne l'était pas avec le maillage composé d'éléments de coques. Les estimations décroissent ensuite pour des valeurs supérieures à environ $10h$. Le domaine de validité est plus restreint dans le cas du coefficient associé au quatrième mode.

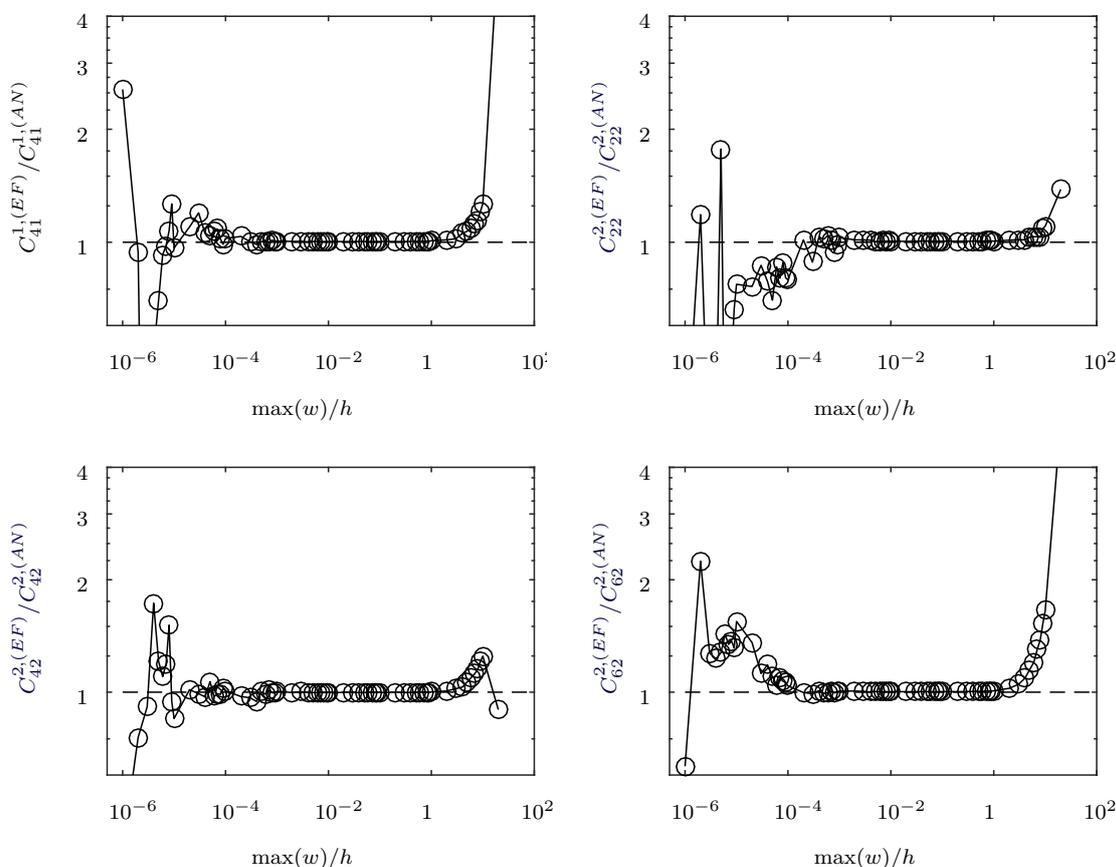


FIGURE 5.8 – Évolution des coefficients C_{pi}^k des quatre premiers modes transverses en fonction de l'amplitude de déplacement imposé, et comparaison avec la valeur théorique. La valeur recalculée est tracée en pointillés rouges pour tous les coefficients, tandis que la valeur théorique est tracée en pointillés noirs..

Les valeurs des coefficients C_{pi}^k obtenus sont tous conformes aux résultats prédits par les modèles analytiques. L'évolution des coefficients est présentée sur la figure 5.8. Celle-ci montre un intervalle de validité plus large que les coefficients D_{iii}^i . La sensibilité aux déplacements montre des tendances opposées à celles des coefficients cubiques : les estimations sous-estiment majoritairement les valeurs attendues en deçà de la plage de validité. Au-delà de cet intervalle, les valeurs des coefficients calculés augmentent. Les estimations sont correctes quelles que soient les amplitudes de déplacement et indépendamment des modes transverses et axiaux considérés.

Ceci n'est en revanche pas le cas des coefficients G_{ii}^p , comme le montre la figure 5.9. Dans les exemples présentés, des écarts sont constatés en fonction de l'ordre des modes imposés. Avec ces exemples, un écart est constaté lorsque le second mode transverse est imposé. Si le premier mode est prescrit, le coefficient de référence est bien approché par les coefficients calculés avec la méthode STEP. L'écart élevé avec le second mode transverse est moins élevé que celui relevé avec les coefficients D_{iii}^i . Dans ce cas, le rapport aux valeurs issues du modèle analytique est assez bien approché par $1/(1-\nu^2)$. Le domaine de validité des coefficients G_{ii}^p est le plus large des trois familles de coefficients : ce domaine ne semble pas limité par les valeurs inférieures des amplitudes de déplacement. Pour les valeurs supérieures, les coefficients calculés diminuent et/ou divergent après un seuil approché par $w/h = 10$.

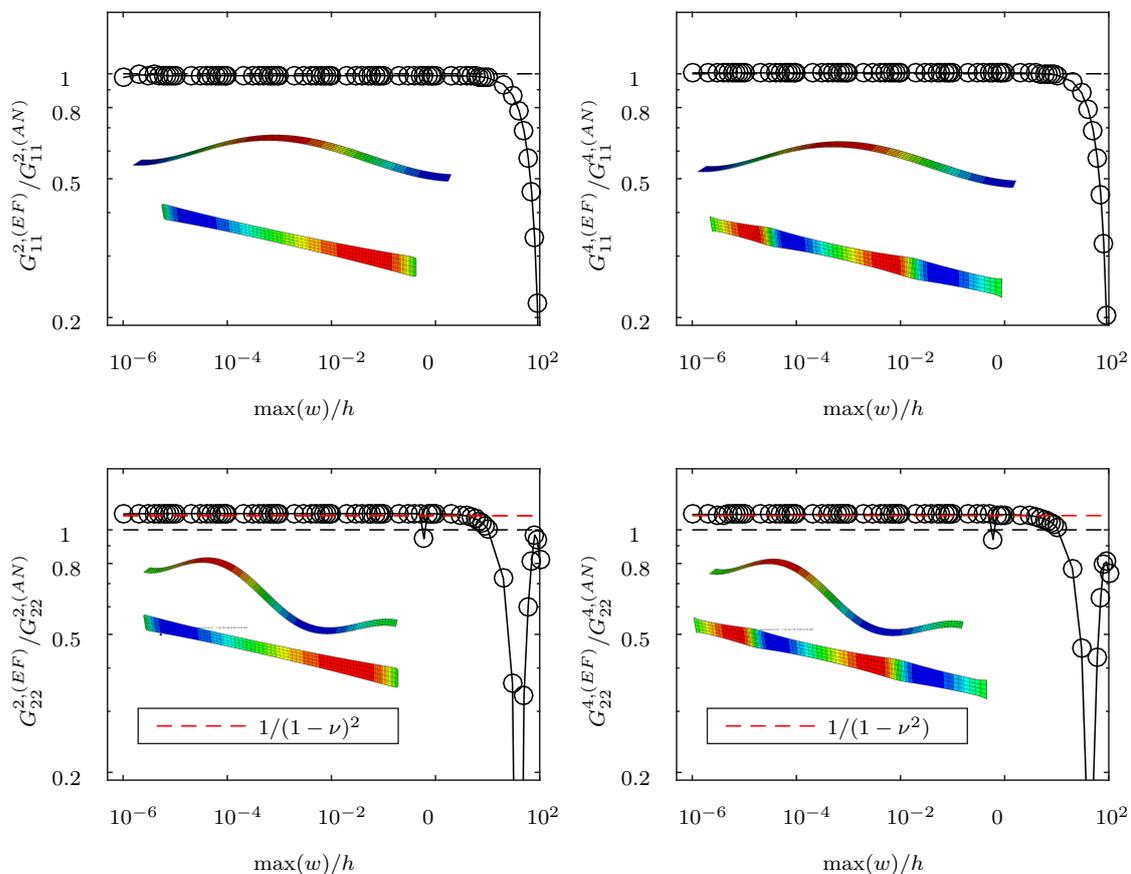


FIGURE 5.9 – Sensibilité au coefficient de Poisson et recalage des coefficients cubiques par rapport à des lois de comportements 2D ou 3D. Les coefficients G_{ij}^p des quatre premiers modes sont représentés avec des marqueurs, les recalages et la référence sont respectivement tracés avec des lignes pointillées colorées et noire.

(b) Sensibilité des coefficients au coefficient de Poisson

Ces résultats démontrent une sensibilité des coefficients estimés à l'effet Poisson. Cela confirme que les validations présentées dans le chapitre précédent n'ont pu être entreprises que si le coefficient de Poisson était imposé nul *dans le cas d'une poutre*. Afin d'étudier plus finement cette sensibilité, les coefficients non-linéaires sont maintenant estimés avec un module de Poisson balayé sur l'ensemble de son domaine de définition $[0, 0.5]$. L'objectif est d'essayer de trouver une explication à ces écarts. Les

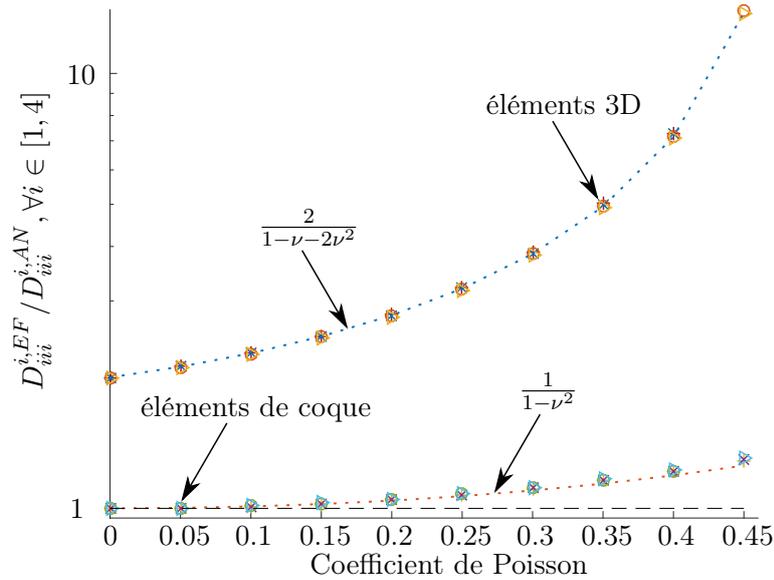


FIGURE 5.10 – Sensibilité au coefficient de Poisson et recalage des coefficients cubiques par rapport à des lois de comportements 2D ou 3D. Les coefficients $D_{iii}^{i,EF}$ des quatre premiers mode sont représentés avec des marqueurs, les recalages et la référence sont respectivement tracés avec des lignes pointillées colorées et noire.

résultats des coefficients cubiques $D_{iii}^{i,EF}$ présentés sur la figure 5.10 permettent d'effectuer un recalage des écarts en fonction de la valeur du coefficient de Poisson. Ce recalage montre que des facteurs $(1 - \nu^2)$ pour les éléments de coques et $\frac{1}{2}(1 - \nu - 2\nu^2)$ pour les éléments tri-dimensionnels régissent précisément l'évolution des erreurs constatées.

5.3.3 Validité de l'hypothèse des contraintes uniaxiales dans le cas 3D

Les facteurs de recalage rappellent ceux développés dans le cas d'une loi de comportement en deux ou trois dimensions. Dans le cas de maillages avec les éléments de coque, le comportement non-linéaire présente un facteur similaire à celui intervenant dans la loi de comportement d'une plaque (cf. équation (2.58)). On rappelle que cette loi de comportement s'écrit dans l'hypothèse où le matériau est homogène est isotrope d'une part, et que l'une des trois contraintes principales du repère est négligeable devant les deux autres d'autre part. Le modèle présenté dans la section 2.1.3 est fondé sur l'hypothèse que $\pi_{zz} \ll \pi_{rr}, \pi_{zz} \ll \pi_{\theta\theta}$ et $\pi_{zz} \ll \pi_{r\theta}$. Le cas tridimensionnel est caractérisé par un rapport $1 - \nu - 2\nu^2$. Ceci est dû à la présence du terme $(1 + \nu)(1 - 2\nu) = 1 - \nu - 2\nu^2$ dans l'équation (2.17). Ce terme est associé aux coefficients de Lamé λ, μ . Le facteur $(1 - \nu^2)$ relevé avec les éléments de coques s'explique par la prise en compte d'un champ de contraintes transverses π_{zz} inclus dans la cinématique de l'élément [4].

Ce constat suppose que les champs de contrainte sur les bords libres ne sont pas négligeables dans le cas d'un calcul STEP. Dans les hypothèses classiques des poutres, ce sont ces hypothèses qui rendent le problème indépendant de l'effet Poisson, comme le montrent les équations (2.33) et (2.34). Ce comportement est justifié par la formulation forte, dont les expressions (2.15) sont ici rappelées :

$$\mathbf{div}(\mathbf{F}\boldsymbol{\pi}) + \mathbf{f}^d = \rho\ddot{\mathbf{x}} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.47a)$$

$$(\mathbf{F}\boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad (5.47b)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u. \quad (5.47c)$$

La méthode STEP utilise cette formulation dans le cas particulier où $\partial\Omega_u = \partial\Omega$ et $\partial\Omega_F = \emptyset$. Si les

efforts de réactions sont définis sur tout le domaine Ω , l'expression (5.47b) n'est alors plus valable sur aucune surface libre de $\partial\Omega$. D'ordinaire, les hypothèses de poutre $\pi_{xx} = \pi_{yy} = 0$ sont justifiées à partir de cette équation sur ses faces libres et de l'hypothèse des petites dimensions transverses.

Pour mettre ces effets en évidence, le cas d'un calcul statique avec des déplacements imposés sur l'exemple de la poutre bi-encastée occupant le domaine Ω est détaillé. Le déplacement est proportionnel au premier mode transverse, c'est-à-dire :

$$\mathbf{x}^d = \lambda \boldsymbol{\phi}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = \lambda \\ q_j = 0 \quad \forall j \neq 1. \end{cases} \quad (5.48)$$

La démarche et les résultats sont présentés sur la figure 5.11. La valeur de l'amplitude des déplacements est fixée dans ce cas à $\max(w) = h/2$, de sorte d'obtenir qualitativement $\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f}_{nl}(\alpha_1 \boldsymbol{\phi}_1) \sim \alpha_1 \omega_1^2$, c'est-à-dire que les effets linéaires et non-linéaires sont du même ordre de grandeur. Cette figure

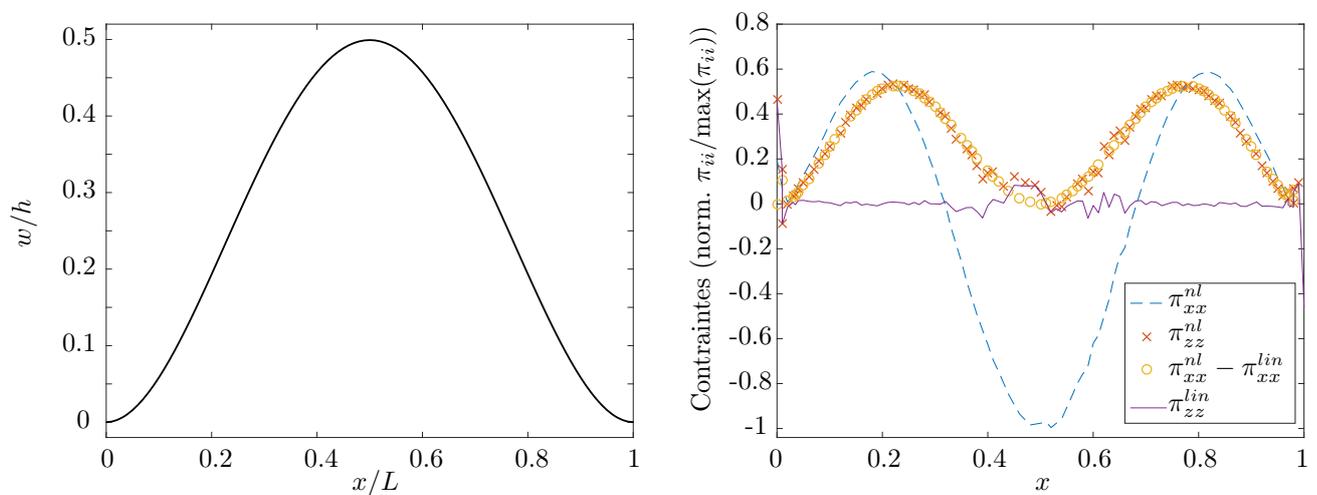


FIGURE 5.11 – Résultats en contraintes (droite) en réponse d'un calcul statique non-linéaire au champ de déplacement imposé, lorsque celui-ci est proportionnel au premier mode transverse d'une poutre bi-encastée (représenté à gauche). Dans la légende, (NL) désigne le résultat d'un calcul non-linéaire, par opposition à *lin* qui signifie que les non-linéarités géométriques ont été désactivées. Les valeurs sont extraites des résultats aux noeuds de la ligne moyenne de la poutre.

montre que le champ de contraintes π_{zz} résultant d'un calcul statique non-linéaire est comparable à celui du champ π_{xx} . Plus précisément, la partie non-linéaire de π_{xx} est sensiblement égale à π_{zz} . Sans chercher à expliquer intégralement ce phénomène avec un développement analytique, la déformation transverse déduite de la cinématique de poutre d'Euler-Bernoulli s'écrit d'après l'équation (2.25) :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}(w')^2 \quad (5.49)$$

d'après la définition donnée par l'expression (2.3). Cela signifie que la contrainte π_{zz} est égale au terme de von Kármán de la contrainte π_{xx} . En prenant en compte la contrainte π_{zz} dans le travail virtuel des efforts intérieurs (équation (2.2b)), celui-ci s'écrit en supposant les déformations de cisaillement toujours négligeables :

$$\delta W_i = - \iiint_{\Omega} (\pi_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \pi_{zz} \delta \varepsilon_{zz}) d\Omega \quad (5.50)$$

Par suite, une loi de comportement tridimensionnelle est appliquée pour exprimer les contraintes π_{xx} et π_{zz} , et deux termes cubiques en (w, x) interviennent, compris respectivement dans chacun des termes de l'équation (5.50). Ce développement propose une piste *qualitative* pour expliquer le facteur $\frac{2}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ intervenant dans les estimations des coefficients cubiques des maillages 3D.

5.3.4 Solutions proposées

Ces contraintes ne sont pas compatibles avec l'hypothèse de contrainte uniaxiale du modèle de poutre (cf. hypothèse (iii) du modèle de poutre présenté dans la section 2.1.2). Elles peuvent être expliquées par l'existence d'autres champs de déplacements complémentaires au premier mode transverse, et différents du mouvement axial. Ces déplacements correspondent notamment à un mouvement de compression et dilatation dans les deux directions transverses de la poutre. Avec cette approche, les problèmes tridimensionnels rencontrés sont expliqués par la convergence modale : la troncature effectuée pour le développement modal (avec l'équation (2.172)) n'est pas suffisante avec des modes transverses et axiaux dans le cas de la poutre. Une première solution consiste à enrichir la base par d'autres modes capturant les mouvements complémentaires afin d'éviter les surcontraintes. Une solution alternative est de laisser les mouvements libres en dehors des lignes ou surfaces moyennes. Ces deux possibilités sont plus amplement discutées ci-après.

(a) Prise en compte de champs de déplacement supplémentaires

Cette procédure consiste à prendre en compte les champs de déplacements couplés au mode transverse considéré. Ces champs comprennent potentiellement un grand nombre de modes linéaires. Cela suggère de calculer un grand nombre de modes, car les déplacements recherchés peuvent correspondre à des modes d'épaisseur, potentiellement localisés à de très hautes fréquences. Cette stratégie n'est pas envisageable pour que la mise en place d'une procédure de réduction de modèle réponde aux critères d'efficacité, de fiabilité et de robustesse.

Cependant, cette démarche nécessite tout de même d'être effectuée pour montrer que l'origine du problème est bien liée au développement modal et sa troncature. Dans une démarche collaborative, cette procédure a été entreprise dans le cadre d'un stage de Master [118], et est actuellement développée dans le cadre d'une étude commune [196]. Cette investigation montre également que les modes d'épaisseur complémentaire au premier mode transverse de la poutre bi-encastree sont capturés par la première dérivée modale de ce mode. Le mode et sa dérivée sont représentés sur la figure 5.12. Le mouvement de compression dans la direction transverse se couple avec le quatrième mode axial, dont le couplage avec le premier mode transverse est bien connu (cf. [71], la condensation présentée sur la figure 4 du chapitre 4). De la même manière que les mouvements de membrane, les mouvements

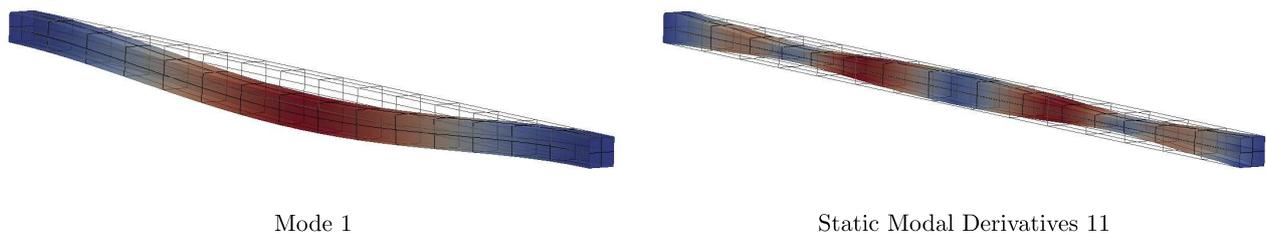


FIGURE 5.12 – Présentation du premier mode d'une poutre bi-encastree (gauche), à partir de laquelle est calculée sa première dérivée modale statique à partir de l'équation (3.31) (droite). Les couleurs représentent les amplitudes de déplacement. Ces figures sont présentées avec l'aimable autorisation d'Alessandra Vizzaccaro dans le cadre de [196].

d'épaisseur sont statiques. Dans le cas de la poutre homogène, ces mouvements peuvent être condensés dans le coefficient cubique avec la procédure définie par les équations (29) du chapitre 4. Cette procédure aboutit à la valeur du coefficient condensé Γ_{111}^1 [118, 196].

(b) Imposition du champ de déplacement modal sur la ligne/surface moyenne

Une seconde option, plus facile à réaliser en pratique, consiste à imposer les déplacements modaux uniquement sur une partie interne du maillage. Une ligne ou une surface interne d'une poutre ou plaque pourrait alors suffire. Les efforts internes f_{int} sont alors récupérés sur la ligne moyenne.

Dans les codes éléments finis existants, cette procédure présente cependant l'inconvénient de faire appel à une procédure de Newton-Raphson pour trouver les déplacements \boldsymbol{x} en dehors de cette partie du domaine.

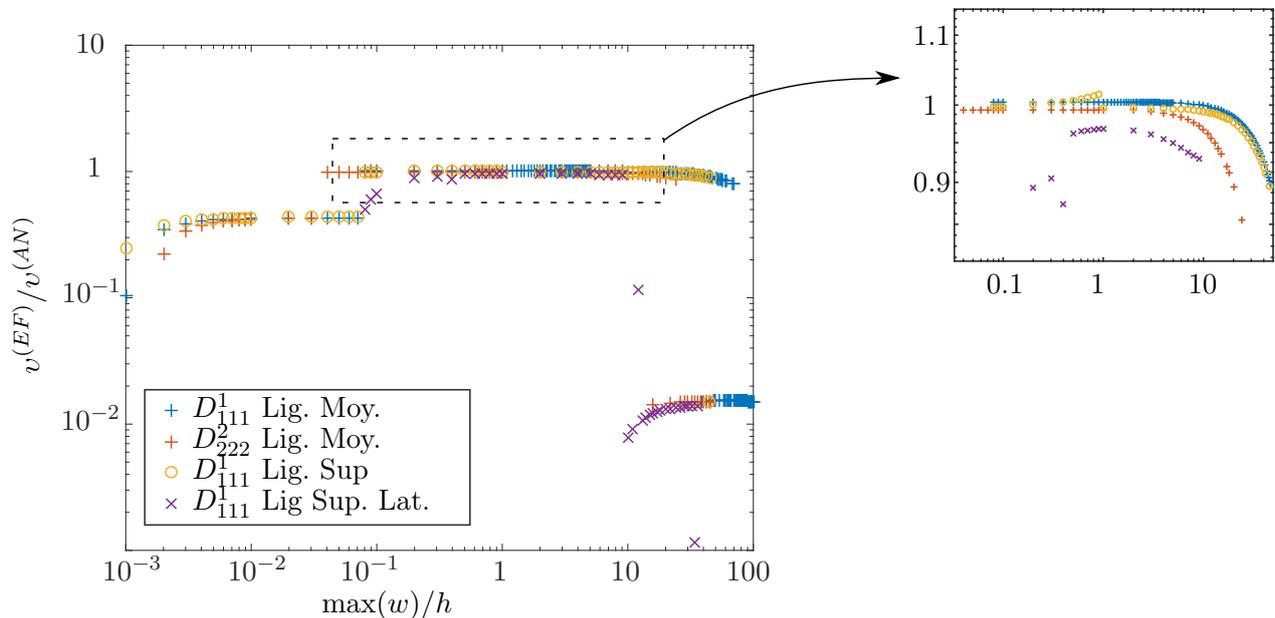


FIGURE 5.13 – Évolution des coefficients cubiques D_{iii}^i avec l'amplitude des déplacements imposés. Les références sont les coefficients analytiques. Les déplacements sont prescrits sur une ligne dans la longueur de la poutre : la ligne moyenne, une ligne centrale sur l'une des faces (ligne supérieure), et une arête (ligne supérieure latérale) de la poutre rectangulaire.

La figure 5.13 montre que cette méthode proposée aboutit bien à l'estimation des valeurs de références. Plusieurs lignes sont testées : la ligne moyenne de la poutre, une ligne située au dessus de la ligne moyenne et une ligne placée sur l'une des arêtes de la poutre. Le zoom montre que les estimations sont meilleures lorsque les déplacements sont imposés sur la ligne moyenne. Le domaine de validité des coefficients est plus restreint avec ce calcul que dans le cas où les déplacements sont imposés à tous les nœuds (cf. figure 5.7). Les meilleurs résultats sont obtenus sur avec des déplacements imposés sur la ligne moyenne plutôt que sur d'autres lignes parcourant la longueur de la poutre : l'intervalle d'amplitude où le calcul est bien effectué est plus large, et les résultats sont plus stables avec l'amplitude des déplacement.

(c) Imposition des déplacements transverses sur la ligne moyenne

Enfin, si lors de l'application de la méthode STEP sur une poutre les degrés de liberté transverses sont imposés sans bloquer les autres mouvements, alors aucun effort axial ne s'applique sur la ligne moyenne. Les efforts de réaction sur la ligne moyenne contiennent implicitement les effets de membrane. Pour clarifier ces propos, le développement est appliqué dans le cas du modèle modal de poutre (équations (7) de l'article en section 4.2). Dans le cas où un déplacement transverse $w = q_i \Phi_i$ est imposé sur la ligne moyenne et que le mouvement du mode Φ_i est considéré, les efforts statiques s'écrivent :

$$\omega_i^2 q_i + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_u} C_{pi}^i \eta_p q_i + \varepsilon D_{iii}^i q_i^3 = Q_i \quad (5.51a)$$

$$\gamma_p^2 \eta_p - G_{ii}^p q_i^2 = 0. \quad (5.51b)$$

La projection des efforts intérieurs de réaction, ici égaux à Q_i , permet alors d'obtenir directement le coefficient condensé Γ_{iii}^i . Ce raisonnement reste valable si différents modes transverses (i, j, l) sont

imposés sur la ligne moyenne et que les efforts de réaction sont projetés sur un mode $k \neq i$. Cela permet alors d'identifier les $(\Gamma_{ii}^k, \Gamma_{ijj}^k, \Gamma_{ij}^k, \Gamma_{ijl}^k)$.

	Γ_{111}^1	Γ_{222}^2	Γ_{333}^3	Γ_{444}^4	Γ_{555}^5	Γ_{666}^6
Calcul analytique	75.68	1060.3	4891.1	14721	34847	70745
STEP éléments 3D	76.00	1063.6	4899.6	14721	34775	70411
Erreurs	0.43 %	0.31 %	0.17 %	0.0 %	-0.21 %	-0.47%

TABLE 5.6 – Résultats des calculs de coefficients non-linéaires adimensionnés **condensés** du premier mode d'une poutre bi-encastree, avec un coefficient de Poisson non nul ($\nu = 0.3$). Les coefficients quadratiques, négligeables devant les cubiques, sont notées comme égaux à zéro. Pour ces calculs, l'amplitude des déplacements a été fixée à $h/2$.

Des tests préliminaires ont été réalisés sur la poutre encastree : la comparaison avec les Γ_{iii}^i issu du modèle analytique, présentée dans le tableau 5.6, valide le raisonnement et laisse entrevoir une nouvelle procédure pour estimer les coefficients non-linéaires de modèles réduits de structures minces. Celle-ci n'a pas fait l'objet de plus amples développements dans le temps imparti.

5.4 Bilan du chapitre

La validation de la méthode STEP par comparaison à des modèles analytiques avait été effectuée dans un cadre très restreint (structures planes, conditions aux limites encastrees, maillage avec éléments de coques, coefficient de Poisson imposé nul pour les modèles de poutre) dans le cadre du chapitre 4. Pour réduire des modèles éléments finis de structures piézoélectriques, ce cadre ne plus être considéré. En effet, les formulations implémentées dans les codes existants sont pour la plupart fondées sur des éléments à topologie tri-dimensionnelle.

Ce chapitre a d'abord démontré l'applicabilité de la méthode STEP au calcul des coefficients de couplage électromécanique à partir de la validation des facteurs de couplage dans le cas linéaire. Même restreinte au cas linéaire, la procédure constitue une méthode originale de quantification du couplage électromécanique. Cette nouvelle procédure présente des avantages par rapport au principal critère existant pour la quantification du couplage électromécanique. En particulier, l'approche proposée ne repose sur aucune approximation et une meilleure précision a donc été obtenue.

Les erreurs de calcul des coefficients non-linéaires élastiques sont mis en évidence. En particulier, une loi pour définir la sensibilité des coefficients au coefficient de Poisson est proposée. Ce problème n'a pas été complètement résolu. Sa compréhension complète nécessiterait une étude détaillée de la résolution du calcul statique non-linéaire par le code éléments finis.

Une solution pratique est proposée pour lever ce problème, avec l'imposition des champs de déplacements sur une partie interne de la structure maillée. Dans le cas d'une poutre, la ligne moyenne est le meilleur candidat. Dans le cas où seul le déplacement transverse est recherché, laisser les déplacements des autres composantes libres permet d'effectuer une condensation implicite des effets de membrane. Des tests préliminaires sur une poutre homogène valident le raisonnement. Une étude approfondie est nécessaire pour élargir cette procédure à des structures plus complexe. En particulier, la définition d'une ligne ou surface moyenne est moins évidente dans le cas de structures minces stratifiées et d'épaisseurs variables. Ces considérations demeurent à l'heure actuelle à l'état de perspectives dans la démarche de réductions de modèles.

Ce chapitre clôt l'ensemble des investigations numériques et théoriques entreprises au cours de la thèse. L'explication du problème dû aux éléments tridimensionnels et le calcul des derniers coefficients $\Theta_{ij}^{(p)}$ n'ont pas été effectués dans la durée de la thèse. Ces points sont laissés comme perspectives pour de futurs travaux. Les chapitres suivants concernent une analyse expérimentale de deux structures minces, respectivement élastique et piézoélectrique.

Troisième partie

Investigations expérimentales

Chapitre 6

Vibrations non-linéaires d'une plaque circulaire élastique

Contents

6.1	Cadre théorique : modes non-linéaires et résonance de phase	152
6.2	Mesures des modes non-linéaires : état de l'art	153
6.2.1	Sinus balayé pas à pas (<i>Stepped Sine Testing</i>) avec détection synchrone . . .	154
6.2.2	Décroissance des oscillations libres	155
6.2.3	Continuation expérimentale et boucle à verrouillage de phase	155
6.3	Réponse autour du mode axisymétrique (0,1)	156
6.3.1	Dispositif expérimental et analyse modale	156
6.3.2	<i>Backbone curve</i> et réponses forcées	159
6.4	Étude d'une résonance 1 :1 autour du mode asymétrique (2,0)	160
6.4.1	Présentation de l'article	160
6.4.2	<i>Backbone curves</i> d'oscillateurs cubiques couplés en résonance interne 1 : 1 : scénarios de bifurcation, mesures et identification de paramètres	162
6.5	Bilan du chapitre	186

Ce chapitre concerne les mesures des vibrations non-linéaires d'une plaque élastique. La géométrie de la plaque est circulaire, avec des conditions aux limites libres. Bien que ces conditions aux limites n'aient pas été étudiées avec la méthode STEP, le modèle analytique présenté dans la section 2.1.3 permet d'estimer les coefficients du modèle réduit [189].

Le concept des modes non-linéaires est introduit dans un premier temps, avec des considérations sur leur identification en conditions expérimentales. La présentation de méthodes de mesure des modes non-linéaires existantes font l'objet d'une seconde section. Parmi celles-ci, une procédure de continuation par l'imposition d'une consigne de phase entre l'excitation et la réponse est mise en œuvre sur la plaque circulaire. Cette procédure a été proposée dans [46] et le dispositif de mesure utilisé était accessible au laboratoire pour ces travaux de thèse. Les réponses non-linéaires autour du premier mode axisymétrique sont ensuite mesurées avec cette procédure, permettant de valider le dispositif.

Enfin, la procédure est appliquée autour du premier des premiers modes asymétriques, dans la continuité d'une étude comparant résultats théoriques [189] et expérimentaux [185] obtenus sur le même système. Les fréquences de ces modes sont proches (théoriquement égales) et les termes non-linéaires couplent les deux oscillateurs. Dans le cas présent, la réponse autour du mode de plus basse fréquence aboutit à un phénomène de résonance interne 1 : 1. Celle-ci se manifeste pour la plaque circulaire par l'apparition d'ondes tournantes sur la circonférence de la plaque, ainsi qu'un changement de courbure des réponses libre et forcées du premier oscillateur. Les mesures aboutissent au même comportement que la prédiction d'un modèle de deux oscillateurs de fréquences propres couplés par des termes non-linéaires : en particulier, un changement de courbure observé sur le mode non-linéaire est associé à une bifurcation fourche. La comparaison avec les réponses libres prédites par le modèle analytique permet de recalibrer les coefficients non-linéaires. Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec le laboratoire IMSIA de l'ENSTA à Palaiseau, et ont été soumis dans le journal à comité de lecture *Meccanica*. L'article soumis constitue la quatrième section de ce chapitre.

6.1 Cadre théorique : modes non-linéaires et résonance de phase

Cette section expose les définitions et principes des modes non-linéaires pour justifier le dispositif expérimental. Le concept de mode non-linéaire a été d'abord défini comme "une vibration à l'unisson d'un système autonome" [150] : en dynamique des structures, cela signifie que tous les points passent en même temps par leurs maxima ou leurs points d'équilibre. Une seconde définition a ensuite élargi la première à partir du théorème de la variété centrale, les modes non-linéaires sont présentés comme "un mouvement qui évolue sur une variété invariante en deux dimensions de l'espace des phases" [162], qui inclut le cas des systèmes amortis. Dans le cas conservatif, les deux définitions sont équivalentes. Le cas des résonances internes est en revanche exclu de ces raisonnements : une étude plus récente le prend en compte par extension de la définition à "un mouvement périodique, non nécessairement synchronisé" [108]. Un développement fondé sur l'usage de la forme normale (dont la théorie est établie dans [94, 128, 190]) montre qu'en absence de résonance interne et pour de faibles non-linéarités, le comportement d'un système mécanique autour d'une résonance se comporte comme un oscillateur de Duffing. Les étapes de ce raisonnement sont décrites dans [46] et [96], dont cette section présente une synthèse afin de définir le cadre de la méthode de mesure retenue.

Un résultat du chapitre 2 après la projection modale présentée au chapitre 2.3 est que le comportement de tout système mécanique ou piézoélectrique peut être gouverné par l'équation d'un oscillateur avec un ensemble de termes quadratiques et cubiques :

$$\ddot{q}_k(t) + 2\xi_k\omega_k\dot{q}_k + \omega_k^2q_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\beta_{ij}^kq_iq_j + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{l=j}^{\infty}\Gamma_{ijl}^kq_iq_jq_l = Q(t). \quad (6.1)$$

En pratique, une troncature est réalisée sur le nombre de modes, et les sommes sont calculées jusqu'à un certain ordre modal K . La réduction nécessite de prendre en compte un nombre de modes potentiellement grand, en raison de la perte d'invariance des modes linéaires [191]. L'extension de la propriété d'invariance des modes aux systèmes non-linéaires permet de réaliser une troncature correcte du problème défini par l'équation (6.1).

La théorie des formes normales permet de simplifier ce problème par le changement de coordonnées suivant [190] :

$$q_k = u_k + \mathcal{P}^{(2)}(u_i, \dot{u}_i) + \mathcal{P}^{(3)}(u_i, \dot{u}_i) \quad (6.2)$$

avec $\mathcal{P}^{(r)}$ une somme de monômes d'ordre r . Une sélection des termes quadratiques et cubiques peut alors être opérée, en fonction leurs caractères *résonants* ou *non-résonants* définis par leur influence sur la dynamique du système. En pratique, seule une minorité de termes quadratiques et cubiques sont significatifs. En particulier, en l'absence de résonance interne, le système peut être réduit à des non-linéarités cubiques, tels que l'équation (6.1) qui devient dans le cas conservatif :

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2u_k + \mathcal{Q}_k^{(3)}(u_i, \dot{u}_i) = 0, \quad (6.3)$$

où $\mathcal{Q}_k^{(3)} \neq \mathcal{P}_k^{(3)}$ désigne un polynôme d'ordre 3. En particulier, si le mouvement de la structure est supposé monomodal, c'est-à-dire si $(u_i, \dot{u}_i) = (0, 0) \forall i \neq k$, alors l'équation de l'oscillateur s'écrit comme [190] :

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2u_k + \Gamma_1u_k^3 + \Gamma_2u_k\dot{u}_k^2 = 0, \quad (6.4)$$

où les coefficients non-linéaires (Γ_1, Γ_2) dépendent du système étudié. La méthode des échelles multiples est alors appliquée : une solution issue de [129] est ici utilisée (la justification n'est pas présentée par souci de concision). Cette solution s'écrit :

$$u(t) = \epsilon a_1 \cos(\omega_{nl}t + \varphi) + \epsilon^3 a_3 \cos(3\omega_{nl}t + \varphi_3) + O(\epsilon^3) \quad (6.5)$$

$$\text{avec } \omega_{\text{nl}} = \omega_0(1 + \epsilon T_{p1} a_1^2) \quad \text{et} \quad T_{p1} = \frac{3\Gamma_1 + \Gamma_2 \omega_0^2}{8\omega_0^2}. \quad (6.6)$$

où pour alléger les notations l'indice k est écarté, et $\omega_0 = \omega_k$. Les phases ϕ et ϕ_3 sont relatives au premier et au troisième harmonique. Cette solution montre que l'ordre de grandeur du terme en $3\omega_{\text{nl}}t$ est inférieur à celui du terme en $\omega_{\text{nl}}t$. Par la suite, la solution au premier ordre est considérée, soit :

$$u(t) \approx \epsilon a_1 \cos(\omega_{\text{nl}}t + \varphi). \quad (6.7)$$

Cette solution est équivalente à celle au premier ordre d'oscillateur de Duffing décrite par l'équation (3.65). En résultat de ces développements, le mouvement unimodal est considéré dans la suite de ces travaux comme un oscillateur de Duffing équivalent :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \Gamma_0 u^3 = 0, \quad \text{avec } \Gamma_0 = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 \omega_0^2}{3}. \quad (6.8)$$

Par extension au problème linéaire, la résonance de phase d'un système est considérée si chaque harmonique présent dans la réponse $u(t)$ est en quadrature de phase avec ceux du forçage $Q(t)$ [134]. Les développements en série de Fourier de ces deux grandeurs ont pour expression :

$$u(t) = \sum_{h=1}^{\infty} u_h \cos(h\Omega t), \quad Q(t) = \sum_{h=1}^{\infty} Q_h \sin(h\Omega t). \quad (6.9)$$

Le terme cubique et les dérivées temporelles s'écrivent alors :

$$\dot{u}(t) = - \sum_{h=1}^{\infty} h\Omega u_h \sin(h\Omega t), \quad \ddot{u}(t) = - \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \Omega^2 u_h \cos(h\Omega t), \quad u^3(t) = \sum_{h=1}^{\infty} w_h \cos(h\Omega t) \quad (6.10)$$

avec $w_h(u)$ les composantes harmoniques à l'ordre h , qui sont dépendants de u et résultats du développement de $u^3(t)$. L'introduction de ces expressions dans l'expression du mouvement initiale (6.1) entraîne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - h^2 \Omega^2) u_h + \Gamma_0 w_h(u) = 0 & \text{(termes d'ordre } h \text{ en cos)} \\ -2h\xi\omega_0\Omega u_h = Q_h & \text{(termes d'ordre } h \text{ en sin),} \end{cases} \quad (6.11a) \quad (6.11b)$$

dont chacune des composantes de la première expression (6.11a) constitue un oscillateur de Duffing autonome, tandis que les équations (6.11b) montrent que le forçage peut être imposé de sorte à annuler les termes d'amortissement. En pratique, l'approximation au premier ordre donnée par l'équation (6.7) permet de négliger les harmoniques supérieures, ce qui conduit à :

$$Q(t) = -2h\omega_0\omega_{\text{nl}}u_1 \sin(\omega_{\text{nl}}t). \quad (6.12)$$

Cela signifie qu'à la résonance de phase, les termes d'amortissement sont compensés par ceux du forçage. Les modes non-linéaires peuvent donc être obtenus par l'acquisition des vibrations à la résonance de phase.

6.2 Mesures des modes non-linéaires : état de l'art

De nombreuses stratégies ont été proposées pour identifier les systèmes non-linéaires, leurs diversités s'expliquent par la grande variété des sources de non-linéarités possibles [109]. Parmi elles, les méthodes modales ont fait l'objet de développements récents [131]. Cette section détaille quelques-unes des principales stratégies pour mesurer les réponses autour des résonances et établir les *backbone curves* expérimentales.

6.2.1 Sinus balayé pas à pas (Stepped Sine Testing) avec détection synchrone

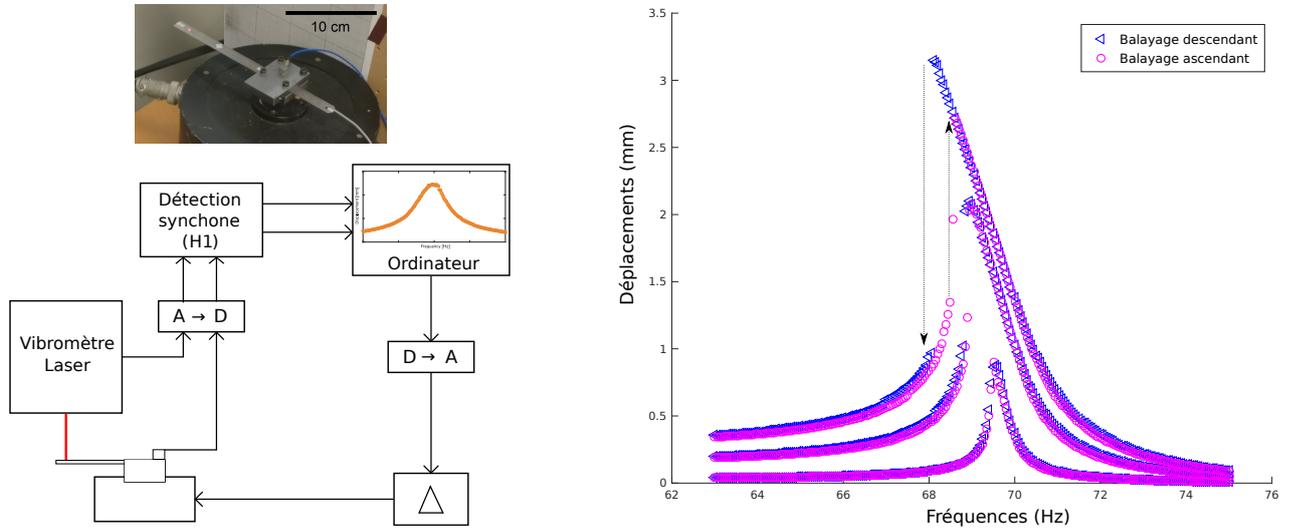


FIGURE 6.1 – Réponse autour du second mode d'une poutre encastée-libre en grande rotation mise en vibration au moyen d'un pot vibrant, avec des vibrations mesurées avec un vélocimètre laser. Le phénomène d'hystérésis constaté pour les sauts et instabilités en fonction du sens du balayage est indiqué en lignes pointillées fléchées. Le protocole expérimental (à gauche) a été reproduit avec l'aimable autorisation de Mathieu Colin [39].

