

Approches numériques innovantes pour l'endommagement, la rupture et les structures à géométrie complexe

Grégory Legrain

▶ To cite this version:

Grégory Legrain. Approches numériques innovantes pour l'endommagement, la rupture et les structures à géométrie complexe. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Nantes, 2017. tel-02563064

HAL Id: tel-02563064 https://hal.science/tel-02563064

Submitted on 5 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés. Mémoire en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Grégory Legrain Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Nantes

Approches numériques innovantes pour l'endommagement, la rupture et les structures à géométrie complexe

Présenté le 28 septembre 2017

Jury :

Président :	Antonio Huerta	Université Polytechnique de Catalogne
Rapporteurs :	Anthony Gravouil	INSA de Lyon
	Jean-François Remacle	Université Catholique de Louvain
	Julien Yvonnet	Université Paris-Est
Examinateurs :	Patrice Cartraud	Ecole Centrale de Nantes
	Steven Le Corre	Université de Nantes
	Nicolas Moës	Ecole Centrale de Nantes

L'ennui dans ce monde, c'est que les idiots sont sûrs d'eux et les gens sensés pleins de doutes. [Bertrand Russell]

Je ne sais qu'une chose, c'est que je ne sais rien. [Socrate]

Merci!

Rédiger des remerciements est toujours un moment compliqué... Ça l'était il y a 10 ans pour ma thèse, et ça le reste pour cette habilitation...

Tout d'abord, je voudrais remercier sincèrement les membres de mon Jury : Anthony Gravouil, Jean-François Remacle et Julien Yvonnet pour avoir accepté de rapporter mon travail durant leurs congés estivaux... Steven Le-Corre pour sa participation au Jury et Antonio Huerta pour avoir accepté de présider les débats (après avoir déjà examiné ma thèse!). Un grand merci à ce jury de "Galac-tiques" ¹ (Clément préférerait "Experts" ² j'imagine) pour la grande pertinence de leurs remarques et leur grande bienveillance lors de l'étude de mes travaux.

Un merci tout particulier à Patrice Cartraud et Nicolas Moës pour toutes ces années à travailler en leur compagnie : vous m'avez énormément appris, et je vous en suis très reconnaissant. Mention spéciale à Patrice pour son aide à la structuration de ce manuscrit et de la soutenance !

Enfin, merci à tous les membres du laboratoire avec lesquels j'ai toujours autant de plaisir à débattre d'aspects scientifiques (et autres!). Une idée finalement publiée prend souvent racine lors de ces discussions informelles... Un grand merci donc à Nicolas Chevaugeon, Anthony Nouy, Alexis Salzman, Mathilde Chevreuil, Laurent Stainier, Julien Réthoré, Gilles Marckmann, Benoît Lé, Thomas Heuzé, Patrick Rozicky, Pascal Cosson, Claude Stolz et Laurent Gornet pour ces discussions sans concession!

Impossible pour une HDR d'oublier les doctorants que j'ai eu l'honneur de suivre durant ces années : sans eux, ce manuscrit serait réduit à peau de chagrin ! Par ordre "d'ancienneté", merci à Raphaël (Allais), Wei-Dong (Lian), Loïc (Giraldi), Albdelghani (Matine) et Benoît (Lé) !

Merci également à celles et ceux sans lesquels le GeM ne pourrait fonctionner : Cynthia, Caroline, Sandra, Eric, Antonin!

Enfin, pour terminer, je ne peux oublier ma famille qui a toujours été là pour moi, vous en particulier, Papa, Maman. Et last but not least, merci Claire, Chloé et Clément pour votre soutien au quotidien. Sans vous, la vie serait bien fade!

^{1.} https://fr.wikipedia.org/wiki/Real_Madrid_Club_de_F%C3%BAtbol

^{2.} https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quipe_de_France_de_handball_masculin



Clément, maillé (non conforme, bien entendu!)



Level-Set Chlo
é $(ls < 0. \ \& \ ls)$

Table des matières

I	I Dossier personnel										
1	Curriculum vitæ										
	1.1	Formation									
	1.2	Activi	ités d'enseignement	18							
		1.2.1	Numerical methods	18							
		1.2.2	Méthode des éléments finis	18							
		1.2.3	Encadrement de projets	20							
	1.3	Respo	nsabilités collectives liées à l'enseignement	21							
2	Synt	thèse d	les activités d'encadrement et de recherche	23							
	2.1	Activi	ités d'encadrement	23							
		2.1.1	Thèses de doctorat	23							
		2.1.2	Chercheurs post-doctoraux	26							
		2.1.3	Stages de Master recherche	26							
	2.2	Rayor	nement scientifique	26							
		2.2.1	Distinctions scientifiques	26							
		2.2.2	Conférences invitées dans des congrès internationaux majeurs	27							
		2.2.3	Invitations / mobilités dans des universités et instituts étrangers	27							
		2.2.4	Collaborations internationales	27							
		2.2.5	Cours dans des écoles d'été, formations doctorales,	27							
		2.2.6	Séminaires dans des universités nationales et étrangères	28							
	2.3	Respo	onsabilités scientifiques	28							
		2.3.1	Contrats industriels	28							
		2.3.2	Contrats publics	28							
		2.3.3	Organisations de congrès nationaux / internationaux	28							
	2.4	Inform	nations complémentaires : Autres activités et Responsabilités	29							
		2.4.1	Autres responsabilités liées à la recherche	29							
		2.4.2	Reviewer dans des journaux scientifiques	29							
		2.4.3	Reviewer pour des congrès	29							
		2.4.4	Chairman lors de congrès	29							
		2.4.5	Comités de recrutement	30							
		2.4.6	Comités de suivi de thèse	30							
		2.4.7	Activité reconnue de vulgarisation scientifique	30							

Produ	ction scientifique	30
2.5.1	Articles dans des revues internationales à comité de lecture	30
2.5.2	Articles dans des revues nationales à comité de lecture	32
2.5.3	Conférences	32
2.5.4	Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés	32
2.5.5	Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés	33
2.5.6	Contribution à ouvrage édité	34
	Produ 2.5.1 2.5.2 2.5.3 2.5.4 2.5.5 2.5.6	 Production scientifique

II Dossier recherche

3 Introduction

37

41

	4 Contributions aux problématiques de simulation de la durabilité des matériaux						
	4.1	Problé	matique et contexte scientifique				
	4.2	Exten	sion de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture et aux				
		matér					
		4.2.1					
		4.2.2	Stabilité des formulations mixtes				
		4.2.3	Stabilité des formulations mixtes enrichies				
		4.2.4	Vérifications				
		4.2.5	Bilan partiel				
	4.3	Appro	ches numériques pour la caractérisation de l'intégrité des structures de confine-				
		ment					
		4.3.1	Extraction d'ouvertures de fissures équivalentes à un champ d'endommagement				
		4.3.2	Approche par level-set épaisse pour l'intégrité des structures du génie civil				
	4.4	Concl	usion				
5	Арр	roches	innovantes pour la simulation de structures à géométrie complexe				
	5.1	Introd	uction				
	5.2	Éléme	nts finis étendus pour les structures à géométrie complexe				
		5.2.1	Simulation de structures aéronautiques par une approche X-FEM + Level-sets				
		5.2.2	Vers une approche intégrée pour la simulation à partir d'imagerie				
		5.2.3	Bilan partiel				
	5.3	Maîtri	se de l'erreur d'approximation pour les approches PUM				
		5.3.1	Contexte				
		5.3.2	Problème modèle				
		5.3.3	Estimation d'erreur pour méthodes de partition de l'unité				
		534	Estimateur d'erreur Flux-Free pour éléments finis enrichis				
		0.0.4	Louinateur a circui ritax rice pour ciciterito into cititerito i i i i i i i i i i i i i i i i i i				
		5.3.5	Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho	Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho 5.4.1	Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho 5.4.1 5.4.2	Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho 5.4.1 5.4.2 5.4.3	Bilan partiel Bilan partiel bdes de résolution robustes et efficaces pour images haute résolution Bilan partiel Introduction Bilan partiel Espaces de tenseurs et représentations séparées Bilan partiel Algorithmes de résolution pour formats tensoriels Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho 5.4.1 5.4.2 5.4.3 5.4.4	Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel bdes de résolution robustes et efficaces pour images haute résolution Bilan partiel Introduction Bilan partiel Espaces de tenseurs et représentations séparées Bilan partiel Algorithmes de résolution pour formats tensoriels Bilan partiel Cas de problèmes définis sur image Bilan partiel				
	5.4	5.3.5 Métho 5.4.1 5.4.2 5.4.3 5.4.4 5.4.5	Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel Introduction Bilan partiel Introduction Bilan partiel Introduction Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel Bilan partiel				

Table des matières

6	Vers	des m	néthodes X-FEM de haut ordre	109			
	6.1	Introd	luction	109			
	6.2	6.2 Séparation de l'approximation et de la géométrie					
		6.2.1	Approches de domaines fictifs de haut ordre	110			
		6.2.2	Procédures d'intégration efficaces pour domaines fictifs	111			
	6.3	Appro	oches de domaines fictifs de haut ordre avec intégration polygonale	113			
		6.3.1	Influence de la précision de l'intégration	113			
		6.3.2	Cas des interfaces matériaux	114			
		6.3.3	Bilan partiel	116			
	6.4	Form	ulations d'ordre élevé pour les structures minces	117			
		6.4.1	Procédures de maillage anisotrope	118			
		6.4.2	Liaison entre géométrie et approximation	119			
		6.4.3	Exemple de vérification : Toiture de Scordelis-Lo	119			
		6.4.4	Bilan partiel	122			
	6.5	Appro	oche domaines fictifs avec représentation géométrique exacte	123			
		6.5.1	Surface, courbe NURBS	123			
		6.5.2	Présentation de la stratégie	124			
		6.5.3	Applications	128			
		6.5.4	Bilan partiel	129			
	6.6	Prise o	en compte des incertitudes en homogénéisation	130			
		6.6.1	Motivation	130			
		6.6.2	Approche de réduction de modèle pour des calculs d'homogénéisation sto-				
			chastique	131			
		6.6.3	Application à une micro-structure 3D réelle	133			
		6.6.4	Bilan partiel	134			
	6.7	Concl	usion	135			
7	Con	clusion	- perspectives	139			

Dossier personnel

1 Curriculum vitæ

Nom de famille : LEGRAINPrénom : GrégoryDate de naissance : 03/10/1979Grade : Maître de conférences 2ème classeÉtablissement d'affectation : École Centrale de NantesLaboratoire d'affectation : Institut de recherche en génie civil et mécanique (GeM)

1.1 Formation

2007 –	Maître de conférences à l'École Centrale de Nantes. Activités de recherche
	au GeM (Institut de recherche en génie civil et mécanique) UMR CNRS 6183.
	Activités d'enseignement dans le département MMGC (mécanique, thermique,
	génie-civil).
2006 - 2007	Chercheur post-doctorant au GeM et au LaCàN (Université Polytechnique de
	Catalogne, Espagne).
	Extraction d'ouverture de fissures à partir de modèles d'endommagement.
	Encadré par F.Dufour, A.Huerta et G.Pijaudier-Cabot
2003 - 2006	Thèse de doctorat
	Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des
	milieux hyperélastiques
	Réalisée à l'Institut de recherche en génie civil et mécanique (GeM), encadré par
	N.Moës et E.Verron
2002 - 2003	Diplôme d'études approfondies (mention Très Bien, classé premier)
	Réalisé à l'École Centrale de Nantes.
2002	Agrégation externe de mécanique (classé 7 ^{ème} /61)
1999 – 2002	École Normale Supérieure de Cachan
	Département de Génie Mécanique
	Licence (mention AB) - Maîtrise (mention B) - Magistère de mécanique (mention
	B)
1997 – 1999	Classes préparatoires aux grandes écoles (filière Physique-Technologie)
	Lycée Jules Renard, Nevers.
	Admis à l'ENS Cachan, École Polytechnique, École Centrale Paris, Supelec.

1.2 Activités d'enseignement

J'ai été recruté au premier octobre 2007 à l'École Centrale de Nantes, et affecté à la même date au département d'enseignement MMGC (Mécanique, Matériaux, Génie-Civil). Mes activités d'enseignement se répartissent sur les différentes années de la formation ingénieur généraliste ainsi que sur la première année du master international Sciences Mécaniques Appliquées (SMA). Avant ce recrutement, j'étais intervenu en tant que moniteur normalien dans les formations d'ingénieur généraliste et de spécialité à hauteur de 64 heures eq. TD par an. La synthèse des matières (hors projets) dans lesquelles je suis intervenu depuis mon recrutement est donnée dans le tableau 1.1. Je ne détaille ici que les matières dont je suis responsable (indiquées en gras dans le tableau).

1.2.1 Numerical methods

Ce cours est à destination des masters première année SMA (Sciences Mécaniques Appliquées), STEU (Sciences et Techniques des Environnements Urbains) et AMASONE (Master Atlantique en Opération et Ingénierie Navales) (\simeq 75 étudiants). Il comporte 25h de cours, et 25h de TD/TP (tout en Anglais). Je suis responsable de la partie cours et partage la partie TD/TP avec un doctorant. L'objectif de cette matière est d'introduire aux étudiants les méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles. La première partie du cours comporte des généralités sur les équations aux dérivées ordinaires et équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont ensuite étudiées plus en détail en s'intéressant à leur classification (notion de caractéristiques). La nécessité de spécifier des conditions initiales ainsi que des conditions limites est ensuite évoquée dans l'optique d'avoir un problème bien posé. La résolution numérique des équations elliptiques est alors présentée en débutant par la méthode des différences finies (en 1D et 2D). La notion de consistance du modèle numérique est abordée via l'erreur de troncature des opérateurs, tout comme la prescription des conditions limites de Neumann et de Dirichlet. Le cours présente ensuite l'affaiblissement des équations fortes de la thermique (formulation faible, formulation variationnelle) ainsi que la méthode des résidus pondérés. L'utilisation de ces approches pour obtenir des solutions approchées est ensuite introduite (méthodes de collocation, moindres carrés, Galerkin). Finalement, la méthode des éléments finis est présentée en 1D et 2D sous ses formes directe et iso-paramétrique.

Les étudiants profitent de 16h de travaux pratiques pour programmer la méthode des différences finies en 1D/2D et la méthode des éléments finis iso-paramétriques en 2D.

En pratique, j'ai pu modeler ce cours à ma guise en partant de zéro, avec en particulier : la rédaction d'un polycopié en anglais (132 pages), la préparation de séries de diapositives, la création de textes de TD et de travaux pratiques sur les différences finies 1D, 2D (matlab, puis python) ainsi que sur les éléments finis 2D (C++, python).

1.2.2 Méthode des éléments finis

Ce cours est un cours dispensé dans la formation ingénieur généraliste de l'École Centrale de Nantes. Il est commun entre trois options disciplinaires (option Calcul Intensif, option Modélisation et Simulation Mécanique et option Matériaux et Procédés $\simeq 70$ étudiants). L'équipe pédagogique est constituée de trois enseignants-chercheurs et moi-même. Ce cours vise à présenter aux étudiants les fondements de la méthode des éléments finis. Le cours débute par une rapide introduction qui permet de se focaliser sur les EDP elliptiques (équation de la chaleur). Les notions de formulation forte, faible et variationnelle sont ensuite présentées. Après quoi, les méthodes de Ritz et Galerkin sont introduites. La méthode des éléments finis dans l'espace physique est alors abordée en détail en 1D et 2D. Les limitations de l'approche en 2D permettent alors d'introduire les éléments finis isoparamétriques. Le cours se termine par la présentation de l'extension de la méthode à la mécanique

Matidua	Nitrootti	Time	2000	2000	0000	0100	1 11	010	2012	101	2015	2016
INTALLET	INIVEAU	ıype	7007	7000	2002		1117	7177	CT 17	701#	CT07	7010
Dynamique des solides	L3	TD/TP	36	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	·
Méthode des éléments finis	M1	TD/TP	31	32	28	7	27	31	32	ı	ı	ı
Mécanique des milieux conti-	L3	TD/TP	57	ı	ı	ı	ı	ı	I	ı	ı	30
snu												
Mécanique des vibrations	L3	TD/TP	68	70	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı
Engrenages	M2	TD	10	10	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı
Dynamique et vibrations	L3	TD/TP	ı	29	29	ı	38	32	ı	ı	ı	ı
Mécanique des milieux continues et discrets	L3	TD/TP		22	23	ı	ı	ı	ı	I.	i.	ı
Informatique INVIR	M1	C/TD/TP	ı	ı	20	23	30	9	9	ı	ı	ı
Numerical methods	M1	C/TD/TP	ı	38,5	38,5	38,5	48,5	62,5	55,5	87,5	85	85
Dynamique des structures	M1	TP	ı	ı	ı	ı	6		4	ı	ı	ı
Méthodes multi-échelle	M2	TP	ı	ı	ı	ı	ı	15	15	ı	ı	ı
Optimisation	M2	TP	ı	ı	ı	ı	ı	ı	6,75	ı	ı	ı
Méthode des éléments finis	M1	U	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	18	18	28
Introduction à la modélisa-	M1	C/TP	ı	ı	ı	ı	ı	ı	ı	~	~	4
tion numérique												
Total (hors encadrements)	ı	ı	202	201	138	63,5	152,5	146,5	119,25	112,5	110	150
Total (avec encadrements et PRP)	ı	ı	209	244	174	90,5*	194	260	231	217	197	211

TABLE 1.1 – Synthèse des enseignements (en heures eq. TD). (* : demi-délégation CNRS.)

1 Curriculum vitæ

ainsi que quelques notions de modélisation éléments finis et de calcul d'erreur.

Outre la rédaction des textes de travaux dirigés et le renouvellement annuel de sujets de projets sur un code de calcul industriel, j'ai construit un ensemble de "notebooks" python qui sont utilisés :

- Pour tester de manière interactive les algorithmes vus en TD (par exemple les algorithmes de stabilisation pour les équations de transport, cf. figure 1.1 a).
- Comme support pour une séance dédiée à l'iso-paramétrie (cf. figure 1.1 b)
- Comme support à une série de cinq travaux à la maison notés ayant pour thème la programmation de la méthode des éléments finis en 1D (prise en main de python, codage de la méthode en 1D, stabilisation SUPG en 1D, iso-paramétrie en 1D, prise en compte des conditions limites de Dirichlet par élimination, pénalisation et multiplicateurs de Lagrange)



FIGURE 1.1 – a. Exemple d'application interactive python; b. Exemple de résultats d'un "notebook" python

1.2.3 Encadrement de projets

Chaque année depuis 2012, j'encadre des groupes d'étudiants EI3 de l'option recherche et développement. Ces étudiants réalisent alors un projet de recherche d'une durée de 86 heures. Ces projets sont proposés en lien avec mes thématiques de recherche du moment. J'encadre également chaque année des projets d'option d'une durée de 80h. Ces projets peuvent être orientés industrie ou recherche. Pour ma part, je propose en général des sujets typés recherche, bien que moins ambitieux que pour l'option recherche et développement. Un grand nombre des étudiants que j'ai eus le plaisir de suivre au cours de ces projets ont ensuite choisi de poursuivre en doctorat.

1.3 Responsabilités collectives liées à l'enseignement

- Responsable d'option d'enseignement (*Simulation en Ingénierie Mécanique* 2011-2014, puis *Modélisation et Simulation Mécanique* depuis 2014) à l'École Centrale Nantes. Effectif 30 étudiants de dernière année :
 - Gestion de 10 enseignants et 4 intervenants extérieurs
 - Emplois du temps
 - Aide à la recherche de stages
 - Suivi des stages
 - Recherche de projets
 - Organisation des jurys de soutenance des projets et stages des étudiants
 - Participation aux soutenances des stages des étudiants

Cette responsabilité me confère d'ailleurs une prime de responsabilité pédagogique de 32h eq. TD.

- Directeur adjoint du département d'enseignement MMGC (Mécanique Matériaux Génie Civil) (trois options, 100 étudiants, 30 enseignants). Gestion des charges des enseignants, suivi budgétaire.
- Organisation du concours d'admission sur titre du groupe des écoles Centrales (CASTIng) 2008
 2014. Examinateur sur cette période et coordinateur de l'épreuve de mécanique (4 enseignants provenant de diverses écoles centrales) en 2012 et 2013. Rédaction de sujets de concours écrits et oraux, coordination des examinateurs et corrections.
- Membre élu du collège des Maîtres de Conférences au conseil d'administration de l'École Centrale de Nantes depuis novembre 2016.
- Mes responsabilités collectives liées à la recherche sont détaillées au chapitre 2.4.1.

Synthèse des activités d'encadrement et de recherche

2.1 Activités d'encadrement

2.1.1 Thèses de doctorat

Wei-Dong Lian

Titre	Application de l'approche X-FEM à l'homogénéisation de micro-					
	structures définies par imagerie : comparaison avec les approches					
	existantes et détermination du VER					
Publications	(LIAN, LEGRAIN et CARTRAUD 2013) (revue), (LEGRAIN, CARTRAUD et					
	Lian 2012; Cartraud, Legrain et Lian 2012; Chiad et al. 2009; Lian,					
	Legrain et Cartraud 2010) (conférences)					
Financement	Bourse CSC					
Encadrement	50% avec P.Cartraud					
Début - Fin	01/10/08 - 15/11/11					
Jury	Prof. Yvonnet (Rapporteur), Prof. Pilvin (Rapporteur), Prof. Sab, Prof.					
	Geindreau, Prof. Nouy, Prof. Cartraud, Dr. Legrain					
Situation	Développeur chez Comsol					

Raphaël Allais

Titre	Développement de deux estimateurs d'erreur à posteriori pour la mé-
	thode X-FEM.
Publications	(Legrain, Allais et Cartraud 2011) (revue), (Cartraud, Legrain, Al-
	lais et al. 2008; Allais, Legrain et Cartraud 2009; Allais, Legrain
	et Cartraud 2010) (conférences)
Financement	Bourse ministère
Encadrement	50% avec P.Cartraud
Début - Fin	01/09/08 - 09/11/12
Jury	Prof. Gravouil (Rapporteur), Prof. Coorevits (Rapporteur), Prof. Diez,
	Dr. Chamoin, Prof. Cartraud, Dr. Legrain
Situation	Professeur en classes préparatoires

on scien-	sociée	3ACTI,		2ACTI,		3ACTI,		4ACTI,		2ACTI,						
Productio	tifique as	1ACL,	1ACTN	1ACL,	1ACTN	2ACL,	1ACTN	2ACL,	2ACTN	1ACL,	1ACTN	1ACTI				
Taux d'encadrement		50%		50%		35%		30%		50%		70%	25%	30%	75%	100%
Financement		Bourse CSC		Bourse ministère		FUI		Bourse ministère		Bourse ERC		ERC				
Nom de l'étudiant		Wei-Dong Lian		Raphaël Allais		Loïc Giraldi		Abdelghani Matine		Benoît Lé		Carole Sarkis	Najib Belgacem	Abdelghani Matine	Teng Qing	Mario di-Siena
Niveau		Doctorat		Doctorat		Doctorat		Doctorat		Doctorat		Pos-Doc	M2R	M2R	M2R	M2R
Date de	fin	15/11/11		09/11/12		27/11/12		15/11/13		15/11/16		30/09/16	01/09/09	01/09/10	01/09/11	01/03/16
Date de	début	01/10/08		01/09/08		01/10/09		01/09/10		01/10/13		01/10/15	01/03/09	01/03/10	01/03/11	01/10/15

TABLE 2.1 – Synthèse des encadrements.

Loïc Giraldi

Titre	Contribution aux méthodes de calcul basées sur les approximations de				
	tenseurs et application en mécanique numérique				
Publications	(Giraldi, Nouy, Legrain et Cartraud 2013; Giraldi, Nouy et Le-				
	grain 2014) (revue), (Giraldi, Legrain et al. 2011; Giraldi, Nouy,				
	Legrain, Cartraud et Takano 2012; Giraldi, Nouy et Legrain 2013;				
	Nouy et al. 2012) (conférences)				
Financement	FUI				
Encadrement	35% (50% A. Nouy, 15% P.Cartraud)				
Début - Fin	01/10/09 - 27/11/12				
Jury	Prof. Rey (Rapporteur), Prof. Villon (Rapporteur), Prof. Matthies, Prof.				
	Falcó, Prof. Chinesta, Prof. Cartraud, Prof. Nouy, Dr. Legrain				
Situation	Post-Doc KAUST				

Abdelghani Matine

Titre	Homogénéisation des transferts thermiques par développements asymptotiques dans des structures composites avec prise en compte
	des effets de bord
Publications	(MATINE, BOYARD, CARTRAUD et al. 2013; MATINE, BOYARD, LEGRAIN
	et al. 2015) (revue), (Matine, Boyard, Cartraud et al. 2011; Matine,
	BOYARD, JARNY, LEGRAIN, CARTRAUD et THOMAS 2010; MATINE, BOYARD,
	Jarny, Legrain et Cartraud 2013a; Matine, Boyard, Jarny, Legrain
	et Cartraud 2012; Matine, Boyard, Jarny, Legrain et Cartraud
	2014; Matine, Boyard, Jarny, Legrain et Cartraud 2013b) (confé-
	rences)
Financement	Bourse ministère
Encadrement	30% (10% Y. Jarny, 45% N. Boyard, 15% P. Cartraud)
Début - Fin	01/09/10 - 15/11/13
Jury	Prof. Dumontet (Rapporteur), Prof. Moyne (Rapporteur), Prof. Cartraud,
	Prof. Jarny, Prof. Boyard, Dr. Legrain
Situation	Post-Doc

Remarque : La thèse de A. Matine a été encadrée en collaboration avec le Professeur Y. Jarny et le Docteur N. Boyard (CR CNRS) associés au Laboratoire de Thermique et Énergie de Nantes.

Benoît Lé

Titre	Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé :
	utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration
	et des renforts
Publications	(Lé, Legrain et Moës 2017) (revue), (Lé, Legrain et Moës 2015; Lé,
	Legrain et Moës 2016; Legrain, Lé et al. 2017) (conférences)
Financement	Bourse ERC XLS
Encadrement	50% avec N.Moës
Début - Fin	01/10/13 - 15/11/16
Jury	Prof. Sellier (Rapporteur), Dr. Jason (Rapporteur), Prof. Grange, Prof.
	Grondin, Dr. Giry, Prof. Moës, Dr. Legrain
Situation	Post-Doc

2.1.2 Chercheurs post-doctoraux

Carole Sarkis

Titre	Amélioration de l'efficacité de la méthode TLS par adaptation de
	maillage anisotrope
Publications	En préparation (Sarkis, Legrain et Moës 2017) (revue), (Legrain, Lé
	et al. 2017) (conférences)
Financement	ERC XLS
Encadrement	70% avec N.Moës
Début - Fin	01/10/15 - 30/09/16

2.1.3 Stages de Master recherche

Najib Belgacem

Titre	Détermination de la conductivité thermique dans un matériau compo-
	site périodique par application de la théorie de l'homogénéisation
Encadrement	25% (10% Y. Jarny, 45% N. Boyard, 20% P. Cartraud)
Début - Fin	Mars - septembre 2009

Abdelghani Matine

Usite
ique

Teng Qing

Titre	Prise en compte des effets de bord dans une formulation éléments finis
	enrichie.
Encadrement	75% avec P.Cartraud (25%)
Début - Fin	Mars - septembre 2011

Mario di Siena

Titre	Estimating crack opening in concrete structures using the Thick Level-
	Set Method
Encadrement	100%
Début - Fin	Octobre 2015 - Mars 2016

2.2 Rayonnement scientifique

2.2.1 Distinctions scientifiques

- Prix de thèse 2006 du CSMA
- Finaliste du prix de thèse 2006 ECCOMAS

2.2.2 Conférences invitées dans des congrès internationaux majeurs

Sixth International Workshop on High-Order Finite Element and Isogeometric Methods (HOFEIM 2014) Le workshop HOFEIM (http://www.cie.bv.tum.de/hofeim2014/) est un évènement de référence dans le domaine des méthodes numériques avancées de haut ordre et iso-géométriques. La participation se fait uniquement sur invitation, toutes les présentations sont plénières et d'une durée de 40 minutes. Le comité scientifique est constitué de scientifiques de renom : Ivo Babuska; Yuri Bazilevs; Alexey Chernov; Leszek Demkowicz; Alexander Düster; Thomas J. R. Hughes; Stefan Kollmannsberger; Ernst Rank; Alessandro Reali; Barna Szabo; Zohar Yosibash.

2.2.3 Invitations / mobilités dans des universités et instituts étrangers

Mobilité à l'Université de KEIO (Japon) Mobilité d'une durée de un mois à l'Université de KEIO (Japon) en Février 2012. Financement sur projet Erasmus Mundus BEAM (Build on Euro Asian Mobility). Initiation d'une collaboration avec le Pr. Takano (http://www.takano.mech.keio.ac.jp/). Développement d'une méthode d'homogénéisation innovante pour les micro-structures à propriétés mécaniques incertaines (application en bio-mécanique).

2.2.4 Collaborations internationales

Prof. Naoki Takano (KEIO University)

Action	Mobilité Erasmus Mundus Beam
Articles	Un article en commun (Legrain, Chevreuil et Takano 2017) (cf sec-
	tion 6.6).
Conférences	Une conférence commune (GIRALDI, NOUY, LEGRAIN, CARTRAUD et
	Такало 2012)
Symposiums	Co-organisation d'un mini-symposium au WCCM 2016, trois sessions :
	"Probabilistic/Stochastic Analysis of Advanced Materials and Biological
	Tissues" (MS305)

Prof. Geuzaine (université de Liège) et Remacle (université catholique de Louvain)

Articles Un article commun (LEGRAIN, GEUZAINE et al. 2013)

Prof. Huerta (université polytechnique de Catalogne)

Articles	Trois articles communs (Legrain et Huerta 2005; Legrain, Moës et
	Huerta 2008; Dufour, Legrain et al. 2012)
Conférences	Trois conférences communes (HUERTA et al. 2007; LEGRAIN, DUFOUR
	et al. 2007; Dufour, Pijaudier-Cabot et Legrain 2010)

Prof. Tetsuya Matsuda (University of Tsukuba, Japon), Daisuke Tawara (Ryukoku University, Japon)

Symposiums Co-organisation d'un mini-symposium au WCCM 2016 (MS305, accepté en 2015)

2.2.5 Cours dans des écoles d'été, formations doctorales,

Cours lors de l'école d'été Erasmus Mundus à Nantes (2012). Intitulé "Linking CAD and CAE : An Overview". Public : 80 doctorants de l'école doctorale SPIGA.

2 Synthèse des activités d'encadrement et de recherche

2.2.6 Séminaires dans des universités nationales et étrangères

- Février 2007 : Laboratoire de Mécanique des Structures (Ecole Polytechnique). *Fissuration des milieux hyperélastiques avec la méthode X-FEM.*
- Mars 2012 : Séminaire invité au LAMCOS (Insa Lyon). Approche X-FEM et approximation de haut ordre : Séparation de la géométrie et de l'approximation. (http://lamcos.insa-lyon.fr/front/ seminaires_lamcos_passes.php?L=1)
- Juillet 2014 : Séminaire invité au Zienkiewicz Centre for Computational Engineering, Swansea University. Sub-grid and nurbs-enhanced X-FEM for structural problems defined on complex geometries (http://www.swansea.ac.uk/engineering/research/zc2e-seminar-series/)

2.3 Responsabilités scientifiques

2.3.1 Contrats industriels

— Responsable d'un contrat avec EADS IW en 2010 (30 000 €). Coordination des partenaires, rédaction de deux rapports internes (27 et 47 pages). Une publication dans le cadre des résultats de ce contrat (cf. chapitre 5.2.1).

2.3.2 Contrats publics

ANR Cosinus SIM-DREAM Responsable de la tâche 3 (Geometrical variabilities, Parametric models and Optimization) de l'ANR Cosinus SIM-DREAM (Nouveau paradigme en SIMulation numérique – Décomposition en variables séparées pour la REduction A priori de Modèle). GeM - LMT-CACHAN - LAMCOS. Participants à la tâche : P.Chinesta, A.Nouy, F.Bordeu et L.Giraldi. Aide de l'ANR : 601 827 \in (pour la tâche 3 : 1 post-doc, 1 doctorant, 1 ingénieur de recherche, 25 000 \in pour les déplacements et le matériel). Octobre 2010 - Janvier 2014.

ANR Icare Participant à l'ANR Icare (Interfaces Généralisées et CouplAge non intrusif : couplage entre codes de REcherche et codes généralistes en calcul de structures). EADS - EDF - DISTENE - GeM - LMT-CACHAN - Université Paul Sabatier - Institut de Mathématiques de Toulouse. Participation à la sous-tâche "Couplage entre modèles déterministe et incertain" avec A.Nouy et M.Chevreuil. Aide de l'ANR : 840 583 € (175 000 € pour le GeM). Janvier 2013 - Décembre 2016.

ERC advanced grand XLS Participant à l'ECR advanced grand XLS portée par N.Moës (Avril 2012 - Mars 2017). Aide de l'europe : 1 957 909 €. **Responsable de la sous-tâche SLS** (Sub-Grid Level-Set). Intervenants dans la sous-tâche : G.Legrain, N.Moës + un doctorant (Benoît Lé) et un post-doc (Carole Sarkis).

2.3.3 Organisations de congrès nationaux / internationaux

2nd ECCOMAS Young Investigators Conference (Bordeaux 02-06 Sept. 2013) Membre du comité scientifique de la conférence internationale ECCOMAS YIC (cf. http://yic2013.sciencesconf.org/resource/page/id/4)

International Symposium on Defect and MaterialMechanics, ISDMM13 (Nantes 1-3 Juill. 2013) Membre du comité d'organisation de la conférence internationale ISDMM13 (cf. http://website. ec-nantes.fr/isdmm13/committes/Scient.AdvisoryBoard.htm) **12th World Congress on Computational Mechanics (Seoul 24-29 Juill. 2016)** Organisateur d'un Minisymposium (accepté) lors du WCCM 2016 : (MS305) Probabilistic/Stochastic Analysis of Advanced Materials and Biological Tissues. Organisation avec Naoki Takano (Keio University, Japon), Gregory Legrain (GeM Institute, Ecole Centrale Nantes), Vittorio Sansalone (Université Paris-Est Créteil), Tetsuya Matsuda (University of Tsukuba, Japon), Daisuke Tawara (Ryukoku University, Japon).

2.4 Informations complémentaires : Autres activités et Responsabilités

2.4.1 Autres responsabilités liées à la recherche

Responsable du site web du GeM :

- Migration de l'ancien site web du laboratoire sous une nouvelle plateforme : définition des besoins, état de l'art, prototypes, validation et mise en ligne du site (http://gem.ec-nantes. fr).
- Migration de l'ancien intranet du laboratoire (toujours en cours) : Réservation de matériel, wiki, forums, news, trombinoscope, annuaire.

Membre du comité de prospective du GeM (2011 - 2014). Ce comité, composé de chercheurs seniors et juniors se réunit trois fois par an dans le but de dégager et discuter de pistes d'évolution des thématiques de recherche du laboratoire.

2.4.2 Reviewer dans des journaux scientifiques

Liste non exhaustive :

- Acta mechanica (impact factor 1.69)
- Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Mécanique) (impact factor 0,99)
- Computers and Mathematics with Applications (impact factor 1,398)
- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (impact factor 3,47)
- European Journal of Computational Mechanics (impact factor 0,37)
- European journal of mechanics A/Solids (impact factor 2,45)
- Finite Elements in Analysis and Design (impact factor 2,175)
- International Journal for Numerical Methods in Engineering (impact factor 2,1)
- International Journal of Fracture (impact factor 1,64)
- Journal of mechanical science and technology (impact factor 0,76)

2.4.3 Reviewer pour des congrès

Reviewer pour le Congrès Français de Mécanique (Lyon 24-28 Août 2015).

2.4.4 Chairman lors de congrès

- Conférence ECCOMAS 2012 (Vienne). Minisymposium Image-based modeling of heterogeneous materials. cf. p 66 http://eccomas2012.conf.tuwien.ac.at/fileadmin/mediapool-eccomas2012/ Diverse/Programme/Programm-Update_perday_130912.pdf
- Conférence X-FEM 2013 (Lyon). Session Solid and Fracture Mechanics. cf. http://xfem2013. sciencesconf.org/program/details
- Conférence CSMA 2015 (Giens). Session 68 cf. https://csma2015.ec-nantes.fr/session68. html
- World Congress on Computational Mechanics (Seoul 24-29 Juill. 2016) : MS305 cf. http: //wccm2016.org/wp/SessionPaperList.asp?code=MS305A

2.4.5 Comités de recrutement

- 2012 : Ecole Centrale Nantes
- 2013 : INSA Rennes
- 2013 : Ecole Centrale Nantes

2.4.6 Comités de suivi de thèse

- E. Gennesseaux, IFSTTAR Nantes (soutenance 2015)
- O. Zahm, Ecole Centrale Nantes (soutenance 2015)
- A. Zhao, Ecole Centrale Nantes (soutenance 2015)
- M. Graveleau, Ecole Centrale Nantes (soutenance 2015)
- Z. Csati, Université Libre de Bruxelles (soutenance 2018)
- O. Lopez, IFSTTAR Nantes (soutenance 2019)

2.4.7 Activité reconnue de vulgarisation scientifique

Fête de la science Présentation invitée pour présentation (vulgarisée) de mes travaux auprès de lycéens et étudiants en classes préparatoires (Lycée Jules Renard, Nevers)

2.5 Production scientifique

_

Synthèse

Articles dans des revues internationales à comité de lecture	19 (+2 en cours)
Articles dans des revues internationales à comité de lecture	0
dans des numéros spéciaux	
Articles dans des revues nationales à comité de lecture	1
Proceedings de conférences internationales	26
Proceedings de conférences nationales	10
Contribution à ouvrage édité	1
Brevets nationaux	0
Brevets internationaux	0

Détail

2.5.1 Articles dans des revues internationales à comité de lecture

- Legrain, G., N. MOËS et E. VERRON (2005). "Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63.2, p. 290–314. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.1291.
- Legrain, G., N. Moës et A. HUERTA (2008). "Stability of incompressible formulations enriched with X-FEM". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.21-24, p. 1835–1849. ISSN : 00457825. DOI : doi:10.1016/j.cma.2007.08.032.
- **Legrain**, **G.**, N. MOËS et E. VERRON (2008). "Robust and direct evaluation of J 2 in linear elastic fracture mechanics with the X-FEM". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.10, p. 1471–1488.
- LAMARI, H., A. AMMAR, P. CARTRAUD, F. CHINESTA, F. JACQUEMIN et **G. Legrain** (2010). "Recent Advances in Material Homogenization". In : *International journal of material forming* 3.1, p. 899–902.

- LAMARI, H., A. AMMAR, P. CARTRAUD, G. Legrain, F. CHINESTA et F. JACQUEMIN (2010). "Routes for Efficient Computational Homogenization of Nonlinear Materials Using the Proper Generalized Decompositions". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17.4, p. 373–391. ISSN : 1134-3060. DOI : 10.1007/s11831-010-9051-4.
- **Legrain**, **G.**, P. CARTRAUD, I. PERREARD et N. MOËS (2010). "An X-FEM and level set computational approach for image-based modelling : Application to homogenization". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.7, p. 915–934. DOI : 10.1002/nme.
- **Legrain**, **G.**, R. ALLAIS et P. CARTRAUD (2011). "On the use of the extended finite element method with quadtree/octree meshes". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.6, p. 717–743. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.3070.
- DUFOUR, F., **G. Legrain**, G. PIJAUDIER-CABOT et A. HUERTA (2012). "Estimation of crack opening from a two-dimensional continuum-based finite element computation". In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 36.16, p. 1813–1830. ISSN : 03639061. DOI : 10.1002/nag.1097.
- Legrain, G., N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU (2012). "High order X-FEM and levelsets for complex microstructures : Uncoupling geometry and approximation". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241-244, p. 172–189. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2012.06.001.
- GIRALDI, L., A. NOUY, **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2013). "Tensor-based methods for numerical homogenization from high-resolution images". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254, p. 154–169. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2012.10.012.
- Legrain, G. (2013). "A NURBS enhanced extended finite element approach for unfitted CAD analysis". In : *Computational Mechanics* 52.4, p. 913–929. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-013-0854-7.
- Legrain, G., C. GEUZAINE, J.-F. REMACLE, N. MOËS, P. CRESTA et J. GAUDIN (2013). "Numerical simulation of CAD thin structures using the eXtended Finite Element Method and Level Sets". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 77, p. 40–58. ISSN : 0168874X. DOI : 10.1016/j.finel.2013. 08.007.
- LIAN, W., **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2013). "Image-based computational homogenization and localization : comparison between X-FEM/levelset and voxel-based approaches". In : *Computational Mechanics* 51.3, p. 279–293. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-012-0723-9.
- MATINE, A., N. BOYARD, P. CARTRAUD, G. Legrain et Y. JARNY (2013). "Modeling of thermophysical properties in heterogeneous periodic media according to a multi-scale approach : Effective conductivity tensor and edge effects". In : International Journal of Heat and Mass Transfer 62, p. 586–603. ISSN : 00179310. DOI : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.03.036.
- GIRALDI, L., A. NOUY et **G. Legrain** (2014). "Low-Rank Approximate Inverse for Preconditioning Tensor-Structured Linear Systems". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 36.4, A1850–A1870. ISSN : 1064-8275. DOI : 10.1137/130918137.
- **Legrain**, **G.** et N. MOËS (2014). "Treatment of nearly-singular problems with the X-FEM". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.1, p. 13. ISSN : 2213-7467. DOI : 10.1186/ s40323-014-0013-5.
- MATINE, A., N. BOYARD, G. Legrain, Y. JARNY et P. CARTRAUD (2015). "Transient heat conduction within periodic heterogeneous media : A space-time homogenization approach". In : *International Journal of Thermal Sciences* 92, p. 217–229. ISSN : 12900729. DOI : 10.1016/j.ijthermalsci.2015. 01.026.
- Lé, B., **G. Legrain** et N. Moës (2017). "An eXtended Finite Element Method for structural zooming in reinforced structures". In : *Finite elements in analysis and design* Accepted. DOI: 10.1016/j.finel. 2017.01.002.
- Legrain, G., M. CHEVREUIL et N. TAKANO (2017). "Prediction of apparent properties with uncertain material parameters using high-order fictitious domain methods and PGD model

reduction". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering May 2016, p. 345–367. DOI : 10.1002/nme.5289.

- Legrain, G. et N. Moës (2017). "A High Order Fictitious domain Method based on Anisotropic Mesh Adaptation : integration efficiency and shell structures". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, In preparation.
- SARKIS, C., **G. Legrain** et N. MOËS (2017). "Improving the efficiency of the Thick Level Set Method with anisotropic mesh adaptation". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* In preparation.

2.5.2 Articles dans des revues nationales à comité de lecture

Legrain, **G.** et A. HUERTA (2005). "Etude de la stabilité d'une formulation incompressible traitée par X-FEM". In : *European Journal of Computational Mechanics* 8, p. 1–13.

2.5.3 Conférences

- 2.5.4 Communications dans des congrès internationaux à comité de lecture et actes publiés
- **Legrain**, **G.**, N. MOËS et E. VERRON (2004). "Fracture with large deformation using X-FEM". In : *ECCOMAS 2004 Jyvaskyla (Finland)*.
- **Legrain**, **G.**, E. VERRON et N. MOËS (2006). "Crack propagation with X-FEM using material forces". In : *6th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2006), Budapest.*
- HUERTA, A., N. MOËS, **G. Legrain** et E. SALA-LARDIES (2007). "Outline Mixed X-FEM formulation for incompressible problems". In : 10th ESAFORM conference on material forming.
- **Legrain**, **G.**, F. DUFOUR, A. HUERTA et G. PIJAUDIER-CABOT (2007). "Extraction of Crack Opening from a Nonlocal Damage Field". In : *COMPLAS 2007, Barcelona*.
- **Legrain**, **G.**, N. MOËS et E. VERRON (2007). "Crack propagation in hyperelastic media using X-FEM". In : *International Conference on Computational Fracture and Failure of Materials and Structures* (CFRAC 2007), Nantes.
- CARTRAUD, P., I. IONESCU, G. Legrain et N. MOËS (2008). "Image-Based Computational Homogenization of Random Materials using Level Sets and X-FEM". In : 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008) 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8).
- CARTRAUD, P., G. Legrain, R. ALLAIS et N. MOËS (2008). "Image-based computational homogenization using Levelsets and X-FEM". In : 2nd International Fraunhofer Workshop 3D imaging, analysis, modelling and simulation of macroscopic properties. Kaiserslautern.
- ALLAIS, R., **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2010). "Comparison of two approaches for error estimation with X-FEM". In : *IV European Conference on Computational Mechanics*.
- DUFOUR, F., G. PIJAUDIER-CABOT et **G. Legrain** (2010). "Nonlocal damage based failure models, extraction of crack opening and transition to fracture". In : *EURO-C* 2010 *Computational Modelling of Concrete Structures*.
- LIAN, W., G. Legrain et P. CARTRAUD (2010). "Comparison of two Computational Approaches for Image-Based Micromechanical Modeling". In : *IV European Conference on Computational Mechanics*.
- MATINE, A., N. BOYARD, Y. JARNY, G. Legrain, P. CARTRAUD et M. THOMAS (2010). "Effective thermal conductivity tensor of composite materials : determination of the representative volume element(RVE)". In : 6th International Conference on Inverse Problem : identification, design and control.
- **Legrain**, **G.**, N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU (2011). "High order eXtended Finite Element Method and Level Sets : Uncoupling geometry and approximation". In : *XFEM 2011 : Partition of unity enrichment : Recent developments and applications*.

- CARTRAUD, P., G. Legrain et W. LIAN (2012). "An X-FEM and level-set approach for image-based computational homogenization". In : *Euromech* 537 : *Multi-scale computational homogenization of heterogeneous structures and materials*.
- GIRALDI, L., A. NOUY, G. Legrain, P. CARTRAUD et N. TAKANO (2012). "Tensor approximation methods for image-based computations". In : 6th European Congress On Computational Methods In Applied Sciences And Engineering (Eccomas 2012).
- **Legrain**, **G.**, P. CARTRAUD et W. LIAN (2012). "An integrated approach for image-based computation based on the X-FEM : Accuracy and high-order approximation". In : *6th European Congress On Computational Methods In Applied Sciences And Engineering (Eccomas 2012).*
- Legrain, G., P. CARTRAUD et A. NOUY (2012). "High-Order X-FEM and Proper Generalized Decomposition for Uncertain Image-Based Analysis Grégory Legrain, Patrice Cartraud & Anthony Nouy". In : International Computational Mechanics Symposium - ICMS 2012. Kobe.
- **Legrain**, **G.** et N. CHEVAUGEON (2012). "High-order X-FEM for image-based computations". In : 6th European Congress On Computational Methods In Applied Sciences And Engineering (Eccomas 2012).
- MATINE, A., N. BOYARD, Y. JARNY, G. Legrain et P. CARTRAUD (2012). "Thermal properties of composite materials : effective conductivity tensor and edge effects". In : 6th European Thermal Sciences Conference-Eurotherm.
- NOUY, A., L. GIRALDI, **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2012). "Tensor approximation me thods for multiscale stochastic analysis of materials". In : *Euromech Colloquium* 537 *Multiscale Computational Homogenization Of Heterogeneous Structures And Materials*.
- GIRALDI, L., A. NOUY et **G. Legrain** (2013). "Hierarchical low-rank approximation of tensors by successive rank one corrections for preconditioning and solving high dimensional linear systems". In : *2nd ECCOMAS Young Investigators Conference*.
- MATINE, A., N. BOYARD, Y. JARNY, G. Legrain et P. CARTRAUD (2013). "Characterization of the thermal properties of composite materials : a space-time homogenization approach". In : 16th annual ESAFORM Conference on Material Forming.
- **Legrain**, **G.** et N. Moës (2014a). "High-order X-FEM to handle geometrical details : Improved convergence for quasi-singular solutions". In : *11th World concgress on computational mechanics*.
- (2014b). "Resolution strategies for nearly singular solutions using non-conforming high-order grids". In : Sixth International Workshop on High-Order Finite Element and Isogeometric Methods (HOFEIM 2014).
- MATINE, A., N. BOYARD, Y. JARNY, G. Legrain et P. CARTRAUD (2014). "Estimation of effective thermal properties within heterogeneous periodic media according to a multi-scale approach. Edge effect analysis". In : *International Conference on Inverse Problems in Engineering*.
- Legrain, G. et N. Moës (2015). "An efficient and accurate integration scheme for fictitious domain methods based on level-sets and anisotropic meshing". In : 13th U.S. National Congress on Computational Mechanics (USNCCM13).
- Lé, B., G. Legrain et N. Moës (2016). "Numerical analysis of reinforced concrete structures using the Thick Level Set Method". In : *European Mechanics of Materials Conference (EMMC15), Brussels*.

2.5.5 Communications dans des congrès nationaux à comité de lecture et actes publiés

- ALLAIS, R., **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2009). "Maillage adaptatif octree dans l'environnement X-FEM et levelsets Application à la thermique". In : *CSMA 2009, 9eme Colloque National en Calcul des Structures*.
- CHIAD, M., W. LIAN, S. GUESSASMA, G. Legrain, G. D. VALLE et P. CARTRAUD (2009). "Modélisation numérique par une approche micromécanique du comportement de mousses solides alimentaires". In : *9e Colloque National en Calcul des Structures*.

