HAL
open science

Contributions à l'étude des singularités : a)du point de vue du polygone de Newton et b) du point de vue des déformations

Bernard H Teissier

To cite this version:

Bernard H Teissier. Contributions à l'étude des singularités : a)du point de vue du polygone de Newton et b) du point de vue des déformations. Géométrie algébrique [math.AG]. Unversité Paris VII (Denis Diderot), 1973. Français. NNT : . tel-02532495

HAL Id: tel-02532495

https://hal.science/tel-02532495

Submitted on 5 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FFN 79039866 Hz

TR

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 7844

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ PARIS VII

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Bernard TEISSIER

1re THÈSE : CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS :

a) DU POINT DE VUE DU POLYGONE DE NEWTON

b) DU POINT DE VUE DES DÉFORMATIONS.

2ème THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR L'UNIVERSITÉ

Soutenues le 27 Janvier 1973 devant la commission d'examen

MM. F. NORGUET Président

H. HIRONAKA
R. THOM
J. L. VERDIER
Examinateurs

BIBLIOTHÈQUE
Mathématiques
Recherche
FACULTÉ des SCIENCES PARIS

A mes parents.

09341

14 NOV. 1973

Le lecteur trouvera partout dans ce travail l'influence des idées de Heisuke Hironaka, mais il ne trouvera qu'ici des indications sur la façon dont cette influence s'est exercée, c'est-à-dire l'enthousiasme, la clarté, et aussi l'inépuisable patience pour lesquels je lui exprime toute ma gratitude.

La première partie de ce mémoire est le fruit d'un travail commun avec Monique Lejeune. Je la remercie pour cette agréable et fructueuse collaboration qui a pris place à Harvard University et au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, dans des conditions de travail exceptionnellement bonnes. Je veux remercier aussi le professeur O. Zariski pour des discussions sur les problèmes d'équisingularité, et Frédéric Pham qui m'a, par de nombreuses discussions, exemples et contre-exemples, enseigné de la GEOMETRIE Algébrique♦.

Je remercie tous les membres du Centre de Mathématiques qui en ont fait un lieu de travail privilégié : Dimitri Fotiadi m'a prodigué encouragements et conseils depuis l'époque où j'étais élève. Je l'en remercie bien vivement. J. Lascoux, connu pour être Bibliographie Universelle m'a non seulement signalé des articles, mais aussi les idées qu'ils contenaient. La présence d'Alain Chenciner, Cevdet Haş Bey, François Laudenbach, Monique Lejeune, Lê Dũng Tráng, Jean-Jacques Risler m'a permis de travailler dans un environnement amical et compétent. Je les en remercie bien vivement. Il en est de même pour le C. H. B. éternellement présent.

Je remercie aussi beaucoup J. Giraud et les autres auditeurs du Séminaire donné par Monique Lejeune et moi en 1971-72 pour leurs suggestions et critiques. Je remercie spécialement Lê et Risler qui en ont

---

♦ Cf. S. Lefschetz : "A Mathematical Autibiography, in Collected works".

assuré la rédaction. Je remercie également le Secrétariat du Centre de Mathématiques qui a assuré la frappe et le tirage du Séminaire, ainsi que de ce mémoire, et tout particulièrement Marie-Jo Lécuyer, qui a élevé la frappe au rang d'un art, et Monsieur Cornet, qui a assuré le tirage.

Je remercie les professeurs Douady et Verdier qui m'ont permis de reproduire le texte d'exposés que j'avais faits à leur Séminaire, et le Secrétariat de l'E. N. S. de la rue d'Ulm auquel nous devons leur parution.

En plus du C. N. R. S., la N. S. F. et l'Université de Warwick m'ont apporté une aide financière au cours de la préparation de ce travail.

Je remercie F. Norguet, qui a accepté de présider le Jury; J. L. Verdier, qui a dû lire en détail tout ce mémoire; H. Hironaka, qui a bien voulu faire partie du Jury, et R. Thom qui m'a proposé un sujet de seconde thèse fascinant.

PREAMBULE

Les deux parties de ce mémoire peuvent être lues indépendamment, bien que la seconde partie utilise certains résultats contenus dans la première.

BIBLIOTHEQUE
Mathématiques
Recherche
FACULTE des SCIENCES PARIS

TABLE DES MATIERES

PREAMBULE

PREMIERE PARTIE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SINGULARITES
DU POINT DE VUE DU POLYGONE DE NEWTON

INTRODUCTION - INDEX DES NOTATIONS

CHAPITRE 0 - RAPPELS ET CONVENTIONS

CHAPITRE I - THEORIE DES INSTALLATIONS ET CONES NORMAUX ANISOTROPES

§ 1. Faisceaux de jets et cônes normaux anisotropes 1
§ 2. Installations ambiantes 14
§ 3. Tropismes critiques 27
§ 4. La d-fonction de Samuel d'une installation 50
§ 5. d-transversalité 62
§ 6. Propriétés fonctorielles de la d-transversalité 93
§ 7. d-base standard et d-base standard normalisée 103
§ 8. Stratifications de Samuel 128
§ 9. La suite exacte de cônes 145
§ 10. d-patitude normale 161
§ 11. La semi-continuité du premier tropisme critique 173

CHAPITRE II - MODIFICATIONS D'INSTALLATIONS 204

§ 1. Modifications et fonctions de Samuel 205

§ 2. Installations et modifications 224

CHAPITRE III - CONTACT MAXIMAL 245

§ 1. Contact maximal : définition, existence 246

§ 2. Propriétés du contact maximal 262

CHAPITRE IV - APPLICATIONS DE LA THEORIE DES INSTALLATIONS 282

BIBLIOGRAPHIE 287

APPENDICE - NORMAL CONES AND SHEAVES OF RELATIVE JETS

DEUXIEME PARTIE

CYCLES EVANOUISSANTS, PLIS EVANOUISSANTS
ET CONDITIONS DE WHITNEY

CHAPITRE I - DEFORMATIONS A TYPE TOPOLOGIQUE CONSTANT 1

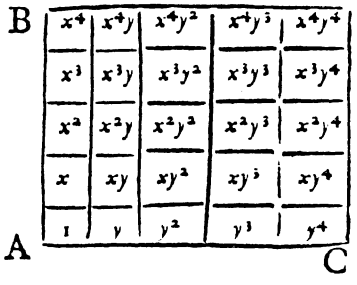
CHAPITRE II - CYCLES EVANOUISSANTS, PLIS EVANOUISSANTS ET CONDITIONS DE WHITNEY 37

***

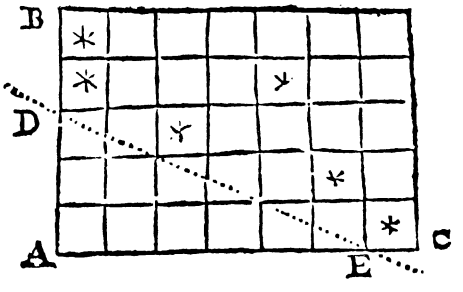
PREMIERE PARTIE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SINGULARITES DU POINT DE VUE DU POLYGONE DE NEWTON

XXIX. La Figure suivante facilitera l'usage, & donnera une idée plus claire de cette regle. Divisez l'Espace Angulaire ABC en petits Quarrés ou Paralellogrammes égaux, dans lesquels vous inscrirez x & y selon leurs Dimensions, comme vous le voyez. Quand on vous proposera une Equation, marquez tous les Paralellogrammes qui correspondent par leurs Dimensions à tous les Termes de l'Equation; puis appliquez une Regle à l'Angle du Paralellogramme le plus bas à main gauche de tous les Paralellogrammes marqués, faites tourner cette Regle jusqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un Paralellogramme marqué à main droite, sans qu'elle quitte celui qui est à main gauche; prenez ces termes que la Regle touche, & en les égalant à zero, tirez-en la quantité qu'il faut écrire au Quotient.



XXX. Par exemple pour tirer la Racine y de l'Equation $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, je marque les Paralellogrammes ausquels les termes de cette Equation appartiennent de la Note $*$, puis j'applique la Regle DE au plus bas Paralellogramme marqué à main gauche, & je la fais tourner à main droite, jusqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un autre Paralellogramme marqué; je vois que ceux qu'elle touche appartiennent à x^3, x^2y^2 & y^6 je prens donc dans l'Equation les Termes de ces Dimensions, sçavoir $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$, & je les égale à zero; & pour avoir une Equation plus simple, je fais $y = v\sqrt{ax}$ ce qui en substituant me donne $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, dont les Racines $\pm\sqrt{ax}$ & $\pm\sqrt{2ax}$ me donnent chacune à mon choix le premier Terme du Quotient, & cela selon la Racine de cette Equation que j'ai dessein de tirer.



XXXI. Si l'Equation proposée étoit $y^5 - by^2 + 9bx^2 - x^3 = 0$, je choisirois $-by^2 + 9bx^2$, dont je tirerai $+3x$ pour le premier Terme du Quotient.

(Extrait de "La Méthode des fluxions ...", par Isaac NEWTON; traduit par M. de BUFFON; chez DEBURE l'Aîné, M DCC XL).

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons et étudions un ensemble de notions qui constitue une généralisation, au cas d'un germe d'espace analytique complexe quelconque, de la construction du polygone de Newton d'un germe de courbe plane.

Rappelons brièvement quelques points importants de cette construction : soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe de courbe plane. Si l'on choisit des coordonnées (w,z) sur $\mathbb{C}^2$, et une équation $f=0$ pour X, on peut dans le développement

$$f = \sum C_{a,b}\, z^a w^b \qquad (C_{a,b} \in \mathbb{C})$$

considérer l'ensemble des couples $(b,a) \in \mathbb{N}^2 \subset \mathbb{R}^2_+$ tels que $C_{a,b} \neq 0$. On obtient ainsi un essaim $\Delta(f)_{(z,w)}$ de points de $\mathbb{R}^2_+$. L'ensemble $\bigcup_{p \in \Delta(f)_{(z,w)}} (p + \mathbb{R}^2_+)$ a une enveloppe convexe, ligne brisée le séparant de l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. C'est le polygone de Newton de f dans les coordonnées (z,w). On vérifie facilement qu'il ne dépend pas du choix du générateur f de l'idéal définissant X dans $\mathbb{C}^2$ en 0, et qu'il ne dépend en fait que du choix d'un germe de courbe lisse $(W,0)$ comme axe des w. et du choix d'une rétraction $r : (\mathbb{C}^2,0) \to (W,0)$. Classiquement, le polygone de Newton décrit une méthode par approximations successives pour le calcul des racines de l'équation $f(z,w) = 0$ comme fonctions multiformes de w. (Nous renvoyons le lecteur au limpide exposé de Newton partiellement reproduit en frontispice).

Si nous supposons X analytiquement irréductible à l'origine, un certain nombre de faits importants se manifeste : tout d'abord, dans ce cas, le polygone de Newton n'a qu'un seul côté, quel que soit le choix de coordonnées. (Traditionnellement, on exclut les côtés qui coïncident avec l'un des axes de $\mathbb{N}^2$). La pente du côté du polygone de Newton peut s'écrire $-\frac{1}{d}$ où d est un nombre rationnel, dont un peu

d'expérimentation montre qu'il peut servir à mesurer le contact de X avec l'axe W choisi (relativement à la rétraction choisie). En fait, dès que l'on a trouvé (W,r) tels que d soit >1, d ne dépend plus de la rétraction choisie. De plus, si l'on choisit (W,r) tels que d soit le plus grand possible, on trouve que $d=\frac{m_1}{n_1}$ où (m_1,n_1) est le premier exposant caractéristique de Puiseux de X, qui est connu pour être un invariant du type topologique du plongement $(X,0)\subset(\mathbb{C}^2,0)$. Enfin, si $r=\left[\frac{m_1}{n_1}\right]$ est la partie entière de $\frac{m_1}{n_1}$, r est exactement le nombre de modifications (ou éclatements) de centres ponctuels qu'il faut faire avant de parvenir à un germe de courbe ayant une multiplicité strictement inférieure à celle de X en 0.

Ainsi, le polygone de Newton décrit non seulement un processus d'approximation, mais contient déjà, dans des coordonnées bien choisies, des invariants de la singularité de courbe plane $(X,0)\subset(\mathbb{C}^2,0)$ qui sont d'une importance fondamentale non seulement du point de vue de la résolution des singularités mais aussi du point de vue de l'étude topologique. Le fait que le polygone de Newton doive jouer un rôle dans la résolution des singularités tient à ce que trouver des solutions de $f(z,w)=0)$ de la forme $z=\varphi(w^{1/n})$ revient à construire une uniformisante locale t de X en posant $w=t^n$. Le fait qu'il donne un invariant du type topologique de la singularité est un phénomène profond, maintenant bien compris dans notre cas particulier grâce aux travaux de Zariski sur l'équisingularité des courbes planes, mais qui demeure mystérieux en dimension supérieure à 1. (Et l'on ne peut même pas formuler de question, faute de vocabulaire. Notre travail apporte, nous l'espérons du moins, quelques notions qui seront utiles de ce point de vue).

Enfin, le fait que le polygone de Newton mesure le contact entre W et X est une découverte de Hironaka. La motivation initiale du travail présenté ici a été la démonstration de théorèmes sur la "continuité du contact" dans la théorie du contact de Hironaka (cf. [5], [6]),

théorie qui est une des clefs de sa méthode de résolution des singularités.

Avant de décrire la construction générale, faisons quelques remarques de nature technique sur le polygone de Newton d'une courbe plane :

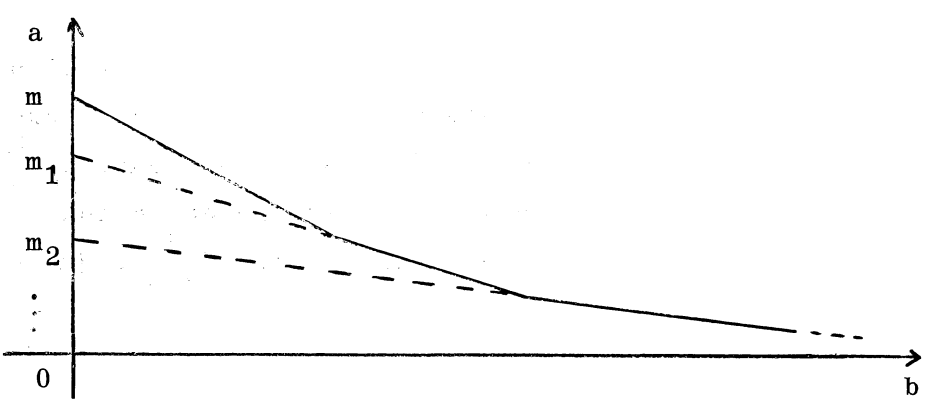
Tout d'abord, le point singulier étant fixé, nous associons un polygone de Newton à la situation décrite par le diagramme

$$\Delta = \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, shift left, "r"] \\ & W \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

(le choix de W (axe des w) et de r revient au choix d'un tel diagramme).
Si nous supposons que $r^{-1}(0)$ n'est pas une composante de X, le théorème de préparation de Weierstrass nous dit que nous pouvons choisir pour l'équation de X (après choix d'une coordonnée locale z sur $r^{-1}(0)$)

$$f(z,w) = z^m + a_{m-1}(w)\, z^{m-1} + \dots + a_o(w) = 0$$

ou m est le nombre d'intersection de X avec $r^{-1}(0)$, ou encore la multiplicité de $X \cap r^{-1}(0)$.
Si nous supposons que l'espace tangent $T_{r^{-1}(0),0}$ n'est pas contenu dans le cône tangent à X en 0, $C_{X,0}$, c'est-à-dire que $r^{-1}(0)$ est transverse à X, ou comme nous dirons plus rapidement, que r est transverse (ou que Δ est transverse), m est la multiplicité de X en 0.
On constate alors que le polygone de Newton a la forme suivante :



Il est clair que la donnée du polygone de Newton est équivalente à la donnée des pentes de ses différents côtés, et des points d'intersection des supports de ces côtés avec l'axe des a. $(m,m_1,\ldots)$ m correspondant à la multiplicité de $X \cap r^{-1}(0)$ en 0. C'est sous cette forme que nous allons généraliser le polygone de Newton. Les pentes des côtés seront les "tropismes critiques" du § 3, et la généralisation des points $(m,m_1,\ldots)$ sera la collection des "fonctions de Samuel anisotropes" du § 4.

Notre méthode dans le cas général va être l'analogue de la construction suivante dans le cas des courbes planes : W et r étant fixés, on regarde pour chaque $d \in [0,+\infty]$ la plus petite valeur de $a+\frac{b}{d}$ donnée par un couple (a,b) tel que $C_{a,b} \neq 0$. Géométriquement ceci revient à pousser dans $\mathbb{R}^2$ les droites de pente $-\frac{1}{d}$, en partant de celle passant par l'origine, jusqu'à ce que l'on soit arrêté par un point de $\Delta(f)_{(z,w)}$. On note $\nu_d(f)$ (d ordre de f) la valeur de $a+\frac{b}{d}$ ainsi obtenue.
On considère l'équation quasi-homogène :

$$(*) \qquad in_o(f,\underline{\Delta},d) = in_o(f,d)_{(z,w)} = \sum_{a+\frac{b}{d}=\nu_d(f)} C_{a,b}\, z^a w^b = 0$$

comme définissant un cône quasi homogène $C_{\Delta,x}$ (qui en réalité habite dans un "espace tangent anisotrope"). On étudie la variation de l'équation (*) avec d, et l'on s'aperçoit qu'elle est localement constante son $\mathbb{R}^+ - \{d_1,\ldots\ldots,d_s\}$ où les $d_i \in \mathbb{Q}$ correspondent aux côtés du polygone de Newton ($-\frac{1}{d_i}$ est pente du i-ème côté).
D'autre part, les $\nu_{d_i}(f)$ correspondent aux points d'intersection du support du i-ème côté du polygone de Newton avec l'axe des a. Ce sont aussi des multiplicités attachées aux quasi-cônes $C_{\Delta,x}^{d_i}$. Aussi nous allons considérer, à la place du polygone de Newton, des objets géométriques, les cônes tangents anisotropes $C_{\Delta,x}^{d}$, qui nous permettent,

en étudiant leur variation en fonction de d, et leur multiplicité (qui sera en réalité remplacée par la fonction de Samuel anisotrope) d'obtenir toute l'information que contient un polygone de Newton.

Ce point de vue présente différents avantages : dans le cas général, on se heurte en effet à deux difficultés principales, qu'il permet de surmonter simultanément.
D'une part l'espace analytique X singulier en x n'est plus défini par une seule équation, d'autre part, son lieu singulier n'est plus réduit au point x. Une fois introduite la notion de polygone de Newton en un point $x \in X$, il faudra donc étudier sa variation lorsque x se déplace dans le lieu singulier de X. Pour ce faire, nous pouvons utiliser les propriétés de cohérence du faisceau structural d'un espace complexe, et les théorèmes de Cartan. De notre point de vue, on s'aperçoit que l'on peut attacher un polygone de Newton à tout diagramme d'espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & Z \arrow[d, shift left, "r"] \\ & W \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

où X et W sont des sous-espaces de Z et r est une rétraction de l'immersion de W dans Z, en tout point x de $X \cap W$, sous la seule hypothèse que r soit lisse en x (et non plus W et Z lisses). C'est une telle situation géométrique que nous appelons une <u>bonne installation</u> (cf. ch. I, § 1, 2) et notons Δ .

Dans le chapitre I, nous définissons et étudions les propriétés des objets géométriques <u>cônes normaux anisotropes et faisceaux de jets anisotropes</u> que nous associons à une installation Δ. Au § 1, on trouvera leur définition. On remarquera qu'elle est indépendante de tout choix de coordonnées et de tout choix d'un système de générateurs

de X sur Z en x. Au § 2, nous construisons des isomorphismes canoniques qui vont nous permettre de comparer entre eux les cônes normaux anisotropes pour les différentes valeurs de $d \in [0,\infty]$. Ceci nous permet au § 3 de définir les tropismes critiques de l'installation Δ le long d'un sous-espace Y de $W \cap X$ au point x. Lorsque $Y = \{x\}$ ces tropismes critiques nous donnent, comme il l'a été expliqué plus haut les pentes des côtés de notre polygone. Le fait qu'on puisse également définir des tropismes critiques de Δ le long de Y en x s'avère essentiel pour l'étude de la variation des tropismes critiques de Δ en y quand y varie sur Y dans un voisinage de x. Au § 4, nous introduisons les fonctions de Samuel anisotropes, qui sont les analogues des points d'intersection des supports des cotés du polygone de Newton avec l'axe des a. Ce sont les $H_{\Delta,x}(d_i)$ où $(d_1,\ldots,d_s)$ est l'ensemble des tropismes critiques de Δ en x.
A ce point, nous avons défini notre polygone de Newton généralisé, associé à l'intallation Δ en $x \in X \cap W$.

$$\mathcal{N}_{\Delta,x} = \{(d_1,\ldots,d_s) ; H_{X\cap r^{-1}(x),x} ; H_{W,x} ; H_{\Delta,x}(d_i)_{1\leq i\leq s}\}$$

(W n'étant plus lisse en x, il est naturel de faire figurer sa fonction de Samuel en x dans le polygone de Newton). Il est déjà remarquable qu'ici les résultats sur toutes les fonctions de Samuel anisotropes, nous permettent de démontrer un résultat sur les fonctions de Samuel ordinaire (cf. cor. 4.2.5. C'est un critère numérique de platitude du morphisme $C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ (où $C_{X,x}$ (resp. $C_{W,x}$) est le cône tangent à X (resp. W) en x.
Au § 5, nous introduisons une notion de transversalité anisotrope. De notre point de vue, la notion de transversalité de la fibre $r^{-1}(x)$ à X en x dans Z (espaces tous 3 singuliers) s'exprime le plus simplement en disant que le morphisme des cônes tangents $d(r|X) : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ est plat. Nous généralisons cette notion aux cônes normaux anisotropes le long d'un sous-espace Y de $W \cap X$ en un point x. (Nous avons ici toujours en vue l'étude de la variation du polygone le long de Y). De plus nous obtenons toute une série de conditions équivalentes (théorème 5.1) de nature technique très variée. Au § 6, nous montrons que la transversalité est stable par changement de base.

A partir du § 7, nous entrons dans le vif des difficultés signalées plus haut. Le § 7 montre comment l'on peut déterminer des systèmes de générateurs pour l'idéal définissant X dans Z en x (les bases standard normalisées de [5]) et nous trouvons un procédé permettant de calculer le 1er tropisme critique $d_{\Delta,x}$ à partir des développements de Taylor des générateurs. On pourrait sans doute aussi montrer que les fonctions de Samuel sont aussi calculables, mais nous ne l'avons pas fait ici. Aux § 8, 9 et 10, on introduit un ensemble de résultats de finitude qui permet de résoudre la deuxième des difficultés qui se présentent dans le cas général. Il s'agit de construire de belles stratifications d'une installation, et de montrer qu'elles nous permettent de décrire le comportement des $C^{d}_{\Delta,x}$ lorsque x varie dans un sous-espace Y contenu dans une strate. On trouve ici en particulier notre "suite exacte de cônes" qui exprime comment, dans des hypothèses de platitude et de lissité assez faibles, les cônes tangents à X (où les $C^{d}_{\Delta,x}$) pour $x \in Y$ se recollent en une famille plate sur Y, qui est agréablement reliée au cône normale de X le long de Y. Cette suite exacte de cônes a, même dans le cas des cônes ordinaires, de nombreuses applications qui forment le sujet de l'Appendice. On recommande d'ailleurs vivement au lecteur de commencer la lecture de ce travail par l'Appendice, ou certaines des idées concernant les stratifications apparaissent plus clairement, puisqu'il est rédigé entièrement dans le cas isotrope (ou ordinaire). On y trouvera d'autre part des résultats en caractéristique $p<\infty$. Les résultats du § 11 sont l'aboutissement de tous les résultats des paragraphes précédents. Le résultat principal est le théorème 11.6.1, qui relie le comportement du plus petit tropisme critique $d_{\Delta,x}$ aux stratifications déjà construites.

Au chapitre II, on étudie le comportement d'une installation par modification, surtout en ce qui concerne la fonction de Samuel ordinaire. On y démontre en particulier d'une manière simple, dans le § 1, le fait que la fonction de Samuel diminue au sens large dans une modification permise, (théorème de Bennett en géométrie algébrique), et des

résultats précis sur ce qui se passe quand cette fonction de Samuel ne diminue pas strictement.

Dans le chapitre III, on introduit une généralisation de la notion de contact maximal de Hironaka (cf. [6]), qui est une des notions les plus importantes de la théorie du contact. Le résultat principal est le fait que si une installation Δ a le contact maximal, la strate de Samuel de X est localement contenue dans celle de W. Ceci généralise un résultat montré par Hironaka dans le cas où W est lisse.

Au chapitre IV, nous utilisons le fait que notre définition suffisamment générale des installations nous permet l'étude locale, du point de vue des installations, de n'imprte quel morphisme d'espaces analytiques. Nous en tirons en particulier un critère numérique de platitude d'un morphisme $f : X \to W$ en un point $x \in X$, et un résultat analogue pour la platitude tangentielle (i.e. celle de $df : C_{X,x} \longrightarrow C_{X,f(x)}$) en x. Nous y montrons aussi que la platitude tangentielle entraîne la platitude.

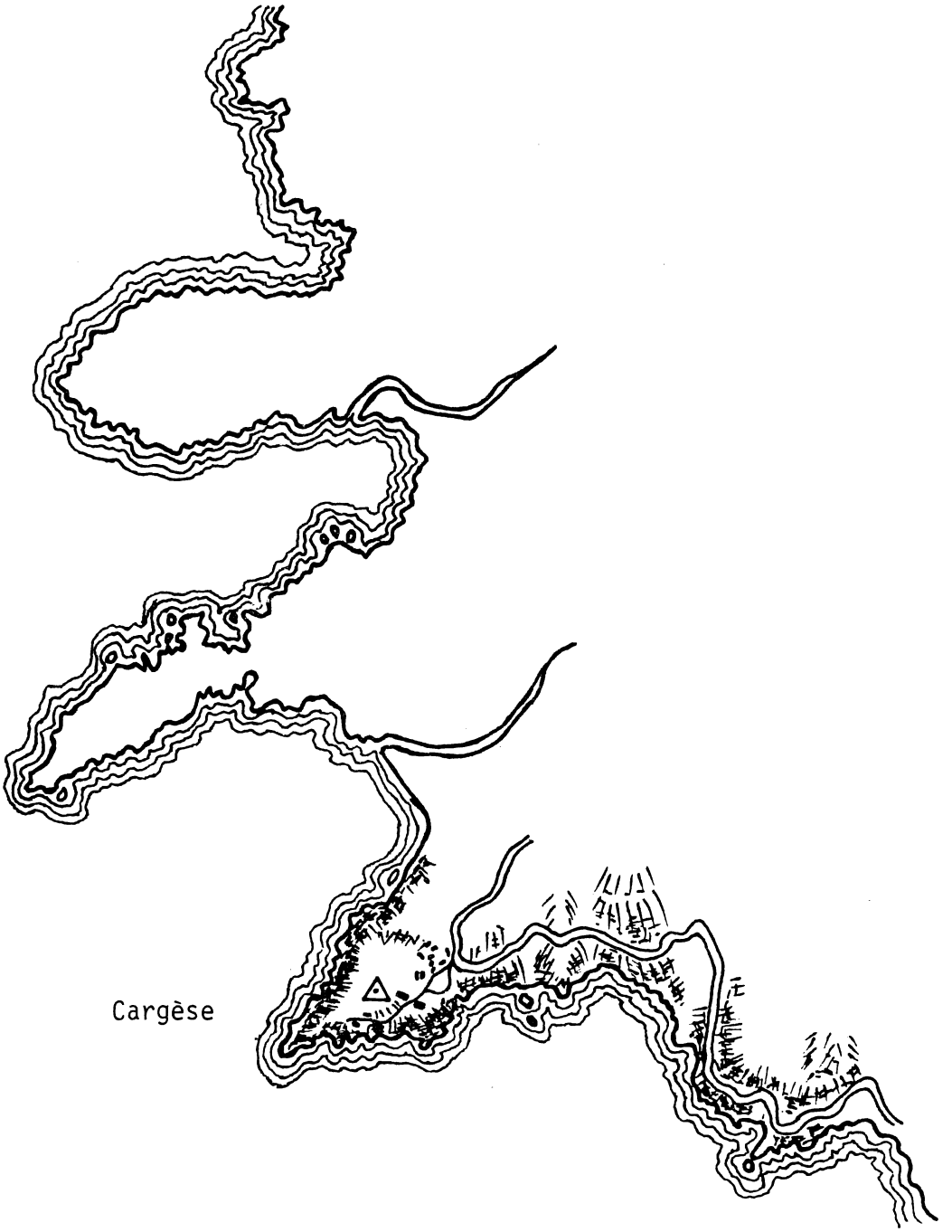
Bibliographie complémentaire :

[11] Newton : "Traité des fluxions ...", voir Frontispice.

[12] V. Puiseux : Recherches sur les fonctions algébriques, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1ère série, t. XV.

***

INDEX DES NOTATIONS



Chercher l'installation !

CHAPITRE 0

RAPPELS ET CONVENTIONS

(Les références sont S.G.A. I, II, E.G.A. I, II, IV et [4]).

0.1.1 <u>Définition</u> : Soient Y un espace analytique, G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre. On dit que G est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée si l'on s'est donné une décomposition :

$$G = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} G_\mu$$

où 1) G_μ est un $\mathcal{O}_Y$-Module ;

2) il existe Λ, sous-monoïde discret de $\mathbb{R}^+$, tel que $G_\mu = 0$ si $\mu \notin \Lambda$;

3) $G_o = \mathcal{O}_Y$;

4) $G_{\mu_1} . G_{\mu_2} \subset G_{\mu_1+\mu_2}$ pour $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^+$.

On appelle G_μ la composante homogène de degré μ de G.

0.1.2 <u>Définition</u> : Soit G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée. On dit qu'elle est de type fini si pour tout y de Y, il existe un voisinage ouvert U de y, un entier m, une structure de $\mathcal{O}_Y|U$-Algèbre graduée sur $\mathcal{O}_Y|U[T_1,\ldots,T_m]$ pour laquelle les composantes homogènes sont des $\mathcal{O}_Y|U$-Modules cohérents, une suite exacte de $\mathcal{O}_Y|U$-Modules :

$$\mathcal{O}_Y|U[T_1,\ldots,T_m] \xrightarrow{\phi} G|U \longrightarrow 0$$

ϕ étant un morphisme gradué de $\mathcal{O}_Y|U$-Algèbres graduées, de degré 0 (i.e. envoyant la composante homogène de degré μ de $\mathcal{O}_Y|U[T_1,\ldots,T_m]$ sur celle de $G|U$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$) .

On dira que ϕ est une présentation de G au voisinage de y.

Considérons maintenant $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\phi$. C'est un $\mathcal{O}_Y|U[T_1,\ldots,T_m]$-Idéal homogène . On notera $\mathcal{K}_\mu$ sa composante homogène de degré μ.

0.1.3 <u>Définition</u> : Soit G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée. On dit qu'elle est de présentation finie si elle est de type fini et si pour tout y de Y, il existe une présentation de G au voisinage de y, dont le noyau Ker ϕ soit engendré par un nombre fini de sections globales de $\mathcal{O}_Y|U[T_1,\ldots,T_m]$ en tant qu'Idéal.

0.1.4 <u>Définition</u> : Soit Y un espace analytique. On dit que C est un Y-cône si C est Y-isomorphe au Specan d'une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie.

0.1.5 <u>Définition</u> : Soit G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée, soit d un nombre réel strictement positif. On note

$$^{(d)}G = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{R}^+} G_{\mu d} .$$

C'est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée égale à G en tant que $\mathcal{O}_Y$-Algèbre puisque la multiplication par d est un isomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Mais un élément de degré μ dans $^{(d)}G$ a le degré μd dans G.

0.1.6 <u>Définition</u> : Soit G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée. Nous appellerons G-Module gradué un G-Module M muni d'une décomposition

$$M = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{R}} M_\mu$$

(noter que M peut être gradué en degrés négatifs), telle que

a) $M_\mu = 0$ si $\mu \notin \Lambda \cup (-\Lambda)$ (où Λ est le monoïde correspondant à G) ;

b) $G_{\mu_1} M_{\mu_2} \subseteq M_{\mu_1+\mu_2}$ pour tous μ_1, μ_2 dans $\mathbb{R}$ (on pose $G_\mu = 0$ pour $\mu < 0$ par convention).

0.2.1 <u>Définition</u> : Soit Y un espace analytique. On dit que E est un Y-fibré vectoriel trivial si E est Y-isomorphe au Specan de l'Algèbre symétrique d'un $\mathcal{O}_Y$-Module libre $\mathcal{E}$. La structure de Y-cône d'un tel fibré n'est pas nécessairement celle provenant de la graduation où chaque élément d'une base de $\mathcal{E}$ a le degré 1. La structure de Y-groupe analytique sur un tel fibré sera toujours la structure usuelle (i.e. provenant du morphisme $\sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_Y}{\oplus} \mathcal{E}$, $\sigma(f) = f \oplus f$).

0.2.2 <u>Définition</u> : Parmi les Y-cônes, (0) désigne Y considéré comme Y-cône.

0.3 Immersions régulières.

0.3.1 Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion d'espaces analytiques, soit $x \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) i est une immersion régulière en x ;

2) $I_x = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,x})$ est engendré par une suite régulière d'éléments pour $\mathcal{O}_{X,x}$;

3) I_x/I_x^2 est un $\mathcal{O}_{Y,x}$-module libre, et le morphisme canonique

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y,x}}(I_x / I_x^2) \longrightarrow \mathrm{gr}_{I_x} \mathcal{O}_{X,x}$$

est un isomorphisme;

4) soient $X^\wedge = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}^\wedge$, $Y^\wedge = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{Y,x}^\wedge$: $i^\wedge : Y^\wedge \longrightarrow X^\wedge$ est une immersion régulière.

0.3.2 Soit M un A-module muni d'une filtration par des A-modules (M_k) telle que $M_o = M$. Soit gr M le A-module gradué associé. Soient $(f_1, \ldots, f_m)$ une suite d'éléments de A, I l'idéal de A engendré par $(f_1, \ldots, f_m)$. Posons pour $k \geq 0$

$$M'_k = M_k + I M_{k-1} + \ldots + I^k M_o$$

et désignons par gr' M le A-module gradué associé à cette nouvelle filtration.
Si la suite $(f_1,\dots,f_m)$ est gr M-régulière , l'homomorphisme canonique de A-modules gradués

$$\gamma : \mathrm{gr}\, M \otimes_A A/I[T_1,\dots,T_m] \longrightarrow \mathrm{gr}'\, M$$

est un isomorphisme.
(Soit $x \in M_k$ représentant d'un élément $\bar{x}$ de gr M, et $\Sigma a_\alpha T^\alpha$ avec $a_\alpha \in A$ un représentant d'un élément homogène $\Sigma \bar{a}_\alpha T^\alpha \in A/I[T_1,\dots,T_m]$, γ est défini par :

$$\gamma(\bar{x} \otimes \Sigma \bar{a}_\alpha T^\alpha) = \sum_\alpha x\, a_\alpha f^\alpha \text{ modulo } M'^{k+|\alpha|+1} \quad).$$

0.4 Platitude.

0.4.1 Soient A un anneau nœthérien, I un idéal de A, M un A-module. On suppose que pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de A, le A-module $\mathfrak{A} \otimes_A M$ est séparé pour la topologie I-adique (i.e. M est idéalement séparé pour la topologie I-adique). Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) M est A-plat ;

2) M/IM est A/I-plat et le morphisme canonique

$$M/IM \otimes_{A/I} \mathrm{gr}_I A \longrightarrow \mathrm{gr}_I M$$

est un isomorpjisme ;

3) M/IM est A/I-plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$.

On peut appliquer ce critère en particulier si A est un anneau local et M un A-module de type fini.

0.4.2 Critère de platitude par fibres

Soient $f : X \longrightarrow Y$, $h : Y \longrightarrow S$ des morphisme d'espaces analytiques. Soit $x \in X$; $y = f(x)$ et $s = h(y)$. Soit X_s (resp. Y_s) la fibre de $h \circ f$ (resp. h) au-dessus de s. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $h : Y \longrightarrow S$ est plat en y et $f : X \longrightarrow Y$ est plat en x ;

2) $h \circ f : X \longrightarrow S$ est plat en x et $f : X_s \longrightarrow Y_s$ est plat en x.

0.5 Théorème de finitude de Cartan (cf. [4]).

Soient Y un espace analytique complexe, M un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Toute suite croissante (M_k) de sous-$\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents stationne localement sur Y (c'est-à-dire que tout $y \in Y$ possède un voisinage ouvert U tel que $M_k|U = M_{k+1}|U$ pour $k \geq k_o(U)$) et en particulier, la réunion des M_k est une $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent.

***

C H A P I T R E I

THEORIE DES INSTALLATIONS ET

CONES NORMAUX ANISOTROPES

"However contracted, that definition is the result of expanded meditation"
HERMAN MELVILLE (Moby Dick, ch. 32)

§ 1. FAISCEAUX DE JETS ET CÔNES NORMAUX ANISOTROPES

Dans tout le début de ce paragraphe, d est un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1.1 <u>Définition</u> : Soient $i : Y \to V$, $j : V \to X$ des immersions fermées. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant j (resp. $j \circ i$). Soit μ un réel non négatif.

On appelle μ-ième voisinage infinitésimal de $j \circ i$ (par abus de langage, de Y dans X) de tropisme d dans la direction de i (i.e. V) le sous-espace analytique de X défini par le $\mathcal{O}_X$-Idéal cohérent $\Sigma_{a+b/d>\mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b$. (On remarque qu'il s'agit en fait d'une somme finie). On note $\mathcal{O}^{i,d}_{j \circ i}[\mu]$ son faisceaux d'Anneaux.

1.2 <u>Définition</u> : On note $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{pmatrix}$ la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée :

$$\bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} \left(\sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N} \\ a+b/d \geq \mu}} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \Big/ \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N} \\ a+b/d > \mu}} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \right)$$

où la multiplication est induite par celle de $\mathcal{O}_X$.

1.3 Remarquons que si $\mu \notin \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$, la composante homogène de degré μ de cette Algèbre est nulle, de sorte qu'il n'existe qu'une infinité dénombrable de composantes homogènes non triviales. De plus, $\mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ est un fermé discret de $\mathbb{R}$ dont tout sous-ensemble non vide admet un plus petit élément. Les raisonnements par récurrence sur le degré μ sont donc bien fondés. Tout élément μ a un successeur unique μ^+, s'il est non nul un prédécesseur unique μ^-.

1.4 <u>Proposition</u> : Soit G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de type fini. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) G est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie

ii) Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, G_μ est une $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent.

<u>Démonstration</u> : i) $\Rightarrow$ ii). Pour tout y de Y, il existe un voisinage ouvert U de y, une suite exacte (de $\mathcal{O}_Y|U$-Modules)

$$0 \to \mathcal{K} \to (\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m] \xrightarrow{\phi} G|U \to 0$$

ϕ étant gradué de degré 0, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, la suite (de $\mathcal{O}_Y|U$-Modules)

$$0 \to \mathcal{K}_\mu \to (\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]_\mu \to G_\mu|U \to 0$$

est aussi exacte. D'autre part, $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]_\mu$ est un $\mathcal{O}_Y|U$-Module cohérent. Finalement, $\mathcal{K}$ étant engendré par un nombre fini de sections de $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$ qu'on peut supposer homogènes, on montre par récurrence sur μ que $\mathcal{K}_\mu$ est un $\mathcal{O}_Y|U$-Module de type fini. (C'est possible à cause de la condition 2) de la définition 0.1.1). $\mathcal{K}_\mu$ sous-Module de type fini d'un Module cohérent est donc cohérent, ainsi que $G_\mu|U$ et G_μ.

ii) $\Rightarrow$ i). Nous allons utiliser ici le théorème de Cartan-Oka rappelé en (0.). G étant de type fini, en tout point y de Y, il existe un voisinage ouvert U de y et une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{K} \to (\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m] \to G|U \to 0$$

et pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{K}_\mu$ est un $\mathcal{O}_Y|U$-Module de type fini. Considérons l'Idéal $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ de $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$ engendré par $\bigoplus_{\mu'\leq\mu} \mathcal{K}_{\mu'}$. 2) Déf. 0.1.1 assure que cette somme est en fait finie ; $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ est donc engendré par un nombre fini de sections. De plus, si $\mu' \leq \mu$, $\tilde{\mathcal{K}}_{\mu'} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ et $\mathcal{K} = \bigcup_{\mu\in\mathbb{R}^+} \tilde{\mathcal{K}}_\mu$. Il suffit donc de montrer qu'au voisinage de tout point dans U, il existe μ tel que $\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{K}}_\mu$.

On ne peut appliquer directement le théorème de Cartan-Oka aux $\mathcal{K}_\mu$, car $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$ n'est pas le faisceau structural d'un espace analytique. Néanmoins, on sait que $U\times\mathbb{C}^m = \mathrm{Specan}(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$. Désignant par $\tilde{G}_\mu$ le conoyau de l'inclusion de $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ dans $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$, $\tilde{G}_\mu$ est une $\mathcal{O}_Y|U$-Algèbre de présentation finie, dont le Specan, C_μ, est un sous-espace analytique de $U\times\mathbb{C}^m$ défini par un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^m}$, que nous appellerons $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_\mu$. Pour tout x de U, il existe un voisinage V de x dans U, un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^m$ et un réel μ tel que $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_{\mu'}|V\times\Omega = \tilde{\tilde{K}}_\mu|V\times\Omega$ dès que $\mu'\geq\mu$. (L'application du théorème de Cartan est licite ; à cause de 2) Déf. 0.1.1, il existe au plus une infinité dénombrable de $\mathcal{K}_\mu$ qui puissent être différents). Mais les $C_{\mu'}$ étant des U-cônes, nécessairement, on a $\tilde{\tilde{K}}_{\mu'}|V\times\mathbb{C}^m = \tilde{\tilde{K}}_\mu|V\times\mathbb{C}^m$ et aussi $C_{\mu'}|V\times\mathbb{C}^m = C_\mu|V\times\mathbb{C}^m$, donc $\tilde{G}_{\mu'}|V = \tilde{G}_\mu|V$ et $\tilde{K}_{\mu'}|V = \tilde{K}_\mu|V$ dès que $\mu'\geq\mu$.