Cette méthode consiste à obtenir des échantillons point par point d'une réponse forcée autour d'une résonance. Un signal sinusoïdal est utilisé pour le forçage, et la réponse n'est enregistrée qu'une fois le régime permanent atteint. Les composantes harmoniques recherchées sont alors caractérisées par détection synchrone : cette méthode permet d'obtenir l'amplitude A et la phase φ d'un signal à une fréquence donnée. Dans le cas où l'excitation F est un signal sinusoïdal de pulsation Ω , alors l'amplitude et la phase de la réponse $y(t)$ à Ω (première composante harmonique) est obtenue en multipliant dans un premier temps $y(t)$ par deux sinusoïdes de mêmes périodes en quadrature de phase, soit :

$$y_c(t) = y(t) \cos(\Omega t) \quad (6.13a)$$

$$y_s(t) = y(t) \sin(\Omega t). \quad (6.13b)$$

Le signal enregistré est alors exprimé sous la forme $y(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) + B(t)$, où B est la partie du signal comprenant toutes les composantes fréquentielles différentes de Ω . Les moyennes sur une période des quantités (6.13) deviennent :

$$M_c = \frac{1}{T} \int_0^T y_c(t) dt = \frac{A}{2} \cos(\varphi) \quad (6.14a)$$

$$M_s = \frac{1}{T} \int_0^T y_s(t) dt = -\frac{A}{2} \sin(\varphi). \quad (6.14b)$$

L'amplitude et la phase sont finalement obtenues par :

$$A = 2\sqrt{M_c^2 + M_s^2} \quad (6.15a)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{M_s}{M_c}\right). \quad (6.15b)$$

Ces dernières opérations sont répétées pour chacune des fréquences définies dans le balayage. Un exemple de résultats obtenus est présenté avec la réponse en amplitude tracée sur la figure 6.1 : les sauts dus aux limites d'instabilité sont visibles sur la réponse, la différence des positions des sauts pour des balayages ascendants et descendants caractérise le phénomène d'hystérésis présenté avec l'oscillateur de Duffing. La *backbone curve* peut être estimée par une interpolation quadratique de l'ensemble des points identifiés comme les résonances de phase, situés à la limite de la stabilité.

6.2.2 Décroissance des oscillations libres

Cette méthode, appelée en anglais *nonlinear resonant-decay method*, consiste à obtenir d'abord un état oscillant du système en quadrature de phase et à une grande amplitude. Le signal du forçage est alors coupé, le signal en oscillations libre décroît avec le temps et la variation de fréquence du signal caractérise alors la *backbone curve* [134]. Une première difficulté réside dans l'obtention de la résonance de phase à une très grande amplitude, qui correspond pour les systèmes étudiés à une limite de stabilité (cf. l'oscillateur de Duffing en section 3.2.3(b)). L'estimation des fréquences instantanées des oscillations libres constitue une seconde difficulté : la détection des maxima de la transformée de Hilbert, en ondelettes ou le spectrogramme sur une largeur de bande sont des outils employés dans ce cadre d'étude [107, 98]. Ces techniques nécessitent cependant d'effectuer un compromis entre résolutions temporelle et fréquentielle lors du choix des paramètres de traitement du signal.

6.2.3 Continuation expérimentale et boucle à verrouillage de phase

Une extension de la continuation de branches de solutions périodiques, de l'outil numérique à la mise en oeuvre d'une procédure expérimentale, a été proposée dans [164] et appliquée expérimentalement dans [145, 20]. Celle-ci est fondée sur la combinaison d'une procédure de suivi des branches, gouvernée par un paramètre de chemin, avec une boucle de rétroaction permettant de stabiliser le système en boucle fermée. Cet outil permet de parcourir de manière non-intrusive l'ensemble des solutions, et en particulier les parties instables du système en boucle ouverte. Théoriquement, le système permet aussi de suivre les différentes branches lors de bifurcations, notamment si celles-ci ont pour origine l'émergence d'une résonance interne. Cette opération demeure délicate en pratique. Dans ces applications, le signal d'entrée est une sinusoïde, et la résonance de phase avec le signal de sortie est recherchée. Les paramètres de contrôle sont l'amplitude et la phase du signal d'excitation, et les paramètres contrôlés sont les coefficients de Fourier de la réponse [145].

Une seconde approche de continuation expérimentale, initialement proposée par [193] pour étudier les résonances de structures piézoélectriques à l'échelle macroscopique, consiste à effectuer un *contrôle de la phase*. Son principe est d'étudier les modes non-linéaires en imposant la quadrature de phase entre l'excitation et la réponse [125, 138]. Puisque pour des non-linéarités suffisamment faibles, le système se comporte comme un oscillateur de Duffing équivalent, alors la phase d'un système structurel résonant est monotone d'après les résultats de la section 3.2.3(b). L'imposition d'une phase monotone sur l'intervalle $]0, \pi[$ permet donc d'obtenir la réponse forcée autour d'une résonance ciblée. Cette procédure a aussi été proposée dans [125].

Cette technique est désignée par l'acronyme PLL dans la suite du manuscrit (de l'anglais *Phase-Locked Loop*). Cette technique, fondamentale pour le fonctionnement des systèmes électroniques, est également employée pour mesurer les réponses non-linéaires de MEMS [200, 121, 32, 173], et a aussi été utilisée pour caractériser les glissements fréquentiels de gongs chinois [98]. Comme pour la procédure de continuation expérimentale, cette méthode a pour avantages d'être non-invasive et de stabiliser en boucle fermée les parties instables de l'oscillateur.

L'architecture de la boucle de contrôle est schématisée sur la figure 6.2, sa structure comprend trois parties principales :

- un détecteur estime la phase $\hat{\varphi}$ entre la réponse mesurée $x(t)$ et l'excitation mesurée $Q_{mes}(t)$. Préalablement, les phases de ces deux signaux ainsi que leurs amplitudes sont estimées par le principe de détection synchrone détaillé dans la section 6.2.1.
- un contrôleur Proportionnel-Intégrateur (PI) corrige l'erreur de phase e entre la consigne φ_c et l'estimation $\hat{\varphi}$. La pulsation instantanée Ω adaptée à la consigne est déduite de ce traitement.
- un oscillateur contrôlé en tension (VCO pour l'acronyme anglais de *Voltage Control Oscillator*) génère le signal d'excitation injecté dans le système, après calcul de la phase instantanée θ .

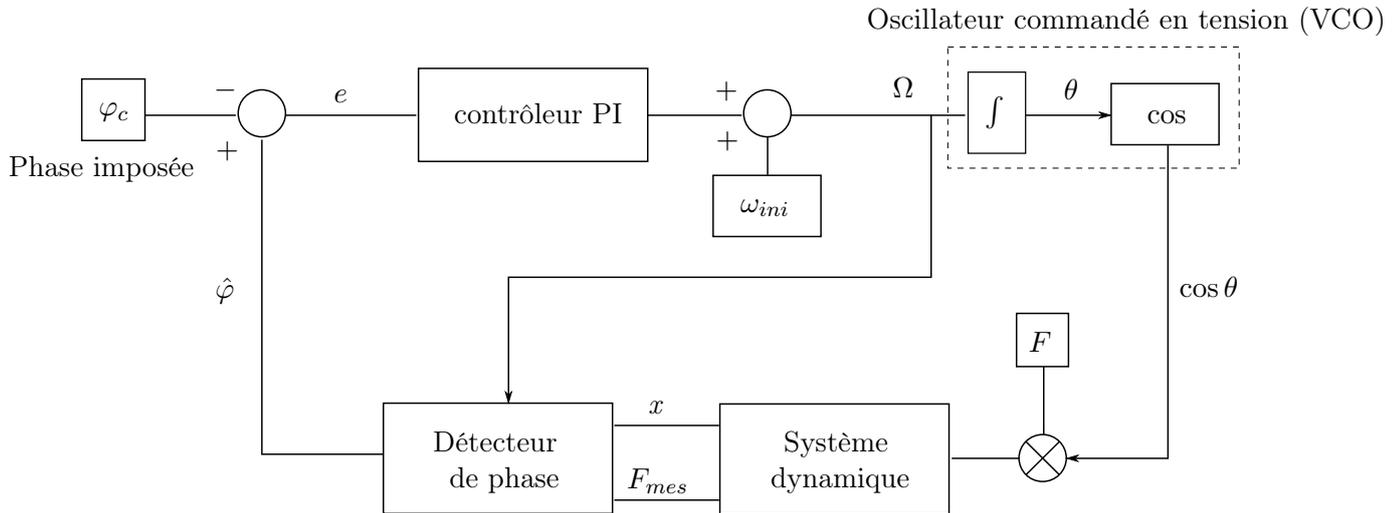


FIGURE 6.2 – Schématisation de la boucle de contrôle à verrouillage de phase. Ces différents blocs de traitement sont implémentés dans un schéma Simulink.

Cette méthode de mesure a été implémentée au laboratoire dans le cadre [46] et [96]. En particulier, les trois principales étapes de la boucle de contrôle sont implémentées dans un schéma Simulink et réalisées en temps réel par une *MicroLabBox* équipée de l'interface logicielle *dSpace*.

En raison de sa robustesse et sa fiabilité, cette méthode est retenue pour l'ensemble des mesures effectuées dans le cadre de la thèse. Les résultats sur la plaque élastique sont présentés dans les deux sections suivante.

6.3 Réponse autour du mode axisymétrique (0,1)

Le contrôle de la phase est d'abord réalisé sur un oscillateur, associé au premier mode axisymétrique d'une plaque circulaire homogène. L'objectif de cette section est de présenter des résultats des réponses non-linéaire unimodales, pour lesquelles le système de contrôle avec PLL a été conçu.

6.3.1 Dispositif expérimental et analyse modale

La structure est une plaque circulaire en laiton de rayon $R = 0.11$ m et d'épaisseur $h = 1.5$ mm. Pour cette expérience ainsi que celle rapportée dans le chapitre suivant, deux plaques identiques ont été commandées, avec un découpage effectué à l'électro-érosion. Les conditions aux limites libres sont reproduites expérimentalement à l'aide de fils en nylons reliant la plaque en suspension à un système rigide. Un recalage des coefficients du matériau est d'abord effectué : la masse volumique est obtenue à partir des mesures de la masse totale et des dimensions de la structure, tandis que le module de Young et le coefficient de Poisson sont recalés à partir des pulsations propres, par rapport à celles issues d'un modèle analytique. Les valeurs obtenues sont $\rho = 8486$ kg.m⁻³, $Y = 110$ GPa et $\nu = 0.3$. Le forçage mécanique repose sur un système bobine/aimant mis en place dans [176] et présenté sur

la figure 6.3, tandis que les mesures des vibrations sont effectuées par un vibromètre laser à balayage de référence *Polytec PSV-400*.

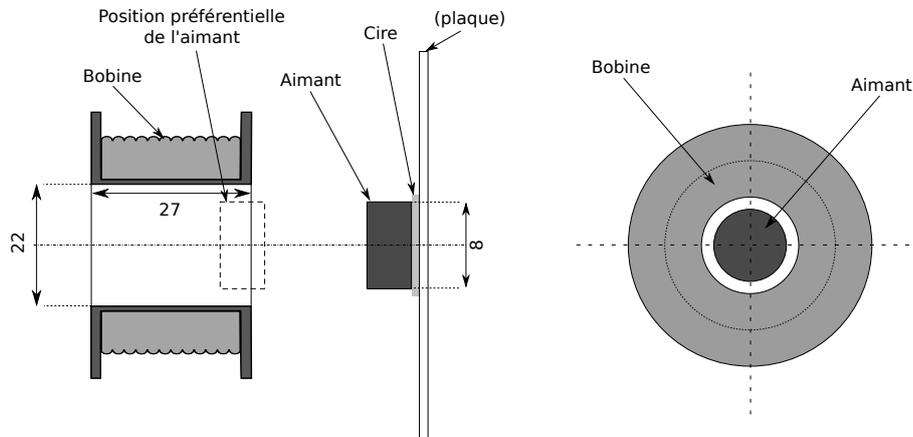


FIGURE 6.3 – Schématisation du système d'excitation bobine/aimant, repris de [176]. Les dimensions sont exprimées en mm.

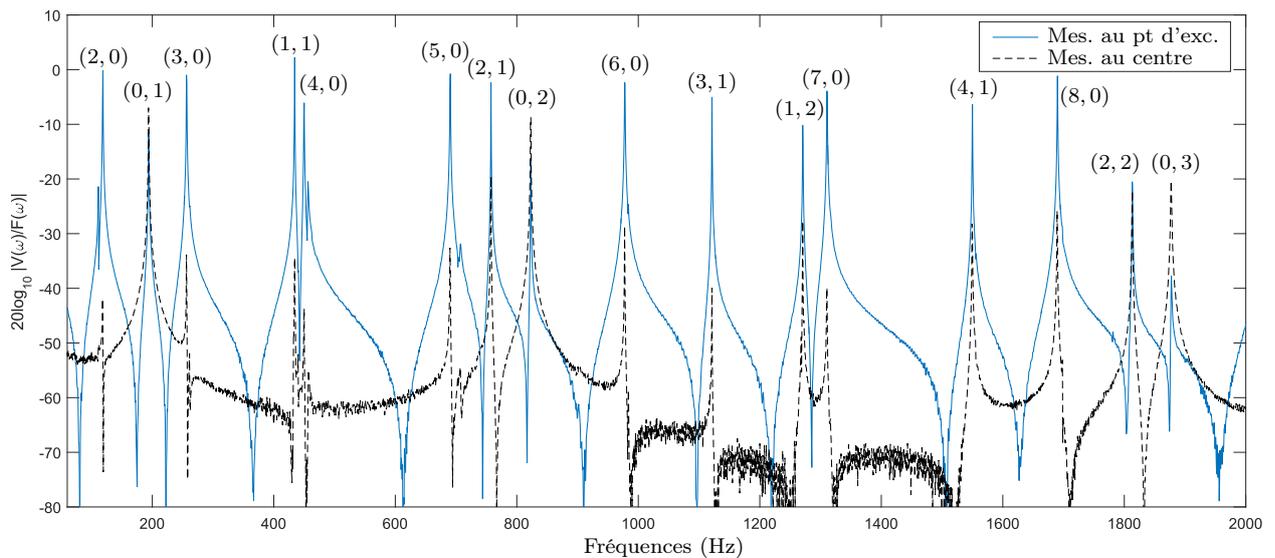


FIGURE 6.4 – Fonction de réponse en fréquence de la plaque nue. Réponses au point d'excitation (bleu plein) et au centre (noir pointillé).

Une analyse modale préliminaire est effectuée à l'aide du vibromètre à balayage, afin de cibler les résonances à étudier. Pour un point d'excitation situé à proximité du bord de la plaque, deux fonctions de réponse en fréquence sont comparées : le point de mesure associé à la première mesure est situé au plus proche du point d'excitation, tandis que le second est placé au centre de la plaque circulaire. La comparaison des deux fonctions effectuée sur la figure 6.4 permet de différencier les modes axisymétriques des modes asymétriques. Les déformées opérationnelles sont alors obtenues par un balayage sur un ensemble de points où les fonctions de réponses en fréquences sont mesurées. Les bandes de fréquence d'intérêt sont définies par l'utilisateur dans l'interface graphique proposée par le vibromètre laser ; une détection de maximum d'énergie dans l'ensemble des réponses en fréquence aboutit à la détermination de pulsations des résonances et des déformées opérationnelles associées. La visualisation des déformées permet alors d'attribuer le nombre de modes et de rayons nodaux qui

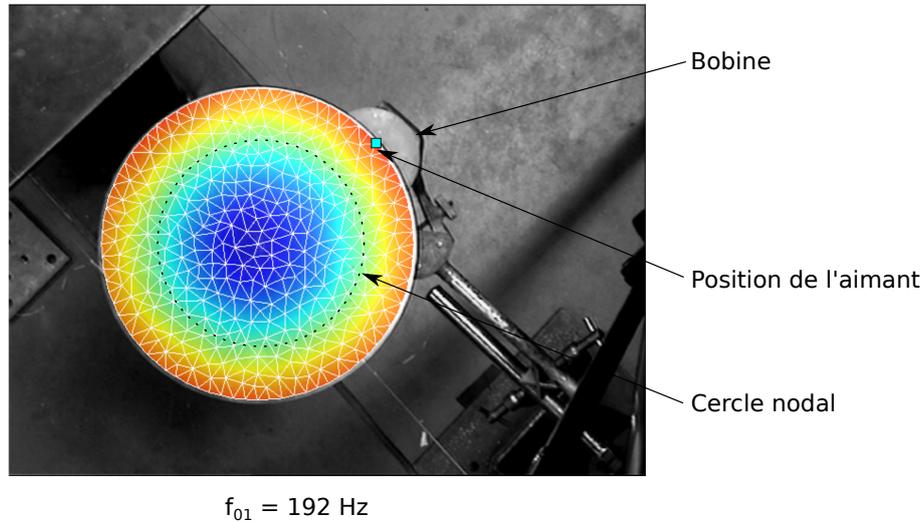


FIGURE 6.5 – Déformée opérationnelle du premier mode axisymétrique, l'échelle de couleur est associée aux amplitudes et phases des fonctions de transfert, les zéros en amplitude sont indiqués en pointillés.

caractérisent la symétrie circulaire (comme l'a montré le calcul analytique en section 2.3.1), telle que la déformée du mode (0, 1) présentée sur la figure 6.5.

La boucle de contrôle à verrouillage de phase est maintenant ajoutée au dispositif, dont l'ensemble est schématisé sur la figure 6.6. Comme le signal mesuré est une vitesse, alors la phase à imposer n'est plus la quadrature mais $\varphi = \pi$.

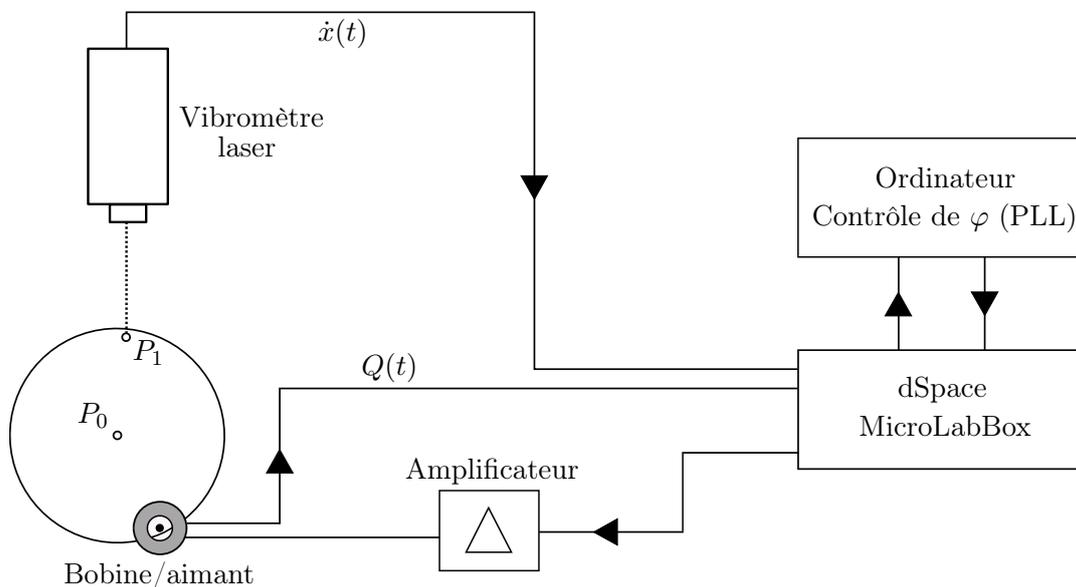


FIGURE 6.6 – Ensemble du dispositif expérimental. En pratique, le point de mesure P sur la plaque est identique au point d'excitation. P_0 et P_1 représentent les points de mesures associés aux fonctions de transfert présentés sur la figure 6.4.

La fréquence d'échantillonnage est fixée à 50 kHz pour l'ensemble des mesures. Les valeurs des gains intégrateurs et proportionnels, qui régit les critères de stabilité en boucle fermée [46] sont choisis empiriquement dans le cas de la réponse unimodale. Dans ce cas, un gain intégral $K_i = 20$ et proportionnel $K_p = 1$ assurent l'efficacité et la stabilité du système de contrôle en boucle fermée.

6.3.2 Backbone curve et réponses forcées

La *backbone curve* est estimée expérimentalement en imposant la phase $\varphi = \pi$ et en variant l'amplitude d'excitation F . La mesure est initialisée à une faible amplitude, à la limite de la détection des oscillations par rapport au niveau de bruit, et à une fréquence f_{ini} égale à la pulsation linéaire. La variation imposée est une augmentation de l'amplitude avec maintien de la phase constante.

À l'inverse, les réponses forcées sont obtenues avec le maintien d'une amplitude d'excitation constante, et une variation de la phase autour de la résonance, en l'occurrence sur l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$.

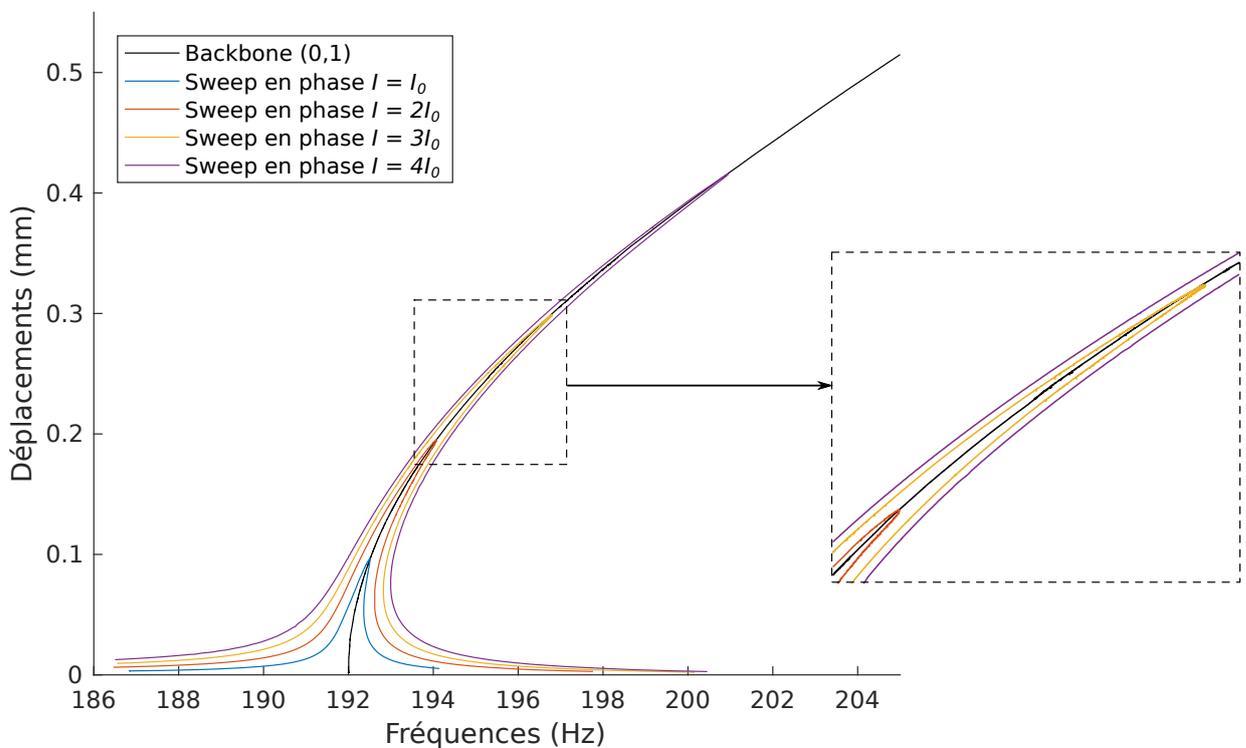


FIGURE 6.7 – *Backbone curve* et réponses forcées mesurées dans le repère Fréquences-Amplitudes. Les réponses forcées sont mesurées avec quatre amplitudes d'excitation différentes.

Les résultats obtenus montrent que la résonance étudiée est caractérisée par un effet raidissant : les fréquences augmentent avec l'amplitude des oscillations comme le montre la figure 6.7. De plus, les amplitudes des réponses forcées s'articulent autour de la *backbone*, comme le prédit la théorie des modes non-linéaires. Dans le cas du mode (0, 1) le système montre un comportement non-linéaire pour un déplacement transverse inférieur à $h/10$. Les différences entre la phase de la réponse (ramenée à celle du déplacement sur la figure 6.8) et celles du forçage correspondent bien à la consigne souhaitée. La figure 6.8 montre bien une variation monotone de la phase sur l'intervalle $]0, \pi[$, ce qui est conforme avec les prédictions de l'oscillateur de Duffing. Cet exemple de réponse unimodale, dont l'allure est très proche de courbes théoriques, valide bien la démarche employée.

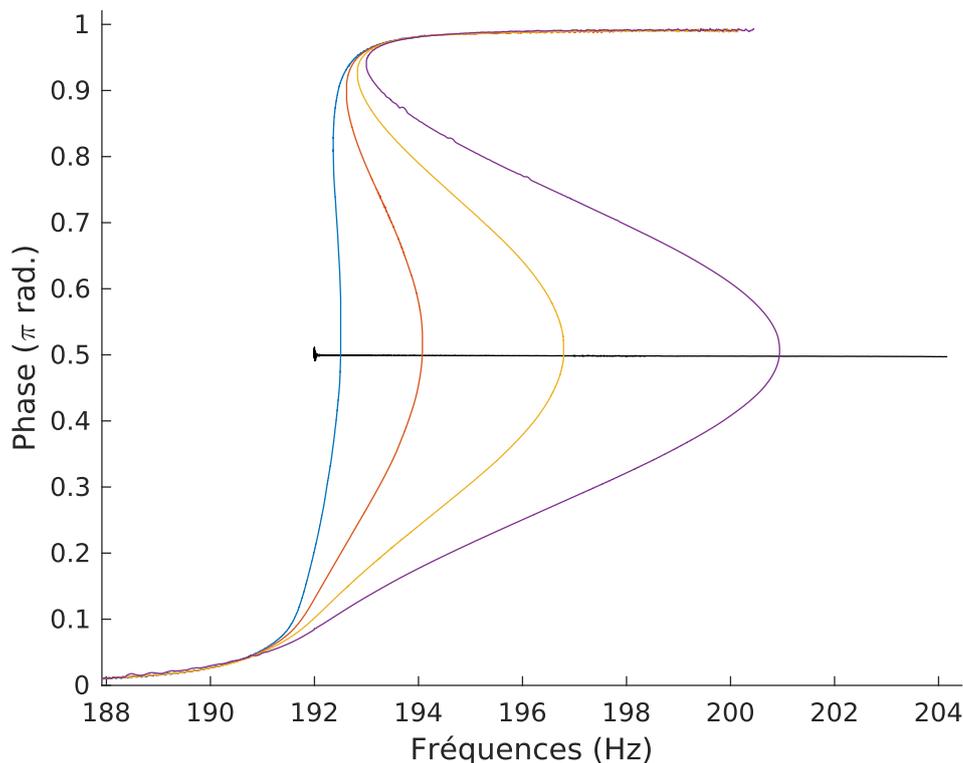


FIGURE 6.8 – Backbone curve et réponses forcées présentées dans le repère Fréquences-Phases. Les réponses forcées sont estimées avec les mêmes amplitudes d'excitation que celles associées aux résultats de la figure 6.7.

6.4 Étude d'une résonance 1:1 autour du mode asymétrique (2,0)

La concordance entre les résultats analytiques et théoriques est entreprise dans le cas d'une paire de modes asymétriques, en l'occurrence des modes (2, 0). Les résultats obtenus ont été soumis pour publication au journal *Meccanica*. La version soumise est rapportée dans cette section, l'article est précédée d'une synthèse en français. La première partie, qui définit un cadre théorique, résulte d'investigations entreprises au cours de la thèse de Jin-Jack Tan à l'IMSIA (ENSTA Palaiseau) sous l'encadrement de Cyril Touzé [175]. La rédaction de la partie théorique provient de leur contribution, tandis que la partie expérimentale est représentative des résultats de cette thèse. L'intégralité de l'article est cependant rapportée, d'une part afin de permettre la compréhension du problème, et d'autre part car l'identification des paramètres de la structure s'appuie sur les résultats théoriques.

6.4.1 Présentation de l'article

Cet article est consacré de manière générale aux systèmes d'oscillateurs de pulsations proches et couplés par des termes non-linéaires cubiques. Un tel système peut donner naissance à des résonances 1:1, c'est-à-dire que de l'échange d'énergie s'effectue entre les premières composantes harmoniques des deux oscillateurs. En fonction des valeurs des paramètres du système, différents scénarios de bifurcation des solutions sont possibles. Dans un premier temps, l'étude établit théoriquement l'ensemble des scénarios de bifurcation possibles. Dans un second temps, une résonance 1:1 est mise en évidence entre les deux premiers modes asymétriques d'une plaque circulaire libre. Les paramètres des oscillateurs, et plus particulièrement les coefficients non-linéaires du modèle réduit, sont identifiés à partir des mesures par recalage des prédictions théoriques.

L'introduction définit d'abord le phénomène de résonance interne. L'établissement des différents scénarios de bifurcation possibles en complément à la contribution [120] est ensuite présenté comme la première originalité de cet article. Enfin, l'emploi de la PLL pour les mesures est justifié par son efficacité, sa robustesse et sa capacité à mesurer les parties instables de part et d'autre de la résonance de phase. L'article est structuré en deux grandes parties, relatifs aux investigations théorique et expérimentale.

La première partie réalise une étude théorique de ces systèmes avec deux oscillateurs d'inconnues X_1 et X_2 , et établit l'ensemble des scénarios de bifurcations possibles des solutions libres. Les deux oscillateurs considérés sont respectivement dénommés A-mode et B-mode. Le système présente un nombre de termes non-linéaires réduits avec les équations (1), mais élargit cependant l'étude par rapport à [120] : en particulier, les termes non-linéaires couplant les deux oscillateurs C_1 et C_2 sont potentiellement inégaux. La méthode des échelles multiples est ensuite appliquée sur le système, avec un développement asymptotique effectué au premier ordre. Le système d'équations (6) régissant les amplitudes et phases des oscillateurs est alors obtenu, permettant d'établir un ensemble de **solutions couplées** et **découplées**. Si les solutions découplées sont identiques à celles de deux oscillateurs de Duffing indépendants en termes d'amplitude et de fréquences (cf. équations (8) et (9)), les limites de stabilité obtenues avec les équations (10) et (11) font intervenir les coefficients de couplage C_1 et C_2 . Notamment, le terme C_2 (resp. C_1) présent dans l'équation du second oscillateur régit la limite de stabilité du mode A (resp. mode B). Dans un cas où les quatre coefficients non-linéaires sont égaux, les figures 1 montrent une intersection entre les *backbones* et leurs limites de stabilité.

Le système d'équations (6) prédit également **deux types de régimes couplés** en fonction de leur configuration dans le plan (X_1, X_2) (cf. figure (2)), appelés **modes normaux** et **elliptiques** : les solutions correspondantes sont écrites avec les équations (12) et (13). Leurs caractéristiques diffèrent par le fait que les modes normaux sollicitent des modes A et B en phase ou opposition de phase, et en quadrature de phase pour les modes elliptiques, comme le montre l'équation (16). La stabilité des solutions couplées est gouvernée par un unique paramètre S_c défini par l'équation (18), avec des critères définis à la suite de cette équation. Enfin, les modes couplés prennent naissance à l'intersection entre les modes découplés comme discuté à partir de la figure 3. Leurs limites de stabilité sont mises en évidence sur la figure 4, ces intersections correspondent à des bifurcations fourches. Suivant les valeurs des coefficients non-linéaires, les solutions découplées peuvent présenter zéro, une ou deux intersections avec les limites de stabilité. En prenant en compte les deux oscillateurs, cela amène à définir **neuf scénarios de bifurcations possibles**, ceux-ci sont présentés de façon détaillée sur la figure 5.

Deux cas de figure sont possibles pour l'apparition des modes couplés : un mode elliptique émerge à l'intersection de la courbe maîtresse du mode A avec sa limite de stabilité supérieure, il s'agit alors d'une bifurcation fourche supercritique. De manière similaire, un mode normal émerge à l'intersection du mode B découplé et sa limite de stabilité inférieure. Le régime couplé naît alors d'une bifurcation fourche sous-critique. Ces cas de figures sont illustrés sur la figure (6) avec deux ensembles de coefficients et scénarios de bifurcations distincts.

À partir de ce cadre théorique, un mode elliptique issu de l'intersection entre la courbe maîtresse du mode A et de sa courbe de stabilité est mesuré sur la plaque circulaire libre. Les deux oscillateurs correspondent aux deux modes asymétriques (2, 0), dont les fréquences sont théoriquement égales. En pratique, une différence est due aux défauts de la plaque qui peuvent briser la symétrie circulaire. Les quatre coefficients non-linéaires, également égaux d'après un calcul issu du modèle de von Kármán [189], impliquent un scénario tel qu'un mode elliptique couplé stable puisse être mesuré. L'installation de la plaque et le système d'excitation bobine/aimant sont similaires à ceux employés pour les mesures du mode axisymétrique. En revanche, des accéléromètres sont ici utilisés pour la mesure, ceux-ci sont placés de sorte que chacun d'eux enregistre les vibrations de chacun des modes A et B. Des aimants, utilisés comme des masses additionnelles, sont placées sur les nœuds du mode

B afin de diminuer la pulsation de cet oscillateur comme le montre le tableau 1, ce qui permet ainsi d'observer plus facilement le régime couplé. Le dispositif expérimental et les modes sont présentés sur les figures 9 et 10.

Comme dans le cas du mode axisymétrique, les mesures des réponses libres et forcées sont effectuées, respectivement par l'imposition de la quadrature de phase avec l'augmentation de l'amplitude du forçage, puis la variation de la phase autour de la quadrature avec le maintien d'une amplitude constante. La figure 11 présente des mesures en régime libre et en régime forcé. L'excitation est pour cela placée au plus proche d'un nœud du mode B, de façon à ce que celui-ci soit excité le plus faiblement possible. Les résultats suivants sont notamment relevés :

- la courbe maîtresse est non couplée jusqu'à un certain point en fréquence et amplitude. Au-delà de ce point, associé théoriquement à la limite de stabilité, le mode B est activé tandis que la courbure de la *backbone* du mode A est modifiée.
- les réponses forcées sont articulées autour des réponses libres. En particulier, le mode B est également activé à une amplitude comparable à celle de la *backbone*, et la branche forcée du mode B est articulée autour de la mesure en régime libre. Comme pour le cas du mode axisymétrique, la partie instable du régime forcé situé après la résonance de phase est stabilisée en boucle fermée.
- en régime couplé, les phases des modes A et B sont en quadrature dans les cas libre et forcé, ce qui correspond bien aux propriétés des modes elliptiques.

L'identification des paramètres non-linéaires est alors effectuée par recalage des courbes théoriques et expérimentales. Les coefficients cubiques Γ_1 , Γ_2 sont d'abord obtenus à partir des régimes non couplés et des solutions correspondantes (équations (8) et (9)). Le coefficient C_1 est issu du recalage de la limite de stabilité supérieure (donnée par l'équation (22)), de façon à ce que l'intersection de celle-ci à la courbe du régime non couplé corresponde au changement de courbure observé. Enfin, le recalage du coefficient C_1 est effectué pour ajuster la courbure du mode elliptique, gouvernée par l'équation (17). L'ensemble des courbes maîtresses et limites d'instabilité, expérimentales et théoriques recalées, sont présentés sur la figure 12.

Par ailleurs, le régime forcé présente un comportement instable au niveau de l'intersection de la réponse avec la limite inférieure d'instabilité du système en boucle ouverte (située après la résonance de phase pour des glissements de phase ascendants). La figure 13 met en évidence ce comportement, lorsque les amplitudes de forçage sont suffisamment grandes pour obtenir le régime couplé. Le comportement instable est également mesuré au même point si la phase est imposée décroissante depuis $\varphi = \pi$. Pour tenter d'expliquer ce phénomène, une dernière simulation est entreprise avec une version de Manlab comprenant la détection des bifurcations. Un second recalage des paramètres est effectué, car les simulations numériques peuvent différer des courbes théoriques (notamment si les amplitudes ne sont plus dans le domaine de validité du développement au premier ordre des échelles multiples, comme l'a montré la figure 3.6). Les courbes obtenues sont représentées et comparées avec les résultats expérimentaux sur la figure 14. En prenant en compte un défaut dans le forçage du mode B (présent avec le terme F_2 de l'équation (A.1b)), les bifurcations fourches deviennent alors imparfaites. La présence de cette bifurcation n'explique cependant que partiellement le comportement instable du système expérimental et de la PLL.

6.4.2 *Backbone curves* d'oscillateurs cubiques couplés en résonance interne 1 : 1 : scénarios de bifurcation, mesures et identification de paramètres

Backbone curves of coupled cubic oscillators in one-to-one internal resonance: bifurcation scenario, measurements and parameter identification

Arthur Givois · Jin-Jack Tan
Cyril Touzé · Olivier Thomas

Received: date / Accepted: date

Abstract A system composed of two cubic nonlinear oscillators with close natural frequencies, and thus displaying a 1:1 internal resonance, is studied both theoretically and experimentally, with a special emphasis on the free oscillations and the backbone curves. The instability regions of uncoupled solutions are derived and the bifurcation scenario as a function of the parameters of the problem is established, showing in an exhaustive manner all possible solutions. The backbone curves are then experimentally measured on a circular plate, for which asymmetric modes are known to display companion configurations with close eigenfrequencies. A control system based on a Phase-Locked Loop (PLL) is used to measure the backbone curves and also allows for the full measurement of the frequency response function in the forced and damped case, including unstable branches. The model is used for a complete identification of the unknown parameters and an excellent comparison is drawn out between theoretical prediction and measurements.

Keywords Nonlinear vibrations · backbone curve · bifurcations · 1:1 resonance · stability · measurements · model identification.

1 Introduction

Nonlinear system displaying internal resonance has been the subject of a number of studies since a strong nonlinear coupling is at hand and leads to solutions that are completely different from linear predictions [1–7]. Internal resonance is closely related to the normal form theory and Poincaré’s theorem where the specific resonance relationship between eigenfrequencies is linked to a resonant monom that cannot be cancelled through a near-identity transform [8–11]. In vibration theory, these systems are usually denoted in series of numbers, e.g. 1:2 and 1:1:2, which refers to the relationship between the eigenfrequencies of the system. For instance, a 1:2 resonant system has eigenfrequencies related by $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ while a 1:1:2 system exhibits $\omega_2 \simeq \omega_1$ and $\omega_3 \simeq 2\omega_1$.

Among all possible internal resonances, 1:1 resonance is described by two oscillators having close eigenfrequencies and may appear as the simplest one and the first to be studied. It occurs in numerous mechanical systems having known symmetries such as strings, where the two polarizations of a same mode have close eigenfrequencies [12–15]; beams [16, 17]; and two-dimensional structures with obvious symmetry such as circular plates [18–21] square membranes or plates [22–24], or circular cylindrical shells [11]. The resonant monoms related to 1:1 resonance are of cubic order so that quadratic nonlinearity is of no concern in this case. In most of these studies, the emphasis is put on deriving the forced vibration response, and less studies are directly concerned with the the freely vibrating 1:1 internal resonance scenario.

A. Givois ^(a,b) (✉) · Jin-Jack Tan ^(c,d) · Cyril Touzé ^(c) · Olivier Thomas ^(a)

(a) Arts et Métiers ParisTech, LISPEN EA 7515, 8 boulevard Louis XIV 59046 Lille, France

(b) Conservatoire National des Arts et Métiers, LMSSC EA 3196, 292 rue Saint-Martin, 75141, Paris Cedex 03, France

(c) IMSIA, CNRS, CEA, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris, 828 Boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France

(d) Eindhoven University of Technology, PO Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands

(✉) Corresponding author

E-mail: arthur.givois@ensam.eu

Restricting attention to the free vibration, the papers by Lewandowski in the early 90s give the first contributions to understand the bifurcation points found on backbone curves. Analytical results obtained on the case of a beam with 1:3 internal resonance were first derived [25], and then extended to plates and membranes featuring either 1:1 or 1:3 internal resonance [26]. The analytical methods used a two-mode approximation and a single-harmonic component in the time domain. A seminal study on the 1:1 internal resonance has been provided by Manevitch and Manevitch [27]. In particular, they derive the possible solutions for cubic oscillators deriving from a potential, thus restricting to three parameters for describing the nonlinear coupling coefficients. They also provide a complete study of the possible cases with varying parameters, expressing the solutions in terms of first integral of motions and ratio of amplitudes obtained after numerous changes of coordinates, rendering the solutions sometimes difficult to read. More recently, the bifurcation of the backbones in case of 1:1 resonance has also been studied in [28], but with restriction to a single case of coefficients values, thus not bringing important novel results as compared to the exhaustive study by Manevitch and Manevitch.

Meanwhile, advances of dedicated experimental continuation methods allows easier and more reliable measurements of backbone curves and unstable branches of forced and damped systems. Among them, the control-based techniques that are founded on a path-following approach of an arclength parameter and stabilized via feedback control, have managed to obtain backbone curves and bifurcations experimentally for single degree-of-freedom nonlinear systems [29–31]. An alternative approach where control of the phase is achieved via a phase-locked loop (PLL) procedure has lead to the measurement of frequency response functions of a piezoelectric ring in high-amplitude nonlinear regimes [32]. Denis et al. has further shown that the PLL technique allows measurement of the frequency responses on both sides of the phase resonances including the unstable part [33]. Despite the requirement of a monotonous evolution of the phase, the robustness and efficiency of the PLL control are demonstrated in the aforementioned piezoelectric systems [32,33], in musical instruments like Chinese gongs [34] and also in the current work.

For unforced conservative systems, there is an equivalence between the backbone curves of a nonlinear system and its nonlinear modes, since a backbone represents the frequency dependence on amplitude, when ones spans the family of periodic orbits (or the equivalent invariant manifold) [35,36]. In this framework, internal resonance is usually identified as loops in the backbone curve, as shown for example in [37], with the peculiar feature that the internal resonance occurs on the nonlinear frequencies, far from their linear values. In the present case of a 1:1 internal resonance between the linear eigenfrequencies, the topology of the backbone curves is found to show more cases than only simple loops, with no unique qualitative topology, giving new insights in the behaviour of nonlinear modes. Another important aspect is the experimental identification of nonlinear modes, which has been a very active subject during the recent years (see the recent contribution [38]). Since most of the techniques rely on complex identification algorithms which aims at extending the ones for linear systems widely used in industrial contexts [39], we propose here a simple identification method based on the available model, following the unimodal technique introduced in [33].

In the present contribution, a theoretical investigation of the bifurcation scenario for the backbone curves of a system displaying 1:1 internal resonance is detailed, followed by measurements on a circular plate. As compared to previous studies, the main outcomes are to generalize the results obtained in [27] to four nonlinear coupling parameters. More importantly, instability regions for uncoupled solutions are derived, a point that were not present in [26–28], and which is important since it gives a more simple and direct analysis of the bifurcation scenario. These instability regions are found by comparison with the forced and damped cases. The theoretical analyses are all presented in Section 2. Then, an experimental procedure based on the PLL control is applied to measure the first asymmetric modes of a freely vibrating circular plate. The backbone curves and bifurcation scenarios of such a 1:1 internal resonance system are identified. These are all presented in Section 3, which also includes descriptions of the experimental procedures and the estimation of the nonlinear coefficients. Finally, the paper is concluded in Section 4.

