# Modèles et algorithmes dédiés pour la résolution de problèmes inverses parcimonieux en traitement du signal et de l'image

#### Sébastien Bourguignon

#### Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes École Centrale de Nantes

#### Soutenance d'Habilitation à Diriger des Recherches, 6 février 2020







# Plan

#### Synthèse des activités

Problèmes inverses et parcimonie : modèles et algorithmes

3 Imagerie hyperspectrale en astronomie

- 4 Contrôle non destructif par ultrasons
- 5 Optimisation exacte en norme  $\ell_0$  et *Mixed Integer Programming*

#### Parcours

- 2001 : Ingénieur Supélec & Université Polytechnique de Madrid.
- 2002 : DEA Signal, Image et Acoustique, Univ. Toulouse 3 INP Toulouse.
- 2005 : **Doctorat en Traitement du Signal**, Univ. Toulouse 3. Équipe *Signal*, *Image, Instrumentation*, Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse et de Tarbes.
- 2005–06 : Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche, 61<sup>ème</sup> section.
- 2006–07 : **Post-doctorant** au Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse et de Tarbes.
- 2007–08 : Chercheur à l'Ifremer (Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer), Brest, Laboratoire de Technologie Halieutique.
- 2009–11 : Post-doctorant au laboratoire Cassiopée, Observatoire de la Côte d'Azur.
- 2011-... : Maître de Conférences à l'École Centrale de Nantes, 61<sup>ème</sup> section.
  - Enseignement au département Automatique et Robotique de l'ECN
  - Recherche dans l'équipe Signal, Image et Son (SIMS), Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N)

Activité d'enseignement (École Centrale de Nantes).  $H \in [194 \text{ h}, 370 \text{ h}], \overline{H} = 280 \text{ h}$ 

#### Formation ingénieur

- Responsable de l'option professionnelle R&D.
- Tronc commun : Instrumentation et Capteurs, Signaux et Systèmes, Commande, Mathématiques.
- **Option DATASIM**<sup>†</sup> : <u>Problèmes Inverses</u>, <u>Analyse et</u> Représentation des Signaux, <u>Outils Statistiques</u>, <u>Projets</u>.

## 

#### **Master** Control and Robotics

- Responsable du parcours Signal and Image Processing.
- Spectral and Time-Frequency Analysis, Signal and Image Restoration Methods, Design of Signal and Image Representations.

Foundation Master : <u>Mathematics</u>, Computer Programming & Data Analysis.

<sup>†</sup> Données, Algorithmes, Traitement et Applications en Signal et IMage

# Projets de recherche et contrats

#### Coordination de projets de recherche

- Projet JCJC ANR MIMOSA, 2017–2021. Porteur. 191 k€. Mixed Integer programming Methods for Optimization of Sparse Approximation criteria.
- Projet JCJC du GdR ISIS et du GRETSI, 2014-2015. Porteur. 6 k€.
   Optimisation globale pour la résolution de problèmes parcimonieux en norme ℓ<sub>0</sub>.
- Projet RFI de la région Pays de la Loire, 2014–2018. Co-porteur. 150 k€.
   Propagation et déconvolution de signaux ultrasonores dans les matériaux poreux.

#### Activité contractuelle

- Thèse CIFRE, société DB-SAS, 2017-2020. 36 k€.
   Imagerie ultrasonore avancée pour le contrôle non destructif de matériaux complexes.
- Prestation pour l'IRT Jules Verne, 2016-2017. 7 k€. Traitement d'un signal issu d'un profilomètre laser pour des applications de soudage.

#### Autres projets collaboratifs récents

- Projet exploratoire **GdR ISIS**, 2019. Signal detection via multiple testing and selective inference : theory and practice.
- PEPS **CNRS Astro-Informatique** (2018-19). *Outils statistiques pour l'imagerie hyperspectrale du milieu interstellaire.*
- Défi CNRS Imag'In (2015-16).

Réseau pour l'analyse et la fusion de données multimodales des surfaces planétaires.

# Responsabilités et publications

#### Participation aux instances

- Membre élu au Conseil Scientifique de l'École Centrale de Nantes (2014–2018, réélu en 2018).
- Membre du Conseil Scientifique du Groupement d'Intérêt Scientifique (GIS) ECND-PdL, Évaluation et Contrôle Non Destructifs en Pays de la Loire.

#### Expertise

- Relecteur pour les journaux Digit Signal Process, ICES J Marine Science, IEEE J of Selected Topics in Signal Processing, IEEE Trans Computational Imaging, IEEE Trans Image Processing, IEEE Trans Information Theory, IEEE Trans Signal Processing, Machine Learning, Signal Processing, Transactions de la Société Canadienne de Génie Mécanique.
- Relecteur pour les conférences Congrès Français d'Acoustique, EUSIPCO, EWSHM, GRETSI, IEEE ICASSP, IEEE SSP, IEEE WHISPERS.
- Expertise de projet auprès de l'Agence Nationale de la Recherche.