- GIRALDI, L., **G. Legrain**, A. NOUY et P. CARTRAUD (2011). "Méthode PGD pour l'homogénéisation numérique à partir d'images de haute résolution". In : *CSMA 2011, 10eme Colloque National en Calcul des Structures*.
- **Legrain**, **G.**, N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU (2011). "Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie". In : *CSMA 2011, 10eme Colloque National en Calcul des Structures*.
- MATINE, A., N. BOYARD, P. CARTRAUD, **G. Legrain** et Y. JARNY (2011). "Homogénéisation et effets de bords : Application à la Thermique". In : 20ème congrès Français de Mécanique, Besançon.
- **Legrain**, **G.** et N. MOËS (2013). "Simulation non-conforme à partir de CAO : X-FEM et NURBS". In : *CSMA 2013, 11eme Colloque National en Calcul des Structures*.
- MATINE, A., N. BOYARD, Y. JARNY, **G. Legrain** et P. CARTRAUD (2013). "Modélisation par homogénéisation des transferts de chaleur dans des structures composites avec prise en compte des effets de bords". In : *Congrès annuel de la Société Française de Thermique*.
- CAZES, F., K. MOREAU, N. MOËS et **G. Legrain** (2015). "Couplage plasticité, endommagement et rupture avec un modèle Thick Level Set". In : 22ème congrès français de Mécanique [CFM2015].
- Lé, B., G. Legrain et N. Moës (2015). "Modélisation et simulation numérique des structures en béton armé". In : 22ème congrès français de Mécanique [CFM2015].
- **Legrain**, **G.** et N. MOËS (2015). "Résolution de problèmes quasi-singuliers avec la méthode X-FEM". In : *CSMA 2013, 12eme Colloque National en Calcul des Structures*.

2.5.6 Contribution à ouvrage édité

Legrain, **G.**, E. VERRON et N. MOËS (2005). "Numerical simulation of large strain fracture problems using X-FEM". In : *Constitutive Models for Rubber IV*. Sous la dir. de P.-E. AUSTRELL et L. KARI. Taylor & Francis Group, p. 59–64. ISBN : 9780415383462.
Dossier recherche

Introduction

L'utilisation de méthodes numériques en mécanique est désormais devenue une pratique standard dans l'industrie. Les outils commerciaux permettent de résoudre de manière robuste une large gamme de problèmes linéaires et non-linéaires. Les efforts de développement se focalisent désormais vers le traitement des problèmes encore non-résolus (transition endommagement-rupture, problèmes paramétriques / stochastiques, liaisons entre échelles) ainsi que le développement d'approches plus robustes et plus efficaces dans le cas des problèmes mieux maîtrisés. Les objectifs sont multiples : traiter des problèmes encore hors de portée d'un point de vue théorique, être capable de résoudre des problèmes déjà maîtrisés mais de plus grande taille ou avec encore plus de précision et enfin être à même de mettre entre toutes les mains ces outils pour les problèmes linéaires (facilité de prise en main). Les problématiques associées sont liées aux aspects numériques, mais également à la modélisation. L'objectif de ce manuscrit est de détailler une partie de mes contributions scientifiques à ces problématiques nourries par des préoccupations industrielles. Depuis ma thèse, mes travaux de recherches se situent à l'interface entre modélisation, mathématiques appliquées et méthodes numériques. Si j'ai pu apporter seul des réponses sur certaines problématiques, j'ai également su nouer des collaborations avec des spécialistes de ces trois thématiques au sein du GeM et en dehors. Ces travaux m'ont donc amené à travailler sur un assez large spectre d'applications :

- La mécanique linéaire de la rupture;
- La mécanique non-linéaire de la rupture;
- La mécanique de l'endommagement;
- Les approches multi-échelle;
- La robustesse et l'efficacité des algorithmes éléments finis;
- Les méthodes d'estimation d'erreur;
- Les approches de réduction de modèle.

Ne pouvant présenter toutes ces contributions dans ce manuscrit, j'ai donc fait le choix de recentrer la présentation sur un certain nombre de thématiques en accord avec ce triptyque modélisation – mathématiques appliquées – méthodes numériques. Toutes ces thématiques s'inscrivent également dans les problématiques industrielles énoncées ci-dessus (traitement de problèmes non-résolus, atteindre des niveaux de précision significativement supérieurs pour les problèmes maîtrisés et améliorer leur facilité de prise en main).

Dans le premier chapitre, je présenterai ainsi mes contributions à la prédiction de la durabilité des structures. Celles-ci ont permis d'apporter des réponses à des problématiques numériques et de modélisation. J'ai ainsi pu proposer des stratégies numériques afin de résoudre de manière robuste les problèmes de mécanique linéaire de la rupture incompressible pour lesquels des difficultés de maillage et de stabilité numérique sont à prendre en compte. Ma deuxième contribution concerne le développement de méthodes numériques permettant d'estimer les ouvertures de fissure dans les

3 Introduction

structures du génie-civil. Cette préoccupation est fondamentale pour les structures telles que les enceintes de confinement des centrales nucléaires. En effet, la micro et la macro-fissuration du matériau conduisent à de fortes variation de la perméabilité, cette grandeur étant un des critères de service. J'ai ainsi pu proposer deux approches numériques permettant in fine d'estimer la perméabilité des structures fissurées.

Dans le deuxième chapitre, je présenterai mes contributions à la simulation des structures à géométrie complexe provenant de CAO ou obtenues par imagerie. Malgré les avancées en terme d'efficacité et de robustesse des mailleurs, la phase de maillage reste encore largement limitante pour les applications faisant intervenir des géométries complexes. Mes travaux se sont ainsi focalisés sur le développement d'approches géométriquement non-conformes telles que les approches de domaines fictifs. J'ai ainsi pu proposer des stratégies robustes et limitant les interventions humaines pour la simulation de problèmes définis sur des géométries complexes. Les applications présentées ici se focaliseront sur les structures élancées et les calculs multi-échelle à partir d'image. Sur ce dernier point en particulier, nos contributions ont été parmi les premières de ce domaine.

J'ai également étudié la mise en œuvre de méthodes d'estimation d'erreur avec pour objectif à long terme le développement d'algorithmes adaptatifs autonomes libérés des problématiques de maillage.

Je me suis aussi intéressé à l'apport que pourraient représenter les méthodes de réduction de modèle pour l'homogénéisation à partir d'images. Ces approches ont en effet commencé à révolutionner le domaine de la mécanique numérique en mettant à portée de calcul des problèmes considérés comme extrêmement coûteux (comme les calculs paramétriques). Dans le cadre du calcul sur image, de telles approches permettent de diminuer drastiquement la taille des problèmes de $O(N^d)$ à O(dN)(avec N la taille de chaque dimension et d le nombre de dimensions).

Enfin dans un dernier chapitre, j'aborderai mes contributions dans le cadre des méthodes de haut ordre. Celles-ci ont des taux de convergence bien supérieurs aux approches communément utilisées par les codes de calcul. Les méthodes d'éléments finis h - p, par exemple, sont capables de converger exponentiellement pour une large classe de problèmes physiques (à comparer à la convergence algébrique en O(h) des méthodes éléments finis standard). Ce type de méthodes permet donc, à taille de maille équivalente, d'améliorer significativement la précision des modèles. Les industriels ont commencé à investir massivement dans ces approches pour les applications de mécanique des fluides. Nul doute qu'il en sera bientôt de même en mécanique du solide. Le point délicat inhérent à ce type de stratégies est là encore la phase de génération de maillage. Mes contributions se sont donc concentrées sur le développement d'approches de domaines fictifs de haut ordre permettant de simplifier cette phase tout en préservant leurs propriétés de convergence. Les applications présentées ici sont restreintes au calcul sur image, aux structures minces ainsi qu'à l'homogénéisation stochastique pour la prise en compte des variabilités interindividuelles en bio-mécanique.

Comme indiqué précédemment, j'ai fait le choix, pour ne pas alourdir ce manuscrit, de ne pas présenter mes travaux relatifs au développement de critères de propagation pour les élastomères, au traitement des effets de bord temporels et spatiaux dans les approches multi-échelle, à la détermination robuste de la taille des VER en homogénéisation et à l'étude du comportement des approches éléments finis dans le cas de problèmes quasi-singuliers. Le lecteur intéressé pourra se référer à la bibliographie disponible dans le manuscrit.

4.1 Problématique et contexte scientifique

L'évaluation de la durée de vie des structures est une donnée essentielle, tant pour les applications grand public comme les transports (automobile, aéronautique, ferroviaire, naval) que pour les applications sensibles comme le nucléaire ou les grands ouvrages du génie civil (barrages, ponts). La dégradation des matériaux est généralement séparée en deux phases : (i) l'apparition de micro-défauts répartis de manière diffuse dans le volume, puis (ii) la concentration de ces défauts pour donner lieu à une fissure macroscopique qui se propage ensuite dans la structure. L'échelle à laquelle apparaissent les micro-fissures est très dépendante du matériau car liée à sa micro-structure. De quelques centimètres pour les bétons, celle-ci peut descendre à moins d'un dixième de millimètre pour les aciers. Selon la taille de cette zone, souvent appelée Fracture Process Zone (FPZ) ou Zone d'élaboration, ainsi que la nature des phénomènes s'y déroulant, les matériaux sont généralement classifiés comme fragiles, quasi-fragiles ou ductiles. En effet, cette zone n'est pas seulement le siège de micro-fissures comme dans le cas des bétons, mais également de phénomènes plus complexes comme la plasticité dans le cas des métaux. Lorsque la taille de cette zone est petite devant la taille de la structure, on parle généralement de matériaux fragiles. Si sa taille est non-négligeable devant celle de la structure, et est majoritairement le siège de phénomènes durcissants¹, on parle alors de matériaux ductiles. Enfin, les matériaux quasi-fragiles ont pour caractéristique une zone d'élaboration non-négligeable majoritairement siège de phénomènes adoucissants. Les approches théoriques et numériques, permettant de modéliser ces classes de matériaux sont très spécifiques : les matériaux fragiles se modélisent en général par un modèle de type Griffith (GRIFFITH 1920) alors que les modèles quasi-fragiles se modélisent en général par des modèles de zone cohésive (DUGDALE 1960; BARENBLATT 1961) ou des modèles d'endommagement (KACHANOV 1958; RASHID 1968). Ces différentes approches ont néanmoins leurs points forts et limitations : la mécanique de la rupture ainsi que les modèles de zone cohésive ne sont pas capables de représenter la phase d'initiation de la fissure macroscopique, et nécessitent également l'utilisation de critères additionnels pour déterminer la direction de propagation. Les modèles d'endommagement permettent la représentation de l'initiation de la fissure ainsi que sa direction de propagation mais ne permettent pas de représenter la fissure macroscopique.

Mes travaux dans ce domaine se sont focalisés sur deux points particuliers : (i) le développement

^{1.} Plasticité avec écrouissage par exemple.

d'approches numériques adaptées à la mécanique non-linéaire de la rupture (matériaux non-linéaires, grandes transformations) durant mes travaux de doctorat et (ii) le développement de stratégies numériques permettant de lier endommagement et rupture afin de permettre l'évaluation robuste de la durabilité des structures (après mes travaux de thèse).

4.2 Extension de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture et aux matériaux incompressibles

4.2.1 Introduction

Les matériaux élastomères ont pris une place très importante dans de nombreux secteurs industriels de pointe : automobile, aéronautique, génie civil, médecine. Pour les secteurs industriels qui sont actuellement en phase de consolidation, la tendance est à la réduction des temps de conception et à la diminution des coefficients de sécurité, tandis que le domaine médical reste en pleine expansion. C'est dans ce contexte que la tenue en fatigue des matériaux élastomères fait l'objet de nombreuses recherches. Les expérimentations dans ce domaine s'avèrent particulièrement longues et onéreuses lorsqu'il s'agit de caractériser le comportement en fatigue de pièces industrielles, même si de nouvelles techniques prometteuses sont apparues (LUONG 1995). Aussi, un grand nombre de travaux de recherche se portent sur le développement d'outils numériques permettant une prédiction fiable du comportement en fatigue de ces matériaux. Nous avons vu en introduction que la ruine des matériaux pouvait être modélisée par une vision continue ou discontinue de la dégradation du milieu continu. Au cours de cette section, nous supposerons qu'une fissure de taille critique est déjà apparue dans le domaine considéré et que les phénomènes mécaniques de rupture peuvent être condensés en pointe de fissure (approche du type mécanique de la rupture).

Durant mes travaux de thèse, je me suis concentré sur le développement de méthodes efficaces pour simuler la propagation de fissures dans les structures élastomères. Ces matériaux sont généralement élastiques non-linéaires et soumis à de grandes transformation. La mécanique linéaire de la rupture, classiquement utilisée dans les codes de calcul industriels ne peut donc plus être considérée. On parle alors de *mécanique non-linéaire de la rupture*. Des difficultés d'ordre conceptuel et numérique doivent alors être résolues. Notons également que ces matériaux sont généralement considérés comme incompressibles. Un tel trait de comportement ajoute ainsi de nouvelles difficultés numériques pour la résolution. Lors de mes travaux de thèse, j'ai ainsi pu apporter un certain nombre de réponses aux problématiques numériques de la mécanique non-linéaire de la rupture, en lien étroit avec les problématiques de modélisation. J'ai pour cela utilisé la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) (MOËs, J. E. DOLBOW et BELYTSCHKO 1999) et proposé des stratégies permettant de traiter de manière robuste et efficace de tels problèmes. L'utilisation de cette approche permet (par construction) de simplifier drastiquement les problèmes de robustesse liés à l'évolution topologique de la fissure lors de sa propagation.

Les apports de mes travaux ont alors concerné quatre points principaux : (i) l'application de la méthode X-FEM aux grandes transformations (LEGRAIN, MOËS et VERRON 2005); (ii) la détermination de stratégies d'enrichissement efficaces pour les matériaux élastiques non-linéaires fissurés (LEGRAIN, MOËS et VERRON 2005); (iii) la gestion numérique des problématiques d'incompressibilité pour les formulations éléments finis enrichies (LEGRAIN, MOËS et HUERTA 2008) et (iv) le développement d'un critère de propagation adapté aux matériaux élastomères (LEGRAIN, MOËS et VERRON 2008). Dans ce manuscrit, nous ne détaillerons que le troisième point, celui-ci étant à mon sens le plus original.

4.2 Extension de la méthode X-FEM à la mécanique non-linéaire de la rupture et aux matériaux incompressibles

4.2.2 Stabilité des formulations mixtes

De nombreux essais ont mis en évidence que sous sollicitations extérieures, les matériaux de type caoutchouc se déforment à volume quasi constant (GOEBEL et TOBOLSKY 1971). Leur comportement est donc classiquement supposé incompressible ou quasi-incompressible. Il convient donc d'imposer une condition cinématique additionnelle d'incompressibilité lors de la résolution du problème : div (\mathbf{u}) = 0 en petites perturbations ou det (\underline{F}) = 1 en grandes transformations (où \mathbf{u} et \underline{F} sont respectivement les champs de déplacement et de gradient de la transformation). Cette condition additionnelle pose des problèmes lors de la résolution numérique. En effet, les formulations en déplacement "verrouillent" lorsque le comportement du matériau tend vers l'incompressibilité (DONEA et HUERTA 2003). Ce phénomène se manifeste par un champ de déplacement anormalement faible et non physique. Il apparaît non seulement en grandes transformations, mais également en petites perturbations. Notons également que l'analyse mathématique de ce comportement n'est claire qu'en petites perturbations (AURICCHIO et al. 2005) : la présentation sera donc restreinte à cette hypothèse particulière. L'extension au cas des grandes transformations est détaillée dans (LEGRAIN 2006, sec. 4.3).

Problème de référence



FIGURE 4.1 – Problème de référence.

Considérons la réponse quasi-statique d'un solide élastique occupant un domaine borné $\Omega \in \mathbb{R}^{2-3}$ avec une frontière suffisamment régulière $\partial \Omega$ séparée en deux parties disjointes : $\partial \Omega_u$ où les déplacements sont imposés et $\partial \Omega_N$ où le vecteur contrainte est imposé. Les équations gouvernant le problème d'élasticité linéaire s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \operatorname{dans} \Omega \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\overline{1}}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) & \operatorname{dans} \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_{\mathbf{d}} & \operatorname{sur} \partial \Omega_N \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\mathbf{d}} & \operatorname{sur} \partial \Omega_u \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \operatorname{dans} \Omega \end{cases}$$
(4.1)

où $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, **b** représente les forces volumiques, \mathbf{u}_d est le champ de déplacement imposé, \mathbf{T}_d est le vecteur contrainte imposé, **n** est la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$, $\underline{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisé et C est le tenseur d'élasticité du 4^{ème} ordre qui doit être borné, i.e.

$$\mathbb{C}_{iikl} \in L^{\infty}(\Omega) \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{4.2}$$

Dans le cas incompressible, la minimisation directe de la fonctionnelle associée à cette formulation forte sur un espace éléments finis conduit au verrouillage (*locking*) de la solution car cet espace est trop restreint pour vérifier à la fois les conditions de divergence nulle et de stationnarité de la fonctionnelle. Notons qu'une augmentation de la taille de l'espace d'approximation (raffinement *p*)

améliore grandement les résultats (VOGELIUS 1983; SZABO, BABUŠKA et CHAYAPATHY 1989; HEISSERER et al. 2008) dans le cas quasi-incompressible. La littérature est abondante en ce qui concerne les approches permettant de limiter ou de résoudre le problème de verrouillage. Celles-ci peuvent être classées en trois grandes familles : (i) les méthodes mixtes (BREZZI et FORTIN 1991) pour lesquelles l'imposition de la condition d'incompressibilité est relaxée par l'ajout d'une (ou plusieurs) variable(s) cinématiques(s); (ii) les méthodes de pénalisation où la non-vérification de la condition d'incompressibilité div(**u**) = 0 est pénalisée dans la fonctionnelle. L'utilisation de procédures d'intégration réduites est ensuite nécessaire afin d'éviter le verrouillage (DONEA et HUERTA 2003). D. S. MALKUS et T. J. HUGHES (1978) ont montré que sous certaines conditions formulations pénalisées et formulations mixtes étaient équivalentes, permettant de donner ainsi une assise mathématique à des méthodes perçues comme des *bricolages variationnels*. Enfin, (iii) les méthodes de type Enhanced Assumed Strain (EAS) (J. C. SIMO et RIFAI 1990) qui, sur base de la fonctionnelle de Hu-Washisu augmentent la déformation de modes incompatibles adaptés (J. SIMO, ARMERO et R. TAYLOR 1993; FREISCHLÄGER et SCHWEIZERHOF 1996; WRIGGERS et KORELC 1996). Dans mes travaux, nous nous sommes restreints aux méthodes mixtes de part leurs fondements mathématiques solides.

A l'époque de ces travaux, la méthode X-FEM n'avait été que peu étudiée pour ces problèmes d'incompressibilité. J. E. DOLBOW et DEVAN (2003) proposaient d'enrichir une formulation de type EAS pour le traitement de problèmes de fissuration d'élastomères. KIRCHHART, GROSS et REUSKEN (2016) proposent une formulation à deux champs stabilisée, et (LEGAY et TRALLI 2007; GROSS et REUSKEN 2007) (en parallèle de mes travaux) une formulation mixte mais sans vérification de la stabilité de la méthode.

Conditions de stabilité

Condition continue de stabilité Dans le cas des formulations mixtes, la fonctionnelle du problème mécanique (énergie potentielle) est remplacée par une fonctionnelle $\chi(\mathbf{u}, p)$ à deux variables indépendantes \mathbf{u} et p:

$$\chi(\mathbf{u},p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}^{D}(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_{t}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{d}} \, d\Gamma \qquad (4.3)$$
$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{p^{2}}{\kappa} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \, \varepsilon_{V}(\mathbf{u}) \, d\Omega$$

où ε^D et ε_V représentent respectivement les parties déviatorique et volumique du champ de déformation. La stationnarité de $\chi(\mathbf{u}, p)$ par rapport aux deux variables indépendantes \mathbf{u} et p s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{D} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{D} d\Omega - \int_{\Omega} p \, \delta \varepsilon_{V} \, d\Omega = R(\delta \mathbf{v}) \quad \forall \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ - \int_{\Omega} \left(\frac{p}{\kappa} + \varepsilon_{V} \right) \delta p \, d\Omega = 0 \qquad \qquad \forall \delta p \in \mathcal{Q} \end{cases}$$
(4.4)

où $R(\delta \mathbf{v})$ représente le travail virtuel des forces extérieures, l'espace $\mathcal{V} \equiv H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions homogènes définies sur Ω et \mathcal{Q} est l'espace des fonctions de carré intégrable $\mathcal{Q} = \{q \in L^2(\Omega)\}$. Le problème étant un point selle, il faut que les espaces d'approximation vérifient la condition (suffisante) de compatibilité de Ladyzhenskaya - Babuška - Brezzi (BREZZI et FORTIN 1991), également nommée condition LBB (ou inf-sup) et qui s'énonce : *L'existence d'une approximation éléments finis stable* (\mathbf{u}^h , p^h) *dépend du choix d'une paire d'espaces* \mathcal{V}^h et \mathcal{Q}^h vérifiant la condition suivante :

$$\inf_{q^{h} \in \mathcal{Q}^{h}} \sup_{v^{h} \in \mathcal{V}^{h}} \frac{\int_{\Omega} q^{h} \operatorname{div} \mathbf{v}^{h} d\Omega}{\| \mathbf{v}^{h} \|_{H^{1}} \| q^{h} \|_{L^{2}}} \ge \beta > 0$$

$$(4.5)$$

où β est une constante indépendante de la taille du maillage h. Si la condition inf-sup est satisfaite, alors il existe un unique couple $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$ et $p^h \in \mathcal{Q}^h$ (déterminée à une constante près dans le cas où les conditions aux limites sont uniquement de type Dirichlet) et ce, même pour h tendant vers zéro.

Condition discrète de stabilité La vérification de la condition inf-sup par un couple d'espaces $(\mathcal{V}^h, \mathcal{Q}^h)$ est toutefois impossible à prouver pour des situations pratiques. C'est pourquoi l'évaluation numérique du inf-sup a été largement étudiée (CHAPELLE et BATHE 1993; BREZZI et FORTIN 1991). Cette évaluation numérique, bien que non-équivalente à la condition analytique, donne une indication sur la vérification (ou non) de (4.5) pour une discrétisation éléments finis donnée. Ce test numérique du inf-sup est fondé sur le théorème suivant :

Proposition. Soient les matrices $[M_{uu}]$ et $[M_{pp}]$, associées respectivement aux produits scalaires dans \mathcal{V}^h (norme H^1) et \mathcal{Q}^h (norme L^2) et soit μ_{min} la plus petite valeur propre non nulle du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{up} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{uu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{up} \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mu^2 \begin{bmatrix} M_{pp} \end{bmatrix} \mathbf{v}$$
(4.6)

alors, la valeur de β dans (4.5) est simplement μ_{min} .

La relation entre ce système aux valeurs propres et la condition inf-sup peut être trouvée dans (D. MALKUS 1981) ou (BREZZI et FORTIN 1991). Le test numérique proposé dans (CHAPELLE et BATHE 1993) consiste à tester une formulation mixte en calculant β_h avec des maillages de plus en plus raffinés. L'objectif est de contrôler la valeur du inf-sup β_h quand *h* diminue. Il est alors possible de prédire sur base de trois ou quatre résultats si la valeur de β_h est bornée ou au contraire tend vers zéro lorsque le maillage est raffiné. La fiabilité de ce test est démontrée pour de nombreux exemples d'éléments en élasticité incompressible dans (CHAPELLE et BATHE 1993).

Espaces éléments finis stables De nombreux travaux dans la littérature proposent des éléments finis mixtes, mais tous (même lorsqu'ils donnent satisfaction dans la pratique) ne vérifient pas la condition inf-sup². Durant cette étude, nous nous sommes restreints à deux éléments finis mixtes connus pour leur robustesse : (i) l'élément T6T3 (élément $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$) pour lequel le déplacement est quadratique et la pression linéaire et (ii) l'élément Mini (ARNOLD, BREZZI et FORTIN 1984) (élément $\mathcal{P}_1^+ - \mathcal{P}_1$) pour lequel le déplacement est linéaire, augmenté d'une fonction bulle et la pression linéaire et a pression linéaire et linéaire degré de liberté associé à la bulle du fait des enrichissements.

4.2.3 Stabilité des formulations mixtes enrichies

Dans le cas X-FEM, le champ de déplacement est enrichi pour que les surfaces de discontinuité n'aient pas à respecter la géométrie du maillage. Cet enrichissement modifie donc l'espace des champs de déplacement \mathcal{V}^h . Par conséquence, si \mathcal{Q}^h n'est pas enrichi, nous risquons d'obtenir un élément qui ne vérifie plus la condition inf-sup. La problématique est donc la suivante : **connaissant les fonctions d'enrichissement à appliquer pour un problème de trou, d'interface matériau ou de fissuration, comment (et par quelles fonctions) enrichir les champs de pression et de vitesse afin que l'élément ainsi enrichi vérifie la condition inf-sup?**

Comme précisé plus haut, il n'existe à ma connaissance aucune preuve de stabilité dans le cas enrichi, hormis des résultats récents postérieurs à mes travaux, mais restreints au cas particulier de

^{2.} A ce sujet, M. Fortin écrivait : "Computations were done (with success!) using theoretically dubious elements or at best, using elements at which theory remained silent." (BREZZI et FORTIN 1991)

l'enrichissement Heaviside (BECKER, BURMAN et P. HANSBO 2008). La validation des espaces d'approximation est réalisée comme suit. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas le plus défavorable de l'incompressibilité totale, et poursuivons ensuite en deux étapes : (i) nous procédons tout d'abord à des études de convergence sur les champs de déplacement et de pression afin d'estimer la qualité du triplet *élément fini - enrichissement du champ de déplacement - enrichissement du champ de pression*. Pour compléter cette première indication sur la stabilité de la formulation, (ii) nous considérons ensuite le test numérique du inf-sup sur un problème modèle. Après enrichissement, le système aux valeurs propres (4.6) est résolu. Si au cours du raffinement du maillage la plus petite valeur propre non-nulle du système reste bornée loin de zéro, alors la condition inf-sup est considérée vérifiée. Ces deux étapes sont complémentaires dans la mesure où elles donnent toutes deux une indication sur la vérification (ou non) de la condition inf-sup pour le problème considérée

Bien que le cas des interfaces matériaux (également utile pour les écoulements de Stokes) et des trous aient aussi été considérés au cours de mes travaux, (LEGRAIN 2006; LEGRAIN, MOËS et HUERTA 2008), nous nous focalisons ici sur la fissuration des milieux incompressibles. Dans le cas des matériaux compressibles, le champ de déplacement est enrichi par les développements asymptotiques du déplacement en pointe de fissure. Dans le cas incompressible, ce développement n'est pas modifié et peut donc être réutilisé pour enrichir le champ de déplacement. L'évolution asymptotique du champ de pression peut également être obtenue à partir de la solution de Westergaard (WESTERGAARD 1939). Il est possible de montrer que ce champ prend la forme suivante :

$$p(r,\theta) = \frac{2K_I}{3\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2K_{II}}{3\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
(4.7)

Cette expression est utilisée pour obtenir la base d'enrichissement de la pression dans la zone proche de la pointe de fissure :

$$\begin{cases} \phi_I^p = \frac{1}{\sqrt{r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \phi_{II}^p = \frac{1}{\sqrt{r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$
(4.8)

Remarquons que pression et déplacement sont enrichis avec une fonction de type Heaviside pour les nœuds dont le support est coupé en deux par la fissure.

Nous allons maintenant chercher à valider le couple d'enrichissements pression-déplacement proposé en suivant la démarche exposée ci-dessus. Notons enfin que seuls les résultats obtenus avec l'élément mini sont présentés.

4.2.4 Vérifications

Le terme vérification est à prendre ici comme dans Validation des modèles & Vérification des calculs.

Etudes de convergence

D'après (ZIENKIEWICZ, Y. C. LIU et HUANG 1989), la convergence d'une approximation mixte (sans singularité) est caractérisée par la relation suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{h}\|_{H^{1}} + \|p - p^{h}\|_{L^{2}} = O\left(h^{\min(K,L+1)}\right)$$
(4.9)

où (\mathbf{u} , p) est la solution exacte du problème, (\mathbf{u}^h , p^h) est la solution éléments finis et (K, L) les ordres complets des polynômes interpolant respectivement le déplacement et la pression. Aucun résultat théorique n'est à notre connaissance disponible lorsqu'une singularité est présente dans les champs

de pression ou de déplacement, mais rien n'empêche théoriquement d'étendre cet estimateur aux problèmes singuliers :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{h}\|_{H^{1}} + \|p - p^{h}\|_{L^{2}} = O\left(h^{\min(\tilde{K}, \tilde{L}+1)}\right)$$
(4.10)

où $\tilde{K} = \min(K, \lambda_u)$ et $\tilde{L} = \min(L, \lambda_p)$ avec λ_u et λ_p les degrés de singularité de la solution en **u** et *p* respectivement. Les taux de convergence optimaux éléments finis sont ainsi donnés dans la table 4.1.

Déplacement (norme <i>H</i> ¹)	Pression (norme L^2)
Solutions régulières :	
O(h)	O(h)
Fissures ($\lambda_u = \lambda_p = 1/2$) :	
$O(\sqrt{h})$	$O(\sqrt{h})$

TABLE 4.1 – Ordres de convergence optimaux (éléments Mini).

Considérons un domaine $\Omega =] -1; 1[\times] -1; 1[$ soumis à un vecteur contrainte sur sa frontière $\partial\Omega$ (voir la figure 4.2). Ce vecteur contrainte est en fait le vecteur contrainte exact d'un problème de domaine infini fissuré soumis à un chargement en mode mixte (solution de Westergaard avec $K_I = 1$ et $K_{II} = 1$). Deux séquences de maillages graduellement raffinés sont utilisées, de sorte que la fissure passe toujours à travers les éléments. La première est présentée sur la figure 4.2 a : la pointe de fissure est toujours située sur la bordure d'un élément. La seconde sur la figure 4.2 b est telle que la pointe de la fissure se situe toujours à l'intérieur d'un élément.

Deux stratégies d'enrichissement sont ensuite considérées :

- En premier lieu, l'enrichissement dit topologique où seuls les nœuds dont le support contient la pointe de fissure sont enrichis;
- Puis, l'enrichissement géométrique introduit par (BÉCHET et al. 2005) et (LABORDE et al. 2005) où tous les nœuds situés dans un cercle (de rayon 0,1) sont enrichis avec les champs asymptotiques de la pointe de fissure. Il a été montré que ce type d'enrichissement améliore le taux de convergence du problème de $O(h^{1/2})$ à O(h) en norme énergétique pour le cas compressible.



FIGURE 4.2 – Domaine d'intérêt : a. Maillage N°1; b. Maillage N°2 et c. déformée.

Les résultats de l'étude de convergence sont présentés sur la figure 4.3 pour les deux types de maillage. Les taux de convergence de la pression et du déplacement sont en $O(h^{1/2})$ pour l'enrichissement topologique. Ce résultat est cohérent avec la théorie de l'élasticité linéaire compressible, du moins

pour les déplacements. L'influence de l'enrichissement est mise en évidence par un décalage vertical des courbes de convergence. Pour l'enrichissement géométrique, les résultats sont similaires à ceux obtenus par (BÉCHET et al. 2005), c'est-à-dire une amélioration du taux de convergence jusqu'à O(h), pour le déplacement ainsi que la pression. Dans ce cas particulier, nous obtenons une légère super-convergence pour la pression. Dans (LEGRAIN 2006; LEGRAIN, MOËS et HUERTA 2008) nous avons aussi étudié le cas où seule la partie linéaire du champ de déplacement est enrichie (i.e. pas la bulle). On observe alors des résultats quasi-inchangés d'un point de vue taux de convergence et niveau d'erreur, tout en économisant des degrés de liberté.



FIGURE 4.3 – Etude de convergence pour les maillages structurés N°1 et N°2.

Test numérique du Inf-sup

Le test numérique du inf-sup est effectué sur un problème d'éprouvette carrée de côté 2 avec une entaille latérale de longueur 1 (voir la figure 4.4). Une pression est appliquée sur la face supérieure de l'éprouvette, et les faces inférieure et droite sont encastrées. Ce cas de chargement a été choisi car il est plus drastique que celui utilisé lors des études de convergence. La pointe de la fissure est située en (0,1;0,05) de manière à ce que sa position relative avec le maillage varie (voir la figure 4.4). L'évolution du paramètre du inf-sup est tracée sur la figure 4.5 pour cinq cas de figure :



FIGURE 4.4 – Test numérique du inf-sup pour la fissuration.

1. Enrichissement topologique;

- 2. Enrichissement géométrique (rayon 0,4);
- 3. Éléments finis classiques;
- 4. Enrichissement topologique (partie linéaire enrichie);
- 5. Enrichissement géométrique (rayon 0,4, partie linéaire enrichie);



FIGURE 4.5 – Résultats du test inf-sup pour la fissuration.

Le paramètre inf-sup est parfaitement stable : la condition inf-sup est donc vraisemblablement vérifiée dans tous les cas.

4.2.5 Bilan partiel

Au cours de cette section, nous avons proposé et validé des stratégies d'enrichissement permettant de résoudre des problèmes d'élasticité incompressible HPP, formulés par méthodes de partition de l'unité. Basée sur une formulation mixte, la méthode est adossée à des fondements mathématiques plus solides que l'approche EAS utilisée par (J. E. DOLBOW et DEVAN 2003), tout en étant plus flexible en terme de panel de fonctions d'enrichissement. Des stratégies d'enrichissement des champs de pression et de vitesse ont été proposées pour le cas des trous, des interfaces matériaux et des fissures avec des résultats probants (LEGRAIN 2006; LEGRAIN, MOËS et HUERTA 2008). La stabilité de la méthode a été vérifiée grâce à des études de convergence et au test numérique du inf-sup. En outre, notons que ces études sont directement transposables au cas des fluides visqueux à faibles nombre de Reynolds (écoulement de Stokes) quand ceux-ci contiennent des surfaces libres ou des fluides de viscosités différentes (WAGNER et al. 2001; LEGRAY, CHESSA et BELYTSCHKO 2006; GROSS et REUSKEN 2007; GERSTENBERGER et WALL 2008; T.-P. FRIES 2009).

4.3 Approches numériques pour la caractérisation de l'intégrité des structures de confinement

La seconde partie de mes travaux en mécanique de la rupture concerne les approches de mécanique de l'endommagement pour les structures du génie civil. Nous nous intéressons en particulier à l'intégrité des structures de confinement réalisées en béton. L'estimation des taux de fuite induits par l'endommagement du matériau est une information fondamentale pour le dimensionnement de telles structures. En effet, les fuites de radio-nucléides doivent être maîtrisées en cas de sur-pression accidentelle à l'intérieur de l'enceinte. Dans ce cas de figure, la mécanique de la rupture ne peut

être utilisée car la position et la taille des fissures sont les principales inconnues du problème (en plus de leur ouverture). Il est donc nécessaire de traiter la dégradation du matériau depuis la micro-fissuration et jusqu'à l'apparition de macro-fissures. Deux approches seront présentées ici. La première, proposée lors de mon post-doctorat, fait appel à l'utilisation de modèles d'endommagement non-locaux "classiques" (PIJAUDIER-CABOT et BAŽANT 1987; PEERLINGS et al. 1998) et a nécessité le développement d'une méthode d'extraction d'ouverture de fissure robuste. La deuxième, développée lors de la thèse de Benoît Lé, est basée sur le modèle de level-set épaisse (Thick Level-Set ou *TLS*) (MOËS, STOLZ, BERNARD et al. 2011). Ce modèle permet de traiter de manière transparente la transition entre endommagement diffus et naissance de fissures ,rendant aisée l'extraction de leur ouverture.

4.3.1 Extraction d'ouvertures de fissures équivalentes à un champ d'endommagement

Dans cette première section, nous nous intéressons à l'extraction d'ouverture de fissures représentées par des modèles d'endommagement non-locaux "classiques tels" que les modèles non-locaux à gradient (LASRY et BELYTSCHKO 1988; PEERLINGS et al. 1998) ou intégraux (PIJAUDIER-CABOT et BAŽANT 1987). A la différence de la méthode TLS qui sera présentée dans la prochaine section, l'approche proposée ici permet d'estimer les ouvertures de fissures pour des classes de modèles d'endommagement incapables de représenter la phase terminale du processus de dégradation des matériaux. Celle-ci a initialement été proposée par DUFOUR, PIJAUDIER-CABOT et al. (2008) en 1D, puis étendue en 2D dans le cadre de mes travaux post-doctoraux (DUFOUR, LEGRAIN et al. 2012).

Modèles d'endommagement

Les modèles d'endommagement ciblés ici sont les modèles d'endommagement non-locaux intégraux et gradient. Nous considérerons ici le modèle d'endommagement local de Mazars (MAZARS 1986) afin de représenter la dégradation progressive des propriétés du matériau. Dans un premier temps, la présentation sera restreinte au cas unidimensionnel afin de se concentrer ensuite sur l'approche d'extraction. La relation contrainte ($\underline{\sigma}$) - déformation ($\underline{\varepsilon}$) est classiquement écrite :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-d)\,\mathbb{C}:\underline{\underline{\varepsilon}} \tag{4.11}$$

où *d* est la variable d'endommagement et \mathbb{C} le tenseur de Hooke du matériau sain. Nous supposons que la variable d'état locale Y dépend uniquement de l'état de déformation : $Y(\mathbf{x}, t) = Y(\varepsilon(\mathbf{x}, t))$. D'un point de vue physique, Y est plus sensible aux déformations positives que négatives. Deux expressions classiques de Y sont présentées ci-dessous (modèles de Mazars (MAZARS 1986) et de von Misès (VREE, BREKELMANS et GILS 1995)) :

$$Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \langle \varepsilon_i \rangle} \tag{4.12}$$

$$Y = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)}I_1 + \frac{1}{2k}\sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu}I_1\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2}J_2}$$
(4.13)

où *k* est le rapport entre résistances en compression et en traction, ν est le coefficient de Poisson, I_1 le premier invariant du tenseur de déformation et J_2 le second invariant de la partie déviatorique de la déformation. L'évolution de l'endommagement *d* est supposée dépendre de la variable d'état :

$$d(\mathbf{x},t) = d(Y(\mathbf{x},t)) \tag{4.14}$$

Le processus d'endommagement démarre lorsque la variable d'état dépasse un seuil Y_0 et ne peut décroître :

$$Y \le Y_0 \quad \dot{d} \ge 0 \quad (Y - Y_0)\dot{d} = 0$$
 (4.15)

Classiquement, la loi d'évolution peut être polynomiale, linéaire ou dans le cas des bétons plutôt exponentielle :

$$d = 1 - \frac{Y_0(1-A)}{Y} - Ae^{-B(Y-Y_0)}$$
(4.16)

où *A* et *B* sont des paramètres qui contrôlent respectivement la résistance résiduelle et la rapidité de l'adoucissement après le pic. L'utilisation d'un tel modèle conduit à une dépendance pathologique des résultats au maillage et à une dissipation nulle lorsque l'on fait tendre la taille des éléments vers zéro. De nombreuses techniques de régularisation ont été proposées pour pallier ce problème, l'objectif étant d'éliminer la localisation de l'endommagement. Les plus utilisées dans l'industrie sont les méthodes de régularisation non-locales intégrales (PIJAUDIER-CABOT et BAŽANT 1987) et non-locales gradient (PEERLINGS et al. 1998) qui éliminent les localisations en limitant le gradient de la variable à régulariser. Nous nous bornerons à présenter la première ici, bien que l'approche d'extraction proposée reste applicable à la deuxième (DUFOUR, PIJAUDIER-CABOT et al. 2008).

Technique de régularisation intégrale

La régularisation consiste à construire une variable d'état non-locale \bar{Y} et à écrire la loi d'évolution en fonction de cette nouvelle variable. Notons que comme présenté dans (JIRÁSEK 1998), la nonlocalité peut être introduite à travers d'autres variables comme la variable d'endommagement ou même le déplacement (Rodríguez-Ferran, Morata et Huerta 2005). Dans cette présentation, nous suivons l'approche justifiée phénoménologiquement dans (PIJAUDIER-CABOT et BAŽANT 1987) et régularisons la variable d'état selon l'expression :

$$\bar{Y}(\mathbf{x},t) = \frac{\int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{s}) Y(\mathbf{s},t) \, d\Omega}{\int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \, d\Omega}$$
(4.17)

$$= NLOC(Y) \tag{4.18}$$

où $NLOC(\bullet)$ est l'opérateur de non-localisation et $\alpha(\bullet)$ est une fonction poids qui permet de pondérer la moyenne en fonction de la position relative au point considéré. Parmi les nombreuses fonctions proposées dans la littérature, citons la fonction gaussienne qui est la plus communément utilisée :

$$\alpha(\bullet) = e^{-(\frac{2\bullet}{l_c})^2} \tag{4.19}$$

où l_c est un paramètre physique du modèle (longueur interne) représentant la distance d'interaction entre les points matériels. Même après régularisation, ce type de modèle ne peut représenter la rupture complète du matériau. En effet, un endommagement unitaire conduit à une raideur nulle du matériau et donc une matrice raideur singulière. Ceci mène généralement à limiter numériquement l'endommagement à 0,999 pour permettre de résoudre le problème.

Procédure d'extraction 1D

La procédure d'extraction est maintenant présentée. Nous suivons pour cela (DUFOUR, PIJAUDIER-CABOT et al. 2008) et considérons l'exemple unidimensionnel d'une barre de longueur *L* chargée en tension (figure 4.6a). Cette dernière est bloquée à son extrémité gauche et soumise à un déplacement imposé croissant avec le temps. Nous supposons que l'historique de chargement conduit à une rupture au point x_0 (figure 4.6a). Au delà d'une charge critique, la barre se sépare en deux parties totalement déchargées si bien que le déplacement fait apparaître une discontinuité forte en x_0 (figure 4.6b) :

$$u_{sd}(x) = \llbracket U \rrbracket H(x - x_0)$$
(4.20)



FIGURE 4.6 – Barre en traction uniaxiale : extraction de l'ouverture de fissure.

où [U] représente l'amplitude du saut de déplacement en x_0 (ouverture de la fissure) et $H(\bullet)$ est la fonction de Heaviside. L'indice \bullet_{sd} est employé ici pour illustrer un travail sur un champ discontinu. Le champ de déformation (obtenu par dérivation de (4.20)) a donc pour expression :

$$\varepsilon_{sd}(x) = \llbracket U \rrbracket \delta(x - x_0) \tag{4.21}$$

où $\delta(\bullet)$ est l'opérateur Dirac (figure 4.6c). Ce champ étant utilisé pour évaluer la variable d'état, on obtient par linéarité :

$$Y_{sd}(x) = \llbracket U \rrbracket Y(\delta(x - x_0)) = \llbracket U \rrbracket \delta(x - x_0)$$
(4.22)

La discrétisation éléments finis ainsi que la procédure de régularisation ne permettent de représenter ce champ qu'asymptotiquement. Il est donc délicat de travailler sur la variable interne pour évaluer l'ouverture de la fissure, d'autant plus que sa valeur exacte n'est pas bornée. Le point clef de la procédure consiste ainsi à travailler sur la variable non-locale \bar{Y} . Si l'état mécanique dans la barre est proche de la discontinuité forte, alors \bar{Y} doit être proche de \bar{Y}_{sd} avec :

$$\bar{Y}_{sd}(x) = \llbracket U \rrbracket NLOC(\delta(x - x_0)) \tag{4.23}$$

où $NLOC(\delta(x - x_0))$ est aisément obtenu à partir de $\alpha(\mathbf{x})$ (figure 4.6d). $\bar{Y}_{sd}(x)$ est la représentation non-locale du saut de déplacement local et a la même forme que la fonction de régularisation α . Une comparaison entre \bar{Y} (obtenue numériquement) et \bar{Y}_{sd} (obtenue analytiquement) permet d'estimer l'ouverture de la fissure équivalente au modèle continu. Deux choix ont été considérés :

(i) Imposer un lien fort de type collocation entre les deux distributions ($\bar{Y}(x_0) = \bar{Y}_{sd}(x_0)$) (DUFOUR, PIJAUDIER-CABOT et al. 2008) :

$$\llbracket U \rrbracket = \frac{\bar{Y}(x_0) \, \int_0^L \alpha(x_0 - s) \, ds}{\alpha(0)} \tag{4.24}$$

4.3 Approches numériques pour la caractérisation de l'intégrité des structures de confinement



FIGURE 4.7 – Extension au 2D : localisation de la fissure équivalente et d'un des profils orthogonaux Γ^{\perp} sur lesquels est appliquée l'extraction 1D.

(ii) Imposer un lien "faible" entre les distributions $(\int_0^L \bar{Y}(s) ds = \int_0^L \bar{Y}_{sd}(s) ds)$ (Dufour, Legrain et al. 2012) :

$$\llbracket U \rrbracket = \frac{\int_0^L |\bar{Y}_{sd}(s) - \bar{Y}(s)| \, ds}{\int_0^L \bar{Y}(s) \, ds}$$
(4.25)

Remarquons que l'un et l'autre des critères peuvent être choisis comme mesure de l'erreur de modèle entre le champ éléments finis et la discontinuité forte. Par exemple, si le lien fort est utilisé (équation (4.24)), alors l'évaluation de (4.25) (qui compare la forme des deux profils régularisés) donne une erreur de représentation de la discontinuité forte régularisée. Notons également que cette procédure nécessite simplement la connaissance des champs mécaniques locaux sans préjugé quant à leur provenance (modèle non-local intégral ou gradient). La longueur de régularisation pour l'extraction de l'ouverture peut même être différente de celle utilisée lors du calcul. Les vérifications unidimensionnelles conduites dans (DUFOUR, PIJAUDIER-CABOT et al. 2008) ont montré que la méthode était robuste et que les niveaux d'erreur sur l'ouverture descendaient à quelques pourcents une fois la "fissure" complètement développée (seul le lien fort avait été considéré dans ces travaux). Remarquons néanmoins que la position de la fissure est supposée connue ce qui limite l'application de l'approche dans le cas général, et surtout bidimensionnel. C'est cette extension qui, outre la proposition du lien "faible" pour l'extraction, a constitué ma principale contribution à cette étude.

Extension de la procédure en 2D

L'extension de la méthode au cas bidimensionnel repose sur deux étapes successives : (i) déterminer la position de la fissure équivalente à l'état d'endommagement (cf. Γ^{\perp} , figure 4.7), cette connaissance étant indispensable afin (ii) d'appliquer l'approche d'extraction le long de profils 1D orthogonaux à la discrétisation de la fissure Γ^{\perp} .

Le long de ces profils, la déformation locale normale $\varepsilon_N = \mathbf{N} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}$ est évaluée sur Γ^{\perp} pour servir de point d'entrée à la procédure d'extraction unidimensionnelle. En 3D, l'approche serait analogue : une surface de fissure serait triangulée et les profils 1D émaneraient du centre des éléments de la surface. La difficulté consiste donc à construire la fissure idéalisée à partir des champs mécaniques du calcul mécanique endommageable.

Localisation de la fissure idéalisée Des approches aux objectifs analogues ont déjà été proposées dans le contexte de la transition endommagement-rupture, lors de la phase de localisation de la fissure au cours de la propagation. COMI et PEREGO (2000) proposent d'ajuster un polynôme d'ordre 4 sur le champ d'endommagement et ensuite propager la fissure dans la direction de courbure maximale de ce polynôme en pointe de fissure. Le champ d'endommagement est malheureusement



FIGURE 4.8 – Algorithme de "Global tracking" : enveloppes du champ vectoriel T(x), fissures potentielles et fissure réelle.

un champ quasiment constant dans la zone proche de la fissure ce qui rend délicat la recherche d'extrema. MARIANI et PEREGO (2003) proposent une procédure similaire mais en travaillant sur le champ de contraintes sur un demi-disque centré sur la pointe de fissure. La fissure est ensuite introduite perpendiculairement à la direction principale associée à la plus grande valeur propre du champ polynomial. Notons que la robustesse des résultats obtenus dépend de l'ordre du polynôme utilisé pour la régression du champ (MARIANI et PEREGO 2003). WELLS, SLUYS et BORST (2002) et MEDIAVILLA, PEERLINGS et GEERS (2006) proposent d'utiliser les directions entre la pointe de fissure et les points d'intégration les plus endommagés, moyennées en fonction de leur distance à la pointe. FELD-PAYET et al. (2015) et BOTTONI, DUFOUR et GIRY (2015) proposent quant à eux des procédures basées sur la recherche de lignes de crète avec des résultats encourageants. Enfin, TAMAYO-MAS et RODRÍGUEZ-FERRAN (2015) proposent d'utiliser l'axe médian pour localiser le squelette de la zone endommagée et ensuite introduire une discontinuité forte.

