



HAL
open science

Optimisation en électromagnétisme par application conjointe des méthodes de programmation non linéaire et de la méthode des éléments finis

Rodney Rezende Saldanha

► To cite this version:

Rodney Rezende Saldanha. Optimisation en électromagnétisme par application conjointe des méthodes de programmation non linéaire et de la méthode des éléments finis. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 1992. Français. <NNT : >. <tel-02557151>

HAL Id: tel-02557151

<https://hal.science/tel-02557151v1>

Submitted on 28 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THESE

présentée par

Rodney REZENDE SALDANHA
(Ingénieur et Mestrado UFMG Brésil)

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

**DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
GRENOBLE**

(arrêté Ministériel du 23 Novembre 1988)

(Spécialité : Génie Electrique)

=====
**Optimisation en Electromagnétisme
par application conjointe des
Méthodes de Programmation Non Linéaire et de la
Méthode des Eléments Finis**
=====

Date de soutenance : 26 mai 1992

Composition du Jury :

Monsieur	A.	FOGGIA	Président
Messieurs	J.M.	BIEDINGER	(Rapporteur)
	J.L.	COULOMB	
	C.	KIENY	
	P.	MAHEY	(Rapporteur)

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble

SALDANHA
1992



Président de l'Université :

M. NEMOZ Alain

ANNEE UNIVERSITAIRE 1990 - 1991

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE TÈRE CLASSE

ADIBA Michel	Informatique
ANTOINE Pierre	Géologie I.R.T.G.M.
AURIAULT Jean Louis	Physique nucléaire I.S.N.
BARRA Jean René	Mécanique
BECKER Pierre	Statistiques - Mathématiques Appliquées
BEGUIN Claude	Physique
BELORISKY Elie	Chimie Organique
BENZAKEN Claude	Physique
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Mathématiques Pures
BLANCHI Jean Pierre	Géographie
BOEHLER Jean Paul	A.P.S.
BOITET Christian	Mécanique
BORNAREL Jean	Informatique et Mathématiques Appliquées
BRUANDET Jean François	
CARLIER Georges	Physique
CASTAING Bernard	Biologie Végétale
CHARDON Michel	Physique
CHIBON Pierre	Géographie
COHEN ADDAD Jean Pierre	Biologie Animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Physique
CYROT Michel	Mathématiques Pures
DEBELMAS Jacques	Physique du Solide
DEMAILLY Jean Pierre	Géologie Générale
GENEUVILLE Alain	Mathématiques Pures
DEPORTES Charles	Physique
DOLIQUE Jean Michel	Chimie Minérale
DOUCE Roland	Physique des Plasmas
DUCROS Pierre	Physiologie Végétale
FINKE Gerde	Cristallographie
GAUTRON René	Informatique
GENIES Eugène	Chimie
GERMAIN Jean Pierre	Chimie
GIDON Maurice	Mécanique
GIGNOUX Claude	Géologie
GILLARD Roland	Sciences nucléaires
GUITTON Jacques	Mathématiques
	Chimie

.. / ...

HERAULT Jeanny	Physique
HICTER Pierre	Chimie
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean René	Mathématiques Pures
JOSELEAU Jean Paul	Biochimie
KAHANE André	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre Jean	Mathématiques Appliquées
LEBRETON Alain	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LHOMME Jean	Chimie
LOISEAUX Jean Marie	Sciences Nucléaires I.S.N.
LONGEQUEUE Nicole	Physique
LUNA Domingo	Mathématiques Pures
MACHE Régis	Physiologie Végétale
MASCLE Georges	Géologie
MAYNARD Roger	Physique du Solide
NEMOZ Alain	
PELMONT Jean	Astrophysique
PERRIER Guy	Biochimie
PIERRE Jean Louis	Géophysique
RENARD Michel	Chimie Organique
RICHARD Jean Marc	Thermodynamique
RIEDTMANN Christine	
RINAUDO Marguerite	Mathématiques
ROBERT Jean Bernard	Chimie C.E.R.M.A.V.
ROSSI André	
SAXOD Raymond	Biologie
SENGEL Philippe	Biologie Animale
SERGERAERT Francis	Biologie Animale
SOUCHIER Bernard	Mathématiques Pures
STUTZ Pierre	Biologie
TRILLING Laurent	Mécanique
VALLADE Marcel	Mathématiques Appliquées
VAN CUTSEM Bernard	Physique
VIALON Pierre	Mathématiques Appliquées
VIDAL Micheal	Géologie

ÉLÈVES DE 2 ^{ÈME} CLASSE	
APPARU Marcel	Chimie
ARMAND Gilbert	Géographie
ARNAUD Hubert	Géologie
ARTRU Marie Christine	Physique
ATTANE Pierre	Mécanique
BARATE Robert	Sciences Nucléaires
BARET Paul	Chimie
BARGE Jean	Mathématiques
BARLET Roger	Chimie
BERTIN José	Mathématiques
BLOCK Marc	Biologie
BLUM Jacques	Mathématiques Appliquées
BOITET Christian	Mathématiques Appliquées
BORRIONE Dominique	Automatique informatique
BOULON Marc	Mécanique
BOUTRON Claude	Glaciologie
BOUVET Jean	Biologie
BROSSARD Jean	Mathématiques
BRUGAL Gérard	Biologie
CAMPILLO Michel	Géophysique
CERFF Rudiger	Chimie
CHIARAMELLA Yves	Biologie
CHOLLET Jean Pierre	Mathématiques Appliquées
COLOMBEAU Jean François	Mécanique
COTTET Georges-Henri	Mathématiques (ENSL)
COURT Jean	Modélisation, calcul scientifique, statis.
CUNIN Pierre Yves	Chimie
DAVID Jean	Informatique
DEROUARD Jacques	Géographie
DHOUAILLY Danielle	Physique
DUFRESNOY Alain	Biologie
DUPUY Claude	Mathématiques Pures
DURAND Mireille	Chimie
FONTECAVE Marc	Sciences Nucléaires
FOURNIER Jean Marc	Chimie
GASPARD François	Physique
GIDON Maurice	Physique
GIORNI Alain	Géologie
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Sciences Nucléaires
GOURC Jean Pierre	Mathématiques Pures
GÜIGO Maryse	Mécanique
GUMUCHIAN Hervé	Géographie
HACQUES Gérard	Géographie
HAMMOU Abdelkader	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Chimie
HERINO Roland	Géographie
HERZOG Michel	Physique
JARDON Pierre	Biologie
JUTTEN Christian	Chimie
KERCKHOVE Claude	Physique
KOSAREW Siegmund	Géologie
KLINGER Jurgen	Math. fondamentales et appliquées
LAURENT Christine	Glaciologie
MANDARON Paul	Mathématiques
MARTINEZ Francis	Biologie
MERCHEZ Fernand	Mathématiques Appliquées
MILAS Michel	Physique
MOREL Alain	Chimie
MORIN Pierre	Géographie
NGUYEN HUY Xuong-	Physique
OUDET Bruno	Informatique
	Mathématiques Appliquées

.. / ...

PAUTOU Guy
PECHER Arnaud
PELLETIER Guy
PERRIN Claude
PFISTER Claude
PIBOULE Michel
PORTESEIL Jean Louis
PUECH Laurent
RAYNAUD Hervé
REGNARD Jean René
ROBERT Claudine
ROBERT Danielle
ROBERT Gilles
SAJOT Gérard
SARROT REYNAULD Jean
SAYETAT Françoise
SERVE Denis
STOECKEL Frédéric
SCHOLL Pierre Claude
SUBRA Robert

TISSUT Michel
TOURNIER Evelyne
VALLADE Marcel
VALLON Michel
VICAT Jean
VINCENS Maurice
VINCENT Gilbert
VIVIAN Robert
VOTTERO Philippe
WITOMSKI Patrick

Biologie
Géologie
Astrophysique
Sciences Nucléaires I.S.N.
Biologie
Géologie
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Physique
Didactique des disciplines scientifiques
Chimie
Mathématiques Pures
Physique
Géologie
Physique
Chimie
Physique
Mathématiques Appliquées
Chimie
mécanique
Biologie
Informatique et Mathématiques appliquées
Physique
Glaciologie
Physique
Chimie
Physique
Géographie
Chimie



INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

46, AVENUE FELIX VIALLET 38031 GRENOBLE CEDEX

TEL : 76.57.45.00

PRESIDENT DE L'INSTITUT
MONSIEUR G. LESPINARD

ANNEE 1990-1991

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

ENSERG	BARIBAUD	MICHEL
ENSIEG	BARRAUD	ALAIN
ENSPG	BAUDELET	BERNARD
UFR PGP	BAUDIN	GERARD
ENSIEG ILL	BEUFILS	JEAN-PIERRE
ENSERG	BLIMAN	SAMUEL
ENSHMG	BOIS	PHILIPPE
ENSPG	BONNET	GUY
ENSEEG	BONNETAIN	LUCIEN
ENSIEG	BRISSONNEAU	PIERRE
CUEFA	BRUNET	YVES
ENSHMG	CAILLERIE	DENIS
ENSPG	CAVAIGNAC	JEAN-FRANCOIS
ENSPG	CHARTIER	GERMAIN
ENSERG	CHENEVIER	PIERRE
UFR PGP	CHERADAME	HERVE
ENSIEG	CHERUY	ARLETTE
ENSERG	CHOVET	ALAIN
ENSHMG	COGNET	GERARD
ENSEEG	COLINET	CATHERINE
ENSIEG	CORNUT	BRUNO
ENSIEG	COULOMB	JEAN-LOUIS
ENSIMAG	CROWLEY	JAMES
ENSEEG	DALARD	FRANCIS
ENSHMG	DARVE	FELIX
ENSIMAG	DELLA DORA	JEAN
ENSERG	DEPEY	MAURICE
ENSPG	DEPORTES	JACQUES
ENSEEG	DEROO	DANIEL
ENSEEG	DESRE	PIERRE
ENSEEG	DIARD	JEAN-PAUL
ENSERG	DOLMAZON	JEAN-MARC
ENSEEG	DURAND	FRANCIS
ENSPG	DURAND	JEAN-LOUIS
ENSHMG	FAUTRELLE	YVES
ENSIEG	FOGGIA	ALBERT
ENSIMAG	FONLUPT	JEAN
ENSIEG	FOULARD	CLAUDE
ENSEEG	GALERIE	ALAIN

UFR PGP	GANDINI	ALESSANDRO
ENSPG	GAUBERT	CLAUDE
ENSERG	GENTIL	PIERRE
ENSIEG	GENTIL	SYLVIANE
ENSERG	GUERIN	BERNARD
ENSEEG	GUYOT	PIERRE
ENSIEG	IVANES	MARCEL
ENSERG	JANOT	MARIE-THERESE
ENSIEG	JAUSSAUD	PIERRE
ENSPG	JOST	REMY
ENSPG	JOUBERT	JEAN-CLAUDE
ENSIEG	JOURDAIN	GENVIEVE
UFR PGP	LACHENAL	DOMINIQUE
ENISEG	LACOUME	JEAN-LOUIS
ENSIEG	LADET	PIERRE
ENSIEG	LIENARD	JOEL
ENSHMG	LESIEUR	MARCEL
ENSHMG	LESPINARD	GEORGES
ENSPG	LONGUEQUEUE	JEAN-PIERRE
ENSHMG	LORET	BENJAMIN
ENSEEG	LOUCHET	FRANCOIS
ENSEEG	LUCAZEAU	GUY
ENSIMAG	LUX	AUGUSTIN
ENSIEG	MASSE	PHILIPPE
ENSIEG	MASSELOT	CHRISTIAN
ENSIMAG	MAZARE	GUY
ENSIMAG	MOHR	ROGER
ENSHMG	MOREAU	RENE
ENSIEG	MORET	ROGER
ENSIMAG	MOSSIERE	JACQUES
ENSHMG	OBLED	CHARLES
ENSERG	PANANAKAKIS	GEORGES
ENSEEG	PAULEAU	YVES
ENSIEG	PERRET	ROBERT
ENSHMG	PIAU	JEAN-MICHEL
ENSERG	PIC	ETIENNE
ENSIMAG	PLATEAU	BRIGITTE
ENSERG	POUPOT	CHRISTIAN
ENSEEG	RAMEAU	JEAN-JACQUES
ENSPG	REINISCH	RAYMOND
UFR PGP	RENAUD	MAURICE
ENSIMAG	ROBERT	FRANCOIS
ENSIEG	ROYE	DANIEL
ENSIEG	SABONNADIERE	JEAN-CLAUDE
ENSERG	SAGUET	PIERRE
ENSIMAG	SAUCIER	GABRIELE
ENSPG	SCHLENKER	CLAIRE
ENSPG	SCHLENKER	MICHEL
UFR PGP	SILVY	JACQUES
ENSHMG	SIRIEYS	PIERRE
ENSEEG	SOHM	JEAN-CLAUDE
ENSIMAG	SOLER	JEAN-LOUIS
ENSEEG	SOUQUET	JEAN-LOUIS
ENSHMG	TICKIEWITCH	SERGE
ENSHMG	TROMPETTE	PHILIPPE
ENSIMAG	VERJUS	JEAN-PIERRE
ENSPG	VINCENT	HENRI
ENSERG	ZADWORNY	FRANCOIS

SITUATION PARTICULIERE

PROFESSEURS D'UNIVERSITE

DETACHEMENT

ENSPG	BLOCH	DANIEL.....	RECTEUR	21.12.1993
ENSIMAG	LATOMBE	J.CLAUDE.....	DETACHEMENT	01.05.1993
ENSHMG	PIERRARD	J.MARIE.....	DETACHEMENT	01.05.1991
ENSIMAG	VEILLON	GERARD.....	DISPONIBLE	01.10.1993

SURNOMBRE

ENSHMG	BOUVARD	MAURICE		30.09.1990
--------	---------	---------------	--	------------

PERSONNES AYANT OBTENU LE DIPLOME

D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

BALESTRA
BALME
BECKER
BIGEON
BINDER
BOE
BOUVIER
CHASSERY
CHOLLET
COEY
COMMAULT
CORNUJOLS
COURNIL
DALLERY
DESCOTES-GENON
DUGARD
DURAND
FERRIEUX
GAUTHIER
GHIBAUDO
HAMAR
HAMAR
HORAUD
KUENY
LATOMBE
LE HUY
LE GORREC
LOZANO-LEAL
MAHEY
MEUNIER
MICHEL
MONMUSSON-PICQ
MULLER
MULLER
NGUYEN TRONG
NIEZ
PASTUREL
PERRIER
PLA
RECHENMANN
ROGNON
ROUGER
TCHUENT
TRYSTRAM

FRANCIS
LOUIS
MONIQUE
JEAN
ZDENECK
LOUIS-JEAN
GERARD
JEAN-MARC
JEAN-PIERRE
JEAN-PIERRE
CHRISTIAN
GERARD
MICHEL
YVES
BERNARD
LUC
MADELEINE
JEAN-PAUL
JEAN-PAUL
GERARD
SYLVIANE
ROGER
PATRICE
JEAN-LOUIS
CLAUDINE
HOANG
BERNARD
ROGELIO
PHILIPPE
GERARD
GERARD
GEORGETTE
JEAN
JEAN-MICHEL
BERNADETTE
JEAN-JACQUES
ALAIN
PASCAL
FERNAND
FRANCOIS
JEAN-PIERRE
JEAN
MAURICE
DENIS

DIRECTEURS DE RECHERCHE DU CNRS

ALEMANY
 ALLIBERT
 ALLIBERT
 ANSARA
 ARMAND
 AUDIER
 BERNARD
 BINDER
 BONNET
 BORNARD
 CAILLET
 CARRE
 CHATILLON
 CLERMONT
 COURTOIS
 CRISTOLOVEANU
 DAVID
 DION
 DRIOLE
 DURAND
 EUSCUDIER
 EUSTATHOPOULOS
 FINON
 FRUCHARD
 GARNIER
 GIROD
 GLANGEAUD
 GUELIN
 HOPFINGER
 JORRAND
 JOUD
 KAMARINOS
 KLEITZ
 KOFMAN
 LANDAU
 LEJEUNE
 LEPROVOST
 MADAR
 MARTIN
 MERMET
 MICHEL
 NAYROLLES
 PASTUREL
 PEUZIN
 PHAM
 PIAU
 RENOARD
 SENATEUR
 SIFAKIS
 SIMON

ANTOINE
 COLETTE
 MICHEL
 IBRAHIM
 MICHEL
 MARC
 CLAUDE
 GILBERT
 ROLAND
 GUY
 MARCEL
 RENE
 CHRISTIAN
 JEAN-ROBERT
 BERNARD
 SORIN
 RENE
 JEAN-MICHEL
 JEAN
 ROBERT
 PIERRE
 NICOLAS
 DOMINIQUE
 ROBERT
 MARCEL
 JACQUES
 FRANCOIS
 PIERRE
 EMIL
 PHILIPPE
 JEAN-CHARLES
 GEORGES
 MICHEL
 WALTER
 IOAN
 GERARD
 CHRISTIAN
 ROLAND
 JEAN-MARIE
 JEAN
 JEAN-MARIE
 BERNARD
 ALAIN
 JEAN-CLAUDE
 ANTOINE
 MONIQUE
 DOMINIQUE
 JEAN-PIERRE
 JOSEPH
 JEAN-PAUL

SUERY
 TEODOSIU
 VACHAUD
 VAUCLIN
 WACK
 YAVARI
 YONNET

MICHEL
 CHRISTIAN
 GEORGES
 MICHEL
 BERNARD
 ALI-REZA
 JEAN-PAUL

à ma femme, Mirian et mes enfants Renata et Anna Carolina

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à :

Monsieur R. PERRET, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui m'a accueilli au sein du Laboratoire dont il était le Directeur au début de mon travail.

Monsieur J. C. SABONNADIÈRE, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, pour ce sujet qu'il m'a proposé et pour tous ses conseils et encouragements.

Monsieur J. L. COULOMB, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, que je tiens, tout particulièrement à remercier pour l'encadrement et le soutien exceptionnel dont j'ai bénéficié durant ces quelques années passées au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble; J. L. COULOMB a su par ses grandes compétences scientifiques et par ses qualités humaines de simplicité et d'amitié, me motiver pour mener à bien mes travaux.

Monsieur A. FOGGIA, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour avoir toujours manifesté un intérêt certain à propos de ce travail et enfin pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur J. M. BIEDINGER, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne pour avoir accepté de rédiger un rapport sur ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Monsieur P. MAHEY, maître de conférences à l'Université Joseph Fourier de Grenoble et habilité à diriger les recherches à l'INPG, pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues avoir, pour les travaux que nous avons effectués ensemble et enfin pour avoir accepté de juger ce travail et d'en être rapporteur.

Monsieur C. KIENY, Chef de Groupe au Département Machines Electriques Service Matériel Electrique de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Monsieur G. MEUNIER, Directeur de Recherches au CNRS, pour son accueil chaleureux au sein de l'équipe Modélisation et pour ses encouragements; qu'il soit assuré de ma sincère reconnaissance.

Monsieur S. R. HOOLE, Professeur au Department of Engineering, Harvey Mudd College, à Claremont (USA), qui m'a fait profiter de sa grande expérience dans le domaine de la modélisation, et avec lequel j'ai passé de très bons moments.

Monsieur A. KONRAD, Professeur au Department of Engineering of Toronto University, Toronto, Canada, pour les discussions instructives que nous avons eues et pour les bons moments passés ensemble.

Messieurs K. KADDED et J. TEIXEIRA pour les discussions que nous avons eues, toujours amicales, et de grande qualité.

Mme S. PELLETIER, qui a assuré la dactylographie de ce document avec beaucoup de soin et avec une diligence exceptionnelle.

Messieurs B. T. CHIA, H. MAGNIN, Y. MARECHAL, X. BRUNOTTE, P. LABIE, pour les fructueuses collaborations et discussions que nous avons eues ensemble, ainsi que les bons moments passés ensemble.

Mmes O. SANTANA, G. BUISSON, E. CALLEGHER, F. OSSART, J. BRICHET, J. EVEN, Melle S. DEROU et Messieurs B. PARENTE, L. LEBENSZTAJN, P. LOMBARD, H. TAIEB, G. REYNE, I. SAKELLARIS, P. GUILLOT, S. PELISSIER, J. P. YONNET, T. RAFFESTAIN, E. VASSENT, A. RAIZER, J. M. DEDULE, T. NGNEGUEU, G. CARRON de la MORINAIS, M. DARCHERIF, B. MALLET, S. NABETA, E. BOURGOIN, S. AHRENS, I. H. PARK, P. STANISLAS, A. AZZOUZ, M. JARNIEUX, N. HADJ-SAID, B. BELHOUCINE, V. SILVA, W. MORWEISER, C. BACHA, C. GUERIN, S. MEKTOUB, B. NEKOUL, R. S. SHI, M. BENAHMED, pour tous les bons moments passés dans une atmosphère de camaraderie.

Je remercie enfin mes parents de m'avoir appris à apprécier la connaissance et la culture à leur juste valeur.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I OPTIMISATION DE FORME EN ELECTROTECHNIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION	10
I.1 Mise en Equation du Problème	11
I.2 Caractérisation des Problèmes d'Optimisation	12
I.2.1 Introduction	12
I.2.2 Caractérisation des Problèmes Electromagnétiques d'Optimisation	13
I.3 Méthodes de Résolution de Problèmes d'Optimisation Non Linéaire Continus	15
I.3.1 Introduction	15
I.3.2 Critères d'Optimalité	16
I.3.2.1 Introduction	16
I.3.2.2 Conditions Nécessaires d'Optimalité de KUHN et TUCKER	16
I.3.3 Programmation Mathématique	17
I.3.4 Caractéristiques Générales des Deux Approches Classiques	18
I.4 Programmation Non Linéaire	19
I.4.1 Introduction	19
I.4.2 Considérations Générales	19
I.5 Optimisation de Forme en Electrotechnique	23
I.5.1 Introduction	23
I.5.2 Optimisation de Forme par la Méthode des Eléments Finis	23
I.5.3 Optimisation de Forme en Electrotechnique par la Méthode des Eléments Finis	24

I.5.3.1	Considérations Initiales	24
I.5.3.2	L'Etat de l'Art	24
I.6	Conclusion	26
CHAPITRE II METHODES DE PROGRAMMATION NON LINEAIRE ETUDIEES		27
INTRODUCTION		27
II.1	Considérations Initiales	28
II.1.1	Choix des méthodes	28
II.1.2	Continuité, Convexité et Convergence	29
II.1.3	Présentation des Méthodes	30
II.2	Méthodes de Transformation Etudiées	31
II.2.1	Méthodes de Pénalité	31
II.2.1.1	Introduction	31
II.2.1.2	Méthodes de Pénalités intérieures	31
II.2.1.2.1	Introduction	31
II.2.1.2.2	Principe Général des Méthodes de Pénalités Intérieures	32
II.2.1.2.3	Fonction de Pénalité Intérieure Etendue	34
II.2.1.2.4	Détermination du Facteur de Réponse r_k et du Paramètre de Transition e_k	36
II.2.1.2.5	Minimisation de la Fonction de Transformation $W(x, r)$	38
II.2.1.2.6	Algorithme Réalisé	41
II.2.1.2.7	Exemple	42
II.2.1.2.8	Conclusion	43
II.2.2	Méthode des Asymptotes Mobiles	44
II.2.2.1	Introduction	44
II.2.2.2	Principe Général de la Méthode des Asymptotes Mobiles	45

II.2.2.3	La Stratégie des Contraintes Actives	47
II.2.2.4	Le Choix des Paramètres L, U, α et β	49
II.2.2.5	Le Problème Dual	51
II.2.2.6	Résolution du Problème Dual	55
II.2.2.7	Algorithme Réalisé	55
II.2.2.8	Exemple	57
II.2.2.9	Conclusion	58
II.3	Méthodes Directes Etudiées	59
II.3.1	Méthodes de Programmation Quadratique Récursive	59
II.3.1.1	Introduction	60
II.3.1.2	Principe Général de la Méthode de Programmation Quadratique Récursive	60
II.3.1.3	Détermination du Sous Problème Quadratique dans l'Algorithme de Pshenichny - Tseng - Arora	63
II.3.1.4	Résolution du Sous Problème Quadratique (ou Détermination du Vecteur Direction de Recherche d_k)	64
II.3.1.5	Calcul du Pas α_k	66
II.3.1.6	Algorithme Réalisé	67
II.3.1.7	Exemple	69
II.3.1.8	Conclusion	70
II.3.2	Méthode de l'Ellipsoïde	71
II.3.2.1	Introduction	71
II.3.2.2	Principe Général de la Méthode de l'Ellipsoïde	71
II.3.2.3	Evolution de l'Opérateur (Matrice de la Métrique) Q_k	74
II.3.2.4	Algorithme Réalisé	75
II.3.2.5	Exemple	77
II.3.2.6	Conclusion	79
II.4	Conclusion	79

III.3 L'Optimisation de Forme en Electrotechnique à l'Aide de la Méthode des Eléments Finis	102
III.3.1 Introduction	102
III.3.2 L'Architecture Générale d'un Logiciel d'Optimisation de Forme avec l'Analyse par la Méthode des Eléments Finis	102
III.3.3 L'Optimisation et l'Analyse de Sensibilité	104
III.3.4 L'Analyse de Sensibilité	105
III.3.4.1 Introduction	105
III.3.4.2 L'Analyse de Sensibilité dans le Contexte de la Méthode des Eléments Finis	106
III.3.4.3 Méthodes d'Analyse de Sensibilité	108
III.3.4.4 Choix d'une Méthode	111
III.4 Conclusion	113
CHAPITRE IV APPLICATIONS	115
INTRODUCTION	115
IV.1 Considérations Initiales	115
IV.2 Applications	116
IV.2.1 Optimisation de la Forme d'un Actionneur à Gradient de Champ	116
IV.2.1.1 Introduction	116
IV.2.1.2 Position du Problème	118
IV.2.1.3 Résultats Obtenus	120
IV.2.1.4 Conclusion	123
IV.2.2 Optimisation de la Forme d'un Electroaimant	124
IV.2.2.1 Introduction	124
IV.2.2.2 Position du Problème	126
IV.2.2.3 Résultats Obtenus	129
IV.2.2.4 Conclusion	132

IV.2.3	Optimisation de Br dans une Machine Synchrone à Pôles saillants à Aimants Permanents	133
IV.2.3.1	Introduction	133
IV.2.3.2	Position du Problème I	135
IV.2.3.2.1	Considérations Initiales	135
IV.2.3.2.2	Résultats Obtenus	137
IV.2.3.2.3	Conclusion	140
IV.2.3.3	Position du Problème II	141
IV.2.3.3.1	Considérations Initiales	141
IV.2.3.3.2	Résultats Obtenus	143
IV.2.3.3.3	Conclusion	154
IV.2.4	Optimisation de la Forme des Pièces Polaires Rotoriques dans une Machine à Réductance Variable pour l'Obtention d'un Couple Maximal Fixé	154
IV.2.4.1	Introduction	154
IV.2.4.2	Position du Problème	155
IV.2.4.3	Résultats Obtenus	158
IV.2.4.4	Conclusion	159
IV.3	Conclusion	160
CONCLUSION		161
ANNEXE AI	Méthode Quasi-Newtonienne BFGS	164
ANNEXE AII	Sous-Gradient	166
ANNEXE AIII	Résultats Comparatifs	167
BIBLIOGRAPHIE		171

INTRODUCTION

Au cours des dernières années, l'évolution rapide des techniques informatiques et numériques a eu des répercussions importantes dans le domaine de l'électrotechnique.

Notamment, de nombreux travaux ont été effectués sur la compréhension, le développement et l'application de la modélisation par la méthode des éléments finis, et se sont concrétisés par l'apparition d'outils de Conception Assistée par Ordinateur maintenant utilisés couramment dans les entreprises (FLUX2D, FLUX3D, ...).

L'introduction de ces outils de CAO dans les bureaux d'études a permis de réduire de manière significative le temps nécessaire à la mise au point de nouvelles structures, tout en améliorant leurs performances. Le gain de productivité est en particulier obtenu grâce à la réduction du nombre de prototypes effectivement construits lors de la phase d'étude.

En effet, désormais, le concepteur peut réaliser des modèles informatiques, en quelque sorte des "prototypes numériques", qui peuvent se substituer à une partie des "prototypes réels" dans la progression vers le dispositif final.

La démarche du concepteur peut être rendue encore plus efficace, en rapidité et en qualité, si une partie de l'affinage des "prototypes numériques", la plus mécanique, peut être prise en charge par l'ordinateur. C'est cette approche vers "l'optimisation automatique", qui a fait l'objet de nos travaux de Thèse au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble.

Le processus d'optimisation peut être vu comme une suite de tentatives successives pour atteindre l'optimum d'un certain critère (couple maximal, perte minimale, ...) tout en respectant certaines contraintes (induction maximale, volume maximal, ...). Lorsque le processus d'optimisation est automatique, son efficacité est conditionnée par la méthode d'optimisation mise en oeuvre car, au cours de l'optimisation, le critère, les contraintes et leurs gradients doivent être évalués le moins souvent possible puisque il s'agit ici de coûteux appels à la méthode des éléments finis.

Notre travail, dans ce domaine, fait suite aux travaux de KOUYOUMDJIAN [19] et GITOSUSASTRO [23] qui ont mis en oeuvre des techniques élaborées d'analyse de sensibilité (calcul des gradients) à partir de la méthode des éléments finis pour la modélisation des dispositifs en Electrotechnique.

Ces techniques constituent une approche efficace et précise pour l'analyse de sensibilité. Cependant, des difficultés de mise en oeuvre apparaissent lorsque l'objectif et/ou les contraintes dans les processus d'optimisation correspondent à des expressions de nature implicite des variables dérivées de la résolution par éléments finis. Autrement dit, si le traitement d'un nouveau critère et/ou d'une nouvelle contrainte est parfaitement maîtrisé sur le plan théorique, son implantation dans un logiciel nécessite, chaque fois, un développement spécifique.

Ces difficultés expliquent pourquoi peu d'outils généraux d'optimisation basés sur la méthode des éléments finis sont à l'heure actuelle disponibles.

Du point de vue du calcul de sensibilité, nous avons suivi une approche radicalement différente. Nous avons en effet adopté la méthode classique des différences finies. L'avantage de cette démarche est de pouvoir utiliser tout logiciel éléments finis (ou autre), tel quel, sans aucune modification.

L'analyse de sensibilité par différences finies est générale et très simple à mettre en oeuvre. Cependant, le prix à payer pour cette simplicité est bien sûr un temps de calcul important puisqu'il faudra plusieurs appels au programme éléments finis pour déterminer les gradients en un point. Par conséquent, les méthodes d'optimisation utilisées doivent être les plus rapides possibles afin de minimiser le nombre d'itérations.

Cette démarche simplificatrice nous a permis de concentrer nos efforts sur la compréhension, le développement et la mise en oeuvre des méthodes de programmation non linéaire adaptées à nos besoins.

A travers notre étude, nous espérons mettre en évidence l'énorme potentiel que représente, dans le domaine de la modélisation, l'utilisation conjointe d'analyses par la méthode des éléments finis et d'algorithmes de la programmation mathématique.

Dans le premier chapitre, après un travail de recherche bibliographique sur l'état de l'art dans le domaine de la synthèse de forme en électrotechnique, nous fixerons le cadre et les limites de notre étude.

Le second chapitre sera consacré à la présentation des méthodes de programmation non linéaire choisies pour mener cette étude. Nous essayerons, alors, de mettre en évidence les aspects algorithmiques importants propres à chaque méthode.

Dans le troisième chapitre, après un bref rappel de la méthode des éléments finis en magnétostatique, nous aborderons d'une façon succincte l'architecture générale d'un logiciel éléments finis. Nous montrerons à cette occasion l'intérêt, pour la mise en oeuvre du processus d'optimisation, de la définition paramétrique des données. Nous présenterons également les méthodes de calcul de sensibilité et nous expliquerons comment nous avons procédé pour améliorer la précision des calculs dans la méthode des différences finies.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous présenterons l'utilisation des méthodes de programmation non linéaire sur des applications prises dans le domaine de la magnétostatique bidimensionnelle.

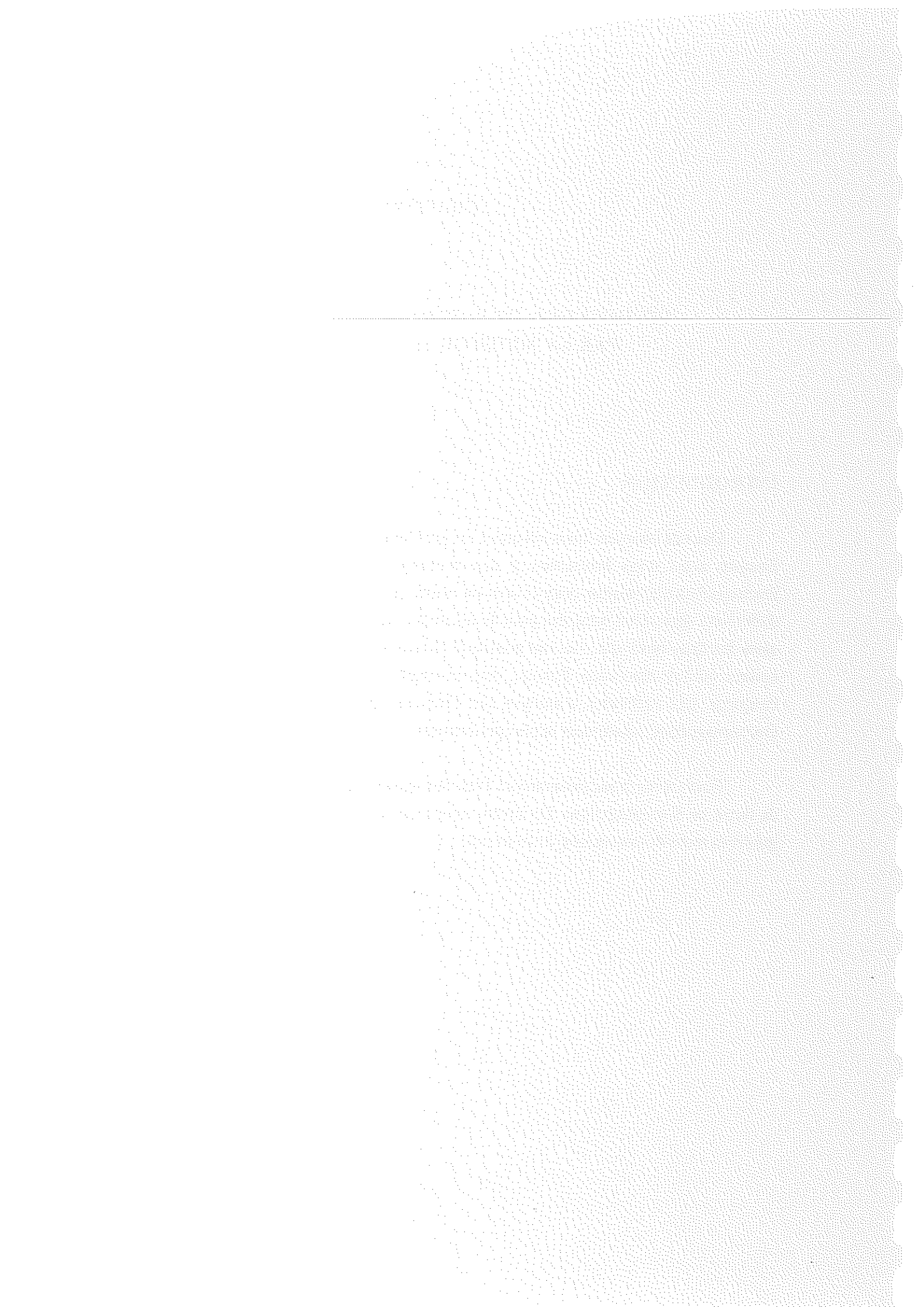
CHAPITRE I

OPTIMISATION DE FORME EN ELECTROTECHNIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous situerons les problèmes d'optimisation dans un contexte général. Ensuite nous nous limiterons à des problèmes continus d'optimisation de forme en électrotechnique, puisque ceux-ci sont au centre de nos préoccupations. Nous présenterons les différentes approches adoptées pour la résolution de ces problèmes. Nous essayerons ainsi de saisir les hypothèses qui nous ont poussés à choisir les méthodes de programmation non linéaire comme outil de résolution. Ensuite, nous envisagerons l'emploi de ces méthodes d'optimisation couplées aux méthodes d'analyse par éléments finis dans la conception de dispositifs électromagnétiques nouveaux et plus performants.

Finalement, nous présenterons l'état des travaux dans le domaine de la synthèse optimale de forme en électrotechnique. Ce faisant, nous mettrons en évidence certains aspects qui nous ont guidés et motivés tout au long de ce travail.



I.1 Mise en Equation du Problème

Du point de vue mathématique, un problème d'optimisation avec contraintes peut être écrit sous la forme

minimiser $f_0(x)$.

Sous les contraintes

$$f_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^n$$

I.1.1

où $f_0(x)$ est la fonction objectif, $f_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) sont les fonctions contraintes, x est le vecteur de composantes x_1, x_2, \dots, x_n , qui représentent les inconnues du problème et S représente les contraintes "faciles" à traiter.

Dans cette étude, pour simplifier la présentation des techniques d'optimisation étudiées, nous n'envisagerons que la minimisation (ou la maximisation) d'une fonction soumise à des contraintes d'inégalité.

En pratique, la fonction objectif peut être par exemple un indice de dégagement, une fonction de prix, une fonction de profits etc..., les contraintes peuvent être les limitations physiques, les corrélations, le balancement de ressources ou d'énergie etc...

Une solution réalisable du problème I.1.1 est tout vecteur $x \in S$ vérifiant les contraintes (fig. I.1). Une solution optimale (optimum global) du problème I.1.1 est une solution qui minimise $f_0(x)$ sur l'ensemble de toutes les solutions réalisables en respectant les contraintes (figure I.1).

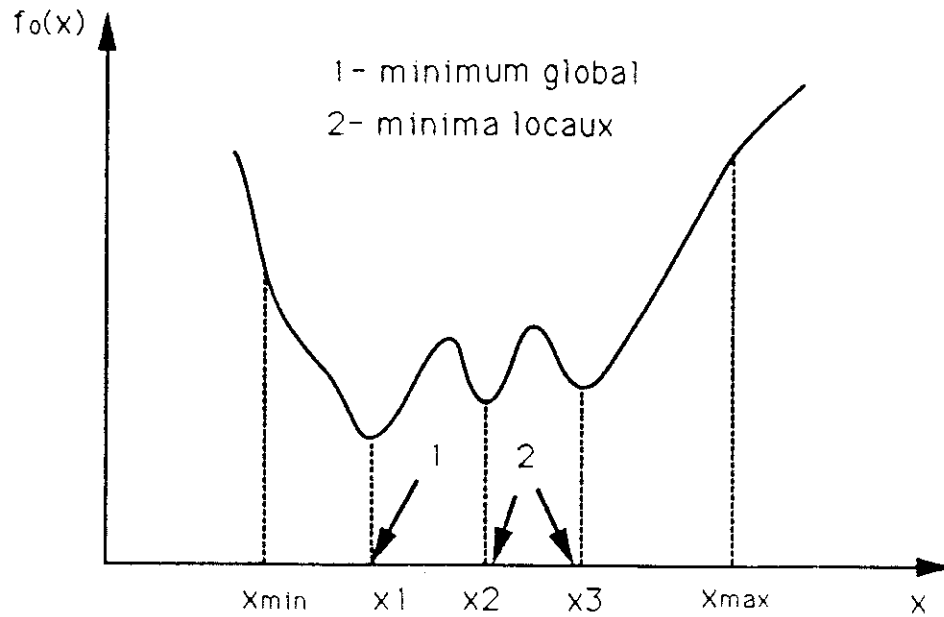


Figure I.1 : Minima locaux et minimum global ($S = \{x \in \mathbb{R} / x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$)

Minimum global : $f_0(x^*) \leq f_0(x), \forall x \in S$

Minimum local : $f_0(x^*) \leq f_0(x), \forall x \in S \cap V_\epsilon(x^*)$

où $V_\epsilon(x^*)$ est un voisinage de x^* qui contient une boule de rayon ϵ de centre x^* .

I.2 Caractérisation des Problèmes d'Optimisation

I.2.1 Introduction

Dans la pratique, il est rare que l'énoncé d'un problème d'optimisation soit unique. De plus, il est généralement impossible d'affirmer que l'optimum global est atteint (sauf dans certains cas particuliers).

Par contre, nous le verrons il est tout-à-fait possible aujourd'hui, d'apporter des solutions satisfaisantes à de nombreux problèmes, lorsque ceux-ci sont convenablement posés.

En pratique, il est usuel de classer les problèmes d'optimisation en fonction de leurs caractéristiques mathématiques. Dans le tableau I.1, nous présentons une telle classification suivant les caractéristiques de la fonction objectif et des fonctions contraintes.

Tableau I.1 Classification des différents types de problèmes d'optimisation [8].

Caractéristiques de la fonction objectif $f_0(x)$	Caractéristiques des fonctions contraintes $f_j(x)$
- Fonction d'une variable unique	- Sans contrainte
- Fonction linéaire	- Simples limites
- Somme des carrés de fonctions linéaires	- Fonctions linéaires
- Fonction quadratique	- Fonctions linéaires discrètes
- Somme des carrés de fonctions non linéaires	- Fonctions non linéaires continues
- Fonction non linéaire continue	- Fonctions non linéaires discrètes
- Fonction non linéaire discrète	- Fonctions non linéaires non continues
- Fonction non linéaire non continue	

I.2.2 Caractérisation des Problèmes Electromagnétiques d'Optimisation

En fonction du vecteur x inconnu et des critères spécifiés (source, effet) les problèmes électromagnétiques d'optimisation peuvent être classés de la façon suivante :

- a - Problème continu
(si la source et l'effet sont continus)
- b - Problème discontinu
(si la source et/ou l'effet sont discontinus)
- c - Problème discret
(si la source et l'effet sont discrets)

d - Problème semi-discret

(Si la source est discrète et l'effet est continu et vice-versa)

Nous allons nous intéresser aux problèmes d'optimisation en électrotechnique qui appartiennent à la classe des problèmes continus en programmation mathématique. Dans la littérature, ils sont, souvent, appelés problèmes inverses continus [1-6]. Ces derniers peuvent être divisés en deux catégories [5] :

- Problèmes d'identification
- Problèmes de synthèse

Les problèmes d'identification peuvent être écrits sous la forme :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \tag{I.2.1}$$

où \mathcal{A} est un opérateur continu défini sur S (ensemble continu, compact dans \mathbb{R}^n) qui représente la fonctionnelle de relation entre la source et l'effet, \boldsymbol{x} est la source et \boldsymbol{b} est l'effet. Dans les problèmes d'identification, l'objectif est de déterminer la source \boldsymbol{x} (qui existe a priori) produisant l'effet \boldsymbol{b} (problème figure I.2 avec \boldsymbol{x} = densité de courant \boldsymbol{J}_S et \boldsymbol{b} = induction magnétique B).

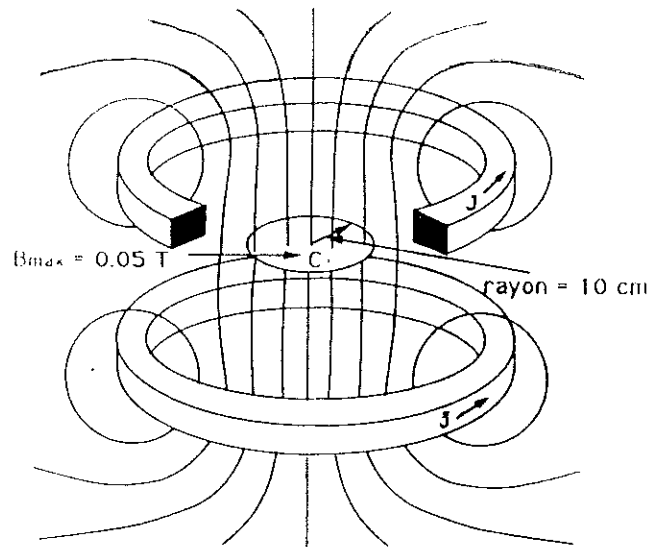


Figure I.2 : Exemple d'un problème électromagnétique continu. Une densité de courant J_S constante parcourt les deux bobines de façon à produire une induction magnétique B approximativement constante dans un volume C .

Les problèmes de synthèse peuvent être écrits comme :

$$\min ||\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}||_2 \quad \text{I.2.2}$$

où $|| \cdot ||_2$ est une norme euclidienne.

Dans les problèmes de synthèse, la source \mathbf{x} doit être capable de produire un effet le plus proche possible de l'effet spécifié \mathbf{b} (problème figure I.2: détermination de la géométrie des bobines "source" capable de produire une induction spécifiée "effet" dans un endroit donné).

Généralement, dans cette catégorie, les problèmes peuvent présenter plusieurs solutions réalisables et de ce fait constituer une difficulté de plus pour les concepteurs [1-6].

Ayant fixé le cadre de la recherche sur la résolution des problèmes d'optimisation de forme continue en électrotechnique, nous pouvons maintenant, nous diriger vers la compréhension des différentes méthodes d'optimisation qui peuvent être utilisées.

I.3 Méthodes de Résolution de Problèmes d'Optimisation Non Linéaire Continu

I.3.1 Introduction

Pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaires sous contraintes, nous disposons de deux grandes approches: l'approche par critères d'optimalité et celle par programmation mathématique [7].

La première approche est basée sur l'utilisation de la notion intuitive de critères d'optimalité. Normalement, cette approche est très bien adaptée à l'optimisation des grands systèmes structuraux, grâce à sa convergence rapide et à son indépendance par rapport au nombre de variables de conception. Cependant, cette méthode manquant de généralité et fortement sujette aux phénomènes d'instabilité de convergence, ne peut pas garantir l'obtention d'un véritable point optimal [7].

L'approche par programmation mathématique se fonde sur les techniques de la programmation non linéaire pour la recherche selon une direction bien définie dans l'espace de conception. Celle-ci est tout-à-fait générale. Cependant, cette approche demande un nombre d'itérations qui croit entre autre avec le nombre de variables de conception [7-10].

I.3.2 Critères d'Optimalité

I.3.2.1 Introduction

Dans cette approche, la solution d'un problème d'optimisation est recherchée en supposant que les conditions que doivent vérifier les variables pour assurer l'optimalité du problème sont connues à priori et en résolvant le système d'équations ainsi obtenu.

Le critère d'optimalité préconisé est tout simplement l'expression explicite des conditions de KUHN et TUCKER écrites pour le problème [7]. Ces conditions d'optimalité font intervenir les variables duales (ou multiplicateurs de KUHN-TUCKER) associées aux fonctions contraintes du problèmes.

I.3.2.2 Conditions Nécessaires d'Optimalité de KUHN et TUCKER

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } f_0(x)$$

Sous les contraintes

$$f_j(x) \leq 0 \quad j \in J_0 = \{1, 2, \dots, m\}$$

I.3.1

Si les fonctions f_0 et f_j ($j \in J_0$) sont continûment différentiables, le problème I.3.1 peut être résolu en utilisant sa fonction de Lagrange associée :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{j \in J_0} \lambda_j f_j(x)$$

I.3.2

et les conditions nécessaires à l'existence d'un minimum local pour le problème (KUHN et TUCKER 1951) [7-10] sont les suivantes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_0} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

I.3.3

$$\lambda_j f_j(x) = 0 \quad j \in J_0$$

I.3.4

$$\lambda_j \geq 0 \quad j \in J_0$$

I.3.5

où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et J_1 est un sous-ensemble des indices des fonctions contraintes considérées comme actives au point x . Faire l'hypothèse de qualification des fonctions contraintes au point x revient à considérer que:

- $\{\nabla f_j(x)\}$ sont linéairement indépendents avec $j \in J_1$.

J_1 est l'ensemble des indices des contraintes saturées au point x , c'est-à-dire :

$$J_1 = \{j \in J_0 / f_j(x) = 0\} \quad \text{I.3.6}$$

(x étant un optimum local de I.3.2 [7-10]).

Les méthodes d'optimisation qui résolvent d'une façon itérative les équations I.3.3 et I.3.4 en respectant l'équation I.3.5 sont appelées méthodes des critères d'optimalité.

Il est important d'observer que si les fonctions du problème I.3.1 sont convexes les conditions de KUHN et TUCKER deviennent suffisantes pour l'optimalité globale du problème [8-10].

I.3.3 Programmation Mathématique

La programmation mathématique se donne comme objectif l'étude des problèmes généraux d'optimisation ainsi que la conception et la mise en oeuvre d'algorithmes pour l'analyse et la résolution de nombreux problèmes de mathématiques appliquées.

Historiquement, la littérature concernant les méthodes de programmation mathématique était pratiquement inexistante avant les années cinquante, mais elle s'est développée rapidement peu avant les années soixante. Ce rythme qui s'accélère, a été renforcé depuis peu par une meilleure exploitation et connaissance des techniques numériques, grâce à l'apparition d'ordinateurs performants.

Pour l'instant nous ne développons pas leur présentation car certaines méthodes de la programmation non linéaire feront l'objet d'une explication plus précise dans la suite de ce chapitre.