1.5 <u>Corollaire</u> : $\mathrm{gr}\begin{pmatrix}X\\V,d\\Y\end{pmatrix}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie.

<u>Démonstration</u> : Pour simplifier, nous poserons $G = \mathrm{gr}\begin{pmatrix}X\\V,d\\Y\end{pmatrix}$. G_μ quotient de 2 $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, donc aussi un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Il suffit donc de montrer que G est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de type fini. Pour cela, on observe que l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres :

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y} G_1 \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y} G_{1/d} \longrightarrow G$$

est surjectif.

Comme G_1 et $G_{1/d}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules de type fini, pour tout y de Y, il existe un voisinage ouvert U de y, des $\mathcal{O}_Y|U$-Modules libres L_1 et $L_{1/d}$ de type fini s'envoyant surjectivement respectivement sur G_1 et $G_{1/d}$. Identifiant $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y|U} L_1$ à $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_m]$, $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y|U} L_{1/d}$ à $(\mathcal{O}_Y|U)[T'_1,\ldots,T'_s]$ et munissant $(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_r, T'_1,\ldots,T'_s]$ de la graduation qui donne à $T_1,\ldots,T_r$ le degré 1, à $T'_1,\ldots,T'_s$ le degré 1/d, on obtient la présentation :

$$(\mathcal{O}_Y|U)[T_1,\ldots,T_r, T'_1,\ldots,T'_s] \xrightarrow{\phi} G|U \to 0$$

cherchée.

1.6 <u>Définition</u> : On appelle cône normal de X le long de Y de tropisme d dans la direction de V (ou de V-tropisme d), l'espace analytique relatif au-dessus de Y :

$$C_{X,Y}^{V,d} = \text{Specan } gr\begin{pmatrix} X \\ V,d \\ Y \end{pmatrix} .$$

Si Y est un point réduit, on dira comme d'habitude tangent au lieu de normal.

1.5 permet cette définition d'après [3] exposé 9.

1.7 <u>Un exemple</u> : $X = \mathbb{C}^2$, $V = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$. Choisissons des coordonnées (z,w) sur $\mathbb{C}^2$ telles que V soit défini par $\mathcal{P} = (z)$. Le μ-ième voisinage infinitésimal de $\{0\}$ dans $\mathbb{C}^2$ de tropisme d dans la direction de $\mathbb{C}$ est défini par l'Idéal engendré par les monômes $z^a w^b$ tels que $a + b/d > \mu$.

$gr\begin{pmatrix} \mathbb{C}^2 \\ \mathbb{C},d \\ \{0\} \end{pmatrix}$ s'identifie à $\mathbb{C}[Z,W]$, un polynôme homogène de degré μ étant une somme de monômes $z^a w^b$ tels que $a + b/d = \mu$.

1.8 <u>Remarque</u> : On a toujours $gr\begin{pmatrix} X \\ V,1 \\ Y \end{pmatrix} = gr_Y X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$.

1.9 <u>Remarque</u> : On peut étendre les définition 1.1, 1.2, 1.6 au cas où les immersions de Y dans V et de V dans X ne sont plus fermées, car il s'agit de notions dont la définition est de nature locale.

Nous considérons maintenant des espaces analytiques au-dessus d'un espace analytique S.

Soit $j : V \to X$ une immersion, $\Delta : V \to V \times_S V$ l'immersion diagonale, $\delta'(j) : V \times_S V \to V \times_S X$ l'immersion $\mathrm{Id}\, V \times_S j$ et $\delta(j) = \delta'(j) \circ \Delta$.

1.10 <u>Définition</u> : Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$; on appelle μ-ième $\mathcal{O}_V$-Algèbre de jets relatifs de X/S de tropisme d dans la direction de V et on note $\mathcal{P}_{X/S}^{\mu;V,d}$ l'Anneau de μ-ième voisinage infinitésimal de $\delta(j)$ de tropisme d dans la direction de Δ, muni de la structure de $\mathcal{O}_V$-Algèbre induite par la

projection $p_1 : V \underset{S}{\times} X \to V$.

1.11 <u>Définition</u> : Soit $i : Y \to V$ une S-immersion. On définit pour $\mu \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}(Y) = i^*[\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}] \quad .$$

Si $\mu_1 < \mu_2$, $\mathcal{P}^{\mu_2;V,d}_{X/S}(Y)$ s'envoie naturellement dans $\mathcal{P}^{\mu_1;V,d}_{X/S}(Y)$ de sorte que $(\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}(Y))_{\mu\in\mathbb{R}^+}$ est un système projectif de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres.

1.12 <u>Définition</u> : Soit $\mu \in \mathbb{N} + 1/d\,\mathbb{N}$. On pose, pour $\mu = 0$, $\mathrm{gr}^0\,\mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y) = \mathcal{O}_Y$; pour $\mu \neq 0$, $\mathrm{gr}^\mu\,\mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y) = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}(Y) \to \mathcal{P}^{\bar{\mu};V,d}_{X,S}(Y))$. On munit :

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y) = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{N}+1/d\,\mathbb{N}} \mathrm{gr}^\mu\,\mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y)$$

de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre induite par la multiplication de $\mathcal{O}_{V \underset{S}{\times} X}$.

Etant donné le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] & V \arrow[r, "j"] & X \arrow[r] & S \\
Y' \arrow[u, "l"] \arrow[r, "i'"] \arrow[ur, phantom, "II"] & V' \arrow[u, "k"] \arrow[r, "j'"] \arrow[ur, phantom, "I"] & X' \arrow[u, "h"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "0"] & S' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où i, j, i', j' sont des immersions, on obtient des morphismes canoniques.

1.13 $$k^*(\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}) \to \mathcal{P}^{\mu;V',d}_{X'/S'} \quad .$$

1.14 $$l^*(\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y)) \to \mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{V',d}_{X'/S'} \quad .$$

1.15 $$l^*\left(\mathrm{gr}\begin{pmatrix} X \\ V,d \\ Y \end{pmatrix}\right) \to \mathrm{gr}\begin{pmatrix} X' \\ V',d \\ Y' \end{pmatrix} \quad .$$

1.16 Si les diagrammes 0 et I sont cartésiens, 1.13 est un isomorphisme.

1.17 Si h est plat et si les diagrammes I et II sont cartésiens, 1.15 est un isomorphisme.

1.18 <u>Lemme</u> : Soit $j : V \to X$ une S-immersion fermée. Si $f : V \to S$ le morphisme structural de V admet une section s, $s^*(\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S})$ est canoniquement isomorphe à l'Anneau de μ-ième voisinage infinitésimal de $j \circ s$ de tropisme d dans la direction de s, muni de la structure de $\mathcal{O}_S$-Algèbre provenant du morphisme structural $g : X \to S$.

<u>Démonstration</u> : Par définition $f \circ s = \mathrm{Id}\, S$ et les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "s"] & V \arrow[r, "j"] & X \\
V \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & V \times_S V \arrow[u, "q_2"] \arrow[r, "\delta'(j)"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{IV}"] & V \times_S X \arrow[u, "p_2"']
\end{tikzcd}$$

III et IV sont cartésiens. Le morphisme canonique de $\mathcal{O}_{V \times_S X}$-Algèbre

$$p_2^*(\mathcal{O}^{s,d}_{j \circ s}[\mu]) \to \mathcal{O}^{\Delta,d}_{\delta(j)}[\mu]$$

est un isomorphisme et donc aussi le morphisme de $\mathcal{O}_V$-Algèbre

$$p_{1*} \circ p_2^*(\mathcal{O}^{s,d}_{j \circ s}[\mu]) \to \mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S} \quad .$$

Or le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V \times_S X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d, "g"] \\
V \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

est cartésien. On vérifie alors facilement que :

$$p_{1*} \circ p_2^* = f^* \circ g_*$$

et $$s^* \circ p_{1*} \circ p_2^* = s^* \circ f^* \circ g_* = g_*$$

et on obtient en appliquant s^* à l'isomorphisme précédent, un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbre :

$$g_*(\mathcal{O}_{j \circ s}^{s,d}[\mu]) \to s^*(\mathcal{P}_{X/S}^{\mu;V,d}) \quad .$$

1.19 <u>Lemme</u> : Soit $i : Y \to V$ une S-immersion fermée. La $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\mathcal{P}_{X/S}^{\mu;V,d}(Y)$ est canoniquement isomorphe à l'Anneau du μ-ième voisinage infinitésimal de l'immersion $\delta(j \circ i) : Y \to Y \underset{S}{\times} X$ de tropisme d dans la direction de $\delta(i) : Y \to Y \underset{S}{\times} V$ muni de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre provenant de la projection de $Y \underset{S}{\times} X$ sur Y.

<u>Démonstration</u> : Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "j"] & X \arrow[r] & S \\
Y \underset{S}{\times} V \arrow[u, "q_2"] \arrow[r] & Y \underset{S}{\times} X \arrow[u, "p_2"] \arrow[r, "p_1"'] & Y \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De 1.13, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y \underset{S}{\times} V}$-Algèbre :

$$q_2^*(\mathcal{P}_{X/S}^{\mu;V,d}) \to \mathcal{P}_{Y \underset{S}{\times} X/Y}^{\mu;Y \underset{S}{\times} V,d} \quad .$$

Mais la projection $q_1 : Y \underset{S}{\times} V \to Y$ admet $\delta(i)$ pour section ; d'après 1.18 on a donc un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres entre $\delta(i)^*(\mathcal{P}_{Y \underset{S}{\times} X/Y}^{\mu;Y \underset{S}{\times} V,d})$ et l'Anneau du μ-ième voisinage infinitésimal de $\delta(j \circ i)$ de tropisme d dans la direction de $\delta(i)$, muni de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre provenant de p_1. Or $q_2 \circ \delta(i) = i$. Ceci achève la démonstration.

1.20 <u>Corollaire</u> : On a $\mathcal{P}_{X/S}^{\mu;V,1} = \mathcal{P}_{X/S}^{\mu}(V)$.

En effet, c'est l'Algèbre du μ-ième voisinage infinitésimal de V dans $V \underset{S}{\times} X$ muni de la structure de $\mathcal{O}_V$-Algèbre induite par $p_1 : V \underset{S}{\times} X \to V$.

1.21 <u>Corollaire</u> : Les $\mathcal{O}_Y$-Algèbres $\mathrm{gr}\, \mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y)$ et $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Y \underset{S}{\times} X \\ Y \underset{S}{\times} V, d \\ Y \end{pmatrix}$ sont canoniquement isomorphes. $\mathrm{gr}\, \mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y)$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie.

Immédiat de 1.19 et 1.5.

1.22 <u>Corollaire</u> : Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{P}^{\mu;V,d}_{X/S}(Y)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent.

En effet, de 1.4 on déduit que $\mathrm{gr}^{\mu}\, \mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. On conclut par récurrence sur $\mu \in \mathbb{N} + 1/d\, \mathbb{N}$, en remarquant que $\mathrm{gr}^{o}\, \mathcal{P}^{V,d}_{X/S}(Y) = \mathcal{O}_Y$.

1.23 <u>Définition</u> : Pour des raisons de continuité qui apparaîtront dans la suite, on pose

$$\mathrm{gr}\begin{pmatrix} X \\ V,\infty \\ Y \end{pmatrix} = \mathrm{gr}_Y\, \mathrm{gr}_V\, X \quad \text{et} \quad C^{V,\infty}_{X,Y} = \mathrm{Specan}\, \mathrm{gr}_Y\, \mathrm{gr}_V\, X .$$

Précisons que la graduation Y-adique sur $\mathrm{gr}_V\, X$ est celle associée à la structure de $\mathcal{O}_V$-Module de $\mathrm{gr}_V\, X$.

Dans la suite, nous considèrerons souvent la situation suivante : $X \to Z$ une S-immersion et $W \to Z$ une S-immersion possédant une rétraction r et nous nous intéressons aux sous-espaces Y de $W \cap X$.

1.24 <u>Définition</u> : On appelle S-installation la donnée d'une S-immersion : $X \to Z$, d'une S-immersion $\bar{j} : W \to Z$, d'une S-rétraction $r : Z \to W$ de $\bar{j}$. Pour simplifier les notations, un tel objet sera noté $\Delta/S = (X, Z, W; r)$.

Un morphisme $\phi : \Delta'/S' \to \Delta/S$ est la donnée de morphisme : $X' \to X$, $Z' \to Z$, $W' \to W$, $S' \to S$ rendant commutatif les diagrammes évidents. On obtient ainsi une catégorie fibrée au-dessus des "Espaces analytiques", notée "$\mathfrak{I}$nstallations".

1.25 Soient Δ/S une S-installation, $f : S' \to S$ un morphisme. On note :

$\Delta \underset{S}{\times} S'$ la S'-installation $(X \underset{S}{\times} S', Z \underset{S}{\times} S', W \underset{S}{\times} S', r \underset{S}{\times} \mathrm{Id}\, s')$.

On note $\delta(\Delta/S)$ la S-installation $((W \cap X) \underset{S}{\times} X, (W \cap X) \underset{S}{\times} Z, (W \cap X) \underset{S}{\times} W, \mathrm{Id}(W \cap X) \underset{S}{\times} r)$

Pour simplifier l'écriture, on pose $\delta(r) = \mathrm{Id}(W \cap X) \underset{S}{\times} r$.

Nous allons associer à une installation des cônes normaux anisotropes et des faisceaux de jets anisotropes pour des tropismes d allant de 0 à ∞ (bornes comprises).

1.26 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W; r)$ une S-installation, d un élément de $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \infty$, Y un sous-espace analytique de $W \cap X$. On pose :

$$\mathrm{gr}_Y \Delta ; 0 = \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_{r^{-1}(Y) \cap X} X .$$

Pour $0 < d \leq 1$, $\mathrm{gr}_Y \Delta ; d = {}^{(d)}\mathrm{gr}\left(r^{-1}(Y) \underset{Y}{\overset{X}{\cap}} X, 1/d\right)$

Pour $1 \leq d < \infty$, $\mathrm{gr}_Y \Delta ; d = \mathrm{gr}\left(W \underset{Y}{\overset{X}{\cap}} X, d\right)$

$$\mathrm{gr}_Y \Delta ; \infty = \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_{W \cap X} X .$$

1.27 <u>Proposition</u> : Pour tout $d \in [0, \infty]$, $\mathrm{gr}_Y \Delta ; d$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie.

C'est immédiat au vu de 1.5 .

1.28 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W; r)$ une S-installation, d un élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$, Y un sous-espace analytique de $W \cap X$. On appelle cône normal de Δ le long de Y, de tropisme d, l'espace analytique relatif au-dessus de Y :

$$C^{d}_{\Delta, Y} = \mathrm{Specan}\, \mathrm{gr}_Y \Delta ; d \quad .$$

Si Y est un point réduit, on dira tangent au lieu de normal.

1.29 <u>Remarque</u> : Soit Δ une S-installation. Pour $0 \leq d < 1$, $C^{d}_{\Delta, Y}$ ne dépend que de la trace de $r^{-1}(Y)$ sur X. Pour $1 < d \leq \infty$, $C^{d}_{\Delta, Y}$ ne dépend pas de la rétraction r de l'installation. Pour $d = 1$, $C_{\Delta, Y} = C_{X, Y}$ ne dépend ni de l'un ni de l'autre.

1.30 <u>Exemple</u> : Soit $\Delta = (\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}; p_2)$ et $Y = \{\underline{0}\}$. Choisissons des coordonnées $((z, w)$ sur $\mathbb{C}^2$ telles que $\mathbb{C}$ soit défini par l'idéal $P = (z)$. Pour $d \in [0, \infty]$, $\mathrm{gr}_{\underline{0}} \Delta ; d = \mathbb{C}[z, w]$. Si $d \neq 0$ et $d \neq \infty$, un polynôme homogène de degré μ est une somme de monômes $z^a w^b$ tels que $a + b/d = \mu$.

1.31 <u>Définition</u> : Soit $0 < d < \infty$; soit $\Delta/S = (X, Z, W; r)$ une S-installation. Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$. On appelle μ-ième $\mathcal{O}_{W \cap X}$-Algèbre de jets relatifs de Δ/S de tropisme d et on note $\mathcal{P}^{\mu; d}_{\Delta/S}$:
Si $0 < d \leq 1$, l'Anneau du $(d\mu)$-ième voisinage infinitésimal de $W \cap X$ dans $(W \cap X) \underset{S}{\times} X$ de tropisme $1/d$ dans la direction de $[\{\mathrm{Id}(W \cap X) \underset{S}{\times} r\}^{-1}(W \cap X)] \cap [(W \cap X) \underset{S}{\times} X]$ muni de la structure de $\mathcal{O}_{W \cap X}$-Algèbre induite par la projection $p_1 : (W \cap X) \underset{S}{\times} X \to W \cap X$.
Si $1 \leq d < \infty$, $\mathcal{P}^{\mu; W \cap X, d}_{X/S}$.

1.32 <u>Définition</u> : Soit $i : Y \to W \cap X$ une S-immersion. On définit, pour $\mu \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{P}^{\mu; d}_{\Delta/S}(Y) = i^*[\mathcal{P}^{\mu; d}_{\Delta/S}] \quad .$$

Elles forment un système projectif de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres.

1.33 <u>Définition</u> : Soit $\mu \in \mathbb{N} + 1/d\,\mathbb{N}$. On pose, pour $\mu = 0$, $gr^{o}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y) = \mathcal{O}_Y$; pour $\mu \neq 0$

$$gr^{\mu}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y) = \mathrm{Ker}\,\{\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(Y) \to \mathcal{P}^{\mu^{-};d}_{\Delta/S}(Y)\} \quad .$$

On munit :

$$gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y) = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{N}+1/d\,\mathbb{N}} gr^{\mu}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$$

de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre induite par la multiplication de $\mathcal{O}_{(W\cap X)\times_S X}$.

Etant donné $\Psi : \Delta'/S' \to \Delta/S$ un morphisme d'installation et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\ i\ } & W \cap X \\ {\scriptstyle l}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ Y' & \xrightarrow{\ i'\ } & W' \cap X' \end{array}$$

où k provient canoniquement de Ψ et i et i' sont des S-immersions, on obtient des morphismes canoniques :

1.34 $$k^{*}(\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}) \to \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta'/S'}$$

1.35 $$l^{*}(gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)) \to gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta'/S'}(Y')$$

1.36 $$l^{*}(gr_Y\,\Delta;d) \to gr_{Y'}\,\Delta';d' \quad .$$

1.37 Si $\Delta'/S' = \Delta \times_S S'$, le morphisme figurant dans 1.34 est un isomorphisme.

1.38 <u>Lemme</u> : Soit $\Delta/S = (X, Z, W; r)$ une S-installation. Si $f : W \cap X \to S$ le morphisme structural de $W \cap X$ admet une section s, $s^*(\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S})$ est canoniquement isomorphe, si $0 < d \leq 1$, à l'Anneau du $d\mu$-ième voisinage infinitésimal de $j \circ s : S \to X$ (où $j : W \cap X \to X$ est l'immersion canonique) de tropisme $1/d$ dans la direction de $r^{-1}(S) \cap X$,
si $1 \leq d < \infty$ à l'Anneau du μ-ième voisinage infinitésimal de $j \circ s : S \to X$ de tropisme d dans la direction de $s : S \to W \cap X$,
muni de la structure de $\mathcal{O}_S$-Algèbre provenant du morphisme structural $g : X \to S$.

<u>Démonstration</u> : 1) $0 < d \leq 1$. Les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\tilde{s}"] & r^{-1}(S) \cap X \arrow[r, "\tilde{j}"] & X \\
W \cap X \arrow[u, "f"] \arrow[r] & U \cap (W \cap X) \times_S X \arrow[u] \arrow[r] & (W \cap X) \times_S X \arrow[u, "p_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
r^{-1}(S) \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "r"] \\
S \arrow[r, "s"] & W \cap X \to W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & (W \cap X) \times_S Z \arrow[d, "Id(W \cap X) \times_S r"] \\
W \cap X \arrow[r] & (W \cap X) \times_S W
\end{tikzcd}$$

sont cartésiens.
Le morphisme de $\mathcal{O}_{W \cap X}$-Algèbre :

$$p_{1*} \circ p_2^*(\mathcal{O}^{\tilde{s}, 1/d}_{\tilde{j} \circ \tilde{s}}[d\mu]) \to \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}$$

est un isomorphisme.

Or le diagramme

$$\begin{tikzcd} (W \cap X) \underset{S}{\times} X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "g"] \\ W \cap X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

est cartésien. On a alors : $p_{1*} \circ p_2^* = f^* \circ g_*$ et $s^* \circ p_{1*} \circ p_2^* = s^* \circ f^* \circ g_* = g_*$. On obtient donc en appliquant s^* à l'isomorphisme précédent, un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbre :

$$g_*(\mathcal{O}^{\tilde{s},\, 1/d}_{\tilde{j} \circ \tilde{s}}[d\mu]) \to s^*(\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}) \quad .$$

2) $1 \leq d < \infty$. On applique 1.18.

1.39 <u>Lemme</u> : La $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(Y)$ est canoniquement isomorphe :
si $0 < d \leq 1$, à l'Anneau du $(d\mu)$-ième voisinage infinitésimal de l'immersion $\delta(j \circ i) : Y \to Y \underset{S}{\times} X$ de tropisme $1/d$ dans la direction de $[\{\mathrm{Id}\, Y \underset{S}{\times} r\}^{-1}(Y)] \cap Y \underset{S}{\times} X$,
si $1 \leq d < \infty$, à l'Anneau du μ-ième voisinage infinitésimal de l'immersion $\delta(j \circ i) : Y \to Y \underset{S}{\times} X$ de tropisme d dans la direction de $Y \underset{S}{\times} (W \cap X)$, muni de structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre provenant de la projection de $Y \underset{S}{\times} X$ sur Y.

<u>Démonstration</u> : 1) $0 < d \leq 1$: soit $q_2 : Y \underset{S}{\times} (W \cap X) \to W \cap X$. Remarquant que $Y \underset{S}{\times} (W \cap X) = Y \underset{S}{\times} W \cap Y \underset{S}{\times} X$, de 1.37, on déduit un isomorphisme :

$$q_2^*(\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}) \to \mathcal{P}^{\mu;d}_{Y \underset{S}{\times} \Delta/Y} \ .$$

Mais la projection $q_1 : Y \underset{S}{\times} (W \cap X) \to Y$ admet $\delta(i)$ pour section. D'après 1.38 on a donc un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre entre $\delta(i)^*(\mathcal{P}^{\mu;d}_{Y \underset{S}{\times} \Delta/Y})$ et l'Anneau du $d\mu$-ième voisinage infinitésimal de $\delta(j \circ i)$

de tropisme $1/d$ dans la direction de $[\{\mathrm{Id}\, Y \underset{S}{\times} r\}^{-1}(Y)] \cap Y \underset{S}{\times} X$. Or $q_2 \circ \delta(i) = i$.

2) $1 \leq d < \infty$: on applique 1.19.

1.40 <u>Corollaire</u> : Les $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathrm{gr}\, \mathcal{P}^d_{\Delta/S}(Y)$ et $\mathrm{gr}_Y\, Y \underset{S}{\times} \Delta; d$ sont canoniquement isomorphes. Ce sont des $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées de présentation finie.

1.41 <u>Corollaire</u> : Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent.

***

§ 2. INSTALLATIONS AMBIANTES

2.0.1 <u>Définition</u> : Soit Z/S un espace analytique relatif et soit $j : W \to Z$ une S-immersion. On dit que j est une r-immersion en $x \in W$, s'il existe un voisinage ouvert U de x dans Z et une rétraction $r : U \to U \cap W$ de $j|U \cap W : U \cap W \to U$ lisse qui soit un morphisme de S-espaces analytiques. C'est une r-immersion s'il en est ainsi pour tout x de W.

2.0.2 <u>Lemme</u> : Soient $i : Y \to W$, $j : W \to Z$ des immersions. Soit x un point de Y. Soit P (resp. Q) l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ associé à l'immersion j (resp. $j \circ i$). Si j est une r-immersion en $i(x)$, pour tout couple (a,b) d'entiers non négatifs, on a :

$$P^a \cap Q^{a+b} = P^a \cdot Q^b \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $R = \mathcal{O}_{Z,x}$. Soit $\hat{R}$ le complété de R pour la topologie définie par son idéal maximal, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ les complétés de P, Q pour cette même topologie. On sait que : $(P^a \cap Q^{a+b}) \underset{R}{\otimes} \hat{R} = \hat{P}^a \cap \hat{Q}^{a+b}$ et que : $P^a \cdot Q^b \underset{R}{\otimes} \hat{R} = \hat{P}^a \cdot \hat{Q}^b$.

$\hat{R}$ étant un R-module fidèlement plat, il suffit donc de montrer le même lemme après complétion (c-à-d passage à la situation géométrique algébroïde). Conservons pour simplifier les notations initiales dans ces nouvelles hypothèses. j étant une r-immersion en i(x), nous avons alors $R = R/P[[z_1,\ldots,z_t]]$ et $P = (z_1,\ldots,z_t)$. Soit $0 = R/P$. Il existe un idéal F de 0 tel que, en tant que $\mathbb{Z}$-module $Q = F \oplus (z_1,\ldots,z_t) = F \oplus P$. Par suite, si $a \geq 1$,

$$Q^{a+b} \subset F^{a+b} + F^{a+b-1} . P + \ldots + F^{b+1} . P^{a-1} + Q^b . P^a$$

et

$$Q^{a+b} \cap P^a \subset Q^b . P^a + (F^{a+b} + F^{a+b-1} . P + \ldots + F^{b+1} . P^{a-1}) \cap P^a .$$

Soit $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A \in F^{a+b} + \ldots + F^{b+1} . P^{a-1}$. Nécessairement, pour $|A| \leq a-1$, $f_A \in F^{a+b-|A|}$, pour $|A| \geq a$, $f_A \in F^{b+1}$. Un tel élément n'est dans P^a que si $f_A = 0$ pour tout A tel que $|A| \leq a-1$. Il est alors dans $F^{b+1} . P^a \subset Q^{b+1} . P^a$. Finalement, $Q^{a+b} \cap P^a \subset Q^b . P^a$.

2.0.3 <u>Définition</u> : Soit $\Delta/S = (X, Z, W; r)$ une S-installation. Soit x un point de $W \cap X$. On dit que Δ/S est une bonne installation en x, si r est lisse en x. On dit que Δ/S est une bonne installation, si c'est une bonne installation en tout x de $W \cap X$.

2.0.4 <u>Définition</u> : Soit $\Delta/S = (X, Z, W; r)$ une S-installation. Soit x un point de $W \cap X$. On dit que Δ/S est une installation lisse en x, si Δ/S est une bonne installation en x et si W est lisse au-dessus de S en x. On dit que Δ/S est une installation lisse, s'il en est ainsi en tout x de $W \cap X$.

On remarque que dans ces conditions Z est lisse au-dessus de S en $x \in W \cap X$.

Nous allons maintenant étudier la variation des $C^d_{\Delta,Y}$ en fonction de d.

2.1.1 <u>Lemme</u> : Soient $i : Y \to W$, $j : W \to Z$ des immersions. Soit x un point de Y, tel que j soit une r-immersion en $i(x)$. Soit d un réel >1.
Il existe sur le germe en x de $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W,d \\ Y \end{pmatrix}$ une structure de $\mathcal{O}_{Y,x}$-algèbre bigraduée :

$$\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W,d \\ Y \end{pmatrix} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} = \bigoplus_{(\mu,a)\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}} F_{\mu a} \quad ,$$

une fonction :

$$\alpha : \{(\mu,a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \ ; \ F_{\mu a} \neq (0)\} \to \mathbb{N} \ ,$$

un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y,x}$-algèbre bigraduée :

$$i_Y^{W,d} : \mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W,d \\ Y \end{pmatrix} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \to \mathrm{gr}_Y \, \mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$$

tel que

$$i_Y^{W,d}(F_{\mu a}) = \mathrm{gr}_Y^{\alpha(\mu,a)} \, \mathrm{gr}_W^a Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soient R, P, Q comme en 2.0.2. Soient :

$$F_\mu = \Sigma_{a+b/d\geq\mu} P^a Q^b / \Sigma_{a+b/d>\mu} P^a Q^b$$

$$F_{\mu a} = P^a Q^{\bar{\alpha}(\mu,a)} + \Sigma_{a'+b'/d>\mu} P^{a'} Q^{b'} / \Sigma_{a'+b'/d>\mu} P^{a'} Q^{b'}$$

où $\bar{\alpha}(\mu,a) = \inf\{b \ ; \ b \in \mathbb{N} \ , \ a+b/d \geq \mu\}$.
$F_{\mu a}$ est un sous $\mathcal{O}_{Y,x}$-module de F_μ , qui est non nul si et seulement si $\bar{\alpha}(\mu,a) = d(\mu - a)$. On pose donc : $\alpha(\mu,a) = d(\mu - a)$. Considérons maintenant les morphismes :

$$\varphi : P^a Q^{\alpha(\mu,a)} \to F_{\mu a}$$

$$\psi : P^a Q^{\alpha(\mu,a)} \to \mathrm{gr}_Y^{\alpha(\mu,a)} \, \mathrm{gr}_W^a Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$$

où φ est l'homorphisme canonique surjectif et ψ est induit par le morphisme canonique $P^a \to gr_P^a R$. ψ est également surjectif. Comparons leurs noyaux :

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = P^a Q^{d(\mu-a)} \cap \Sigma_{h+k/d>\mu} P^h Q^k$$

$$\mathrm{Ker}\ \psi = P^a Q^{d(\mu-a)} \cap P^{a+1} + P^a Q^{d(\mu-a)+1} .$$

On a <u>$\mathrm{Ker}\ \psi \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$</u> :
En effet, soient $f \in \mathrm{Ker}\ \psi$, $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in Q^{d(\mu-a)+1} . P^a$, $f_2 \in P^{a+1}$.
On remarque que $a + (d(\mu-a)+1) . \frac{1}{d} = \mu + \frac{1}{d} > \mu$. D'autre part,
$f_2 \in P^{a+1} \cap P^a . Q^{d(\mu-a)}$. Or, d'après le lemme 2.0.2 :

$$P^{a+1} \cap P^a . Q^{d(\mu-a)} = P^{a+1} \cap P^a \cap Q^{d(\mu-a)+a} = P^{a+1} \cap Q^{d(\mu-a)+a} = P^{a+1} . Q^{d(\mu-a)-1}$$

et

$$a + 1 + \mu - a - 1/d = \mu + 1 - 1/d > \mu$$

car $d > 1$. D'où l'inclusion annoncée.

On a <u>$\mathrm{Ker}\ \varphi \subset \mathrm{Ker}\ \psi$</u> :
Soit $f \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. Ecrivons $f = \Sigma_{h+k/d>\mu} f_{hk}$ où $f_{hk} \in P^h . Q^k$.
Soit $f_o = \Sigma_{k>d\mu} f_{ok}$, $f_o \in Q^{[d\mu]+1}$ où [ ] désigne la partie entière.
Si $a = 0$, alors $d\mu = [d\mu]$ et $f \in Q^{d\mu} \cap (P + Q^{d\mu+1}) \subset \mathrm{Ker}\ \psi$. Sinon,
$f_o \in Q^{[d\mu]+1} \cap P = Q^{[d\mu]} . P$. Comme $[d\mu] > d\mu - 1$,
$1 + [d\mu] . 1/d > 1 + (d\mu - 1) \frac{1}{d} = \mu + 1 - 1/d > \mu$. On peut donc écrire :
$f = \Sigma_{h\geq 1, h+k/d>\mu} g_{hk}$ où $g_{hk} \in P^h . Q^k$. Supposons qu'on sache montrer que :

$$f = \Sigma_{h\geq 1\ h+k/d>\mu} g_{hk} \quad \text{où} \quad g_{hk} \in P^h . Q^k$$

pour un certain l tel que $1 \leq l \leq a-1$. Alors :

$$f_l = \Sigma_{k>d(\mu-1)}\, g_{lk} \in P^{l+1} \cap Q^{[d(\mu-1)]+1} \,.\, P^l = P^{l+1}.Q^{[d(\mu-1)]} \,.$$

Or $l+1+[d(\mu-1)]/d > l+1+(d(\mu-1)-1)/d = \mu+1-1/d > \mu$. Par récurrence, on obtient donc que :

$$f = \sum_{h\geq a \;\; h+k/d>\mu} g_{hk} \quad \text{où} \quad g_{hk} \in P^h \,.\, Q^k \,.$$

Avec $f_a = \sum_{k>d(\mu-a)} g_{ak}$, on a $f_a \in P^a \,.\, Q^{d(\mu-a)+1}$ et $f - f_a \in P^{a+1}$. Finalement, $f \in \operatorname{Ker} \phi$.

2.1.2 <u>Lemme</u> : Les hypothèses sont les mêmes qu'en 2.1.1. Le germe en x de l'homomorphisme canonique :

$$\alpha : [\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_Y] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathrm{gr}_Y W \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_W Z$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : D'après (0.4.1), il suffit de remarquer que l'immersion de W dans Z étant une r-immersion en x (idéntifié à i(x)), $\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{W,x}$ est une $\mathcal{O}_{W,x}$-algèbre de polynômes. Par conséquent c'est un $\mathcal{O}_{W,x}$-module plat.

2.1.3 <u>Lemme</u> : Soient $i : Y \to W$, $j : W \to Z$ des immersions fermées. Soit $r : Z \to W$ une rétraction de j lisse. Soit d réel <1 (et >0) .

Il existe sur ${}^{(d)}\mathrm{gr}\left(\begin{matrix} Z \\ r^{-1}(Y) \\ Y \end{matrix}, 1/d\right)$ une structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre bigraduée :

$${}^{(d)}\mathrm{gr}\left(\begin{matrix} Z \\ r^{-1}(Y) \\ Y \end{matrix}, 1/d\right) = \bigoplus_{(\mu,b)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{N}} F'_{\mu b} \quad ,$$

une fonction :

$$\beta : \{(\mu,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N},\ F'_{\mu b} \neq 0\} \to \mathbb{N} \quad ,$$

un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres bigraduées :

$$i^{r^{-1}(Y),d}_{Y} : {}^{(d)}gr\left(r^{-1}_{Y}(Y),1/d\right) \to gr_{Y}\, gr_{r^{-1}(Y)}\, Z$$

tel que

$$i^{r^{-1}(Y),d}_{Y}(F'_{\mu,b}) = gr^{\beta(\mu,b)}_{Y}\, gr^{b}_{r^{-1}(Y)}\, Z \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{P}'$ (resp. $\mathcal{Q}$) l'Idéal de $\mathcal{O}_Z$ associé à l'immersion de $r^{-1}(Y)$ (resp. Y) dans Z. Comme dans la démonstration de 2.1.2, on va d'abord montrer que pour tout couple (a,b) d'entiers non négatifs :

$$\mathcal{P}'^{b} \cap \mathcal{Q}^{a+b} = \mathcal{P}'^{b} . \mathcal{Q}^{a} \quad .$$

Comme en 2.0.2, il suffit de montrer la même égalité pour les germes de ces Idéaux en tout $x \in Y$. Soit $R = \mathcal{O}_{Z,x}$, P' (resp. P), (resp. Q) l'idéal de R associé à l'immersion de $r^{-1}(Y)$ (resp. W) (resp. Y) dans Z. De même, on a ramène à la situation géométrique algébroïde. On a alors $R = R/P[[z_1,\ldots,z_t]]$ et $P = (z_1,\ldots,z_t)$. Soit $F = Q/P$. On a $P' = F.R$ et $Q = F \oplus P$.

Soit $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A \in Q^{a+b} \cap P'^{b}$.

Nécessairement, pour tout A, $f_A \in F^b$ et pour A tel que $|A| \leq a+b$, $f_A \in F^{a+b-|A|}$ qui est inclus dans $P'^{b} . Q^{a-|A|}$. Par conséquent,

$$f \in P'^{b} . Q^{a} + P'^{b} . Q^{a+b} \subset P'^{b} . Q^{a} \quad .$$

Passons maintenant à la construction de l'isomorphisme :

Soit $F'_{\mu} = \sum_{a+b/d \geq \mu} \mathcal{P}'^{b} \mathcal{Q}^{a} \Big/ \sum_{a+b/d > \mu} \mathcal{P}'^{b} \mathcal{Q}^{a}$. C'est la μ-ième composante homogène de l'Algèbre qui nous intéresse.

Soit $F'_{\mu b} = \mathcal{P}'^{b} \mathcal{Q}^{\bar{\beta}(\mu,b)} + \sum_{h+k/d>\mu} \mathcal{P}'^{k} \mathcal{Q}^{h} \Big/ \sum_{h+k/d>\mu} \mathcal{P}'^{k} \mathcal{Q}^{h}$

où $\bar{\beta}(\mu,b) = \inf\{a \,;\, a \in \mathbb{N} \quad a + b/d \geq \mu\}$.

$F'_{\mu b}$ est un sous $\mathcal{O}_Y$-Module de F'_μ , qui est non nul si et seulement si $\bar{\beta}(\mu,b) = \mu - b/d$. On pose donc $\beta(\mu,b) = \mu - b/d$.
On considère maintenant les morphismes :

$$\varphi' : \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^{\beta(\mu,b)} \to F'_{\mu b}$$

$$\psi' : \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^{\beta(\mu,b)} \to gr_Y^{\beta(\mu,b)} \; gr^b_{r^{-1}(Y)} Z$$

où φ est l'homomorphisme canonique surjectif et ψ' induit par $\mathcal{P}'^b \to gr^b_{\mathcal{P}'} \mathcal{O}_Z$.

$$\operatorname{Ker} \varphi' = \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^{\beta(\mu,b)} \cap \sum_{h+k/d>\mu} \mathcal{P}'^k \mathcal{Q}^h$$

$$\operatorname{Ker} \psi' = \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^{\beta(\mu,b)} \cap \mathcal{P}'^{b+1} + \mathcal{P}'^b \cdot \mathcal{Q}^{\mu-(b/d)+1} .$$

On montre comme dans 2.1.1 leur égalité.

2.1.4 <u>Lemme</u> : Les hypothèses sont les mêmes qu'en 2.1.3. L'homomorphisme canonique :

$$\beta : [gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Y] \otimes_{\mathcal{O}_Y} gr_Y W \to gr_Y \; gr_{r^{-1}(Y)} Z$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Indiquons d'abord comment on l'obtient. r étant lisse, le morphisme canonique $gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Y \to gr_Y r^{-1}(Y)$ provenant du diagramme

commutatif :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "j"] & Z \\ Y \arrow[u, "i"] \arrow[r] & r^{-1}(Y) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

De même, celui $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{r^{-1}(Y)} \to gr_{r^{-1}(Y)} Z$ provenant du diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & W \\ r^{-1}(Y) \arrow[u] \arrow[r] & Z \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme, car r est plat.

Considérons maintenant le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & r^{-1}(Y) \\ C_{W,Y} \arrow[u] \arrow[r] & r^{-1}(Y) \underset{Y}{\times} C_{W,Y} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Il fournit un homomorphisme

$$gr_Y r^{-1}(Y) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} gr_Y W \to gr_{C_{W,Y}} r^{-1}(Y) \underset{Y}{\times} C_{W,Y}$$

qui est un isomorphisme, toujours car r est lisse. Mais, souvenons-nous que $C_{Z,r^{-1}(Y)} = r^{-1}(Y) \underset{Y}{\times} C_{W,Y}$ et que nous considérons sur $gr_{r^{-1}(Y)} Z$ la structure de $\mathcal{O}_{r^{-1}(Y)}$-Module. $gr_Y gr_{r^{-1}(Y)} Z$ n'est donc autre que $gr_{C_{W,Y}} r^{-1}(Y) \underset{Y}{\times} C_{W,Y}$ vu comme $\mathcal{O}_Y$-Module. Nous obtenons donc β et le fait que c'est un isomorphisme.

2.1.5 <u>Corollaire</u> : Soient $i : Y \to W$, $j : W \to Z$ des immersions. Soit $r : Z \to W$ une rétraction de j lisse. Soit $\Delta = (Z, Z, W; r)$ l'installation Id Z, j ; r associée à j et r. Soit $\Delta | W = (W, W, W ; \mathrm{Id}\, W)$ l'installation Id W, Id W ; Id W restriction de Δ à W. Soit $d \in [0, \infty]$.