Dans mes travaux, nous nous sommes inspirés de l'approche dite "global tracking" proposée par OLIVER et HUESPE (2004) dans le contexte de la méthode à discontinuité forte (SDA) (OLIVER 2002), mais seulement en vue d'évaluer la direction de propagation des fissures. La résolution d'un problème scalaire permet d'obtenir une fonction dont l'iso-valeur en pointe donne la direction de propagation de la fissure. Cette approche a ensuite été améliorée dans (FEIST et HOFSTETTER 2007; DUMSTORFF 2007). A la différence de ces travaux, nous utilisons la procédure dans le but de localiser la fissure équivalente. Pour cela, la fissure est supposée située selon une surface (ou une ligne en 2D) tangente à un champ vectoriel normé T(x). La construction des enveloppes de T(x) permet d'obtenir les surfaces de fissure à un instant *t* (cf. Figure 4.8). Les enveloppes de T(x) sont décrites par une fonction $\theta(x)$) dont les iso-contours définissent toutes les lignes de discontinuité possibles telles que décrites sur la Figure 4.8. Le gradient de cette fonction doit donc être normal à T(x) en tout point :

$$\mathbf{T}(x) \cdot \mathbf{grad} \ \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{T}} = 0$$
 (4.26)

Cette condition peut se ré-écrire en un problème aux conditions aux limites (OLIVER et HUESPE 2004) :

$$\operatorname{div}(\underline{K}\operatorname{\mathbf{grad}} \theta) = 0 \quad \text{in } (\Omega) \tag{4.27}$$

où (Ω) est le domaine où la recherche est effectuée (zone endommagée ici) et $\underline{\underline{K}}$ est un tenseur du second ordre défini comme :

$$\underline{K}(x) = \mathbf{T}(x) \otimes \mathbf{T}(x) \tag{4.28}$$



FIGURE 4.9 – Essai de flexion trois points : géométrie et propriétés matériaux

Les conditions aux limites associées à (4.27) sont (OLIVER et HUESPE 2004) :

$$(-\underline{K}\mathbf{grad}\ \theta) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } \partial_q \Omega$$

$$(4.29)$$

$$\theta = \theta_d \quad \text{on } \partial_\theta \Omega \tag{4.30}$$

où **n** est le vecteur unitaire normal à $\partial_q \Omega$ et θ_d est une valeur arbitraire pour la condition limite de Dirichlet. Une analogie thermique peut être considérée afin de simplifier l'implémentation de la méthode dans un code industriel. Si la condition aux limites de Dirichlet est compatible avec l'équation (4.26), alors la solution satisfaisant :

$$\theta(x) \neq \text{constant}; \ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{T}} = 0$$
(4.31)

est solution du problème aux limites initial. Le tenseur $\underline{\underline{K}}$ étant de rang 1, son expression est modifiée (OLIVER et HUESPE 2004) :

$$\underline{K}(x) = \mathbf{T}(x) \otimes \mathbf{T}(x) + \epsilon \underline{I}$$
(4.32)

où ϵ est un faible coefficient et \underline{I} est le tenseur identité. Une fois le problème résolu, la fissure est propagée selon l'iso- θ passant en pointe.

L'application de cette méthode au cas de la détection de la fissure idéalisée requiert la modification de deux de ses ingrédients : (i) la définition du champ T(x) et (ii) la détermination d'un point sur la fissure. Concernant le premier aspect, nous faisons l'hypothèse que la fissure idéalisée est perpendiculaire à la direction associée à la déformation principale maximale ε_{max} qui représente la direction d'une fissure en mode I dominant. Le champ T(x) est donc pris perpendiculaire à cette direction principale. Travailler sur le champ d'endommagement n'est pas pertinent dans la mesure où ce dernier est quasiment constant sur de larges zones au centre de la bande endommagée.

La bonne iso-valeur est obtenue en prenant celle passant par le point d'intégration où ε_{max} est maximal sur le domaine de recherche. Pour la même raison que précédemment, nous ne recherchons pas le point d'intégration le plus endommagé à cause de la forme quasi-constante du champ d'endommagement. Enfin, notons que le cas de la multi-fissuration peut être pris en charge en séparant la structure en zones endommagées indépendantes et en appliquant l'approche de tracking sur chacune d'elles.

Vérification : flexion trois points

L'approche est validée sur un essai de flexion trois points dont les propriétés géométriques et matériaux sont présentées sur la figure 4.9. D'autres cas de vérifications sont disponibles dans (DUFOUR, LEGRAIN et al. 2012). Le modèle d'endommagement utilisé est un modèle de Mazars (MAZARS 1986) pour lequel les contributions de la tension et de la compression à l'endommagement sont traitées de manière séparée. Enfin, la loi d'évolution est une loi exponentielle. Le calcul est piloté par une procédure de longueur d'arc avec l'ouverture de l'entaille (CMOD) comme paramètre de

contrôle afin de passer outre le phénomène de snapback auquel nous sommes confrontés ici. Le maillage (2343 éléments quadrangulaires) ainsi que le niveau d'endommagement final sont présentés sur la figure 4.10. Cet état mécanique est ensuite considéré pour localiser une fissure équivalente et extraire un champ d'ouverture à travers cette dernière. La zone de recherche de la fissure est constituée des éléments dont le niveau d'endommagement est supérieur à 0.8 (zone en pointillé sur la figure 4.10). La fissure idéalisée obtenue est également représentée sur cette figure. Nous observons que celle-ci est quasiment verticale, même dans le cas où la zone de recherche n'est pas symétrique par rapport au centre de la poutre. Nous remarquons également que la fissure tend à tourner à gauche près du haut de la poutre. Ce phénomène est dû à l'influence de la zone de chargement qui perturbe l'état de déformation. Dans un deuxième temps, la méthode d'extraction de l'ouverture est



FIGURE 4.10 – Maillage de calcul, champ d'endommagement, zone de tracking (pointillés) et fissure équivalente.

appliquée. Les deux liens continu-discontinu ((4.24) et (4.25)) sont alors comparés à une ouverture de référence pour deux maillages de finesse différente (cf. figure 4.11). Cette ouverture de référence (*"estimated jump"*) est obtenue par extraction des déplacements en bord de zone endommagée (cf. *J* sur la figure 4.12b). Nous observons dans les deux cas un meilleur comportement du lien faible, spécialement lorsque le maillage est raffiné. Cette différence de comportement peut s'expliquer par la forme des champs mécaniques locaux sur une courbe Γ^{\perp} proche de l'entaille. L'évolution du champ de déformation normale $\varepsilon_N = \mathbf{N} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}$ (figure 4.12) est très éloignée du profil théorique auquel on cherche à le comparer (Dirac sur la figure 4.6c). Cela est dû à la limitation du niveau d'endommagement à 0,999 qui laisse encore transiter des efforts à travers la fissure idéalisée (pas de création de "surface libre"), élargissant ainsi artificiellement la zone endommagée. Le lien faible est quant à lui peu sensible à ce phénomène (erreur inférieure à 10%).

Bilan partiel

Une approche pragmatique a été proposée afin d'estimer des ouvertures de fissures équivalentes à un état mécanique d'endommagement continu. Plutôt que d'écrire la transition entre modèles continu et discontinu, cette approche se base sur un simple post-traitement des champs mécaniques du calcul non-local. Le profil de déformation régularisée est alors comparé à celui d'une discontinuité forte afin d'en extraire une ouverture équivalente. Une approche permettant de localiser cette fissure équivalente a également été proposée : plutôt que de se baser sur des critères géométriques relatifs à la zone endommagée comme dans FELD-PAYET et al. (2015), BOTTONI, DUFOUR et GIRY (2015) et TAMAYO-MAS et RODRÍGUEZ-FERRAN (2015), l'approche fait usage des champs mécaniques du calcul non-local. Ces spécificités font que l'approche d'extraction reste utilisable pour d'autres classes d'endommagement telles que les méthodes à gradient. Un certain nombre de problématiques restent cependant à traiter. Tout d'abord, il a été montré que le paramètre de contrainte résiduelle de la loi d'évolution avait une influence sur la qualité des ouvertures estimées. Ce phénomène est en partie lié à l'élargissement de la zone endommagée mis en évidence sur l'exemple de vérification. Un autre phénomène peut également entrer en jeu en mode mixte : si la zone endommagée a

4.3 Approches numériques pour la caractérisation de l'intégrité des structures de confinement



FIGURE 4.11 – Extraction de l'ouverture (l'entaille est à gauche de la courbe) : a. Maillage grossier (1994 éléments); b. Maillage fin dans la zone centrale (2343 éléments).

tendance à se propager en "crabe", alors la position de la fissure peut se retrouver faussée selon l'instant où l'extraction de la fissure équivalente est réalisée. Dans ce cas, une approche de localisation incrémentale serait envisageable.

4.3.2 Approche par level-set épaisse pour l'intégrité des structures du génie civil

La méthode par level-set épaisse (Thick Level Set Method, TLS) est une méthode récente, proposée par MOËS, STOLZ, BERNARD et al. (2011) comme réponse à la problématique principale issue des méthodes d'endommagement non-locales telles que présentées dans la section précédente. En effet, la méthode TLS se propose de traiter au sein d'un même modèle l'évolution de l'endommagement depuis son initiation et jusqu'à la création d'une macro-fissure. Ce modèle partage des similarités avec les modèles dits phase-field (Francfort et Marigo 1998; Miehe, Hofacker et Welschinger 2010) qui introduisent un pont entre modèles d'endommagement régularisés par gradient et la fissuration de Griffith. Il a été montré dans (Cazes et Moës 2015) que l'approche TLS pouvait elle aussi être explicitée dans le cadre des approches variationnelles de la fissuration (FRANCFORT et MARIGO 1998). Notons cependant qu'à la différence de celles-ci, la méthode TLS permet de représenter la zone complètement endommagée de la structure grâce à l'utilisation de la méthode X-FEM, mais également de restreindre la région dans laquelle le modèle est régularisé. Cette caractéristique du modèle TLS est très utile dans l'optique d'évaluer des ouvertures de fissures. Ainsi, nous nous proposons dans cette section d'étudier les potentialités du modèle TLS pour l'évaluation de la durabilité des structures du génie civil. Ces travaux se sont déroulés lors de la thèse de Benoît Lé (Lé 2016) qui, dans le cadre du projet européen ERC XLS, a étudié les potentialités de la méthode TLS pour les structures renforcées fréquemment rencontrées en génie civil (identification des paramètres du modèle, prise en compte des renforts, multi-fissuration, robustesse des algorithmes, coûts de calcul).

Le modèle Thick Level Set

Dans cette section, nous présentons brièvement les équations du modèle TLS. En particulier, nous n'aborderons pas les approches permettant de différentier traction et compression dans le modèle (cf. (MOËS, STOLZ, BERNARD et al. 2011; BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON 2012)). Des présentations



FIGURE 4.12 – a. Profils de contrainte ε_N le long de Γ^{\perp} dans une zone fortement endommagée; b. Champ de déplacement normal typique le long de Γ^{\perp} et ouverture de référence (*"estimated jump"*) *J*.

plus détaillées du modèle sont proposées dans (Moës, Stolz, Bernard et al. 2011; Bernard, Moës et Chevaugeon 2012; Meer et Sluys 2015; Parrilla Gómez, Moës et Stolz 2015; Cazes et Moës 2015). Notons que la présentation faite ici ne se base pas sur l'approche variationnelle utilisée dans (Cazes et Moës 2015).

Lois d'état Considérons un domaine Ω contenant une zone saine Ω_{sain} , et une zone endommagée Ω_{dam} (cf. figure 4.13 a). Le modèle TLS propose de représenter la frontière Γ entre ces deux zones par l'iso-zéro d'une fonction de niveau ϕ (appelée Level-Set par la suite). Parmi les choix possibles, la fonction ϕ est prise comme étant la fonction distance signée à l'interface. Cette fonction vérifie donc les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|\nabla \phi\| = 1 \quad \text{sur } \Omega\\ \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$
(4.33)

Ce choix est judicieux car il permet de propager efficacement la position du front par la connaissance de sa vitesse normale (SETHIAN 1999). Si *d* représente le champ d'endommagement, alors la densité d'énergie de déformation s'écrit :

$$w(\underline{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2}(1 - d) \underline{\varepsilon} : \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}$$
(4.34)

La contrainte locale ainsi que le taux local de restitution d'énergie sont alors aisément obtenus :

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = -\frac{\partial w}{\partial \underline{\varepsilon}} = (1-d) \mathbb{C} : \underline{\varepsilon} \\ Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C} : \underline{\varepsilon} \end{cases}$$
(4.35)

Une des originalités du modèle (outre l'utilisation de level-sets pour séparer zones saine et endommagée) consiste à supposer que l'évolution spatiale de l'endommagement est définie explicitement à partir de la fonction level-set : $d = d(\phi)$ selon un *profil d'endommagement* imposé. Plusieurs de ces profils sont représentés sur la figure 4.13 b. La fonction $d(\phi)$, qui est un paramètre du modèle,



FIGURE 4.13 – a. Domaine endommagé, notations nécessaires à la mise en œuvre de la méthode TLS;b. Profils d'évolution de l'endommagement.

est strictement croissante pour être thermodynamiquement acceptable, nulle en 0 et unitaire en l_c . La non-localité du modèle est obtenue en imposant l'évolution de l'endommagement de zéro à un sur une distance fixée l_c . Remarquons que la non-localité n'est obtenue que parce que la fonction ϕ est une fonction distance. Dans le cas contraire, la distance entre iso-zéro et iso- l_c pourrait être arbitrairement petite. Plusieurs profils ont été testés pour le choix de cette fonction (MOËS, STOLZ, BERNARD et al. 2011; BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON 2012; PARRILLA GÓMEZ, MOËS et STOLZ 2015) (cf. figure 4.13 b pour une comparaison). PARRILLA GÓMEZ (2015) propose d'utiliser un profil quadratique dans la mesure où ce profil d'évolution est en bon accord avec de multiples travaux expérimentaux et numériques se focalisant sur la densité de micro-fissures (ALAM, SALIBA et LOUKILI 2012; GRASSL et al. 2012; HAIDAR et al. 2005), mais aussi des travaux plus théoriques où des équivalences entre mécanique de la rupture et modèles d'endommagement non-locaux sont étudiées (MAZARS et PIJAUDIER-CABOT 1996).

Lois d'évolution Précisons maintenant les lois d'évolution associées au modèle TLS. Pour cela, considérons la dissipation liée à l'avancement (normal) du front d'endommagement soumis à une vitesse locale a(s) (cf figure 4.13 a) :

$$\mathcal{D} = \int_{\Omega_{dam}} Y \dot{d} \, d\Omega \tag{4.36}$$

$$= \int_{\Omega_{dam}} Y d'(\phi) a(s) \, d\Omega = \int_{\Gamma} a(s) \underbrace{\int_{\phi=0}^{l} Y d'(\phi) J d\phi}_{g(s)} \, ds \tag{4.37}$$

où $d'(\phi)$ est la dérivée du profil d'endommagement, (ϕ, s) le repère local au front d'endommagement et $J = 1 - \frac{\phi}{\rho(s)}$ le jacobien provenant du changement de variable et permettant de prendre en compte la courbure ρ du front lors de l'intégration. En introduisant la force configurationnelle locale $g(s) = \int_{\phi=0}^{l} Y d'(\phi) J d\phi$, la loi d'évolution ($Y = Y_c$ dans Ω_{dam}) peut se condenser sur le front et consiste donc à chercher le facteur de charge vérifiant :

$$\int_{\Gamma} a(s) g(s) ds = \int_{\Gamma} a(s) g_c(s) ds \quad \forall a(s)$$
(4.38)

où $g_c(s)$ est la force configurationnelle critique obtenue en prenant $Y = Y_c$ dans l'expression de g(s). BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON (2012) montrent cependant que cette condition n'est pas utilisable lors de la nucléation des défauts, g(s) et $g_c(s)$ s'annulant lorsque l tend vers zéro (initiation). Plutôt que de travailler avec ces grandeurs, BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON (2012) proposent de calculer pour chaque s une valeur moyenne de Y notée $\overline{Y}(s)$ de manière à ce que la valeur g(s) soit inchangée :

$$g(s) = \int_{\phi=0}^{l} \overline{Y} d'(\phi) J d\phi = \int_{\phi=0}^{l} Y d'(\phi) J d\phi$$
(4.39)

Nous obtenons ainsi l'expression de \overline{Y} , qui permet de définir $\overline{\bullet}$ l'opérateur de moyennage TLS :

$$\overline{\bullet} = \frac{\int_{\phi=0}^{l} \bullet d'(\phi) J d\phi}{\int_{\phi=0}^{l} d'(\phi) J d\phi}$$
(4.40)

Travailler sur \overline{Y} plutôt que sur la force configurationnelle permet d'utiliser le modèle lors de la nucléation. Il a ainsi été montré que lorsque *l* tend vers zéro, \overline{Y} tend vers Y. Nous cherchons donc le facteur de charge vérifiant :

$$\int_{\Gamma} a(s) \overline{Y}(s) \, ds = \int_{\Gamma} a(s) \overline{Y_c}(s) \, ds \quad \forall a(s)$$
(4.41)

Les conditions de Kuhn-Tucker associées au problème s'écrivent donc :

$$\overline{Y} \le \overline{Y_c}, \quad \dot{a} \ge 0, \quad (\overline{Y} - \overline{Y_c})\dot{a} = 0$$
(4.42)

où $\overline{Y_c}$ correspond à la version moyennée du taux de restitution d'énergie critique. Le problème est ensuite résolu de manière découplée : tout d'abord, les champs mécaniques sont obtenus à endommagement (i.e. position de la level-set) imposé. Ces champs permettent le calcul de \overline{Y} et $\overline{Y_c}$. La connaissance de ces grandeurs permet de déterminer le facteur de charge pour lequel $\overline{Y} = \overline{Y_c}$ en au moins un point du front. BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON (2012) et MEER et SLUYS (2015) proposent ensuite des méthodes pour déterminer le champ de vitesse a(s) le long du front d'endommagement (avec $a(s) = a_{max}$ aux points où \overline{Y} est maximal).

Modèle TLS adapté aux bétons Dans la première version de la TLS, il était possible de jouer sur trois paramètres pour adapter le modèle au comportement des différents matériaux : l_c , Y_c et $d(\phi)$ (BERNARD, MOËS et CHEVAUGEON 2012). L'influence de la longueur caractéristique et du taux de restitution d'énergie critique du matériau sur le comportement des modèles d'endommagement non locaux est bien maîtrisée. Une fois ces paramètres matériaux fixés, la TLS laisse la possibilité de modifier le profil d'endommagement du modèle. Nous illustrons l'influence de ce profil dans un cas simple : une barre endommageable de longueur et de section unitaires est soumise à un effort de traction grâce aux conditions aux limites présentées sur la figure 4.14. La longueur caractéristique et le taux de restitution critique sont fixés : $l_c = 0,2$ mm, $Y_c = 1$ MPa, et le module d'Young *E* est également unitaire. Nous étudions alors la réponse de la barre (courbe F - U(L)) en fonction du profil d'endommagement (cf figure 4.15). Nous observons sur cette figure que le choix du profil a une forte influence sur la réponse de la structure, ce qui laisse une liberté supplémentaire quant à la capacité à simuler des essais réels. Notons également les différences marquées en toute fin de chargement qui sont directement liées à la manière dont l'endommagement tend vers 1 au travers

des différents profils d'endommagement. En outre, la réponse de la structure reste très fragile, ce qui rend difficile la simulation du comportement du béton qui a un comportement beaucoup plus ductile. Ce comportement "fragile" au niveau structurel est lié au comportement local élastique-fragile de la TLS.



FIGURE 4.14 – Barre endommageable en traction.



FIGURE 4.15 – a. Influence de la fonction de profil d'endommagement sur la réponse de la barre; b. Champ d'endommagement final.

MOËS, STOLZ et CHEVAUGEON (2014) et MEER et SLUYS (2015) proposent ainsi de rendre Y_c dépendant du niveau d'endommagement afin de rendre moins fragile le comportement local de la TLS. Pour cela MOËS, STOLZ et CHEVAUGEON (2014) modifient le critère local d'évolution de l'endommagement (4.42) :

$$\overline{Y} \le h(d)\overline{Y_c}, \quad \dot{a} \ge 0, \quad (\overline{Y} - h(d)\overline{Y_c})\dot{a} = 0$$
(4.43)

où h(d) est une fonction sans dimension pour laquelle h(0) = 1 afin que l'endommagement débute toujours pour $Y = Y_c$. Cette fonction ajoute une flexibilité supplémentaire au modèle. A titre d'exemple, présentons la détermination de la fonction h(d) permettant d'avoir un comportement endommageable local de type Mazars. Seule l'expression de Y est influencée par la présence de h(d) :

$$Y = \frac{1}{2} \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C} : \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\varepsilon}} - Y_c(h'(d) - d)$$
(4.44)

où h'(d) est la dérivée de la fonction h. Particularisons cette expression dans le cas unidimensionnel présenté ci-dessus : $Y = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 - Y_c(h'(d) - d)$. Lorsque le critère est vérifié, $Y = Y_c$. Nous pouvons donc écrire l'expression de la déformation en fonction de l'endommagement :

$$\varepsilon^2(d) = 2\frac{\gamma_c}{E}h'(d) \tag{4.45}$$

Si nous égalons cette dépendance à celle du modèle de Mazars (4.16) (qu'il est nécessaire d'inverser), nous obtenons l'expression suivante pour h'(d):

$$h'_{Mazars}(d) = \frac{E}{2Y_c} \left[\varepsilon_{d0} - \frac{1}{B} \log(1-d) \right]^2$$
(4.46)

La comparaison entre le comportement local du modèle de Mazars et cette approche est présentée sur la figure 4.16 a. Remarquons que la fonction h(d) associée tend vers une valeur finie lorsque d tend vers 1, bien que h'(d), elle, ne soit pas bornée (cf. figure 4.16 b). Dans PARRILLA GÓMEZ, MOËS et STOLZ (2015), de telles équivalences unidimensionnelles ont été ensuite appliquées telles quelles en 2D avec des résultats probants (ce qui demande à être vérifié au cas par cas).

Bien que largement utilisé en génie civil, le modèle de Mazars manque de fondements thermodynamiques. Il a également été montré que seuls les modèles cohésifs étaient à même de représenter les effets d'échelles caractéristiques des matériaux du génie civil. PARRILLA GÓMEZ, MOËS et STOLZ (2015) se sont alors attachés à écrire une équivalence du même type que celle présentée ici entre modèles TLS et cohésif. L'approche proposée est analogue à celle initiée dans (LORENTZ, CUVILLIEZ et KAZYMYRENKO 2011) : un exemple unidimensionnel est considéré, et les deux modèles sont dits équivalents si, lors du chargement quasi-statique de la barre, contrainte, énergie et dissipation sont identiques (CAZES, CORET et al. 2009 ; MAZARS et PIJAUDIER-CABOT 1996 ; STOLZ 2010). Les cas des lois cohésives linéaires et bilinéaires (PETERSSON 1981) ont été considérés et validés avec succès pour des études bidimensionnelles. C'est cette approche qui a été utilisée dans mes travaux pour représenter le comportement du béton lors des simulations. Au cours des travaux de thèse Benoît Lé, nous avons ainsi pu proposer une méthodologie pour l'identification des paramètres "cohésifs" TLS, mais également déterminé un certain nombre de règles de bonnes pratiques pour la création du maillage.



FIGURE 4.16 – a. Comparaison du comportement au point d'intégration pour la TLS fragile (h(d) = 1), la TLS avec fonction d'adoucissement ($h(d) \neq 1$) et le modèle de Mazars ; b. Fonction d'adoucissement TLS pour l'équivalence avec le modèle de Mazars.

Vérification : extraction d'ouvertures de fissure avec la méthode TLS

Nous appliquons maintenant les ingrédients présentés ci-dessus à un problème de flexion trois points entaillée analogue à celui présenté sur la figure 4.9, et dont les dimensions sont données dans (Lé 2016, sec.3.3.1). Nous disposons pour cet essai de données expérimentales telles que la réponse force- CMOD (ouverture de l'entaille) et la mesure de l'ouverture de la fissure (obtenue

par corrélation d'image et extraction du saut de déplacement horizontal entre les pixels de part et d'autre de la discontinuité). L'objectif de cette vérification est de comparer l'ouverture de fissure expérimentale avec les ouvertures numériques estimées par les approches des sections 4.3.1 et 4.3.2. Les propriétés des lois utilisées pour simuler ce problème sont données dans (LÉ 2016, sec.3.3.1) (modèle de Mazars pour l'approche de la section 4.3.1, et modèle TLS avec équivalence cohésive pour l'approche détaillée dans cette section). La comparaison des comportements locaux au point de Gauss des deux modèles numériques est présentée sur la figure 4.17 a. Ces comportements locaux sont dissimilaires, car liés à des modèles mécaniques très différents (l'un volumique et l'autre surfacique). Les courbes force-déplacement obtenues pour ces modèles ainsi que pour l'essai expérimental sont tracées sur la figure 4.17 b. Cette dernière courbe montre que la méthode TLS est à-même de représenter le comportement global de la structure. Les oscillations visibles sur cette figure sont caractéristiques de la méthode TLS et leur provenance est liée à plusieurs phénomènes : (i) le mode de pilotage explicite de la méthode et (ii) le comportement particulier (singulier) de la fonction h'(d) lorsque l'endommagement tend vers 1 (LÉ 2016).



FIGURE 4.17 – a. Comportement local TLS et Mazars; b. Courbes Force-CMOD.

L'ouverture de fissure est maintenant évaluée grâce à la méthode proposée dans la section 4.3.1 pour l'approche non-locale intégrale et en utilisant la fissure macroscopique caractéristique de l'approche TLS. Dans ce dernier cas, le déplacement relatif entre deux points en vis-à-vis est utilisé pour évaluer l'ouverture de la fissure. Les ouvertures locales de fissure pour un CMOD de 200 μ m sont présentées sur la figure 4.18. Dans le cas de la TLS, deux maillages sont considérés, avec pour taille de maille $l_c/5$ et $l_c/10$. Les approches d'extraction donnent des résultats similaires, les deux méthodes ayant tendance à sous-estimer légèrement l'ouverture. Ce phénomène peut provenir du fait que lors des essais, la fissure avait tendance à apparaître sur la face côté caméra. La simulation prédit quant à elle une fissure traversante dont l'ouverture est alors située entre les ouvertures des deux faces de l'éprouvette.

Bilan partiel

Nous avons étudié ici l'utilisation de la méthode Thick Level Set pour l'évaluation d'ouvertures de fissures dans les structures du génie civil. L'avantage principal de la méthode provient de sa capacité à traiter naturellement le comportement micro-fissuré dans la process-zone ainsi que la naissance et la croissance des fissures macroscopiques. La méthode donne ainsi un accès naturel aux ouvertures de fissure macroscopiques et donc à l'estimation des débits de fuite. En ce sens,



FIGURE 4.18 – Comparaison des extractions de l'ouverture de la fissure pour un CMOD de 200 μ m

la méthode est plus robuste que l'approche d'extraction présentée au chapitre 4.3.1. Ces résultats sont prometteurs, même si du fait de la jeunesse de la méthode, certains points nécessitent des études plus approfondies. Les points les plus critiques concernent le pilotage de la méthode et la finesse des maillages nécessaires. Les oscillations présentes sur les courbes sont dues à l'utilisation d'un algorithme de pilotage explicite, mais aussi à des problématiques d'intégration dans les zones fortement endommagées où la fonction h'(d) de l'équivalence cohésive est singulière. Cette dernière explication est corroborée par le fait que ces oscillations diminuent lors du raffinement du maillage, spécialement lorsque h(d) est prise constante. La nécessité d'utiliser des maillages fins ($h \simeq l_c/10$) est quant à elle problématique pour les cas tridimensionnels.

4.4 Conclusion

Nous avons présenté au cours de ce chapitre mes travaux dans le contexte de la mécanique de la rupture. Au cours de ces dernières années, j'ai ainsi pu proposer des contributions tant au niveau modèle que numérique dans le cadre des problématiques de durabilité des matériaux. Deux axes me semble pertinents pour la poursuite de ces travaux :

Dans le domaine de la mécanique non-linéaire de la rupture, peu de nouvelles contributions ont été proposées depuis la fin de mes travaux à ce sujet. KAROUI et al. (2014) développent des fonctions d'enrichissement adaptées à d'autres classes de matériaux, BOULENOUAR et al. (2016) et RASHETNIA et al. (2015) présentent des simulations de propagation 2D semblables à celles présentées dans mes travaux de thèse. Il serait d'abord pertinent de pousser plus avant la méthode développée dans ces travaux en modélisant des propagations tridimensionnelles avec matériaux incompressibles. La prise en compte de classes matériaux plus générales pourrait se faire en construisant numériquement des fonctions d'enrichissement adaptées comme proposé dans (GUPTA, KIM et DUARTE 2013), mais dans le cas mixte incompressible. D'un point de vue modélisation, la problématique du développement de critères de direction de propagation de fissure adaptés au non-linéaire est elle-aussi très ouverte. Les fondations de la méthode permettraient également de s'attaquer à des problèmes pré-opératoires où se combinent problématiques d'acquisition géométrique, de modélisation et de simulation. En dehors des aspects durabilité, la méthode pourrait également être appliquée aux problématiques de dimensionnement des élastomères chargés ainsi qu'aux propergols solides (SRINIVASAN, MATOUŠ et GEUBELLE 2008). Enfin, l'apport des méthodes de haut ordre dans les applications citées plus haut mériterait d'être étudié dans la mesure où il a été montré que ces approches

étaient quasiment insensibles au phénomène de verrouillage (DÜSTER, HARTMANN et RANK 2003; HEISSERER et al. 2008). Un couplage avec les approches présentées dans le chapitre 5 serait également très pertinent.

— Dans le domaine de l'endommagement des structures du génie civil, il me semble plus intéressant de porter les efforts sur la méthode TLS de part sa relative jeunesse. De nombreux points restent encore ouverts. Dans un premier temps, il est fondamental d'améliorer l'efficacité numérique de la méthode vis-à-vis des modèles non-locaux intégral et gradient³. Pour cela, de premiers travaux sont en cours dans l'équipe afin de coupler la méthode avec une approche d'enrichissement global-local (DUARTE et KIM 2008). Un autre angle d'attaque consisterait à limiter la densité des maillages tout en maîtrisant les phénomènes d'oscillations des résultats. Nous avons mis en évidence le lien entre ces oscillations et la forme particulière de la fonction h'(d). Réussir à ne pas intégrer ce terme dans la zone proche de $\phi(\mathbf{x}) = l_c$ permettrait certainement de limiter ces oscillations. Une autre piste d'amélioration consisterait à coupler la méthode avec une approche d'adaptation de maillage anisotrope pour ainsi travailler sur des maillages optimisés. Enfin, à plus long terme l'extension de la méthode aux grandes transformations permettrait de passer outre les problèmes de choix des critères d'orientation de fissure en non-linéaaire.

^{3.} Notons qu'il serait intéressant de comparer le coût de la méthode avec celui des approches Phase-Field. Il est probable que dans ce cas la méthode TLS soit plus efficace grâce à son traitement localisé de la régularisation.

Approches innovantes pour la simulation de structures à géométrie complexe

5.1 Introduction

Les performances ainsi que la maturité des outils de calcul numérique ont fait de nombreux progrès ces dernières décennies. La méthode des éléments finis n'est plus cantonnée aux services de R&D et est maintenant fortement implantée dans les PME. L'apparition de codes éléments finis open-source (WIKIPEDIA 2004) généralistes tels que Code-Aster (Electricité de France 1990), Cast3m (Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies Alternatives 1980) ou OpenFOAM (OPENCFD LTD 2004) a également largement contribué à la démocratisation de la méthode. Des simulations de plus en plus complexes (non-linéaires, multiphysiques, de grande taille) peuvent maintenant être envisagées de manière quasi-routinière. Les performances des solveurs éléments finis ont été largement améliorées afin de diminuer le coût des études. A titre d'exemple, le logiciel Ansys (ANSYS INC. 2016) promet dans sa dernière version (V17) une amélioration de la productivité d'un facteur 10 (essentiellement grâce à une meilleure utilisation des capacités parallèles des nouvelles architectures informatiques). Ce gain de productivité ne peut être obtenu en pratique (sauf dans le cas d'études paramétriques) car il est maintenant largement accepté que le temps de résolution du problème ne représente que 20% du temps total d'une étude (T. J. R. HUGHES, COTTRELL et BAZILEVS 2005; STATEN 2007). 80% du temps est donc dévolu au traitement de la géométrie et à la préparation du modèle. En particulier, la génération du maillage est une phase délicate qui peut requérir une grande expérience de la part de l'utilisateur, malgré les progrès des outils de maillage. Cette difficulté provient du fait que la géométrie CAO n'est pas adaptée à la phase d'analyse : son unique but est la représentation visuelle sur écran des primitives géométriques utilisées en conception. Que les entités géométriques affichées à l'écran soient physiquement réalistes ou non n'est pas un critère pour ces outils (surfaces discontinues, trouées). Cela conduit à des phases de pré-traitement délicates afin de réparer ces surfaces pour permettre de mailler les volumes qu'elles bornent.

Une autre difficulté apparaît lorsque le maillage doit se conformer à des surfaces complexes mobiles au cours de l'étude telles que les fissures. La prise en charge robuste de ces entités a été largement améliorée depuis l'avènement de la méthode X-FEM (MOËs, J. E. DOLBOW et BELYTSCHKO 1999) qui permet au maillage de se libérer des contraintes de conformité sur les surfaces des fissures. Cette méthode ne s'est malheureusement pas imposée en dehors des laboratoires pour le cas des surfaces internes telles qu'interfaces matériaux ou surfaces libres. Le hiatus entre CAO et calcul a commencé à revenir au cœur des problématiques de la communauté, grâce à l'engouement pour les méthodes
de type iso-géométriques (T. J. R. HUGHES, COTTRELL et BAZILEVS 2005). Ces méthodes ont permis de remettre la CAO au centre des problématiques de calcul alors qu'elle était vue jusqu'alors comme un mal nécessaire. Les méthodes iso-géométriques répondent à la problématique du lien entre CAO et analyse en proposant d'utiliser les outils de base de la CAO (les fonctions B-Splines et NURBS) au sein même de la phase d'analyse. Le lien entre CAO et analyse est ainsi préservé, permettant alors une interaction plus poussée entre phases de design et d'analyse. On parle maintenant de "Design through Analysis" qui pourrait se traduire par "conception basée sur l'analyse". Les méthodes iso-géométriques, même si elles apportent des réponses à ces difficultés introduisent cependant un grand nombre d'interrogations (il est nécessaire de reprendre en profondeur certaines phases d'analyse bien maîtrisées). Elles ont cependant conduit les éditeurs logiciels à remettre la phase de transfert entre CAO et calcul au centre de leurs préoccupations. MSC software a par exemple présenté le logiciel MSC Apex (MSC SOFTWARE CORPORATION 2014) qui promet ainsi de multiplier par dix la productivité des utilisateurs dans les phases de maillage en préservant tout au long de l'étude les liens entre géométrie et maillage.

C'est ainsi que dans le prolongement de mes travaux de thèse (2007), je me suis intéressé aux problématiques de maillage pour la mécanique du solide. Plutôt que de se baser sur les approches éléments finis standards, je me suis orienté vers les approches de type Partition de l'Unité (МЕLENK et BABUŠKA 1996; MOËS, J. E. DOLBOW et BELYTSCHKO 1999; STROUBOULIS, BABUŠKA et COPPS 2000) et de domaines fictifs (SAULÈV 1963). En collaboration avec Nicolas Moës et Patrice Cartraud, nous avons proposé des approches innovantes adaptées à la simulation de structures complexes qui seront détaillées dans cette partie. Dans ce manuscrit, nous nous focaliserons principalement sur deux applications où la problématique de maillage est fondamentale :

- Les structures minces, pour lesquelles il est nécessaire de transformer les modèles tridimensionnels de CAO en modèles dimensionnellement réduits de type plaques et coques. Les utilisateurs sont alors confrontés à des difficultés pour générer ces maillages surfaciques, les coupler avec les zones tridimensionnelles, ou même les utiliser avec des modèles non-linéaires (contrat Airbus).
- La bio-mécanique et la mécanique des matériaux où de nombreuses recherches ont été conduites pour tenter de réaliser de manière robuste des simulations à partir d'imagerie (microscopie, tomographie) (thèse W.D. Lian).

Sur base de ces outils simplifiant la prise en compte de la géométrie, j'ai également collaboré avec Anthony Nouy pour chercher à améliorer l'efficacité des stratégies numériques couramment utilisées. Des approches de domaines fictifs basées sur des représentations séparées des champs ont alors été proposées (thèse L. Giraldi). Enfin, je me suis intéressé à la certification des calculs provenant de méthodes de partition de l'unité. Un estimateur d'erreur efficace et robuste a ainsi été proposé dans ce cadre (thèse R. Allais).

Toutes les thématiques présentées au cours de ce chapitre sont de nouvelles thématiques développées au cours de mes années en tant que maître de conférences. Leur seul lien avec mes travaux de thèse est la continuité dans l'utilisation de la méthode X-FEM.

5.2 Éléments finis étendus pour les structures à géométrie complexe

5.2.1 Simulation de structures aéronautiques par une approche X-FEM + Level-sets

Les structures communément rencontrées dans l'industrie sont très souvent composées de zones minces et massives jointes entre elles. Dans le cas des structures minces, des modèles mécaniques simplifiés ont été proposés afin de prendre en compte leurs spécificités géométriques (une faible dimension en regard des deux autres) et mécaniques. Ces modèles de plaque et de coque donnent de très bons résultats tant d'un point de vue global que local (sauf dans les zones très proches

5.2 Éléments finis étendus pour les structures à géométrie complexe

des bords du domaine, au voisinage des changements d'épaisseur et des trous où règnent des phénomènes 3D) (Szabó et Babuška 1991). Les modèles numériques issus de ces théories sont très communément utilisés en ingénierie, de part leur faible coût numérique, mais aussi à cause des mauvaises performances des éléments finis standards de bas ordre lorsque leur aspect ratio augmente. Les utilisateurs sont donc confrontés au problème de couplage entre modèles simplifiés et modèles tridimensionnels dans les zones de jonction. En effet, une méthode consistant à contraindre la cinématique du modèle volumique dans les zones de jonction afin d'être cohérent avec les hypothèses des modèles simplifiés donne lieu à des concentrations de contrainte (GUGUIN et al. 2014). Enfin, ces modèles simplifiés ne peuvent pas toujours être utilisés en analyse non-linéaire de part leurs hypothèses sur le comportement (contraintes planes). Pour ces raisons, les guides de certification peuvent imposer l'utilisation d'éléments volumiques dans les zones sensibles (C. LEE et Q. X. XU 2008). C'est ainsi que de nombreux travaux ont été entrepris afin de développer des modèles numériques de solide-coques (ABED-MERAIM et COMBESCURE 2002; REESE 2007) dont la formulation numérique fait communément appel à des modes incompatibles et à des intégrations réduites. La représentation de la cinématique de coques est ainsi possible avec des éléments dont les inconnues sont les déplacements. Notons cependant que tout comme les éléments coque, ces éléments nécessitent la détermination d'une surface moyenne ainsi qu'une ré-écriture des lois de comportement. Une approche basée sur les éléments finis de haut ordre a également été proposée par DÜSTER, SCHOLZ et RANK (2007), permettant ainsi d'éviter les problématiques de verrouillage dont souffrent les éléments finis solides de bas ordre. Il est ainsi possible de simuler des structures minces et massives avec une modélisation solide, sans problème de jonction entre modèles. La difficulté de la méthode réside dans la génération du maillage dont la précision géométrique doit être maîtrisée. Il est ainsi nécessaire d'utiliser des transformations géométriques spécifiques qui seront développées dans la section 6.5.

Ces difficultés de maillage pouvant être grandes, une approche alternative basée sur les domaines fictifs (SAULÈV 1963) a été proposée dans (LEGRAIN, GEUZAINE et al. 2013). Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat de prestation avec l'entreprise Airbus / EADS innovation works. Cette section en illustre les points principaux. L'objectif n'est pas forcément de gagner en temps de calcul brut, mais plutôt de limiter le temps humain passé à préparer les modèles. Le temps de l'étude complète peut alors être diminué tout en utilisant au mieux le temps ingénieur. La stratégie proposée est résumée sur la figure 5.1 : Une grille régulière est créée à partir de la CAO 3D. Cette grille est ensuite utilisée comme support à une level-set permettant de représenter implicitement la CAO donnée en entrée. La méthode X-FEM est ensuite considérée pour la résolution du problème mécanique. Deux problématiques apparaissent alors : (i) comment construire efficacement le maillage ainsi que la fonction level-set permettant de représenter la CAO? et (ii) quelle densité de maillage et quel ordre d'approximation permettent de représenter précisément les champs mécaniques de telles structures?

Représentation de structures minces par level-sets

La construction de la level-set n'est pas détaillée ici, mais fait appel à une subdivision hiérarchique du maillage afin de capturer les angles aigus présents dans la CAO (voir (LEGRAIN, GEUZAINE et al. 2013)). En effet, la fonction distance à la surface étant interpolée sur le maillage, l'erreur géométrique dépend directement du rapport entre la courbure de la surface à représenter et la taille des éléments du maillage : plus la courbure est grande, plus la taille des éléments doit diminuer si l'on souhaite maîtriser l'erreur géométrique. Cette dernière étant maximale près des coins, un raffinement de maillage (basé ici sur une approche par subdivision hiérarchique) est nécessaire afin de représenter précisément ces zones, comme illustré sur la figure 5.2 qui montre l'influence de ce raffinement sur la précision géométrique.

La méthode proposée ici requiert un faible nombre de paramètres : (1) la taille des éléments utilisés



FIGURE 5.1 – Principe de l'approche proposée.

pour la représentation de la géométrie globale de la structure ; (2) l'épaisseur maximale de la structure et (3) le nombre de niveaux de raffinement autorisés pour capturer les zones à faible courbure. Ces paramètres permettent la construction du maillage dans lequel est immergée la CAO. Le calcul de la distance est ensuite obtenu à partir de la représentation STL de la surface : l'algorithme de calcul des distances est ici rustique car la distance à chaque facette est calculée pour chaque nœud du maillage. Une approche de type KD-tree (BENTLEY 1975) permettrait d'améliorer significativement les performances de la procédure.

X-FEM pour les structures minces

L'approche proposée ici étant non conforme, il n'est pas nécessaire d'aplatir les éléments afin de représenter la géométrie du problème. Il est ainsi possible d'utiliser des éléments finis de bas ordre (linéaires ou quadratiques) pour représenter les champs mécaniques dans la structure. En effet, contrairement aux éléments finis conformes, le maillage reste ici non distordu : le caractère polynomial de l'approximation est conservé dans l'espace physique, ce qui n'est pas le cas si une approche standard est utilisée. Le maillage est néanmoins contraint à représenter la géométrie de la structure, ce qui impose une taille de maille maximale de l'ordre de la moitié de l'épaisseur de la plaque. Cette contrainte étant posée, une étude paramétrique a été réalisée afin de déterminer l'erreur commise par l'utilisation de tels éléments en fonction de leur facteur d'aspect et de l'ordre d'approximation. Les performances de la méthode X-FEM sont alors analogues à celles de la méthode des éléments finis volumiques, tant pour des plaques minces (élancement de 260) qu'épaisses (élancement de 20). Des niveaux d'erreur de l'ordre du pourcent sur la déformée et les contraintes ont été obtenus pour des éléments de taille comparable à l'épaisseur de la structure et une interpolation quadratique. La seule contrainte étant de choisir suffisamment d'éléments dans le plan (comme montré dans (C. LEE et Q. X. Xu 2008) pour les éléments finis classiques).

La méthode est maintenant illustrée sur un exemple académique (des exemples industriels représentatifs, mais plus qualitatifs sont présentés dans (LEGRAIN, GEUZAINE et al. 2013)) : considérons une plaque trouée d'élongation égale à 45 (dimensions $30 \times 90 \times 2$ mm). Celle-ci est chargée en traction et flexion comme illustré sur la figure 5.3, et est constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope (module d'Young unitaire, coefficient de Poisson de 0,3). Une solution de référence est calculée à partir d'un maillage conforme et d'une approximation de degré 4. La solution obtenue avec un maillage comprenant des éléments quadratiques de taille $L_x = L_y = L_z = 1,2$ mm et deux niveaux de raffinement est présentée sur la figure 5.4. La condition aux limites de Dirichlet est imposée par



FIGURE 5.2 – Détails du maillage (première ligne) et de l'iso zéro (deuxième ligne) de la level-set associée à la géométrie présentée sur la figure 5.1. Maillage de taille, $L_x = L_y = L_z =$ 6mm. De gauche à droite 0,1,2 niveaux de raffinement. (a) 112000 nœuds 538000 éléments (99s); (b) 187500 nœuds 851000 éléments (111s); (c) 399000 nœuds 1 745 980 éléments (160s).

pénalisation. L'erreur sur l'énergie de déformation pour trois maillages (dont celui présenté sur la figure 5.4) est donnée dans le tableau 5.1 : la précision des résultats obtenus par l'approche est alors illustrée. Une étude de convergence (pas présentée ici) montre qu'une convergence proche $O(h^2)$ peut être obtenue (on observe une super-convergence dans ce cas particulier car la théorie prédit une erreur en $O(h^{3/2})$, cf (RAVIART et THOMAS 1998, p 119)).



FIGURE 5.3 – Plaque trouée : géométrie et conditions aux limites.

Bilan partiel

Cette application de la méthode X-FEM aux structures minces a permis de mettre en évidence les performances de la méthode dans ce cas de figure. Il a été possible de simuler des structures composées de parties minces et de jonctions plus massives avec une très bonne précision (LEGRAIN, GEUZAINE et al. 2013). Bien que la taille des modèles soit élevée du fait de la nécessité de représenter



stress

FIGURE 5.4 – Plaque trouée en traction et flexion ($L_x = L_y = L_z = 1,2$ mm, deux niveaux de raffinement) : (a), (b), (c) : déplacement ; (d) : contrainte (Von Mises).

une géométrie de faible épaisseur, le temps ingénieur passé à traiter la CAO (réparation, extraction des surfaces moyennes) et à mailler la structure est très nettement réduit, et donc disponible pour d'autres tâches. La prise en compte précise des conditions aux limites de Dirichlet constitue également un point important. Une simple méthode de pénalisation a été utilisée ici, mais il a été montré qu'une telle méthode n'est pas consistante avec la formulation forte du problème (FERNÁNDEZ-MÉNDEZ et HUERTA 2004). De plus, l'ordre de convergence est borné en $O(h^{\frac{2p+1}{3}})$ (pour peu que le coefficient de pénalisation varie en $O(h^{-\frac{2p+1}{3}})$, ce qui est impossible à cause des problèmes de conditionnement que cela engendrerait). L'efficacité de la méthode pourrait également être grandement améliorée par l'utilisation de stratégies de représentation géométrique plus efficaces telles que la signed vector level-set (VENTURA, BUDYN et BELYTSCHKO 2003; SALZMAN, MOËS et CHEVAUGEON 2016).

5.2.2 Vers une approche intégrée pour la simulation à partir d'imagerie

Introduction

La démocratisation d'outils d'acquisition extrêmement précis comme la tomographie, les images rayon-X et la microscopie ainsi que l'augmentation des capacités des outils de calcul standards rendent désormais envisageable la prédiction du comportement des matériaux industriels et du vivant à partir d'images. Plutôt que de travailler sur des micro-structures statistiquement équivalentes, ces approches permettent de se rapprocher au mieux de la réalité. Les applications visées sont le

Maillage	Niveaux	ddls	Erreur (%)
$L_x = L_y = L_z = 0,6 \text{mm}$	1	662106	0,579
$L_x = L_y = L_z = 1,2$ mm	2	357828	0,495
$L_x = L_y = L_z = 1,2\text{mm}$	3	709368	0,159

TABLE 5.1 – Plaque trouée en traction et flexion : erreur en énergie de déformation

design a priori de matériaux ainsi que les modèles spécifiques de patients. La problématique principale qui se pose provient de la phase de traitement de l'image et de construction du modèle numérique associé (PHAM, C. XU et PRINCE 2000). Les méthodes standards nécessitent une phase de traitement d'image et de segmentation délicate afin de séparer les constituants du domaine d'intérêt. Vient ensuite une phase de discrétisation géométrique. Deux principales approches peuvent être utilisées : (i) extraire les frontières inter-phases et mailler les volumes ainsi obtenus (FREY, SARTER et GAUTHERIE 1994; ULRICH et al. 1998) ou (ii) associer un élément fini à chaque pixel (resp. voxel) de l'image (KEYAK, MEAGHER et al. 1990). La première approche permet d'utiliser des codes éléments finis standards, mais requiert également la génération manuelle d'un maillage sur des géométries très complexes. La deuxième permet de convertir directement l'image segmentée en modèle numérique, mais produit des modèles très coûteux à gérer à cause de la résolution toujours plus grande des images. Finalement, notons l'existence des approches dites FFT (MOULINEC et SUQUET 1994) qui sont très efficaces lorsque le contraste entre phases reste modéré et lorsque des solutions périodiques sont recherchées.