I.3.4 Caractéristiques Générales des Deux Approches Classiques

Comme on le voit sur le tableau I.2 les deux grandes approches classiques pour la résolution des problèmes sous contraintes non linéaires sont radicalement opposées ; les avantages de l'un correspondent aux inconvénients de l'autre et vice-versa.

Tableau I.2 Caractéristiques générales des deux approches classiques [7].

Programmation Mathématique	Critères d'optimalité
Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> - Généralités - Méthodes rigoureuses - Convergence assurée en un minimum local - Stabilité de convergence 	<ul style="list-style-type: none"> - Spécificité - Méthodes intuitives - Convergence vers une conception non nécessairement optimale - Risque de divergence
Inconvénients	Avantages
<ul style="list-style-type: none"> - Nombre de réanalyses élevé et croissant avec le nombre de variables - Nombre de variables généralement petit 	<ul style="list-style-type: none"> - Nombre de réanalyses petit et indépendant du nombre de variables - Nombre de variables généralement très grand

I.4 Programmation Non Linéaire

I.4.1 Introduction

Dans le domaine de la programmation mathématique, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la programmation non linéaire, nom donné à la classe de techniques numériques et analytiques qui permettent de résoudre un problème d'optimisation (I.3.1), quand la fonction objectif et/ou les fonctions contraintes sont non linéaires.

I.4.2 Considérations Générales

Les méthodes proposées dans la littérature peuvent être regroupées en deux catégories en fonction de leur fondement théorique :

- Les méthodes primales ou directes
- Les méthodes de transformation ou indirectes

Les méthodes primales sont des méthodes qui travaillent directement avec le problème original I.3.1. En général, le vecteur direction de recherche d_k au point x^k est déterminé par l'équation :

$$A^k d_k = \mu_0 \nabla f_0(x^k) + \sum_{j \in J_1} \mu_j \nabla f_j(x^k) \quad \text{I.4.1}$$

où $\mu_0, \mu_j \geq 0$ avec $j \in J_1$ sont des scalaires, J_1 est le sous-ensemble des indices des fonctions contraintes considérées comme actives au point x^k et A^k est une matrice définie positive.

Il faut remarquer que:

- Si A^k est une matrice identité, nous sommes conduits à une méthode du type gradient.
- Si A^k est le hessien en x de la fonction de Lagrange associée, nous sommes conduits à la méthode de Newton.
- Si A^k est une approche du hessien en x de la fonction de Lagrange associée, nous sommes conduits à une méthode du type quasi-Newton.

Ces méthodes sont capables de résoudre le problème d'optimisation (I.3.1) soit au moyen d'une suite de minimisations unidirectionnelles, soit en remplaçant le problème original (I.3.1) par une suite de sous-problèmes approchés.

Dans cette catégorie de méthodes rentrent la méthode des directions réalisables (ZOUTENDIJK 1960, TOPKIS et VEINOTT 1967) [8-10], la méthode du gradient réduit (P. WOLFE 1962) [8-10], les méthodes de programmation quadratique récursive (HAN - POWELL 1977) [8-10], etc...

Les méthodes de transformation sont des méthodes qui transforment le problème original I.3.1 avec contraintes en un sous-problème auxiliaire sans contrainte. Celles-ci créent habituellement une fonction de transformation telle que:

$$W(x^k, \mu) = F_0(f_0(x^k)) + \sum_{j \in J_1} \mu_j (F_j(x^k)) \quad \text{I.4.2}$$

où μ_j ($j \in J_1$) sont les paramètres de contrôle F_0 et F_j avec $j \in J_1$ sont des fonctions réelles qui jouent les rôles respectivement des fonctions objectif et contraintes dans le sous-problème et J_1 est le sous-ensemble des indices des contraintes actives au point x^k .

Rentrent dans cette catégorie les méthodes des pénalités extérieures (COURANT 1943, ABLOW et BRIGHAM 1955, FIACCO et McCORMICK 1968) [8-10], les méthodes des pénalités intérieures (CARROLL 1961, FIACCO et McCORMICK 1968) [8-10], les méthodes de lagrangien augmenté (POWELL 1969, HESTENES 1969, FLETCHER 1975) [8-10] etc...

Les méthodes de transformation sont séduisantes puisque les algorithmes classiques utilisés pour résoudre les problèmes d'optimisation sans contraintes peuvent être employés pour la résolution du problème transformé [8-10].

I.4.2 Tableaux des Méthodes de Programmation Non Linéaire Directes et de Transformation

Nous donnons ci-dessous le deux tableaux I.3 et I.4 résumant les principales méthodes de programmation non linéaires directes et de transformation.

Tableau I.3 Méthodes Directes [8-10].

Méthodes	Auteurs
Méthode de linéarisation	FRANK et WOLFE - 1956 DANTZIG - 1959 KELLEY - 1960
Méthode du gradient projeté	ROSEN - 1960
Méthode de directions réalisables	ZOUTENDIJK - 1960 TOPKIS et VEINOTT - 1967
Méthode du gradient réduit	P. WOLFE - 1962
Méthode du gradient réduit généralisé	ABADIE et CARPENTIER - 1969
Méthodes de programmation quadratique récursive	WILSON - 1963 PSHENICHNY - 1970 HAN - POWELL - 1977
Méthodes de coupe avec dilatation de l'espace	SHOR - 1977

Tableau I.4 Méthodes de Transformation [8-12].

Méthodes		Auteurs
Méthodes des Pénalités	Fonction de pénalité extérieure	COURANT - 1943 ABLOW et BRIGHAM - 1955 FIACCO et McCORMICK - 1968
	Fonction de pénalité intérieure	CAROLL - 1961 FIACCO et McCORMICK - 1968
	Fonction de pénalité intérieure étendue	KAVLIE et MOE - 1971 RAFTKA et STARNES - 1976
Méthode du Lagrangien augmenté		POWELL - 1969 HESTENES - 1969 FLETCHER - 1975
Méthode du Lagrangien projeté		ROBINSON - 1972 ROSEN et KREUSER - 1972 SARGEANT et MURTAGH - 1973
Méthode des variables mixtes		FLEURY et BRAIBANT - 1986
Méthode des Asymptotes mobiles		K. SVANBERG - 1987

I.5 Optimisation de Forme en Electrotechnique

I.5.1 Introduction

Des progrès considérables ont été effectués, au cours de ces vingt dernières années, dans le développement de méthodes numériques d'analyse de dispositifs électromagnétiques. Ces développements sont intimement liés à la croissance de la puissance et à la disponibilité des moyens de calcul offerts par l'ordinateur.

Il existe désormais des logiciels capables de résoudre les problèmes électromagnétiques dans toute leur complexité. Ces logiciels sont principalement basés sur la méthode des éléments finis, surtout en raison de sa grande souplesse.

La réunion de ces deux facteurs nous permet d'envisager l'emploi des méthodes d'optimisation pour concevoir de nouveaux dispositifs électromagnétiques plus performants.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux sous problèmes de conception susceptibles d'être automatisés, tâches qui peuvent être totalement ou partiellement prises en charge par l'ordinateur.

Généralement, les méthodes numériques d'optimisation procèdent d'une manière itérative : à partir d'une conception de départ, l'algorithme doit progresser dans l'espace de conception selon une trajectoire à définir.

I.5.2 Optimisation de Forme par la Méthode des Eléments Finis

Le concept de synthèse de forme a été introduit par SCHMIT au début des années soixante [13]. Dans son travail, SCHMIT envisage la possibilité de coupler les méthodes de programmation mathématique aux méthodes d'analyse par éléments finis, dans le but de développer un système capable de générer automatiquement des configurations optimales. Ainsi, il a établi les bases d'une procédure itérative de dimensionnement automatique de forme. Celle-ci consiste en une alternance entre une phase d'analyse de la forme, destinée à l'évaluation des critères (calcul par éléments finis) et d'une phase de minimisation proprement dite du problème (Programmation mathématique).

A ce jour, la plupart des codes d'optimisation de forme sont développés à partir de l'utilisation conjointe d'analyse par éléments finis et de techniques de programmation mathématique.

I.5.3 Optimisation de Forme en Electrotechnique par la Méthode des Eléments Finis

I.5.3.1 Considérations Initiales

Jusqu'à nos jours, très peu de dispositifs électromagnétiques opérationnels ont effectivement bénéficié des techniques d'optimisation, au sens large du terme. La plupart des concepteurs restent attachés à des approches classiques de conception, dans lesquelles les décisions reposent essentiellement sur l'expérience et l'intuition du concepteur.

En effet, il ne faut pas oublier que certaines phases de la conception relèvent essentiellement du savoir faire du concepteur et aussi que la conception est le résultat de compromis entre de nombreux facteurs offrant souvent peu de prises aux outils mathématiques connus.

I.5.3.2 L'Etat de l'Art

Dans le domaine de l'électrotechnique, les premières applications notoires ont été menées par MARROCO et PIRONNEAU en 78 [14]. Ils ont traité des problèmes d'optimisation de forme dans le domaine de la magnétostatique non linéaire continue. Pour le processus de conception, ils ont couplé l'analyse par la méthode des éléments finis à une méthode de programmation non linéaire. Les gradients utilisés pendant les phases de minimisation ont été évalués par la méthode de l'état adjoint, dont nous reparlerons dans le chapitre III.

Concrètement, l'efficacité de cette procédure était limitée du fait du grand nombre de réanalyses par éléments finis nécessaires, résultats de l'utilisation d'un algorithme de programmation mathématique numériquement peu efficace [6-12].

En 82 NAKATA et al [15] ont proposé une méthode d'optimisation de forme où les équations du problème de minimisation sont directement couplées au système d'équations par éléments finis. Avec ce processus, ils ont pu obtenir directement les dimensions géométriques

d'aimants permanents dans des dispositifs où la distribution de l'induction magnétique était à priori figée.

Cette procédure présente l'inconvénient d'être peu applicable à des problèmes où les critères d'optimisation portent sur des grandeurs dérivées ou intégrales de la solution du système par éléments finis [17-19].

En considérant l'expression des puissances électriques et mécaniques en formes hermitiennes des sources d'énergie, en 82 BIEDINGIER et al [16] ont proposé une approche numérique pour l'optimisation de la distribution de courants d'alimentation ou d'aimants permanents dans des machines électriques non conventionnelles (approche problème inverse). Cette approche a été appliquée à l'optimisation des moteurs linéaires.

Cependant, elle présente l'inconvénient d'être difficilement applicable à des problèmes d'optimisation où les critères portent sur des grandeurs générales dérivées de la résolution du système par éléments finis [17,18,19].

KOUYOUMDJIAN [19] en 85 a développé une méthodologie d'analyse de sensibilité, dans l'étude de dispositifs électromagnétiques conçus par éléments finis, basée sur la dérivation du jacobien de la transformation des coordonnées réelles en locales [17-21]. Ainsi, il a mis en oeuvre un moyen original et précis pour le calcul des dérivées partielles par rapport à des paramètres géométriques ou physiques, tout en permettant au concepteur l'exploitation directe de ces résultats.

Ensuite, en 86 SALON et al [22] ont suivi une démarche tout-à-fait parallèle. En particulier, ils ont renforcé l'idée que, dans le contexte complexe de l'optimisation de forme en électrotechnique, l'analyse de sensibilité est un pas extrêmement important.

Une approche similaire a été employée en 88 par GITOSUSASTRO [23], mais faisant appel à une méthode de pénalisation pour la résolution du problème d'optimisation. Son travail a montré que la méthode des éléments finis est un outil puissant pour l'évaluation des performances des systèmes électromagnétiques [23-24]. Cela semble justifié pour les critères qui sont fonctions de grandeurs locales ou intégrales.

DI BARBA et al [25] ont proposé en 90 une procédure d'optimisation, où l'ensemble de paramètres géométriques de conception évoluent selon certaines règles figées. Cependant de tels concepts sont forts contraignants pour des problèmes électrotechniques réalistes.

Nous devons également faire référence aux récents travaux réalisés par HOOLE et al [6,28] et PARK et al [29,30]. Ils sont très importants surtout en ce qui concerne la compréhension et l'utilisation des techniques d'optimisation dans le cadre d'un logiciel d'éléments finis.

I.6 Conclusion

Nous avons situé dans ce chapitre les problèmes d'optimisation de forme en électrotechnique qui seront traités dans le cadre de notre étude. Nous avons présenté différentes méthodes capables de résoudre ce type de problème, dans le but de saisir l'approche que nous allons développer par la suite. Nous avons présenté aussi l'état des travaux dans le domaine.

En considérant l'emploi des nouveaux concepts développés dans l'optimisation numérique, nous avons été amené à proposer l'utilisation de méthodes qui d'un point de vue algorithmique sont arrivées à une certaine maturité [7-12]. Celles-ci permettent d'améliorer sensiblement les caractéristiques d'un dispositif électromagnétique, tout en réduisant le coût de l'étude par l'exploitation efficace et systématique de configurations réalisables. Ces méthodes numériques procèdent donc d'une manière itérative et même dans les cas les plus complexes, elles peuvent converger en un nombre réduit d'analyses [27,28].

Dans le chapitre suivant nous allons donc présenter l'étude théorique des méthodes d'optimisation que nous avons choisies en vue de les adapter et appliquer d'une façon couplée à la méthode des éléments finis, dans la résolution de nos problèmes de conception de forme en électrotechnique.

CHAPITRE II

METHODES DE PROGRAMMATION NON LINEAIRE ETUDIEES

INTRODUCTION

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressés aux problèmes continus d'optimisation de forme en électrotechnique, où les équations qui décrivent la physique du problème sont résolues par la méthode des éléments finis.

Pour la résolution du problème d'optimisation proprement dit, nous avons choisi les méthodes de programmation non linéaire car elles sont capables de traiter efficacement les problèmes de conception de forme, tout en étant rapides sur le plan des calculs, précises dans leurs résultats, et surtout d'application universelle, c'est-à-dire, pouvant traiter des problèmes aux caractéristiques très variées.

Dans ce chapitre, nous allons donc faire la présentation théorique des méthodes de programmation non linéaire choisies pour mener cette étude, à savoir :

- méthodes des pénalités intérieures
- méthodes des asymptotes mobiles
- méthodes de programmation quadratique récursive
- méthode de l'ellipsoïde (méthode de coupe avec dilatation de l'espace).

Les méthodes présentées ont été choisies à la suite d'une étude bibliographique exhaustive pour leur généralité, leur efficacité et leur robustesse.

Pour la simplicité de ces présentations nous omettons les développements trop pointus. Le lecteur intéressé par plus de détails peut se rapporter à la littérature [8-10]. Cependant, nous aurons le souci de mettre en évidence les liens avec l'application envisagée et la définition des aspects importants dans l'algorithme réalisé pour chaque méthode.

II.1 Considerations Initiales

II.1.1 Choix des Méthodes

Dans ce chapitre nous aurons pour but de présenter les méthodes de programmation non linéaire choisies pour mener cette étude. Avant ces présentations, il convient de bien situer notre objectif et de saisir les raisons qui nous ont guidées dans nos choix.

Notre objectif fondamental est de comprendre le processus itératif particulier de chaque algorithme de manière à l'adapter à la conception de forme en électrotechnique à l'aide d'une méthode numérique (méthode des éléments finis).

Les méthodes de pénalités ont été choisies parce qu'elles constituent une famille d'algorithmes particulièrement intéressants du point de vue de la simplicité des principes et de l'efficacité au niveau des résultats pratiques. Sur le plan des idées de base, ces méthodes proposent simplement de remplacer le problème original sous contraintes, par une suite de sous-problèmes sans contraintes. Ainsi, nous pouvons facilement résoudre les sous-problèmes en utilisant des méthodes classiques de minimisation sans contraintes (exemple: BFGS, voir annexe A.I) [8-10,38].

La méthode des asymptotes mobiles a été choisie, parce qu'elle fait partie d'une classe de méthodes qui apparaissent aujourd'hui, comme les plus robustes pour la résolution de problèmes d'optimisation fortement non linéaires [8-12]. Elle utilise les techniques de linéarisation convexe de façon à transformer le problème original en une suite de sous-problèmes explicites possédant une structure algébrique simple. Chaque sous-problème explicite étant convexe et séparable, il peut être efficacement résolu en recourant à sa formulation duale. Dans cette approche, le traitement des variables duales présente une complexité additionnelle du point de vue de l'analyse numérique. Cependant, les bons résultats présentés dans la littérature nous ont encouragés à mener nos recherches dans cette direction [11,12].

Les méthodes de programmation quadratique récursive ont été choisies, parce qu'elles sont très intéressantes d'un point de vue pratique, car elles présentent une vitesse de convergence superlinéaire [8-10,35-38]. Elles sont donc efficaces pour des gros problèmes lorsque le coût d'une itération est très élevé. L'idée fondamentale dans ces méthodes est de remplacer la résolution du problème non linéaire contraint par la résolution d'un sous-problème quadratique sous des contraintes linéarisées au voisinage du point étudié.

Enfin, nous traiterons la méthode de l'ellipsoïde (ou méthode de coupe avec dilatation de l'espace) qui est particulièrement importante dans le domaine de l'optimisation des fonctions convexes et non partout différentiables ; type de problème qui peut se rencontrer dans de nombreuses applications d'ingénierie [5,8-10,38,39]. Cette méthode utilise le concept de sous-gradient (voir annexe A.II) d'une fonction en un point donné, qui est une généralisation de la notion de gradient appliquée aux fonctions non partout différentiables [39-41].

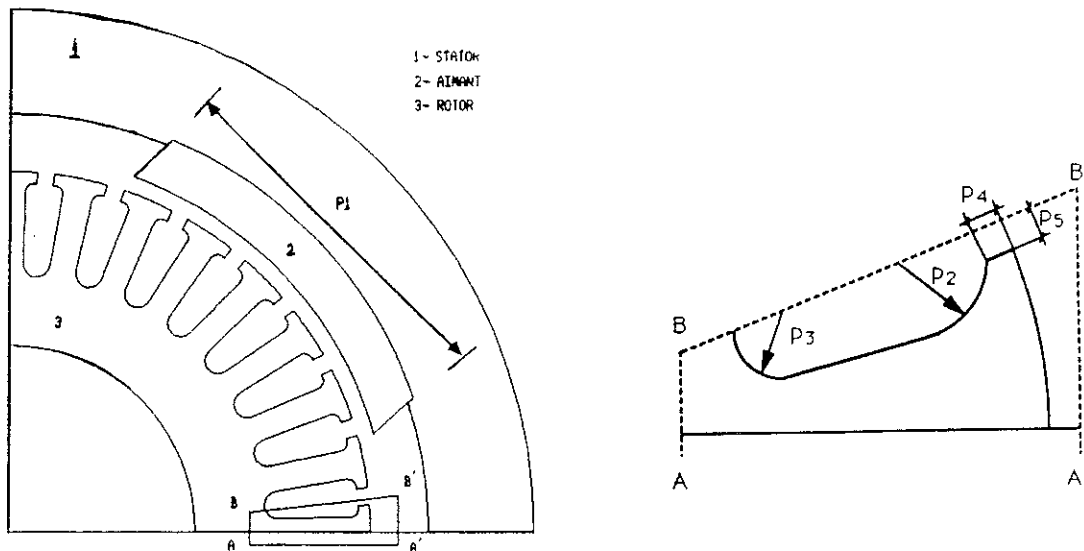
II.1.2 Continuité, Convexité et Convergence

Les méthodes que nous allons présenter sont de nature itérative, elles génèrent une suite de points qui converge vers une solution optimale si les fonctions considérées respectent les hypothèses de convexité et de différentiabilité.

Dans la pratique, il faut noter que ces hypothèses ne sont pas forcément vérifiées.

Dans l'optimisation de forme en électrotechnique la plupart des problèmes ont les caractéristiques suivantes:

- a) en général, la fonction objectif et/ou les fonctions contraintes sont fonctions implicites des paramètres à optimiser.



a) un quart de la géométrie de la machine

b) détail aa'bb' (encoche rotor)

Figure II.1.1: Machine à courant continu à aimant permanent

Exemple : Détermination des paramètres géométriques P_1, \dots, P_5 (figure II.1.1.a et b) de façon à réduire le couple d'encoche C_e (objectif minimiser $C_e (P_1, P_2, \dots, P_5)$), tout en respectant des aspects technologiques (encoche avec une surface réelle \geq surface minimale admissible) et des aspects physiques (induction magnétique dans le matériau magnétique inférieure à 1.8 Tesla, $B (P_1, P_2, \dots, P_5) \leq 1,8 \text{ T}$).

- b) l'évaluation des fonctions et de leurs gradients est relativement complexe, à cause des dépendances implicites avec les paramètres de conception.

Exemple : Déterminer la dérivée du couple d'encoche par rapport à P_2 (rayon haut encoche figure II.1.1.b)

$$\frac{\partial C_e (P_1, P_2, \dots, P_5)}{\partial P_2}$$

- c) la conception optimale est extrêmement non linéaire et en général, le problème ne peut pas être considéré comme convexe et partout différentiable.

D'un point de vue théorique, nous ne pouvons assurer la convergence de ces méthodes que si les hypothèses de convexité et différentiabilité sont vérifiées. Cependant, pour la plus grande partie des problèmes, il suffit qu'elles soient vérifiées localement. Les problèmes sont alors supposés convexes et différentiables dans un domaine restreint. Alors, les solutions obtenues sont seulement des optimums locaux.

D'une manière générale, les problèmes de conception de forme optimale seront plus facilement résolus grâce à une bonne connaissance de la physique des problèmes et des limitations des méthodes appliquées.

II.1.3 Présentation des Méthodes

Dans les pages qui suivent, nous allons essayer de dégager quelques idées fondamentales liées aux méthodes de programmation non linéaire qui ont été choisies dans le cadre de cette étude.

Nous commencerons par présenter les notions de base de chacune de ces méthodes en essayant de comprendre comment elles agissent sur un problème donné. Ensuite, nous présenterons les principes généraux de ces méthodes en insistant sur les points clés dans la construction de chaque algorithme.

Dans le cadre de nos problèmes, les fonctions ont à l'origine, généralement, un caractère non explicite par rapport aux variables de la conception. Donc, nous serons amenés à apporter quelques retouches au niveau de la mise en oeuvre de ces procédures, en particulier dans le processus de recherche unidirectionnelle.

Pour chaque méthode étudiée, nous présenterons l'algorithme que nous allons réaliser, suivi d'un exemple simple d'application donné à titre d'illustration.

II.2 Méthodes de Transformation Etudiées

II.2.1 Méthodes de Pénalité

II.2.1.1 Introduction

Les méthodes de pénalité font partie d'une classe d'algorithmes très utilisés car elles sont simples d'un point de vue théorique et d'une grande efficacité au niveau des résultats obtenus [8-10,31-38].

Cette catégorie de méthodes se divise en deux grandes variantes : les méthodes de pénalités extérieures et les méthodes de pénalités intérieures.

L'idée de base de ces méthodes est de remplacer la résolution du problème avec contraintes par celle d'une suite de problèmes sans contraintes, créés à partir de l'introduction des contraintes dans la fonction objectif de manière à pénaliser une quelconque violation de ces contraintes [42-44].

Nous allons nous intéresser exclusivement à l'étude des méthodes de pénalités intérieures. Elles sont particulièrement intéressantes dans le cas de l'optimisation de forme à partir de l'analyse par éléments finis, car chaque solution intermédiaire est généralement réalisable. Le processus itératif peut donc être interrompu à tout moment et fournir une conception améliorée satisfaisant les contraintes imposées.

II.2.1.2 Méthodes de Pénalités Intérieures

II.2.1.2.1 Introduction

Ces méthodes ont été initialement proposées par CARROLL en 1961 [42] avec le nom "Created Response Surface Techniques". FIACCO et McCORMICK apportèrent de nombreux

résultats théoriques fort intéressants sur la convergence et sur des relations avec la dualité dans cette classe de techniques [43,44]. Ils ont proposé les techniques de minimisation séquentielle sans contraintes (SUMT: Sequential Unconstrained Minimization Techniques). Dans ces techniques les fonctions contraintes sont introduites dans la fonction objectif comme des pénalités. Celles-ci empêchent de sortir de la région réalisable en faisant un compromis entre la minimisation de la fonction objectif et le souci de ne pas se rapprocher trop vite de la frontière du domaine admissible [42-44].

II.2.1.2.2 Principe Général des Méthodes des Pénalités Intérieures

Considérons le problème:

minimiser $f_0(x)$

avec les contraintes

II.2.1.1

$$x \in S = \{x / f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$$

Où la région S doit être un ensemble d'intérieur non vide en R^n , puisque les méthodes travaillent dans cette région.

Dans le but d'empêcher la sortie de la région réalisable, nous y substituons le problème.

$$\min W(x, r) = \min \left\{ f_0(x) + r_k \sum_{j=1}^m F_j(f_j(x)) \right\}$$

II.2.1.2

où $W(x,r)$ est la fonction de transformation pour le problème original II.2.1.1, r_k est un coefficient connu appelé facteur de réponse ($r_k \geq 0$) et F_j est la fonction de pénalité (ou barrière). F_j doit être positive et continue dans le domaine réalisable $\{x / f_j(x) < 0, j=1, \dots, m\}$ et aussi tendre vers l'infini à l'approche de la frontière de la région $\{x / f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$ à partir de l'intérieur [42-44]

CARROLL [42] a proposé la fonction inverse

$$F_j(f_j(x)) = -\frac{1}{f_j(x)}, j = 1, \dots, m$$

II.2.1.3

et la fonction logarithmique

$$F_j(f_j(x)) = \log[-f_j(x)], j = 1, \dots, m \quad \text{II.2.1.4}$$

Dans ces deux cas, lorsque une fonction $f_j(x)$ devient active, c'est-à-dire, lorsque $f_j(x)$ tend vers zéro, alors les fonctions $F_j(f_j(x))$ croissent et donc $W(x,r)$ sur S , représente un compromis entre la minimisation de $f_0(x)$ et l'éloignement de la frontière de S . Sa solution optimale est un point intérieur à S , ce qui fait que, pour la résolution numérique, c'est un problème pratiquement sans contrainte. La solution donc toujours réalisable, et d'autant meilleure pour f_0 que la pénalisation F_j est faible. En faisant tendre cette pénalisation vers zéro ($r_k \rightarrow 0$), la solution optimale du problème II.2.1.2 tend, sous certaines hypothèses [44], vers une solution optimale du problème II.2.1.1.

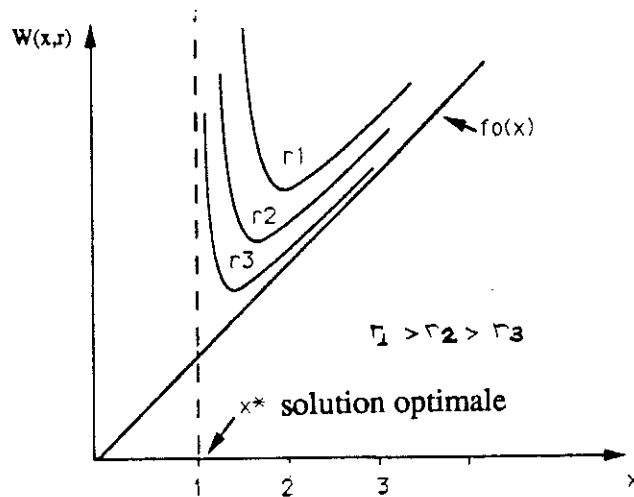
A titre d'exemple considérons le problème:

$$\begin{aligned} \min f_0(x) &= x \\ \text{soumis à } f_1(x) &= 1 - x \leq 0 \end{aligned} \quad \text{II.2.1.5}$$

avec la fonction de pénalité proposée par CARROLL [42] (II.2.1.3), le problème devient :

$$W(x, r) = x + r_k \left[-\frac{1}{1-x} \right] \quad \text{II.2.1.6}$$

où l'évolution de la fonction de transformation $W(x,r)$ par rapport au facteur r_k est illustrée sur la figure II.2.1



051 096744 0

Figure II.2.1 Illustration de la fonction de transformation $W(x,r)$ du problème II.2.1.6, fonction inverse proposée par CARROLL [42].

Le principe des méthodes de pénalités intérieures est alors le suivant :

Choisir une valeur $r_1 > 0$ et rechercher par une méthode itérative d'optimisation sans contrainte, un minimum de $W(x,r)$ à partir de $x^0 \in S$. Dans ce processus de recherche d'un minimum de $W(x,r)$ remarquons que la frontière S n'est jamais traversée, puisque au voisinage de celle-ci $W(x,r)$ tend vers l'infini (figure II.2.1).

Ces méthodes sont très intéressantes pour traiter des problèmes d'optimisation contraints fortement non linéaires, pour lesquels la plupart des méthodes directes rencontrent généralement de grosses difficultés. Cependant elles présentent l'inconvénient de la nécessité de trouver un point initial admissible et aussi elles ne permettent généralement pas d'obtenir des solutions avec une précision élevée, car ceci obligerait à choisir des paramètres de pénalité r très petits (figure II.2.1). Le paramètre r très petit entraîne un mauvais conditionnement du hessien de la fonction W et par conséquent des difficultés numériques pour l'obtention de la convergence.

II.2.1.2.3 Fonction de Pénalité Intérieure Etendue

De façon à surmonter la nécessité de trouver un point initial admissible, KALVIE et MOE [45] ont proposé une modification de la fonction barrière originale, en attendant qu'une solution réalisable soit atteinte. Ils ont utilisé les fonctions de pénalité intérieure étendue

$$F_j(f_j(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{f_j(x)} & \text{si } f_x \leq -\epsilon \\ \frac{2\epsilon + f_j(x)}{\epsilon^2} & \text{si } f(x) > -\epsilon \end{cases} \quad \text{II.2.1.7}$$

Où $\epsilon \ll 1$ est le paramètre de transition. Dans cette fonction lorsqu'une contrainte est violée la fonction de pénalité croît rapidement.

Le problème II.2.1.5 aura donc le schéma suivant pour la nouvelle fonction de transformation $W(x,r)$, quand les points initiaux sont placés dans la région non réalisable.

$$W(x, r) = x + r_k \frac{[2\epsilon + 1 - x]}{\epsilon^2} \quad \text{II.2.1.8}$$

si $x < 1 + \epsilon$ et dans la région réalisable ($x \geq 1 + \epsilon$) la fonction de pénalité de CARROLL (II.2.1.6).

La figure II.2.2 illustre ces considérations pour le problème II.2.1.5.

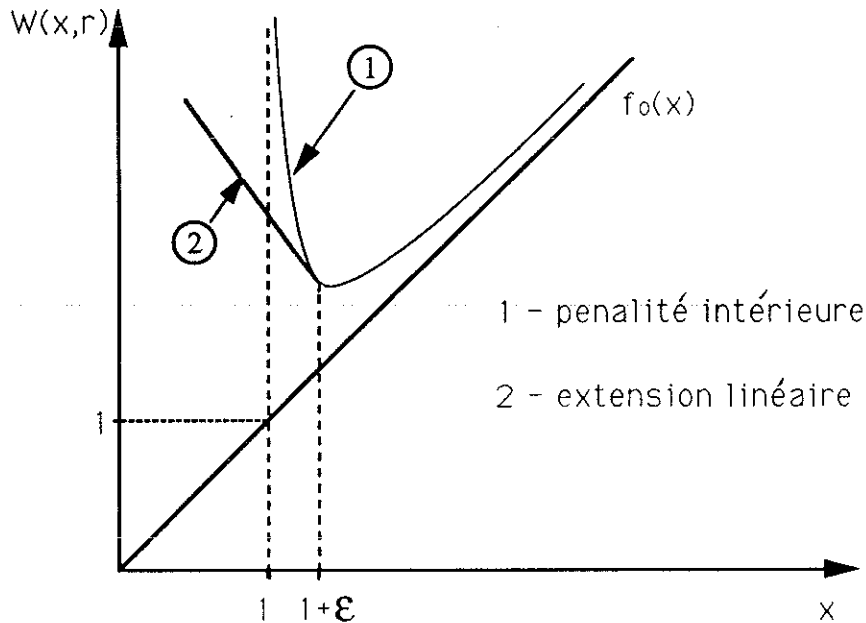


Figure II.2.2 Illustration de la fonction $W(x,r)$ de KALVIE et MOE pour le problème II.2.1.5.

Cependant, cette fonction présente l'inconvénient de ne pas avoir ses dérivées premières continues au point de transition (figure II.2.2), ce qui interdit l'utilisation des algorithmes de minimisation sans contrainte dits de deuxième ordre (ou méthodes quasi-newtoniennes, voir Annexe AI).

C'est pourquoi HAFTKA et STARNES [46] ont proposé la fonction de pénalité intérieure étendue suivante :

$$F_j(f_j(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{f_j(x)} & \text{si } f_j(x) \leq -\epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{f_j(x)}{\epsilon} \right)^2 + \frac{3 \cdot f_j(x)}{\epsilon} + 3 \right] & \text{si } f_j(x) > -\epsilon \end{cases} \quad \text{II.2.1.9}$$

laquelle présente une dérivée première continue au point de transition.

Pour le problème II.2.1.5, la fonction de transformation $W(x, r)$ est la suivante :

$$W(x,r) = \begin{cases} x + r_k \left[\frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{1-x}{\epsilon} \right)^2 + 3 \frac{(1-x)}{\epsilon} + 3 \right] \right] & \text{si } x < 1+\epsilon \\ x + r_k \left[-\frac{1}{1-x} \right] & \text{si } x \geq 1+\epsilon \end{cases} \quad \text{II.2.1.10}$$

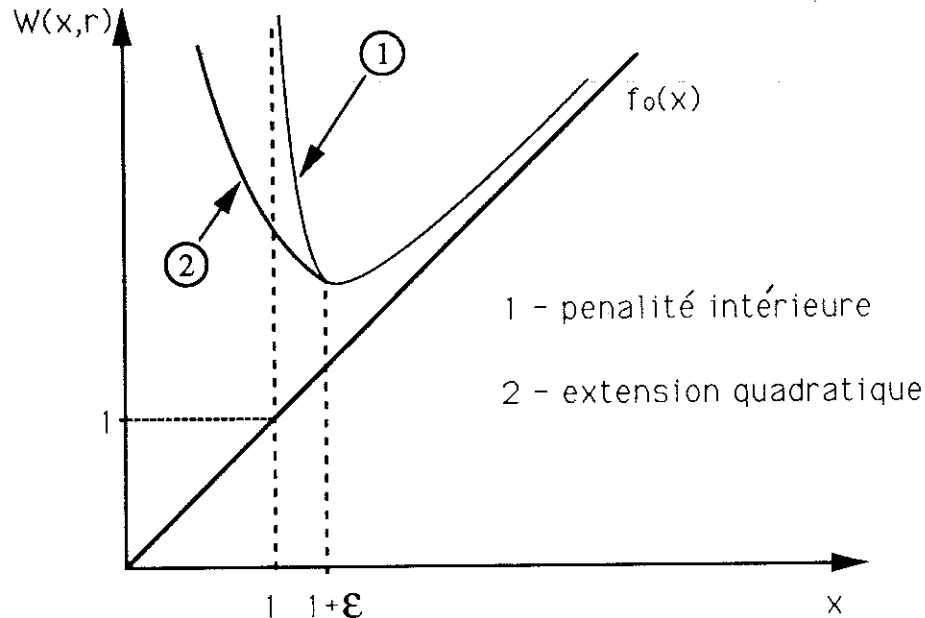


Figure II.2.3 Illustration de la fonction de transformation $W(x, r)$ de HAFTKA et STARNES du problème II.2.1.5.

II.2.1.2.4 Détermination du Facteur de Réponse r_k et du Paramètre de Transition ϵ_k

Les fonctions $W(x,r)$ doivent être minimisées par rapport à une suite de valeurs décroissantes de r_k ($r_k \rightarrow 0$). Cependant, il faut remarquer qu'un facteur r_k trop important au départ peut imposer une convergence très lente et aussi entraîner une minimisation préférentielle du facteur :

$$\sum_{j=1}^m F_j(f_j(x))$$

par rapport à la fonction objectif $f_0(x)$. D'autre part, il est plus simple de minimiser $W(x,r)$, quand le facteur r_k est grand (si r_k tend vers zéro, la fonction $W(x,r)$ tend vers un point de discontinuité, voir figure II.2.1).

Il faut donc choisir un facteur r_k capable de concilier ces difficultés numériques.

FIACCO et McCORMICK [44] recommandent trois possibilités pour le choix de la valeur initiale de r_1 , à savoir :

$$r_1 = 1,0 \quad \text{II.2.1.11}$$

$$r_1 = \frac{-\nabla^T f_0(x_0) \cdot \nabla \psi(x_0)}{|\nabla^T \psi(x_0) \cdot \nabla \psi(x_0)|} \quad \text{II.2.1.12}$$

$$r_1 = \left[\frac{\nabla^T f(x_0) \cdot \nabla^2 [\psi(x_0)]^{-1} \cdot \nabla f(x_0)}{\nabla^T \psi(x_0) \cdot \nabla^2 [\psi(x_0)]^{-1} \cdot \nabla \psi(x_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.2.1.13}$$

où la fonction $\psi(x) = \sum_{j=1}^m F_j(f_j(x))$ et $\nabla^2 [\psi(x_0)]$ correspond à son hessien au point x^0 .

La valeur la plus pratique est $r_1 = 1$, cependant, ils ont remarqué que l'équation II.2.1.13 est la plus efficace. Malheureusement, l'évaluation de la matrice hessienne et de son inverse peuvent être difficiles et chères.

CASSIS et SCHMIT [47] ont proposé pour le calcul des paramètres r et ϵ initiaux ; les expressions suivantes :

$$r = \frac{\eta f_0(x_0)}{\sum_{j=1}^m F_j[f_j(x)]} \quad \text{II.2.1.14}$$

$$\epsilon = \frac{r}{W(x_0, r)} \quad \text{II.2.1.15}$$

où $0 < \eta \leq 1$

HAFTKA et STARNES [46] ont adopté pour le paramètre ϵ l'expression

$$\epsilon = C r^p \quad \text{II.2.1.16}$$

où $0 < C \leq 1$ et $1/3 < p < 1/2$, et où le paramètre r , à chaque itération, est réduit d'un facteur entre 1/30 et 1/20.

Nous proposons pour l'évolution dynamique de ces deux paramètres, des expressions empiriques, que nous avons retenues après de nombreux essais sur des problèmes les plus variés possibles. Les expressions sont les suivantes :

$$r_k = \frac{0,1}{k} \left| \frac{f_0(x^k)}{\sum F_j(f_j(x^k))} \right| \quad \text{II.2.1.17}$$

et

$$\epsilon_k = \frac{0,1}{k} \left| \frac{r_k}{f_0(x^k) + r_k \sum_{j=1}^m F_j(f_j(x^k))} \right| \quad \text{II.2.1.18}$$

où k désigne le numéro actuel d'itérations ($k = 1, 2, \dots$) et

$$\sum_{j=1}^m F_j(f_j(x^k))$$

est calculé en considérant à priori $\epsilon_k = 0,01/k$.

II.2.1.2.5 Minimisation de la Fonction de Transformation $W(x,r)$.

Une fois que la fonction de transformation est choisie, le problème est ramené à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes. L'avantage d'avoir une fonction de transformation $W(x,r)$ avec des dérivées continues se manifeste au cours de cette minimisation lors de l'utilisation de méthodes du 2eme ordre (où méthodes quasi-newtoniennes - Annexe A.I)

La difficulté de cette minimisation a pour origine le caractère non explicite des fonctions $f_j(x)$ $j = 0, \dots, m$, qui constituent la fonction de transformation $W(x,r)$.

Cela signifie que ces fonctions ne peuvent pas être évaluées directement en fonction de variables de conception x . Leur évaluation numérique requiert une analyse par la méthode des éléments finis. Celle-ci peut conduire à un coût de calcul prohibitif pour des applications de grande taille.

De façon à surmonter cette difficulté, STARNES et HAFTKA [50] ont proposé le remplacement du problème original par un sous-problème linéarisé, (une approximation convexe et explicite du problème) possédant une structure algébrique simple.

Ainsi, cela conduit à l'utilisation de la linéarisation convexe de $W(x,r)$ au point x^k , défini par :

$$\tilde{W}(x, r) = W(x^k, r) + \sum_{i=1}^n B_i(x_i - x_i^k) \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{x^k} \quad \text{II.2.1.19}$$

où

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\partial W}{\partial x_i} > 0 \\ \frac{x_i^k}{x_i} & \text{si } \frac{\partial W}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad \text{II.2.1.20}$$

A titre d'exemple considérons les fonctions (SVANBERG [12]) :

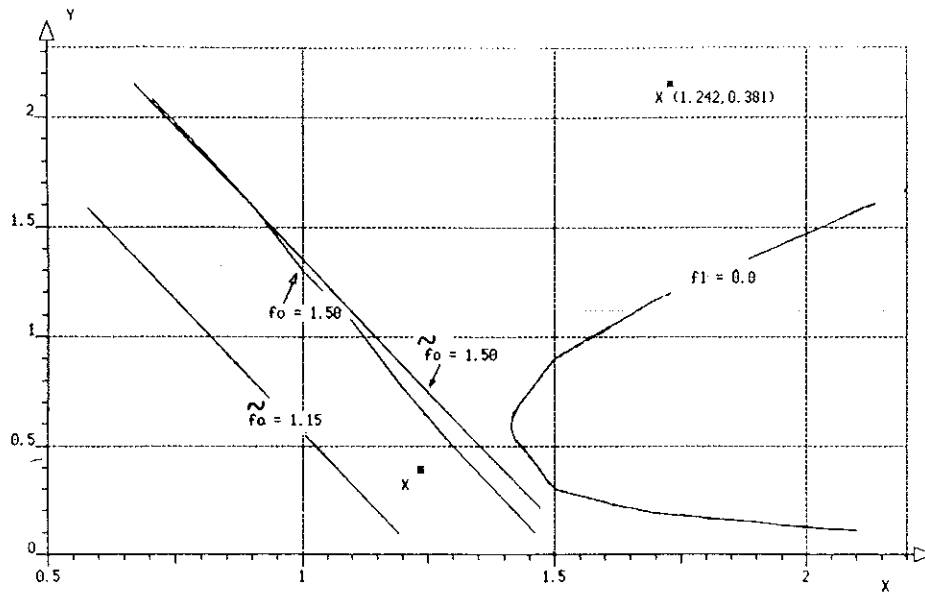
$$\begin{aligned} f_0 &= x \sqrt{1 + y^2} \\ f_1 &= 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1 \end{aligned} \quad \text{II.2.1.21}$$

à approximer autour du point (1,242 ; 0,381) par la linéarisation convexe proposée par STARNES et HAFTKA [50].

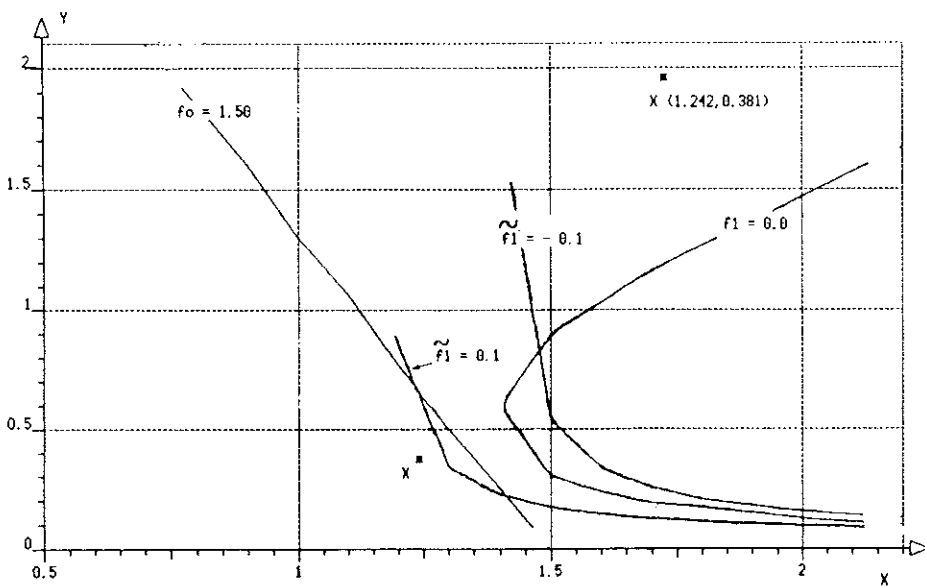
Fonctions linéarisées :

$$\tilde{f}_0 = -0,168 + 1,070 x + 0,442 y \quad (\text{fig. II.2.4.a})$$

$$\tilde{f}_1 = -1,136 + \frac{1,410}{x} + \frac{0,052}{y} \quad (\text{fig. II.2.4 b})$$



a) linéarisation mixte convexe de f_0



b) linéarisation mixte convexe de f_1

Figure II.2.4 Application de la linéarisation mixte convexe de STARNES et HAFTKA [50].

De cette manière, une seule analyse élément finis est requise à chaque itération. Il reste cependant l'inconvénient d'un nombre d'itérations élevé croissant avec le nombre de variables. D'où une nouvelle idée puisque à chaque itération une évaluation du gradient de $W(x^k, r)$ en x^k est nécessaire, il devient possible de l'utiliser pour construire une approximation de son hessien H_k en

x. Cette approximation est obtenue directement de l'algorithme BFGS (Annexe A.I) en considérant les modifications proposées par POWELL [48,49]. Ces dernières ont pour but de toujours garder H_k définie positive et d'imposer une stabilité numérique de façon à être moins sensible à tout changement d'échelle des variables.

La conservation du caractère défini positif de H_k est essentielle, car elle garantit en particulier, que la recherche unidirectionnelle engendrée assure une décroissance de $W(x,r)$ au voisinage de x^k .

Ainsi, l'expression finale pour l'approximation de $W(x,r)$ autour d'un point x^k est donnée par :

$$\tilde{W}(x, r) = W(x^k, r) + \sum_{i=1}^n B_i(x_i - x_i^k) \frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \Delta x^T H_k \Delta x \quad \text{II.2.1.22}$$

où $\Delta x = x - x^k$ et B_i est défini par l'équation II.2.1.20.

II.2.1.2.6 Algorithme Réalisé

La mise en oeuvre de cet algorithme est particulièrement simple. La procédure est la suivante :

Algorithme

0 - A l'étape 0 choisir x^0 (point de départ) ; $k = 0$

1 - A l'étape k en x^k

- calculer $f_j(x^k)$ et $\nabla f_j(x^k)$, $j = 0, 1, \dots, m$

- 1er test d'arrêt

conditions de KUHN et TUCKER satisfaites,

Fin : x^k solution

- 2eme test d'arrêt

si $\left| \frac{f_0(x^k) - f_0(x^{k-1})}{f_0(x^{k-1})} \right| \leq \epsilon$, Fin : x^k solution

- Déterminer r_k et ϵ_k

- Calculer la fonction de pénalité $W(x^k, r_k)$

- 3eme test d'arrêt

$$\text{si } \left| \frac{w(x^k, r_k) - f_0(x^k)}{f_0(x^k)} \right| \leq \epsilon, \text{ Fin : } x^k \text{ solution}$$

- Calculer la fonction approximation de $W(x,r)$ en x^k , $\tilde{W}(x,r)$

- Minimiser $\tilde{W}(x,r)$ avec $x \in S$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d_k$$

d_k - vecteur direction de recherche défini par la méthode BFGS

α^k - pas optimal pour l'itération défini par la méthode du nombre d'or.

- 4eme test d'arrêt

$$\text{si } \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon, \text{ Fin : } x^{k+1} \text{ solution}$$

2- $k = k + 1$

- 5eme test d'arrêt

si $k >$ nombre maximal d'itérations, Fin ; sinon retour en 1.

II.2.1.2.7 Exemple (SVANBERG [12])

minimiser

$$f_0(x, y) = x \sqrt{1 + y^2}$$

soumis à

$$f_1(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

$$f_2(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} - \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

avec $0,2 < x < 4,0$ et $0,1 < y < 1,6$

Tableau II.2.1 Résultats obtenus code PM ($\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$)

k	x	y	f ₀	f ₁	f ₂	dk	
1	0,900	0,600	1,050	0,553	0,018	- 1,000	0,152
2	1,485	0,511	1,668	- 0,067	- 0,433	0,600	1,000
3	1,373	0,325	1,444	0,051	- 0,532	- 1,000	- 0,767
4	1,430	0,368	1,524	- 0,010	- 0,511	- 1,000	- 0,554
5	1,505	0,410	1,626	- 0,070	- 0,505	0,491	1,000
6	1,487	0,373	1,587	- 0,049	- 0,526	1,000	- 0,012
7	1,409	0,374	1,504	- 0,003	- 0,499	---	---

Remarque : Point k = 7 correspond approximativement à un point de KUHN et TUCKER.