2 Theoretical results

The theoretical derivations are devoted to expressing the backbone curves for a system of two cubic nonlinear oscillators with close eigenfrequencies. Denoting X_1 and X_2 the displacements of oscillator 1 and 2, the equations of motion under study read:

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \varepsilon \left[\Gamma_1 X_1^3 + C_1 X_1 X_2^2 \right] = 0, \quad (1a)$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + \varepsilon \left[\Gamma_2 X_2^3 + C_2 X_2 X_1^2 \right] = 0, \quad (1b)$$

where ε is a book-keeping parameter, ω_1 and ω_2 are the two eigenfrequencies such that $\omega_1 \simeq \omega_2$, Γ_1 and Γ_2 are the leading cubic coefficients for each oscillator, and C_1 and C_2 are the cross-coupling coefficients. The choice of this formulation is guided by the following considerations:

- in a normal form approach [10,11], one can show that quadratic nonlinearity does not lead to resonant terms for the 1:1 internal resonance when $\omega_1 \simeq \omega_2$. Consequently there is no need to take them into account.
- the general normal form for a system with cubic nonlinearity should also include the monoms $X_1^2 X_2$ and X_2^3 for the first oscillator, and $X_2^2 X_1$ and X_1^3 for the second oscillator. Here we select a simplest form depending on four parameters only, Γ_1 , Γ_2 , C_1 and C_2 instead of the most general form including 8 coefficients. The reason is that for most of the mechanical systems like strings, beams and plates, the symmetry relationships leads to equations of the form (1). Consequently it has been decided to restrict our attention to a four-parameter problem with varying coefficients. This point will be further discussed in section 3 and 4.

When $C_1 = C_2 = C$, the stiffness derives from the potential energy \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \left(\omega_1^2 X_1^2 + \omega_2^2 X_2^2 \right) + \frac{\varepsilon}{4} \left(\Gamma_1 X_1^4 + 2C X_1^2 X_2^2 + \Gamma_2 X_2^4 \right). \quad (2)$$

This case was considered by Manevitch and Manevitch in [27]. In order to extend their result to a more general case with four parameters and include the possibility of taking into account slight imperfections of real structures, we will also consider the case $C_1 \neq C_2$ in this study.

The solutions of this nonlinear problem is derived thanks to a first-order perturbative approach using the method of multiple time scales. As most of the derivations of the perturbative solution are classical, they are given in Appendix A, where a special emphasis is also put on deriving the first-order equations for both the forced/damped case and the free case, in order to show the similarity and differences occurring in the two sets of equations. In this section, only the main results are recalled, the reader is referred to Appendix A for the detailed calculations.

A detuning σ_1 is introduced in order to quantify the difference between the two eigenfrequencies:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1. \quad (3)$$

Without loss of generality, we can assume $\sigma_1 \geq 0$, which is not restrictive and only means that oscillator 2 is the one with the largest eigenfrequency. The two time scales $T_0 = t$ and $T_1 = \varepsilon t$ are introduced, and the solution is expressed under the form $X_i = X_{i1}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i2}(T_0, T_1)$, $i = 1, 2$. The first-order solution reads

$$X_{11} = A(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + c.c., \quad (4a)$$

$$X_{21} = B(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + c.c., \quad (4b)$$

where *c.c.* stands for complex conjugate. Finally the unknown amplitudes $A(T_1)$ and $B(T_1)$ are expressed in polar form, $A = a(T_1) \exp(i\alpha(T_1))$, $B = b(T_1) \exp(i\beta(T_1))$. In order to make the slow-scale first-order system autonomous, the following change of variable is introduced for the angles:

$$\gamma_1 = -\alpha, \quad (5a)$$

$$\gamma_2 = -\sigma_1 T_1 - \beta. \quad (5b)$$

As explained in A, this choice is motivated by direct comparisons with the forced/damped system. Finally, the slow-scale autonomous system reads:

$$a' = -\frac{C_1}{2\omega_1} ab^2 \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2), \quad (6a)$$

$$\gamma_1' = -\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} a^2 - \frac{C_1}{2\omega_1} b^2 [2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)], \quad (6b)$$

$$b' = \frac{C_2}{2\omega_2} ba^2 \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2), \quad (6c)$$

$$\gamma_2' = -\frac{3\Gamma_2}{2\omega_2} b^2 - \frac{C_2}{2\omega_2} a^2 [2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)] - \sigma_1. \quad (6d)$$

The solutions of (6) are obtained after integration with respect to the slow time T_1 . Two kinds of solutions exist:

- the uncoupled solutions, where a single mode is excited while the other stay quiescent. Two uncoupled solutions exist and will be denoted as the A-mode for which $a \neq 0$ and $b = 0$, and the B-mode, for which $b \neq 0$ and $a = 0$,
- the coupled solutions, for which both amplitude solutions are non zero, *i.e.* $a \neq 0$ and $b \neq 0$.

2.1 Uncoupled solutions and instability regions

The uncoupled solutions are easily derived from (6). They are defined by $a = \text{const}$, $b = 0$, $\gamma_1 = -3\Gamma_1/(2\omega_1)a^2T_1 + \varphi_1$ and $b = \text{const}$, $a = 0$, $\gamma_2 = -(3\Gamma_2/(2\omega_2)b^2 + \sigma_1)T_1 + \varphi_2$, thus leading to:

$$X_1(t) = 2a \cos\left(\omega_{NL}^A t - \varphi_1\right), \quad X_2(t) = 2b \cos\left(\omega_{NL}^B t - \varphi_2\right), \quad (7)$$

where φ_1 and φ_2 depend on the initial conditions. The associated backbone curves are:

for the A-mode :

$$\omega_{NL}^A = \omega_1 \left(1 + \varepsilon \frac{3\Gamma_1}{2\omega_1^2} a^2\right). \quad (8)$$

for the B-mode :

$$\omega_{NL}^B = \omega_2 \left(1 + \varepsilon \frac{3\Gamma_2}{2\omega_2^2} b^2\right). \quad (9)$$

where ω_{NL}^A (respectively ω_{NL}^B) refers to the nonlinear oscillation frequency of A-mode (resp. B-mode), as a function of its amplitude a (resp. b).

The next question to tackle is the derivation of the stability of these uncoupled solutions, in order to predict where a loss of stability can happen in favour of a coupled solution through activation of the 1:1 resonance. In previous works and particularly in the paper by Manevitch and Manevitch [27], instability regions were not derived, for the main reason that setting either $b = 0$ (to study the stability of A-mode) or $a = 0$ (to study the stability of B-mode) leads to a degenerate problem given by Eqs. (6): the four-dimensional phase space shrinks to a two-dimensional one without any possibility of studying the stability with respect to vanishing directions. The solution is found by using the analysis of the system with forcing and damping, as shown in Appendix B. Then, taking the limit of vanishing damping and forcing, one is able to demonstrate (see Appendix B) that the stability of A-mode is given by the two following curves:

$$\omega_{Alim}^s = \omega_2 + \varepsilon(2 + s) \frac{C_2 a^2}{2\omega_2}, \quad \text{with } s = \pm 1. \quad (10)$$

Symmetrically, the instability region for the B-mode is given by the two curves:

$$\omega_{Blim}^s = \omega_1 + \varepsilon(2 + s) \frac{C_1 b^2}{2\omega_1}, \quad \text{with } s = \pm 1. \quad (11)$$

In particular, one can note that the stability of A-mode (resp. B-mode) is dictated by the value of the coupling coefficient C_2 (resp. C_1), which is logical since this term is responsible for the nonlinear energy transfer between the two oscillators.

The situation is illustrated in Fig. 1, which has been obtained for a perfect detuned case, *i.e.* with all nonlinear coefficients equal, here $\Gamma_1 = \Gamma_2 = C_1 = C_2 = 1$, and a detuning between the two eigenfrequencies with $\omega_1 = \pi$, $\varepsilon = 1$ and $\sigma_1 = 1$, thus leading to $\omega_2 = 1 + \pi$. Each instability region lies respectively in the plane of A-mode (*i.e.* where $b = 0$) and B-mode (where $a = 0$), and is delimited by two curves that are obtained by setting either $s = 1$ or $s = -1$. These two curves are plotted in red and green in Fig. 1. If the backbone curve of A-mode (resp. B-mode) enters the instability region delimited by the two curves given by Eqs. (10) and delimiting the grey-shaded area in Fig. 1(a) (resp. the blue-shaded areas in Fig. 1(b)), then the uncoupled solution becomes unstable. Note that the A-mode starts at ω_1 when $a \rightarrow 0$, whereas the instability region starts at ω_2 . Symmetrically, B-mode starts at ω_2 while the instability regions at ω_1 . All curves are parabolas, and for the A-mode, the coefficient of the parabola is $\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1}$, while the two instability curves are governed by $\frac{C_2}{2\omega_2}$ and $\frac{3C_2}{2\omega_2}$. Consequently one may also inspect the possible intersections of backbones with instability regions by simply looking at the nonlinear coefficients. In the case considered with $\Gamma_1 = \Gamma_2 = C_1 = C_2$, the A-mode crosses the instability region in two points, whereas the B-mode has only one crossing point with its instability region. This question will be further discussed when all possible solutions with varying the coefficients will be described, see section 2.3. It is a very important feature of this problem to understand that most of the topology of the solutions can be understood by simply looking at the coefficients values.

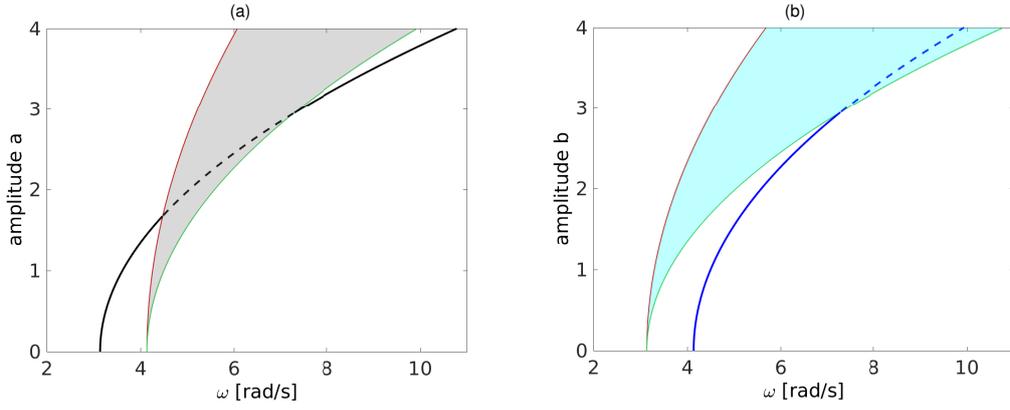


Fig. 1. Instability regions for the uncoupled solution. (a) In the plane (ω, a) , with $b = 0$, stability of the A-mode. The backbone curve given by Eq. (8) is in black (unstable part with dashed line), while the stability region delimited by Eqs. (10) is given by the thin red line (for $s = -1$) and green line (for $s = +1$). (b) In the plane (ω, b) , with $a = 0$, stability of the B-mode. The backbone curve given by Eq. (9) is in blue (unstable part with dashed line), while the stability region delimited by Eqs. (10) is given by the thin red line (for $s = -1$) and green line (for $s = +1$).

2.2 Coupled solutions

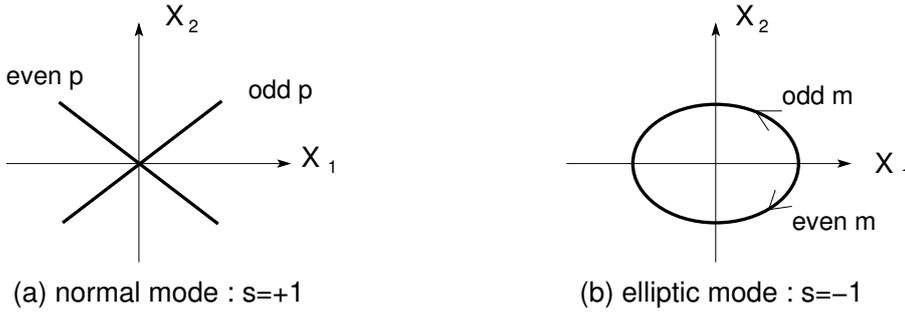


Fig. 2. Definition of normal mode and elliptic mode

The coupled solutions have already been derived in [27] with the assumption $C_1 = C_2$, here we simply recall the main results. Inspection of non-zero constant solutions for the amplitudes a and b of the system (6) shows that uncoupled solutions can exist if and only if $\sin 2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$, which leads to the conclusion that we have necessarily $\cos 2(\gamma_1 - \gamma_2) = s = \pm 1$, where the notation $s = \pm 1$ is introduced for convenience. This choice leads to two different kind of solutions. If $s = +1$, then $\gamma_2 = \gamma_1 + p\pi$, with $p \in \mathbb{Z}$. Replacing this relationship in the phases α and β used in the polar form of the amplitudes $A(T_1)$ and $B(T_1)$, one can easily show that the solutions X_1 and X_2 fulfills the following relationship

$$\frac{X_1}{a} = \pm \frac{X_2}{b}, \quad (12)$$

with a positive case when p is even and a negative case when p is odd. Following Manevitch and Manevitch, this solution is called a *normal mode* (NM) and is represented in Fig. 2(a). A normal mode is characterized by a phase difference of 0 (in-phase normal mode, for odd p) or π (out-of-phase normal mode for p even) between the two solutions, and in the configuration plane (X_1, X_2) , the solutions are oscillating on a line as shown by Eq. (12). In particular the two modes reach their maximum amplitudes at the same time.

The other case is obtained when $s = -1$, then $\gamma_2 = \gamma_1 + (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. One can easily show that the relationship between the amplitudes writes:

$$\frac{X_1^2}{4a^2} + \frac{X_2^2}{4b^2} = 1, \quad (13)$$

These solutions are *elliptic modes* (EM), they are represented in Fig. 2(b) and are characterized by ellipses in the configuration space (X_1, X_2) .

The solution branches for the coupled solutions are then simply obtained by remarking that with $s = \pm 1$, $\gamma'_1 = \gamma'_2$, which gives the following relationship:

$$\sigma_1 = \left[\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} - (2+s)\frac{C_2}{2\omega_2} \right] a^2 + \left[(2+s)\frac{C_1}{2\omega_1} - \frac{3\Gamma_2}{2\omega_2} \right] b^2, \quad (14)$$

with $s = +1$ for the normal mode solution and $s = -1$ for the elliptic mode solution. In order to represent this solution in the space spanned by the two amplitude a , b , and the nonlinear oscillation frequency, one has to retrieve the backbone curve for the coupled solutions. Since the amplitudes a and b are constants with respect to T_1 , integrating for example Eq. (6b) with respect to T_1 leads to

$$\gamma_1(T_1) = \left[-\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} a^2 - (2+s)\frac{C_1 b^2}{2\omega_1} \right] T_1 + \varphi_1, \quad (15)$$

with φ_1 the initial phase corresponding to the initial conditions. Replacing in Eqs. (4a,b) allows one to get the coupled solution:

$$X_1(t) = 2a \cos(\omega_{NL}^c t - \varphi_1), \quad X_2(t) = \begin{cases} \pm 2b \cos(\omega_{NL}^c t - \varphi_1), & \text{for } s = 1 \\ 2b \cos(\omega_{NL}^c t - \varphi_1 \pm \pi/2), & \text{for } s = -1 \end{cases} \quad (16)$$

where the common nonlinear oscillation frequency ω_{NL}^c for the coupled solution is:

$$\omega_{NL}^c = \omega_1 + \varepsilon \left[\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} a^2 + (2+s)\frac{C_1 b^2}{2\omega_1} \right], \quad (17)$$

with $s = +1$ for the normal mode, $s = -1$ for the elliptic mode, and a and b the amplitudes of the coupled solutions verifying Eq. (14).

The stability of the coupled solution is found classically by computing the eigenvalues of the jacobian matrix from the system (6), see Appendix C for the detail of the calculation. One can then easily derive the following stability conditions for the coupled solutions, which extends the results by Manevitch and Manevitch [27] to the case $C_1 \neq C_2$. Interestingly enough, it is found that the stability of NM and EM depends only on the physical parameters of the system (*i.e.* eigenfrequencies and coupling coefficients), but not on the amplitudes of the solutions. Indeed, the value of the scalar S_c is sufficient to decide upon the stability of coupled solutions, with S_c equal to

$$S_c = \frac{\Gamma_1 \omega_2}{C_2 \omega_1} + \frac{\Gamma_2 \omega_1}{C_1 \omega_2}. \quad (18)$$

The stability rules for the coupled solutions read

- The normal mode is stable as long as $S_c < 2$,
- The elliptic mode is stable as long as $S_c > 2/3$.

This very particular feature leads to the fact that the stability of the coupled solutions is pre-determined directly from the values of the parameters of the system.

Fig. 3 shows the coupled solutions in the detuned perfect case studied before, *i.e.* for $\Gamma_1 = \Gamma_2 = C_1 = C_2 = 1$, $\omega_1 = \pi$, $\varepsilon = 1$ and $\sigma_1 = 1$. As already noticed in Fig. 1, the A-mode has two intersections with the two instability regions, while the B-mode has only one intersection. From the first loss of stability of the backbone curve of the A-mode, an elliptic mode emerges. A supercritical pitchfork bifurcation occurs at this point, and the two bifurcated branches (coupled EM) have the same amplitude, so that only one curve appears in Fig. 3, but have a difference in the phase of the B-mode with respect to the A-mode, which is $\pm\pi/2$ as shown by Eq. (16). Indeed, the two EM with odd and even m resulting in a π difference between γ_1 and γ_2 branch from this point.

From the second intersection, a normal mode emerges and connects to the other branch point defined by the intersection of the backbone curve of the B-mode with the instability region. These two points

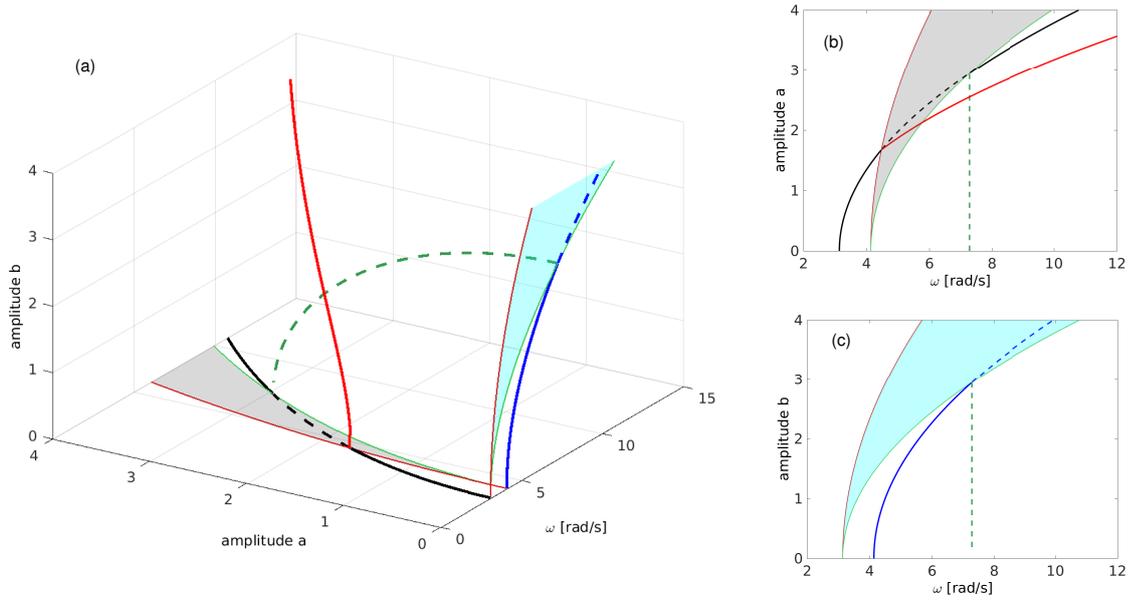


Fig. 3. (a) three-dimensional representation of the solution branches in the (ω, a, b) space. Black line: backbone of the A-mode, blue line: backbone of the B-mode, red line : elliptic mode, green line : normal mode. Unstable solutions are marked as dashed lines, stable portions with solid lines. (b) Projection of the solutions in the (ω, a) plane. (c) Projection of the solutions in the (ω, b) plane

thus define two subcritical pitchforks, where NM branches from the uncoupled solutions. Fig. 3(a) shows a three-dimensional plot of the solutions in the space (ω, a, b) , which is the correct representation to show the uncoupled solution, included respectively in the subplane (ω, a) , and (ω, b) , and the coupled solutions. Fig. 3(b-c) shows the projections of the solutions on the planes (ω, a) and (ω, b) .

The stability of the coupled solutions is determined by the scalar S_c , which writes, for the particular perfect detuned case:

$$S_c = \frac{\omega_2 \Gamma_1}{C_2 \omega_1} + \frac{\Gamma_2 \omega_1}{C_1 \omega_2}, \quad (19)$$

$$= 1 + \varepsilon \sigma_1 + \frac{1}{1 + \varepsilon \sigma_1}, \quad (20)$$

$$\simeq 2 + \varepsilon^2 \frac{\sigma_1^2}{2}. \quad (21)$$

The result has been obtained by simplification thanks to the equality between the coupling coefficients, and using $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1$. We can then simply deduce that the normal mode is unstable, while the elliptic mode is stable in this case, an information that is reported in Fig. 3.

2.3 Parametric study : bifurcation scenario

We are now interested in deriving all the possible cases when $\sigma_1 > 0$ and the nonlinear coupling coefficients are varying. In order to restrict a little the possible cases, we concentrate on a hardening type system with $\Gamma_1, \Gamma_2, C_1, C_2 > 0$. Note however that other cases with negative coefficients can easily be deduced from the present study.

As understood from the previous example, the backbone curves of A-mode and B-mode may have, depending on the relative values of the coefficients, either zero, one, or at most two intersections with the instability regions. These cases delimit the discussion and span the 9 possible cases.

Let us denote as I_{Ea} the intersection of the backbone curve of A-mode with the first instability region, and I_{Na} the intersection with the second curve. The situation is depicted in Fig. 4(a). The points I_{Ea} and

I_{Na} are thus found by equating Eq. (8) with Eq. (10) (with $s = \pm 1$) thus leading to:

$$a^2 = \frac{\sigma_1}{\frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} - (2+s)\frac{C_2}{2\omega_2}}, \quad (22)$$

with $s = -1$ for I_{Ea} and $s = +1$ for I_{Na} . Eq. (22) can also be retrieved from Eq. (14) by letting $b = 0$. The consequence of this is that I_{Ea} is a branch point where only an elliptic mode can branch with $s = -1$ (thus the index Ea as "Elliptic" mode from A-mode), and I_{Na} is a branch point to a normal mode.

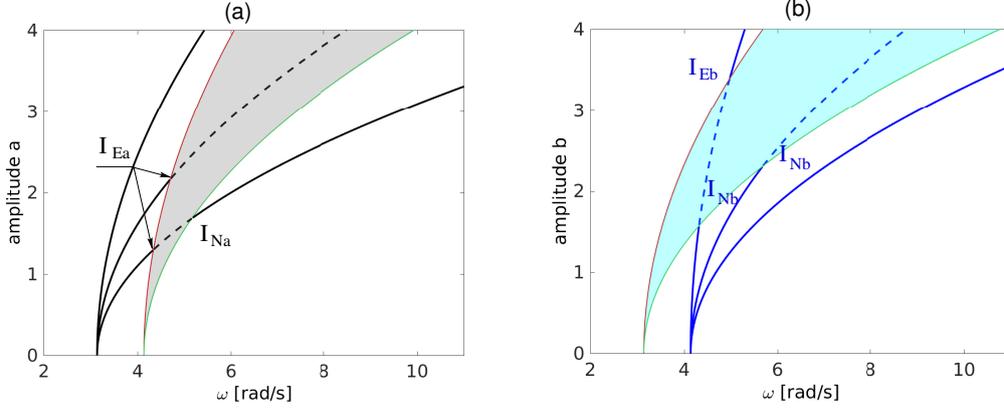


Fig. 4. (a) Definition of I_{Ea} and I_{Na} as intersection of the backbone curve of the A-mode with the two instability curves. Backbone curves for three different values of Γ_1 : 0.3, 0.7 and 1.5, showing respectively no intersection, one intersection (only I_{Ea} exists) and two intersections. (b) Definition of I_{Eb} and I_{Nb} as intersection of the backbone curve of the B-mode with the two instability curves. Backbone curves for three different values of Γ_2 : 0.2, 0.8 and 1.5, showing respectively two intersections, one intersection (only I_{Nb} exists) and no intersection. Other parameters fixed as $C_1 = C_2 = 1$, $\omega_1 = \pi$, $\varepsilon = 1$ and $\sigma_1 = 1$.

The same reasoning on the B-mode leads to the conclusion that I_{Eb} and I_{Nb} are branch points leading respectively to elliptic mode and normal mode from the B-solution, and they are defined by:

$$b^2 = \frac{\sigma_1}{(2+s)\frac{C_1}{2\omega_1} - \frac{3\Gamma_2}{2\omega_2}}, \quad (23)$$

The main consequence is that EM can branch only from the left-hand side curve of the instability region, which has been thus reported in red in Figs. 1 and 3, it is also the colour retained to draw the backbone of the EM. On the other hand, NM can only branch from right-hand side curve from instability region, which is thus reported in green.

From Eqs. (22) and (23) we can easily derive existence conditions for the branch points, which read:

- I_{Ea} exists if $3\Gamma_1\omega_2 \geq C_2\omega_1$
- I_{Na} exists if $\Gamma_1\omega_2 \geq C_2\omega_1$
- I_{Eb} exists if $C_1\omega_2 \geq 3\Gamma_2\omega_1$
- I_{Nb} exists if $C_1\omega_2 \geq \Gamma_2\omega_1$.

Note that these conditions can also be found easily from the inspection of Fig. 4 by comparing the coefficients of the parabolas of each curve.

The 9 possible cases are represented in Fig. 5, where, for the sake of simplicity, Γ_1 and Γ_2 have been considered as fixed, and C_1 and C_2 as variable. The existence conditions of the branch points have been reported on the horizontal and vertical axes. For example when referring to C_1 : no branch point exists when $C_1 < \Gamma_2\omega_1/\omega_1$ (thus the symbol \emptyset), then only I_{Nb} exists for $C_1 > \Gamma_2\omega_1/\omega_1$ and finally both I_{Nb} and I_{Eb} exist for $C_1 > 3\Gamma_2\omega_1/\omega_1$.

The parameter plane exhibits 9 different regions, one with no branch point at all and one with 4 branch points, 2 regions with 1 and 3 branch point, and 3 regions with 2 branch points. In each area, the existing

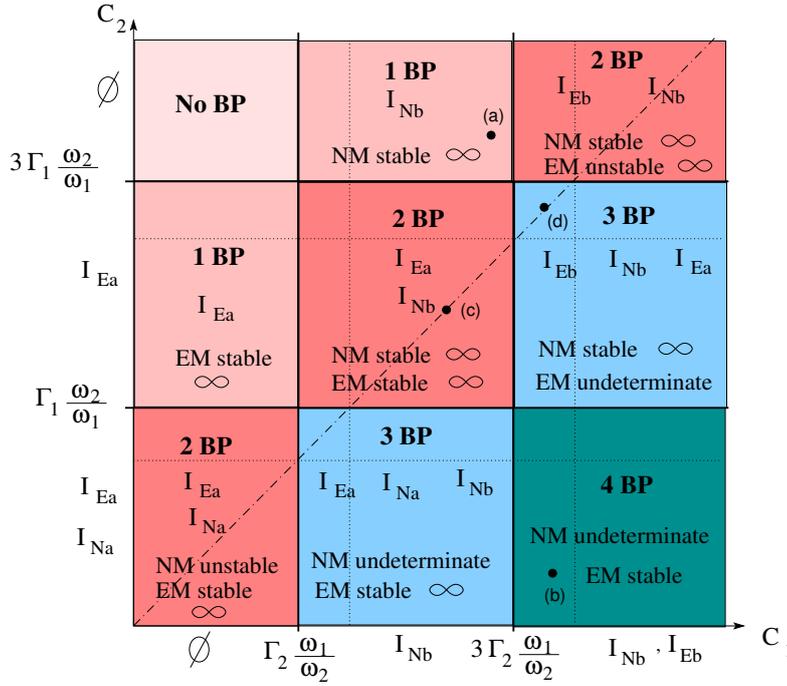


Fig. 5. Type of solutions in the parameter plane (C_1, C_2) , for Γ_1 and Γ_2 fixed. Specific points labeled (a) to (d) corresponds to the examples given in Fig. 6(a-d). A ∞ sign is represented when the branch of coupled solution is of infinite extent, otherwise the branch is finite.

branch point is reported, as well as the stability of the coupled mode, which could be a normal mode (NM) and/or an elliptic mode (EM), following the rule of the value of S_c as compared to either 2 or $2/3$. For example, in the two zones where a single branch point exists, there is a region where I_{Nb} exists, thus the coupled solution is a normal mode and it is stable. In the other area, an elliptic mode arises from the branch point and it is also stable. In these two cases, the coupled mode solution branch is infinite: this behavior is reported in the chart for each case with the ∞ sign.

In the three regions with two branch points, one can distinguish the upper right region, where both I_{Eb} and I_{Nb} exist. This means that NM and EM appear, and are both connected to the B-mode solution. They are also both infinite, NM is stable while EM is unstable. Symmetrically, the lower left region shows two coupled modes branching from the A-mode, of infinite size, with NM unstable and EM stable. In the central region, NM is connected to B-mode while EM branches from A-mode, and both coupled solutions are stable.

In the regions with 3 branch points, the upper right zone is characterized by an EM branch of finite size, since both I_{Ea} and I_{Eb} exist. The stability of the EM is undetermined in this case, since the two cases (stable/unstable) can appear in this area, depending on the parameter values. On the other hand, NM is an infinite branch of stable solution. Symmetrically in the lower left region with 3 branch points, NM is a finite branch of solutions connecting A-mode to B-mode, and its stability cannot be unambiguously determined, whereas EM is stable. Note that the perfect detuned case studied in the previous section falls into this region, thus Fig. 3 illustrates this case. Finally when the four branch points exist, the two coupled solutions are of finite extent, EM is stable while the stability of NM cannot be unambiguously determined.

Fig. 6 illustrates the preceding analysis by showing various cases. Fig. 6(a), corresponding to point (a) shown in Fig. 5, is a case where only one branch point exists and give rise to a stable normal mode, emanating from a pitchfork bifurcation on the B-mode. Fig. 6(b) also shows a three-dimensional representation of the solution branches in space (a, b, ω_{NL}) , where 4 branch points are present, giving rise to two stable coupled solutions of finite extent. Note that in this area of the stability chart shown in Fig. 5, the elliptic mode is always stable, however depending on the values one can have either a stable or an unstable normal mode. In Fig. 6(b) with the selected values of the coefficients, the normal mode is also stable. Fig. 6(c-d) shows the solutions in a Frequency-Energy Plot (FEP), which is possible only when $C_1 = C_2$. Fig. 6(c) shows the shape of the solution branches in a case where two branch points exist, giving rise to two stable coupled

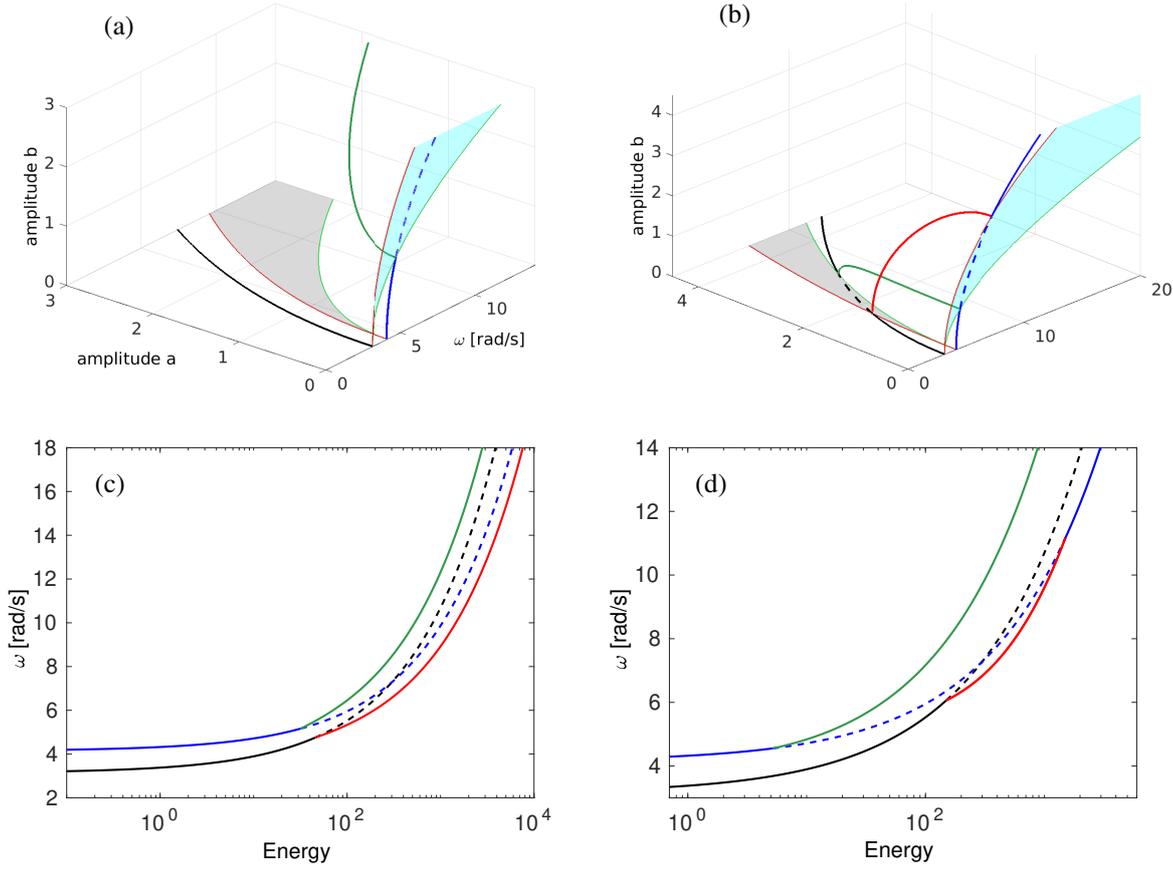


Fig. 6. Miscellaneous solutions for $\Gamma_1=\Gamma_2=1$, $\omega_1 = \pi$, $\varepsilon = 1$ and $\sigma_1 = 1$. (a) Case with one branch point for $C_1=2$, $C_2=5$, and corresponding to point (a) in Fig. 5. (b) Case with four branch points for $C_1=3$, $C_2=1$, point (b) in Fig. 5. (c) Frequency-Energy plot (FEP) for the case $C_1 = C_2 = 1.5$ with two branch points, point (c) in Fig. 5. (d) FEP for the case $C_1 = C_2 = 2.6$ with three branch points, point (d) in Fig. 5.

solutions of infinite extent. Finally, in Fig. 6(d), three branch points are present, so that the elliptic mode is stable with finite extent, while the solution branch of elliptic mode is stable with infinite extent.

Depending on the cases described above, several geometrical characteristics of the coupled solutions can be drawn out. First, two main topologies can be exhibited. The first possibility for a given coupled solution is to emerge from an uncoupled backbone curve (A-mode or B-mode) through a pitchfork bifurcation and extend to infinity. In Fig. 5, this is shown in all cases having from 1 to 3 branch points and labeled with a ∞ sign. The second possibility for a given coupled solution is to connect the two uncoupled backbones. In this case, two pitchfork bifurcations are necessary. In Fig. 5, they are present only in cases with 3 or 4 branch points. Depending on the stability of the considered coupled solution, the pitchfork bifurcations are either subcritical or supercritical. Secondly, as shown before, the EM branches always emerge from the upper limit, in term of amplitude, of the instability region, whereas the NM branches always emerge from its lower limit. In a FEP, the obtained topologies are shown in Figs. 6(c,d). They are very different from more classical $n : m$ internal resonances that appear as loops in the FEP (see [37,40]).

2.4 Particular case without detuning

In this section, the particular case of perfectly equal eigenfrequencies $\omega_1 = \omega_2$ with a vanishing detuning $\sigma_1 = 0$, is considered. In this case, the amplitude values for which the branch points I_{Ea} , I_{Na} , I_{Eb} and I_{Nb} (as defined in Eqs. (22) and (23)) are equal to zero, which means that the coupled solutions could exist from a vanishing amplitude. This is the direct consequence of the fact that, as $\sigma_1 = 0$, the gaps

between the starting point of A-mode and B-mode backbone curves and their instability regions, does not exist anymore. The second consequence is also that uncoupled solutions are either always stable or always unstable, whatever the amplitude. Considering the coupled solutions, cancelling the values of all branch points does not mean that NM and EM always exist. Indeed, Eq (14), which defines the amplitude relationships for coupled solutions, rewrites with $\sigma_1 = 0$

$$(3\Gamma_1 - (2 + s)C_2) a^2 = (3\Gamma_2 - (2 + s)C_1) b^2, \quad (24)$$

with $s = \pm 1$ for NM and EM. Consequently coupled solutions can exist if and only if the respective coefficients in front of the square amplitude have the same sign.

The stability chart that gives all possible solutions as function of the nonlinear coefficients is thus modified and shown in Fig. 7(a). The main difference with the detuned case where $\sigma_1 > 0$ lies in the fact that coupled solutions of finite extent can not exist anymore since all branch points have the same vanishing amplitude. This leads to modify the lower right part of the stability chart and make it symmetric. The possible cases are discussed as function of the stability of the uncoupled mode, reported in Fig. 7(a) on the vertical and horizontal axes. Four cases exist:

- **Case 1** : *A-mode and B-mode are stable*. This means that the backbone curve of each uncoupled solution is outside its instability region. It corresponds to the four edges of the stability chart, in upper left, upper right, lower left and lower right regions. Two cases are then possible:

- Case 1.1: if $3\Gamma_1 < C_2$ and $\Gamma_2 > C_1$, or if $3\Gamma_2 < C_1$ and $\Gamma_1 > C_2$. This case means that the backbone curve of A-mode stay on the left of the instability region while backbone of B-mode if on the right (or vice-versa). Then in this case the coefficients of Eq.(24) have opposite signs, thus no coupled solutions exist.
- Case 1.2: if $3\Gamma_1 < C_2$ and $3\Gamma_2 < C_1$ (case 1.2.1), or if $\Gamma_1 > C_2$ and $\Gamma_2 > C_1$ (case 1.2.2). This means that the backbone curves of A-mode and B-mode are respectively on the same side of their instability regions. Then in this case both coupled solutions exist, and inspection of the values of S_c indicates that in case 1.2.1 NM is stable while EM is unstable, and case 1.2.2 leads to the contrary with NM unstable and EM stable.

- **Case 2** : *A-mode and B-mode are unstable*. This means that each backbone is totally inside the instability region, so that $C_2/3 < \Gamma_1 < C_2$ and $C_1/3 < \Gamma_2 < C_1$. Then in this case both coupled solutions exist and are stable.

- **Case 3** : *A-mode is unstable and B-mode is stable*. The instability of A-mode is obtained thanks to the condition $C_2/3 < \Gamma_1 < C_2$. Two subcases are then possible:

- If $3\Gamma_2 < C_1$, then EM does not exist, only NM is possible and is stable (case 3.1).
- If $\Gamma_2 > C_1$, then NM does not exist, only EM is possible and is stable (case 3.2).

- **Case 4** : *B-mode is stable and A-mode is unstable*. This case can be simply deduced from the previous one by symmetry (changing the indices $1 \rightleftharpoons 2$).

Fig. 7(b) illustrates a case in the upper right region of the stability chart, for which A-mode and B-mode are both stable, the two coupled solutions exist, NM is stable while EM is unstable. Finally Fig. 7(c-d) shows the projection on the (ω, a) and (ω, b) for the case in the central region where both uncoupled solutions are unstable. In this case, the only stable solutions are the coupled branches, and both EM and NM are stable.

2.5 Comparison with a numerical solution

To conclude this section on the theoretical developments, a comparison is drawn out between the analytical solutions derived with the multiple scales method and a numerical solution obtained thanks to a continuation method. A pseudo-arc length method, as implemented in the software AUTO 2000 [41], is used to obtain the numerical reference solution. A key point related to the analytical solution is that the first-order expansion is valid as long as the amplitudes of the responses are smaller than one. For the sake of clarity, all the figures shown in the previous sections have been realised by selecting $\varepsilon = 1$, leading to amplitude values larger than one, preventing for a direct comparison with a numerical solution. In order to draw out a fair comparison, the coefficients have now been selected as $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = \pi$ and $\sigma_1 = 1$, so that $\omega_2 = \pi + 0.1$. The nonlinear coefficients have been set to $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 10$, $C_1 = 20$ and $C_2 = 5$. For these values, the stability chart given in Fig. 5 predicts a stable elliptic mode of infinite extent and a normal mode of finite extent, which is here found to be unstable.

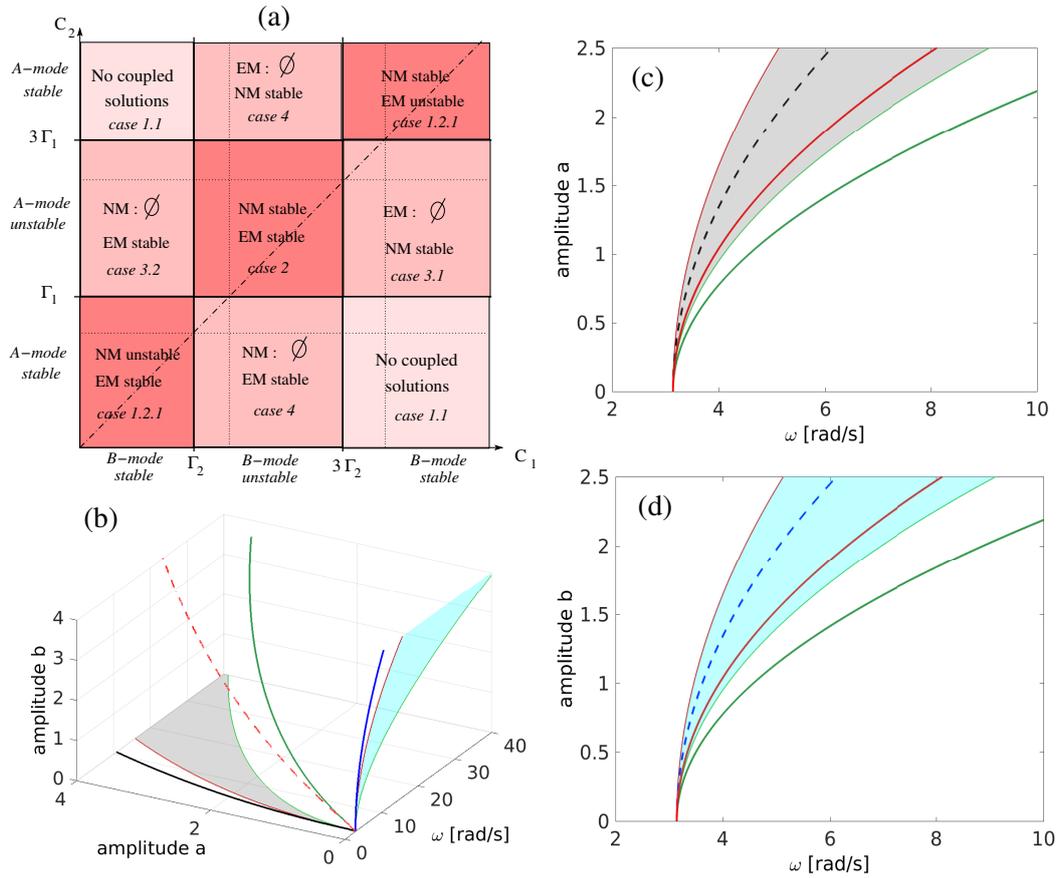


Fig. 7. Stability analysis and bifurcation scenario in the case $\sigma_1 = 0$, with fixed parameters as $\omega_1 = \omega_2 = \pi$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$. (a) stability chart showing the possible solutions when varying the values of the coupling coefficients C_1 and C_2 . (b) Three-dimensional representation of the solution branches in space (ω, a, b) , for $C_1 = C_2 = 5$. (c-d) Two-dimensional projections in the planes (ω, a) and (ω, b) for the case $C_1 = C_2 = 25$.

Fig. 8 shows the comparison between analytical and numerical results, where analytical results are reported with a thick line whereas a thin line is used for numerical solutions. As expected, the solutions are almost perfectly identical when the amplitudes are smaller than 1, which is especially true for the solution branch of normal modes, where both solutions are perfectly equal. For all the other branches, one can observe that as soon as the amplitudes are larger than one, a small departure is found between the analytical solution and the numerical solution, as seen on the uncoupled solutions and the branch of coupled elliptic modes. These differences are completely logical and in line with the first-order perturbative solution. Note in particular that it could lead to modify the predictions of bifurcation scenario given by the chart in Fig. 5. Indeed, all the solutions in Fig. 5 are found by comparing the curvature of solution branches at first order defined by parabolas. When amplitudes are larger than one, the curvature is slightly modified by higher-order so that some pitchfork bifurcation points I can move and change the whole picture. Hence the analytical predictions are meant to be very accurate only for small amplitudes, otherwise slight modifications may appear.