L'objectif de mes travaux dans ce domaine s'est focalisé sur le développement d'une approche aussi flexible que les éléments finis voxels, mais plus efficace, plus précise et la plus automatique possible. Ces travaux ont débuté peu après mon recrutement à l'École Centrale de Nantes, et se sont poursuivis durant des travaux de thèse de Wei-Dong Lian et Loïc Giraldi.

Les level-sets comme fil conducteur

La stratégie sur laquelle nous nous reposons est basée sur les mêmes ingrédients que ceux présentés dans la section précédente (X-FEM + level-sets). Celle-ci est détaillée sur la figure 5.5.



FIGURE 5.5 – Stratégie proposée : (a) acquisition de l'image d'intérêt; (b) segmentation de l'image; (c) maillage incompatible et level-set.

La principale différence vient alors de la construction de la level-set à partir de l'image. Pour cela, nous nous basons sur des algorithmes de segmentation qui permettent, à partir des niveaux de gris, de séparer les différents constituants de l'image (Shapiro et Stockman 2001). Parmi les méthodes existantes, nous utilisons une méthode basée sur les level-sets (IBANEZ et SCHROEDER 2005). Cette technologie est en effet bien adaptée aux algorithmes de segmentation car les changements de



FIGURE 5.6 – Processus de segmentation : une level-set initiale est définie, puis propagée en fonction des caractéristiques de l'image.

topologie pouvant apparaître au cours de ce processus sont naturellement pris en compte. En outre, cela nous permet d'utiliser le même outil tout au long de la phase de simulation (fil conducteur). Le principe de segmentation est illustré sur la figure 5.6 : des "graines" sont essaimées dans l'image, puis un champ de vitesse est généré à partir des niveaux de gris locaux afin de faire disparaître les graines en dehors de la zone d'intérêt, faire grossir les autres et ainsi "remplir" l'objet à segmenter. Le mouvement de la level-set est obtenu en résolvant l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi = 0 \tag{5.1}$$

où ϕ est la fonction level-set et **V** un champ de vitesse obtenu à partir de l'image. Cette équation peut se ré-écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi + \beta P(\mathbf{x}) |\nabla \phi| - \gamma Z(\mathbf{x}) \kappa |\nabla \phi| = 0$$
(5.2)

où $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est un terme d'advection, $P(\mathbf{x})$ un terme de propagation et $Z(\mathbf{x})$ un terme permettant de moduler spatialement l'influence de la courbure sur la vitesse. Enfin, les paramètres α , β et γ pondèrent l'influence de ces différentes contributions. Bien que de nombreux travaux aient été conduits dans ce domaine (OSHER et PARAGIOS 2003; IBANEZ et SCHROEDER 2005), nous nous restreindrons ici à une segmentation par seuil de part sa robustesse vis-à-vis du bruit numérique présent dans l'image. Cette approche consiste à cibler la zone d'intensité de l'image représentant un des deux constituants. Cette information peut être obtenue à partir de l'histogramme de l'image (cf figure 5.7). Si *L* et *U* représentent respectivement les intensités basse et haute caractérisant la phase d'intérêt, alors seul le terme $P(\mathbf{x})$ est considéré dans (5.2) :



FIGURE 5.7 – Seuillage d'une image à partir de son histogramme.

$$P(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\mathbf{x}) - L & \text{si } g(\mathbf{x}) < \frac{U - L}{2} + L \\ U - g(\mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$
(5.3)

où $g(\mathbf{x})$ représente l'intensité de l'image (niveau de gris). Les algorithmes de segmentation utilisés dans ces travaux sont basés sur la librairie de traitement d'images médicales ITK (IBANEZ et SCHROE-DER 2005). La fonction level-set discrète représentant les phases du matériau est ainsi obtenue sur la grille des pixels de l'image. L'incorporation des informations géométriques définies au niveau des pixels dans le maillage de calcul éléments finis est maintenant détaillée.

Couplage entre géométrie et approximation

Il s'agit maintenant de définir le maillage qui sera utilisé pour le calcul mécanique, sachant que l'information géométrique sera projetée sur ce maillage. La manière la plus naturelle d'incorporer ces informations géométriques dans le calcul X-FEM s'inspire des éléments finis voxels : un nœud (ou un élément) du maillage est associé à chaque pixel de l'image, comme illustré sur la figure 5.8 (a). Il est important de noter que contrairement aux éléments finis voxels, la géométrie des interfaces reste régulière car interpolée linéairement sur l'élément (cf. zoom sur la figure 5.8 (b) où des éléments finis voxels généreraient une interface en marche d'escalier). Cependant, le coût de calcul reste du même ordre de grandeur que les éléments finis voxels et devient vite très pénalisant. Il est alors possible de déraffiner le maillage et de projeter la level-set aux nœuds de ce dernier (figure 5.8 (b)). Le coût de calcul diminue alors très largement, tout en gardant une représentation géométrique convenable (bien meilleure que pour les éléments finis voxels à iso-densité de maille). Cette diminution de la résolution a un impact non-négligeable sur la qualité de la représentation des détails géométriques, faisant office de filtre passe-bas comme illustré sur la figure 5.9. Nous verrons par la suite l'influence de ce phénomène sur les propriétés effectives du matériau, ainsi que sur ses contraintes locales. Il est cependant possible de profiter de la nature régulière de la représentation des informations



FIGURE 5.8 – a. Maillage pixel; b. maillage uniformément déraffiné (1 élément pour 4 × 4 pixels), notez la dégradation de la géométrie; c. maillage octree avec précision géométrique 1 élément pour 1 pixel au niveau de l'interface; d maillage octree avec précision géométrique 1 élément pour 2 × 2 pixels au niveau de l'interface.

géométriques pour limiter les coûts de calcul. En effet, l'image peut être vue comme le niveau le

plus fin d'une structure quad-tree (octree en 3D). Il est alors possible de déraffiner très efficacement cette image loin des interfaces, tout en gardant la précision géométrique initiale (cf figure 5.8 (c)). Notons que cette procédure adaptative est purement géométrique, et que le maillage final doit rester suffisamment fin loin des interfaces pour que l'erreur d'approximation reste en deçà de l'erreur géométrique. Nous considérerons que c'est le cas dans la suite de cette section, même si il serait nécessaire de coupler la méthode avec un estimateur d'erreur pour s'en assurer (ce point sera détaillé dans la section 5.3). Finalement, il est aussi possible de conjuguer diminution de la résolution de l'image et adaptation au niveau des interfaces, comme illustré sur la figure 5.8 (d) pour ainsi minimiser le coût de calcul.



FIGURE 5.9 – a. Détails d'une zone de la figure 5.7; b. Binarisation associée au signe de la level-set obtenue par segmentation de l'image; c., d., e. et f. Influence de la résolution de l'image sur la segmentation : b. 2 × 256², c. 2 × 128², d. 2 × 64², e. 2 × 32², f. 2 × 16².

Résultats numériques

Homogénéisation numérique La mécanique des matériaux et la biomécanique sont parmies les principales applications des méthodes de calcul à partir d'imagerie (Кеуак, Меаднея et al. 1990; Keyak, I. Lee et Skinner 1994; Terada, Miura et Kikuchi 1997; Coffman et al. 2012; Bongini, CARFAGNI et GOVERNI 2000; DICK et al. 2009; RIETBERGEN et al. 1995; HOLLISTER et KIKUCHI 1994; Takano et al. 2003 ; Basaruddin, Takano et Nakano 2015 ; Frey, Sarter et Gautherie 1994 ; Ulrich et al. 1998; Maire et al. 2003; Düster, Sehlhorst et Rank 2012; Heinze, Joulaian et Düster 2015; RUESS, TAL et al. 2012; VERHOOSEL et al. 2014). Les auteurs s'intéressent alors largement aux propriétés effectives de matériaux à micro-structures complexes. Nous détaillons ici rapidement les approches d'homogénéisation qui seront utilisées pour l'évaluation de la méthode. Les matériaux considérés ici ne présentant pas de micro-structure régulière, il se pose la question de la taille du volume élémentaire représentatif (VER) du matériau. La détermination de la taille de ce VER peut être estimée en suivant l'une des nombreuses approches proposées dans la littérature (HUET 1990; KANIT, FOREST et al. 2003; KANIT, N'GUYEN et al. 2006; OSTOJA-STARZEWSKI 2006), qui se basent généralement sur des problèmes d'homogénéisation définis sur des domaines de taille croissante. Soit Ω un tel domaine, dont les propriétés apparentes donnent la relation entre contraintes $\underline{\Sigma}$ et déformations <u>E</u> macroscopiques. Ces quantités macroscopiques sont obtenues par moyenne spatiale sur Ω des champs microscopiques correspondants, $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}$:

$$\begin{cases} \underline{\Sigma} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle &= \frac{1}{V} \int_{V} \underline{\underline{\sigma}} \, dV \\ \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle \end{cases}$$
(5.4)

Classiquement (SUQUET 1985), des conditions aux limites homogènes en déplacement, en effort ou périodiques sont considérées. Ces approches sont communément appelées KUBC, SUBC et PBC

respectivement :

$$KUBC : \mathbf{u} = E.x \text{ sur } \partial V \tag{5.5}$$

SUBC :
$$\sigma$$
.**n** = Σ .**n** sur ∂V (5.6)

$$PBC : \mathbf{u} = \underline{E} \cdot x + \mathbf{u}^* \text{ sur } \partial V \tag{5.7}$$

où la fluctuation \mathbf{u}^* est périodique sur le VER, et le vecteur contrainte $\underline{\sigma}$.**n** est anti-périodique. Ainsi, le problème aux limites du problème d'homogénéisation sur Ω s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\sigma} = \mathbf{0} \\ \underline{\sigma} = \mathbf{C} : \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} = \operatorname{grad}_{s}(\mathbf{u}) \end{cases}$$
(5.8)

où l'opérateur de déformation linéarisé est noté $grad_s$. Cette équation aux dérivées partielles est complétée par les conditions aux limites (5.5), (5.6) ou (5.7) dépendant de $\underline{\underline{E}}$ ou $\underline{\underline{\Sigma}}$. Le problème étant linéaire, les propriétés apparentes sont obtenues par la résolution de 6 problèmes en 3D correspondant à la solution de 6 chargements indépendants à $\underline{\underline{E}}$ ou $\underline{\underline{\Sigma}}$ unitaires.

Influence de la résolution géométrique Nous nous intéressons maintenant à l'influence de la résolution géométrique du modèle numérique sur les résultats globaux (propriétés apparentes) et locaux (contraintes locales). Pour cela, les propriétés effectives ainsi que les contraintes locales du composite métallique présenté sur la figure 5.7 sont étudiées en fonction de la résolution (cf figure 5.10). Les propriétés des phases du matériau sont disponibles dans (Golanski, Terada et KIKUCHI 1997), et le module de Young apparent de référence obtenu par ces auteurs vaut 226MPa. L'évolution des propriétés homogénéisées en fonction de la résolution sont données dans le tableau 5.2. On observe une erreur de l'ordre de 0,7% entre le maillage le plus grossier et le plus fin. Ainsi, les propriétés effectives du composite peuvent être obtenues avec une précision très satisfaisante, même avec des maillages grossiers (3,7% par rapport à la valeur de référence). Une diminution de la raideur apparente est alors observée lors du raffinement (l'énergie de déformation diminue au cours du raffinement par propriété de Galerkin). Néanmoins, cette diminution est contrecarrée par l'ajout d'inclusions (plus rigides) grâce à l'amélioration de la représentation géométrique. Notons enfin que les différences entre les résultats obtenus et la valeur de référence sont certainement dues à des effets de représentation géométrique (une approche d'éléments finis voxels est en effet utilisée dans (Golanski, Terada et Kikuchi 1997)).

Maillage (# d'éléments)	2×16^2	2×32^2	2×64^2	2×128^2	2×256^2
Coefficient de Poisson	0,273	0,275	0,276	0,276	0,277
Module d'Young (MPa)	234,5	232,5	233,6	233,5	232,8

Table 5.2 – Propriétés apparentes pour l'alliage TiC/stellite en fonction de la résolution. Valeurs à comparer à $\simeq 226$ MPa (Golanski, Terada et Kikuchi 1997).

Évaluation de l'approche octree Finalement nous évaluons l'approche octree afin de voir si celle-ci permet de donner accès aux contraintes locales avec une bonne précision, tout en limitant le coût du calcul. Pour cela, quatre maillages sont considérés (figure 5.11) : (i) maillage "pixel", (ii) maillage octree avec un raffinement maximal de la taille du pixel, (iii) maillage régulier 4×4 pixels et (iv) maillage octree avec un raffinement maximal de la taille de 4×4 pixels. Le maillage (i) est pris pour référence et nous étudions l'erreur sur la première composante du tenseur de comportement



FIGURE 5.10 – Norme de Von-Mises de la contrainte pour le mode de cisaillement et différents maillages : 2×16^2 , b. 2×32^2 , c. 2×128^2 .

effectif ainsi que sur la norme de Von-Mises de la contrainte locale maximale. Nous observons dans le tableau 5.3 que l'approche octree permet d'obtenir des résultats très satisfaisants. En effet, il est possible de diminuer de 78 à 96 % le nombre de ddls selon le déraffinement. Notons que dans tous les cas l'approche octree permet de diminuer le coût du calcul à précision fixée (i.e. les résultats obtenus par (i) et (ii) ou par (iii) et (iv) sont quasi-identiques).

Enfin, nous observons là encore une grande influence de la précision géométrique sur les contraintes locales. Précisons que l'utilisation de l'approche octree rend nécessaire la prise en compte des nœuds orphelins (entre deux niveaux de raffinement) de manière adaptée. Contraindre leurs valeurs en fonction de la cinématique des éléments grossiers est efficace pour les éléments finis, mais pas lorsque ces nœuds sont enrichis. C'est pourquoi on s'assure dans ces résultats que la couche d'éléments fins est suffisamment épaisse de part et d'autre de l'interface de manière à ne jamais enrichir ces nœuds orphelins. Si cela est impossible, une approche permettant de tenir compte des nœuds orphelins enrichis a été proposée dans le cadre de la thèse de Raphaël Allais. Cette stratégie n'est pas présentée ici pour des questions de concision. Le lecteur intéressé pourra se référer à (LEGRAIN, ALLAIS et CARTRAUD 2011) ou T.-P. FRIES et al. (2011) qui développe une solution proche.

	ddls	Erreur sur C_{11}	Erreur sur $max(\underline{\sigma}^{VM})$ mode de cisaillement
Maillage pixel	547850	Ref.	Ref.
Maillage octree pixel	107378	0,04 %	0,17 %
Déraffinement uniforme 4×4	37818	0,16 %	31,4 %
Déraffinement octree 4×4	22040	0,14 %	31,4%

 TABLE 5.3 – Comparaison entre déraffinement uniforme et déraffinement octree (composite métallique/céramique)

Comparaison avec les méthodes pixel-based Nous venons de montrer que la stratégie proposée permet de combiner segmentation et calculs micro-structuraux de manière intégrée. En outre, la précision de la méthode a été mise en avant, ainsi que l'influence de la résolution sur les résultats locaux et globaux. La méthode des éléments finis voxels permet elle aussi de résoudre ces types de problèmes de manière intégrée. Cette approche étant largement répandue, on s'intéresse aux avantages et faiblesse de la méthode X-FEM/Level-sets comparativement à celle-ci.

Tout comme la procédure proposée ici, une étape de segmentation est nécessaire afin de construire le modèle numérique. Généralement, un seuillage de l'image initiale (préalablement traitée) est appliqué afin de classer les pixels en fonction de leur intensité dans différentes classes de matériaux.



FIGURE 5.11 – Comparaison entre déraffinement uniforme et déraffinement octree (composite métallique/céramique). Maillage omis pour plus de clarté dans (i).

Malgré leur facilité de mise en œuvre, les éléments finis voxels sont connus pour produire des contraintes locales oscillantes à cause de la faible régularité des frontières (GULDBERG, HOLLISTER et CHARRAS 1998). En effet, ces méthodes conduisent à une interface qui suit le contour des éléments, ce qui donne un profil en marches d'escalier, cf. figure 5.13. Le raffinement du maillage n'impliquant pas toujours une diminution de ces oscillations (VICECONTI et al. 1998; CHARRAS et GULDBERG 2000), des algorithmes de lissage du maillage (CEBRAL et LÖHNER 2001; BOYD et MULLER 2006; W. WANG S. CHEN 2005) ou de post-traitement des résultats (GULDBERG, HOLLISTER et CHARRAS 1998; CHARRAS et GULDBERG 2000) ont été proposés. Néanmoins de grandes oscillations locales peuvent encore être observées le long des bords des éléments (Самасно et al. 1997). Malgré ces travaux, peu d'auteurs se sont intéressés à la précision locale des champs obtenus par éléments finis voxels (CHARRAS et GULDBERG 2000; ARBENZ et al. 2008). Nous nous basons sur un problème de référence afin de comparer approches voxel et X-FEM. Celui-ci, constitué d'une fibre circulaire dans une matrice homogène est représenté sur la figure 5.12. Plusieurs images représentant cette géométrie sont construites à partir du logiciel ImageMagic (STILL 2005), tout en gardant $\frac{D}{L} = \frac{10}{32}$ comme taille relative entre le diamètre de la fibre et le côté du carré élémentaire représentatif (problème 2D). Ces images sont le point de départ des calculs X-FEM et voxel-fem. Dans le premier cas, la procédure de segmentation telle que présentée dans la section 5.2.2 est appliquée (cf. "X-FEM Mesh", figure 5.13). La level-set ainsi obtenue est ensuite utilisée pour seuiller l'image et ainsi obtenir un maillage voxel, tout en gardant une cohérence géométrique entre les deux méthodes (cf. "Pixel-Based Mesh", figure 5.13). Notons enfin qu'un maillage éléments finis conforme est également construit afin d'obtenir une solution de référence (cf. "Conforming Mesh", figure 5.13). Les modèles géométriques ainsi obtenus sont illustrés sur la figure 5.14 pour différentes résolutions.



FIGURE 5.12 – Géométrie du VER pour un modèle à une fibre.

Précision géométrique La précision géométrique de ces deux approches est tout d'abord comparée. Pour cela, on trace la fraction volumique de fibre en fonction de la résolution de l'image *N* (cf. figure 5.15). Nous observons clairement une faible convergence de la méthode voxels (qui plus est non-monotone), alors que la géométrie level-set se stabilise très rapidement (elle aussi de manière non-monotone, mais dans une bien moindre mesure) grâce à sa représentation linéaire par morceaux de l'interface. Nous pouvons donc en conclure que l'approche par level-sets est moins sensible à la résolution de l'image que l'approche voxel. D'un point de vue géométrique, il est même possible (à précision géométrique équivalente) d'utiliser des maillages plus grossiers avec la méthode level-sets. Néanmoins, notons que la précision géométrique n'est pas une quantité d'intérêt en mécanique. Pour cela, nous nous intéressons maintenant à la précision des propriétés effectives du matériau.

Précision des propriétés effectives Nous étudions l'évolution des modules de compressibilité et de cisaillement apparents du matériau (κ et G) en fonction de la résolution. Les deux matériaux sont considérés élastiques et linéaires de même coefficient de poisson $v_i = v_m = 0,3$ et de modules d'Young différents : $E_m = 1$ MPa pour la matrice et $E_i = 0,001$ MPa pour l'inclusion. Des conditions



FIGURE 5.13 – Procédure pour l'obtention des modèles éléments finis voxels et X-FEM.

aux limites périodiques sont appliquées pour évaluer les modules effectifs (M. JIANG, JASIUK et OSTOJA-STARZEWSKI 2002). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.16 où la solution de référence utilisée correspond au calcul éléments finis conforme le plus fin. Nous observons une convergence extrêmement rapide de la méthode X-FEM (quasiment identique à la convergence du modèle conforme) alors que la convergence du modèle voxel est très lente. En d'autres termes, un maillage de 32×32 pixels (1/h = 0,25) donne une erreur inférieure à 5%, bien moindre que l'erreur obtenue avec un maillage 128×128 pixels et la méthode voxels. Il est aussi intéressant d'observer que l'erreur est dominée par l'erreur géométrique. En effet nous avons observé que la méthode voxels sur-estimait la fraction volumique de fibre (figure 5.15), ce qui implique une sous-estimation des propriétés effectives (car la fibre est plus souple que la matrice dans cet exemple). Notons qu'il a été montré le contraire (sur-estimation) dans le cas d'une fibre plus rigide que la matrice (LIAN, LEGRAIN et CARTRAUD 2013).

Précision des quantités locales Finalement, les contraintes locales sont étudiées en soumettant le VER à un vecteur traction sur son bord tel que la solution analytique du problème correspondant soit connue (traction équi-biaxiale) (SUKUMAR et al. 2001). Les propriétés de la matrice et de l'inclusion sont respectivement $E_m = 1$ MPa, $v_m = 0,25$ et $E_i = 10$ MPa, $v_i = 0,3$. Une étude de convergence (LIAN, LEGRAIN et CARTRAUD 2013) a montré que la méthode X-FEM convergeait en O(h) (ce qui est le taux de convergence optimal pour des éléments linéaires) tandis que les éléments finis voxels convergeaient en $O(h^{0,55})$. Cette différence de taux de convergence explique le comportement observé dans le paragraphe précédent. Il a aussi été montré que l'erreur locale était principalement localisée autour de l'interface pour les éléments finis voxel. Nous traçons alors les champs mécaniques (norme de Von-Mises de la contrainte) près ¹ de l'interface (r = 1,04 R_{fibre}) sur la figure 5.17. Pour le maillage le plus grossier (16×16), on observe clairement la trace des éléments (zones dans lesquelles la contrainte est constante). Les oscillations observées pour le modèle voxel sont principalement dues ici au fait que certains points à r = 1,04 R_{fibre} sont parfois placés dans la fibre (d'où les zones à 2,15MPa). En faisant abstraction de ces problèmes de classification, les oscillations sont de l'ordre de 8MPa. Le raffinement du maillage (128×128) permet d'éliminer ces problèmes géométriques, mais conduit à

^{1.} La contrainte est discontinue au niveau de l'interface.



(a) Images seuillées : 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 et 128×128 pixels (de gauche à droite).



(b) Fonctions level-sets : 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 et 128×128 pixels (de gauche à droite).

FIGURE 5.14 – Géométries voxel et level-sets.



FIGURE 5.15 – Fraction volumique de fibre en fonction de la résolution de l'image N

des oscillations d'amplitude plus élevée que pour le maillage grossier (14MPa). De tels résultats ont déjà été rapportés par d'autres auteurs (CAMACHO et al. 1997; GULDBERG, HOLLISTER et CHARRAS 1998). Dans certains cas, raffiner le maillage n'améliore pas forcément la précision du modèle voxel (VICECONTI et al. 1998). Les modèles X-FEM et éléments finis conformes présentent eux-aussi des oscillations, mais ces dernières sont bien plus faibles et diminuent avec le raffinement du maillage.

5.2.3 Bilan partiel

Une méthode intégrée a été proposée pour simuler directement des problèmes définis à partir d'images. Cette méthode libère l'utilisateur des contraintes de maillage, tout en étant très proche des données d'acquisition grâce à l'utilisation de grilles structurées. L'approche repose sur l'utilisation de level-sets qui permettent d'assurer une représentation géométrique robuste et précise (inférieure à la taille du pixel). L'approche X-FEM permet ensuite d'utiliser cette information géométrique de manière efficace lors du calcul. Il a été montré que la méthode était plus précise et plus efficace que l'approche voxel tant au niveau global qu'au niveau local, et cela même avec des modèles comportant moins d'éléments. Nous avons également montré que l'utilisation de déraffinements quadtree/octree permettait d'améliorer sensiblement l'efficacité de la méthode.

Trois pistes d'amélioration ont cependant été identifiées : (i) le critère géométrique de déraffinement



FIGURE 5.16 – Propriétés apparentes : comparaison entre éléments finis voxels et X-FEM en fonction de la taille des éléments. Contraste $E_i/E_m = 0,001$.

ne permet pas toujours de diminuer significativement le nombre de degrés de liberté dans le cas où la géométrie est composée de nombreuses interfaces réparties sur la structure (cf. figure 5.18). Les contraintes de génération de l'octree (différence de niveau limitée entre cellules voisines) entravent alors le déraffinement. Enfin, géométrie et approximation sont directement couplées par la méthode : améliorer la précision géométrique implique nécessairement d'augmenter le nombre de degrés de liberté, ce qui induit un manque de flexibilité. (ii) Le critère de déraffinement utilisé est strictement géométrique alors que les grandeurs d'intérêt sont mécaniques. Une stratégie d'adaptation basée sur un estimateur (ou un indicateur) d'erreur permettrait de rendre l'approche robuste vis-à-vis des quantités d'intérêt. Enfin, (iii) ces approches restent coûteuses numériquement (spécialement en 3D).

Les travaux que nous avons engagés pour apporter des réponses à ces problématiques sont présentés dans la suite de ce manuscrit (respectivement aux paragraphes (i) 6.1, (ii) 5.3 et (iii) 5.4).

5.3 Maîtrise de l'erreur d'approximation pour les approches PUM

5.3.1 Contexte

La thèse de Raphaël Allais (2008-2012) avait pour objectif la maîtrise de l'erreur d'approximation des calculs éléments-finis enrichis, pour les raisons évoquées plus haut (limitation du coût des modèles X-FEM/Octree définis sur base d'images). Nous avons pour cela orienté nos recherches vers le développement d'estimateurs d'erreur adaptés aux méthodes de partition de l'unité. Nous avions dans un premier temps proposé une approche de type indicateur h - h/2 où la solution de deux grilles de taille h et h/2 sont comparées (ALLAIS 2012). Par la suite, il nous a semblé plus pertinent de développer un véritable estimateur d'erreur aux bases mathématiques solides.

5.3.2 Problème modèle

Au cours de cette section, nous nous restreindrons au problème modèle elliptique suivant : Soit $u(\mathbf{x})$ une fonction scalaire de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Nous cherchons u vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta u - f = 0 \tag{5.9}$$



FIGURE 5.17 – Norme de Von-Mises du tenseur des contraintes près de l'interface entre les matériaux.



FIGURE 5.18 – Exemple de déraffinement octree pour un cas contenant de nombreuses interfaces.

où f est un terme source. Des conditions aux limites sont adjointes à cette EDP afin de s'assurer de l'unicité de la solution :

$$u = 0 \operatorname{sur} \partial \Omega_D \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \, \operatorname{sur} \, \partial \Omega_N \tag{5.11}$$

Les données $(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$ sont supposées suffisamment régulières, et $\partial \Omega_D$ et $\partial \Omega_N$ forment une partition disjointe de $\partial \Omega$. Les formes bilinéaires et linéaires associées sont respectivement définies comme :

$$a(v,u) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, d\Omega \tag{5.12}$$

$$b(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial \Omega_N} g v \, d\Gamma$$
(5.13)

la forme variationnelle du problème s'écrit alors : Trouver $u \in \mathcal{V} \equiv H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$a(v,u) = b(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \tag{5.14}$$

où $H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions homogènes définies sur Ω . La solution approchée du problème est notée $u^H \in \mathcal{V}^H$ où \mathcal{V}^H est un sous-espace de dimension finie de \mathcal{V} . L'erreur *vraie* $e = u - u^H$ appartient à l'espace \mathcal{V} et vérifie la formulation faible suivante : Trouver $e \in \mathcal{V}$ tel que

$$a(v,e) = b(v) - a(v,u^H) \equiv \mathcal{R}^H(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$
(5.15)

où $\mathcal{R}^{H}(v)$ est le résidu d'équilibre du problème. Un tel problème peut être résolu de manière approchée à condition de sélectionner un espace d'approximation suffisamment large pour *e* et *v* (si \mathcal{V}^{H} est réutilisé, alors la solution triviale nulle est obtenue à cause de l'orthogonalité de Galerkin). De plus, le surcoût de ce calcul serait certainement mieux utilisé pour améliorer la qualité de u^{H} plutôt que pour estimer *e*. Nous ne considérerons pas ici les estimateurs *a priori* qui donnent des résultats généraux sur le comportement de la solution de manière asymptotique mais aucun moyen de la quantifier. Nous nous restreindrons plutôt aux estimateurs *a posteriori* qui, à partir d'une solution approchée du problème u^{H} permettent d'estimer l'erreur associée. Le développement de tels estimateurs dans le contexte éléments finis débute avec les travaux de BABUŠKA et RHEINBOLDT (1978b) et ont permis l'essor des procédures de maillage adaptatives. Ces estimateurs sont généralement classés en trois familles :

- Les estimateurs en régularité de la solution, initialement basés sur une vision "ingénieur" de la notion d'erreur : cette dernière proviendrait du manque de régularité des champs de gradient éléments finis. Le gradient exact de la solution ∇u est donc estimé par post-traitement du gradient de la solution approchée ∇u^H (par un simple lissage dans les premiers travaux (ZIENKIEWICZ et ZHU 1987)). Les performances de ces méthodes sont donc directement liées au choix de la procédure de lissage utilisée : dans (ZIENKIEWICZ et ZHU 1987), le champ lissé est interpolé sur le maillage et les valeurs nodales obtenues par moyennes locales sur les éléments adjacents à un nœud. Un problème global de moindres carrés peut également être considéré. La méthode a ensuite été améliorée par l'approche *Superconvergent Patch Recovery (ou ZZ2)* (ZIENKIEWICZ et ZHU 1992a; ZIENKIEWICZ et ZHU 1992b), puis dans de nombreuses contributions. Citons en particulier l'approche SPR-C (RÓDENAS et al. 2007) qui consiste à ajouter des contraintes sur la vérification des conditions d'équilibre du champ reconstruit au niveau des patchs. Cette classe de méthode est en général aisée à implémenter, d'où son succès dans le monde industriel, mais manque néanmoins de fondement théorique pour encadrer les erreurs obtenues vis-à-vis de l'erreur vraie.
- Les estimateurs en relation de comportement, basés sur la non-vérification de la relation de comportement du problème (LADEVÈZE 1975) ($\mathbf{q} = \underline{K} \nabla \mathbf{u}$ en conduction thermique). Cette approche consiste à construire un couple $(\hat{u}, \hat{\mathbf{q}})$ vérifiant respectivement les conditions cinématiques et d'équilibre, mais pas nécessairement la relation de comportement. La norme de la non-vérification de cette relation est alors considérée comme erreur. La solution éléments finis étant cinématiquement admissible, on prend $\hat{u} = \mathbf{u}^h$. Le champ \mathbf{q}^h ne vérifiant pas les équations d'équilibre, tout l'enjeu consiste à construire $\hat{\mathbf{q}}$ à partir de la solution approchée (LADEVÈZE 1975; LADEVÈZE et LEGUILLON 1983; LADEVÈZE et ROUGEOT 1997; FLORENTIN 2002). Ces estimateurs, bien qu'ardus à implémenter, permettent d'écrire des bornes garanties sur l'erreur et ont été appliqués à une large gamme de problèmes non-linéaires (LADEVÈZE et MOËS 1998b; LADEVÈZE et MOËS 1999; LADEVÈZE, MOËS et DOUCHIN 1999).
- Les estimateurs en résidus d'équilibre, initiés par les travaux de Babuška et Rheinboldt (Вавиšка et Rheinboldt 1978b; Вавиšка et Rheinboldt 1978a) qui reposent sur l'équation faible (5.15) caractérisant le champ d'erreur. Selon que le champ d'erreur soit obtenu par post-traitement direct ou par une collection de problèmes locaux, on parlera d'estimateurs en résidu *explicites* ou *implicites*. Bien qu'extrêmement peu coûteux, les estimateurs explicites (Вавиšка et Miller 1987; Вавиšка et Rheinboldt 1979; Kelly et al. 1983) font intervenir des constantes dont l'évaluation précise est délicate, ce qui peut donner lieu à une erreur estimée

très éloignée de l'erreur exacte. Les estimateurs implicites cherchent à remplacer la résolution de (5.15) par une collection de problèmes définis sur un élément ou un patch d'éléments. La difficulté principale provient alors de la solvabilité des problèmes locaux qui peuvent être mal posés (mouvements de corps rigides, pas en équilibre). Un grand nombre de techniques se différencient sur la manière de résoudre ces problèmes (BABUŠKA et RHEINBOLDT 1978b; DEMKOWICZ, ODEN et STROUBOULIS 1984; DEMKOWICZ, ODEN et STROUBOULIS 1985; CARSTENSEN et FUNKEN 2000; HUERTA et DÍEZ 2000; MACHIELS, MADAY et PATERA 2000; CARSTENSEN et THIELE 2008). Nous nous focaliserons ici sur la classe de méthodes dites flux-free apparue plus récemment et qui permet d'assurer l'équilibre des problèmes locaux (CARSTENSEN et FUNKEN 2000; MACHIELS, MADAY et PATERA 2006; CARSTENSEN et THIELE 2008; PARÉS, DÍEZ et HUERTA 2009; PARÉS, DÍEZ et HUERTA 2006; CARSTENSEN et THIELE 2008; PARÉS, DÍEZ et HUERTA 2009; PARÉS, SANTOS et DÍEZ 2009). Cette classe d'estimateur a l'avantage de combiner fondements théoriques, précision et facilité (relative) d'implémentation.

Notre objectif est donc de développer ce type d'estimateur dans le cadre des approches de partition de l'unité.

Les performances relatives de ces différents estimateurs sont classiquement comparées à travers l'indice d'efficacité η défini par :

$$\eta = \frac{\|e^h\|}{\|e\|} \tag{5.16}$$

où e^h est l'erreur (locale) estimée et e l'erreur vraie locale. Cette grandeur peut également être définie globalement si $e^h(\Omega)$ et $e(\Omega)$ sont des erreurs globales. Il est également possible de définir des efficacités élémentaires. Un estimateur sera d'autant plus précis que η est proche de 1, conservatif si $\eta \ge 1$, consistant si $\lim_{h\to 0} \eta = 1$ et enfin équivalent à l'erreur vraie si η est compris entre deux constantes indépendantes de la solution exacte du problème. Notons que selon les estimateurs, les propriétés précédentes peuvent n'être valables que globalement ou localement. Enfin, remarquons que l'intervalle de surestimation est défini sur un intervalle ouvert $]1, +\infty[$ tandis qu'il est borné sur [0, 1[dans le cas de la sous-estimation. Pour rendre comparables les étendues de ces deux intervalles, BABUŠKA, STROUBOULIS et UPADHYAY (1994) et RÓDENAS et al. (2007) proposent de modifier l'indice d'efficacité selon l'expression suivante :

$$\eta^{0} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\eta} & \text{si } \eta < 1\\ \eta - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
(5.17)

cette quantité est appelée *indice d'efficacité dévié*. L'erreur est sous-estimée si $\eta^0 < 0$, sur-estimée si $\eta^0 > 0$ et enfin estimée exactement $\eta^0 = 0$. Par la suite, η sera utilisé pour décrire l'efficacité globale des estimateurs tandis que η^0 sera utilisé pour les cartes élémentaires d'efficacité car étant plus visuel.

5.3.3 Estimation d'erreur pour méthodes de partition de l'unité

Peu avant 2010, ces classes d'estimateurs d'erreur ont été étendues aux méthodes de partition de l'unité, plus particulièrement dans le contexte de la mécanique linéaire de la rupture :

Les estimateurs en régularité de la solution ont tout d'abord été considérés par (DUFLOT et S. BORDAS 2008; S. P. A. BORDAS, DUFLOT et LE 2008). Les champs mécaniques enrichis en pointe de fissure étant réellement singuliers, DUFLOT et S. BORDAS (2008) et PRANGE, LOEHNERT et WRIGGERS (2012) proposent de représenter le gradient sur des bases contenant les fonctions singulières associées au gradient des fonctions d'enrichissement. Les performances de ces estimateurs sont très correctes. RODENAS et al. (2010) adaptent les méthodes SPR (ZIENKIEWICZ et ZHU 1992a; ZIENKIEWICZ et ZHU 1992b) et SPR-C (RÓDENAS et al. 2007) au cas X-FEM. L'originalité de ces extensions consiste en une séparation des champs de gradient en parties régulières et non-régulières pour ainsi les traiter spécifiquement. Les performances de ces estimateurs semblent alors excellentes. Enfin, l'approche XMLS (S. P. A. BORDAS, DUFLOT et LE 2008) permet de reconstruire un champ solution lissé (et non pas son gradient) *global* par méthode des moindres carrés glissant (LU, BELYTSCHKO et GU 1994), utilisant une base contenant les fonctions asymptotiques de pointe de fissure. Les performances de cette méthode semblent très dépendantes de l'enrichissement de la solution.

- Les estimateurs en relation de comportement ont été appliqués aux méthodes de partition de l'unité pour la fissuration par (PANETIER, LADEVÈZE et CHAMOIN 2009). Là encore, la difficulté réside dans la construction du champ vérifiant les équations d'équilibre. Il est proposé ici de traiter de manière séparée les éléments enrichis par les fonctions singulières et le reste du domaine. Cette méthode permet ainsi d'obtenir une borne supérieure de l'erreur.
- Les estimateurs en résidus d'équilibre ont été appliqués à la mécanique de la rupture (enrichie) par (LLERAS, HILD et RENARD 2007; HILD, LLERAS et RENARD 2009), puis (GERASIMOV et STEIN 2012) pour les approches explicites. PANNACHET (2006) utilise l'estimateur implicite proposé en éléments finis par (Díez, Egozcue et HUERTA 1998), et applique la méthode au calcul d'erreur en quantités d'intérêt pour des problèmes non-linéaires. Les fonctions singulières de pointe ne sont néanmoins pas utilisées. Enfin, le travail le plus complet a été proposé par (STROUBOULIS, L. ZHANG, D. WANG et al. 2006) qui, dans le cadre de la méthode GFEM appliquent les estimateurs implicites flux-free (Díez, PARÉS et HUERTA 2004), sans prendre en compte les hypothèses simplificatrices qui y sont proposées (voir plus loin).

Dans le cadre de la thèse de R.Allais (ALLAIS 2012), nous nous sommes intéressés à l'utilisation d'estimateurs d'erreur implicites en résidu dans le cadre de la méthode X-FEM. Il a été choisi d'utiliser ce type de méthode pour sa robustesse et ses performances. En particulier, nous nous sommes focalisés à l'estimateur flux-free proposé par (Díez, Parés et Huerta 2004). Par rapport à (STROUBOULIS, L. ZHANG, D. WANG et al. 2006), nous considérons des enrichissements locaux et non pas globaux. De plus, une plus large palette d'applications est étudiée (fissures, surfaces libres, interfaces matériaux) alors que seule le cas des surfaces libres est considéré dans (STROUBOULIS, L. ZHANG, D. WANG et al. 2006).

5.3.4 Estimateur d'erreur Flux-Free pour éléments finis enrichis

Présentation de l'estimateur

Les estimateurs de type flux-free (PARÉS, DÍEZ et HUERTA 2006; PARÉS, DÍEZ et HUERTA 2009; PARÉS, SANTOS et DÍEZ 2009) permettent de rendre les problèmes locaux des méthodes implicites autoéquilibrés. Pour cela, considérons la partition de l'unité des fonctions de forme de l'approximation (linéaire ici) :

$$\sum_{I=1}^{n_{nd}^{H}} N_{I}^{H}(\mathbf{x}) = 1$$
(5.18)

où n_{nd}^H est le nombre de nœuds du maillage \mathcal{M}^H qui discrétise Ω , et $\{N_I^H\}$, $I = 1 \cdots n_{nd}^H$ sont les fonctions de forme linéaires définies sur le maillage. Le résidu d'équilibre $\mathcal{R}^H(v)$ (cf. (5.15)) se réécrit alors (par linéarité) :

$$\mathcal{R}^{H}(v) = \mathcal{R}^{H}\left(\sum_{I=1}^{n_{nd}^{H}} N_{I}^{H}(\mathbf{x})v\right)$$
(5.19)

$$=\sum_{I=1}^{n_{nd}^{H}} \mathcal{R}^{H} \left(N_{I}^{H}(\mathbf{x}) v \right)$$
(5.20)

l'espace dans lequel vit v est un espace de dimension infinie. Il est possible d'approcher l'erreur vraie par e^h en cherchant e^h et v^h dans un espace de dimension finie \mathcal{V}^h de dimension supérieure à \mathcal{V}^H . Dans le cas contraire, l'erreur serait nulle par orthogonalité de Galerkin. En pratique, il est courant de considérer $\mathcal{V}^H \subset \mathcal{V}^h$ (en construisant un maillage \mathcal{M}^h imbriqué dans \mathcal{M}^H). Les fonctions de forme étant à support compact, l'évaluation du résidu (5.20) peut être réalisée par patchs d'éléments de \mathcal{M}^H . Par linéarité, le problème (5.15) peut alors se réécrire comme une collection de problèmes *globaux* ayant e_I^h pour solution :

$$a(e_I^h, v^h) = \mathcal{R}^H(N_I^H v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h$$
(5.21)

Le champ d'erreur approché est alors obtenu par sommation : $e^h = \sum_{I=1}^{n_{nd}^H} e_I^h$. Une telle stratégie est inenvisageable car elle requiert n_{nd}^H calculs sur tout le maillage fin \mathcal{M}^h . PARÉS, DÉZ et HUERTA (2006) proposent alors de restreindre les problèmes (5.21) au support de la fonction N_I^H . Ce support constitue un patch d'éléments fins, noté ω_I (cf figure 5.19). Les restrictions des espaces \mathcal{V}^h et \mathcal{V}^H sur ω_I sont notées respectivement \mathcal{V}_I^h et \mathcal{V}_I^H , la prolongation étant supposée nulle en dehors de ω_I (mais pas forcément nulle sur le bord du patch). Le problème local consiste alors à chercher $e_{\omega_I}^h \in \mathcal{V}_I^h$ tel que :

$$a_{\omega_I}(e^h_{\omega_I}, v^h) = \mathcal{R}^H_{\omega_I}(N^H_I v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h_I$$
(5.22)

où $a_{\omega_I}(\bullet, \bullet)$ est la restriction de la forme bilinéaire au patch ω_I , prolongée à zéro par ailleurs. Il n'est nul besoin de restreindre le résidu grâce à la propriété de compacité du support de N_I^h . Grâce à la propriété de cette fonction de forme, les flux sur le bord des patchs sont annulés, d'où l'appellation de la méthode. Le champ d'erreur estimé est ensuite obtenu par une sommation des solutions locales analogue au cas (5.21) :

$$\hat{e}^h = \sum_{I=1}^{n^H_{nd}} e^h_{\omega_I}$$

Notons que $\hat{e}^h \notin \mathcal{V}^h$ car chaque espace \mathcal{V}_I^h est discontinu sur le bord des patchs du fait de la prolongation à zéro. \hat{e}^h appartient donc à l'espace *cassé* \mathcal{V}_{brok}^h . Il est alors possible de montrer que l'erreur flux-free est une borne supérieure de e^h l'erreur globale calculée en résolvant (5.15) (PARÉS, Díez et HUERTA 2006). Il est également possible d'obtenir une borne inférieure à l'erreur e^h .



FIGURE 5.19 – Support associé au nœud \mathbf{x}_I et patch fin ω_I correspondant.

Dans l'optique d'améliorer l'efficacité de la méthode, PARÉS, DÍEZ et HUERTA (2006) ont proposé une évaluation alternative du résidu. Si nous notons $N_I^H(\mathbf{x})v^h \equiv \hat{v}^h$ dans l'équation (5.22), alors plutôt que de travailler sur cette fonction test qui n'appartient pas à l'espace \mathcal{V}_I^h , introduisons la projection nodale (interpolant) $\pi^h(\hat{v}^h)$ de \hat{v}^h dans \mathcal{V}_I^h . Travailler avec cette quantité permet d'obtenir l'expression du résidu flux-free $\mathcal{R}_{\omega_I}^H(N_I^Hv^h)$ par de simples opérations algébriques sur le résidu "classique" $\mathcal{R}_{\omega_I}^H(v^h)$. L'interprétation de cette projection nodale au cas enrichi est présentée dans (ALLAIS 2012, p. 3.2-c).

Nous détaillons maintenant les spécificités de l'extension de la méthode au cas enrichi.

Surfaces libres

Étudions tout d'abord la mise en œuvre et les performances de la méthode pour le cas des surfaces libres. La plupart des nœuds du maillage \mathcal{M}^H ont un support seulement dans le domaine d'intérêt et ne nécessitent aucun traitement particulier par rapport au cas des éléments finis classiques. Seuls les éléments dont le support contient l'interface sont traités spécifiquement, cf. figure 5.20 a. En l'occurrence, l'intégration de la formulation faible (5.15) est restreinte à la partie matière seule. Un problème de thermique stationnaire pour lequel la solution exacte est connue est considéré ici $(u^{ex} = e^{(R_0 - r)^2} \sin(\theta))$, cf. (Allais 2012)). La carte d'efficacité obtenue pour une interpolation linéaire et des problèmes locaux à interpolation linéaire sur ω_I tels que h = H/2 est présentée sur la figure 5.21 a. On observe que certains éléments sur le bord font apparaître une mauvaise efficacité ($\eta^0 \in [-11,2,0,49]$) avec localement une forte sous-estimation de l'erreur. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que ces éléments ont une faible fraction matière (figure 5.20 b). Raffiner le support de tels nœuds n'augmente en rien la taille de l'espace dans lequel est cherché \hat{e}^h (cf. figure 5.20 c). Dans ce cas, il est plus efficace d'augmenter le degré de l'approximation sur ω_I . En effet, dans ce cas on observe une bien meilleure répartition de l'efficacité (figure 5.21 b). Une telle propriété est également observée dans le cas où le résidu des problèmes locaux est projeté. L'évolution de l'efficacité globale est représentée sur la figure 5.22 : nous observons des niveaux d'efficacité conformes à la théorie, quel que soit le cas de figure. En effet, l'erreur \hat{e}^h majore bien l'erreur e^h calculée par résolution directe de (5.15) ($\eta_{lim} = \sqrt{1 - (h/H)^q}$ si q est l'ordre d'approximation, cf (Huerta et Díez 2000)).



FIGURE 5.20 – a. Nœud dont le support est coupé par l'interface et patch ω_I correspondant; b. Nœud à faible fraction matière (support sur \mathcal{M}^H) c. Nœud à faible fraction matière (patch ω_I obtenu après raffinement des éléments de \mathcal{M}^H).



FIGURE 5.21 – Domaine troué : carte d'efficacité déviée η^0 , cas sans projection du résidu *flux-free*; a. h = H/2, interpolation linéaire; b. h = H, interpolation quadratique.



FIGURE 5.22 – Domaine troué : convergence de l'efficacité globale.

Mécanique linéaire de la rupture

L'exemple présenté dans la section précédente ne fait cependant pas intervenir d'enrichissements. Le cas des interfaces matériau a été traité avec succès dans (ALLAIS 2012), mais nous nous intéressons ici au cas de la mécanique linéaire de la rupture pour pouvoir comparer plus facilement l'estimateur à la littérature. Pour cela, une solution singulière est considérée ($u^{ex} = \frac{\sqrt{r}}{2} \sin(\theta/2)$) par application des flux exacts sur le bord de \mathcal{M}^H . Les cas non-enrichi ou à enrichissement topologique (BÉCHET et al. 2005; LABORDE et al. 2005) donnent des résultats conformes à la théorie, que le résidu des problèmes locaux soit projeté ou non (cf. figure 5.23). Notons tout de même une forte sur-estimation de *e^h* si l'on compare les résultats aux limites théoriques pour le cas de l'enrichissement en pointe (figure 5.23.b). Le cas de l'enrichissement géométrique (BÉCHET et al. 2005; LABORDE et al. 2005) est plus déroutant dans la mesure où l'efficacité ne semble pas se stabiliser au cours du raffinement (figure 5.24.a). Une étude de l'efficacité locale fait apparaître une forte sur-estimation de l'erreur dans le prolongement de la fissure (cf. figure 5.25a. et b.). Un examen approfondi montre d'une part que le conditionnement des problèmes locaux est énormément dégradé dans cette zone car la fonction d'enrichissement y est quasi-linéaire (ALLAIS 2012) et d'autre part que l'erreur y est particulièrement faible (de l'ordre de 10⁻⁷). En d'autres termes, les problèmes locaux sont très sensibles aux erreurs numériques et ces fluctuations sur l'erreur estimée sont "amplifiées" par le calcul d'efficacité car comparées à des grandeurs très petites. Il a alors été proposé d'améliorer le conditionnement de ces calculs locaux par application de la méthode Stable Generalized Finite Element Method (BABUŠKA et BANERJEE 2012; GUPTA, DUARTE et al. 2013). Le conditionnement et l'efficacité sont alors grandement améliorés comme illustré sur la figure 5.25c. Notons que la dégradation de l'efficacité au niveau de la fissure visible sur cette figure est éliminée en ne traitant pas par cette méthode les éléments enrichis par une fonction discontinue. Grâce à cette approche, l'efficacité de l'estimateur est très satisfaisante si on la compare aux autres estimateurs de la littérature.