#### Production scientifique

- 19 articles de journaux
- 2 chapitres d'ouvrage

- 38 conférences avec actes et comité de lecture
- 8 séminaires invités

## Encadrement

- 7 stages de Master 2
- 3 thèses soutenues
  - Ewen Carcreff, 2014 (50%). Directeur L. Simon, co-directeur J. Idier. Déconvolution adaptative de signaux ultrasonores pour le contrôle non destructif par ultrasons.
  - Corentin Friedrich, 2016 (30%). Directeur J. Idier, co-directeur Y. Goussard. Méthodes de reconstruction en tomographie de diffraction 3-D. Cotutelle Polytechnique Montréal.
  - Penghuan Liu, 2018 (30%). Directeur J. Idier.

Statistical and numerical optimization for speckle blind structured illumination microscopy.

#### 3 thèses en cours

- Ramzi Ben Mhenni, 2016 ... Directeur (80%), co-encadrant J. Ninin.
   Programmation mixte en nombres entiers pour l'optimisation parcimonieuse en traitement du signal.
- Nans Laroche, 2017 ... (40%). Directeur J. Idier, co-encadrant A. Duclos. Méthodes d'imagerie ultrasonore avancées pour le contrôle de matériaux atténuants et diffusants.
- Marie Antoinette AlHajj, 2017 ... (30%). Directrice G. Villain, co-encadrant S. Palma Lopes. Inversion conjointe de mesures non destructives pour découpler des gradients multiples dans le béton d'enrobage de structures en béton armé

#### Post-doctorants

- Nizar Bouhlel, 2015 2017 (17 mois). Évaluation de matériaux poreux par ultrasons.
- Ngoc Nguyên Tran, 2018 2019 (7 mois).

Algorithmes d'optimisation exacte pour des problèmes de parcimonie en traitement du signal.

# Plan

#### Synthèse des activités

#### Problèmes inverses et parcimonie : modèles et algorithmes

#### 3 Imagerie hyperspectrale en astronomie

- 4 Contrôle non destructif par ultrasons
- 5 Optimisation exacte en norme  $\ell_0$  et *Mixed Integer Programming*



Imagerie astrophysique CND et imagerie ultrasonores Tomographie Microscopie . . .

Déficit d'information dans  $y \Rightarrow$  contraintes supplémentaires sur x...

**Parcimonie** : *x* peut être approché par un <u>faible nombre</u> d'éléments ... bien choisis.



Imagerie astrophysique CND et imagerie ultrasonores Tomographie Microscopie . . .

Déficit d'information dans  $y \Rightarrow$  contraintes supplémentaires sur x...

**Parcimonie** : *x* peut être approché par un <u>faible nombre</u> d'éléments ... bien choisis.

**Hypothèse "naturelle" sur**  $x : x_p = 0$  presque partout



→ Déconvolution de signaux ultrasonores : modèle H plus précis



Imagerie astrophysique CND et imagerie ultrasonores Tomographie Microscopie . . .

Déficit d'information dans  $y \Rightarrow$  contraintes supplémentaires sur x...

**Parcimonie** : *x* peut être approché par un <u>faible nombre</u> d'éléments ... bien choisis.

**Hypothèse "naturelle" sur**  $x : x_p = 0$  presque partout



 $\rightsquigarrow\,$  Déconvolution de signaux ultrasonores : modèle H plus précis

Parcimonie dans un dictionnaire :  $\mathbf{x} \simeq \mathbf{D}\mathbf{u}$ ,  $u_p = 0$  presque partout

- $\rightsquigarrow$  Imagerie hyperspectrale astronomique : dictionnaire de formes spectrales
- $\rightsquigarrow$  Démélange spectral : parcimonie structurée et optimisation exacte

y = Ax + bruit, x parcimonieux

y = Ax + bruit, x parcimonieux  $\sim$ 

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \|^2 \text{ avec } \underbrace{\operatorname{Card} \left\{ p \, | \, x_p \neq 0 \right\}}_{\text{"norme"} \left\{ \ell_0 : \, \| \mathbf{x} \|_0 \right\}} \leq K$$

 $y = \mathbf{A}x + bruit, x$  parcimonieux  $\sim$ 

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \|^2 \text{ avec } \underbrace{\operatorname{Card} \left\{ p \, | \, x_p \neq 0 \right\}}_{\text{"norme"} \ell_0 : \| \mathbf{x} \|_0} \leq K$$

#### Heuristiques gloutonnes

[CLEAN, OMP, StOMP, OLS, CoSaMP, Two-Stage Thresholding, Backward elimination, ...]

~ Algorithmes de déconvolution Multiple Inputs, Single Output (MISO)

 $y = \mathbf{A} x + \textit{bruit}, x$  parcimonieux  $\sim$ 

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \|^2 \text{ avec } \underbrace{\operatorname{Card} \left\{ p \, | \, x_p \neq 0 \right\}}_{\text{"norme"} \left\{ \ell_0 : \, \| \mathbf{x} \|_0 \right\}} \leq K$$

#### Heuristiques gloutonnes

[CLEAN, OMP, StOMP, OLS, CoSaMP, Two-Stage Thresholding, Backward elimination, ...]