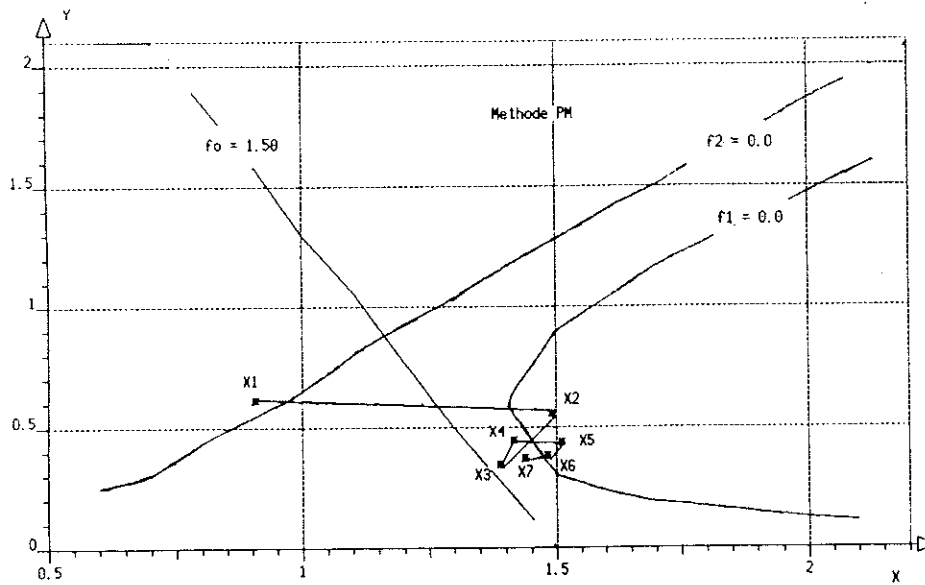


Figure II.2.5 Illustration exemple traité par la méthode de pénalité intérieure étendue.
Résultats obtenus code PM (tableau II.2.1)

II.2.1.2.8 Conclusion

D'un point de vue de programmation, les méthodes des pénalités intérieures sont très puissantes et faciles à mettre en oeuvre. Leurs principaux inconvénients sont :

- le traitement des paramètres r_k et ε_k qui constitue une difficulté relativement importante. Nous avons surmonté ce problème en utilisant des expressions empiriques originales obtenues à partir de nos expériences numériques.

- un mauvais conditionnement numérique de la fonction lorsque $W(x,r)$ devient trop petit. Autrement dit, le processus de convergence ne se fait pas d'une façon monotone.

- l'extension quadratique de la fonction de pénalisation qui augmente la non linéarité de la fonction objectif.

- l'approximation de la fonction de transformation en utilisant les informations du second ordre est généralement plus efficace. Par contre le nombre d'informations à stocker est beaucoup plus élevé et de plus le nombre de calculs nécessaires à chaque itération est plus élevé.

Les méthodes de pénalités intérieures étendues sont cependant très intéressantes pour traiter des problèmes d'optimisation où les fonctions engendrées sont fortement non linéaires.

II.2.2 Méthode des Asymptotes Mobiles

II.2.2.1 Introduction

L'idée fondamentale de cette méthode est de remplacer la résolution du problème non linéaire (généralement implicite) par la résolution d'un sous problème convexe linéarisé (explicite) à l'aide de la formulation duale.

Cette technique, dans le domaine de la conception de forme par éléments finis, a été initialement proposée par FLEURY [51]. L'objectif est de réduire le nombre d'itérations pour l'obtention de la convergence, car généralement, chaque itération correspond à une coûteuse analyse par éléments finis.

Pour linéariser une fonction plusieurs possibilités existent. Par la suite, SVANBERG [12] a proposé un type de linéarisation asymptotique, particulièrement intéressant pour deux raisons :

- premièrement les hypothèses de convexité et de séparabilité sont assurées
- deuxièmement il permet d'ajuster la courbure de la fonction étudiée

engendrant ainsi une méthode de plus grande flexibilité dont la méthode originale de linéarisation mixte convexe (FLEURY [11,51]) est un cas particulier.

II.2.2.2 Principe Général de la Méthode des Asymptotes Mobiles

Considérons le problème

minimiser $f_0(x)$

soumis à $f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$

II.2.2.1

avec $x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \quad i = 1, \dots, n$

où les fonctions $f_0(x)$ et $f_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) sont supposées continûment différentiables.

En 1987, SVANBERG [12] a proposé une nouvelle méthode basée sur la linéarisation asymptotique, sous le nom de méthode des asymptotes mobiles, qui s'inspire de la méthode de linéarisation mixte convexe utilisée par FLEURY [11,51].

La méthode des asymptotes mobiles emploie les variables inverses $1/(U - x)$ et $1/(x - L)$ dans le but d'obtenir une structure algébrique simple pour les sous problèmes approximants. Les asymptotes U et L sont des paramètres à choisir qui influencent directement l'efficacité de l'algorithme.

D'où le problème explicite suivant, déduit du problème II.2.2.1 en y remplaçant les fonctions réelles par leurs formes linéarisées :

minimiser

$$f_0^k(x) = r_0^k + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{0i}^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_{0i}^k}{x_i - L_i^k} \right]$$

soumis à

II.2.2.2

$$f_j^k(x) = r_j^k + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_{ji}^k}{x_i - L_i^k} \right] \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\max(x_i^{\min}, \alpha_i^k) \leq x_i \leq \min(x_i^{\max}, \beta_i^k) \quad i=1, \dots, n$$

où α^k et β^k sont les limites mobiles, paramètres ajustables à chaque itération de façon à empêcher que le point x^{k+1} ne s'écarte trop de point x^k , étant donné que le point x^{k+1} est obtenu à partir d'une approximation locale des fonctions (voir figure II.2.7).

Les paramètres p_{ji}^k , q_{ji}^k et r_j^k sont donnés par

$$p_{ji}^k = \begin{cases} [U_i^k - x_i^k]^2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{x^k} & \text{si } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0 & \text{si } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad \text{II.2.2.3}$$

$$q_{ji}^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \geq 0 \\ -[x_i^k - L_i^k]^2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{x^k} & \text{si } \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0 \end{cases} \quad \text{II.2.2.4}$$

$$r_j^k = f_j(x^k) - \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i^k} + \frac{q_{ji}^k}{x_i^k - L_i^k} \right] \quad \text{II.2.2.5}$$

avec les paramètres L^k , U^k , α^k et β^k qui doivent être choisis à chaque fois en vérifiant

$$L_i^k < \alpha_i^k \leq x_i^k \leq \beta_i^k < U_i^k \quad i = 1, \dots, n$$

II.2.2.6

A titre d'exemple considérons les fonctions (SVANBERG [12])

$$f_0 = x \sqrt{1 + y^2}$$

$$f_1 = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1$$

II.2.2.7

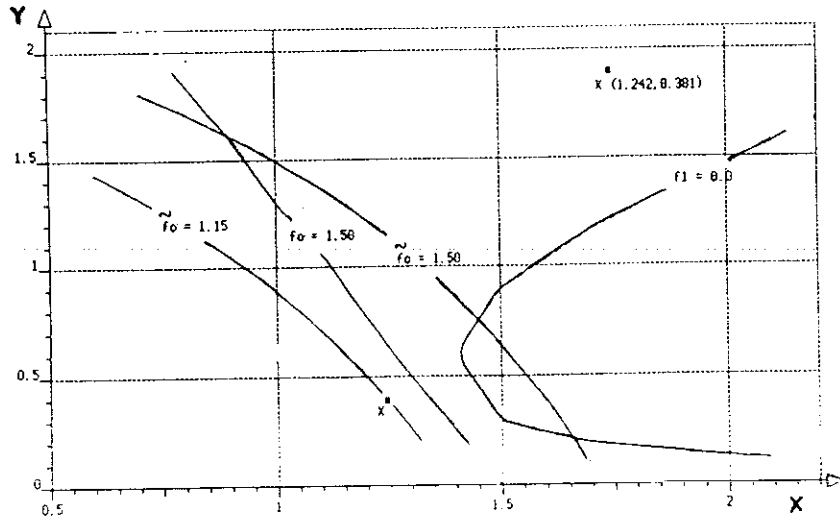
approximativement autour du point (1,242 ; 0,381) par la linéarisation asymptotique proposée par SVANBERG [12]. Fonctions linéarisées :

$$\tilde{f}_0 = -4,881 + \frac{20,467}{5,948 - x} + \frac{7,321}{4,759 - y}$$

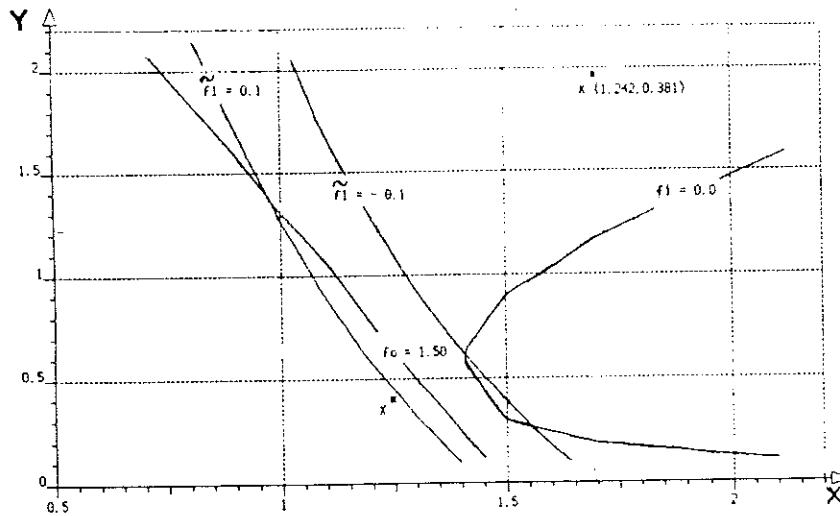
(fig. II.2.6 a)

$$\tilde{f}_1 = -5,850 + \frac{20,617}{x + 3,464} + \frac{6,998}{y + 3,997}$$

(fig. II.2.6.b)



a) linéarisation asymptotique de f_0



b) linéarisation asymptotique de f_1

Figure II.2.6 Exemple de la linéarisation asymptotique proposée par SVANBERG [12].

La linéarisation asymptotique définie par SVANBERG [12] est convexe et la continuité est assurée à l'ordre 0 et 1, cela indépendamment des valeurs des asymptotes U_i et L_i .

La convexité et la séparabilité du sous problème linéarisé conduisent naturellement à l'utilisation d'une méthode duale pour sa résolution.

Les méthodes duales consistent à maximiser la fonction lagrangienne associée \mathcal{L} par rapport aux multiplicateurs λ et ensuite à la minimiser par rapport aux variables primales x .

Cette double recherche semble à priori plus complexe que la recherche d'un minimum local pour le problème primal. Cependant, comme la fonction lagrangienne est toujours concave en λ , nous pouvons affirmer que tout optimum local de \mathcal{L} est un optimum global [8-10]. De plus, l'hypothèse de séparabilité simplifie énormément la minimisation du lagrangien en x , grâce à la relation explicite $x = x(\lambda)$ [11,12].

II.2.2.3 La Stratégie des Contraintes Actives

Fréquemment, dans les applications pratiques, il arrive que le point choisi au départ viole certaines contraintes. Dans certains cas, lorsque le point de départ viole fortement les contraintes, il peut arriver que le sous problème approché II.2.2.2 soit vide, de sorte que la méthode est incapable de trouver une solution admissible. Pour éviter cette difficulté SVANBERG [12] introduit dans la formulation du problème II.2.2.2 des variables additionnelles, une pour chaque contrainte. Le but est simplement d'élargir artificiellement le domaine admissible.

Pour notre part, nous avons adopté une technique différente, qui propose à chaque itération une relaxation sur le nombre des contraintes considérées pour le sous problème approché (II.2.2.2). Nous avons utilisé la stratégie proposée par PSHENICHNY [52] pour la définition d'un sous-ensemble de contraintes considérées comme actives à chaque itération. Cette technique consiste donc à déterminer, pour le problème primal II.2.2.1, au point x^k , le sous-ensemble de contraintes donné par :

$$J_\epsilon = \{j \in \{1, \dots, m\} / f_j(x^k) \geq F(x^k) - \epsilon_k\} \quad \text{II.2.2.8}$$

où $\epsilon_k \geq 0$ et $F(x^k)$ défini par:

$$F(x^k) = \max \{0, f_j(x^k); j = \{1, \dots, m\}\} \quad \text{II.2.2.9}$$

ϵ_k est une constante réelle spécifiée, utilisée comme facteur de flexibilité pour la définition de l'ensemble actif à chaque itération k .

Le terme $F(x^k)$ peut être considéré comme une mesure de l'éloignement du point x^k du domaine réalisable.

Maintenant, en prenant uniquement le sous-ensemble de contraintes considérées comme ϵ -actives, le sous problème explicite se réécrit alors:

minimiser

$$\tilde{f}_0^k(x) = r_0^k + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{0i}^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_{0i}^k}{x_i - L_i^k} \right]$$

soumis à

II.2.2.10

$$\tilde{f}_j^k(x) = r_j^k + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i} + \frac{q_{ji}^k}{x_i - L_i^k} \right] \leq 0 \quad , j \in J_\epsilon$$

et

$$\max(x_i^{\min}, \alpha_i^k) \leq x_i \leq \min(x_i^{\max}, \beta_i^k) \quad i=1, \dots, n$$

où les termes p_{ji}^k , q_{ji}^k et r_j^k ($j \in \{0 \cup J_\epsilon\}$ et $i=1, \dots, n$) sont calculés par les mêmes équations II.2.2.3, II.2.2.4 et II.2.2.5.

De manière générale, l'application de cette stratégie, rend la méthode plus appropriée au traitement de problèmes de grande dimension, car elle ne demande que l'évaluation, à chaque itéré successif, des dérivées premières de la fonction objectif et des contraintes considérées comme actives.

II.2.2.4 Le Choix des Paramètres L, U, α et β

Le choix des asymptotes L et U joue un rôle fondamental sur la qualité de la linéarisation, car celles-ci permettent d'ajuster la courbure de la fonction linéarisée.

Il est possible d'enrichir l'approximation asymptotique d'une fonction en identifiant en plus de la valeur de la fonction et de son gradient, les termes du son hessien. En introduisant dans ce cas des asymptotes dépendantes non seulement de la variable, mais aussi de la fonction à linéariser.

Une telle démarche a été récemment proposée par FLEURY [53]. Cependant, elle présente généralement une grosse difficulté, car dans les cas pratiques les fonctions ont à l'origine un caractère non explicite par rapport aux variables de conception.

Donc, nous avons opté pour des choix plus empiriques des asymptotes, dans l'esprit des propositions de SVANBERG [12], basés sur la caractéristique de la convergence, à savoir :

-si la convergence est lente et monotone il faut éloigner les asymptotes du point x courant.

-si la convergence est oscillante, il faut rapprocher les asymptotes du point x courant.

Une simple implémentation de ces règles est la suivante :

pour $k = 0$ et $k = 1$ faire

$$L_i^k = x_i^k - (x_i^{\max} - x_i^{\min})$$

II.2.2.11

$$U_i^k = x_i^k + (x_i^{\max} - x_i^{\min})$$

pour $k > 2$

a) si les signes de $(x_i^k - x_i^{k-1})$ et $(x_i^{k-1} - x_i^{k-2})$ sont opposés, ce qui indique une oscillation de la variable x_i , alors

$$L_i^k = x_i^k - s_1 (x_i^{k-1} - L_i^{k-1})$$

II.2.2.12

$$U_i^k = x_i^k + s_1 (U_i^{k-1} - x_i^{k-1})$$

b) si les signes de $(x_i^k - x_i^{k-1})$ et $(x_i^{k-1} - x_i^{k-2})$ sont égaux, ce qui indique que les valeurs des asymptotes produisent une convergence monotone, alors

$$L_i^k = x_i^k - (x_i^{k-1} - L_i^{k-1})/s_1$$

II.2.2.13

$$U_i^k = x_i^k + (U_i^{k-1} - x_i^{k-1})/s_1$$

où s_1 est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ (par exemple $s_1=0,75$).

Pour les paramètres α_i^k et β_i^k un choix simple est de prendre

$$\alpha_i^k = \eta_1 x_i^k - r_1(x_i^{\max} - x_i^{\min}) \quad \text{II.2.2.14}$$

$$\beta_i^k = \eta_2 x_i^k + r_1(x_i^{\max} - x_i^{\min})$$

$$\text{si } x_i^k \leq 0 \quad \eta_1 = 1 + r_1 \text{ et } \eta_2 = 1 - r_1$$

$$\text{si } x_i^k > 0 \quad \eta_1 = 1 - r_1 \text{ et } \eta_2 = 1 + r_1$$

où r_1 est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ (par exemple $r_1=0,25$). Les paramètres α_i^k et β_i^k doivent aussi respecter les deux conditions suivantes

$$L_i^k < \alpha_i^k < x_i^k < \beta_i^k < U_i^k \quad \text{II.2.2.15}$$

et

$$x_i^{\min} \leq \alpha_i^k < x_i^k < \beta_i^k < x_i^{\max} \quad \text{II.2.2.16}$$

II.2.2.5 Le Problème Dual

Le problème explicite II.2.2.10 étant convexe et séparable, peut être plus facilement résolu en passant à son dual. Le lagrangien associé est le suivant :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = r_0 + \lambda^T \bar{r} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{0i} + \lambda^T \bar{p}_i}{U_i - x_i} + \frac{q_{0i} + \lambda^T \bar{q}_i}{x_i - L_i} \right] \quad \text{II.2.2.17}$$

où

$$\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T, \quad \bar{p}_i = (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{mi})^T,$$

$$\bar{q}_i = (q_{1i}, q_{2i}, \dots, q_{mi})^T, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$$

Pour simplifier, l'équation II.2.2.17 s'écrit sous la forme:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = r_0 + \lambda^T \bar{r} + \sum_{i=1}^n I_i(x_i, \lambda) \quad \text{II.2.2.18}$$

Les réels $\lambda_j > 0$ ($j \in J_\epsilon$), positifs ou nuls sont les variables duales ou les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes linéarisées.

Ainsi formulé, le problème II.2.2.18 est un cas qui appartient à la classe des problèmes de programmation convexe séparable.

Si en plus de la convexité, la fonction lagrangienne est continue par rapport aux variables de conception x sur un ensemble convexe

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n / L_i < x_i < U_i, i = 1, \dots, n\}$$

les conditions de KUHN et TUCKER deviennent nécessaires et suffisantes pour l'optimalité. Donc pour que x^* soit un point optimal du problème primal II.2.2.10, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= 0 \\ \lambda_j^* f_j(x^*) &= 0 \quad j \in J_E \\ \lambda_j^* &> 0 \quad j \in J_E \end{aligned} \quad \text{II.2.2.19}$$

Autrement dit, le problème II.2.2.10 peut être résolu en déterminant un point-selle du lagrangien [8-10], c'est-à-dire, un couple (x^*, λ^*) vérifiant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \lambda^*) \\ \tilde{f}_j(x^*) &\leq 0 \quad j \in J_E \\ \lambda_j^* \tilde{f}_j(x^*) &= 0 \quad j \in J_E \end{aligned} \quad \text{II.2.2.20}$$

où $S = \{x \in C / x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, i = 1, \dots, n\}$.

Cette recherche peut être encore traduite par la résolution du problème dual

$$\max_{\lambda \geq 0} W(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \left\{ \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \lambda) \right\} \quad \text{II.2.2.21}$$

où $W(\lambda)$ est la fonction duale définie par:

$$W(\lambda) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \lambda) \quad \text{II.2.2.22}$$

La minimisation du lagrangien (II.2.2.22) est résolue en dérivant l'équation II.2.2.17 par rapport aux variables de conception x_i ($i = 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{p_{0i} + \lambda \frac{T}{p_i}}{(U_i - x_i)^2} - \frac{q_{0i} + \lambda \frac{T}{q_i}}{(x_i - L_i)^2} \quad \text{II.2.2.23}$$

Ce qui s'écrit plus simplement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial l_i(x_i, \lambda)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

II.2.2.24

avec le vecteur solution x qui doit appartenir à l'ensemble

$$S_1 = \{x \in S / x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i \leq \beta_i \leq x_i^{\max}, i = 1, \dots, n\}$$

C'est ici que les limites mobiles α^k et β^k sont imposées aux variables de conception x^k , afin d'empêcher que le point x^{k+1} ne s'écarte trop de la conception actuelle x^k (figure II.2.7). Puisque le sous problème II.2.2.10 obtenu à chaque pas est une approximation locale du problème. En conséquence, le processus d'optimisation peut, soit osciller entre deux points non optimaux, soit converger vers une solution non optimale ou encore ne pas converger si le nombre de fonctions contraintes actives est inférieur au nombre de variables [11-12].

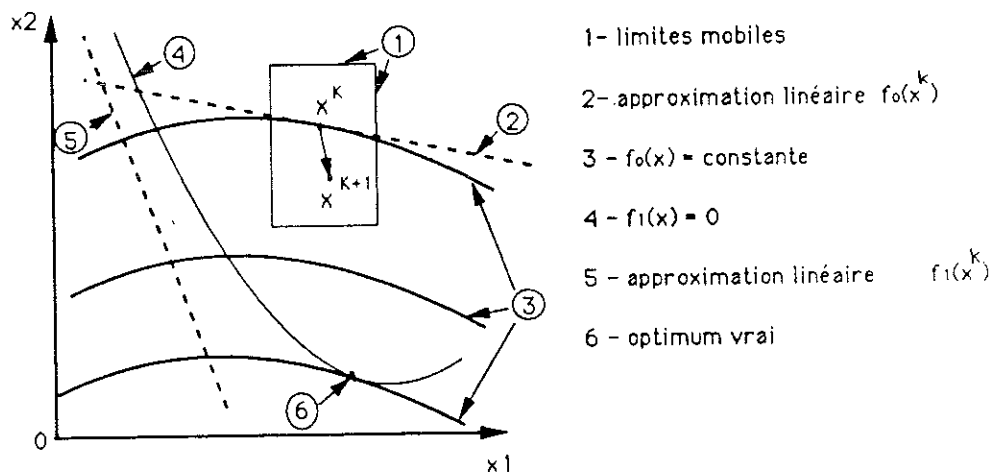


Figure II.2.7 Les limites mobiles doivent empêcher le nouveau point de conception x^{k+1} de sortir du pavé de linéarisation

Il faut toutefois faire les remarques suivantes :

- une fois que $\lambda \geq 0$, alors $p_{0i} + \lambda^T p_i \geq 0$ et $q_{0i} + \lambda^T q_i \geq 0$, car tous les autres termes sont positifs;

- dans des cas très rares, il est possible que $p_{0i} + \lambda^T p_i = 0$ et $q_{0i} + \lambda^T q_i = 0$, alors $l_i(x_i, \lambda)$ ne dépend pas de x_i . Dans ce cas, un x_i quelconque entre α_i et β_i peut minimiser $l_i(x_i, \lambda)$.

Généralement, au moins un des termes $p_{0i} + \lambda^T p_i$ ou $q_{0i} + \lambda^T q_i$ est strictement positif. Ceci assure que la dérivée $l'_i(x_i, \lambda)$ est rigoureusement une fonction croissante de x_i , car la dérivée seconde est toujours positive, à savoir

$$\frac{\partial^2 l_i(x_i, \lambda)}{\partial x_i^2} = \frac{2(p_{0i} + \lambda^T p_i)}{(U_i - x_i)^3} + \frac{2(q_{0i} + \lambda^T q_i)}{(x_i - L_i)^3} \quad \text{II.2.2.25}$$

Maintenant, en étudiant la valeur de la fonction $l'_i(x_i, \lambda)$ par rapport aux limites mobiles α_i et β_i , il vient

- si $l'_i(\alpha_i, \lambda) \geq 0$ alors $x_i(\lambda) = \alpha_i$
- si $l'_i(\beta_i, \lambda) \leq 0$ alors $x_i(\lambda) = \beta_i$
- si $l'_i(\alpha_i, \lambda) < 0$ et $l'_i(\beta_i, \lambda) > 0$, alors $x_i(\lambda)$ est l'unique solution de l'équation $l'_i(x_i, \lambda) = 0$.

La résolution de cette équation fournit la variable primale x_i explicitement en fonction des variables duales λ .

Ainsi, le problème de minimisation unidirectionnelle est résolu analytiquement

$$x_i(\lambda) = \frac{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{\frac{1}{2}} L_i + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{\frac{1}{2}} U_i}{(p_{0i} + \lambda^T p_i)^{\frac{1}{2}} + (q_{0i} + \lambda^T q_i)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{II.2.2.26}$$

Dès lors, le problème dual prend la forme suivante :

$$\max W(\lambda) = \max \left\{ r_0 - \lambda^T r + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{0i} + \lambda^T p_i}{U_i - x_i(\lambda)} + \frac{q_{0i} + \lambda^T q_i}{x_i(\lambda) - L_i} \right] \right\} \quad \text{II.2.2.27}$$

avec $\lambda \geq 0$

dans lequel $x(\lambda)$ représente le point primal, solution du problème auxiliaire de minimisation (pour λ fixé). Le problème II.2.2.27 est un problème quasi non contraint, qui peut être traité par une méthode de minimisation sans contrainte quelconque, en tenant compte des contraintes de non-négativité des variables duales ($\lambda \geq 0$).

II.2.2.6 Résolution du Problème Dual

Maintenant, le problème consiste à déterminer le maximum de la fonction duale (II.2.2.27) dans une suite de cônes qui excluent les variables duales négatives. Un tel cône peut être décrit par

$$S_\epsilon = \{ \lambda_j \geq 0, j \in J_\epsilon \} \quad \text{II.2.2.28}$$

Ici, la maximisation de la fonction duale est faite à l'aide de la méthode quasi-newtonienne BFGS (voir annexe A.I).

Une telle méthode fait appel aux dérivées premières de la fonction duale. Fort heureusement, une propriété intéressante de l'approche duale est de permettre une évaluation aisée de ces dérivées. Elles sont simplement données par les contraintes primales approchées :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_j} = r_j^k + \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i(\lambda)} + \frac{q_{ji}^k}{x_i(\lambda) - L_i^k} \right] \quad \text{II.2.2.29}$$

avec $j \in J_\epsilon$. Cette dernière relation montre que les dérivées premières de la fonction duale sont aussi continues par rapport aux variables duales λ_j ($j \in J_\epsilon$).

En conséquence, la direction de recherche fournie par la méthode BFGS (fonction du gradient et de la valeur de la fonction duale) est une direction qui assure la montée de la fonction duale par rapport aux variables duales au voisinage de x^k .

II.2.2.7 Algorithme Réalisé

La procédure est donc la suivante:

- 0 - A l'étape 0 choix de x^0 (point de départ) ; $k = 0$

- 1 - A l'étape k en x^k
 - calculer $f_j(x^k)$, $j = 0, 1, \dots, m$
 - 1er test d'arrêt

$$\text{si } \left| \frac{f_0(x^k) - f_0(x^{k-1})}{f_0(x^{k-1})} \right| \leq \epsilon, \text{ Fin : } x^k \text{ solution}$$

-déterminer le sous ensemble de contraintes actives J_ε

- calculer $\nabla f_j(x^k)$, $j = 0$ et $j \in J_\varepsilon$

- 2eme test d'arrêt

vérifier si les conditions de KUHN et TUCKER sont satisfaites, Fin : x^k solution

- déterminer:

- les coefficients de linéarisation p_{ji}^k et q_{ji}^k

- les asymptotes mobiles U_i^k et L_i^k

- les limites mobiles α_i^k et β_i^k

$$j = \{0 \cup J_\varepsilon\} \text{ et } i = \{1, \dots, n\}$$

- déterminer le sous problème linéarisé

$$\min \tilde{f}_0(x)$$

$$\text{soumis à } \tilde{f}_j(x) \leq 0$$

$$\text{où } j \in J_\varepsilon \text{ et } \alpha_i^k \leq x_i \leq \beta_i^k, i = 1, \dots, n.$$

- déterminer la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \tilde{f}_0(x) + \sum_{j \in J_\varepsilon} \lambda_j \tilde{f}_j(x)$$

- minimiser $\mathcal{L}(x, \lambda)$ par rapport à x

$$\min_x \mathcal{L}(x, \lambda)$$

- maximiser $W(\lambda) = \min_x \mathcal{L}(x, \lambda)$ avec $\lambda \geq 0$

$$\lambda^{t+1} = \lambda^t + \alpha^t d^t$$

d^t - vecteur direction de recherche défini par la méthode BFGS.

α^t - pas optimal défini par la méthode du nombre d'or.

- déterminer le vecteur primal correspond $x^{k+1}(\lambda)$

II.2.2.26

- 3ème test d'arrêt

$$\text{si } \left\| \frac{x^{k+1} - x^k}{x^k} \right\| \leq \epsilon, \text{ fin : } x^{k+1} \text{ solution}$$

2 - k = k + 1

- 4ème test d'arrêt

si k > nombre maximal d'itérations, Fin.

sinon retour en 1

II.2.2.8 Exemple (SVANBERG [12])

minimiser

$$f_0(x, y) = x \sqrt{1 + y^2}$$

soumis à

$$f_1(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

$$f_2(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} - \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

avec $0,2 < x < 4,0$ et $0,1 < y < 1,6$

Tableau II.2.2 Résultats obtenus par le code MMA ($\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$)

k	x	y	f ₀	f ₁	f ₂
1	0,900	0,600	1,050	0,553	- 0,018
2	1,169	0,370	1,246	0,211	- 0,400
3	1,325	0,566	1,523	0,051	- 0,329
4	1,349	0,367	1,437	0,050	- 0,483
5	1,387	0,407	1,497	0,010	- 0,464
6	1,418	0,350	1,502	0,006	- 0,523
7	1,411	0,373	1,505	0,001	- 0,500

Remarque: Point k = 7 correspond approximativement à un point de KUHN et TUCKER.

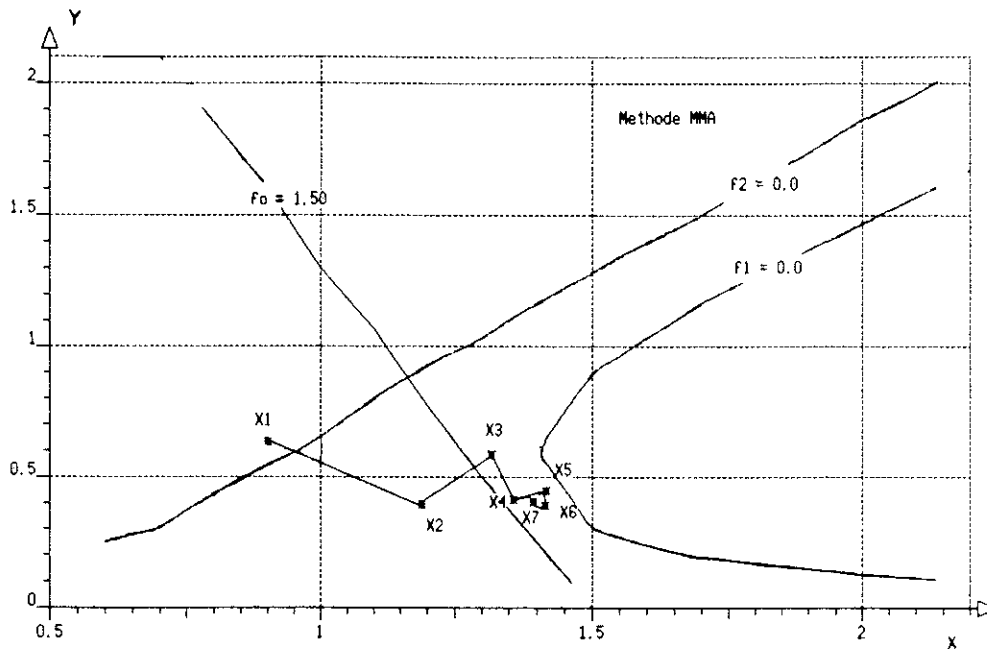


Figure II.2.8 Illustration de l'exemple traité par la méthode des asymptotes mobiles.
Résultats obtenus par le code MMA Tableau II.2.2

II.2.2.9 Conclusion

Dans cette méthode, l'utilisation d'une technique de linéarisation convexe et de la formulation duale constituent réellement deux stratégies complémentaires. Le problème dual de maximisation est explicite et quasi non contraint, sa solution peut être atteinte, généralement, à un faible coût de calcul, même dans des problèmes où le nombre de contraintes est grand.

Pour la définition du problème dual, nous avons introduit la notion de stratégie de sous-ensemble de contraintes actives. Cette stratégie nous a permis d'éviter l'inconvénient de retrouver souvent un domaine réalisable vide, quand les variables primales sont fortement non réalisables. Il faut remarquer que, lorsque cette technique est utilisée, seul le calcul du gradient des contraintes actives est nécessaire.

D'un point de vue programmation, la méthode des asymptotes mobiles est très robuste. Cependant, ses principales difficultés sont :

- la détermination des asymptotes mobiles U et L, qui comme celle des limites mobiles constitue un point extrêmement délicat. Celles-ci jouent un rôle particulièrement important sur la convergence du problème.

- la stratégie du choix de ces paramètres n'est malheureusement pas unique. Pour être plus efficace, elle doit varier avec les types de problèmes traités. Cependant, nous proposons des expressions empiriques générales, que nous avons retenues après de nombreux essais sur des problèmes les plus variés possibles.

Enfin, il faut remarquer que cette méthode d'optimisation est capable de s'étendre aux problèmes où certaines variables primales, au lieu de varier continûment, ne prend que des valeurs discrètes. Dans ce cas, la formulation duale devient encore plus séduisante, car les variables primales discrètes peuvent être facilement exprimées de façon explicite en fonction de variables duales continues [54]. La grande difficulté dans ce cas est liée à l'existence de plans dans l'espace dual où le gradient de la fonction duale n'est pas défini de manière unique. Ces plans de discontinuité compliquent la recherche du maximum du dual (problème convexe non différentiable).

D'un point de vue purement mathématique cette extension n'est pas rigoureusement exacte. néanmoins, l'expérimentation numérique rapportée aux références [54,55] montre que les solutions engendrées peuvent être plausibles et utiles en pratique.

II.3 Méthodes Directes Étudiées

II.3.1 Méthodes de Programmation Quadratique Récursive

II.3.1.1 Introduction

Les méthodes de programmation quadratique récursive consistent à remplacer le problème non linéaire contraint par une suite de sous problèmes, obtenus en adoptant une approximation quadratique de la fonction objectif et en linéarisant les fonctions contraintes par rapport aux variables de conception. Leur efficacité a pour origine la prise en compte, dans une certaine mesure, de la courbure des fonctions grâce à l'utilisation de l'approximation du hessien de la fonction lagrangienne [35-38,48-49,56-63].

II.3.1.2 Principe Général de la Méthode de Programmation Quadratique Récursive

Considérons le problème de programmation non linéaire suivant :

$$\min f_0(x)$$

sous les contraintes

II.3.1.1

$$f_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

où les fonctions doivent être continûment différentiables

L'idée de base de la méthode de programmation quadratique récursive consiste à écrire les conditions de stationnarité de la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x)$$

II.3.1.2

Elles donnent lieu au système d'équations non linéaires :

$$\nabla f_0(x^k) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \nabla f_j(x^k) = 0$$

$$f_j(x^k) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

II.3.1.3

Si la méthode de Newton est appliquée à la résolution de ce système, on aura donc, à partir d'un point (x^k, λ^k) , à linéariser le système d'équations II.3.1.3, au voisinage de x^k et ensuite à définir (x^{k+1}, λ^{k+1}) solution du système linéarisé

$$\begin{aligned} & \nabla_x f_0(x^k) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \nabla_x f_j(x^k) + \left[\nabla_x^2 f_0(x^k) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_x^2 f_j(x^k) \right] (x^{k+1} - x^k) \\ & + \sum_{j=1}^m (\lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k) \nabla_x f_j(x^k) = 0 \end{aligned} \quad \text{II.3.1.4}$$

$$f_j(x^k) + \nabla_x f_j^T(x^k) (x^{k+1} - x^k) \leq 0$$

En posant $d_k = x^{k+1} - x^k$ le système II.3.1.4 s'écrit :

$$A(x^k, \lambda^k) d_k + N(x^k)^T \lambda^{k+1} + \nabla f_0(x_k) = 0 \quad \text{II.3.1.5}$$

$$N(x^k) d_k + [f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)]^T \leq 0$$

où $A(x^k, \lambda^k)$ est l'hessien (ou une approximation) en x du lagrangien au point (x^k, λ^k) et $N(x^k)$ est le jacobien des contraintes au point x^k .

L'approximation quadratique est obtenue en notant que le vecteur solution d_k est également solution du problème d'optimisation quadratique [8-10,56-58]

$$\min \frac{1}{2} d_k^T A(x^k, \lambda^k) d_k + d_k^T \nabla f_0(x^k)$$

sous les contraintes II.3.1.6

$$N(x^k) d_k + [f_1(x^k), \dots, f_m(x^k)]^T \leq 0$$

et que λ^{k+1} n'est autre que le vecteur des variables duales optimales de ce même problème quadratique.

Après la résolution du sous-problème quadratique II.3.1.6, il faut réaliser une recherche unidirectionnelle de manière à trouver le nouveau vecteur de variables primales

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d_k \quad \text{II.3.1.7}$$

où α_k est le pas choisi pour l'itération.

Cette stratégie a été initialement proposée par WILSON , en considérant la possibilité de construire des algorithmes généraux, pour des problèmes d'optimisation avec contraintes, sur le principe de la méthode de Newton [8-10,38,56].

Il faut remarquer que, dans cette approche, la vitesse de convergence dépend fortement du conditionnement du hessien de la fonction lagrangienne. Cependant, au voisinage du point optimal, celle-ci possède les mêmes caractéristiques de convergence quadratique que la méthode de Newton [8-10,38,56-63].

A partir de cette approche (II.3.1.6), nous pouvons distinguer deux algorithmes fondamentaux [8-10,38,48-49,56-62], à savoir :

- l'algorithme de WILSON-HAN-POWELL

- l'algorithme de PSHENICHNY-TSENG-ARORA

Dans l'algorithme de WILSON-HAN-POWELL, toutes les contraintes sont utilisées pour la définition du sous problème quadratique. Ceci étant nécessaire pour s'assurer que la direction de recherche d_k est une fonction continue des variables de conception et, donc pour s'assurer de la convergence globale de l'algorithme (HAN [57,58]). POWELL a modifié l'algorithme en considérant $A(x^k, \lambda^k)$ comme une approximation du hessien de la fonction lagrangienne ($A(x^k, \lambda^k) \approx \nabla_x^2 L(x^k, \lambda^k)$) calculée à chaque itération à partir d'une méthode du type quasi-Newton (par exemple BFGS) [48,49].

Dans l'algorithme de PSHENICHNY-TSENG-ARORA, la convergence globale est vérifiée en utilisant la stratégie d'un sous ensemble de contraintes considérées comme actives [52,59,62]. L'algorithme original dû à PSHENICHNY ne considère pas la possibilité d'utiliser les informations de second ordre. Ainsi, $A(x^k, \lambda^k)$ est définie comme étant la matrice identité. Récemment, TSENG et ARORA [62,63] ont proposé l'utilisation d'une approximation du second ordre (quasi-Newton BFGS) pour la définition du hessien en x du lagrangien, pour la mise à jour de la matrice $A(x^k, \lambda^k)$ dans l'algorithme de PSHENICHNY.

De cette façon, ils ont obtenu une convergence superlinéaire de cette méthode en utilisant l'efficacité de la stratégie des contraintes actives, avec une amélioration notoire d'un point de vue numérique [63].

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, nous avons choisi l'algorithme de PSHENICHNY-TSENG-ARORA. Cet algorithme a été retenu, car il est très intéressant d'un point de vue pratique : à chaque itération, il peut engendrer un sous problème approché d'ordre plus réduit (seules les contraintes actives sont alors prises en comptes) admettant généralement un ensemble de solutions non vide.

II.3.1.3 Détermination du Sous Problème Quadratique dans l'Algorithme de PSHENICHNY-TSENG-ARORA

Initialement, il faut remarquer que l'ensemble des contraintes considérées comme actives, au point x^k , est donné par (PSHENICHNY [52]):

$$J_\epsilon = \{j \in \{1, \dots, m\} / f_j(x^k) \geq F(x^k) - \epsilon_k\} \quad \text{II.3.1.8}$$

où $\epsilon_k \geq 0$ et

$$F(x^k) = \max \{0, f_j(x^k); j = \{1, \dots, m\}\} \quad \text{II.3.1.9}$$

Donc, le sous problème quadratique approché devient :

$$\min \frac{1}{2} d_k^T A(x^k, \lambda^k) d_k + d_k^T \nabla f_0(x^k)$$

sous les contraintes II.3.1.10

$$f_j(x^k) + d_k^T \nabla f_j(x^k) \leq 0, \quad j \in J_\epsilon$$

Pour la mise à jour de la matrice $A(x^k, \lambda^k)$ (approximation pour le hessien en x de la fonction lagrangienne) nous avons fait appel à une méthode quasi-Newton BFGS (voir Annexe A.I). Dans cette méthode, la formule d'actualisation de la matrice $A(x^k, \lambda^k)$ fait intervenir la quantité γ_k qui est définie comme fonction du gradient, de la fonction lagrangienne, à savoir :

$$\gamma_k = \nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda^k) - \nabla_x \mathcal{L}(x^{k-1}, \lambda^{k-1}) \quad \text{II.3.1.11}$$

quantité qui doit donc être évaluée à chaque itération.

Pour l'évaluation du terme $\nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)$, nous avons adopté l'alternative de calculer les estimations des multiplicateurs de Lagrange sur la base de contraintes actives (II.3.1.8, II.3.1.9), comme le vecteur λ qui minimise la norme euclidienne

$$\left\| \nabla f_0(x^k) + \sum_{j \in J_\varepsilon} \lambda_j \nabla f_j(x^k) \right\| \quad \text{II.3.1.12}$$

et de retirer de cette base les contraintes correspondant aux multiplicateurs estimés négatifs, donc, nous aurons l'ensemble J_ε^+ et ainsi l'expression du gradient donnée par

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda^k) = \nabla f_0(x^k) + \sum_{j \in J_\varepsilon^+} \lambda_j \nabla f_j(x^k) \quad \text{II.3.1.13}$$

Finalement, il faut remarquer que l'approximation du hessien $A(x^k, \lambda^k)$ est obtenue directement de l'algorithme BFGS en considérant les modifications proposées par Powell. Elles assurent la conservation de la positivité de $A(x^k, \lambda^k)$ et imposent une stabilité numérique très peu sensible aux changements d'échelle des variables [48-49].

II.3.1.4 Résolution du Sous Problème Quadratique (ou Détermination du Vecteur Direction de Recherche d_k)

Pour la résolution du sous problème quadratique, nous avons adopté l'algorithme proposé par GILL et al [8] et BETTS [64].

De façon à simplifier l'écriture de cet algorithme, nous avons réécrit le sous problème quadratique II.3.1.10 sous la forme :

$$\min \frac{1}{2} d_k^T (n \times 1) A (n \times n) d_k (n \times 1) + b^T (n \times 1) d_k (n \times 1)$$

soumis à

II.3.1.14

$$N^T (p \times n) d_k (n \times 1) + C (p \times 1) \leq 0$$

où $N(n \times p)$ est la matrice des gradients des contraintes actives J_ε , $b(n \times 1) = \nabla f_0(x^k)$, $C(p \times 1) = [\dots f_j(x^k) \dots]$ avec $j \in J_\varepsilon$, p est la dimension de l'ensemble J_ε (contraintes actives et qui engendrent vecteurs gradient linéairement indépendants) et n est la dimension de l'espace de conception.

Algorithme pour le calcul du vecteur d_k

1 - Factorisation de $N^T(p \times n)$ par la méthode de Householder (rang de N^T est $p \leq n$)

$$N^T(p \times n) = [R(p \times p) \quad O(p \times n - p)] Q^T(n \times n)$$

où R est une matrice carrée triangulaire supérieure et Q est une matrice orthogonale ($Q^T Q = I$).

2 - Déterminer la matrice triangulaire inférieure $N_1(p \times p)$

$$N^T(p \times n) Q(n \times n) = [N_1(p \times p) \quad O(p \times n - p)]$$

3 - Résoudre le système triangulaire inférieur

$$N_1(p \times p) y_1(p \times 1) = C(p \times 1)$$

4 - Déterminer la matrice $A_1(n \times n)$

$$A_1(n \times n) = Q^T(n \times n) \cdot A(n \times n) Q(n \times n)$$

5 - Ecrire la matrice $A_1(n \times n)$ par bloc

$$A_1(n \times n) = \begin{bmatrix} A_{11}(p \times p) & A_{12}(p \times n - p) \\ A_{21}(n - p \times p) & A_{22}(n - p \times n - p) \end{bmatrix}$$

6 - Déterminer le vecteur $b_1(n \times 1)$

$$b_1(n \times 1) = Q^T(n \times n) b(n \times 1)$$

7 - Ecrire le vecteur $b_1(n \times 1)$ par blocs

$$b_1(n \times 1) = \begin{bmatrix} b_{11}(p \times 1) \\ b_{12}(n - p \times 1) \end{bmatrix}$$

8 - Déterminer le vecteur $b_2(n - p \times 1)$

$$b_2 (n - p \times 1) = b_{12} (n - p \times 1) - A_{21} (n - p \times p) y_1 (p \times 1)$$

9 - $y_2 (n - p \times 1)$ est déterminé comme le vecteur qui minimise la norme euclidienne

$$\| A_{22} (n - p \times n - p) y_2 (n - p \times 1) - b_2 (n - p \times 1) \|^2$$

10 - Déterminer le vecteur solution $d_k (n \times 1)$

$$d_k (n \times 1) = Q (n \times n) \cdot y (n \times 1)$$

où

$$y (n \times 1) = \begin{bmatrix} y_1 (p \times 1) \\ y_2 (n - p \times 1) \end{bmatrix}$$

II.3.1.5 Calcul du Pas α_k

Une fois que la direction de recherche d_k a été déterminée, le nouveau vecteur de conception x^{k+1} est obtenu par l'équation

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k \tag{II.3.1.15}$$

PSHENICHNY [52] propose que la détermination du pas α_k soit faite en minimisant la fonction suivante:

$$\Phi (x) = f_0(x) + r F (x) \tag{II.3.1.16}$$

où r est une constante réelle qui respecte la condition:

$$r \geq \sum_{j \in J_e} |\lambda_j| \tag{II.3.1.17}$$

et le terme $F(x)$ est déterminé par l'équation II.3.1.9.

Dans son algorithme, PSHENICHNY [52] propose une façon simplifiée pour résoudre cette recherche unidirectionnelle. Ceci, en choisissant α_k comme étant égal à $0,5^{I^*}$, où I^* doit être le plus petit entier qui satisfait la condition :

$$\varnothing(x^k + 0,5^{I^*}d_k) \leq \varnothing(x^k) - 0,5^{I^*} \beta \|d_k\|^2 \quad \text{II.3.1.18}$$

avec $0 < \beta < 1$.

La difficulté de cette recherche a pour origine le caractère non explicite des fonctions $f_0(x)$ et $F(x)$, qui constituent la fonction $\varnothing(x)$. Nous avons surmonté cette difficulté en utilisant une linéarisation convexe de $\varnothing(x)$ (STARNES et HAFTKA [50]) autour du point x^k (eqs.II.2.1.19 et II.2.1.20). Donc une seule analyse éléments finis est nécessaire à chaque itération.

II.3.1.6 Algorithme Réalisé

La procédure est la suivante

0 - A l'étape 0 choisir x^0 (point de départ) ; $k = 0$

1 - A l'étape k en x^k

- calculer $f_j(x^k)$ $j = 0, 1, \dots, m$

- 1er test d'arrêt

$$\text{si } \left| \frac{f_0(x^k) - f_0(x^{k-1})}{f_0(x^{k-1})} \right| \leq \varepsilon, \text{ Fin : } x^k \text{ solution}$$

- déterminer le sous ensemble de contraintes actives J_ε

- 2eme test d'arrêt

si condition de KUHN et TUCKER satisfaites, Fin : x^k solution

- calculer les estimations des multiplicateurs de Lagrange sur la base des contraintes actives et retenir λ_j avec $j \in J_\varepsilon^+$.

- calculer le terme $\nabla_x L(x^k, \lambda^k)$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda^k) = \nabla f_0(x^k) + \sum_{j \in J_\varepsilon} \lambda_j \nabla f_j(x^k)$$

- déterminer l'approximation du hessien du lagrangien en utilisant l'algorithme BFGS

$$A(x^k, \lambda^k) \approx \nabla_x^2 \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)$$

- déterminer le sous problème quadratique

$$\min \frac{1}{2} d_k^T A(x^k, \lambda^k) d_k + \nabla f_0(x^k)^T d_k$$

soumis à

$$\nabla f_j(x^k)^T d_k + f_j(x^k) \leq 0, j \in J_\varepsilon$$

- déterminer le vecteur d_k solution du sous problème quadratique

- 3eme test d'arrêt

si $\|d_k\| \leq \varepsilon$, Fin : x^k solution

- déterminer le pas α_k qui satisfait

$$\varnothing(x^k + \alpha_k d_k) \leq \varnothing(x^k) - \alpha_k \beta \|d_k\|^2$$

- déterminer x^{k+1}

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

- 4eme test d'arrêt

si $\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \varepsilon$, Fin : x^{k+1} solution

2 - $k = k + 1$

- Seme test d'arrêt
si $k >$ nombre maximal d'itérations ; Fin.
sinon retour en 1

II.3.1.7 Exemple (SVANBERG [12])

minimiser

$$f_0(x, y) = x \sqrt{1 + y^2}$$

soumis à

$$f_1(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

$$f_2(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} - \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

avec $0,2 < x < 4,0$ et $0,1 < y < 1,6$

Tableau II.2.3 Résultats obtenus code RQP ($\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$)

k	x	y	f_0	f_1	f_2	d_k	
1	0,900	0,600	1,050	0,553	0,018	0,851	- 1,000
2	1,115	0,347	1,181	0,281	- 0,397	1,000	0,116
3	1,365	0,375	1,458	0,035	- 0,482	1,000	0,052
4	1,397	0,376	1,492	0,011	- 0,493	1,000	0,037
5	1,404	0,377	1,501	0,005	- 0,495	1,000	0,018
6	1,408	0,377	1,505	0,002	- 0,497

Remarque : Point $k = 6$ correspond approximativement à un point de KUHN et TUCKER.