5.3.5 Bilan partiel

Nous avons présenté dans cette section le développement d'un estimateur a posteriori en résidu dans le cadre de la méthode X-FEM. Cet estimateur de type *flux-free* résout les problèmes d'équilibrage des estimateurs en résidu par patch. Il a été développé dans le cas de la thermique et a donné de très bons résultats tant locaux que globaux. Une approche a été proposée afin de simplifier l'évaluation des résidus des problèmes locaux. Il est alors possible de construire les problèmes locaux à moindre



FIGURE 5.23 – Mécanique linéaire de la rupture : convergence de l'efficacité globale. a. Sans enrichissement en pointe. b. Enrichissement topologique.

coût, le second membre de ce résidu pouvant être aisément obtenu à partir de simples manipulations algébriques. Les performances de l'estimateur dans ce cas sont alors très proches de celles observées lors du calcul complet des résidus locaux. Cet estimateur a en outre été validé plus largement que les estimateurs de la littérature (STROUBOULIS, L. ZHANG, D. WANG et al. 2006). Il n'a malheureusement pas donné lieu à une publication lors de la thèse de Raphaël Allais. Ayant pris plus de recul depuis cette période, je vois maintenant plus clairement les apports de cette étude et m'attellerai donc à la rédaction d'une publication présentant ces résultats. Une fois l'erreur estimée de manière fidèle, il est alors possible d'envisager le développement de procédures d'adaptation de maillage. La méthode la plus efficace consiste alors à utiliser des approches par subdivision hiérarchique de type quadtree ou octree. Ces méthodes sont d'autant plus performantes dans le cadre de la méthode X-FEM que le maillage n'est pas nécessairement conforme à la géométrie. Vient alors le problème des nœuds orphelins entre deux niveaux de raffinement. En éléments finis classiques, il est courant de contraindre la valeur des degrés de liberté des nœuds orphelins à partir des nœuds partagés par les deux niveaux de maillage. La manière de traiter le cas où les nœuds orphelins sont enrichis était alors un problème ouvert. Nous nous sommes alors intéressés à cette problématique lors des travaux de thèse de Raphaël Allais et avons ainsi proposé une méthode permettant de contraindre ces nœuds de manière adaptée dans le cas où ils sont enrichis (LEGRAIN, ALLAIS et CARTRAUD 2011). Nous avons également proposé une extension de la fonction ridge (MOËS, CLOIREC et al. 2003) adaptée à ces situations. Notons finalement que cet estimateur pourrait certainement être amélioré en s'inspirant des travaux de RÓDENAS et al. (2007), et qu'il serait nécessaire de s'intéresser aux problématiques de solvabilité des problèmes locaux dans le cas de champs vectoriels.

5.4 Méthodes de résolution robustes et efficaces pour images haute résolution

Les approches présentées dans les sections précédentes ont pour objectif de simplifier la phase de génération de maillage, mais également de diminuer le coût des calculs. Elles se fondent sur la méthode des éléments finis (éventuellement enrichie) et permettent des gains de temps probants. Néanmoins, il nous a semblé intéressant d'étudier les apports que pourraient constituer les solveurs basés sur la réduction de modèle de type PGD (CHINESTA, KEUNINGS et LEYGUE 2013; AMMAR et al.



FIGURE 5.24 – Mécanique linéaire de la rupture : convergence de l'efficacité globale. a. Sans traitement spécifique des problèmes locaux. b. Traitement du conditionnement des problèmes locaux.



FIGURE 5.25 – Mécanique linéaire de la rupture : cartes d'efficacité déviée η^0 locale. a. Sans projection du résidu des problèmes locaux; b. Avec projection du résidu des problèmes locaux; c. Avec projection du résidu et traitement du conditionnement des problèmes locaux.

2006; NOUY 2010a). En effet, le paradigme alternatif sur lequel sont basées ces approches (séparation de variables) laisse espérer d'énormes gains en terme de temps de calcul pour les applications basées sur l'imagerie (CHINESTA, AMMAR et al. 2008). L'objectif de cette étude était de proposer une alternative viable aux approches de type FFT (MOULINEC et SUQUET 1994) pour les images de très haute résolution (2048³ voxels) qui sont maintenant obtenues de manière routinière. La prise en compte directe de ces informations géométriques pour des calculs mécaniques est donc encore une problématique d'intérêt. Les méthodes de type FFT peuvent supporter de telles résolutions, mais leur convergence peut s'avérer dépendante du contraste mécanique entre les phases du matériau. Les approches d'approximation de tenseurs apparaissent alors attirantes car elles pourraient permettre de diminuer la complexité des algorithmes d'approximation spatiale, mais également de prendre en compte de incertitudes de modèle (propriétés mécaniques de phases). Dans cette section, seule la diminution de la complexité de la phase de résolution est étudiée. Le cas des incertitudes est présenté en section 6.6.

Notons finalement que cette étude a constitué une partie de la thèse de Loïc Giraldi (GIRALDI 2012), encadrée en collaboration avec Anthony Nouy et Patrice Cartaud.

5.4.1 Introduction

Ces dix dernières années, les approches de réduction de modèle ont pris une place importante dans le domaine de la simulation mécanique. Malgré des travaux datant des années 1970, ces méthodes ont connu un fort regain d'intérêt dans des domaines tels que la quantification d'incertitudes (BOYAVAL et al. 2010; P. Chen, Quarteroni et Rozza 2014; Mignolet et Soize 2008; Nouy 2010b; Nouy 2009; Nouy 2008), les équations aux dérivées partielles paramétrées, l'optimisation, le contrôle optimal ou les problèmes inverses (Chinesta, Keunings et Leygue 2013; Quarteroni, Manzoni et Negri 2015). Ces méthodes peuvent être classées en deux familles : (i) les méthodes de réduction a posteriori (SVD, PCA) qui nécessitent la connaissance (exacte ou approchée) de la solution pour construire le modèle réduit et (ii) les méthodes de réduction a priori qui se basent sur la structure des équations pour construire le modèle réduit. C'est cette dernière classe d'approches qui nous intéresse ici. Dans la communauté mécanique, deux méthodes ont plus particulièrement attiré l'attention des recherches : la méthode des bases réduites (ou Reduced-Basis method (HAASDONK, OHLBERGER et ROZZA 2008; QUARTERONI, MANZONI et NEGRI 2015)) et la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition (CHINESTA, KEUNINGS et LEYGUE 2013)). Nous nous focaliserons sur cette dernière par la suite, bien que des études (non présentées ici) en collaboration avec Anthony Nouy aient été réalisées avec la méthode des bases réduites dans le contexte des fissures à géométrie incertaine.

5.4.2 Espaces de tenseurs et représentations séparées

Soit $u \in V$, la solution d'un problème en grande dimension écrit sous forme faible a(v, u) = l(v) $\forall v \in V$. L'espace V est un espace de Hilbert de dimension finie. La solution u dépend d'un nombre dde paramètres $\{x_{\mu}\}_{\mu=1}^{d} : u = u(x_1, x_2, \dots, x_d)$. Ces paramètres peuvent représenter les coordonnées de l'espace et du temps (x, y, z, t), la valeur des termes source, des conditions aux limites, les propriétés matériaux... Un tel problème est donc multidimensionnel et on a

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathcal{V} = \bigotimes_{\mu=1}^d \mathcal{V}^\mu$$
(5.23)

où \mathcal{V}^{μ} est un espace de Hilbert de dimension finie $(\dim(\mathcal{V}^{\mu}) = n_{\mu})$. Ces espaces sont munis de leur produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\mu}$ et de leur norme associée $\| \bullet \|_{\mu}$. Bien que de dimension finie, la caractérisation de $u \in \mathcal{V}$ requiert la connaissance d'un nombre de paramètres croissant exponentiellement avec la dimension *d* du problème. En effet, si $\{\varphi_i^{\mu}\}_{i=1\cdots n_{\mu}}$ est une base de \mathcal{V}^{μ} , alors une base de \mathcal{V} est donnée par tensorisation des bases sur \mathcal{V}^{μ} . Le champ *u* s'écrit alors

$$u = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{n_d} U_{i_1 \cdots i_d} \ \varphi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_d}^d$$
(5.24)

où les $U_{i_1\cdots i_d}$ sont les coefficients de la base de \mathcal{V} . Ainsi, si $n_{\mu} = n$; $\mu = 1 \cdots d$, n^d coefficients doivent être déterminés. Sachant que de manière standard $n = 10^3$, le nombre d'inconnues associées à la caractérisation de u sur grille régulière devient rapidement inabordable pour les moyens de calcul actuels (même en dimension 3). Cette relation exponentielle entre degrés de liberté et dimension est couramment nommée *malédiction de la dimensionnalité*. L'approche PGD (CHINESTA, KEUNINGS et LEYGUE 2013) consiste alors à chercher une approximation de faible rang de u sous la forme

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) \simeq u_r(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^r \bigotimes_{\mu=1}^d u_i^{\mu}, \quad u_i^{\mu} \in \mathcal{V}^{\mu}$$
(5.25)

u ayant de l'ordre de n^d degrés de liberté, il apparaît que u_r en a au plus rdn. Ainsi, *si r* reste négligeable devant $n^d/(nd)$ il est possible d'obtenir une bonne approximation de *u* (au sens d'une certaine norme). L'existence d'une solution de faible rang dépend de la régularité de *u* vis-à-vis de ses paramètres via sa r-largeur de Kolmogorov. En introduisant C_1 , l'ensemble des tenseurs élémentaires de rang 1

$$C_1(\mathcal{V}) = \left\{ v = \bigotimes_{\mu=1}^d v_i^{\mu}; v_i^{\mu} \in \mathcal{V}^{\mu} \right\}$$
(5.26)

il apparaît que la solution recherchée par la PGD est la décomposition de u dans l'espace des tenseurs canoniques de rang r, C_r (HACKBUSCH 2012)

$$\mathcal{C}_r(\mathcal{V}) = \left\{ w_r = \sum_{i=1}^r v_i; v_i \in \mathcal{C}_1 \right\}$$
(5.27)

Il est possible de montrer que toute fonction $w \in \mathcal{V} = \bigotimes_{\mu=1}^{d} \mathcal{V}^{\mu}$ peut être approchée par un tenseur de rang $r, w_r \in \mathcal{C}_r(\mathcal{V})$ quelle que soit la précision requise (au pire, $r = n^d$). Notons tout de même que $\mathcal{C}_r(\mathcal{V})$ n'est fermé que pour r = 1 ou d = 2, ce qui peut conduire à la divergence des algorithmes de minimisation faisant intervenir ce type de tenseur. Précisons que ce type de représentation n'est qu'un choix parmi d'autres. Citons également la décomposition sous forme de tenseur de Tucker : pour un multi-indice $\mathbf{r} = (r^1, r^2, \dots, r^d) \in \mathbb{N}^d$ représentant le rang selon chaque dimension, l'ensemble des tenseurs de Tucker $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ s'écrit

$$\mathcal{T}_{\mathbf{r}}(\mathcal{V}) = \left\{ w_{\mathbf{r}} = \sum_{i_1=1}^{r^1} \cdots \sum_{i_d=1}^{r^d} \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_d} \bigotimes_{\mu=1}^d v_i^{\mu}; \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_d} \in \mathbb{R}, \ v_i^{\mu} \in \mathcal{V}^{\mu}, \ < v_i^{\mu}, v_j^{\mu} >_{\mu} = \delta_{ij} \right\}$$
(5.28)

Un tel tenseur est appelé tenseur de Tucker de rang r. Il est possible de montrer que $C_r \subset T_{(r,r,\dots,r)}$, et donc que tout élément $w \in V$ peut être approché par un membre de $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$. Contrairement à $C_r(\mathcal{V})$, $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ est fermé et donc utilisable pour des problèmes d'optimisation. Notons tout de même l'apparition du tenseur $\lambda \in \mathbb{R}^{r_1 \times r_2 \cdots \times r_d}$ dit tenseur cœur, qui rend ce format de tenseur inapplicable pour $d \gg 1$ du fait des contraintes de stockage de cet objet (*malédiction de la dimensionnalité*). Dans le but de pallier aux problèmes des deux formats précédents, HACKBUSCH et KÜHN (2009) ont introduit le format hiérarchique de Tucker. Ce format hiérarchique se base sur un arbre binaire qui partitionne les dimensions du problème et ne nécessite que le stockage d'un ensemble de tenseurs de transfert de dimension 2 ou 3. Le lecteur intéressé par ce format pourra se référer à (HACKBUSCH et KÜHN 2009) ou à (GIRALDI 2012) pour une présentation générale de l'utilisation de formats de tenseurs pour la résolution de problèmes paramétriques.

5.4.3 Algorithmes de résolution pour formats tensoriels

Les différents formats permettant d'approcher la solution étant introduits, nous nous intéressons à présent à la manière de construire une approximation de u sous un format tensoriel donné. Vu les applications visées (faible nombre de dimensions), nous nous restreindrons ici aux formats canonique et Tucker de rang r.

Approximation de tenseurs

Dans le cas où la solution u est connue, il est possible de compresser cette dernière dans \mathcal{M} (pris comme $C_r(\mathcal{V})$ ou $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ par exemple) via des méthodes d'approximation de tenseur. Ces dernières sont formulées sous forme d'un problème de minimisation qui consiste à chercher $w \in \mathcal{M}$ tel que

$$||u - w|| = \min_{v \in \mathcal{M}} ||u - v||$$
(5.29)

Notons que ce problème de minimisation doit incorporer une tolérance ε dans le cas où $\mathcal{M} = C_r(\mathcal{V})$ (avec r > 1 ou d > 2) car cet espace n'est pas fermé. Selon la norme considérée, des méthodes comme la SVD (ECKART et YOUNG 1936) ou ses pendants de haut ordre HOSVD (LATHAUWER, MOOR et VANDEWALLE 2000) et HSVD (GRASEDYCK 2010)) peuvent être considérés. Il est également possible d'utiliser des algorithmes de minimisations alternées (KOLDA et BADER 2009). Ces algorithmes sont complexes et pré-supposent connu le rang r de la solution. Il est également possible de procéder de manière adaptative (mais non-optimale) en utilisant des méthodes dites gloutonnes qui, à partir d'une solution de rang $r u_r$, permettent le calcul d'une correction sur un ensemble \mathcal{M} de plus petite dimension, définissant ainsi une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers u.

Solveurs itératifs multidimensionnels

Le problème discret conduit à résoudre un système du type

$$Au = b \tag{5.30}$$

avec $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ (espace des opérateurs linéaires sur \mathcal{V}) et $b \in \mathcal{V}$, pour obtenir $u \in \mathcal{V}$. Il est possible d'adapter les algorithmes de résolution itérative usuels au cas des espaces tensoriels (gradient conjugué, gradient bi-conjugué, minimisation du résidu...) en introduisant des phases troncature de faible rang des itérés. Des stratégies efficaces de préconditionnement de ces algorithmes ont été proposées dans la thèse de Loïc Giraldi (GIRALDI 2012; GIRALDI, NOUY et LEGRAIN 2014) afin d'améliorer la convergence de ces algorithmes. Notons que leur efficacité est tributaire de l'écriture de A et b avec un faible rang.

Approximation directe de la solution

L'objectif est ici de résoudre l'équation linéaire (5.30) par application de méthodes proches de celles utilisées en approximation de tenseur (cf section 5.4.3). L'approximation w de u est cherchée comme solution du problème de minimisation suivant

$$w \in \Pi_{\mathcal{M}}(u) = \arg\min_{v \in \mathcal{M}} \|u - v\|_{\mathcal{V}}$$
(5.31)

u étant inconnu, il est nécessaire de choisir une norme adaptée pour cette minimisation afin que $\Pi_{\mathcal{M}}(u)$ puisse être obtenue sans connaissance de *u*. Dans le cas où la forme bilinéaire est symétrique, coercive et continue, il est possible de choisir $\| \bullet \|_{\mathcal{V}} = a(\bullet, \bullet)$. Le problème de minimisation revient alors à

$$w \in \Pi_{\mathcal{M}}(u) = \arg\min_{v \in \mathcal{M}} J(v) \quad ; J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - b(v)$$
(5.32)

Cette minimisation rend w calculable sans aucune connaissance préalable de u (pour peu que la minimisation sur \mathcal{M} soit bien posée). Ce choix est celui classiquement considéré dans le cadre de la PGD (PGD dite de Galerkin). Dans l'éventualité où le problème ne serait plus symétrique, une approche en minimum de résidu (Nouv 2010a) peut être utilisée. Cette dernière stratégie est robuste, mais peut conduire à de faibles taux de convergence.

Remarque : d'un point de vue discret, ces deux approches sont très similaires : la PGD de Galerkin cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que la PGD en minimum de résidu cherche à minimiser $||u - v||_A$ tandis que l

Construction progressive de la solution dans C_r

Tout comme les approches d'approximation de tenseur, la détermination de w par résolution du problème de minimisation (5.31) donne accès à $w \in M$ de rang fixé. Dans le cadre de l'approche PGD,

la construction de w est obtenue de manière progressive (adaptative) par utilisation d'une approche gloutonne avec $w \in C_r$ construite par corrections successives dans C_1 : connaissant $w_{r-1} \in C_{r-1}$, nous recherchons $v = \bigotimes_{\mu} v^{\mu} \in C_1$ de manière à écrire $w_r = w_{r-1} + v$. Cette correction est obtenue de manière à être optimale vis-à-vis de la norme \mathcal{V} de l'erreur :

$$v = \bigotimes_{\mu} v^{\mu} \in \underset{v^{\star} \in \mathcal{C}_{1}}{\operatorname{arg\,min}} \| u - w_{r-1} - v^{\star} \|_{\mathcal{V}}$$
(5.33)

Comme pour l'approximation directe de la solution, la norme est choisie de manière à pouvoir être évaluée sans connaissance de la solution *u*. Selon le choix de cette norme, on parlera de PGD progressive de Galerkin ou en Minimum de résidu (Nouv 2010a). Une fois cette correction calculée, elle peut être utilisée directement pour construire la solution (i.e. $w_r = w_{r-1} + v$), ou pour construire l'espace de toutes les corrections de rang 1 déjà calculées : $U_r = \text{span}\{w_k\}_{k=1}^r$ et ensuite réaliser une projection sur cet espace ("mise à jour" de la solution) :

$$w_r = \arg \min_{v^* \in U_r} \|u - v^*\|_{\mathcal{V}}$$
(5.34)

Le calcul de la correction optimale de rang 1 eq.(5.33) est un problème non-linéaire. En pratique, un algorithme de minimisations alternées selon les dimensions du problème est mis en œuvre. Cet algorithme est peu coûteux car il revient à résoudre des séquences de problèmes où seule une dimension est libre, les autres étant fixées. Bien que maintenant éprouvée, la convergence des algorithmes PGD progressifs peut néanmoins être lente selon le contenu spectral du problème ainsi que le nombre de dimensions.

Construction progressive de la solution dans T_r

La thèse de Loïc Giraldi a été l'occasion de proposer des approches de construction alternatives pour la PGD. En plus de ses travaux sur le préconditionnement des solveurs multi-dimensionnels, nous avons aussi travaillé sur l'utilisation de formats de tenseur alternatifs pour les méthodes de construction progressive de solutions de faible rang. Nous présentons ici une approche permettant de construire progressivement une approximation de la solution dans T_r . Bien que restreinte aux problèmes de faible dimension (typiquement $d \leq 3$), une variante de l'approche présentée ici a également été utilisée avec succès pour construire des solutions dans les ensembles hiérarchiques de Tucker lorsque le nombre de dimensions augmente. Nous avons également démontré l'efficacité d'approches progressives préconditionnées. Comme énoncé précédemment, nous nous restreignons ici à des espaces de faible dimension (d = 2 ou 3) car c'est dans ce cadre que les méthodes à séparation de variables ont été appliquées aux problèmes d'homogénéisation.

Pour des questions d'efficacité, la recherche de $w \in \Pi_{\mathcal{T}_r}(u)$ est calculée de manière progressive (mais sous-optimale). La solution w_m est recherchée dans \mathcal{U}_r , sous-espace de \mathcal{T}_r :

$$\mathcal{U}_r = \bigotimes_{\mu} \mathcal{U}_r^{\mu} \tag{5.35}$$

Les sous-espaces \mathcal{U}_r^{μ} sont définis de manière progressive en complétant \mathcal{U}_{r-1}^{μ} par une fonction v^{μ} extraite d'une correction de rang $1: v = \bigotimes_{\mu} v^{\mu}$. Cette correction est obtenue en résolvant le problème (5.33), puis en étendant les espaces \mathcal{U}_r^{μ} grâce à $v^{\mu}: \mathcal{U}_r^{\mu} = \mathcal{U}_{r-1}^{\mu} + \operatorname{span}(v_r^{\mu})$. L'approximation w_r de rang r est alors obtenue par projection de Galerkin sur l'espace \mathcal{U}_r .

Quelques remarques sur cette approche : (i) les espaces \mathcal{U}_r^{μ} sont de dimension $n_r^{\mu} \leq r$ car une orthogonalisation de Gram-Schmidt est appliquée avant d'augmenter la taille de ces espaces ; (ii) L'espace \mathcal{U}_r a pour dimension $n_r^1 \times \cdots \times n_r^d$ car il est obtenu par tensorisation ; (iii) les projections de Galerkin sur l'espace \mathcal{U}_r sont de plus en plus coûteuses lors du déroulement de l'algorithme (problèmes de dimension $n_r^1 \times \cdots \times n_r^d$).

5.4.4 Cas de problèmes définis sur image

Considérons un problème d'homogénéisation en thermique stationnaire dont la géométrie Ω est définie sur une grille de $N_x \times N_y$ pixels (2D) ou $N_x \times N_y \times N_z$ voxels (3D). Notons que la description géométrique d'un tel problème est de nature tensorielle : Ω peut s'écrire $\Omega = \Omega^x \times \Omega^y$ ou $\Omega = \Omega^x \times \Omega^y \times \Omega^z$ en fonction de la dimension (avec $\Omega^\mu = [0, l_\mu], l_\mu$ étant la dimension de l'image selon la dimension μ). Si un tel problème est résolu avec la méthode éléments finis "voxels" ou même X-FEM (cf. section 5.2.2), alors le nombre de paramètres nécessaires à la représentation de la solution est de l'ordre de $N_x \times N_y \times N_z$. Si une approche par approximation de tenseur Canonique est utilisée, alors le nombre de paramètres est de l'ordre de $r(N_x + N_y + N_z)$. Si le rang de l'approximation est faible, alors nous pouvons espérer proposer des algorithmes plus efficaces que les approches standards. Cette idée avait déjà été proposée par CHINESTA, AMMAR et al. (2008), mais pour des champs de propriétés mécaniques aléatoires et déjà sous format séparé. L'idée d'une partie des travaux de thèse de Loïc Giraldi, et dans une moindre mesure de Hajer Lamari (LAMARI 2011) consistait à pousser plus avant cette étude préliminaire.

Séparation de la géométrie

L'efficacité de la mise en œuvre des approches d'approximation de tenseur se fonde sur une écriture séparée de la totalité du problème physique. Pour cela, les différents opérateurs différentiels doivent être séparables. A titre d'exemple, si $a(v, u) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla u \, d\Omega$ est la forme bilinéaire du problème de thermique bidimensionnel et si les champs u et \overline{v} sont cherchés sous forme séparée $(u(x, y) = u^x(x)u^y(y)$ et $v(x, y) = v^x(x)v^y(y)$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} a(v,u) &= \int_{\Omega} (v'^{x}v^{y}\mathbf{e}_{1} + v^{x}v'^{y}\mathbf{e}_{2})\underline{\underline{K}}(x,y)(u'^{x}u^{y}\mathbf{e}_{1} + u^{x}u'^{y}\mathbf{e}_{2}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} v'^{x}v^{y}K_{11}(x,y)u'^{x}u^{y} d\Omega + \int_{\Omega} v'^{x}v^{y}K_{12}(x,y)u^{x}u'^{y} d\Omega + \\ &\int_{\Omega} v^{x}v'^{y}K_{21}(x,y)u'^{x}u^{y} d\Omega + \int_{\Omega} v^{x}v'^{y}K_{22}(x,y)u^{x}u'^{y} d\Omega \end{aligned}$$

Bien qu'écrit avec des fonctions au format séparé, cet opérateur nécessite toujours des intégrations sur l'espace Ω entier, ce qui empêche d'écrire efficacement les algorithmes présentés dans la section précédente. Si le tenseur de conductivité admet une représentations séparée ($\underline{K}(x, y) = \underline{K}^x(x)\underline{K}^y(y)$) l'opérateur différentiel peut s'écrire sous forme séparée :

$$a(v,u) = \int_{\Omega^{x}} v'^{x} K_{11}^{x} u'^{x} d\Omega^{x} \int_{\Omega^{y}} v^{y} K_{11}^{y} u^{y} d\Omega^{y} + \int_{\Omega^{x}} v'^{x} K_{12}^{x} u^{x} d\Omega^{x} \int_{\Omega^{y}} v^{y} K_{12}^{y} u'^{y} d\Omega^{y} + \int_{\Omega^{x}} v^{x} K_{21}^{x} u'^{x} d\Omega^{x} \int_{\Omega^{y}} v'^{y} K_{21}^{y} u^{y} d\Omega^{y} + \int_{\Omega^{x}} v^{x} K_{22}^{x} u^{x} d\Omega^{x} \int_{\Omega^{y}} v'^{y} K_{22}^{y} u'^{y} d\Omega^{y}$$

Par cette écriture, on observe que les intégrales sur Ω sont transformées en intégrales selon Ω^x et Ω^y . En pratique, si le matériau comporte deux phases de conductivité $\underline{\underline{K}}_1$ et $\underline{\underline{K}}_2$, $\underline{\underline{K}}$ peut être exprimé à partir de ces deux tenseurs et d'une fonction caractéristique $I(\mathbf{x})$ de la phase $\overline{1}$:

$$\underline{\underline{K}}(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x})\underline{\underline{K}}_{1} + (1 - I(\mathbf{x}))\underline{\underline{K}}_{2} = \underline{\underline{K}}_{2} + I(\mathbf{x})\left(\underline{\underline{K}}_{1} - \underline{\underline{K}}_{2}\right)$$

Ainsi, une représentation séparée de la fonction indicatrice conduit à une représentation séparée de la conductivité. En pratique, la fonction indicatrice est interpolée sur la grille de l'image ($N_x \times N_y \times N_z$ voxels en 3D) :

$$I(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} I_{ijk} \phi_i^x(x) \phi_j^y(y) \phi_k^z(z)$$
(5.36)

où I_{ijk} est la valeur de I au voxel (i, j, k) et où les $\{\phi_i^{\mu}\}_{1 \le i \le P^{\mu}}$ sont des fonctions d'interpolation constantes par morceaux. L'approximation $I_m(x, y, z)$ de I(x, y, z) au format canonique est obtenue grâce à une SVD en 2D ou grâce à un algorithme de minimisations alternées en 3D, tandis qu'une décomposition au format Tucker peut être obtenue grâce à la HOSVD. Il est à noter que l'efficacité de la PGD peut être fortement influencée par le nombre de termes présents dans la représentation séparée de l'indicatrice. Malheureusement, ce nombre de termes dépend également de la régularité de la fonction à approcher. La fonction indicatrice étant discontinue, sa séparation comporte alors un grand nombre de termes. A titre d'exemple, considérons l'indicatrice associée à l'image 512px × 512px présentée sur la figure 5.26a. Une erreur en norme 2 de l'ordre de 10^{-2} requiert 400 modes pour un maximum de 512 (avec 512 modes, la fonction est représentée exactement). Nous utilisons alors une indicatrice régularisée construite à partir d'une level-set φ dont l'iso-zéro représente l'interface entre les phases :

$$I_s = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{2\phi}{\delta}\right) \right) \tag{5.37}$$

où δ représente la demi-largeur de régularisation. L'effet de la régularisation de l'indicatrice associée à l'image figure 5.7 pour $\delta = 2px$ est présentée sur la figure 5.26a. et son influence sur la convergence de la SVD sur la figure 5.26b. Nous observons que le nombre de modes permettant d'atteindre une erreur de 10^{-2} est diminué de 25% par rapport à la SVD. Notons tout de même que cette procédure de régularisation introduit une erreur sur la représentation de la géométrie. Il est alors nécessaire de ne pas prendre δ trop grand pour ne pas trop diffuser les deux matériaux au niveau des interfaces. Néanmoins, si la régularisation est maîtrisée, son influence reste négligeable par rapport à celle des filtres classiquement utilisés en pré-traitement. Le deuxième avantage de cette procédure de régularisation concerne l'élimination des oscillations de I_m qui peuvent apparaître près des interfaces. La régularisation évite ainsi à I_m d'être négative dans ces zones (ce qui conduit à une conductivité négative), empêchant ainsi au problème d'être mal posé. Une approche de régularisation alternative à celle présentée ici (basée sur une régularisation diffusive de la fonction indicatrice via un temps fictif) a été proposée dans (LAMARI et al. 2010). Cette stratégie permet elle aussi de diminuer le nombre de modes pour la séparation de la fonction indicatrice. Elle ne permet toutefois pas de contrôler aussi aisément le niveau de régularisation que l'approche présentée ici.



FIGURE 5.26 – a. Indicatrice pour l'image 2D tirée de (GOLANSKI, TERADA et KIKUCHI 1997); b. Convergence de la SVD avec et sans régularisation (norme 2).

Conditions aux limites

Dans le cas de la thermique, des conditions aux limites homogènes en température, flux ou périodiques peuvent être appliquées sur le bord du volume élémentaire. Dans le cas d'une approximation de la solution sous format de tenseur, il est nécessaire de s'assurer que les conditions aux limites puissent être représentées aisément par le format utilisé. Les problèmes aux limites associés à ces méthodes d'homogénéisation doivent donc être écrits sous une forme adaptée. Le cas des conditions aux limites homogènes en température est le plus aisé à mettre en œuvre. La solution *u* s'exprime comme $u(\mathbf{x}) = \nabla u^M \cdot \mathbf{x} + \tilde{u}(\mathbf{x})$ où $\nabla u^M = (1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ est le gradient de température macroscopique à imposer sur Ω via des conditions limites homogènes et $\tilde{u} \in \mathcal{V}$. La formulation variationnelle consiste alors à chercher \tilde{u} vérifiant :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla \tilde{u} \, d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla v \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla u^M \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{V}$$
(5.38)

L'écriture sous format tensoriel des opérateurs du membre de gauche et de droite de cette équation est aisée à obtenir une fois I_m connue. Il suffit alors d'imposer des conditions aux limites homogènes selon les trois dimensions ($v_i^{\mu} \in \mathcal{V}^{\mu} = H_0^1(\Omega^{\mu})$ ($\mu = x, y, z$) dans $\tilde{u}_r(x, y, z) = \sum_{i=1}^r v_i^x(x)v_i^y(y)v_i^z(z)$).

Le cas des conditions aux limites homogènes en flux consistent à imposer le flux macroscopique $\mathbf{q}^M = (1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ sur $\partial\Omega$. La formulation variationnelle conduit alors à chercher u vérifiant :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla u \, d\Omega = - \int_{\partial \Omega} v \, \mathbf{q}^M \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$
(5.39)

Ce problème est mal posé car la solution est définie à une constante près. Généralement, la température est imposée en un point du domaine pour le rendre bien posé. L'extension au cas multidimensionnel de cette approche n'est cependant pas satisfaisante. En effet, imposer simplement une condition aux limites de Dirichlet sur v_i^{μ} revient à imposer cette condition sur une ligne en 2D ou un plan en 3D. Nous cherchons donc plutôt u dans l'espace des fonctions de $H_m^1(\Omega)$ à moyenne nulle $H_m^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v \ d\Omega = 0\}$. La formulation faible s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla u \ d\Omega + \gamma \int_{\Omega} v \ d\Omega \int_{\Omega} u \ d\Omega = -\int_{\partial\Omega} v \ \mathbf{q}^{M} \cdot \mathbf{n} \ d\Gamma \quad \forall v \in H^{1}_{m}(\Omega)$$
(5.40)

pour un certain $\gamma > 0$. Le flux étant constant sur chaque face de Ω , les conditions aux limites de Neumann sont aisées à appliquer sur le problème séparé.

Le cas des conditions aux limites périodiques est traité en imposant la périodicité des v_i^{μ} , et le problème est rendu bien posé par une approche analogue à celle utilisée pour des conditions homogènes en flux.

Application des approximations de tenseur au calcul sur image

Les approches présentées dans les sections précédentes sont maintenant appliquées à des calculs sur images. Tout d'abord, nous nous focaliserons sur le cas bidimensionnel où tous les formats présentés coïncident avec le format canonique, puis sur le cas tridimensionnel afin de comparer le format canonique au format Tucker.

Cas bidimensionnel Considérons l'image 2D présentée sur la figure 5.27. Cette image a une résolution de 128×128 pixels, et est associée au domaine $\Omega = [0, 1]^2$. Le matériau considéré comporte deux phases de conductivités isotropes avec $K_i = 10$ ou 1000 W.m⁻¹.K⁻¹ pour les inclusions et



FIGURE 5.27 – Inclusions aléatoires dans une matrice.

 $k_m = 1$ W.m⁻¹.K⁻¹ pour la matrice. La fonction indicatrice est régularisée selon une demi-longueur $\delta = 1$ pixel. L'extraction de la conductivité effective est réalisée pour des conditions aux limites homogènes en flux (*NBC*), en température (*EBC*) et périodiques (*PBC*). Aucune troncature n'est appliquée lors de la séparation de la fonction indicatrice afin de ne faire apparaître que les erreurs associées au format séparé. Des solutions éléments finis voxels NBC, EBC et PBC sont utilisées comme solutions de référence et ainsi permettre de calculer les erreurs sur les propriétés effectives. La convergence de la méthode PGD est illustrée sur la figure 5.28 où l'on peut observer de bonnes propriétés de convergences lorsque le contraste est modéré. La plus faible vitesse de convergence pour le cas homogène en flux (NBC) peut s'expliquer par le fait que les modes haute fréquence ont plus d'impact sur la moyenne spatiale que dans les cas EBC et PBC. L'augmentation du contraste a une forte influence sur la convergence de la méthode, spécialement pour le cas NBC. Dans ce cas, l'algorithme converge très lentement. Ce comportement provient de la détérioration du conditionnement de l'opérateur séparé. Les approches de préconditionnement proposées par Loïc Giraldi (GIRALDI 2012) n'ont pas été appliquées ici, mais pourraient également être évaluées.



FIGURE 5.28 – Erreur relative en norme 2 du tenseur effectif en fonction du rang *k* de l'approximation canonique. a. Contraste 10; b. Contraste 1000.



FIGURE 5.29 – Fibres réparties aléatoirement dans une matrice.

Cas tridimensionnel Le format canonique est maintenant comparé au format tensoriel de Tucker. Pour cela, le problème tridimensionnel présenté sur la figure 5.29 est considéré (128³ voxels, $\Omega = [0, 1]^3$, conductivité isotrope $k_f = 10W.m^{-1}.K^{-1}$ pour les fibres et $k_m = 1W.m^{-1}.K^{-1}$ pour la matrice). La fonction indicatrice est séparée au format de Tucker grâce à l'algorithme de minimisations alternées disponible dans la MATLAB[™] Tensor Toolbox (BADER et KOLDA 2011). Le rang de l'approximation (r = (119, 119, 18)) tient compte de la structure quasi-2D de la géométrie. Les algorithmes de construction dans C_r et T_r sont comparés pour le cas périodique avec $\nabla u^M = (1, 0, 0)^T$. La convergence des deux formats est présentée sur la figure 5.30. La figure 5.30a montre que la construction sous format de Tucker converge plus rapidement que la construction canonique (deux fois moins d'itérations pour un résidu de $5 \, 10^{-2}$). Notons tout de même que le coût de cet algorithme est bien plus élevé que celui de l'algorithme canonique. A première vue, il semblerait que ces deux algorithmes convergent très lentement. Ce comportement vient du fait que le résidu n'est pas un indicateur adapté pour notre quantité d'intérêt. En effet, la figure 5.30b montre qu'en pratique, la composante xx du tenseur effectif converge très rapidement. Ce mauvais comportement de l'estimateur d'erreur en résidu est une conséquence caractéristique du mauvais conditionnement de l'opérateur séparé.

5.4.5 Bilan partiel

Au cours de cette section, nous avons étudié les performances des approches d'approximation de tenseurs dans le cadre des calculs sur images de haute résolution. Nous avons pu montrer que les performances de ces méthodes étaient conditionnées par un certain nombre de facteurs :

- la possibilité d'écrire les opérateurs sous forme séparée : les approches de type domaines fictifs permettent une représentation séparée des opérateurs dans le cas linéaire via l'utilisation d'algorithmes adaptés tels que la SVD ou la HOSVD. Le rang de ces opérateurs est alors très dépendant de la géométrie considérée. La fonction indicatrice ainsi obtenue peut être non positive dans certains cas, ce qui peut détériorer la solution localement à cause d'instabilités numériques.
- 2. le format de tenseur considéré : nous avons illustré la grande influence du choix du format



FIGURE 5.30 – Comparaison des algorithmes canonique et Tucker. a. Convergence du résidu en fonction du rang de l'approximation; b. Convergence de \underline{K}_{xx}^h en fonction du rang de l'approximation.

tensoriel utilisé. Le format de tenseur de Tucker est ainsi plus efficace (plus riche) que le format canonique classiquement utilisé avec la PGD. Le coût de sa construction est cependant bien plus élevé. Ce format n'est pas adapté à plus de trois dimensions car il est sensible à la malédiction de la dimensionnalité à cause de son tenseur cœur. L'utilisation de formats hiérarchiques de Tucker (mis en œuvre dans un cadre plus abstrait durant la thèse de Loïc Giraldi) constitue alors un excellent compromis.

- 3. La convergence de la méthode peut être fortement influencée par le contraste des phases, à la manière des approches FFT. Il apparaît aussi que cette influence dépend également du choix de condition aux limites. L'utilisation des préconditionneurs tels que proposés par Loïc Giraldi dans sa thèse permettrait d'améliorer les performances de la méthode, tant pour le format canonique que pour le format de Tucker.
- 4. La détermination d'un indicateur pertinent pour les quantités d'intérêt permettrait de pouvoir stopper l'algorithme de manière robuste. Dans (GIRALDI, NOUY, LEGRAIN et CARTRAUD 2013), il a été proposé d'utiliser un estimateur d'erreur en quantité d'intérêt pour piloter l'algorithme. Cet estimateur est spécifiquement adapté à la PGD et aux quantités d'intérêt rencontrées en homogénéisation.

5.5 Conclusion

Nous avons présenté au cours de ce chapitre mes travaux dans le contexte des structures à géométrie complexe. Des méthodes innovantes ont été proposées dans le but de simplifier le transfert des informations géométriques vers le modèle numérique. C'est un problème d'actualité dans la mesure où la variété des supports des informations géométriques se sont largement diversifiés ces dernières années (CAO, imagerie, informations géographiques...). Nous avons ainsi montré que les méthodes de domaines fictifs enrichis permettent de simplifier cette transition pour les problèmes à CAO complexes ainsi que pour les calculs sur image. La principale limitation de ces méthodes réside dans leur couplage entre approximation et géométrie : la représentation d'une géométrie complexe nécessite de nombreux degrés de liberté indépendamment de la complexité des champs mécaniques. L'amélioration des performances de ces méthodes passe également par l'amélioration de leur ordre de convergence, permettant ainsi d'améliorer la précision à nombre de ddls fixé, mais aussi d'atteindre les niveaux de précision toujours plus strictes exigés par l'industrie. Ces deux problématiques font l'objet du prochain chapitre du manuscrit.

La vérification des résultats de ces calculs est également fondamentale si le but est de proposer des méthodes nécessitant peu d'interaction avec l'utilisateur. Nous avons ainsi validé les performances d'un estimateur d'erreur adapté au contexte de l'étude.

Finalement, nous avons étudié les apports que pourraient constituer les méthodes d'approximation de faible rang (PGD en l'occurrence) pour réduire le coût des problèmes d'homogénéisation en mécanique. Cette piste d'étude n'est malheureusement pas encore assez mature pour constituer une alternative crédible aux approches de type FFT. En particulier, le choix d'un format tensoriel adapté est fondamental dans l'optique d'améliorer les performances de la méthode. La nécessité de séparer les propriétés matériau est également limitante pour des géométries complexes (taux de compression très faible, perte des propriétés de positivité des opérateurs). Se passer de cette phase permettrait d'améliorer grandement les performances (en intégrant de manière efficace la formulation faible sur l'espace non séparé tel que proposé par (LEYGUE 2017)). De plus, la communauté traitant du calcul sur image cherche actuellement à prendre en compte les phénomènes non-linéaires présents aux échelles microscopiques (plasticité, endommagement, contact). Il ne me semble pas que la séparation de variables d'espace soit une réponse pertinente à ces problématiques. En revanche, la prise en compte des incertitudes pour cette classe de problèmes me semble un objectif pertinent. Une première étude en ce sens est proposé en section 6.6.

Notons également que tous mes travaux dans ce domaine n'ont pas été présentés pour des questions de concision. On pourra se référer à la section bibliographique de la notice personnelle (section 2.5).
6.1 Introduction

Bien que robuste, l'utilisation de la méthode X-FEM proposée dans la section précédente peut conduire à des modèles numériques volumineux. En effet, du fait de l'interpolation linéaire par morceaux de la level-set, la représentation fidèle des détails géométriques nécessite l'utilisation d'éléments finis de petite taille, augmentant ainsi le coût du calcul. En outre, la notion de topologie est perdue, ce qui conduit à utiliser ces petits éléments le long de toutes les frontières, même celles à faible courbure. Il serait tout de même possible de limiter le raffinement dans ces zones en tenant compte de la courbure lors de la construction du maillage, mais ce couplage entre géométrie et approximation perdure. Une pratique courante consiste à simplifier le modèle afin d'éliminer ces détails géométriques. Elle a malheureusement une influence négative sur la précision locale et quelques-fois globale des champs mécaniques, ceux-ci étant généralement fortement influencés par les détails géométriques (selon la physique du problème considéré). Les éléments finis (h) - p (Szabó et Babuška 1991) permettent depuis de nombreuses années de découpler géométrie et approximation, et ainsi de garder des éléments grossiers pour représenter la géométrie. La précision des champs mécaniques est alors obtenue par augmentation de leur degré d'approximation. Dans ce cas, des transformations géométriques exactes sont mises en œuvre du fait de la grande sensibilité des méthodes de haut ordre à la précision géométrique (Szabó, Düster et Rank 2004). Ces approches sont extrêmement efficaces : la convergence de la solution numérique des éléments finis h - p est exponentielle, tout comme celle des éléments finis p (mais seulement dans le domaine pré-asymptotique). Cependant, leur utilisation reste confidentielle de part le manque d'expertise des utilisateurs et à cause de limites techniques. La première concerne la génération du maillage qui est encore problématique à l'heure actuelle, et la deuxième provient de la complexité de mise en œuvre pour les méthodes h - p(choix des ordres d'approximation et des tailles de maille). Notons également qu'il a été montré par (Sevilla, Fernández-Méndez et Huerta 2011b) que l'approximation des méthodes (h) - p n'est pas consistante car l'espace d'approximation physique n'est plus polynomial après transfert de la base d'approximation de l'espace de référence vers l'espace physique (si la transformation n'est pas linéaire). Cette perte de consistance conduit à une perte de performance de la méthode dans le cas où la solution est polynomiale (Sevilla, Fernández-Méndez et Huerta 2011b). Sevilla, Fernández-MÉNDEZ et HUERTA (2008) ont ainsi proposé la méthode NE-FEM qui combine représentation exacte de la géométrie et définition des polynômes d'approximation dans l'espace physique : cette dernière particularité permet de préserver la consistance de l'approximation quelle que soit la complexité de la transformation géométrique.

Ce chapitre a pour objectif de montrer que la méthode X-FEM est une bonne candidate dans la recherche d'une méthode d'approximation p consistante et aisée de mise en œuvre (libérée des problématiques de maillage). Tous les travaux présentés ici ont été réalisés à partir de 2010 en autonomie scientifique.

6.2 Séparation de l'approximation et de la géométrie

6.2.1 Approches de domaines fictifs de haut ordre



FIGURE 6.1 – a. Domaine d'intérêt, b. Modèle éléments finis et c. Modèle domaines fictifs.

Les premiers travaux s'attachant à simplifier la phase de maillage en éléments finis datent des années 1960 avec les travaux de SAULÈV (1963) sur les méthodes dites de **domaines fictifs** (GLOWINSKI et KUZNETSOV 2007; LÖHNER et al. 2008; MITTAL et IACCARINO 2005; PESKIN 2002; RAMIÈRE, ANGOT et BELLIARD 2007). Ces méthodes sont basées sur la représentation de la géométrie par une fonction indicatrice qui est utilisée pour restreindre l'intégration de la formulation faible au domaine d'intérêt. Afin d'éviter un système singulier, la fonction indicatrice est modifiée de manière à ce que sa valeur minimale soit faible mais supérieure à zéro (typiquement 10⁻⁷). De plus, elle est aussi régularisée pour son intégration. Ce principe a aussi été utilisé avec les méthodes de **partition de l'unité** (X-FEM et G-FEM) à travers les travaux de STROUBOULIS, COPPS et BABUŠKA (2001) et STROUBOULIS et COPPS (2000) ou de BELYTSCHKO et al. (2003) et SUKUMAR et al. (2001). Notons cependant qu'à la différence des méthodes de domaine fictifs (aussi appelées domaines immergés), il n'est pas question ici d'immerger le domaine dans son ensemble, mais seulement quelques frontières internes à l'exception de (BELYTSCHKO et al. 2003). A la différence des domaines fictifs, ces approches se contentent de restreindre l'intégration dans la zone d'intérêt. D'un point de vue continu, cela revient à utiliser une fonction indicatrice non régularisée dont la discontinuité passe le long des sous-éléments.

Récemment, ces méthodes ont été étendues aux approches de **haut ordre** telles que les éléments finis spectraux ou éléments finis *p*. Concernant les domaines fictifs, nous pouvons citer (DONG et al. 2004; Vos, LOON et SHERWIN 2008) pour les méthodes spectrales ou la méthode Finite Cell (PARVIZIAN, DÜSTER et RANK 2007; DÜSTER, PARIVIZIAN et al. 2008) pour les méthodes *p*. Cette dernière peut être considérée comme hybride entre éléments finis *p* et domaines fictifs : des bases de fonctions hiérarchiques ou B-splines sont définies sur une grille régulière, et l'intégration de la formulation faible est réalisée sur une sous-grille raffinée. Cette méthode a été appliquée à un grand nombre de domaines : élasticité linéaire (PARVIZIAN, DÜSTER et RANK 2007; DÜSTER, PARIVIZIAN et al. 2008; SCHILLINGER et RANK 2011; RANK, KOLLMANNSBERGER et al. 2011), élasticité non-linéaire (SCHILLINGER, DÜSTER et RANK 2012), élasto-plasticité (ABEDIAN et al. 2013), dynamique rapide (JOULAIAN, DUCZEK et al. 2014; ELHADDAD et al. 2015), optimisation topologique (PARVIZIAN, DÜSTER et RANK 2012; CAI et al. 2014), calcul à partir d'image (DÜSTER, SEHLHORST et RANK 2012; HEINZE, JOULAIAN et DÜSTER 2015; RUESS,

TAL et al. 2012; VERHOOSEL et al. 2014), thermo-élasticité (ZANDER, KOLLMANNSBERGER et al. 2012). Bien que reposant initialement sur un raffinement p de l'approximation à maillage fixé, la méthode a ensuite fait usage de raffinements h localisés (SCHILLINGER, DÜSTER et RANK 2012; ZANDER, BOG et al. 2014; ZANDER, RUESS et al. 2016) ou d'enrichissements locaux de type partition de l'unité (JOULAIAN et DÜSTER 2013).

Les premiers travaux en haut ordre pour les méthodes de partition de l'unité ont été conduits par Strouboulis, L. Zhang et Babuška (2003) et Strouboulis, L. Zhang et Babuška (2004), H. W. WANG et BELYTSCHKO (2005). Ces travaux montrent que la difficulté majeure et Legay, provient de la **précision de l'intégration** de la formulation faible. En effet, la précision de la phase d'intégration devient fondamentale dans le cas d'approches de haut ordre pour lesquelles l'erreur d'approximation est très faible. PEREIRA et al. (2009) ont proposé de combiner approches h - pet partition de l'unité pour la mécanique de la rupture, mais en réalité cette approche est plutôt proche des éléments finis p pour lesquels l'ordre des polynômes d'approximation est uniforme sur le maillage, mais avec un maillage raffiné avec une progression géométrique vers la pointe de fissure (Szabó et Babuška 1991)¹. Вуғит et Schröder (2012) présentent une approche totalement h - pbasée sur un estimateur d'erreur adapté. Mis à part ces travaux, d'autres auteurs ont considéré des approches de haut ordre modéré (quadratique voir cubique) (STAZI et al. 2003; LABORDE et al. 2005; CHENG et T.-P. FRIES 2009; DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS 2010b; T.-P. FRIES et OMEROVIĆ 2016). Le cas de LABORDE et al. (2005) est spécifique car les interfaces (fissures) restent planes, permettant ainsi de s'affranchir des problématiques d'intégration. Dans cette partie, nous nous focaliserons sur le développement d'approches éléments finis étendus de très haut ordre. Comme montré dans les travaux cités ci-dessus, la précision de l'intégration devient fondamentale lors de la montée en ordre de la méthode, c'est pourquoi nous nous concentrons sur ce point.