→ Algorithmes de déconvolution Multiple Inputs, Single Output (MISO)

#### Optimisation de critères convexes favorisant la parcimonie

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{2}^{2} \text{ avec } \|\boldsymbol{x}\|_{1} \leq \tau \qquad (\|\boldsymbol{x}\|_{1} := \sum |x_{p}|)$$

[FISTA, GPSR, ADMM, PALM, IRLS, homotopy continuation, ICD, interior points, active sets,  $\dots$ ]

#### → Dictionnaires corrélés : descente par coordonnée

 $\rightsquigarrow$  Avec contraintes de borne : homotopie et ensembles actifs

y = Ax + bruit, x parcimonieux  $\sim$ 

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 \text{ avec } \underbrace{\operatorname{Card} \left\{ p \, | \, x_p \neq 0 \right\}}_{\text{"norme"} \ell_0 : \|\mathbf{x}\|_0} \leq K$$

#### Heuristiques gloutonnes

[CLEAN, OMP, StOMP, OLS, CoSaMP, Two-Stage Thresholding, Backward elimination, ...]

→ Algorithmes de déconvolution Multiple Inputs, Single Output (MISO)

#### Optimisation de critères convexes favorisant la parcimonie

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{2}^{2} \text{ avec } \|\boldsymbol{x}\|_{1} \leq \tau \qquad (\|\boldsymbol{x}\|_{1} := \sum |\boldsymbol{x}_{p}|)$$

[FISTA, GPSR, ADMM, PALM, IRLS, homotopy continuation, ICD, interior points, active sets,  $\dots$ ]

#### → Dictionnaires corrélés : descente par coordonnée

 $\rightsquigarrow$  Avec contraintes de borne : homotopie et ensembles actifs

#### ■ Approches "orientées ℓ<sub>0</sub>" / non convexes

[SBR, IHT, IRL1, SBL, DC, penalty decomposition, GNC, SL0, ...] : propriétés au mieux locales

 $\sim$  Optimisation exacte de critères  $\ell_0$  par Branch-and-Bound

# Plan

#### Synthèse des activités

Problèmes inverses et parcimonie : modèles et algorithmes

#### 3 Imagerie hyperspectrale en astronomie

4) Contrôle non destructif par ultrasons

5) Optimisation exacte en norme  $\ell_0$  et Mixed Integer Programming

DATE Dedicated Algorithms for HyperspectraL Imaging in Astronomy (ANR, 2009-2013)

#### MUSE : Multi-Unit Spectroscopic Explorer



Very Large Telescope (European Southern Observatory)



 $\rightarrow$  300 × 300 pixels (1 arcmin<sup>2</sup>)  $\rightarrow$  4 000 longueurs d'onde (465 – 930 nm)



Première lumière en janvier 2014

Crédit images : Centre de Recherche Astronomique de Lyon & ESO



## Observation de champs profonds

- $\bullet\,$  Objets très lointains  $\rightsquigarrow\,$  rapport signal sur bruit très faible
- Observations au sol ~> dégradation de l'information (instrument + atmosphère)

 $\rightsquigarrow$   $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{\epsilon}, ~~ \mathbf{H}$  convolution spatiale et spectrale



2

## Parcimonie des spectres dans un dictionnaire de formes

- Niveau de bruit très fort  $\rightarrow$  contraintes très fortes!
- Spectres en émission de galaxies = raies, cassure, continuum [Tennyson 2005]
   → dictionnaire D de formes élémentaires :



- Odèle exploitant la physique
- Complexité numérique (D matrice 4 000 × 30 000, colonnes très corrélées)

S.B., D. Mary et É. Slezak, IEEE J Selected Topics in Signal Processing, 2011.

3. Imagerie hyperspectrale en astronomie

Restauration sous contraintes de parcimonie spectrale

$$\min_{u_1,\ldots,u_K} \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_K \end{bmatrix} - \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_K \end{bmatrix} \right\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 \quad \text{s.c.} \quad \underline{\mathbf{s}_k = \mathbf{D}\mathbf{u}_k, \ \mathbf{u}_k \text{ parcimonieux}} \quad (*)$$

i) Décomposition parcimonieuse de chaque spectre  $y_k$ 

 $\widehat{\boldsymbol{u}}_k = \arg\min_{\boldsymbol{u}_k} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y}_k - \mathsf{L} \mathsf{D} \boldsymbol{u}_k\|_{\boldsymbol{\Sigma}_k}^2 + \mu \|\boldsymbol{u}_k\|_1 \quad (\mathsf{L} \text{ réponse spectrale})$ 

 $\sim$  détection d'atomes significatifs dans  $y_k$  : support  $\Omega_k$ 

ii) Modèle (\*) avec D restreint à  $D_{\Omega}$ ,  $\Omega := \bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k$ 

S.B., H. Carfantan, É. Slezak et D. Mary, Proc. IEEE WHISPERS, 2011.