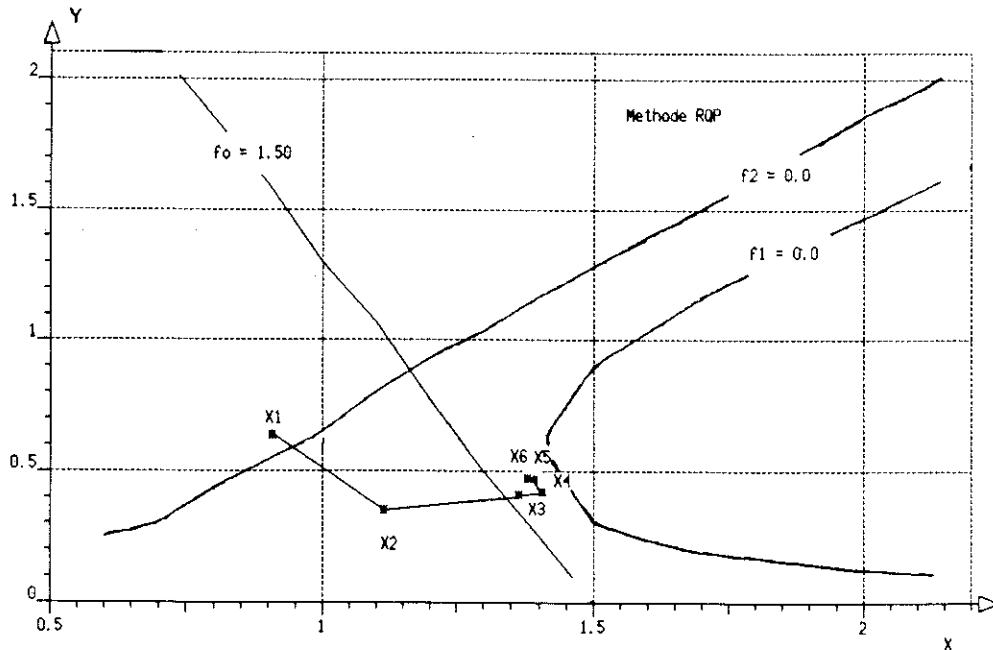


Figure II.3.1: Illustration de l'exemple traité par la méthode de programmation quadratique réursive. Résultats obtenus code RQP Tableau II.2.3

II.3.1.8 Conclusion

Cet algorithme constitue une méthode directe qui utilise les caractéristiques des méthodes duales. Ceci, en faisant intervenir, dans les calculs de mise à jour de $A(x^k, \lambda^k)$, les multiplicateurs de Lagrange associés au sous-problème quadratique approché, lequel détermine la direction de recherche.

Comme $A(x^k, \lambda^k)$ contient à chaque itération des informations sur la courbure de la fonction objectif et des fonctions contraintes, la convergence superlinéaire peut être obtenue. Ce fait rend cet algorithme très attrayant dans le domaine de la programmation non linéaire.

Une caractéristique remarquable de cet algorithme est sa tendance naturelle à engendrer une suite de conceptions admissibles toujours améliorées.

II.3.2 Méthode de l'Ellipsoïde

II.3.2.1 Introduction

La méthode de l'ellipsoïde fait partie d'une famille d'algorithmes particulièrement intéressants, car elle est capable de traiter des problèmes d'optimisation convexe où les fonctions considérées sont non partout différentiables [9,39,41]. Elle utilise le concept de sous-gradient (ou sous-différentiel) (Annexe A.II) d'une fonction en un point donné.

Initialement, cette méthode développée par SHOR[65], IUDIN et NEMIROVSKII [66], ne semblait pas présenter un grand intérêt pratique, car généralement les méthodes de sous-gradient présentent une faible vitesse de convergence. Cependant, depuis les travaux de KHACHIAN [67] (temps de résolution polynomial en fonction de la taille du problème), l'algorithme a fait l'objet de nombreuses expériences numériques.

L'efficacité d'un algorithme de sous-gradient dépend essentiellement du conditionnement des fonctions qui engendrent le problème. Ainsi, SHOR [65], IUDIN et NEMIROVSKII [66] ont utilisé le changement de métrique dans le but d'obtenir un meilleur conditionnement des fonctions, et donc une accélération de la convergence.

III.3.2.2 Principe Général de la Méthode de l'Ellipsoïde

Considérons le problème

$$\text{minimiser } f_0(x)$$

soumis à

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{avec } x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, i = 1, 2, \dots, n$$

II.3.2.1

où les fonctions $f_0(x)$ et $f_j(x)$ ($j=1,2,\dots,m$) sont supposées convexes non partout différentiables (sous-différentiables).

La méthode de l'ellipsoïde, dont la théorie est introduite en 1977 [65,66], constitue la base d'une famille d'algorithmes combinant les principes des méthodes des sous-gradients avec ceux des méthodes quasi-newtoniennes.

Si nous considérons un problème en deux dimensions ($n=2$), géométriquement cette procédure peut être interprétée de la façon suivante :

Initialement nous savons que l'optimum cherché x^* est localisé dans une ellipse E_0 (ou une sphère) de centre x^0 définie par l'ensemble des points x qui vérifient:

$$E_0 = \{x / (x - x^0)^T Q_0^{-1} (x - x^0) \leq 0\} \quad \text{II.3.2.2}$$

où Q_0 doit être une matrice symétrique définie positive que , pour des raisons de simplicité, nous choisissons comme étant donnée par:

$$Q_0 = \text{diagonal} [a_1^2, a_2^2] \quad \text{II.3.2.3}$$

où a_1 est le demi grand axe de E_0 et a_2 est son demi petit axe (figure II.3.2)

A partir d'un sous-gradient (ou gradient) g^0 déterminé comme étant :

$$g^0 = \begin{cases} \partial f_0(x^0) & \text{si } \max f_j(x^0) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \partial f_{j^*}(x^0) & \text{si } \max f_j(x^0) = f_{j^*}(x^0) > 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad \text{II.3.2.4}$$

où $\partial f_0(x^0)$ est un sous gradient (ou gradient) de f_0 en x^0 , et $\partial f_{j^*}(x^0)$ est un sous gradient (ou gradient) de f_{j^*} en x^0 , la procédure construit l'ellipse E_1 , qui contient la demi ellipse

$$\bar{E}_0 = E_0 \cap \{x / -(g^0)^T (x - x^0) \geq 0\} \quad \text{II.3.2.5}$$

Comme les fonctions considérées sont convexes, le point $x^* \in E_0$ et par conséquent $x^* \in E_1$ (figure II.3.2).

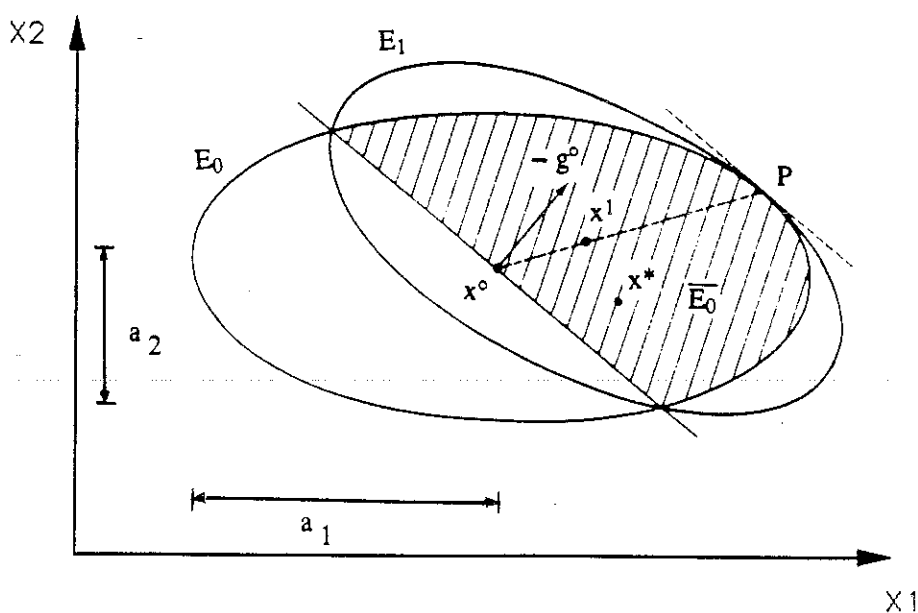


Figure II.3.2 Interprétation géométrique de la méthode de l'ellipsoïde en considérant initialement E_0 . L'optimum $x^* \in E_0$ (en hachures) et aussi à la nouvelle ellipse générée E_1 .

BLAND et al [68] ont démontré que l'ellipse E_1 engendrée par la procédure, est l'ellipse de volume minimal qui contient E_0 . Autrement dit, E_1 est l'unique ellipse ayant même intersection que E_0 avec le demi plan $\{x / -(g^0)^T(x - x^0) \geq 0\}$ et tangente en P à E_0 (figure II.3.2) (le point P étant tel que x^0P est la direction conjuguée du sous espace $\{x / (g^0)^T x = 0\}$ par rapport à l'ellipse E_0). L'ellipse E_1 , centrée en x^1 , est défini par l'ensemble des points x qui satisfont

$$E_1 = \{x / (x - x^1)^T Q_1^{-1} (x - x^1) \leq 1\} \quad \text{II.3.2.6}$$

où Q_1 est déterminé par

$$Q_1 = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[Q_0 - \frac{2}{n + 1} d_0 d_0^T \right] \quad \text{II.3.2.7}$$

$$d_0 = \frac{Q_0 g^0}{\sqrt{(g^0)^T Q_0 g^0}} \quad \text{II.3.2.8}$$

et le centre x^1 est défini par:

$$x^1 = x^0 - \frac{1}{n + 1} d_0 \quad \text{II.3.2.9}$$

SHOR [65] a démontré que, après avoir utilisé cette procédure, les volumes $V(E_1)$ et $V(E_0)$ satisfont la relation:

$$\frac{V(E_1)}{V(E_0)} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = q_n < 1 \quad \text{II.3.2.10}$$

Cela veut dire que, cette méthode converge selon une progression géométrique de raison q_n , laquelle ne dépend que de la dimension de l'espace.

Ainsi, à l'itération k , avec le sous gradient g^k déterminé par l'équation II.3.2.4, la solution x^* sera nécessairement contenue dans la demi ellipse

$$\bar{E}_k = E_k \cap \left\{ x / - (g^k)^T (x - x^k) \geq 0 \right\} \quad \text{II.3.2.11}$$

et qui détermine par conséquent la nouvelle ellipse E_{k+1} de centre x^{k+1} . E_{k+1} contient le point x^* et d'un volume strictement inférieur au volume de E_k .

II.3.2.3 Evolution de l'Opérateur (Matrice de la Métrique) Q_k

Il semble d'après les expériences numériques rapportées par de nombreux auteurs [35,37,39,68,70], que cette procédure soit loin de concurrencer les méthodes dites duales ou qui utilisent la notion de dualité.

Or pour des applications pratiques, les techniques d'optimisation n'ont d'intérêt que si elles sont capables de conduire au résultat en un faible nombre d'itérations.

En 1979, SHOR et GERSHOVICH [69] ont proposé l'utilisation de la technique de coupe profonde (deep cuts) dans le but d'accélérer la vitesse de convergence de cette méthode. La technique de coupe profonde consiste à déterminer un nouvel ellipsoïde E_{k+1} (itération k) de volume plus petit que celui dit de volume minimal engendré par la procédure originale (eq.II.3.2.6) et qui soit encore capable de contenir x^* . Cependant, de nombreux auteurs ont mis en évidence que cette technique est complexe et encore mal connue [39,68,70].

D'après nos expériences numériques et de nombreux auteurs [35,37,39], la convergence et la stabilité de cette procédure dépendent de façon critique de l'évolution de l'opérateur Q_k (ou matrice de la métrique).

En considérant cet aspect, nous avons proposé l'utilisation d'une transformation capable de remplacer la matrice Q_{k+1} (engendrée par la procédure originale) par une variante diagonale Q_{k+1}^* .

Dans la procédure originale la matrice Q_{k+1} est donnée par :

$$Q_{k+1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[Q_k - \frac{2}{n + 1} d_k d_k^T \right] \quad \text{II.3.2.12}$$

Nous avons adopté la procédure suivante pour la détermination d'une matrice diagonale

$$Q_{k+1}^* = \text{diag} \{ \alpha q_{11}^{k+1}, \dots, \alpha q_{nn}^{k+1} \}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{II.3.2.13}$$

où

$$q_{ii}^{k+1} = \min (\lambda_i^k, \lambda_i^{k+1}) \quad \text{II.3.2.14}$$

λ_i^k est la valeur propre i de Q^k (matrice de la métrique actuelle) et λ_i^{k+1} est la valeur propre i de Q^{k+1} (matrice de la métrique actualisée eq.II.3.2.12).

Cependant, à proximité de la solution, à cause des faibles dimensions de Q_{k+1} (II.3.2.12), toute réduction de celle-ci Q_{k+1}^* (II.3.2.13), aussi faible qu'elle soit, peut entraîner la non convergence de la méthode. Le paramètre $\alpha \geq 1$ a été introduit comme un moyen très simple d'assurer la convergence. Dès que le nombre d'itérations devient important, α doit être pris légèrement supérieur à 1.

II.3.2.4 Algorithme Réalisé

0 - A l'étape 0 choisir x^0 (point de départ) et déterminer Q_0 comme étant

$$Q_0 = \text{diagonal} [q_{11}, \dots, q_{nn}]$$

$$\text{avec } q_{ii} = \max \{ (x_i^0 - x_i^{\min})^2, (x_i^{\max} - x_i^0)^2 \} \quad i = 1, \dots, n$$

1 - A l'étape k en x^k

- calculer $f_j(x^k)$, $j = 0, 1, \dots, m$

- 1er test d'arrêt

$$\text{si } \left| \frac{f_0(x^k) - f_0(x^{k-1})}{f_0(x^{k-1})} \right| \leq \varepsilon, \text{ Fin : } x^k \text{ solution}$$

- Déterminer le sous ensemble de contraintes actives J_ε (algorithme de PSHENICHNY)

- Calculer les sous gradients $\partial f_j(x^k)$ (ou les gradients $\nabla f_j(x^k)$), $j = 0$ et $j \in J_\varepsilon$

- 2ème test d'arrêt

vérifier si les conditions de KUHN et TUCKER sont satisfaites, Fin: x^k solution

- Déterminer le sous gradient (ou gradient)

$$g^k = \begin{cases} \partial f_0(x^k) \text{ (ou } \nabla f_0(x^k)) & \text{si } \max f_j(x^k) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \partial f_{j^*}(x^k) \text{ (ou } \nabla f_{j^*}(x^k)) & \text{si } \max f_j(x^k) = f_{j^*}(x^k) > 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

- 3ème test d'arrêt

$$\text{si } \|g^k\| \leq \varepsilon, \text{ fin : } x^k \text{ solution}$$

- Calculer le vecteur direction de recherche

$$\text{si } (g^k)^T Q_k g^k > 0$$

$$d_k = \frac{Q_k g^k}{\sqrt{(g^k)^T Q_k g^k}}$$

sinon Fin.

-Déterminer x^{k+1}

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{n+1} d_k$$

-3ème test d'arrêt

si $\frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\|x^k\|} \leq \epsilon$, Fin : x^{k+1} solution

- Déterminer la nouvelle matrice de métrique Q_{k+1}

$$Q_{k+1} = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[Q_k - \frac{2}{n+1} d_k d_k^T \right]$$

- Déterminer les valeurs propres de Q_{k+1} (λ calculé par la méthode QR)

$$\lambda^T = (\lambda_1^{k+1}, \dots, \lambda_n^{k+1})$$

$$Q_{k+1}^* = \text{diag} \{ \alpha q_{11}^{k+1}, \dots, \alpha q_{nn}^{k+1} \}$$

avec $q_{ii}^{k+1} = \min(\lambda_i^k, \lambda_i^{k+1})$, $i = 1, \dots, n$ et $\alpha \geq 1$

2. $k = k + 1$

4^{ème} test d'arrêt

si $k >$ nombre maximal d'itérations ; Fin,
sinon retour en 1.

II.3.2.5 Exemple (SVANBERG [12])

minimiser

$$f_0(x, y) = x \sqrt{1 + y^2}$$

soumis à

$$f_1(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} + \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

$$f_2(x, y) = 0,124 \sqrt{1 + y^2} \left[\frac{8}{x} - \frac{1}{xy} \right] - 1 \leq 0$$

avec $0,2 < x < 4,0$ et $0,1 < y < 1,6$

Tableau II.2.4. Résultats obtenus code EM ($\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$)

k	x	y	f_0	f_1	f_2	d_k	
1	0,900	0,600	1,050	0,553	0,018	- 3,189	0,456
2	1,963	0,448	2,151	- 0,292	- 0,601	2,893	0,942
3	0,998	0,211	1,020	0,617	- 0,586	- 0,758	- 1,722
4	1,251	0,785	1,591	0,168	- 0,153	- 2,850	0,203
5	2,201	0,717	2,709	- 0,348	- 0,542	1,692	0,667
6	1,637	0,494	1,827	- 0,153	- 0,495	1,465	0,044
7	1,149	0,480	1,275	0,207	- 0,291	- 1,847	- 1,557
8	1,764	0,485	1,961	- 0,214	- 0,536	1,112	0,324
9	1,389	0,378	1,485	0,016	- 0,489	_____	_____

Remarque : Point k = 9 correspond approximativement à un point de KUHN et TUCKER.

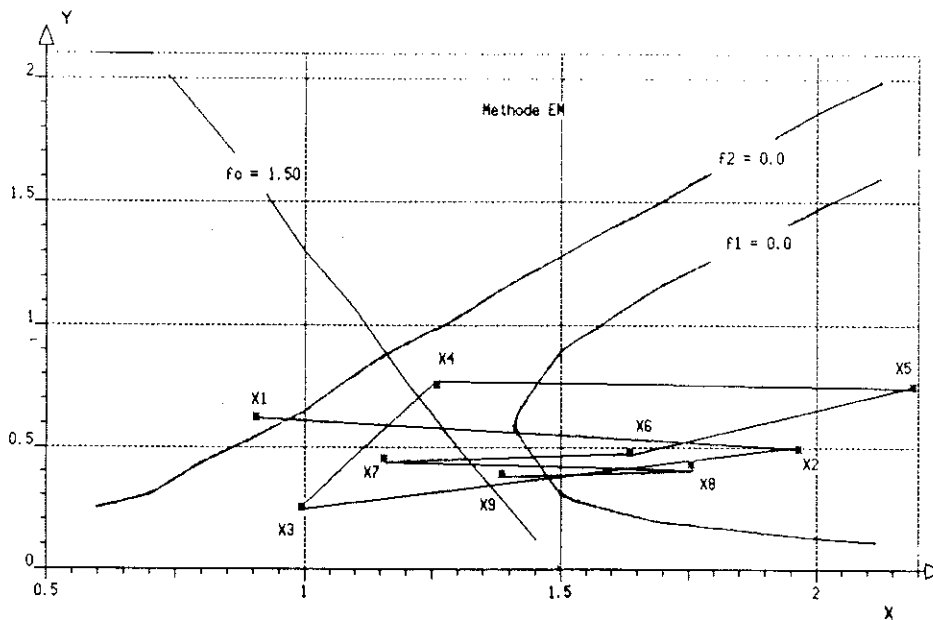


Figure II.3.3: Illustration de l'exemple traité par la méthode de l'ellipsoïde. Résultats obtenus code EM (Tableau II.2.4)

II.3.2.6 Conclusion

Du point de vue de la programmation, cette technique est encore loin de concurrencer les méthodes dites duales ou qui utilisent la notion de dualité. Par contre, elle présente l'avantage important d'une mise en œuvre très simple, elle est plus robuste et la convergence globale est souvent plus facile à obtenir.

La technique consistant à remplacer l'opérateur Q_{k+1} par une variante diagonale introduit une difficulté additionnelle, qui est la nécessité d'évaluer les valeurs propres de Q_{k+1} à chaque itération ; en contrepartie la séquence de solutions engendrées peut assurer une décroissance plus monotone de la fonction objectif.

II.4 Conclusion

Ce chapitre, nous a permis de présenter d'une manière concise les aspects théoriques des méthodes de programmation non linéaire que nous avons choisies pour mener notre étude.

Nous avons étudié ces méthodes d'optimisation en vue de les adapter et de les appliquer à la conception des dispositifs électrotechniques, où les équations d'état électromagnétiques sont résolues par la méthode des éléments finis.

Dans ce chapitre, nous avons pu surmonter certaines difficultés liées à la mise en œuvre de ces techniques, en proposant des modifications adaptées aux problèmes de conception de forme à l'aide d'une méthode d'analyse numérique (méthode des éléments finis).

Enfin, nous croyons que la compréhension et la diffusion de telles techniques dépendent surtout de la possibilité d'intégration de celles-ci dans des logiciels interactifs dédiés aux tâches de la conception, tels que le pré et post-processeur des programmes d'éléments finis (par exemple FLUX 2D, FLUX 3D etc). C'est dans cet esprit que, dans le chapitre suivant, ces techniques d'optimisation de forme seront envisagées dans le contexte de la méthode des éléments finis.

CHAPITRE III

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET LA PROGRAMMATION MATHEMATIQUE APPLIQUEES A L'ELECTROTECHNIQUE

INTRODUCTION

Nous allons maintenant concentrer nos efforts sur le développement et la compréhension d'un système de synthèse de forme, basé sur l'utilisation conjointe d'analyses par la méthode des éléments finis et d'algorithmes de programmation mathématique.

Remarquons, en préliminaire, que jusqu'au début des années soixante dix, la combinaison de ces techniques était irréaliste à cause du coût prohibitif du processus itératif.

De nos jours, l'association d'un algorithme d'optimisation avec un code de calcul par éléments finis est devenue viable principalement grâce à l'évolution rapide de la puissance et de la disponibilité des moyens de calcul digitaux.

Au cours de ce chapitre, nous rappellerons tout d'abord les principes de base de la méthode des éléments finis. Ensuite, nous décrirons plus en détail l'organisation des logiciels éléments finis qui prennent en compte la représentation paramétrique des données géométriques et physiques. Cette organisation rend possible l'intégration harmonieuse de ces logiciels dans un contexte d'optimisation assistée de systèmes. Finalement, nous présenterons l'architecture d'un logiciel d'optimisation de forme avec analyse par la méthode des éléments finis.

III.1 La Méthode des Eléments Finis

III.1.1 Introduction

La méthode des éléments finis a été introduite, dans le domaine de l'ingénierie, en 1950 par des ingénieurs de l'aéronautique confrontés à des problèmes de calcul de structures complexes. Aujourd'hui, son champ d'application est très vaste. Elle est utilisée dans de nombreux domaines : nucléaire, biologie, mécanique, électrotechnique, thermique, biomécanique, géophysique, etc...

Cette partie est consacrée à un bref rappel des principes de la méthode des éléments finis, ainsi qu'à des considérations générales sur les logiciels éléments finis.

Les premières applications en électrotechnique ont eu lieu dans les années 70 et n'ont cessé depuis, de se développer sous la forme de logiciels polyvalents et fiables destinés à la recherche et aussi à l'industrie (FLUX2D, FLUX3D, PE2D, TOSCA,...).

III.1.2 Principe de la Méthode des Eléments Finis

Le principe de la méthode des éléments finis repose sur le concept simple de représentation du comportement physique d'un milieu continu à l'aide d'un modèle mathématique. Ce modèle est obtenu en découpant le domaine géométrique d'étude en sous-domaines (éléments finis) plus simples (éléments de forme linéique, triangulaire, tétraédrique, etc...). La fonction inconnue (un potentiel scalaire, un potentiel vecteur, une combinaison potentiel scalaire et vecteur,...) est alors construite par morceau à partir de chacun des éléments. A l'intérieur d'un élément, la fonction représentative du système est obtenue par interpolation polynomiale à partir des valeurs des inconnues aux noeuds. Ces inconnues doivent vérifier localement les équations aux dérivées partielles, les conditions de continuité et les conditions aux limites imposées lors de la définition du problème.

Ainsi, cette méthode constitue un outil qui permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles associé à des conditions aux limites en un système d'équations algébriques.

III.1.3 L'Electrotechnique et l'Analyse par la Méthode des Eléments Finis

En électrotechnique, ce sont les équations de Maxwell qui interviennent.

Généralement, la résolution de ces équations dans leur intégralité est trop complexe. Heureusement, selon les applications certains phénomènes peuvent être négligés sans que la précision des résultats soit affectée. Nous pouvons donc, définir certains modèles adaptés aux différentes classes de problèmes régis par les équations de Maxwell [72,74,75].

Dans le cadre de la présente étude, nous nous intéressons aux modèles électromagnétiques adaptés aux phénomènes à basses fréquences. Les principales classes de problèmes et les formulations respectives sont présentées sur les tableaux III.1.1, III.1.2, III.1.3 et III.1.4 [72,77]

Tableau III.1.1 : Modèle électrostatique

METHODE	EQUATION	VARIABLE
Potentiel scalaire électrique	$\text{div} (\epsilon \text{ grad } V) + \rho = 0$	V

Propriétés : permittivité ϵ , charges ρ

Tableau III.1.2 : Modèles électrocinétiques

METHODE	EQUATION	VARIABLE
Tension électrique	$\text{div} (\sigma \text{ grad } \psi) = 0$	ψ
Potentiel vecteur électrique	$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{ rot}(T) \right) = 0$	T

Propriétés : Conductivité électrique σ

Tableau III.1.3 : Modèles magnéto-statiques

METHODE	EQUATION	VARIABLE
Potentiel scalaire magnétique total	$\text{div} (\mu \text{ grad } \phi) = 0$	ϕ
Potentiel scalaire magnétique réduit	$\text{div} (\mu (- \text{ grad } \phi_R + H_j)) = 0$	ϕ_R
Potentiel vecteur magnétique	$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{ rot } A \right) - J = 0$	A

Propriétés : Perméabilité μ , courant source J, champ source H_j

Tableau III.1.4 : Modèles magnétodynamiques

METHODE	EQUATION	VARIABLE
Champ magnétique	$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{ rot } H \right) + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0$	H
potentiel vecteur magnétique modifié	$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{ rot } A^* \right) + \sigma \frac{\partial A^*}{\partial t} = 0$	A^*
Potentiel vecteur magnétique	$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{ rot } A \right) + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{ grad } V \right) = 0$	A - V
potentiel scalaire électrique	$\text{div} \left[\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{ grad } V \right) \right] = 0$	
Potentiel vecteur électrique	$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{ rot } T \right) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (T - \text{ grad } \Omega) = 0$	T - Ω
Potentiel scalaire magnétique	$\text{div} \left[\mu (T - \text{ grad } \Omega) \right] = 0$	

Propriétés : Perméabilité μ , Conductivité σ

III.1.4 Formulation Intégrale des Problèmes

La méthode des éléments finis est basée sur une formulation intégrale du phénomène étudié, et non pas sur la forme différentielle que représentent les équations aux dérivées partielles (Tableaux III.1.1 - III.1.4) auxquelles sont associées les conditions aux limites. Cette formulation peut être du type variationnel (méthode de RITZ) ou de type projectif (méthode de GALERKIN) [71,73] etc...

La formulation variationnelle consiste à transposer le problème aux dérivées partielles en un problème d'extrémalisation d'intégrale, où l'équivalence entre les deux est assurée grâce à l'équation d'EULER [71,73]. Dans le domaine de l'électromagnétisme, la formulation variationnelle est particulièrement intéressante, parce qu'elle est directement liée à l'énergie du système étudié.

L'intégrale à minimiser se présente sous la forme suivante :

$$I = \int_{\Omega} F_{\Omega} dV + \int_S F_s dS \quad \text{III.1.4.1}$$

où Ω représente le domaine d'étude et S sa surface périphérique. Le terme F_{Ω} prend en compte les équations aux dérivées partielles alors que F_s tient compte des conditions aux limites. Les fonctions F_{Ω} et F_s dépendent d'un ensemble de fonctions u (potentiel scalaire, vectoriel, etc...), de leurs dérivées partielles par rapport aux coordonnées $(\frac{\partial u}{\partial x}, \dots)$ et éventuellement des coordonnées x, y et z .

En général, la fonctionnelle est construite à partir du principe de l'action hamiltonienne [71].

Pour illustrer la formulation du type projectif, considérons le problème continu représenté par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$L(u) - f = 0 \quad \text{sur le domaine } \Omega \quad \text{III.1.4.2}$$

$$C(u) - g = 0 \quad \text{sur les frontières } \Gamma \quad \text{III.1.4.3}$$

La résolution du problème se traduit par la recherche d'une fonction u , où le résidu :

$$R(u) = L(u) - f \quad \text{III.1.4.4}$$

est nul et l'équation III.1.4.3 est vérifiée.

La méthode consiste à remplacer les équations aux dérivées partielles III.1.4.2 par la forme intégrale suivante :

$$\int_{\Omega} \psi R(u) d V = \int_{\Omega} \psi (L(u) - f) d V = 0 \quad \text{III.1.4.5}$$

où ψ est une fonction qui appartient à l'ensemble de fonctions de pondération E_{ψ} . Si E_{ψ} est de dimension infinie, l'équivalence entre le problème aux dérivées partielles et sa formulation intégrale est assurée. Si E_{ψ} est de dimension finie, ce qui correspond aux cas pratiques, la solution obtenue par la formulation intégrale ne constitue qu'une approximation de la solution exacte [71,73].

III.1.5 Discrétisation de la Formulation Intégrale des Problèmes

Considérons la formulation intégrale III.1.4.5. La méthode des éléments finis nodaux consiste à remplacer la forme intégrale III.1.4.5 par un système d'équations discret, où la fonction inconnue $u(x, y, z)$ est approchée par la combinaison linéaire suivante :

$$u_{\text{discret}}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x, y, z) u_i \quad \text{III.1.5.1}$$

où N est le nombre de noeuds du système et où les fonctions d'interpolation connues $\alpha_i(x,y,z)$ indépendantes présentent, entre autres, la caractéristique suivante :

$$\alpha_i(x,y,z) = 1 \text{ au noeud } i \quad \text{III.1.5.2}$$

$$\alpha_i(x,y,z) = 0 \text{ pour tous les autres noeuds}$$

Les u_i sont les variables inconnues qui doivent être déterminées pour fournir une solution approchée.

Si nous considérons ψ_i comme étant une fonction de pondération et α_j une fonction d'interpolation, rendre nulle l'équation III.1.4.5, pour l'ensemble des fonctions de pondération, revient à résoudre le système sous la forme matricielle suivante :

$$M U = S \quad \text{III.1.5.3}$$

où M est une matrice et S un vecteur, ayant pour coefficient les termes suivants :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i L(\alpha_j) dV \quad \text{III.1.5.4}$$

$$S_i = \int_{\Omega} \psi_i f dV \quad \text{III.1.5.5}$$

Le vecteur U correspond aux variables nodales inconnues.

Il faut remarquer que les fonctions d'interpolation propres à chaque élément fini du domaine, doivent respecter au passage entre deux éléments voisins des conditions de continuité compatibles avec celles imposées par la nature du problème.

Comme deuxième remarque, nous avons l'équivalence de la méthode variationnelle avec la méthode des résidus pondérés si l'opérateur L est auto-adjoint, c'est à dire :

$$\int_{\Omega} \psi_i L(u) dV = \int_{\Omega} u L(\psi_i) dV \quad \text{III.1.5.6}$$

III.1.6 Méthode des Eléments Finis en Magnétostatique (Formulation Variationnelle)

III.1.6.1 Choix d'une fonctionnelle

Dans cette partie, nous développons, à titre d'exemple la résolution par la méthode des éléments finis d'un problème magnétostatique.

Dans le domaine de la magnétostatique, les équations à résoudre, s'écrivent :

$$\text{rot } H = J \quad \text{III.1.6.1}$$

$$\text{div } B = 0 \quad \text{III.1.6.2}$$

où H est le vecteur champ magnétique (A / m), J est la densité de courant (A / m²) et B est le vecteur induction magnétique (T).

De plus, nous pouvons ajouter la relation qui décrit la propriété magnétique du matériau :

$$B = \mu_0 \mu_r H + B_r \quad \text{III.1.6.3}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide ($4 \pi 10^{-7} \text{ H / m}$), μ_r est la perméabilité relative du matériau et B_r est l'induction rémanente (T).

III.1.6.2 Formulation en Potentiel Vecteur

L'utilisation du potentiel vecteur A peut simplifier le système d'équations III.1.6.1, III.1.6.2 et III.1.6.3 qui définissent le problème magnétostatique. Le vecteur induction magnétique B est défini par :

$$B = \text{rot } A \quad \text{III.1.6.4}$$

L'équation III.1.6.1 devient :

$$\text{rot } [\mu^{-1} \text{rot } A] = J \quad \text{III.1.6.5}$$

et l'équation III.1.6.2 :

$$\text{div } (\text{rot } A) = 0 \quad \text{III.1.6.6}$$

Pour assurer l'unicité de la solution, une contrainte supplémentaire doit être imposée, par exemple la jauge de COULOMB :

$$\text{div } A = 0 \quad \text{III.1.6.7}$$

Le problème aux dérivées partielles III.1.6.5 et III.1.6.6 peut, alors, être transformé en un problème variationnel équivalent (COULOMB [21,74]). La fonctionnelle d'énergie à la forme suivante :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mu^{-1} (\text{rot } A)^2 - J A \right] dV + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu^{-1} (\text{div } A)^2 dV \quad \text{III.1.6.8}$$

Si nous nous plaçons dans le cas tridimensionnel, considérant que des éléments finis tétraédriques d'ordre p ($p = 1, 2, \dots$) sont utilisés et que le maillage du domaine possède N noeuds, alors, à l'intérieur du domaine la fonction inconnue $A(x, y, z)$ sera la suivante :

$$A(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(x, y, z) A_i \quad \text{III.1.6.9}$$

où A_i est la valeur nodale du vecteur potentiel au nœud i et α_i est la fonction d'interpolation associée.

Les composantes A_i du vecteur A inconnu, solution du problème discret, sont déterminées à partir du principe de stationnarité, c'est à dire :

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = 0 \quad \text{III.1.6.10}$$

que nous pouvons écrire comme :

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial B^T}{\partial A_i} H + \frac{\partial}{\partial A_i} (\text{div } A) \mu^{-1} \text{div } A - \frac{\partial A^T}{\partial A_i} J \right] dV \quad \text{III.1.6.11}$$

où l'indice T représente la transposition. Selon COULOMB [21,74], nous pouvons encore l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \int_{\Omega} [- \text{grad } \alpha_i \times H + \text{grad } \alpha_i \mu^{-1} \text{div } A - \alpha_i J] dV \quad \text{III.1.6.12}$$

avec J et μ des fonctions d'espace connues, H fonction de B , B étant déterminé à partir des inconnues A_i par:

$$B = \sum_{i=1}^N \text{grad } \alpha_i \times A_i \quad \text{III.1.6.13}$$

et $\text{div } A$ donne par :

$$\text{div } A = \sum_{i=1}^N \text{grad } \alpha_i \times A_i \quad \text{III.1.6.14}$$

Si nous considérons les problèmes magnétostatiques avec le domaine Ω constitué d'un matériau linéaire anisotrope, le système matriciel à résoudre est alors le suivant :

$$M A = S \quad \text{III.1.6.15}$$

où

$$S_i = \int_{\Omega} [\alpha_i J + \text{grad } \alpha_i \times H_c] dV \quad \text{III.1.6.16}$$

et

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial B^T}{\partial A_i} \mu^{-1} \frac{\partial B}{\partial A_j^T} + \mu^{-1} \text{grad } \alpha_i \text{grad } \alpha_j^T \right] dV \quad \text{III.1.6.17}$$

où H_c est le champ rémanent et μ est un tenseur de perméabilité indépendant de l'induction B .

III.1.7 Exploitation des Résultats

La simulation d'un problème électromagnétique par la méthode des éléments finis peut apporter à l'utilisateur des informations numériques locales (exemple : le champ magnétique, l'induction magnétique, etc...) ou globales (exemple : les forces électromagnétiques, le flux, etc...).

Considérons, pour illustrer notre propos, un problème magnétostatique, résolu à travers le potentiel vecteur magnétique. La variable d'état est interpolée à partir des fonctions de forme α_i du maillage éléments finis par la formule :

$$A = \sum_i \alpha_i(x, y, z) A_i \quad \text{III.1.7.1}$$

où les A_i représentent les résultats bruts de la résolution par la méthode des éléments finis.

De ces résultats bruts, nous pouvons déduire un certain nombre de quantités significatives pour l'utilisateur :

- Le potentiel magnétique au point p de coordonnées (x_p, y_p, z_p)

$$A = \sum_i \alpha_i(x_p, y_p, z_p) A_i \quad \text{III.1.7.2}$$

- L'induction magnétique au point p

$$\mathbf{B} = \sum_i \nabla \alpha_i(x_p, y_p, z_p) \times \mathbf{A}_i \quad \text{III.1.7.3}$$

- Le champ magnétique au point p

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{B} \quad \text{III.1.7.4}$$

- L'énergie électromagnétique dans le domaine Ω

$$W = \int_{\Omega} \int_0^B \mathbf{H} \, d\mathbf{B} \, dV \quad \text{III.1.7.5}$$

- Calcul de la force magnétique exercée sur un objet rigide, définie par une surface englobante S

$$\mathbf{F} = \int_S \left[\mu (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{\mu}{2} H^2 \mathbf{n} \right] dS \quad \text{III.1.7.6}$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire sortant normal à la surface S

- Calcul du couple par le tenseur du Maxwell

$$\mathbf{C} = \int_S \left[\mu (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{r} \times \mathbf{H}) - \frac{\mu}{2} H^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \right] dS \quad \text{III.1.7.7}$$

où \mathbf{r} est le rayon vecteur du point courant de S par rapport à l'axe de rotation.

- Calcul du couple par la méthode des travaux virtuels [17-21]

$$\mathbf{C} = - \frac{\partial W}{\partial \theta} = - \int_S \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta} dS - \int_S \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} \frac{\partial}{\partial \theta} (dS) \quad \text{III.1.7.8}$$

où θ est l'angle qui mesure la rotation virtuelle.

- Etc...

III.2 Les Logiciels Eléments Finis

III.2.1 Introduction

Dans le processus de conception d'un dispositif électrotechnique par la méthode des éléments finis, nous pouvons distinguer trois étapes : la création des informations qui décrivent le système physique étudié, la construction et la résolution des équations du modèle mathématique qui représente le système physique étudié et la présentation à l'utilisateur des résultats générés par celui-ci (voir figure III.2.1).

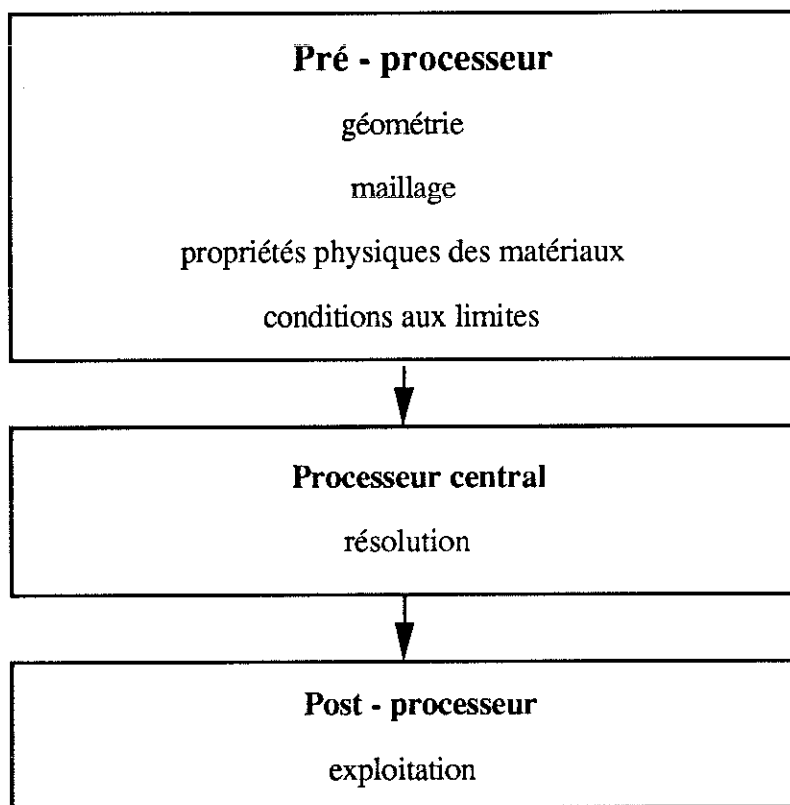


Figure III.2.1 : Différentes étapes dans la conception par la méthode des éléments finis

COULOMB en 81 [21] propose une organisation originale pour les logiciels de calcul de champ, intégrant la définition paramétrique des objets. Cette structure apporte une grande souplesse d'utilisation. Par ailleurs, elle rend possible l'intégration de ces logiciels dans les processus de conception assistée par ordinateur.

Dans la partie qui suit, nous nous proposons de discuter quelques aspects de cette structure particulièrement intéressants dans le contexte de l'optimisation assistée de systèmes.

III.2.1 Les Logiciels Eléments Finis Adaptés à la Définition Paramétrique

Dans les logiciels éléments finis (FLUX2D, FLUX3D) développés au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, la définition paramétrique des dimensions et caractéristiques physiques est une préoccupation particulièrement importante.

L'utilisation de cette définition paramétrique permet de réduire sensiblement les boucles de calcul des grandeurs étudiées, et aussi les modifications de nature géométriques ou physiques en n'imposant pas nécessairement un retour à la case départ du processus de simulation.

La figure III.2.2 montre la structure générale de ces logiciels [21].

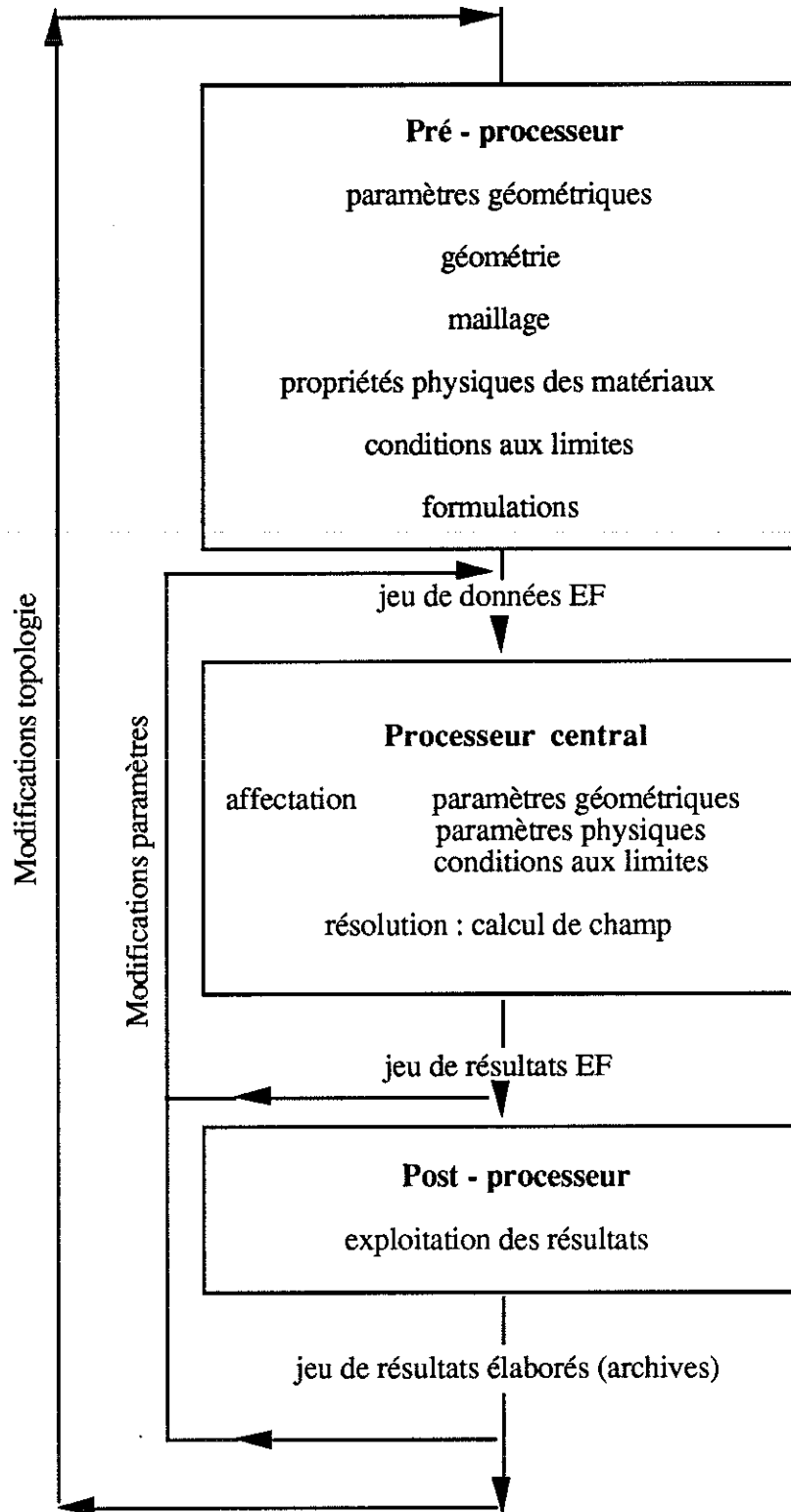


Figure III.2.2 : Structure du logiciel éléments finis adapté à la définition paramétrique

L'objectif fondamental qui a conduit au choix de cette structure éléments finis (figure III.2.2) est sans doute la réalisation d'un outil de calcul de champ souple et efficace et qui puisse s'inscrire harmonieusement dans le cadre plus large d'une chaîne de Conception Assistée par Ordinateur [21].

Une autre fonction importante est de permettre un dépouillement et une interprétation rapide des résultats d'un calcul éléments finis. Une telle facilité est requise pour pouvoir modifier directement et itérativement les données considérées comme connues ou inconnues dans le modèle éléments finis, lorsque cela s'avère nécessaire. Par exemple : dans un programme d'optimisation de forme, les conditions de minimisation d'un objectif (couple, force, une valeur imposée d'induction magnétique, etc...) permettent d'ajouter les grandeurs qui décrivent le contour du domaine à l'ensemble des inconnues ; dans une identification de loi de comportement physique, certains paramètres de la loi sont inconnus, ceux-ci peuvent être déterminés par la minimisation de la différence entre les résultats obtenus par le calcul et les résultats expérimentaux, etc...

III.2.3 Le Pré-Processeur Adapté à une Définition Paramétrique

III.2.3.1 Considérations Initiales

Le rôle du pré-processeur dans un programme éléments finis est de permettre la définition géométrique du dispositif étudié, ainsi que les informations concernant les conditions aux limites, les caractéristiques physiques générales des matériaux, etc...

Donc, dans le cadre d'une chaîne de conception assistée par ordinateur, il est fondamental que le pré-processeur permette l'étude de l'effet de la variation d'un ou plusieurs paramètres constructifs du dispositif étudié. Ceci, dans le but de réaliser un outil de calcul interactif, souple et qui puisse servir de lien avec d'autres logiciels, comme par exemple les logiciels d'optimisation automatique de forme, etc...

Le pré-processeur comme il est décrit dans la structure de la figure III.2.2 permet la création la modélisation et la visualisation des entités géométriques de l'objet étudié, ainsi que la description de ses informations topologiques.

III.2.3.2 Définition Paramétrique des Données Géométriques et Physiques

En premier lieu, nous devons introduire le concept de définition paramétrique des données géométriques et physiques afin d'y familiariser le lecteur [21].

La description d'un objet repose essentiellement sur les concepts suivants :

- Les variables littérales qui constituent un ensemble de paramètres disponibles.
- Les points qui peuvent être créés comme fonction de ces paramètres.
- Les lignes qui peuvent être créées comme fonction des points paramétrés.
- Les surfaces créées à partir des lignes paramétrées.
- Les volumes créés à partir des surfaces paramétrées.

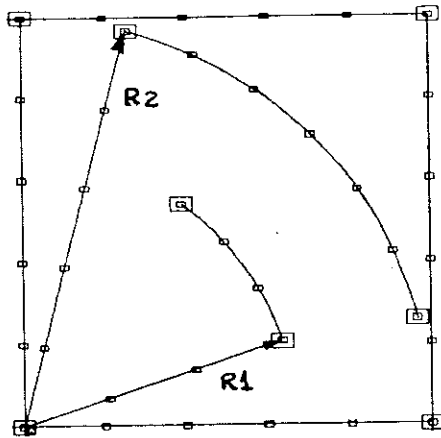
Par rapport aux caractéristiques physiques, nous avons aussi les flexibilités de pouvoir les traiter comme données paramétriques, exemple : une perméabilité magnétique du matériau variable. Avec cette représentation paramétrique de domaine, les points permettent de modifier la géométrie lorsque nous leurs associons des coordonnées réelles qui sont déterminées par des expressions arithmétiques de paramètres définis a priori.