6.2.2 Procédures d'intégration efficaces pour domaines fictifs



FIGURE 6.2 – a. Intégration par subdivision; b. Intégration polygonale; c. Intégration par transformation géométrique; d. Intégration par moment-fitting; e. Intégration par théorème de la divergence.

Considérons Ω_{Box} , un élément-fini de la discrétisation du problème domaines fictifs, à cheval entre l'intérieur et l'extérieur de la matière (élément rouge sur la figure 6.1). L'objectif est d'intégrer précisément la formulation faible sur la zone où est située la matière. En effet, l'erreur d'approximation est très faible pour les approches de haut ordre, et les erreurs d'intégration de la forme faible peuvent rapidement empêcher toute convergence. Pour cela, des intégrales élémentaires du type suivant doivent être évaluées :

$$I = \int_{\Omega} \bullet \, d\Omega = \int_{\Omega_{Box}} \mathcal{I}_{in}(\mathbf{x}) \bullet \, d\Omega \tag{6.1}$$

^{1.} Il a été montré dans (SZABÓ et BABUŠKA 1991) qu'une telle stratégie conduit à une convergence exponentielle de l'approximation dans la zone de convergence pré-asymptotique.

avec $\mathcal{I}_{in}(\mathbf{x})$ la fonction indicatrice du domaine et • la grandeur à intégrer sur le domaine. Cette fonction étant discontinue, des approches spécifiques doivent être considérées. Ces procédures d'intégration peuvent se classer en cinq familles : (i) les règles d'intégration par subdivision, (ii) les règles d'intégration polygonales par subdivision, (iii) les règles d'intégration obtenues par transformation géométrique, (iv) les règles d'intégration polygonales obtenues par moment-fitting et (v) les règles surfaciques. Ces cinq classes de règles d'intégration sont illustrées sur la figure 6.2.

Les méthodes par subdivision (cf. figure 6.2 a.) (PARVIZIAN, DÜSTER et RANK 2007; STROUBOULIS et COPPS 2000) utilisent des règles d'intégration standards qui ne sont adaptées qu'aux intégrants réguliers. L'erreur due à l'intégration de fonctions discontinues est contenue en restreignant l'influence des cellules où \mathcal{I}_{in} varie par subdivision l'élément en cellules d'intégration. Les points d'intégration sont alors classés selon leur position (intérieur ou extérieur). Ces méthodes sont très robustes mais peu efficaces en terme de coût d'intégration.

Les méthodes d'intégration polygonales (cf. figure 6.2 b.) consistent à construire une triangulation locale sur les cellules les plus fines. Une règle d'intégration standard est alors utilisée sur cette triangulation. Contrairement à la première approche, les points d'intégration d'une cellule sont totalement dans ou en dehors de la matière, ce qui permet de mieux maîtriser l'erreur d'intégration. La construction de telles cellules est standard pour les méthodes d'éléments finis étendus, dans le cas où la géométrie est approchée par une level-set. Initialement proposée par GROSS et REUSKEN (2007) en mécanique des fluides pour des éléments de faible ordre, cette méthode a ensuite été utilisée en mécanique du solide par DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS (2010b) et DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS (2010a), LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU (2012) puis VERHOOSEL et al. (2014) avec des approximations de haut ordre.

Ces deux premières classes d'approche ont pour caractéristique commune d'être très robustes mais également peu efficaces en terme de ratio *"précision d'intégration sur nombre de points d'intégration"*, d'autant plus que le nombre de niveaux de subdivision nécessaires dépend du problème et de l'ordre de l'approximation.

Les méthodes d'intégration par transformation géométrique (cf. figure 6.2 c.) permettent de diminuer drastiquement le nombre de points d'intégration, tout en assurant une excellente précision. Pour cela, l'intersection entre la cellule et la surface est tout d'abord triangulée grossièrement. Dans un second temps, une transformation géométrique est appliquée à ces cellules afin de se conformer à la géométrie. Les performances et la robustesse de la méthode dépendent du choix de cette transformation : transformations polynomiales (CHENG et T.-P. FRIES 2009; T.-P. FRIES et OMEROVIĆ 2016) (qui peuvent manquer de robustesse et ne permettent de représenter que des surfaces régulières), transformations exactes de type blending mapping (STROUBOULIS et COPPS 2000; KUDELA, ZANDER, BOG et al. 2015; KUDELA, ZANDER, KOLLMANNSBERGER et al. 2016), transformations exactes de type Nurbs-Enhanced qui permettent la représentation exacte de la géométrie (LEGRAIN 2013; MARCO et al. 2015), même C^0 . Ces approches sont très efficaces, mais tendent à rapprocher ces méthodes non-conformes des méthodes de maillage de haut ordre qui, malgré de récents travaux (Toulorge, Geuzaine et al. 2013; Johnen, Remacle et Geuzaine 2013; Remacle et al. 2014; Toulorge, Lambrechts et Remacle 2015; Johnen, Remacle et Geuzaine 2014) manquent encore de robustesse (spécialement en 3D). Notons enfin une contribution récente de KUDELA, ZANDER, KOLLMANNSBERGER et al. (2016) basée sur une technique de subdivision "intelligente" qui semble prometteuse en terme de précision et de robustesse.

Les règles d'intégration polygonales obtenues par moment-fitting (cf. figure 6.2 d.) (MOUSAVI et SUKUMAR 2010) peuvent être appliquées en supposant les domaines d'intégration polygonaux (MOUSAVI et SUKUMAR 2010; SUDHAKAR et WALL 2013; JOULAIAN, HUBRICH et DÜSTER 2016). Un problème de moindres-carrés non-linéaires est résolu pour obtenir la position des points d'intégration ainsi que leurs poids. Ce problème nécessite le calcul de l'intégrale de fonctions polynomiales sur le domaine d'intégration, ce qui a un coût. De tels algorithmes peuvent conduire à des poids négatifs et des points de quadrature situés en dehors du domaine d'intégration. Si la position des points d'intégration est fixée, alors le problème des moindres carrés devient linéaire. Il faut également noter que ce problème doit être résolu pour chaque cellule d'intégration.

Finalement, les règles surfaciques (cf. figure 6.2 e.) DUCZEK et GABBERT (2015) utilisent le théorème de la divergence afin de transformer les intégrales volumiques en intégrales surfaciques.

Parmi ces stratégies, je me suis principalement concentré sur les approches polygonales de part leur robustesse et leur facilité d'implémentation, mais également sur les approches par transformations géométriques pour leur précision et leur efficacité numérique. Cette première classe de méthodes fera l'objet des sections 6.3 et 6.4, tandis que la deuxième sera présentée dans la section 6.5.

6.3 Approches de domaines fictifs de haut ordre avec intégration polygonale

6.3.1 Influence de la précision de l'intégration

Illustrons tout d'abord les spécificités de l'approche étudiée dans cette section. Pour cela, considérons un domaine infini contenant un trou circulaire en son centre. Ce domaine est soumis à une sollicitation de traction uniaxiale $\sigma_{\infty} = 1$ MPa selon l'axe **x** (voir figure 6.3 a). La solution analytique de ce problème est donnée dans (SUKUMAR et al. 2001) et est utilisée comme solution de référence pour calculer l'erreur d'approximation. Un carré de côté L = 2, mm avec un trou circulaire de a = 0,4 mm est considéré ici, le vecteur contraintes exact étant appliqué sur la frontière du domaine. Le module d'Young du matériau est pris à 1,0 MPa, et le coefficient de Poisson à 0,3. Nous nous restreignons ici à une règle d'intégration polygonale par subdivision (cf. figure 6.2 a.), car cette approche est très polyvalente et robuste.

Le maillage utilisé est composé de $4 \times 4 \times 2$ éléments triangulaires, et l'ordre de l'approximation est augmenté de manière uniforme (convergence *p*). La base polynomiale utilisée est une base de Bernstein (BERNSTEIN 1912). Nous n'utilisons pas ici de base de Lagrange de part son mauvais comportement en terme de conditionnement du système. Citons à ce propos le comparatif de bases polynomiales pour éléments triangulaires présenté dans (ZUMBUSCH 1993). Le nombre de subdivisions² utilisées pour représenter la géométrie varie 3 à 8, et l'influence de ce paramètre est illustrée vis-à-vis de l'erreur relative en norme énergétique sur la figure 6.3 b. On observe dans tous les cas une convergence exponentielle, seule l'étendue de cette zone varie en fonction de la précision géométrique. Moins la géométrie est représentée précisément, plus tôt la convergence exponentielle est perdue (et même la convergence, tout simplement). Cela correspond au moment où l'erreur géométrique domine l'erreur d'approximation. La figure montre aussi clairement l'intérêt du raffinement *p* par rapport aux approches communément utilisées (raffinement *h*). Cette propriété de convergence est restreinte aux problèmes à solution régulière, ou alors nécessite une adaptation du maillage près des singularités. Notons cependant que la convergence *p* n'est atteinte pour des ordres polynomiaux modérés (< 8) que lorsque la taille du trou est proche de la taille des éléments

^{2.} Nombre de subdivisions des éléments d'approximation. Le domaine est subdivisé en 2^2 éléments par côté pour générer les éléments d'approximation et en 2^k ($k = 1, \dots, 8$) éléments par côté pour les cellules d'intégration.



FIGURE 6.3 – Domaine infini avec un trou soumis à une traction uniaxiale : a. Géométrie et maillage d'approximation ; b. Convergence en fonction du nombre de degrés de liberté pour un raffinement p et divers niveaux de subdivision pour l'intégration.

d'approximation (LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU 2012). Nous pouvons donc conclure que la méthode peut être extrêmement efficace en terme de précision et de flexibilité géométrique (pas de maillage), mais que ces bonnes propriétés de convergence requièrent une solution régulière et une très bonne précision géométrique. Cette dernière est pour le moment fixée arbitrairement. Si l'on veut s'assurer de la convergence de l'approche, il est possible en cours de calcul d'estimer la convergence de l'erreur en énergie du problème en utilisant l'estimateur peu coûteux proposé par (SZABÓ et BABUŠKA 1991). Si le taux de convergence devient trop faible, alors le nombre de subdivisions est augmenté.

Si nous nous sommes restreints ici à l'illustration du potentiel et des principales caractéristiques de la méthode, notons également qu'elle a été appliquée à des problèmes d'homogénéisation par imagerie pour micro-structures complexes (LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU 2012; LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017) avec de très bons résultats.

6.3.2 Cas des interfaces matériaux

La méthode étant une méthode de haut ordre, sa convergence est fortement conditionnée par la régularité de la solution. Dans le cas d'interfaces matériaux, par exemple, la solution est seulement C^0 , ce qui rend la convergence algébrique (SZABÓ et BABUŠKA 1991). L'intérêt de la méthode est alors notablement affaibli. Dans l'optique de pouvoir l'appliquer à des problèmes d'homogénéisation, ce défaut est rédhibitoire. Dans (SCHILLINGER, DÜSTER et RANK 2012; JOULAIAN et DÜSTER 2013), les auteurs proposent d'utiliser la méthode h - p - d (RANK 1992) qui consiste à ajouter localement à la solution de haut ordre une solution linéaire définie sur une grille fine. Ce terme complémentaire capte la partie non-régulière de la solution et permet ainsi d'éliminer les oscillations que les auteurs voyaient apparaître aux interfaces entre matériaux. De mon point de vue, une manière plus naturelle pour capter cette non-régularité consiste à utiliser la partition de l'unité et enrichir la solution de haut ordre. Dans (DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS 2010b), il a été proposé d'enrichir la solution par

une fonction dite "ridge" (MOËS, CLOIREC et al. 2003) :

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{i} |\phi^{i}| N^{i}(\mathbf{x}) - \left| \sum_{i} \phi^{i} N^{i}(\mathbf{x}) \right|$$
(6.2)

où les ϕ^i correspondent aux valeurs nodales de la level-set et les $N^i(\mathbf{x})$ les fonctions de forme associées. Cette fonction d'enrichissement permet d'introduire la perte de régularité de la solution à travers les interfaces matériaux (cf. figure 6.4 a.). Il est malheureusement impossible d'utiliser cette fonction dans le cas de level-sets définies par subdivision, car on obtient alors la fonction présentée sur la figure 6.4 b. Cette fonction présente non-seulement une discontinuité de pente le long de l'interface, mais aussi à l'intérieur de l'élément (lignes *AB* et *CD*). Dans (DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS 2010b), des définitions alternatives de la fonction ridge ont été testées sans succès (convergence sous-optimale dans le cas d'interfaces courbes). Néanmoins, comme montré par (SALA-LARDIES et HUERTA 2012; JOULAIAN et DÜSTER 2013), l'enrichissement avec la fonction ridge (6.2) est efficace si une interpolation de haut ordre est utilisée pour la level-set (résultats en contradiction avec (CHENG et T.-P. FRIES 2009)).



FIGURE 6.4 – Différentes définition de la fonction ridge pour une approche par sous-grille. a) Ridge définie sur le maillage grossier; b) Ridge définie sur la sous-grille; c) Définition correcte de la fonction Ridge.

Dans (LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU 2012), j'ai alors proposé une approche efficace et néanmoins utilisable avec une représentation de la géométrie sur une sous-grille. Celle-ci se base sur l'approche Nitsche (NITSCHE 1971; A. HANSBO et P. HANSBO 2004). Cette méthode est largement utilisée dans le cadre des méthodes sans maillages (HUERTA et FERNÁNDEZ-MÉNDEZ 2000; GRIEBEL et SCHWEITZER 2002), X-FEM (A. HANSBO et P. HANSBO 2004; J. E. DOLBOW et HARARI 2009; HARARI et J. DOLBOW 2010; LEGRAIN, ALLAIS et CARTRAUD 2011) mais aussi plus récemment (RUESS, SCHILLINGER et al. 2012; Guo et RUESS 2015; RUESS et Guo 2014; BAIGES et al. 2012). Dans le cas qui nous intéresse ici, une fonction d'enrichissement de type Heaviside est utilisée à travers l'interface matériau, et le saut de déplacement est annulé de manière faible grâce à cette méthode. Il a été prouvé dans (HARARI et J. DOLBOW 2010) que pour une équation elliptique en laplacien des taux de convergence optimaux peuvent être obtenus quel que soit l'ordre de l'approximation (pour peu que la géométrie soit représentée exactement). Dans le cas des interfaces matériaux, la formulation faible du problème d'élasticité s'écrit :

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \int_{\Gamma} \{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \{\delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \, d\Gamma + \beta \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \, d\Gamma = l(\mathbf{v})$$
(6.3)

où $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $l(\mathbf{v})$ sont respectivement les formes bilinéaires et linéaires du problème d'élasticité classique. {•} est l'opérateur de moyenne à travers l'interface et $\llbracket \bullet \rrbracket$ l'opérateur saut. Ici, {•} est défini comme $1/2[\bullet(\mathbf{x}^+) + \bullet(\mathbf{x}^-)]$, et $\llbracket \bullet \rrbracket$ comme $1/2[\bullet(\mathbf{x}^+) - \bullet(\mathbf{x}^-)]$ où $\bullet(\mathbf{x}^+)$ correspond à l'évaluation de • du côté positif de l'interface (i.e. du côté pointé par le vecteur normal) et $\bullet(\mathbf{x}^-)$ pour l'évaluation de • du côté négatif. Comme montré dans (A. HANSBO et P. HANSBO 2004; STENBERG 1995; HARARI et J. DOLBOW 2010), l'approche Nitsche peut être interprétée comme une méthode de multiplicateurs de Lagrange stabilisée (avec multiplicateur condensé), le paramètre β jouant alors le rôle de paramètre

de stabilisation : celle-ci est assurée si la coercivité de la forme bilinéaire totale est vérifiée :

$$\exists C_I > 0 \text{ telle que } \|\{\underline{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\}\|_{\Gamma} \le C_I \|\mathbf{v}\|$$
(6.4)

où $\| \bullet \|$ représente la norme énergétique, et $\| \bullet \|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} \bullet \bullet d\Gamma$. Le paramètre de stabilisation β peut être approché en résolvant un système aux valeurs propres global (sur les ddls des éléments coupés par l'interface) proposé par GRIEBEL et SCHWEITZER (2002), ou de manière locale (i.e. élément par élément) comme proposé par MOURAD, J. E. DOLBOW et HARARI (2007), J. E. DOLBOW et HARARI (2009) et HARARI et J. DOLBOW (2010). Notons également que la qualité des champs locaux peut être significativement dégradée lorsque l'interface coupe les éléments en deux parties de mesures très différentes (BURMAN 2010). De récents travaux ont permis de résoudre cette limitation, tout du moins pour les approximations de faible ordre (BURMAN 2010; ANNAVARAPU, HAUTEFEUILLE et J. E. DOLBOW 2012). Dans cette section, le paramètre de stabilisation est évalué globalement (GRIEBEL et SCHWEITZER 2002).

Illustrons les performances de la méthode pour le domaine infini contenant une inclusion matérielle de forme circulaire présenté dans la section 5.2.2. Le rayon de l'inclusion est ici pris à a = 0.4 mm, et les propriétés matériaux restent inchangées. Le vecteur traction exact est ensuite appliqué sur le bord du domaine de calcul (discrétisé par $4 \times 4 \times 2$ éléments triangulaires). La convergence de la solution éléments finis lors d'un raffinement p ($p = 1 \cdots 9$) est étudiée en fonction de la précision de l'intégration (3 à 8 niveaux de subdivision). Des résultats analogues à ceux obtenus pour les surfaces libres sont observés sur la figure 6.5 : une convergence exponentielle est obtenue jusqu'à ce que l'erreur d'intégration domine. L'influence du contraste entre les phases est également étudiée sur cette même figure, et on observe que multiplier par dix le contraste de phase a peu d'influence sur la vitesse de convergence dans la zone exponentielle, mais une influence visible sur le niveau d'erreur du plateau. Notons qu'il a également été montré dans (LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU 2012; SALA-LARDIES et HUERTA 2012) que l'approche proposée ici permet d'obtenir des convergences optimales en cas de convergence en h.



FIGURE 6.5 – Interfaces matériau : convergence *p* de l'erreur en énergie en fonction du nombre de degrés de liberté. a. Influence de la précision géométrique; b. Influence du contraste.

6.3.3 Bilan partiel

Nous avons illustré ici les caractéristiques d'une stratégie permettant de rendre les approches de haut ordre plus aisées à mettre en œuvre. Cette dernière peut être vue comme la combinaison entre méthodes *p* et domaines fictifs. La convergence exponentielle de la méthode la rend bien plus efficace que les approches standards (de bas ordre) en terme de ratio *"précision par nombre de degrés de liberté"*.

Celle-ci a été appliquée avec succès à l'homogénéisation de micro-structures définies par imagerie, et une stratégie d'enrichissement a permis d'obtenir une convergence optimale dans le cas où la solution n'est pas analytique. Elle nécessite cependant encore un certain nombre d'améliorations. Tout d'abord, la méthode exacerbe les problématiques de conditionnement inhérentes aux approches de domaines fictifs et aux approches de haut ordre. Ensuite, le coût de l'approche reste élevé en ce qui concerne l'intégration de la formulation faible, ce qui explique les nombreuses contributions dans ce domaine. Le plus grand challenge est à mon sens de réussir à devenir une alternative crédible aux éléments finis standards. Pas dans tous les domaines, mais pour certaines niches. La plus prometteuse est la résolution automatisée de problèmes d'élasticité linéaire. Ainsi, la méthode pourrait être intégrée dans les boucles de conception en bureau d'étude. La deuxième application prometteuse s'inscrit dans les approches de rétro-conception pour lesquelles un simple scan surfacique permettrait d'obtenir les spécificités mécaniques de structures réelles. Le calcul sur image est aussi une application prometteuse, mais il est difficile d'être compétitif vis-à-vis des approches FFT, sauf dans le cas où les contraintes locales sont les quantités d'intérêt ou lorsque l'on ne cherche pas une solution périodique. Enfin, le traitement de problèmes non-linéaires tels que la plasticité ne pourront être crédibles que si le coût de l'intégration est maîtrisé.

6.4 Formulations d'ordre élevé pour les structures minces

Nous avons vu dans la section 5.2.1 que la méthode X-FEM pouvait être utilisée pour simplifier le processus de simulation de structures aéronautiques complexes. Il a cependant été montré que la représentation géométrique de la structure pouvait nécessiter l'utilisation de maillages très fins et ainsi augmenter le coût de calcul (avec cependant l'effet bénéfique de limiter les problèmes de verrouillage en cisaillement). Nous nous trouvons dans le cas typique où la finesse du maillage d'approximation est dictée par des contraintes géométriques plus que mécaniques. S'inspirant des idées développées dans (Rank, Düster et al. 2005; Rank, Kollmannsberger et al. 2011) et disposant d'une nouvelle approche permettant de séparer géométrie et approximation, nous nous sommes proposés d'étendre l'approche de la section précédente aux structures minces. L'utilisation d'approximations de haut ordre est toute indiquée ici, dans la mesure où les champs contraintes dans les structures minces (modèles de Kirchhoff-Love ou Reissner-Mindlin) sont au pire paraboliques (i.e. déplacement cubique). Les modèles de plus haut ordre requièrent quant à eux des champs plus riches (SZABÓ et BABUŠKA 1991; RANK, DÜSTER et al. 2005). Les approches de subdivision présentées dans la section précédente ne peuvent raisonnablement être utilisées car ces structures sont en général très fines et à faible courbure (cf. figure 6.6). On observe clairement que le coût d'intégration sera prohibitif pour de telles géométries.



FIGURE 6.6 – Problématique d'intégration pour les structures de faible courbure (gauche) et très minces (droite).

Nous nous sommes proposés de développer une approche efficace pour ce type de structures, avec pour objectif d'être une alternative crédible aux approches de coques solides (ABED-MERAIM et COMBESCURE 2002), sans problématique de maillage et à même de représenter les comportements non-linéaires dans l'épaisseur des coques avec une loi de comportement tridimensionnelle. La problématique principale provient du coût de l'intégration, ce qui avait conduit RANK, KOLLMANNSBERGER et al. (2011) à n'utiliser l'approche que dans le plan moyen de la structure. L'idée développée ici se base sur la **construction efficace d'un maillage support pour la géométrie et l'intégration**. Dans le cas qui nous intéresse, la géométrie est représentée par une fonction level-set $\phi(\mathbf{x})$. Cette dernière est alors interpolée sur le maillage géométrique. C'est cette interpolation $\phi^h(\mathbf{x})$ de la géométrie qui est utilisée pour définir les cellules d'intégration. La qualité de cette interpolation dépend directement de la finesse et de la topologie du maillage géométrique. Le maillage dit optimal est donc celui qui minimise l'erreur d'interpolation de la level-set. Il est par exemple évident qu'un maillage allongé selon les directions de faible courbure sera plus efficace pour représenter les surfaces. Nous considérerons ici les approches de maillage anisotrope pour construire ces maillages optimaux.

6.4.1 Procédures de maillage anisotrope

Soit *K*, un maillage de simplexes, $u(\mathbf{x})$ un champ donné et $\Pi_h u$ son interpolé sur la triangulation. Il est possible de montrer que l'erreur d'interpolation est bornée selon la relation suivante (FREY et ALAUZET 2005) :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \le c \max_{x \in K} \max_{\mathbf{e} \in E_K} \langle \mathbf{e}, |H_u(x)|\mathbf{e} \rangle$$
(6.5)

où $H_u(x)$ est le hessien de u, $\mathbf{e} \in E_K$ sont les bords des éléments du maillage et c une constante. Le maximum sur $|H_u(x)|$ cause cependant des difficultés. Plutôt que d'utiliser le hessien, il est plus aisé d'utiliser un tenseur métrique $\mathcal{M}(K)$ défini sur K de manière à majorer $|H_u(x)|$:

$$\max_{x \in K} \langle \mathbf{e}, |H_u(x)|\mathbf{e} \rangle \le \langle \mathbf{e}, \mathcal{M}(K)\mathbf{e} \rangle \quad \forall \mathbf{e} \in E_K$$
(6.6)

Si $\mathcal{M}(K)$ est connu, alors on obtient la borne explicite suivante :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \le c \max_{\mathbf{e} \in E_K} \langle \mathbf{e}, \mathcal{M}(K) \mathbf{e} \rangle$$
(6.7)

L'objectif du processus d'adaptation consiste à répartir de manière uniforme l'erreur ε sur le maillage. Si le tenseur métrique $\mathcal{M}(K)$ est supposé connu, alors il suffit de considérer le tenseur $\tilde{\mathcal{M}}(K)$:

$$\tilde{\mathcal{M}}(K) = \frac{c}{\varepsilon} \mathcal{M}(K) \tag{6.8}$$

il est alors aisé de transformer (6.7) en :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty,K} \le \varepsilon \max_{\mathbf{e} \in E_K} l^2_{\tilde{\mathcal{M}}(K)}(\mathbf{e})$$
(6.9)

où $l^2_{\tilde{\mathcal{M}}(K)}(\mathbf{e}) = \langle \mathbf{e}, \mathcal{M}(K) \mathbf{e} \rangle$ représente la longueur du segment \mathbf{e} selon la métrique. S'il est possible de construire un maillage tel que $\forall \mathbf{e} \in E_k$, $l^2_{\tilde{\mathcal{M}}(K)} = 1$, alors on obtient $||u - \prod_h u||_{\infty,K} \leq \varepsilon$. Ainsi, le maillage optimal est celui dont les segments ont une longueur unitaire selon la métrique $\tilde{\mathcal{M}}(K)$.

De nombreuses stratégies ont été proposées pour construire de manière efficace cette métrique. Nous considérerons ici l'approche proposée par COUPEZ (2011) et COUPEZ, SILVA et HACHEM (2015). L'originalité de cette approche provient du fait qu'elle est particulièrement adaptée au cas des level-sets et qu'elle se base sur un estimateur d'erreur sur les bords des éléments plutôt que sur l'élément lui-même. En pratique, au lieu de chercher à capturer explicitement l'iso-zéro de la level-set, l'approche est basée sur une fonction dont l'erreur est localisée le long de l'iso-zéro (la fonction Heaviside par exemple). Il a été montré dans (COUPEZ, SILVA et HACHEM 2015) que la fonction Heaviside n'est pas un bon choix à cause de son manque de régularité. Une fonction Heaviside régularisée est donc utilisée à la place :

$$u_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varepsilon \tanh\left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{\varepsilon}\right) \tag{6.10}$$

Un exemple de régularisation est présenté sur la figure 6.7. Remarquons que ces fonctions sont régulières (C^{∞}), qu'elles ne varient que près de l'iso-zero (dans une bande dont la largeur est de l'ordre de ε) et qu'elles tendent vers ϕ en approchant de l'iso-zéro (i.e. la position de l'iso-zéro n'est pas modifiée par la régularisation). Grâce aux propriétés de cette fonction, l'erreur d'interpolation



FIGURE 6.7 – Fonction level-set ϕ et diverses régularisations u_{ε} .

est restreinte près de l'iso-zéro (nous ne sommes pas intéressés par une approximation précise de $\phi(x)$ sur le reste du domaine). Ces propriétés sont utilisées pour orienter la procédure d'adaptation de maillage anisotrope. Deux illustrations d'adaptation de maillage basées sur l'approche précédente sont présentées sur la figure 6.8

6.4.2 Liaison entre géométrie et approximation

Les maillages obtenus sont optimaux en terme de représentation géométrique de l'interface. Cependant, à la différence des approches d'intégration par subdivision, le maillage n'est pas emboîté dans le maillage d'approximation (voir figure 6.9(a)). Nous focalisant sur des maillages d'approximation quadrangulaires ou hexahédraux, il est aisé de construire un maillage géométrique emboîté : la structure géométrique du maillage est utilisée pour couper ce dernier selon les directions des mailles (voir figure 6.9(b)). Cette opération peut être réalisée efficacement en réutilisant les routines de découpe des level-sets. Elles pourraient également être facilement étendues aux maillages octree. Finalement, les cellules d'intégration ne sont gardées que pour les éléments d'approximation contenant la surface libre du problème (figure 6.9(c)).

6.4.3 Exemple de vérification : Toiture de Scordelis-Lo

L'approche est maintenant vérifiée³ pour un exemple standard de calcul sur plaques et coques. D'autres exemples de vérification sont également présentés dans (LEGRAIN et MOËS 2017).

^{3.} Le terme vérification est à prendre ici comme dans Validation des modèles & Vérification des calculs.



FIGURE 6.8 – Exemples d'adaptation de maillage anisotrope pour des structures minces et à faible courbure.



FIGURE 6.9 – a. Maillage d'approximation (lignes épaisses) et maillage d'intégration (lignes fines); b. Maillage d'intégration découpé; c. Cellules d'intégration résultantes.

Considérons la toiture de Scordelis-Lo (MACNEAL et HARDER 1985) sous poids propre qui est présentée sur la figure 6.10. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont tirées de (RANK, DÜSTER et al. 2005). Nous cherchons à résoudre ce problème avec l'approche présentée ci-dessus et étudier sa robustesse.



FIGURE 6.10 – Toiture de Scordelis-Lo sous poids propre : a. données du problème; b. géométrie approchée et maillage d'approximation.

Les symétries du problème permettent de ne considérer qu'un quart du modèle. Les diaphragmes sont considérés comme rigides et le paramètre de régularisation de l'algorithme d'adaptation est fixé à $5 \, 10^{-2}$ (40 fois plus fin que l'épaisseur du toit). Le maillage obtenu contient 18 150 nœuds et est présenté sur la figure 6.11 a.



FIGURE 6.11 – Maillage géométrique anisotrope.

Le maillage d'approximation ainsi que l'iso-zéro de la level-set représentant la géométrie sont illustrés sur la figure 6.10 b : remarquons à quel point il est grossier par rapport au problème considéré.

Une convergence p ($p = 1 \cdots 5$) est considérée. L'énergie de déformation ainsi que le déplacement du point A (voir figure 6.10 a) sont étudiés. Deux maillages de calcul sont considérés : un premier comportant $2 \times 2 \times 2$ éléments (cf figure 6.10 b) et un second comprenant $8 \times 8 \times 8$ éléments. Le

déplacement vertical du point *A* est comparé à une valeur de référence (MACNEAL et HARDER 1985), tandis que l'énergie de déformation est comparée aux résultats de (RANK, DÜSTER et al. 2005). L'évolution de la déformée lors de la montée en ordre est présentée sur la figure 6.12.



FIGURE 6.12 – Configuration déformée de la toiture de Scordelis-Lo pour p = 1, 2 et 3.

L'évolution du déplacement au point *A* est présentée sur la figure 6.13(a) : même le maillage le plus grossier converge vers la solution de référence y compris pour de faibles degrés polynomiaux (cubique) et avec moins de 2000 ddls. La convergence de l'erreur relative sur l'énergie de déformation est quant-à elle très satisfaisante dans la mesure où de très faibles niveaux d'erreur sont obtenus avec une convergence quasi-exponentielle dans la zone pré-asymptotique.



FIGURE 6.13 – Toiture de Scordelis-Lo : a. Convergence de $U_z(A)$; b. Convergence de l'énergie de déformation.

6.4.4 Bilan partiel

Une approche immergée de haut ordre a été développée pour les problèmes de structures minces. L'efficacité algorithmique de la méthode repose sur une représentation de la level-set sur un maillage adapté de manière anisotrope. Ce maillage tient compte des spécificités de la géométrie à représenter et permet ainsi d'améliorer grandement le coût de l'intégration des approches par subdivision et polygonales grâce à l'allongement des éléments dans les directions de faible courbure (cf. (LEGRAIN et MOËS 2017) pour une étude détaillée). Notons également qu'il est possible d'améliorer l'efficacité

de la méthode en ne gardant que les éléments de la narrow-band (i.e. la couche d'éléments coupés par l'iso-zéro) et en triangulant le domaine restant. Une telle approche permet également de capter la présence de détails de faible dimension (structures minces, mais aussi trous ou inclusions) sans pour autant avoir à considérer un nombre de subdivisions trop élevé. La construction du maillage anisotrope est cependant plus coûteuse que celle du maillage par subdivision, mais ses meilleures qualités d'approximation géométrique et son faible coût d'intégration la rendent attractive. Dans certains cas cependant, nous avons été confrontés à des problèmes de conditionnement (cf. (LEGRAIN et MOËS 2017)), mais cette problématique n'est pas propre à notre approche.

6.5 Approche domaines fictifs avec représentation géométrique exacte

Nous avons pu mettre en évidence dans les sections précédentes que l'une des principales limitations de la méthode proposée ici se situait au niveau du coût de l'intégration de la forme faible. De plus, il existe des applications pour lesquelles une dégradation de la géométrie du problème peut amener à une solution totalement différente de la solution attendue (problèmes de diffraction électro-magnétique par exemple). Je me suis donc intéressé dans (LEGRAIN 2013) à une méthode permettant de combiner domaines fictifs et haut ordre, mais avec un faible coût d'intégration et une représentation exacte de la géométrie. La méthode s'inspire de la méthode NEFEM (SEVILLA, FERNÁNDEZ-MÉNDEZ et HUERTA 2008), qui peut être vue comme une alternative aux approches iso-géométriques (T. J. R. HUGHES, COTTRELL et BAZILEVS 2005). La méthode se fonde sur le standard de la représentation B-REP en CAO, en l'occurrence les surfaces paramétrées à base de NURBS et de B-Splines.

6.5.1 Surface, courbe NURBS

Présentation

Une NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) d'ordre p, C, est une fonction rationnelle paramétrée par morceaux définie comme :

$$\mathcal{C}(t) = \sum_{i=1}^{n_{cp}} R_i^p(t) \mathbf{B}_i, \quad t \in [t_a, t_b]$$
(6.11)

Dans cette expression, les **B**_i sont les coordonnées des n_{cp} points de contrôle définissant la courbe. L'interpolation linéaire par morceaux des points de contrôle est appelée *polygone de contrôle*. Les fonctions paramétriques $R_i^p(t)$ sont rationnelles et définies à partir de bases de B-Splines d'ordre p, $N_k^p(t)$. La régularité de la courbe est arbitraire : de C^{p-1} à C^{-1} . Les images de ces points de moindre régularité dans l'espace paramétrique sont appelées points de rupture. Notons aussi qu'en général les courbes et surfaces NURBS sont *trimées*, ce qui consiste à réduire la paramétrisation sur un sous-intervalle de l'espace paramétrique initial. En 2D, l'espace paramétrique peut être *trimé* par une courbe NURBS dans l'espace paramétrique.

Discrétisation géométrique

Dans le processus de calcul, la représentation paramétrique de la géométrie doit être discrétisée pour générer le maillage (que ce soit un maillage d'intégration comme dans le cas qui nous intéresse ou directement le maillage de calcul). Selon l'approche utilisée, la fidélité de la géométrie peut être sérieusement affectée de part la nature rationnelle des surfaces. C'est le cas en particulier lorsqu'une approximation polynomiale de bas degré est utilisée. Comme évoqué précédemment, l'utilisation d'approches de haut ordre nécessite une grande précision géométrique si l'on veut être certain de résoudre le problème mathématique initial (SZABÓ, DÜSTER et RANK 2004) (par exemple, une

approximation linéaire par morceaux de surfaces courbes produira des singularités lors de la montée en ordre).

Dans le cas qui nous intéresse, trois possibilités peuvent être envisagées : (i) les transformations iso-parametriques (Ergatoudis, Irons et Zienkiewicz 1968; Zienkiewicz et R. L. Taylor 1991), (ii) les transformations transfinies (*blending function mapping*) (Szabó et Babuška 1991) et plus récemment (iii) les transformations NURBS-Enhanced (Sevilla, Fernández-Méndez et Huerta 2008; Sevilla, Fernández-Méndez et Huerta 2011a). Une comparaison détaillée de ces approches dans le cadre éléments finis est présentée dans (Sevilla, Fernández-Méndez et Huerta 2011b).

Il est également possible de considérer les approches iso-géométriques (IGA) (T. J. R. HUGHES, COTTRELL et BAZILEVS 2005; COTTRELL, T. J. R. HUGHES et BAZILEVS 2009) pour lesquelles les fonctions NURBS sont utilisées pour la représentation géométrique (exacte), mais aussi pour approcher les champs inconnus. Notons que cette approche n'a aucun intérêt pour les approches développées ici car nous cherchons précisément à séparer représentation géométrique et description des champs mécaniques (pour lesquels il est tout de même possible d'utiliser des bases de B-Splines comme dans (W. JIANG et J. E. DOLBOW 2015; SANCHES, BORNEMANN et CIRAK 2011; SCHILLINGER et RANK 2011)). Enfin, il est important de préciser que les modeleurs CAO ne travaillent que sur la paramétrisation de la surface alors que les approches IGA nécessitent la connaissance de la paramétrisation du volume de la pièce. Cette difficulté a donné lieu à de nombreux travaux pour palier ces difficultés (AL-AKHRAS 2015; Y. J. ZHANG, W. WANG et T. J. R. HUGHES 2013; W. WANG, Y. J. ZHANG et al. 2013; L. LIU, Y. J. ZHANG et WEI 2015).

Nous nous focalisons donc ici sur la construction de règles d'intégration exactes pour les approches par domaines fictifs, telles que présentées sur la figure 6.2 c.

6.5.2 Présentation de la stratégie

Nous nous restreignons au cas bidimensionnel et considérons un élément triangulaire du maillage d'approximation, traversé par une interface C(t) définie dans un espace paramétrique $[t_a, t_b]$ (cf figure 6.14.1). L'objectif consiste à générer des éléments d'intégration représentant exactement la géométrie de la découpe de l'élément surfacique triangulaire par la ligne C(t). La stratégie est basée



FIGURE 6.14 – Processus de construction des sous-éléments NURBS-enhanced.

sur les quatre étapes suivantes (la numérotation suit celle de la figure 6.14) :

1. Détection des éléments coupés par l'interface. Cette étape fait appel à des calculs d'intersection entre les bords des éléments du maillage et la courbe paramétrée. Elle ne fait intervenir que des calculs d'intersection NURBS - segment qui sont des opérations maîtrisées de manière robuste par les librairies CAO (ici, la librairie SISL (SINTEF 2016)). Aucune distance ne doit être calculée, ce qui est bénéfique d'un point de vue robustesse car les calculs de distances sont

des problèmes non-linéaires qui peuvent être problématiques à faire converger en fonction de leur initialisation;

- 2. Construction des intersections entre C(t) et les bords de l'élément (• sur la figure 6.14.2). Durant ce calcul, le domaine paramétrique balayé par la courbe à l'intérieur de l'élément est déterminé;
- 3. Construction des sous-éléments linéaires basés sur les points d'intersection (Figure 6.14.3). Dans le cas présenté ici, deux des trois sous-éléments seront courbés (triangles bleu et rouge sur la figure 6.14.3).
- 4. Finalement la transformation géométrique est appliquée à ces éléments pour les courber *exactement* sur la courbe paramétrique et ainsi construire une règle d'intégration adaptée (figure 6.14.4).

Durant ces étapes, la validité des sous-éléments est vérifiée. En particulier, les bords des éléments ne peuvent s'intersecter (voir la figure 6.15a.). Dans ce cas, les diagonales du quadrilatère sont échangées de manière à générer des éléments acceptables (figure 6.15b.). Dans l'éventualité où la courbure de l'interface serait trop grande pour que l'échange des diagonales ne règle le problème (figure 6.16), l'élément d'intégration est découpé récursivement jusqu'à ce que tous ses sous-éléments soient valides. La méthode résultante est donc toujours une approximation domaines fictifs définie sur une grille d'éléments sous-paramétriques, quelle que soit la complexité de la géométrie. Les problématiques de complétude (*completeness*) inhérentes aux éléments finis *p* sont donc évitées. Il est cependant important de noter que les transformations géométriques utilisées pour les sous-éléments sont rationnelles. Il n'est donc pas possible de les intégrer exactement (tout comme pour les éléments finis iso-paramétriques) : l'utilisation d'un nombre suffisant de points d'intégration permet de s'assurer que cette source d'erreur est maîtrisée.



FIGURE 6.15 – Vérification de la validité des sous-éléments NURBS-enhanced : a. Le sous-élément rouge est non valide; b. Inversion des diagonales pour assurer la validité.



FIGURE 6.16 – Procédure de subdivision récursive des sous-éléments.

Transformation NURBS-enhanced pour éléments coupés

Nous détaillons maintenant le choix de la transformation utilisée pour les sous-éléments coupés par l'interface. Trois approches peuvent-être considérées : (i) les transformations polynomiales ; (ii) les transformations transfinies ; (iii) les transformations NURBS-enhanced. La première famille de transformations est l'une des briques de base des méthodes des éléments finis *-paramétriques⁴. La génération de nœuds sur l'interface permet de définir une transformation polynomiale entre un élément de référence et le sous-élément considéré (figure 6.17). Ce type de transformation ne peut représenter exactement les géométries rationnelles et peut être sensible à la position des nœuds sur l'interface lorsque le degré de l'interpolation augmente. Dans ce cas, il est plus judicieux d'utiliser la transformation proposée par KIRÁLYFALVI et SZABÓ (1997), basée sur les points de Q. CHEN et BABUŠKA (1995). Les avantages et inconvénients des deux autres transformations géométriques sont



FIGURE 6.17 – Transformation polynomiale quadratique.

assez semblables dans la mesure où toutes deux permettent une représentation exacte de la géométrie. Comme montré dans (SEVILLA, FERNÁNDEZ-MÉNDEZ et HUERTA 2011b), les transformations transfinies définies sur triangles ne sont pas flexibles en terme de prise en compte des points de rupture à l'intérieur d'un élément (ils introduisent des discontinuités dans les dérivées de la courbe C, cf figure 6.18 a). Dans ce cas, KUDELA, ZANDER, BOG et al. (2015) propose d'utiliser des transformations quadrangulaires dégénérées et de placer deux éléments pour rejeter le point de rupture sur la frontière de l'élément (à la manière des stratégies utilisées pour mailler classiquement les structures), cf figure 6.18 b. La transformation NURBS-enhanced est quant à elle plus flexible et permet de traiter ce cas de figure de manière totalement transparente (cf figure 6.18 c) mais aussi le cas des surfaces trimées. Nous nous proposons donc de détailler cette approche. Lors de la construction de la transformation sur un élément, l'étendue de l'espace paramétrique balayé à l'intérieur de l'élément est connu : $t \in [t_1^e, t_2^e]$. L'élément est l'image de l'espace de référence $(t \times \theta) \in [t_1^e, t_2^e] \times [0, 1]$ et la transformation s'écrit

$$\boldsymbol{\psi}(t,\theta) = (1-\theta)\mathcal{C}(t) + \theta \mathbf{x}_3 \tag{6.12}$$

Notons que la numérotation des nœuds est spécifique, mais peut être obtenue aisément (x_3 est le nœud opposé à C(t)). Les caractéristiques principales de cette transformation sont les suivantes :

 Cette transformation fait apparaître une séparation claire entre les directions paramétrique et intérieure, ce qui donne plus de flexibilité pour choisir les règles d'intégration (l'influence de la NURBS est restreinte à la variable *t*);

^{4.} iso-paramétriques, super-paramétriques et sous-paramétriques



FIGURE 6.18 – Cas d'une perte de régularité de la surface. a. Géométrie, b. Approche de (KUDELA, ZANDER, BOG et al. 2015), c. Approche Nurbs-Enhanced.

- La transformation géométrique ψ est linéaire en fonction de θ , et donc toutes les intégrales selon cette direction peuvent être évaluées exactement avec p + 1 points dans le cas d'éléments de degré p.
- Si des points de rupture t_i^b ($i = 1 \cdots n_b$) sont placés entre $[t_1^e, t_2^e]$ (cf Figure 6.19(b)), la règle d'intégration est définie par sous-intervalles : $[t_1^e, t_1^b], [t_1^b, t_2^b] \cdots [t_{i-1}^b, t_i^b] \cdots [t_{n_e}^b, t_2^e]$;
- Dans le cas de surfaces définies par B-Splines, l'intégration de la formulation faible peut être exacte alors qu'elle n'est qu'approchée pour les surfaces NURBS (qui sont rationnelles). Dans ce cas, le nombre de points d'intégration est augmenté (SEVILLA et FERNÁNDEZ-MÉNDEZ 2011).



FIGURE 6.19 – a. Transformation NURBS-Enhanced; b. Règle d'intégration dans le cas de points de rupture (représentés par des □).

Illustration

Nous illustrons l'approche pour deux géométries. La première, présentée sur la figure 6.20 représente une plaque contenant un trou circulaire en son centre. De gauche à droite, on peut observer a. le maillage ainsi que la surface du trou (NURBS); b. les sous-éléments avant application de la transformation NEFEM et c., d. la répartition des points d'intégration situés à l'intérieur du

domaine (pour une approximation de degré 13). Dans un second temps, une clé de serrage est considérée (cf figure 6.21). Cette géométrie est exigeante car elle comporte une grande variété de courbes : segments, courbes et coins. Les éléments contenant de la matière sont grisés : ils définissent le maillage d'approximation. On observe également sur la figure 6.21 b la position des points d'intégration (pour une approximation de degré 9). Notons la forme spécifique de certains des éléments d'intégration qui ne pourrait être représentée avec des transformations conventionnelles. Pour ces deux exemples, le calcul de l'erreur sur la surface du modèle initial est de l'ordre de la précision machine.



FIGURE 6.20 – Domaine carré contenant un trou circulaire. a. Maillage et courbe NURBS du trou; b. Maillage et sous-éléments; c. Points d'intégration dans le domaine; d. Zoom.



FIGURE 6.21 – Clef. a. Géometrie, maillage (en gris : éléments d'approximation) et points d'intégration ; b. Zoom.

6.5.3 Applications

Considérons de nouveau le cas de la plaque infinie trouée présentée dans la section 6.3. Cette fois-ci, seul un quart de la plaque est considéré. Deux études de convergences sont réalisées (de 2 à 32 éléments par côté pour la convergence *h* et de p = 1 à p = 12 sur un maillage à 9 éléments par côté pour la convergence *p*). Les résultats de ces études sont présentés sur la figure 6.22. La convergence *h* fait apparaître une évolution algébrique de l'erreur, comme prédit par la théorie. Nous observons que les taux de convergence sont quasi-optimaux. La plus faible convergence pour l'approximation de degré 6 est en partie due à des difficultés d'intégration (le niveau d'erreur relative sur le domaine varie entre 10^{-15} et 10^{-11}). La convergence *p* fait apparaître une convergence exponentielle (car la solution est analytique), sans plateau comme pour l'intégration sub-grid et avec un nombre de points



d'intégration bien inférieur (voir à ce propos (KUDELA, ZANDER, BOG et al. 2015, Fig.19)). Le cas des

FIGURE 6.22 – Plaque infinie trouée : convergences h et p.

interfaces matériau a été traité dans (LEGRAIN 2013, Section 4.3) en utilisant l'approche Corrected X-FEM (T.-P. FRIES 2008). Des taux de convergence optimaux sont alors obtenus quel que soit le type de convergence. L'intérêt de coupler la méthode avec des enrichissements dans le cas de coins rentrants est aussi évoqué car la méthode permet de les représenter aisément, ce qui n'est pas le cas des stratégies par subdivision. L'approche peut également se combiner à la méthode par subdivision : cette dernière est particulièrement adaptée à la représentation de détails mobiles tels que des fissures (DRÉAU, CHEVAUGEON et MOËS 2010a). De mon point de vue, il n'est pas pertinent de représenter de tels objets géométriques par des NURBS dans la mesure où leur régularité géométrique ne le justifie pas en pratique. A titre d'exemple, le cas de la clé de serrage présentée plus haut est considéré, mais en y insérant une fissure représentée par level-sets (cf figure 6.23 a).



FIGURE 6.23 – Clef fissurée : a. géométrie et conditions aux limites ; b. norme de Von-Mises du champ de contraintes sur la configuration déformée.

6.5.4 Bilan partiel

Nous avons présenté ici une approche immergée basée sur une représentation exacte de la géométrie. Cette dernière est très efficace d'un point de vue coût de calcul si elle est comparée aux approches par subdivision (et même par rapport à l'approche anisotrope). Par rapport aux approches p, la méthode élimine les problèmes de consistance qui proviennent de la transformation des fonctions de formes de l'espace de référence à l'espace physique. La méthode permet en outre de représenter exactement les mouvements de corps rigides à la différence des approches p. Les

vérifications proposées dans (LEGRAIN 2013) illustrent également les performances de la méthode pour des inclusions et des structures à géométrie complexe. Citons aussi les travaux de KUDELA, ZANDER, BOG et al. (2015) qui illustrent les performances de ce type de méthode en mettant l'accent sur le coût de la procédure d'intégration. L'extension de la méthode au 3D a été étudiée par MARCO et al. (2015) avec de très bons résultats pour des géométries académiques. Toute la problématique de l'extension à des géométries complexes tridimensionnelles vient de la difficulté à proposer des algorithmes robustes pour les cas particuliers ou dégénérés. Nous nous retrouvons donc confrontés à des problématiques analogues à celles rencontrées en génération de maillage qui font intervenir de nombreuses solutions empiriques (ce qui n'est pas le cas pour les approches par subdivision et anisotrope). KUDELA, ZANDER, KOLLMANNSBERGER et al. (2016) semblent avoir trouvé une approche robuste en 3D, bien qu'il soit encore trop tôt pour en juger.