3. Imagerie hyperspectrale en astronomie

#### Exemple de résultat (cube de $40 \times 40$ pixels $\times 4000$ longueurs d'onde)

Données convoluées non bruitées



## Optimisation en norme $\ell_1$ pour dictionnaires très corrélés

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \mu \|\mathbf{x}\|_1$$

- Algorithmes de type gradient projeté peu efficaces
- Descente par coordonnée :

 $x_{p}^{(t)} = \arg\min_{x_{p}} J(x_{1}^{(t)}, \dots, x_{p-1}^{(t)}, x_{p}, x_{p+1}^{(t-1)}, \dots, x_{p}^{(t-1)})$  [Tseng 01, Friedman *et al.* 10]  $S_{\mu}(u)$ 

• Mises à jour peu coûteuses :  $x_p^* = S_\mu \left( \boldsymbol{a}_p^T (\boldsymbol{y} - \sum_{q \neq p} x_q \boldsymbol{a}_q) \right)$ 



► Solution parcimonieuse ~> balayage adapté + accélérations

Temps de calcul (s) (N = 3600, P = 30000)	Spectres astro. ( <b>A</b> très corrélé)	Données aléatoires ( <b>A</b> peu corrélé)		
Descente par coordonnée				
mise en œuvre naïve	1992	3.23		
balayage + accélérations	7.2	1.31		
Homotopie	15.5	17.98		
FISTA	4090	3.69		
GPSR	3340	1.78		
SparSA	851	1.78		

S.B., D. Mary et É. Slezak, IEEE J Selected Topics in Signal Processing, 2011.

HDR S. Bourguignon

3. Imagerie hyperspectrale en astronomie

6 / 7

seuillage doux

# Imagerie hyperspectrale et astrophysique : quelques perspectives

- Exploitation sur données réelles MUSE?
- Projet Orion-B : observations radio de nuages de formation d'étoiles



- 200 000 canaux spectraux dominés par le bruit
- réponse instrumentale + bruit variable
- spectres = raies inconnues + ligne de base

Crédit image : J. Péty, Institut de Radioastronomie Millimétrique (IRAM, Grenoble)

Imagerie hyperspectrale et astrophysique : quelques perspectives

- Exploitation sur données réelles MUSE?
- Projet Orion-B : observations radio de nuages de formation d'étoiles



- 200 000 canaux spectraux dominés par le bruit
- réponse instrumentale + bruit variable
- spectres = raies inconnues + ligne de base

▷ Sources astrophysiques sous forme séparable : un spectre  $s \times$  une image aavec s = Du, u parcimonieux : modèle plus contraint  $\Rightarrow \nearrow$  détections

Crédit image : J. Péty, Institut de Radioastronomie Millimétrique (IRAM, Grenoble)

# Imagerie hyperspectrale et astrophysique : quelques perspectives

- Exploitation sur données réelles MUSE?
- Projet Orion-B : observations radio de nuages de formation d'étoiles



- 200 000 canaux spectraux dominés par le bruit
- réponse instrumentale + bruit variable
- spectres = raies inconnues + ligne de base

- ▷ Sources astrophysiques sous forme séparable : un spectre  $s \times$  une image aavec s = Du, u parcimonieux : modèle plus contraint  $\Rightarrow \nearrow$  détections
- ▷ Modèles parcimonieux pour classification / segmentation robuste au bruit  $d(s_1, s_2) = ||u_1 - u_2||$ , avec  $s_i = Du_i$ ,  $u_i$  parcimonieux

Crédit image : J. Péty, Institut de Radioastronomie Millimétrique (IRAM, Grenoble)

# Plan

Synthèse des activités

Problèmes inverses et parcimonie : modèles et algorithmes

3) Imagerie hyperspectrale en astronomie

4 Contrôle non destructif par ultrasons

5) Optimisation exacte en norme  $\ell_0$  et Mixed Integer Programming

CND ultrasonore : principe de mesure et déconvolution Thèse E. Carcreff, 2011-2014 ; thèse N. Laroche, 2017-....



$$y(t) = (h * x)(t) + \epsilon(t) = \int_{u} h(t-u) x(u) du + \epsilon(t)$$
 [Saniie et Nagle 1989]

Déconvolution parcimonieuse : réflectivité x nulle presque partout

## Modèle convolutif à haute résolution

Données échantillonnées à  $T_e$  :  $y_n = y(nT_e) \simeq \int_u h(nT_e - u) x(u) du$ 

■ Choix standard : modèle discrétisé à la période T<sub>e</sub>

$$y_n \simeq T_e \sum_m h\left((n-m)T_e\right) \times (mT_e) = (h_e * x_e)[n]$$

 $\odot$  calculs rapides dans les algorithmes (FFT)

erreurs de discrétisation



## Modèle convolutif à haute résolution

Données échantillonnées à  $T_e$  :  $y_n = y(nT_e) \simeq \int_u h(nT_e - u) x(u) du$ 

Choix standard : modèle discrétisé à la période  $T_e$ 

$$y_n \simeq T_e \sum_m h\left((n-m)T_e\right) \times (mT_e) = (h_e * x_e)[n]$$

calculs rapides dans les algorithmes (FFT)
 erreurs de discrétisation



# Discrétisation plus fine à $T_e/L$



2 / 6

Système MISO (Multiple Inputs, Single Output)

 $\epsilon$ 

## Déconvolution parcimonieuse MISO

**I**  $y = Hx + \epsilon = H_1x_1 + \cdots + H_Lx_L + \epsilon$ , avec  $H_\ell$  matrices de convolution

- Produits  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^T \cdot \rightsquigarrow L$  convolutions discrètes
- Algorithmes gloutons OMP, OLS, SBR et optimisation  $\ell_1$  (homotopie)



E. Carcreff, S.B., J. Idier et L. Simon, Proc. IEEE ICASSP 2013

4. Contrôle non destructif par ultrasons

## Modèle de propagation acoustique

Matériaux atténuants ~> dissipation thermique et diffusion [Fink & Cardoso 1984]