Les principaux avantages apportés par cette technique sont les suivants :

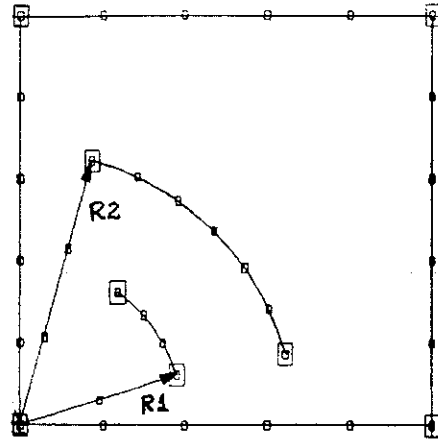
- Des fonctionnalités suffisantes pour la modélisation de la structure d'un objet.
- Une bonne adaptation aux modifications éventuelles de la géométrie de l'objet (la topologie est conservée et a juste besoin d'être réaffectée).
- La possibilité de décrire une famille d'objets paramétrés.

Elle présente, par contre, l'inconvénient de conserver une topologie constante.

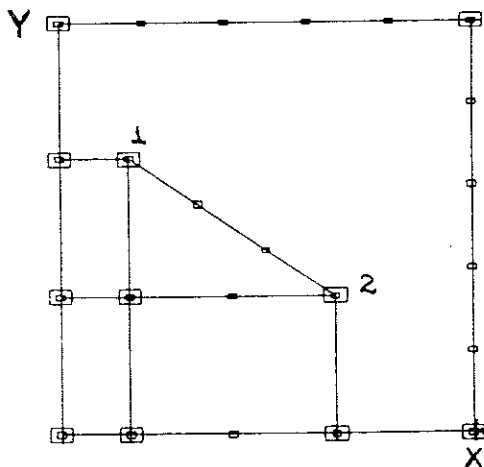
Les paramètres (variables) sont par exemple le rayon d'un arc de cercle figure III.2.3 a et b, ou les positions des noeuds clés des extrémités d'un segment de droite figure III.2.3 c et d.



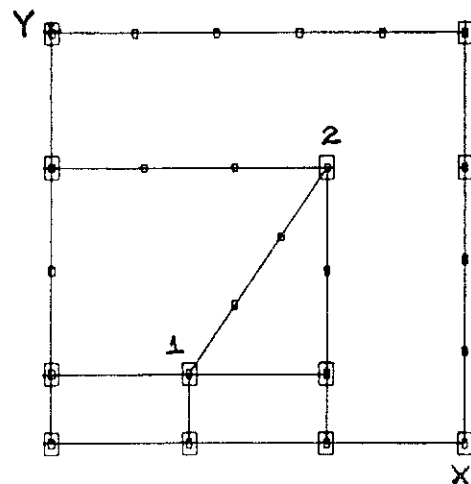
a - $R1 = 1,0$ $R2 = 1,5 R1$



b- $R1 = 0,6 R2$ $R2 = 1,0$



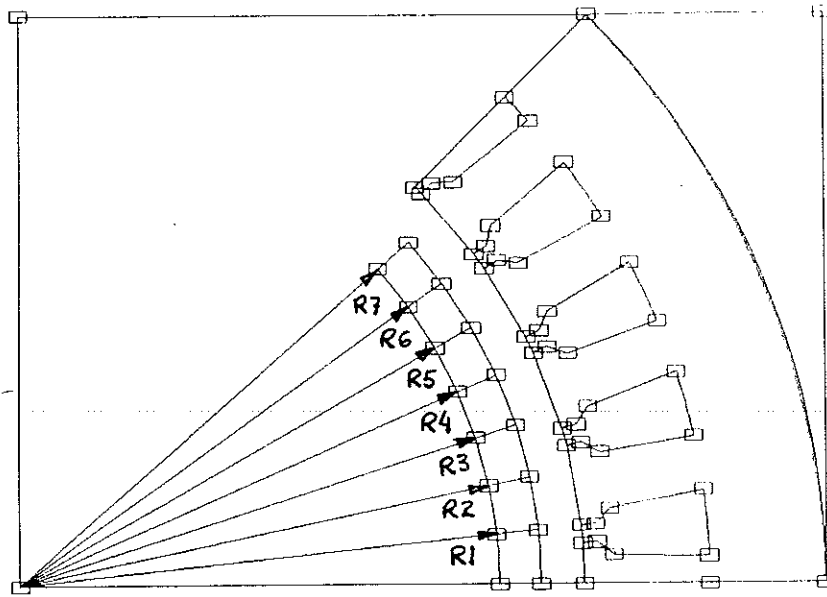
c - $x_1 = 1,0$ $x_2 = 4,0 x_1$
 $y_1 = 4,0$ $y_2 = 0,5 y_1$



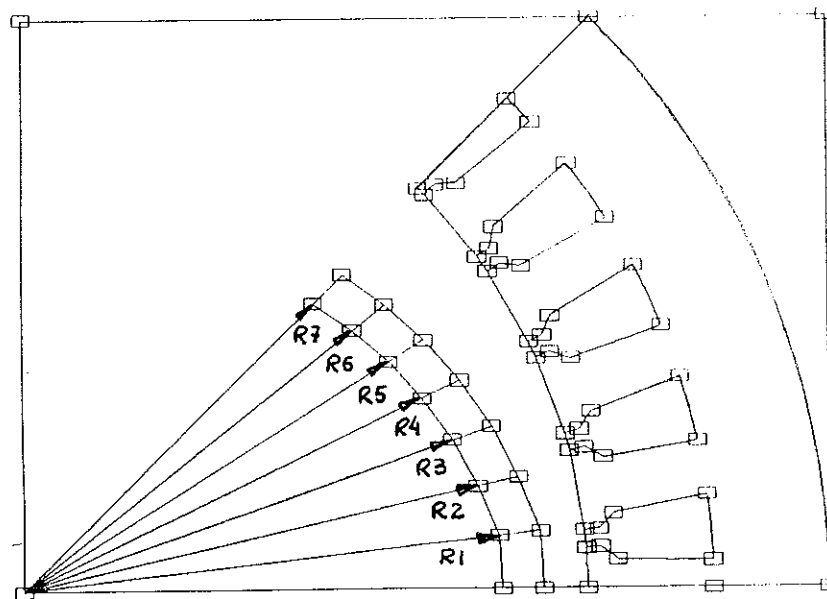
d - $x_1 = 2,0$ $x_2 = 2,0 x_1$
 $y_1 = 1,0$ $y_2 = 4,0 y_1$

Figure III.2.3 : Exemple de représentation géométrique paramétrée

Illustrons ceci par des exemples simples : la figure III.2.4 représente la modélisation du demi pôle d'une machine synchrone à aimants permanents, selon deux configurations géométriques possibles. La construction de cette géométrie paramétrée est une opération coûteuse et délicate. Cependant, une fois qu'elle est réalisée, en choisissant soigneusement l'ensemble des paramètres, une grande perturbation géométrique peut être facilement étudiée grâce à la flexibilité de pré-processeur paramétré (figure III.2.4 a et b).



a) Définition initiale des paramètres ($R_i = 1,0 \quad i = 1, \dots, 7$)



b) Modification des paramètres ($R_1 = 1,0, R_2 = 0,975, R_3 = 0,950, R_4 = 0,925, R_5 = 0,90, R_6 = 0,875, R_7 = 0,85$)

Figure III.2.4: Demi-pôle d'une machine synchrone à aimants permanents

III.2.3.3 Maillage Adapté aux Déformations Géométriques du Domaine

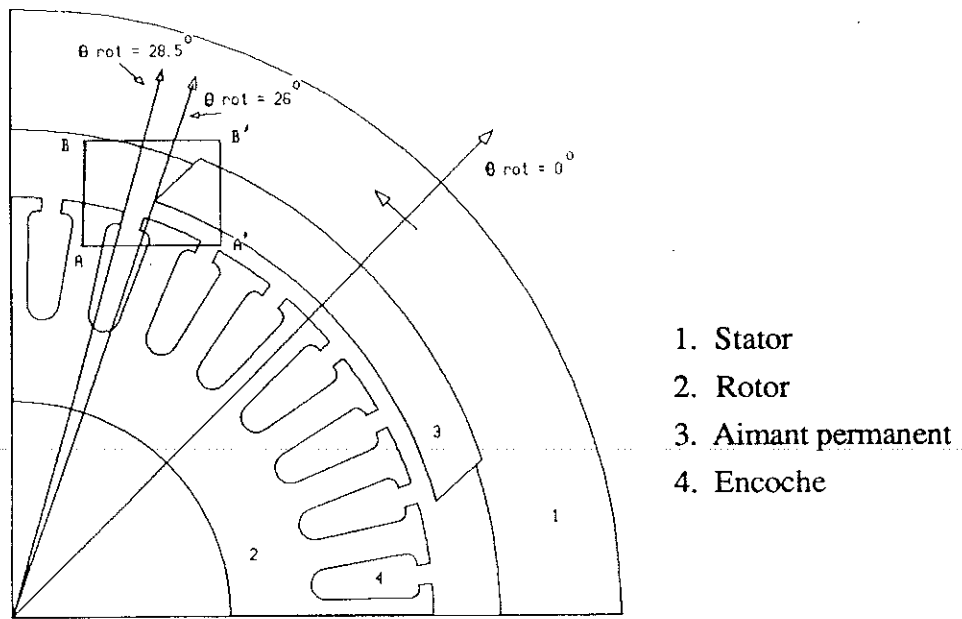
Dans le processus de conception assistée de systèmes par la méthode des éléments finis le maillage joue un rôle très important. Quelle que soit l'application, la simulation numérique par élément finis va s'appuyer sur un maillage du domaine étudié. Ce maillage contient des informations nécessaires lors du traitement des différentes étapes intervenant dans le calcul (géométrie, résolution du système, visualisation des résultats, etc ...).

Dans l'étude d'un dispositif par la méthode des éléments finis, si nous avons besoin d'analyser l'influence des modifications géométriques de cette même structure, par rapport au maillage utilisé, nous pouvons adopter les critères suivants: remaillage total ou partiel du domaine lors d'un changement géométrique quelconque, ou faire subir au maillage existant les modifications géométriques imposées (si possible).

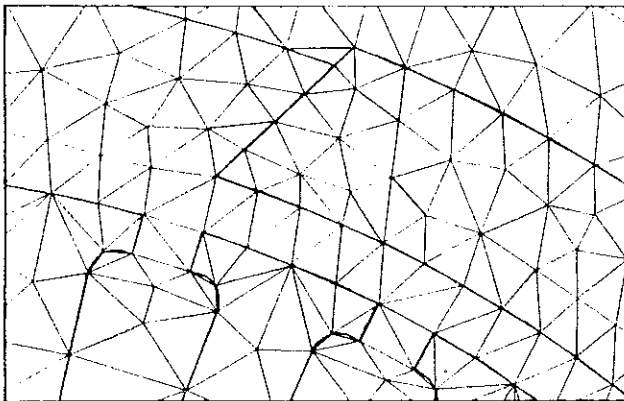
Cependant, le remaillage du domaine peut présenter quelques inconvénients, par exemple: un bruit numérique dû aux modifications topologiques impliquées. Par contre, si le maillage existant s'adapte aux changements géométriques imposés ces mêmes problèmes peuvent être fortement réduits.

Un aspect essentiel des logiciels éléments finis développés au LEG est l'existence d'un maillage adapté aux déformations géométriques du domaine modélisé (maillage élastique [75]). Ce dernier est capable d'adapter le maillage existant aux petits changements géométriques d'un paramètre qui décrit la structure du dispositif en question. Cependant, les changements brutaux et importants ne sont pas acceptés pour des raisons de dégradation inacceptable du facteur de qualité des éléments (voire création d'éléments plats ou même retournés).

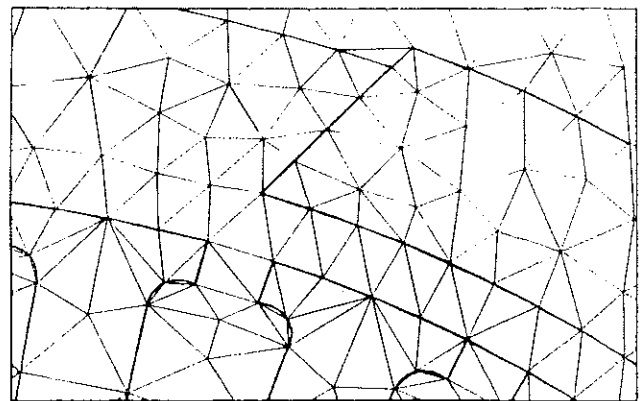
Considérons un autre exemple. La figure III.2.5.a représente la modélisation d'un quart d'une machine à courant continu à aimants permanents, où le paramètre θ_{rot} décrit l'angle de rotation du stator par rapport au rotor. Les figures III.2.5.b et c montrent les détails du maillage pour deux valeurs de $\theta_{rot}=26^\circ$ et $28,5^\circ$ respectivement. Il nous faut remarquer qu'avec la flexibilité offerte par le maillage élastique, nous pouvons passer d'un $\theta_{rot}=28,5^\circ$ à un $\theta_{rot}=26^\circ$ ou vice-versa sans la nécessité de refaire tout le processus du maillage.



a) Géométrie d'un quart d'une machine à courant continu à aimants permanents, le paramètre $\theta_{rot} = 26^\circ$



b) Détail du maillage $\theta_{rot}=26^\circ$



c) Détail du maillage $\theta_{rot}=28,5^\circ$

Figure III.2.5 : Modélisation d'une machine à courant continu à aimants permanents

III.2.4 Le Processeur Central

A la fin de l'étape d'entrée des données, le processeur central reçoit la définition géométrique (paramétrée ou non), les propriétés physiques de chaque élément et les conditions aux limites. En sortie, il fournit en chaque noeud du domaine discrétisé les valeurs des inconnues physiques.

Le processeur central (le noyau central de la méthode éléments finis) résoud le système d'équations linéaires ou non linéaires qui constituent le modèle mathématique représentatif du système physique modélisé. Ceci, en faisant appel à des méthodes d'analyse numérique qui se ramènent à un nombre d'opérations de base sur des vecteurs et matrices (pour des renseignements sur l'organisation de ce noyau central de calcul, voir SABONNADIÈRE et al [72], SILVESTER et al [76] et HOOLE [77]).

III.2.5 Le Post-Processeur

Le processeur central fournit une masse des résultats que nous ne pouvons exploiter efficacement qu'avec l'aide d'un programme de post traitement. Le post -processeur exécute les fonctions suivantes :

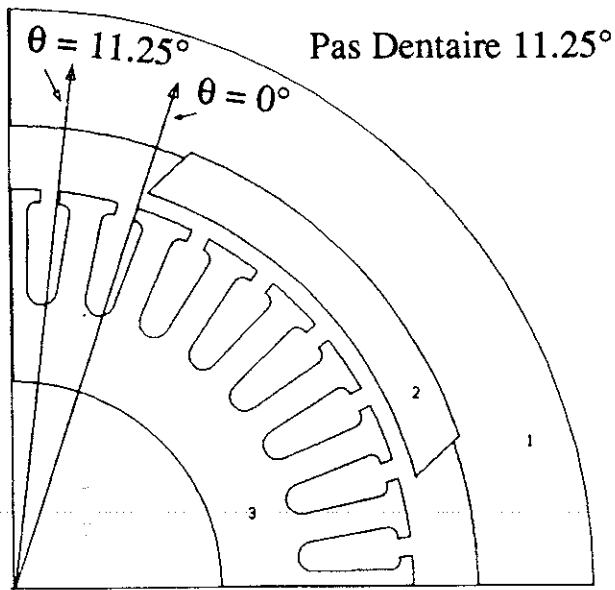
- L'extraction sélective d'informations fournissant à l'utilisateur les résultats qu'il désire en des points, sur des trajets, sur des plans de coupes etc...

- Le calcul d'informations déduites directement des résultats fournis par le modèle simulé (grandeurs dérivées).

- La visualisation graphique de champs scalaires, vectoriels, grâce à des techniques de représentation par lignes de niveaux, flèches, coupes dégradés de couleurs etc...

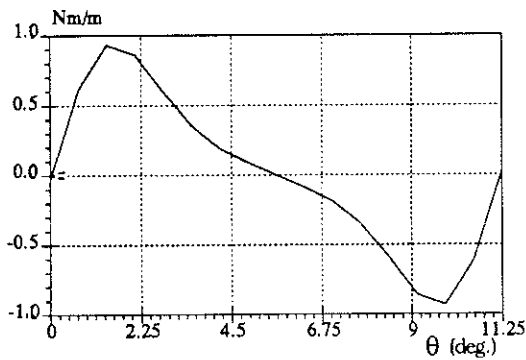
En plus de ces options habituelles, le post-processeur permet l'exploitation de l'évolution d'une grandeur en fonction d'un paramètre. Une telle fonctionnalité rend possible la visualisation directe et itérative de données de la modélisation, lorsque cela s'avère nécessaire. Par exemple :

- l'évaluation du couple d'encoche dans une machine à courant continu en fonction d'un pas dentaire (figure III.2.6.a et b).



- 1. Stator
- 2. Aimant permanent
- 3. Rotor

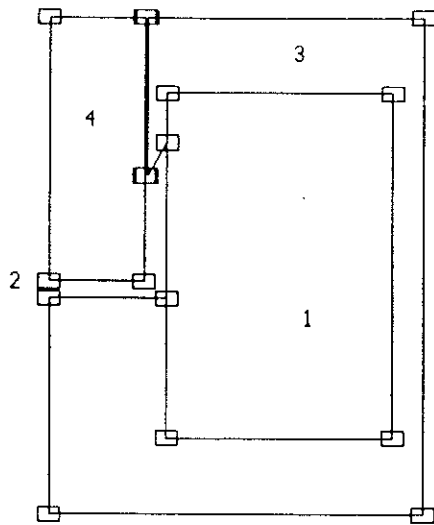
a) Machine à courant continu



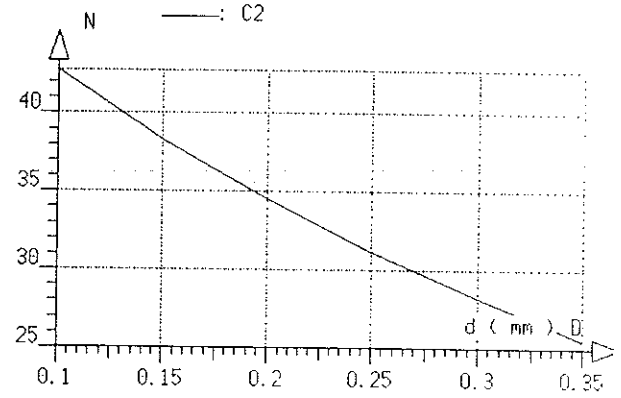
b) Couple d'encoche

Figure III.2.6. : Etude de l'évolution du couple d'encoche dans une machine à courant continu

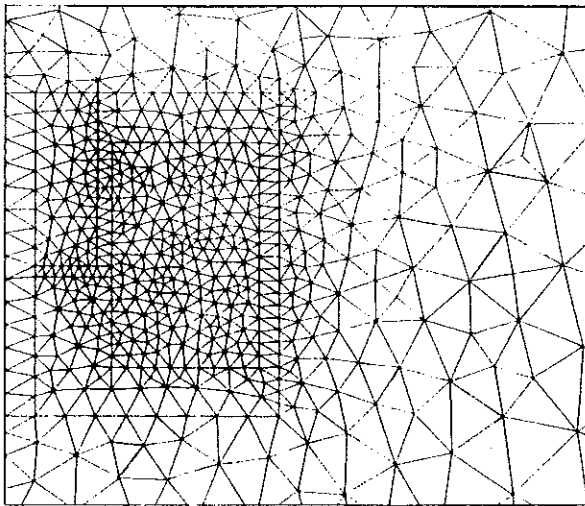
-le système de la figure III.2.7.a comprend un circuit magnétique (en matériau magnétique saturable) déformable avec un entrefer et une bobine (simple actionneur). Le passage d'un courant dans la bobine fait apparaître une force qui tend à déplacer le noyau mobile de façon à minimiser la réluctance magnétique du circuit. Nous avons déterminé sa caractéristique statique. La figure III.2.7.b montre à titre d'exemple un ensemble de résultats de simulation obtenus par une série de calculs éléments finis.



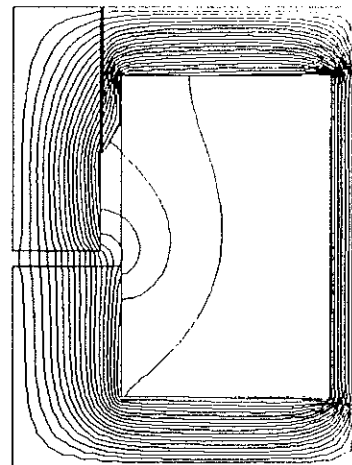
a- Schéma de l'actionneur
1. Bobine - 2. entrefer (d)
3. corps de l'actionneur
4. noyau mobile



b- Caractéristique statique
de l'actionneur avec une
densité de courant
constante



c - Discrétisation éléments finis
(d=0,3 mm)



d-Lignes équipotentielles du
potentiel vecteur A (d=0,3mm)

Figure III.2.7 : Actionneur électromagnétique avec une structure axisymétrique

III.3 L'Optimisation de Forme en Electrotechnique à l'Aide de la Méthode des Eléments Finis

III.3.1 Introduction

L'optimisation de forme d'un dispositif électrotechnique consiste à déterminer une forme idéale au regard d'un objectif précis et soumise à des contraintes de nature variée.

Généralement, ce type de problème est fortement non linéaire et dépend d'un nombre important de paramètres physiques et mathématiques. Ceci fait apparaître de nombreuses difficultés lors de la conception de l'architecture des logiciels dédiés à l'optimisation de forme en électrotechnique.

Un logiciel d'optimisation de forme est un programme, généralement volumineux et complexe, destiné à déterminer, grâce à un ordinateur, un modèle physique capable de vérifier certaines hypothèses décrites par des modèles mathématiques.

III.3.2 L'Architecture Générale d'un Logiciel d'Optimisation de Forme avec l'Analyse par la Méthode des Eléments Finis.

L'organisation interne que nous avons choisi pour notre logiciel d'optimisation de forme est encore guidée par celle des tous premiers programmes développés en mécanique structurale. Celle-ci enchaîne l'ensemble des opérations montré par l'organigramme de la figure III.3.1.

L'architecture générale du système est organisée en modules, chaque module étant constitué d'un ensemble de sous-programmes dédiés à une tâche précise (exemple : module optimiseur).

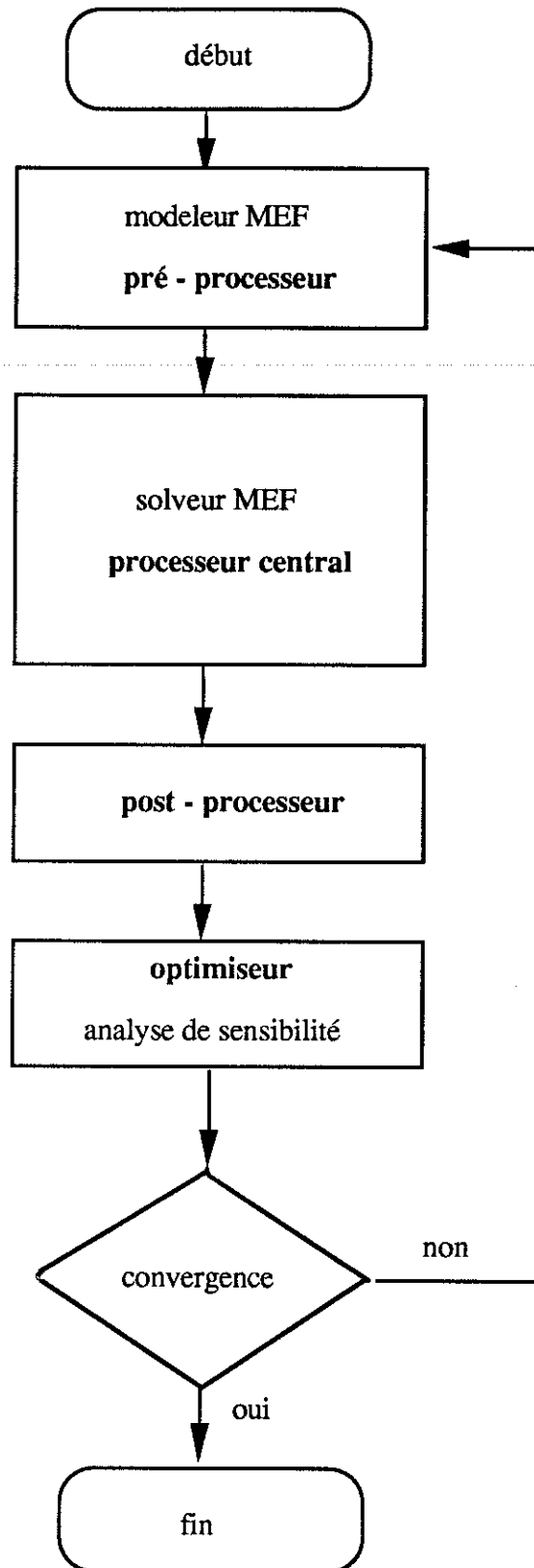


Figure III.3.1 : Organigramme de processus itératif d'optimisation de forme avec l'analyse par la méthode des éléments finis

Nous avons déjà, rencontré les trois modules suivants : le pré-processeur, le solveur et le post-processeur. Il nous reste à caractériser le module optimiseur - analyse de sensibilité.

Optimiseur : il correspond à un ensemble de sous-programmes qui décrivent les procédures d'optimisation proprement dites, c'est à dire, les méthodes d'optimisation que nous avons programmées.

Analyse de sensibilité : il correspond à l'ensemble des sous-programmes qui réalisent les calculs des gradients pour l'ensemble des fonctions du problème modélisé.

III.3.3 L'Optimisation et l'Analyse de Sensibilité

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre II de ce mémoire à l'étude des méthodes d'optimisations, que nous avons traduit sur la forme de codes FORTRAN, à savoir :

- Code PM - Méthodes des pénalités intérieures étendues
- Code MMA - Méthodes des asymptotes mobiles
- Code RQP - Méthodes de programmation quadratique récursive
- Code EM - Méthodes de l'ellipsoïde

La figure III.3.2 décrit d'une façon synthétique la structure du logiciel d'optimisation qui nous avons développé. Au début du processus, il est nécessaire de connaître le vecteur de paramètres p initial ou de l'itération précédente, puis il faut calculer les valeurs et les dérivées par rapport à ces paramètres, des fonctions (objectif et contraintes) qui décrivent le problème et enfin il faut utiliser ces résultats pour concevoir un nouveau vecteur de paramètres (code d'optimisation) qui respecte mieux l'objectif et les contraintes.

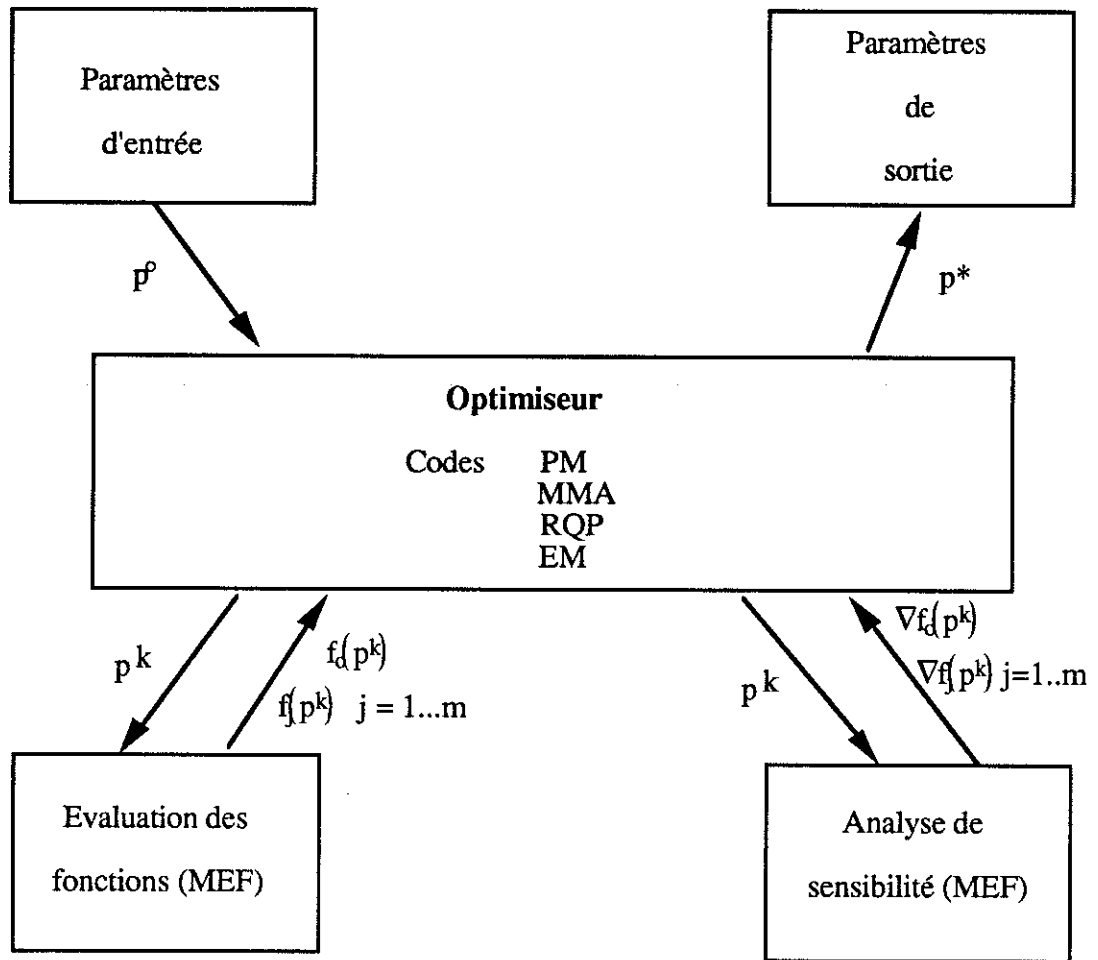


Figure III.3.2 Présentation synthétique de l'organisation du logiciel d'optimisation développé

Il nous faut remarquer que dans l'approche que nous utilisons jusqu'à présent pour l'évaluation des fonctions objectif et contraintes et de leurs gradients, il est nécessaire de faire appel à un code d'analyse par éléments finis (figure III.3.2).

Il nous reste, désormais, à étudier les moyens d'obtenir les données exigées par le module d'analyse de sensibilité.

III.3.4 L'Analyse de Sensibilité

III.3.4.1 Introduction

L'analyse de sensibilité en optimisation de formes a pour but de calculer les dérivées d'une grandeur (exemple : le champ magnétique dans l'entrefer d'une machine, le couple, la force etc...)

par rapport aux variables (paramètres) de conception. Dans le processus d'optimisation proprement dit, les dérivées (sensibilités) sont utilisées dans la phase de redimensionnement automatique des variables de conception. Ainsi, nous pouvons dire que, les dérivées sont un "ingrédient" essentiel aux méthodes numériques d'optimisation que nous avons développées.

Dans ce travail, nous nous limitons aux problèmes continus tant pour l'analyse de nos modèles électromagnétiques (méthodes des éléments finis) que pour les méthodes d'optimisation étudiées. Il convient, donc, de préciser que, dans le terme paramètre, nous entendons toute information qui permette de définir les caractéristiques physiques ou géométriques d'un objet modélisé. Néanmoins, tout ce que nous voulons appeler paramètre peut l'être à la seule condition de pouvoir considérer que cette quantité varie continûment.

Pour illustrer nos propos, nous nous plaçons dans le contexte de la modélisation par la méthode des éléments finis des problèmes statiques.

III.3.4.2 L'analyse de Sensibilité dans le Contexte de la Méthode des Eléments Finis

La méthode des éléments finis établit, à partir d'un découpage du domaine d'étude, une formulation discrétisée qui permet de construire un système d'équations algébriques. Comme les grandeurs dans les équations d'équilibre dépendent des variables de conception p , nous pouvons, pour un p donné, écrire le système d'équations suivant :

$$M(p) A(p) = S(p) \quad \text{III.3.4.1}$$

où $M(p)$ est la matrice de rigidité globale, $A(p)$ est le vecteur de N inconnues nodales et $S(p)$ est le vecteur second membre représentant les termes sources.

Si nous considérons que nos problèmes d'optimisation sont formulés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{minimiser l'objectif} \\ &f_0(p, A(p)) \end{aligned} \quad \text{III.3.4.2}$$

$$\begin{aligned} &\text{soumise aux contraintes} \\ &f_j(p, A(p)) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\text{avec l'équation d'équilibre } M(p) A(p) = S(p)$$

La dérivée totale d'une fonction f_j ($j = 0, 1, \dots, m$) par rapport aux variables p ($p \in \mathbb{R}^n$) est donnée par :

$$\frac{df_j}{dp} = \frac{\partial f_j}{\partial p} + \frac{\partial f_j}{\partial A^T} \frac{dA}{dp} \quad \text{III.3.4.3}$$

avec les notations :

$$\frac{df_j}{dp} = \left[\frac{df_j(p, A(p))}{dp_1}, \dots, \frac{df_j(p, A(p))}{dp_n} \right]^T \quad \text{III.3.4.4}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial p} = \left[\frac{\partial f_j(p, A(p))}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f_j(p, A(p))}{\partial p_n} \right]^T \quad \text{III.3.4.5}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial A^T} = \left[\frac{\partial f_j(p, A(p))}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial f_j(p, A(p))}{\partial A_s} \right] \quad \text{III.3.4.6}$$

et s représentant l'ensemble des points étudiés par rapport à la variable A , et :

$$\frac{dA}{dp} = \begin{bmatrix} \frac{dA_1}{dp_1} & \frac{dA_1}{dp_n} \\ \frac{dA_s}{dp_1} & \frac{dA_s}{dp_n} \end{bmatrix} \quad \text{III.3.4.7}$$

Si nous décrivons l'équation d'équilibre (III.3.4.1) par rapport aux variables p , nous obtenons :

$$\frac{\partial S}{\partial p} = M \frac{dA}{dp} + \frac{\partial M}{\partial p} A \quad \text{III.3.4.8}$$

Compte tenu de III.3.4.8, il vient :

$$\frac{dA}{dp} = M^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial p} A \right] \quad \text{III.3.4.9}$$

et finalement :

$$\frac{df_j}{dp} = \frac{\partial f_j}{\partial p} + \frac{\partial f_j}{\partial A^T} \left\{ M^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial p} A \right] \right\} \quad \text{III.3.4.10}$$

L'équation III.3.4.9 montre qu'à partir des dA/dp nous pouvons calculer directement toutes les dérivées nécessaires à la résolution du problème III.3.4.2 (eq.III.3.4.10). Toutefois, les dA/dp ne peuvent être évalués que si les dérivées $\partial S/\partial p$ et $\partial M/\partial p$ sont disponibles. Le calcul des ces termes est plus ou moins complexe, selon la nature des variables de conception envisagées. Lorsqu'il s'agit de variables de nature géométrique, le calcul de ces dérivées est loin d'être trivial. Malheureusement, ce dernier cas est le plus fréquent dans l'optimisation des dispositifs électromagnétiques.

III.3.4.3 Méthodes d'Analyse de Sensibilité

Nous voyons donc que pour évaluer la dérivée d'une variable d'état A (modèle éléments finis) par rapport à un paramètre donné p , des calculs supplémentaires sont nécessaires par rapport à un calcul classique éléments finis.

L'analyse de sensibilité correspond sans aucun doute à la partie de calcul la plus complexe.

Nous allons présenter les idées fondamentales de trois approches classiques employées, différences finies, formulation variationnelle ("dérivation locale du jacobien de la transformation") et état adjoint, pour la résolution du problème du calcul des dérivées.

La première est la méthode des différences finies. Pour le calcul du vecteur dA/dp_i il faut résoudre l'équation d'équilibre du système (III.3.4.1), tout d'abord le vecteur de variables de conception égal à $p^+ = p + h_i e_i$ et pour le vecteur $p^- = p - h_i e_i$, où p correspond au vecteur de variables de conception actuel, h_i est une perturbation ($h_i > 0$) et e_i est le vecteur i de la base canonique de R^n ($p \in R^n$). Si nous considérons le schéma de différence centrale pour le calcul de la dérivée, la dérivée de A par rapport à p_i devient:

$$\frac{dA}{dp_i} \approx \frac{A(p + h_i \bar{e}_i) - A(p - h_i \bar{e}_i)}{2h_i} \quad \text{III.3.4.11}$$

Pour les composantes restantes de la matrice dA/dp , il faut suivre la même démarche.

Les principaux avantages présentés par cette technique sont la généralité et la possibilité de l'obtention du calcul direct des dérivées des fonctions du problème par rapport aux variables de conception. Notamment cette méthode permet de calculer directement le gradient des f_j sans aucun intermédiaire ce qui est extrêmement intéressant d'un point de vue de la programmation.

La deuxième correspond à une approche variationnelle. Dans le cas où l'une approche plus précise et plus rapide est souhaitée, il faut alors être capable d'exprimer toutes les dérivées partielles présentés dans l'équation III.3.4.10. Les fonctions $f(p)$ peuvent correspondre à des informations localisées (induction en un point,...) ou des grandeurs intégrales (couple électromagnétique,...) pour lesquelles nous disposons d'expressions faisant intervenir, directement ou après intégration dans Ω , les fonction de formes éléments finis $\alpha_i(x,y,z)$ et/ou leurs gradients.

KOUYOUMDJIAN [19] et GITOSUSASTRO [23,24] ont utilisé la méthode général de "dérivation locale du jacobien de la transformation" qui permet d'exprimer ∇f_j dans de telles configurations.

Nous allons indiquer brièvement le principe de cette méthode. Soit une fonction $f_j(p)$ fonction intégrale:

$$f_j(p) = \int_{\Omega} q \cdot dV \quad \text{III.3.4.12}$$

où q est une fonction des coordonnées d'espace (x,y,z) définie sur le domaine éléments finis. De fait de la déformation introduite par la variation des paramètres géométriques p , la fonction q peut être affectée, ainsi que le domaine Ω .

L'idée de la méthode est de changer d'espace d'intégration afin de se ramener à un domaine indéformable quelle que soit l'évolution des paramètres géométriques p . Pour cela, nous exprimons l'intégrale sous la forme naturelle dans un contexte éléments finis:

$$f_j(p) = \sum^e \int_{\Omega_e} q \cdot dV \quad \text{III.3.4.13}$$

où e représente l'ensemble des éléments finis et Ω_e un élément fini courant.

Ensuite, nous utilisons sur chaque élément finis les coordonnées locales (u,v,w) propres à chaque type d'élément fini (COULOMB [17]), ce qui revient à écrire:

$$f_j = \sum^e \int_{\square_e} q |G| dV_e \quad \text{III.3.4.14}$$

où $|G|$ est le déterminant du jacobien qui fait passer des coordonnées réelles xyz aux coordonnées locales uvw et \square_e est l'élément de référence.

La dérivation de f_j peut maintenant s'écrire:

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_i} = \sum^e \int_{\square_e} \frac{\partial q}{\partial p_i} |G| dV_e + \sum^e \int_{\square_e} q \frac{\partial |G|}{\partial p_i} dV_e \quad \text{III.3.4.15}$$

En repassant aux coordonnées réelles nous trouvons:

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_i} = \sum^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial q}{\partial p_i} |G| dV_e + \sum^e \int_{\Omega_e} q \frac{1}{|G|} \frac{\partial |G|}{\partial p_i} dV_e \quad \text{III.3.4.16}$$

Expression dans laquelle nous pouvons identifier l'influence du paramètre p_i sur la variation du domaine en introduisant la notation:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (dV) = \frac{1}{|G|} \frac{\partial |G|}{\partial p_i} dV \quad \text{III.3.4.17}$$

soit:

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_i} = \sum^e \int_{\Omega_e} \frac{\partial q}{\partial p_i} dV + \sum^e \int_{\Omega_e} q \frac{\partial}{\partial p_i} (dV) \quad \text{III.3.4.18}$$

La dernière approche correspond à la méthode de l'état adjoint [73,78,79]. Elle est complémentaire de la précédente puisqu'elle permet de réduire le nombre de calculs en évitant le calcul explicite du gradient de A . Nous définissons un vecteur adjoint λ par :

$$\lambda^T = \frac{\partial f_j}{\partial A^T} M^{-1} \quad \text{III.3.4.19}$$

que nous pouvons écrire sous la forme :

$$M \lambda = \left[\frac{\partial f_j}{\partial A^T} \right]^T \quad \text{III.3.4.20}$$

Le vecteur adjoint λ peut être obtenu à partir de l'équation III.3.4.20 et si nous l'introduisons dans l'équation III.3.4.10, elle devient :

$$\frac{df_j}{dp} = \frac{\partial f_j}{\partial p} + \lambda^T \left[\frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial p} A \right] \quad \text{III.3.4.21}$$

Pour l'évaluation des dérivées, il nous reste à résoudre le système différentiel ci-dessus.

Les principaux avantages de cette approche sont le nombre réduit de calcul nécessaire pour le calcul des dérivées et la précision de résultats obtenus. En effet, par rapport à l'application de la formule III.3.4.10 qui nécessite la résolution d'autant de systèmes linéaires III.3.4.9 qu'il y a de paramètres, la formule III.3.4.21 ne nécessite de résoudre que le seul système linéaire III.3.4.20 (PARK [29,30]).

III.3.4.4 Choix d'une Méthode

Dans ce travail, nous avons choisi la technique de différences finies comme méthode de calcul de nos dérivées. Nous pouvons caractériser cette approche comme étant très simple et générale. Nous pouvons dire que c'est une technique facilement adaptée aux problèmes d'analyse de sensibilité, car nous obtenons directement le calcul de dérivées, même pour des problèmes d'optimisation complexes.

Cependant, elle présente quelques inconvénients. Les dérivées obtenues peuvent être imprécises, car à l'origine, cette procédure a été créée pour être utilisée dans le domaine du continu avec une arithmétique infiniment précise. Si nous la traitons sur ordinateur, nous la projetons dans le domaine du discret et l'exécutons avec une arithmétique à précision limitée. Donc, il en résulte une dégradation de l'information qui peut conduire à l'obtention des résultats entachés d'erreurs et parfois même aberrants.

Lorsque, nous voulons obtenir sur ordinateur la valeur de la dérivée d'une fonction $f(x)$, c'est la formule suivante :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (h \neq 0) \quad \text{III.3.4.22}$$

qui est mise en oeuvre et qui fournit une valeur approchée de la dérivée. Selon DUMONTET et al [80], la valeur obtenue df/dx est entachée d'erreurs de méthode de calcul, qu'ils ont appelée erreur global eg. Cette erreur eg correspond à la somme de quatre erreurs principales, à savoir :

e₁- l'erreur de méthode due à la troncature de la formule de Taylor

e₂- l'erreur absolue sur la valeur de df/dx calculée avec les
représentation en machine des valeurs exactes des arguments.

e₃ - l'erreur engendrée par f qui est une image en machine de cette même fonction.

e₄ - l'erreur engendrée par les opérateurs arithmétiques utilisés dans l'expression

III.3.4.22

En supposant les erreurs e₂ et e₄ négligeables par rapport aux autres, DUMONTET et al [80] proposent de calculer un pas h* optimal, tel que la moyenne du module (e₁ et e₃) soit minimale, ce qui donne :

$$h^* = \left[\frac{1,67 P |f(x)|}{|f'''(x)|} \right]^{1/3} \quad \text{III.3.4.23}$$

avec

$$f'''(x) = \frac{f(x + 2k) - f(x - 2k) - 2 [f(x + k) - f(x - k)]}{2 k^3} \quad \text{III.3.4.24}$$

Désignant les quantités :

$$T_1 = f(x + 2k) \quad T_2 = f(x - 2k) \quad \text{III.3.4.25}$$

$$T_3 = - 2f(x + k) \quad T_4 = - 2f(x - k)$$

et A et B par les quantités suivantes :

$$A = \sum_i T_i \quad \text{avec } T_i > 0 \quad i \in [1,4] \quad \text{III.3.4.26}$$

$$B = \sum_i T_i \quad \text{avec } T_i < 0 \quad i \in [1,4]$$

Pour que la formule III.3.4.24 donne mathématiquement une erreur relative $\epsilon(x)$ tendant vers zéro ($|\epsilon(x)| \leq P, 0 < P \ll 1$) sur l'approximation $f'''(x)$, il faut choisir un k de sorte que le facteur :

$$L = \left[\frac{A}{1 - P} + \frac{B}{1 + P} \right] \left[\frac{A}{1 + P} + \frac{B}{1 - P} \right]^{-1} \quad \text{III.3.4.27}$$

soit à une distance raisonnable de l'unité, c'est à dire :

- ni trop proche de 1, sinon l'erreur e_3 est négligeable et e_1 est trop importante (ceci se produit lorsque k est trop grand).

- ni trop éloigné de 1, sinon l'erreur e_3 est trop importante (ceci se produit lorsque k est trop petit)

Selon DUMONTET [78], ces contraintes sont traduites par les conditions suivantes :

$$L \notin [0,5 ; 2,0]$$

III.3.4.28

$$L \in [0,067 ; 15]$$

Après avoir mis en évidence le point crucial en dérivation numérique, à savoir le choix du pas optimal et présenter un modèle algorithme capable de produire un pas correspondant à une erreur globale minimale. Il nous faut considérer les difficultés majeures d'une telle approche sur un modèle éléments finis en tenant compte des aspects mathématiques, informatiques et de coût de calcul, lors de la résolution d'un problème d'optimisation.

Cette procédure peut être coûteuse en temps machine, si nous n'avons pas une idée a priori de l'ordre de grandeur du pas optimal.

Pour l'évaluation du pas initial h_0 , nous avons adopté l'approche proposée par GILL et al [81], il vient :

$$h_0 = 2 (1 + |x|) \left(\frac{\epsilon_A}{1 + |f(x)|} \right)^{1/2}$$

III.3.4.29

où ϵ_A correspond à l'erreur absolue commise sur le calcul de la valeur de $f(x)$ en x , $x + h_0$ et $x - h_0$.

En utilisant l'expression ci-dessous nous avons pu nous affranchir des difficultés (coût de calcul prohibitif etc...) liées à l'application de la procédure (III.3.4.23 à III.3.4.28) pour le calcul du pas optimal h^* .

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis au point un système de synthèse de forme, basé sur l'utilisation conjointe d'analyses par la méthode des éléments finis et d'algorithmes de programmation mathématiques.

Nous avons rappelé succinctement les techniques d'analyse d'un problème électromagnétique par la méthode des éléments finis. Nous avons traité des principaux aspects d'un logiciel éléments finis adaptés à une définition paramétrique des données géométriques et physiques, en vue de leur intégration dans un contexte d'optimisation assistée des systèmes.

Lors de l'intégration des méthodes numériques d'optimisation dans un contexte éléments finis, nous avons établi les expressions des dérivées d'une grandeur issue du système par rapport aux variables de conception (l'analyse de sensibilité).

L'approche numérique type "différences finies" a été choisie, pour sa simplicité et son aspect général, comme outil d'analyse de sensibilité. Nous avons été confronté aux principaux inconvénients dus à son utilisation, qui ont été surmontés par l'application de procédures appropriées.

Dans le chapitre suivant, nous proposons des exemples d'applications.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS

INTRODUCTION

Nous allons maintenant présenter quelques applications particulières en magnétostatique, domaine de l'électromagnétisme très couramment exploité au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble. Ces applications doivent nous permettre d'expérimenter, dans le domaine de l'électrotechnique l'utilisation de l'approche programmation mathématique couplée à un logiciel d'analyse par éléments finis.

Plus précisément, nous envisagerons l'emploi des nouveaux concepts d'optimisation (dualité, technique des approximations convexes et asymptotiques, qualification des contraintes etc...), dans la conception des dispositifs électromagnétiques modernes.

IV.1 Considérations Initiales

Le calcul et le dimensionnement de dispositifs électromagnétiques même simples ne peuvent pas toujours s'effectuer par des méthodes analytiques même en posant certaines hypothèses simplificatrices. Prendre bien en compte les phénomènes physiques qui interviennent, conduit généralement à des problèmes impossibles à résoudre analytiquement.

Cependant, grâce au développement de la modélisation et des techniques de calcul numérique, il est maintenant possible de traiter des problèmes réalistes en temps relativement courts.

Nous allons traiter dans le cadre de nos travaux des problèmes considérés comme bidimensionnels ou encore 3D possédant une symétrie de révolution. Mais, il doit être clair qu'il ne s'agit pas là d'une restriction. Pour les problèmes tridimensionnels les mêmes procédures d'optimisation peuvent être appliquées.

Nous proposons les applications suivantes:

A-I. Optimisation de la forme d'un actionneur à gradient de champ.

A-II. Optimisation de la forme d'un électroaimant

A-III. Optimisation de B_r (induction radiale) dans une machine synchrone à pôles saillants à aimants permanents.

A-III.1 Détermination de la valeur du champ coercitif pour les aimants qui décrivent la couronne polaire, pour l'obtention d'une induction magnétique sinusoïdale dans l'entrefer.