3 Experiments

An experimental investigation is now reported in order to illustrate the previous findings, in the specific case of the first two companion asymmetric modes of a circular plate. The selected plate is of radius $R = 0.11$ m, thickness $h = 1.5$ mm, made in brass of mass density $\rho = 8486$ kg.m⁻³, Young's modulus $Y = 110$ GPa and Poisson ratio $\nu = 0.3$. The responses are measured around the first resonances of the structure, which

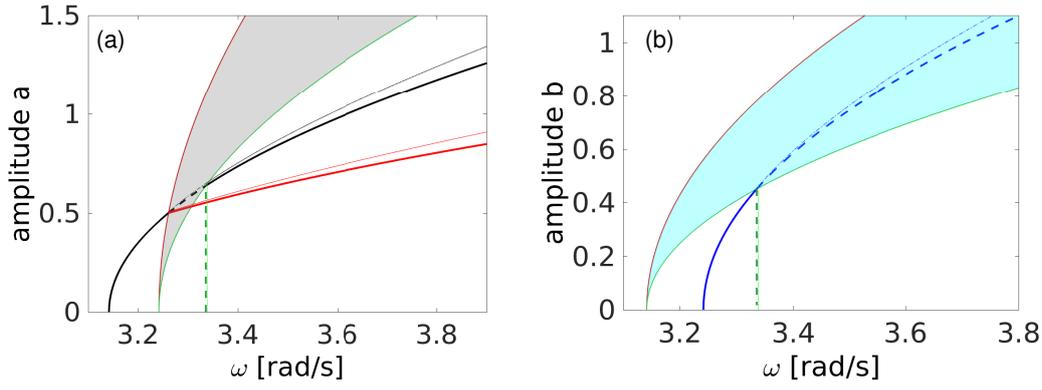


Fig. 8. Comparison between analytical and numerical solution obtained with a pseudo arclength continuation method. Selected coefficients as $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 10$, $C_1 = 20$, $C_2 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 3.14159$, $\omega_2 = 3.24159$. Analytical solutions with thick lines, numerical solutions with thin lines, showing a perfect comparison as long as the amplitudes are smaller than 1.

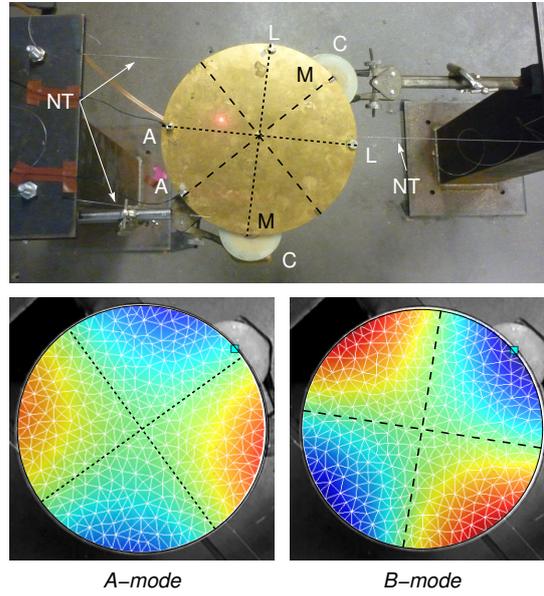


Fig. 9. Investigated structure and operating deflection shapes of the two modes, with detailed positions of the nodal radii (in dashed lines), accelerometers (A), coils (C), magnets (M), lests (L) and nylon threads (NT).

are associated to the two companion asymmetric modes with two nodal diameters, which are, because of the rotational symmetry of the structure, degenerate and have close eigenfrequencies.

3.1 Experimental setup

A picture of the experimental setup is shown in Fig. 9. The plate is hanged up horizontally (with respect to gravity) by three Nylon threads attached in three holes of small radius, equally spaced near its outer edge, to reproduce theoretical free boundary conditions. The excitation system consists of a non-contact coil / magnet device, described with details in [21]. It is shown that it has a very low distortion rate, much lower than a traditional shaker. A preliminary modal analysis is performed from velocity measurements thanks to a scanning laser vibrometer (Polytec PSV-400). The operating deflection shapes of the two companion modes under interest are shown in Fig. 9 and labeled mode A and mode B in accordance with the theoretical

part of the article, mode A being the one with the lower eigenfrequency. To measure the modal coordinates associated with those two modes, we use two small accelerometers (Brüel & Kjær 4375) glued near the edge of the plate, precisely on a nodal radius of the deformed shapes, to naturally discriminate the effect of the two modes. In this way, each accelerometer measures the oscillation of one mode only. We also glue two magnets on nodal radii of the two modes, to be able to actuate each mode separately with the help of a coil.

	Mode A: f_1 [Hz]	Mode B: f_2 [Hz]	$\Delta f = f_2 - f_1$ [Hz]
Hanged plate + {magnet} $\times 2$	107.3	115.8	8.5
Plate + {magnet + accel.} $\times 2$ + lests	104.66	109.25	4.59

Tab. 1: Comparison of the resonance frequencies of the plate, with initial and complete devices

With a single magnet, used to excite the plate for the modal analysis, and without the accelerometers, the two eigenfrequencies are measured at 107.3 Hz and 115.8 Hz. To reduce the gap between those two frequencies, due to the unavoidable imperfections of the system, additional lests (magnets) are put on two nodes of mode A, on both sides of the plate, to reduce the frequency of mode B. Tab. 1 shows the effect of all added masses and that the full configuration has closer eigenfrequencies, with a frequency difference of 4.59 Hz instead of 8.5 Hz.

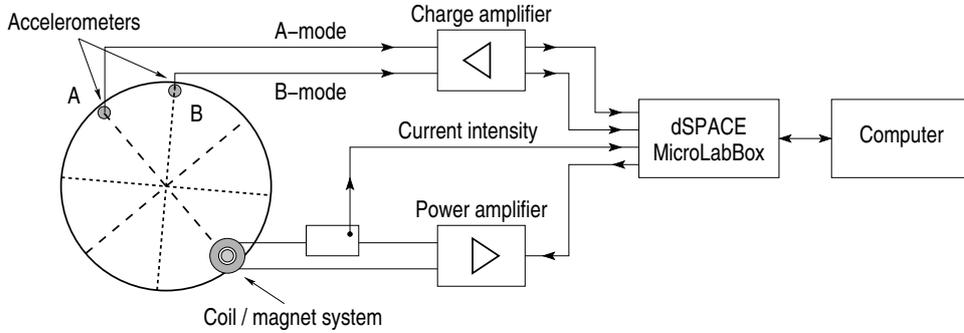


Fig. 10. Scheme of the experimental setup. a_1 , a_2 and Q denote the measured accelerometers and the electromechanical excitation, respectively at the inputs and output of the dSpace.

An experimental continuation procedure based on a Phase Locked Loop (PLL), fully detailed in [33], is used to measure the backbone curves as well as the forced responses of the system (Fig. 10). The excitation is a sine signal of frequency Ω , amplified and sent to the coil, which creates a force proportional to the current intensity denoted by $I(t)$. A real time control system (a dSpace MicroLabBox 1302T), with a control loop mainly based on a proportionnal / integral controller, adjusts the frequency Ω so that a prescribed phase is obtained between the force excitation signal (in practice we use a measure of the current intensity in the coil, assumed proportional to the actual force with no phase lag) and the acceleration of one of the modes (called $a_1(t)$ and $a_2(t)$ respectively for modes A and B). Because of the nonlinearities, a small harmonic distortion is often observed in the acceleration signal and the phase estimations are performed on the first harmonic of the signal, extracted thanks to a homodyne detection. The sampling frequency of the control system is fixed at 50 kHz and for all measurements, the integral and proportional gains of the control loop are respectively fixed at $K_i = 150$ and $K_p = 5$: these values, larger than those used in [33], avoid the instability regions of the control system in closed-loop case. It has been shown in [33] that if the system behaves as a single Duffing oscillator, the unstable parts of the forced response are stabilized by the control loop, without changing the systems response in the steady state.

In practice, since only the first harmonic of the signals are measured, we write the current intensity and the two displacement signals at points A and B:

$$I(t) = I_0 \cos \Omega t, \quad w_A(t) = w_1 \cos(\Omega t - \psi_1), \quad w_B(t) = w_2 \cos(\Omega t - \psi_2). \quad (25)$$

Then, since the acceleration are measured at points A and B , with amplitudes a_1 , a_2 and phase ψ_1 , ψ_2 , we obtain the amplitude w_1 , w_2 and the phases ϕ_1 , ϕ_2 of the displacement signals at points A and B on the plate by:

$$w_1 = \frac{a_1}{\Omega^2}, \quad w_2 = \frac{a_2}{\Omega^2}, \quad \phi_1 \equiv \psi_1 + \pi \pmod{2\pi}, \quad \phi_2 \equiv \psi_2 + \pi \pmod{2\pi}. \quad (26)$$

Then, as explained in [33], two distinct measurements can be performed. First, it is possible to measure a given backbone curve by prescribing the phase lag between the displacement and the forcing signals to a fixed value $\phi = -\pi/2$, in order to excite the system in phase resonance. Then, by increasing the forcing amplitude, the control system adjusts the frequency Ω so that ϕ is as close as possible to $-\pi/2$ and Ω is then theoretically the free oscillation frequency of the associated conservative system (since at phase resonance, the forcing exactly cancels the viscous damping forces [42]). The second experiment enables to measure a forced response. In this case, the amplitude of the forcing I_0 to a selected value is prescribed. Then, if for a given system, the phase is a monotonous function of a path parameter on the forced response curve (it is the case for a Duffing oscillator, see *e. g.* [33]), a phase sweep (between 0 and π for instance) gives the full forced response of the system with the unstable part stabilized (and thus measured) by the control system. These two types of measurements are applied to the circular plate in the following.

3.2 Backbone measurements and identification

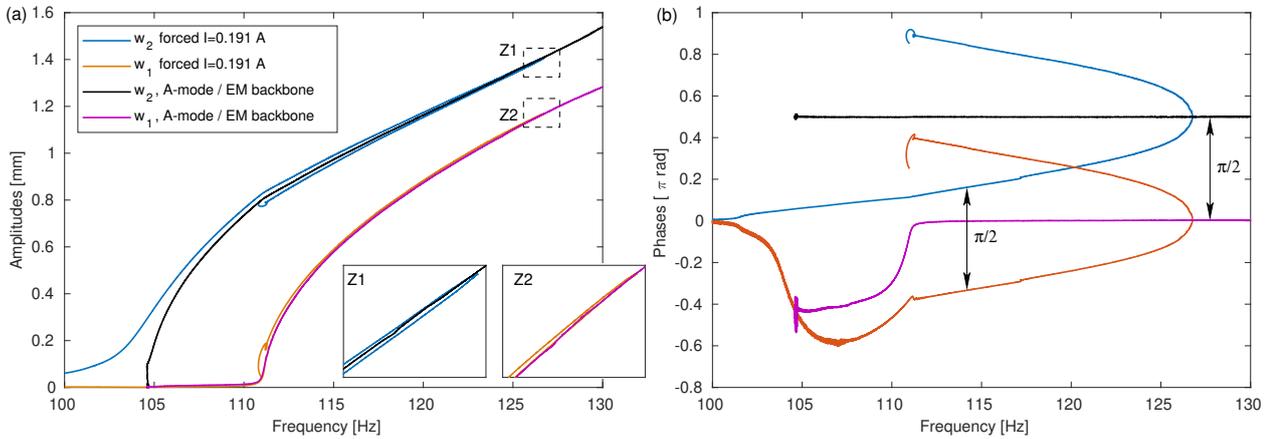


Fig. 11. Amplitudes and phases of the displacement signals of the A and B-mode mode during a phase resonance experiment (black and purple curves, respectively) and during a forced experiment (blue and red curve, respectively; phase sweep at constant driving amplitude of $I_0 = 0.191$ A). Some details, around the amplitude resonance of the elliptic mode, are provided (z_1 , z_2).

The backbone curve of the A-mode is first measured. The plate is excited at a node of B-mode as shown in Fig. 10, so that the modal excitation of the companion B-mode is as small as possible. Then, using the PLL procedure described in the previous section, a phase lag of $\psi_1 = \pi/2$ ($\phi_1 = -\pi/2$) is prescribed and the amplitude of excitation is increased from zero. The black curve in Figs. 11(a,b) shows the amplitude and phase of the A-mode, w_1 and ψ_1 , as a function of the driving frequency Ω , whereas the purple curves shows the amplitude and phase of the B-mode, w_2 and ψ_2 . For low amplitudes, a smooth hardening backbone curve is obtained, with the amplitude w_2 of B-mode remaining close to zero (Fig. 11(a)). This solution branch is thus a part of the (uncoupled) backbone of the A-mode, since no significative response of the B-mode is observed. Then, for $(w_1, \Omega/(2\pi)) \simeq (0.8 \text{ mm}, 111 \text{ Hz})$, a change of curvature is observed and w_2 starts to increase from zero. Looking at the phases in Fig. 11(b), it is observed that the phase of B-mode locks exactly at $\psi_2 = \psi_1 - \pi/2$. Qualitatively, this part of the response has the features of an elliptic mode, as described theoretically in section 2.2, that emerges from the A-mode after an imperfect pitchfork bifurcation.

In the same manner as for the backbones of the A-mode and the EM shown in Fig. 11, the same procedure can be applied to measure the backbone of the B-mode. The plate is excited at an anti-node of

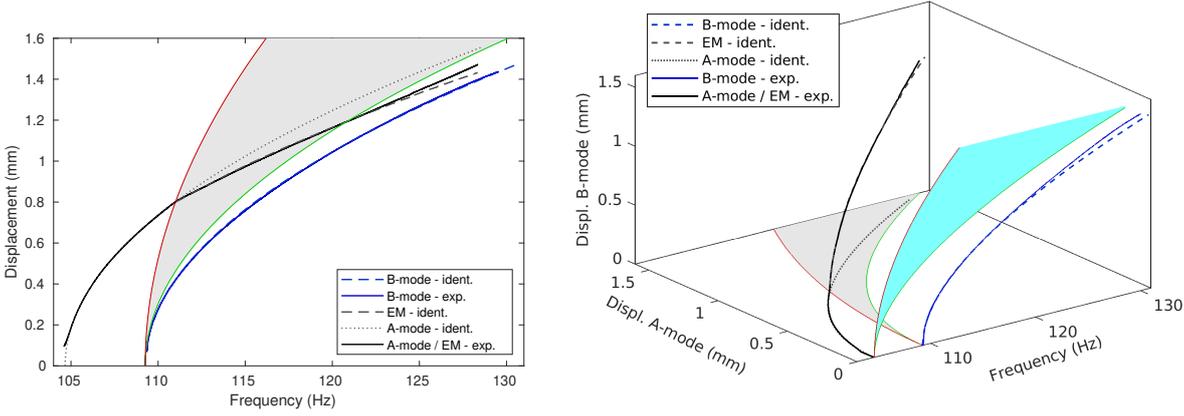


Fig. 12. Experimental and identified backbones and stability curves: amplitudes w_1 and w_2 of A and B-mode as a function of frequency Ω . Black solid line: experimental measured backbone curve of A-mode (A-mode exp., before the stability limit, in red) and elliptical mode (EM - exp., after the stability limit). Blue solid line: experimental backbone curve of B-mode (B-mode exp.). Black dotted and blue dashed lines: identified backbones of respectively A and B-modes in uncoupled regime (A-mode ident., B-mode ident.). Black dashed line: identified backbone of the coupled elliptic mode (EM - ident.).

the A-mode and the phase of the B-mode is prescribed at $\psi_2 = -\pi/2$ with the driving amplitude increased from zero. A single hardening uncoupled backbone is obtained and shown as a solid blue line in Fig. 12.

With the backbones of A-mode, B-mode and EM previously described, and all gathered in Fig. 12, it is possible to estimate the values of the coefficients of the reduced order model of Eqs. (1). First, the two eigenfrequencies ω_1 and ω_2 are obtained as the vanishing amplitude limit of the two A-mode and B-mode backbones, at 104.66 Hz and 109.26 Hz. Then, with the curvature of those two uncoupled branches, it is possible to estimate coefficients Γ_1 and Γ_2 , with Eqs. (8),(9). Finally, the elliptic mode coupled backbone that emerges from the uncoupled A-mode backbone at $\simeq 111$ Hz enables to estimate the two remaining nonlinear coefficients, that are considered equal in this case: $C_1 = C_2$. The fitting of this last coefficient is processed such that :

- according to Eq. (22), the intersection between the backbone curve of A-mode and the instability region from which the elliptic mode appears (point I_{Ea}) gives an estimate for coefficient C_2 ;
- the curvature of the elliptic mode, given by Eq. (17), makes appear the coefficient C_1 independently of C_2 .

The backbone curves computed with the estimated coefficients are also shown in Fig. 12, as well as the instability regions, computed with Eqs. (8), (9), (17), (A.10), (A.11). An almost perfect agreement is obtained between the experimental results and the theoretical ones for amplitudes of oscillations up to 1 mm. For higher amplitudes, a slight departure between theoretical predictions and measurements is observed, which is probably due to the first-order solution used in the calculations, valid only for small amplitudes of motion.

It must also be noted that the model identification proposed here can be viewed as an extension to the case of a 1:1 internal resonance of the general procedure proposed in [33]. The model is obtained by a normal form reduction (restricted to a 4 nonlinear terms perfect case) and identified using backbone curves obtained by experimental continuation. It is, to the knowledge of the author, a first (but modest) attempt of identification of a nonlinear model with modes in internal resonance, whereas other contributions use the forced responses [21, 43, 44]. It will be seen in the next section that this parameter identification is also robust in the sense that the results can be easily extended to forced vibrations.

The identified coefficients are now compared to analytical values computed from a nonlinear plate model, founded on a Kirchhoff-Love kinematics and a von Kármán strain–displacement law. A complete derivation and numerical results can be found in [20, 40], where a dimensionless form of the nonlinear plate equations is used to obtain the general system of Eqs (1). The following relationships between physical and

	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	Identified				Theory			
			ξ_1 (%)	ξ_2 (%)	Γ_1	Γ_2	C_1	C_2	$\Gamma_1 = \Gamma_2 = C_1 = C_2$	
Free	104.66	109.26	–	–	1.80	1.68	1.55	1.55	1.89	
Forced	104.90	109.01	0.13	0.06	1.80	1.58	1.85	1.58	1.89	

Tab. 2: Identified values of frequencies, modal dampings and nonlinear coefficients by adjusting theory with experiments. The theoretical (Theory) value of those coefficients, from [20], are also given.

dimensionless values are used to perform the ajustement of the model parameters:

$$f = \frac{h}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \bar{\omega}, \quad w_1 = \Phi(r_{\text{meas}}) \frac{h^2}{R} 2a, \quad w_2 = \Phi(r_{\text{meas}}) \frac{h^2}{R} 2b, \quad \varepsilon = \frac{12(1-\nu^2)h^2}{R^2}, \quad (27)$$

where f refers to a frequency in Hz related to a dimensionless angular frequency $\bar{\omega}$, $\Phi(r_{\text{meas}})$ is the theoretical amplitude of the mode shape of the considered mode, defined with Bessel functions (see [20]) at the radius r_{meas} of location of the accelerometers. One has to notice the factor 2 comes from the definition of w_1 and a (resp. w_2 and b) in Eqs. (7) and (25).

According to this scaling, the dimensionless values of coefficients Γ_1 , Γ_2 , $C_1 = C_2$ are gathered in Tab. 2, from both the theory [20] and the present estimated values. The estimated nonlinear coefficients are a little smaller than the theoretical values, with an error of the order of respectively 5%, 10% and 20% for the coefficients Γ_1 , Γ_2 and the 2 coefficients C_1 and C_2 . These differences with the numerical values can be explained by the imperfections, inherent to the plate but also coming from the added masses (accelerometers, magnets): the nonlinear coefficients are sensitive to the mode shapes, in particular the differences of the nodal and anti-nodal diameters compared to those of a perfect plate. Similar results have been found in [21].

The imperfections explain also that the pitchfork bifurcation at 110 Hz leading to the coupled elliptic mode is imperfect, so that a single continuous stable branch is found and naturally followed by the PLL. The second stable coupled branch (with almost the same amplitude and a phase $\psi_2 = \psi_1 + \pi/2$), should be isolated from the main branch and connected to the uncoupled unstable A-mode backbone by a saddle-node bifurcation. It has not been possible to initialize the PLL procedure on one of the isolated branch to measure them, as it has been done in [21]. Moreover, preliminary numerical investigations on the model of section 2, shows that whatever the value of the coefficients, only perfect pitchfork bifurcations are found. This suggests that the imperfections of the plate should be taken into account by small nonzero added nonlinear cubic terms in the model (terms X_2^3 and $X_1^2 X_2$ in Eq. (1a) and terms X_1^3 and $X_2^2 X_1$ in Eq. (1b)), thus extending the analysis to eight parameters for the nonlinear coefficients. This sounds logical that adding those new terms in the equations prevent the uncoupled solutions from existing, since invariant-breaking terms, in the sense given in [45], are now present. Consequently, perfect bifurcation cases exist with those new terms, which has been clearly observed with numerical investigations using continuation methods. The detailed analysis of this transition to imperfect bifurcations is however left for further studies.

3.3 Forced response around A-mode and PLL behavior

In parallel to the backbone curve measurements of the previous section, some forced responses have also been measured with the PLL control system, by holding constant the amplitude of forcing and sweeping the phase of the directly excited mode from 0 to π . Fig. 11 shows a typical forced response for which the driving point is chosen on a node of the B-mode to mainly drive the A-mode. Similar responses than those predicted and measured in [20, 21] are obtained, with a phase difference of $\psi_2 - \psi_1 = \pi/2$ between A and B-mode in the coupled part, characteristics of a forced elliptic mode giving rise to a rotating travelling wave. Two features are worth to be noted. First, the forced response lies in the vicinity of the backbones, with a crossing at the phase resonance of the coupled branch ($\psi_1 = \pi/2$), which stands close to the amplitude resonance. Second, the unstable part is stabilized by the PLL control loop on a large part of the coupled response, as discussed in the following.

Fig. 13 displays the backbone of the A-mode and several forced responses, for three excitations levels. First, the same qualitative behaviour is obtained, with the nonlinear forced responses distributed around the backbone curve both for the uncoupled solution and after the emergence of the 1:1 internal resonance. Secondly, the PLL control loop is not able to stabilize the whole forced response in a single phase sweep, as

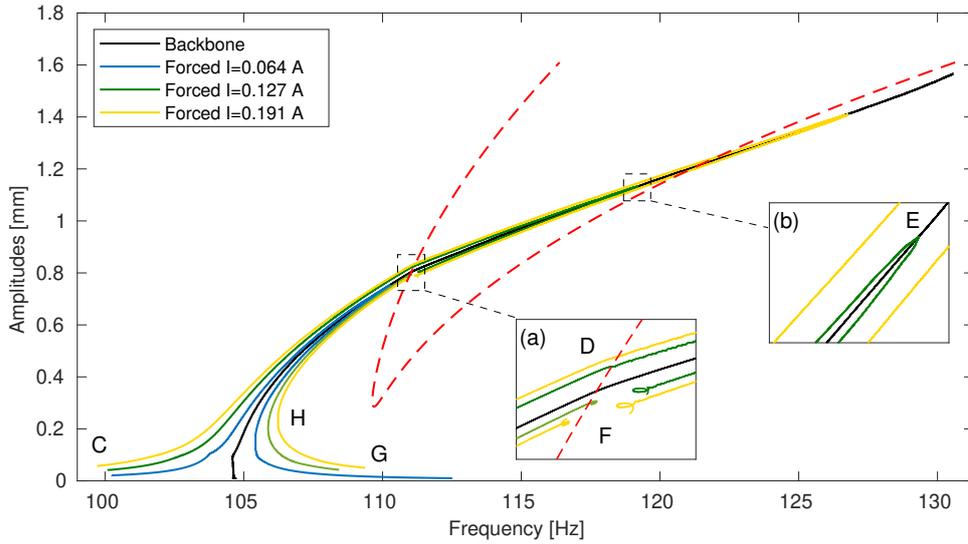


Fig. 13. Experimental forced responses around the backbone of the A-mode and instability regions.

it would be the case for a Duffing oscillator [33]. Indeed, a first branch is obtained by an increasing phase sweep from $\psi_1 = 0$ corresponding to point *C* in Fig. 13. Then, point *D* is reached, with the emergence of the 1:1 interaction, which is theoretically stable until the saddle-node bifurcation at point *E*. Then, further increasing the phase leads to measure a theoretical unstable coupled branch, which is stabilized by the PLL until point *F* at which the control loop loses its stability. It is possible to measure another branch by starting at point *G* with a phase close to π and doing a decreasing phase sweep, to first reach point *H* with a saddle-node bifurcation until point *F* where the control loop loses its stability.

To discuss this instability of the control system in forced regime, the experimental results are compared to numerical simulations obtained using the continuation software Manlab [46, 47], that enables to simulate the periodic response of Eqs. (A.1) with the harmonic balance method and an asymptotic numerical method. The stability of the branches is obtained by the Hill method [48]. The values of the parameters used for the simulation are gathered in the last row of Tab. 2. The values common with the free response case have been slightly changed for a better fit on the experiments. Then, modal damping factors (dimensionless), defined as $\xi_1 = \varepsilon\mu_1/\omega_1$ and $\xi_2 = \varepsilon\mu_2/\omega_2$, have been estimated by a half power bandwidth method on linear (small amplitude) frequency response functions. Finally, the forcing amplitudes have been chosen such that $F_1 \gg F_2$, with $F_1 = 5.97$ and $F_2 = F_1/35.0$, with a slight non zero forcing of B-mode due to experimental imperfections.

The computed forced responses are presented in Fig. 14. A remarkable comparison is obtained between theory and experiments. However, the simulations show precisely the topology of all the the unstable branches, especially the uncoupled resonance of the A-mode. Its unstable part is connected to the rest of the diagram through two pitchfork bifurcations, at points *D* and *F* in Fig. 14. Because of the nonzero value of F_2 , these pitchfork bifurcations are imperfect. The main result is that the PLL control loop loses its stability precisely at the pitchfork of point *F*, where the unstable uncoupled A-mode branch is connected to the rest of the diagram. For a reason out of the scope of this paper, the PLL control system is not able to branch the coupled regime from the uncoupled one and inversely at point *F*. It must be noticed that the stability of the PLL control loop has been theoretically proved only with a single Duffing oscillator in [33]. This study has thus to be extended to the present case of a 1:1 internal resonance.

4 Conclusion

This paper addresses theoretical analysis and experimental investigations on a system with two coupled oscillators with cubic nonlinearities featuring 1:1 internal resonance. The coupled and uncoupled solutions of the nonlinear system are derived by using a multiple-scale analysis. The main outcomes of the analytical results are to offer a complete view of the bifurcation scenario thanks to the derivation of the analytical expressions of the instability regions, that had never been written out in the previous investigations on the

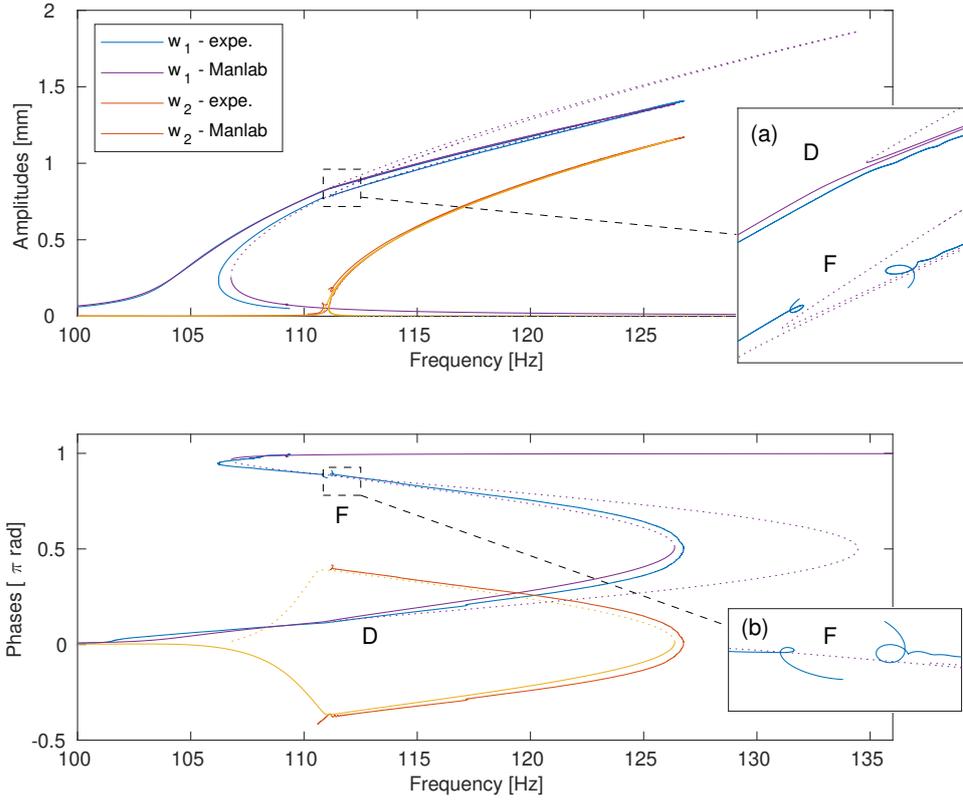


Fig. 14. Experimental (expe.) amplitudes and phases of the displacements around A-mode response in forced regime under current $I_0 = 0.191$ A. Numerical corresponding response, computed with Manlab, with the estimated parameters. The theoretical unstable branches are plot in dashed line.

1:1 resonance in free vibrations. An extension to the results by Manevitch and Manevitch is also provided by taking into account 4 nonlinear coupling coefficients as parameters. Depending on the parameter values, nine possible bifurcation scenarii have been established, with different topological configurations including supercritical or subcritical pitchfork, two kinds of coupled solutions (elliptic and normal modes), with solution branches either of finite or infinite extent. The measurements on two companion configurations of a circular plate exhibit one bifurcation point, from which a coupled elliptic mode emerges. The estimation of the nonlinear coefficients leads to identify the corresponding scenario, showing that the experimental setup does not allow measurement of all the existing solutions. The behaviour of the PLL system in the forced regime has also been commented showing its difficulty in following in a single run a complete bifurcation diagram when a 1:1 resonance is activated. This behaviour is found to be different from the one observed when following a simple Duffing equation, asking for further research in order to give a better control on the system for measuring smoothly all solutions. Imperfect bifurcations has been also mentioned as a key point for explaining the slight differences between theory and experiments, and it has been underlined that in free vibrations, imperfect pitchfork bifurcations are observed only when taking into account the other nonlinear coupling coefficients than the four retained in this study. This particular point may also need for further dedicated research to shed light on this specific behaviour.

Acknowledgements

Part of the research work presented in this paper has been realised during the doctoral thesis of Jin-Jack Tan in IMSIA, ENSTA Paris, and was funded by the european commission within the Initial Training Network (ITN) Marie Curie action project BATWOMAN, under the seventh framework program (EC grant agreement no. 605867).

Appendix A: Derivation of first-order equations

This appendix gives the full detail of the derivation of the first-order slow-scale equations for the system of cubic oscillators featuring 1:1 internal resonance using the multiple scales method. The derivation is written for the forced and damped problem and is then finally reduced to free vibration by cancelling the forcing and damping terms. This allows us to give a unified presentation for the two cases, following closely the derivation shown in [20]. It is also mandatorily needed for our presentation since the derivation of the instability region for the free vibration is derived from the forced and damped case, as explained below.

The starting point is thus the following equations of motion:

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \varepsilon \left[2\mu_1 \dot{X}_1 + \Gamma_1 X_1^3 + C_1 X_1 X_2^2 \right] = \varepsilon F_1 \cos \Omega t, \quad (\text{A.1a})$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + \varepsilon \left[2\mu_2 \dot{X}_2 + \Gamma_2 X_2^3 + C_2 X_2 X_1^2 \right] = \varepsilon F_2 \cos \Omega t. \quad (\text{A.1b})$$

These two equations generalizes the case of free vibration considered in (1), by adding two different damping factors for each oscillator, μ_1 and μ_2 , and two forcing terms with amplitudes F_1 and F_2 , scaled at order ε since the primary resonance is investigated. These equations are close to those used in [20], except that two distinct damping terms are considered instead of a single one $\mu = \mu_1 = \mu_2$ selected in [20]. Note also that in [20], the nonlinear stiffness terms were at the right-hand side of the equations of motions, so that the comparison can be drawn by simply changing the signs of Γ_1 , Γ_2 , C_1 and C_2 .

The two detunings are introduced as

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1, \quad (\text{A.2a})$$

$$\Omega = \omega_1 + \varepsilon \sigma_2. \quad (\text{A.2b})$$

The first detuning σ_1 quantifies the 1:1 internal resonance, while σ_2 expresses the fact that a primary resonance is investigated so that $\Omega \simeq \omega_1$. The multiple scales method is introduced, with $T_0 = t$ a fast time scale and $T_1 = \varepsilon t$ a slow time scale. The unknown are expanded as $X_i = X_{i1}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i2}(T_0, T_1)$. The first-order solution is easy to find and reads:

$$X_{11} = A(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + c.c., \quad (\text{A.3a})$$

$$X_{21} = B(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + c.c., \quad (\text{A.3b})$$

where *c.c.* stands for complex conjugate. The solvability conditions write, for the two unknown complex amplitudes $A(T_1)$ and $B(T_1)$:

$$-2i\omega_1(A' + \mu_1 A) - 3\Gamma_1 A^2 \bar{A} - C_1(\bar{A}B^2 e^{2i\sigma_1 T_1} + 2AB\bar{B}) + \frac{F_1}{2} e^{i\sigma_2 T_1} = 0, \quad (\text{A.4a})$$

$$-2i\omega_2(B' + \mu_2 B) - 3\Gamma_2 B^2 \bar{B} - C_2(\bar{B}A^2 e^{-2i\sigma_1 T_1} + 2BA\bar{A}) + \frac{F_2}{2} e^{i(\sigma_2 - \sigma_1)T_1} = 0, \quad (\text{A.4b})$$

where (\prime) denotes the derivative with respect to the slow time scale T_1 . These two equations can be explicit by considering a polar form for the two unknowns, introducing $A = a(T_1) \exp(i\alpha(T_1))$ and $B = b(T_1) \exp(i\beta(T_1))$. The non-autonomous system for the amplitude and phases finally writes:

$$a' = -\mu_1 a - \frac{C_1}{2\omega_1} a b^2 \sin(2\beta - 2\alpha + 2\sigma_1 T_1) + \frac{F_1}{4\omega_1} \sin(\sigma_2 T_1 - \alpha), \quad (\text{A.5a})$$

$$\alpha' = \frac{3\Gamma_1}{2\omega_1} a^2 + \frac{C_1}{2\omega_1} b^2 (2 + \cos(2\beta - 2\alpha + 2\sigma_1 T_1)) - \frac{F_1}{4\omega_1 a} \cos(\sigma_2 T_1 - \alpha), \quad (\text{A.5b})$$

$$b' = -\mu_2 b - \frac{C_2}{2\omega_2} b a^2 \sin(-2\beta + 2\alpha - 2\sigma_1 T_1) + \frac{F_2}{4\omega_2} \sin((\sigma_2 - \sigma_1)T_1 - \beta), \quad (\text{A.5c})$$

$$\beta' = \frac{3\Gamma_2}{2\omega_2} b^2 + \frac{C_2}{2\omega_2} a^2 (2 + \cos(-2\beta + 2\alpha - 2\sigma_1 T_1)) - \frac{F_2}{4\omega_2 b} \cos((\sigma_2 - \sigma_1)T_1 - \beta). \quad (\text{A.5d})$$

Note that in order to make the system (A.5) autonomous, one has no choice and needs to introduce the following two additional variables

$$\gamma_1 = \sigma_2 T_1 - \alpha, \quad (\text{A.6a})$$

$$\gamma_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)T_1 - \beta. \quad (\text{A.6b})$$

When forcing and damping is removed, Eqs. (A.5) depends on only one angular variable, so that numerous different choices can be selected in order to make the system autonomous. In order to stay close to the notations used for the forced and damped system, the following change of coordinate is here selected:

$$\gamma_1 = -\alpha, \quad (\text{A.7a})$$

$$\gamma_2 = -\sigma_1 T_1 - \beta. \quad (\text{A.7b})$$

This choice leads to the autonomous system given in Section 2, Eqs. (6).

Appendix B: Instability region for the uncoupled solutions

In this section we derive the instability region of the uncoupled solutions for the free vibration case, from the analysis of the damped/forced system. The starting point is the instability regions derived in [21] for the forced/damped case, *i.e.* for the system (A.5), made autonomous using change of variable (A.6). The analysis led in [20] shows that uncoupled solution where only the first mode is excited is unstable when this relationship is fulfilled :

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{C_2 a^2}{\omega_2} \sqrt{\frac{C_2^2 a^4}{3\omega_2^2} - \mu^2} \quad (\text{A.8})$$

Cancelling the damping by letting $\mu = 0$ in this equation leads to

$$\sigma_2 = \sigma_1 + (2 + s) \frac{C_2 a^2}{\omega_2} \quad \text{with } s = \pm 1. \quad (\text{A.9})$$

The last step is to replace σ_2 , which is defined by (A.2b). However canceling the forcing let Ω undefined. One has then just to identify Ω with the nonlinear oscillation frequency in the free regime, σ_2 is then the detuning allowing one to express this nonlinear frequency as a function of the linear eigenfrequency with $\omega_{NL} = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2$. Replacing σ_2 with its expression as given by Eq. (A.9), one can finally obtain

$$\omega_{NL} = \omega_2 + \varepsilon(2 + s) \frac{C_2 a^2}{\omega_2} \quad \text{with } s = \pm 1. \quad (\text{A.10})$$

This equation shows that as soon as the nonlinear frequency of A-mode enters the region delimited by the two curves obtained with $s = \pm 1$, then the uncoupled solution becomes unstable. In order to derive the instability region for the B-mode, the same reasoning is applied using symmetric relationships, leading to:

$$\omega_{NL} = \omega_1 + \varepsilon(2 + s) \frac{C_1 b^2}{\omega_1} \quad \text{with } s = \pm 1. \quad (\text{A.11})$$

Appendix C: Stability of the coupled solutions

The stability of the coupled solution is derived classically from the jacobian matrix of (6). The general jacobian \mathcal{J} reads, with $S_\gamma = \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2)$ and $C_\gamma = \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)$ in order to ease notations

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1 b^2 S_\gamma}{2\omega_1} & -\frac{C_1 a b^2 C_\gamma}{\omega_1} & -\frac{C_1 a b S_\gamma}{\omega_1} & \frac{C_1 a b^2 C_\gamma}{\omega_1} \\ -\frac{3\Gamma_1 a}{\omega_1} & \frac{C_1 b^2 S_\gamma}{\omega_1} & -\frac{C_1 b(2 + C_\gamma)}{\omega_1} & -\frac{C_1 b^2 S_\gamma}{\omega_1} \\ \frac{C_2 a b S_\gamma}{\omega_2} & \frac{C_2 b a^2 C_\gamma}{\omega_2} & \frac{C_2 a^2 S_\gamma}{2\omega_2} & -\frac{C_2 b a^2 C_\gamma}{\omega_2} \\ -\frac{C_2 a(2 + C_\gamma)}{\omega_2} & \frac{C_2 a^2 S_\gamma}{\omega_2} & -\frac{3\Gamma_2 b}{\omega_2} & -\frac{C_2 a^2 S_\gamma}{\omega_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

The coupled solutions are characterized by specific relationships on the angles leading to simplification of \mathcal{J} . Indeed one has $\sin 2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$ and $\cos 2(\gamma_1 - \gamma_2) = s = \pm 1$. With these simplifications the 4×4 determinant of the jacobian matrix $\mathcal{D} = \det(\mathcal{J} - \lambda \mathcal{I})$ with \mathcal{I} the identity matrix can be analytically derived as:

$$\mathcal{D} = \lambda^2 \left[\lambda^2 - 3a^2 b^2 s \left(\frac{\Gamma_2 C_2}{\omega_2^2} + \frac{\Gamma_1 C_1}{\omega_1^2} \right) + 2 \frac{C_1 C_2}{\omega_1 \omega_2} b^2 a^2 s (2 + s) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Two eigenvalues are found to be zero which is logical for coupled solutions in four-dimensional phase space. The two other eigenvalues are solutions of

$$\lambda^2 = 3a^2 b^2 s \left[\frac{\Gamma_2 C_2}{\omega_2^2} + \frac{\Gamma_1 C_1}{\omega_1^2} - \frac{2 C_1 C_2}{3 \omega_1 \omega_2} (2 + s) \right], \quad (\text{A.14})$$

with $s = +1$ for normal mode and $s = -1$ for elliptic mode. Each mode (normal or elliptic) is stable as long as $\lambda^2 < 0$, which leads to the conclusion that stability is governed only by the value of the scalar $S_c = \frac{F_1\omega_2}{C_2\omega_1} + \frac{F_2\omega_1}{C_1\omega_2}$, the normal mode being stable as long as $S_c < 2$, and the elliptic mode as long as $S_c > 2/3$.

References

1. A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & sons, New-York, 1979.
2. A. H. Nayfeh, *Nonlinear interactions: analytical, computational and experimental methods*, Wiley series in nonlinear science, New-York, 2000.
3. A. G. Haddow, A. D. S. Barr, D. Mook, Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure, *Journal of Sound and Vibration* 97 (1984) 451–473.
4. W. M. Tien, N. S. Namachchivaya, A. K. Bajaj, Non-linear dynamics of a shallow arch under periodic excitation, I : 1:2 internal resonance, *International Journal of Non-linear Mechanics* 29 (3) (1994) 349–366.
5. F. Benedettini, G. Rega, R. Alaggio, Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions, *Journal of Sound and Vibration* 182 (5) (1995) 775–798.
6. O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance, *International Journal of Solids and Structures* 42 (11) (2005) 3339 – 3373.
7. M. Monteil, C. Touzé, O. Thomas, S. Benacchio, Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies: the cases of 1:2:4 and 1:2:2 internal resonances, *Nonlinear Dynamics* 75 (1) (2014) 175–200.
8. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthiers-Villars, Paris, 1892.
9. G. Iooss, M. Adelmeyer, *Topics in bifurcation theory*, World scientific, New-York, 1998, second edition.
10. C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *Journal of Sound and Vibration* 273 (1-2) (2004) 77–101.
11. C. Touzé, M. Amabili, Non-linear normal modes for damped geometrically non-linear systems: application to reduced-order modeling of harmonically forced structures, *Journal of Sound and Vibration* 298 (4-5) (2006) 958–981.
12. H. Harrison, Plane and circular motion of a string, *Journal of the Acoustical Society of America* 20 (6) (1948) 874–875.
13. R. J. Hanson, J. M. Anderson, H. K. Macomber, Measurements of nonlinear effects in a driven vibrating wire, *Journal of the Acoustical Society of America* 96 (3) (1994) 1549–1556.
14. O. Thomas, A. Lazarus, C. Touzé, A harmonic-based method for computing the stability of periodic oscillations of nonlinear structural systems, in: *ASME/IDETC 2010 (International Design Engineering Technical Conference)*, Montreal, Québec, Canada, 2010.
15. J.-J. Tan, C. Touzé, B. Cotté, Double polarisation in nonlinear vibrating piano strings, in: *Vienna talk 2015 on music Acoustics*, 2015.
16. A. A. Afaneh, R. A. Ibrahim, Nonlinear response of an initially buckled beam with 1:1 internal resonance to sinusoidal excitation, *Nonlinear Dynamics* 4 (6) (1993) 547–571.
17. A. H. Nayfeh, W. Lacarbonara, C.-M. Chin, Nonlinear normal modes of buckled beams: Three-to-one and one-to-one internal resonances, *Nonlinear Dynamics* 18 (3) (1999) 253–273.
18. C. J. H. Williams, S. A. Tobias, Forced undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks, *Journal of Mechanical Engineering science* 5 (1963) 325–335.
19. A. Raman, C. D. Mote Jr., Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed, *International Journal of Non-linear Mechanics* 36 (2001) 261–289.
20. C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. part 1: Theory, *Journal of Sound and Vibration* 258 (4) (2002) 649–676.
21. O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part 2: experiments, *Journal of Sound and Vibration* 265 (5) (2003) 1075–1101.
22. D. A. Evensen, Influence of nonlinearities on the degenerate vibration modes of a square plate, *The Journal of the Acoustical Society of America* 44 (1) (1968) 84–89.
23. K. Yasuda, T. Asano, Nonlinear forced oscillations of a rectangular membrane with degenerated modes, *Bulletin of JSME* 29 (255) (1986) 3090–3095.
24. S. I. Chang, A. K. Bajaj, C. M. Krousgrill, Non-linear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates with one-to-one internal resonance, *Non-linear Dynamics* 4 (1993) 433–460.
25. R. Lewandowski, Solutions with bifurcation points for free vibration of beams: an analytical approach, *Journal of Sound and Vibration* 177 (2) (1994) 239 – 249.
26. R. Lewandowski, On beams membranes and plates vibration backbone curves in cases of internal resonance, *Meccanica* 31 (3) (1996) 323–346.
27. A. I. Manevitch, L. I. Manevitch, Free oscillations in conservative and dissipative symmetric cubic two-degree-of-freedom systems with closed natural frequencies, *Meccanica* 38 (3) (2003) 335–348.
28. A. Cammarano, T. L. Hill, S. A. Neild, D. J. Wagg, Bifurcations of backbone curves for systems of coupled nonlinear two mass oscillator, *Nonlinear Dynamics* 77 (1) (2014) 311–320.
29. J. Sieber, B. Krauskopf, Control based bifurcation analysis for experiments, *Nonlinear Dynamics* 51 (3) (2008) 365–377.
30. L. Renson, A. Gonzalez-Buelga, D. A. W. Barton, S. A. Neild, Robust identification of backbone curves using control-based continuation, *Journal of Sound and Vibration* 367 (2016) 145–158.
31. D. A. W. Barton, Control-based continuation: Bifurcation and stability analysis for physical experiments, *Mechanical Systems and Signal Processing* 84 (2017) 54–64.
32. S. Mojrzisch, J. Twiefel, Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude, *Archive of Applied Mechanics* 86 (10) (2016) 1763–1769.
33. V. Denis, M. Jossic, C. Giraud-Audine, B. Chomette, A. Renault, O. Thomas, Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form, *Mechanical Systems and Signal Processing* 106 (2018) 430–452.