 $\Rightarrow$  fonction de transfert  $H(f, z) = A_z e^{-\alpha(f) z} e^{-j2\pi f z/c(f)}$ 

- Atténuation du signal dépendant de la fréquence  $\alpha(f) = \alpha_0 |f|^{\gamma}$
- Vitesse du son dépendant de la fréquence c(f)avec  $\frac{2 \pi f}{c(f)} = \frac{2\pi f}{c_{\infty}} - \frac{1}{F_e} \int_{g=-F_e/2}^{F_e/2} \alpha(g) \cot\left(\frac{\pi}{F_e}(f-g)\right) dg$  [Kuc 1984]

 $\rightsquigarrow\,$  déformation de l'onde lors de sa propagation

Formulation d'un problème inverse :  $y = H H_a x + \epsilon$ , x parcimonieux

E. Carcreff, S.B., J. Idier et L. Simon, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control, 2014

## Modèle de propagation acoustique : validation expérimentale

Détection de trou proche du fond (Plexiglas<sup>®</sup>)





Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans

Figure thèse E. Carcreff.  $\gamma = 1$ ,  $\alpha_0 = 12.3 \text{ Np.MHz}^{-1} \text{.m}^{-1}$ ,  $c_{\infty} = 2805 \text{ m.s}^{-1}$ .

HDR S. Bourguignon

4. Contrôle non destructif par ultrasons

24 / 38

#### Perspectives : imagerie ultrasonore des matériaux

Inversion de données Full Matrix Capture<sup>†</sup> Signaux temporels  $u_i \rightarrow v_j$  :  $\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}\mathbf{o} + \boldsymbol{\epsilon}$ 

$$\sim \min_{\boldsymbol{o}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{o}\|^2 + \mu_1 \|\boldsymbol{o}\|_1 + \mu_2 \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{o}\|^2$$



HDR S. Bourguignon

4. Contrôle non destructif par ultrasons

6/6

 $<sup>^\</sup>dagger N.$  Laroche, E. Carcreff, S.B., J. Idier et A. Duclos, Proc. IEEE Ultrasonics Symposium, 2018 + soumis à IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control.

Perspectives : imagerie ultrasonore des matériaux

Inversion de données Full Matrix Capture<sup>†</sup> Signaux temporels  $u_i \rightarrow v_j$  :  $\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}\mathbf{o} + \mathbf{\epsilon}$ 

$$\sim \min_{\boldsymbol{o}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{o}\|^2 + \mu_1 \|\boldsymbol{o}\|_1 + \mu_2 \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{o}\|^2$$



7/6

Inversion de "données" TFM (Total Focusing Method [Holmes et al., 2005])

$$\begin{aligned} \text{Delay-And-Sum}: \ o_{\mathsf{TFM}}(x,z) &= \sum_{i,j} y_{ij}\big(\tau(x,z,i,j)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{o}_{\mathsf{TFM}} = \mathbf{B}\boldsymbol{y} \\ & \sim \quad \boldsymbol{o}_{\mathsf{TFM}} = \mathbf{B}\mathbf{H}\boldsymbol{o} + \boldsymbol{\epsilon}' \end{aligned}$$

- "Déconvolution" de l'image TFM
- Design d'une matrice de mesure B?

 $\rightsquigarrow$  co-conception acquisition/reconstruction

HDR S. Bourguignon

 $<sup>^\</sup>dagger N.$  Laroche, E. Carcreff, S.B., J. Idier et A. Duclos, Proc. IEEE Ultrasonics Symposium, 2018 + soumis à IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control.

# Plan

## Synthèse des activités

2 Problèmes inverses et parcimonie : modèles et algorithmes

Imagerie hyperspectrale en astronomie

④ Contrôle non destructif par ultrasons

**5** Optimisation exacte en norme  $\ell_0$  et *Mixed Integer Programming* 

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{P}} rac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \|^{2} ext{ s.c. } \| \boldsymbol{x} \|_{0} \leq K$$

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p} rac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \|^2 ext{ s.c. } \| \boldsymbol{x} \|_0 \leq K$$

 $\mathcal{P}_{0/2}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{x}\|_0 \text{ s.c. } \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 \leq \alpha \quad \left| \quad \mathcal{P}_{2+0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{x}\|_0 \right|$ 

$$\mathcal{P}_{2/0}$$
 : min $_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{P}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2}$  s.c.  $\|\boldsymbol{x}\|_{0} \leq K$ 

 $\mathcal{P}_{0/2}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \|\boldsymbol{x}\|_{0} \text{ s.c. } \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \leq \alpha \quad \left| \quad \mathcal{P}_{2+0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} + \mu \|\boldsymbol{x}\|_{0} \right|$ 

• Méthodes classiques non optimales sur dictionnaires corrélés

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{oldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p} rac{1}{2} \|oldsymbol{y} - oldsymbol{A} oldsymbol{x}\|^2 ext{ s.c. } \|oldsymbol{x}\|_0 \leq oldsymbol{K}$$

 $\mathcal{P}_{0/2}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \|\boldsymbol{x}\|_{0} \text{ s.c. } \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \leq \alpha \quad \left| \quad \mathcal{P}_{2+0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} + \mu \|\boldsymbol{x}\|_{0} \right|$ 

- Méthodes classiques non optimales sur dictionnaires corrélés
- ∃ problèmes difficiles de taille modérée (K et/ou P faible : small data!)
   ex : déconvolution 1D, démélange spectral, sélection de variables corrélées, ...