A-III.2 Détermination de la forme de la pièce polaire magnétique, pour l'obtention d'une induction magnétique sinusoïdale dans l'entrefer.

A-IV Optimisation de la forme des pièces polaires rotoriques dans une machine à réluctance variable pour l'obtention d'un couple fondamental fixé.

IV.2 Applications

IV.2.1 Optimisation de la Forme d'un Actionneur à Gradient de Champ

IV.2.1.1 Introduction

Cet actionneur est constitué d'un aimant permanent se déplaçant entre deux bobines alimentées en courant continu (figure IV.2.1.1). Un prototype a été réalisé par le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble [E. OLIVIER, P. PARISY et J.P. YONNET [82]) afin de mettre en évidence ses caractéristiques dans le cas d'une utilisation en robotique.

Récemment, PELISSIER et al [83, 84] ont étudié l'adéquation de cette même structure pour des applications à plus fortes densités de force.

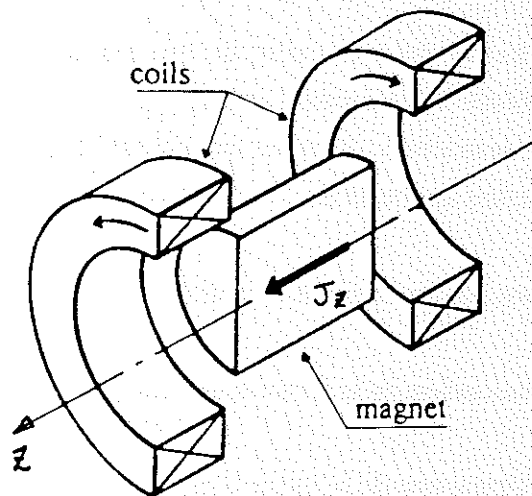


Figure IV.2.1.1: Schéma de principe de l'actionneur

Dans ce type d'actionneur l'aimant seul se déplace (figure IV.2.1.1). Considérons un élément de volume aimanté dV ayant un moment magnétique dM donné par :

$$dM = J_z dV \quad \text{IV.2.1.1}$$

où J_z est l'aimantation en Tesla. Si nous plaçons cet élément dV dans un champ magnétique colinéaire à son axe d'aimantation, il sera soumis à une force donnée par l'expression suivante [83, 84] :

$$dF_z = \frac{dM}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{IV.2.1.2}$$

où B_z est l'induction magnétique et l'axe z est supposé parallèle à l'aimantation J_z .

Du point de vue de la modélisation, il faut remarquer qu'il s'agit d'un dispositif possédant une symétrie de révolution, donc nous pouvons le simuler en 2D axisymétrique.

Le champ magnétique sur l'axe z , créé par les bobines alimentées en opposition (figure IV.2.1.1) va produire une force axiale sur la partie mobile (aimant). Selon PELISSIER et al [83, 84] si nous considérons l'aimantation J_z constante et la perméabilité magnétique de l'aimant approximativement égale à μ_0 , cette force peut être calculée par l'expression :

$$F = J_z \int_{z_2}^{z_1} \left[\int_0^{R_1} \frac{\partial H_z}{\partial z} 2 \pi r dr \right] dz \quad \text{IV.2.1.3}$$

ou simplement :

$$F = J_z \frac{2 \pi R_1}{\mu_0} [A(R_1, z_1) - A(R_1, z_2)] \quad \text{IV.2.1.4}$$

où R_1 est le rayon externe de l'aimant cylindrique et A le vecteur potentiel magnétique aux points (R_1, z_1) et (R_1, z_2) (figure IV.2.1.2) .

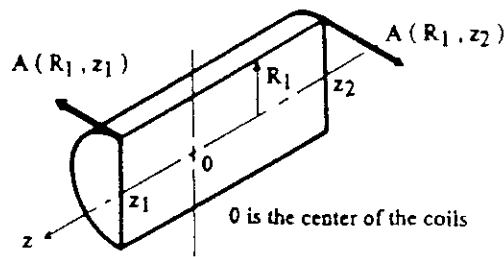


Figure IV.2.1.2: Détail de l'aimant et du vecteur potentiel magnétique A utilisé pour le calcul de la force

Nous pouvons remarquer que grâce à l'hypothèse $\mu=\mu_0$, un seul calcul de champ, avec les conducteurs alimentés mais en l'absence de l'aimant, est suffisant pour déterminer la force sur l'aimant quelle que soit sa position sur l'axe z.

Le modèle d'éléments finis adopté peut être encore simplifié pour de raison de symétrie sur le plan de coupe (fig. IV.2.1.3.a). Compte tenu de cet aspect, seulement un quart de la section transversale doit être modélisé par la méthode des éléments finis (fig. IV.2.1.3.b).

IV.2.1.2 Position du Problème

Le but de l'étude est de déterminer une forme géométrique des bobines dans le dispositif (figure IV.2.1.3) de manière à obtenir une force, selon l'axe d'aimantation z, constante en fonction du déplacement du noyau magnétique et égale à $F_0=5N$. Nous cherchons une forme géométrique des bobines capable de produire un effet spécifié, donc nous sommes intéressés à la résolution d'un problème de synthèse.

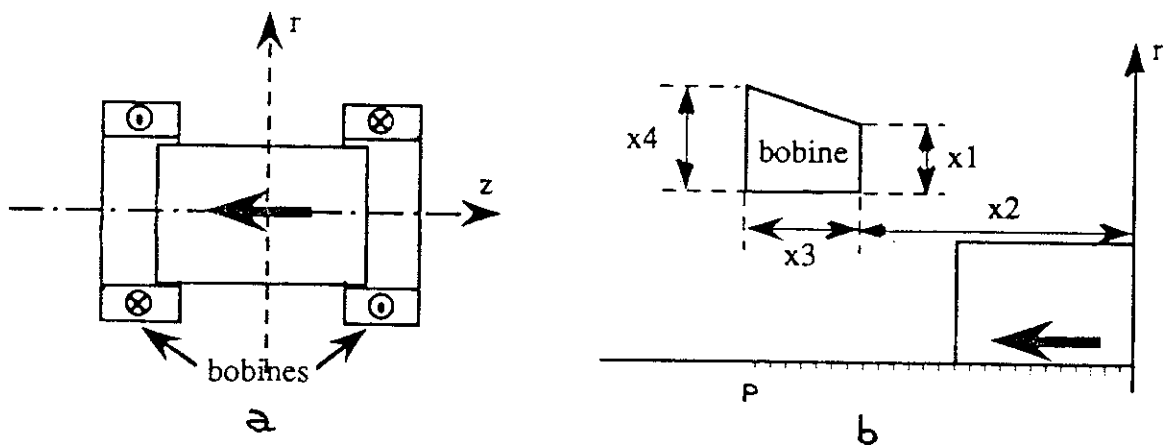


Figure IV.2.1.3: Actionneur à gradient de champ étudié
a - Structure de l'actionneur , b - Variables de conception adoptées

Ainsi, nous pouvons formuler notre problème d'optimisation comme étant :

$$\text{minimiser } f_{\alpha}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^P \left[1 - \frac{F_z(z, x)}{F_0} \right]^2$$

où les $k = 1, \dots, P$ (fig. IV.2.1.3), ($P = 20$) correspondent aux points sur l'axe z , où la force $F_z(z, x)$ doit rester constante égale à $5N$ ($F_0 = 5N$). La course utile adoptée est égale à 15 mm .

soumis aux contraintes :

$$f_j(x_j) = x_j^2 - (x_j^{\max} + x_j^{\min}) x_j + x_j^{\max} x_j^{\min} \leq 0$$
$$j = 1, \dots, 4$$

où x_j^{\min} et x_j^{\max} correspondent respectivement aux bornes inférieure et supérieure du paramètre x_j . Ceux-ci étant donnés par:

$$x_1^{\min} \geq 2,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_1^{\max} \leq 25 \text{ mm}$$
$$x_2^{\min} \geq 5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_2^{\max} \leq 25 \text{ mm}$$
$$x_3^{\min} \geq 2,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_3^{\max} \geq 50 \text{ mm}$$
$$x_4^{\min} \geq 2,5 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x_4^{\max} \leq 25 \text{ mm}$$

Les valeurs des bornes des paramètres ont été choisies, surtout, de manière à imposé un encombrement minimal $V_{\min} = 1,6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ et maximal $V_{\max} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^3$.

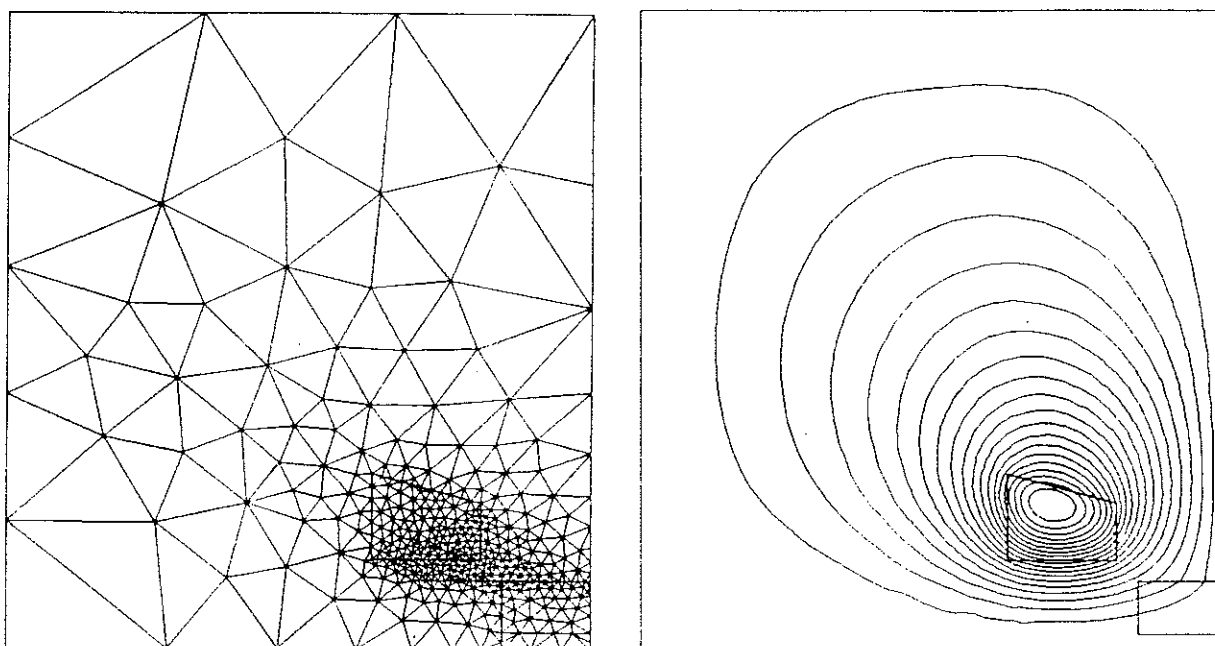
L'aimant choisi (Ferrite) présente les caractéristiques suivantes :

$$\text{aimantation } J_z = 0,35 \text{ T}$$
$$\text{masse volumique } \rho = 4,8 \text{ g / cm}^3$$
$$\text{diamètre } \phi = 14,7 \text{ mm}$$
$$\text{longueur } L = 36 \text{ mm}$$

Les bobines en cuivre sont soumises à une densité de courant constante $J = 2,68 \text{ A/mm}^2$.

IV.2.1.3. Résultats Obtenus

La figure IV.2.1.4 représente le modèle éléments finis adopté pour l'étude de l'actionneur. A chaque itération, l'évaluation des fonctions et de leurs gradients demande huit analyses éléments finis. Le temps CPU total d'une itération est de 10 minutes sur une station de travail HP 9000 série 400.



a - Discretisation éléments finis

b - Lignes équipotentiels du
potentiel vecteur magnétique A

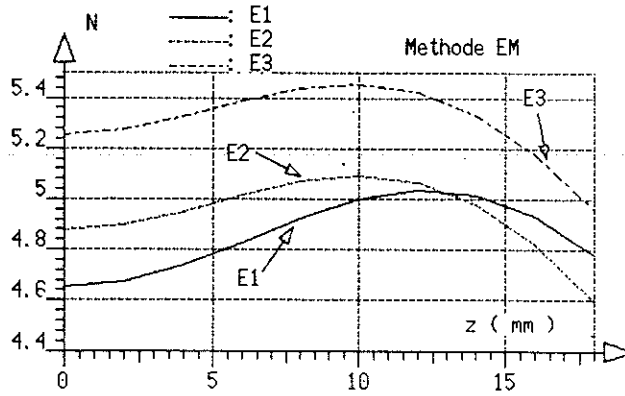
Figure IV.2.1.4: Modèle éléments finis

Dans cet exemple, nous avons choisis trois points de départ. Les forces (IV.2.1.4) exercées sur le noyau mobile sont calculées aux P points après une seule analyse éléments finis par itération. Nous avons fait arrêter le processus d'optimisation lorsque toutes les forces aux P points se sont révélées suffisamment proches de la force $F_0 = 5N$ imposée (écarts inférieurs à $\pm 8\%$).

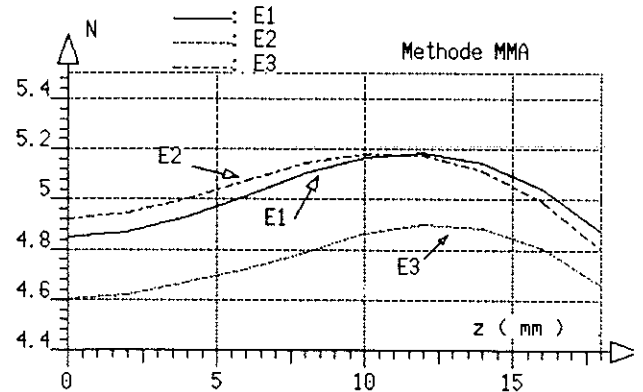
Tableau IV.2.1.1. Déroulement du processus d'optimisation pour atteindre une plage de force égale à $F_0 \pm 8\%$.

			Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
Essai N°	x mm	Valeurs initiales	solution obtenue	n° itérations	solution obtenue	n° itérations	solution obtenue	n° itérations	solution obtenue	n° itérations
I	x1	16.89	17.10	14	17.98	10	17.40	12	17.50	10
	x2	19.82	24.60		24.30		24.10		24.15	
	x3	18.07	23.48		23.70		23.72		24.01	
	x4	17.13	17.00		16.77		16.27		16.57	
II	x1	18.00	16.89	19	16.79	12	17.70	16	16.63	9
	x2	10.00	23.50		24.65		23.60		23.87	
	x3	18.00	21.98		23.48		23.60		24.20	
	x4	18.00	18.05		16.16		17.40		16.51	
III	x1	16.00	17.39	15	16.77	9	17.20	14	17.18	7
	x2	18.50	23.06		23.50		24.10		23.63	
	x3	15.00	24.10		24.27		23.90		23.74	
	x4	16.00	17.72		16.48		15.87		16.18	

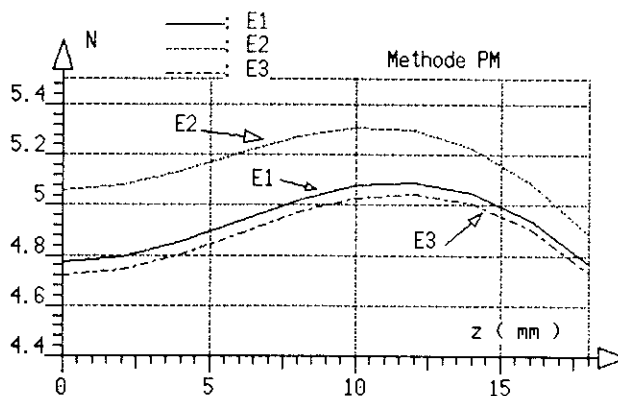
Dans le tableau IV.2.1.1, si nous considérons le nombre d'itérations nécessaires pour l'obtention de la solution, nous pouvons remarquer une légère supériorité de la méthode RQP pour ce problème.



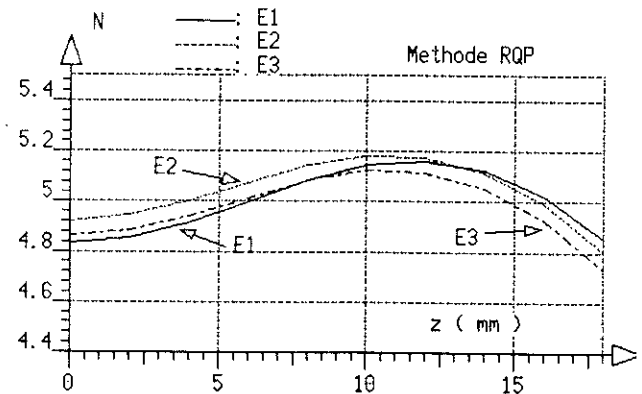
a - Résultats obtenus méthode EM



b - Résultats obtenus méthode MMA



c - Résultats obtenus méthode PM



d - Résultats obtenus méthode RQP

Figure IV.2.1.5 : Résultats obtenus essai I (E_1), essai II (E_2) et essai III (E_3), avec la force calculée par l'équation IV.2.1.4

Sur le plan pratique, nous avons pu valider les résultats obtenus. Deux prototypes ont été construits au Laboratoire dans l'Equipe Matériaux Magnétiques par S. PELISSIER. Le premier prototype P1 représentant les conditions initiales pour l'essai III ($x_1=16,0$ mm, $x_2=18,5$ mm, $x_3=15,0$ mm et $x_4=16,0$ mm). Le deuxième prototype P2 représentant les conditions finales essai

III, résultats obtenus avec la méthode MMA ($x_1=16,77$ mm, $x_2=23,50$ mm, $x_3=24,27$ mm et $x_4=16,48$ mm).

Pour ces deux prototype P1 et P2, les courbes caractéristiques statiques de la force par rapport au déplacement de l'aimant, mesurées et calculées sont montrées sur la figure IV.2.1.6. Les forces ont été calculées en utilisant cette fois la méthode des travaux virtuels [17-21] qui permet le calcul sans faire l'hypothèse $\mu=\mu_0$ précédente. La perméabilité de l'aimant retenue est de $\mu=1,05\mu_0$.

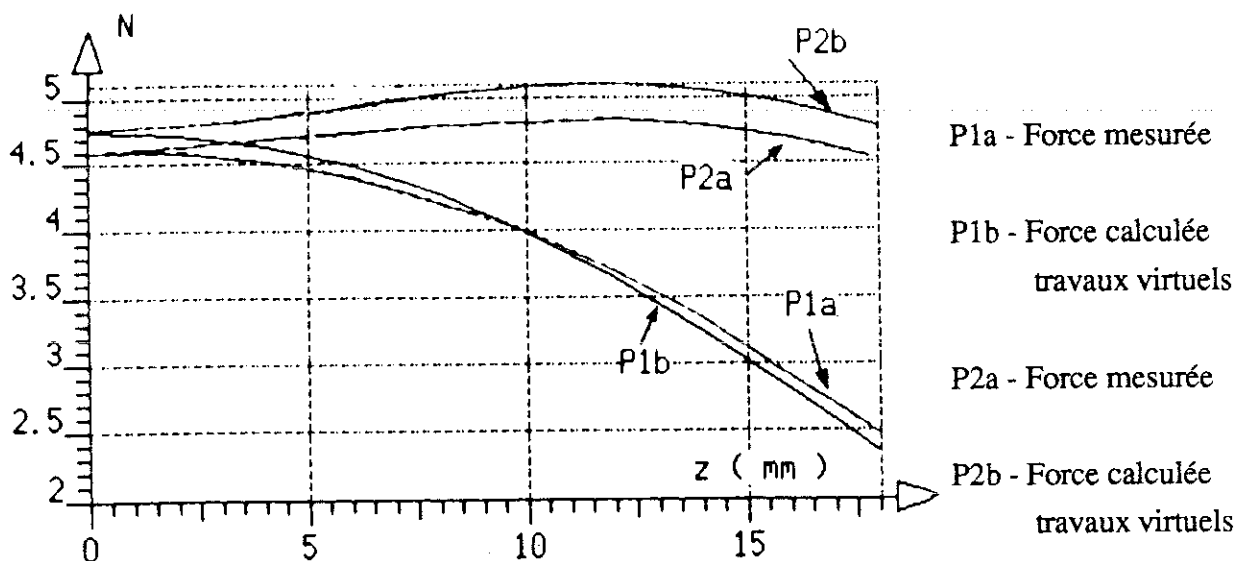


Figure IV.2.1.6 : Caractéristiques statiques force par rapport au déplacement du noyau magnétique prototype P1 et P2

Si nous considérons la course utile de 15 mm, il est certain que l'objectif a été atteint avec les contraintes satisfaites.

IV.2.1.4 Conclusion

Les résultats obtenus présentent une dispersion perceptible. Ce phénomène peut être expliqué en tenant compte des aspects suivants :

- un problème de synthèse peut présenter plusieurs solutions réalisables.
- la tolérance admise (test d'arrêt à ± 8 %) est beaucoup trop élevée, pour que nous puissions atteindre l'optimum global (si il existe).

- les forces F_z sont calculées par éléments finis. Les discrétisations, différentes pour chaque configuration géométrique, influencent les calculs de force.
- Chaque méthode d'optimisation utilisée présente un comportement particulier.

Du point de vue de la conception, nous pouvons dire que cet exemple illustre bien, la viabilité de la résolution d'un problème pratique par une voie purement numérique.

IV.2.2 Optimisation de la Forme d'un Electroaimant

IV.2.2.1 Introduction

Nous nous intéressons maintenant au dimensionnement de la structure d'un électro-aimant cylindrique utilisé couramment comme moteur des électro-vannes. Cette structure d'actionneur (figure IV.2.2.1) est particulièrement intéressante, car elle présente une très forte densité de force et un faible temps de réponse [83, 86, 87].

Ce type de dispositif a fait l'objet de nombreuses publications au cours de ces dernières années (LEQUESNE [86], PELISSIER [83], YAMASAWA et al [87], SALDANHA et al [85],.....).

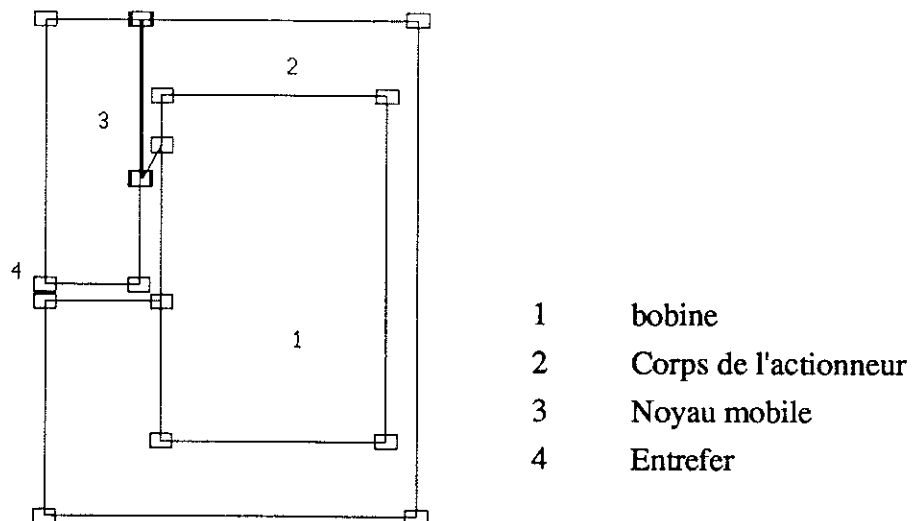


Figure IV.2.2.1: Structure de l'électroaimant étudié

Ce dispositif (figure IV.2.2.1) comprend un circuit magnétique déformable (entrefer variable) et une bobine. Le passage d'un courant dans la bobine magnétise le circuit ferromagnétique. Alors, une force magnétique apparaît et tend à déplacer le noyau mobile vers une position qui minimise l'énergie du système (la valeur de la réluctance du circuit magnétique). En absence de courant, un ressort ramène le noyau mobile à sa position initiale.

Cette force magnétique exercée sur le noyau plongeur peut être calculée par l'expression [87] :

$$F_{\text{mag}} = \int_S T \, dS \quad \text{IV.2.2.1}$$

où T est le tenseur de Maxwell et S est la surface d'intégration.

Nous ne nous intéressons qu'à l'étude de la force magnétique en régime statique. Dans ce cas, une valeur approchée de la force magnétique peut être donnée par l'expression [83, 85], en supposant que le circuit magnétique travaille en régime non saturé:

$$F_{\text{mag}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{S_e}{L_e^2} (J S_b)^2 \quad \text{IV.2.2.2}$$

ou encore

$$F_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{B_e^2}{\mu_0} S_e \quad \text{IV.2.2.3}$$

où S_e est la section de l'entrefer (section transversal en fer du noyau mobile), L_e est la longueur de l'entrefer, J est la densité de courant, S_b est la section de la bobine et B_e est la valeur moyenne de l'induction magnétique dans l'entrefer.

L'équation IV.2.2.2 nous montre que la course utile L_e , d'un tel dispositif, est restreinte à cause de la variation de la force en $1/L_e^2$. Malgré des artifices utilisés pour augmenter la course utile, les électroaimants sont généralement construits pour des applications à faible déplacement [83].

IV.2.2.2 Position du Problème

L'objectif de l'étude est l'optimisation en régime statique de la géométrie d'un électro-aimant, pour obtenir une caractéristique force par rapport au déplacement la plus élevée possible, tout en conservant le volume total du dispositif constant.

Du point de vue de la modélisation, ce dispositif possède une symétrie de révolution, il peut donc être modélisé comme un problème 2D axisymétrique.

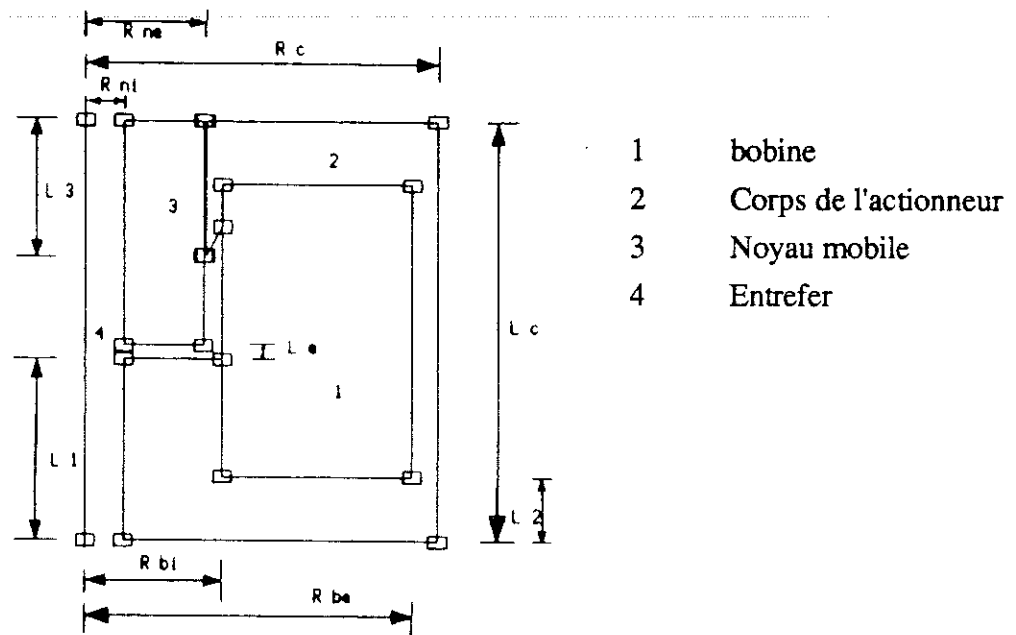


Figure IV.2.2.2: Détails des paramètres constructifs de l'électroaimant étudié

L'actionneur est réalisé en matériau ferromagnétique saturable possédant la courbe caractéristique $B(H)$ montrée sur la figure IV.2.2.3.

Dans ce problème, nous nous sommes fixé comme règle de conserver la section de passage du flux utile, ce qui nous permet de réduire le nombre de paramètres de conception utilisés et d'éviter les saturations locales du dispositif. Eventuellement, nous allons surdimensionner les parties non actives (c'est à dire là où les forces magnétiques ne sont pas produites) afin de réduire leur consommation en ampères-tours. Cette précaution nous permet d'augmenter les performances statiques de l'électro-aimant. L'énergie électromagnétique stockée doit être minimale pour assurer un temps de réponse le plus faible possible avec une puissance d'alimentation fixée [83]. Cela signifie qu'il faut éviter la saturation du circuit magnétique.

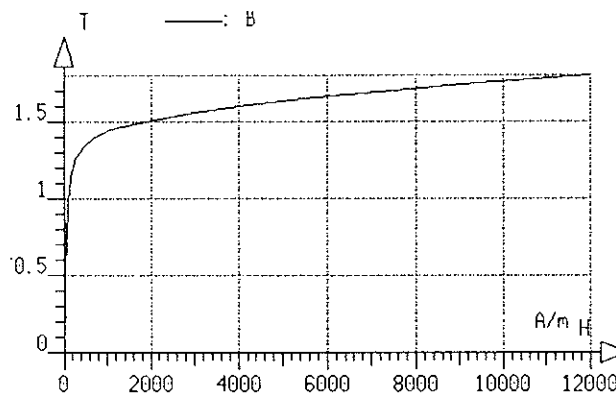


Figure IV.2.2.3: Courbe caractéristique $B(H)$ du matériau utilisé

Remarquons cependant que sur le plan dynamique nous aurions intérêt à diminuer la masse donc la section du noyau ; en contre partie nous diminuons aussi la force statique.

Donc, en tenant compte de ces aspects, le prototype étudié présente les caractéristiques géométriques suivantes (figure IV.2.2.2) :

L_c - longueur de la carcasse

R_{ne} - rayon externe du noyau mobile

R_{ni} - rayon interne du noyau mobile

$$R_{ni} = 1,37 \text{ mm}$$

R_{bi} - rayon interne de la bobine

$$R_{bi} = R_e + 0,64 \text{ mm}$$

V - volume total du dispositif constant

$$V = 7,363 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

et à partir de ces considérations, nous pouvons calculer les paramètres restants :

R_c - rayon externe de la carcasse

$$R_c = \left[\frac{V}{\pi R_{ne}} \right]^{1/2}$$

R_{be} - rayon externe de la bobine

$$R_{be} = \left[R_c^2 - R_{bi}^2 - R_{ni}^2 \right]^{1/2}$$

L_1 - longueur partie basse de la carcasse

$$L_1 = 0,433 L_C$$

L_2 - longueur de la colonne de la carcasse

$$L_2 = \frac{[R_{bi}^2 - R_{ni}^2]}{2 R_{bi}}$$

L_3 - longueur de la deuxième partie basse de la carcasse

$$L_3 = L_C - 2 L_2 - 2,5 \text{ mm}$$

Comme paramètres de conception nous avons choisi le rayon externe du noyau $x_1 = R_{ne}$ et la longueur de la carcasse $x_2 = L_C$.

Les paramètres $L_e(k)$ (figure IV.2.2.2) déterminent les valeurs des entrefers ($k=1, \dots, 6$; $L_e(1) = 0,1 \text{ mm}$, $L_e(2) = 0,15 \text{ mm}$, $L_e(3) = 0,20 \text{ mm}$, $L_e(4) = 0,25 \text{ mm}$, $L_e(5) = 0,30 \text{ mm}$ et $L_e(6) = 0,35 \text{ mm}$) où nous voulons atteindre une force maximale, selon certaines contraintes. Dans notre cas nous avons adopté une course utile maximale de 0,35 mm.

Nous considérons la densité de courant dans la bobine en cuivre comme étant constante $J = 5,71 \text{ A / mm}^2$.

Ainsi, nous pouvons formuler le problème d'optimisation de la façon suivante :

$$\text{minimiser } f_{\alpha}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left[1 - \frac{F_z(L_e(k), x)}{F_{\max}} \right]^2$$

où F_{\max} à été prise égale à 100N. $F_z(L_e(k), x)$ est la force magnétique exercée sur le noyau mobile en considérant l'entrefer $L_e(k)$ ($k = 1, \dots, 6$) et les paramètres de conception x_1 et x_2 . La force $F_z(L_e(k), x)$ est calculée par l'expression simplifiée (éq. IV.2.2.3):

$$F_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{B_e^2 S_e}{\mu_0}$$

avec la section de l'entrefer S_e donnée par :

$$S_e = \pi (x_1^2 - R_{ni}^2)$$

et B_e , une valeur moyenne des valeurs calculées de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer. D'après PELISSIER et al [83,85] les résultats obtenus avec l'expression IV.2.2.3 sont sensiblement identiques à ceux obtenus par les travaux virtuels.

Soumis aux contraintes :

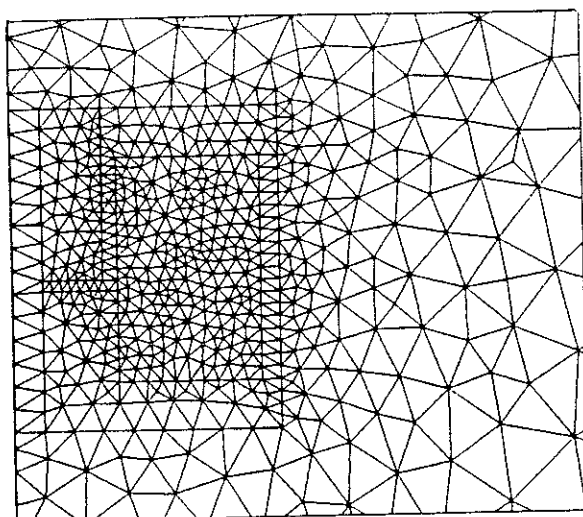
$$f_j(x_j) = x_j^2 - (x_j^{\max} + x_j^{\min}) x_j + x_j^{\max} x_j^{\min} \leq 0$$
$$j = 1,2$$

où x_j^{\min} et x_j^{\max} sont les bornes inférieure et supérieure du paramètre x_j , que nous avons adopté :

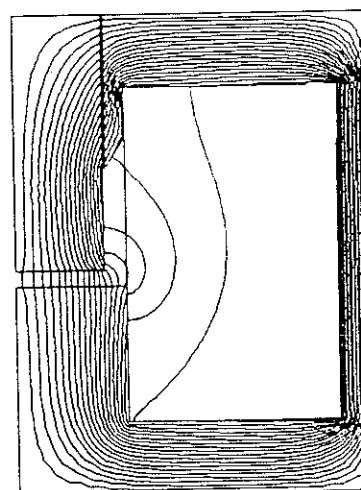
$$x_1^{\min} = 2,5 \text{ mm et } x_1^{\max} = 4,5 \text{ mm}$$
$$x_2^{\min} = 12 \text{ mm et } x_2^{\max} = 18 \text{ mm}$$

IV.2.2.3 Résultats Obtenus

La figure IV.2.2.4 représente le modèle éléments finis adopté pour l'étude de l'actionneur. A chaque itération, l'évaluation des fonctions et de leurs gradients demande quatre analyses éléments finis. Le temps CPU total d'une itération est de 50 minutes sur une station de travail HP 9000 série 400.



a - Discretisation éléments finis



b - lignes équipotentielles du potentiel vecteur magnétique A

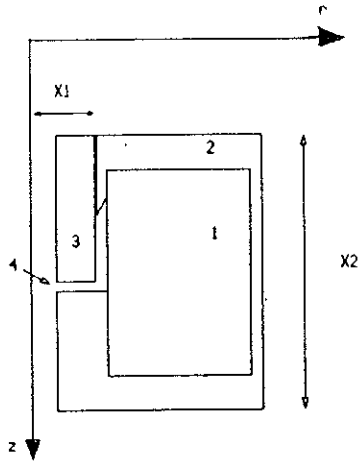
Figure IV.2.2.4 : Modèle éléments finis

Pour ce problème, nous avons choisi trois points de départ. Pour chaque essai, le processus d'optimisation a été arrêté lorsque la variation relative des paramètres est inférieure à $\epsilon=5,0 \times 10^{-4}$. Les résultats sont résumés dans le tableau IV.2.2.1.

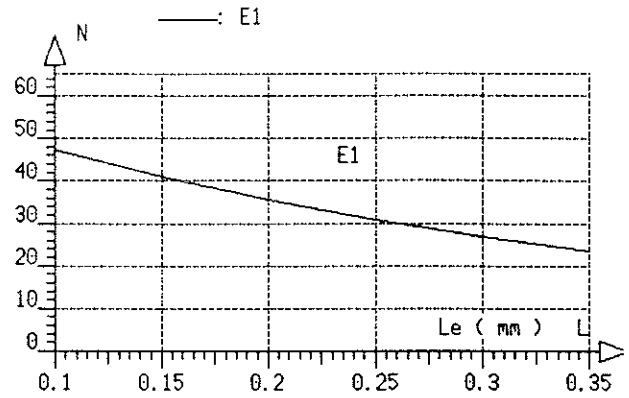
Tableau IV.2.2.1 : Résultats numériques obtenus en considérant une précision $\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$.

			Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
Essai N°	x mm	Valeurs initiales	valeurs obtenues	n° itérations	valeurs obtenues	n° itérations	valeurs obtenues	n° itérations	valeurs obtenues	n° itérations
I	x1	3.5	4.45	13	4.47	7	4.47	11	4.47	8
	x2	15.0	15.46		15.47		15.98		15.46	
II	x1	2.5	4.47	17	4.47	13	4.46	15	4.47	12
	x2	12.5	15.91		15.23		15.75		15.37	
III	x1	4.0	4.45	18	4.45	9	4.47	9	4.47	7
	x2	17.5	15.97		15.62		15.87		15.91	

Dans le tableau IV.2.2.1, si nous considérons le nombre d'itérations nécessaire pour l'obtention de la solution, nous voyons que les performances des méthodes MMA et RQP ont été supérieures aux deux autres méthodes pour la résolution du problème.

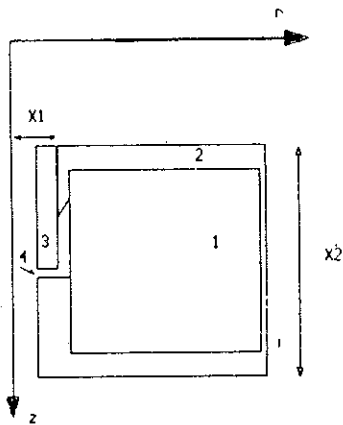


a - Géométrie électroaimant

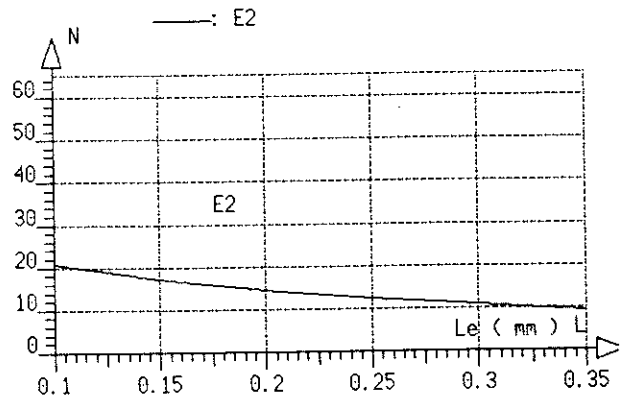


b-Courbes caractéristiques statiques

Figure IV.2.2.5: Caractéristiques électroaimant défini condition initiales essai I.

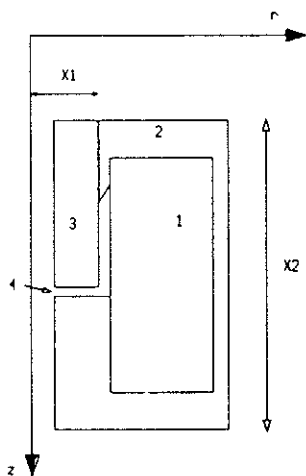


a - Géométrie électroaimant

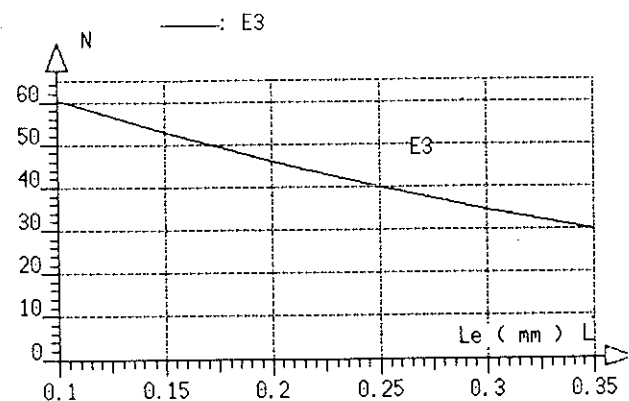


b-Courbes caractéristiques statiques

Figure IV.2.2.6: Caractéristiques électroaimant défini condition initiales essai II.

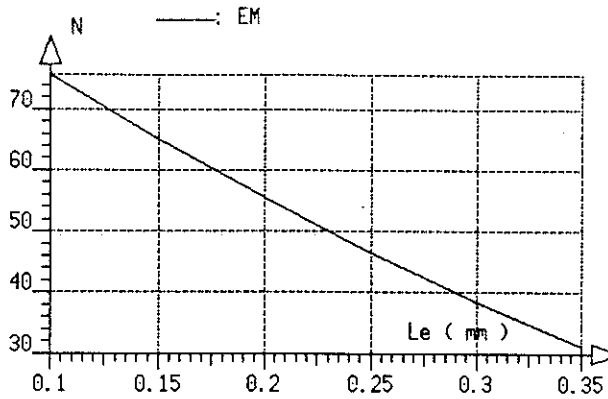


a - Géométrie électroaimant

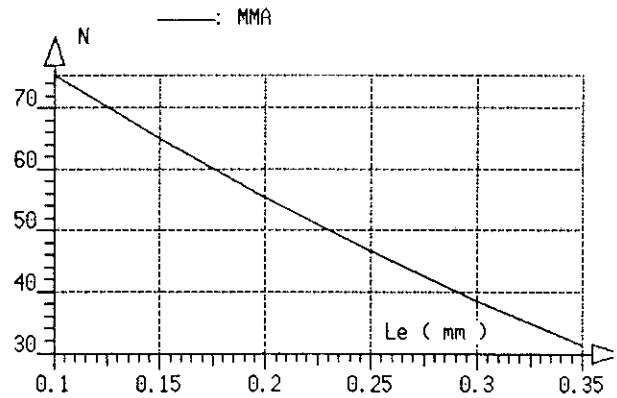


b-Courbes caractéristiques statiques

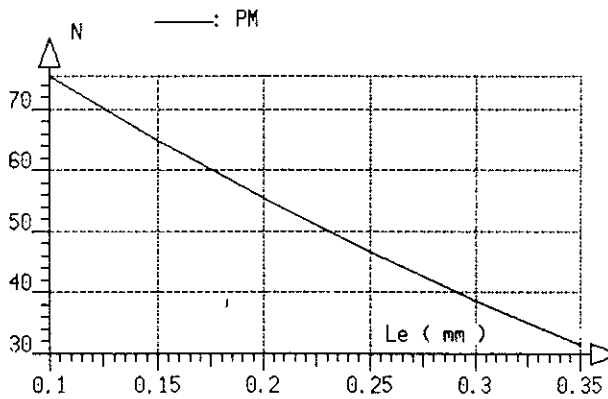
Figure IV.2.2.7 : Caractéristiques électroaimant défini condition initiales essai III.



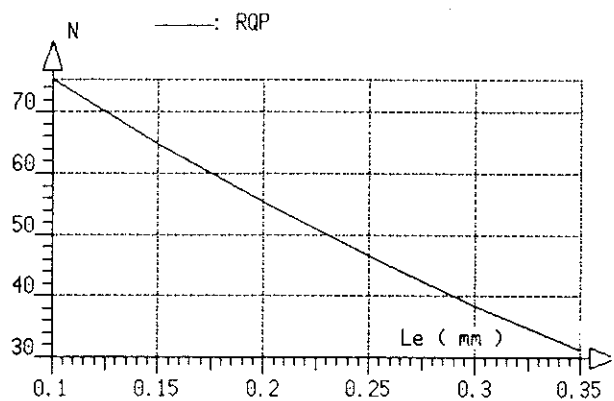
a - Méthode EM



b - Méthode MMA



c - Méthode PM



d - Méthode RQP

Figure IV.2.2.8 : Courbes caractéristiques statiques par rapport au déplacement du noyau, résultats obtenus essai I.

IV.2.2.4 Conclusion

En résumé, sur le plan numérique, l'optimisation de la forme de cet actionneur conduit à un problème relativement complexe (non linéarité, nombre d'ouvertures de l'entrefer) et délicat à traiter même si le nombre de paramètres de conception n'est que de deux.

Les résultats obtenus montrés dans le Tableau IV.2.2.1 présentent une faible dispersion. Ceci doit être dû au fait que les valeurs des forces magnétiques exercées sur le noyau mobile sont fortement influencées par le paramètre x_1 dont nous avons volontairement limité la valeur maximale à 4,5mm pour éviter l'augmentation significative de la masse du noyau donc du temps de réponse du dispositif en régime dynamique.

IV.2.3 Optimisation de B_r dans une Machine Synchrone à Pôles Saillants à Aimants Permanents

IV.2.3.1 Introduction

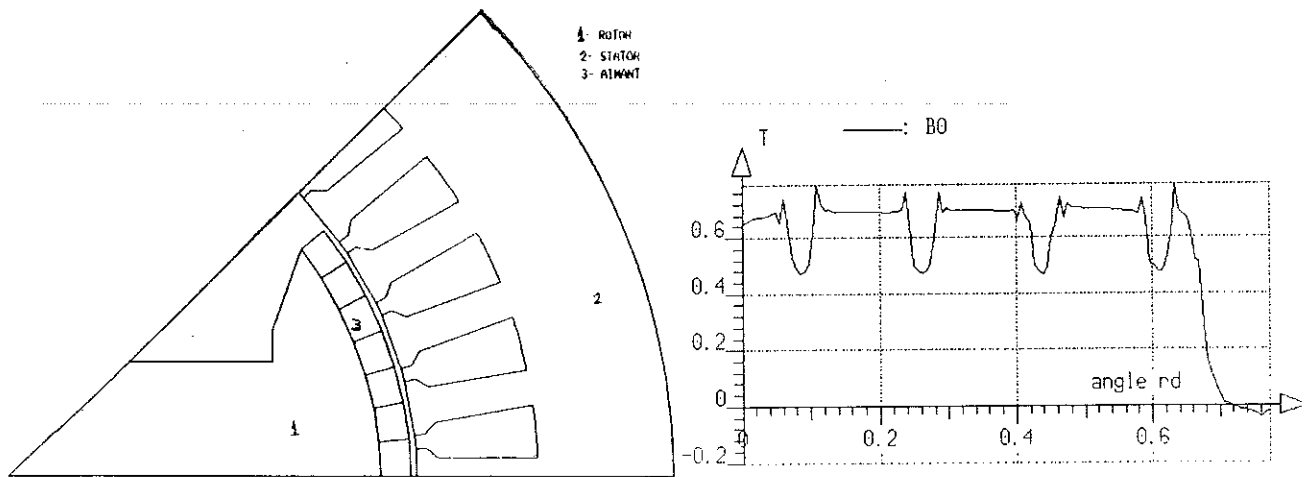
Les aimants permanents (terres rares) apparus récemment, ont des propriétés magnétiques très intéressantes pour des applications en électrotechnique. Ils ont une induction rémanente assez élevée (entre 0,8 à 1,2 T) et supportent un champ inverse très élevé (supérieur à 1,2 MA / m). Ils sont donc employés en tant qu'inducteur dans les machines électriques, en particulier dans les machines synchrones et à courant continu.

L'optimisation de la structure des machines électriques à aimants permanents a fait l'objet de nombreuses publications au cours de ces dernières années (NAKATA et al [15,88], BOULES [89], RUSSENSCHUCK et al [90,91], SALDANHA et al [26,27,93], DEROU et al [92], KADDED et al [75,94],...).

Dans la présente étude, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'utilisation d'aimants permanents pour la construction d'une machine synchrone.

Du point de vue de la structure, la machine synchrone choisie est tétrapolaire avec un stator lisse à 36 encoches. Elle possède des aimants collés à la surface des pièces polaires du rotor. La figure IV.2.3.1.a présente les détails géométriques de la structure de la machine étudiée.

L'induction magnétique radiale dans l'entrefer, considérant les courants statoriques nuls et le champ coercitif pour chacun des ces sept petits aimants (fig. IV.2.3.1.a) égal à 750kA/m, est fortement non sinusoïdale (figure IV.2.3.1.b).



a - Structure géométrique d'un demi-pôle

b - Induction magnétique dans l'entrefer

Figure IV.2.3.1: Machine synchrone à pôles saillants à aimants permanents

Le but de l'étude est d'obtenir une induction magnétique radiale B_r dans l'entrefer de la machine, la plus sinusoïdale possible (donc force électromotrice induite sinusoïdale, couple plus uniforme pour des courants d'alimentation sinusoïdaux, etc...).

Tout d'abord, nous avons considéré les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le matériau magnétique est supposé linéaire (l'induction magnétique maximale due au flux qui traverse la dent au milieu du pôle est inférieure à 1 Tesla).
- la perméabilité des aimants est voisine de celle du vide ($\mu_r = 1$).
- les courants statoriques sont nuls
- la machine est considérée suffisamment longue pour que nous puissions négliger les phénomènes dus aux extrémités (approche 2D).