-
34. M. Jossic, O. Thomas, V. Denis, B. Chomette, A. Mamou-Mani, D. Roze, Effects of internal resonances in the pitch glide of chinese gongs, *The Journal of the Acoustical Society of America* 144 (1) (2018) 431–442.
 35. R. M. Rosenberg, On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Advances in Applied Mechanics* 9 (1966) 155–242.
 36. S. Shaw, C. Pierre, Nonlinear normal modes and invariant manifolds, *J. Sound. Vib.* 150 (1) (1991) 170–173.
 37. G. Kerschen, M. Peeters, J. C. Golinval, A. F. Vakakis, Nonlinear normal modes, part I: A useful framework for the structural dynamicist, *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (1) (2009) 170–194.
 38. D. Anastasio, S. Marchesiello, G. Kerschen, J.P.Noël, Experimental identification of distributed nonlinearities in the modal domain, *Journal of Sound and Vibration* 458 (2019) 426–444.
 39. J. P. Noël, M. Schoukens, Cross-fertilising research in nonlinear system identification between the mechanical, control and machine learning fields: Editorial statement, *Mechanical Systems and Signal Processing* 130 (2019) 213–220.
 40. A. Givois, A. Grolet, O. Thomas, J.-F. Deü, On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models, accepted for publication, *Nonlinear Dynamics*.
 41. E. Doedel, R. Paffenroth, A. Champneys, T. Fairgrieve, Y. Kuznetsov, B. Oldeman, B. Sandstede, X. Wang, *Auto 2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*, Tech. rep., Concordia University (2002).
 42. M. Peeters, G. Kerschen, J.-C. Golinval, Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 486–509.
 43. O. Thomas, C. Touzé, E. Luminais, Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: experiments on a 1:1:2 internal resonance, *Nonlinear Dynamics* 49 (1-2) (2007) 259–284.
 44. M. Monteil, O. Thomas, C. Touzé, Identification of mode couplings in nonlinear vibrations of the steelpan, *Applied Acoustics* 89 (2015) 1–15.
 45. C. Touzé, *Modal Analysis of nonlinear Mechanical Systems*, Springer Series CISM courses and lectures, vol. 555, ISBN 978-3-7091-1790-2, 2014, Ch. Normal form theory and nonlinear normal modes: theoretical settings and applications.
 46. R. Arquier, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez, B. Cochelin, *Manlab 2.0: an interactive path-following and bifurcation analysis software*, Tech. rep., Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique, CNRS, <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr> (2005-2011).
 47. L. Guillot, B. Cochelin, C. Vergez, A generic and efficient Taylor series based continuation method using aquadratic recast of smooth nonlinear systems, *International Journal for numerical methods in Engineering* 9 (4) (2018) 261–280.
 48. A. Lazarus, O. Thomas, A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems, *Comptes Rendus Mécanique* 338 (9) (2010) 510–517.

6.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, un dispositif expérimental a été mis en œuvre pour mesurer les réponses non-linéaires autour d'une résonance dans une structure mince élastique. Les résultats obtenus dans [185] et [46] pour un mode axisymétrique et une paire de modes asymétriques ont été retrouvés. Le cas des modes asymétriques a été étudié en détail pour mettre en évidence résonance interne 1:1 associée à l'émergence d'un régime couplé. Plus précisément, les résultats d'une investigation théorique montre que ce régime couplé naît de l'intersection de la réponse du premier mode avec la limite de stabilité inférieure du second mode. Ce régime couplé est appelé *mode elliptique* dans la terminologie proposée dans [120]. La méthode de boucle à verrouillage de phase et un protocole permettant de mesurer les deux modes asymétriques de façon discriminée ont permis de mettre précisément en évidence ces phénomènes.

Une identification des paramètres non-linéaires d'un modèle réduit a également été effectuée pour les mesures réalisées sur ces modes asymétriques. L'étude a démontré que la boucle à verrouillage de phase permet dans certains cas d'obtenir des résonances internes expérimentalement, et pouvait dans d'autres cas conduire à un comportement instable. Dans l'état actuel du dispositif expérimental, une condition pour obtenir des résonances internes est que la phase du système reste monotone.

Chapitre 7

Vibrations non-linéaires d'une plaque circulaire piézoélectrique

Contents

7.1	Présentation de la structure	188
7.1.1	Géométrie et disposition des patches piézoélectriques	188
7.1.2	Collage des patches piézoélectriques	190
7.1.3	Analyse modale	192
7.2	Réponse autour du mode axisymétrique (0,1)	193
7.2.1	Dispositif expérimental	193
7.2.2	Résonance de phase pour un système électromécanique	194
7.2.3	Réponses libre et forcées	196
7.3	Réponse autour du mode asymétrique (2,0,1)	197
7.3.1	Dispositif expérimental	197
7.3.2	Réponse libre	201
7.3.3	Réponses forcées	202
7.4	Bilan du chapitre	203

Ce chapitre concerne l'étude expérimentale d'une plaque circulaire piézoélectrique. L'originalité de ces mesures repose sur l'usage d'un **système pleinement intégré** : les patches piézoélectriques réalisent à la fois l'actionnement et la détection des vibrations. **Le dispositif permet ainsi de reproduire un MEMS à une échelle macroscopique.** Dans la continuité des résultats obtenus au chapitre précédent, **l'objectif est de mesurer une résonance 1:1 autour d'une paire de modes asymétriques.**

Une structure originale a été spécialement conçue et fabriquée pour cette investigation. De la même manière que la plaque élastique, il s'agit d'une plaque circulaire dont les modes sont asymétriques ou axisymétriques. La disposition des patches piézoélectriques permet de conserver les propriétés de symétrie des premiers modes de vibrations, ce qui permet une démarche similaire à celle entreprise au chapitre précédent. Une analyse modale effectuée au vibromètre laser à balayage confirme que ces caractéristiques sont conservées pour les premiers modes.

La première section présente la structure et les résultats de l'analyse modale. La seconde est consacrée aux mesures des vibrations non-linéaires autour d'un seul mode axisymétrique. Enfin, la troisième section présente les mesures sur le premier mode asymétrique, avec une démarche similaire à celle du chapitre précédent. Les réponses unimodales et sollicitant une résonance interne sont mesurées sur les mêmes modes que la plaque élastique : les résonances sont étudiées autour du premier mode axisymétrique (0,1) et de la paire des premiers modes asymétriques (2,0). La démarche adoptée est donc sensiblement identique. Pour ces deux mesures, les protocoles expérimentaux mettent en exergue l'ensemble du dispositif électronique connecté aux patches piézoélectriques. Les réponses libres et forcées sont mesurées dans les deux cas. Pour l'étude des modes asymétriques, une discrimination des deux configurations est effectuée par pondérations des tensions mesurées aux bornes de différents patches. Cette procédure permet d'une part de solliciter principalement l'une des deux configurations, et conduit d'autre part à l'obtention de signaux où les configurations sont dissociées.

À partir des réponses non-linéaires autour de la première configuration du mode $(2, 0)$, l'émergence d'une résonance interne 1:1 peut être établie.

7.1 Présentation de la structure

La structure conçue pour cette étude présente une partie élastique identique à la plaque du chapitre précédent en termes de géométrie et de matériau. Huit patches piézoélectriques en PIC 151 et de dimensions $40 \times 20 \times 1 \text{ mm}^3$ sont disposés le long de la circonférence d'un cercle interne à la plaque. Comme dans le cas de [88, 89], l'objectif est de conserver les propriétés de symétrie circulaire des déformées des premiers modes.

7.1.1 Géométrie et disposition des patches piézoélectriques

Préalablement au collage des patches sur la structure, quatre dispositions des patches sont testées, celles-ci sont dénommées C_i avec $i \in [1, 4]$ sur la figure 7.1. Cette figure montre que les configurations (C1), (C2) et (C3) ne changent que par le rayon r du cercle sur lequel les centres des patches sont répartis. La disposition (C4) modifie le sens du patch : la plus grande direction est alignée avec un rayon de la plaque circulaire.

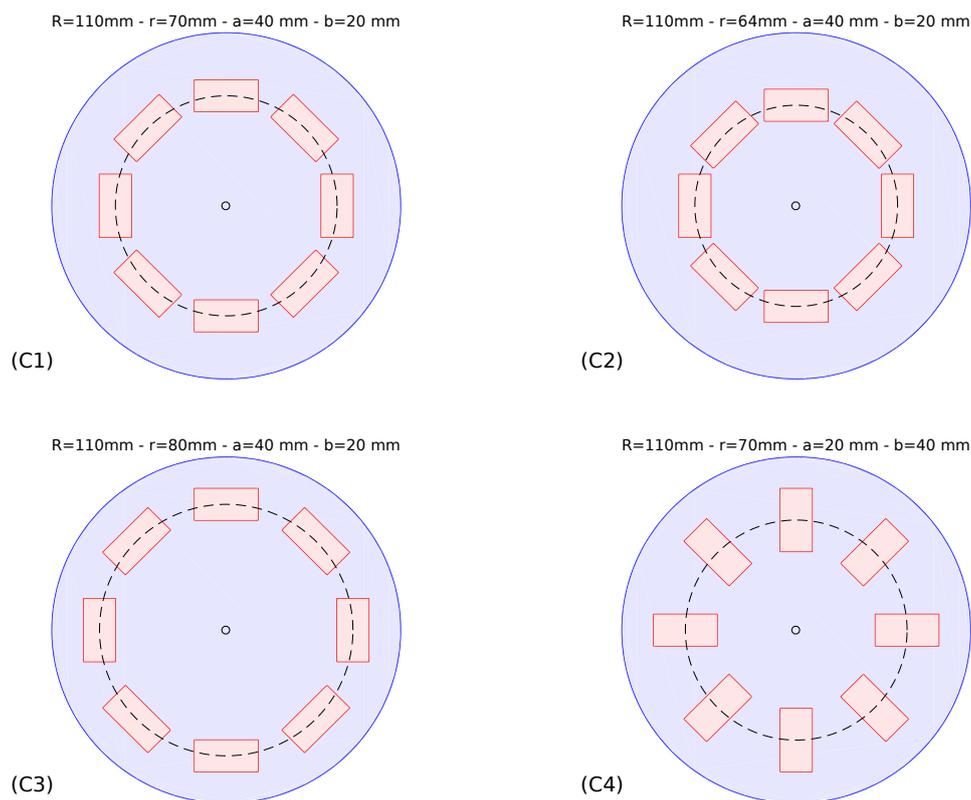


FIGURE 7.1 – Schéma des différentes configurations C_i des patches piézoélectriques sur la plaque. Le cercle interne sur lequel les patches piézoélectriques sont disposés est indiqué en traits pointillés, son rayon r est précisé avec l'ensemble des dimensions au-dessus de chaque figure.

Le choix de la configuration est fondé sur le calcul des coefficients de couplage électromécaniques linéaires $\chi_k(p)$ avec la méthode présentée dans la section 5.1. Pour cela, les différentes configurations sont modélisées par éléments finis avec *Abaqus* : la figure 7.2 montre la géométrie, le maillage et les premières déformées modales de la configuration (C1). Les coefficients élastiques de la plaque sont

ceux issus du recalage des modes effectué dans le chapitre précédent, tandis que les coefficients piézoélectriques sont ceux présentés dans le tableau 5.1. Une discrétisation par la méthode des éléments

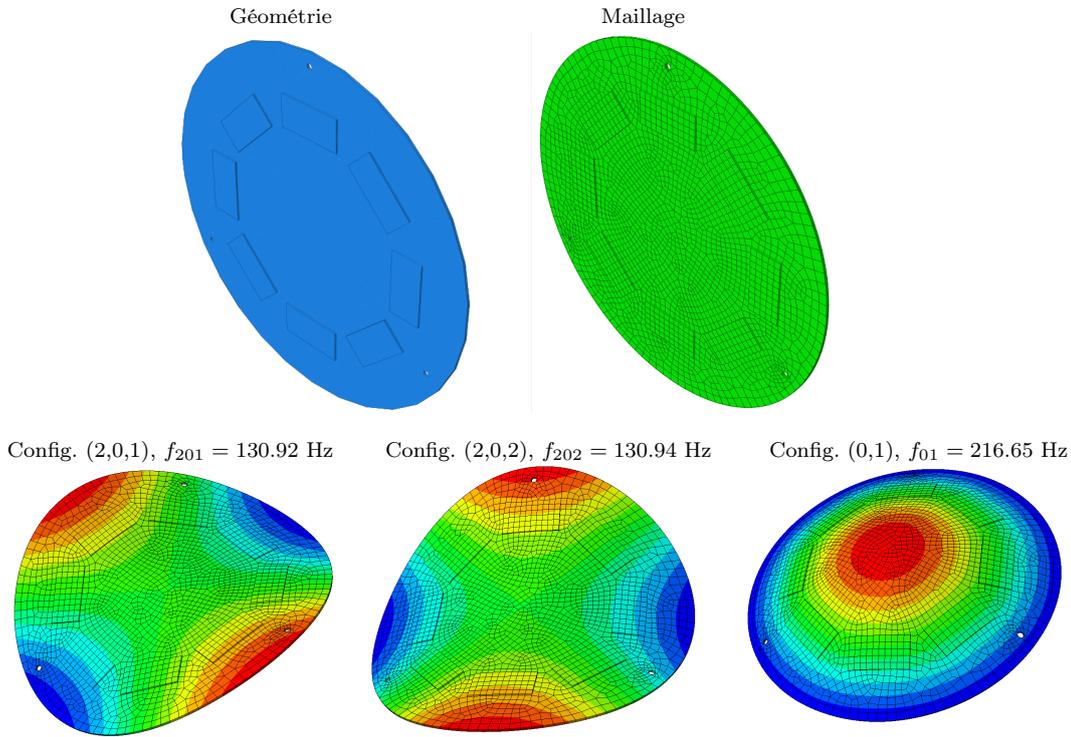


FIGURE 7.2 – Modélisation éléments finis de la configuration (C1) et premiers modes obtenus.

finis, ainsi qu’un calcul modal et un calcul statique avec l’ensemble des patches en court-circuit sont donc effectués pour chacune des configurations de la figure 7.1, ainsi que pour les trois premiers modes calculés. Dans le cas des modes (2, 0), les positions des diamètres nodaux sont imposées avec la prise en compte des trous utilisés pour le placement de fils de nylon. En pratique, ces trous sont effectués par perçage et servent à fixer expérimentalement la plaque afin de reproduire les conditions aux limites libres. L’un des trois trous est alors aligné avec un diamètre nodal pour le mode (2, 0, 1) (et respectivement un ventre de vibration pour le mode (2, 0, 2)). Ce choix d’alignement est représenté sur la figure 7.2. Cela peut simplifier le problème et amener à considérer que la moitié des coefficients sont négligeables pour les modes asymétriques (les coefficients de couplage sont proportionnels à la différence des rotations des sections droites sur les bords des patches [182]). Ainsi, pour un mode k donné, un coefficient de couplage a été négligé si :

$$\left| \chi_k^{(p)} / \max_{a \in [1,8]} (\chi_k^{(a)}) \right| < 1\%. \quad (7.1)$$

Les coefficients obtenus sont présentés dans le tableau 7.1 : ceux des modes asymétriques ont été regroupés suivant leurs parités, car les écarts entre quatre de ces patches sont particulièrement faibles ($\ll 1\%$), leurs valeurs moyennes sont donc retenues comme résultats. De même, pour le mode axisymétrique (0,1), la moyenne des coefficients est rapportée en raison des faibles écarts constatés. Les valeurs montrent que les modes de la configuration (C4) sont potentiellement moins couplés que les trois autres. La comparaison des configurations (C1), (C2) et (C3) montre que le couplage est meilleur lorsque les patches sont rapprochés du centre : cela exclut notamment la configuration (C3). **La configuration (C1) est finalement préférée à (C2) afin d’éviter des problèmes d’origine électrique liés à une trop petite distance entre les extrémités des patches.**

	(C1)	(C2)	(C3)	(C4)
$\chi_{201}^{(p)}, p = 2n$	$\pm 4.21 \times 10^{-3}$	$\pm 4.25 \times 10^{-3}$	$\pm 4.12 \times 10^{-3}$	$\pm 1.64 \times 10^{-3}$
$\chi_{201}^{(p)}, p = 2n - 1$	≈ 0	$\pm 2.80 \times 10^{-4}$	$\pm 1.88 \times 10^{-4}$	≈ 0
$\chi_{202}^{(p)}, p = 2n$	≈ 0	$\pm 2.82 \times 10^{-4}$	$\pm 1.89 \times 10^{-4}$	≈ 0
$\chi_{202}^{(p)}, p = 2n - 1$	$\pm 4.22 \times 10^{-3}$	$\pm 4.25 \times 10^{-3}$	$\pm 4.12 \times 10^{-3}$	$\pm 1.65 \times 10^{-3}$
$\chi_{01}^{(p)} \forall p$	$\pm 8.19 \times 10^{-3}$	$\pm 9.86 \times 10^{-3}$	$\pm 5.93 \times 10^{-3}$	$\pm 6.06 \times 10^{-3}$

TABLE 7.1 – Résultats des calculs de coefficients de couplage électromécaniques. Les coefficients prépondérants sont marqués en gras. Pour les modes $(2, 0)$, $n = 1, 2, 3, 4$.

7.1.2 Collage des patches piézoélectriques

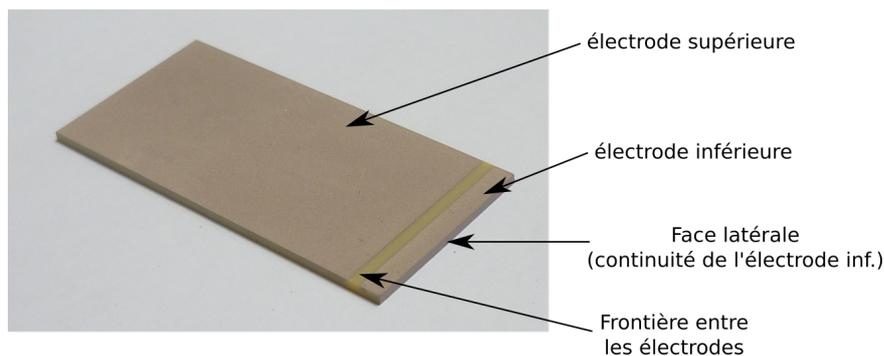


FIGURE 7.3 – Photographie d'une céramique piézoélectrique à électrode retournée.

Les céramiques commandées auprès du fabricant *PICeramic* [2] sont à **électrodes retournées** : cela signifie que l'électrode placée à la surface inférieure est reliée à une portion de la surface supérieure. La continuité du potentiel est assurée par la continuité de l'électrode sur l'une des surfaces latérales, comme le représente la figure 7.3. L'intérêt est d'assurer l'imposition d'un même potentiel de référence sur les surfaces inférieures des patches piézoélectriques. L'inconvénient potentiel est de limiter la surface efficace pour le couplage.

Ces patches sont ensuite collés, avec l'objectif de minimiser l'épaisseur de la couche de colle dans l'optique d'assurer une continuité d'un même potentiel de référence sur la plaque élastique et les électrodes inférieures des patches. Le lecteur peut se référer à [53] (section 6.1.2) pour la procédure de préparation de la partie élastique de la structure préalable au collage des patches. Pour le collage, une colle de référence *3M Scotch-Weld DP 460* est utilisée. La plaque est placée sur une surface plane, délimitée par une couche de silicone, puis recouverte par un film plastique. L'ensemble est ensuite recouvert d'un film plastique, tel que le présente la figure 7.4. Une pompe à vide permet de maintenir un contact sans glissement entre les patches et la plaque élastique.

La structure piézoélectrique obtenue après collage est représentée sur la figure 7.5 : la connexion des patches à un circuit extérieur est en pratique réalisée avec du fil de bobinage conducteur, aussi appelé "fil à wrapper", dont le contact avec les électrodes est maintenu par des soudures.

Différentes capacités sont mesurées afin de vérifier l'effet de la couche résiduelle de colle sur la conduction électrique entre la plaque et les électrodes inférieures. Un capacimètre est utilisé pour

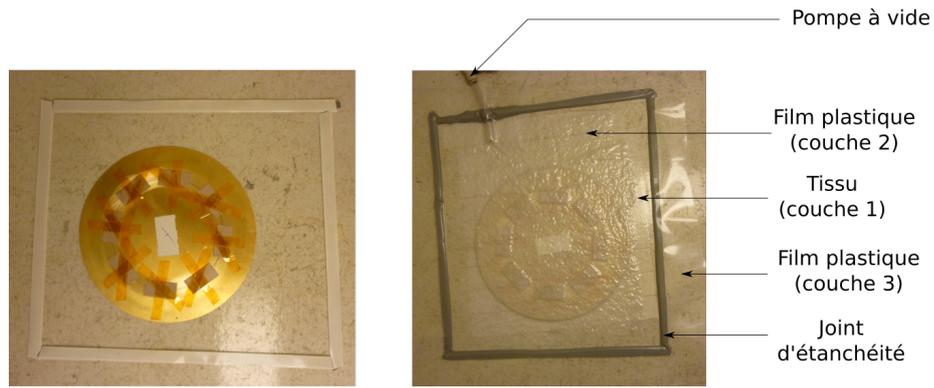


FIGURE 7.4 – Présentation du dispositif de mise sous vide pour la phase de séchage de la colle. Figure présentée avec l’aimable autorisation de Frédéric Guillerm.

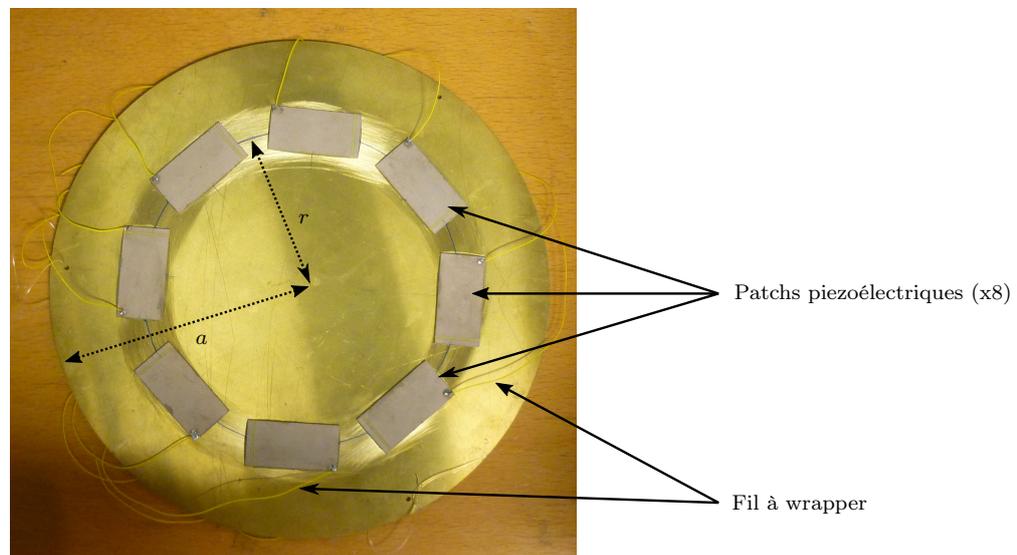


FIGURE 7.5 – Plaque piézoélectrique obtenue après collage des patches.

estimer d’une part la capacité $C_-^{(p)}$ entre l’électrode retournée et la plaque, et d’autre part la capacité $C_+^{(p)}$ entre l’électrode supérieure et la plaque. Les mesures sont effectuées à la fréquence $f = 700$ Hz et à une faible tension d’entrée. La fréquence est volontairement éloignée des résonances mécaniques, de façon à ce que le couplage piézoélectrique soit négligeable pour ces mesures. Dans le cas de l’électrode inférieure, les valeurs relevées sont moins stables et seul un ordre de grandeur est rapporté. Les capacités mesurées sont rapportées dans le tableau 7.2.

Patch p	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_-^{(p)}$	$\sim 15\mu\text{F}$	$\sim 10\mu\text{F}$	$\sim 10\mu\text{F}$	$\sim 40\mu\text{F}$	$\sim 30\mu\text{F}$	$\sim 10\mu\text{F}$	$\sim 40\mu\text{F}$	$\sim 25\mu\text{F}$
$C_+^{(p)}$	16.05 nF	15.75 nF	15.65 nF	15.8 nF	15.85 nF	15.93 nF	15.66 nF	16.1 nF

TABLE 7.2 – Mesure des capacités entre la plaque et les deux électrodes de chacun des patches.

Ces valeurs montrent que les capacités entre la plaque et les électrodes inférieures sont d'un ordre de grandeur 10^3 plus élevées que celui relevé entre les électrodes supérieures et la plaque. Cela montre que la conductivité électrique est élevée entre la plaque et les électrodes inférieures. De plus, les valeurs de $C_+^{(p)}$ des différents patches sont très proches, avec un écart maximal inférieur à 3%. Les valeurs des capacités sont donc homogènes entre les huit patches.

7.1.3 Analyse modale

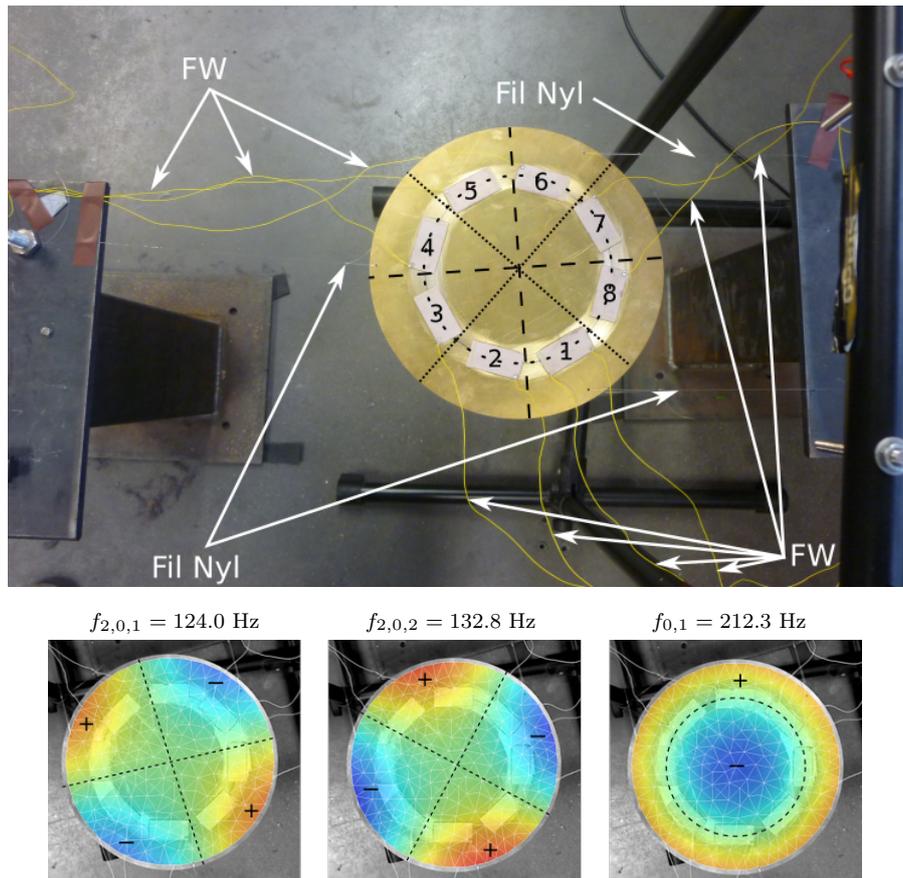


FIGURE 7.6 – Plaque piézoélectrique en conditions expérimentales libres, et déformées opérationnelles des trois principaux modes étudiés. Les rayons et cercle nœuds identifiés sont indiqués. Fil Nyl : fils de nylon permettant la suspension de la plaque et les conditions aux limites libres. FW : fil à wrapper permettant d'imposer un potentiel aux électrodes des patches piézoélectriques.

Pour cette étape et l'ensemble des mesures présentées après, l'excitation mécanique est réalisée par actionnement piézoélectrique. Pour cela, un amplificateur dédié à l'actionnement piézoélectrique (référence PZD700A-M/S) est utilisé. Afin d'identifier les déformées modales, les fonctions de réponses en fréquence sont mesurées au vibromètre laser. La plaque est placée en conditions libre à l'aide du même dispositif que celui défini dans le chapitre précédent. Les vibrations mécaniques des fils à wrapper sont atténuées par l'immobilisation d'une partie des fils sur les supports rigides avec du scotch. La plaque piézoélectrique en conditions expérimentales libres est représentée sur la figure 7.6. Cette figure montre également les déformées et fréquences des modes d'intérêt. Comme dans le cas de la plaque nue, les premiers modes identifiés sont bien les modes $(2, 0)$ et le mode axisymétrique $(0, 1)$. Les fréquences relevées sont plus élevées que celle de la plaque nue, ce qui montre que les patches ajoutent plus de raideur que de masse à la structure. Des imperfections entraînent de nouveau des écarts entre les deux modes asymétriques. Enfin, les rayons nœuds des déformées opérationnelles

du mode (2, 0) ne sont pas parfaitement alignés avec les patches piézoélectriques, contrairement aux déformées obtenues avec le modèle éléments finis.

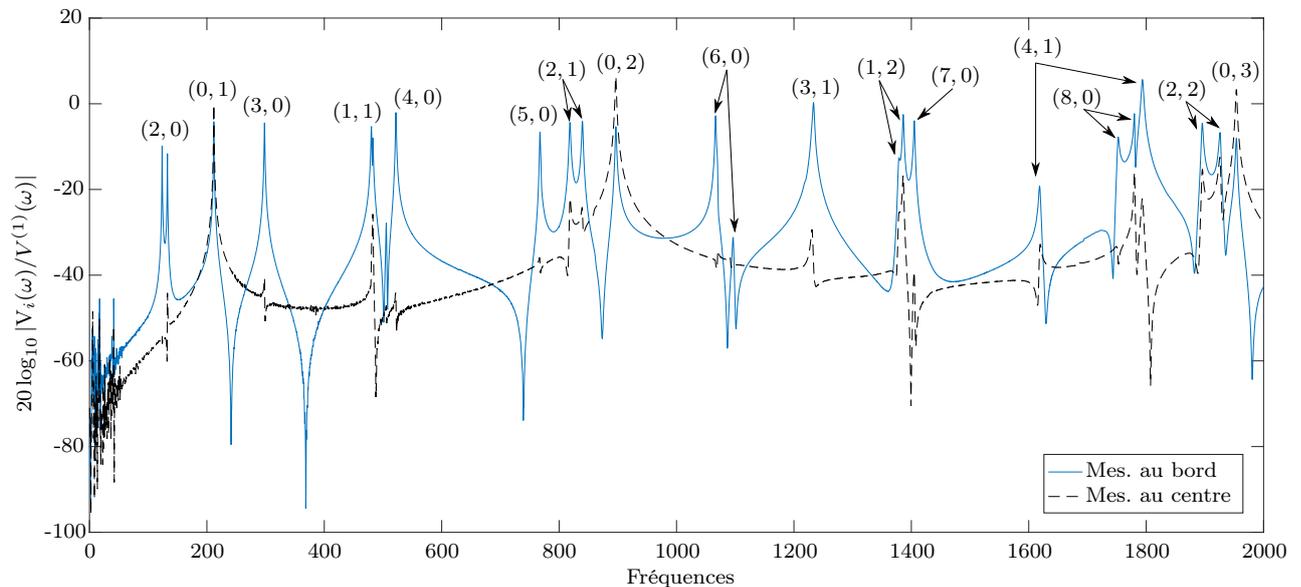


FIGURE 7.7 – Fonctions de réponse en fréquence de la plaque piézoélectrique. Réponses à un point situé sur le bord de la plaque (bleu plein) et au centre (noir pointillé). Les configurations identifiées par les déformées issues de l'analyse modale sont indiquées au-dessus des maxima d'amplitude associés aux résonances.

Les résultats jusqu'au mode (0, 2) rapportés en Annexe F montrent la conservation de la symétrie circulaire des premiers modes. La figure 7.7 présente deux fonctions de réponses issues de mesures des vitesses au vibromètre, en réponse à une tension imposée au premier patch $V^{(1)}$. Le signal d'excitation est une sinusoïde balayée en fréquences, et les deux points de mesure sont le centre et l'une des extrémités de la plaque. La mesure au centre met en évidence les modes axisymétriques. La plupart des modes sont observables sur la mesure au bord de la plaque. Les configurations sont identifiées à partir des déformées modales. La comparaison avec l'analyse modale de la plaque nue (cf. figure 6.4 avec les réponses équivalentes) confirme que la présence des patches tend à faire augmenter les fréquences des modes par un ajout de raideur. De plus, les patches ont tendance à augmenter la dissymétrie de certaines des configurations telles que (4, 1) et (8, 0) entre 1600 et 1900 Hz. Ce phénomène est cependant négligeable pour les premiers modes.

7.2 Réponse autour du mode axisymétrique (0, 1)

Cette section expose le protocole pour réaliser une mesure d'un mode non-linéaire. Les principales difficultés résident dans la mise en place du dispositif électronique nécessaire à la mesure. Quelques éléments théoriques permettant de justifier qu'un mode non-linéaire d'une structure électromécanique puisse être mesurée avec la PLL sont ensuite proposés. Les résultats obtenus sur le mode (0, 1) sont finalement présentés.

7.2.1 Dispositif expérimental

L'amplificateur spécifique à l'actionnement piézoélectrique permet d'injecter des tensions d'amplitudes élevées ($V \in [0, 700]$ Volts).

Cependant, la MicroLabBox utilisée pour l'acquisition des signaux et l'application de la boucle à verrouillage de phase ne peut pas supporter des amplitudes de tensions supérieures à 10 V. En consé-

quence, les signaux enregistrés sont atténués avec un pont diviseur : les valeurs des deux résistances branchées en série sont choisies telles que $R_1 = 680 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$. Le signal atténué s'écrit $V_m = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{in}$, le gain d'atténuation vaut donc 69.

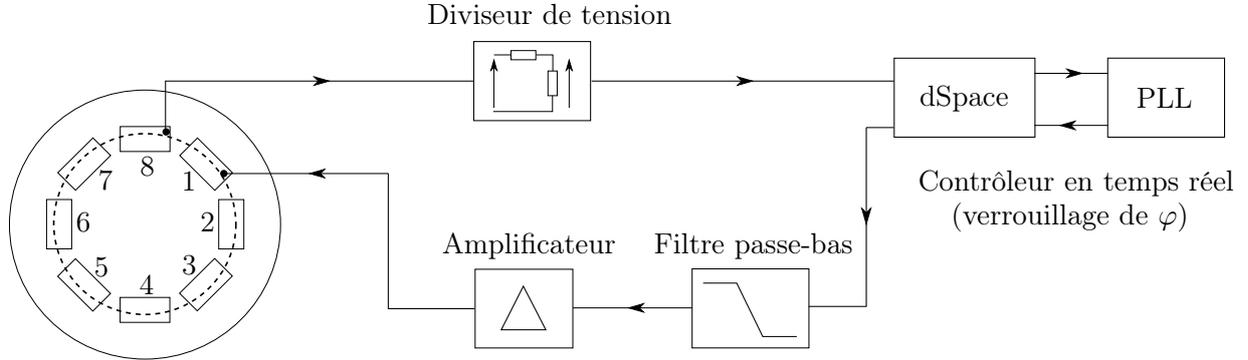


FIGURE 7.8 – Schématisation du dispositif expérimental pour la mesure de la résonance du mode (0, 1).

Par ailleurs, la conversion numérique/analogique réalisée en sortie de la MicroLabBox entraîne des discontinuités temporelles à chaque échantillon, qui génèrent potentiellement de l'énergie à hautes fréquences. Ce problème est traité par l'application d'un filtre passe-bas en sortie de la MicroLabBox. Le filtre est constitué d'un circuit RC. La valeur de résistance est choisie à $R_{lp} = 750 \text{ }\Omega$ celle de la capacité à $C_{lp} = 69 \text{ nF}$, de façon à ce que la fréquence de coupure du filtre $f_{lp} = \frac{1}{2\pi R_{lp} C_{lp}} \approx 3 \text{ kHz}$ soit très supérieure au double des fréquences d'intérêt : avec $f_{lp} \approx 3 \text{ kHz}$ par rapport à des fréquences d'intérêt inférieures à 300 Hz, le critère de Shannon est bien respecté.

Dans le cas du premier mode axisymétrique, les coefficients de couplage sont théoriquement égaux d'après le tableau 7.1. Le schéma d'activation et de détection le plus simple possible est mis en œuvre : la tension est imposée sur un unique patch ($p = 1$), tandis que la détection est réalisée avec le patch voisin ($p = 8$). La figure 7.8 schématise finalement l'ensemble du dispositif. Les procédures de mesure des réponses libres et forcées, identiques à celles mises en œuvre pour la plaque élastique, sont rappelées ici :

- pour mesurer la réponse libre, la résonance de phase est imposée, tandis que l'amplitude du signal d'excitation augmente linéairement
- pour mesurer les réponses forcées, une amplitude du signal d'excitation est fixée, la phase imposée varie autour de la résonance de phase sur un intervalle de longueur π .

7.2.2 Résonance de phase pour un système électromécanique

Afin de définir la résonance de phase dans le cadre du présent dispositif expérimental, les équations du mouvement d'un système électromécanique non-linéaire (2.176) sont considérées dans le cas d'un unique oscillateur k . Les coefficients de l'étude sont les β_{ij}^k et Γ_{ijl}^k , qui prennent implicitement en compte les effets de couplage membrane-flexion. Le système est tel qu'aucun forçage mécanique ni charge électrique n'est imposée, l'actionnement est effectué par une tension d'entrée V_a sur un ensemble de patches \mathcal{P}_a , tandis que des tensions V_m sont mesurées aux bornes d'autres patches utilisés pour la détection. Avec un amortissement modal ξ_k , le comportement du système est alors gouverné par les équations suivantes :

$$\ddot{q}_k(t) + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k(t) + \beta_{kk}^k q_k^2 + \Gamma_{kkk}^k q_k^3 = - \sum_{p \in \mathcal{P}_a} (\chi_k^{(p)} + \Theta_{kk}^{(p)} q_k) V_a^{(p)} \quad (7.2a)$$

$$C^{(p)} V_m^{(p)} - \chi_k^{(p)} q_k - \frac{1}{2} \Theta_{kk}^{(p)} q_k^2 = 0. \quad (7.2b)$$

Dans l'équation mécanique (7.2a), les termes d'actionnement direct $\chi_k^{(p)} V_a^{(p)}$ et paramétrique $\Theta_{kk}^{(p)} q_k V_a^{(p)}$ constituent l'origine de la mise en vibration mécanique. Dans un premier temps, un développement

en série de Fourier à l'ordre 1 est alors effectué sur ce système d'équations. Ce développement s'écrit :

$$q_k(t) = q_{k,c} \cos(\Omega t) + q_{k,s} \sin(\Omega t) \quad (7.3a)$$

$$V_a^{(p)}(t) = V_{a,c}^{(p)} \cos(\Omega t) + V_{a,s}^{(p)} \sin(\Omega t) \quad (7.3b)$$

$$V_m^{(p)}(t) = V_{m,c}^{(p)} \cos(\Omega t) + V_{m,s}^{(p)} \sin(\Omega t), \quad (7.3c)$$

où les $q_{k,c}$, $q_{k,s}$, $V_{a,c}^{(p)}$, $V_{a,s}^{(p)}$, $V_{m,c}^{(p)}$ et $V_{m,s}^{(p)}$ désignent les composantes harmoniques à l'ordre 1 de la coordonnée modale q_k et des tensions d'actionnement et de détection. Le cas de la détection est traité dans un premier temps : l'introduction des précédents développements dans l'expression (7.2b) entraîne :

$$\begin{aligned} C^{(p)} \left(V_{m,c}^{(p)} \cos(\Omega t) + V_{m,s}^{(p)} \sin(\Omega t) \right) - \chi_k^{(p)} \left(q_{k,c} \cos(\Omega t) + q_{k,s} \sin(\Omega t) \right) \\ - \frac{1}{2} \Theta_{kk}^{(p)} \left(\frac{q_{k,c}^2 + q_{k,s}^2}{2} + \frac{(q_{k,c}^2 - q_{k,s}^2)}{2} \cos(2\Omega t) + \frac{q_{k,c} q_{k,s}}{2} \sin(2\Omega t) \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

La détection synchrone estime les amplitudes et phases à l'ordre 1. À cet ordre, la séparation des termes en cos et sin permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C^{(p)} V_{m,c}^{(p)} - \chi_k^{(p)} q_{k,c} &= 0 \\ C^{(p)} V_{m,s}^{(p)} - \chi_k^{(p)} q_{k,s} &= 0. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat montre que **la tension mesurée V_m est en phase avec la coordonnée modale considérée q_k** , et ce même en prenant en compte les non-linéarités géométriques.

Le cas de l'actionnement est maintenant discuté. Pour cela, la résonance de phase, définie comme la quadrature en phase entre la coordonnées modale et l'excitation mécanique dans la section 6.1, est cette fois-ci considérée entre la coordonnée modale et l'actionnement piézoélectrique direct. Ainsi, avec un signal d'actionnement sinusoïdal

$$V_a^{(p)}(t) = \bar{V}_a \sin(\Omega t), \quad (7.6)$$

le système est en résonance de phase avec l'oscillateur considéré lorsque :

$$q_k(t) = \bar{q}_k \cos(\Omega t). \quad (7.7)$$

L'introduction des expressions (7.6) et (7.7) dans l'équation (7.2a) conduit à :

$$\begin{aligned} \left(-\Omega^2 + \omega_k^2 \right) \cos(\Omega t) \bar{q}_k - 2\xi_k \omega_k \Omega \sin(\Omega t) \bar{q}_k \\ + \beta_{kk}^k \left(\frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2} \right) (\bar{q}_k)^2 + \Gamma_{kkk}^k (\bar{q}_k)^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\Omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\Omega t) \right) \\ = - \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \chi_k^{(p)} \right) \bar{V}_a \sin(\Omega t) - \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \Theta_{kk}^{(p)} \bar{V}_a \bar{q}_k \right) \frac{\sin(2\Omega t)}{2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Le regroupement des termes à l'ordre 1 entraîne que :

$$\left(-\Omega^2 + \omega_k^2 \right) \bar{q}_k + \frac{3\Gamma_{kkk}^k}{4} (\bar{q}_k)^3 = 0 \quad (7.9a)$$

$$2\xi_k \omega_k \Omega = \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \chi_k^{(p)} \right) \bar{V}_a \quad (7.9b)$$

Ce système obtenu est équivalent aux équations (6.11), associées au comportement d'une structure mécanique. En particulier, les termes non-linéaires interviennent avec un unique terme cubique, et

l'amortissement est ici également compensé par le forçage à la résonance de phase. En d'autres termes, la boucle à verrouillage de phase utilisée dans le précédent chapitre peut être employée de la même manière avec la plaque piézoélectrique pour mesurer les modes non-linéaires.