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{oldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p} rac{1}{2} \|oldsymbol{y} - oldsymbol{A} oldsymbol{x}\|^2 ext{ s.c. } \|oldsymbol{x}\|_0 \leq oldsymbol{K}$$

 $\mathcal{P}_{0/2}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \|\boldsymbol{x}\|_{0} \text{ s.c. } \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \leq \alpha \quad \left| \quad \mathcal{P}_{2+0}: \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} + \mu \|\boldsymbol{x}\|_{0} \right|$ 

- Méthodes classiques non optimales sur dictionnaires corrélés
- ∃ problèmes difficiles de taille modérée (K et/ou P faible : small data!)
   ex : déconvolution 1D, démélange spectral, sélection de variables corrélées, ...
- Optimisation NP difficile. . . [Natarajan 1995, Bienstock 1996] mais ne revient pas à évaluer *exhaustivement* l'ensemble des combinaisons!

S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE Trans. on Signal Processing, 2016

HDR S. Bourguignon

5. Optimisation exacte en norme  $\ell_0$ 

• Variables binaires  $b_p$  telles que  $b_p = 1 \Leftrightarrow x_p \neq 0$ . Alors,  $\|x\|_0 = \sum_{p=1}^{P} b_p$ .

S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE Trans. on Signal Processing, 2016

- Variables binaires  $b_p$  telles que  $b_p = 1 \Leftrightarrow x_p \neq 0$ . Alors,  $\|x\|_0 = \sum_{p=1}^{P} b_p$ .
- Hypothèse Big-M :  $|x_p| \le M$  pour M suffisamment grand [Bienstock 1996]

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{p}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \text{ s.c. } \|\boldsymbol{x}\|_{0} \leq \boldsymbol{K} \Leftrightarrow \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{p}\\\boldsymbol{b}\in\{0,1\}^{p}}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{p} b_{p} \leq \boldsymbol{K} \\ \forall p,-Mb_{p} \leq x_{p} \leq Mb_{p} \end{cases}$$

S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE Trans. on Signal Processing, 2016

- Variables binaires  $b_p$  telles que  $b_p = 1 \Leftrightarrow x_p \neq 0$ . Alors,  $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_{p=1}^{P} b_p$ .
- Hypothèse Big-M :  $|x_p| \le M$  pour M suffisamment grand [Bienstock 1996]

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{P}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \text{ s.c. } \|\boldsymbol{x}\|_{0} \leq K \Leftrightarrow \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{P}\\\boldsymbol{b}\in\{0,1\}^{P}}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{p} b_{p} \leq K\\ \forall p, -Mb_{p} \leq x_{p} \leq Mb_{p} \end{cases}$$

#### **Résolution** via **CPLEX** (déconvolution, N = 120, P = 100)



S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE Trans. on Signal Processing, 2016

## Vers des méthodes de résolution spécifiques

ANR MIMOSA: Mixed-Integer programming Methods for Optimization of Sparse Approximation criteria.

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{P}\\\boldsymbol{b}\in\{0,1\}^{P}}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{p} b_{p} \leq K \\ \forall p, -Mb_{p} \leq x_{p} \leq Mb_{p} \end{cases}$$

C'est un MIP simple, pouvant bénéficier de stratégies dédiées...

- Arbre de décision pour les variables binaires
- À chaque nœud, les variables binaires non fixées sont *relâchées* dans [0,1]
  - ∼ relaxation continue : borne inférieure sur l'ensemble des sous-problèmes du nœud
- Si cette borne est supérieure à la meilleure solution connue, **la branche est élaguée**



- $\triangleright$  Sur quelle variable  $b_p$  brancher?
- $\triangleright$  Quel côté (0/1) explorer en premier?
- ▷ Quel nœud explorer en premier?

R. Ben Mhenni, S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE ICASSP 2020

- Arbre de décision pour les variables binaires
- À chaque nœud, les variables binaires non fixées sont *relâchées* dans [0,1]
  - ∼ relaxation continue : borne inférieure sur l'ensemble des sous-problèmes du nœud
- Si cette borne est supérieure à la meilleure solution connue, **la branche est élaguée**



- Sur quelle variable b<sub>p</sub> brancher?
   variable relâchée la plus proche de 1
- hinspace Quel côté (0/1) explorer en premier?  $b_p = 1$
- Quel nœud explorer en premier? en profondeur d'abord

R. Ben Mhenni, S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE ICASSP 2020

5. Optimisation exacte en norme  $\ell_0$ 

- Arbre de décision pour les variables binaires
- À chaque nœud, les variables binaires non fixées sont *relâchées* dans [0,1]
  - ∼ relaxation continue : borne inférieure sur l'ensemble des sous-problèmes du nœud
- Si cette borne est supérieure à la meilleure solution connue, **la branche est élaguée**



- Sur quelle variable b<sub>p</sub> brancher? variable relâchée la plus proche de 1
- $ho \;$  Quel côté (0/1) explorer en premier?  $b_p=1$
- Quel nœud explorer en premier? en profondeur d'abord
- ▷ Calcul des relaxations?