Pour la modélisation éléments finis, compte tenu des symétries, le domaine adopté pour l'étude correspond à un huitième de la section transversal de la machine, c'est-à-dire, un demi-pôle (figure IV.2.3.1).

Ce problème a été abordé selon deux approches. Dans la première approche (problème I), nous avons fixé la forme du rotor et nous avons recherché la distribution du champ coercitif idéale dans chaque aimant. Dans la deuxième approche (problème II), nous avons fixé le champ coercitif dans chaque aimant à sa valeur maximale et nous avons recherché la forme du rotor qui satisfait le mieux le critère adopté. Ces deux problèmes font l'objet des présentations qui vont suivre.

IV.2.3.2 Position du Problème I

Détermination de la valeur du champ coercitif pour les aimants qui décrivent la couronne polaire, pour l'obtention d'une induction magnétique sinusoïdale dans l'entrefer.

IV.2.3.2.1 Considérations Initiales

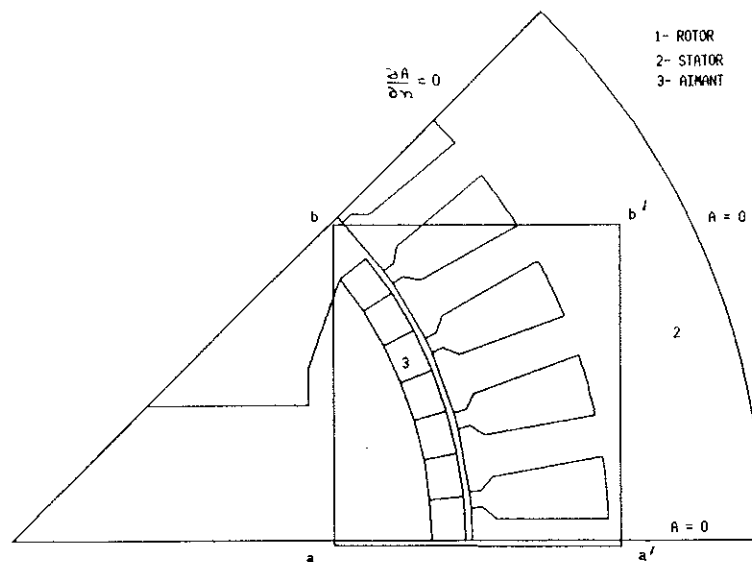
Comme paramètres de conception dans ce problème, nous avons choisi les amplitudes des valeurs du champ coercitif H_C de chacun des sept aimants H_{C1}, \dots, H_{C7} (fig. IV.2.3.2 b).

Les sept aimants permanents présentent les caractéristiques suivantes :

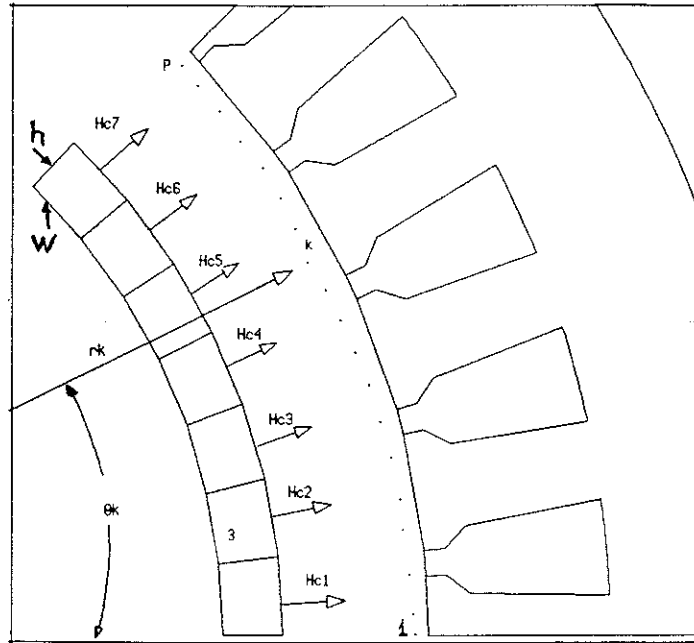
longueur $w = 6,7$ mm

hauteur $h = 5,4$ mm

champ coercitif H_C variable



a - Structure géométrique du demi-pôle avec le détail aa' bb'
(A potentiel vecteur magnétique)



b - représentation des variables de conception H_{C1}, \dots, H_{C7} et des points d'étude dans l'entrefer (détail aa' bb')

Figure IV.2.3.2 : Modèle adopté pour l'étude

Les valeurs des champs coercitifs (H_{C1}, \dots, H_{C7}) des ces sept aimants doivent être déterminées de manière à produire une induction magnétique radiale dans l'entrefer la plus sinusoïdale possible.

Nous pouvons donc définir le problème d'optimisation de la façon suivante :

$$\text{minimiser } f_{\alpha}(H_c) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^P [B_o(r_k) - B_C(r_k, H_C)]^2$$

où $B_o(r_k)$ est la valeur de l'induction magnétique radiale imposée dans l'entrefer, aux points r_k ($k = 1, \dots, P$ fig. IV.2.3.2) :

$$B_o(r_k) = 0,60 \cos(2 \theta_{r_k}) \text{ T}$$

avec θ_{r_k} l'angle décrit par le vecteur r_k et l'axe x (figure IV.2.3.2 b).

L'induction magnétique $B_C(r_k, H_C)$ est la valeur calculée au point r_k . Le vecteur H_C représente l'ensemble des paramètres de conception $H_{C1}, H_{C2}, \dots, H_{C7}$.

Soumis aux contraintes :

$$f_j(H_{Cj}) = H_{Cj}^2 - (H_{Cj}^{\max} + H_{Cj}^{\min}) H_{Cj} + H_{Cj}^{\max} H_{Cj}^{\min} \leq 0$$
$$j = 1, \dots, 7.$$

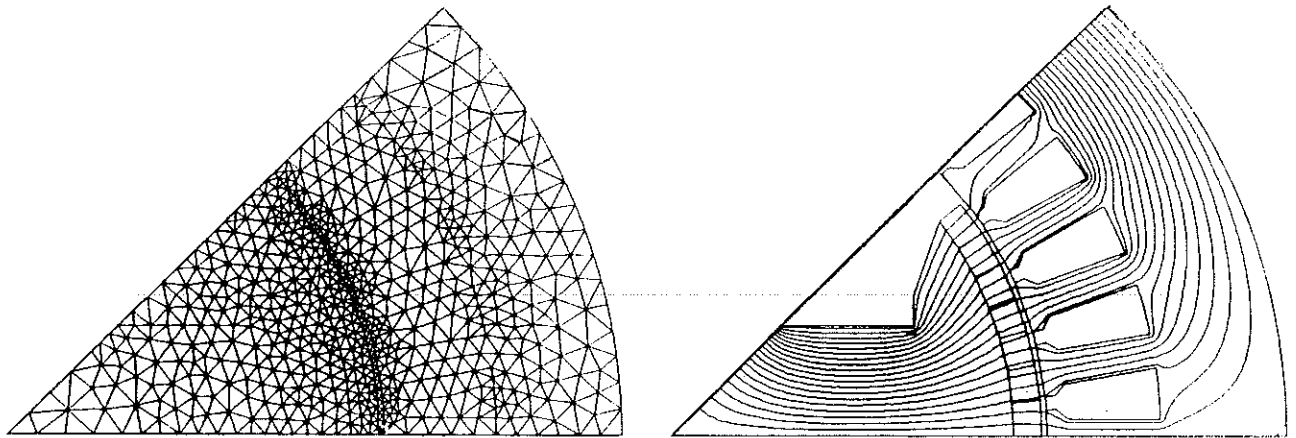
où H_{Cj}^{\min} et H_{Cj}^{\max} sont les bornes inférieure et supérieure du paramètre H_{Cj} . Pour cette étude nous avons choisi à priori les valeurs présentées au Tableau IV.2.3.1 ci-dessous.

Tableau IV.2.3.1 : Valeurs des champs coercitif H_C^{\min} et H_C^{\max} adoptées pour l'étude.

Paramètres	H_C^{\min} kA / m	H_C^{\max} kA / m
H_{C1}	550	700
H_{C2}	450	650
H_{C3}	400	650
H_{C4}	350	600
H_{C5}	300	600
H_{C6}	250	550
H_{C7}	200	550

IV.2.3.2.2 Résultats Obtenus

La figure IV.2.3.3 représente le modèle éléments finis adopté pour l'étude de la machine synchrone à pôles saillants à aimants permanents. A chaque itération, l'évaluation des fonctions et de leurs gradients demande 14 analyses éléments finis. Le temps CPU total d'une itération est de 20 minutes sur une station de travail HP 9000 série 400.



a - Discretisation éléments finis

b - Lignes équipotentielles du potentiel vecteur magnétique A

Figure IV.2.3.3 : Modèle éléments finis

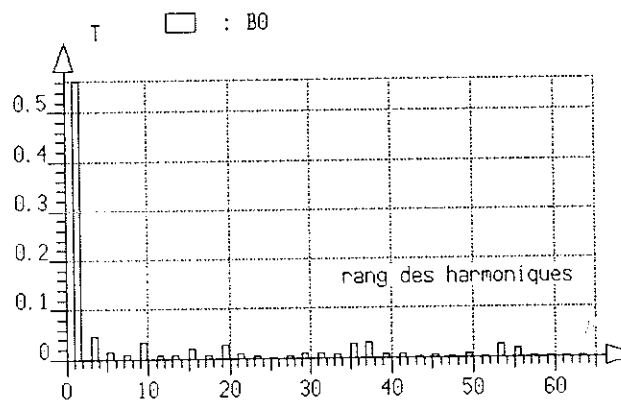
Dans ce problème nous avons adopté un point de départ unique pour les variables de conception . Le processus d'optimisation a été arrêté lorsque la variation relative des paramètres est inférieure à $\epsilon=5,0 \times 10^{-4}$. Les résultats sont résumés dans le tableau IV.2.2.1.

Tableau IV.2.3.2 : Résultats obtenus avec une précision imposée $\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$.

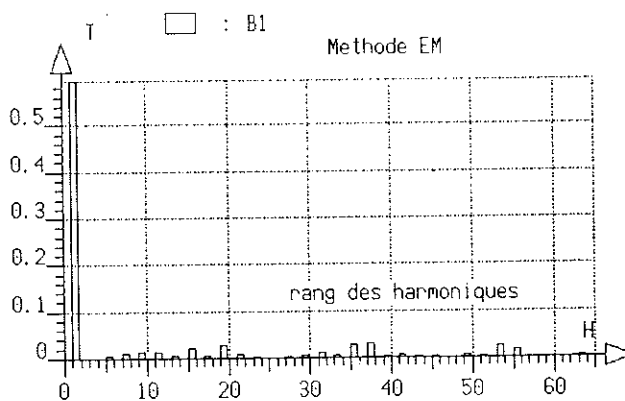
Valeur initiale H_C kA / m		Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
		Valeur Initiale H_C kA / m	n° itérations	Valeur Initiale H_C kA / m	n° itérations	Valeur Initiale H_C kA / m	n° itérations	Valeur Initiale H_C kA / m	n° itérations
H_{C1}	581.00	699.20		699.50		691.10		690.60	
H_{C2}	571.80	604.30		604.60		604.70		604.90	
H_{C3}	595.70	618.10	11	618.50	9	615.20	8	614.50	7
H_{C4}	475.90	492.00		491.90		491.30		491.50	
H_{C5}	498.60	467.70		464.14		465.20		464.00	
H_{C6}	372.10	324.90		316.30		319.70		316.60	
H_{C7}	256.90	251.11		244.00		245.30		243.80	

En ce qui concerne le nombre d'itérations, nous voyons que la méthode EM a été la plus coûteuse. La grosse difficulté numérique du problème provient de la présence des encoches statoriques qui créent des harmoniques nuisibles, masquant la composante fondamentale.

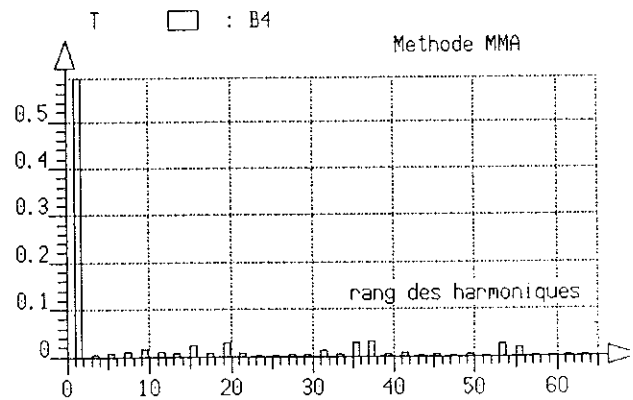
L'analyse des spectres de l'induction magnétique B_r obtenue avec ces quatre méthodes d'optimisation (fig. IV.2.3.4) met en évidence la qualité des résultats finals.



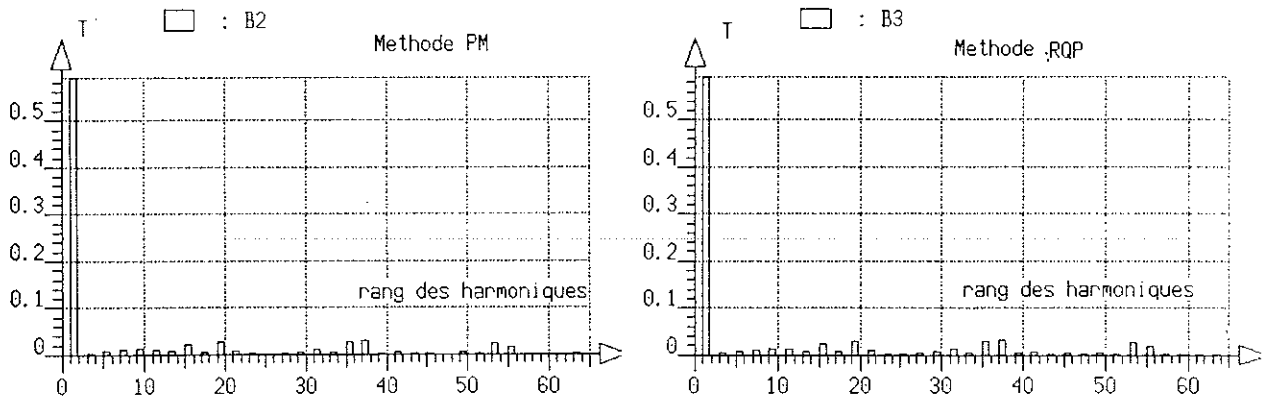
a - Spectre de B_r conditions initiales du problème



b - Spectre de B_r méthode EM



c - Spectre de B_r méthode MMA



d - Spectre de Br méthode PM

e - Spectre de Br méthode RQP

Figure IV.2.3.4 : Spectre de l'induction magnétique radiale dans l'entrefer
(résultats présentés Tableau IV.2.3.2)

IV.2.3.2.3 Conclusion

L'étude que nous venons de présenter a deux objectifs. Le premier est de démontrer la validité et la puissance de l'approche adoptée pour la résolution du problème et le second est de caractériser les amplitudes des champs rémanents nécessaires pour l'obtention de la sinusoïdalité de l'induction magnétique dans l'entrefer.

Par rapport au premier objectif, nous pouvons dire qu'il est atteint puisque les résultats finals avec ces quatre méthodes sont assez concordants et ont été obtenus à un relativement faible coût de calcul.

Sur le deuxième objectif le plus important pour le concepteur, il faut remarquer que les valeurs de H_C obtenues, surtout pour H_{C6} et H_{C7} , sont assez faibles. Ceci, à notre avis peut remettre en question une telle solution, car d'une part, les aimants sont mal utilisés et d'autre part ils peuvent pendant l'utilisation être soumis à des champs inverses très élevés donc être désaimantés.

IV.2.3.3 Position du problème II

Détermination de la forme de la pièce polaire magnétique (couronne), pour l'obtention d'une induction magnétique sinusoïdale dans l'entrefer.

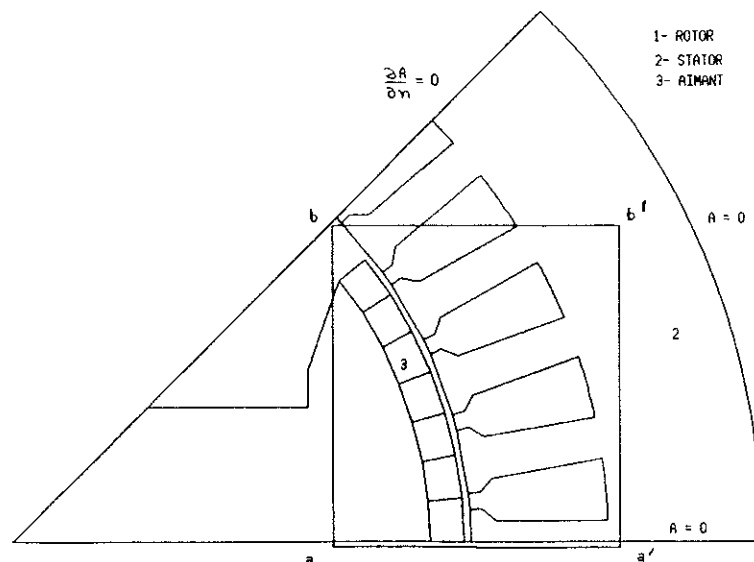
IV.2.3.3.1 Considérations Initiales

Comme paramètres de conception nous avons choisi les rayons internes de chacun des sept aimants R_1, \dots, R_7 (figure IV.2.3.5 b). L'induction magnétique radiale sera calculée dans l'entrefer aux points $k = 1, 2, \dots, P$.

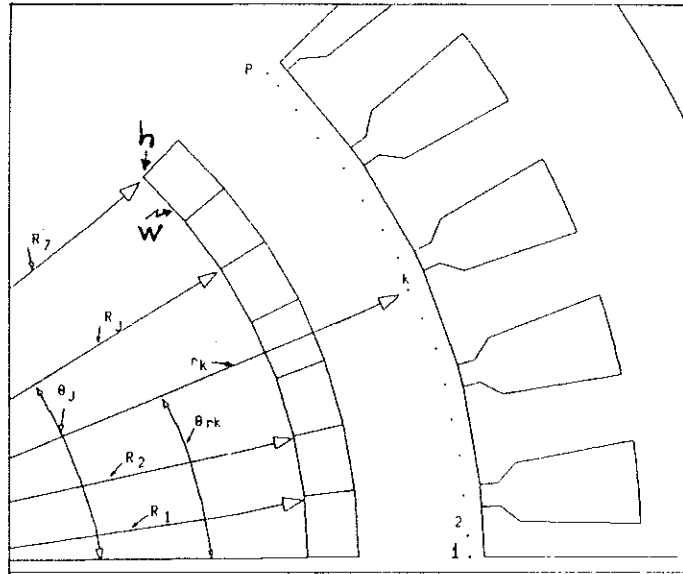
Les sept aimants permanents présentent les caractéristiques suivantes :

- longueur $w = 6,7$ mm
- hauteur $h = 5,4$ mm
- champ magnétique coercitif $H_C = 750$ kA / m

Les valeurs des rayons inférieurs (R_1, \dots, R_7 , figure IV.2.3.5 b) de ces sept aimants doivent être déterminés de façon à produire dans l'entrefer aux point $k = 1, \dots, P$, une induction magnétique radiale la plus sinusoïdale possible.



a - Structure géométrique du demi-pôle avec le détail aa' bb' (A potentiel vecteur magnétique)



b - Représentation de variables de conception R_1, \dots, R_7 et des points d'étude dans l'entrefer (détail aa' bb')

Figure IV.2.3.5 : Modèle adopté pour l'étude

Nous pouvons définir le problème d'optimisation de la manière suivante :

$$\text{minimiser } f_{\alpha}(R) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^P [B_{\alpha}(r_k) - B_C(r_k, R)]^2$$

où $B_{\alpha}(r_k)$ est la valeur de l'induction magnétique imposée aux points r_k dans l'entrefer :

$$B_{\alpha}(r_k) = 0,64 \cos(2 \theta_{r_k}) \text{ T}$$

avec θ_{r_k} l'angle décrit par le vecteur r_k et l'axe des coordonnées x (fig. IV.2.3.5.b). L'induction magnétique $B_C(r_k, R)$ est la valeur calculée au point r_k , avec les paramètres de conception donnée par le vecteur $R = (R_1, \dots, R_7)$.

Les contraintes sont :

$$f_j(R_j) = R_j^2 - (R_j^{\max} + R_j^{\min}) R_j + R_j^{\max} R_j^{\min} \leq 0$$

$$j = 1, \dots, 7$$

où R_j^{\min} et R_j^{\max} sont les bornes inférieure et supérieure du paramètre R_j . Nous avons adopté $R_j^{\min} = 57,00$ et $R_j^{\max} = 67,10$ avec $j = 1, \dots, 7$.

Dans notre cas, il faut considérer encore les contraintes dues au fait que les aimants ont une longueur fixe w . Ainsi, il faut que les rayons consécutifs R_{j+1} et R_j respectent aussi les conditions suivantes :

$$R_{j+1} \geq R_j - 0,98 w$$

valeur minimale de R_{j+1} et

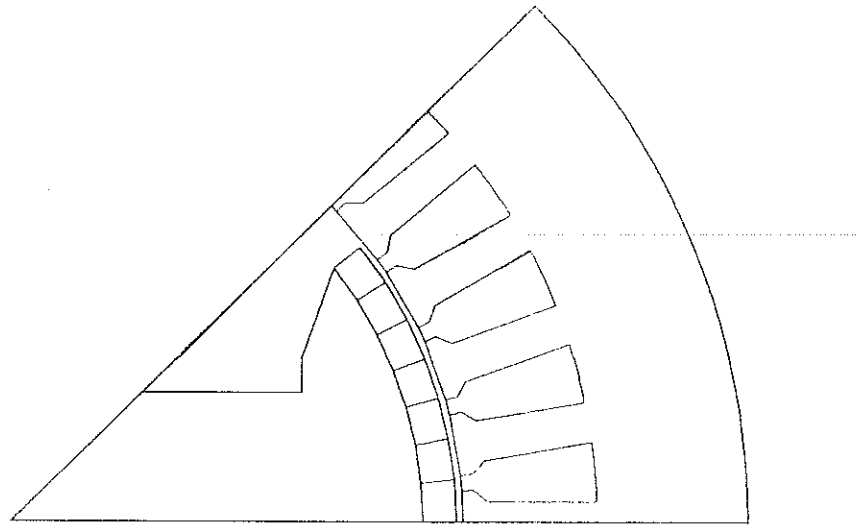
$$R_{j+1} \leq R_j + 0,98 w$$

valeur maximale de R_{j+1} .

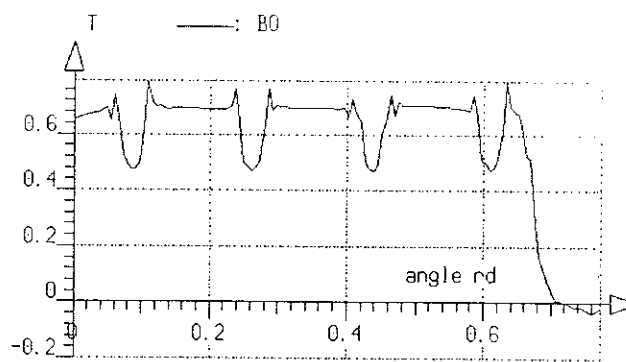
IV.2.3.3.2 Résultats obtenus

La figure IV.2.3.3 représente le modèle éléments finis adopté pour l'étude de la machine synchrone à pôles saillants à aimants permanents. A chaque itération, l'évaluation des fonctions et de leurs gradients demande 14 analyses éléments finis. Le temps CPU total d'une itération est de 40 minutes sur une station de travail HP 9000 série 400.

Dans ce problème nous avons adopté trois points de départ. Pour chaque essai le processus d'optimisation a été arrêté lorsque la variation relative des paramètres est inférieure à $\epsilon=5,0 \times 10^{-4}$. Les résultats sont résumés dans les tableaux IV.2.3.4 à IV.2.3.6



a - Géométrie initiale



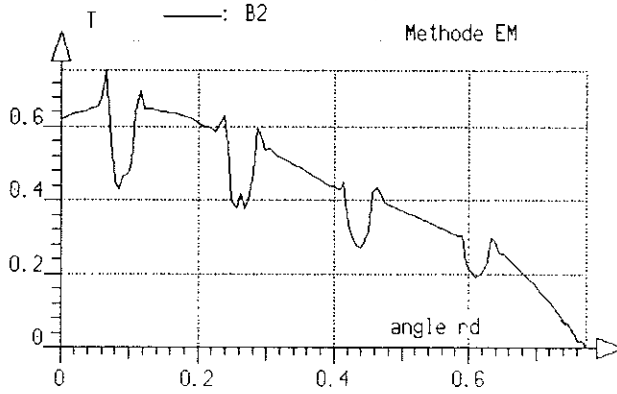
b - Induction magnétique radiale correspondante dans l'entrefer

Figure IV.2.3.6: détails conditions initiales essai I

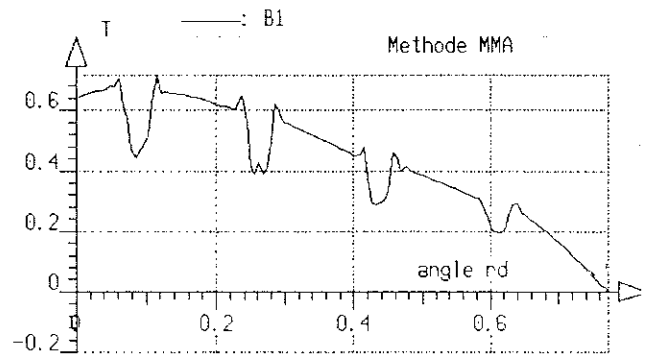
Tableau IV.2.3.4 : Résultats obtenus essai I, avec une précision $\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$.

Essai n°	Valeur initiale rayon (mm)		Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
			Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations
I	R ₁	67.00	66.89		66.87		66.80		66.66	
	R ₂	67.00	66.13		66.19		66.19		66.33	
	R ₃	67.00	65.41		65.45		65.46		65.45	
	R ₄	67.00	63.85	15	64.58	15	64.59	12	63.98	9
	R ₅	67.00	61.22		61.30		61.30		61.44	
	R ₆	67.00	59.89		60.23		60.23		60.43	
	R ₇	67.00	58.19		58.29		58.29		58.49	
Valeur fonction objectif	3.541		0.2427		0.2560		0.2560		0.2683	

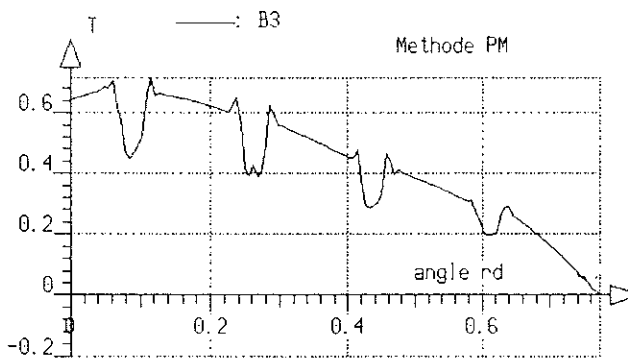
Dans le tableau IV.2.3.4, si nous considérons le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de la solution, nous pouvons remarquer une nette supériorité de la méthode RQP pour la résolution du problème proposé.



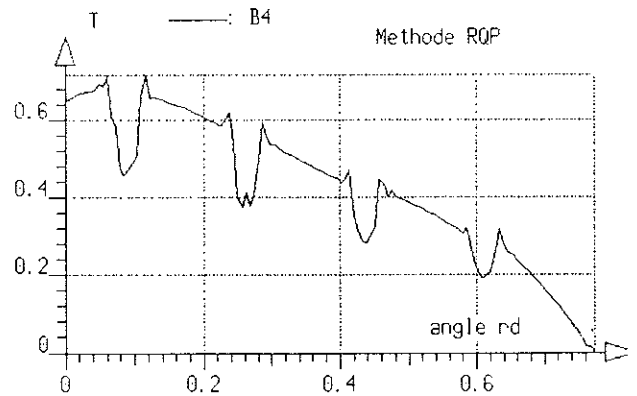
a - Méthode EM



b - Méthode MMA

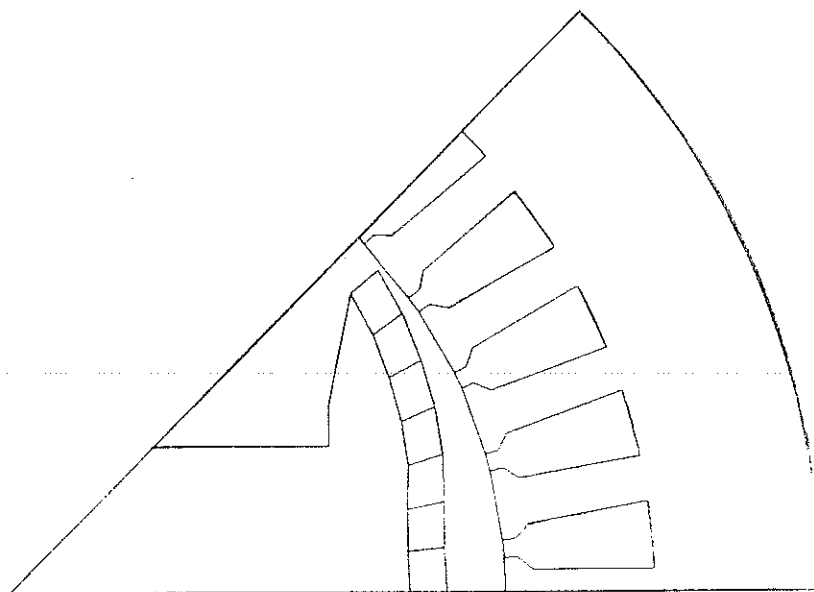


c - Méthode PM

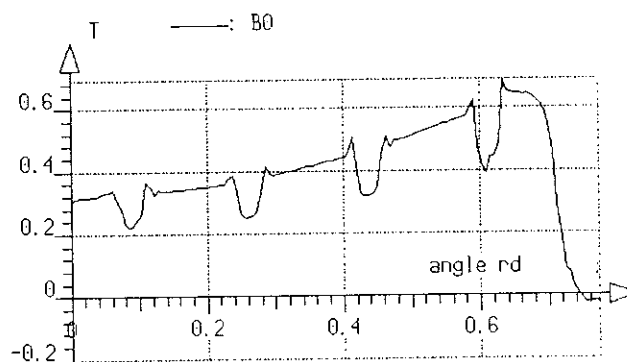


d - Méthode RQP

Figure IV.2.3.7 : Induction magnétique radiale dans l'entrefer, résultats essai I (Tableau IV.2.3.4)



a - Géométrie initiale

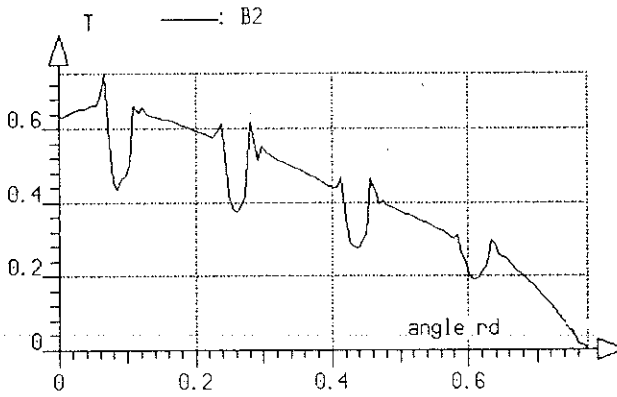


b - Induction radiale dans l'entrefer correspondante
Figure IV.2.3.8 : Détails conditions initiales essai II

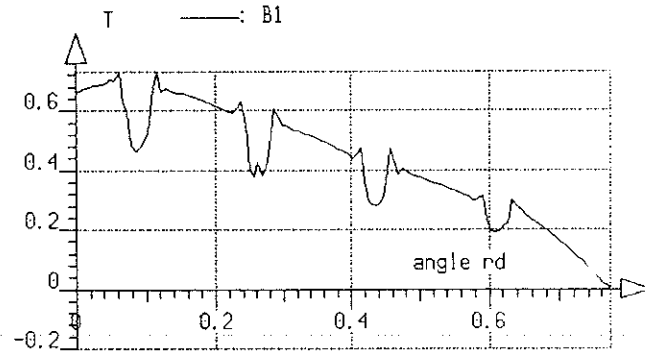
Tableau IV.2.3.5 : Résultats obtenus essai II avec une précision $\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$.

Essai n°	Valeur initiale rayon (mm)		Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
			Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations
II	R ₁	59.29	66.66		67.00		66.53		66.87	
	R ₂	60.30	65.86		66.18		65.73		65.79	
	R ₃	61.97	65.05		65.08		65.05		65.17	
	R ₄	63.31	63.65	18	64.13	17	63.85	15	64.05	13
	R ₅	64.65	61.30		61.22		61.64		61.64	
	R ₆	65.99	60.09		59.98		60.63		60.50	
	R ₇	67.00	57.82		58.19		57.69		57.82	
Valeur fonction objectif	4.3708		0.2524		0.2513		0.2796		0.2563	

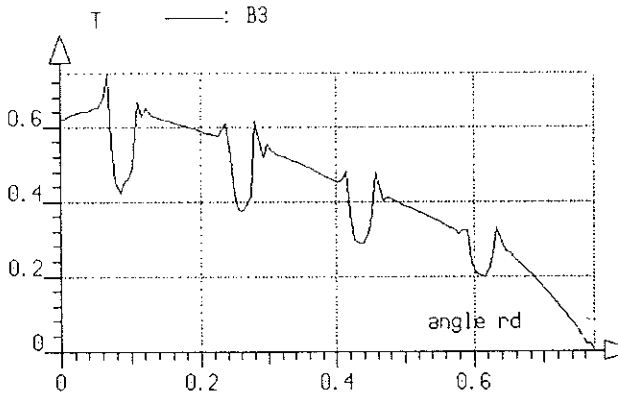
Dans le tableau IV.2.3.5, en ce qui concerne le nombre final d'itérations, nous pouvons constater encore la supériorité de la méthode RQP, suivie de très près par la méthode PM, face à la résolution du problème proposé.



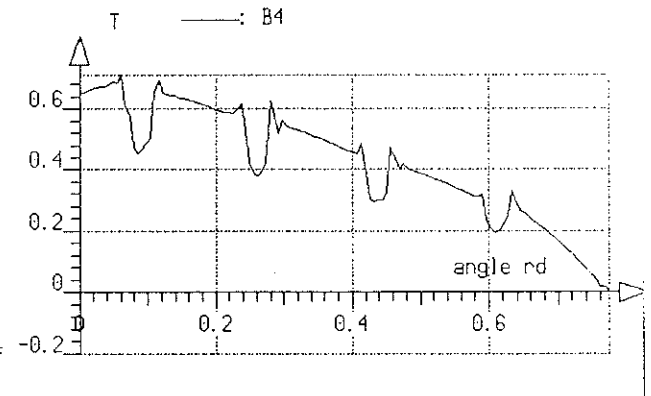
a - Méthode EM



b - Méthode MMA

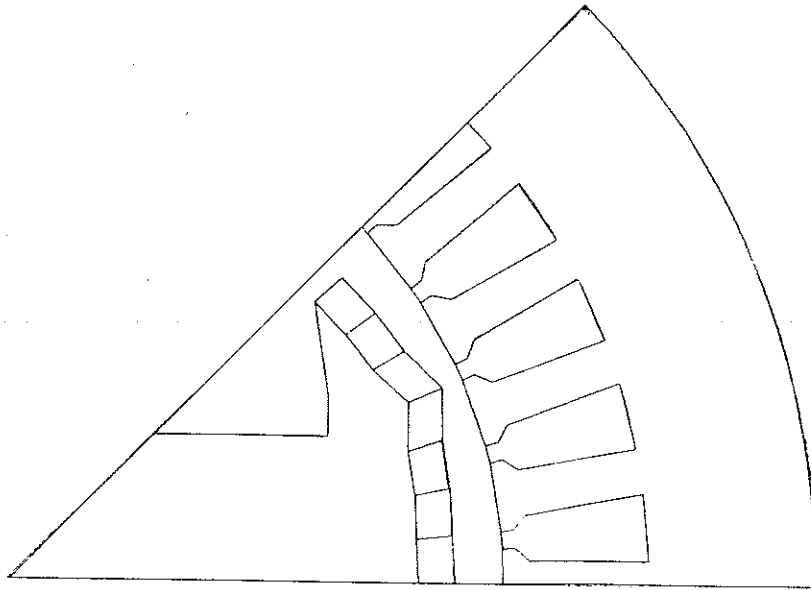


c - Méthode PM

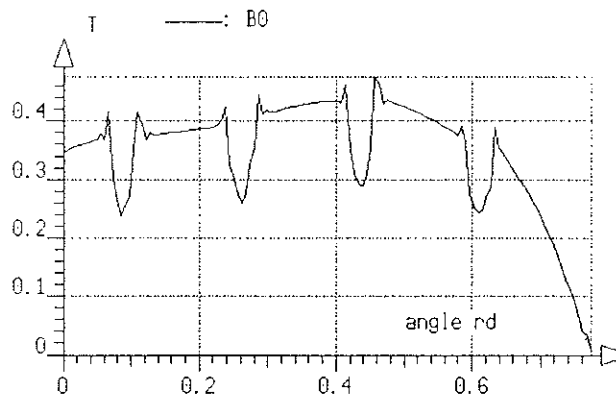


d - Méthode RQP

Figure IV.2.3.9: Induction magnétique radiale dans l'entrefer, résultats essai II
(Tableau IV.2.3.5)



a - Géométrie initiale



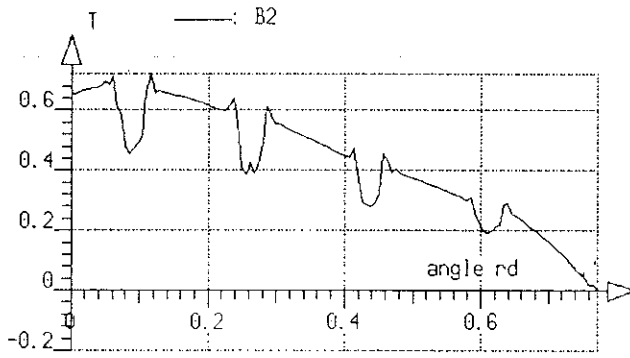
b - Induction radiale dans l'entrefer correspondante

Figure IV.2.3.10: Détails conditions initiales essai III

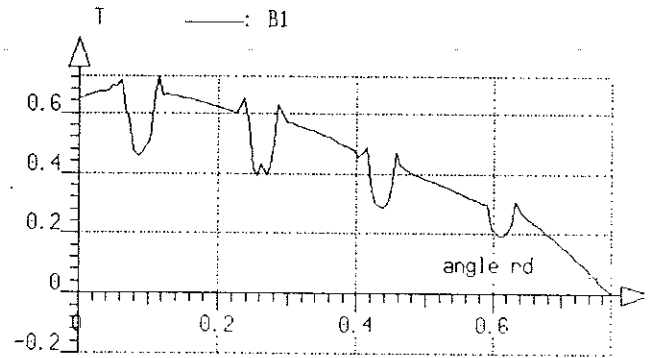
Tableau IV.2.3.6 : Résultats obtenus essai III avec une précision $\epsilon = 5,0 \times 10^{-4}$.

Essai r ^p	Valeur initiale rayon (mm)		Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
			Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations	Valeur finale rayon (mm)	n° itérations
III	R ₁	60.97	66.53		66.78		66.80		66.87	
	R ₂	61.64	66.33		66.26		66.26		66.06	
	R ₃	62.31	65.05		65.45		65.46		65.06	
	R ₄	64.99	63.38	16	63.85	14	63.85	11	63.38	12
	R ₅	62.31	61.03		61.57		61.57		61.84	
	R ₆	61.64	60.10		60.16		60.17		60.37	
	R ₇	60.97	58.89		58.62		58.62		58.42	
Valeur fonction objectif	3.3605		0.2651		0.2520		0.2524		0.25318	

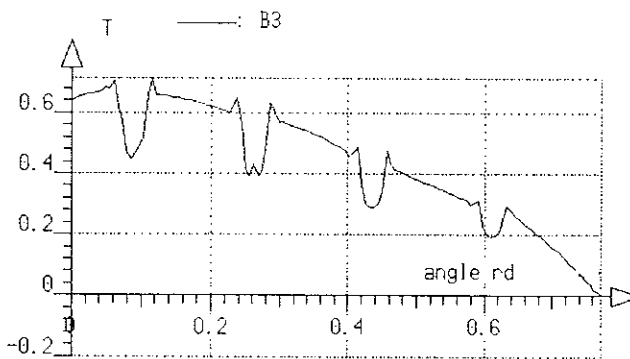
Finalement sur le tableau IV.2.3.6, les résultats obtenus pour l'essai III, confirment la supériorité des méthodes RQP et PM pour la résolution du problème.



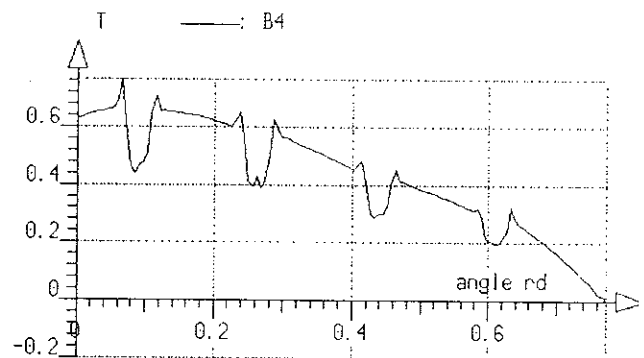
a - Méthode EM



b - Méthode MMA



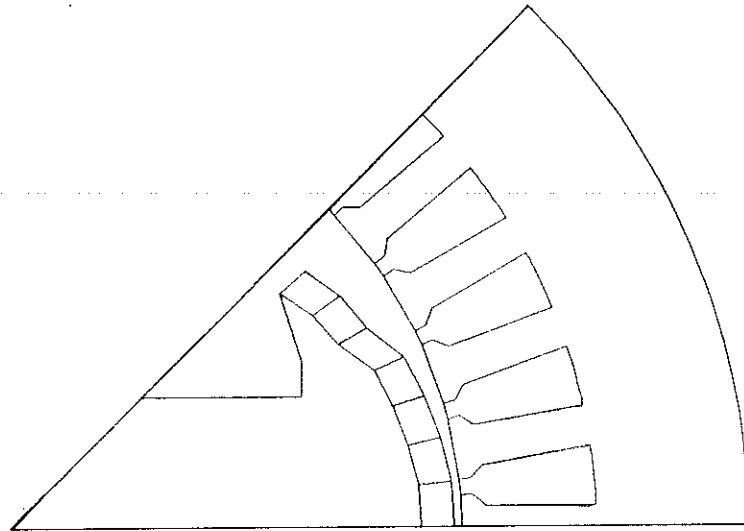
c - Méthode PM



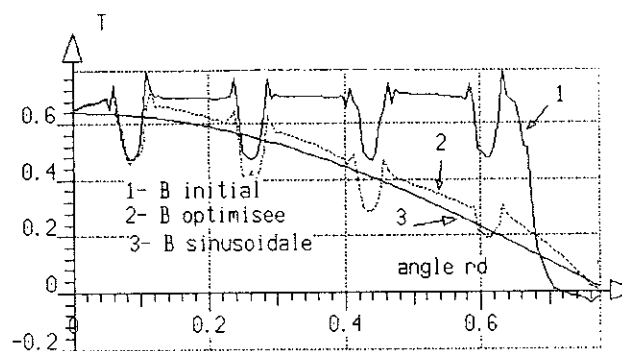
d - Méthode RQP

Figure IV.2.3.11 : Induction magnétique radiale dans l'entrefer, résultats essai III
(Tableau IV.2.3.6)

La structure optimisée du moteur, obtenue par la méthode MMA pendant l'essai I (figure IV.2.3.12), nous permet de constater que la forme géométrique finale a été modifiée d'une façon importante. Cela prouve que le logiciel éléments finis utilisé possède la capacité d'"absorber" de tels niveaux de perturbation sur la forme géométrique étudiée.



a - Géométrie finale obtenue



b - Induction magnétique radiale dans l'entrefer

Figure IV.2.3.12 : Résultats obtenus essai I méthode MMA (Tableau IV.2.3.4)

IV.2.3.3.3 Conclusion

Du point de vue de la modélisation, cet exemple peut être considéré comme assez complexe. Le déroulement du processus d'optimisation impose nécessairement de grosses modifications au niveau des paramètres géométriques et physiques qui décrivent les aimants permanents.

Cette application nous permet surtout de mettre en évidence l'apport colossal de la représentation paramétrique des grandeurs géométriques et physiques dans le pré-processeur éléments finis.

Les principaux avantages liés à la représentation paramétrique de grandeurs physiques et géométriques, peuvent se résumer ainsi:

- souplesse dans le traitement général des données
- les géométries créées sont généralement douces et régulières (comparativement à un problème où les degrés de liberté sont les positions des noeuds du maillage, MARROCO et al [14]).
- la représentation paramétrique des grandeurs géométriques s'adapte parfaitement à la création automatique de la discrétisation éléments finis.

Finalement, il faut remarquer que le remaillage nécessaire à chaque itération pour le problème d'optimisation de forme (problème II) explique la différence constatée sur la durée d'une itération par rapport au problème I.

IV.2.4 Optimisation de la Forme des Pièces Polaires Rotoriques dans une Machine à Réductance Variable pour l'Obtention d'un Couple Maximal Fixé.

IV.2.4.1 Introduction

RAMAMOORTY et al [95,96] ont réalisé des nombreuses études sur des machines à réductance variable, en envisageant l'obtention des caractéristiques de fonctionnement optimisées.

La machine à réluctance est un type de machine synchrone. Parmi les machines alternatives, la machine à réluctance variable est une des plus simple, ceci est dû à l'homogénéité de la structure rotorique, qui normalement ne comporte que du matériau ferromagnétique. Dans cette machine, le champ tournant est créé par les enroulements statoriques.

Le principe du flux maximal (ou encore de l'énergie minimale) fait apparaître un couple qui tend à maintenir le rotor en synchronisme avec le champ tournant et tel que le flux résultant soit maximal.

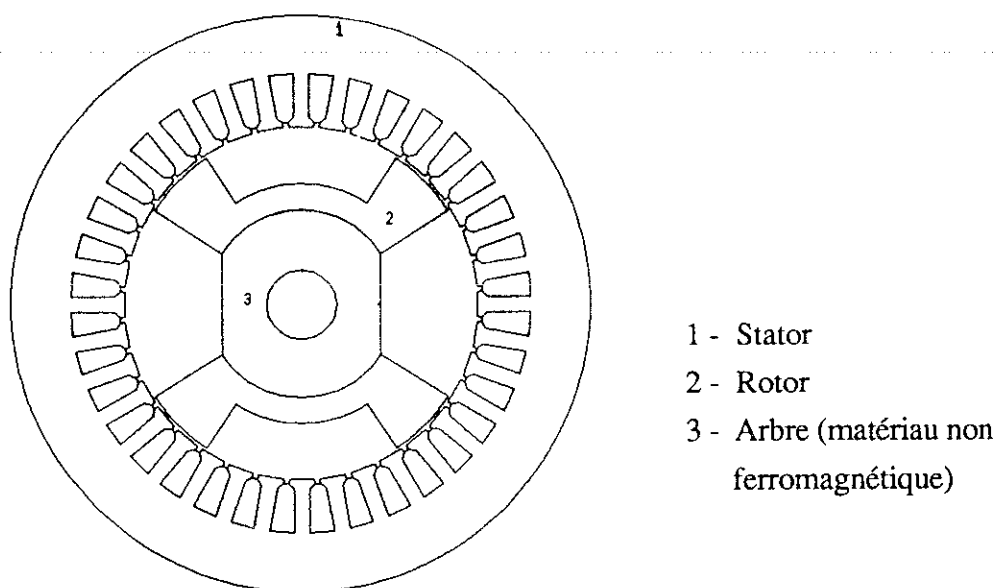


Figure IV.2.4.1 : Structure élémentaire de la machine à réluctance variable étudiée.

Il existe bien entendu, plusieurs possibilités de choix pour les formes des parties constitutives de cette même machine. Au cours de notre étude ces éléments constitutifs ont été choisis en tenant compte des critères de simplicité de la modélisation numérique par la méthode des éléments finis.

Nous avons adopté une machine de conception classique avec le stator à pôles lisses, un enroulement triphasé bipolaire distribué dans 36 encoches et le rotor est formé de 2 pièces polaires ferromagnétiques en forme de U (fig. IV.2.4.1).

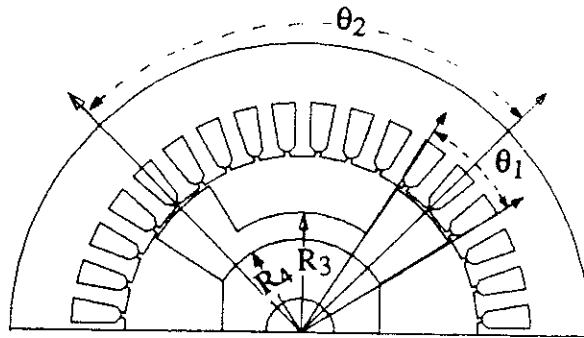
Le moteur est réalisé en matériau ferromagnétique possédant la courbe caractéristique $B(H)$ montrée sur la figure IV.2.2.3.