Le morphisme canonique de Y-cônes :

$$C^d_{\Delta,Y} \to C^d_{\Delta|W,Y} \underset{Y}{\times} [C^d_{\Delta,W} \underset{W}{\times} Y]$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : Le morphisme dont il s'agit est celui obtenu à partir de $\mathrm{Id}\,\Delta$ et la rétraction $\Delta \to \Delta|W\,(r, r, \mathrm{Id}\,W)$ par le procédé (1.36). Pour $d > 1$, on a établi des isomorphismes canoniques (lemmes 2.1.1 et 2.1.2).

$$\mathrm{gr}_Y \Delta;d = \mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W,d \\ Y \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_W Z \;;\; \mathrm{gr}_Y \Delta|W;d = \mathrm{gr}\begin{pmatrix} W \\ W,d \\ Y \end{pmatrix} \Delta\, \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_W W = \mathrm{gr}_Y W$$

$$\mathrm{gr}_W \Delta;d = \mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W,d \\ W \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}_W \mathrm{gr}_W Z = \mathrm{gr}_W Z$$

et finalement

$$\alpha : [\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_Y] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathrm{gr}_Y W \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_W Z \;.$$

Pour $d < 1$, on a de même des isomorphismes canoniques (lemmes 2.1.3 et 2.1.4)

$$\mathrm{gr}_Y \Delta;d = {}^{(d)}\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ r^{-1}(Y),1/d \\ Y \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_{r^{-1}(Y)} Z \;;$$

$$\mathrm{gr}_Y \Delta|W;d = {}^{(d)}\mathrm{gr}\begin{pmatrix} W \\ Y,1/d \\ Y \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_Y W = \mathrm{gr}_Y W$$

$$\mathrm{gr}_W \Delta;d = {}^{(d)}\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ Z,1/d \\ W \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}_W \mathrm{gr}_Z Z = \mathrm{gr}_W Z$$

et finalement

$$\beta : [\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_Y] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathrm{gr}_Y W \to \mathrm{gr}_Y \mathrm{gr}_{r^{-1}(Y)} Z \;.$$

Pour $d = 1$, on utilise le lemme 0.3.2 . Localement autour de tout y de Y, on peut écrire $Z = W \times \mathbb{C}^t$, la rétraction r s'identifiant à la 1ère projection. Comme toujours, il suffit de vérifier que le germe en tout point y de Y du morphisme considéré est un isomorphisme. Il suffit même de le

faire après complétion. Soit $R = \hat{\mathcal{O}}_{Z,y}$, $0 = \hat{\mathcal{O}}_{W,y}$, $R = \mathcal{O}[[z_1, \ldots, z_t]]$. Soit $P = (z_1, \ldots, z_t)$, soit Q l'idéal de R définissant Y autour de y, P' celui définissant $r^{-1}(Y)$. On vérifie que $P + P' = Q$. Comme on a vu en 2.1.4,

$$gr_{P'} R = gr_{Q/P} 0 \underset{R/Q}{\otimes} R/P' = gr_{Q/P} 0 \underset{R/Q}{\otimes} R/Q[[z_1, \ldots, z_t]] \quad .$$

La suite $z_1, \ldots, z_t$ est donc $gr_{P'} R$ régulière. Il s'ensuit que

$$\gamma : gr_{P'} R \underset{R}{\otimes} R/P[Z_1, \ldots, Z_t] \to gr_Q R$$

est un isomorphisme. Compte-tenu du calcul de $gr_{P'} R$, on obtient un isomorphisme :

$$gr_{Q/P} 0 \underset{R/Q}{\otimes} R/Q[[z_1, \ldots, z_t]] \underset{R}{\otimes} R/P[Z_1, \ldots, Z_t] \to gr_Q R$$

et comme :

$$R/Q[[z_1, \ldots, z_t]] \underset{R}{\otimes} R/P = R/Q \text{ et que } gr_P R = R/P[Z_1, \ldots, Z_t] \quad ,$$

ceci n'est autre que l'isomorphisme annoncé.

2.1.6 <u>Remarque</u> : Pour $d > 1$, le morphisme de 2.1.5 est indépendant du choix de la rétraction r lisse de j.
En effet tous les isomorphismes figurant dans 2.1.1 et 2.1.2 possèdent cette propriété. Toutes les rétractions possibles induisent le morphisme canonique $\mathcal{O}_W \to gr_W Z$ de $gr_W W \to gr_W Z$, par suite, elles induisent toutes le morphisme canonique $gr_Y W \to gr_Y gr_W Z$ de $gr_Y gr_W W \to gr_Y gr_W Z$.
Dès que $d \leq 1$, ceci n'est plus vrai.

2.1.7 <u>Remarque</u> : Pour tout $d \in [0, \infty]$ l'espace analytique sous-jacent à $C^d_{\Delta|W,Y}$ est $C_{W,Y}$, celui sous-jacent à $C^d_{\Delta,W} \underset{Y}{\times} Y$ est $C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y$.

Si $d \neq 0, \infty$ dans l'isomorphisme :

$$i_Y \Delta, d : gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} [gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_Y] \to gr_Y \Delta; d$$

si $\varphi \in gr_Y^b W$ et $\psi \in gr_W^a Z$, l'image de $\varphi \otimes \psi \otimes 1$ a le degré $a + b/d$. On dit qu'un élément $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} [gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_Y]$ est d-homogène, si son image par l'isomorphisme de 2.1.5 est un élément homogène de $gr_Y \Delta; d$. De ce qui précède, il résulte qu'un tel élément est de d-degré μ, si on peut l'écrire $\sum_i \varphi_i \otimes \psi_i \otimes 1$ avec $\varphi_i \in gr_Y^{b_i} W$ $\psi_i \in gr_W^{a_i} Z$ avec $a_i + b_i/d = \mu$.

2.1.8 <u>Définition et notation</u> : Soient $i : Y \to W$, $j : W \to Z$ des immersions. Soit $r : Z \to W$ une rétraction de j lisse. Soit $\Delta = (Z, Z, W ; r)$ l'installation $Id\, Z, j ; r$. Soit f une section de $\mathcal{O}_Z$ non nulle.
Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) (resp. $\mathcal{Q}$) l'Idéal de l'immersion de W dans Z, (resp. $r^{-1}(Y)$ dans Z) (resp. Y dans Z). On pose :

$$\nu_Y(f;\Delta,d) = \sup\{\mu \in \mathbb{R}^+ \ , \ f \in \Sigma_{a+b/d \geq \mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \quad \text{si } 1 \leq d \leq \infty$$

$$f \in \Sigma_{a+b/d \geq \mu} \mathcal{P}'^b \mathcal{Q}^a \quad \text{si } 0 < d \leq 1 \ .$$

C'est le <u>d-ordre de f le long de Y</u> relativement à l'installation Δ.
C'est un élément de $\mathbb{N} + 1/d\, \mathbb{N}$.
Si $d = 1$, on le note souvent simplement $\nu_Y(f)$ puisqu'il ne dépend ni de W ni de r (conformément aux notations usuelles).
On remarque que $\nu_Y(f;\Delta,\infty) = \nu_W(f)$.
On définit $in_Y(f;\Delta,d)$ = image de f dans $gr_Y^{\nu_Y(f;\Delta,d)} \Delta; d$ si $0 < d < \infty$.
C'est la <u>d-forme initiale de f le long de Y</u> relativement à l'installation Δ.
Si $d = 1$, on le note aussi (conformément aux usages) $in_Y f$.
On définit également l'∞ et la 0-forme initiale.

$$in_Y(f;\Delta,\infty) = in_Y\, in_W f$$

$$in_Y(f;\Delta,0) = in_Y . in_{r^{-1}(Y)} f \ .$$

(Ici in_Y signifie la forme initiale relative à filtration Y-adique des Modules $gr_W Z$ d'une part et $gr_{r^{-1}(Y)} Z$ d'autre part).

2.1.9 <u>Notation</u> : <u>Où l'on voit enfin apparaître le polygone de Newton</u> !

Plaçons-nous dans la situation de 2.1.5. Soit y un point de Y et soit $f \in \mathcal{O}_{Z,y}$.

$r^{-1}(y)$ étant non singulier, choisissons des coordonnées $z_1,\dots,z_t$ sur $r^{-1}(y)$ au voisinage de y et écrivons $\hat{\mathcal{O}}_{Z,y} = \hat{\mathcal{O}}_{W,y}[[z_1,\dots,z_t]]$. Le germe de $gr_W Z$ en y s'identifie alors à $\mathcal{O}_{W,y}[Z_1,\dots,Z_t]$ en posant $Z_i = in_W z_i$ et 2.1.7 nous fournit un isomorphisme :

$$gr_Y W[Z_1,\dots,Z_t] \to gr_Y \Delta;d$$

pour tout $d \in [0,\infty]$.

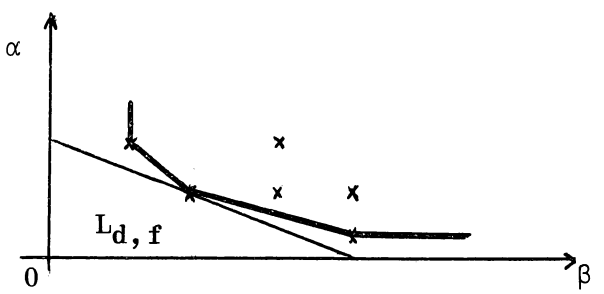
Ecrivons le développement de f en série de z $f = \sum_{A\in \mathbb{N}^t} f_A z^A$.

Soit $\Delta(f;\Delta) = \{(\beta,\alpha) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ \exists\ A \in \mathbb{N}^t$ tel que $|A| = \alpha$ et $\nu_Y(f_A) = \beta\}$

$(\nu_Y(f_A) = \nu_Y(f_A\ ;\ \Delta|W,1)$.

Soit $E(f;\Delta) = \{v \in \mathbb{R}^{+2}\ ,\ v \in \Delta(f;\Delta) + \mathbb{R}^{+2}\}$.

Soit $F(f;\Delta)$ l'enveloppe convexe de $E(f;\Delta)$, $P(f;\Delta)$ la partie de la frontière de $F(f;\Delta)$ qui n'est pas contenu dans les 2 axes. C'est <u>le polygone de Newton de f par rapport à Δ</u>.



Nous allons maintenant voir comment les ordres et formes initiales introduits en 2.1.8 apparaissent à partir de ce diagramme.

Soit $d \neq 0$. Soit $I(d,\mu)$ (resp. $I^+(d,\mu)$) l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,y}$ engendré par les $f_A z^A$ tels que $|A| + \nu_Y(f_A)/d \geq \mu$ (resp. $> \mu$).

Si $f = \sum f_A z^A$, $\nu_Y(f;\Delta,d) = \sup\{\mu \in \mathbb{R}^+,\ f \in I(d,\mu)\}$.

Soit $L_{d,f} = \{(\beta,\alpha) \in \mathbb{R}^{+2} : \alpha + \beta/d = \nu_Y(f;\Delta,d)$. $L_{d,f}$ est ainsi obtenu à partir de $F(f;\Delta)$. C'est la trace sur $\mathbb{R}^{+2}$ de la droite de pente $-1/d$ contenant au moins un point de $F(f;\Delta)$ telle que $F(f;\Delta)$ soit contenu dans la région de $\mathbb{R}^2$ limité par elle-même et ne contenant pas l'origine des coordonnées dans $\mathbb{R}^2$. Sous cette forme géométrique, on peut étendre la définition à $L_{0,f}$. Pour $1 < d < \infty$,

$$[i_Y \Delta, d]^{-1}(\mathrm{in}_Y(f;\Delta,d)) = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ (\nu_Y(f_A),\ |A|) \in L_{d,f}} \mathrm{in}_Y f_A Z^A$$

$(\mathrm{in}_Y f_A = \mathrm{in}_Y(f_A;\Delta|W,1))$.

$$[i_Y \Delta, \infty]^{-1}(\mathrm{in}_Y(f;\Delta,\infty)) = \sum_{A \in \mathbb{N}^t : \nu_Y(f_A) = \nu_Y(\mathrm{in}_W f),\ (\nu_Y(f_A),\ |A|) \in L_{\infty,f}} \mathrm{in}_Y f_A Z^A$$

$$[i_Y \Delta, 0]^{-1}(\mathrm{in}_Y(f;\Delta,0)) = \sum_{A \in \mathbb{N}^t\ \nu_Y(f_A) = \nu_Y(\mathrm{in}_{r^{-1}(Y)} f),\ (\nu_Y(f_A),\ |A|) \in L_{0,f}} \mathrm{in}_Y f_A Z^A .$$

2.1.10 <u>Remarque</u> : Dans toutes les constructions précédentes, on peut remplacer le germe de l'installation Δ en y par l'installation algébroïde associée, sans changer les objets obtenus. Au besoin nous supposerons les anneaux locaux complets.

2.1.11 <u>Définition</u> : Soit $\Delta/S = (X,Z,W;r)$ une S-installation. On dit que c'est une installation ambiante en x, si elle est bonne en x et si le germe en x de l'immersion de X dans Z est l'identité. On dit que c'est une installation ambiante s'il en est ainsi en tout point de W.
Tous les cônes anisotropes d'une installation ambiante ont donc même espace analytique sous-jacent. Seule varie la structure de cône choisie dessus.

2.1.12 <u>Notation</u> : On écrira simplement (Z) au lieu de l'installation ambiante triviale $(Z,Z,Z;\mathrm{Id}\,Z)$.

***

§ 3. TROPISMES CRITIQUES

3.0.1 Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation en $y \in X \cap W$. A Δ on associe fonctoriellement l'installation ambiante en y, $\underline{\Delta} = (Z, Z, W; r)$. On vérifie aisément que, pour tout sous-espace Y de $W \cap X$ contenant y, le morphisme canonique :

$$C^{d}_{\Delta, Y} \to C^{d}_{\underline{\Delta}, Y}$$

est une immersion (pour tout $d \in [0, \infty]$).
D'après 2.1.7, le germe en y de l'homomorphisme canonique

$$C^{d}_{\underline{\Delta}, Y} \to C_{W, Y} \underset{Y}{\times} [C_{Z, W} \underset{W}{\times} Y]$$

est un isomorphisme. Ceci permet de comparer les germes en y des différents $C^{d}_{\Delta, Y}$ quand d varie de 0 à ∞. Rappelons-nous que d'après 2.1.6, cette comparaison est indépendante de la rétraction lisse de y figurant dans Δ dès que $d > 1$.

3.0.2 Par définition, la suite de $\mathcal{O}_Y$-Modules :

$$(0) \to \mathfrak{Jn}(\Delta, \underline{\Delta}, d) \to gr_Y \underline{\Delta}, d \to gr_Y \Delta, d$$

est exacte.
On notera aussi souvent $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, 1) : \mathfrak{Jn}_Y(X, Z)$.

3.0.3 <u>Lemme</u> : Dans la situation de 3.0.1 et 3.0.2, le germe en y de $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d)$ est engendré par les $in_Y(f; \underline{\Delta}, d)$ où f parcourt l'ensemble des germes en y de section de l'$\mathfrak{J}$déal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{O}_Z$ définissant l'immersion de X dans Z (au voisinage de y).

<u>Démonstration</u> : Soit $R = \mathcal{O}_{Z, y}$, P (resp. P') (resp. Q) (resp. J) l'idéal de R associé à l'immersion de W (resp. $r^{-1}(Y)$) (resp. Y) (resp. X) dans Z

au voisinage de y. Soient $A = R/J$, $\overline{P} = P + J/J$, $\overline{P}' = P' + J/J$, $\overline{Q} = Q/J$. Ce sont respectivement les idéaux de A associés à l'immersion de $W \cap X$, $r^{-1}(Y) \cap X$, Y dans X. Par définition $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ est le noyau du morphisme :

si $0 < d \leq 1$,

$$\bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} (\Sigma_{a+b/d \geq \mu} P'^b Q^a \Big/ \Sigma_{a+b/d > \mu} P'^b Q^a) \to \bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} (\Sigma_{a+b/d \geq \mu} \overline{P}'^b \overline{Q}^a \Big/ \Sigma_{a+b/d > \mu} \overline{P}'^b \overline{Q}^a)$$

si $1 \leq d < \infty$,

$$\bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} (\Sigma_{a+b/d \geq \mu} P^a Q^b \Big/ \Sigma_{a+b/d} P^a Q^b) \to \bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} (\Sigma_{a+b/d \geq \mu} \overline{P}^a \overline{Q}^b \Big/ \Sigma_{a+b/d > \mu} \overline{P}^a \overline{Q}^b)$$

si $d = 0$,

$$\bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} Q^a . P'^b / P'^{b+1} \Big/ Q^{a+1} . P'^b / P'^{b+1} \to \bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} \overline{Q}^a . \overline{P}'^b / \overline{P}'^{b+1} \Big/ \overline{Q}^{a+1} . \overline{P}'^b / \overline{P}'^{b+1}$$

si $d = \infty$,

$$\bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} Q^b . P^a / P^{a+1} \Big/ Q^{b+1} . P^a / P^{a+1} \to \bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{N}^2} \overline{Q}^b . \overline{P}^a / \overline{P}^{a+1} \Big/ \overline{Q}^{b+1} . \overline{P}^a / \overline{P}^{a+1} .$$

Il suffit maintenant de se reporter à la définition des formes initiales 2.1.8.

3.0.4 <u>Remarque</u> : Les notations sont celles de 3.0.3. Si $f_1, \ldots, f_m$ est un système de sections de $\mathcal{J}_y$ tel que :
$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (in_Y(f_1 ; \underline{\Delta}, d), \ldots, in_Y(f_m ; \underline{\Delta}, d))$ pour une valeur de $d \in [0, \infty]$, alors

$$\mathcal{J}_y = (f_1, \ldots, f_m) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in \mathcal{J}_y$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dans $gr_Y \underline{\Delta}; d$ tels que

$$in_Y(f; \underline{\Delta}, d) = \sum_{i=1,\ldots,m} \lambda_i \, in_Y(f_i; \Delta, d) .$$

On peut alors relever λ_i en h_i dans $\mathcal{O}_{Z,y}$ si $d \neq 0, \infty$, en H_i dans $gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{W,y}$ si $d = \infty$, en H_i dans $gr_{r^{-1}(Y)} Z \otimes_{\mathcal{O}_{r^{-1}(Y)}} \mathcal{O}_{r^{-1}(Y),y}$ si $d = 0$ et l'on a :

$$\nu_Y(f - \Sigma h_i f_i ; \underline{\Delta}, d) > \nu_Y(f ; \underline{\Delta}, d) \qquad \text{si } 0 < d < \infty$$

$$\nu_Y(in_W f - \Sigma H_i \, in_W f_i) > \nu_Y(in_W f) \qquad \text{si } d = \infty$$

$$\nu_Y(in_{r^{-1}(Y)} f - \Sigma H_i \, in_{r^{-1}(Y)} f_i) > \nu_Y(in_{r^{-1}(Y)} f) \quad \text{si } d = 0 .$$

On conclut dans les 3 cas en montrant que $\hat{J} = \hat{\mathcal{J}}_y = J . \mathcal{O}_{\hat{Z},y} = (f_1, \ldots, f_m) \mathcal{O}_{\hat{Z},y}$, ce qui entraîne la même égalité avant complétion, puisque $\mathcal{O}_{\hat{Z},y}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{Z,y}$.

3.0.5 <u>Remarque</u> : 3.0.4 ne comporte par de réciproque.

3.0.6 <u>Convention</u> : Dans toute la suite, comme dans 2.1.9, nous choisissons des coordonnées $z_1, \ldots, z_t$ sur $r^{-1}(y)$, nous identifions par :

$$i_{Y \underline{\Delta}, d} : gr_Y W[Z_1, \ldots, Z_t] \to gr_Y \underline{\Delta}; d .$$

Nous écrirons donc $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d)$ au lieu de $[i_{Y \Delta, d}]^{-1}(\mathfrak{Jn}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d)$, $in_Y(f ; \underline{\Delta}, d)$ au lieu de $[i_{Y \Delta, d}]^{-1}(in_Y(f ; \Delta, d))$.

3.1.1 Dans 2.1.9, nous avons défini le polygone de Newton de $f \in \mathcal{O}_{Z,y}$ par rapport à $\underline{\Delta}$. Dans ce paragraphe, nous allons étendre cette notion à un idéal J de $\mathcal{O}_{Z,y}$. Il s'agit de comparer les $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d)$

quand d varie. Les lemmes qui suivent nous y préparent.

Les hypothèses sont celles de 3.0.1, les notations celles de 2.1.9, 3.0.3 et 3.0.6. Dans toute cette section, pour alléger l'écriture, on écrira $in(f,d)$ au lieu de $in_Y(f\,;\,\underline{\Delta},d)$, on écrira également $\nu(f,d)$ au lieu de $\nu_Y(f\,;\,\underline{\Delta},d)$.

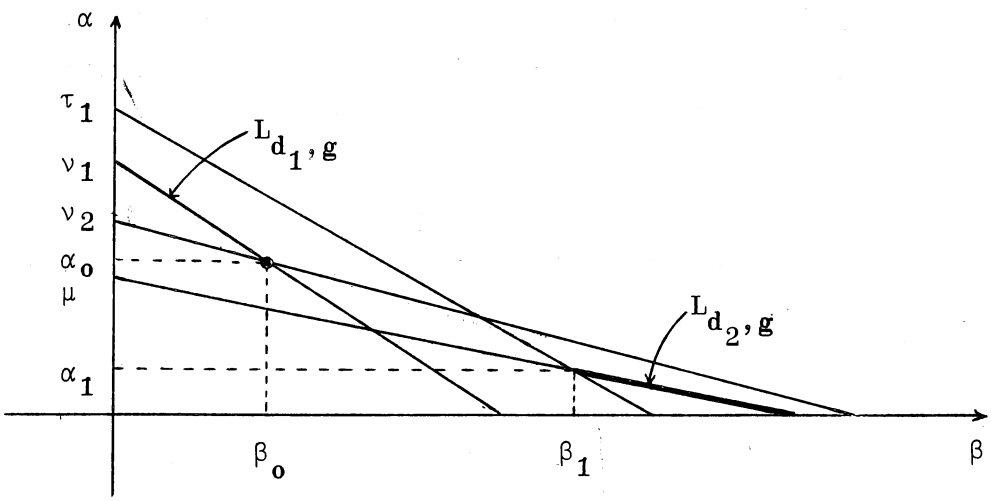
3.1.2$_*$ <u>Lemme</u> : Soient $0 \leq d_1 < d_2 < \infty$ et supposons que $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_2) \subset \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$ au voisinage de y. Si :

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{A\in \mathbb{N}^t;\,|A|=\alpha_o,\,\deg F_A=\beta_o} F_A\, Z^A \in gr_Y\, W[Z_1,\ldots,Z_t]$$

appartient à $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$, il existe $f \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(f,d_1)$ et $\nu(f,d_2) = \nu_2 = \alpha_o + \beta_o/d_2$.

Si $d_2 = \infty$, le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{J}_y$ par son complété.

<u>Démonstration</u> : Nous allons prouver ce lemme par récurrence sur ν_2. Si $0 < d_2 \leq 1$, le plus petit ν_2 possible est 1, si $1 \leq d_2 \leq \infty$, c'est $1/d_2$, si $d_2 = \infty$, c'est 0. Dans ces trois cas, tout $f \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(f,d_1)$ convient.



En général, soit $g \in \mathcal{J}_y$, $g = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} g_A z^A$ tel que $in(g,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$. Soit $\nu_1 = \alpha_o + \beta_o/d_1 = \nu(g,d_1)$ si $d_1 \neq 0$, $= \beta_o$ si $d_1 = 0$. Soit $\mu = \nu(g,d_2)$. On a $\mu \leq \nu_2$. Si on a l'égalité, c'est fini. Si $\mu < \nu_2$, soit β_1 le plus petit β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(g_A) = \beta$, $(\nu_Y(g_A), |A|) \in L_{d_2,g}$. Soit α_1 la valeur de $|A|$ correspondante et $\tau_1 = \beta_1 + \alpha_1/d_1$ si $d_1 \neq 0$, $= \beta_1$ si $d_1 = 0$. On a $\nu_1 < \tau_1$. Comme $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_2) \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$, chaque composante d_1-homogène (voir 2.1.7) de $in(g,d_2)$ appartient à $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1)$, en particulier :

$$M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| = \alpha_1,\ \nu_Y(g_A) = \beta_1} in_Y g_A Z^A .$$

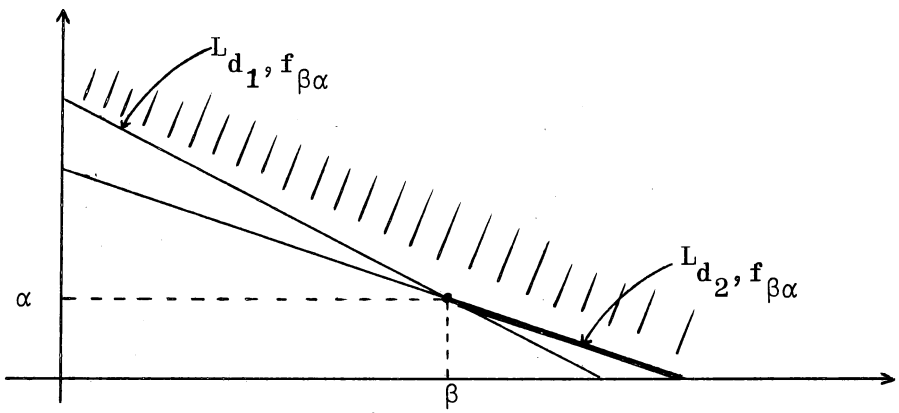
Par hypothèse de récurrence, il existe $h_1 \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{\beta_1,\alpha_1} = in(h_1,d_1)$ et $\nu(h_1,d_2) = \mu$. Posons $g_1 = g - h_1$, $g_1 \in \mathcal{J}_y$, $in(g_1,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$ et $\nu(g_1,d_2) \geq \mu$. Si $\nu(g_1,d_2) = \mu$, recommençons avec g_1 la même construction qu'avec g. On détermine β_2, α_2, τ_2 et $\alpha_2 < \alpha_1$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on trouvera donc $g_k \in \mathcal{J}_y$ tel que $in(g_k,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$, $\nu(g_k,d_2) > \mu$, puis $f \in \mathcal{J}_y$, tel que $in(f,d_1) = M_{\beta_o,\alpha_o}$ et $\nu(f,d_2) = \nu_2$.
Supposons maintenant $d_2 = \infty$. Comme ci-dessus, étant donné un g, on construit β_1, α_1, τ_1, $g_1 \in \hat{\mathcal{J}}_y$. Si $\nu(g_1,\infty) = \mu$, on construit β_2, α_2, τ_2, $h_2 \in \hat{\mathcal{J}}_y$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_2 > \beta_1$, $\tau_2 > \tau_1$ de sorte que
$h_2 \in \hat{M}_{Z,y}^{\tau_2}$ si $d_1 \geq 1$, $\hat{M}_{Z,y}^{\tau_2 d_1}$ si $0 < d_1 \leq 1$, $\in \hat{M}_{Z,y}^{\alpha_2+\beta_2}$ si $d_1 = 0$. La suite g_i est donc une suite de Cauchy de $\hat{\mathcal{J}}_y$. Si $g^1 = \lim_{i\to\infty} g_i$, $g^1 \in \hat{\mathcal{J}}_y$, $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(g^1,d_1)$ et $\nu(g^1,\infty) > \mu$. On conclut alors comme plus haut.

3.1.2* <u>Lemme</u> : Soiet $0 < d_1 < d_2 \leq \infty$ et supposons que $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_1) \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_2)$ au voisinage de y. Si $M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| = \alpha_o,\ \deg F_A = \beta_o} F_A Z^A \in gr_Y W[Z_1,\dots,Z_t]$ appartient à $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d_2)$, il existe $f \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(f,d_2)$ et $\nu(f,d_1) = \nu_1 = \alpha_o + \beta_o/d_1$.
Si $d_1 = 0$, le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{J}_y$ par $\hat{\mathcal{J}}_y$ et en posant $\nu(f,0) = \beta_o$.
La démonstration duale de la précédente est laissée aux soins du lecteur.

3.1.3$_*$ <u>Lemme</u> : Les hypothèses sont celles du lemme 3.1.2$_*$. Pour $0 \le d_1 \le d \le d_2 < \infty$

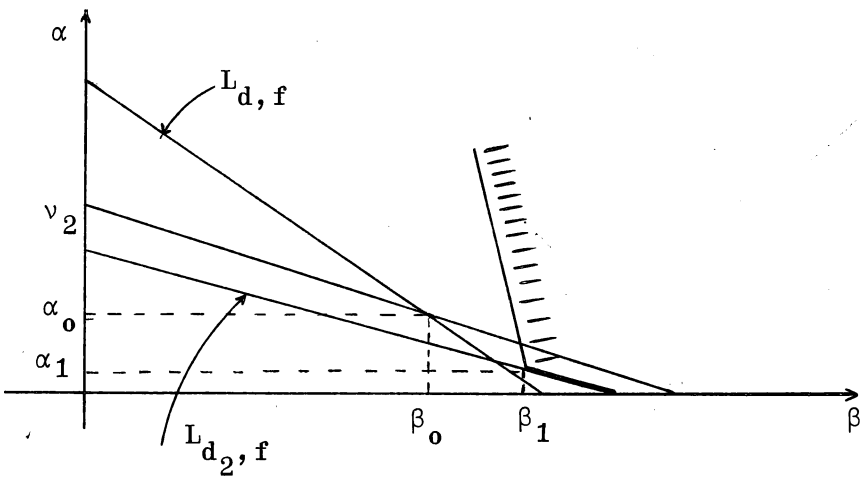
$$\mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_2) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_1) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

<u>Démonstration</u> : Soient d, $d_1 < d < d_2$ et $f \in \mathcal{J}_y$. Ecrivons $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$. Considérons $in(f, d_2)$. Il existe $M_{\beta,\alpha}$, $(\beta,\alpha) \in L_{d_2,f}$ comme au lemme 3.1.2$_*$ tels que $M_{\beta,\alpha} \in in_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_1)$ et $in(f, d_2) = \sum_{\beta,\alpha} M_{\beta\alpha}$.



Après ce lemme, il existe donc $f_{\beta\alpha} \in \hat{\mathcal{J}}_y$ tel que $M_{\beta\alpha} = in(f_{\beta\alpha}, d_1)$ et $\nu(f_{\beta\alpha}, d_2) = \nu(f, d_2)$. Par suite, $M_{\beta\alpha} = in(f_{\beta\alpha}, d)$ et

$$\mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_2) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$



Considérons maintenant $in(f,d)$. Soit β_o le plus grand β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(f_A) = \beta$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L_{d,f}$. Soit α_o la valeur de $|A|$ correspondante et $\nu_2 = \alpha_o + \beta_o/d_2$. On peut supposer $\nu(f,d_2) = \nu_2$. Sinon $\nu(f,d_2) < \nu_2$. Soit β_1 le plus petit β pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(f_A) = \beta_1$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L_{d_2,f}$. Soit α_1 la valeur de $|A|$ correspondante. Soit $M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t, |A|=\alpha_1, \nu_Y(f_A)=\beta_1} in_Y f_A Z^A$. C'est un élément de $in_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_1)$ et appliquons lui le lemme $3.1.2_*$. Il existe $h_1 \in \hat{\mathcal{J}}_y$ tel que $M_{\beta_1,\alpha_1} = in(h_1,d_1)$ et $\nu(h_1,d_2) = \nu(f,d_2)$. D'où $\nu(h_1,d) > \nu(f,d)$ et posant $f_1 = f - h_1$, $f_1 \in \hat{\mathcal{J}}_y$, $in(f,d) = in(f_1,d)$ et $\nu(f_1,d_2) \geq \nu(f,d_2)$. Si $\nu(f_1,d_2) = \nu(f,d_2)$, on recommence avec f_1 la même construction qu'avec f. On détermine α_2, β_2 et $\beta_1 < \beta_2$. Si $d_2 < \infty$, on trouvera donc au bout d'un nombre fini d'opérations $f_k \in \hat{\mathcal{J}}_y$ tel que $in(f,d) = in(f_k,d)$ et $\nu(f_k,d_2) > \nu(f,d_2)$. Si $d_2 = \infty$, la suite $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de Cauchy converge dans $\hat{\mathcal{J}}_y$ vers un élément f^1 ayant les mêmes propriétés. Dans tous les cas, on peut donc supposer $\nu(f,d_2) = \nu_2$.

A $M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t, \nu_Y(f_A) = \beta_o, |A|=\alpha_o} in_Y f_A Z^A$, on peut appliquer alors le lemee $3.1.2_*$. Il existe $g_1 \in \hat{\mathcal{J}}_y$ tel que $M_{\beta_o,\alpha_o} = in(g_1,d_1) = in(g_1,d)$ et $\nu(g_1,d_2) = \nu_2$ et on a, si $in(f,d) \neq M_{\beta_o,\alpha_o}$, $in(f,d) = in(g_1,d) + in(f-g_1,d)$.

On recommence avec $f - g_1$ la même construction qu'avec f et finalement on montre que $in(f,d) \in in_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_1)$:

$3.1.3^*$ <u>Lemme</u> : Les hypothèses sont celles du lemme $3.1.2^*$. Pour $0 \leq d_1 \leq d \leq d_2 \leq \infty$

$$\mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_1) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{J}n_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_2) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

La démonstration duale de la précédente est laissée aux soins du lecteur.

3.1.4$_*$ <u>Lemme</u> : Pour $0 < d \leq \infty$, $d \notin \mathbb{Q}$, il existe $d' \in]0,d[$ tel que, pour tout $\delta \in [d',d]$,

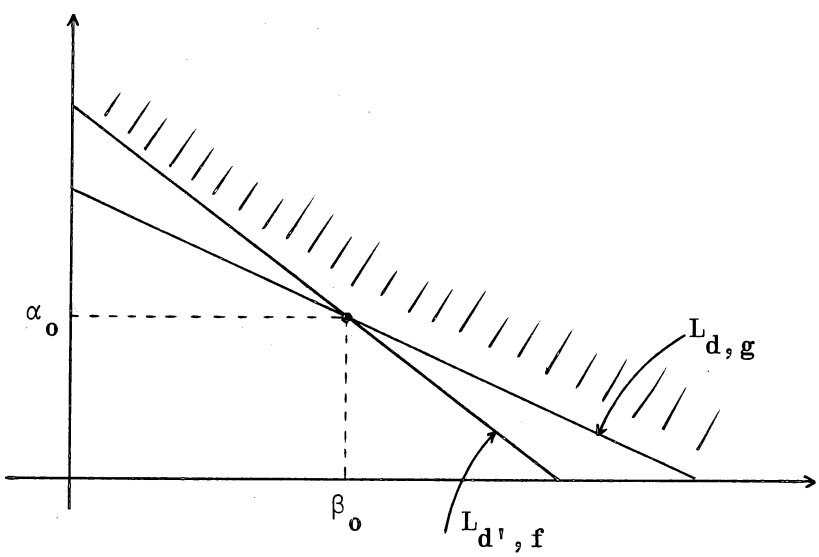
$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$$

(ce lemme s'applique au cas $d = \infty$).

<u>Démonstration</u> : Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tel que

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots,\mathrm{in}(f_i,d),\ldots) .$$

Sur une droite de pente irrationnelle, il existe au plus un point à coordonnées entières non négatives. D'où il existe $d' \in]0,d[$, tel que pour tout $\delta \in [d',d]$, $1 \leq i \leq m$, $\mathrm{in}(f_i,\delta) = \mathrm{in}(f_i,d)$. Ceci reste vrai si $d = \infty$. Dans tous les cas, $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d') \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. On peut supposer évidemment d'irrationnel. Soit $f \in \mathcal{J}_y$; il existe alors alors (β_o,α_o) tel que $\mathrm{in}(f,d') = \sum_{A\in\mathbb{N}^t,\ \deg(F_A)=\beta_o,\ |A|=\alpha_o} F_A Z^A$.



A $\mathrm{in}(f,d')$ appliquons le lemme 3.1.2$_*$. Il existe $g \in \mathcal{J}_y$ tel que $\mathrm{in}(g,d') = \mathrm{in}(f,d')$ et $\nu(g,d) = \alpha_o + \beta_o/d$. Sur $L_{d,g}$, le seul point à coordonnées entières est (β_o,α_o) si $d < \infty$. D'où $\mathrm{in}(g,d) = \mathrm{in}(g,d')$. Si

$d=\infty$, on a de toute façon $in(g,d)=in(g,d')$. Par suite, $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d') \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. En appliquant les lemmes $3.1.3_*$ et $3.1.3^*$, on déduit le résultat.

$3.1.4^*$ <u>Lemme</u> : Pour $0 \leq d < \infty$, $d \notin \mathbb{Q}$, il existe $d'' \in]d,\infty[$ tel que, pour tout $\delta \in [d,d'']$,

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

(Ce lemme s'applique au cas $d=0$).

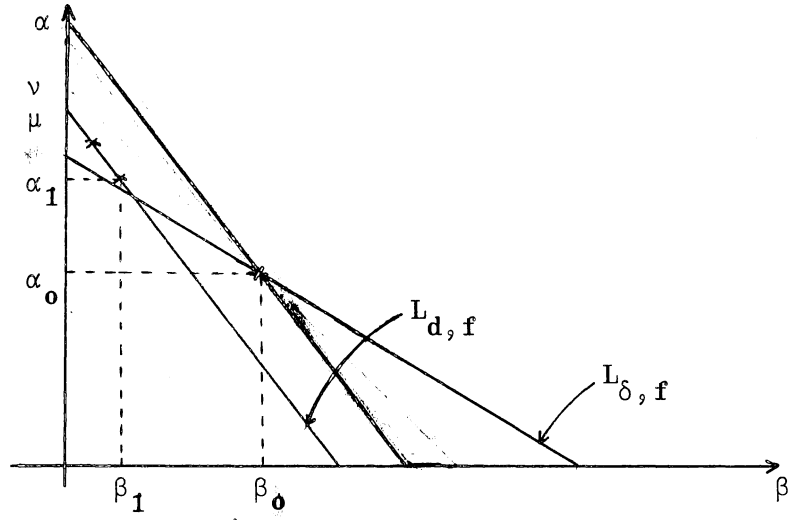
La démonstration duale de la précédente est laissée au lecteur.

$3.1.5^*$ <u>Lemme</u> : Pour $0 \leq d < \infty$, il existe $d'' \in]d,+\infty[$ tel que, pour tout $\delta \in]d,d''[$,

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d'') \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $d' > d$; considérons $H_{d'}$ l'idéal de $[gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}][Z_1,\ldots,Z_t]$ engendré par les éléments $in(f,d')$ tels que $f \in \mathcal{J}_y$ et pour tout $\delta \in]d,d'[$, $in(f,d')=in(f,\delta)$. On a $H_{d'} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. D'autre part, si $d'_1 < d'_2$, $H_{d'_2} \subset H_{d'_1}$. Une suite croissante d'idéaux dans un anneau nœthérien étant stationnaire, il existe d'' (on peut le choisir irrationnel) tel que $d < d''$ et tel que, pour tout $\delta \in]d,d'']$, $H_\delta = H_{d''}$; pour un tel δ, on a l'inclusion évidente $H_{d''} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. Nous allons montrer l'inclusion opposée.

D'après le lemme $3.1.3^*$, il suffit de montrer que $H_\delta \supset \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ pour tout δ irrationnel de $]d,d'']$.



Soit $f \in \mathcal{J}_y$, $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$ et considérons $in(f,\delta)$. Il existe (β_o, α_o) tel que $in(f,\delta) = \sum_{\deg F_A = \beta_o \ |A| = \alpha_o} F_A Z^A$, et soit $\nu = \alpha_o + \beta_o/d$,

$\mu = \nu(f,d)$ si $d \neq 0$, $\nu = \beta_o$, $\mu = \inf \nu_Y(f_A)$ si $d = 0$. De toute façon, $\mu \leq \nu$. Il s'agit de voir qu'on peut modifier f de sorte que $\mu = \nu$. Si $\mu < \nu$, considérons $in(f,d)$. Soit α_1 le plus petit α pour lequel il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $|A| = \alpha$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L(d,f)$. Soit β_1 la valeur de β correspondante. Soit $M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ \nu_Y(f_A) = \beta_1,\ |A| = \alpha_1} in_Y f_A Z^A$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $d < d+\varepsilon < \delta$, pour tout $d' \in]d, d+\varepsilon]$, $in(f,d') = M_{\beta_1,\alpha_1}$.

D'où $M_{\beta_1,\alpha_1} \in H_{d+\varepsilon} = H_\delta$. Il existe donc $(g_1, \ldots, g_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tels que, pour $1 \leq i \leq m$, $d < d' \leq \delta$, $in(g_i, d') = in(g_i, \delta)$ et $P_1, \ldots, P_m$ des éléments de $[gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}][Z]$ tels que

$$M_{\beta_1,\alpha_1} = \sum_{i=1,\ldots,m} P_i \, in(g_i, \delta) \quad .$$

Or δ étant irrationnel, $in(g_i,\delta)$ est bihomogène de degré (λ_i, μ_i). On peut donc choisir P_i bihomogène de degré $\beta_1 - \lambda_i$, $\alpha_1 - \mu_i$. Soit $P_i = \sum P_{iA} Z^A$ où $P_{iA} = 0$ si $|A| \neq \alpha_1 - \mu_i$ et $\deg P_{iA} = \beta_1 - \lambda_i$. Relevons P_{iA} dans $\mathcal{O}_{W,y}$ en p_{iA} tel que $\nu_Y(p_{iA}) = \beta_1 - \lambda_i$. Soit finalement $p_i = \sum p_{iA} z^A$ et $g = \sum_{i=1,\ldots,m} p_i g_i$. On constate que $g \in \mathcal{J}_y$, $in(g,\delta) = M_{\beta_1,\alpha_1}$

et $in(g,\delta) \in H_\delta$. Soit $f_1 = f - g$, $f_1 \in \mathcal{J}_y$, $in(f,\delta) = in(f_1,\delta)$ car $\alpha_1 + \beta_1/\delta > \nu(f,\delta)$ et $\nu(f_1,d) \geq \mu$. On conclut comme au lemme 3.1.2*.