6.6 Prise en compte des incertitudes en homogénéisation

6.6.1 Motivation

La bio-mécanique est une des applications privilégiées du calcul à partir d'images. Son développement date des années 90 (KEYAK, MEAGHER et al. 1990; KEYAK, I. LEE et SKINNER 1994), avec pour objectif de construire des modèles personnalisés pour les patients atteints d'ostéoporose. Les prédictions des modèles personnalisés sont généralement utilisées comme aide au choix pour les praticiens hospitaliers (choix de réaliser ou non une intervention chirurgicale), mais aussi pour améliorer la compréhension des relations entre la morphologie des os et leurs performances biomécaniques. Dans le contexte des implants orthopédiques, ces approches sont également utilisées pour concevoir et optimiser les implants (Bongini, Carfagni et Governi 2000; Dick et al. 2009). Les méthodes telles que celles présentées dans les paragraphes 5.2, 6.1 et 5.4.4 sont très précises mais présupposent néanmoins les propriétés mécaniques connues. Or, il est admis que les propriétés mécaniques tissus biologiques ont une très grande variabilité (Вазакиддия, Такано et Nakano 2015). Cette variabilité a plusieurs sources : (i) les incertitudes géométriques dûes au procédé d'acquisition, au traitement d'image et à la discrétisation; (ii) les incertitudes sur les propriétés mécaniques dues aux variations inter-individus, mais aussi intra-individus selon le site biologique de l'os considéré (vertèbre, mâchoire, tibias...); (iii) les incertitudes expérimentales dues à la préparation des échantillons, aux conditions expérimentales de l'essai et à la précision des capteurs. Dans cette section, basée sur (LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017), nous ne prendrons en compte que l'influence des incertitudes des propriétés matériaux sur les propriétés effectives de l'os. Cette influence est de première importance pour les modèles personnalisés pour lesquels la connaissance précise des propriétés du calcium constituant l'os sont délicates à obtenir. En outre, il s'avère que les incertitudes géométriques sont essentiellement liées à la résolution spatiale des images d'entrée. Celle-ci sera donc considérée comme suffisante par la suite.

Les incertitudes sur les propriétés matériaux sont généralement prises en compte à travers la géométrie de la micro-structure (forme des inclusions), puis propagées dans le modèle homogénéisé par des méthodes de Monte-Carlo. Dans ce cas, la méthode X-FEM est attrayante, d'où son utilisation par (HIRIYUR, WAISMAN et DEODATIS 2011) et (SAVVAS et al. 2014) pour étudier les statistiques des propriétés effectives de matériaux en fonction de la répartition et de la forme d'inclusions matérielles. Dans le contexte éléments finis, KANIT, FOREST et al. (2003) ont proposé des approches statistiques pour déterminer la taille du volume élémentaire ainsi que les propriétés homogénéisées de composites à micro-structure aléatoire. HUET (1990) et OSTOJA-STARZEWSKI (2006) proposent également des bornes mathématiques sur les statistiques des propriétés effectives de matériaux aléatoires et à VER sous-échantillonné. Ces approches ne considèrent que les incertitudes géométriques sans se préoccuper des incertitudes sur les propriétés matériaux. BASARUDDIN, TAKANO et NAKANO (2015)

ont cependant étudié l'influence des incertitudes géométriques et matériaux dans le cas de modèles personnalisés. La méthode de perturbation utilisée dans ces travaux restreint leur cadre d'application aux faibles variabilités. Enfin, (WILLE, RANK et YOSIBASH 2012) étudient également la propagation d'incertitudes matériaux sur la réponse mécanique de fémurs. L'approche proposée se fonde sur l'écriture de la réponse sous forme d'une réponse déterministe modulée par une fonction stochastique identifiée grâce à une campagne d'essais.

L'objectif des travaux présentés dans (LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017) était de proposer une approche robuste et efficace pour prédire les propriétés effectives de modèles personnalisés dans le cas où les incertitudes sur les propriétés matériaux font apparaître de grandes variations. Ce problème est exigeant pour plusieurs raisons : (i) les modèles déterministes sont complexes géométriquement et coûteux à résoudre de part leur grande résolution; (ii) la quantification d'incertitudes est en générale coûteuse, d'autant plus que la variabilité des propriétés matériaux est élevée ici et (iii) aucune information n'est disponible pour valider le modèle⁵. L'approche proposée se fonde sur les différents travaux présentés dans cette habilitation.

6.6.2 Approche de réduction de modèle pour des calculs d'homogénéisation stochastique

La première problématique est résolue par l'utilisation des approches X-FEM de haut ordre présentées au chapitre 6.1. Une étude de convergence a priori des composantes C_{ij} du tenseur homogénéisé (basée sur les travaux de (GUEDES et al. 1990)) a permis de montrer que celle-ci était exponentielle pour les éléments finis p. Il est ainsi possible de converger vers ces valeurs à moindre coût, libéré des problématiques de maillage (ce qui est très utile dans les cas où de multiples simulations doivent être réalisées). La deuxième problématique est traitée par l'utilisation de méthodes de propagation d'incertitudes basées sur les éléments finis stochastiques, reconnus pour leur robustesse mais aussi leur coût. Une méthode de réduction de modèle basée sur la PGD est alors utilisée pour palier cette limitation. Enfin, la troisième problématique est prise en compte par l'utilisation de méthodes adaptatives permettant d'estimer la convergence de la quantité d'intérêt.

Convergence des propriétés homogénéisées

Comme présenté dans (Legrain, Chevreuil et Takano 2017), il est possible de montrer que la convergence des composantes $C_{ij}^{h,p}$ du tenseur effectif s'écrivent

$$\|e_i\|_E = a(\mathbf{u}_i^{h,p} - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^{h,p} - \mathbf{u}_i)^{1/2} \le Ch^p \simeq \tilde{C}N^{-p/dim} \quad \text{pour les éléments finis } h,$$
(6.13)

$$\leq k / \exp(\gamma N^{\theta})$$
 pour les éléments finis *p* (6.14)

Il a alors été proposé d'estimer l'erreur sur ces quantités par des estimateurs d'erreurs de type extrapolation proposés dans (SZABÓ et BABUŠKA 1991) et ayant fait leur preuve dans le cadre des éléments finis *p*. Ces approches se basent sur une séquence de trois solutions afin d'obtenir une estimation de l'erreur. Elles sont certes, moins efficaces que les approches d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt proposées dans (GUEDES et al. 1990; VERHOOSEL et al. 2014; GIRALDI, NOUY, LEGRAIN et CARTRAUD 2013), mais aussi bien moins coûteuses car ces méthodes d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt nécessitent la résolution de 6 à 21 problèmes additionnels respectivement en 2D et en 3D. Il a malheureusement été montré que dans la gamme de degrés de liberté caractéristique des problèmes auxquels nous nous intéressons, l'efficacité de l'estimateur par extrapolation n'est pas très bonne pour les composantes hors diagonale du tenseur des propriétés effectives (oscillations de

^{5.} Le terme *vérification* est à prendre ici comme dans *Validation & Vérification* des modèles.

l'indice d'efficacité) (LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017). L'application de l'estimateur à la norme 2 du tenseur des propriétés effectives permet cependant de retrouver sa robustesse. Souhaitant nous assurer de la convergence de toutes les composantes du tenseur effectif, l'estimateur a été remplacé par un test de stagnation de ses composantes (indicateur d'erreur p/p - 1).

Éléments Finis Stochastiques

Plutôt que d'utiliser des approches de quantification d'incertitudes comme Monte-Carlo (très coûteuse, faible convergence en $O(1/\sqrt{N_{\text{échantillons}}}))$, ou la méthode des perturbations (KLEIBER et HIEN 1994; BASARUDDIN, TAKANO et NAKANO 2015; FALSONE et IMPOLLONIA 2002) (satisfaisante pour de faibles variabilités), nous avons choisi d'utiliser une approche fonctionnelle des incertitudes (GHANEM et SPANOS 1991; XIU 2009; NOUY 2009; MATTHIES 2008). Les incertitudes sont paramétrées par un ensemble de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ qui sont les paramètres aléatoires du modèle (module d'Young et coefficient de Poisson dans notre cas). Ces variables aléatoires sont associées à un espace probabiliste ($\Theta, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}}$) où $\Theta \in \mathbb{R}^r$ est l'intervalle de variation de $\boldsymbol{\xi}, \mathcal{B}$ est la σ -algebre associée et $P_{\boldsymbol{\xi}}$ la mesure de probabilité de $\boldsymbol{\xi}$. Ces méthodes permettent d'obtenir une représentation explicite de la réponse du modèle aux variables du problème. Cela permet un posttraitement rapide de la solution (enveloppes, sensibilités ...). La formulation faible semi-discrétisée associée s'écrit : Trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}^{\Xi}$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \boldsymbol{\xi}) = b(\mathbf{v}; \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0^{\Xi}$$
(6.15)

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est le champ de déplacement aléatoire inconnu et *a* et *b* représentent respectivement les formes bilinéaires et linéaires du problème :

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v};\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) : \mathbb{C}(\boldsymbol{\xi}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \tag{6.16}$$

$$b(\mathbf{v};\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}.\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}.\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma.$$
(6.17)

Dans ces expressions, $\mathbb{C}(\boldsymbol{\xi})$ est le tenseur de Hooke aléatoire, $\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})$ est une force volumique aléatoire et $\mathbf{T}(\boldsymbol{\xi})$ le vecteur force aléatoire imposé sur $\partial \Omega_N \in \partial \Omega$. Si les variables aléatoires sont suffisamment régulières, la solution de (6.15) est cherchée dans $L^2(\Theta, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}}; \mathcal{V})$ l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable définies sur l'espace de probabilité $(\Theta, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$ à valeur dans $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$. Notons que cet espace peut s'identifier à l'espace produit tensoriel $\mathcal{V} \otimes S$, avec $S = L^2(\Theta, \mathcal{B}, P_{\boldsymbol{\xi}})$ l'espace des variables aléatoires de second ordre. L'approximation éléments finis de la solution est obtenue en cherchant solution et fonction test dans l'espace de dimension finie $\mathcal{V}^N \subset \mathcal{V}$ tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \approx \mathbf{u}^{h,p}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^{N} u^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{N}^{\alpha}(\mathbf{x})$$
(6.18)

où $\{\mathbf{N}^{\alpha}\}_{\alpha=1}^{N}$ est la base éléments finis de \mathcal{V}^{N} et u^{α} sont les N degrés de liberté. Les méthodes spectrales stochastiques proposent d'approcher les degrés de liberté $u^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ selon la forme suivante :

$$u^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \approx \sum_{k=1}^{p} u_{k}^{\alpha} H_{k}(\boldsymbol{\xi})$$
(6.19)

où $\{H_k(\boldsymbol{\xi})\}_{k=1}^p$ est une base multi-dimensionnelle à r paramètres (ξ_1, \dots, ξ_r) de l'espace $S^P \subset S$ (par exemple le chaos polynomial (Ghanem et Spanos 1991; Xiu 2009), polynômes définis par morceaux, ou ondelettes (Deb, Babuška et Oden 2001; Le Maître et al. 2004; Wan et Karniadakis 2005)). Les

coefficients de cette expansion peuvent être déterminés en écrivant la formulation faible stochastique (6.15) : Chercher $\mathbf{u}^{h,p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}^N \otimes \mathcal{S}^P$ tel que :

$$A(\mathbf{u}^{h,p},\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^N \otimes \mathcal{S}^P$$
(6.20)

où :

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = Exp\left(a(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}); \boldsymbol{\xi})\right), \qquad (6.21)$$

$$B(\mathbf{v}) = Exp\left(b(\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}); \boldsymbol{\xi})\right), \tag{6.22}$$

avec $Exp(\bullet) = \int_{\Theta} \bullet dP_{\xi}$ l'espérance mathématique. Le système linéaire correspondant contient $N \times P$ équations, où $N = \dim(\mathcal{V}^N)$ et $P = \dim(\mathcal{S}^P)$ peuvent être grands tous les deux. La méthode des éléments finis stochastiques est donc très coûteuse. Pour de grands problèmes déterministes comme ceux classiquement rencontrés en calcul sur image, cette approche requiert des ressources informatiques importantes. Nous retrouvons là encore la malédiction de la dimensionnalité qui motive l'utilisation de méthodes de réduction de modèle pour résoudre le problème stochastique.

Réduction de modèle

Nous venons de voir que la solution appartient à l'espace tensoriel $\mathcal{V} \otimes S$ il est donc naturel de chercher la solution sous format séparé. Cette approche a pour la première fois été présentée par Noux (2008) sous l'appellation GSD (Generalized Spectral Decomposition). L'idée est ici de séparer dimensions spatiales et stochastiques :

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\lambda_i(\boldsymbol{\xi})$$
(6.23)

où les $\mathbf{w}_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}^N$ sont appelés modes déterministes, les $\lambda_i \in \mathcal{S}^P$ modes stochastiques et *m* est le rang (supposé faible) de l'approximation. Cette représentation séparée peut être construite de manière progressive en prenant pour norme $A(\bullet, \bullet)$ et en appliquant l'algorithme d'approximation canonique (cf section 5.4.3). Dans le cas où les variables aléatoires sont indépendantes nous avons (ξ_1, \dots, ξ_r) avec $\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_r$ et $dP_{\xi} = dP_{\xi_1} \dots dP_{\xi_r}$. Nous pouvons donc écrire $\mathcal{S}^P = \mathcal{S}^{P_1} \otimes \mathcal{S}^{P_2} \dots \otimes \mathcal{S}^{P_r}$ et la solution est cherchée sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\phi_i^1(\boldsymbol{\xi}_1)\cdots\phi_i^r(\boldsymbol{\xi}_r).$$
(6.24)

Il est ainsi possible de chercher un modèle réduit, même dans le cas où de grandes discrétisations sont utilisées sur chacun de ces espaces. La mise en oeuvre de l'algorithme de minimisations alternées présenté section 5.4.3 conduit alors à la résolution de problèmes déterministes de taille N et de collections de r problèmes stochastiques de taille P_i ($i = 1 \cdots r$), avec r = 2 pour cette étude. Là encore, le problème doit pouvoir être écrit sous format tensoriel, ce qui est le cas ici (cf. (LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017, Annexe)). Aucune adaptativité n'est considérée au niveau stochastique car ces résolutions ne représentent que deux problèmes 1D : leur coût est négligeable devant celui du problème déterministe.

6.6.3 Application à une micro-structure 3D réelle

Les vérifications de la méthode sont présentées dans (LEGRAIN, CHEVREUIL et TAKANO 2017). Nous nous contenterons ici d'illustrer cette stratégie sur une application réaliste, sachant que les vérifications menées dans l'article sus-cité ont montré une convergence exponentielle des grandeurs

stochastiques du problème.

Considérons une micro-structure osseuse (cf. figure 6.24) de fraction volumique égale à 0,1382. La géométrie (129³ voxels) est obtenue en suivant l'approche détaillée dans la section 5.2.2. La tomographie brute est mise à disposition par l'Istituti Ortopedici Rizzoli de Bologne en Italie. Les propriétés



FIGURE 6.24 – Géométrie de l'os.

effectives sont obtenues par une approche de type KUBC (cf. 5.5). Le matériau est considéré comme élastique linéaire, mais ses propriétés sont aléatoires. Elles suivent des lois de probabilité uniformes (d'autres types de lois pourraient être considérées) : $E \in \mathcal{U}(5000, 15000)$ MPa et $\nu \in \mathcal{U}(0,32, 0,48)$. Le degré de l'approximation est augmenté jusqu'à stagnation de l'espérance et de la déviation standard des propriétés effectives $\frac{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p})_{ij}-\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p-1})_{ij}}{|\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p-1})_{ij}|} < \varepsilon_a$ et $\frac{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p-1})_{ij}-\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p-1})_{ij}}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{h,p-1})_{ij}} < \varepsilon_r$, avec $\mathcal{F}(\bullet) = Exp(\bullet)$ ou $Std(\bullet)$ et $\varepsilon_r = 510^{-2}$ et $\varepsilon_a = 510^{-4}$. Ce niveau de précision est atteint pour p = 6 avec m = 13 modes PGD. L'évolution de $||\mathcal{C}||_2$ et de certaines des composantes du tenseur durant le raffinement p est présentée dans la figure 6.25 a. Nous pouvons observer que la dispersion est plus grande pour les composantes diagonales du tenseur effectif. L'espérance de C_{33} (729 Mpa) est cohérente avec les résultats de la littérature. La déviation standard est quant à elle plus faible que celle obtenue dans les essais de (KEYAK, I. LEE et SKINNER 1994), mais toute comparaison est délicate dans la mesure où l'amplitude de la variabilité a été choisie de manière totalement arbitraire (aucune calibration vis-à-vis de données expérimentales). De plus, il est à noter que les résultats présentés dans (KEYAK, I. LEE et SKINNER 1994) sont basés sur un grand nombre de donneurs d'ages différents ⁶ et incluent également les incertitudes liées aux essais.

Finalement, la précision du modèle réduit est étudiée en comparant les tenseurs effectifs obtenus par le modèle réduit à ceux obtenus par calcul éléments finis pour un échantillon de 100 valeurs de *E* et ν . La distribution des erreurs entre ces couples d'échantillons est représentée sur la figure 6.25 b : nous observons une erreur maximale très satisfaisante de l'ordre de $1,510^{-4}$. Finalement, le modèle réduit est utilisé pour construire une densité de probabilité empirique en le particularisant sur 10000 échantillons (à un coût quasiment négligeable). Ces distributions sont présentées à titre d'illustration pour quelques composantes du tenseur sur la figure 6.26.

6.6.4 Bilan partiel

L'approche proposée dans cette section fait usage des approches de réduction de modèle ainsi que des méthodes de haut ordre développées dans ce chapitre afin d'évaluer les propriétés effectives

^{6.} LADD et al. (1998) montre que ce facteur peut avoir une grande influence.



FIGURE 6.25 – Exemple 3D : a. Évolution de quelques composantes de Exp(C) ainsi que de leur dispersion durant la procédure ; b. Distribution de l'erreur $\epsilon(C^{PGD}, C^{MC})$ pour 100 évaluations aléatoires.



FIGURE 6.26 – Densités de probabilité empiriques des composantes de C (axe horizontal en MPa).

de matériaux du vivant. Pour cela, les effets de l'incertitude sur les propriétés des matériaux sont pris en compte. Nous avons démontré que cette méthode était robuste et efficace via de nombreuses vérifications. Il sera maintenant pertinent de considérer deux points complémentaires :

- la confrontation de la méthode à des résultats expérimentaux. Pour cela, il faudra dans un premier temps être capable de prendre en compte des lois de probabilité plus réalistes que celle considérée ici (log-normale par exemple). En outre, cette loi de probabilité devrait être identifiée à travers une campagne d'essais.
- la prise en compte des incertitudes géométriques dues à la procédure d'acquisition ainsi qu'aux traitements d'images subséquents. En s'inspirant des stratégies proposées par (ВАЗАRUDDIN, ТАКАNO et NAKANO 2015) et (STEFANOU, NOUY et CLEMENT 2009), il serait possible d'identifier une level-set aléatoire pour représenter la géométrie osseuse. Cette procédure permettrait de prendre en compte les aléas matériaux, mais aussi géométriques.

6.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé, implémenté, analysé les performances d'une approche numérique de haut ordre, mais libérée, délivrée des problématiques de maillage. Celle-ci peut être vue comme une méthode d'éléments finis *p* non-conformes géométriquement. Ses principaux points forts sont ses propriétés de convergence exponentielle et sa flexibilité géométrique. Lors de mes travaux, j'ai étudié les propriétés de cette méthode, évalué ses performances pour le calcul sur

image LEGRAIN, CHEVAUGEON et DRÉAU (2012) et proposé des améliorations pour le cas de solutions moins régulières que requis par la théorie LEGRAIN et Moës (2014) (non présenté ici). J'ai également proposé des stratégies pour diminuer les coûts d'intégration (LEGRAIN 2013; LEGRAIN et Moës 2017). La méthode basée sur l'adaptation de maillage anisotrope permet d'optimiser la forme des cellules d'intégration en fonction de la géométrie, alors que l'utilisation d'une transformation NEFEM permet de représenter exactement la géométrie en sortie de CAO. Finalement, une utilisation de la méthode pour représenter les structures minces a été proposée. Il a été montré que l'approche a le potentiel pour devenir une alternative crédible aux méthodes de coques solides.

Concernant les perspectives à donner à ces études, elles me semblent nombreuses. D'un point de vue applications, certaines non envisagées à ce jour me sembleraient pertinentes : la principale concerne le domaine de l'acoustique et de l'électro-magnétisme où les éléments finis *p* sont reconnus pour leurs bonnes performances. Là aussi, l'utilisation d'enrichissements permettrait d'améliorer l'efficacité de la méthode. Les applications possibles sont les problématiques de signature radar ou sonar de structures complexes et l'amélioration des installations portuaires.

D'un point de vue technique, de nombreux verrous doivent également être levés. Le principal d'entre eux concerne le coût de l'intégration. Les approches d'intégration par transformations géométriques sont les plus attractives, mais soulèvent des problématiques de maillage non encore solutionnées. Une collaboration avec des spécialistes du maillage permettrait peut-être d'obtenir une approche robuste et géométriquement exacte.

Un autre angle d'attaque possible consisterait à améliorer les approches d'intégration polygonales, soit en s'inspirant des approches de moment-fitting, soit en les couplant avec des estimateurs d'erreur géométrique et d'approximation permettant ainsi d'obtenir une approche de type LOD⁷. La finesse de la grille d'intégration serait ainsi changée dynamiquement en fonction du degré de l'approximation et de la position.

Le but est de rendre la méthode suffisamment efficace et robuste pour envisager une utilisation automatique. Il a en effet été montré dans de nombreux travaux (SZABÓ et BABUŠKA 1991; DEMKOWICZ 2006; HUERTA, ANGELOSKI et al. 2013) que les méthodes p et h - p étaient plus efficaces que les méthodes de faible ordre et cela même pour des niveaux de précision ingénieur (HUERTA, ANGELOSKI et al. 2013). Plusieurs points devraient alors être menés plus avant : (i) le couplage de la méthode avec des estimateurs d'erreurs performants en haut ordre et pour les méthodes enrichies; (ii) la détermination des tailles de maille et des champs de degrés polynomiaux optimaux. De nombreuses propositions ont été récemment évaluées dans les travaux de (MITCHELL et McCLAIN 2014) permettant ainsi de sélectionner le critère le plus adapté.

Enfin, les problèmes non-linéaires n'ont pour l'instant été que peu évalués (tant pour les méthodes de type Finite Cell que *p*-FEM) (DÜSTER et RANK 2001; ABEDIAN et al. 2013). Ces études se bornent en général à montrer que les résultats obtenus sont analogues à ceux obtenus par des codes standards. Seuls (DÜSTER et RANK 2001) prêtent attention aux aspects performances, mais sans étudier les problématiques de convergence (qui doivent certainement être algébriques à cause de la perte de régularité de la solution). L'utilisation de stratégies d'enrichissement permettraient à mon sens de palier ce problème.

^{7.} Level of Detail, cf approches de modélisation 3D temps réel. Lien wikipedia

Conclusion - perspectives

Au cours de ce manuscrit, nous avons parcouru une partie de mes contributions au développement d'approches numériques innovantes pour l'endommagement, la rupture et les structures à géométrie complexe. Ces travaux sont à l'interface entre méthodes numériques, modélisation mécanique et mathématiques appliquées. Malgré dix années passées à développer ces thématiques, un grand nombre des outils présentés dans ce manuscrit ne tiendront leurs promesses que d'ici quelques années. Les approches illustrées dans la section 4 permettront alors d'envisager simuler de manière robuste et efficace les problèmes de rupture et d'homogénéisation des matériaux hyper-élastiques. Les applications en bio-mécanique de ces algorithmes sont prometteuses. L'utilisation de la méthode Thick Level Set permettra également de caractériser avec précision la durée de vie des enceintes de confinement. Les travaux présentés dans la section 5 ont d'ores et déjà permis de proposer une approche intégrée permettant de prendre en compte des géométries complexes obtenues par imagerie. Son extension en haut ordre présentée section 6.1 pose un certain nombre de fondations, mais nécessitera des années pour en tirer le plein potentiel.

Les perspectives à ces différents travaux ne peuvent toutes être placées sur le même plan. Il est à mon sens plus pertinent de les classer par ambition :

- A court terme : il me semble "rapidement" envisageable de proposer des contributions à la rupture des matériaux hyper-élastiques. Les applications se situent au niveau de la planification pré-opératoire. Pour cela, il sera nécessaire de s'appuyer sur des méthodes de construction de fonctions d'enrichissement numériques. Pour ce qui est de l'endommagement des structures, le couplage de la méthode TLS avec des approches d'adaptation de maillage anisotropes permettront à coup sûr d'améliorer significativement son efficacité en 3D. Il me semble également pertinent de terminer et publier mes travaux sur l'estimation d'erreur pour les méthodes de partition de l'unité. L'extension de ces approches en haut ordre est également un point fondamental pour le long terme. L'application de ces méthodes à la vibro-acoustique est également prometteuse dans le cadre de problématiques de signature acoustique et pour le domaine des transports. L'approche d'homogénéisation stochastique présentée dans le dernier chapitre devra tout d'abord être validée vis-à-vis de campagnes d'essais, puis le coût de l'approche diminué en ce qui concerne le problème déterministe. Enfin, je pense que la démocratisation de l'utilisation de la méthode TLS passera par la simplification de l'interfaçage entre codes industriels et codes de recherche. J'ai en effet eu l'occasion de manipuler des algorithmes de couplages non-intrusifs évolués lors de ma participation à l'ANR Icare.
- A moyen terme : l'extension des approches de haut ordre à la plasticité (tout en maintenant son efficacité) est fondamentale pour que la méthode puisse sortir des applications à moindre valeur ajoutée. Dans ce cas, la méthode peut trouver un intérêt certain via le développement d'approches adaptatives *h p* non conformes. Pour cela, s'assurer de sa robustesse et de son efficacité numérique est fondamental. Pour les approches d'homogénéisation stochastique,

7 Conclusion - perspectives

la prise en compte d'incertitudes géométriques en plus des incertitudes matériau rendra la méthode plus robuste vis-à-vis des incertitudes d'acquisition qui peuvent être grandes.

A long terme : L'extension de la méthode TLS à l'élasticité non-linéaire rendra possible la simulation de phénomènes complexes pour les problématiques bio-mécaniques par exemple. La robustesse et l'efficacité des approches de haut ordre devra enfin être assurée.

Bibliographie

- ABEDIAN, A., J. PARVIZIAN, A. DÜSTER et E. RANK (2013). "The finite cell method for the J2 flow theory of plasticity". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 69.2007, p. 37–47. ISSN : 0168874X. DOI: 10.1016/j.finel.2013.01.006 (cf. p. 110, 136).
- ABED-MERAIM, F. et A. COMBESCURE (2002). "SHB8PS—a new adaptative, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis". In : *Computers & Structures* 80.9-10, p. 791–803. ISSN : 00457949. DOI : 10.1016/S0045-7949(02)00047-0 (cf. p. 73, 118).
- AL-AKHRAS, H. (2015). "Isogeometric Analysis Suitable Trivariate NURBS Models from Standard B-Rep CAD". In : USNCCM 13 (cf. p. 124).
- ALAM, S. Y., J. SALIBA et A. LOUKILI (2012). "Study of evolution of fracture process zone in concrete by simultaneous application of digital image correlation and acoustic emission". In : *VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures* FraMCoS-8, p. 1–9 (cf. p. 63).
- ALLAIS, R. (2012). "Développement de deux estimateurs d'erreur a posteriori pour la méthode X-FEM". Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, p. 179 (cf. p. 87, 91–94).
- AMMAR, A., B. MOKDAD, F. CHINESTA et R. KEUNINGS (2006). "A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids". In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 139.3, p. 153–176. ISSN : 03770257. DOI : 10.1016/j.jnnfm.2006.07.007 (cf. p. 95).
- ANNAVARAPU, C., M. HAUTEFEUILLE et J. E. DOLBOW (2012). "A robust Nitsche's formulation for interface problems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 225-228, p. 44–54. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2012.03.008 (cf. p. 116).
- ANSYS INC. (2016). Ansys (cf. p. 71).
- ARBENZ, P., G. H. VAN LENTHE, U. MENNEL, R. MÜLLER et M. SALA (2008). "A scalable multi-level preconditioner for matrix-free micro-finite element analysis of human bone structures". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73.7, p. 927–947. DOI : DOI : 10.1002/ nme.2101 (cf. p. 84).
- ARNOLD, D., F. BREZZI et M. FORTIN (1984). "Stable finite element for stokes equations". In : *Calcolo* 21, p. 337–344 (cf. p. 49).
- AURICCHIO, F., L. BEIRÃO DA VEIGA, C. LOVADINA, A. REALI et L. B. da VEIGA (2005). "A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.9-11, p. 1075–1092. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2004.06.014 (cf. p. 47).
- BABUŠKA, I. et U. BANERJEE (2012). "Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201-204.null, p. 91–111. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2011.09.012 (cf. p. 94).
- BABUŠKA, I. et A. MILLER (1987). "A feedback finite element method with a posteriori error estimation : Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 61.1, p. 1–40. ISSN : 0045-7825. DOI : DOI : 10.1016/0045-7825(87)90114-9 (cf. p. 89).
- BABUŠKA, I. et W. RHEINBOLDT (1978a). "A-posteriori error estimates for the finite element method". In : International Journal for Numerical Methods In Engineering 12.10, p. 1597–1615. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1620121010 (cf. p. 89).
- (1978b). "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 15.4, p. 736–754. ISSN : 00361429 (cf. p. 89, 90).
- (1979). "Analysis of optimal finite-element meshes in R1". In : *Math. Comp.* 33, p. 435–463 (cf. p. 89).
 ВАВИЎКА, І., Т. STROUBOULIS et С. S. С. UPADHYAY (1994). "A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise
- uniform grids of triangles". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 114.3-4, p. 307–378. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(94)90177-5 (cf. p. 90).
- BADER, B. W. et T. G. KOLDA (2011). Matlab tensor toolbox version 2.4. Rapp. tech. (cf. p. 105).
- BAIGES, J., R. CODINA, F. HENKE, S. SHAHMIRI et W. A. WALL (2012). "A symmetric method for weakly imposing Dirichlet boundary conditions in embedded finite element meshes". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* March, p. 636–658. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 115).
- BARENBLATT, G. (1961). "the Mathematical Theory of Equilibrium Cracks Formed in Brittle Fracture". In : *Reports* 30.3, p. 233–238. ISSN : 01489062. DOI : 10.1016/0148-9062(93)92726-7. arXiv : S0065-2156(08)70121-2 (cf. p. 45).
- BASARUDDIN, K. S., N. TAKANO et T. NAKANO (2015). "Stochastic multi-scale prediction on the apparent elastic moduli of trabecular bone considering uncertainties of biological apatite (BAp) crystallite orientation and image-based modelling." In : *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering* 18.2, p. 162–174. ISSN : 1476-8259. DOI : 10.1080/10255842.2013.785537 (cf. p. 80, 130, 132, 135).
- BÉCHET, É., H. MINNEBO, N. MOËS et B. BURGARDT (2005). "Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 64.8, p. 1033–1056. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.1386 (cf. p. 51, 52, 94).
- BECKER, R., E. BURMAN et P. HANSBO (2008). "A Nitsche extended finite element method for incompressible elasticity with discontinuous modulus of elasticity". In : *Chalmers PrePrint* 198.41-44, p. 3352–3360. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2009.06.017 (cf. p. 50).
- BELYTSCHKO, T., C. PARIMI, N. MOËS, N. SUKUMAR et S. USUI (2003). "Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56.4, p. 609–635. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.686 (cf. p. 110).
- BENTLEY, J. L. (1975). "Multidimensional binary search trees used for associative searching". In : *Communications of the ACM* 18.9, p. 509–517. ISSN : 00010782. DOI : 10.1145/361002.361007 (cf. p. 74).
- BERNARD, P.-E., N. MOËS et N. CHEVAUGEON (2012). "Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 233-236.0, p. 11–27. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma. 2012.02.020 (cf. p. 61–64).
- BERNSTEIN, S. (1912). "Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités". In : *Comm. Soc. Math. Kharkov* 13.1, p. 1–2 (cf. p. 113).
- BONGINI, D., M. CARFAGNI et L. GOVERNI (2000). "Hippin : A semiautomatic computer program for selecting hip prosthesis femoral components". In : *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 63.2, p. 105–115. ISSN : 01692607. DOI : 10.1016/S0169-2607(00)00078-X (cf. p. 80, 130).

- BORDAS, S. P. A., M. DUFLOT et P. LE (2008). "A simple error estimator for extended finite elements". In : *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24.11, p. 961–971. ISSN : 1099-0887. DOI : 10.1002/cnm (cf. p. 90, 91).
- BOTTONI, M., F. DUFOUR et C. GIRY (2015). "Topological search of the crack pattern from a continuum mechanical computation". In : *Engineering Structures* 99, p. 346–359. ISSN : 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.05.005 (cf. p. 58, 60).
- BOULENOUAR, A., N. BENSEDDIQ, M. MERZOUG, N. BENAMARA et M. MAZARI (2016). "A Strain Energy Density Theory For Mixed Mode Crack Propagation In Rubber-Like Materials". In : *Journal* of Theoretical and Applied Mechanics, p. 1417–1431. DOI: 10.15632/jtam-pl.54.4.1417 (cf. p. 68).
- BOYAVAL, S., C. LE BRIS, T. LELIÈVRE, Y. MADAY, N. C. NGUYEN et A. T. PATERA (2010). "Reduced Basis Techniques for Stochastic Problems". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17.4, p. 435–454. ISSN : 11343060. DOI : 10.1007/s11831-010-9056-z. arXiv : 1004.0357 (cf. p. 97).
- BOYD, S. K. et R. MULLER (2006). "Smooth surface meshing for automated finite element model generation from 3D image data". In : *Journal of Biomechanics* 39.7, p. 1287–1295 (cf. p. 84).
- BREZZI, F. et M. FORTIN (1991). Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer, New York (cf. p. 48, 49).
- BURMAN, E. (2010). "Ghost penalty". In : Comptes Rendus Mathematique 348.21-22, p. 1217–1220. ISSN : 1631073X. DOI : 10.1016/j.crma.2010.10.006 (cf. p. 116).
- BYFUT, A. et A. SCHRÖDER (2012). "hp-adaptive extended finite element method". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89.11, p. 1392–1418. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme. 3293 (cf. p. 111).
- CAI, S., W. ZHANG, J. ZHU et T. GAO (2014). "Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh : A B-spline finite cell method combined with level set function". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 278, p. 361–387. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma. 2014.06.007 (cf. p. 110).
- CAMACHO, D. L. A., R. H. HOPPER, G. M. LIN et B. S. MYERS (1997). "An improved method for finite element mesh generation of geometrically complex structures with application to the skullbase". In : *Journal of Biomechanics* 30.10, p. 1067–1070. ISSN : 0021-9290. DOI : DOI : 10 . 1016 / S0021 9290(97)00073-0 (cf. p. 84, 86).
- CARSTENSEN, C. et S. A. FUNKEN (2000). "onstants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori estimates in finite element methods". In : *East-West J. Numer. Math* 8.3, p. 153–175 (cf. p. 90).
- CARSTENSEN, C. et J. THIELE (2008). "Partition of unity for localization in implicita posteriori finite element error control for linear elasticity". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73.1, p. 71–95. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2056 (cf. p. 90).
- CAZES, F., M. CORET, A. COMBESCURE et A. GRAVOUIL (2009). "A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model". In : *International Journal of Solids and Structures* 46.6, p. 1476–1490 (cf. p. 66).
- CAZES, F. et N. MOËS (2015). "Comparison of a phase-field model and of a thick level set model for brittle and quasi-brittle fracture". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.February, p. 114–143. ISSN : 0743-1619. DOI : 10.1002/nme. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 61, 62).
- CEBRAL, J. R. et R. LÖHNER (2001). "From medical images to anatomically accurate finite element grids". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 51.8, p. 985–1008 (cf. p. 84).
- CHAPELLE, D. et K.-J. BATHE (1993). "The inf-sup test". In : *Computers & structures* 47.4-5, p. 537–545. DOI: doi:10.1016/0045-7949(93)90340-J (cf. p. 49).
- CHARRAS, G. T. et R. E. GULDBERG (2000). "Improving the local solution accuracy of large-scale digital image-based finite element analyses". In : *Journal of Biomechanics* 33.2, p. 255–259. ISSN : 0021-9290. DOI : DOI : 10.1016/S0021-9290(99)00141-4 (cf. p. 84).

- CHEN, P., A. QUARTERONI et G. ROZZA (2014). "Comparison Between Reduced Basis and Stochastic Collocation Methods for Elliptic Problems". In : *Journal of Scientific Computing* 59.1, p. 187–216. ISSN : 1573-7691. DOI : 10.1007/s10915-013-9764-2 (cf. p. 97).
- CHEN, Q. et I. BABUŠKA (1995). "Approximate optimal points for polynomial interpolation real functions in an interval and in a triangle". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 7825.95 (cf. p. 126).
- CHENG, K. W. et T.-P. FRIES (2009). "Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 82.5, p. 564–590. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2768 (cf. p. 111, 112, 115).
- CHINESTA, F., A. AMMAR, F. LEMARCHAND, P. BEAUCHENE et F. BOUST (2008). "Alleviating mesh constraints : Model reduction, parallel time integration and high resolution homogenization". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.5, p. 400–413. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2007.07.022 (cf. p. 96, 101).
- CHINESTA, F., R. KEUNINGS et A. LEYGUE (2013). *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations : a primer*. Springer Science & Business Media (cf. p. 95, 97).
- COFFMAN, V. R., A. C. E. REID, S. A. LANGER et G. DOGAN (2012). "OOF3D : An image-based finite element solver for materials science". In : *Mathematics and Computers in Simulation* 82.12, p. 2951–2961. ISSN : 03784754. DOI : 10.1016/j.matcom.2012.03.003 (cf. p. 80).
- Сомі, С. et U. Perego (2000). "Numerical aspects of nonlocal damage analyses". In : *Revue Européenne des éléments finis*, p. 227–242 (cf. p. 57).
- Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies Alternatives (1980). Cast3M (cf. p. 71).
- COTTRELL, J., T. J. R. HUGHES et Y. BAZILEVS (2009). Isogeometric Analysis, p. 355 (cf. p. 124).
- COUPEZ, T. (2011). "Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing". In : *Journal of Computational Physics* 230.7, p. 2391–2405. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2010.11.041 (cf. p. 118).
- COUPEZ, T., L. SILVA et E. HACHEM (2015). "Implicit Boundary and Adaptive Anisotropic Meshing". In : *New Challenges in Grid Generation and Adaptivity for Scientific Computing*, p. 1–18. DOI : 10.1007/978-3-319-06053-8_1 (cf. p. 118, 119).
- DEB, M. K., I. BABUŠKA et J. T. ODEN (2001). "Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.48, p. 6359–6372. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(01)00237-7 (cf. p. 132).
- DEMKOWICZ, L. (2006). Computing with hp-Adaptive Finite Elements. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems. Chapman et Hall/CRC (cf. p. 136).
- DEMKOWICZ, L., J. T. ODEN et T. STROUBOULIS (1984). "Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part I : Variational principles and a posteriori estimates". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 46.2, p. 217–251. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(84)90063-X (cf. p. 90).
- (1985). "An adaptive p-version finite element method for transient flow problems with moving boundaries". In : *Finite Elements in Fluids*, p. 291–305 (cf. p. 90).
- DICK, C., J. GEORGII, R. BURGKART et R. WESTERMANN (2009). "Stress tensor field visualization for implant planning in orthopedics". In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 15.6, p. 1399–1406. ISSN : 10772626. DOI : 10.1109/TVCG.2009.184 (cf. p. 80, 130).
- Díez, P., J. J. EGOZCUE et A. HUERTA (1998). "A posteriori error estimation for standard finite element analysis". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 163.1-4, p. 141–157. ISSN : 0045-7825. DOI : DOI : 10.1016/S0045-7825(98)00009-7 (cf. p. 91).
- Díez, P., N. Parés et A. HUERTA (2004). "Accurate upper and lower error bounds by solving flux-free local problems in "stars"". In : *Revue Européenne des éléments finis* 13.5-7, p. 497–507. DOI : 10.3166/reef.13.497-507 (cf. p. 91).
- DOLBOW, J. E. et A. DEVAN (2003). "Enrichment of Enhanced Assumed Strain Approximations for Representing Strong Discontinuities : Addressing Volumetric Incompressibility and the Disconti-

nuous Patch Test". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 59.March, p. 1–6 (cf. p. 48, 53).

- DOLBOW, J. E. et I. HARARI (2009). "An efficient finite element method for embedded interface problems". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78.2, p. 229–252. DOI : 10.1002/nme.2486 (cf. p. 115, 116).
- DONEA, J. et A. HUERTA (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*. Sous la dir. de WILEY (cf. p. 47, 48).
- DONG, S., D. LIU, M. R. MAXEY et G. E. KARNIADAKIS (2004). "Spectral distributed Lagrange multiplier method : algorithm and benchmark tests". In : *Journal of Computational Physics* 195.2, p. 695–717. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2003.10.016 (cf. p. 110).
- DRÉAU, K., N. CHEVAUGEON et N. MOËS (2010a). "Higher order X-FEM for curved cracks". In : *IV European Conference on Computational Mechanics* (cf. p. 112, 129).
- (2010b). "Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.29-32, p. 1922–1936. ISSN : 00457825.
 DOI : 10.1016/j.cma.2010.01.021 (cf. p. 111, 112, 114, 115).
- DUARTE, C. A. et D.-J. KIM (2008). "Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.6-8, p. 487–504. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2007.08.017 (cf. p. 69).
- DUCZEK, S. et U. GABBERT (2015). "Efficient integration method for fictitious domain approaches". In : *Computational Mechanics* 56.4, p. 725–738. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-015-1197-3 (cf. p. 113).
- DUFLOT, M. et S. BORDAS (2008). "A posteriori error estimation for extended finite elements by an extended global recovery". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.8, p. 1123–1138. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2332 (cf. p. 90).
- DUFOUR, F., G. LEGRAIN, G. PIJAUDIER-CABOT et A. HUERTA (2012). "Estimation of crack opening from a two-dimensional continuum-based finite element computation". In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 36.16, p. 1813–1830. ISSN : 03639061. DOI : 10.1002/nag.1097 (cf. p. 54, 57, 59).
- DUFOUR, F., G. PIJAUDIER-CABOT, M. CHOINSKA et A. HUERTA (2008). "Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models". In : *Computers and Concrete* 5.4, p. 375–388. ISSN : 15988198 (cf. p. 54–57).
- DUGDALE, D. (1960). "Yielding of steel sheets containing slits". In : Journal of the Mechanics and Physics of Solids 8.2, p. 100–104. ISSN : 00225096. DOI : 10.1016/0022-5096(60)90013-2. arXiv : 0021-8928(59)90157-1 [10.1016] (cf. p. 45).
- DUMSTORFF, P. (2007). "Crack propagation criteria in the framework of X-FEM-based structural analyses". In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31.November 2006, p. 239–259. DOI : 10.1002/nag (cf. p. 58).
- DÜSTER, A., S. HARTMANN et E. RANK (2003). "p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.47-48, p. 5147–5166. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2003.07.003 (cf. p. 69).
- DÜSTER, A., J. PARIVIZIAN, Z. YANG et E. RANK (2008). "The finite cell method for threedimensional problems of solid mechanics". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.45-48, p. 3768–3782. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2008.02.036 (cf. p. 110).
- DÜSTER, A. et E. RANK (2001). "The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, p. 1925–1935 (cf. p. 136).
- DÜSTER, A., D. SCHOLZ et E. RANK (2007). "pq-Adaptive solid finite elements for three-dimensional plates and shells". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.1-4, p. 243–254. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2007.07.020 (cf. p. 73).

- DÜSTER, A., H.-G. SEHLHORST et E. RANK (2012). "Numerical homogenization of heterogeneous and cellular materials utilizing the finite cell method". In : *Computational Mechanics* 50.4, p. 413–431. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-012-0681-2 (cf. p. 80, 110).
- Ескаят, С. et G. Young (1936). "The approximation of one matrix by another of lower rank". In : *Psychometrika* 1.3, p. 211–218. ISSN : 00333123. DOI : 10.1007/BF02288367 (cf. p. 99).

Electricité de France (1990). Code_Aster (cf. p. 71).

- ELHADDAD, M., N. ZANDER, S. KOLLMANNSBERGER, A. SHADAVAKHSH et E. RANK (2015). "Finite cell method : high order structural dynamics for complex geometries". In : *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 15.8. DOI : 10.1142/S0219455415400180 (cf. p. 110).
- ERGATOUDIS, I., B. IRONS et O. C. ZIENKIEWICZ (1968). "Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis". In : *International Journal of Solids and Structures* 4.1, p. 31–42. ISSN : 00207683. DOI : 10.1016/0020-7683(68)90031-0 (cf. p. 124).
- FALSONE, G. et N. IMPOLLONIA (2002). "A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.44, p. 5067–5085. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(02)00437-1 (cf. p. 132).
- FEIST, C. et G. HOFSTETTER (2007). "Three-dimensional fracture simulations based on the SDA". In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31.2, p. 189–212. ISSN : 03639061. DOI : 10.1002/nag.542 (cf. p. 58).
- FELD-PAYET, S., V. CHIARUTTINI, J. BESSON et F. FEYEL (2015). "A new marching ridges algorithm for crack path tracking in regularized media". In : *International Journal of Solids and Structures* 71, p. 57–69. ISSN : 00207683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2015.04.043 (cf. p. 58, 60).
- FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, S. et A. HUERTA (2004). "Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.12-14, p. 1257–1275. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2003.12.019 (cf. p. 76).
- FLORENTIN, É. (2002). "Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle". Thèse de doct. 61 Av du président Wilson : Ecole Normale Supérieure de Cachan (cf. p. 89).
- FRANCFORT, G. et J.-J. MARIGO (1998). "Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem". In : *J. Mech. Phys. Solids* 46.8, p. 1319–1342 (cf. p. 61).
- FREISCHLÄGER, C. et K. SCHWEIZERHOF (1996). "On a systematic development of trilinear 3D solid elements based on Simo's enhanced strain formulation". In : *International Journal of Solids and Structures* 33.20-22, p. 2993–3017 (cf. p. 48).
- FREY, P. J. et F. ALAUZET (2005). "Anisotropic mesh adaptation for CFD computations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.48-49, p. 5068–5082. ISSN : 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2004.11.025 (cf. p. 118).
- FREY, P. J., B. SARTER et M. GAUTHERIE (1994). "Fully automatic mesh generation for 3-D domains based upon voxel sets". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.16, p. 2735–2754 (cf. p. 77, 80).
- FRIES, T.-P. (2008). "A corrected XFEM approximation without problems in blending elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75.November 2007, p. 503–532. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 129).
- (2009). "The intrinsic XFEM for two-fluid flows". In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 60.4, p. 437–471 (cf. p. 53).
- FRIES, T.-P., A. BYFUT, A. ALIZADA, K. W. CHENG et A. SCHRÖDER (2011). "Hanging nodes and XFEM". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 86, p. 404–430 (cf. p. 82).
- FRIES, T.-P. et S. OMEROVIĆ (2016). "Higher-order accurate integration of implicit geometries". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 106.5, p. 323–371. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.5121. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 111, 112).