L'hypothèse simplificatrice suivante a été adoptée:

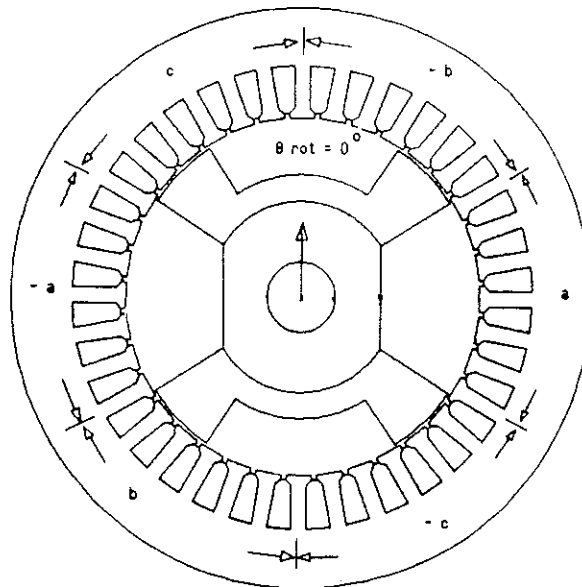
-la machine est considérée suffisamment longue pour que les phénomènes dus aux extrémités soient négligeables.

IV.2.4.2 Position du Problème

Le but de l'étude est d'obtenir un couple statique imposé C_i (Nm/m) en fonction des paramètres qui décrivent les pièces polaires rotoriques (θ_1, θ_2, R_3 et R_4 - fig. IV.2.4.2.a). Nous cherchons une forme des pièces polaires capable de produire un couple spécifié, donc nous sommes confrontés à la résolution d'un problème de synthèse.



a - structure géométrique d'un pôle. Définition des paramètres θ_1, θ_2, R_3 et R_4



b - Détail encoches phase a, b et c. Position angulaire référence $\theta_{rot} = 0^\circ$.

Figure IV.2.4.2 Structure polaire de la machine à réluctance variable étudiée.

Considérant l'expression du couple synchrone dans une machine à reluctance variable comme étant:

$$C_s = 3 \frac{V^2}{2} \frac{P}{\omega} \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right] \sin 2\delta$$

où V est la valeur efficace de la tension, P le nombre de paires de pôles, ω la vitesse angulaire (ω/P étant la vitesse synchrone), X_q la réactance d'axe quadrature, X_d la réactance d'axe direct et δ l'angle de charge de la machine.

L'angle δ correspond au décalage angulaire entre le champ tournant statorique et l'axe de quadrature q.

Le couple statique maximal est atteint pour un angle $\delta=45$ degrés.

La valeur du couple statique pour un $\delta = 45^\circ$ sera déterminé à l'aide de la méthode de travaux virtuels (COULOMB [17,21]), pour une configuration fixée des densités de courants (BENGHEZAL [97]), à savoir:

$$J_a = 3,0 \text{ A/mm}^2$$

$$J_b = -1,5 \text{ A/mm}^2$$

$$J_c = -1,5 \text{ A/mm}^2$$

Autrement dit, nous prenons la phase "a" comme étant la référence.

Ainsi, nous pouvons formuler notre problème d'optimisation comme étant :

$$\text{minimiser } f_0(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{C(x)}{C_i} \right]^2$$

où le vecteur de conception $x = (\theta_1, \theta_2, R_3, R_4)$, C_i est la valeur du couple imposé ($C_i=160\text{Nm/m}$) et $C(x)$ est la valeur du couple calculé à l'aide de la méthode des éléments finis.

Soumis aux contraintes :

$$f_j(\theta_j) = \theta_j^2 - (\theta_j^{\max} + \theta_j^{\min}) \theta_j + \theta_j^{\max} \cdot \theta_j^{\min} \leq 0$$

où θ_j^{\min} et θ_j^{\max} sont les bornes inférieure et supérieure et du paramètre θ_j ($j = 1, 2$) données par:

$$\theta_1^{\max} \leq 0,95\pi - 1,05.\theta_2$$

$$\begin{aligned}\theta_1^{\min} &\geq 0,075\pi \\ \theta_2^{\max} &\leq 0,95\pi - 1,05.\theta_1 \\ \theta_2^{\min} &\geq 0,125\pi + 0,05.\theta_1\end{aligned}$$

Ceci dans le but d'éviter que les pièces rotatives soient trop minces (donc saturées). Et encore

$$f_j(R_j) = R_j^2 - (R_j^{\max} + R_j^{\min})R_j^2 + R_j^{\max} \cdot R_j^{\min} \leq 0$$

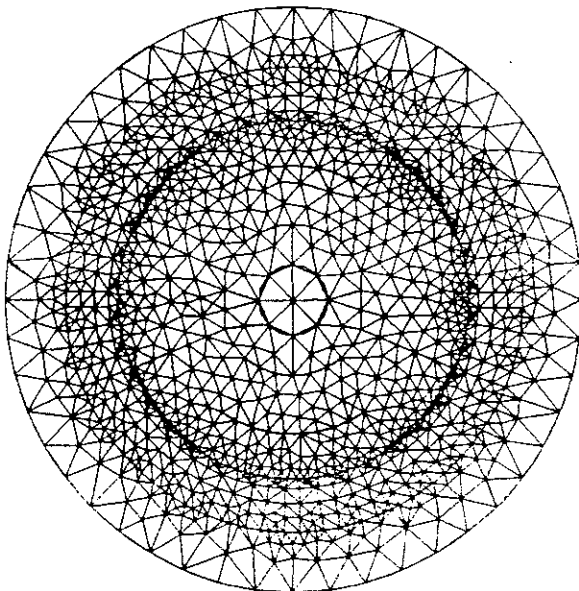
où R_j^{\min} et R_j^{\max} sont les bornes inférieure et supérieure du paramètre R_j ($j=3,4$), pour lesquels nous avons adapté les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}R_3^{\min} &= 50 \text{ mm} & R_3^{\max} &= 70 \text{ mm} \\ R_4^{\min} &= 30 \text{ mm} & R_4^{\max} &= 40 \text{ mm}\end{aligned}$$

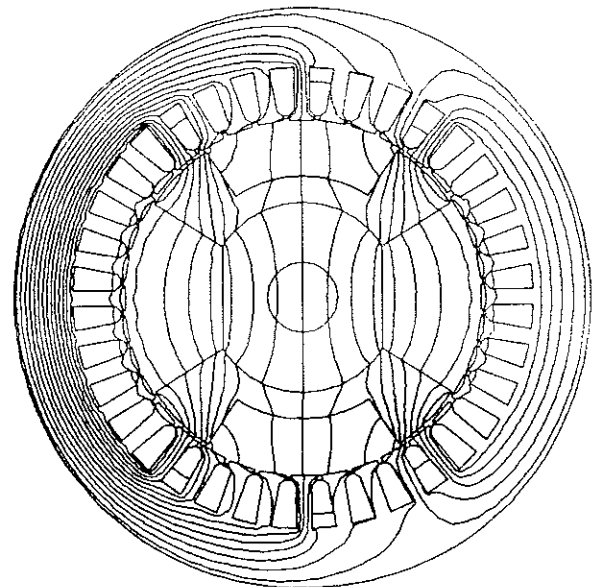
IV.2.4.3 Résultats Obtenus

La figure IV.2.4.4 représente le modèle éléments finis adopté pour l'étude de la machine à réluctance variable. A chaque itération l'évaluation des fonctions et de leurs gradients demande 8 analyses éléments finis. Le temps CPU total d'une itération est de 160 minutes sur une station HP 9000 série 400.

Nous avons fait arrêter le processus d'optimisation lorsque la valeur du couple calculé $C(x)$ s'est révélée suffisamment proche de la valeur imposée C_i de 160Nm/m (écarts inférieures à $\pm 5\%$).



a - Discretisation éléments finis



b - Lignes équipotentielle du potentiel vecteur magnétique A.

Figure IV.2.4.3 Modèle éléments finis

Compte tenu du temps de calcul nécessaire, nous avons adopté un point de départ unique pour les variables de conception (Tableau IV.2.4.1).

Tableau IV.2.4.1 Résultats obtenus en considérant l'erreur relative sur la valeur calculée du couple inférieure à $\pm 5\%$ de la valeur imposée de 160 Nm/m.

Couple imposé Nm/m	Valeurs initiales paramètres		Méthode EM		Méthode MMA		Méthode PM		Méthode RQP	
			Valeurs obtenues	n° itérations	Valeur obtenues	n° itérations	Valeur obtenues	n° itérations	Valeur obtenues	n° itérations
160	θ_1 (rad)	0.425	0.448		0.546		0.425		0.796	
	θ_2 (rad)	1.576	1.445	3	1.196	3	1.576	4	1.267	3
	R ₃ (mm)	50.00	67.38		60.35		68.56		60.38	
	R ₄ (mm)	39.11	33.44		31.22		30.18		31.24	
Couple obtenu	93.36		158.7		159.4		158.4		157.8	

Dans le tableau IV.2.4.1, nous pouvons remarquer que ces méthode présentent un comportement similaire en ce qui concerne le nombre d'itérations.

IV. 2.4.4 Conclusion

Cet exemple est destiné à mettre en évidence la souplesse offerte par la représentation géométrique paramétrée, qui est capable de prendre en compte des grosses modifications des pièces rotatives.

Les résultats obtenus présentent une dispersion significative (tableau IV.2.4.1). Ce phénomène peut être expliqué par les aspects suivants :

- le problème peut présenter plusieurs solutions.

- le problème peut présenter plusieurs solutions.
- la tolérance admise (test d'arrêt à 5 %) est trop élevée, pour atteindre l'optimum global (si il existe).
- les valeurs de couple calculées sont obtenues par un calcul élément finis (système discrétisé) , donc, la discrétisation utilisée influence la précision des résultats.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré au moyen de quelques exemples la démarche que nous proposons pour la résolution des problèmes d'optimisation en électrotechnique. Ces essais montrent que l'approche semble être adéquate, pour former la base d'un outil de calcul efficace et souple pour la conception automatisée de forme en électrotechnique.

Par ailleurs, un des principaux objectif du chapitre a été de mettre en évidence la puissance de l'approche d'un logiciel couplant un algorithme général de programmation non linéaire à un logiciel d'analyse par la méthode des éléments finis.

En pratique, cette approche peut être particulièrement coûteuse. Malgré cela, elle constitue une possibilité fiable pour dimensionner automatiquement des structures assez complexes.

En résumé, au travers des exemples concrets traités dans ce chapitre, il semble que la méthode RQP fournisse la convergence la plus rapide. Remarquons cependant, que les méthodes PM et MMA possèdent des propriétés de convergence assez séduisantes aussi. Pour la méthode EM nous pouvons dire qu'elle constitue une approche plus coûteuse mais extrêmement robuste.

CONCLUSION

Nous avons consacré notre étude à l'utilisation conjointe des méthodes de programmation non linéaire et de la méthode des éléments finis en vue de l'optimisation des dispositifs de l'électrotechnique. qui nous était posé, puis nous avons effectué une étude bibliographique sur les méthodes d'optimisation, enfin, nous avons indiqué l'état de l'art dans le domaine qui est le notre, celui de l'électrotechnique. Nous avons alors décidé de faire porter nos efforts sur la compréhension des méthodes de programmation non linéaire afin d'améliorer notre connaissance de ces outils pour mieux en maîtriser l'emploi.

Dans le deuxième chapitre, consacré entièrement aux méthodes de programmation non linéaire nous avons étudié les méthodes:

- de pénalités intérieures étendues,
- des asymptotes mobiles,
- de programmation quadratique récursive,
- de l'ellipsoïde

que nous avons retenues, à partir d'une étude bibliographique, pour leur efficacité et leur robustesse. Nous avons, à cette occasion, proposé un certain nombre d'idées destinées à améliorer leurs performances.

Pour la méthode de pénalités intérieures étendues, nous avons introduit dans la recherche unidirectionnelle, un développement quadratique de l'approximation de la fonction dans lequel les termes du second ordre (le hessien) sont obtenus à partir d'un processus quasi-newtonien (BFGS).

Pour la méthode des asymptotes mobiles, qui est basée sur une linéarisation asymptotique de l'objectif et des contraintes et sur le principe de dualité, nous avons appliqué le concept de contraintes actives. Ceci a eu pour effet de réduire le volume des calculs et surtout d'améliorer considérablement la robustesse de la méthode dont les limites d'utilisation (en nombre de paramètres) peuvent ainsi être repoussées.

Pour la méthode de programmation récursive quadratique, nous sommes partis de l'idée de linéarisation et de qualification des contraintes initialement proposée par Pshenichny et de l'apport de Powell concernant l'évaluation plus sûre du hessien (du lagragien). Nous avons ainsi mis au point un algorithme qui s'est avéré extrêmement efficace et robuste.

Enfin, pour la méthode de l'ellipsoïde, nous pensons que la maîtrise de de l'évolution de l'opérateur de métrique au cours des itérations peut être un facteur important pour l'efficacité de la méthode. Nous en avons eu une approche empirique qui selon nous mériterait d'être prolongée.

Dans le troisième chapitre, nous avons abordé le problème posé du point de vue des logiciels éléments finis. Nous avons alors pu apprécier la souplesse et la puissance des logiciels disponibles au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble qui disposent de la notion de préprocesseur paramétré. Nous avons pu ainsi mettre facilement en oeuvre les calculs de sensibilité par différences finies, cette approche ayant été choisie dans un soucis de simplicité et de généralité.

Dans le dernier chapitre, nous avons montré un certain nombre d'applications de l'outil d'optimisation que nous avons développé. Ces exemples, parfois simples, parfois plus complexes, correspondent tous à des dispositifs réellement étudiés dans le Laboratoire. Nous avons eus à cette occasion le plaisir de constater l'efficacité de la démarche d'optimisation automatique, notamment lorsque les performances obtenues étaient sensiblement supérieures à celles résultant d'un prédimensionnement manuel.

En conclusion, il apparaît que la modélisation des systèmes et des phénomènes électromagnétiques par l'utilisation conjointe des méthodes de programmation non linéaires et de la méthode des éléments finis, ouvre aujourd'hui un spectre d'activité particulièrement large et pluridisciplinaire, allant de l'identification et de la caractérisation de sources, à la conception des nouveaux dispositifs.

Il ne faut pas cependant oublier que d'un point de vue industriel, les résultats fournis par les techniques d'optimisation numérique doivent demeurer dans le domaine du faisable (technologiquement et ... économiquement). La conception reste de toute façon une tâche très complexe, l'essentiel étant souvent de savoir trouver le meilleur compromis entre diverses caractéristiques contradictoires ...

Pour notre part, nous espérons, au travers de cette étude, avoir contribué à une meilleure compréhension de l'optimisation en électrotechnique. Mais beaucoup reste à faire... Selon nous, dans la continuité de notre travail, les efforts à venir devraient aller dans deux directions:

- vers une amélioration des méthodes d'optimisation, notamment en maîtrisant mieux leur comportement conditionné aujourd'hui par des paramètres parfois empiriques;
- vers une mise en oeuvre d'une analyse de sensibilité plus performante pour obtenir les gradients à moindre coût.

Ce dernier point à lui tout seul devrait permettre de gagner énormément en efficacité, au prix, il est vrai, d'une complexité accrue au niveau de la réalisation d'un logiciel d'application générale. Cependant, avec les progrès des techniques de génie logiciel et/ou de l'intelligence artificielle, cette complexité qui, hier, a rebuté nos prédécesseurs pourrait, demain, être maîtrisée.

Annexe A.I

Méthode Quasi-Newtonienne BFGS

Considérons une fonction f deux fois continûment différentiable, dont nous pouvons calculer les dérivées du second ordre. Donc, au voisinage du point courant x^k , nous pouvons la remplacer par son approximation quadratique \tilde{f} , à savoir :

$$\tilde{f}(x) = f(x^k) + (x - x^k) \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k) H(x^k) (x - x^k) \quad \text{A.I.1}$$

où $H(x^k)$ est son hessien en x^k .

Si la fonction $f(x)$ est convexe (hessien défini positif), le minimum de \tilde{f} est donnée par :

$$\nabla \tilde{f}(x^*) = 0 \quad \text{A.I.2}$$

Ce qui conduit à la formule itérative :

$$x^* = x^k - [H(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad \text{A.I.3}$$

Si la fonction $f(x)$ est quadratique et strictement convexe, x^* peut être obtenu en un seul pas (méthode de Newton). Cependant, lorsque nous voulons l'utiliser sur une fonction quelconque, des difficultés apparaissent. Il faut donc introduire quelques modifications de manière à obtenir rapidement une bonne approximation de l'optimum cherché.

Une limitation très importante pour la méthode de Newton est que le hessien $H(x) = \nabla^2 f(x)$ doit rester défini positif (minimisation de $f(x)$).

Les méthodes quasi-newtoniennes (où méthodes à métrique variable) consistent essentiellement en une généralisation de la formule itérative de la méthode de Newton à des fonctions quelconques. Cela donne la formule itérative suivante :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \widetilde{H}_k^{-1} \nabla f(x^k) \quad \text{A.I.4}$$

où α_k est un réel choisi de façon à minimiser $f(x)$ et \widetilde{H}_k une approximation du hessien. \widetilde{H}_k est modifié à chaque itération de façon à produire une approximation définie positive du hessien de la fonction étudiée.

Nous nous sommes intéressés particulièrement à l'algorithme BFGS développé indépendamment par BROYDEN (1970), FLETCHER (1970), GOLDFARB (1970) et SHANNO (1969) [8-10,38].

Cet algorithme construit directement une approximation du hessien H_k , obtenu par la relation :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\eta_k - \eta_k^T}{\delta_k^T \eta_k} - \frac{H_k \delta_k \delta_k^T H_k}{\delta_k^T H_k \delta_k} \quad \text{A.I.5}$$

où

$$\delta_k = x^{k+1} - x^k \quad \text{A.I.6}$$

$$\eta_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad \text{A.I.7}$$

La matrice H_0 est choisie comme étant une matrice symétrique définie positive quelconque (généralement $H_0 = I$).

Dans l'équation A.I.5 qui permet de construire l'approximation du hessien, il peut arriver que la quantité $\eta_k \delta_k^T$ soit négative pour toute valeur du pas α_k non nulle (A.I.4). Ainsi, la matrice générée n'est pas nécessairement définie positive.

Ceci constitue un inconvénient de la méthode BFGS. Pour cette raison, Powell [48,49] propose de remplacer la définition du vecteur η_k (A.I.7), par une nouvelle expression :

$$\bar{\eta}_k = \theta [\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)] + (1 - \theta) H_k \delta_k \quad \text{A.I.8}$$

avec une valeur de $\bar{\eta}_k$ qui soit le plus proche possible de A.I.7 et qui vérifie $\bar{\eta}_k \delta_k > 0$

θ est déterminé par les conditions supplémentaires :

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{si } \delta_k^T \eta_k \geq 0,2 \delta_k^T H_k \delta_k \\ \frac{0,8 \delta_k^T H_k \delta_k}{\delta_k^T H_k \delta_k - \delta_k^T \eta_k}, & \text{si } \delta_k^T \eta_k < 0,2 \delta_k^T H_k \delta_k \end{cases} \quad \text{A.I.9}$$

Celles-ci aident à garder H_k définie positive et à imposer une stabilité numérique beaucoup moins sensible à tout changement d'échelle des variables.

H_k définie positive est essentiel, car ceci garantit en particulier, que la recherche unidirectionnelle engendrée peut assurer une décroissance de $f(x)$ au voisinage de x^k .

Annexe A.II

Sous-Gradient

Si nous considérons une fonction convexe différentiable $f(x)$ quelconque, le gradient $\nabla f(x^k)$ en tout point x^k doit vérifier l'inégalité fondamentale :

$$f(x) \geq f(x^k) + \nabla f(x^k) (x - x^k) \quad \text{A.II.1}$$

Cependant, si nous considérons une fonction convexe non partout différentiable f , il faut utiliser le concept de sous-gradient pour réécrire l'inégalité, qui devient alors :

$$\bar{f}(x) \geq \bar{f}(x^k) + \partial \bar{f}^T (x - x^k) \quad \text{A.II.2}$$

où $\partial \bar{f}$ est appelé sous-gradient (sous-différentiel) de \bar{f} au point x^k [39 - 41].

En dimension 2 (respectivement n), les sous-gradients correspondent aux pentes des droites (respectivement des hyperplans) :

$$y = \bar{f}(x^k) + \partial \bar{f}^T (x - x^k) \quad \text{A.II.3}$$

qui rencontrent l'épigraphe de la fonction \bar{f} au point $(x^k, \bar{f}(x^k))$ (figure A.II.1) et qui sont toujours situées en dessous de lui.

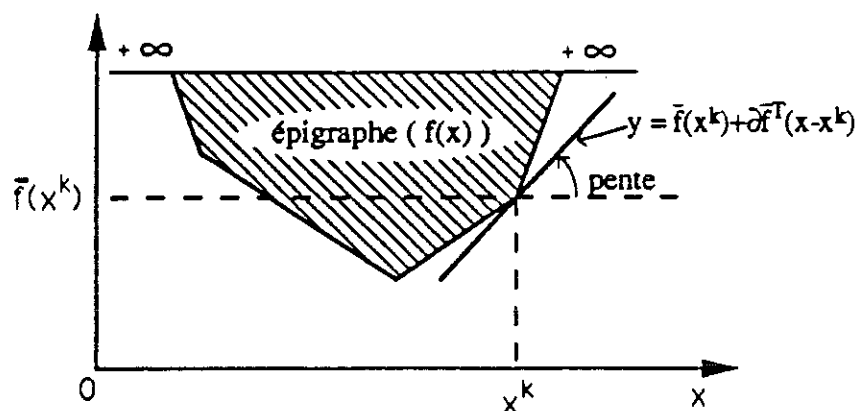


Figure A.II.1 : Détermination d'un sous-gradient $\partial \bar{f}$ d'une fonction convexe $\bar{f}(x)$ (non partout différentiable) en x^k

Annexe A.III

Résultats Comparatifs

Dans cette annexe, nous présentons les résultats comparatifs entre les quatre codes que nous avons réalisé, a savoir:

-Méthode de Programmation Quadratique Réursive	RQP
-Méthode des Asymptotes Mobiles	MMA
-Méthode des Pénalités intérieures Etendue	PM
-Méthode de l'Ellipsoïde	EM

et le code VF02AD; celui-ci basé aussi sur la Méthode de Programmation Quadratique Réursive (Library Harwell)

Pour cette comparaison, nous avons repris le même problème qui a été utilisé au chapitre II, à la fin de la présentation des méthodes à titre d'illustration.

Nous avons adopté dix points de départ différents. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux AIII.1 à AIII.5

Tableau AIII.1 Exemple problème proposé par SVANBERG [12] - Méthode de Programmation Quadratique Réursive - Algorithme PSHENICHNY-TSENG-ARORA.

Point initial		Solution finale		Fonction Objectif f_0	Nombre d'itérations
x_i	y_i	x_s	y_s		
1.2	1.0	1,409	0,376	1,505	7
2.2	0.9	1,406	0,379	1,504	9
1.5	0.5	1,413	0,367	1,506	8
1.5	0.8	1,409	0,376	1,505	7
1.2	0.36	1,397	0,389	1,499	10
1.7	0.9	1,397	0,396	1,503	5
1.9	1.3	1,411	0,365	1,503	7
1.7	0.7	1,428	0,340	1,509	10
1.1	0.61	1,408	0,376	1,505	9
1.2	0.81	1,407	0,383	1,507	9

Tableau AIII.2 Exemple problème proposé par SVANBERG [12] - Méthode des Asymptotes Mobiles.

Point initial		Solution finale		Fonction Objectif f_0	Nombre d'itérations
x_i	y_i	x_s	y_s		
1.2	1.0	1,410	0,365	1,502	7
2.2	0.9	1,400	0,371	1,494	11
1.5	0.5	1,407	0,375	1,503	7
1.5	0.8	1,391	0,413	1,505	8
1.2	0.36	1,403	0,380	1,502	7
1.7	0.9	1,400	0,385	1,500	10
1.9	1.3	1,389	0,433	1,514	10
1.7	0.7	1,404	0,388	1,506	8
1.1	0.61	1,411	0,369	1,504	7
1.2	0.81	1,407	0,383	1,507	9

Tableau AIII.3 Exemple problème proposé par SVANBERG [12] - Méthode de Pénalités Intérieures Etendues.

Point initial		Solution finale		Fonction Objectif f_0	Nombre d'itérations
x_i	y_i	x_s	y_s		
1.2	1.0	1,422	0,350	1,506	9
2.2	0.9	1,398	0,360	1,485	10
1.5	0.5	1,415	0,363	1,506	10
1.5	0.8	1,428	0,367	1,520	11
1.2	0.36	1,406	0,373	1,501	6
1.7	0.9	1,401	0,366	1,492	9
1.9	1.3	1,404	0,375	1,499	7
1.7	0.7	1,398	0,360	1,486	9
1.1	0.61	1,422	0,350	1,506	12
1.2	0.81	1,429	0,342	1,510	12

Tableau AIII.4 Exemple problème proposé par SVANBERG [12] - Méthode de l'Ellipsoïde

Point initial		Solution finale		Fonction Objectif f_0	Nombre d'itérations
x_i	y_i	x_s	y_s		
1.2	1.0	1,424	0,378	1,522	16
2.2	0.9	1,419	0,389	1,523	17
1.5	0.5	1,396	0,592	1,622	8
1.5	0.8	1,416	0,380	1,515	16
1.2	0.36	1,391	0,368	1,482	18
1.7	0.9	1,402	0,403	1,511	14
1.9	1.3	1,409	0,360	1,498	17
1.7	0.7	1,402	0,403	1,512	14
1.1	0.61	1,391	0,398	1,497	15
1.2	0.81	1,419	0,382	1,519	19

Tableau AIII.5 Exemple problème proposé par SVANBERG [12] - Méthode de Programmation Quadratique Réursive - VF02AD (Harwell -POWELL*)

Point initial		Solution finale		Fonction Objectif f_0	Nombre d'itérations
x_i	y_i	x_s	y_s		
1.2	1.0	1,411	0,377	1,508	7
2.2	0.9	1,411	0,377	1,508	8
1.5	0.5	1,412	0,376	1,508	5
1.5	0.8	1,411	0,377	1,508	6
1.2	0.36	1,412	0,376	1,508	5
1.7	0.9	1,411	0,377	1,508	7
1.9	1.3	1,412	0,376	1,508	9
1.7	0.7	1,411	0,377	1,508	7
1.1	0.61	1,412	0,377	1,508	7
1.2	0.81	1,412	0,377	1,508	6

[*] M.J. POWELL, "A Fast Algorithm for Non Linear Constrained Optimization Calculations" Dundee Conference on Numerical Analysis, 1977 (Library Harwell).

Par rapport à ces résultats nous pouvons conclure que:

- le code VF02AD (POWELL) demande un nombre faible d'itérations pour l'obtention de la convergence et qu'il présente une stabilité numérique remarquable au niveau des solutions obtenues.

- les codes RQP, MMA et PM demandent un faible nombre d'itérations pour l'obtention de la solution, avec une stabilité numérique que nous pouvons considérer comme acceptable.

- finalement, le code EM demande un nombre d'itérations un peu plus important que les autres méthodes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **K. ADAMIAK**
"Method of Magnetic Field Synthesis on the Axis of Cylinder Solenoid"
J. Appl. Phys., 16, 417 - 423, 1978
- [2] **R. PALKA et R. SIKORA**
"Reverse Problem of Penetration of Electromagnetic Field Into Conducting Region"
IEEE Trans. on Mag. vol. 14, n° 5, 566 - 568, sept. 1978
- [3] **R. SIKORA et R. PALKA**
"Synthesis of Magnetic Fields"
IEEE Trans. on Mag. vol. 18, n° 2, 385 - 390, march 1982
- [4] **R. PALKA**
"Synthesis of Electrical Fields by Optimisation of the Shape of Region Boundaries"
IEEE Proc. vol. 132, Pt. A, n° 1, 28 - 32, january 1985
- [5] **M. GUARNIERI, A. STELLA et F. TREVISAN**
"A Methodological Analysis of Different Formulations for Solving Inverse Electromagnetic Problems"
IEEE Trans. on Mag. vol. 26, n° 2, 622 - 625, march 1990
- [6] **S.R.H. HOOLE, S. SUBRAMANIAM, R. SALDANHA, J.L. COULOMB et J.C. SABONNADIÈRE**
"Inverse problem Methodology and Finite Elements in the Identification of Cracks, Sources, Materials, and their Geometry in Inaccessible Locations"
IEEE Trans. on Mag. vol. 27, n° 3, 3433 - 3443, may 1991
- [7] **C. FLEURY**
"Relation entre l'Approche par Critères d'Optimalité et la Programmation Mathématique Convexe en Optimisation Structurale"
Coll. pub. Fac. Sc. Appl. Université de Liège, 66, 3 - 64, 1977
- [8] **P.E. GILL, W. MURRAY et M.H. WRIGHT**
"Practical Optimization"
Academic Press, 1981

[9] **M. MINOUX**

"Programmation Mathématique Théorie et Algorithmes, tome 1"
Dunod, Paris, 1983

[10] **G.N. VANDERPLAATS**

"Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Applications"
Mc Graw-Hill, 1984

[11] **C. FLEURY**

"Structural Optimization : A New Dual Method Using Mixed Variables"
Int. J. Num. Meth. Eng, vol. 23, 409 - 428, 1986

[12] **K. SVANBERG**

"The method of Moving Asymptotes. A New Method for Structural Optimization"
Int. J. Num. Meth. Eng, vol. 24, 359 - 373, 1987

[13] **L.A. SCHMIT**

"Structural Design by Systematic Synthesis"
Proc of the Second National Conference on Electronic Computation, Structural
Division, ASCE New York, 105 - 122, 1960

[14] **A. MARROCCO et O. PIRONNEAU**

"Optimum Design of a Magnet with Lagrangian Finite Elements"
Proc. COMPUMAG 78, conference on the computation of Magnetic Field -
Grenoble 4 - 6 sept 1978

[15] **T. NAKATA et N. TAKAHASHI**

"Application of the Finite Element Method to the Design of Permanent Magnets"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 18, n° 6, 1049 - 51, november 1982

[16] **J. M. BIEDINGER et M. KANT**

"On the Optimization of Magnetic Field Sources in Electromechanical Energy
Conversion"
J. Appl. Phys, 53 (10), october 1982.

[17] J.L. COULOMB

"A methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a finite Element Analysis and its Application to the Magnetic Forces, Torques and Stiffness"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 19, n° 6, 2514 - 2519, 1983

[18] J.L. COULOMB et G. MEUNIER

"Finite Elements Implementation of Virtual Work Principe for Magnetic or Electric Force and Torque Calculation"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 20, n° 5, 1894 - 1896, sept.1984

[19] A. KOUYOUMDJIAN

"Sensibilité Paramétrique par la Méthode des Eléments Finis"
Thèse de Doctorat d'Ingénieur, INPG, Grenoble 1985

[20] P. RAFINEJAD et J.C. SABONNADIÈRE

"Finite Elements Computer Programs in the Design of Electromagnetic Devices"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 12, n° 5, 1976

[21] J.L. COULOMB

Analyse Tridimensionnelle des Champs Electriques et Magnétiques par la Méthode des Eléments Finis"
Thèse de doctorat d'état, INPG, 1981

[22] S.J. SALON et B. ISTFAN

"Inverse Non-Linear Finite Element Problems"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 22, n° 5, 817 - 818, sept 1986

[23] M.S. GITOSUSASTRO

"Analyse de Sensibilité et Optimisation par Rapport aux Paramètres de Construction dans les Systèmes Electromagnétiques"
Thèse de Doctorat, INPG Grenoble, 1988

[24] M.S. GITOSUSASTRO, J.L. COULOMB et J.C. SABONNADIÈRE

"Performance Derivative Calculations and Optimization Process"
IEEE Trans. on Mag., Vol. 25, n° 4, july 1989

- [25] **P. DI BARBA, P. NAVARRA, A. SAVINI et R. SIKORA**
"Optimum Design of Iron-Core Electromagnets"
IEEE Trans. on Mag. Vol. 26, n° 2, 646 - 649, march 1990
- [26] **R.R. SALDANHA, J.L. COULOMB, A. FOGGIA et J.C. SABONNADIÈRE**
"A comparison of Some Nonlinear Algorithms for Optimum Design of Magnetostatic Problems"
Proc. IMACS-TCF90, Nancy, 19 - 21 sept 1990, pp. 553 - 558
- [27] **R.R. SALDANHA, J.L. COULOMB, A. FOGGIA et J.C. SABONNADIÈRE**
"A Dual Method for Constrained Optimization Design in Magnetostatic Problems"
IEEE Trans. on Mag. Vol. 27, n° 5, 4136 - 4141, sept 1991
- [28] **S.R.H. HOOLE**
"Inverse Problems : Finite Elements in Hop Stepping to Speed Up"
Int. J. App. Electromag. in Mat. vol. 1, 255 - 261, 1990
- [29] **IL-HAN PARK, BEOM-TAIEK LEE et SONG-YOP HAHN**
" Pole Shape Optimization for Reduction of Gogging Torque by Sensitivity Analysis"
COMPEL supplement A, 9, III, 1990
- [30] **IL-HAN PARK, BEOM-TAIEK LEE et SONG-YOP HAHN**
"Sensitivity Analysis Based on Analytic Approach for Shape Optimization of Electromagnetic Devices : Interface Problem of Iron an Air"
IEEE Trans. on. Mag. Vol. 27, n° 5, 4142 - 4145, sept 1991
- [31] **M.J. BOX**
"A Comparaision of Several Current Optimization Methods, and the Use of Transformations in Constrained Problems"
Computer Journal, vol. 9, 67 - 77, may 66
- [32] **J. ASAADI**
"A computational Comparaision of Some Non-linear Programs"
Math. Prog., n° 4, 144 - 154, 1973

- [33] **E.D. EASON et R.G. FENTON**
"A Comparaison of Numerical Optimization Methods for Engineering Design"
Trans. ASME J. Eng. Ind., 196 - 200, february 1974
- [34] **E. SANDGREN et K.M. RAGSDALL**
"The Utility of Nonlinear Programming Algorithms: a Comparative Study-Part I, II"
Trans. ASME J. of Mech. Des. , vol. 120, 540 - 551, july 1980
- [35] **W. HOCK et K. SCHITTKOWSKI**
"Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Test Examples for Nonlinear Programming Codes"
Vol. 187, Spring Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981
- [36] **D.M. HIMMELBLAU**
"Some Practical Experiences in Applying Nonlinear Programming to CAD"
Computer - Aid. Des., vol. 13, n° 6, 317 - 326, nov. 1981
- [37] **W. HOCK et K. SCHITTKOWSKI**
"A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes"
Computing, 30, 335 - 358, 1983
- [38] **A.D. BELEGUNDU et J.S. ARORA**
"A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. Part I, II"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol 21, 1583 - 1623, 1985
- [39] **J. G. ECKER et M. KUPFERSCHMID**
"A Computational Comparaison of the Ellipsoid Algorithm with Several Nonlinear Programming Algorithms"
SIAM J. Cont. Opt., vol. 23, n° 5, 657 - 674, sept 1985
- [40] **P.E. GILL, W. MURRAY, M.A. SAUNDERS et M.H. WRIGHT**
"Recent Developments in Constrained Optimization"
J. Comp. App. Math., 22, 257 - 270, 1988
- [41] **N.Z. SHOR**
"Generalized Gradient Methods of Non Differentiable Optimization Employing Space Dilatation Operations"
Mathematical Programming State of the art, Spring verlag, 501 - 529, BONN 1982

[42] C. W. CAROLL

"The Created Response Surface Technique for Optimizing Non-linear Restrained Systems"
Op. Res., 9 (2), 1961, p. 169 - 184

[43] A. V. FIACCO et G.L. MC CORMICK

"The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Non linear Programming.
A Primal - Dual Method"
Manag. Sc., 10 (2), 1964, p. 360 - 366

[44] A. V. FIACCO et G.L. MC CORMICK

"Computational Algorithm for the Sequential Unconstrained Minimization Technique for
Non linear Programming"
Manag. Sc., vol. 10, n° 4, 601 - 317, july 1964

[45] D. KAVLIE et J. MOE

"Automated Design of Frame Structures"
ASCE journal of structural Div., vol. STI, Jan, pp 33 - 62, 1971

[46] R.T. RAFTKA et J.H. STARNES Jr

"Applications of a Quadratic Extended Interior Penalty Function for Structural
Optimization"
AIAA Journal, vol. 14, n° 6, 718 - 724, 1976

[47] J.H. CASSIS et L.A. SCHMIT Jr

"On Implementation of the Extended Interior Penalty Function"
Int. J. Nim. Meth Eng. vol. 10, 3 - 23, 1976

[48] M.J.D. POWELL

"A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations"
Presented at the 1977 dundee conference on Numerical Analysis.

[49] M.J.D. POWELL

"The Convergence of Variable Metric Methods for Non-linearly Constrained
Optimization Calculations "
Presented at Nonlinear Programming Symposium 3, Madison, Wisconsin, 1977

- [50] J. H. STARNES et R.T. RAFTKA**
"Preliminary Design of Composite Wings for Buckling Stress and Displacement Constraints"
Journal of Aircraft, vol 16, 564 - 570, 1979
- [51] C. FLEURY**
"Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 14, n° 12, 1761 - 1783, 1979
- [52] B.N. PSHENICHNY**
"Algorithms for General Mathematical Programming Problems"
Kibernetika, n° 5, 1970, pp 120 - 125, Translation in Cybernetics, 677 - 684, may 1973
- [53] C. FLEURY**
"First and Second Order Convex Approximation in Structural Optimization"
Structural Optimization, vol. 1, n° 1, 3 - 10, 1989
- [54] L.A. SCHMIT et C. FLEURY**
"Discrete Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods"
AIAA Journal, vol. 18, n° 12, 1515 - 1524, 1980
- [55] V. BRAIBANT et C. FLEURY**
"Some Applications of Dual Method to Optimal Design of Elastic Structures"
Eng. Struct. , vol. 6, 19 - 25, 1984.
- [56] S.M. ROBINSON**
"A Quadratically Convergent Algorithm for General Nonlinear Programming Problems"
Math. Prog., n° 3, 145 - 156, 1972
- [57] S.P. HAN**
"Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nonlinear Programming Problems"
Math. Prog., n° 11, 263 - 282, 1976

[58] S.P. HAN

"A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming"
JOTA, vol. 22, n° 3, 297 - 309, july, 1977

[59] B.N. PSHENICHNY et M. DANILIN

"Numerical Methods in Extremal Problems"
Mir Publishers, Moscow, 1978

[60] A. D. BELEGUNDU et J.S. ARORA

"A Recursive Quadratic Programming Method with Active Set Strategy for Optimal Design"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 20, 803 - 816, 1984

[61] P.B. THANEDAR, J.S. ARORA, C.H. TSENG, O.K. LIM et G. J. PARK

"Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 23, 2187 - 2203, 1986

[62] C. H. TSENG et J.S. ARORA

"On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 1: Preliminary Investigation"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 26, 1365 - 1382, 1988

[63] C. H. TSENG et J.S. ARORA

"On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 2: Extensive Numerical Investigation"
Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 26, 1383 - 1402, 1988

[64] J.T. BETTS

"A Compact Algorithm for Computing the Stationary Point of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints"
ACM Trans. on Math. Soft. vol. 6, n° 3, 391 - 397, sept. 1980

[65] N.Z. Shor

"Cut-off Method with Space Extension in Convex Programming Problems"
Kibernetika 13, 1, 94 - 95 translated in Cybernetics 13, 1, 94 - 96

- [66] **D. B. JUDIN et A. S. NEMIROVSKII**
"Informational Complexity and Effective Methods for Solving Convex Extremal Problems"
Matekon 13, 25 - 45, 1977
- [67] **L.G. KHACHIAN**
"A Polynomial Algorithm in Linear Programming"
Soviet Mathematics Doklady, 20, 191 - 194, 1979
- [68] **R. G. BLAND, D.GOLDFARB et M.J. TODD**
"The Ellipsoid Method : A Survey"
Oper.Res vol. 29, n° 6, 1039 - 1091, november - december 1981
- [69] **N.Z. SHOR et V. I. GERSHOVICH**
"Family of Algorithms for Solving Convex Programming Problems"
Cybernetics, 15, 502 - 508, 1980
- [70] **S.T. DZIUBAN, J.G. ECKER et M. KUPFERSCHMID**
"Using Deep Cuts in an Ellipsoid Algorithm for Nonlinear Programming"
Math. Prog. Study, 25, 93 - 107, 1985
- [71] **G. TOUZOT, G. DHATT**
"Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis"
Deuxième édition, collection université de compiège 1984
- [72] **J.C. SABONNADIÈRE, J.L. COULOMB**
"Eléments Finis et CAO"
Traité des Nouvelles Technologies, Hermes Ed. 1986
- [73] **O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR**
"The Finite Elements Methods"
Fourth edition, vol. 1 ed. Mac. Graw - Hill, 1989
- [74] **J.L. COULOMB**
"Finite Elements 3D Magnetic Field Computation"
IEEE Trans. on mag. vol 17, 3241 -3246, 1981

- [75] **K. KADDED, R.R. SALDANHA et J.L. COULOMB**
"Mathematical Minimization of the Time Harmonics of the EMF of a DC Permanent Magnet Machine Using a Finite Element Method"
, CEFC' 92 Harvey Mudd College, Claremont California USA.
- [76] **P.P. SILVESTER et R. L. FERRARI**
"Finite Elements for Electrical Engineers"
second edition, Cambridge university press, 1990
- [77] **S.R.H. HOOLE**
"Computer - Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices"
Elsevier, 1989
- [78] **J.S ARORA et E.J. HAUG**
" Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization"
AIAA journal, vol. 17, n° 9, 970 - 974, sept, 1979
- [79] **R.T. HAFTKA et H.M. ADELMAN**
"Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis"
Struct. Optim. vol. 1, 137 - 151, 1989
- [80] **J. DUMONTET et J. VIGNES**
"Détermination du Pas Optimal dans le Calcul des Dérivées sur Ordinateur"
Rairo Analyse numérique, vol. 11, n° 1, 13 - 25, 1977
- [81] **P.E. GILL, W. MURRAY, M.A. SAUNDERS et M. H. WRIGHT**
"Computing Forward-Difference Intervals for Numerical Optimization"
SIAM J. Sci. Stat. Comput. vol. 4, n° 2, 310-321, june 1983
- [82] **E. OLIVIER, P. PARISY et J.P. YONNET**
"Un Actionneur Linéaire pour la Robotique"
Le nouvel automatisme, 58 - 61, mars 1985
- [83] **S. PELISSIER**
"Actionneurs Linéaires Rapides"
Thèse de Doctorat INPG, Grenoble, 1990

- [84] S. PELISSIER, R. SALDANHA, J.P. YONNET et J.L. COULOMB**
"Optimization of a Linear Magnet Actuator"
J. Mag. Mat., 101, 335 - 337, 1991, north Holland
- [85] R. R. SALDANHA, S. PELISSIER, K. KADDEDJ.P. YONNET et J.L. COULOMB**
"Non Linear Optimization Methods Applied to Magnetic Actuators Design"
Trans. On Mag. vol. 28, n° 2, 1581 - 1584, march 1992
- [86] B. P. LEQUESNE**
"Finite Element Analysis of a Constant Force Solenoid for Fluid Flow Control"
IEEE Trans. on IA, vol. 24, n° 4, 574 - 581, july - August 1988
- [87] K. YAMASAWA, S. SUZUKI et P.P. BIRINGER**
"A Proposal for a Finite Element Force Approximation of an Automative Magnetic Actuator"
IEEE Trans. on MAG, vol. 26, n° 4, 1270 - 1273, july 1990
- [88] T. NAKATA et N. TAKAHASHI**
"New Design Method of Permanent Magnet by Using the Finite Element Method"
IEEE Trans. on MAG. , vol. 19, n° 6, 2494 - 2497, november 1983
- [89] N. BOULES**
"Design Magnet DC Motors"
IEEE Trans. on Ind. Appl, vol. 26, n° 4, 786 - 792, july August 1990
- [90] S. RUSSENSCHUCK**
"Mathematical Optimization for the Design of Permanent Magnet Synchronous Machines Based on Numerical Field Calculation"
Trans. on Mag. vol 26, n° 2, 638 - 641, march 1990
- [91] S. RUSSENSCHUCK et E. CH. ANDRESEN**
"Comparison of Different Magnet Configurations in the Rotor of Synchronous Machines Using Numerical Field Calculation and Vector-Optimization Methods"
ICEM SO, 13 - 15 august, Cambridge, Massachussetts USA, 1990

- [92] S. DEROU, R.R. SALDANHA, A. FOGGIA et J.L. COULOMB**
"Airgap Induction Optimization in Permanent Magnet Synchronous Machine"
International Conference on Computation in Electromagnetics, 25 - 27 nov. , London
UK 1991
- [93] R.R. SALDANHA, J.L. COULOMB et J.C SABONNADIÈRE**
"An Ellipsoid Algorithm for the Optimum Design of Magnetostatic Problems"
IEEE Trans. on Mag, vol. 28, n° 2, 1573 - 1581, march 1992
- [94] K.KADDED, J.C. TEXEIRA, R.R. SALDANHA et J.L. COULOMB**
"Mathematical Optimization of the Cogging Torque of a DC Permanent Magnet
Machine Using a Finite Element Method"
International Workshop on Electric and Magnet Fields, 28 - 30 sept., Liège,
Belgique, 1992
- [95] M. RAMAMOORTY et P.J. RAO**
"Comparative Study of Optimization Methods for the Design of Polyphase Reluctance
Motors"
Engineering Optimization, vol. 3, 51 - 60, 1977
- [96] M. RAMAMOORTY et P.J. RAO**
"Optimization of Polyphase Segmented - Rotor Reluctance Motor Design"
IEEE Trans. PAS. 98, n° 2, 527 - 535, 1979
- [97] K. BENGHEZAL**
"Contribution à l'Etude d'Actionneurs Synchrones à Aimants Permanents"
Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble, 1991

MOTS CLES

Otimisation de forme

Programmation Non Linéaire

Méthode des Eléments Finis

Electrotechnique Optimisation de Forme

RESUME DE LA THESE EN ANGLAIS

The aim of this study is to investigate problems of shape optimization in power engineering, when the equations describing the problem are solved using the finite element method.

In order to solve the problem of optimization we chose to use methods of non-linear programming methods, which from an algorithmic point of view are already widely tested. We studied the extended interior penalty method, the moving asymptotes method, the recursive quadratic programming method and the ellipsoid method. During this study we were particularly interested in finding ways of insertion of optimization techniques in a CAD software. The principals of a procedure of automatic shape design are presented. Thus we arrived to estimate the flexibility and the efficiency of finite element software whose pre-processor is a parametered one. Finally different problems of shape optimization are presented : shape optimization of a coreless actuator, shape optimization of a magnetic actuator, optimization of radial induction in a synchronous machine, shape optimization of polar pieces in the rotor of a reluctance machine.

RESUME DE LA THESE EN FRANCAIS

Dans le cadre de cette étude nous nous sommes intéressés aux problèmes continus d'optimisation de forme en électrotechnique, où les équations qui décrivent la physique du problème sont résolues par la méthode des éléments finis.

Pour la résolution du problème d'optimisation proprement dit, nous avons choisi d'étudier des méthodes de programmation non linéaire, qui d'un point de vue algorithmique sont arrivées à une certaine maturité.

Nous avons étudié la méthode des pénalités intérieures étendues, la méthode des asymptotes mobiles, la méthode de programmation quadratique récursive et la méthode de l'ellipsoïde.

Nous nous sommes intéressés surtout aux moyens à mettre en oeuvre pour une insertion des techniques d'optimisation dans un logiciel de CAO. Les bases d'une procédure de dimensionnement automatique de forme sont ainsi présentées. Nous avons pu apprécier la souplesse et la puissance des logiciels éléments finis qui disposent de la notion de préprocesseur paramétré.

Finalement, nous avons traité les problèmes suivants : optimisation de la forme d'un actionneur à gradient de champ, optimisation de la forme d'un électroaimant, optimisation de l'induction radial dans une machine synchrone, optimisation de la forme des pièces polaires rotoriques dans une machine à reluctance variable.



Grenoble, le 14 Mai 1992

ECOLE DOCTORALE

Affaire suivie par Michèle SIMEON
Tel. 78 57 4525

N° Réf.:

Objet:

AUTORISATION de SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 23 Novembre 1988 relatif aux Etudes Doctorales
Vu les rapports de présentation de :

- Mr JM BIEDINGER Professeur UTC COMPIEGNE
- Mr Philippe MAHEY Maître de conférence lab ARTEMIS

Mr REZENDE SALDANHA Rodney

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme
de DOCTEUR de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE de GRENOBLE, spécialité :
"Génie électrique"

le Directeur de l'Ecole Doctorale
JL BACCUME