3.1.5$_*$ <u>Lemme</u> : Pour $0 < d \leq \infty$, il existe $d' \in]0,d[$ tel que, pour tout $\delta \in [d',d[$,

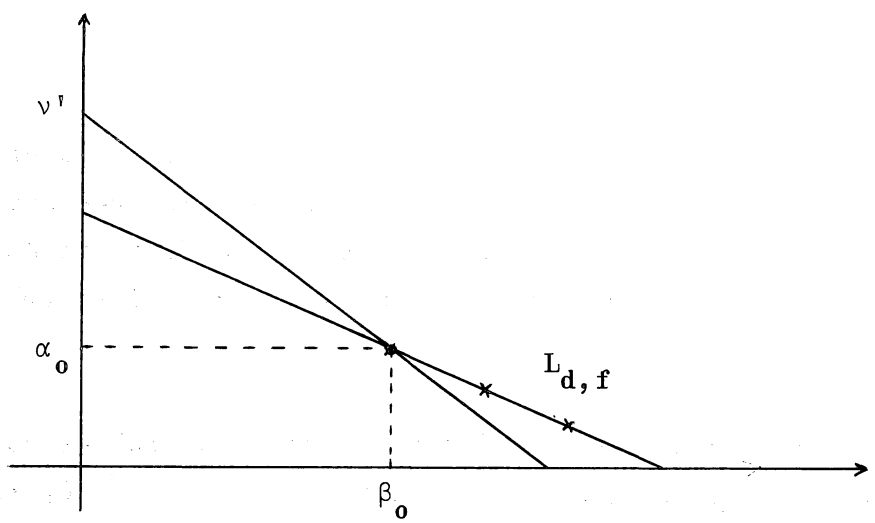
$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d') \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

3.1.6$_*$ <u>Lemme</u> : Les hypothèses et les notations sont celles du lemme 3.1.5$_*$. Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tels que, pour $1 \leq i \leq m$, $d' \leq \delta < d$, $in(f_i,\delta) = in(f_i,d')$ et que $(in(f_1,d'),\ldots,in(f_m,d')) = H_{d'} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. Alors $(in(f_1,d),\ldots,in(f_m,d)) = in_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de voir que :

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset (\ldots,in(f_i,d),\ldots) .$$



Soit $f \in \mathcal{J}_y$, $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$. Considérons $in(f,d)$. Soit β_o le plus petit β tel qu'il existe $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $\nu_Y(f_A) = \beta$, $(\nu_Y(f_A), |A|) \in L_{d,f}$. Soit $\nu' = \alpha_o + \beta_o/d'$. On peut supposer d'irrationnel. D'autre part, on peut se ramener au cas où $\nu(f,d') = \nu'$. S'il n'en était pas ainsi, on aurait $in(f,d') = \sum_{i=1,\dots,m} P_i \, in(f_i,d')$ où $P_i = \sum_A P_{iA} Z^A$ est un élément bihomogène de $[gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}][Z]$. Soit $p_{iA} \in \mathcal{O}_{W,y}$ tel que $in_Y(p_{iA}) = P_{iA}$ et soit $p_i = \sum_A p_{iA} z^A \in \mathcal{O}_{Z,y}$, $h_1 = \sum_{i=1,\dots,m} p_i f_i$. On a alors $\nu(h_1,d) > \nu(f,d)$ et donc $in(f,d) = in(f-h_1,d)$. On conclut alors de façon habituelle. Maintenant que $\nu(f,d') = \nu'$, puisque d' est irrationnel, on a :

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{\nu_Y(f_A)=\beta_o,\, |A|=\alpha_o} in_Y f_A Z^A = in(f,d') = \sum_{i=1\dots m} Q_i \, in(f_i,d')$$

où $Q_i = \sum_A Q_{iA} Z^A$ est bihomogène dans $[gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}][Z]$. Comme précédemment, soient $q_i = \sum_A q_{iA} z^A \in \mathcal{O}_{Z,y}$ et $g = f - \sum_{i=1\dots m} q_i f_i$. On a alors $\nu(\sum q_i f_i, d) \geq \nu(f,d)$ et $\nu(g,d) \geq \nu(f,d)$. Si l'inégalité est stricte : $in(f,d) = \sum_{i=1\dots m} Q_i \, in(f_i,d)$. Si il y a égalité

$in(g,d) = in(f,d) - \sum_{i=1\dots m} Q_i \, in(f_i,d)$.

Si nous recommençons avec g la même construction qu'avec f, le α_o que nous obtenons est strictement plus petit que le précédent si $d < \infty$, de sorte que l'on conclut par récurrence dans ce cas. Si $d = \infty$, c'est en fait plus simple. On a, pour $1 \leq i \leq m$, $in(f_i,d') = in(f_i,\infty)$, mais aussi $in(f,d') = in(f,\infty)$.

3.1.6* <u>Lemme</u> : Les hypothèses et les notations sont celles du lemme 3.1.5*. Soit $(f_1,\dots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tels que, pour $1 \leq i \leq m$, $d < \delta \leq d''$, $in(f_i,\delta) = in(f_i,d'')$ et que $((in(f_1,d''),\dots,in(f_m,d'')) = H_{d''} = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}$. Alors $(in(f_1,d),\dots,in(f_m,d)) = \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}$.

Nous sommes maintenant en mesure de rassembler ces informations.

3.2.1 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation en $y \in X \cap W$. Soit Y un sous-espace analytique de $X \cap W$ contenant y. On identifie, pour tout $d \in [0, \infty]$, $C^d_{\Delta, Y}$ à un sous-espace de $C_{W,Y} \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]$ au voisinage de y comme en 3.0.1.

Il existe une suite finie de rationnels $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_s < \infty$ telle que, avec $d_o = 0$, $d_{s+1} = \infty$, on ait :

1) pour tout $1 \leq i \leq s+1$, le germe de $C^d_{\Delta, Y}$ en y où $d_{i-1} < d < d_i$ est indépendant de d.

Désignons-le par $C_{\Delta, Y}(i)$ et soit $C_{\Delta, Y, i}$ le germe de $C^{d_i}_{\Delta, Y}$ en y.

2) $C_{\Delta, Y}(1) = C_{\Delta, Y, o}$

$C_{\Delta, Y}(s+1) = C_{\Delta, Y, s+1}$.

3) Les cônes $C_{\Delta, Y}(1), \ldots, C_{\Delta, Y}(s+1)$, $C_{\Delta, Y, 1}, \ldots, C_{\Delta, Y, s}$ sont tous distincts et il n'y a entre eux aucune inclusion non triviale.

<u>Démonstration</u> : Soit I un idéal de

$$gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}[Z_1, \ldots, Z_t] .$$

Soit $E_I = \{d \in [0, \infty]$ tel que $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = I\}$. Des lemmes $3.1.3_*$ et $3.1.3^*$, on déduit que E_I est un intervalle (c, d) (éventuellement vide ou réduit à un point). Des lemmes $3.1.4_*$ et $3.1.4^*$ on déduit que c est rationnel éventuellement nul, que d est aussi rationnel éventuellement infini. Du lemme $3.1.4_*$ (cas $d = \infty$) on déduit qu'il existe $d_s < \infty$ tel que $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, \infty) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ si $d_s < d \leq \infty$. De même, on déduit qu'il existe $d_1 > 0$ tel que $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, 0) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ si $0 \leq d < d_1$. On remarque que $d_1 \leq d_s$ ou bien $d_1 = \infty$, $d_s = 0$, ce qui signifie que le germe de $C^d_{\Delta, Y}$ en y est indépendant de $d \in [0, \infty]$. Considérons maintenant l'ensemble des bornes inférieures c_I des E_I qui sont

dans $[d_1, d_s]$. Cet ensemble est fini. En effet, il ne peut admettre de points d'accumulation au vu des lemmes $3.1.5_*$ et $3.1.5^*$. Nous obtenons donc ainsi les assertions 1) et 2).
Passons à 3). Montrons d'abord qu'il n'y a aucune inclusion non triviale entre les cônes $C_{\Delta,Y}(i)$ pour $i = 1,\dots,s+1$. Supposons par exemple qu'il existe $1 \leq l < j \leq s+1$, tel que $C_{\Delta,Y}(l) \supset C_{\Delta,Y}(j)$. D'après $3.1.3^*$ on peut supposer que l et j sont des entiers consécutifs, par exemple $l = j-1$. Pour simplifier, désignons par I_{j-1} et I_j les idéaux les définissant dans $[\mathrm{gr}_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}][Z]$. On a $I_{j-1} \subset I_j$. Mais I_j est bihomogène. Soit M_{jk} un système de générateurs de I_j bihomogènes. Choisissons δ_1 et δ_2 irrationnels tels que $d_{j-2} < \delta_1 < d_{j-1} < \delta_2 < d_j$ et appliquons le lemme $3.1.2^*$. Il existe $g_k \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{jk} = \mathrm{in}(g_k, \delta_1)$. D'où
$I_j \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, \delta_1) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = I_{j-1}$. Par suite $I_j = I_{j-1}$. C'est impossible.
On démontre de même qu'il n'y a pas d'inclusion dans l'autre sens.

Montrons maintenant que tous les cônes figurant dans 3) sont distincts. D'après les lemme $3.1.3_*$ et $3.1.3^*$, il suffit de montrer que $C_{\Delta,Y,i} \neq C_{\Delta,Y}(i)$ et $C_{\Delta,Y}(i+1)$ pour $i = 1,\dots,s$. En effet, si, comme ci-dessus I_i est l'idéal définissant $C_{\Delta,Y}(i)$ et si
$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = I_i$, $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ aurait un système de générateurs M_{ij} bihomogènes et il existerait $f_{ij} \in \mathcal{J}_y$ tels que

$$M_{ij} = \mathrm{in}(f_{ij}, d_i) .$$

Mais alors on pourrait trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{in}(f_{ij}, d_i + \varepsilon) = M_{ij}$, d'où $I_i \subset I_{i+1}$, ce qui est impossible.

Il reste maintenant à montrer que pour tout $i = 1,\dots,s$, $C_{\Delta,Y,i}$ ne contient pas ou n'est pas contenu dans un des autres cônes de 3). Compte-tenu des lemmes $3.1.3_*$ et $3.1.3^*$, il suffit de comparer $C_{\Delta,Y,i}$ avec $C_{\Delta,Y}(i)$ et $C_{\Delta,Y}(i+1)$. Supposons par exemple que $C_{\Delta,Y}(i+1) \supset C_{\Delta,Y,i}$. Soit $d'' = d_i + \varepsilon$ déterminé à partir de d_i comme au

lemme 3.1.5*. Alors, pour $\delta \in]d_i, d''],$

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, \delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d'') \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = H_{d''} .$$

Il existe donc $f_1, \ldots, f_m$ dans $\mathcal{J}_y$ tels que pour $\delta \in]d, d''],$ $j = 1, \ldots, m,$ $in(f_j, \delta) = in(f_j, d'')$ et que $H_{d''} = (\ldots, in(f_j, d''), \ldots)$. Alors, d'après le lemme 3.1.6*, on a aussi : $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in(f_j, d_i), \ldots)$.

Par hypothèse, on a l'inclusion :

$$H_{d''} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

Considérons sur $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$ la filtration Z-adique, et désignons par $in_{C_{W,Y}} P$ la forme initiale d'un élément pour cette filtration (l'idéal (Z) définit $C_{W,Y}$). Le gradué associé à cette filtration est encore $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$. Soit $f \in \mathcal{J}_y$, $in_{C_{W,Y}}(in(f, d_i)) = in(f, \delta)$ pour δ assez proche de d_i et plus grand. Par suite :

$$in_{C_{W,Y}}(in(f, d_i)) \in \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

Ceci signifie que $C_{\Delta,Y,i} \subset C_{C_{\Delta,Y,i}, C_{W,Y}}$. Mais une telle inclusion entraîne l'égalité, donc aussi celle de $C_{\Delta,Y,i}$ et celle de $C_{\Delta,Y}(i+1)$ dont on a vu qu'elle était impossible.
On laisse au lecteur le soin de montrer que les 3 autres inclusions éventuelles sont impossibles.

3.2.2* <u>Proposition</u> : Hypothèses et notations du théorème 3.2.1. Pour $i = 1, \ldots, s+1$, il existe $(f_{i1}, \ldots, f_{im_i})$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tel que :

1) pour $d_{i-1} < d < d_i$, $1 \leq k \leq m_i$, $in(f_{i_k}, d)$ est indépendant de d.

2) pour $d_{i-1} < d < d_i$, $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in(f_{i_k}, d), \ldots)$.

3) $\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_{i-1}) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in(f_{i_k}, d_{i-1}), \ldots)$

$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d_i) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in(f_{i_k}, d_i), \ldots)$.

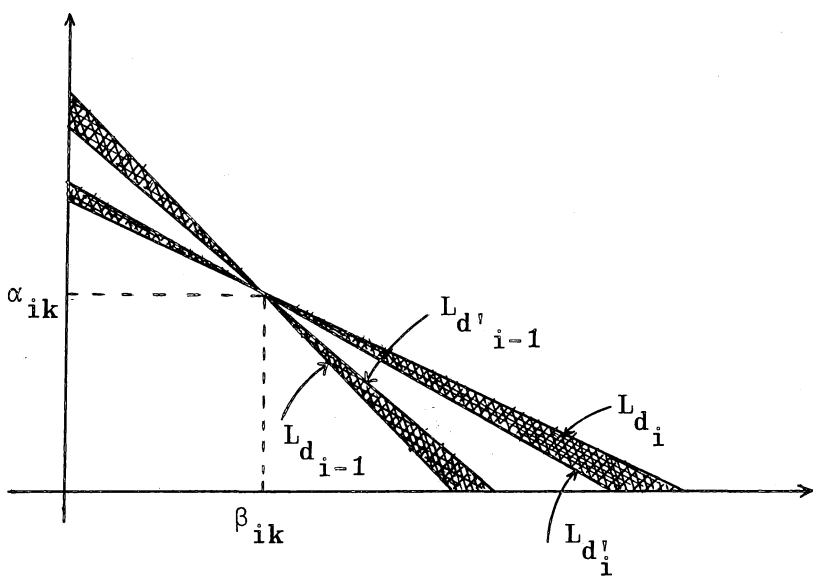
<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord $i \neq 1$, $s+1$. Pour simplifier soit

$$I_i = \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \quad \text{pour} \quad d_{i-1} < d < d_i \ .$$

Cet idéal étant d-homogène pour $d \in]d_{i-1}, d_i[$, il existe $M_{ik} = \sum_A P_{ik} Z^A$ où P_{ik} est de degré β_{ik} dans $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ et $|A| = \alpha_{ik}$ tels que $I_i = (\ldots, M_{ik}, \ldots)$. Désignons par L_δ la droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par le point $(\beta_{ik}, \alpha_{ik})$ dont la pente est $-1/\delta$. Il existe d'_{i-1} et d'_i irrationnels tels que :

$$d_{i-1} < d'_{i-1} < d'_i < d_i$$

et que les seuls points (β, α) de $\mathbb{N}^2$ situés, soit au-dessus de $L_{d_{i-1}}$ et en-dessous de $L_{d'_{i-1}}$, soit en-dessous de L_{d_i} et au-dessus de $L_{d'_i}$ sont ceux sur $L_{d_{i-1}}$ et L_{d_i} (voir dessin).



Appliquons maintenant le lemme $3.1.2_*$ à M_{ik} avec $d_1 = d'_{i-1}$ et $d_2 = d'_i$. Il existe $f_{ik} \in \mathcal{J}_y$ tel que $M_{ik} = in(f_{ik}, d)$ pour $d \in]d'_{i-1}, d'_i[$. Mais à cause du choix de d'_{i-1} et d'_i, on a aussi $M_{ik} = in(f_{ik}, d)$ pour $d_{i-1} < d < d_i$.
Si $i = 0$ (resp. $s+1$), on n'a plus besoin d'introduire d'_0 (resp. d'_{s+1}). On applique directement les lemmes $3.1.2^*$ (resp. $3.1.2_*$) avec $(0, d'_1)$ (resp. (d'_s, ∞)).
L'assertion 3) est une conséquence immédiate des lemmes $3.1.6_*$ et $3.1.6^*$.

3.2.2 <u>Définition</u> : Hypothèse et notations du théorème 3.2.1. Soit $d \in [0, \infty]$. On dit que d est un tropisme critique de Δ, le long de Y, en $y \in Y$ quand $d = 0$, si les germes en y de $C^o_{\Delta, Y}$ et de $C_{W,Y} \times_Y C_{X \cap r^{-1}(Y), Y}$ sont différents ($C_{X \cap r^{-1}(Y), Y}$ est un sous-espace de $C_{r^{-1}(Y), Y}$ qui s'identifie canoniquement à $C_{Z,W} \times_W Y$. On compare donc 2 sous-espaces de $C_{W,Y} \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]$) quand $d \in]0, \infty[$, si d est l'un des d_i $i = 1, \ldots, s$ du théorème 3.2.1 quand $d = \infty$ si les germes en y de $C^\infty_{\Delta, Y}$ et de $C_{X \cap W, Y} \times_Y [C_{Z,W} \times_W Y]$ sont différents.

3.2.3 <u>Remarque</u> : Les tropismes critiques sont des nombres rationnels positifs (éventuellement infini) ; ceux qui sont strictement plus grands que 1 ne dépendent pas de la rétraction figurant dans Δ.

3.2.4 <u>Définition</u> : Hypothèses et notations du théorème 3.2.1. On note $d_{\Delta, Y, y}$ le plus petit tropisme critique de Δ, le long de Y en y.

3.2.5 <u>Proposition</u> : Pour que $d_{\Delta, Y, y} \neq 0$, il faut et il suffit qu'il existe $(f_1, \ldots, f_{m_1})$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_y$ tel que, désignant par d_1 le 1er tropisme critique non nul :

1) pour $0 \leq d < d_1$, $1 \leq k \leq m_1$, $in(f_k, d)$ est indépendant de d avec $in(f_k, d) = 1 \otimes Q_k \in gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} (gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y})$ où Q_k est un élément homogène de $gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{Y,y}$.

2) pour $0 \leq d \leq d_1$, $\mathfrak{In}_Y(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in(f_k,d), \ldots)$.

<u>Démonstration</u> : La condition est nécessaire. En effet on se souvient (théorème 3.2.1, 2)) que $C^{o}_{\Delta,Y} = C_{\Delta,Y}(1)$. Si on se reporte à la démonstration de $3.2.2_*$, on s'aperçoit que, puisque $C_{\Delta,Y}(1)$ est le germe en y de $C_{W,Y} \times C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$, on peut choisir les $M_k = \sum_A P_{kA} Z^A$ de sorte que P_{kA} soit homogène de degré 0 dans $gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ et $|A| = \beta_\alpha$. M_k est donc homogène de degré α_k dans $\mathcal{O}_{Y,y}[Z] \simeq gr_W Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$. On conclut comme dans $3.2.2_*$.

La condition est suffisante. On remarque que l'on a toujours : $C^{o}_{\underline{\Delta},Y} \subset C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ au voisinage de y. En effet, si $\bar{\mathcal{J}}_y$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{r^{-1}(Y),y} \simeq \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$ définissant $X \cap r^{-1}(Y)$ dans $r^{-1}(Y)$ au voisinage de y, $\bar{f} \in \bar{\mathcal{J}}_y$ si et seulement s'il existe $f = \sum f_A z^A \in \mathcal{J}_y$ tel que $\bar{f} = \sum \bar{f}_A z^A$ où $\bar{f}_A$ est l'image de f_A par la surjection canonique de $\mathcal{O}_{W,y}$ sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. On a donc :

$$1 \otimes in_Y \bar{f} = in_Y(f,0) \ .$$

D'où l'inclusion annoncée.
Mais d'autre part $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, in_Y(f_k,0), \ldots)$. Puisque $in_Y(f_k,0) = 1 \otimes Q_k$, $\bar{f}_k \neq 0$. Donc $in_Y(f_k,0) = 1 \otimes in_Y \bar{f}_k$. Par conséquent : $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset in_Y(r^{-1}(Y) \cap X) \ . \ gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$, ce qui assure que $C^{o}_{\Delta,Y} \supset C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ au voisinage de y.

3.2.6 <u>Proposition</u> : Pour que $d_{\Delta,Y,y} = \infty$ ou que Δ n'ait aucun tropisme critique le long de Y en y, il faut et il suffit que :

1) W soit localement contenu, au voisinage de y, dans X ;
2) il existe $d \in [0,\infty]$ tel que :

(*) $$C^{d}_{\Delta,Y} = C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C_{X,W}(Y) \quad \text{au voisinage de y.}$$

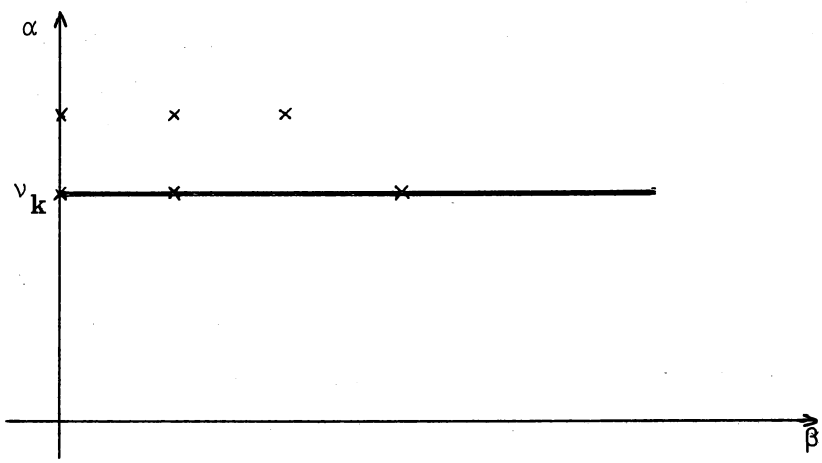
S'il en est ainsi, l'égalité précédente est vraie pour tout $d \in [0,\infty]$. En particulier, on a :

$$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{X,W}(Y) \text{ au voisinage de } y.$$

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord que $d_{\underline{\Delta},Y,y} = \infty$. Alors il existe $(f_1,\ldots,f_m)$ dans $\mathcal{J}_y$ tels que :

1) pour $0 \le d \le \infty$, $1 \le k \le m$, $in(f_k,d)$ est indépendant de d avec $in(f_k,d) = M_k \in \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$.

2) pour $0 \le d \le \infty$, $\mathcal{J}n_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y} = (\ldots, M_k, \ldots)$. Le diagramme de Newton $F(f_k,\underline{\Delta})$ est donc comme ci-dessous (voir 2.1.9) :



Soit ν_k le degré (en Z) de M_k. Dans $f_k = \Sigma f_{kA} z^A$, $f_{kA} = 0$ si $|A| < \nu_k$. On obtient donc 1). De plus $f_k \in (z)^{\nu_k}$, donc $in_W f_k = \sum_{|A|=\nu_k} f_{kA} Z^A$ et finalement

$$M_k = in_W f_k \otimes 1 \in gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{Y,y} .$$

Pour tout d, on a donc l'égalité des cônes annoncée. En particulier :
$C^{o}_{\Delta,Y} = C_{W,Y} \times_Y C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{W,Y} \times_Y C_{X,W}(Y)$ au voisinage de y.

Réciproquement, choisissons f_k dans $\mathcal{J}_y$ tels que $(\ldots, in_W f_k, \ldots)$ définisse $gr_W X$ dans $gr_W Z = \mathcal{O}_W[Z]$. $in_W f_k \otimes 1 \in gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}$ est non nul si et seulement si dans le développement $f_k = \Sigma f_{kA} z^A$ il existe A tel que $|A| = \nu_k = \nu_W(f_A)$ et que $\nu_Y(f_A) = 0$. Dans ces conditions $in_W f_k \otimes 1 = in(f_k, 0) = M_k \in \mathcal{O}_{Y,y}[Z]$. On sait donc que (d'après (*)) :

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) = (\ldots, M_k, \ldots) .$$

Mais la considération du polygone de Newton de f_k nous montre aussi que, pour tout $\delta \in [0,\infty]$, $M_k = in(f_k, \delta)$. On a donc :

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, \delta) \otimes \mathcal{O}_{Y,y} .$$

D'après le théorème 3.2.1, on sait qu'aucune inclusion non triviale n'est possible. D'où tous les $C^d_{\Delta,Y}$ pour $d \in [0,\infty]$ ont même germe en y. De plus, la condition 1) de 3.2.5 étant satisfaite, $d_{\Delta,Y,y} = \infty$.

3.3.1 Soient $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation en y, $\underline{\Delta} = (Z, Z, W; r)$ l'installation ambiante associée, $\underline{\Delta}|W = (W, W, W; \mathrm{Id}\, W)$ la restriction de $\underline{\Delta}$ à W. Pour tout $d \in [0,\infty]$, à Y sous-espace analytique de $W \cap X$ et à ces données nous pouvons associer canoniquement une nouvelle installation :

$$\mathcal{C}^d_{\Delta,Y} = (C^d_{\Delta,Y}, C^d_{\underline{\Delta},Y}, C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}; dr)$$

dr est le morphisme figurant dans 2.1.5.
On peut se demander quels tropismes critiques apparaissent dans ces nouvelles installations. Nous allons voir qu'aucun nouveau rationnel n'intervient (de sorte qu'itérer la construction de 3.3.1 n'a pas d'intérêt). Précisément, on a la proposition suivante :

3.3.2 <u>Proposition</u> : Identifiant $C^{\delta}_{(\mathcal{C}^{d}_{\underline{\Delta},Y}),Y}$ avec $C_{W,Y} \times_{Y} [C_{Z,W} \times_{W} Y]$ canoniquement, on a :

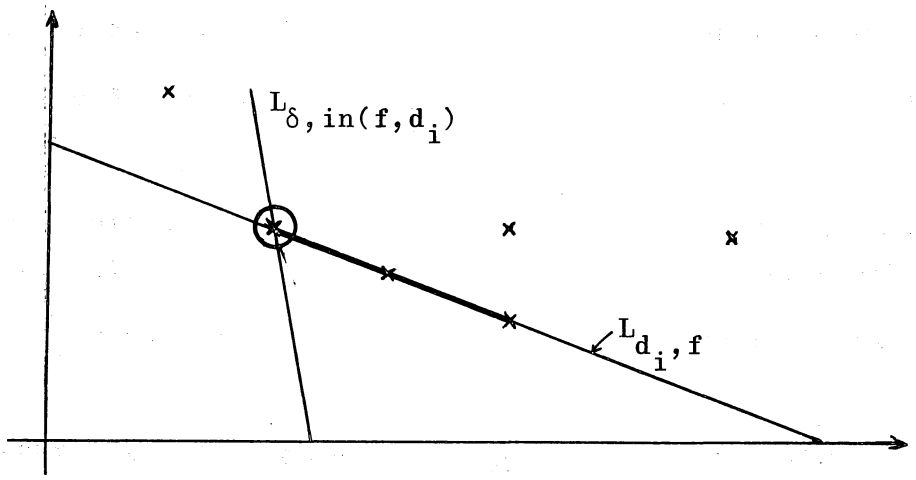
$$C^{\delta}_{(\mathcal{C}^{d}_{\underline{\Delta},Y}),Y} = C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \quad \text{si } d \text{ n'est pas un tropisme critique} \neq 0 \text{ ou } \infty$$

$$= C_{\underline{\Delta},Y}(i) \quad \text{si } d = d_i \text{ et } \delta < d_i$$

$$= C_{\underline{\Delta},Y}(i+1) \quad \text{si } d = d_i \text{ et } d_i < \delta$$

$$= C^{d_i}_{\underline{\Delta},Y} \quad \text{si } d = d_i = \delta \ .$$

<u>Démonstration</u> : Dans le premier cas, l'assertion est évidente puisque $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ est un $\mathfrak{J}$déal bihomogène.
Supposons maintenant $d = d_i$ et $\delta < d_i$. Prenant les notations condensées du paragraphe précédent, pour $f \in \mathcal{J}_y$ idéal de $\mathcal{O}_{Z,y}$ définissant X, $in(in(f,d_i),\delta) = in(f,d_i - \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ dépendant de f.



Néanmoins, ceci appartient à $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ pour tout $d \in]d_{i-1}, d_i[$. On obtient donc l'inclusion de $C_{\underline{\Delta},Y}(i)$ dans le cône qui nous intéresse.
Réciproquement choisissons un système d'éléments $(f_1,\ldots,f_m)$ de $\mathcal{J}_y$ satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3) de 3.2.2 pour $d_{i-1} < d < d_i$.
Alors, pour un tel d, $in(f_k,d) = in(in(f_k,d_i),\delta)$. De 2), on déduit que $C_{\underline{\Delta},Y}(i)$ contient le cône que nous voulons déterminer.

Ils sont donc égaux.

On laisse au lecteur le soin de traiter les 2 autres cas.

3.3.3 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation en $y \in X \cap W$. Alors c'est une bonne installation dans un voisinage de y sur $X \cap W$. Soit Y un sous-espace analytique de $W \cap X$ contenant y. Il existe Ω, un voisinage de y dans Y, tel que, si $x \in \Omega$, la suite des tropismes critiques de Δ le long de Y en x soit extraite de la suite des tropismes critiques de Δ le long de Y en y

En particulier, $d_{\Delta,Y,x} \geq d_{\Delta,Y,y} \quad \forall\, x \in \Omega$.

<u>Démonstration</u> : Soit $d_1, \ldots, d_s$ la suite des tropismes critiques de Δ le long de Y en y, différents de 0 ou ∞. Choisissons $\delta < \inf\limits_{i=1,\ldots,s} d_i$ et $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon < \inf\limits_{i=1,\ldots,s-1} (d_{i+1} - d_i)$. D'après 3.3.2,

$$i = 1, \ldots, s \qquad C^{\delta}_{\mathcal{C}^{d_i}_{\Delta,Y},\, Y} = C^{d_i - \varepsilon}_{\Delta,Y} \quad \text{au voisinage de } y \text{ dans } Y.$$

En un point x de ce voisinage, ou bien d_i est tropisme critique et le germe en x de $C^{\delta}_{\mathcal{C}^{d_i}_{\Delta,Y},\, Y} = C^{d_i - \varepsilon'}_{\Delta,Y}$ pour tout ε' assez petit, est aussi égal au germe en x de $C^{d_i - \varepsilon}_{\Delta,Y}$. Aucun tropisme critique nouveau n'apparaît donc dans $[d_i - \varepsilon, d_i[$. Ou bien d_i n'est pas tropisme critique et le germe en x de $C^{\delta}_{\mathcal{C}^{d_i}_{\Delta,Y},\, Y}$, égal au germe en x de $C^{d_i}_{\Delta,Y}$, est aussi égal au germe en x de $C^{d_i - \varepsilon}_{\Delta,Y}$. Dans ce cas, il n'y a aucun tropisme critique en x dans $[d_i - \varepsilon, d_i]$.

Par un raisonnement analogue, on construit un voisinage de y dans Y, tel qu'en tout point x il n'y ait aucun tropisme critique en x dans $]d_i, d_i + \varepsilon[$.

On déduit maintenant des lemmes $3.1.3_*$ et $3.1.3^*$ un nouveau voisinage

de y dans Y tel qu'aucun tropisme critique nouveau n'apparaisse dans $[d_i+\varepsilon, d_{i+1}-\varepsilon]$, $i=1,\ldots,s$, et aussi dans $]0,d_1-\varepsilon]$ et $[d_s+\varepsilon,\infty[$.

En effet $C^{o}_{\Delta,Y}$ et $C^{d_1-\varepsilon}_{\Delta,Y}$, qui ont même germe en y, ont encore même germe, surtout un voisinage. Finalement on a construit un voisinage de y sur lequel aucun tropisme critique nouveau différent de 0 ou ∞ ne peut apparaître. Maintenant si 0 (resp. ∞) n'est pas tropisme critique en y, $C^{o}_{\Delta,Y}$ et $C_{W,Y} \times_Y C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ (resp. $C^{\infty}_{\Delta,Y}$ et $C_{X\cap W,Y} \times_Y C_{r^{-1}(Y),Y}$) ont même germe en y. Ils conservent aussi même germe sur un voisinage.

3.3.4 Un exemple illustrant 3.3.3 sera donné en 11.2.3.

*
* *
*

§ 4. LA d-FONCTION DE SAMUEL D'UNE INSTALLATION

4.1.1 <u>Définition</u> : Soient $\Delta/S = (X, Z, W ; r)$ une S-installation, x un point de $X \cap W$, s son image dans S. Soit $d \in]0,\infty[$.
On appelle d-fonction de Samuel de Δ/S en x et on note $H_{\Delta/S,x}(d)$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$ qui à μ associe $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(x)$.
Pour simplifier, on notera $H_{\Delta/S,x}(\mu,d)$ sa valeur en μ.
Si Δ est une installation au-dessus d'un point, on notera $H_{\Delta,x}(d)$.

4.1.2 <u>Remarque</u> : Soit $\Delta(s) = s \times_S \Delta$ l'installation, au-dessus de s, fibre de Δ/S. D'après 1.39, remarquant que $x \times_S X = x \times_s s \times_S X = x \times_s X(s) = X(s)$ car il n'y a pas d'extension résiduelle en géométrie analytique, on a

$$H_{\Delta/S,x}(d) = H_{\Delta(s),x}(d) .$$

4.1.3 <u>Remarque</u> : De 1.20, on déduit que :

$$H_{\Delta/S,x}(1) = H_{X/S,x} = H_{X(s),x} .$$

C'est la fonction de Samuel relative usuelle. A noter cependant qu'ici on la considère comme fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$, sa valeur en μ non entier est égale à sa valeur en $[\mu]$, la partie entière de μ.

4.1.4 <u>Remarque</u> : On a :

$$H_{\Delta/S,x}(\mu,d) = \sum_{\nu \in \mathbb{R}^+, \nu \leq \mu} \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, [\mathrm{gr}^{\mu}_{x}\, \Delta(s) ; d] .$$

(Tous les termes de cette somme sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

4.1.5 <u>Définition</u> : Pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on pose :

$$H^i_{\Delta/S,x}(d) = H_{\Delta \times \mathbb{C}^{i-1}/S,x}(d) = H_{\Delta(s) \times \mathbb{C}^{i-1},x}(d)$$

(voir 1.25).
Pour mémoire $\Delta \times \mathbb{C}^{i-1}/S = (X \times \mathbb{C}^{i-1},\ Z \times \mathbb{C}^{i-1},\ W \times \mathbb{C}^{i-1},\ r \times \mathrm{Id}\,\mathbb{C}^{i-1})$, vu comme S-installation.

4.1.6 <u>Proposition</u> : Pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, on a :

$$H^{i+1}_{\Delta/S,x}(\mu,d) = \sum_{j \in \mathbb{N},\, 0 \leq j \leq d\mu} H^i_{\Delta/S,x}(\mu - j/d) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On montre tout d'abord que :
$C^d_{\Delta(s) \times \mathbb{C}^i,x} = C^d_{\Delta(s),x} \times \mathbb{C}^i$. Si $T_1,\ldots,T_i$ est un système de coordonnées sur C^i, la structure d-graduée sur $[gr_x \Delta(s);d][T_1,\ldots,T_i]$ est celle qui, à un élément $Q_B T^B$, où Q_B est homogène de degré ν, donne le degré $\nu + |B|/d$. Ce fait est évident si Δ est une installation ambiante en x (cf. 2.1.5 et 2.1.7). On vérifie ensuite que $\mathfrak{Jn}_x(\Delta(s),\underline{\Delta}(s),d)$ engendre $\mathfrak{Jn}_x(\Delta(s) \times \mathbb{C}^i,\ \underline{\Delta}(s) \times \mathbb{C}^i, d)$ dans $[gr_x \Delta(s);\ d][T]$. On a alors :

$$H_{\Delta(s) \times \mathbb{C}^i,x}(\mu,d) = \sum_{h \in \mathbb{R}^+,\, j \in \mathbb{N};\, h + j/d \leq \mu} \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}[gr^h_x \Delta(s);d] \times \binom{j+i-1}{i-1}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N},\, 0 \leq j \leq d\mu} \binom{j+i-1}{i-1} H_{\Delta(s),x}(\mu - j/d, d) \quad .$$

Les propriétés élémentaires des combinaisons permettent d'achever la vérification.

4.1.7 Pour abréger les notations dans 4.1.6, nous utiliserons le produit de convolution. Nous remarquons que si on définit, pour une S-installation Δ/S, la fonction caractéristique en x comme l'application $G_{\Delta/S,x}(d)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$ qui à μ associe $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, gr^{\mu}_x \Delta(s);d$, on a :

4.1.8 $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, $\quad H^{i+1}_{\Delta/S,x}(d) = H^{i}_{\Delta/S,x}(d) * G_{(\mathbb{C}),0}(d)$.

On rappelle que $(\mathbb{C}) = (\mathbb{C},\mathbb{C},\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Id}\,\mathbb{C})$.

4.1.9
$$H^{1}_{\Delta/S,x}(d) = H^{1}_{\{x\},x}(d) * G_{\Delta/S,x}(d) .$$

Ce n'est autre que 4.1.4.

4.1.10 Soit Δ/S une installation ambiante en x, $\Delta|W = (W) = (W,W,W;\mathrm{Id}\,W)$, on a

$$H^{1}_{\Delta/S,x}(d) = H^{1}_{r^{-1}(x),x} * G_{\Delta|W,x}(d) .$$

$$= H^{1}_{\Delta|W,x}(d) * G_{r^{-1}(x),x} .$$

<u>Démonstration</u> : D'après 2.1.7, $gr_x\,\Delta(s);d = [gr_x\,\Delta|W(s);d][Z_1,\ldots,Z_r]$. On a donc

$$G_{\Delta/S,x}(d) = G_{\Delta|W/S,x}(d) * G_{r^{-1}(x),x} .$$

On en déduit les 2 égalités de 4.1.9 en remarquant que $H^{1}_{\{x\},x}(d)$ est la fonction constante égale à 1 et ne dépend pas de d, en se souvenant de plus que le produit de convolution est associatif.

4.2.1 Nous allons maintenant étudier la variation en fonction de $d \in [0,\infty]$, de la δ-fonction de Samuel de $\mathcal{C}^{d}_{\Delta,x}$ (3.3.1). Le théorème suivant va préciser, de ce point de vue, la proposition 3.3.2.

4.2.2 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$. Soit $\delta \in]0,\infty[$ un réel fixé. Soit $d_1,\ldots,d_s$ la suite des tropismes critiques de Δ en x qui appartiennent à $]0,\infty[$.
Sur $\mathbb{N}^{\mathbb{R}^+}$, ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$, on considère l'ordre produit.

Il existe $H_1, \ldots, H_{s+1}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{R}^+}$ tel que :

- si $\delta \in]d_i , d_{i+1}[$, on ait :

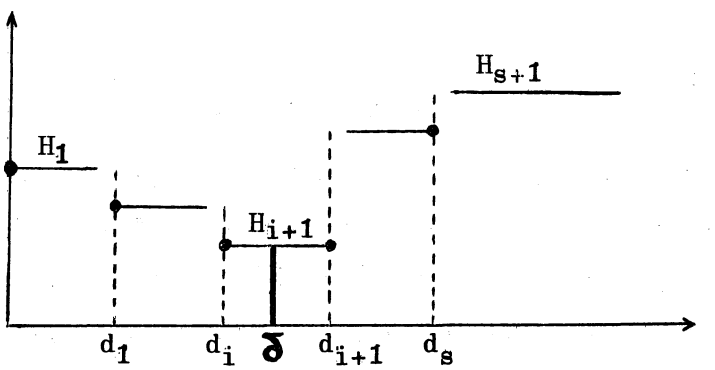
pour $1 \leq j \leq i$, $\quad d \in [d_{j-1} , d_j[$

$\quad d \in [d_i , d_{i+1}]$

$i+1 \leq k \leq s$, $\quad d \in]d_k , d_{k+1}]$

$$H_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,x},x}(\delta) \begin{cases} = H_j \\ = H_{i+1} \\ = H_{k+1} \end{cases}$$

avec $\quad H_1 > H_2 \ldots . > H_{i+1} < H_{i+2} < \ldots . < H_{s+1}$



- si $\delta = d_i$, on ait :

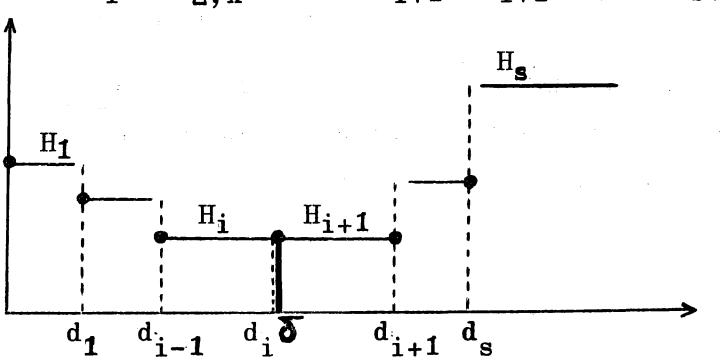
pour $1 \leq j \leq i$, $\quad d \in [d_{j-1} , d_j[$

$\quad d = d_i$

$i \leq k \leq s$, $\quad d \in]d_k , d_{k+1}]$

$$H_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,x},x}(\delta) \begin{cases} = H_j \\ = H_{\Delta,x}(d_i) \\ = H_{k+1} \end{cases}$$

avec $\quad H_1 > H_2 > \ldots > H_i = H_{\Delta,x}(d_i) = H_{i+1} < H_{i+2} < \ldots < H_{s+1}$



<u>Démonstration</u> : Posons, pour $1 \leq i \leq s+1$,

$$\mathcal{C}_{\Delta,x}(i) = (C_{\Delta,x}(i),\ C_{W,x} \times C_{Z,W} \underset{W}{\times} x,\ C_{W,x}\ ;\ dr)$$

et

$$H_i = H_{\mathcal{C}_{\Delta,x}(i),x}(\delta)\ .$$

De 4.1.9 et 3.3.2, on déduit toutes les égalités énoncées dans le théorème sauf dans le cas où $\delta = d_i$, $H_i = H_{i+1} = H_{\Delta,x}(d_i)$.