7.2.3 Réponses libre et forcées

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 7.9. L'articulation des réponses forcées autour de la réponse libre est une nouvelle fois observée. Par ailleurs, **à de faibles forçages, la réponse libre présente un comportement assouplissant**. Ce phénomène non prédit par les modèles a été observé dans d'autres contextes d'étude sur des systèmes électromécaniques non-linéaires, notamment pour la récupération d'énergie. Il a été établi que des non-linéarités matérielles intervenant dans la loi de comportement piézoélectrique peuvent être à l'origine d'un tel comportement assouplissant [141, 172, 171]. À des amplitudes plus élevées, la courbure devient raidissante conformément au comportement attendu, associé à des non-linéarités géométriques pour des structures planes.

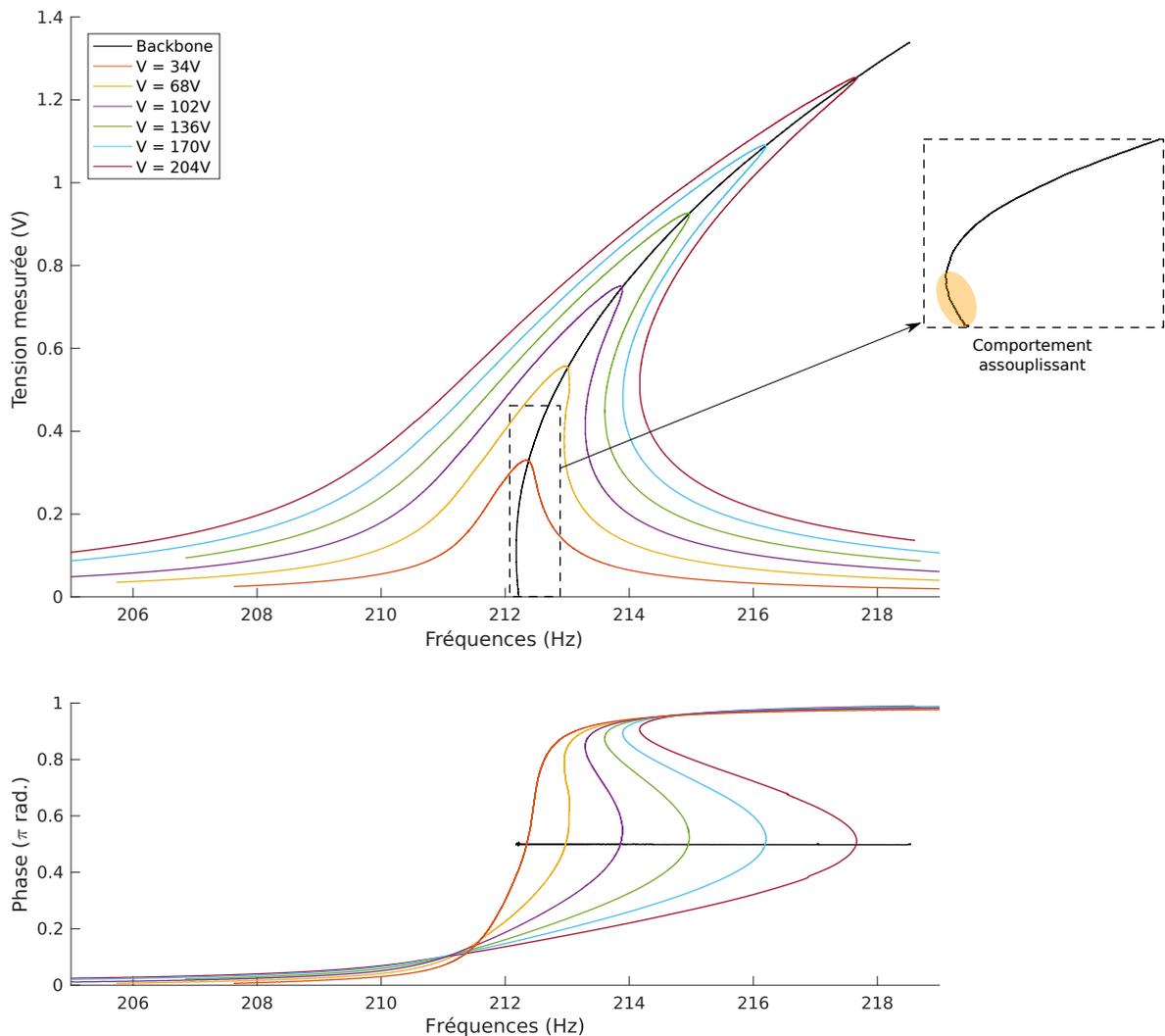


FIGURE 7.9 – Amplitudes des réponses libre (en noir) et forcées (en couleurs) autour du mode (0, 1). Le détail de la réponse libre à amplitudes modérées est présenté. Les valeurs des tensions d'excitations données sont celles estimées en sortie de l'amplificateur. Les résultats sont les tensions en sortie du pont diviseur.

La largeur de bande et donc l'amortissement sont plus élevés, en comparaison avec le même mode de la plaque élastique. Les phases des réponses forcées sont bien monotones et correspondent bien à celles d'un oscillateur de Duffing. Ces mesures confirment que le contrôle de la phase par une PLL est un outil particulièrement adapté pour mesurer les réponses non-linéaires unimodales des systèmes électro-mécaniques avec des non-linéarités géométriques.

7.3 Réponse autour du mode asymétrique (2, 0, 1)

De la même manière que dans la section 6.4.2, l'interaction entre les deux modes asymétriques que l'on souhaite faire entrer en résonance 1:1 est maintenant étudiée. Les dénominations "mode A" et "mode B" pour désigner les modes (2, 0, 1) et (2, 0, 2) sont également employées pour cette étude.

7.3.1 Dispositif expérimental

La difficulté du système pleinement intégré réside dans la discrimination des modes. On cherche d'une part à actionner le mode A sans solliciter le mode B à partir des tensions aux patches. Cet objectif est recherché alors que ces deux modes doivent être rapprochés le plus possible en fréquences pour favoriser l'émergence d'une résonance interne 1:1.

(a) Rapprochement des fréquences des deux modes

Afin de diminuer l'écart en fréquence entre les modes A et B et de manière identique au protocole de la section 6.4.2, des aimants sont placés sur les nœuds du mode A comme masses additionnelles afin de diminuer la fréquence du mode B. Pour ne pas briser la symétrie des modes, quatre paires d'aimants de 3.5 g chacune sont disposées sur les quatre rayons nodaux, à proximité des bords de la plaque. Une seconde analyse modale est effectuée après la pose des masses additionnelles, dont les principaux résultats sont rapportés dans le tableau 7.3 : ceux-ci montrent que les fréquences des modes A et B se sont rapprochées, l'écart finalement obtenu vaut $\Delta f = 1.9$ Hz.

	Mode A : f_1 [Hz]	Mode B : f_2 [Hz]	$\Delta f = f_2 - f_1$ [Hz]
Plaque suspendue	124.0	132.8	8.8
Plaque + 4 masses add.	122.9	124.8	1.9

TABLE 7.3 – Comparaison des fréquences de résonances des deux modes, avec et sans masses additionnelles.

(b) Pondérations des tensions mesurées

La difficulté intrinsèque au système pleinement intégré est d'obtenir des mesures caractéristiques des coordonnées modales des oscillateurs q_k . Une procédure s'appuie sur les combinaisons des tensions mesurés aux bornes de deux patches voisins. Les patches utilisés pour la mesure sont en l'occurrence les patches $p = 3, 4$. Ces signaux de mesure s'écrivent :

$$V^{(3)} = 1/C^{(3)}(\chi_A^{(3)} q_A + \chi_B^{(3)} q_B) \quad (7.10a)$$

$$V^{(4)} = 1/C^{(4)}(\chi_A^{(4)} q_A + \chi_B^{(4)} q_B) \quad (7.10b)$$

où les q_A, q_B désignent les coordonnées modales des modes A et B et $\chi_A^{(p)}$ et $\chi_B^{(p)}$ les coefficients de couplage linéaires des modes A, B et associés aux patches p . La discrimination des modes s'appuie sur le calcul et la différence de ces deux signaux, avec une pondération appliquée sur l'un des signaux $V^{(3)}$ ou $V^{(4)}$ pour chacune des opérations. En particulier, avec la disposition des rayons nodaux sur

les déformées présentées sur la figure 7.6, il existe des pondérations α_3 et α_4 telles que

$$\chi_B^{(3)} + \alpha_4 \chi_B^{(4)} = \epsilon_B \quad (7.11a)$$

$$\alpha_3 \chi_A^{(3)} - \chi_A^{(4)} = \epsilon_A \quad (7.11b)$$

où (ϵ_A, ϵ_B) sont des grandeurs à minimiser, de sorte à pouvoir être négligées devant $\chi_A^{(p)}$ et $\chi_B^{(p)} \forall p$. Dans l'hypothèse où les capacités des patchs piézoélectriques sont égales et valent C , les sommes et différences pondérées s'écrivent :

$$V_{m1} \approx (1/C)(\chi_A^{(3)} + \alpha_4 \chi_A^{(4)})q_A \quad (7.12a)$$

$$V_{m2} \approx (1/C)(\alpha_3 \chi_B^{(3)} - \chi_B^{(4)})q_B \quad (7.12b)$$

Les valeurs des pondérations (α_3, α_4) sont obtenues par dichotomie, par analyse des fonctions de réponses en fréquence entre les signaux de mesures et un actionnement réalisé au patch $p = 1$. Des fonctions de transfert par la méthode des sinusoides balayées pas à pas sont mesurées pour différentes pondérations. L'effet de ces coefficients (α_3, α_4) sur les mesures V_{m1} et V_{m2} est illustré sur la figure 7.10. Le choix des coefficients optimaux repose sur l'analyse de ces courbes d'amplitudes et de phases. En pratique, le choix de la pondération repose principalement sur les courbes des phases : le signe de la correction à apporter est directement lisible suivant la forme de la bosse secondaire. À l'inverse, la courbe d'amplitude fait apparaître un pic secondaire dont la forme est indépendante du signe de la correction à effectuer.

(c) Pondérations des tensions d'entrée pour le forçage du mode A

Afin d'injecter assez d'énergie au système, deux paires de patchs piézoélectriques voisins deux à deux $p = 1, 2, 5, 6$ sont utilisées pour l'actionnement. Un branchement en parallèle implique d'imposer une tension identique V_{in} aux bornes des quatre patchs. Le signal d'actionnement du mode k noté V_k est alors défini par :

$$V_k = - \left(\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \chi_k^{(p)} \right) V_{in}. \quad (7.13)$$

Une pondération peut être appliquée aux tensions d'actionnement, ce qui s'écrit :

$$V_k = - \left(\alpha_1 \chi_k^{(1)} + \alpha_2 \chi_k^{(2)} + \alpha_5 \chi_k^{(5)} + \alpha_6 \chi_k^{(6)} \right) V_{in}. \quad (7.14)$$

De manière analogue à la procédure mise en œuvre pour la mesure, les tensions d'actionnement sont pondérées pour deux des quatre patchs, l'un de chacune des paires $p = 1, 2$ et $p = 5, 6$. En pratique, les gains α sont réalisés expérimentalement avec deux diviseurs de tension, avec des résistances en série notées (R'_1, R'_2) , ce qui entraîne que $\alpha = \frac{R'_1}{R'_1 + R'_2} < 1$ pour chacune des pondérations. Dans l'objectif de minimiser l'activation du mode B, et puisque

$$|\chi_B^{(5)}| > |\chi_B^{(6)}| \quad \text{et} \quad |\chi_B^{(1)}| > |\chi_B^{(2)}|, \quad (7.15)$$

alors les pondérations diminuant les tensions d'actionnement sont appliqués sur les patchs $p = 1, 5$. Les signaux d'actionnement (V_A, V_B) des modes A et B s'écrivent donc

$$V_A = - \left(\alpha_1 \chi_A^{(1)} + \chi_A^{(2)} + \alpha_5 \chi_A^{(5)} + \chi_A^{(6)} \right) V_{in} \quad (7.16a)$$

$$V_B = - \left(\alpha_1 \chi_B^{(1)} + \chi_B^{(2)} + \alpha_5 \chi_B^{(5)} + \chi_B^{(6)} \right) V_{in}. \quad (7.16b)$$

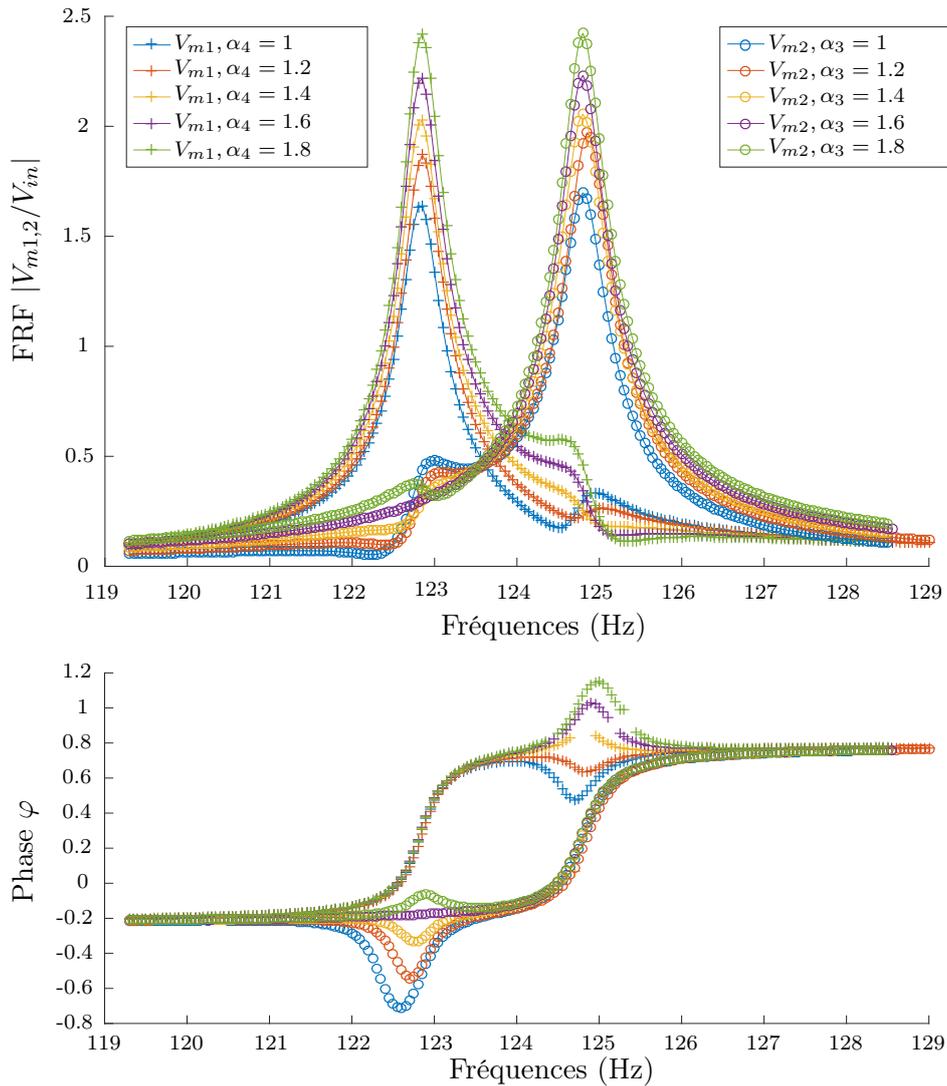


FIGURE 7.10 – Amplitude et phases des fonctions de réponses en fréquence obtenues par balayage fréquentiel pas à pas, pour la détermination des coefficients de pondération en mesure α_3 et α_4 .

L'objectif est alors de minimiser le paramètre d'actionnement ϵ_a défini par :

$$\left(\alpha_1 \chi_B^{(1)} + \chi_B^{(2)} + \alpha_5 \chi_B^{(5)} + \chi_B^{(6)} \right) = \epsilon_a \quad (7.17)$$

Pour ces manipulations, la première résistance vaut $R'_1 = 100 \text{ k}\Omega$, tandis que la valeur de la résistance R'_2 est ajustée à l'aide d'un potentiomètre. Le choix des coefficients (α_1, α_5) est effectué avec la même procédure que celle mise en œuvre pour les signaux de mesure : une dichotomie des pondérations est effectuée à partir des courbes d'amplitude et de phases des fonctions de transfert entre la tension mesurée à un patch, ici $p = 3$, en réponse à l'excitation V_A .

(d) Synthèse

Les valeurs des pondérations obtenues sont $\alpha_1 = 0.7812$, $\alpha_3 = 1.83$, $\alpha_4 = 1.25$ et $\alpha_5 = 0.8333$. Au cours des expériences, la valeur de cette pondération a progressivement augmenté, ce qui pourrait être une conséquence de la fatigue des céramiques piézoélectriques, qui sont régulièrement soumises

à des tensions élevées. Les résultats des deux procédures de pondération, en détection et en mesure, sont représentés sur la figure 7.11. Cette figure montre que :

- la pondération des tensions mesurées en sortie permet de dissocier efficacement l'actionnement de chacun des modes. La tension V_{m1} (resp. V_{m2}) ne mesure que très faiblement le mode B (resp. mode A), pour des niveaux de forçage comparables.
- la pondération des tensions de forçage excite principalement le mode A, conformément à l'effet recherché. La discrimination est cependant moins bien réalisée, en comparaison avec les résultats obtenus pour la détection.

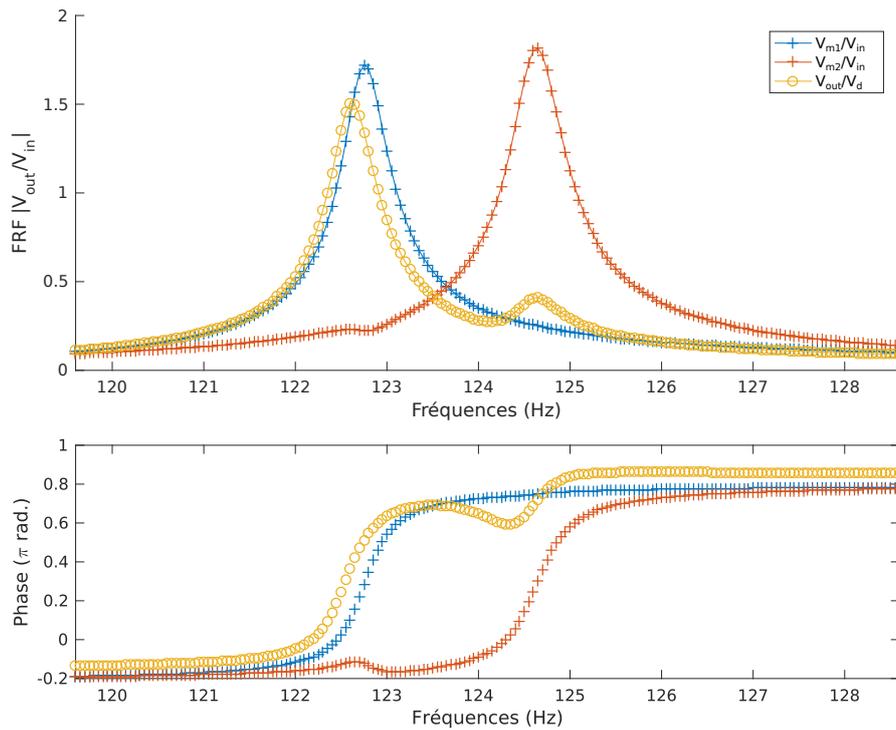


FIGURE 7.11 – Fonction de réponse en fréquences par la méthode de balayage en fréquence pas à pas, avec de faibles tensions d'excitation pour obtenir le régime linéaire. Les tensions pondérées de mesure V_m sont tracées en bleu et orange. La tension d'actionnement tracée en jaune est pondérée pour faciliter la lecture des courbes.

L'ensemble du dispositif est finalement schématisé sur la figure 7.12. Celui-ci est utilisé pour les mesures des réponses non-linéaires, qui font l'objet de la section suivante.

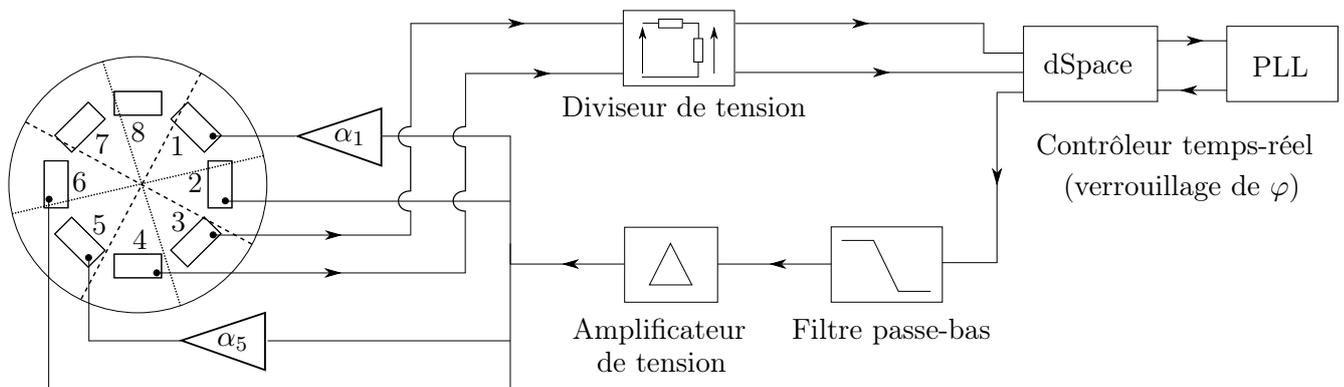


FIGURE 7.12 – Schématisation du dispositif expérimental pour la mesure de la résonance du mode $(2, 0)$.

7.3.2 Réponse libre

La quadrature de phase est tout d'abord imposée sur V_{m1} , avec une augmentation de l'amplitude d'actionnement linéaire dans le temps. Les tensions de mesure V_{m1} et V_{m2} obtenues sont présentées sur la figure 7.13 : comme dans le cas du mode (0, 1), un effet assouplissant associé à la zone orange est relevé pour les faibles amplitudes de réponse (jusqu'à 0.2 V). Pour des amplitudes plus élevées, l'effet raidissant est prédominant.

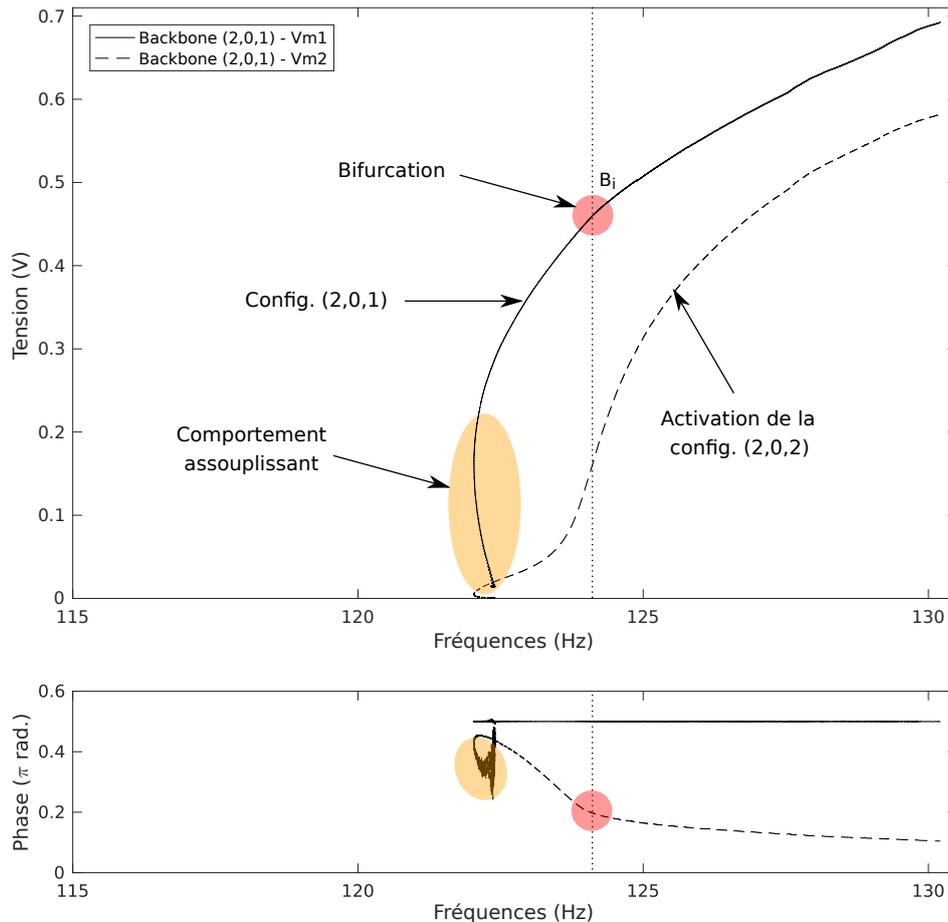


FIGURE 7.13 – Amplitudes et phases des réponses libres associées aux coordonnées modales q_1 (en traits pleins) et q_2 (en traits pointillés). La fréquence de la bifurcation est indiquée en traits pointillés fins. Le point de bifurcation identifié est noté B_i .

L'activation du mode B est visible à partir d'un point probablement associé à une bifurcation fourche imparfaite et l'émergence d'un mode elliptique couplé, tel qu'expliqué dans le chapitre précédent. Plusieurs critères attestent l'apparition de ce mode couplé, le phénomène est moins visible que dans le cas de la plaque élastique. Ces critères, qui nécessitent d'être discutés, sont les suivants :

- un changement de courbure dans la réponse en amplitude est observable, celui-ci est cependant plus léger que pour la plaque élastique
- l'augmentation de la tension de mesure V_{m2} est plus rapide au niveau du point identifié comme la bifurcation notée B_i . D'après la réponse en amplitude, le mode B n'est pas du tout activé lorsque le comportement du système est assouplissant, mais le devient progressivement lorsque le comportement est raidissant. Son activation est finalement accélérée au niveau de la bifurcation. Ce couplage progressif entre les modes n'était pas relevé dans le cas de la plaque élastique

- la phase du signal V_{m2} diminue rapidement entre la fin de la zone orange et la bifurcation. Une stabilisation de la phase est relevée après la bifurcation, bien qu'une légère diminution soit encore observable.

L'apparition d'un mode couplé est donc attestée avec ces mesures. Plusieurs différences avec les résultats obtenus sur la plaque élastique sont cependant observées. Le mode B est activé avant la bifurcation, dès que le comportement du système est raidissant. De plus, la phase du mode B activé par résonance interne n'est pas précisément en quadrature avec celui du mode A après la bifurcation. L'imperfection dans l'actionnement relevé sur la figure 7.11 est proposé comme première explication.

7.3.3 Réponses forcées

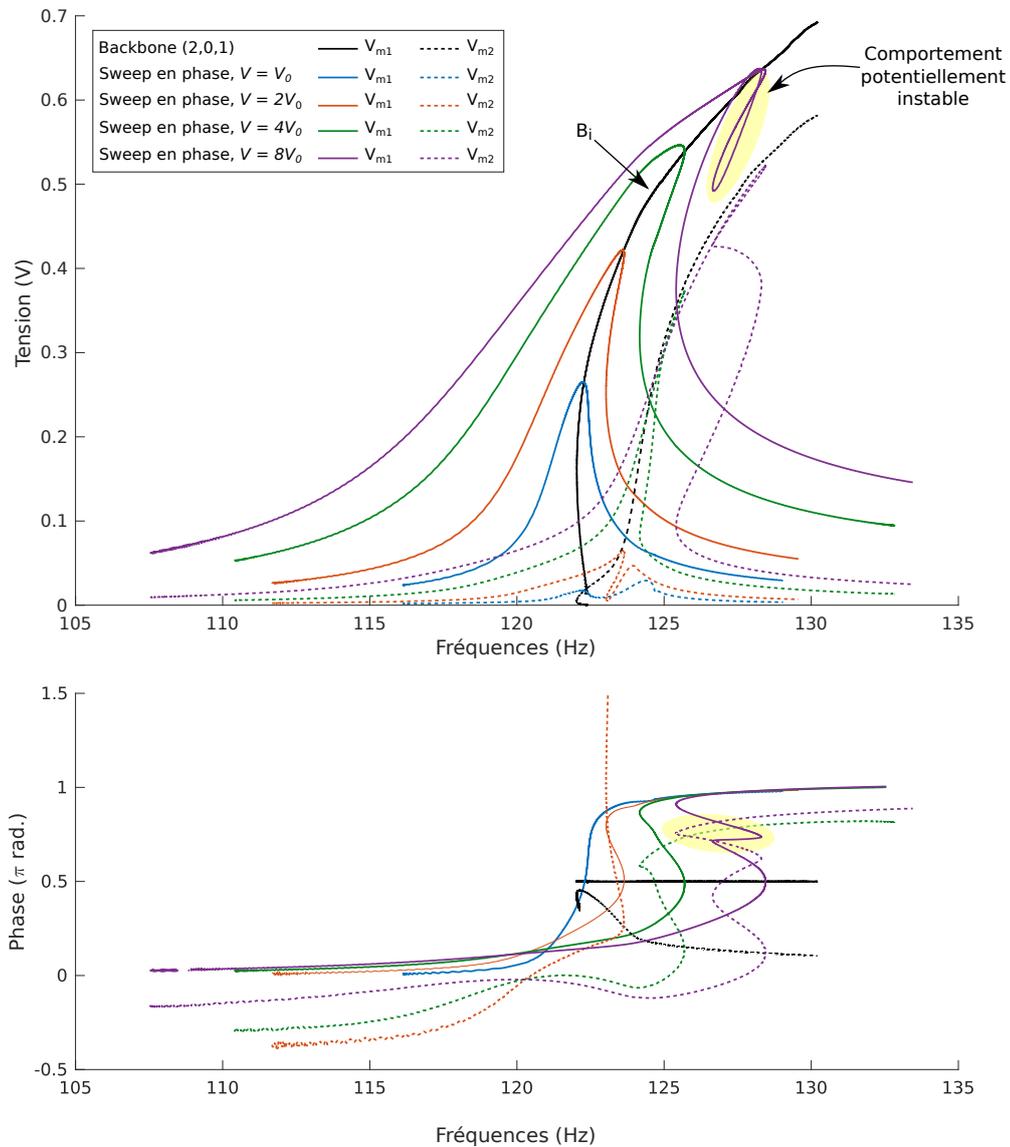


FIGURE 7.14 – Amplitudes et phases des réponses libres et forcées associées aux coordonnées modales q_1 (en traits pleins) et q_2 (en traits pointillés). Une zone instable observée sur les réponses forcées sont indiquées.

Une variation de la phase avec le maintien d'une amplitude d'actionnement constante est maintenant imposée au système. Les résultats sont présentés sur la figure 7.14. Ceux-ci montrent que

les réponses forcées s'articulent bien autour de la réponse libre. De plus, pour les deux réponses à faibles amplitudes d'actionnement ($V = V_0$ en bleu et $V = 2V_0$ en orange), la réponse du système est unimodal car l'amplitude de V_{m2} reste petite. La réponse forcée pour $V = 4V_0$ (en vert) présente un régime couplé : la résonance 1:1 est ici attestée. Pour une amplitude de forçage encore supérieure ($V = 8V_0$ en violet), une boucle est observée sur la courbe en amplitude après la résonance de phase, il s'agit de la zone jaune de la figure 7.14. Une discontinuité dans la réponse de la phase est associée à la boucle observée sur la réponse en amplitude. En pratique, il a été nécessaire d'adapter les gains de la boucle de contrôle pour pouvoir stabiliser la réponse dans cette zone. On peut penser qu'elle correspond à un régime instable du système.

La courbe d'amplitude montre également que l'activation du mode B lors de la réponse forcée (courbe V_{m2} en vert et violet) présente une largeur de bande extrêmement faible : ce comportement a été mesuré dans le cas de la plaque élastique (d'après les figures 11 et 14 de la section 6.4.2). Dans le cas du forçage le plus élevé ($V = 8V_0$ en violet), la largeur de bande devient élevée après la discontinuité de la phase. Ceci qui pourrait correspondre à la réponse forcée du mode B. Pour ces mesures, la stabilité du système a été maintenue en adaptant les gains proportionnels et intégral au cours de la mesure. Pour les mesures, les gains initiaux valent $K_i = 100$ et $K_p = 3$ pour les réponses libres et les points initiaux et terminaux des réponses forcées. Au niveau des zones instables indiquées sur la figures 7.14, les gains valent $K_i = 1000$ et $K_p = 40$. Ces gains ont été progressivement modifiés au cours de la mesure.

7.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, la boucle à verrouillage de phase est mise en œuvre sur un système électromécanique pour mesurer ses modes non-linéaires et ses réponses forcées. Une plaque avec une disposition spécifique de huit patchs piézoélectriques a été spécifiquement conçue pour ces expériences. Un calcul préliminaire aux mesures a permis de montrer qu'un contrôle de la phase réalisé de manière identique au cas de la plaque élastique permet aussi de mesurer les modes non-linéaires. Avec une démarche identique à celle suivie pour la plaque élastique, les réponses non-linéaires libre et forcées sont d'abord mesurées dans un cas unimodal (le mode $(0, 1)$), puis mesurées autour du premier des deux modes asymétriques $(2, 0)$. Ces dernières mesures ont permis de mettre en évidence l'émergence d'un régime couplé associé à la résonance interne 1:1 entre les deux oscillateurs. Un comportement assouplissant du système est relevé à des amplitudes de vibration modérées. L'origine de ce comportement reste inconnue à l'heure actuelle, bien que d'autres études aient pu expliquer cette observation par la prise en compte de non-linéarités matérielles au niveau de la loi de comportement piézoélectrique.

Une difficulté majeure liée à l'usage d'un système pleinement intégré réside dans la discrimination des composantes modales recherchées. Cette discrimination est recherchée dans les signaux d'actionnement et de détection. Bien que la résonance interne ait pu être établie, le comportement du système en régime forcé présente un comportement à l'heure actuelle inexplicable par les modèles existants. Une étude plus détaillée serait nécessaire pour confirmer l'origine du comportement observé aux amplitudes de forçage les plus élevées. Ce comportement pourrait être dû à l'imperfection relevée lors la discrimination des modes pour les signaux en actionnement. Des changements de température des patchs (qui augmente avec l'amplitude des vibrations et plus généralement au cours de différentes mesures) ainsi que des non-linéarités matérielles (intervenant dans la loi de comportement piézoélectrique) sont d'autres explications qui peuvent expliquer que les résultats obtenus avec la plaque piézoélectrique aient été plus difficiles à analyser que ceux obtenus avec la plaque élastique.

Conclusions générales

Conclusions

Ce travail s'intègre dans une démarche de développement de modèles simples pour prédire et simuler la dynamique non-linéaire complexe de structures minces et piézoélectriques. Les simulations réalisées ont mis en évidence les phénomènes de résonance interne. Ces phénomènes ont également fait l'objet d'une caractérisation expérimentale.

En premier lieu, une formulation éléments finis originale pour modéliser les structures minces piézoélectriques et comprenant des non-linéarités géométriques a été proposée (cf. équations (2.154)). Une procédure de réduction de modèle fondée sur un développement modal a ensuite été mise en œuvre. Cette procédure décrite dans la section 2.3.2(c) a abouti aux expressions de différents coefficients du modèle réduit. Ces coefficients quantifient les différents effets physiques compris dans le modèle. La formulation proposée écrit de manière sommative ces différents effets, ce qui a permis de définir une démarche telle que les coefficients du modèle réduit soient calculés suivant différentes étapes.

Les estimations des coefficients du modèle réduit ont été effectuées avec des méthodes non-intrusives. Ces approches s'appuient sur l'emploi de codes de calcul éléments finis du commerce sans rentrer dans les détails calculatoires et de l'implémentation informatique des codes existants. Ces méthodes étaient jusqu'ici utilisées pour simuler la dynamique non-linéaire de structures élastiques et n'avaient pas encore fait l'objet d'une validation par comparaison avec des coefficients de référence, en particulier des coefficients issus de modèles analytiques. Une telle validation a été réalisée dans le chapitre 4 pour l'une de ces méthodes, appliquée à des structures élastiques. Il s'agit de la méthode STEP, qui constitue l'une des méthodes pionnières et des plus simples à mettre en œuvre parmi les approches non-intrusives. Celle-ci est notamment caractérisée par l'imposition de champs de déplacement et l'évaluation de réponses non-linéaires, permettant ainsi d'éviter une procédure de prédiction-correction généralement employée pour résoudre des systèmes non-linéaires. La validation proposée a permis de discuter la sensibilité de la méthode STEP aux paramètres numériques liés à son utilisation. La sensibilité aux amplitudes de déplacements imposés est notamment mise en évidence sur la figure 3 du chapitre 4.

Toujours dans le cas de structures élastiques, des simulations dynamiques ont été réalisées par continuation de solutions périodiques. La procédure mise en œuvre s'appuie sur l'utilisation de la méthode asymptotique numérique couplée à la méthode d'équilibrage harmonique. Les solutions calculées avec cette procédure sont obtenues directement dans le domaine fréquentiel. La convergence des solutions avec le nombre d'harmoniques et surtout avec le nombre de modes a ainsi pu être établie. Il a été montré que la réduction du problème à un seul mode linéaire et trois harmoniques pouvait suffire pour simuler correctement les vibrations non-linéaires pour des amplitudes de vibrations pouvant atteindre l'épaisseur (cf. figures 14 du chapitre 4). Plus globalement, l'ensemble de la procédure s'est révélée robuste et efficace pour prédire des phénomènes non-linéaires autour des résonances des systèmes étudiés. Des diagrammes fréquences-énergie permettent de caractériser le comportement non-linéaire pour l'ensemble des basses fréquences (cf. figures 8 et 9 du chapitre 4). En particulier, les phénomènes de résonance interne sont précisément mis en évidence dans les simulations.

La méthode STEP a ensuite été étendue au cas des structures piézoélectriques à partir de la formulation éléments finis originale. La validation du calcul des coefficients de couplage électromécanique linéaire a également été attestée avec les résultats des sections 5.2.5 et 5.2.6. Cette nouvelle approche constitue une alternative au calcul des facteurs de couplage électromécanique effectifs qui est actuellement l'outil de référence pour quantifier le couplage électromécanique modal. De plus, la méthode proposée permet de calculer directement les coefficients de couplage sans l'approximation liée à la troncature modale.

Dans le cadre de structures munies de patches piézoélectriques, comportant donc une stratification multi-matériaux, la stratégie proposée se fonde sur des éléments finis tri-dimensionnels. Dans ce cas, des difficultés intrinsèques à ces éléments ont été rencontrés et il n'a pas été possible de mener à bien le calcul des coefficients des termes non-linéaires (géométriques et électromécaniques). Des écarts systématiques ont notamment été constatés pour des coefficients non-linéaires élastiques par

rapport à des valeurs de référence. La sensibilité des coefficients non-linéaire au coefficient de Poisson a été notamment caractérisée sur la figure 5.10, une étude approfondie est nécessaire pour identifier l'origine de ces écarts. Des solutions ont été proposées pour surmonter ces difficultés et retrouver les coefficients de référence.

Dans un second temps, une démarche expérimentale a été entreprise pour étudier en détail des résonances internes 1:1 dans une plaque élastique et dans une plaque piézoélectrique. Dans les deux cas, les plaques sont circulaires et la résonance interne a été mesurée entre deux modes asymétriques. Les mesures sont effectuées avec une méthode de continuation expérimentale de solutions périodiques fondées un contrôle de la phase entre les signaux d'excitation et de mesure. Des consignes particulières de phase permettent de mesurer les modes non-linéaires (équivalents aux réponses libres conservatives du système) ainsi que les réponses forcées qui s'articulent autour des modes non-linéaires (cf figures 6.7).

Dans le cas de la plaque élastique, les observations expérimentales sont interprétées à partir d'un cadre théorique défini par des résultats analytiques. Ce cadre théorique permet notamment de prédire les schémas de bifurcation des solutions et les résonances internes associées. La figure 11 du chapitre 6 met en évidence un régime couplé associé à la résonance interne 1:1, avec l'activation du second mode asymétrique à partir du premier. Les résultats expérimentaux sont très bien corrélés aux solutions théoriques. Une procédure de recalage entre les mesures et les résultats théoriques a permis d'identifier les coefficients non-linéaires du système expérimental.

Une plaque piézoélectrique originale a été conçue spécialement pour cette étude. Le forçage mécanique et les mesures des vibrations ont été effectués par actionnement et détection piézoélectriques, le système est donc pleinement intégré. La géométrie circulaire a été conservée, et la disposition des patches piézoélectriques a permis de conserver la symétrie de révolution pour certains modes asymétriques à diamètres nodaux et les modes axisymétriques à cercles nodaux (cf. figure 7.6 et l'annexe F). Les modes non-linéaires sont donc mesurés autour des mêmes modes que la plaque circulaire élastique. Une différence notable réside dans le comportement des modes non-linéaires, assouplissant à de faibles amplitudes puis raidissant pour de plus grandes amplitudes (cf figure 7.9). À l'heure actuelle, ce comportement n'est pas prédit par les simulations. Pour établir l'émergence d'un régime couplé associé à la résonance 1:1, une procédure similaire au cas de la plaque élastique a été mise en œuvre, et a abouti à des résultats comparables, présentés sur les figures 7.13 et 7.14.

Dans les deux cas, des instabilités du systèmes de contrôle de la phase sont observées sur les mesures de modes asymétriques. Ces instabilités sont liées aux mesures des résonances internes.

Perspectives

Une première perspective concerne les modèles réduits modaux. À court terme, de plus amples investigations sur la méthode STEP pourraient être menées. Les coefficients piézoélectriques non-linéaires doivent être calculés avec la méthode STEP puis validés afin de compléter les modèles. Cela implique d'expliquer et de résoudre complètement le problème rencontré avec les éléments finis tri-dimensionnels. Une loi pour caractériser les écarts a été proposée. Celle-ci montre une sensibilité des coefficients non-linéaires à l'effet Poisson et nécessite une étude approfondie pour être justifiée. Des pistes de résolution prometteuses ont été avancées pour surmonter ces difficultés. En particulier, imposer les déplacements sur une partie interne des nœuds d'un maillage semble une procédure pertinente. Si les déplacements sont imposés uniquement sur les degrés de liberté transverses, l'effet du couplage membrane-flexion est implicitement pris en compte dans les coefficients calculés. De plus amples développements sont également nécessaires pour justifier les bons résultats obtenus avec ces procédures. Celles-ci pourront alors être testées sur des structures plus complexes qui n'ont pas été abordées. Les cas étudiés dans cette thèse concernent des structures planes, pour lesquelles une condensation statique des effets de membrane permet de simplifier les calculs. Une investigation pourra être entreprise sur des structures courbées (arches ou coques) qui présentent des effets de

couplage membrane-flexion dans le cas linéaire. Des tests sur des structures stratifiées, qui peuvent présenter les mêmes effets, pourront également être entrepris. L'élargissement de méthodes non-intrusives pour de plus larges applications telles que les MEMS ou des applications industrielles ne sera possible que lorsque des validations pour de telles structures auront été établies.

Une seconde perspective concerne les investigations expérimentales. Dans un premier temps, une étude pourrait être entreprise pour expliquer le comportement assouplissant observé à de faibles amplitudes pour des structures piézoélectriques. À partir d'autres études existantes, on peut formuler l'hypothèse que ce comportement s'explique par des non-linéarités matérielles avec les matériaux piézoélectriques. Une investigation spécifique est nécessaire pour vérifier cette hypothèse. Dans un second temps, il serait intéressant d'étudier en détail le comportement de la boucle à verrouillage de phase dans le cas de résonances de modes non-linéaires couplés par des résonances internes. Il est possible que dans certains de ces cas, la phase du système ne soit plus monotone, ce qui est incompatible avec les contrôles actuellement appliqués. Une perspective naturelle est d'implémenter des évolutions de phases non monotones. Cela nécessite cependant de prédire précisément ces évolutions pour les systèmes non-linéaires étudiés. Cette étape ne pourra être envisagée qu'après une analyse fine des simulations de systèmes d'oscillateurs couplés et en résonance interne, avec une attention particulière sur les évolutions des phases de ces oscillateurs. À partir de ces analyses seulement, on pourra envisager des évolutions à la version actuelle du système de boucle à verrouillage de phase. Ces résultats sont conditionnés par des simulations précises, robustes et prédictives. Ces raisonnements nous ramènent donc à la problématique de la modélisation.

Une dernière perspective concerne l'utilisation des non-linéarités pour améliorer les performances des systèmes électromécaniques vibrants. L'introduction de ce manuscrit a présenté plusieurs démarches possibles applicables aux microsystèmes (M/NEMS), au contrôle des vibrations et à la récupération d'énergie. L'utilisation de couplages modaux provoqués par l'accord de fréquences propres apparaît comme une voie prometteuse qui reste à approfondir. En particulier, la réduction du bruit de phase par l'obtention d'un régime couplé et de résonances internes apparaît comme une suite naturelle à l'étude expérimentale réalisée dans ces travaux de thèse. Les résonances internes 1:1 mesurées sur les modes asymétriques auraient potentiellement déjà pu permettre d'attester ou non une telle diminution. L'utilisation de ces résonances internes ainsi que la détection de saut ou le suivi de bifurcation constituent des pistes de continuation possibles.