R. Ben Mhenni, S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE ICASSP 2020

- Arbre de décision pour les variables binaires
- À chaque nœud, les variables binaires non fixées sont *relâchées* dans [0,1]
  - ∼ relaxation continue : borne inférieure sur l'ensemble des sous-problèmes du nœud
- Si cette borne est supérieure à la meilleure solution connue, **la branche est élaguée**



- Sur quelle variable b<sub>p</sub> brancher? variable relâchée la plus proche de 1
- hinspace Quel côté (0/1) explorer en premier?  $b_p = 1$
- Quel nœud explorer en premier? en profondeur d'abord
- ▷ Calcul des relaxations? optimisation en norme ℓ<sub>1</sub>...

R. Ben Mhenni, S.B., J. Ninin, H. Carfantan et M. Mongeau, IEEE ICASSP 2020

HDR S. Bourguignon

5. Optimisation exacte en norme  $\ell_0$ 

## Relaxation continue et norme $\ell_1$

$$\mathcal{P}_{2/0}: \min_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{P} \\ \boldsymbol{b} \in \{0,1\}^{P}}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{\rho} b_{\rho} \leq K \\ \forall \rho, -Mb_{\rho} \leq x_{\rho} \leq Mb_{\rho} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}_{2/0}^{R}: \min_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{P} \\ \boldsymbol{b} \in [0,1]^{P}}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{\rho} b_{\rho} \leq K \\ \forall \rho, -Mb_{\rho} \leq x_{\rho} \leq Mb_{\rho} \end{cases}$$



#### On montre que $^{1}$

$$\min \mathcal{P}_{2/0}^{R} = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{p}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^{2} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{p} |\boldsymbol{x}_{p}| \leq MK \\ \forall p, \ |\boldsymbol{x}_{p}| \leq M \end{cases}.$$

<sup>1</sup>Preuve : pour un minimiseur  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{b}^*)$  de  $\mathcal{P}^R_{2/0}$ , on a  $|\mathbf{x}^*| = M\mathbf{b}^*$ ...

HDR S. Bourguignon

5. Optimisation exacte en norme  $\ell_0$ 

# Relaxation continue dans la procédure branch-and-bound

# À un nœud donné :

- $b_{S_0} = 0$  et  $x_{S_0} = 0$
- ▶  $\boldsymbol{b}_{S_1} = \boldsymbol{1}$  et  $|\boldsymbol{x}_{S_1}| \leq M$
- $\boldsymbol{b}_{\mathcal{S}}$  indéterminées et  $|\boldsymbol{x}_{\mathcal{S}}| \leq M \boldsymbol{b}_{\mathcal{S}}$
- $\rightsquigarrow \sum_{p} b_{p} = \operatorname{Card} S_{1} + \sum_{p \in S} b_{p}$



$$\mathcal{P}_{2/0}^{(i)} \stackrel{\mathcal{R}}{:} :\min_{\boldsymbol{x}_{S}, \, \boldsymbol{x}_{S_{1}}} \frac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}_{S} \boldsymbol{x}_{S} - \boldsymbol{A}_{S_{1}} \boldsymbol{x}_{S_{1}} \|_{2}^{2} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \| \boldsymbol{x}_{S} \|_{1} \leq M(K - \text{Card } S_{1}) \\ \| \boldsymbol{x}_{S} \|_{\infty} \leq M \\ \| \boldsymbol{x}_{S_{1}} \|_{\infty} \leq M \end{cases}$$

 $\triangleright$  Moindres carrés, norme  $\ell_1$  (partielle) et contraintes de borne.

Plus de variables binaires!

#### Optimisation en norme $\ell_1$ (partielle) et contraintes de borne

Algorithme homotopique [Osborne et al. 2000]

(avec bornes : [Liang & Wang 2017])

$$\min_{\mathbf{x}_{S}, \mathbf{x}_{S_{1}}} \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A}_{S} \mathbf{x}_{S} - \mathbf{A}_{S_{1}} \mathbf{x}_{S_{1}} \|_{2}^{2} + \lambda \| \mathbf{x}_{S} \|_{1} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \| \mathbf{x}_{S} \|_{\infty} \leq M \\ \| \mathbf{x}_{S_{1}} \|_{\infty} \leq M \end{cases}$$

$$\overset{\mathbf{x}^{*} \mathbf{x}_{4}^{*}}{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}}{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}}{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}}{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*}} \underbrace{ \bigwedge_{1}^{*} \underbrace{ \bigwedge_{1}$$

 $\triangleright$  Résout similairement les formulations contraintes pour  $\mathcal{P}_{2/0}$  et  $\mathcal{P}_{0/2}$ 