• Montrons maintenant ce point :
Ecrivons $I = in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d_i)$. Par définition :

$$H_{\Delta,x}(\mu, d_i) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\left[\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\, a+b/d_i \leq \mu} gr_x^b\, W[Z]_a\right] - \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\left[\bigoplus_{\nu\in\mathbb{R}^+,\, \nu\leq\mu} I_\nu\right]$$

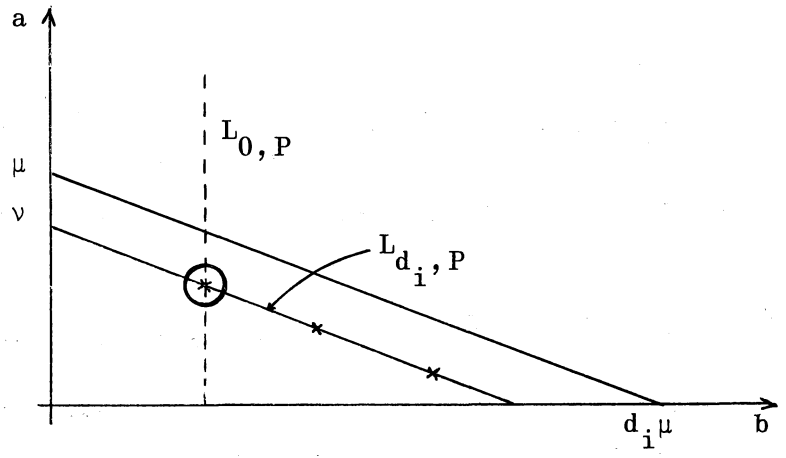
où $gr_x^b\, W[Z]_a$ désigne les éléments de la forme $\Sigma P_A Z^A$ avec $|A| = a$, $\deg P_A = b$ et où I_ν est la composante homogène de degré ν de I qui est un idéal d_i-gradué. Toujours d'après 3.3.2, $C_{\Delta,x}(i)$ est défini par l'idéal bihomogène de $gr_x\, W[Z]$ engendré par les $in_x(P, \mathcal{C}^{d_i}_{\underline{\Delta},x}, 0)$ (qui n'est rien d'autre que la forme initiale de P pour la graduation $\overline{N}$-adique de $gr_x\, W[Z]$ avec $\overline{N} = \bigoplus_{b\geq 1} gr_x^b\, W$ (cf. 2.1.8)) lorsque P parcourt l'ensemble des éléments homogènes de I. Désignons cet idéal par $in(I,0)$ et sa composante d_i-homogène de degré ν par $in^\nu(I,0)$. Alors :

$$H_i(\mu) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\left[\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\, a+b/d_i \leq \mu} gr_x^b\, W[Z]_a\right] - \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\left[\bigoplus_{\nu\in\mathbb{R}^+,\, \nu\leq\mu} in^\nu(I,0)\right]\ .$$

Soit :

$$A_\mu = gr_x\, W[Z] \Big/ I + \left(\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\, a+b/d_i > \mu} gr_x^b\, W[Z]_a\right)\ .$$

C'est une $\mathbb{C}$-algèbre dont la longueur est $H_{\Delta,x}(\mu, d_i)$. Si, pour $\nu \leq \mu$, $P \in I_\nu$, $in(P,0) = in_{\overline{N}}\, P \in in^\nu(I,0)$, réciproquement, si $M \in in^\nu(I,0)$, $M = in(P,0)$ où $P \in I_\nu$.



Par conséquent

$$\mathrm{gr}_{\overline{N}} A_\mu = \mathrm{gr}_x W[Z] \Big/ \mathrm{in}(I,0) + \left(\bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/d_i>\mu} \mathrm{gr}_x^b W[Z]_a \right) .$$

C'est une $\mathbb{C}$-algèbre dont la longueur est $H_i(\mu)$.
Mais, si A est un anneau de longueur finie, son gradué associé, gr A, pour n'importe quelle filtration est un anneau de longueur finie et ces deux longueurs sont les mêmes. C'est une conséquence du théorème de Jordan-Hölder. On a donc :

$$H_i(\mu) = H_{\underline{\Delta},x}(\mu, d_i) .$$

On montre de même que :

$$H_{i+1}(\mu) = H_{\underline{\Delta},x}(\mu, d_i) .$$

• Passons maintenant à la démonstration des inégalités.
Nous allons montrer que si $d_j < \delta$, $H_j > H_{j+1}$.
Ecrivons $I = \mathrm{in}_x(\Delta, \underline{\Delta}, d_j)$. D'après 3.3.2, $C_{\Delta,x}(j+1)$ est défini par l'idéal bihomogène de $\mathrm{gr}_x W[Z]$ engendré par les $\mathrm{in}_x(P, \mathcal{C}_{\underline{\Delta},x}^{d_j}, \infty)$ (cf. 2.1.8) lorsque P parcourt l'ensemble des éléments homogènes de I. Désignons cet idéal par $\mathrm{in}(I,\infty)$ et sa composante δ-homogène de degré ν par $\mathrm{in}^\nu(I,\infty)$. Alors :

$$H_{j+1}(\mu) = H_{\underline{\Delta},x}(\mu,\delta) - \mathrm{rang}_{\mathbb{C}} \left[\bigoplus_{\nu\in\mathbb{R}^+,\, \nu\le\mu} \mathrm{in}^\nu(I,\infty) \right] .$$

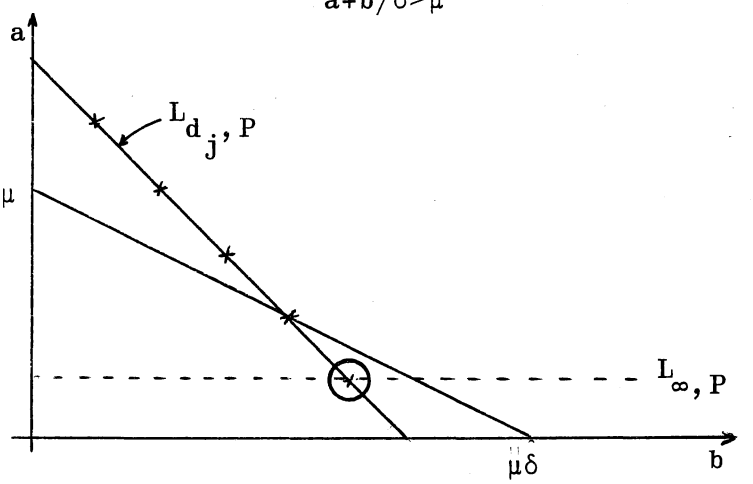
Soit :

$$A_\mu = gr_x W[Z] \Big/ I + \left(\bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} gr_x^b W[Z]_a \right) .$$

Soit $gr_{(Z)} A_\mu$ le gradué de A_μ pour sa filtration (Z)-adique.

$$gr_{(Z)} A_\mu = gr_x W[Z] \Big/ in(I,\infty) + \left(\bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} gr_x^b W[Z]_a \right) .$$

En effet, il suffit de voir que la (Z)-forme initiale d'un élément $R+S$ où $R\in I$, $S \in \bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} gr_x^b W[Z]_a$ est dans $in(I,\infty) + \bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} gr_x^b W[Z]_a$, et il suffit même de se limiter au cas où $in_{(Z)} R = in_{(Z)} S$. Mais alors, I étant d_j-homogène et d_j étant inférieur ou égal à δ, R est dans $\bigoplus_{a+b/\delta>\mu} gr_x^b W[Z]_a$.



On a donc, toujours d'après Jordan-Hölder :

$$H_{j+1}(\mu) = \lg A_\mu .$$

De même, d'après 3.3.2, $C_{\Delta,x}(j)$ est défini par l'idéal bihomogène de $gr_x W[Z]$ engendré par les $in_x(P, \mathcal{C}_{\underline{\Delta},x}^{d_j}, 0)$ lorsque P parcourt l'ensemble des éléments de I. Soit $in(I,0)$ cet idéal, $in^\nu(I,0)$ sa composante δ-homogène de degré ν.

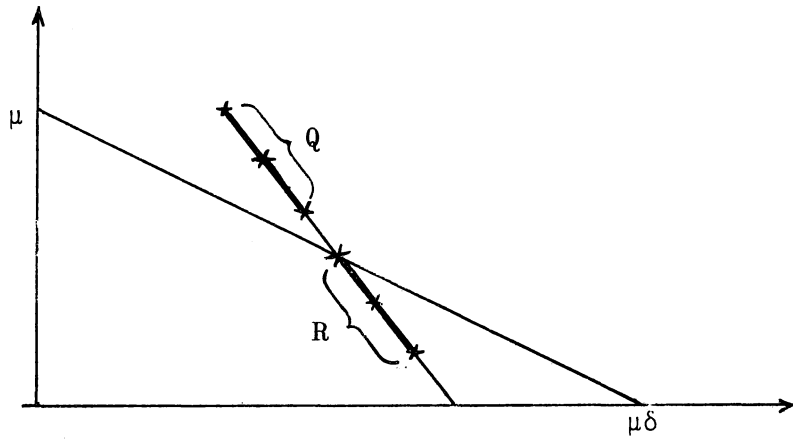
Alors :

$$H_j(\mu) = H_{\underline{A},x}(\mu,\delta) - \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\left[\bigoplus_{\nu\in\mathbb{R}^+,\,\nu\leq\mu} \mathrm{in}^{\nu}(I,0)\right] .$$

Considérons maintenant $\mathrm{gr}_{\overline{N}} A_\mu$ où $\overline{N} = \bigoplus_{b\geq 1} \mathrm{gr}_x^b W$. On a une surjection canonique,

$$\varphi_\mu : \mathrm{gr}_x W[Z] \Big/ \mathrm{in}(I,0) + \left(\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} \mathrm{gr}_x^b W[Z]_a\right) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\overline{N}} A_\mu .$$

On en déduit finalement que : $H_j(\mu) \geq \lg \mathrm{gr}_{\overline{N}} A_\mu = \lg A_\mu = H_{j+1}(\mu)$, et il y a égalité si et seulement si φ_μ est un isomorphisme.
Supposons qu'il en soit ainsi. Soit $P\in I$, d_j-homogène. Alors $P = \sum_A P_A Z^A$ où $\deg P_A = d_j(\nu_j - |A|)$ si ν_j est le d_j-degré de P.
Soit $Q = \sum_{A,\,|A|+\deg P_A/\delta>\mu} P_A Z^A$ et $R = P - Q$.



On a donc :

$$\mathrm{in}_{\overline{N}} R \in \mathrm{in}(I,0) + \left(\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{N}^2,\, a+b/\delta>\mu} \mathrm{gr}_x^b W[Z]_a\right) .$$

Tous les idéaux intervenant étant bihomogènes, il existe $S_1 \in I$, d_j-homogène de degré ν_j tel que $\mathrm{in}_{\overline{N}} R = \mathrm{in}_{\overline{N}} S_1$. Soit $R_1 = R - S_1$, $\nu_{\overline{N}}(R_1) < \nu_{\overline{N}}(R)$. Soit $P_1 = P - S_1$. On constate que $P_1 \in I$ est d_j-homogène de degré ν_j et que $P_1 = Q + R_1$. On recommence avec P_1 la même construction qu'avec P ; par récurrence sur $\nu_{\overline{N}}(R_i)$, on montre donc que Q est

dans I. Puisque $R = P - Q$, on obtient donc finalement que R est dans I. Si donc, pour tout $\nu \leq \mu$, $H_j(\nu) = H_{j+1}(\nu)$, les considérations précédentes entraînent que si $P \in I$ et si $P \in \bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/\delta \leq \mu} gr_x^b W[Z]_a$, P est somme d'éléments bihomogènes, tous dans I.
Si on avait $H_j = H_{j+1}$, $I = in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d_j)$ serait donc un idéal bihomogène. De 3.3.2, il résulterait que $C_{\Delta,x}(j) = C_{\Delta,x}(j+1)$. C'est contradictoire.

- On montre de même que, si $\delta < d_k$, $H_k < H_{k+1}$.

4.2.3 <u>Remarque</u> : Au cours de la démonstration de 4.2.2, nous avons obtenu le raffinement suivant. Soit $d_j < \delta$. Si, pour tout $\nu \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \nu \leq \mu$, $H_j(\nu) = H_{j+1}(\nu)$, alors l'idéal engendré par les éléments de $in(\Delta, \underline{\Delta}, d_j)$ qui sont dans $\bigoplus_{(a,b)\in \mathbb{N}^2,\, a+b/d \leq \mu} gr_x^b W[Z]_a$ est bihomogène.

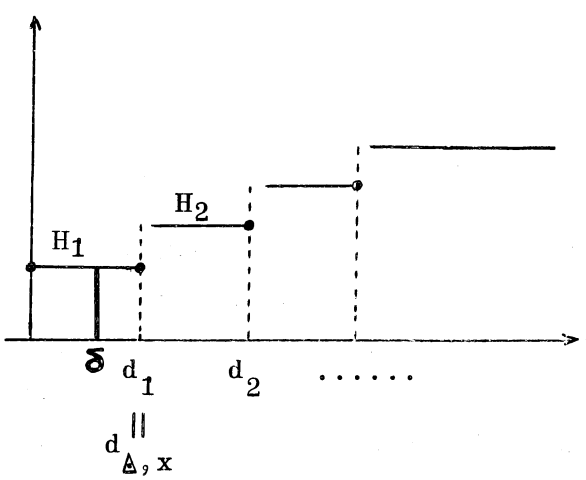
4.2.4 <u>Corollaire</u> : Hypothèses de 4.2.2. On a :

$$H_{\Delta,x}(\delta) \leq H_{\underline{\Delta}|W,x}(\delta) * G_{X\cap r^{-1}(x),x}.$$

Les assertions 1) et 2) sont équivalentes.

1) $$H_{\Delta,x}(\delta) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(\delta) * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$$

2) $$\delta \leq d_{\Delta,x}$$



En particulier, si $\delta = 1$, on a :

$$H_{X,x} \leq H_{W,x} * G_{X\cap r^{-1}(x),x} .$$

Les assertions 3) et 4) sont équivalentes :

3) $$H_{X,x} = H_{W,x} * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$$

4) $$1 \leq d_{\Delta,x} .$$

<u>Démonstration</u> : On a toujours $H_{\mathcal{C}^{\delta}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\mathcal{C}^{o}_{\Delta,x},x}(\delta)$. On a déjà remarqué que le premier membre de l'inégalité n'est autre que $H_{\Delta,x}(\delta)$. D'autre part (3.3.1), $\mathcal{C}^{o}_{\Delta,x} = (C^{o}_{\Delta,x}, C^{o}_{\Delta,x}, C^{o}_{\Delta|W,x}, dr)$ et (3.3.5) $C^{o}_{\Delta,x} \subset C_{W,x} \times C_{X\cap r^{-1}(x),x}$. Désignant par $\tilde{\mathcal{C}}$ l'installation $(C_{W,x} \times C_{X\cap r^{-1}(x),x}, C_{W,x} \times C_{r^{-1}(x),x}, C_{W,x} ; p_1)$, on obtient

$$H_{\mathcal{C}^{o}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta) .$$

Or $H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta) = H_{\Delta|W,x}(\delta) * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$, ce qui conduit à l'inégalité annoncée. Il y a égalité si et seulement si $C^{o}_{\Delta,x} = C_{W,x} \times C_{X\cap r^{-1}(x),x}$ et si, lorsque δ n'est pas un tropisme critique, $\delta < d_1$, lorsque δ est tropisme critique, $\delta = d_1$. Ceci exprime exactement que 0 n'est pas tropisme critique, i.e. $d_{\Delta,x} = d_1$ et que $\delta \leq d_{\Delta,x}$.

4.2.5 <u>Corollaire</u> : Hypothèses de 4.2.2. On a :

$$H_{\Delta,x}(\delta) \leq H_{(W\cap X),x}(\delta) * G_{r^{-1}(x),x} .$$

Les conditions 1) et 2) sont équivalentes :

1) $$H_{\Delta,x}(\delta) = H_{(W\cap X),x}(\delta) * G_{r^{-1}(x),x}$$

2) δ est supérieur ou égal à tous les tropismes critiques de $\underline{\Delta}$ en x.

En particulier, si $\delta = 1$, on a :

$$H_{X,x} \leq H_{W\cap X,x} * G_{r^{-1}(x),x} .$$

Les assertions 3) et 4) sont équivalentes :

3) $$H_{X,x} = H_{W\cap X,x} * G_{r^{-1}(x),x}$$

4) 1 est supérieur ou égal à tous les tropismes critiques de $\underline{\Delta}$ en x.

<u>Démonstration</u> : On a toujours $H_{\mathcal{C}^{\delta}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\mathcal{C}^{\infty}_{\Delta,x},x}(\delta)$. Par définition (3.3.1), $\mathcal{C}^{\infty}_{\Delta,x} = (C^{\infty}_{\Delta,x}, C^{\infty}_{\underline{\Delta},x}, C^{\infty}_{\underline{\Delta}|W,x}; dr)$. D'autre part,

$$C^{\infty}_{\Delta,x} \subset C_{W\cap X,x} \times C_{r^{-1}(x),x} .$$

On peut s'en convaincre en considérant les idéaux comme dans l'assertion duale en (3.2.5). Remarquons aussi qu'on a une surjection canonique :

$$gr_x W\cap X \otimes_{\mathbb{C}} \left(gr_{W\cap X} X \otimes_{\mathcal{O}_{W\cap X,x}} \mathbb{C}\right) \longrightarrow gr_x gr_{W\cap X} X = gr_x \Delta;\infty$$

(cf. 1.23 et 1.26). Mais on a aussi une surjection canonique :

$$gr_x r^{-1}(x) = gr_W Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathbb{C} \longrightarrow gr_{W\cap X} X \otimes_{\mathcal{O}_{W\cap X,x}} \mathbb{C} .$$

Ces deux constatations entraînant l'inclusion annoncée. Désignant par $\tilde{\mathcal{C}}$ l'installation $(C_{W\cap X,x} \times C_{r^{-1}(x),x}, C_{W,x} \times C_{r^{-1}(x),x}, C_{W,x}; p_1)$, on obtient :

$$H_{\mathcal{C}^{\infty}_{\Delta,x},x}(\delta) \leq H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta) .$$

Or $H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(\delta) = H_{(W\cap X),x}(\delta) * G_{r^{-1}(x),x}$. Regroupant ces égalités et inégalités, on obtient donc :

$$H_{\Delta,x}(\delta) \leq H_{(W\cap X),x}(\delta) * G_{r^{-1}(x),x} .$$

Il y a égalité si et seulement si $C^{\infty}_{\Delta,x} = C_{W\cap X,x} \times C_{r^{-1}(x),x}$ et si, lorsque δ n'est pas tropisme critique, $\delta > d_s$, lorsque δ est tropisme critique, $\delta = d_s$. Ceci exprime exactement que ∞ n'est pas tropisme critique et que δ est supérieur ou égal à tous les tropismes critiques finis.

***

§ 5. d-TRANSVERSALITE

5.1.1 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y. Soient $\underline{\Delta} = (Z, Z, W ; r)$ et $\underline{\Delta}|W = (W, W, W ; \mathrm{Id}\, W)$. Soit $d \in]0, \infty[$ un réel fixé. Soit $dr : C^d_{\underline{\Delta}, Y} \longrightarrow C^d_{\underline{\Delta}|W, Y}$ le morphisme canonique. dr^{-1} s'identifie alors à $C_{r^{-1}(Y), Y}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C^d_{\Delta, Y} \longrightarrow C^d_{\underline{\Delta}|W, Y}$ est plat en x ;

2) $C^d_{\Delta, Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et $d_{\Delta, Y, x} \geq d$;

3) $C^d_{\Delta, Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_Y \underline{\Delta}|W ; d}(\mathrm{gr}_Y \Delta ; d , \mathcal{O}_Y)$ est nul ;

4) 3) + $C^d_{\Delta, Y} \cap dr^{-1}(Y) = C_{X \cap r^{-1}(Y), Y}$;

5) $C^d_{\Delta, Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_Y \underline{\Delta} ; d}(\mathrm{gr}_Y \Delta ; d , \mathrm{gr}_Y r^{-1}(Y))$ est nul ;

6) Soit $\mathcal{K} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathrm{gr}^i_Y W$.

$C^d_{\Delta, Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et

$$\left[\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\mathcal{K}. \mathrm{gr}_Y \underline{\Delta} ; d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$

$$[\mathfrak{In}_Y(\Delta, \underline{\Delta}, d) . \mathcal{K}. \mathrm{gr}_Y \Delta ; d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \quad ;$$

7) $C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x, et pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\left[\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta};\, d \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$
$$[\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cdot \bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta}\,;\, d] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \quad ;$$

8) Pour tout $\delta \in [0,d]$, $C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y}$ est plat en x ;

9) Il existe un voisinage U de x dans Z tel que, pour tout $\delta \in [0,d]$, tout $y \in U \cap Y$, $C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y}$ soit plat en y.

10) $C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x.

Soit $\mathcal{J}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_Z$ définissant l'immersion de X dans Z (au voisinage de x), et soit $\mathcal{J}_x$ son germe en x. Il existe $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_x$ tel que

i) pour $0 \leq \delta < d$, $1 \leq k \leq m$, $in(f_k, \delta)$ est indépendant de δ avec $in(f_k, \delta) = 1 \otimes Q_k \in gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} (gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x})$ où Q_k est un élément homogène de $gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$;

ii) pour $0 \leq \delta \leq d$, $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) = (\ldots, in(f_k, \delta), \ldots)$.

Si l'immersion de Y dans W est régulière en x, chacune de ces conditions est équivalente à :

11) $C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x et l'immersion $C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow C^{d}_{\Delta,Y}$ est régulière en x, de codimension celle de Y dans W en x. Si $Y = x$, on a toujours :

$$H_{\Delta,x}(d) \leq H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) * G_{X \cap r^{-1}(x),x} \quad .$$

Chacune des conditions précédentes est équivalente à :

12) $H_{\Delta,x}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$.

5.1.2 <u>Définition</u> : Les hypothèses et notations sont celles du théorème 5.1.1. Si l'une des conditions 1) à 12) est satisfaite, on dit que l'installation Δ est d-transverse le long de Y en x. On dira aussi parfois que r est d-transverse à X le long de Y en x dans Z. Si d = 1, on dira transverse au lieu de 1-transverse.

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème 5.1.1. Elle se fera suivant le schéma logique suivant :

$$\begin{tikzcd}
12) \arrow[r, Leftrightarrow] & 2) \arrow[rr, Rightarrow] & & 10) \arrow[d, Rightarrow] & & & \\
11) \arrow[r, Leftrightarrow] & 1) \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow, bend right] & 3) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 5) \arrow[r, Leftrightarrow] & 6) & 9) \arrow[r, Rightarrow] & 8) \arrow[r, Rightarrow] & 1) \{2) \Leftrightarrow 1)\} + 1) \arrow[r, Rightarrow] & 9) \\
& & 4) \arrow[u, Rightarrow] & & 7) \arrow[u, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

On prie le lecteur de se reporter tout d'abord au critère de platitude (0.) qui sera appliqué avec $A = gr_Y \underline{\Delta}|W;d$ identifié à $gr_Y W$ d'après 2.1.7, $M = gr_Y \Delta;d$, $I = \bar{\mathcal{r}}$.

Les lemmes qui suivent seront utilisés pour montrer les différentes implications.

5.1.2.1 <u>Lemme</u> : Soit A un anneau local complet pour la topologie définie par son idéal maximal. Soit $A[[Z_1,\ldots,Z_t]]$ un anneau de séries formelles. Soit $B = A[[Z_1,\ldots,Z_t]]/J$ un anneau quotient de $A[[Z_1,\ldots,Z_t]]$. Soit I un idéal de A. Alors le A-module B est idéalement séparé (0,..) pour la topologie I-adique de A.

<u>Démonstration</u> : Il s'agit de montrer que, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, $\mathfrak{a} \otimes_A B$ est séparé par la topologie I-adique. Or, on a la suite exacte :

$$\mathfrak{a} \otimes_A J \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{a} \otimes_A A[[Z]] \xrightarrow{\psi} \mathfrak{a} \otimes_A B \longrightarrow 0$$

et, A[[Z]] étant plat sur A, $\mathfrak{a} \otimes_A A[[Z]] = \mathfrak{a} . A[[Z]]$ est un idéal de A[[Z]].

Soit $\bar{f} \in \bigcap_n I^n . \mathfrak{a} \otimes_A B$, alors il existe, pour tout n, $f_n \in I^n . \mathfrak{a} . A[[Z]]$ tel que $\bar{f} = \psi(f_n)$. On a donc $f_n - f_o \in \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi = J . \mathfrak{a} . A[[Z]]$. D'où

$$f_o \in \bigcap_n (J . \mathfrak{a} . A[[Z]] + M^n . A[[Z]] \quad \text{où M est l'idéal maximal de A .}$$

Tout idéal de A[[Z]] étant fermé pour la topologie définie par son idéal maximal :

$$f_o \in J . \mathfrak{a} . A[[Z]] .$$

D'où $\bar{f} = \psi(f_o) = 0$.

5.1.2.2 <u>Lemme</u> : Soient A un anneau, $A[Z_1,\ldots,Z_t]$ un anneau de polynômes, $B = A[Z_1,\ldots,Z_t]/\mathfrak{a}$ un anneau quotient de $A[Z_1,\ldots,Z_t]$. Soit N un A-module

$$\operatorname{Tor}_1^A(B,N) = \operatorname{Tor}_1^{A[Z]}(B, N \otimes_A A[Z]) .$$

<u>Démonstration</u> : De la suite exacte (de A-modules)

$$(*) \qquad 0 \to J \to A[Z] \to B \to 0$$

on déduit une suite exacte (de A-modules)

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(B,N) \to J \otimes_A N \to A[Z] \otimes_A N \to B \otimes_A N \to 0$$

car, A[Z] étant un A-module plat, $\operatorname{Tor}_1^A(A[Z],N) = 0$.
On peut aussi considérer (*) comme une suite de A[Z]-modules. On obtient alors une suite exacte (de A[Z]-modules)

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^{A[Z]}(B, N \otimes_A A[Z]) \to J \otimes_{A[Z]} (N \otimes_A A[Z]) \to A[Z] \otimes_{A[Z]} (N \otimes_A A[Z]) \to B \otimes_{A[Z]} (N \otimes_A A[Z]) \to 0$$

car $\operatorname{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z], N \otimes_A A[Z]) = 0$.
Mais d'après la commutativité et l'associativité du produit tensoriel, les deux dernières suites sont identiques, ce qui prouve l'égalité annoncée.

5.1.2.3 <u>Lemme</u> : Soient A un anneau, I et J des idéaux de A. On a :

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) = I \cap J / I \,.\, J \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On a les suites exactes :

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0 \ ,$$

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \to I \otimes_A A/J \to A \otimes_A A/J \to A/I \otimes_A A/J \to 0 \ .$$

Celle-ci s'identifie à :

$$0 \to I \cap J / I \,.\, J \to I/I \,.\, J \to A/J \to A/I + J \to 0 \quad .$$

5.1.2.4 <u>Lemme</u> : Soit :

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

un diagramme cartésien d'espaces analytiques, où les flèches horizontales sont des immersions. Soient y_2 un point de Y_2, y_1 son image dans Y_1. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $X_2 \to X_1$ est plat en y_2

2) $Y_2 \to Y_1$ est plat en y_1 et l'immersion de Y_2 dans X_2 est régulière en y_2 avec $\dim_{y_2} X_2 - \dim_{y_2} Y_2 = \dim_{y_1} X_1 - \dim_{y_1} Y_1$.

<u>Démonstration</u> : 1) $\Rightarrow$ 2). On sait bien qu'un morphisme plat le reste par changement de base. D'autre part, soit A_1 (resp. A_2) l'anneau local de X_1 (resp. X_2) en y_1 (resp. y_2). Il suffit de voir que, si $f \in A_1$ est un élément régulier de A_1, son image dans A_2 l'est aussi. Or, la multiplication par f est un isomorphisme (de A_1-modules) de A_1 sur $f A_1$. La multiplication par $f \otimes 1$ est donc un isomorphisme de $A_1 \otimes_{A_1} A_2$ sur

$f A_1 \underset{A_1}{\otimes} A_2$. Mais A_2 étant plat sur A_1, $f A_1 \underset{A_1}{\otimes} A_2$ s'identifie à $f . A_2$. Par conséquent, l'image de f dans A_2 est non-diviseur de zéro dans A_2.

2) $\Rightarrow$ 1). Passons à la situation géométrique algébroïde correspondante (i.e. remplaçons tous les anneaux locaux par leur complété pour la topologie définie par leur idéal maximal). Ceci n'affecte pas les hypothèses et il suffit de montrer que $\hat{A}_2$ est plat sur $\hat{A}_1$. Soit I_1 l'idéal de $\hat{A}_1$ définissant l'immersion de $\hat{Y}_1$ dans $\hat{X}_1$ au voisinage de y_1 ; $I_1 \hat{A}_2$ est celui définissant $\hat{Y}_2$ dans $\hat{X}_2$ au voisinage de y_2. Soit

$$\alpha : \hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2 \underset{\hat{A}_1/I_1}{\otimes} gr_{I_1} \hat{A}_1 \longrightarrow gr_{I_1 \hat{A}_2} \hat{A}_2$$

l'homomorphisme canonique surjectif.
Soit $n = \operatorname{codim}_{y_1}(\hat{X}_1, \hat{Y}_1) = \operatorname{codim}_{y_2}(\hat{X}_2, \hat{Y}_2)$.
Les immersions $\hat{Y}_1 \to \hat{X}_1$ et $\hat{Y}_2 \to \hat{X}_2$ étant régulières, $gr_{I_1} \hat{A}_1$ (resp. $gr_{I_1 \hat{A}_2} \hat{A}_2$) s'identifie à un anneau de polynômes $\hat{A}_1/I_1[U_1, \ldots, U_n]$ (resp. $\hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2[V_1, \ldots, V_n]$). On a donc :

$$\alpha : \hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2[U_1, \ldots, U_n] \longrightarrow \hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2[V_1, \ldots, V_n]$$

un morphisme gradué de degré 0 surjectif. Soit A la matrice $n \times n$ telle que : $\|\alpha(U_i)\| = A \|V_i\|$, soit $\bar{A}$ celle obtenue à partir de A en envoyant les coefficients sur leur image canonique dans $\mathbb{C} \simeq$ corps résiduel de $\hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2$. $\bar{A}$ définissant une application surjective de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ définit en fait un isomorphisme. Le déterminant de $\bar{A}$ est donc nul, et celui de A est donc une unité dans $\hat{A}_2/I_1 \hat{A}_2$. α est alors un isomorphisme. Ceci suffit à prouver la platitude de $\hat{A}_2$ sur $\hat{A}_1$ d'après le critère (0.). En effet les hypothèses de 5.1.2.1 sont satisfaites avec $A = \hat{A}_1$ et $B = \hat{A}_2$. $\hat{A}_2$ étant l'anneau local d'un schéma algébroïde, on a une suite exacte

$$\mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_t]] \longrightarrow \hat{A}_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

Combinant avec le morphisme $\hat{A}_1 \longrightarrow \hat{A}_2$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{A}_1[[Z_1,\ldots,Z_t]] \arrow[r] & \hat{A}_2 \\ & \hat{A}_1 \arrow[u] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale est encore surjective.

Passons maintenant à la démonstration des implications du schéma logique.

<u>α : 1) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 3), 1) $\Rightarrow$ 2), 1 $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 6)</u>

Appliquons, comme nous l'avons énoncé, le critère de platitude (0.4.1). Nous obtenons :

α_1 : $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x ;

α_2 : le germe en x du morphisme canonique

$$gr_{\mathcal{J}}(gr_Y W) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} gr_Y \Delta;d/\mathcal{J}.\, gr_Y \Delta;d \longrightarrow gr_{\mathcal{J}} gr_Y \Delta;d$$

est un isomorphisme ;

α_3 : le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{gr_Y \underline{\Delta}|W;d}(gr_Y \Delta;d, \mathcal{O}_Y)$ est nul ;

α_4 : le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{gr_Y W}(gr_Y \Delta;d, gr_Y W/\mathcal{J}^p)$ est nul .

De α_2, en se souvenant que $\mathcal{J}.\, gr_Y \Delta;d$ est l'Idéal de $gr_Y \Delta;d$ définissant $dr^{-1}(Y) \cap C^d_{\Delta,Y}$ dans $C^d_{\Delta,Y}$, que

$$\mathcal{C}^d_{\Delta,Y} = \left(C^d_{\Delta,Y}, C^d_{\underline{\Delta},Y}, C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}; dr\right) \tag{3.3.1}$$

qu'enfin, pour une installation quelconque, $\tilde{\Delta} = (\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}, \mathcal{W}; r)$, et un sous-espace $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{W} \cap \mathfrak{X}$, on a défini (1.26) :

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}\,\tilde{\Delta};0 = \mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}\,\mathrm{gr}_{r^{-1}(\mathcal{Y})\cap\mathcal{X}}\,\mathcal{X}$$

nous déduisons qu'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{gr}_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathrm{gr}_Y \Delta;d/\bar{\mathcal{J}}.\,\mathrm{gr}_Y \Delta;d \longrightarrow \mathrm{gr}_Y \mathcal{C}^{d}_{\Delta,y}\,;\,0$$

(car $\mathrm{gr}_{\bar{\mathcal{J}}}\mathrm{gr}_Y\,\Delta;d$ étant déjà bigradué, il s'identifie à $\mathrm{gr}_Y\,\mathrm{gr}_{[dr^{-1}(Y)\,\cap\,C^{d}_{\Delta,Y}]}\,C^{d}_{\Delta,Y}$)

ou encore un isomorphisme canonique :

$$C^{\,o}_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,Y},\,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \quad .$$

Or d'après 3.3.2, si $d \in]d_i\,,\,d_{i+1}]$, $C^{\,o}_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,Y},\,Y}$ s'identifie à $C_{\Delta,Y}(i+1)$.

Nous avons donc une identification canonique :

$$C_{\Delta,Y}(i+1) \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y)$$

au voisinage de x. Mais ceci n'est possible qu'avec $i = 0$. En effet, si $\delta \in]d_i\,,\,d_{i+1}[$, $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$ est engendré par des $1 \otimes Q_k \in \mathrm{gr}_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \left[\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right]$, où Q_k est un élément homogène de $\mathrm{gr}_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \simeq \mathcal{O}_{Y,x}[Z_1,\ldots,Z_t]$. Il existerait donc $(f_1,\ldots,f_m)$ dans $\mathcal{J}_x$ tels que, pour $\delta' \in [0,d_1[$, $k = 1,\ldots,m$, $\mathrm{in}(f_k,\delta') = 1 \otimes Q_k$, ce qui entraîne que $C_{\Delta,Y}(i+1) \supset C_{\Delta,Y}(1)$. On a alors $i = 0$ d'après 3.2.1,3). Ceci montre que $d \in]0,d_1]$ et que

$$C_{\Delta,Y}(1) \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y)$$

est un isomorphisme au voisinage de x. Comme dans 3.2.5, ceci entraîne à son tour que $C_{\Delta,Y}(1) = C^{\,o}_{\Delta,Y} \supset C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ et donc l'égalité.

C'est que le 1er tropisme critique $d_{\Delta,Y,x}$ n'est pas nul, il vaut alors d_1 (d'où $d_{\Delta,Y,x} \geq d$) et que $C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \simeq C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$.

Combinant ces résultats avec α_1 et α_3, nous venons donc de voir que 1) ⇒ 2) et que 1) ⇒ 4) ⇒ 3).

Revenons maintenant à α_4. Appliquons 5.1.2.2 avec $A = gr_Y W$, $B = gr_Y \underline{\Delta};d$, $N = gr_Y W/\bar{\mathcal{J}}^p$. (On a $gr_Y \underline{\Delta};d \simeq gr_Y W[Z_1,\ldots,Z_t]$). On obtient que le germe en x de

$$\mathrm{Tor}_1^{gr_Y \underline{\Delta};d}\left(gr_Y \Delta;d,\ gr_Y W/\bar{\mathcal{J}}^p \underset{gr_Y W}{\otimes} gr_Y W[Z]\right)$$

est nul.

Appliquons maintenant 5.1.2.3. Ceci donne

$$\left[\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta};d \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$
$$\left[\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cdot \bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta};d\right] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \ .$$

Nous avons ainsi obtenu 1) ⇒ 7) et 7) ⇒ 6) est immédiat.

$\underline{\beta}$: <u>6) ⇒ 5), 5) ⇒ 3)</u>

Comme ci-dessus, la 1ère assertion est conséquence de 5.1.2.3, la 2ème de 5.1.2.2.

$\underline{\gamma}$: <u>3) ⇒ 1)</u>

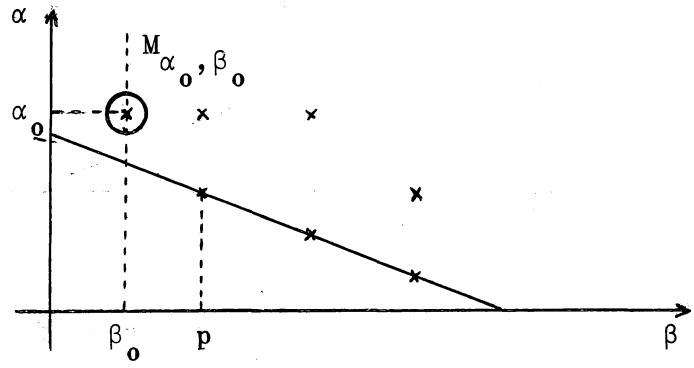
Il suffit encore de montrer la platitude après passage aux complétés des anneaux locaux considérés. L'hypothèse 3) reste valable après complétion. Le lemme 5.1.2.1 permet d'appliquer le critère de platitude (0.4.1).

$\underline{\delta}$: 2) ⇒ 10) ⇒ 6)

La première partie de l'assertion est la proposition 3.2.5. Passons à la deuxième :

Soit $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$ tel que $f \in \mathcal{J}_x$ et $in_Y(f;\underline{\Delta},d) \in \mathcal{K}.\ gr_Y W[Z] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$.

Soit $p = \nu_{\mathcal{K}}(in_Y(f;\underline{\Delta},d))$. ($p \geq 1$ par hypothèse). On va d'abord se ramener au cas où, pour tout $A \in \mathbb{N}^t$, $\nu_Y(f_A) \geq p$.



Soit $M_{\beta_o,\alpha_o} = in_Y(f;\underline{\Delta},0) \in gr_Y W[Z]$. C'est un élément de bidegré (β_o,α_o) et, si $\beta_o < p$, $\alpha_o + \beta_o/d > \nu_Y(f;\underline{\Delta},d)$. D'après 10),i), il existe R_k bihomogènes dans $gr_Y W[Z] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}$, $k = 1,\dots,m$ tels que :

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{k=1,\dots,m} R_k\, in(f_k, 0) = \Sigma R_k \cdot (1 \otimes Q_k) .$$

Soit ν_k le degré en Z de $Q_k \in \mathcal{O}_{Y,x}[Z]$. On peut écrire :

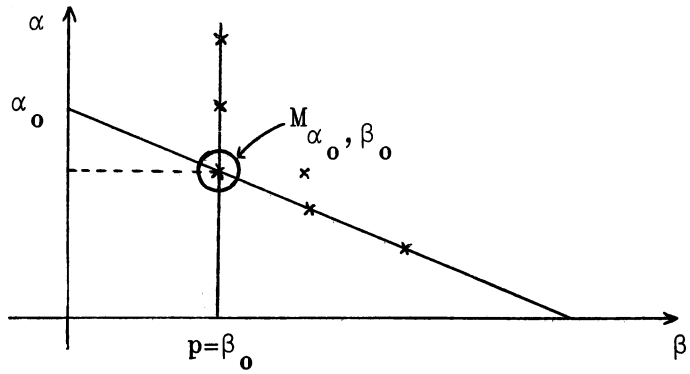
$$R_k = \sum_{|A| = \alpha_o - \nu_k} R_{kA} Z^A \quad \text{où} \quad R_{kA} \in gr_Y^{\beta_o} W \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} .$$

Soit $r_{kA} \in \mathcal{O}_{W,x}$ tel que $\nu_Y(r_{kA}) = \beta_o$ et $in_Y r_{kA} = R_{kA}$; finalement, soit $r_k = \sum_{|A| = \alpha_o - \nu_k} r_{kA} z^A \in \mathcal{O}_{Z,x}$; $\nu_Y(\sum_{k=1,\dots,m} r_k f_k ; \underline{\Delta},\delta) = \alpha_o + \beta_o/\delta$, pour $\delta \in [0,d]$, et $in_Y(\sum_{k=1,\dots,m} r_k f_k ; \underline{\Delta},\delta) = M_{\beta_o,\alpha_o}$ pour $\delta \in [0,d[$. Soit $g = f - \Sigma r_k f_k$; on a :

$$g \in \mathcal{J}_x , \quad in_Y(g;\underline{\Delta},d) = in_Y(f;\underline{\Delta},d), \quad \nu_Y(g;\underline{\Delta},0) \geq \nu_Y(f;\underline{\Delta},0)$$

et s'il y a égalité, sur le diagramme de Newton de g, le point (β_o,α_o)

a disparu. En complétant au besoin $\mathcal{O}_{Z,x}$ et en passant à $\hat{\mathcal{J}}_x$, on peut donc supposer comme annoncé que $\nu_Y(f;\underline{\Delta},0) = p$.



Considérons encore $M_{\beta_o,\alpha_o} = in_Y(f;\underline{\Delta},0)$. Alors $\nu_Y(f;\underline{\Delta},d) = \alpha_o + \beta_o/d$.
De plus $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x. Par changement de base,

$$C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow C_{W,Y}$$

est donc aussi plat en x. Mais les conditions i) et ii) entraînent que $C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) = C^o_{\Delta,Y}$ au voisinage de x. Appliquons maintenant 1) ⇒ 7) de 5.1.1 pour ε quelconque assez petit ($C^o_{\Delta,Y} = C^\varepsilon_{\Delta,Y}$). On obtient :

$$\left[\mathfrak{in}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta}\,;\, 0 \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$

$$[\mathfrak{in}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \cdot \bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y \underline{\Delta};0] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \quad .$$

Il existe donc $R_k \in \bar{\mathcal{J}}^p \cdot gr_Y W[Z]$ bihomogènes, $k = 1,\dots,m$ tels que

$$M_{\beta_o,\alpha_o} = \sum_{k=1,\dots,m} R_k\, in(f_k\,,\,0) = \Sigma R_k\,(1 \otimes Q_k) \ .$$

Soit $in(f;\underline{\Delta},d) - \sum_{k=1,\dots,m} R_k\, in(f_k\,;\,\underline{\Delta},d)$.

Ou bien ceci est nul, et la preuve est terminée. Ou bien c'est un élément de d-degré $\alpha_o + \beta_o/d$. Mais alors sont ordre pour $\bar{\mathcal{J}}$ est strictement plus grand que p. On conclut donc au bout d'un nombre fini d'opérations.

1) $\Leftrightarrow$ 11). On applique 5.1.2.4 en remarquant que si l'immersion de Y dans W est régulière en x, il en est de même de celle de Y dans $C_{W,Y}$ et qu'elles ont même codimension.

2) $\Leftrightarrow$ 12). Voir le corollaire 4.2.4.

9) $\Rightarrow$ 8). C'est évident.