Bibliographie

- [1] Manlab : an interactive path-following and bifurcation analysis software. Code source (Matlab) disponible à l'URL <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>.
- [2] Physik Instrumente Ceramic. Catalogue des produits disponible à l'URL <http://www.pieramic.de> (accédé le 05-09-2019).
- [3] VK-Gong, a numerical software for the time simulations of nonlinear (large amplitude) vibrations of thin plates and shells. Codes sources disponibles à l'URL <https://vkgong.ensta-paristech.fr/>.
- [4] Finite element *Code_Aster*, analysis of structures and thermomechanics for studies and research. Code source ouvert, disponible à l'URL <https://www.code-aster.org>, 1989–2019.
- [5] Dassault Systèmes, Abaqus theory manual (6.12), 2013.
- [6] Yole Développement, Press releases gallery - MEMS & Sensors. Dernièrement accédé à l'URL <http://www.yole.fr/2014-galery-MEMS.aspx> (MEMS Market), 2018.
- [7] D.K. AGRAWAL et A.A. SESHIA : An analytical formulation for phase noise in MEMS oscillators. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 61(12):1938–1952, 2014.
- [8] M.A. AL-AJMI et A. BENJEDDOU : Damage indication in smart structures using modal effective electromechanical coupling coefficients. *Smart Materials and Structures*, 17(3):035023, 2008.
- [9] T. ALAVA : *Conception, fabrication, caractérisation de micromembranes résonantes en silicium, à actionnement piézoélectrique et détection piézorésistive intégrés appliquées à la détection d'agents biologiques simulant la menace*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2010.
- [10] T. ALAVA, F. MATHIEU, L. MAZENQ, C. SOYER, D. REMIENS et L. NICU : Silicon-based micromembranes with piezoelectric actuation and piezoresistive detection for sensing purposes in liquid media. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20(7):075014, 2010.
- [11] F.K. ALFOSAIL et M.I. YOUNIS : Three-to-one internal resonance of inclined marine riser. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 109:107–117, 2019.
- [12] H. ALLIK et T.J.R. HUGHES : Finite element method for piezoelectric vibration. *International journal for numerical methods in engineering*, 2(2):151–157, 1970.
- [13] D. ANTONIO, D.H. ZANETTE et D. LÓPEZ : Frequency stabilization in nonlinear micromechanical oscillators. *Nature communications*, 3:806, 2012.
- [14] R. ARQUIER : *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007.
- [15] J. ATALAYA, J.M. KINARET et A. ISACSSON : Nanomechanical mass measurement using nonlinear response of a graphene membrane. *EPL (Europhysics Letters)*, 91(4):48001, 2010.
- [16] C. AYELA, L. NICU, C. SOYER, E. CATTAN et C. BERGAUD : Determination of the d_{31} piezoelectric coefficient of $\text{PbZr}_x\text{Ti}_{1-x}\text{O}_3$ thin films using multilayer buckled micromembranes. *Journal of applied physics*, 100(5):054908, 2006.
- [17] C. AYELA, F. VANDEVELDE, D. LAGRANGE, K. HAUPT et L. NICU : Combining resonant piezoelectric micromembranes with molecularly imprinted polymers. *Angewandte Chemie International Edition*, 46(48):9271–9274, 2007.
- [18] S. BAGUET, V.-N. NGUYEN, C. GRENAT, C.-H. LAMARQUE et R. DUFOUR : Nonlinear dynamics of micromechanical resonator arrays for mass sensing. *Nonlinear Dynamics*, 95(2):1203–1220, 2019.

- [19] E. BALMES et A. DERAEMAERKER : Modeling structures with piezoelectric materials. *SDT tutorial*, 2013.
- [20] D.A.W. BARTON : Control-based continuation : Bifurcation and stability analysis for physical experiments. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 84:54–64, 2017.
- [21] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*. Presses Université Laval, 1990.
- [22] S. BENACCHIO, B. CHOMETTE, A. MAMOU-MANI et F. OLLIVIER : Modal proportional and derivative state active control applied to a simplified string instrument. *Journal of Vibration and Control*, 22(18):3877–3888, 2016.
- [23] A. BENJEDDOU : Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers & Structures*, 76(1-3):347–363, 2000.
- [24] A. BENJEDDOU et J.-F. DEÛ : A two-dimensional closed-form solution for the free-vibrations analysis of piezoelectric sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39(6): 1463–1486, 2002.
- [25] S. BILBAO : *Numerical sound synthesis*. Wiley Online Library, 2009.
- [26] S. BILBAO, O. THOMAS, C. TOUZÉ et M. DUCCESCHI : Conservative numerical methods for the full von Kármán plate equations. 31(6):1948–1970, 2015. doi : 10.1002/num.21974.
- [27] D.W. CARR, S. EVOY, L. SEKARIC, H.G. CRAIGHEAD et J.M. PARPIA : Parametric amplification in a torsional microresonator. *Applied Physics Letters*, 77(10):1545–1547, 2000.
- [28] C. CASSELLA, S. STRACHAN, S.W. SHAW et G. PIAZZA : Phase noise suppression through parametric filtering. *Applied Physics Letters*, 110(6):063503, 2017.
- [29] A. CHAIGNE, C. TOUZÉ et O. THOMAS : Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals. *Acoustical science and technology*, 26(5):403–409, 2005.
- [30] I. CHARPENTIER, B. COCHELIN et K. LAMPOH : Diamanlab - an interactive Taylor-based continuation tool in Matlab. 2013.
- [31] J. CHASTE, A. EICHLER, J. MOSER, G. CEBALLOS, R. RURALI et A. BACHTOLD : A nanomechanical mass sensor with yoctogram resolution. *Nature nanotechnology*, 7(5):301, 2012.
- [32] C. CHEN, D.H. ZANETTE, D.A. CZAPLEWSKI, S. SHAW et D. LÓPEZ : Direct observation of coherent energy transfer in nonlinear micromechanical oscillators. *Nature communications*, 8:15523, 2017.
- [33] G. CHEVALLIER, S. GHORBEL et A. BENJEDDOU : A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Materials and Structures*, 17(6):065007, 2008.
- [34] C.-Y. CHIA : *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill International Book Company, 1980.
- [35] B. CHOMETTE, S. CHESNE, D. RÉMOND et L. GAUDILLER : Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control—application to a printed circuit board. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(2):352–364, 2010.
- [36] A.N. CLELAND : Thermomechanical noise limits on parametric sensing with nanomechanical resonators. *New Journal of Physics*, 7(1):235, 2005.
- [37] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY : *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Lavoissier, 2007.
- [38] B. COCHELIN et M. MEDALE : Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations. *Journal of Computational Physics*, 236:594–607, 2013.
- [39] M. COLIN, A. GIVOIS, V. GUILLOT, É. CATTAN, S. GRONDEL, A. TURE SAVADKOOHI, C.-H. LAMARQUE et O. THOMAS : Flexible structures undergoing very large amplitude vibrations : Application to a nano drone. In *INCONSOM*, Rome, 2019.

- [40] M. COLLET et K.A. CUNEFARE : Modal synthesis and dynamical condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19(11):1251–1269, 2008.
- [41] E. COTTANCEAU : *Simulation numérique du processus d'assemblage de câbles flexibles en grands déplacements*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2018.
- [42] H.G. CRAIGHEAD : Nanoelectromechanical systems. *Science*, 290(5496):1532–1535, 2000.
- [43] D.A. CZAPLEWSKI, S. STRACHAN, O. SHOSHANI, S.W. SHAW et D. LÓPEZ : Bifurcation diagram and dynamic response of a MEMS resonator with a 1 : 3 internal resonance. *Applied Physics Letters*, 114(25):254104, 2019.
- [44] D. DAMJANOVIC et G.A. ROSSETTI : Strain generation and energy-conversion mechanisms in lead-based and lead-free piezoceramics. *MRS Bulletin*, 43(8):588–594, 2018.
- [45] R. DARLEUX, B. LOSSOUARN et J.-F. DEÛ : Passive self-tuning inductor for piezoelectric shunt damping considering temperature variations. *Journal of Sound and Vibration*, 432:105–118, 2018.
- [46] V. DENIS, M. JOSSIC, C. GIRAUD-AUDINE, B. CHOMETTE, A. RENAULT et O. THOMAS : Identification of nonlinear modes using phase-locked-loop experimental continuation and normal form. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018.
- [47] A. DERAEMAERKER et H. NASSER : Numerical evaluation of the equivalent properties of macro fiber composite (mfc) transducers using periodic homogenization. *International journal of solids and structures*, 47(24):3272–3285, 2010.
- [48] A. DERAEMAERKER, H. NASSER, A. BENJEDDOU et A. PREUMONT : Mixing rules for the piezoelectric properties of macro fiber composites. *Journal of intelligent material systems and structures*, 20(12):1475–1482, 2009.
- [49] C. DESVAGES et S. BILBAO : Two-polarisation physical model of bowed strings with nonlinear contact and friction forces, and application to gesture-based sound synthesis. *Applied Sciences*, 6(5):135, 2016.
- [50] D. DEZEST, O. THOMAS, F. MATHIEU, L. MAZENQ, C. SOYER, J. COSTECALDE, D. REMIENS, J.-F. DEÛ et L. NICU : Wafer-scale fabrication of self-actuated piezoelectric nanoelectromechanical resonators based on lead zirconate titanate (PZT). *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 25(3):035002, 2015.
- [51] E.U. DIRECTIVE : Restriction of the use of certain hazardous substances in electrical and electronic equipment. *European Union, Brussels, Belgium, Report*, (A7-0196), 2010.
- [52] E.J. DOEDEL, A.R. CHAMPNEYS, T.F. FAIRGRIEVE, Y.A. KUZNETSOV, B. SANDSTEDTE et X. WANG : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. *Montreal : Concordia University*, 1997.
- [53] J. DUCARNE : *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*. Thèse de doctorat, Paris, CNAM, 2009.
- [54] J. DUCARNE, O. THOMAS et J.-F. DEÛ : Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 331(14):3286–3303, 2012.
- [55] M. DUCCESCHI et C. TOUZÉ : Modal approach for nonlinear vibrations of damped impacted plates : application to sound synthesis of gongs and cymbals. *Journal of Sound and Vibration*, 344:313–331, 2015.
- [56] Michele DUCCESCHI : *Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates : A Numerical Investigation with Application to Wave Turbulence and Sound Synthesis*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2014.
- [57] K.L. EKINCI et M.L. HUANG, X.M.H. and Roukes : Ultrasensitive nanoelectromechanical mass detection. *Applied Physics Letters*, 84(22):4469–4471, 2004.

- [58] K.L. EKINCI et M.L. ROUKES : Nanoelectromechanical systems. *Review of scientific instruments*, 76(6):061101, 2005.
- [59] K.L. EKINCI, Y.T. YANG et M.L. ROUKES : Ultimate limits to inertial mass sensing based upon nanoelectromechanical systems. *Journal of applied physics*, 95(5):2682–2689, 2004.
- [60] S. EVOY, D.W. CARR, L. SEKARIC, A. OLKHOVETS, J.M. PARPIA et H.G. CRAIGHEAD : Nanofabrication and electrostatic operation of single-crystal silicon paddle oscillators. *Journal of Applied physics*, 86(11):6072–6077, 1999.
- [61] N.H. FARAG et J. PAN : Modal characteristics of in-plane vibration of circular plates clamped at the outer edge. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(4):1935–1946, 2003.
- [62] R.L. FORWARD : Electronic damping of vibrations in optical structures. *Applied optics*, 18(5):690–697, 1979.
- [63] A. FRANGI et G. GOBAT : Reduced order modelling of the non-linear stiffness in MEMS resonators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 116:211–218, 2019.
- [64] A. FRANGI, A. GUERRIERI et N. BONI : Accurate simulation of parametrically excited micro-mirrors via direct computation of the electrostatic stiffness. *Sensors*, 17(4):779, 2017.
- [65] G. FRITZ, J.-J. SINOUE, Jean-Marc DUFFAL et Louis JÉZÉQUEL : Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5):591–609, 2007.
- [66] C. FUINEL : *Étude des potentialités de la transduction diélectrique de haute permittivité pour les résonateurs NEMS et MEMS*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2018.
- [67] C.C. FULLER, S. ELLIOTT et P.A. NELSON : *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.
- [68] M. GÉRARDIN et D. RIXEN : *Théorie des vibrations*. Masson, Paris, 1993.
- [69] R. GORDON et J. HOLLKAMP : Reduced-order modeling of random response of curved beams using implicit condensation. In *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 14th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 7th*, page 1926, 2006.
- [70] J.A.B. GRIPP et D.A. RADE : Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers : A review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 112:359–383, 2018.
- [71] A. GROLET : *Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique*. Thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2013.
- [72] A. GROLET et F. THOUVEREZ : Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of sound and vibration*, 331(12):2911–2928, 2012.
- [73] A. GUERRIERI, A. FRANGI et L. FALORNI : An investigation on the effects of contact in MEMS oscillators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 27(6):963–972, 2018.
- [74] L. GUILLOT, B. COCHELIN et C. VERGEZ : A generic and efficient Taylor series-based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119(4):261–280, 2019.
- [75] L. GUILLOT, P. VIGUÉ, C. VERGEZ et B. COCHELIN : Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 394:434–450, 2017.
- [76] V. GUILLOT, A. TURE SAVADKOOHI et C.-H. LAMARQUE : Analysis of a reduced-order nonlinear model of a multi-physics beam. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–31, 2019.
- [77] N.W. HAGOOD et A. von FLOTOW : Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2):243–268, 1991.

- [78] A.Z. HAJJAJ, N. JABER, M.A.A. HAFIZ, S. ILYAS et M.I. YOUNIS : Multiple internal resonances in MEMS arch resonators. *Physics Letters A*, 382(47):3393–3398, 2018.
- [79] L.F. HARRIS, V. CASTRO-LÓPEZ et A.J. KILLARD : Coagulation monitoring devices : Past, present, and future at the point of care. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, 50:85–95, 2013.
- [80] J.J. HOLLKAMP et R.W. GORDON : Reduced-order models for nonlinear response prediction : Implicit condensation and expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4):1139–1153, 2008.
- [81] J.J. HOLLKAMP, R.W. GORDON et S.M. SPOTTSWOOD : Nonlinear modal models for sonic fatigue response prediction : a comparison of methods. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3-5):1145–1163, 2005.
- [82] G.A. HOLZAPFEL : *Nonlinear solid mechanics : a Continuum Approach for Engineering Science*. John Wiley & Sons, 2001.
- [83] S. HOURI, D. HATANAKA, M. ASANO, R. OHTA et H. YAMAGUCHI : Limit cycles and bifurcations in a nonlinear MEMS resonator with a 1:3 internal resonance. *Applied Physics Letters*, 114(10):103103, 2019.
- [84] S.R. IDELSOHN et A. CARDONA : A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3):253–279, 1985.
- [85] T. IKEDA : *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1996.
- [86] B. ILIC, H.G. CRAIGHEAD, S. KRYLOV, W. SENARATNE, C. OBER et P. NEUZIL : Attogram detection using nanoelectromechanical oscillators. *Journal of Applied Physics*, 95(7):3694–3703, 2004.
- [87] S. ILYAS, F.K. ALFOSAIL et M.I. YOUNIS : On the response of MEMS resonators under generic electrostatic loadings : theoretical analysis. *Nonlinear Dynamics*, pages 1–11, 2019.
- [88] A.K. ISMAIL, J.S. BURDESS, A.J. HARRIS, C.J. MCNEIL, J. HEDLEY, S.C. CHANG et G. SUAREZ : The principle of a MEMS circular diaphragm mass sensor. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16:1487–1493, 2006.
- [89] A.K. ISMAIL, J.S. BURDESS, A.J. HARRIS, G. SUAREZ, N. KEEGAN, J.A. SPOORS, S.C. CHANG, C.J. MCNEIL et J. HEDLEY : The fabrication, characterization and testing of a MEMS circular diaphragm mass sensor. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(2):025021, 2008.
- [90] C. ISSANCHOU, S. BILBAO, J.-L. LE CARROU, C. TOUZÉ et O. DOARÉ : A modal-based approach to the nonlinear vibration of strings against a unilateral obstacle : Simulations and experiments in the pointwise case. *Journal of Sound and Vibration*, 393:229–251, 2017.
- [91] B. JAFFE, W.R. COOK et H. JAFFE : *Piezoelectric ceramics*. Academic Press Ltd, Reported by R.A.N publisher, Marietta, Ohio, 1971.
- [92] S. JAIN, P. TISO, J. B. RUTZMOSER et D. J. RIXEN : A quadratic manifold for model order reduction of nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 188:80–94, 2017.
- [93] K. JENSEN, K. KIM et A. ZETTL : An atomic-resolution nanomechanical mass sensor. *Nature nanotechnology*, 3(9):533, 2008.
- [94] L. JEZEQUEL et C.-H. LAMARQUE : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of sound and vibration*, 149(3):429–459, 1991.
- [95] C.T.A. JOHNK : *Engineering electromagnetic fields and waves*. John Wiley & Sons, 1975.
- [96] M. JOSSIC : *Contrôle actif et non-linéarités géométriques : le cas du gong xiaoluo*. Thèse de doctorat, Paris 6, 2017.
- [97] M. JOSSIC, A. MAMOU-MANI, B. CHOMETTE, D. ROZE, F. OLLIVIER et C. JOSSERAND : Modal active control of chinese gongs. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(6):4567–4578, 2017.
- [98] M. JOSSIC, O. THOMAS, V. DENIS, B. CHOMETTE, A. MAMOU-MANI et D. ROZE : Effects of internal resonances in the pitch glide of chinese gongs. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 144(1):431–442, 2018.

- [99] S. JOUANNEAU et G. THOUAND : Biocapteurs pour la surveillance des polluants dans l'environnement. *Techniques de l'Ingénieur*, CHV1620 v1, 2019.
- [100] P.C. JUNGER, F.C.C. DANTAS, R.L.G. NOBRE, S. KOSTEN, E.M. VENTICINQUE, F. de CARVALHO ARAÚJO, H. SARMENTO, R. ANGELINI, I. TERRA, A. GAUDÊNCIO, N.H. THEY, V. BECKER, C. RODRIGUES CABRAL, L. QUESADO, C. LUCIANA SILVA, A. CALIMAN et A. MEGALI AMADO : Effects of seasonality, trophic state and landscape properties on CO₂ saturation in low-latitude lakes and reservoirs. *Science of the Total Environment*, 664:283–295, 2019.
- [101] N. KACEM, S. BAGUET, L. DURAFFOURG, G. JOURDAN, R. DUFOUR et S. HENTZ : Overcoming limitations of nanomechanical resonators with simultaneous resonances. *Applied Physics Letters*, 107(7):073105, 2015.
- [102] N. KACEM et S. HENTZ : Bifurcation topology tuning of a mixed behavior in nonlinear micro-mechanical resonators. *Applied Physics Letters*, 95(18):183104, 2009.
- [103] R.B. KARABALIN, X.L. FENG et M.L. ROUKES : Parametric nanomechanical amplification at very high frequency. *Nano letters*, 9(9):3116–3123, 2009.
- [104] S. KARKAR : *Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille, 2012.
- [105] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ : A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4):968–977, 2013.
- [106] E. KENIG, M.C. CROSS, L.G. VILLANUEVA, R.B. KARABALIN, M.H. MATHENY, R. LIFSHITZ et M.L. ROUKES : Optimal operating points of oscillators using nonlinear resonators. *Physical Review E*, 86(5):056207, 2012.
- [107] G. KERSCHEN, D.M. MCFARLAND, Jeffrey J. KOWTKO, Y.S. LEE, L.A. BERGMAN et A.F. VAKAKIS : Experimental demonstration of transient resonance capture in a system of two coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5):822–838, 2007.
- [108] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J. C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS : Nonlinear normal modes, part I : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):170–194, 2009.
- [109] G. KERSCHEN, K. WORDEN, A.F. VAKAKIS et J.-C. GOLINVAL : Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical systems and signal processing*, 20(3):505–592, 2006.
- [110] K. KIM, A. G. RADU, X. Q. WANG et M. P. MIGNOLET : Nonlinear reduced-order modeling of isotropic and functionally graded plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 49:100–110, 2013.
- [111] I. KOVACIC et M.J. BRENNAN : *The Duffing equation : nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
- [112] I. KOZINSKY, H.W.C POSTMA, I. BARGATIN et M.L. ROUKES : Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters*, 88(25):253101, 2006.
- [113] M. KRACK, L. SALLES et F. THOUVEREZ : Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 24(3):589–636, 2017.
- [114] R.J. KUETHER et M.S. ALLEN : A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 46(1):1–15, 2014.
- [115] A. LAZARUS et O. THOMAS : A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9):510–517, 2010.

- [116] A. LAZARUS, O. THOMAS et J.-F. DEÛ : Finite element reduced order models for nonlinear vibrations of piezoelectric layered beams with applications to nems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 49(1):35–51, 2012.
- [117] A.W. LEISSA : Vibration of plates. Rapport technique, Ohio State Univ Columbus, 1969.
- [118] P. LONGOBARDI : Model order reduction for nonlinear vibrations of geometrically nonlinear structures. Master's Thesis, Politecnico di Torino, 2019.
- [119] M. MACHADO, P. MOREIRA, P. FLORES et H.M. LANKARANI : Compliant contact force models in multibody dynamics : Evolution of the hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 53:99–121, 2012.
- [120] A. MANEVITCH et L. MANEVITCH : Free oscillations in conservative and dissipative symmetric cubic two-degree-of-freedom systems with closed natural frequencies. *Meccanica*, 38:335–348, 2003.
- [121] M.H. MATHENY, L.G. VILLANUEVA, R.B. KARABALIN, J.E. SADER et M.L. ROUKES : Nonlinear mode-coupling in nanomechanical systems. *Nano letters*, 13(4):1622–1626, 2013.
- [122] C. MAURINI, J. POUGET et F. DELL'ISOLA : Extension of the Euler–Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach. *Computers & structures*, 84(22-23):1438–1458, 2006.
- [123] M. I. MCEWAN, J. R. WRIGHT, J. E. COOPER et A. Y. T. LEUNG : A combined modal/finite element analysis technique for the dynamic response of a non-linear beam to harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 243(4):601–624, 2001.
- [124] M. P. MIGNOLET, A. PRZEKOP, S.A. RIZZI et S.M. SPOTTSWOOD : A review of indirect/non-intrusive reduced-order modeling of nonlinear geometric structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2437–2460, 2013.
- [125] S. MOJRZISCH et J. TWIEFEL : Phase-controlled frequency response measurement of a piezoelectric ring at high vibration amplitude. *Archive of Applied Mechanics*, 86(10):1763–1769, 2016.
- [126] M. MONTEIL : *Comportement vibratoire du steelpan : effet des procédés de fabrication et dynamique non linéaire*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2013.
- [127] A. A. MURAVYOV et S. A. RIZZI : Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers & Structures*, 81(15):1513–1523, 2003.
- [128] A.H. NAYFEH : On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems. *Modal Analysis*, 1(4):389–430, 1995.
- [129] A.H. NAYFEH et D.T. MOOK : *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [130] V.-N. NGUYEN, S. BAGUET, C.-H. LAMARQUE et R. DUFOUR : Bifurcation-based micro/nanoelectromechanical mass detection. *Nonlinear Dynamics*, 79(1):647–662, 2015.
- [131] J.-P. NOËL et G. KERSCHEN : Nonlinear system identification in structural dynamics : 10 more years of progress. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83:2–35, 2017.
- [132] E. PANKRATZ et E. SÁNCHEZ-SINENCIO : Survey of integrated-circuit-oscillator phase-noise analysis. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 42(9):871–938, 2014.
- [133] C. I. PARK : Frequency equation for the in-plane vibration of a clamped circular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1):325–333, 2008.
- [134] M. PEETERS, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL : Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 330(3):486–509, 2011.

- [135] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL : Nonlinear normal modes, part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1):195–216, 2009.
- [136] L. PEREIRA DA SILVA : *Atténuation du bruit et des vibrations de structures minces par dispositifs piézoélectriques passifs : modèles numériques d'ordre réduit et optimisation*. Thèse de doctorat, Paris, CNAM, 2014.
- [137] Ricardo PEREZ, XQ WANG et Marc P MIGNOLET : Nonlinear reduced-order models for thermoelastodynamic response of isotropic and functionally graded panels. *AIAA journal*, 49(3):630–641, 2011.
- [138] S. PETER et R.I. LEINE : Excitation power quantities in phase resonance testing of nonlinear systems with phase-locked-loop excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 96:139–158, 2017.
- [139] V. PIEFORT et A. PREUMONT : Finite element modeling of piezoelectric structures. In *Samtech User's Conference*, pages 1–17. Citeseer, 2001.
- [140] H.W.C. POSTMA, I. KOZINSKY, A. HUSAIN et M.L. ROUKES : Dynamic range of nanotube-and nanowire-based electromechanical systems. *Applied Physics Letters*, 86(22):223105, 2005.
- [141] S. PRIYA, D. VIEHLAND, A.V. CARAZO, J. RYU et K. UCHINO : High-power resonant measurements of piezoelectric materials : Importance of elastic nonlinearities. *Journal of applied physics*, 90(3):1469–1479, 2001.
- [142] M. RAHMOUNE, A. BENJEDDOU, R. OHAYON et D. OSMONT : New thin piezoelectric plate models. *Journal of intelligent material systems and structures*, 9(12):1017–1029, 1998.
- [143] J.N. REDDY : *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*. CRC press, 2003.
- [144] A. RENAULT : *Calcul et optimisation d'absorbeurs pendulaires dans une chaîne de traction automobile*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2018.
- [145] L. RENSON, A. GONZALEZ-BUELGA, D.A.W. BARTON et S.A. NEILD : Robust identification of backbone curves using control-based continuation. *Journal of Sound and Vibration*, 367:145–158, 2016.
- [146] J.F. RHOADS, S.W. SHAW et K.L. TURNER : Nonlinear dynamics and its applications in micro- and nanoresonators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 132(3):034001, 2010.
- [147] C. RICHARD, D. GUYOMAR, D. AUDIGIER et H. BASSALER : Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In *Smart structures and materials 2000 : damping and isolation*, volume 3989, pages 288–299. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [148] C. RICHARD, D. GUYOMAR, D. AUDIGIER et G. CHING : Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device. In *Smart Structures and Materials 1999 : Passive Damping and Isolation*, volume 3672, pages 104–111. International Society for Optics and Photonics, 1999.
- [149] J. ROEDEL et J.-F. LI : Lead-free piezoceramics : Status and perspectives. *MRS Bulletin*, 43(8):576–580, 2018.
- [150] R.M. ROSENBERG : On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. In *Advances in applied mechanics*, volume 9, pages 155–242. Elsevier, 1966.
- [151] M. ROUKES : Nanoelectromechanical systems face the future. *Physics World*, 14(2):25, 2001.
- [152] J. RUTZMOSER : *Model Order Reduction for Nonlinear Structural Dynamics*. Thèse de doctorat, Technische Universität München, 2018.
- [153] Y. SAITO, H. TAKAO, T. TANI, T. NONOYAMA, K. TAKATORI, T. HOMMA, T. NAGAYA et M. NAKAMURA : Lead-free piezoceramics. *Nature*, 432(7013):84, 2004.

- [154] N. SALVAT, A. BATAILLY et M. LEGRAND : Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 78:90–104, 2016.
- [155] D.A. SARAVANOS et Paul R. HEYLIGER : Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 52(10):305–320, 1999.
- [156] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3):577–594, 2013.
- [157] E. SARROUY, A. GROLET et F. THOUVEREZ : Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(5):727–737, 2011.
- [158] G. SAUERBREY : Verwendung von schwingquarzen zur wägung dünner schichten und zur mikrowägung. *Zeitschrift für physik*, 155(2):206–222, 1959.
- [159] A. SÉNÉCHAL : *Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines*. Thèse de doctorat, Paris, CNAM, 2011.
- [160] G.M. SESSLER : Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(6):1596–1608, 1981.
- [161] R. SEYDEL : Principles of continuation. In *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, pages 169–198. Springer, 2010.
- [162] S.W. SHAW et C. PIERRE : Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of sound and vibration*, 164(1):85–124, 1993.
- [163] O. SHOSHANI, D. HEYWOOD, Y. YANG, T.W. KENNY et S.W. SHAW : Phase noise reduction in an MEMS oscillator using a nonlinearly enhanced synchronization domain. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 25(5):870–876, 2016.
- [164] J. SIEBER et B. KRAUSKOPF : Control based bifurcation analysis for experiments. *Nonlinear Dynamics*, 51(3):365–377, 2008.
- [165] T. SILVA, D. TAN, C. DE MARQUI et A. ERTURK : Vibration attenuation in a nonlinear flexible structure via nonlinear switching circuits and energy harvesting implications. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 30(7):965–976, 2019.
- [166] J.-J. SINOÛ : Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9):1713–1732, 2009.
- [167] J.-J. SINOÛ et L. JÉZÉQUEL : Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(1):106–122, 2007.
- [168] C. S. M. SOMBROEK, P. TISO, L. RENSON et G. KERSCHEN : Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace. *Computers & Structures*, 195:34–36, 2018.
- [169] S. SRIDHAR, D.T. MOOK et A.H. NAYFEH : Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II : asymmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 59(2):159–170, 1975.
- [170] IEEE standard on PIEZOELECTRICITY : pages 176–1987, 1988.
- [171] S.C. STANTON, A. ERTURK, B.P. MANN et D.J. INMAN : Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters : modeling and experimental identification. *Journal of Applied Physics*, 108(7):074903, 2010.
- [172] S.C. STANTON, A. ERTURK, B.P. MANN et D.J. INMAN : Resonant manifestation of intrinsic nonlinearity within electroelastic micropower generators. *Applied Physics Letters*, 97(25):254101, 2010.

- [173] P. TAHERI-TEHRANI, A. GUERRIERI, M. DEFOORT, A. FRANGI et D.A. HORSLEY : Mutual 3 :1 subharmonic synchronization in a micromachined silicon disk resonator. *Applied Physics Letters*, 111(18):183505, 2017.
- [174] T. TAKENAKA, K. MARUYAMA et K. SAKATA : $(\text{Bi}_{1/2}\text{Na}_{1/2})\text{TiO}_3\text{-BaTiO}_3$ system for lead-free piezoelectric ceramics. *Japanese journal of applied physics*, 30(9S):2236, 1991.
- [175] J.J. TAN : *Piano acoustics : string's double polarisation and piano source identification*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, 2017.
- [176] O. THOMAS : *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques- Application aux instruments de percussion*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI & Telecom ParisTech, 2001.
- [177] O. THOMAS : Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration. Habilitation à diriger des recherches. École normale supérieure de cachan - ENS cachan. 2011.
- [178] O. THOMAS et S. BILBAO : Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3): 569–590, 2008.
- [179] O. THOMAS, B. COCHELIN, L. GUILLOT, A. LAZARUS et C. VERGEZ : Méthode asymptotique numérique et dynamique non linéaire. In *Congrès français de mécanique*. AFM, Association Française de Mécanique, 2019.
- [180] O. THOMAS, J-F DEÛ et J. DUCARNE : Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International journal for numerical methods in engineering*, 80(2):235–268, 2009.
- [181] O. THOMAS, J. DUCARNE et J.-F. DEÛ : Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Smart Materials and Structures*, 21(1):015008, 2011.
- [182] O. THOMAS, B. LEGRAND et C. FUINEL : Optimization of length and thickness of smart transduction layers on beam structures for control and M/Nems applications. In *ASME 2015 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2016.
- [183] O. THOMAS, F. MATHIEU, W. MANSFIELD, C. HUANG, S. TROLIER-MCKINSTRY et L. NICU : Efficient parametric amplification in micro-resonators with integrated piezoelectric actuation and sensing capabilities. *Applied Physics Letters*, 102(16):163504, 2013.
- [184] O. THOMAS, A. SÉNÉCHAL et J.-F. DEÛ : Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dynamics*, 86(2):1293–1318, 2016.
- [185] O. THOMAS, C. TOUZÉ et A. CHAIGNE : Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part II : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5):1075–1101, 2003.
- [186] S. TIMOSHENKO : Strength of materials, part II. *Advanced theory and problems*, 245, 1941.
- [187] S. TIWARI et R.N. CANDLER : Using flexural MEMS to study and exploit nonlinearities : a review. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 29(8):083002, 2019.
- [188] C. TOUZÉ : *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques : application aux instruments de percussion non-linéaires*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000.
- [189] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE : Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):649–676, 2002.
- [190] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2):77–101, 2004.

- [191] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. HUBERDEAU : Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers & structures*, 82(31-32):2671–2682, 2004.
- [192] C. TOUZÉ, M. VIDRASCU et D. CHAPELLE : Direct finite element computation of non-linear modal coupling coefficients for reduced-order shell models. *Computational Mechanics*, 54(2): 567–580, 2014.
- [193] J. TWIEFEL, M. KLUBAL, C. PAIZ, S. MOJRZISCH et H. KRÜGER : Digital signal processing for an adaptive phase-locked loop controller. In *Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures 2008*, volume 6926, page 69260A. International Society for Optics and Photonics, 2008.
- [194] F. VERNOTTE : Stabilité temporelle et fréquentielle des oscillateurs : modèles. *Techniques de l'ingénieur. Mesures et contrôle*, (R680), 2006.
- [195] L.G. VILLANUEVA, E. KENIG, R.B. KARABALIN, M.H. MATHENY, R. LIFSHITZ, M.C. CROSS et M.L. ROUKES : Surpassing fundamental limits of oscillators using nonlinear resonators. *Physical review letters*, 110(17):177208, 2013.
- [196] A. VIZZACCARO, P. LONGOBARDI, A. GIVOIS, A. GROLET, J.-F. DEÛ, L. SALLES, C. TOUZÉ et O. THOMAS : Reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat-structures using three-dimensional finite elements. En préparation.
- [197] V. VYAS, X.Q. WANG, A. JAIN et M.P. MIGNOLET : Nonlinear geometric reduced order model for the response of a beam with a piezoelectric actuator. In *56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, page 0692, 2015.
- [198] P.S. WAGGONER et H.G. CRAIGHEAD : Micro-and nanomechanical sensors for environmental, chemical, and biological detection. *Lab on a Chip*, 7(10):1238–1255, 2007.
- [199] E.L. WILSON et .-J. BATHE : Numerical methods in finite element analysis. *Change of Address Form for the Journal of Engineering for Industry Present Address-Affix Label or Copy Information from Label*, 1976.
- [200] Y.-T. YANG, C. CALLEGARI, X.L. FENG, K.L. EKINCI et M.L. ROUKES : Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing. *Nano letters*, 6(4):583–586, 2006.
- [201] B. YURKE, D.S. GREYWALL, A.N. PARGELLIS et P.A. BUSCH : Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator. *Physical Review A*, 51(5):4211, 1995.
- [202] O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR : *The finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 5^e édition, 2000.

Annexe A

Compléments au modèle analytique de plaque

A.1 Détails des développements du principe des travaux virtuels

A.1.1 Travail des quantités d'accélération

Son expression définie par l'équation (2.2a) s'écrit dans le cas de la cinématique de plaque (cf expression (2.55)) :

$$\begin{aligned}\delta W_a &= \iiint_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{U}} \cdot \delta \mathbf{U} d\Omega = \rho \iiint_{\Omega} (\ddot{\mathbf{u}} - z \nabla \ddot{w} + \ddot{w} \mathbf{z}) \cdot (\delta \mathbf{u} - z \nabla \delta w + \delta w \mathbf{z}) d\Omega \\ &= \rho h \iint_P (\ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \ddot{w} \delta w) dS + \frac{\rho h^3}{12} \iint_P \nabla \ddot{w} \nabla \delta w dS.\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

L'objectif est à ce moment de ne pas faire intervenir de dérivées spatiales des déplacements virtuels (ici $\nabla \delta w$ dans l'équation (A.1)). Cela nécessite d'effectuer des intégrations par parties, dans le cas présent sur les termes de flexion :

$$\iint_P \nabla \ddot{w} \nabla \delta w dS = - \iint_P \operatorname{div} \nabla \ddot{w} \delta w dS + \oint_{\partial P} (\nabla \ddot{w} \delta w) \cdot \mathbf{n} dl,$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal extérieur à ∂P . Cette opération sera similaire pour écrire les travaux des efforts internes. En notant $m = \rho h$ et $I = \frac{\rho h^3}{12}$, l'expression (A.1) devient

$$\delta W_a = m \iint_P (\ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \ddot{w} \delta w) dS - I \iint_S \Delta \ddot{w} \delta w dS + I \oint_{\partial P} (\nabla \ddot{w} \delta w) \cdot \mathbf{n} dl.\quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Travail des efforts extérieurs

Dans un souci de concision, on ne prend en compte que la contribution de la densité surfacique d'efforts extérieurs \mathbf{f}_s . Celle-ci s'écrit alors :

$$\delta W_{ext} = \iint_{\partial \Omega} \mathbf{f}_s \cdot \delta \mathbf{U} dS.\quad (\text{A.3})$$

Les sollicitations surfaciques sont décomposées sur les trois bords de la plaque P^+ , P^- et Σ , les différentes contributions sont notées \mathbf{F}_e^+ , \mathbf{F}_e^- et \mathbf{f}_s^Σ . La dernière contribution \mathbf{f}_s^Σ correspond aux efforts induits par des conditions aux limites où des mouvements sont bloqués, telles qu'un encastrement ou des appuis simples. L'intégrale (A.3) se développe avec l'introduction de la cinématique (2.55) Sur les bords P^+ et P^- où $z = \pm \frac{h}{2}$, ce qui amène :

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \iint_{P^+} \left[\mathbf{F}_e^+ (\delta \mathbf{u} + \delta w \mathbf{z}) - \frac{h}{2} \mathbf{F}_e^+ \nabla \delta w \right] dS + \iint_{P^-} \left[\mathbf{F}_e^- (\delta \mathbf{u} + \delta w \mathbf{z}) - \left(-\frac{h}{2}\right) \mathbf{F}_e^- \nabla \delta w \right] dS \\ &\quad + \oint_{\partial P} (\delta \mathbf{u} + \delta w \mathbf{z}) dl \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f}_s^\Sigma dz - \oint_{\partial P} \nabla \delta w dl \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f}_s^\Sigma dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \delta W_{ext} = & \iint_P \left[\left(\mathbf{F}_e^+ + \mathbf{F}_e^- \right) \cdot (\delta \mathbf{u} + \delta w \mathbf{z}) \right] dS - \iint_P \left[\left(\frac{h}{2} \mathbf{F}_e^+ - \frac{h}{2} \mathbf{F}_e^- \right) \cdot \nabla \delta w \right] dS \\ & + \oint_{\partial P} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f}_s^\Sigma dz \right) (\delta \mathbf{u} + \delta w \mathbf{z}) dl - \oint_{\partial P} (\nabla \delta w) \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{f}_s^\Sigma dz \right) dl. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Cette formulation amène à introduire d'une part les densités d'effort surfaciques ramenées sur P en résultante et en moment :

$$p_e \mathbf{z} = \mathbf{F}_e^+ + \mathbf{F}_e^-, \quad \mathbf{m}_e = \frac{h}{2} \mathbf{F}_e^+ - \frac{h}{2} \mathbf{F}_e^-, \quad (\text{A.5})$$

et d'autre part les densités d'effort linéiques en résultante et en moment :

$$T_e \mathbf{z} + \mathbf{N}_e = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f}_s^\Sigma dz, \quad \mathbf{M}_e = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{f}_s^\Sigma dz. \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \text{Cela entraîne que } \delta W_{ext} = & \iint_P p_e \delta w dS - \iint_P \mathbf{m}_e \cdot \nabla \delta w dS \\ & + \oint_{\partial P} (\mathbf{N}_e \cdot \delta \mathbf{u} + T_e \delta w) dl - \oint_{\partial P} \mathbf{M}_e \cdot \nabla \delta w dl. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De la même manière que le calcul du travail des quantités d'accélération, le terme contenant $\nabla \delta w$ est intégré par parties :

$$\iint_P \nabla \delta w \cdot \mathbf{m}_e dS = - \iint_P \text{div}(\mathbf{m}_e) \delta w dS + \oint_{\partial P} \delta w (\mathbf{m}_e \cdot \mathbf{n}) dl. \quad (\text{A.8})$$

L'intégration de la densité de moment \mathbf{M}_e sur ∂P nécessite d'introduire \mathbf{t} , l et n la tangente à la courbe ∂P et les coordonnées curvilignes de ∂P . Le gradient d'une fonction scalaire α sur ∂P s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial l} \mathbf{t} + \frac{\partial \alpha}{\partial n} \mathbf{n}, \\ \text{d'où } \mathbf{M}_e \cdot \nabla \delta w &= \frac{\partial \delta w}{\partial l} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t}) + \frac{\partial \delta w}{\partial n} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}). \end{aligned}$$

avec dans le cas d'un repère cylindrique $\mathbf{n} = \mathbf{r}$, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\theta}$, $l = \theta$, $n = r$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial l} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$. L'intégration par partie curviligne entraîne :

$$\oint_{\partial P} \frac{\partial \delta w}{\partial l} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}) dl = - \oint_{\partial P} \delta w \frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}) dl + \left[(\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t}) \right]_{l^-}^{l^+}.$$

Le dernier terme correspond à un point singulier, que ne présente pas *a priori* une plaque circulaire ni toute autre géométrie qui pourra être étudiée dans ces travaux. Ce terme n'est donc pas pris en compte ici, d'où finalement

$$\oint_{\partial P} (\mathbf{M}_e \cdot \nabla \delta w) dl = \oint_{\partial P} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl - \oint_{\partial P} \delta w \frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t}) dl. \quad (\text{A.9})$$

Avec les résultats (A.8) et (A.9), l'expression (A.7) devient finalement :

$$\delta W_{ext} = \iint_P [p_e + \text{div}(\mathbf{m}_e)] \delta w dS + \oint_{\partial P} \left[(\mathbf{N}_e \cdot \delta \mathbf{u}) + [T_e + \frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{t})] \delta w - (\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{n}) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] dl. \quad (\text{A.10})$$

A.1.3 Travail des efforts intérieurs

La prise en compte des résultats (2.56), (2.58), et l'introduction des efforts intérieurs (équation (2.60)), amène après quelques développements à :

$$\delta W_{int} = - \iint_{\partial\Omega} \left[\mathbf{N} : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{M} : \delta\boldsymbol{\kappa} \right] dS.$$

Les développements ultérieurs requièrent, en plus des expressions (2.57), le résultat suivant :

$$\mathbf{N} : \delta\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{N} : \nabla\delta\mathbf{u} + (\mathbf{N} \cdot \nabla w) \cdot \nabla\delta w,$$

qui est obtenu par calcul du travail des efforts intérieurs avec le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{F}\boldsymbol{\pi}$, à partir de l'expression du travail des efforts intérieurs (2.12). Cette étape nécessite également de remarquer que $\mathbf{N} : \nabla\mathbf{u} = \mathbf{N} : \nabla^T\mathbf{u}$ puisque \mathbf{N} est symétrique. Il vient que :

$$\delta W_{int} = - \iint_{\partial\Omega} \left[\mathbf{N} : \nabla\delta\mathbf{u} + (\mathbf{N} \cdot \nabla w) \cdot \nabla\delta w - \mathbf{M} : \nabla\nabla\delta w \right] dS.$$

De la même façon que pour les précédents travaux, des intégrations par parties permettent d'exprimer δW_{int} , pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \iint_P \left\{ \operatorname{div}\mathbf{N}\delta\mathbf{u} + [\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} + \operatorname{div}(\mathbf{N}\nabla w)]\delta w \right\} dS \\ &\quad - \oint_{\partial P} \left\{ (\mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{N}\nabla w \cdot \mathbf{n} + \operatorname{div}\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}] \delta w \right\} dl \\ &\quad + \oint_{\partial P} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) dl \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.2 Détails des développements pour établir la formulation en (w, F)

Développement du terme non-linéaire de l'équation transverse Le terme non-linéaire $\operatorname{div}(\mathbf{N}\nabla w)$ de l'équation transverse peut être développé comme :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{N}\nabla w) &= \operatorname{div}(\mathbf{N}) \cdot \nabla w + \mathbf{N} : \nabla\nabla w \\ &= \mathbf{N} : \nabla\nabla w \end{aligned}$$

d'après l'équation (2.70a). Dans un second temps, ce même terme est développé avec l'introduction de la fonction de force définie par l'égalité (2.71), qui entraîne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{N}\nabla w) &= [\Delta F \mathbf{I} - \nabla\nabla F] : \nabla\nabla w \\ &= \Delta F \Delta w - \nabla\nabla F : \nabla\nabla w \\ &= L(F, w), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Détails sur la condition de compatibilité Dans le cas linéaire, la condition de compatibilité est écrite avec le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\epsilon}_{lin}$:

$$\Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{lin}) - \operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{\epsilon}_{lin} = 0. \quad (\text{A.13})$$

On applique alors le même opérateur sur le tenseur de Green-Lagrange avec les non-linéarités, comme défini par les équations (2.56) et (2.57).