HDR S. Bourguignon

5. Optimisation exacte en norme  $\ell_0$ 

7 / 12

R. Ben Mhenni, S.B. et J. Ninin, soumis à Optimization Methods and Software, 2019

## Temps de calcul, déconvolution parcimonieuse

#### $\blacksquare$ N = 120, P = 100, RSB = 10 dB, moyennes sur 50 instances

Pro	blème	Propre Branch-and-Bound		Solveur MIP CPLEX12.8			
		Temps	Nb. nœuds	NR	Temps	Nb. nœuds	NR
		(s)	$(\times 10^{3})$		(s)	$(\times 10^{3})$	
$\mathcal{P}_{2/0}$	<i>K</i> = 5	0.7	1.28	0	3.0	1.71	0
	<i>K</i> = 7	11.6	17.89	0	16.6	21.51	0
	K = 9	43.5	57.37	9	53.8	72.04	6
$\mathcal{P}_{0/2}$	K = 5	0.1	0.21	0	25.7	6.71	0
	<i>K</i> = 7	0.9	2.32	0	114.8	49.54	2
	K = 9	2.5	5.22	0	328.2	101.07	17
$\mathcal{P}_{2+0}$	<i>K</i> = 5	1.8	2.01	0	3.2	1.98	0
	K = 7	7.3	10.20	0	7.4	9.61	0
	<i>K</i> = 9	25.6	31.80	5	17.3	23.74	2

Rq:  ${\rm C}_{100}^5~\sim 7.5\,10^7$  ,  ${\rm C}_{100}^7\sim 1.6\,10^{10}$  ,  ${\rm C}_{100}^9\sim 1.9\,10^{12}$ 

- > Stratégie d'exploration compétitive malgré sa simplicité
- $\triangleright$  Performances  $\geq$  CPLEX,  $\gg$  CPLEX pour  $\mathcal{P}_{0/2}$

HDR S. Bourguignon

## Temps de calcul, matrice aléatoire

#### $\blacksquare$ N = 500, P = 1000, RSB = 10 dB, moyennes sur 50 instances

		Propre Branch-and-Bound			Solveur MIP CPLEX12.8		
Problème		Temps	Nb. nœuds	NR	Temps	Nb. nœuds	NR
		(s)	(×10 <sup>3</sup> )		(s)	$(\times 10^{3})$	
$\mathcal{P}_{2/0}$	<i>K</i> = 5	1.1	0.02	0	70.7	0.03	0
	K = 10	6.2	0.06	0	371.7	0.31	5
	K = 15	33.9	0.38	7	665.3	0.72	42
$\mathcal{P}_{0/2}$	<i>K</i> = 5	0.2	0.01	0	360.9	0.28	28
	K = 10	2.6	0.04	0	-	-	50
	K = 15	113	1.02	0	-	-	50
$\mathcal{P}_{2+0}$	K = 5	0.6	0.06	0	118.1	0.11	0
	K = 10	2.5	0.13	0	189.4	0.42	3
	K = 15	19.5	0.52	11	665.3	2.15	40

# Possibilité de monter en dimension (≠ CPLEX : exploration et relaxations inefficaces)

Perspectives : algorithmes branch-and-bound (encore) plus spécifiques

Perspectives : algorithmes branch-and-bound (encore) plus spécifiques

Amélioration des relaxations  $f^{\mathcal{R}}$  (élagage si  $f^{\mathcal{R}} > f^{sup}$ )



• Relaxation  $\ell_1$  : méthodes duales

• Relaxations non convexes



• Relaxation lagrangienne, coupes ...

Perspectives : algorithmes branch-and-bound (encore) plus spécifiques

Amélioration des relaxations  $f^{\mathcal{R}}$  (élagage si  $f^{\mathcal{R}} > f^{sup}$ )



• Relaxation  $\ell_1$  : méthodes duales

Relaxations non convexes



• Relaxation lagrangienne, coupes ...

#### Stratégies d'exploration

- Règles de branchement et heuristiques plus complexes
- Exploitation de screening [Ramadge 2012]

## Démélange spectral et MIP

#### Démélange spectral :

[Heinz & Chein-I-Chang 2001]

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}\|_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{p}, \ 0 \leq x_p \leq 1 \\ \sum_p x_p = 1 \end{cases}$$

- Reformulation MIP avec  $b_p = 1 \Leftrightarrow x_p \neq 0$  "naturelle" :  $0 \leq x \leq b$
- Contrainte  $\ell_0$  + parcimonie structurée<sup>†</sup>



 $\Rightarrow$  reformulations MIP *exactes*<sup>†</sup>

 $\rightsquigarrow$  Algorithmes branch-and-bound sur mesure

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>R. Ben Mhenni, S.B., J. Ninin et F. Schmidt, Proc. IEEE WHISPERS, 2018

Optimisation globale d'autre problèmes en norme  $\ell_0$ 

**Représentation parcimonieuse** : min  $||x||_0$  s.c. y = Ax

pas de bruit  $\Rightarrow$  problèmes plus simples  $\Rightarrow$  plus grandes dimensions

Ensemble des solutions de min  $||\mathbf{x}||_0$  s.c.  $\frac{1}{2}||\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}||^2 \le \alpha$ Imposer l'unicité :

$$\min \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \|^2 \text{ s.c. } \mathbf{x} \in \left\{ \operatorname{Arg\,min} \| \mathbf{x} \|_0 \text{ s.c. } \frac{1}{2} \| \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x} \|^2 \le \alpha \right\}$$

Optimisation multi-objectif

 $\min \frac{1}{2} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \|^2$  s.c.  $\| \boldsymbol{x} \|_0 \leq K$ ,  $\forall K = 1, \dots, K_{\max}$ 

## Merci pour votre présence et votre attention.



Éloge du pas de côté Place du Bouffay, Nantes

Crédit image © Marie-Anne