1) + {2) $\Leftrightarrow$ 1)} $\Rightarrow$ 9). Il s'agit de voir qu'il existe un voisinage U de x dans Z, tel que, pour $y \in U \cap Y$, la condition 2) soit satisfaite avec $\delta \in [0,d]$. Le corollaire 3.3.3 nous permet de construire U_1 voisinage de x dans Z tel que, si $y \in U_1 \cap Y$, $d_{\Delta,Y,y} \geq d_{\Delta,Y,x} \geq d \geq \delta \geq 0$. Au § 8 , théorème 8.1.3, nous montrerons, indépendamment des considérations suivantes, qu'il existe U_2 voisinage de x dans Z tel que, si $y \in U_2 \cap Y$, $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en y. Si $y \in U_1 \cap U_2 \cap Y$, le premier tropisme critique de Δ le long de Y en y étant supérieur ou égal à $d > 0$, $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) = C^\delta_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y)$ pour $\delta \in [0,d]$. On peut donc choisir $U = U_1 \cap U_2$.

5.1.3 Proposition : Soit $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation, et soit x un point de $W \cap X$. Pour que $r|X : X \to W$ soit plat en x, il faut que, pour tout sous-espace analytique Y de $W \cap X$, le morphisme canonique $X \cap r^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ soit plat en x et que $d_{\Delta,Y,x} > 0$. Il suffit qu'il existe un sous-espace Y de $W \cap X$ vérifiant ces deux propriétés. En particulier, il faut et il suffit que $d_{\Delta,x} > 0$.

Démonstration : Si $r|X : X \to W$ est plat en x, il en est de même de $X \cap r^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ qu'on obtient à partir du précédent par changement de base. De plus, toujours d'après (0.), l'immersion fermée

$$C_{X,X\cap r^{-1}(Y)} \longrightarrow C_{W,Y} \times_Y X \cap r^{-1}(Y)$$

est un isomorphisme au voisinage de x. De 1.2.6, on déduit que :

$$C^{o}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \times_Y C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$$

est aussi un isomorphisme au voisinage de x. Par conséquent (3.2.2), $d_{\Delta,Y,x} > 0$.

Réciproquement, si $d_{\Delta,Y,x} > 0$, $C^{o}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \times_{Y} C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ est un isomorphisme au voisinage de x. Puisqu'on a toujours une immersion fermée $C_{X,X\cap r^{-1}(Y)} \longrightarrow C_{W,Y} \times_{Y} X\cap r^{-1}(Y)$, celle-ci est alors un isomorphisme au voisinage de x. Le $\mathcal{O}_{W,x}$-module $\mathcal{O}_{X,x}$ satisfait donc la condition 2) du critère (0.4.1). Ceci subsiste après complétion.
5.1.2.1 nous assure alors de la platitude du $\hat{\mathcal{O}}_{W,x}$-module $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ qui entraîne celle du $\mathcal{O}_{W,x}$-module $\mathcal{O}_{X,x}$.

5.1.4 <u>Corollaire</u> : Soient $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique de $W\cap X$, x un point de Y. Soit $d \in]0,\infty[$. Si Δ est d-transverse le long de Y en x, le morphisme $r|X : X \to W$ est plat en x.

<u>Démonstration</u> : On sait après 5.1.1 que $d_{\Delta,Y,x} \geq d > 0$ et que $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat en x. Il suffit donc de voir que ceci entraîne que $X\cap r^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x. Comme d'habitude, il suffit de travailler après complétion.
Soient $A = \hat{\mathcal{O}}_{Y,x}$, $A[[z_1,\ldots,z_t]] = A[[z]] = \hat{\mathcal{O}}_{r^{-1}(Y),x}$, $B = \hat{\mathcal{O}}_{X\cap r^{-1}(Y),x}$.
Soient N l'idéal maximal de A, $J = \operatorname{Ker} A[[z]] \longrightarrow B$.
Par hypothèse, $gr_{(z)} B$ est un A-module plat. Donc $\operatorname{Tor}_1^A(gr_{(z)} B, A/N) = 0$ et d'après 5.1.2.2, $\operatorname{Tor}_1^{A[Z_1,\ldots,Z_t]}(gr_{(z)} B, A/N[Z_1,\ldots,Z_t]) = 0$. Or, par définition, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{In}_{(z)}(A[[z]],J) \longrightarrow A[Z] \longrightarrow gr_{(z)} B \longrightarrow 0$$

est exacte. Avec 5.1.2.3, on obtient donc que

$$\operatorname{In}_{(z)}(A[[z]],J) \cap N.A[Z] = \operatorname{In}_{(z)}(A[[z]],J).N.A[Z] .$$

Mais d'après 5.1.2.1, il nous suffit de montrer que :

$$\mathrm{Tor}_1^A(B, A/N) = 0 .$$

Comme dans 5.1.2.2, on montre que ceci est égal à $\mathrm{Tor}_1^{A[[z]]}(B, A/N \otimes_A A[[z]])$ et, d'après 5.1.2.3, on est donc ramené à montrer que :

$$J \cap N . A[[z]] = J . N . A[[z]] .$$

Soit $f = \Sigma f_\alpha z^\alpha \in J \cap N . A[[z]]$. On a $f_\alpha \in N$, pour tout α.
Soient $\nu = \nu_{(z)}(f)$, $\mathrm{in}_{(z)} f = \sum_{|\alpha|=\nu} f_\alpha Z^\alpha$.

On a alors :

$$\mathrm{in}_{(z)} f \in \mathrm{In}_{(z)}(A[[z]], J) \cap N . A[Z] .$$

Il existe $f_i \in J$ et $h_i \in N . A[Z]$ tels que :

$$\mathrm{in}_{(z)} f = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{in}_{(z)} f_i \times h_i$$

et on peut supposer que, si $\nu_i = \nu_{(z)}(f_i)$, h_i est homogène en Z de degré $\nu - \nu_i$. Considérons maintenant

$$g = f - \Sigma h_i(z) f_i .$$

On a $g \in J \cap N . A[[z]]$ et $\nu_{(z)}(g) > \nu$. Par suite :

$$f \in J . N . A[[z]] + J \cap N . A[[z]] \cap (z)^{\nu+1} A[[z]] .$$

De ceci on déduit que

$$f \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (J . N . A[[z]] + (z)^k A[[z]]) .$$

Or tout idéal de $A[[z]]$ est fermé pour la topologie de $A[[z]]$ définie par son idéal maximal. D'où :

$$f \in J.N.A[[z]] \quad .$$

Ceci achève la démonstration.

5.1.5 <u>Proposition</u> : Soit $W \to Z$ une r-immersion. Soient X un sous-espace analytique de Z, Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y.
S'il existe une rétraction $r : Z \to W$ faisant de $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, telle que r soit transverse à X le long de Y en x et que $d_{\Delta,Y,x} > 1$, toute autre rétraction $\rho : Z \to W$ faisant de $\tilde{\Delta} = (X, Z, W ; \rho)$ une bonne installation est telle que ρ soit transverse à X le long de Y en x et que $d_{\Delta,Y,x} = d_{\tilde{\Delta},Y,x}$.
Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe $\tilde{C}$ un sous-Y-cône de $C_{Z,W} \times_W Y$ plat sur Y en x et un morphisme $C_{X,Y} \longrightarrow \tilde{C}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} C_{Z,Y} & \longrightarrow & C_{Z,W} \times_W Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_{X,Y} & \longrightarrow & \tilde{C} \end{array}$$

soit cartésien au voisinage de x.

<u>Démonstration</u> : Choisissons $d \in]1, d_{\Delta,Y,x}[$; on a un isomorphisme au voisinage de x

$$C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \times_Y C_{X \cap r^{-1}(Y),Y} \quad .$$

On a également un isomorphisme $C_{r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow C_{Z,W} \times_W Y$.
Soit $\tilde{C}$ l'image de $C_{X \cap r^{-1}(Y),Y}$ par cet isomorphisme. On détermine donc un isomorphisme $C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \times_Y \tilde{C}$ qui, cette fois-ci, ne dépend plus de r (2.1.6). On a donc aussi un isomorphisme (le même) :

$$C^{d}_{\tilde{\Delta},Y} \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} \tilde{C} \quad .$$

Or (cf. 5.1.1 $\underline{\alpha}$) ceci ne peut avoir lieu que si $d < d_{\tilde{\Delta},Y,x}$. Par conséquent $d_{\tilde{\Delta},Y,x} \geq d_{\Delta,Y,x}$. Mais il lui est nécessairement égal puisque les tropismes critiques strictement plus grands que 1 sont indépendants de la rétraction. D'autre part, r étant transverse,
$C_{X,Y} \cap dr^{-1}(Y) = C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \simeq \tilde{C}$ est Y-plat en x. Puisque $d_{\tilde{\Delta},Y,x} > 1$,
$C_{X,Y} \cap d\rho^{-1}(Y) = C_{X\cap \rho^{-1}(Y),Y} \simeq \tilde{C}$ est donc aussi Y-plat en x. Tout ceci d'après 5.1.1, 2) entraîne la transversalité de ρ. Il est maintenant facile de voir que la condition est bien nécessaire, car

$$C_{Z,Y} \simeq C_{W,Y} \underset{Y}{\times} C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y$$

et

$$C_{X,Y} \simeq C_{W,Y} \underset{Y}{\times} \tilde{C} \quad .$$

Réciproquement, si celle-ci est vérifiée, $\tilde{C}$ étant plat sur Y, le morphisme induit par ρ, $C_{X,Y} \longrightarrow C_{W,Y}$ est plat en x, ce qui signifie la transversalité et $d_{\tilde{\Delta},Y,x} > 1$.

5.1.6 <u>Définition</u> : (Rappel) [5]. Soit C un cône de $\mathbb{C}^n$. On appelle faîte de C le plus grand sous-espace vectoriel E de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $v \in E$, la translation τ_v laisse C globalement invariant. (Pour l'existence d'un tel objet, voir [5]).

Soient X un espace analytique, x un point de X. On appelle espace-tangent strict à X en x et on note $T_{X,x}$ le faîte de $C_{X,x}$.

5.1.7 <u>Corollaire</u> : Soient Z une variété analytique lisse, W une sous-variété lisse de Z, X un sous-espace analytique de Z, x un point de $W \cap X$.
Pour qu'il existe une rétraction $r : Z \to W$ (qui sera alors nécessairement lisse), telle que $d_{\Delta,x} > 1$ avec $\Delta = (X,Z,W ; r)$, il faut et il suffit que $T_{W,x}$ soit un sous-espace de $T_{X,x}$.

Toute rétraction $\rho : Z \to W$ est transverse à X en x.

<u>Démonstration</u> : $\tilde{C}$ s'identifie au quotient de $C_{X,x}$ par $T_{X,x}$.

5.1.8 <u>Proposition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$. Pour que W soit localement contenu au voisinage de x dans X et que $C_{X,W} \longrightarrow W$ soit plat en x, il faut que, pour tout sous-espace analytique Y de W, $C_{X \cap r^{-1}(Y), Y} \longrightarrow Y$ soit plat en x et que $d_{\Delta,Y,x} = \infty$ (ou qu'il n'y ait aucun tropisme critique). Il suffit qu'il existe un sous-espace Y de W vérifiant ces deux propriétés. En particulier, il faut et il suffit que $d_{\Delta,x} = \infty$.
S'il en est ainsi, pour tout sous-espace analytique Y de W,

$$\begin{tikzcd} C_{X \cap r^{-1}(Y), Y} \arrow[r] \arrow[d] & C_{X,W} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien.

<u>Démonstration</u> : Si W est contenu dans X et $C_{X,W} \to W$ est plat, appliquant le critère de platitude (0.4.1) avec $A = \mathcal{O}_{W,x}$, $M = gr_W X \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{W,x}$, I l'idéal de A définissant l'immersion de Y dans W, on obtient que l'immersion

$$C^{\infty}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y} \times_Y C_{X,W} \times_W Y$$

est un isomorphisme au voisinage de x.
Comme dans la démonstration de 5.1.1 α), ceci implique que

$$C^{o}_{\Delta,Y} = C_{\Delta,Y}(1) = C^{\infty}_{\Delta,Y} \quad \text{au voisinage de } x$$

et que $d_{\Delta,Y,x} > 0$. Par conséquent, $d_{\Delta,Y,x} = \infty$ (ou il n'y a pas de tropisme critique).

Mais on sait alors aussi,(3.2.6), que

$$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{X,W} \times_W Y \quad \text{au voisinage de } x,$$

ce qui entraîne la platitude de $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ en x.

Réciproquement, si $d_{\Delta,Y,x} = \infty$ et $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat en x, d'après 3.2.6, W est localement contenu dans X au voisinage de x (donc $Y \subset W \cap X$) et

$$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow C_{X,W} \times_W Y$$

est un isomorphisme au voisinage de x. De plus

$$C^{\infty}_{\Delta,Y} = C_{W,Y} \times_Y C_{X,W} \times_W Y ,$$

toujours au voisinage de x. Ceci nous dit exactement que le $\mathcal{O}_{W,x}$-module $gr_W X \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{W,x}$ satisfait le critère de platitude (0.4.1). Après passage à la complétion, le lemme 5.1.2.1 permet d'affirmer que le germe de $gr_W X$ en x est un $\mathcal{O}_{W,x}$-module plat.

5.1.9 <u>Remarque</u> : On comparera le résultat ci-dessus à la proposition 3.2 de l'Appendice.

5.2.1 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation, soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y. Soient $\underline{\Delta} = (Z,Z,W\,;\,r)$ et $\underline{\Delta}|W = (W,W,W\,;\,\mathrm{Id}\,W)$. Soit $d \in]0,\infty[$ un réel fixé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow C^{d}_{\Delta,Y}$ est une immersion régulière en x de même codimension que W dans Z en x;

2) $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et d est supérieur ou égal à tous les tropismes critiques de Δ le long de Y en x ;

3) 2) + $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} = C^{d}_{(W\cap X),Y}$;

4) $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et le germe en x de $\mathrm{Tor}_1^{gr_Y\underline{\Delta};d}(gr_Y\Delta;d,\ gr_Y\underline{\Delta}|W;d)$ est nul ;

5) Soit $\bar{\mathcal{K}}' = \bigoplus_{i\geq 1} gr^{i}_{W} Z \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_Y$,

$C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et

$$\left[\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\bar{\mathcal{K}}' \cdot gr_Y\underline{\Delta};d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$
$$[\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cdot \bar{\mathcal{K}}' \cdot gr_Y\underline{\Delta};d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \quad ;$$

6) $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left[\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] \cap \left[\bar{\mathcal{K}}'^{p} \cdot gr_Y\underline{\Delta};d \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x}\right] =$$
$$[\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cdot \bar{\mathcal{K}}'^{p} \cdot gr_Y\underline{\Delta};d] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,x} \quad ;$$

7) Pour tout $\delta \in [d,\infty]$, $C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x et $C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,Y}$ est une immersion régulière en x de même codimension que W dans Z en x ;

8) Il existe un voisinage U de x dans Z, tel que, pour tout $\delta \in [d,\infty]$, tout $y \in U \cap Y$, $C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en y et que $C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,Y}$ soit une immersion régulière en y de même codimension que W dans Z en y ;

9) $C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x.

Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ définissant l'immersion de X dans Z (au voisinage de x), et soit $\mathcal{J}_x$ son germe en x. Il existe $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de $\mathcal{J}_x$ tel que

i) pour $d < \delta \leq \infty$, $1 \leq k \leq m$, $in(f_k, \delta)$ est indépendant de δ avec $in(f_k, \delta) = R_k \otimes 1 \in gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \left[gr_W Z \underset{\mathcal{O}_W}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \right]$ où R_k est un élément homogène de $gr_Y W$;

ii) pour $d \leq \delta \leq \infty$, $\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) = (\ldots, in(f_k, \delta), \ldots)$.

Si $Y = x$, on a toujours

$$H_{\Delta,x}(d) \leq H_{(W\cap X),x}(d) * G_{r^{-1}(x),x}$$

chacune des conditions précédentes est équivalente à

10) $$H_{\Delta,x}(d) = H_{(W\cap X),x}(d) * G_{r^{-1}(x),x} .$$

5.2.2 <u>Définition</u> : Les hypothèses et notations sont celles du théorème 5.2.1. Si l'une des conditions 1) à 10) est satisfaite, on dit que l'installation Δ est d - 1/transverse le long de Y en x ou que W est d-transverse à X le long de Y en x dans Z. Si d = 1, on dira 1/transverse ou transverse au lieu de 1 - 1/transverse ou 1-transverse.

Démontrons maintenant le théorème 5.2.1. Ceci se fera suivant le schéma logique suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 10) \arrow[d, Leftrightarrow] & & \\
1) \arrow[r, Rightarrow] & 3) \arrow[r, Rightarrow] & 2) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & 9) & \\
 & 4) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 5) & 6) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[ull, Rightarrow, bend left] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
8) \arrow[r, Rightarrow] & 7) \arrow[r, Rightarrow] & 1) \\
\{2) \Leftrightarrow 1)\} + 1) \arrow[rr, Rightarrow] & & 8)
\end{tikzcd}$$

Le lecteur se reportera tout d'abord à la définition d'une immersion régulière (0.).

$\underline{\alpha}$: $\underline{1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)}$

Soit $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées sur $r^{-1}(x)$ de centre x. t est alors la codimension de W dans Z en x. D'autre part, identifiant comme d'habitude $gr_Y \underline{\Delta};d$ à $gr_Y W[Z_1,\ldots,Z_t]$ et $gr_Y \underline{\Delta}|W;d$ à $gr_Y W$, on constate que l'immersion de $C^d_{\underline{\Delta}|W,Y} \cap C^d_{\Delta,Y}$ dans $C^d_{\Delta,Y}$ est défini par l'image de l'idéal $(Z_1,\ldots,Z_t)$ dans $gr_Y \Delta;d$. Cette immersion étant régulière de codimension t, l'image du système $Z_1,\ldots,Z_t$ dans $gr_Y \Delta,d$ forme une suite régulière pour $gr_Y \Delta;d$. On a donc un isomorphisme canonique :

$$[gr_Y \Delta;d/(Z_1,\ldots,Z_t)gr_Y \Delta;d][Z_1,\ldots,Z_t] \longrightarrow gr_{(Z)}\, gr_Y \Delta;d \quad .$$

Nous en déduisons, en se souvenant que

$$\mathcal{C}^d_{\Delta,Y} = (C^d_{\Delta,Y}, C^d_{\underline{\Delta},Y}, C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}; dr) \qquad (3.3.1)$$

et que, pour une installation quelconque, $\tilde{\Delta} = (\mathfrak{X},\mathcal{L},\mathcal{W}; r)$ et un sous-espace $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{W} \cap \mathfrak{X}$, on a défini (1.2.6)

$$gr_{\mathcal{Y}}\, \tilde{\Delta};\infty = gr_{\mathcal{Y}}\, gr_{\mathcal{W}\cap\mathfrak{X}}\, \mathfrak{X} \,,$$

qu'on a un isomorphisme canonique :

$$[gr_Y \Delta;d/(Z_1,\ldots,Z_t)gr_Y \Delta;d][Z_1,\ldots,Z_t] \longrightarrow gr_Y \mathcal{C}^d_{\Delta,Y};\infty$$

ou encore un isomorphisme canonique :

$$C^{\infty}_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,Y},\,Y} \longrightarrow [C_{\underline{\Delta}|W,Y}^{d} \cap C_{\Delta,Y}^{d}] \underset{Y}{\times} [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y] \quad .$$

Or, d'après 3.3.2, si $d \in [d_i , d_{i+1}[$, $C^{\infty}_{\mathcal{C}^{d}_{\Delta,Y},\,Y}$ s'identifie à $C_{\Delta,Y}(i+1)$. Nous avons donc une identification canonique :

$$C_{\Delta,Y}(i+1) \longrightarrow [C_{\underline{\Delta}|W,Y}^{d} \cap C_{\Delta,Y}^{d}] \underset{Y}{\times} [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y]$$

au voisinage de x. Mais ceci n'est possible qu'avec $i = s$. En effet, si $\delta \in]d_i , d_{i+1}[$, $in_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$ est engendré par des $R_k \otimes 1 \in gr_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \left[gr_W Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} \right]$, où R_k est un élément homogène de $gr_Y W$.

Il existerait donc $(f_1,\ldots,f_m)$ dans $\mathcal{J}_x$ tels que, pour $\delta' \in]d_s , \infty]$, $k = 1,\ldots,m$, $in(f_k , \delta') = R_k \otimes 1$, ce qui entraîne que $C_{\Delta,Y}(i+1) \supset C_{\Delta,Y}(s+1)$. On a alors $i = s$ d'après 3.2.1,3). Ceci montre que $d \in [d_s , \infty[$ et que

$$C_{\Delta,Y}(s+1) \longrightarrow [C_{\underline{\Delta}|W,Y}^{d} \cap C_{\Delta,Y}^{d}] \underset{Y}{\times} \left[C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y \right]$$

est un isomorphisme au voisinage de x.
Ceci entraîne aussi que

$$C_{\Delta,Y}(s+1) = C^{\infty}_{\Delta,Y} \supset C_{W\cap X,Y} \underset{Y}{\times} [C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y] \ .$$

Mais l'inclusion inverse étant toujours vraie, on obtient l'égalité. C'est que le dernier tropisme critique n'est pas infini, il vaut alors d_s , et que

$$C_{\underline{\Delta}|W,Y}^{d} \cap C_{\Delta,Y}^{d} = C^{d}_{(W\cap X),Y} \quad .$$

$\underline{\beta}$: $\underline{6) \Rightarrow 5) \Leftrightarrow 4)}$

On remarque $\bar{\mathcal{K}}'$ est l'$\mathfrak{J}$déal engendré par $Z_1,\ldots,Z_t$ dans $gr_Y W[Z]$. Il suffit donc d'appliquer 5.1.2,3) avec $gr_Y W[Z]$, $\mathfrak{J}n_Y(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d)$ et $(Z) \circ gr_Y W[Z]$.

$\underline{\gamma}$: $\underline{4) \Rightarrow 1),\ 4) \Rightarrow 6)}$

Ceci va résulter du lemme suivant :

5.1.2.1 <u>Lemme</u> : Soient A un anneau, $A[Z_1,\ldots,Z_t]$ un anneau de polynômes, M un $A[Z]$-module. Soit $I = (Z) \circ A[Z]$.
Si $\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(M,A) = 0$, alors la surjection canonique

$$gr_I A[Z] \underset{A[Z]/I}{\otimes} M/IM \longrightarrow gr_I M$$

est un isomorphisme, et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(M, A[Z]/I^p) = 0 .$$

<u>Démonstration</u> : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la suite exacte (de $A[Z]$-modules) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z]/I^p, M) \longrightarrow I^p \underset{A[Z]}{\otimes} M \longrightarrow I^p . M \longrightarrow 0$$

On l'obtient à partir de

$$0 \longrightarrow I^p \longrightarrow A[Z] \longrightarrow A[Z]/I^p \longrightarrow 0$$

en tensorisant par M au-dessus de $A[Z]$.
D'autre part, on a le diagramme de $A[Z]$-modules :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z]/I^{p+1},M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z]/I^{p},M) \arrow[d] & \\
\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(I^p/I^{p+1},M) \arrow[r] \arrow[d] & I^{p+1} \underset{A[Z]}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d] & I^{p} \underset{A[Z]}{\otimes} M \arrow[r] \arrow[d] & I^p/I^{p+1} \underset{A[Z]}{\otimes} M \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & I^{p+1}.M \arrow[r] \arrow[d] & I^{p}.M \arrow[r] \arrow[d] & I^p.M/I^{p+1}.M \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

où toutes les suites sont exactes.

Mais on remarque que I^p/I^{p+1} est une somme directe d'un certain nombre de copies de A en tant que A[Z]-modules. Puisque $\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A,M) = 0$, de même $\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(I^p/I^{p+1},M) = 0$.

Si donc $\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z]/I^p,M) = 0$, $\mathrm{Tor}_1^{A[Z]}(A[Z]/I^{p+1},M) = 0$ et la flèche verticale de droite est un isomorphisme. On obtient donc le lemme par récurrence sur p.

Indiquons maintenant comment on applique ce lemme. Avec $A = \mathrm{gr}_Y W \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$ et $M = \mathrm{gr}_Y \Delta;d \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}$, on obtient que :

$$\mathrm{gr}_Y \Delta;d/(Z_1,\ldots,Z_t)\mathrm{gr}_Y \Delta;d\,[Z_1,\ldots,Z_t] \longrightarrow \mathrm{gr}_{(Z)}\,\mathrm{gr}_Y \Delta;d$$

est un isomorphisme. L'immersion est donc régulière.

De plus :

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_Y \underline{\Delta};d}(\mathrm{gr}_Y \Delta;d,\ \mathrm{gr}_Y \underline{\Delta};d/\bar{\mathcal{J}}'^{p})$$

a un germe nul en x pour tout p. Ceci est équivalent à 6) grâce à 5.1.2,3).

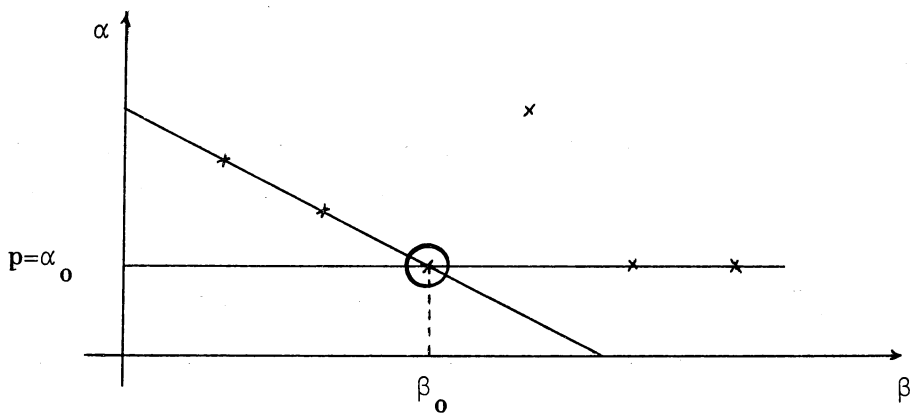
$\underline{\delta}$: $\underline{2) \Rightarrow 9) \Rightarrow 5)}$

On laisse au lecteur le soin de s'inspirer de 3.2.5 pour montrer que $2) \Rightarrow 9)$.

Soit maintenant $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$ tel que $f \in \mathcal{J}_x$ et

$$in_Y(f;\underline{\Delta},d) \in \overline{\mathcal{N}'}.\ gr_Y W[Z] \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}\ .$$

Soit $p = \nu_{(Z)}(in(f;\underline{\Delta},d))$ ($p \geq 1$ par hypothèse). On se ramène tout d'abord au cas où pour tout A tel que $f_A \neq 0$, $|A| \geq p$. Ceci se fait suivant la même méthode que dans 5.1.1, $\underline{\delta}$ $10) \Rightarrow 6)$.



Soit $M_{\beta_o,\alpha_o} = in_Y(f,\underline{\Delta},\infty) \in gr_Y W[Z]$. C'est un élément de bidegré (β_o,α_o) et $\alpha_o = p$. Dans ce cas

$$\nu_Y(f,\underline{\Delta},d) = \alpha_o + \beta_o/d \quad .$$

Toujours comme dans la démonstration citée plus haut il suffit d'appliquer $1) \Rightarrow 6)$ de 5.2.1 pour un D quelconque assez grand ($C^{\infty}_{\underline{\Delta},Y} = C^{D}_{\underline{\Delta},Y}$).
Il suffit de montrer que

$$C^{\infty}_{\underline{\Delta},Y} \cap C_{W,Y} \longrightarrow C^{\infty}_{\underline{\Delta},Y}$$

est une immersion régulière en x.

Or les conditions i) et ii) de 9) entraînent que

$$[C^{d}_{\Delta,Y} \cap C_{W,Y}] \underset{Y}{\times} \left[C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y\right] = C^{\infty}_{\Delta,Y} .$$

On a donc à vérifier que

$$C^{d}_{\Delta,Y} \cap C_{W,Y} \longrightarrow [C^{d}_{\Delta,Y} \cap C_{W,Y}] \underset{Y}{\times} \left[C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y\right]$$

est une immersion régulière et c'est évident.

<u>2) ⇔ 10)</u>. Voir corollaire 4.2.5.

<u>8) ⇒ 7) ⇒ 1)</u>. C'est évident.

<u>(2) ⇔ 1)) ⇒ 8)</u>. C'est le même argument que 5.1.1 pour montrer que {2) ⇔ 1)} + 1) ⇒ 9).

5.2.3 <u>Remarque</u> : Les implications de 5.2.1 restent vraies si on supprime partout l'hypothèse $C^{d}_{\Delta|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x.
On aura remarqué la symétrie entre les théorèmes 5.2.1 et 5.2.2 (à la fois énoncés et démonstrations). Si W est non singulier en x, l'un est d'ailleurs strictement équivalent à l'autre. Il suffit d'échanger le rôle joué par $z_1,\ldots,z_t$ coordonnées sur $r^{-1}(x)$ et $w_1,\ldots,w_s$ sur W. Ceci permet de construire une rétraction $r' : Z \to r^{-1}(x)$ et une installation $\Delta' = (X,Z,r^{-1}(x) ; r')$ dont les tropismes critiques sont alors les inverses des tropismes critiques de Δ. Ceci justifie le nom de 1/transversalité .
Cette symétrie n'est complète que si on met l'hypothèse de platitude de $C^{d}_{\Delta|W,Y} \cap C^{d}_{\Delta,Y}$ au-dessus de Y dans la définition de la d-1/tranversalité.

5.2.4 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X,Z,W ; r)$ une bonne installation, soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y. Pour que Δ n'ait aucun tropisme critique le long de Y en x, il faut et il suffit que Δ soit ambiante en x (i.e. $X = Z$).

<u>Démonstration</u> : On a les isomorphismes suivants :

$$\left.\begin{array}{l} C^{\infty}_{\Delta,Y} = C_{W,Y} \underset{Y}{\times} \left[C_{X,W} \underset{W}{\times} Y \right] \\ \\ C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{X,W} \underset{W}{\times} Y \end{array}\right\} \text{ fournies par 3.2.6}$$

$$C^{\infty}_{\Delta,Y} = C_{W,Y} \underset{Y}{\times} \left[C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y \right]$$ puisque ∞ n'est pas tropisme critique (3.2.2) et que $W \subset X$ (3.2.6).

On a donc $C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y = C_{X,W} \underset{W}{\times} Y = C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{r^{-1}(Y),Y}$.

$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est donc plat, et de 5.1.4 on tire que le morphisme $r|X : X \to W$ est plat en x.

Mais puisque $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C_{r^{-1}(Y),Y}$, on a $X \cap r^{-1}(Y) = r^{-1}(Y)$. En particulier, $X \cap r^{-1}(x) = r^{-1}(x)$. $r|X$ a donc une fibre lisse au-dessus de x. $r|X : X \to W$ est un morphisme lisse. Ayant même fibre que $r : Z \to W$ au-dessus de x, c'est que $X = Z$ dans un voisinage de x.

Pour achever ce paragraphe, nous allons étudier une propriété généralisant celle de d-transversalité ou d-1/transversalité d'une installation Δ en un point. Elle ne sera utilisée dans la suite (II, 1.2.17) que dans le cas particulier où $d = 1$ et Δ est une installation lisse en x.

5.3.1 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$. Soit $\underline{\Delta} = (Z, Z, W ; r)$. Soit enfin $d \in]0,\infty[$ un réel fixé. On désigne par $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)$ l'idéal de $gr_x \underline{\Delta}; d$ définissant $C^d_{\Delta,x}$ dans $C^d_{\underline{\Delta},x}$. Pour $\nu \in]0,\infty[$, on note $C^d_{\Delta,x}(\nu)$ le sous-cône de $C^d_{\underline{\Delta},x}$ défini par l'idéal de $gr_x \underline{\Delta}; d$ engendré par les éléments homogènes de degré inférieur ou égal à ν de $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)$.

Si $d = 1$, on note de même $C_{X,x}(\nu)$ au lieu de $C^{1}_{\Delta,x}(\nu)$.

5.3.2 <u>Proposition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$, $d \in]0,\infty[$ un réel fixé. Soit $dr : C^{d}_{\Delta,x} \longrightarrow C^{d}_{\Delta|W,x}$ le morphisme canonique.

Si les fonctions $H_{\Delta,x}(d)$ et $H_{\Delta|W,x}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$ coïncident pour $\nu \in [0,\mu]$, alors

$$C^{d}_{\Delta,x}(\mu) \cap dr^{-1}(Y) = C_{X\cap r^{-1}(x),x}(\mu) .$$

<u>Démonstration</u> : Précisons tout d'abord que $\Delta(x)$ étant $(X \cap r^{-1}(x),\ r^{-1}(x), x\ ;\ r|r^{-1}(x))$, $C_{X\cap r^{-1}(x),x}(\nu)$ signifie $C^{d}_{\Delta(x),x}(\nu)$ qui s'identifie d'ailleurs à $C^{1}_{\Delta(x),x}(\nu)$ puisque, pour tout δ, les fonctions coordonnées $Z_1,\ldots,Z_t$ sur $r^{-1}(x)$ sont δ-homogènes de degré 1. Reportons-nous à la démonstration de 4.2.4. Comme-là, désignant par $\tilde{\mathcal{C}} = (C_{W,x} \times C_{X\cap r^{-1}(x),x}, C_{W,x} \times C_{r^{-1}(x),x}, C_{W,x}\ ;\ p_1)$, on a la suite d'inégalités:

$$H_{\Delta,x}(d) \le H_{\mathcal{C}^{o}_{\Delta,x},x}(d) \le H_{\tilde{\mathcal{C}},x}(d) = H_{\Delta|W,x}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x)} .$$

Les deux fonctions extrêmes coïncidant pour $\mu \in [0,\nu]$, les autres fonctions prennent également la même valeur quand $\mu \in [0,\nu]$. En particulier, ceci implique que les algèbres graduées associées à $C_{W,x} \times C_{X\cap r^{-1}(x),x}$ et à $C^{o}_{\Delta,x}$ coïncident jusqu'en degré μ (il s'agit toujours du d-degré). Supposons que $d \in [d_i\ ,\ d_{i+1}[$, et soit, pour $j = 0,\ldots,i+1$

$$H_j = H_{\mathcal{C}^{\delta}_{\Delta,x},x}(d) \quad \text{pour } \delta \in [d_{j-1}\ ,\ d_j[\ .$$

On sait alors que $H_1 > H_2 > \ldots > H_i > H_{i+1}$ si $d \neq d_i$

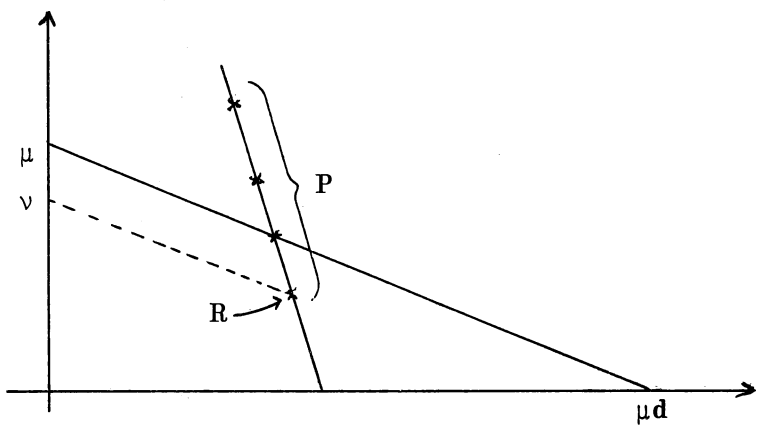
$$H_1 > H_2 > \quad > H_i = H_{i+1} \quad \text{si} \quad d = d_i \ .$$

On va montrer que dans les deux cas, pour tout $\delta \leq d$, qui n'est pas un tropisme critique de Δ en x, $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$ et $in_x(\Delta,\underline{\Delta},0)$ qui sont deux idéaux bihomogènes, ont mêmes composantes d-homogènes jusqu'en degré μ.

Soit j tel que $d_j < d$. On se souvient que $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$ pour $\delta \in]d_j, d_{j+1}[$ est engendré par les formes initiales pour la graduation Z-adique de $gr_x W[Z] = gr_x \underline{\Delta};d$ des éléments de $I = in_x(\Delta,\underline{\Delta},d_j)$.

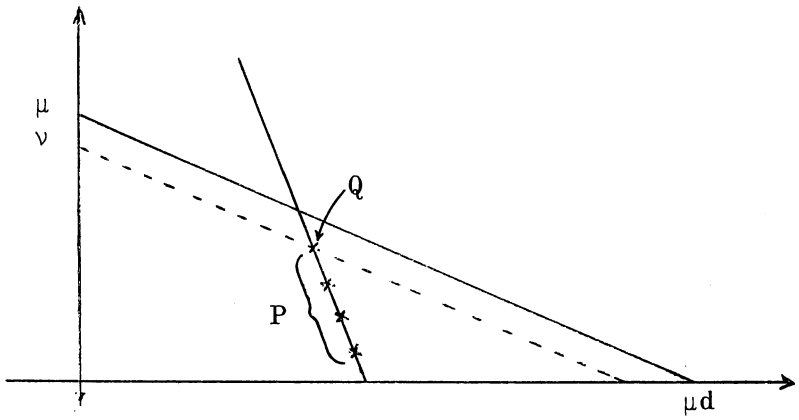
Si $\delta \in]d_{j-1}, d_j[$, on remplace la graduation Z-adique par la graduation $\overline{N}$-adique, où $\overline{N} = \bigoplus_{b\geq 1} gr_x^b W$.

Soit $R \in in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$, $\delta \in]d_j, d_{j+1}[$, bihomogène et d-homogène de degré $\leq \mu$. Il existe $P \in I$ tel que $R = in_Z P$.



Mais comme $H_j(\nu) = H_{j+1}(\nu)$ si $\nu \in [0,\mu]$, choisissant pour ν le degré de R, on montre que $R \in I$ (voir démonstration de 4.2.2, p. 57). Par suite, R est aussi la forme initiale pour la graduation $\overline{N}$-adique de $R \in I$ et, de ce fait, appartient à $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$, $\delta \in]d_{j-1}, d_j[$.

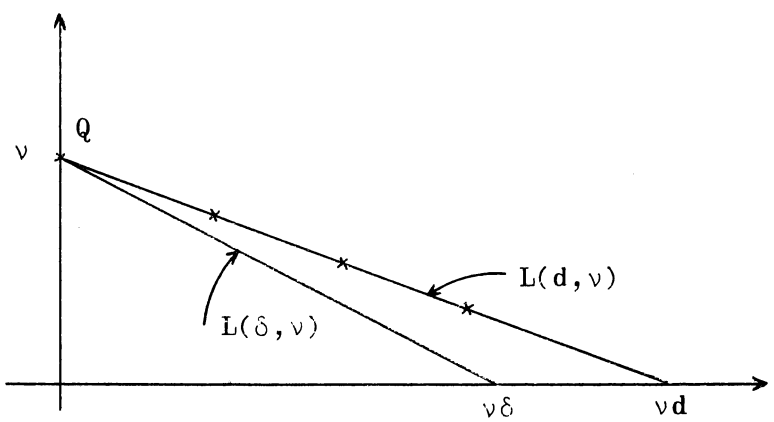
Dans l'autre sens, soit $Q \in in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$, $\delta \in]d_{j-1}, d_j[$, bihomogène et d-homogène de degré $\nu \leq \mu$. Il existe $P \in I$ tel que $Q = in_{(\overline{N})} P$. Comme $H_j(\nu_-) = H_{j+1}(\nu_-)$, $Q \in I$. Il est donc la Z-forme initiale de lui-même et appartient à $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$, $\delta \in]d_j, d_{j+1}[$.



Il reste maintenant à montrer que, pour $\nu \in [0,\mu]$

$$\mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},d) + \overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x W[Z]/\overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x W[Z] = \mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},0) + \overline{N}.\mathrm{gr}_x W[Z]/\overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x W[Z]\ .$$

L'inclusion de l'idéal de gauche dans celui de droite est claire.
D'autre part, $\mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},0) = \mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$ si $\delta \in [0,d[$.
Soit $Q \in \mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},0) + \overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x W[Z]/\overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x W[Z] \subset \mathbb{C}[Z]$. Considérant $\mathbb{C}[Z]$ comme un sous-module de $\mathrm{gr}_x W[Z]$, $Q \in \mathrm{in}_x^{\nu}(\Delta,\underline{\Delta},0)$. Choisissons maintenant δ assez voisin de d pour que dans la portion de $\mathbb{R}^{+2}$ située entre les segments $L(d,\nu)$ et $L(\delta,\nu)$ (passant respectivement par $(0,\nu)$ et $(\nu d,0)$ ou $(\nu\delta,0)$) il n'y ait aucun point de $\mathbb{N}^2$ à part ceux situés sur $L(d,\nu)$.



Alors :

$$Q \in in_x^{\nu}(\Delta, \underline{\Delta}, \delta)$$

et il existe $f \in J_x$ idéal définissant X dans Z au voisinage de x tel que

$$Q = in_x(f, \underline{\Delta}, d) \ .$$

On a donc aussi $Q = in_x(f, \underline{\Delta}, d) \bmod \overline{N} \, . \, gr_x \, W[Z]$.

Ceci termine la démonstration.

5.3.3 <u>Remarque</u> : Les hypothèses de 3.2 n'entraînent pas que l'installation $\mathcal{C}^d_{\Delta,x}(\mu) = (C^d_{\Delta,x}(\mu), C^d_{\underline{\Delta},x}, C^d_{\underline{\Delta}|W,x}; dr)$ soit d-transverse en x. Même si Δ est d-transverse en x, i.e. $\mathcal{C}^d_{\Delta,x} = (C^d_{\Delta,x}, C^d_{\underline{\Delta},x}, C^d_{\underline{\Delta}|W,x}; dr)$ est d-transverse en x, il se peut qu'il existe μ pour lequel ce phénomène se produise.

5.3.4 <u>Proposition</u> : Mêmes données et notations que dans 3.2.
Si les fonctions $H_{\Delta,x}(d)$ et $H_{(W\cap X),x}(d) * G_{r^{-1}(x),x}$ coïncident pour $\nu \in [0,\mu]$, alors

$$C^d_{\Delta,x}(\mu) \cap C^d_{\underline{\Delta}|W,x} = C^d_{(W\cap X),x}(\mu) \ .$$

<u>Démonstration</u> : Elle est laissée en exercice au lecteur qui n'aura qu'à "inverser" 3.2 .