- GERASIMOV, T. et E. STEIN (2012). "An explicit residual-type error estimator for Q 1 -quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* April, p. 1118–1155. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 91).
- GERSTENBERGER, A. et W. A. WALL (2008). "An eXtended Finite Element Method/Lagrange multiplier based approach for fluid-structure interaction". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.19-20, p. 1699–1714. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2007.07.002 (cf. p. 53).
- GHANEM, R. G. et P. D. SPANOS (1991). Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach. New York, NY : Springer New York. ISBN : 978-1-4612-7795-8. DOI : 10.1007/978-1-4612-3094-6 (cf. p. 132).
- GIRALDI, L. (2012). "Contributions aux Méthodes de Calcul Basées sur l'Approximation de Tenseurs et Applications en Mécanique Numérique". Thèse de doct., p. 158 (cf. p. 97–99, 104).
- GIRALDI, L., A. NOUY et G. LEGRAIN (2014). "Low-Rank Approximate Inverse for Preconditioning Tensor-Structured Linear Systems". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 36.4, A1850–A1870. ISSN : 1064-8275. DOI : 10.1137/130918137 (cf. p. 99).
- GIRALDI, L., A. NOUY, G. LEGRAIN et P. CARTRAUD (2013). "Tensor-based methods for numerical homogenization from high-resolution images". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 254, p. 154–169. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2012.10.012 (cf. p. 106, 131).
- GLOWINSKI, R. et Y. KUZNETSOV (2007). "Distributed Lagrange multipliers based on fictitious domain method for second order elliptic problems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.8, p. 1498–1506. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2006.05.013 (cf. p. 110).
- GOEBEL, J. C. et A. V. TOBOLSKY (1971). "Volume change accompanying rubber extension". In : *Rubber chemistry and technology* 44.5, p. 1391–1394 (cf. p. 47).
- GOLANSKI, D., K. TERADA et N. KIKUCHI (1997). "Macro and micro scale modeling of thermal residual stresses in metal matrix composite surface layers by the homogenization method". In : *Computational Mechanics* 19.3, p. 188–202. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s004660050168 (cf. p. 81, 102).
- GRASEDYCK, L. (2010). "Hierarchical Singular Value Decomposition of Tensors". In : SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 31.4, p. 2029–2054. ISSN : 0895-4798. DOI : 10.1137/090764189. arXiv : 34249873259 (cf. p. 99).
- GRASSL, P., D. GRÉGOIRE, L. ROJAS SOLANO et G. PIJAUDIER-CABOT (2012). "Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete". In : *International Journal of Solids and Structures* 49.13, p. 1818–1827. ISSN : 00207683. DOI : 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.023. arXiv : 1107.2311 (cf. p. 63).
- GRIEBEL, M. et M. A. SCHWEITZER (2002). "Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations". In : sous la dir. de S. HILDEBRANDT et H. KARCHER. Springer-Verlag, Berlin. Chap. A particle, p. 517–540 (cf. p. 115, 116).
- GRIFFITH, A. A. (1920). "The phenomena of rupture and flow in solids". In : *Transactions of Royal Society London* 221 (cf. p. 45).
- GROSS, S. et A. REUSKEN (2007). "An extended pressure finite element space for two-phase incompressible flows with surface tension". In : *Journal of Computational Physics* 224.1, p. 40–58. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2006.12.021 (cf. p. 48, 53, 112).
- GUEDES, J. M., N. KIKUCHI, A. MECHANICS et A. ARBOR (1990). "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83, p. 143–198. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(90)90148-F (cf. p. 131).
- GUGUIN, G., O. ALLIX, P. GOSSELET et S. GUINARD (2014). "Nonintrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 98.5, p. 324–343 (cf. p. 73).

- GULDBERG, R. E., S. HOLLISTER et G. T. CHARRAS (1998). "The accuracy of digital image-based finite element models." In : *Journal of biomechanical engineering* 120.2, p. 289–295. ISSN : 0148-0731 (cf. p. 84, 86).
- Guo, Y. et M. Ruess (2015). "Weak Dirichlet boundary conditions for trimmed thin isogeometric shells". In : *Computers & Mathematics with Applications*. ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa. 2015.06.012 (cf. p. 115).
- GUPTA, V., C. A. DUARTE, I. BABUŠKA et U. BANERJEE (2013). "A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 266, p. 23–39. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2013.07.010 (cf. p. 94).
- GUPTA, V., D.-J. KIM et C. A. DUARTE (2013). "Extensions of the two-scale generalized finite element method to nonlinear fracture problems". In : *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 11.6, p. 581–596. ISSN : 15431649. DOI : 10.1615/IntJMultCompEng. 2013005685 (cf. p. 68).
- HAASDONK, B., M. OHLBERGER et G. ROZZA (2008). "A reduced basis method for evolution schemes with parameter-dependent explicit operators". In : *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 32, p. 145–161. ISSN : 10689613 (cf. p. 97).
- HACKBUSCH, W. (2012). *Tensor spaces and numerical tensor calculus*. T. 42. Springer Science & Business Media (cf. p. 98).
- HACKBUSCH, W. et S. KÜHN (2009). "A New Scheme for the Tensor Representation". In : *Journal* of Fourier Analysis and Applications 15.5, p. 706–722. ISSN : 1531-5851. DOI : 10.1007/s00041-009-9094-9 (cf. p. 98).
- HAIDAR, K., G. PIJAUDIER-CABOT, J. F. DUBÉ et A. LOUKILI (2005). "Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials". In : *Materials and Structures* 38.2, p. 201. ISSN : 1871-6873. DOI : 10.1007/BF02479345 (cf. p. 63).
- HANSBO, A. et P. HANSBO (2004). "A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.33-35, p. 3523–3540. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2003.12.041 (cf. p. 115).
- HARARI, I. et J. DOLBOW (2010). "Analysis of an efficient finite element method for embedded interface problems". In : *Computational Mechanics* 46.1, p. 205–211. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-009-0457-5 (cf. p. 115, 116).
- HEINZE, S., M. JOULAIAN et A. DÜSTER (2015). "Numerical homogenization of hybrid metal foams using the finite cell method". In : *Computers & Mathematics with Applications*. ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2015.05.009 (cf. p. 80, 110).
- HEISSERER, U., S. HARTMANN, A. DÜSTER et Z. YOSIBASH (2008). "On volumetric locking-free behaviour of p-version finite elements under finite deformations". In : *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24, p. 1019–1032. DOI : 10.1002/cnm (cf. p. 48, 69).
- HILD, P., V. LLERAS et Y. RENARD (2009). "A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM". In : *ESAIM : Proc.* 27, p. 107–121. DOI : 10.1051/proc/2009022 (cf. p. 91).
- HIRIYUR, B., H. WAISMAN et G. DEODATIS (2011). "Uncertainty quantification in homogenization of heterogeneous microstructures modeled by XFEM". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* March, p. 257–278. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 130).
- HOLLISTER, S. et N. KIKUCHI (1994). "Homogenization theory and digital imaging : a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue". In : *Biotechnology and Bioengineering* 43.7, p. 586–596 (cf. p. 80).
- HUERTA, A., A. ANGELOSKI, X. ROCA et J. PERAIRE (2013). "Efficiency of high-order elements for continuous and discontinuous Galerkin methods". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 96.9, p. 529–560. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.4547 (cf. p. 136).

- HUERTA, A. et P. Díez (2000). "Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181.1-3, p. 21–41. ISSN : 0045-7825. DOI : DOI : 10.1016/S0045-7825(99)00071-7 (cf. p. 90, 93).
- HUERTA, A. et S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ (2000). "Enrichment and coupling of the finite element and meshless methods". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48.11, p. 1615–1636. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/1097-0207(20000820)48:11<1615::AID-NME883>3.0.CO;2-S (cf. p. 115).
- HUET, C. (1990). "Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies". In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38.6, p. 813–841. ISSN : 00225096. DOI : 10.1016/0022-5096(90)90041-2 (cf. p. 80, 130).
- HUGHES, T. J. R., J. COTTRELL et Y. BAZILEVS (2005). "Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.39-41, p. 4135–4195. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2004.10.008 (cf. p. 71, 72, 123, 124).
- IBANEZ, L. et W. J. SCHROEDER (2005). The ITK Software Guide. 2005^e éd. Kitware, Inc. (cf. p. 77–79).
- JIANG, M., I. JASIUK et M. OSTOJA-STARZEWSKI (2002). "Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites". In : *International Journal of Solids and Structures* 39.1, p. 199–212. ISSN : 00207683 (cf. p. 85).
- JIANG, W. et J. E. DOLBOW (2015). "Adaptive refinement of hierarchical B-spline finite elements with an efficient data transfer algorithm". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.3-4, p. 233–256. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.4718. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 124).
- JIRÁSEK, M. (1998). "Nonlocal models for damage and fracture : comparison of approaches". In : *Int. J. Solids Structures* 35.31-32, p. 4133–4145 (cf. p. 55).
- JOHNEN, A., J.-F. REMACLE et C. GEUZAINE (2013). "Geometrical validity of curvilinear finite elements". In : *Journal of Computational Physics* 233, p. 359–372. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2012.08.051 (cf. p. 112).
- (2014). "Geometrical validity of high-order triangular finite elements". In : *Engineering with Computers* 30, p. 375–382. ISSN : 14355663. DOI : 10.1007/s00366-012-0305-7 (cf. p. 112).
- JOULAIAN, M., S. DUCZEK, U. GABBERT et A. DÜSTER (2014). "Finite and spectral cell method for wave propagation in heterogeneous materials". In : *Computational Mechanics* 54.3, p. 661–675. ISSN : 01787675. DOI : 10.1007/s00466-014-1019-z (cf. p. 110).
- JOULAIAN, M. et A. DÜSTER (2013). "Local enrichment of the finite cell method for problems with material interfaces". In : *Computational Mechanics*. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-013-0853-8 (cf. p. 111, 114, 115).
- JOULAIAN, M., S. HUBRICH et A. DÜSTER (2016). "Numerical integration of discontinuities on arbitrary domains based on moment fitting". In : *Computational Mechanics* 4.C. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-016-1273-3 (cf. p. 113).
- KACHANOV, L. M. (1958). "Time of the rupture process under creep conditions". In : *Izv Akad Nauk S* S R Otd Tech Nauk 8, p. 26–31. DOI : citeulike-article-id:5466815 (cf. p. 45).
- KANIT, T., S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY et D. JEULIN (2003). "Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach". In : *International Journal of Solids and Structures* 40.13-14, p. 3647–3679. ISSN : 00207683. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4 (cf. p. 80, 130).
- KANIT, T., F. N'GUYEN, S. FOREST, D. JEULIN, M. REED et S. SINGLETON (2006). "Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of samples of two materials from food industry". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.33-36, p. 3960–3982 (cf. p. 80).
- KAROUI, A., K. MANSOURI, Y. RENARD et M. ARFAOUI (2014). "The eXtended finite element method for cracked hyperelastic materials : A convergence study". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 100.3, p. 222–242 (cf. p. 68).

- KELLY, D. W., J. P. DE S. R. GAGO, O. C. ZIENKIEWICZ et I. BABUŠKA (1983). "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : Part I—error analysis". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19.11, p. 1593–1619. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.1620191103 (cf. p. 89).
- KEYAK, J., I. LEE et H. SKINNER (1994). "Correlations between orthogonal mechanical properties and density of trabecular bone : Use of different densitometric measures". In : *Journal of biomedical materials research* 28, p. 1329–1336 (cf. p. 80, 130, 134).
- KEYAK, J., J. MEAGHER, H. SKINNER et C. MOTE JR (1990). "Automated three-dimensional finite element modelling of bone : a new method". In : *Journal of Biomedical Engineering* 12.5, p. 389–397 (cf. p. 77, 80, 130).
- KIRÁLYFALVI, G. et B. SZABÓ (1997). "Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 27.1, p. 85–97. ISSN : 0168874X. DOI : 10.1016/S0168-874X(97)00006-1 (cf. p. 126).
- KIRCHHART, M., S. GROSS et A. REUSKEN (2016). "Analysis of an XFEM Discretization for Stokes Interface Problems". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 38.2, A1019–A1043. ISSN : 1064-8275. DOI : 10.1137/15M1011779 (cf. p. 48).
- KLEIBER, M. et T. HIEN (1994). "The stochastic finite element method (basic perturbation technique and computer implementation)". In : *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 10.4, p. 297–297. ISSN : 87550024. DOI : 10.1002/asm.3150100412 (cf. p. 132).
- KOLDA, T. G. et B. W. BADER (2009). "Tensor Decompositions and Applications". In : *SIAM Review* 51.3, p. 455–500. ISSN : 0036-1445. DOI : 10.1137/07070111X (cf. p. 99).
- KUDELA, L., N. ZANDER, T. BOG, S. KOLLMANNSBERGER et E. RANK (2015). "Efficient and accurate numerical quadrature for immersed boundary methods". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2.1, p. 10. ISSN : 2213-7467. DOI : 10.1186/s40323-015-0031-y (cf. p. 112, 126, 127, 129, 130).
- KUDELA, L., N. ZANDER, S. KOLLMANNSBERGER, E. RANK, L. KUDELA, N. ZANDER, S. KOLLMANNSBERGER et E. RANK (2016). "Smart octrees : accurately integrating discontinuous functions in 3D". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* To appear (cf. p. 112, 130).
- LABORDE, P., J. POMMIER, Y. RENARD et M. SALAÜN (2005). "High-order extended finite element method for cracked domains". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64.3, p. 354–381 (cf. p. 51, 94, 111).
- LADD, A. J., J. H. KINNEY, D. L. HAUPT et S. A. GOLDSTEIN (1998). "Finite-element modeling of trabecular bone : comparison with mechanical testing and determination of tissue modulus." In : *Journal of orthopaedic research : official publication of the Orthopaedic Research Society* 16.5, p. 622–8. ISSN : 0736-0266. DOI : 10.1002/jor.1100160516 (cf. p. 134).
- LADEVÈZE, P. (1975). "Comparaison de modèles de mileux continus". Thèse de doct. Université de Pierre et Marie Curie (cf. p. 89).
- LADEVÈZE, P. et D. LEGUILLON (1983). "Error estimate procedure in the finite element method ans applications". In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 20.3, p. 448–509 (cf. p. 89).
- LADEVÈZE, P. et N. MOËS (1998a). "A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157.1-2, p. 45–68. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(97)00212-0 (cf. p. 89).
- (1998b). "A Posteriori Constitutive Relation Error Estimators for Nonlinear Finite Element Analysis and Adaptive Control". In : p. 231–256. DOI : 10.1016/S0922-5382(98)80013-5 (cf. p. 89).
- (1999). "Adaptive control for finite element analysis in plasticity". In : *Computers & Structures* 73.1-5, p. 45–60. ISSN : 00457949. DOI : 10.1016/S0045-7949(98)00284-3 (cf. p. 89).
- LADEVÈZE, P., N. MOËS et B. DOUCHIN (1999). "Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 176.1-4, p. 247–264. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(98)00340-5 (cf. p. 89).

- LADEVÈZE, P. et P. ROUGEOT (1997). "New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 150, p. 239–249 (cf. p. 89).
- LAMARI, H. (2011). "Contribution à la modélisation numérique de la séparation de phase et homogénéisation des microstructures dans les matériaux composites". Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes (cf. p. 101).
- LAMARI, H., A. AMMAR, P. CARTRAUD, G. LEGRAIN, F. CHINESTA et F. JACQUEMIN (2010). "Routes for Efficient Computational Homogenization of Nonlinear Materials Using the Proper Generalized Decompositions". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17.4, p. 373–391. ISSN : 1134-3060. DOI : 10.1007/s11831-010-9051-4 (cf. p. 102).
- LASRY, D. et T. BELYTSCHKO (1988). "Localization limiters in transient problems". In : *International Journal of Solids and Structures* 24.6, p. 581–597 (cf. p. 54).
- LATHAUWER, L. de, B. de MOOR et J. VANDEWALLE (2000). "On the best rank-1 and rank-(R_1,...,R_n) approximation of higher-order tensors". In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 21.4, p. 1324–1342. ISSN : 08954798. DOI : 10.1137/S0895479898346995 (cf. p. 99).
- LE MAÎTRE, O., O. M. KNIO, H. N. NAJM et R. G. GHANEM (2004). "Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions". In : *Journal of Computational Physics* 197.1, p. 28–57. ISSN : 00219991. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.11.033 (cf. p. 132).
- Lé, B. (2016). "Contribution à la simulation numérique des structures en béton armé : utilisation de fonctions de niveau pour la modélisation de la fissuration et des renforts". Thèse de doct., p. 160 (cf. p. 61, 66, 67).
- LEE, C. et Q. X. XU (2008). "Automatic adaptive FE analysis of thin-walled structures using 3D solid elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76, p. 183–229. ISSN : 0743-1619. DOI : 10.1002/nme. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 73, 74).
- LEGAY, A., J. CHESSA et T. BELYTSCHKO (2006). "An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.17-18, p. 2070–2087. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2005.02.025 (cf. p. 53).
- LEGAY, A., H. W. WANG et T. BELYTSCHKO (2005). "Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64.8, p. 991–1008. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.1388 (cf. p. 111).
- LEGAY, A. et A. TRALLI (2007). "An enriched finite element approach for prescribed motions of thin immersed structures in a fluid". In : *European Journal of Computational Mechanics* 16.2, p. 145–160. DOI: 10.3166/remn.16.145-160 (cf. p. 48).
- LEGRAIN, G. (2006). "Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques". Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes (cf. p. 47, 50, 52, 53).
- (2013). "A NURBS enhanced extended finite element approach for unfitted CAD analysis". In : *Computational Mechanics* 52.4, p. 913–929. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-013-0854-7 (cf. p. 112, 123, 129, 130, 136).
- LEGRAIN, G., R. ALLAIS et P. CARTRAUD (2011). "On the use of the extended finite element method with quadtree/octree meshes". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.6, p. 717–743. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.3070 (cf. p. 82, 95, 115).
- LEGRAIN, G., N. CHEVAUGEON et K. DRÉAU (2012). "High order X-FEM and levelsets for complex microstructures : Uncoupling geometry and approximation". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241-244, p. 172–189. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2012.06.001 (cf. p. 112, 114–116, 136).
- LEGRAIN, G., M. CHEVREUIL et N. TAKANO (2017). "Prediction of apparent properties with uncertain material parameters using high-order fictitious domain methods and PGD model reduction". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* May 2016, p. 345–367. DOI : 10.1002/nme.5289 (cf. p. 114, 130–133).

- LEGRAIN, G., C. GEUZAINE, J.-F. REMACLE, N. MOËS, P. CRESTA et J. GAUDIN (2013). "Numerical simulation of CAD thin structures using the eXtended Finite Element Method and Level Sets". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 77, p. 40–58. ISSN : 0168874X. DOI : 10.1016/j.finel.2013. 08.007 (cf. p. 73–75).
- LEGRAIN, G. et N. MOËS (2014). "Treatment of nearly-singular problems with the X-FEM". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.1, p. 13. ISSN : 2213-7467. DOI : 10.1186/s40323-014-0013-5 (cf. p. 136).
- (2017). "A High Order Fictitious domain Method based on Anisotropic Mesh Adaptation : integration efficiency and shell structures". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, In preparation (cf. p. 119, 122, 123, 136).
- LEGRAIN, G., N. MOËS et A. HUERTA (2008). "Stability of incompressible formulations enriched with X-FEM". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.21-24, p. 1835–1849. ISSN : 00457825. DOI : doi:10.1016/j.cma.2007.08.032 (cf. p. 46, 50, 52, 53).
- LEGRAIN, G., N. MOËS et E. VERRON (2005). "Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63.2, p. 290–314. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.1291 (cf. p. 46).
- (2008). "Robust and direct evaluation of J 2 in linear elastic fracture mechanics with the X-FEM".
 In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76.10, p. 1471–1488 (cf. p. 46).
- LEYGUE, A. (2017). "Approche d'intégration efficace pour le calcul sur image avec l'approche PGD" (cf. p. 107).
- LIAN, W., G. LEGRAIN et P. CARTRAUD (2013). "Image-based computational homogenization and localization : comparison between X-FEM/levelset and voxel-based approaches". In : *Computational Mechanics* 51.3, p. 279–293. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-012-0723-9 (cf. p. 85).
- LIU, L., Y. J. ZHANG et X. WEI (2015). "Weighted T-splines with application in reparameterizing trimmed NURBS surfaces". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 295, p. 108–126. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2015.06.020 (cf. p. 124).
- LLERAS, V., P. HILD et Y. RENARD (2007). "Estimateur d'erreur pour la méthode XFEM". In : *huitième colloque national en Calcul des structures*. Sous la dir. d'HERMES, p. 49–54 (cf. p. 91).
- LÖHNER, R., J. R. CEBRAL, F. E. CAMELLI, S. APPANABOYINA, J. D. BAUM, E. L. MESTREAU et O. A. SOTO (2008). "Adaptive embedded and immersed unstructured grid techniques". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.25-28, p. 2173–2197. ISSN : 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2007.09.010 (cf. p. 110).
- LORENTZ, E., S. CUVILLIEZ et K. KAZYMYRENKO (2011). "Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model". In : *Comptes Rendus Mecanique* 339.1, p. 20–26. ISSN : 16310721. DOI : 10.1016/j.crme.2010.10.010 (cf. p. 66).
- LU, Y. Y., T. BELYTSCHKO et L. GU (1994). "Element-Free Galerkin methods." In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51, p. 221–258 (cf. p. 91).
- LUONG, M. P. (1995). "Infrared thermographic scanning of fatigue in metals". In : *Nuclear Engineering and Design* 158.2, p. 363–376 (cf. p. 46).
- MACHIELS, L., Y. MADAY et A. T. PATERA (2000). "A "flux-free" nodal Neumann subproblem approach to output bounds for partial differential equations". In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I Mathematics* 330.3, p. 249–254. ISSN : 07644442. DOI : 10.1016/S0764-4442(00)00122-1 (cf. p. 90).
- MACNEAL, R. et R. HARDER (1985). "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy". In : *Finite elements in Analysis and Design* 1, p. 3–20. ISSN : 0168874X. DOI : 10.1016/0168-874X (85)90003-4 (cf. p. 121, 122).
- MAIRE, E., A. FAZEKAS, L. SALVO, S. YOUSSEF, P. CLOETENS et J. LETANG (2003). "X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials related finite element modeling problems". In : *Composites science and technology* 63.16, p. 2431–2443 (cf. p. 80).

- MALKUS, D. S. et T. J. HUGHES (1978). "Mixed finite element methods Reduced and selective integration techniques : A unification of concepts". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 15.1, p. 63–81. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(78)90005-1 (cf. p. 48).
- MALKUS, D. (1981). "Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements". In : *International Journal of Engineering Science* 19.10, p. 1299–1310. ISSN : 00207225. DOI : 10.1016/0020-7225(81)90013-6 (cf. p. 49).
- MARCO, O., R. SEVILLA, Y. J. ZHANG, J. J. RÓDENAS et M. TUR (2015). "Exact 3D boundary representation in finite element analysis based on Cartesian grids independent of the geometry". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.6, p. 445–468. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.4914. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 112, 130).
- MARIANI, S. et U. PEREGO (2003). "Extended finite element method for quasi-brittle fracture". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58.1, p. 103–126. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.761 (cf. p. 58).
- MATTHIES, H. G. (2008). "Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations". In : ZAMM 88.11, p. 849–873. ISSN : 00442267. DOI : 10.1002/zamm. 200800095 (cf. p. 132).
- MAZARS, J. (1986). "A description of micro- and macroscale damage of concrete structures". In : *Engineering Fracture Mechanics* 25.5-6, p. 729–737. ISSN : 00137944. DOI : 10.1016/0013-7944(86)90036-6 (cf. p. 54, 59).
- MAZARS, J. et G. PIJAUDIER-CABOT (1996). "From damage to Fracture Mechanics and conversely : a combined approach". In : *International Journal of Solids and Structures* 33.96, p. 3327–3342 (cf. p. 63, 66).
- MEDIAVILLA, J., R. H. J. PEERLINGS et M. G. D. GEERS (2006). "Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66.4, p. 661–688. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.1572 (cf. p. 58).
- MEER, F. P. V. D. et L. J. SLUYS (2015). "The Thick Level Set method : Sliding deformations and damage initiation". In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 285, p. 64–82. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2014.10.020 (cf. p. 62, 64, 65).
- MELENK, J. M. et I. BABUŠKA (1996). "The partition of unity finite element method : Basic theory and applications". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, p. 289–314 (cf. p. 72).
- MIEHE, C., M. HOFACKER et F. WELSCHINGER (2010). "A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.45-48, p. 2765–2778. ISSN : 00457825. DOI : 10. 1016/j.cma.2010.04.011 (cf. p. 61).
- MIGNOLET, M. P. et C. SOIZE (2008). "Stochastic reduced order models for uncertain geometrically nonlinear dynamical systems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.45-48, p. 3951–3963. DOI : 10.1016/j.cma.2008.03.032 (cf. p. 97).
- MITCHELL, W. F. et M. A. McCLAIN (2014). "A Comparison of hp-adaptive Strategies for Elliptic Partial Differential Equations". In : *ACM Transactions on Mathematical Software* 41.1, p. 30. DOI : 10.1145/0000000.0000000. arXiv : 1005.3014 (cf. p. 136).
- MITTAL, R. et G. IACCARINO (2005). "Immersed Boundary Methods". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 37.1, p. 239–261. ISSN : 0066-4189. DOI : 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743 (cf. p. 110).
- MOËS, N., M. CLOIREC, P. CARTRAUD et J.-F. REMACLE (2003). "A computational approach to handle complex microstructure geometries". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.28-30, p. 3163–3177. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(03)00346-3 (cf. p. 95, 115).
- Moës, N., J. E. Dolbow et T. BELYTSCHKO (1999). "A finite element method for crack growth without remeshing". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46, p. 131–150 (cf. p. 46, 71, 72).

- MOËS, N., C. STOLZ, P.-E. BERNARD et N. CHEVAUGEON (2011). "A level set based model for damage growth : The thick level set approach". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86.December 2010, p. 358–380. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 54, 61–63).
- MOËS, N., C. STOLZ et N. CHEVAUGEON (2014). "Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.1, p. 16. ISSN : 2213-7467. DOI : 10.1186/s40323-014-0016-2 (cf. p. 65).
- MOULINEC, H. et P. SUQUET (1994). "A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites". In : *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II, Mécanique, physique, chimie, astronomie* 318.11, p. 1417–1423. ISSN : 1251-8069 (cf. p. 77, 96).
- MOURAD, H. M., J. E. DOLBOW et I. HARARI (2007). "A bubble-stabilized finite element method for Dirichlet constraints on embedded interfaces". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.4, p. 772–793. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.1788 (cf. p. 116).
- MOUSAVI, S. E. et N. SUKUMAR (2010). "Numerical integration of polynomials and discontinuous functions on irregular convex polygons and polyhedrons". In : *Computational Mechanics* 47.5, p. 535–554. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-010-0562-5 (cf. p. 113).

MSC Software Corporation (2014). MSC Apex (cf. p. 72).

- NITSCHE, J. (1971). "Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind". In : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 36.1, p. 9–15. ISSN : 0025-5858. DOI : 10.1007/BF02995904 (cf. p. 115).
- NOUY, A. (2008). "Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.51-52, p. 4718–4736. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2008.06. 012 (cf. p. 97, 133).
- (2009). "Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 16.3, p. 251–285. ISSN : 1134-3060. DOI : 10.1007/s11831-009-9034-5 (cf. p. 97, 132).
- (2010a). "A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving timedependent partial differential equations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.23-24, p. 1603–1626. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2010.01.009 (cf. p. 96, 99, 100).
- (2010b). "Proper Generalized Decompositions and Separated Representations for the Numerical Solution of High Dimensional Stochastic Problems". In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 17, p. 403–434. ISSN : 11343060. DOI : 10.1007/s11831-010-9054-1 (cf. p. 97).
- OLIVER, J. (2002). "From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach". In : *Engineering Fracture Mechanics* 69.2, p. 113–136. ISSN : 00137944. DOI : 10.1016/S0013-7944(01)00060-1 (cf. p. 58).
- OLIVER, J. et A. E. HUESPE (2004). "Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193.30-32, p. 3195–3220. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2003.07.013 (cf. p. 58, 59).

OPENCFD LTD (2004). OpenFOAM (cf. p. 71).

- OSHER, S. J. et N. PARAGIOS (2003). *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics,* p. 513 (cf. p. 78).
- OSTOJA-STARZEWSKI, M. (2006). "Material spatial randomness : From statistical to representative volume element". In : *Probabilistic Engineering Mechanics* 21.2, p. 112–132 (cf. p. 80, 130).
- PANETIER, J., P. LADEVÈZE et L. CHAMOIN (2009). "Strict and effective bounds in goal-oriented error estimation applied to fracture mechanics problems solved with XFEM". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 81.6, p. 671–700. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2705 (cf. p. 91).
- PANNACHET, T. (2006). "Error Estimation and Adaptive Spatial Discretisation for Quasi-Brittle Failure". Thèse de doct. Delft University of Technology, p. 671–700 (cf. p. 91).

- PARÉS, N., P. DÍEZ et A. HUERTA (2006). "Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.4-6, p. 297–323. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2004.06.047 (cf. p. 90–92).
- (2009). "Exact Bounds for Linear Outputs of the Advection-Diffusion-Reaction Equation Using Flux-Free Error Estimates". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 31.4, p. 3064–3089. ISSN : 1064-8275. DOI : 10.1137/080724356 (cf. p. 90, 91).
- PARÉS, N., H. SANTOS et P. DÍEZ (2009). "Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach : Solving the local problems in subdomains". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.10, p. 1203–1244. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2593 (cf. p. 90, 91).
- PARRILLA GÓMEZ, A. (2015). "Analyses numérique et analytique couplées d'un modèle d'endommagement gradué". In : (cf. p. 63).
- PARRILLA GÓMEZ, A., N. MOËS et C. STOLZ (2015). "Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models". In : *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 2.1, p. 18. ISSN : 2213-7467. DOI : 10.1186/s40323-015-0041-9 (cf. p. 62, 63, 66).
- PARVIZIAN, J., A. DÜSTER et E. RANK (2007). "Finite cell method h and p extension for embedded domain problems in solid mechanics". In : *Computational Mechanics* 41.1, p. 121–133. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-007-0173-y (cf. p. 110, 112).
- (2012). "Topology optimization using the finite cell method". In : *Optimization and Engineering* 13.1, p. 57–78. ISSN : 1389-4420. DOI : 10.1007/s11081-011-9159-x (cf. p. 110).
- PEERLINGS, R. H. J., R. de BORST, W. A. M. BREKELMANS et M. G. D. GEERS (1998). "Wave propagation and localisation in nonlocal and gradient-enhanced damage models". In : *Le Journal de Physique IV* 08.PR8, Pr8–293–Pr8–300. ISSN : 1155-4339. DOI : 10.1051/jp4:1998836 (cf. p. 54, 55).
- PEREIRA, J. P., C. A. DUARTE, D. GUOY et X. JIAO (2009). "hp -Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77.5, p. 601–633. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.2419 (cf. p. 111).
- PESKIN, C. S. (2002). "The immersed boundary method". In : *Acta Numerica* 11. ISSN : 0962-4929. DOI : 10.1017/S0962492902000077 (cf. p. 110).
- PETERSSON, P.-E. (1981). Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar *materials*. Division, Inst. (cf. p. 66).
- PHAM, D. L., C. XU et J. L. PRINCE (2000). "A survey of current methods in medical image segmentation". In : *Annual Review of Biomedical Engineering* 2.315-337, p. 315–337. ISSN : 1523-9829. DOI: 10.1146/annurev.bioeng.2.1.315 (cf. p. 77).
- PIJAUDIER-CABOT, G. et Z. BAŽANT (1987). "Nonlocal Damage Theory". In : *Journal of Engineering Mechanics* 113.10, p. 1512–1533. ISSN : 0733-9399. DOI : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113 : 10(1512) (cf. p. 54, 55).
- PRANGE, C., S. LOEHNERT et P. WRIGGERS (2012). "Error estimation for crack simulations using the XFEM". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 91.13, p. 1459–1474. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 90).
- QUARTERONI, A., A. MANZONI et F. NEGRI (2015). Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations : An Introduction. T. 92. Springer (cf. p. 97).
- RAMIÈRE, I., P. ANGOT et M. BELLIARD (2007). "A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.4-6, p. 766–781. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2006.05.012 (cf. p. 110).
- RANK, E. (1992). "Adaptive remeshing and h-p domain decomposition". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 101.1-3, p. 299–313. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(92)90027-H (cf. p. 114).
- RANK, E., A. DÜSTER, V. NÜBEL, K. PREUSCH et O. BRUHNS (2005). "High order finite elements for shells". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.21-24, p. 2494–2512. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2004.07.042 (cf. p. 117, 121, 122).

- RANK, E., S. KOLLMANNSBERGER, C. SORGER et A. DÜSTER (2011). "Shell Finite Cell Method : A high order fictitious domain approach for thin-walled structures". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.45-46, p. 3200–3209. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2011.06. 005 (cf. p. 110, 117, 118).
- RASHETNIA, R., S. MOHAMMADI, R. RASHENIA et S. MOHAMMADI (2015). "Finite strain fracture analysis using the extended finite element method with new set of enrichment functions". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.6, p. 1316–1351. ISSN : 0743-1619. DOI : 10.1002/nme4846. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 68).
- RASHID, Y. (1968). "Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels". In : *Nuclear Engineering and Design* 7.4, p. 334–344. ISSN : 00295493. DOI : 10.1016/0029-5493(68)90066-6 (cf. p. 45).
- RAVIART, P. A. et J.-M. THOMAS (1998). Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Sous la dir. de DUNOD. Dunod, Paris (cf. p. 75).
- REESE, S. (2007). "A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69.8, p. 1671–1716. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.1827. arXiv : 1010.1724 (cf. p. 73).
- REMACLE, J.-F., J. LAMBRECHTS, C. GEUZAINE et T. TOULORGE (2014). "Optimizing the Geometrical Accuracy of 2D Curvilinear Meshes". In : *Procedia Engineering* 82, p. 228–239. ISSN : 18777058. DOI : 10.1016/j.proeng.2014.10.386 (cf. p. 112).
- RIETBERGEN, B. van, H. WEINANS, R. HUISKES et A. ODGAARD (1995). "A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models". In : *Journal of biomechanics* 28.1, p. 69–81 (cf. p. 80).
- RÓDENAS, J. J., M. TUR, F. J. FUENMAYOR, A. VERCHER et J. RODENAS (2007). "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations : the SPR-C technique". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70.6, p. 705–727. ISSN : 1097-0207. DOI : 10.1002/nme.1903 (cf. p. 89, 90, 95).
- RODENAS, J., O. A. GONZALEZ-ESTRADA, P. DÍEZ ET F. J. FUENMAYOR (2010). "Accurate recoverybased upper error bounds for the extended finite element framework". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199.37-40, p. 2607–2621. ISSN : 0045-7825. DOI : DOI : 10.1016/j. cma.2010.04.010 (cf. p. 90).
- RODRÍGUEZ-FERRAN, A., I. MORATA et A. HUERTA (2005). "A new damage model based on nonlocal displacements". In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 29.5, p. 473–493. ISSN : 03639061. DOI : 10.1002/nag.422 (cf. p. 55).
- RUESS, M. et Y. GUO (2014). "Weak coupling of thin-walled multi-patch NURBS structures in the framework of isogeometric analysis". In : *Pamm* 14.1, p. 271–272. ISSN : 16177061. DOI : 10.1002/pamm.201410123 (cf. p. 115).
- RUESS, M., D. SCHILLINGER, Y. BAZILEVS, V. VARDUHN et E. RANK (2012). "Weakly Enforced Essential Boundary Conditions for NURBS-embedded and trimmed NURBS geometries on the basis of the Finite Cell Method". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p. 1–20 (cf. p. 115).
- RUESS, M., D. TAL, N. TRABELSI, Z. YOSIBASH et E. RANK (2012). "The finite cell method for bone simulations : Verification and validation". In : *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 11.3-4, p. 425–437. ISSN : 16177959. DOI : 10.1007/s10237-011-0322-2 (cf. p. 80, 110).
- SALA-LARDIES, E. et A. HUERTA (2012). "Optimally Convergent High-Order X-Fem For Problems With Voids And Inclusions". In : *Eccomas 2012, Vienna* (cf. p. 115, 116).
- SALZMAN, A., N. MOËS et N. CHEVAUGEON (2016). "On use of the Thick Level Set method in 3D quasi-static crack simulation of quasi-brittle material". In : *International Journal of Fracture* (cf. p. 76).
- SANCHES, R., P. BORNEMANN et F. CIRAK (2011). "Immersed b-spline (i-spline) finite element method for geometrically complex domains". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.13-16, p. 1432–1445. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2010.12.008 (cf. p. 124).

- SAULÈV, V. K. (1963). "On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method". In : *Siberian Math. J.* 4, p. 912–925 (cf. p. 72, 73, 110).
- SAVVAS, D., G. STEFANOU, M. PAPADRAKAKIS et G. DEODATIS (2014). "Homogenization of random heterogeneous media with inclusions of arbitrary shape modeled by XFEM". In : *Computational Mechanics* 54.5, p. 1221–1235. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-014-1053-x (cf. p. 130).
- SCHILLINGER, D., A. DÜSTER et E. RANK (2012). "The hp-d-adaptive finite cell method for geometrically nonlinear problems of solid mechanics". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 89.9, p. 1171–1202. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.3289 (cf. p. 110, 111, 114).
- SCHILLINGER, D. et E. RANK (2011). "An unfitted hp-adaptive finite element method based on hierarchical B-splines for interface problems of complex geometry". In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 200.47-48, p. 3358–3380. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma. 2011.08.002 (cf. p. 110, 124).
- SETHIAN, J. A. (1999). Level Set Methods : Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences. 2nd. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics (No. 3). Cambridge University Press (cf. p. 62).
- SEVILLA, R. et S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ (2011). "Numerical integration over 2D NURBS-shaped domains with applications to NURBS-enhanced FEM". In : *Finite Elements in Analysis and Design* 47.10, p. 1209–1220. ISSN : 0168874X. DOI : 10.1016/j.finel.2011.05.011 (cf. p. 127).
- SEVILLA, R., S. FERNÁNDEZ-MÉNDEZ et A. HUERTA (2008). "NURBS-enhanced finite element method (NEFEM)". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 76.February, p. 56–83. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 109, 123, 124).
- (2011a). "3D NURBS-enhanced finite element method (NEFEM)". In : International Journal for Numerical Methods in Engineering 88.2, p. 103–125. ISSN : 00295981. DOI : 10.1002/nme.3164 (cf. p. 124).
- (2011b). "Comparison of high-order curved finite elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87.February, p. 719–734. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 109, 124, 126).
- SHAPIRO, L. G. et G. C. STOCKMAN (2001). Computer Vision. Prentice Hall, p. 580 (cf. p. 77).
- SIMO, J. C. et M. S. RIFAI (1990). "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29, 1595–1638 (cf. p. 48).
- SIMO, J., F. ARMERO et R. TAYLOR (1993). "Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110.3-4, p. 359–386. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/0045-7825(93)90215-J (cf. p. 48).
 SINTEF (2016). "SISL", "The SINTEF Spline Library" (cf. p. 124).
- SRINIVASAN, K. R., K. MATOUŠ et P. H. GEUBELLE (2008). "Generalized finite element method for modeling nearly incompressible bimaterial hyperelastic solids". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.51-52, p. 4882–4893. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2008.07. 014 (cf. p. 68).
- STATEN, M. (2007). "Why Is Hex Meshing So Hard?, What is the Cubit Team Doing About it?" In : *Cubit User's Meeting* (cf. p. 71).
- STAZI, F., E. BUDYN, J. CHESSA et T. BELYTSCHKO (2003). "An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks". In : *Computational Mechanics* 31, p. 38–48 (cf. p. 111).
- STEFANOU, G., A. NOUY et A. CLEMENT (2009). "Identification of random shapes from images through polynomial chaos expansion of random level set functions". In : *International journal for numerical methods in Engineering* January, p. 127–155. DOI : 10.1002/nme (cf. p. 135).
- STENBERG, R. (1995). "On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method". In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 63.1-3, p. 139–148. ISSN : 0377-0427. DOI : 10.1016/0377-0427(95)00057-7 (cf. p. 115).
- STILL, M. (2005). The definitive guide to ImageMagick. Apress (cf. p. 84).

- STOLZ, C. (2010). "Thermodynamical description of running discontinuities : Application to friction and wear". In : *Entropy* 12.6, p. 1418–1439 (cf. p. 66).
- STROUBOULIS, T., I. BABUŠKA et K. COPPS (2000). "The design and analysis of the Generalized Finite Element Method". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181.1-3, p. 43–69. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(99)00072-9 (cf. p. 72).
- STROUBOULIS, T. et K. COPPS (2000). "The Generalized Finite Element Method : An Example of its Implementation and Illustration of its Performance". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.8, p. 1401–1417 (cf. p. 110, 112).
- STROUBOULIS, T., K. COPPS et I. BABUŠKA (2001). "The generalized finite element method". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.32-33, p. 4081–4193. ISSN : 00457825. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00188-8 (cf. p. 110).
- STROUBOULIS, T., L. ZHANG et I. BABUŠKA (2003). "Generalized finite element method using meh-based handbooks : application to problems in domains with many voids". In : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192.28-30, p. 3109–3161. DOI : 10.1016/S0045-7825(03)00347-5 (cf. p. 111).
- (2004). "p-version of the generalized FEM using mesh-based handbooks with applications to multiscale problems". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60.10, p. 1639– 1672 (cf. p. 111).
- STROUBOULIS, T., L. ZHANG, D. WANG et I. BABUŠKA (2006). "A posteriori error estimation for generalized finite element methods". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195.9-12, p. 852–879. DOI : 10.1016/j.cma.2005.03.004 (cf. p. 91, 95).
- SUDHAKAR, Y. et W. A. WALL (2013). "Quadrature schemes for arbitrary convex/concave volumes and integration of weak form in enriched partition of unity methods". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 258, p. 39–54. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2013.01.007 (cf. p. 113).
- SUKUMAR, N., D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO (2001). "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.46-47, p. 6183–6200. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(01)00215-8 (cf. p. 85, 110, 113).
- SUQUET, P. (1985). "Elements of homogenization for inelastic solid mechanics". In : *Homogenization Techniques for Composite Media*. Sous la dir. de S.-P. E. et A. ZAOUI. Lecture Notes in Physics. Springer : Berlin, p. 193–278 (cf. p. 80).
- SZABO, B. A., I. BABUŠKA et B. K. CHAYAPATHY (1989). "Stress Computations for Nearly Incompressible Materials By the P-Version of the Finite Tlement Method". In : *International journal for numerical methods in engineering* 28.1989, p. 2175–2190. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.1620280913 (cf. p. 48).
- Szabó, B. et I. Вавиšка (1991). *Finite Element Analysis*. 1^{re} éd. John Wiley & Sons, p. 384. ISBN : 0471502731 (cf. p. 73, 109, 111, 114, 117, 124, 131, 136).
- SZABÓ, B., A. DÜSTER et E. RANK (2004). "Chapter 5 The p-version of the Finite Element Method". In : *Encyclopedia of Computational Mechanics*. 3. ISBN : 0470846992 (cf. p. 109, 123).
- Такало, N., M. Zako, F. Kubo et K. KIMURA (2003). "Microstructure-based stress analysis and evaluation for porous ceramics by homogenization method with digital image-based modeling". In : *International Journal of Solids and Structures* 40.5, p. 1225–1242 (cf. p. 80).
- TAMAYO-MAS, E. et A. RODRÍGUEZ-FERRAN (2015). "A medial-axis-based model for propagating cracks in a regularised bulk". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 101.7, p. 489–520. DOI : 10.1002/nme.4757 (cf. p. 58, 60).
- TERADA, K., T. MIURA et N. KIKUCHI (1997). "Digital image-based model- ing applied to the homogenization analysis of composite materials". In : *Computational Mechanics* 20, p. 331–346 (cf. p. 80).

- TOULORGE, T., C. GEUZAINE, J.-F. REMACLE et J. LAMBRECHTS (2013). "Robust untangling of curvilinear meshes". In : *Journal of Computational Physics* 254, p. 8–26. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2013.07.022 (cf. p. 112).
- TOULORGE, T., J. LAMBRECHTS et J.-F. REMACLE (2015). "Optimizing the geometrical accuracy of curvilinear meshes". In : arXiv : 1507.04052 (cf. p. 112).
- ULRICH, D., B. van RIETBERGEN, H. WEINANS et P. RÜEGSEGGER (1998). "Finite element analysis of trabecular bone structure : a comparison of image-based meshing techniques." In : *Journal of biomechanics* 31.12, p. 1187–92. ISSN : 0021-9290. DOI : DOI : 10.1016/S0021-9290(98)00118-3 (cf. p. 77, 80).
- VENTURA, G., E. BUDYN et T. BELYTSCHKO (2003). "Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58.10, p. 1571–1592. ISSN : 0029-5981. DOI : 10.1002/nme.829 (cf. p. 76).
- VERHOOSEL, C. V., G. J. van ZWIETEN, B. van RIETBERGEN et R. de BORST (2014). "Image-based goal-oriented adaptive isogeometric analysis with application to the micro-mechanical modeling of trabecular bone". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. ISSN : 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2014.07.009 (cf. p. 80, 111, 112, 131).
- VICECONTI, M., L. BELLINGERI, L. CRISTOFOLINI et A. TONI (1998). "A comparative study on different methods of automatic mesh generation of human femurs". In : *Medical Engineering & Physics* 20.1, p. 1–10. ISSN : 1350-4533. DOI : DOI : 10.1016/S1350-4533(97)00049-0 (cf. p. 84, 86).
- VOGELIUS, M. (1983). "An Analysis of the p-Version of the Finite Element Method for Nearly Incompressible Materials". In : *Numerische Mathematik* 41, p. 39–53 (cf. p. 48).
- Vos, P. E. J., R. van Loon et S. SHERWIN (2008). "A comparison of fictitious domain methods appropriate for spectral/hp element discretisations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197.25-28, p. 2275–2289. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2007.11.023 (cf. p. 110).
- VREE, J. de, W. A. M. BREKELMANS et M. A. J. van GILS (1995). "Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics". In : *Computers and Structures* 55.4, p. 581–588. ISSN : 00457949. DOI : 10.1016/0045-7949(94)00501-S (cf. p. 54).
- WAGNER, G. J., N. MOËS, W. K. LIU et T. BELYTSCHKO (2001). "The Extended Finite Element Method for Stokes Flow Past Rigid Cylinders". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51, p. 293–313 (cf. p. 53).
- WAN, X. et G. E. KARNIADAKIS (2005). "An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations". In : *Journal of Computational Physics* 209.2, p. 617–642. ISSN : 00219991. DOI : 10.1016/j.jcp.2005.03.023 (cf. p. 132).
- WANG, W. et S. CHEN (2005). "Hyperelasticity, viscoelasticity, and nonlocal elasticity govern dynamic fracture in rubber." In : *Physical review letters* 95.14, p. 144301. ISSN : 0031-9007 (cf. p. 84).
- WANG, W., Y. J. ZHANG, L. LIU et T. J. R. HUGHES (2013). "Trivariate solid T-spline construction from boundary triangulations with arbitrary genus topology". In : *CAD Computer Aided Design* 45.2, p. 351–360. ISSN : 00104485. DOI : 10.1016/j.cad.2012.10.018 (cf. p. 124).
- WELLS, G. N., L. J. SLUYS et R. de BORST (2002). "Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53.5, p. 1235–1256 (cf. p. 58).
- WESTERGAARD, H. M. (1939). "Bearing pressures and cracks". In : *Journal of Applied Mechanics* 6, p. 49–53 (cf. p. 50).
- WIKIPEDIA (2004). Open source (cf. p. 71).
- WILLE, H., E. RANK et Z. YOSIBASH (2012). "Prediction of the mechanical response of the femur with uncertain elastic properties." In : *Journal of biomechanics* 45.7, p. 1140–8. ISSN : 1873-2380. DOI : 10.1016/j.jbiomech.2012.02.006 (cf. p. 131).
- WRIGGERS, P. et J. KORELC (1996). "On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids". In : *Computational Mechanics* 18.6, p. 413–428. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/BF00350250 (cf. p. 48).

- XIU, D. (2009). "Fast Numerical Methods for Stochastic Computations : A Review". In : *Communications in computational physics* 5.2-4, p. 242–272 (cf. p. 132).
- ZANDER, N., T. BOG, S. KOLLMANNSBERGER, D. SCHILLINGER et E. RANK (2014). "Multi-Level hp -Adaptivity : High-Order Mesh Adaptivity without the Difficulties of Constraining Hanging Nodes". In : *Computational Mechanics* submitted, p. 1–24. ISSN : 0178-7675. DOI : 10.1007/s00466-014-1118-x (cf. p. 111).
- ZANDER, N., S. KOLLMANNSBERGER, M. RUESS, Z. YOSIBASH et E. RANK (2012). "The Finite Cell Method for linear thermoelasticity". In : *Computers & Mathematics with Applications* 64.11, p. 3527–3541. ISSN : 08981221. DOI : 10.1016/j.camwa.2012.09.002 (cf. p. 111).
- ZANDER, N., M. RUESS, T. BOG, S. KOLLMANNSBERGER et E. RANK (2016). "Multi-Level hp -Adaptivity for Cohesive Fracture Modelling". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (cf. p. 111).
- ZHANG, Y. J., W. WANG et T. J. R. HUGHES (2013). "Conformal solid T-spline construction from boundary T-spline representations". In : *Computational Mechanics* 51.6, p. 1051–1059. ISSN : 01787675. DOI: 10.1007/s00466-012-0787-6 (cf. p. 124).
- ZIENKIEWICZ, O. C., Y. C. LIU et G. C. HUANG (1989). "Arror estimates and convergence rates for various incompressible elements". In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, p. 2191–2202 (cf. p. 50).
- ZIENKIEWICZ, O. C. et R. L. TAYLOR (1991). *The Finite Element Method, Vol. 1, 2, 3.* McGraw-Hill, London (cf. p. 124).
- ZIENKIEWICZ, O. C. et J. Z. ZHU (1987). "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis". In : *International Journal for Numerical Methods In Engineering* 24, p. 337–357. DOI: doi:10.1002/nme.1620240206 (cf. p. 89).
- (1992a). "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique". In : International Journal for Numerical Methods In Engineering 33, p. 1331–1364. DOI : doi:10.1002/nme.1620330702 (cf. p. 89, 90).
- (1992b). "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity". In : *International Journal for Numerical Methods In Engineering* 33, p. 1365–1382. DOI : doi:10.1002/nme.1620330703 (cf. p. 89, 90).
- ZUMBUSCH, G. W. (1993). Symmetric Hierarchical Polynomials for the h-p- Version of Finite Elements. Rapp. tech. (cf. p. 113).