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - \operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{\epsilon} &= \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{lin} + \frac{1}{2}(\nabla w \otimes \nabla w)) - \operatorname{div}\operatorname{div}(\boldsymbol{\epsilon}_{lin} + \frac{1}{2}(\nabla w \otimes \nabla w)) \\ &= \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{lin}) - \operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{\epsilon}_{lin} + \frac{1}{2}(\Delta \operatorname{tr}(\nabla w \otimes \nabla w) - \operatorname{div}\operatorname{div}\nabla w \otimes \nabla w) \\ &= 0 + \frac{1}{2}[\nabla\nabla w : \nabla\nabla w - (\Delta w)^2] \\ &= -\frac{1}{2}L(w, w). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Par ailleurs, l'expression (A.13) se développe aussi comme suit :

$$\Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - \operatorname{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\epsilon} = \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - \operatorname{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\epsilon} - z(\Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\kappa}) - \operatorname{div} \mathbf{div}(\boldsymbol{\kappa})) \quad (\text{A.15})$$

En remarquant que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\kappa}) = \Delta w$ et $\operatorname{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\kappa} = \Delta \Delta w$, ce développement amène :

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - \operatorname{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\epsilon} &= \Delta \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) - \operatorname{div} \mathbf{div} \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \frac{1}{Yh} \Delta \Delta F \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

avec l'introduction et le développement des équations (2.60) et (2.71). Les résultats issus des développements (A.14) et (A.16) permettent alors d'écrire :

$$-\frac{1}{2} L(w, w) = \frac{1}{Yh} \Delta \Delta F. \quad (\text{A.17})$$

Annexe B

Modes de la plaque circulaire encadrée à ses extrémités

Cette annexe détaille comment les modes d'une plaque circulaire sont obtenus. Cette procédure, tirée de [68], est fondée sur une première séparation de variables en espace et en temps. Le problème temporel présente des solutions harmoniques, tandis qu'une seconde séparation des variables est effectuée pour le problème spatial. La décomposition suivant les deux variables du plan \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ aboutit à définir les différentes configurations, définies par les cercles et rayons nodaux des déformées modales. L'application des conditions aux limites permet de calculer les pulsations.

B.1 Séparation des variables

Les équations conservatives et linéaires du mouvement transverse (2.81a) et des forces de membrane (2.81b) se présentent sous la même forme (à l'exception de termes d'inertie pour les forces de membrane). On écrit ici uniquement l'expression du mouvement transverse :

$$\Delta\Delta w + \ddot{w} = 0 \quad (\text{B.1})$$

La séparation de la variable w en espace et en temps amène à poser $w(\mathbf{X}, t) = W(\mathbf{X})T(t)$

$$\frac{\Delta\Delta W}{W}(\mathbf{X}) = -\frac{\ddot{T}}{T}(t), \quad (\text{B.2})$$

Les variables temporelles et spatiales ont donc été décomposées. Ainsi, les deux termes de l'égalité sont nécessairement égaux, et de valeur positive afin de ne conserver que des solutions bornées. Cette solution est notée $+\omega^2$, et désigne une pulsation propre. Les déplacements et déformées modaux $T(t)$ et $W(\mathbf{X})$ peuvent ensuite être déterminées à partir des équations différentielles :

$$\Delta\Delta W = \omega^2 W, \quad \ddot{T} = -\omega^2 T. \quad (\text{B.3})$$

Les solutions du problème temporel sont donc bien harmoniques.

B.2 Mise en équation du problème spatial

Par ailleurs, en posant $\beta^4 = \omega^2$, la partie spatiale de l'équation (B.3) peut s'écrire :

$$(\Delta + \beta^2)(\Delta + (i\beta)^2)W = 0, \quad (\text{B.4})$$

ce qui amène à poser $W = W_1 + W_2$, où W_1 et W_2 vérifient

$$(\Delta + \beta^2)W_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta + (i\beta)^2)W_2 = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_{1,2}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial \theta^2} \pm \beta^2 W_{1,2} = 0.$$

Une séparation des variables de l'espace $W_{1,2} = R(r)\Theta(\theta)$ conduit à reformuler l'équation précédente :

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \Theta + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \pm \beta^2 R \Theta = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\text{d'où} \quad -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} / \Theta = \pm r^2 \beta^2 + r^2 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) / R. \quad (\text{B.6})$$

Cette dernière expression sépare les variables r et θ de part et d'autre de l'égalité, et vaut donc une constante qui sera ici noté k^2 . Deux équations différentielles en R et Θ en sont déduites :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 \Theta = 0 \quad (\text{B.7a})$$

$$r^2 [\pm \beta^2 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) / R] = k^2 \quad (\text{B.7b})$$

dont la seconde correspond à une équation de Bessel modifiée en R . Les solutions de l'équation (B.7a) sont des fonctions harmoniques en θ . Ainsi

$$\Theta(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta). \quad (\text{B.8})$$

Le paramètre k est donc un entier naturel égal nombre de rayon nodaux des déformées modales. Le cas $k = 0$ correspond alors au cas de modes axisymétriques. D'autre part, les solutions de (B.7b) sont des fonctions de Bessel J_k et de Bessel modifiées I_k et Y_k en r . La solution générale s'écrit alors

$$\begin{aligned} W(r, \theta) = & [A_{1k} J_k(r\beta) + A_{3k} Y_k(r\beta) + B_{1k} I_k(r\beta) + B_{3k} Y_k(r\beta)] \cos(k\theta) \\ & + [A_{2k} J_k(r\beta) + A_{4k} Y_k(r\beta) + B_{2k} I_k(r\beta) + B_{4k} Y_k(r\beta)] \sin(k\theta). \end{aligned}$$

La recherche de solutions physiques impose que la déformée soit bornée au centre de la plaque. Puisque les fonctions de Bessel de seconde espèce divergent en $r = 0$, seules celles de première espèce sont prises en compte, d'où :

$$W(r, \theta) = [A_{1k} J_k(r\beta) + B_{1k} I_k(r\beta)] \cos(k\theta) + [A_{2k} J_k(r\beta) + B_{2k} I_k(r\beta)] \sin(k\theta). \quad (\text{B.9})$$

Dans le cas où les conditions aux limites sont axisymétriques, i.e. identiques sur la circonférence de la plaque, alors cinq constantes sont à déterminer : $A_{1k}, A_{2k}, B_{1k}, B_{2k}$ et β .

B.3 Expression des modes de la plaque circulaire encastrée

Cette partie présente les expressions des modes transverse Φ et des modes de membrane Υ (cf. (2.155)) dans le cas des conditions aux limites encastrées appliquées à l'équation (B.9). Les problèmes aux valeurs propres pour le calcul des pulsations (ω, ζ^2) sont également écrits. Puisque les équations conservatives et linéaires du mouvement transverse (2.81a) et des forces de membrane (2.81b) se présentent sous la forme décrite par l'équation (B.1), alors leurs modes (Φ, Υ) vérifient également l'égalité (B.9). Dans le cas des déplacements transverses, l'application des conditions aux limites encastrées est classique (cf. [68, 117]), les modes ont pour expression :

$$\Phi_{0n}(r, \theta) = R_{0n}(r) \quad \text{pour } k = 0 \quad (\text{B.10a})$$

$$\Phi_{kn1}(r, \theta) = R_{kn}(r) \cos(\theta) \quad (\text{B.10b})$$

$$\Phi_{kn2}(r, \theta) = R_{kn}(r) \sin(\theta) \quad \text{pour } k > 0, \quad (\text{B.10c})$$

avec k le nombre de cercles nodaux, et où l'entier n correspond au nombre de cercles nodaux et à la $n^{\text{ième}}$ solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$J_{k-1}(\xi) I_k(\xi) - I_{k-1}(\xi) J_k(\xi) = 0. \quad (\text{B.11})$$

avec $\xi^2 = \omega$. Dans les équations (B.10), les termes R_{kn} désignent les déformées radiales, dont les expressions sont données par :

$$R_{kn}(r) = \kappa_{kn} \left[J_k(\xi r) + \frac{J_k(\xi_{kn})}{I_k(\xi_{kn})} I_k(\xi r) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Par ailleurs, la conséquence des conditions encastrées sur les efforts de membrane est moins aisée à rapporter, l'expression des modes associés est établie dans [126, 169], et s'écrit :

$$\Upsilon_{0m}(r, \theta) = S_{0m}(r) \quad \text{pour } l = 0 \quad (\text{B.13a})$$

$$\Upsilon_{lm1}(r, \theta) = S_{lm}(r) \cos(\theta) \quad (\text{B.13b})$$

$$\Upsilon_{lm2}(r, \theta) = S_{lm}(r) \sin(\theta) \quad \text{pour } l > 0 \quad (\text{B.13c})$$

avec l'entier m la $m^{\text{ième}}$ solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_l(\zeta) \left(\zeta^3 J_{l-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3l)J_{l-2}(\zeta) + \zeta l(l(1-\nu)-2)J_{l-1}(\zeta) + l^2(1+\nu)(1+l)J_l(\zeta) \right) \\ & - \tilde{I}_l(\zeta) \left(\zeta^3 I_{l-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3l)I_{l-2}(\zeta) + \zeta l(l(1-\nu)-2)I_{l-1}(\zeta) + l^2(1+\nu)(1+l)I_l(\zeta) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

avec

$$\tilde{J}_l(\zeta) = \zeta^2 J_{l-2}(\zeta) + \zeta(-\nu - 2l + 1)J_{l-1}(\zeta) + l(l+1)(1+\nu)J_l(\zeta)$$

$$\tilde{I}_l(\zeta) = \zeta^2 I_{l-2}(\zeta) + \zeta(-\nu - 2l + 1)I_{l-1}(\zeta) + l(l+1)(1+\nu)I_l(\zeta).$$

Les déformées dans la direction radiale $S_{lm}(r)$ s'écrivent dans ce cas :

$$S_{lm}(r) = \lambda_{lm} \left[J_j(\zeta r) + \frac{\tilde{J}_l(\zeta_{jm})}{\tilde{I}_l(\zeta_{jm})} I_j(\zeta r) \right]. \quad (\text{B.16})$$

Finalement, les modes sont normés par les constantes κ_{kn} et λ_{lm} introduites dans les équations (B.12) et (B.3) et choisies telles que :

$$\iint_S \Phi_{kn}^2 dS = 1 \quad \text{and} \quad \iint_S \Upsilon_{kn}^2 dS = 1. \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

Complément au modèle analytique de la poutre bi-couche piézoélectrique

Cette annexe complète les calculs présentés dans la section 5.2.2.

Réduction de la loi de comportement. La réduction de la loi de comportement piézoélectrique aboutissant à un ensemble réduit de coefficients matériau est d'abord détaillée. L'hypothèse (iii) des contraintes uniaxiales énoncée dans la section 2.1.2 est d'abord rappelée :

$$\pi_{22} = \pi_{33} = 0. \quad (\text{C.1})$$

La loi de comportement "en e " formulée par l'équation (2.99) est maintenant simplifiée sur la base de cette hypothèse. La réduction de cette loi entraîne les relations suivantes entre contraintes et déformations uniaxiales, ainsi que les champs électriques et de déplacement électriques transverses :

$$\pi_{xx} = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_{xx} - \bar{e}_{31} E_z \quad (\text{C.2a})$$

$$D_z = \bar{e}_{31} \varepsilon_{xx} + \bar{\epsilon}_{33} E_z. \quad (\text{C.2b})$$

Les coefficients $(\bar{c}_{11}^E, \bar{e}_{31}, \bar{\epsilon}_{33})$ de cette loi réduite sont donnés par :

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}^E &= c_{11} - \frac{c_{12}^2 c_{33} + c_{13}^2 c_{11} - 2c_{13}^2 c_{12}}{\Delta} \\ \bar{e}_{31} &= e_{31} - \frac{c_{12} c_{33} - c_{13}^2}{\Delta} e_{31} - \frac{c_{13} c_{11} - c_{12} c_{13}}{\Delta} e_{33} \\ \bar{\epsilon}_{33} &= \epsilon_{33}^e + \frac{c_{33} e_{31}^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{13} e_{31} e_{33}}{\Delta} \\ &\text{avec} \quad \Delta = c_{11} c_{33} - c_{13}^2. \end{aligned}$$

On considère le module de Young équivalent d'une couche piézoélectrique Y_p avec $Y_p = \bar{c}_{11}^E$.

Modes de la poutre encastrée-libre. L'expression des modes en court-circuit de la poutre bi-couche encastrée-libre est ensuite présentée. Il s'agit des mêmes modes qu'une poutre homogène. Ces modes transverses peuvent s'écrire avec les conditions aux limites encastrées-libres comme [68] :

$$\Phi_k(x) = \cos \beta_k x - \cosh \beta_k x + \frac{\sin \beta_k - \sinh \beta_k}{\cos \beta_k - \cosh \beta_k} (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x). \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\frac{1}{\cosh \beta_k} + \cos \beta_k = 0, \quad \omega_k = \beta_k^2 \quad \forall k > 1. \quad (\text{C.4})$$

L'expression (C.3) vérifie directement la normalisation et les propriétés d'orthogonalité ci-dessous :

$$\int_0^1 \Phi_k \Phi_l dx = \delta_{kl} \quad (\text{C.5})$$

Les β_k sont calculés numériquement à partir de l'équation (C.4). Les valeurs suivantes sont notamment estimées :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.8751, & \beta_2 &= 4.6941, & \beta_3 &= 7.8548, & \beta_4 &= 10.996, \\ & & |\Phi_k(1)| &= 2 & \forall k, \\ \Phi'_1(1) &= 2.7530, & \Phi'_2(1) &= 9.5616, & \Phi'_3(1) &= 15.697, & \Phi'_4(1) &= 21.990. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Annexe D

Modèle analytique d'une poutre tri-couche piézoélectrique avec non-linéarités de von Kármán

Ce modèle est cité à la fin de la section 2.2.3(c) pour justifier le rapport 1/2 entre les coefficients piézoélectriques non-linéaires en actionnement et en détection. Afin que la comparaison avec la formulation éléments finis reste valable, alors les variables mécaniques sont exprimées en déplacement : la formulation du problème électromécanique non-linéaire fait intervenir ici les variables $(w, u, V^{(p)}, Q^{(p)})$.

D.1 Présentation de la structure

La structure étudiée est une poutre bi-articulée de section rectangulaire à trois couches schématisée sur la figure D.1. Les sections sont constantes sur la longueur L de la poutre. Les couches inférieure et supérieure (1) et (3) sont de même épaisseur h_p et constituées d'un même matériau piézoélectrique caractérisé par une loi de comportement réduite présentée en Annexe C. La couche centrale (2) d'épaisseur h_b est constituée d'un matériau élastique isotrope. L'ensemble des trois couches est noté

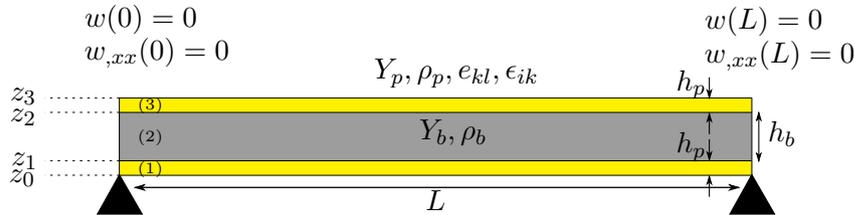


FIGURE D.1 – Présentation du cas-test et de ses principales propriétés.

$\mathcal{R} = \{1, 2, 3\}$ tandis que les deux couches piézoélectriques sont désignées par l'ensemble $\mathcal{P} = \{1, 3\}$.

D.2 Équations mécanique et électrique

Les équations du mouvement mécanique et électrique sont établies à partir des hypothèses du modèle d'Euler-Bernoulli (cf. section 2.1.2) et des hypothèses (résultants de l'application des équations locales de l'électrostatique dans les patches piézoélectriques) présentées dans la section 2.2.2(a).

Équations mécaniques. On part dans un premier temps des équations d'équilibre (équations (2.44)) dont l'expression est rappelée :

$$m\ddot{u} - N_{,x} = 0, \quad (\text{D.1a})$$

$$m\ddot{w} - M_{,xx} - (Nw_{,x})_{,x} = p(x, t). \quad (\text{D.1b})$$

$m = b(h_b\rho_b + 2h_p\rho_p)$ désigne la masse linéique dans la direction de la fibre neutre. N correspond à l'effort normal et M au moment fléchissant. Dans le cas particulier où l'inertie axiale est négligée, ces équations deviennent :

$$N_{,x} = 0, \quad (\text{D.2a})$$

$$m\ddot{w} - M_{,xx} - Nw_{,xx} = p(x, t). \quad (\text{D.2b})$$

Les conditions aux limites bi-articulées sont formalisées par :

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad (\text{D.3a})$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M = 0 \quad \text{en } x = L. \quad (\text{D.3b})$$

Ces deux quantités sont définies dans les équations (2.35), qui nécessitent d'exprimer les contraintes axiales sur l'ensemble de la poutre. Avec les non-linéarités de von Kármán, la déformation axiale a pour expression $\varepsilon_{xx} = u_{,x} - zw_{,xx} + 1/2(w_{,x})^2$. La loi de comportement s'écrit $\pi_{xx} = Y_b\varepsilon_{xx}$ dans la couche élastique. Dans la couche piézoélectrique, son expression est :

$$\pi_{xx} = Y_p\varepsilon_{xx} - \bar{e}_{31}E_z \quad (\text{D.4a})$$

$$D_z = \bar{e}_{31}\varepsilon_{xx} + \bar{\epsilon}_{33}E_z. \quad (\text{D.4b})$$

Dans la suite des développements, le module d'Young et la masse volumique sur les différentes couches sont notés Y_r et ρ_r , leurs valeurs sont définies suivant l'indice r par :

$$Y_r = \begin{cases} Y_p & \text{si } r \in \mathcal{P} \\ Y_b & \text{sinon,} \end{cases} \quad \rho_r = \begin{cases} \rho_p & \text{si } r \in \mathcal{P} \\ \rho_b & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Pour écrire la composante $E_z^{(p)}$ du champ électrique dans la couche p , on suppose une nouvelle fois que l'expressions du potentiel est linéaire avec les variables d'espace. La composante transverse du champ électrique est dans ce cadre une nouvelle fois donnée par :

$$E_z = -V/h_p. \quad (\text{D.6})$$

Les efforts intérieurs (N, M) sont finalement calculés. Comme la poutre est symétrique, le couplage membrane-flexion (terme linéaire en B des équations (5.15)) n'apparaît pas. Les efforts internes sont donnés par les expressions suivantes :

$$N = A[u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2] + \sum_{p \in \mathcal{P}} \Theta V^{(p)}, \quad (\text{D.7a})$$

$$M = -Dw_{,xx} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \Xi^{(p)} V^{(p)}, \quad (\text{D.7b})$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \sum_{r \in \mathcal{R}} Y_r b_r h_r & (\text{D.8a}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \sum_{r \in \mathcal{R}} Y_r b_r \frac{z_r^3 - z_{r-1}^3}{3} & (\text{D.8b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta = b\bar{e}_{31} & (\text{D.8c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Xi^{(p)} = b \frac{z_p + z_{p-1}}{2}. & (\text{D.8d}) \end{cases}$$

L'expression des efforts internes (D.7) dans les équations d'équilibre (D.1) conduit à une formulation en $(w, u, V^{(p)})$ du mouvement mécanique, qui s'écrit :

$$m\ddot{w} - A \left(u_{,xx} + w_{,x}w_{,xx} \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\Theta V^{(p)} \right)_{,x} = 0 \quad (\text{D.9a})$$

$$m\ddot{w} + Dw_{,xxxx} - A \left(u_{,x}w_{,xx} + \frac{(w_{,x})^2 w_{,xx}}{2} \right) - \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\left(\Xi^{(p)} V^{(p)} \right)_{,xx} + w_{,xx} \Theta V^{(p)} \right) = p(x, t). \quad (\text{D.9b})$$

Dans ces expressions les dérivées des termes de tensions s'appliquent uniquement sur les bords. Ailleurs sur la poutre, la tension est homogène.

Équation électrique. La charge électrique est ensuite calculée. Suivant les raisonnements de la section 2.2.1 (a) et d'après l'équation (2.96), la charge Q contenue dans l'électrode supérieure du patch a pour expression :

$$\begin{aligned} Q^{(p)} &= \oint_{S^+} \llbracket D_z^{(p)} \rrbracket_{z_k - \epsilon}^{z_k + \epsilon} dS = b \int_0^L D_z^{(p)} \left(z = \frac{z_{k-1} + z_k}{2} \right) dx \\ &= -b \int_0^L \left(\bar{\epsilon}_{31} \varepsilon_{xx} + \bar{\epsilon}_{33} E_z \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

En raison de la symétrie de la structure par rapport à la surface moyenne, les termes de courbure présents dans la déformation s'annulent dans la dernière expression. De plus, une intégration par partie est effectuée pour le second terme, qui amène que :

$$\int_0^L (w_{,x})^2 dx = - \int_0^L w_{,xx} w dx + \left[w_{,x} w \right]_0^L = - \int_0^L w w_{,xx} dx. \quad (\text{D.11})$$

Ainsi, l'équation (D.10) devient :

$$Q^{(p)} = -\Theta \left[u \right]_0^L + \frac{\Theta}{2} \int_0^L w w_{,xx} dx + \Xi^{(p)} \left[w_{,x} \right]_0^L + C^{(p)} V^{(p)}. \quad (\text{D.12})$$

avec $C^{(p)} = \bar{\epsilon}_{33} b L / h_p$.

Formulation du problème. Finalement, la formulation en $(w, u, V^{(p)}, Q^{(p)})$ est obtenue avec les équations (D.9) et (D.12). De la même manière que le cas de la poutre encastree-libre de la section (5.2.2), le terme de couplage linéaire de l'équation (D.9a) peut être exprimé à l'aide des fonctions de Heaviside puis de Dirac :

$$\begin{aligned} - \sum_{p \in \mathcal{P}} (\Xi^{(p)} V^{(p)})_{,xx} &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \Xi^{(p)} V^{(p)} [H(x-L) - H(x)]_{,xx} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \Xi^{(p)} V^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)]_{,x} \\ \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\Theta V^{(p)} \right)_{,x} &= - \sum_{p \in \mathcal{P}} \Theta V^{(p)} [H(x-L) - H(x)]_{,x} = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \Theta V^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)]. \end{aligned}$$

Après application des conditions aux limites (équations (D.3a)) sur l'équation de la charge la charge (D.12), l'ensemble s'écrit :

$$A \left(u_{,xx} + w_{,x} w_{,xx} \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \Theta V^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)] = 0 \quad (\text{D.14a})$$

$$\begin{aligned} m \ddot{w} + D w_{,xxxx} - A \left(u_{,x} w_{,xx} + \frac{(w_{,x})^2 w_{,xx}}{2} \right) \\ + \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\Xi^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)]_{,x} - w_{,xx} \Theta \right) V^{(p)} = p(x, t) \end{aligned} \quad (\text{D.14b})$$

$$Q^{(p)} = \frac{\Theta}{2} \int_0^L w w_{,xx} dx + \Xi^{(p)} \left[w_{,x} \right]_0^L + C^{(p)} V^{(p)} \quad (\text{D.14c})$$

Ces équations sont maintenant adimensionnées. Les grandeurs adimensionnées suivantes sont alors introduites dans les équations (5.26a) et (5.26b) :

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{t} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{m}} t, \quad \bar{V}^{(p)} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{L^3 C^{(p)}}{D}} V^{(p)}, \quad \bar{Q}^{(p)} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{L^3}{C^{(p)} D}} Q^{(p)} \\ \alpha_1^{(p)} = \Xi^{(p)} \sqrt{\frac{L}{C^{(p)} D}}, \quad \alpha_2^{(p)} = \frac{\Theta}{Ah} \sqrt{\frac{DL}{C^{(p)}}}, \quad \bar{p} = \frac{L^4}{Dh} p, \quad \varepsilon = \frac{Ah^2}{D}. \end{aligned}$$

Ceci permet de réécrire le système (D.14) sous une forme adimensionnée :

$$u_{,xx} + w_{,x}w_{,xx} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \alpha_2^{(p)} V^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)] = 0 \quad (\text{D.15a})$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} + w_{,xxxx} - \varepsilon \left(u_{,x}w_{,xx} + \frac{(w_{,x})^2 w_{,xx}}{2} \right) \\ + \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\alpha_1^{(p)} [\delta(x-L) - \delta(x)]_{,x} - \varepsilon \alpha_2^{(p)} w_{,xx} \right) V^{(p)} = p(x,t) \end{aligned} \quad (\text{D.15b})$$

$$Q^{(p)} = \varepsilon \frac{\alpha_2^{(p)}}{2} \int_0^1 w w_{,xx} dx + \alpha_1^{(p)} \left[w_{,x} \right]_0^1 + V^{(p)}, \quad (\text{D.15c})$$

où les barres supérieures des variables sans dimension ont été écartées pour ne pas alourdir les notations.

D.3 Développement et projection sur base modale

Développement modal. Les déplacements transverses et axiaux sont respectivement développés sur N_w modes transverses Φ_k et N_u modes axiaux ψ_p :

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{N_w} \Phi_k(x) q_k(t) \quad \text{et} \quad u(x,t) = \sum_{p=1}^{N_u} \psi_p(x) \eta_p(t) \quad (\text{D.16})$$

où les q_k and η_p désignent les coordonnées modales des modes transverses et axiaux. Ces modes sont solutions des problèmes aux valeurs propres suivants, respectivement associés aux parties linéaires des équations (D.15a) et (D.15b) :

$$\Phi_{k,xxxx} - \omega_k^2 \Phi_k = 0 \quad \text{et} \quad \psi_{p,xx} + \gamma_p^2 \Psi_p = 0 \quad (\text{D.17})$$

où les ω_k et γ_p sont les fréquences propres adimensionnées. Les propriétés d'orthogonalité et les normes des modes sont définies par :

$$\int_0^L \Phi_i \Phi_k dS = \delta_{ik} \quad \text{et} \quad \int_0^L \psi_p \psi_s dS = \delta_{ps}. \quad (\text{D.18})$$

Les parties linéaires des équations (D.15a) et (D.15b) montrent que les modes s'écrivent de manière identiques à ceux d'une poutre homogène. Avec des conditions aux limites bi-articulées, ces modes s'écrivent [68] :

$$\begin{aligned} \Phi_k(x) &= \sqrt{2} \sin(k\pi x), & \omega_k &= k\pi \\ \psi_p(x) &= \sqrt{2} \sin(p\pi x), & \eta_p &= p\pi. \end{aligned}$$

Les développements modaux (D.16) sont introduit dans les équations (D.15). Les équations (D.15a) et (D.15b) sont intégrés sur la longueur de la poutre.

Mouvement axial. L'équation du mouvement axial est développée dans un premier temps, la multiplication par un mode ψ_p et l'intégration sur la longueur aboutit à :

$$-\gamma_p^2 \eta_p + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j + \sum_{p \in \mathcal{P}} \alpha_2^{(p)} V^{(p)} \int_0^L \psi_p [\delta(x-L) - \delta(x)] dx = 0. \quad (\text{D.20})$$

Le dernier terme de cette équation s'annule après développement, en effet :

$$\int_0^L \psi_p [\delta(x-L) - \delta(x)] dx = \left[\psi_p \right]_0^L = 0 \quad (\text{D.21})$$

d'après les conditions aux limites (cf équations (D.10)). L'équation modale du mouvement axial a alors pour expression :

$$\gamma_p^2 \eta_p = \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j \quad (\text{D.22})$$

et est donc identique à l'équation axiale d'une poutre homogène. Les coefficients non-linéaires sont également calculés de la même manière. On rappelle ici leur expression (issue des égalités (2.163a)) :

$$G_{ij}^p = \frac{\int_0^1 \Psi_p \Phi_{i,x} \Phi_{j,xx} dx}{\int_0^1 \Psi_p^2 dx} \quad (\text{D.23})$$

Mouvement transverse. La même procédure, avec la multiplication par un mode Φ_k et l'intégration sur la longueur de la poutre, aboutit à :

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{N_w} C_{pi}^k \eta_p q_i + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} D_{ijl}^k q_i q_j q_l \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\chi_k^{(p)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \Lambda_{ik}^{(p)} q_i \right) V^{(p)} = Q_k. \quad (\text{D.24})$$

Les coefficients non-linéaires (C_{pi}^k, D_{ijl}^k) et efforts modaux Q_k sont identiques à ceux utilisés pour la poutre homogène (cf. relations (2.163a)). Leurs expressions sont rappelées ci-dessous :

$$C_{pi}^k = -\frac{\int_0^1 (\Psi_{p,x} \Phi_{i,x})_{,x} \Phi_k dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx}, \quad D_{ijl}^k = -\frac{1}{2} \frac{\int_0^1 (\Phi_{i,x} \Phi_{j,x} \Phi_{l,x})_{,x} \Phi_k dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx}, \quad Q_k(t) = \frac{\int_0^1 \Phi_k(x) p(x, t) dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx}.$$

Les coefficients de couplage électromécaniques linéaires et non-linéaires ($\chi_k^{(p)}, \Lambda_{ik}^{(p)}$) sont obtenus par :

$$\chi_k^{(p)} = -\frac{\alpha_1^{(p)} \left[\Phi_{k,x} \right]_0^L}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx}, \quad \Lambda_{ik}^{(p)} = -\frac{\alpha_2^{(p)} \int_0^1 \Phi_k \Phi_{i,xx} dx}{\int_0^1 \Phi_k^2 dx} \quad (\text{D.26})$$

Équation électrique. Le développement (D.16) est maintenant introduit dans l'équation de la charge (D.15c). Cela conduit à :

$$Q^{(p)} = \sum_{i=1}^{N_w} \chi_i^{(p)} q_i + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \Lambda_{ij}^{(p)} q_i q_j + V^{(p)}, \quad (\text{D.27})$$

où les coefficients de couplage sont identiques à ceux définis dans l'équation (D.26).

Système complet. Finalement, les équations modales du système s'écrivent :

$$\gamma_p^2 \eta_p = \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} G_{ij}^p q_i q_j \quad (\text{D.28a})$$

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \varepsilon \left(\sum_{p=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{N_w} C_{pi}^k \eta_p q_i + \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{l=1}^{N_w} D_{ijl}^k q_i q_j q_l \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\chi_k^{(p)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \Lambda_{ik}^{(p)} q_i \right) V^{(p)} = Q_k \quad (\text{D.28b})$$

$$Q^{(p)} = \sum_{i=1}^{N_w} \chi_i^{(p)} q_i + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} \Lambda_{ij}^{(p)} q_i q_j + V^{(p)}. \quad (\text{D.28c})$$

Ce modèle analytique démontre bien que le terme paramétrique est deux fois plus élevé en actionnement qu'en détection. Ces termes ont été indiqués en rouge dans les équations modales obtenues. La symétrie de la structure par rapport à la surface moyenne permet plusieurs simplifications. En particulier, il n'y a pas de couplage membrane-flexion induit par la stratification. De plus, le mouvement axial statique de la poutre peut aussi faire l'objet d'une condensation dans l'équation du mouvement transverse. Ce modèle n'a pas l'objet de plus amples développements.

Annexe E

Systèmes linéaires pour obtenir les coefficients non-linéaires par la méthode STEP

Le système à deux équations est deux inconnues :

$$a_{ii}^k \lambda_i^2 + b_{iii}^k \lambda_i^3 = \boldsymbol{\phi}_k^T \mathbf{f}_{r,i}^+ \quad (\text{E.1a})$$

$$a_{ii}^k \lambda_i^2 - b_{iii}^k \lambda_i^3 = \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^- \quad (\text{E.1b})$$

utilise les résultats du calcul statique (3.5) avec les champs de déplacement :

$$\mathbf{x}^d = \pm \lambda \boldsymbol{\phi}_i \quad (\text{E.2})$$

où les efforts de réaction résultants $\mathbf{f}_{r,i}^+$ et $\mathbf{f}_{r,i}^-$ sont respectivement associés aux champs de déplacement $+\boldsymbol{\phi}_i$ et $-\boldsymbol{\phi}_i$ avec i le numéro du mode en indice et le signe des champs de déplacement en exposant. Ces notations seront conservées dans la suite de cette annexe, avec un à trois indices et signes, suivant le nombre de modes sur lesquels \mathbf{x}^d est décomposé. Une autre notation est introduite pour formaliser le système (E.1) pour lequel les coefficients a_{ii}^k et b_{iii}^k sont les inconnues : le système linéaire s'écrit $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & \lambda_i^3 \\ \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{ii}^k \\ b_{iii}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^+ \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^- \end{bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Les champs de déplacement combinaisons linéaires de deux modes ($\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j$) sont les suivants :

$$\mathbf{x}^d = \begin{cases} \pm \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \\ \pm \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i - \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ -\lambda_j \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j. \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

La projection des résultats des calculs statiques (3.5) sur un mode $\boldsymbol{\phi}_k$ conduit au système linéaire

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & -\lambda_j^3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \lambda_i \lambda_j & \lambda_i^2 \lambda_j & \lambda_i \lambda_j^2 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & -\lambda_i \lambda_j & -\lambda_i^2 \lambda_j & \lambda_i \lambda_j^2 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & -\lambda_i \lambda_j & \lambda_i^2 \lambda_j & -\lambda_i \lambda_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{ii}^k \\ b_{iii}^k \\ a_{jj}^k \\ b_{jjj}^k \\ a_{ij}^k \\ b_{ijj}^k \\ b_{iij}^k \\ b_{ijj}^k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^+ \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^- \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,j}^+ \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,j}^- \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{++} \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{+-} \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{-+} \\ \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{--} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Enfin, le système à seize inconnues et équations pour déterminer l'ensemble des coefficients d'une base composée de trois modes nécessite d'abord d'obtenir les résultats des calculs aux déplacements

imposés suivants :

$$\mathbf{x}^d = \begin{cases} \pm \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \\ \pm \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ \pm \lambda_l \boldsymbol{\phi}_l \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i - \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ -\lambda_j \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i - \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ -\lambda_j \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_j + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_j - \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ -\lambda_j \boldsymbol{\phi}_j + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_j + \lambda_j \boldsymbol{\phi}_l \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

puis de résoudre le système $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & -\lambda_j^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_l^2 & -\lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & 0 & 0 & \lambda_i \lambda_j & \lambda_i^2 \lambda_j & \lambda_i \lambda_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & -\lambda_j^3 & 0 & 0 & -\lambda_i \lambda_j & -\lambda_i^2 \lambda_j & \lambda_i \lambda_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & 0 & 0 & -\lambda_i \lambda_j & \lambda_i^2 \lambda_j & -\lambda_i \lambda_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & 0 & 0 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \lambda_l & \lambda_i^2 \lambda_l & \lambda_i \lambda_l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & 0 & 0 & \lambda_l^2 & -\lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_i \lambda_l & -\lambda_i^2 \lambda_l & \lambda_i \lambda_l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 & 0 & 0 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_i \lambda_l & \lambda_i^2 \lambda_l & -\lambda_i \lambda_l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \lambda_l & \lambda_j^2 \lambda_l & \lambda_j \lambda_l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \lambda_l^2 & -\lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_j \lambda_l & -\lambda_j^2 \lambda_l & \lambda_j \lambda_l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j^2 & -\lambda_j^3 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_j \lambda_l & \lambda_j^2 \lambda_l & -\lambda_j \lambda_l^2 & 0 \\ \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \lambda_l^2 & \lambda_l^3 & \lambda_i \lambda_j & \lambda_i^2 \lambda_j & \lambda_i \lambda_j^2 & \lambda_i \lambda_l & \lambda_i^2 \lambda_l & \lambda_i \lambda_l^2 & \lambda_j \lambda_l & \lambda_j^2 \lambda_l & \lambda_j \lambda_l^2 & \lambda_i \lambda_j \lambda_l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = [a_{ii}^k \ b_{iii}^k \ a_{jj}^k \ b_{jjj}^k \ a_{ll}^k \ b_{lll}^k \ a_{ij}^k \ b_{iij}^k \ b_{ijj}^k \ a_{il}^k \ b_{iil}^k \ b_{ill}^k \ a_{jl}^k \ b_{jjl}^k \ b_{jll}^k \ b_{ijl}^k]^T$$

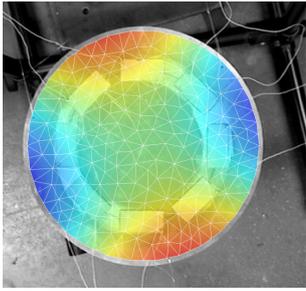
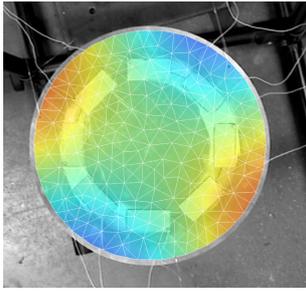
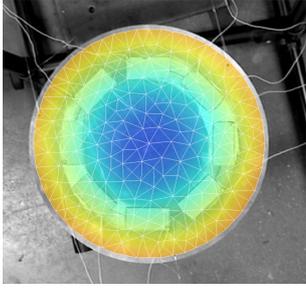
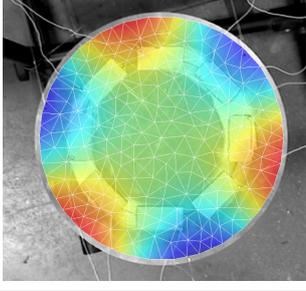
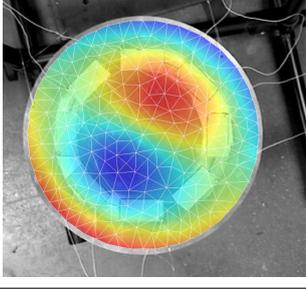
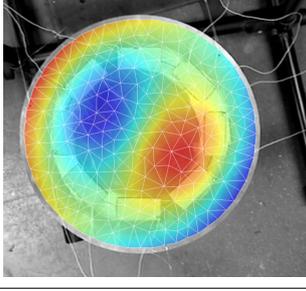
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^+ & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,i}^- & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,j}^+ & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,j}^- & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,l}^+ & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,l}^- & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{++} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{+-} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ij}^{-+} & \dots & \dots \\ \dots & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,il}^{++} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,il}^{+-} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,il}^{-+} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,jl}^{++} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,jl}^{+-} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,jl}^{-+} & \boldsymbol{\phi}_k^t \mathbf{f}_{r,ijl}^{+++} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

Cette écriture est formelle. En pratique, ces systèmes sont résolus de manière séquentielle.

Annexe F

Analyse modale de la plaque piézoélectrique

Cette section présente les résultats de l'analyse modale de la plaque piézoélectrique utilisée dans le chapitre 7. Les huit premières configurations des modes circulaires sont présentés suivant par ligne. Les déformées opérationnelles sont rangés par paires de modes asymétriques, sauf dans le cas des modes axisymétrique (et le cas particulier des modes (5,0) et (3,0) pour lesquels une seule configuration a pu être mesurée) où une seule colonne est occupée.

#	Déformées opérationnelles		Déformées opérationnelles	
	Fréquences [Hz]	Déformées	Fréquences [Hz]	Déformées
(2,0)	124.0		132.8	
(0,1)	212.0			
(3,0)	296.9			
(1,1)	481.3		486.3	

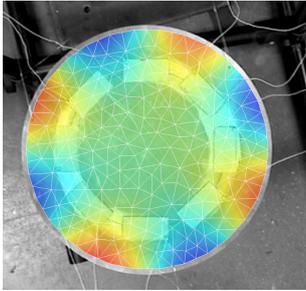
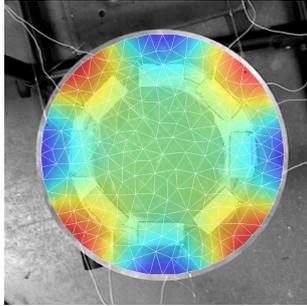
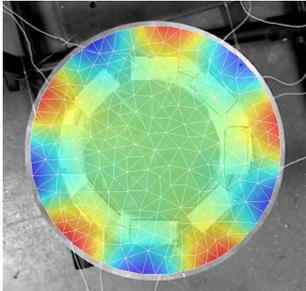
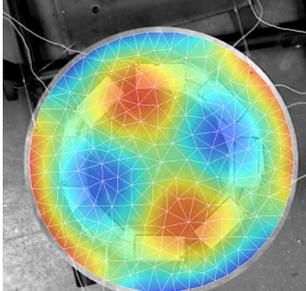
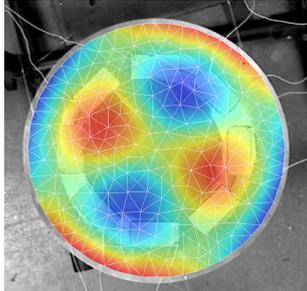
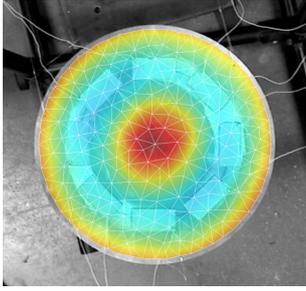
#	Déformées opérationnelles		Déformées opérationnelles	
	Fréquences [Hz]	Déformées	Fréquences [Hz]	Déformées
(4,0)	506.6		520.9	
(5,0)	767.8			
(2,1)	824.3		845.5	
(0,2)	901.6			

TABLE F.1 – Configurations, fréquences et déformées opérationnelles obtenues par une analyse modale expérimentale sur la plaque piézoélectrique

Analyse numérique et expérimentale de vibrations non-linéaires de structures élastiques et piézoélectriques. Modèles réduits et interactions modales

Résumé : Cette thèse de doctorat concerne l'analyse et la modélisation de structures minces en vibrations de grande amplitude avec transduction piézoélectrique. Ce type de système électromécanique est utilisé dans de nombreuses applications, telles que les microsystèmes électromécaniques (MEMS) ainsi que les systèmes de contrôle ou de récupération d'énergie. Dans ce travail, on propose une stratégie numérique pour calculer efficacement la dynamique non-linéaire de ce problème couplé électromécanique avec des non-linéarités géométriques. La méthodologie est fondée sur des modèles réduits modaux, obtenus à partir de modèles analytiques ou par des formulations numériques éléments-finis originales. Dans ce dernier cas, les modèles réduits sont obtenus de manière non intrusive en utilisant des codes de calculs existants. Ces modèles sont ensuite résolus par une procédure de continuation de solutions périodiques. Cette thèse présente des résultats originaux de validation des méthodes non-intrusives, d'une part, et de convergence des modèles réduits, d'autre part, pour des structures minces de référence. Une stratégie expérimentale est également proposée pour mettre en évidence des phénomènes non-linéaires sur une structure avec actionnement et détection piézoélectriques complètement intégrés. Une méthode de continuation expérimentale, fondée sur le contrôle de la phase, est utilisée pour mesurer la réponse du système en régime libre (les modes non linéaires) et en régime forcé périodique. Des réponses vibratoires complexes, liées à des résonances internes entre modes, sont mesurées et caractérisées précisément, dans le cadre de vibrations asymétriques de plaques circulaires élastique et piézoélectrique.

Mots clés : Vibrations, Piézoélectricité, Non-linéarités géométriques, Réduction de modèle, Modèles éléments finis, Modèles analytiques, Continuation numérique, Actionnement et détection électriques, Continuation expérimentale

Numerical and experimental analysis of nonlinear vibrations of elastic and piezoelectric structures. Reduced-order models and modal interactions

Abstract: This doctoral dissertation addresses the analysis and the modelling of the large amplitude nonlinear vibrations of thin structures with piezoelectric transduction. This type of system is used in numerous applications, such as Micro-Electromechanical Systems (MEMS), control-based systems or energy harvesting. This work proposes a numerical strategy to compute efficiently the nonlinear dynamics of electromechanical problems with geometric nonlinearities. The methodology is founded on the computation of modal reduced order models obtained from analytical and finite element approaches. In the latter case, the reduced order models are obtained by non-intrusive strategies using existing finite-element codes. Then, they are finally computed with a numerical method of continuation of periodic solutions. Original results are presented, about the validation of the non-intrusive methods and the convergence of the modal reduced order models, for reference thin structures. An experimental strategy is also proposed to highlight nonlinear phenomena on a structure with fully integrated piezoelectric actuation and detection. A phase locked-loop experimental continuation procedure is used to measure exchanges of energy due to internal resonances between asymmetric vibration modes in circular elastic and piezoelectric plates.

Keywords : Vibrations, Piezoelectricity, Geometric nonlinearities, Reduced-order modelling, Finite element models, Analytical models, Numerical continuation, Electrical actuation and detection, Experimental continuation