***

§ 6. PROPRIETES FONCTORIELLES DE LA d-TRANSVERSALITE

6.1 <u>Lemme</u> : Soient $i : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to W$ des morphismes d'espaces analytiques. Soit x un point de X_1. On suppose que i est une immersion au voisinage de x et que $f_1 = f_2 \circ i$ est plat en x.
Pour que i soit un isomorphisme au voisinage de x, il faut et il suffit que $f_1^{-1}(f_1(x)) = f_2^{-1}(f_2(x))$.

<u>Démonstration</u> : Convenablement traduit en termes d'anneaux locaux, ceci revient à montrer l'assertion suivante :
Soit A un anneau local nœthérien, M son idéal maximal, B_2 un anneau local qui est une A-algèbre, $B_1 = B_2/K$ tel que B_1 soit A-plat. On suppose que $B_2 \underset{A}{\otimes} A/M \longrightarrow B_1 \underset{A}{\otimes} A/M$ est un isomorphisme. Alors $K = (0)$. En effet

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0$$

est exacte. Puisque $\mathrm{Tor}_1^A(B_1, A/M) = 0$,

$$0 \longrightarrow K \underset{A}{\otimes} A/M \longrightarrow B_2 \underset{A}{\otimes} A/M \longrightarrow B_1 \underset{A}{\otimes} A/M \longrightarrow 0$$

est aussi exacte. Mais ceci entraîne que $K \underset{A}{\otimes} A/M = 0$, donc que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^n K$. En particulier, K est inclus dans l'intersection de toutes les puissances de l'idéal maximal de B_2. Par suite $K = (0)$.

6.2 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y.
Soit

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "h"] & W \\ Y' \arrow[u, hook] \arrow[r] & Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien.

Soit $\Delta' = (X \underset{W}{\times} W', Z \underset{W}{\times} W', W' ; r \times \mathrm{Id}\, W') = (X', Z', W' ; r')$ l'installation image réciproque par h. Si Δ est d-transverse le long de Y en x, Δ' est d-transverse le long de Y' en tout point x' tel que $h(x') = x$.

De plus le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C^{d}_{\Delta', Y'} \arrow[r] \arrow[d] & C^{d}_{\Delta, Y} \arrow[d] \\
C^{d}_{\underline{\Delta'}|W', Y'} \arrow[r] & C^{d}_{\underline{\Delta}|W, Y}
\end{tikzcd}$$

est cartésien au voisinage de x.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de vérifier le deuxième point. Pour ce faire, nous allons tout d'abord nous ramener au cas où h est une immersion.

On peut en effet "factoriser h par son graphe".

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, hook] & W' \times W \arrow[r, "pr_2"] & W \\
Y' \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & W' \times Y \arrow[u, hook] \arrow[r, "pr_2"] & Y \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où les morphismes $W' \to W' \times W$ et $Y' \to W' \times Y$ sont des immersions. Or le théorème se vérifie immédiatement dans le cas où h est de la forme $pr_2 : W' \times W \longrightarrow W$ et où $Y' = W' \times Y$ (cf. 1.17).

■ A partir de maintenant, on ne notera plus les immersions et on idenfiera x' à x.

On remarque que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C^{d}_{\underline{\Delta}',Y'} & \longrightarrow & C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^{d}_{\underline{\Delta}'|W',Y'} & \longrightarrow & C^{d}_{\underline{\Delta}|W,Y} \end{array}$$

étant toujours cartésien au voisinage de x, il suffit que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C^{d}_{\underline{\Delta}',Y'} & \longrightarrow & C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C^{d}_{\underline{\Delta}',Y'} & \longrightarrow & C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \end{array}$$

le soit, et pour qu'il en soit ainsi, il suffit encore que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} gr_Y \underline{\Delta};d & \longrightarrow & gr_{Y'} \underline{\Delta}';d \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) & \longrightarrow & \mathfrak{Jn}_{Y'}(\Delta',\underline{\Delta}',d) \end{array}$$

l'image d'un système de générateurs de $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ soit un système de générateurs de $\mathfrak{Jn}_Y(\Delta',\underline{\Delta}',d)$.

■ Fixons les notations. Soient $0 = \mathcal{O}_{W,x}$, $0' = \mathcal{O}_{W',x'}$. Soit $T = \operatorname{Ker} 0 \to 0'$. choisissons un système de coordonnées locales $(z_1,\dots,z_t)$ sur $r^{-1}(x)$ de centre x et identifions $\mathcal{O}_{Z,x}$ à $0\{z_1,\dots,z_t\}$, $\mathcal{O}_{Z',x'}$ à $\mathcal{O}'\{z_1,\dots,z_t\}$. Soit $J = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_{Z,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$, $J' = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_{Z',x'} \to \mathcal{O}_{X',x'}$. On a $J' = J + T.\mathcal{O}_{Z,x}/T.\mathcal{O}_{Z,x}$. Si $f \in J$, on notera f' son image canonique dans J'. Soient $P = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_{W,x} \to \mathcal{O}_{Y,x}$, $P' = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_{W',x} \to \mathcal{O}_{Y',x'}$, $P_1 = \operatorname{Ker} \mathcal{O}_{W,x} \to \mathcal{O}_{Y',x'}$; $P_1 = P + T$.

■ Choisissons $(f_1,\dots,f_m)$ dans J vérifiant les propriétés i) et ii) de 10), théorème 5.1.1. Si, pour $\delta < d$, $in_Y(f_k, \delta) = 1 \otimes Q_k$ où Q_k est un polynôme homogène de $\mathcal{O}_{Y,x}[Z]$, soit ν_k son degré.

Considérons maintenant $(f'_1,\dots,f'_m)$ dans J'. On peut supposer que la condition i) reste satisfaite. En effet, on peut écrire :

$$f_k = \sum_{|A|\leq\nu_i} f_{kA}\, z^A + g_k$$

où $\nu_Y(f_{kA}) = d(\nu_i - |A|)$ et $\nu_Y(g_k, d) > \nu_k$. On a aussi :

$$Q_k = \sum_{|A|=\nu_i} (f_{kA} \bmod P)\, Z^A .$$

Ceci entraîne que :

$$f'_k = \sum_{|A|\leq\nu_i} (f_{kA} \bmod T)\, z^A + g'_k .$$

Il est clair que :

$$\nu_{Y'}(f_{kA} \bmod T) \geq d(\nu_i - |A|) \quad \text{et} \quad \nu_{Y'}(g'_k, d) > \nu_k .$$

D'autre part, on a un morphisme canonique $\mathcal{O}_{Y,x}[Z] \longrightarrow \mathcal{O}_{Y',x}[Z]$. Si Q'_k est l'image canonique de Q_k par ce morphisme, on a

$$Q'_k = \sum_{|A|=\nu_i} [(f_{kA} \bmod T) \bmod P']\, Z^A .$$

Il s'agit de voir qu'on peut se ramener au cas où $Q'_k \not\equiv 0$. Ceci va résulter du fait que $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est plat en x. En termes d'équations, ceci signifie que le $\mathcal{O}_{Y,x}$-module de $\mathcal{O}_{Y,x}[Z]/(\dots,Q_k,\dots)$ est plat. Si Q'_1 par exemple est nul, considérons le sous-espace de $r^{-1}(Y) \simeq Y \times \mathbb{C}^t$ défini par $(Q_2,\dots,Q_m)$. Il contient $C^d_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \longrightarrow Y$. Mais ces deux espaces ont même restriction au-dessus de Y' au voisinage de x, a fortiori même fibre au-dessus de x. Le lemme 6.1 nous dit alors qu'ils sont égaux, i.e. Q_1 est inutile dans le système de générateurs $Q_1,\dots,Q_m$. Il en résulte que $in_Y(f_1, d)$ est lui aussi inutile dans le système de générateurs $(in_Y(f_1, d),\dots,in_Y(f_m,d))$. En effet, le sous-espace de $C^d_{\underline{\Delta},Y}$ défini par $(in_Y(f_2, d),\dots,in_Y(f_m, d))$ contient $C^d_{\Delta,Y}$ qui est plat sur $C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}$. Ces deux espaces ayant même fibre au-dessus de Y coïncident

d'après 6.1.
En conclusion, tous les f_k donnant lieu à des $Q'_k \equiv 0$ sont superflus.
On peut donc supposer que $k = 1,\dots,m$ $\nu_{Y'}(f'_k, d) = \nu_k$ et que, pour $\delta < d$, $in_{Y'}(f'_k, \delta) = 1 \otimes Q'_k$ où Q'_k est l'image de Q_k dans $\mathcal{O}_{Y,x}[Z] \longrightarrow \mathcal{O}_{Y',x}[Z]$.

■ Montrons maintenant que $(in_{Y'}(f'_1, d),\dots,in_{Y'}(f'_m, d))$ est un système de générateurs de $\mathfrak{in}_{Y'}(\Delta',\underline{\Delta}',d)$.
Soit $g' \in J'$. Relevons-le en un éléments g de J et posons $\nu = \nu_Y(g,d)$, $\nu' = \nu_{Y'}(g',d)$. Puisque $(f_1,\dots,f_m)$ vérifie ii) 10) de 5.1.1, on a une relation :

$$in_Y(g,d) = \Sigma P_i\, in_Y(f_i, d) \quad \text{où} \quad P_i \in gr_Y \underline{\Delta};d = gr_Y W[Z]$$

et est d-homogène de degré $\nu - \nu_i$ (2.1.7). On peut donc écrire

$$P_i = \sum_{|A| \leq \nu-\nu_i} P_{iA} Z^A \quad \text{avec} \quad P_{iA} \in gr_Y^{d(\nu-\nu_i-|A|)} W .$$

Relevons P_{iA} en un élément $p_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$ tel que $in_Y p_{iA} = P_{iA}$ et posons :

$$p_i = \sum_{|A| \leq \nu-\nu_i} p_{iA} z^A \in \mathcal{O}_{Z,x} .$$

Posons enfin :

$$g_1 = g - \sum_{i=1,\dots,m} p_i f_i .$$

Remarquons que $g_1 \in J$ et que, grâce à la définition des p_i, $\nu_Y(g_1,d) > \nu$.
Cette dernière égalité entraîne que :

$$g'_1 = g' - \sum_{i=1,\dots,m} p'_i f'_i .$$

Et il y a deux possibilités :

1) <u>si $\nu' = \nu$</u>, puisque $\nu_{Y'}(g'_1, d) \geq \nu_{Y'}(g_1, d) > \nu$, on a

$$in_{Y'}(g',d) = in_{Y'}(\Sigma p'_i f'_i, d) = \sum_{i=1,\dots,m} in_{Y'}(p'_i, d)\, in_{Y'}(f'_i, d) .$$

En effet $\nu_{Y'}(f'_i, d) = \nu_i$ et $\nu_{Y'}(p'_i, d) \geq \nu - \nu_i$.
Ceci montre que $in_{Y'}(g',d)$ appartient à l'idéal engendré par les $in_{Y'}(f'_i, d)$.

B) <u>si $\nu' > \nu$</u>, nous allons montrer que nous pouvons changer le relèvement g de g' de façon à nous ramener au cas A).
Si $\nu' > \nu$, on a certainement :

$$\sum_{i=1,\dots,m} p'_i f'_i = \sum_{|A| \leq \nu} r'_A z^A \quad \text{où} \quad r'_A \in \mathcal{O}_{W',x} \quad \text{et} \quad \nu_{Y'}(r'_A) > d(\nu - |A|) .$$

Puisque $P' = P + T/T$, ceci entraîne l'existence de $h \in T . \mathcal{O}_{Z,x}$ et de $r \in \mathcal{O}_{Z,x}$ tel que $\nu_Y(r,d) > \nu$ et que

$$\Sigma\, p_i f_i = h + r \quad .$$

Grâce à la définition des p_i , $in_Y(g,d) = in_Y(\Sigma\, p_i f_i , d) = in_Y(h,d)$.
Si $\mathfrak{In}_Y(W',W)$ désigne l'$\mathfrak{I}$déal de $gr_Y W$ définissant $C_{W',Y'}$ dans $C_{W,Y}$, ceci montre que $in_Y(g,d) \in \mathfrak{In}_Y(W',W) . gr_Y \underline{\Delta};d$.
Ainsi, nous avons montré que, si $\nu' > \nu$,

$$in_Y(g,d) \in \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cap \mathfrak{In}_Y(W',W) . gr_Y \underline{\Delta};d .$$

Or, supposons que nous sachions montrer qu'en fait :

$$in_Y(g,d) \in \mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) . \mathfrak{In}_Y(W',W) . gr_Y \underline{\Delta};d .$$

On en déduirait que dans l'écriture :

$$in_Y(g,d) = \Sigma\, P_i\, in_Y(f_i , d) \quad , \quad P_i = \sum_{|A| \leq \nu - \nu_i} P_{iA} Z^A$$

on peut choisir les P_{iA} dans $\mathfrak{In}_Y^{d(\nu-\nu_i-|A|)}(W',W)$ et donc on peut relever P_{iA} en $p_{iA} \in T \cap P^{d(\nu-\nu_i-|A|)} + P^{d(\nu-\nu_i-|A|+1)}$, ce qui entraîne que si $p_i = \Sigma\, p_{iA} z^A$

$$\Sigma\, p_i\, f_i \in T\,.\,\mathcal{O}_{Z,x}\,.\,J + I_Y^+(d,\nu) \cap J \quad \text{(notation de 2.1.9)}\,.$$

Ainsi il existe $l \in T\,.\,\mathcal{O}_{Z,x}\,.\,J$ et $s \in I_Y^+(d,\nu) \cap J$ tels que

$$\Sigma\, p_i\, f_i = l + s$$

et

$$g = (g_1 + s) + l\ .$$

On a donc construit g_1+s, un élément de $J \cap I_Y^+(d,\nu)$ qui relève g'. Si son d-ordre $\mu > \nu$ est ν', on s'est ainsi ramené au cas A). Sinon, on reprend les mêmes opérations et au bout d'un nombre fini de pas, on y sera ramené.

■ Il reste donc à montrer maintenant que :

$$\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cap \mathfrak{Jn}_Y(W',W)\,.\,gr_Y\,\underline{\Delta};d = \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)\,.\,\mathfrak{Jn}_Y(W',W)\,.\,gr_Y\,\underline{\Delta};d\ .$$

Or ceci résulte de l'hypothèse de transversalité qui nous dit que le morphisme $gr_Y\,W \longrightarrow gr_Y\,\underline{\Delta};d$ est plat en x.
En effet, ceci entraîne que le germe en x de

$$\mathrm{Tor}_1^{gr_Y W}(gr_Y\,\underline{\Delta};d\ ,\ gr_Y\,W/\mathfrak{Jn}_Y(W',W))$$

est nul.
Mais on a les égalités (5.1.2.2 et 5.1.2.3) au voisinage de x

$$0 = \mathrm{Tor}_1^{gr_Y W[Z]}(gr_Y\,W[Z]/\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)\ ,\ gr_Y\,W[Z]/\mathfrak{Jn}_Y(W',W)\,.\,gr_Y\,W[Z])$$

$$= \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d) \cap \mathfrak{Jn}_Y(W',W)\,.\,gr_Y\,W[Z]/\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)\,.\,\mathfrak{Jn}_Y(W',W)\,.\,gr_Y\,W[Z]\ ,$$

ce qu'il nous fallait.

BIBLIOTHEQUE Mathématiques Recherche CENTRE INTERUNIVERSITAIRE DIJON-ST-BERNARD

6.3 <u>Corollaire</u> : Sous les hypothèses du théorème 6.2, le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_{X'\cap r'^{-1}(Y'),Y'} \arrow[r] \arrow[d] & C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de se souvenir que la d-transversalité de Δ (resp. Δ') le long de Y (resp. Y') en x (resp. x') entraîne que :

$$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} = C^{d}_{\Delta,Y} \cap dr^{-1}(Y) \quad \left[\text{resp. } C_{X'\cap r'^{-1}(Y'),Y'} = C^{d}_{\Delta',Y'} \cap dr'^{-1}(Y')\right]$$

au voisinage de x (resp. x') (5.1.1, condition 4))
et de constater que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] & C_{W,Y} \\ Y' \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & C_{W',Y'} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

est lui aussi cartésien.

6.4 <u>Remarque</u> : Notations de la démonstration du théorème 6.2.
Au cours de la démonstration du théorème 6.2, nous avons montré qu'il existait $(f_1,\ldots,f_m)$ un système d'éléments de J vérifiant les conditions i) et ii) de 10) théprème 5.1.1 dont l'image canonique $(f'_1,\ldots,f'_m)$ dans J' vérifie aussi ces même conditions relativement à Δ'. En effet nous avons montré directement que $\mathfrak{Jn}_{Y'}(\Delta',\underline{\Delta}',d) = (\ldots,in_{Y'}(f'_k,d),\ldots)$.
Pour $\delta \in [0,d[$, puisque Δ' est transverse le long de Y' en x'

$$\mathfrak{Jn}_{Y'}(\Delta',\underline{\Delta}',\delta) = \mathfrak{Jn}_{Y'}(X'\cap r'^{-1}(Y'),r'^{-1}(Y)) \circ gr_{Y'}\,\underline{\Delta}';\delta \quad .$$

Le corollaire 6.3 entraîne que $(Q'_1,\ldots,Q'_k)$ engendre cet idéal.
Nous reviendrons plus loin sur ces propriétés.

6.5 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$. Soit $h : W' \to W$ un morphisme.
Soit $\Delta' = (X',Z',W'\,;\,r') = X \times_W W'\,,\ Z \times_W W'\,,\ W'\,;\,r \times \mathrm{Id}\,W')$ l'installation image réciproque par h. Si Δ est d-transverse en x, Δ' est d-transverse en tous points $x' \in W'$ tels que $h(x') = x$. De plus

$$\begin{tikzcd} C^{d}_{\Delta',x'} \arrow[r] \arrow[d] & C^{d}_{\Delta,x} \arrow[d] \\ C_{\underline{\Delta}'|W',x'} \arrow[r] & C_{\underline{\Delta}|W,x} \end{tikzcd}$$

est cartésien.

<u>Démonstration</u> : Ce n'est pas une conséquence directe de 6.2, mais on s'y ramène de la façon suivante.
On factorise h par son graphe

$$W' \longrightarrow W' \times W \xrightarrow{pr_2} W \quad .$$

Localement autour de x', on peut plonger W' dans un espace $\mathbb{C}^k$.
On obtient donc finalement une décomposition de h

$$W' \longrightarrow \mathbb{C}^k \times W \xrightarrow{pr_2} W$$

en une immersion et un produit par un espace lisse.
Soit $\mathbb{C}^k \times \Delta = (\mathbb{C}^k \times X,\ \mathbb{C}^k \times Z,\ \mathbb{C}^k \times W\,;\,\mathrm{Id}\,\mathbb{C}^k \times r)$.
Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C^{d}_{\mathbb{C}^k \times \Delta, x' \times x} \arrow[r] \arrow[d] & C^{d}_{\Delta, x} \arrow[d] \\
C_{\mathbb{C}^k \times W, x' \times x} \arrow[r] & C_{W, x}
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc $\mathbb{C}^k \times \Delta$ est d-transverse en $x' \times x$. On applique maintenant 6.2 à l'immersion $W' \longrightarrow \mathbb{C}^k \times W$ puisque x' est l'image réciproque de $x' \times x$ par cette immersion.

***

§ 7. d-BASE STANDARD ET d-BASE STANDARD NORMALISEE

7.1.1 Définition : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$ et $d \in]0,\infty[$ un réel fixé.
On désigne par J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x. Un système $(f_1,\ldots,f_m)$ d'éléments de J est appelé une d-base standard de Δ en x s'il possède les propriétés suivantes :

1) soit, pour $1 \leq i \leq m$, $\nu_i = \nu_x(f_i ; \underline{\Delta}, d)$; alors :

$$\nu_1 \leq \nu_2 \leq \ldots \leq \nu_m$$

2) $(in_x(f_1 ; \underline{\Delta}, d),\ldots,in_x(f_m ; \underline{\Delta}, d))$ est un système minimal de générateurs de $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)$.

7.1.2 Lemme : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, et soit x un point de $W \cap X$, $d \in]0,\infty[$. Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une d-base standard de Δ en x. La suite $\{\nu_i = \nu_x(f_i ; \underline{\Delta}, d)\}$ ne dépend que de Δ, x et d.

Démonstration : Soit $\mu \in \mathbb{N} + 1/d\,\mathbb{N}$, strictement positif, soit μ^- son prédécesseur. Soit $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)(\mu^-)$ l'idéal de $gr_x \underline{\Delta}; d$ engendré par les éléments de degré inférieur ou égal à μ^- de $in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)$ (i.e. l'idéal qui définit $C^d_{\Delta,x}(\mu^-)$ (5.3.1)). Le nombre des ν_i qui ont la valeur μ est :

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\ in^{\mu}_x(\Delta, \underline{\Delta}, d) \big/ in^{\mu}_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)(\mu^-) \quad .$$

On vérifie que les images canoniques dans cet espace vectoriel des $in_x(f_i ; \underline{\Delta}, d)$ de degré μ en forment une base.

7.1.3 Définition : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation et soit x un point de $W \cap X$, $d \in]0,\infty[$. On note $\nu^*_x(\Delta, d)$ la suite $(\nu_1,\ldots,\nu_m, \infty, \infty \ldots \infty \ldots)$ où $(\nu_1,\ldots,\nu_m)$ est la suite des d-ordres d'une d-base standard quelconque $(f_1,\ldots,f_m)$ de Δ en x.

Si $d = 1$, on notera aussi souvent $\nu_x^*(X,Z)$ au lieu de $\nu_x^*(\Delta,1)$.

7.1.4 <u>Remarque</u> : Dans la suite, on ordonnera l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{N} + 1/d\,\mathbb{N} \cup \infty$ par l'ordre lexicographique.

7.1.5 <u>Proposition</u> : Soient $\Delta = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$, $d \in]0,\infty[$. Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une d-base standard de Δ en x. Si Δ est d-transverse en x, alors :

1) $(f_1,\ldots,f_m)$ est une δ-base standard de Δ en x pour $\delta \in]0,d]$;

2) $\nu_x^*(\Delta,d) = \nu_x^*(\Delta,\delta)$, $\forall\ \delta \in]0,d]$;

3) désignant par $\Delta(x) = \Delta \underset{W}{\times} x = (X \cap r^{-1}(x),\ r^{-1}(x),\ x\,;\ r|r^{-1}(x))$ et par $\bar{f}$ l'image canonique de $f \in \mathcal{O}_{Z,x}$ dans $\mathcal{O}_{r^{-1}(x),x}$, $(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m)$ est une base standard de $\Delta(x)$ en x et

$$\nu_x^*(\Delta,d) = \nu_x^*(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soient N l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{W,x}$, $\bar{N} = \bigoplus_{i\geq 1} gr_x^i W$, $(z_1,\ldots,z_t)$ un système de coordonnées de centre x sur $r^{-1}(x)$.
D'après 5.1.1, condition 3), on sait que :

$$C^{\,d}_{\Delta,x} \cap dr^{-1}(x) = C_{X\cap r^{-1}(x),x} \ .$$

Traduit en terme d'idéaux, ceci signifie que

$$in_x(\Delta,\underline{\Delta},d) + \bar{N}\,.\,gr_x W[Z] \big/ \bar{N}\,.\,gr_x W[Z] = in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) \ .$$

D'autre part 5.1.1 condition 6) dit que :

$$in_x(\Delta,\underline{\Delta},d) \cap \bar{N}\,.\,gr_x W[Z] = in_x(\Delta,\underline{\Delta},d)\,.\,\bar{N}\,.\,gr_x W[Z] \ .$$

Ceci entraîne que, pour $i = 1,\ldots,m$, l'image de $in_x(f_i,\underline{\Delta},d)$ par le morphisme canonique $gr_x W[Z] \longrightarrow \mathbb{C}[Z]$ est non-nulle. En effet, on aurait

une relation :

$$\mathrm{in}_x(f_i\,;\underline{\Delta},d) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\,\mathrm{in}_x(f_j\,;\underline{\Delta},d) \quad \text{où} \quad Q_j \in \overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x\,W[Z]$$

et où Q_j est d-homogène de degré $\nu_i - \nu_j$. Par conséquent, $Q_j = 0$, si $j \geq i$. Ceci contredit la condition 2) de 7.1.1.
Soit, pour $1 \leq i \leq m$, $\lambda_i(Z) = \mathrm{in}_x(f_i\,,\underline{\Delta},d) \bmod \overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x\,W[Z] \in \mathbb{C}[Z]$. C'est un polynôme homogène en Z de degré ν_i. On peut donc écrire :

$$1 \leq i \leq m \qquad \mathrm{in}_x(f_i\,;\underline{\Delta},d) = \lambda_i(Z) + \varepsilon_i \quad \text{où} \quad \varepsilon_i \in \overline{N}\,.\,\mathrm{gr}_x\,W[Z],\ \lambda_i \not\equiv 0$$

$$f_i = \lambda_i(z) + \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{iA}\,z^A \quad \text{où} \quad f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$$

et $\nu_x(f_{iA}) \geq d(\nu_i - |A|)$ si $|A| < \nu_i$, $\nu_x(f_{iA}) \geq 1$ si $|A| = \nu_i$,

$$\bar{f}_i = f_i \bmod N\,.\,\mathcal{O}_{Z,x} = \lambda_i(z) + \sum_{|A| > \nu_i} f_{iA} \bmod N\, z^A$$

et

$$\mathrm{in}_x(\bar{f}_i\,;\underline{\Delta}(x),1) = \lambda_i(Z)\ .$$

Or $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ est un système de générateurs de $\mathrm{in}_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$. Il est certainement minimal toujours d'après 5.1.1, 6). On a donc obtenu 3). 1) et 2) s'en déduisent immédiatement, car 0 n'étant pas tropisme critique,

$$C^{\,o}_{\underline{\Delta},x} = C_{W,x} \times C_{X \cap r^{-1}(x),x}$$

et on a, si $\delta \in [0,d[$, puisque $d_{\underline{\Delta},x} \geq d$, (5.1.1, 2))

$$C^{\,\delta}_{\underline{\Delta},x} = C^{\,o}_{\underline{\Delta},x}\ .$$

De plus, pour $1 \leq i \leq m$, $\delta \in [0,d[$, $\mathrm{in}_x(f_i\,,\underline{\Delta},\delta) = \lambda_i(Z)$.

7.1.6 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$.
Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une d-base standard de Δ en x.
Soit $h : W' \to W$ un morphisme.
Soit $\Delta' = (X', Z', W' ; r') = (X \times_W W', Z \times_W W', W' ; r \times \mathrm{Id}\, W')$ l'installation image réciproque par h. Soit $x' \in W'$, tel que $h(x') = x$.
Soit $\tilde{h} : Z' \to Z$ le morphisme canonique déduit de h et soit f'_i l'image de f_i par le morphisme $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z',x'}$ qui en provient.
Si Δ est d-transverse en x, alors

1) $(f'_1, \ldots, f'_m)$ est une d-base standard de Δ' en x' ;

2) $\nu^*_x(\Delta, d) = \nu^*_{x'}(\Delta', d)$.

<u>Démonstration</u> : D'après 6.5, Δ' est d-transverse à X' en x'. 7.1.5 nous donne alors les égalités suivantes :

$$\nu^*_x(\Delta, d) = \nu^*_x(X \cap r^{-1}(x) \ , \ r^{-1}(x))$$

$$\nu^*_{x'}(\Delta', d) = \nu^*_{x'}(X' \cap r'^{-1}(x'), r'^{-1}(x')) \quad .$$

Mais $\Delta(x) \simeq \Delta'(x')$, ce qui conduit à l'égalité annoncée dans 2).
D'autre part, toujours d'après 6.5, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C^d_{\underline{\Delta}', x'} \arrow[r] & C^d_{\underline{\Delta}, x} \\
C^d_{\Delta', x'} \arrow[r] \arrow[u] & C^d_{\Delta, x} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est cartésien, ce qui signifie que $\mathrm{in}_{x'}(\Delta', \underline{\Delta}', d)$ est engendré comme idéal dans $\mathrm{gr}_{x'} \underline{\Delta}' ; d$ par l'image de $\mathrm{in}_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)$ dans le morphisme $\mathrm{gr}_x \underline{\Delta} ; d \longrightarrow \mathrm{gr}_x \underline{\Delta}' ; d$.
Mais, toujours d'après 7.1.5, $\nu_x(f_i ; \underline{\Delta}, d) = \nu_x(\bar{f}_i ; \underline{\Delta}(x), 1) = \nu_i$, i.e. $f_i = \lambda_i(z) + \sum_{A \in \mathbf{N}^t} f_{iA} z^A$ où $\lambda_i \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme homogène de degré

ν_i non identiquement nul, et où $f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$ est tel que $\nu_x(f_{iA}) \geq d(\nu_i - |A|)$ si $|A| < \nu_i$, $\nu_x(f_{iA}) \geq 1$ si $|A| = \nu_i$.
On a donc $f'_i = \lambda_i(z) + \sum_{A \in \mathbb{N}} t\, f_{iA} \circ h\, z^A$ et $\nu_x(f'_i ; \underline{\Delta}', d) = \nu_i$. L'image de $in_x(f_i ; \underline{\Delta}, d)$ est $in_{x'}(f'_i ; \underline{\Delta}', d)$. Ainsi $(in_{x'}(f'_1 ; \underline{\Delta}', d), \ldots, in_{x'}(f'_m ; \underline{\Delta}', d))$ est un système de générateurs de $in_{x'}(\Delta, \underline{\Delta}', d)$. Il est minimal, car la suite des degrés de ces éléments est $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ et on vient de montrer que $\nu^*_{x'}(\Delta', d) = (\nu_1, \ldots, \nu_m, \infty)$.

7.1.7 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$. On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x.
J étant l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x, un système d'éléments de J $(f_1, \ldots, f_m)$ est appelé une 0-base standard de Δ en x, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que Δ soit ε-transverse en x et que $(f_1, \ldots, f_m)$ soit une ε-base standard de Δ en x.
On pose $\nu^*_x(\Delta, 0) = \nu^*_x(\Delta, \varepsilon) = \nu^*_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$.
Remarquons, pour légitimer cette définition, que, d'après 5.1.3, $d_{\Delta,x} > 0$ et , d'après 5.1.1, Δ est ε-transverse en x pour tout $\varepsilon \in]0, d_{\Delta,x}]$.
De plus, d'après 7.1.5, si, pour un tel ε, $(f_1, \ldots, f_m)$ est une ε-base standard, il en est de même pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$ et $\nu^*_x(\Delta, \varepsilon) = \nu^*_x(\Delta, \varepsilon')$.

7.1.8 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$. On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x.
Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x. Soit $\nu^*_x(\Delta, 0) = \nu_1, \ldots, \nu_m, \infty)$. Soit $d_i = \sup\{d \in \mathbb{R}^+$, tel que $in_x(f_i ; \Delta, d)$ soit de d-degré $\nu_i\}$. On pose

$$d_{(f),x} = \inf_{1 \leq i \leq m} d_i \ .$$

D'après 7.1.5, $d_{(f),x} \in]0, \infty]$.

7.1.9 <u>Proposition</u> : Sous les hypothèses de 7.1.8, on a :

$$d_{(f),x} \leq d_{\Delta,x} \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $d = d_{(f),x}$. Alors, il existe $\varepsilon \in]0,d]$ tel que Δ soit ε-transverse en x, et $(f_1,\ldots,f_m)$ soit une ε-base standard de Δ en x. Toujours d'après 7.1.5, désignant par $\overline{N}$, $\bigoplus_{j\geq 1} gr_x^j W$, $1 \leq i \leq m$, $in_x(f_i ; \underline{\Delta}, \varepsilon) \bmod \overline{N} . gr_x \underline{\Delta}; \varepsilon = \lambda_i(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ est un polynôme homogène non nul de degré ν_i.
De plus, pour $1 \leq i \leq m$, $\delta \in [0,d[$, $in_x(f_i ; \underline{\Delta}, \delta) = \lambda_i(Z)$. Mais $(\lambda_1(Z),\ldots,\lambda_m(Z)) gr_x \underline{\Delta}; 0 = in_x(\Delta, \underline{\Delta}, 0)$ puisque $d_{\Delta,x} \geq \varepsilon > 0$. Pour tout $\delta \in [0,d[$, on obtient $C^{\delta}_{\Delta,x} \subset C^{o}_{\Delta,x}$. D'après 3.2.1, ceci entraîne que $C^{\delta}_{\Delta,x} = C_{\Delta,x}(1)$, ou bien $\delta < d_{\Delta,x}$. Finalement

$$d \leq d_{\Delta,x} .$$

7.1.10 <u>Remarque</u> : Sous les seules hypothèses de 7.1.8, on n'a pas toujours $d_{(f),x} = d_{\Delta,x}$, 3.2.5 nous assure seulement de l'existence de telles 0-bases standard de Δ en x.
Dans la section suivante, nous allons caractériser une classe de 0-bases standard de Δ en x, pour lesquelles on a toujours $d_{(f),x} = d_{\Delta,x}$. Au cours de cette étude, on verra pour quelle raison, en général $d_{(f),x} < d_{\Delta,x}$, ce qui permettra au lecteur de se construire aisément des exemples.

Pour commencer, nous allons rappeler quelques notions introduites dans [5], chapitre III, § 7. Le lecteur pourra s'y reporter pour y lire la démonstration de quelques affirmations qui vont suivre. Comme toujours, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls et si t est un entier supérieur ou égal à 1, $\mathbb{N}^t$ est le produit de t exemplaires de $\mathbb{N}$.

7.2.1 <u>Définition</u> : On appelle E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$ tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}^t$ tel que, pour tout $A \in E$, tout $B \in \mathbb{N}^t$, $A+B$ soit dans E.
On appelle frontière de E tout sous-ensemble F de E tel que tout élément A de E ait une décomposition $A = A_o + B$ où $A_o \in F$ et $B \in \mathbb{N}^t$.
Notons que $\emptyset$ est un E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$ pour tout t ; notons aussi qu'un E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$ peut posséder plusieurs frontières.

7.2.2 <u>Lemme</u> : Si F est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$, il existe un unique E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$ dont F soit une frontière. Si E est un E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$, il existe un ensemble fini qui soit une frontière de E.
On montre la deuxième assertion par récurrence sur t.

7.2.3 <u>Définition</u> : Soit S un anneau nœthérien ; $G = S[Z_1,\ldots,Z_t]$ l'anneau des polynômes à t indéterminées. On pose $Z = (Z_1,\ldots,Z_t)$ et , si $A = (a_1,\ldots,a_t) \in \mathbb{N}^t$, $Z^A = Z_1^{a_1},\ldots,Z_t^{a_t}$; on munit $\mathbb{N}^t$ de l'ordre lexicographique (i.e. : $A = (a_1,\ldots,a_t) < A' = (a'_1,\ldots,a'_t)$ si et seulement si il existe i, $1 \leq i \leq t$ tel que, pour $j < i$, $a_j = a'_j$ et $a_i < a'_i$; on gradue G par le degré total. Soit $\varphi = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} C_A Z^A$, $C_A \in S$, un polynôme homogène non nul. On appelle exposant privilégié de φ par rapport à $(S ; Z_1,\ldots,Z_t)$ et on note $\exp^t \varphi$ le plus grand $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $C_A \neq 0$.
(S'il n'y a pas d'ambiguité, on écrit parfois simplement $\exp \varphi$).

7.2.4 <u>Définition</u> : Les notations sont celles de 7.2.3. Soit I un idéal homogène de $G = S[Z_1,\ldots,Z_t]$. On appelle ensemble des privilégiés de I par rapport à $(S ; Z_1,\ldots,Z_t)$ et on note $\mathrm{Exp}^t I$ le E-sous-ensemble de $\mathbb{N}^t$ admettant comme frontière l'ensemble des $\exp^t \varphi$ où φ parcourt l'ensemble des polynômes homogènes non nuls de I si $I \neq (0)$, $\emptyset$ si $I = (0)$.
(Comme ci-dessus, on note parfois Exp I).
Remarquons que $A \in \mathrm{Exp}\, I$ si et seulement si il existe φ homogène non nul dans A tel que $A = \exp \varphi$.

7.2.5 <u>Lemme</u> : Soit S un anneau nœthérien, et soit $\mathbb{C} \to S$ un morphisme d'anneaux injectif. Soit $G_o = \mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_t]$, $G = S[Z_1,\ldots,Z_t]$. Soit I_o un idéal homogène de G_o, $I = I_o G$. Alors $\mathrm{Exp}^t I_o$, l'ensemble des privilégiés de I_o par rapport à $(\mathbb{C} ; Z_1,\ldots,Z_t)$ est égal à $\mathrm{Exp}^t I$, l'ensemble des privilégiés de I par rapport à $(S ; Z_1,\ldots,Z_t)$.

<u>Démonstration</u> : S est un $\mathbb{C}$-module libre. Soit $(e_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{C}$-base de S. Tout polynôme homogène non nul φ de I peut s'écrire :

$$\varphi = \sum_{j\in J} e_j \varphi_j$$

où, pour tout j, φ_j est un polynôme homogène de I_o de même degré que φ et où, de plus, $\varphi_j \equiv 0$, sauf pour un nombre fini d'indices. On vérifie facilement que

$$\exp^t \varphi = \max_{\{j\,:\,\varphi_j \not\equiv 0\}} \exp^t \varphi_j \ .$$

7.2.6 <u>Théorème</u> (Théorème de division de Weierstrass généralisé) :
Soient $\mathcal{O}$ une $\mathbb{C}$-algèbre analytique locale, $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ l'anneau des séries convergentes à t indéterminées sur $\mathcal{O}$ (ie. si l'anneau local de l'espace analytique W en x est $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ est l'anneau local de $W\times\mathbb{C}^t$ en $(x\times \underline{0})$).
Soit N l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.
Soit $(g_1,\ldots,g_k)$ un système d'éléments non nuls de $\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\}$ tels que, pour $1\le i\le k$, il existe $L_i \in \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_t\}$ non nul tel que

$$g_i - L_i \in N\,\mathcal{O}\{z_1,\ldots,z_t\} \ .$$

On pose $1\le i\le k$, $L_i = \sum_{A\in\mathbb{N}^t} C_{iA} z^A$, $C_{iA}\in\mathbb{C}$.

Soient $\nu_i \doteq \inf |A|$ tels que $C_{iA}\neq 0$

$A_i = \sup_l A$ tels que $|A| = \nu_i$ et $C_{iA}\neq 0$
(l désigne l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^t$).

Alors, pour tout $g \in \mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$, il existe $h_1,\dots,h_k$ et f dans $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ tels que :

1) $g = \sum_{i=1}^{k} h_i g_i + f$

2) si $f = \sum_{A\in\mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}$, alors $f_A = 0$ dès que $A \in \bigcup_{i=1\dots k} (A_i + \mathbb{N}^t)$

3) si, pour $d \in]0,\infty[$, avec $\underline{\Delta} = (W\times\mathbb{C}^t,\ W\times\mathbb{C}^t,\ W\ ;\ p_1)$ et identifiant $x\times\underline{0}$ à x, on a pour $1\le i\le k$, $\nu_x(g_i\ ;\ \underline{\Delta},d) = \nu_i$, on peut trouver $(h_1,\dots,h_k)$ tels que de plus

$$1\le i\le k \qquad \nu_x(h_i\ ;\ \underline{\Delta},d) \ge \nu_x(g\ ;\ \underline{\Delta},d) - \nu_x(g_i\ ;\ \underline{\Delta},d) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On renvoie le lecteur à [1].

7.2.7 <u>Proposition</u> : Les notations sont celles de 7.2.6.
Soit $(f_1,\dots,f_k)$ un système d'éléments de $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ non nuls.
Soit $1\le i\le k$, $\bar{f}_i = f_i \bmod N.\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$. On suppose $\bar{f}_i \neq 0$ et on définit, pour $1\le i\le k$, $\lambda_i(Z) = \mathrm{in}_x \bar{f}_i$.
Soit $I = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,\mathbb{C}[Z]$, $E = \mathrm{Exp}^t I$ l'ensemble des privilégiés de I par rapport à $(\mathbb{C}\ ;\ Z_1,\dots,Z_t)$.
On suppose finalement que, pour $d\in]0,\infty[$, $\nu_x(f_i\ ;\ \underline{\Delta},d) = \nu_i = \nu_x(\bar{f}_i)$.
Alors, pour tout $f\in\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$, il existe des éléments $(h_1,\dots,h_k)$ de $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ tels que :

1) $\nu_x(h_i\ ;\ \underline{\Delta},d) \ge \nu_x(f\ ;\ \underline{\Delta},d) - \nu_x(f_i\ ;\ \underline{\Delta},d)$

2) si $f - \sum_{i=1\dots k} h_i f_i = \sum_{A\in\mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A\in\mathcal{O}$, on a $f_A = 0$ si $A\in E$.

<u>Démonstration</u> : E a une frontière finie non vide $F = \{A_1,\dots,A_q\}$.
Il existe donc, pour $1\le i\le q$, $\psi_i \in I$ homogène de degré μ_i tel que $\exp^t \varphi_i = A_i$. Il existe aussi, pour $1\le i\le q$, $1\le j\le k$, $\psi_{ij}\in\mathbb{C}[Z]$ homogène de degré $\mu_i - \nu_j$ tel que $\psi_i = \sum_{1\le j\le k} \psi_{ij}\lambda_j$.

Soit $g_i = \sum_{j=1\dots k} \psi_{ij}(z)\, f_j \in \mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ (l'anneau $\mathbb{C}[z]$ est inclus canoniquement dans $\mathcal{O}\{z\}$).

Ainsi, on peut appliquer le théorème de division 7.2.6 par les g_i à f. Il existe $(p_1,\dots,p_q)$ et r dans $\mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ tels que

- $f = \sum_{i=1,\dots,q} p_i\, g_i + r$
- si $r = \sum_{A\in\mathbb{N}^t} r_A\, z^A$, $r_A = 0$ pour $A \in \bigcup_{i=1\dots q} (A_i' + \mathbb{N}^t)$ où

$A_i' = \sup_l$ des A tels que $|A| = \mu_i$ et qui apparaissent dans le développement en z de $g_i - (g_i \bmod N.\mathcal{O}\{z\})$. Par définition de $\exp^t \varphi_i = A_i$, on constate que $A_i' = A_i$ et $\bigcup_{i=1\dots q} (A_i + \mathbb{N}^t) = E$.

Pour terminer la preuve, il suffit de poser :

$1\le j\le k$ $$h_j = \sum_{i=1\dots q} \phi_{ij}(z)\, p_i \ .$$

On obtient :

$$r = f - \sum_{j=1\dots k} h_j\, f_j \ .$$

La condition 3) de 7.2.6 nous permet d'affirmer que, puisque $\nu_i(g_i\,;\underline{\Delta},d) = \mu_i$,

$$\nu_x(p_i\,;\underline{\Delta},d) \ge \nu_x(f\,;\underline{\Delta},d) - \mu_i \ .$$

Or $$\nu_x(\phi_{ij}\,;\underline{\Delta},d) = \mu_i - \nu_j \ .$$

Finalement, pour $1 \le j \le k$, $\nu_x(h_j\,;\underline{\Delta},d) \ge \nu_x(f\,;\underline{\Delta},d) - \nu_j$ ou encore $\nu_x(h_j\,;\underline{\Delta},d) \ge \nu_x(f\,;\underline{\Delta},d) - \nu_x(f_j\,;\underline{\Delta},d)$.

7.2.8 <u>Définition</u> : Soient $\mathcal{O}$ une $\mathbb{C}$-algèbre analytique locale, $R = \mathcal{O}\{z_1,\dots,z_t\}$ l'anneau des séries convergentes à t indéterminées sur $\mathcal{O}$. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ un système de polynômes homogènes de $\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_t]$. Soit $I = (\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_t]$, $E = \mathrm{Exp}^t I$ l'ensemble des privilégiés de I par rapport à $(\mathbb{C}\,;Z_1,\dots,Z_t)$. On dit que $f\in R$ est normalisé par le système $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ par rapport à $(\mathcal{O}\,;z_1,\dots,z_t)$ si dans le développement

en série entière $f = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}$, on a $f_A = 0$ si $A \in E$.

7.2.9 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, et soit x un point de W. On appelle système de coordonnées adapté à Δ en x tout système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_t)$ dans $r^{-1}(x)$ de centre x. (Cette notion ne dépend que de Δ).

7.2.10 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$, $d \in]0, \infty[$ un réel fixé et $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. On suppose que Δ est d-transverse en x.
On désigne par J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x.
Un système $(f_1, \ldots, f_m)$ d'éléments de J est appelé 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$:

1) si c'est une d-base standard de Δ en x

2) posant, pour $1 \leq k \leq m$, $\lambda_k = in_x(f_k ; \Delta, 0) \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_t]$ si, pour $1 \leq i \leq m$, f_i est normalisé par le système $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1})$ par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$.

7.2.11 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, et soit un point de $W \cap X$, $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x.
Soit J l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z au voisinage de x.
Un système $(f_1, \ldots, f_m)$ d'éléments de J est appelé 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que Δ soit ε-transverse en x et que $(f_1, \ldots, f_m)$ soit une ε-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$.

7.2.12 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W : r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$, $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. Soit $d \in]0, \infty[$ un réel fixé. On suppose que Δ est d-transverse en x (resp. que $r|X : X \to W$ est plat en x). Il existe une d- (resp. 0-) base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$.
<u>Démonstration</u> : Si $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x, $d_{\Delta,x} > 0$ (5.1.3) et Δ est ε-transverse à X en x pour tout $\varepsilon \in]0, d_{\Delta,x}]$. Il suffit donc, pour obtenir la totalité de 7.2.12, de montrer que, si Δ est d-transverse

en x, il existe une d-base standard normalisée.
Choisissons $(g_1,\dots,g_m)$ une d-base standard de $\underline{\Delta}$ en x. Soit N l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{W,x}$.
Soit $\pi : gr_x W[Z] \longrightarrow \mathbb{C}[Z]$ le morphisme qui envoie Z sur Z et annule les éléments de $\overline{N} = \bigoplus_{i\geq 1} gr_x^i W$.

Supposons construit, pour $i \in [1,\dots,m]$ un système $(f_1,\dots,f_{i-1})$ d'éléments non nuls de J, l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z tel que :

$$\alpha(i-1) : \nu_x(g_j ; \underline{\Delta},d) = \nu_x(f_j ; \underline{\Delta},d) = \nu_j \qquad \text{si } 1\leq j\leq i-1$$

et
$$(in_x(g_1 ;\underline{\Delta},d),\dots,in_x(g_{i-1} ;\underline{\Delta},d)) \cdot gr_x \underline{\Delta};d =$$

$$(in_x(f_1 ;\underline{\Delta},d),\dots,in_x(f_{i-1} ;\underline{\Delta},d)) \cdot gr_x \underline{\Delta};d$$

$$\beta(i-1) : \nu_x(f_j ;\underline{\Delta},d) = \nu_x(\bar{f}_j) \qquad \text{si } 1\leq j\leq i-1$$

où $\bar{f}_j = f_j \bmod N \cdot \mathcal{O}_{W,x}\{z\}$

et $(in_x \bar{g}_1,\dots,in_x \bar{g}_{i-1}) gr_x r^{-1}(x) = (in_x \bar{f}_1,\dots,in_x \bar{f}_{i-1}) gr_x r^{-1}(x)$

avec $\bar{g}_j = g_j \bmod N \cdot \mathcal{O}_{W,x}\{z\}$.

$\gamma(i-1)$: posant pour $1\leq j\leq i-1$, $\lambda_j(Z) = \pi(in_x(f_j ;\underline{\Delta},d)) = in_x \bar{f}_j$,

pour $1\leq j\leq i-1$, f_j est normalisée par le système $(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1})$ par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z)$.
Nous allons construire $f_i \in J$ tel que le système $(f_1,\dots,f_i)$ vérifie $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $\gamma(i)$. D'après 7.2.7, il existe $h_j \in \mathcal{O}_{Z,x}$, $1\leq j\leq i-1$ tel que

$$\nu_x(h_j ; \underline{\Delta},d) \geq \nu_x(g_i ; \underline{\Delta},d) - \nu_x(f_j ; \underline{\Delta},d)$$

et que

$$f_i = g_i - \sum_{j=1\dots i-1} h_j f_j$$

est normalisé par le système $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1})$ par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}\,;\,z)$. On a évidemment $f_i \in J$ et $\nu_x(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) \geq \nu_x(g_i\,;\,\underline{\Delta},d) = \nu_i$. L'image de f_i dans $gr_x^{\nu_i}\,\underline{\Delta};d$ est ainsi $in_x(g_i\,;\,\underline{\Delta},d) - \sum_{j=1\ldots i-1} H_j\, in_x(f_j\,;\,\underline{\Delta},d)$ où H_j est l'image h_j dans $gr_x^{\nu_i-\nu_j}\,\underline{\Delta};d$.

Si ceci était nul, de $\alpha(i-1)$, on déduirait que $in_x(g_i\,;\,\underline{\Delta},d)$ est superflu, ce qui est impossible puisque $(g_1,\ldots,g_m)$ est une d-base standard.

On a :

$$in_x(f_i\,,\,\underline{\Delta},d) = in_x(g_i\,;\,\underline{\Delta},d) - \sum_{j=1\ldots i-1} H_j\, in_x(f_j\,;\,\underline{\Delta},d)$$

et $\alpha(i)$ est satisfait.

On a aussi :

$$\lambda_i(Z) = \pi(in_x(f_i;\underline{\Delta},d)) = \pi(in_x(g_i;\underline{\Delta},d)) - \sum_{j=1\ldots i-1} \pi(H_j)\,\pi(in_x(f_j;\underline{\Delta},d)).$$

D'après 7.1.5, $(g_1,\ldots,g_m)$ étant une d-base standard,

$$\pi(in_x(g_i\,;\,\underline{\Delta},d)) = in_x\,\bar{g}_i\ .$$

Si $\lambda_i(Z) = 0$, on a donc

$$in_x\,\bar{g}_i = \sum_{j=1\ldots i-1} \pi(H_j)\, in_x\,\bar{f}_j\ .$$

C'est impossible au vu de $\beta(i-1)$ car, toujours d'après 7.1.5, $\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_m$ doit être une base standard de $\underline{\Delta}(x)$ en x. On obtient donc $\beta(i)$.

De proche en proche, on construit $(f_1,\ldots,f_m)$ satisfaisant $\alpha(m)$, $\beta(m)$, $\gamma(m)$. Un tel système est une d-base standard de J normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}\,;\,z)$.

7.2.13 <u>Proposition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$.
Soit $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x.
Soit $h' : W' \to W$ un morphisme.
Soit $\Delta' = (X', Z', W' ; r') = (X \times_W W', Z \times_W W', W' ; r \times \mathrm{Id}\, W')$ l'installation image réciproque par h. Soit $x' \in W'$, tel que $h(x') = x$.
Soit $\tilde{h} : Z' \to Z$ le morphisme canonique déduit de h et soit z'_i l'image de z_i par le morphisme $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z',x}$ qui en provient.
Alors $(z'_1, \ldots, z'_t)$ est un système de coordonnées adapté à Δ en x.
On suppose que Δ est d-transverse en x $(d > 0)$ (resp. $r|X : X \to W$ est plat en x). Si $(f_1, \ldots, f_m)$ est une d- (resp. 0-) base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$, désignant par f'_i l'image de f_i par $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z',x'}$, $(f'_1, \ldots, f'_m)$ est une d- (resp. 0-) base standard de Δ' en x' normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W',x'} ; z'_1, \ldots, z'_t)$.

<u>Démonstration</u> : Comme ci-dessus, le cas 0 se déduit immédiatement du cas $d > 0$. D'après 7.1.6, on sait que $f'_1, \ldots, f'_m$ est une d-base standard de Δ' en x'. On constate qu'on obtient $\lambda'_k = \mathrm{in}_{x'}(f'_k ; \Delta', 0) \in \mathbb{C}[Z'_1, \ldots, Z'_t]$ à partir de $\lambda_k = \mathrm{in}_x(f_k ; \Delta, 0) \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_t]$ en changeant Z en Z'.
Comme

$$f'_k = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{kA} \circ h\, z'^A \quad \text{si} \quad f_k = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{kA}\, z^A$$

et que

$$f_{kA} = 0 \quad \text{pour} \quad A \in \mathrm{Exp}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$$

a fortiori

$$f_{kA} \circ h = 0 \quad \text{si} \quad A \in \mathrm{Exp}^t(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{k-1}) = \mathrm{Exp}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}).$$

Nous allons maintenant montrer comment les bases standard normalisées permettent de calculer le 1er tropisme critique.

7.2.14 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$. On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x.
Soit $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x et soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. Alors :

$$d_{(f),x} = d_{\Delta,x} \quad .$$

$(f_1, \ldots, f_m)$ est une δ-base standard de Δ en x pour $\delta \in [0, d_{\Delta,x}]$.

<u>Démonstration</u> : On sait déjà, 7.1.9, que $d_{(f),x} \leq d_{\Delta,x}$. Par définition, $d_{(f),x} = \inf_{1 \leq k \leq m} d_k$. Soit i le premier indice tel que $d_i = d_{(f),x} = d$.
Si $d < d_{\Delta,x}$, puisque $r|X : X \to W$ est plat en x :

$$C_{X \cap r^{-1}(x),x} \times C_{W,x} = C^{o}_{\Delta,x} = C_{\Delta,x}(1) = C^{d}_{\Delta,x}$$

d'où :

$$in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) \,.\, gr_x W[Z] = in_x(\Delta, \underline{\Delta}, d) \quad .$$

$(f_1, \ldots, f_m)$ étant certainement une ε-base standard pour un $\varepsilon \in]0, d]$, pour $1 \leq k \leq m$,

$$\pi(in_x(f_k ; \underline{\Delta}, d)) = \pi(in_x(f_k ; \underline{\Delta}, \varepsilon) = in_x(f_k ; \underline{\Delta}, 0) =$$

$$in_x(\bar{f}_k ; \underline{\Delta}(x), 1) = \lambda_k(Z) \in \mathbb{C}[Z] \quad \text{est non nul,}$$

où $\pi : gr_x W[Z] \longrightarrow \mathbb{C}[Z]$ est le morphisme canonique, où $\bar{f}_k$ est l'image de f_k par $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{r^{-1}(x),x}$ et

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\mathbb{C}[Z] = in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) = in_x(\Delta(x), \underline{\Delta}(x), 1) \quad .$$

De tout ceci, on déduit que :

$$\mathrm{in}_x(f_i\ ;\ \underline{\Delta}, d) - \lambda_i \in (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, \mathrm{gr}_x W[Z] \quad .$$

Or, par définition, $\mathrm{in}_x(f_i\ ;\ \underline{\Delta}, d) - \lambda_i \not\equiv 0$. Il existe un "monôme" $M_{\beta\alpha}$ de degré β dans $\mathrm{gr}_x W$, α en Z, non trivial, qui est une composante bihomogène de $\mathrm{in}_x(f_i\ ;\ \underline{\Delta}, d) - \lambda_i$ et on peut écrire une relation :

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{j=1\ldots i-1} S_j \lambda_j$$

où S_j est bihomogène dans $\mathrm{gr}_x W[Z]$ de degré β dans $\mathrm{gr}_x W$, $\alpha - \nu_j$ en Z et l'on peut restreindre la sommation aux j allant de 1 à i-1 car certainemebt $\alpha < \nu_i$ et la suite $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ des degrés des λ_j est croissante.

Soit $E_{i-1} = \mathrm{Exp}^t I_{i-1}$ où $I_{i-1} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1})\mathbb{C}[Z]$.

D'après 7.2.5, si $M_{\beta\alpha} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\, |A| = \alpha} Q_A Z^A$, l'exposant A le plus grand lexicographiquement pour lequel $Q_A \neq 0$ est dans E_{i-1}. Appelons-le A_o.

Soit maintenant $f_i = \sum f_{iA} z^A$ le développement de f en série de z.

Par identification, on obtient que $\nu_x(f_{iA_o}) = \beta$, $\mathrm{in}_x f_{iA_o} = Q_{A_o} \neq 0$.

C'est contraire à l'hypothèse de normalisation.

C'est que $d_{(f),x} = d_{\Delta,x}$.

Finalement, d'après 7.1.5, $\nu_x^*(\Delta, \delta) = \nu_x^*(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$ pour $\delta \in [0, d_{\Delta,x}]$; $\nu_x(f_j\ ;\ \underline{\Delta}, \delta) = \nu_j = \nu_x(\bar{f}_j)$ pour $j = 1 \ldots m$, $\delta \in [0, d_{\Delta,x}]$.

Le lemme $3.1.6_*$ permet d'achever l'argument.

Nous allons voir maintenant comment les 0-bases standard normalisées de Δ en x permettent de calculer le 1er tropisme critique de Δ le long de Y en x.

7.3.1 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y, $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x. Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x, normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. On désigne par Q (resp. N) l'idéal de $\mathcal{O}_{W,x}$ définissant l'immersion de Y (resp. x) dans W au voisinage de x.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C_{X \cap r^{-1}(Y), Y} \longrightarrow Y$ est plat en x ;

2) Pour $1 \leq i \leq m$,

$$\nu_x(f_i \bmod N \cdot \mathcal{O}_{Z,x}) = \nu_Y(f_i \bmod Q \cdot \mathcal{O}_{Z,x}) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\Delta(Y) = (X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y), Y ; r|r^{-1}(Y))$ l'installation image réciproque de Δ au-dessus de Y. Soit $\Delta(x) = (X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x), x ; r|r^{-1}(x))$ l'installation image réciproque de Δ au-dessus de x. D'après 5.1.8, la condition 1) est équivalente à 1') $d_{\Delta(Y),x} = \infty$ (ou bien il n'y a aucun tropisme critique).
Soit, pour $1 \leq i \leq m$, f'_i l'image de f_i par le morphisme $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{r^{-1}(Y),x}$.
f'_i n'est autre que la classe de $f_i \bmod Q \cdot \mathcal{O}_{Z,x}$. D'après 7.2.13, $(f'_1, \ldots, f'_m)$ est une 0-base standard de $\Delta(Y)$ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{Y,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. Par conséquent, d'après 7.2.14, $d_{\Delta(Y),x} = d_{(f'),x}$.
Soit $(\nu_1, \ldots, \nu_m, \infty, \ldots) = \nu_x^*(\Delta, 0) = \nu_x^*(\Delta(Y), 0) = \nu_x^*(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$.
Ecrivons $f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{iA} z^A$, $i = 1 \ldots m$, le développement en série de f_i.
On obtient :

$$f'_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{iA} \bmod Q \cdot z^A$$

et

$$d_{(f'),x} = \inf_{1 \leq i \leq m} \left(\inf_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| < \nu_i} \frac{\nu_x(f_{iA} \bmod Q)}{\nu_i - |A|} \right) .$$

Il vient finalement que 1') est équivalente à 2') :

2') pour $1 \leq i \leq m$, $A \in \mathbb{N}^t$, tel que $|A| < \nu_i$, $f_{iA} \in Q$,
ou encore, remarquant que l'idéal de $\mathcal{O}_{r^{-1}(Y),x} \simeq \mathcal{O}_{Y,x}\{z_1,\ldots,z_t\}$ définissant Y dans $r^{-1}(Y)$ au voisinage de x est celui engendré par $(z_1,\ldots,z_t)$, pour $1 \leq i \leq m$, $\nu_Y(f_i') \geq \nu_i$.
Mais, puisque $\nu_x(f_i \bmod N.\mathcal{O}_{Z,x}) = \nu_i$, $\nu_Y(f_i \bmod Q.\mathcal{O}_{Z,x}) \leq \nu_i$.

2') est donc équivalent à 2).

7.3.2 <u>Corollaire</u> : Les hypothèses sont celles du théorème 7.3.1. On suppose de plus que l'une des condition 1) ou 2) est satisfaite. Alors :

i) pour $1 \leq i \leq m$, $in_Y(f_i ; \underline{\Delta}, 0) \in \mathcal{O}_Y[Z]$ et est homogène de degré ν_i où $\nu_x^*(\Delta,0) = (\nu_1,\ldots,\nu_m,\infty,\ldots)$;

ii) $\mathfrak{Gr}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x} = (in_Y(f_1 ; \underline{\Delta},0),\ldots,in_Y(f_m ; \underline{\Delta},0))$.

<u>Démonstration</u> : D'après 5.1.3, $r|X : X \to W$ étant plat en x, $d_{\Delta,Y,x} > 0$.
Par suite :

$$C^{o}_{\Delta,Y} = C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \underset{Y}{\times} C_{W,Y} \quad \text{au voisinage de } x .$$

De même, on sait que $d_{\Delta,x} > 0$ et que

$$C^{o}_{\Delta,x} = C_{X\cap r^{-1}(x)} \underset{x}{\times} C_{W,x} .$$

Enfin, d'après 5.1.8, puisque $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat en x, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{X\cap r^{-1}(x),x} & \longrightarrow & C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est cartésien.

Ceci implique, puisque $gr_Y X \cap r^{-1}(Y)$ est un $\mathcal{O}_Y$-module plat en x, que l'homomorphisme canonique :

$$\alpha : \mathfrak{In}_Y(X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y)) \underset{\mathcal{O}_{Y,x}}{\otimes} \mathbb{C} \longrightarrow in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x))$$

est un isomorphisme.

Mais la démonstration de 7.3.1 nous a montré que :

$$in_Y f_i' = in_Y(f_i ; \underline{\Delta}, 0) = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| = \nu_i} f_{iA} \bmod Q \,.\, Z^A \quad (\text{i.e. } i))$$

et que :

$$\alpha(in_Y f_i' \otimes 1) = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| = \nu_i} f_{iA} \bmod N \,.\, Z^A = in_x(f_i \bmod N \,.\, \mathcal{O}_{Z,x}) \,.$$

$(f_1, \ldots, f_m)$ étant une 0-base standard de Δ en x, on a

$$in_x(X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x)) = (in_x(f_1 \bmod N \,.\, \mathcal{O}_{Z,x}), \ldots, in_x(f_m \bmod N \,.\, \mathcal{O}_{Z,x}))$$

d'où aussi :

$$\mathfrak{In}_Y(X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y)) \underset{\mathcal{O}_{Y,x}}{\otimes} \mathbb{C} = (in_Y f_1' \otimes 1, \ldots, in_Y(f_m' \otimes 1) \quad .$$

On sait bien qu'alors :

$$\mathfrak{In}_Y(X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y)) = (in_Y f_1', \ldots, in_Y f_m') \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

7.3.3 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$ et x un point de Y. Soit $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x.

On suppose que $r|X : X \to W$ est plat en x et que $C_{X \cap r^{-1}(Y)} \longrightarrow Y$ est plat en x.

Soit $(f_1,\dots,f_m)$ une 0-base standard de Δ en x, normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}\,;\,z_1,\dots,z_t)$. Soit $\nu^*_x(\Delta,0)=(\nu_1,\dots,\nu_m,\infty,\dots)$.
Soit $d_i=\sup\{d\in\mathbb{R}^+$ tel que $in_Y(f_i,\underline{\Delta},d)$ soit de d-degré $\nu_i\}$.
On pose :

$$d_{(f),Y,x}=\inf_{1\le i\le m} d_i\,.$$

7.3.2 rend cette définition légitime, puisque $in_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},0)$ est homogène dans $\mathcal{O}_{Y,x}[Z]$ de degré ν_i et on observe que $d_{(f),Y,x}\in\,]0,\infty]$.

7.3.4 <u>Théorème</u> : Dans les conditions de 7.3.3,

$$d_{(f),Y,x}=d_{\Delta,Y,x}\quad.$$

<u>Démonstration</u> :

- Montrons d'abord que $d_{(f),Y,x}\le d_{\Delta,Y,x}$. On a déjà remarqué que $d_{\Delta,Y,x}>0$ d'après 5.1.3. D'autre part, d'après 7.3.2,

$$\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y,x}=(in_Y(f_1\,;\,\underline{\Delta},0),\dots,in_Y(f_m\,;\,\underline{\Delta},0))\quad.$$

Mais pour $\delta\in[0,d_{(f),Y,x}[$, $in_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},0)=in_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},\delta)$.

Par suite : $C^{\delta}_{\Delta,Y}\subset C^{o}_{\Delta,Y}=C_{\Delta,Y}(1)$ au voisinage de x.

Donc $C^{\delta}_{\Delta,Y}=C_{\Delta,Y}(1)$ au vu de 3.2.1. Ceci signifie encore que $\delta<d_{\Delta,Y,x}$ ou bien $d_{(f),Y,x}\le d_{\Delta,Y,x}$.

- Supposons que $d=d_{(f),Y,x}<d_{\Delta,Y,x}$. Soit i le premier indice tel que $d_i=d_{(f),Y,x}$. On a

$$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}\times_Y C_{W,Y}=C^{o}_{\Delta,Y}=C_{\Delta,Y}(1)=C^{d}_{\Delta,Y}\quad\text{au voisinage de x}$$

d'où

$$\mathfrak{In}_Y(X\cap r^{-1}(Y),r^{-1}(Y)).\,gr_Y W[Z]\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y,x}=\mathfrak{In}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y,x}\quad.$$

D'autre part, d'après 7.3.2, désignant par $\pi : gr_Y W[Z] \longrightarrow \mathcal{O}_Y[Z]$ le morphisme canonique, et, pour $1 \leq k \leq m$, par f'_k l'image de f_k par $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{r^{-1}(Y),x}$, on a (toujours pour $1 \leq k \leq m$)

$$\pi(in_Y(f_k ; \underline{\Delta}, d)) = in_Y(f_k ; \underline{\Delta}, 0) = in_Y f'_k = \mu_k(Z) \in \mathcal{O}_Y[Z]$$

et μ_k est un polynôme homogène de degré ν_k. Enfin

$$\mathfrak{Jn}_Y(X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y)) = (\mu_1, \ldots, \mu_k)\, \mathcal{O}_Y[Z] .$$

Finalement :

$$in_Y(f_i ; \underline{\Delta}, d) - \mu_i \in (\mu_1, \ldots, \mu_m)\, gr_Y W[Z] .$$

Or, par définition, $in_Y(f_i ; \underline{\Delta}, d) - \mu_i \not\equiv 0$. Pour tout "monôme" $M_{\beta\alpha}$ de degré β dans $gr_Y W$, α en Z, non trivial, qui est une composante bihomogène de $in_Y(f_i ; \underline{\Delta}, d) - \mu_i$, on peut écrire une relation :

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{j=1 \ldots i-1} S_j \mu_j$$

où S_j est bihomogène dans $gr_Y W[Z]$, de degré β dans $gr_Y W$, $\alpha - \nu_j$ en Z et l'on peut restreindre la sommation aux j allant de 1 à $i-1$ car $\alpha < \nu_i$ et la suite $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ est croissante. Mais écrivant $f_i = \Sigma f_{iA} z^A$ où $f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$, $1 \leq i \leq m$, on a aussi :

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{A \in \mathbb{N}^t,\ |A| = \alpha\ \nu_Y(f_{iA}) = \beta} in_Y f_{iA} Z^A .$$

Soit $\tau : gr_Y W \longrightarrow gr_Y W \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathbb{C}$ le morphisme canonique surjectif,

$\tilde{\tau} : gr_Y W[Z] \longrightarrow gr_Y W[Z] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{C}$ le morphisme non moins canonique.

Soit $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}\ \tau$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathrm{Ker}\, \tilde{\tau} = \mathcal{P} . gr_Y W[Z]$.
Toujours d'après 7.3.2, $\tilde{\tau}(\mu_k) = \lambda_k = in_x(f_k ; \underline{\Delta}, 0) \in \mathbb{C}[Z]$.

Appliquant $\tilde{\tau}$ aux deux membres des deux relations ci-dessus, on obtient :

$$\tilde{\tau}(M_{\beta\alpha}) = \sum_{j=1\ldots i-1} \tilde{\tau}(S_j)\,\lambda_j = \sum_{|A|=\alpha,\ \nu_Y(f_{iA})=\beta} \tau(\mathrm{in}_Y f_{iA})\, Z^A .$$

Si $\tilde{\tau}(M_{\beta\alpha}) \not\equiv 0$, soit $A_o = \exp^t \tilde{\tau}(M_{\beta\alpha})$; d'après 7.2.5,

$$A_o \in \mathrm{Exp}^t(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1})\,\mathbb{C}[Z] .$$

Mais alors $\tau(\mathrm{in}_Y f_{iA_o}) \not\equiv 0$, donc aussi f_{iA_o}. C'est interdit, puisque f_i est normalisé par le système $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1})$ par rapport à $\mathcal{O}_{W,x}$; $z_1,\ldots,z_t)$. Nous obtenons donc que :

$$\underline{\mathrm{in}_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) - \mu_i \in \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \cap \mathcal{P}\,.\,\mathrm{gr}_Y W[Z]} .$$

Or $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \longrightarrow Y$ est plat en x. Par changement de base,

$C_{X\cap r^{-1}(Y),Y} \times_Y C_{W,Y} \longrightarrow C_{W,Y}$ est aussi plat en x, ou encore

$C^o_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y}$ est plat en x.

Par l'arguement standard provenant du critère de platitude 0. appliqué avec $A = \mathrm{gr}_Y W$, $M = \mathrm{gr}_Y \Delta$; 0, $I = \mathcal{P}$, on montre que, $\forall\ p \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \cap \mathcal{P}^p\,.\,\mathrm{gr}_Y W[Z] = \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0)\,.\,\mathcal{P}^p\,\mathrm{gr}_Y W[Z] .$$

- Supposons qu'on ait montré que :

$$\mathrm{in}_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) - \mu_i \in \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \cap \mathcal{P}^p\,.\,\mathrm{gr}_Y W[Z] .$$

Nous allons voir que l'observation précédente entraîne que :

$$\mathrm{in}_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) - \mu_i \in \mathfrak{Jn}_Y(\Delta,\underline{\Delta},0) \cap \mathcal{P}^{p+1}\,.\,\mathrm{gr}_Y W[Z] .$$

Reprenant la décomposition de $in_Y(f_i\ ;\ \underline{\Delta}, d) - \mu_i$ en "monômes", ceci revient à dire que dans la relation :

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{j=1\ldots i-1} S_j \mu_j .$$

On peut supposer en plus que $S_j \in \mathcal{P}^p \circ gr_Y W[Z]$.
Considérons maintenant le gradué de $gr_Y W[Z]$ associé à l'idéal $\mathcal{P} \circ gr_Y W[Z]$. (C'est aussi l'anneau de polynômes en $Z_1, \ldots, Z_t$ à coefficients dans le gradué de $gr_Y W$ associé à $\mathcal{P}$).
Soit $\overline{M}_{\beta\alpha}$ (resp. $\overline{S}_j$) l'image canonique de $M_{\beta\alpha}$ (resp. S_j) dans la composante p-ième de ce gradué. Comme on a déjà remarqué, l'image de μ_i dans la composante 0-ième de ce gradué est λ_k. On obtient donc une relation :

$$\overline{M}_{\beta\alpha} = \sum_{j=1\ldots i-1} \overline{S}_j \lambda_j$$

dans le $gr_Y W[Z] \underset{\mathcal{O}_{Y,x}}{\otimes} \mathbb{C}$-module-$gr_{\mathcal{P}}\, gr_Y W[Z]$.

Si $\overline{M}_{\beta\alpha} \not\equiv 0$, soit $A_o = \exp^t \overline{M}_{\beta\alpha}$; $\mathbb{C}$ s'envoyant injectivement dans $gr_{\mathcal{P}}\, gr_Y W[Z]$, toujours d'après 7.2.5, $A_o \in \mathrm{Exp}^t(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1})\, \mathbb{C}[Z]$.
Ceci obligerait $in_Y f_{iA_o}$ à appartenir à $\mathcal{P}^p$ sans appartenir à $\mathcal{P}^{p+1}$.
Par conséquent, f_{iA_o} serait non nul, ce qui n'est pas possible.
Finalement, ceci montre que $in_Y(f_i\ ;\ \underline{\Delta}, d) - \mu_i = 0$, et ceci est contradictoire à la définition de d_i.

7.3.5 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W\ ;\ r)$ une bonne installation, soient Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, x un point de Y, $d \in]0, \infty[$ un réel fixé. Si Δ est d-transverse le long de Y en x, Δ est d-transverse le long de tout sous-espace analytique Y' de Y contenant x en x.

<u>Démonstration</u> : 5.1.4 et 5.1.1 condition 4) nous assurent que nous sommes dans les condition d'application de 7.3.4 en ce qui concerne Y. D'autre part, soit $\Delta(Y) = (X \cap r^{-1}(Y), r^{-1}(Y), Y\ ;\ r|r^{-1}(Y))$ l'installation

image réciproque de Δ au-dessus de Y. Puisque Y est contenu au voisinage de x dans $X \cap r^{-1}(Y)$ et que $C_{X\cap r^{-1}(Y),Y}$ est plat, d'après 5.1.8, $C_{X\cap r^{-1}(Y')} \longrightarrow Y'$ est aussi plat en x. Les conditions d'applications de 7.3.4 sont donc remplies aussi pour Y'.

7.2.12 nous permet de choisir $(f_1,\dots f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}\,;\, z_1,\dots,z_t)$ où $(z_1,\dots,z_t)$ est un système de coordonnées adapté à Δ en x choisi arbitrairement.

Soit $\nu_x^*(\Delta,0) = (\nu_1,\dots,\nu_m,\infty,\dots)$ et écrivons :

$1 \le i \le m$
$$f_i = \sum_{A\in\mathbb{N}^t} f_{iA}\, z^A \ .$$

D'après 7.3.4,

$$d_{\Delta,Y,x} = \inf_{1\le i\le m}\ \inf_{|A|<\nu_i} \frac{\nu_Y(f_{iA})}{\nu_i-|A|}$$

$$d_{\Delta,Y',x} = \inf_{1\le i\le m}\ \inf_{|A|<\nu_i} \frac{\nu_{Y'}(f_{iA})}{\nu_i-|A|} \ .$$

Comme

$$\nu_Y(f_{iA}) \le \nu_{Y'}(f_{iA})$$

$$d_{\Delta,Y,x} \le d_{\Delta,Y',x} \ .$$

Or, Δ étant d-transverse le long de Y en x, $d_{\Delta,Y,x} \ge d$ (5.1.1, condition 2)).

En résumé, nous obtenons donc que :

$$C_{X\cap r^{-1}(Y')} \longrightarrow Y' \text{ est plat en x et que } d_{\Delta,Y',x} \ge d \ .$$

Comme $d > 0$, d'après 3.2.5

$$C^{d}_{\Delta,Y'} \cap dr^{-1}(Y') = C^{o}_{\Delta,Y'} \cap dr^{-1}(Y') = \left[C_{X\cap r^{-1}(Y'),Y'} \times_{Y'} C_{W,Y'}\right] \cap dr^{-1}(Y')$$

c'est que :

$$C^{d}_{\Delta,Y'} \cap dr^{-1}(Y') = C_{X\cap r^{-1}(Y'),Y'} \quad .$$

La condition 2) de 5.1.1 est alors satisfaite, i.e. Δ est d-transverse le long de Y' en x.

***

§ 8. STRATIFICATIONS DE SAMUEL

8.1.1 Définition : Soient Y un espace analytique, G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée ( ) et $\mathcal{M}$ un G-Module gradué. Nous dirons que $\mathcal{M}$ est un G-Module gradué de type fini (resp. de présentation finie) si tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe des éléments $\xi_i \in \Lambda$, (où Λ est le monoïde associé à la graduation de G) (resp. des éléments ξ_i, η_j dans Λ), et un entier r (resp. des entiers r et s) tels que l'on ait une surjection graduée de degré 0

$$\bigoplus_{i=1}^{r} G(-\xi_i)\,|\,U \longrightarrow \mathcal{M}|U \longrightarrow 0$$

(resp. que $\mathcal{M}|U$ soit isomorphe au conoyau d'un morphisme gradué de degré 0

$$\bigoplus_{j=1}^{s} G(-\eta_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} G(-\xi_i)$$

où $G(-\nu) = \bigoplus_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu-\nu}$ $\quad ((G(-\nu))_\mu = G_{\mu-\nu}))$.

8.1.2 Remarques : Le monoïde associé à la graduation de $G(-\nu)$ n'est plus dans $\mathbb{R}^+$ qu'à une translation près. Nous avons en ( ) défini les graduations indicées par $\mathbb{R}$ tout entier, et posé $G_\mu = 0$ pour $\mu < 0$. Remarquons aussi que $G(-\nu)$ n'est plus une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée, mais est clairement un G-Module gradué de présentation finie.

8.1.3 Théorème : Soient Y un espace analytique réduit, G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie, et $\mathcal{M}$ un G-Module gradué de présentation finie. L'ensemble des point $y \in Y$ en lesquels $\mathcal{M}$ est plat (i.e. où le germe $\mathcal{M}_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module plat) est un ouvert analytique partout dense de Y. (i.e. le complémentaire d'un fermé analytique de Y, induisant sur chaque composante irréductible locale de Y un fermé analytique strict).

<u>Démonstration</u> : Faisons d'abord un rappel : ([ ] et [ ]).

8.1.4 <u>Rappel</u> : Soient Y un espace analytique réduit, et $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Pour un point $y \in Y$ les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathfrak{F}$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en y ;

ii) $\mathfrak{F}_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module libre

iii) l'application $Y \to \mathbb{N}$ définie par $y' \rightsquigarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}_{y'}/\mathfrak{m}_{y'}\mathfrak{F}_{y'}$ est constante dans un voisinage de y.

De plus, l'ensemble des points où ces conditions sont satisfaites est un ouvert analytique partout dense de Y.

8.1.5 Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, si l'on a écrit $\mathcal{M} = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} \mathcal{M}_\mu$, l'ensemble des points de Y où tous les $\mathcal{M}_\mu$ sont plats est un ouvert analytique de Y, partout dense. Or, puisque $\mathcal{M}$ est un G-module de présentation finie, et que G est de présentation finie, chacun des $\mathcal{M}_\mu$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (et remarquons ici que la méthode de démonstration appliquée en (1,1.4) se généralise immédiatement pour nous dire que, si G est de présentation finie, et si $\mathcal{M}$ est un G-Module gradué de type fini dont toutes les composantes homogènes $\mathcal{M}_\mu$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents, alors $\mathcal{M}$ est un G-Module de présentation finie. Nous nous servirons abondamment de ce résultat plus bas, pour montrer que les divers modules noyaux et quotients que nous construirons sont de présentation finie. L'ensemble des points de Y où $\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_Y$-plat est donc l'intersection $U = \bigcap_{\mu \in \Lambda} U_\mu$ des ouverts analytiques U_μ correspondant à la platitude de $\mathcal{M}_\mu$. Le théorème de Baire nous dit que U est dense, mais pas qu'il est un ouvert analytique, ni même qu'il en contient un. En tous cas, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert U_y tel que $U \cap U_y$ soit le complémentaire d'un fermé strict de U_y. Ceci nous permet de nous ramener à un problème local.

Soit donc $y \in Y$. Il existe un voisinage ouvert V de y dans Y sur lequel nous avons une présentation de G :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_V[T_1,\ldots,T_m] \longrightarrow G|V \longrightarrow 0$$

(homomorphismes gradués de degré 0, $\mathcal{K}$ engendré par un nombre fini de sections globales de $\mathcal{O}_V[T_1,\ldots,T_m]$). Ceci nous permet de nous ramener immédiatement au cas où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m]$-Module gradué de présentation finie. (En effet, au-dessus de V, $\mathcal{M}|V$, qui est $G|V$-Module de type fini, est alors aussi un $\mathcal{O}_V[T_1,\ldots,T_m]$-Module de type fini, et les $\mathcal{M}_\mu$ sont cohérents). Nous allons commencer par montrer, essentiellement par récurrence sur m, que $U \cap V$ contient un ouvert analytique partout dense de V. Bien sûr, pour $m = 0$, on se trouve ramené au cas d'un $\mathcal{O}_V$-Module cohérent, et la propriété est vraie d'après 8.1.4. Considérons maintenant la propriété suivante pour un $\mathcal{O}_V$-Module $\mathcal{M}$:
$P_{m,k}(\mathcal{M})$ signifie : $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_V[V_1,\ldots,V_m]$-Module gradué de présentation finie, et la multiplication par au moins k des V_j est injective ($k \leq m$). Considérons l'assertion $D_{m,k}$: "Tout $\mathcal{O}_V$-Module vérifiant $P_{m,k}$ est plat sur un ouvert analytique dense de V". Nous allons montrer les implications :

$$D_{m-1,0} \Longrightarrow D_{m,m}$$

$$D_{m-1,0} + D_{m,k} \Longrightarrow D_{m,k-1}$$

dont, puisque nous avons $D_{0,0}$, nous déduirons par récurrence $D_{m,0}$.

Soit donc $\mathcal{M}$ vérifiant $P_{m,m}$. Considérons la multiplication par T_i dans $\mathcal{M}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\times T_i} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/T_i\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire, en écrivant les composantes homogènes :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{M}_\mu \xrightarrow{\times T_i} \mathcal{M}_{\mu+\nu_i} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mu+\nu_i}/T_i\mathcal{M}_\mu \longrightarrow 0$$

où $\nu_i = \deg T_i$.
Mais $\mathcal{M}/T_i\mathcal{M}$ est annulé par T_i, et donc vérifie $P_{m-1,0}$ (cf. 8.1.5). Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{M}/T_i\mathcal{M}$ est donc plat sur un certain ouvert analytique partout dense W_i de V. Soit d'autre part W_o l'ouvert analytique partout dense de V où $\mathcal{M}_o$ est plat : sur l'ouvert analytique partout dense $\bigcap_{i=o}^{m} W_i = W$, $\mathcal{M}$ est plat : ceci se démontre par récurrence sur $\mu \in \Lambda$: Λ est engendré comme monoïde par les ν_i, $1 \leq i \leq m$, et donc, étant donné $\mu \in \Lambda$, on peut toujours trouver un indice i et un $\mu' \in \Lambda$ tel que $\mu = \mu' + \nu_i$. Si par hypothèse de récurrence $\mathcal{M}_{\mu'}$ est plat, donc localement libre, puisque sur W, $\mathcal{M}_{\mu+\nu_i}/T_i\mathcal{M}_\mu$ sera aussi localement libre, il en sera de même pour $\mathcal{M}_\mu$ au vu de (*). Puisque $\mathcal{M}_o$ est plat sur W, on peut bien commencer la récurrence.
Montrons maintenant comment $D_{m-1,0} + D_{m,k} \Rightarrow D_{m,k-1}$. Pour cela, soit $\mathcal{K}_i(\alpha)$ le noyau de la multiplication par T_i^α ($\alpha \in \mathbb{N}$) dans $\mathcal{M}$. Les $\mathcal{K}_i(\alpha)$ forment une suite croissante de sous-Modules gradués, dont toutes les composantes homogènes sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents. De plus, les $\mathcal{K}_i(\alpha)$ sont des $\mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m]$-Modules gradués de type fini, puisque si nous appelons $\varphi_i(\alpha) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/T_i^\alpha\mathcal{M} \longrightarrow 0$ les surjections canoniques, et si nous choisissons une présentation finie $\psi : \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m](-\xi_i) \longrightarrow \mathcal{M}$, $\mathcal{K}_i(\alpha)$ sera l'image par φ du noyau de $\varphi_i(\alpha) \circ \psi$, qui est de type fini, toujours par l'argument de (1.1.4) puisque toutes les composantes homogènes de $\mathcal{M}/T_i^\alpha\mathcal{M}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents. Ainsi, en appliquant encore l'argument de 1.1.4, les $\mathcal{K}_i(\alpha)$ sont des $\mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m]$-Modules gradués de présentation finie.
Toujours d'après le raisonnement de (1,1.4) la suite des $\mathcal{K}_i(\alpha)$ stationne localement sur V. Ainsi, quitte à restreindre V, nous pouvons supposer que, pour $1 \leq i \leq m$,

$$\mathcal{K}_i = \bigcup_{\alpha=o}^{\infty} \mathcal{K}_i(\alpha) = \mathcal{K}_i(\alpha_i)$$

et $\mathcal{K}_i$ est un $\mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m]$-Module annulé par $T_i^{\alpha_i}$ donc vérifie $P_{m-1,0}$ ($\mathcal{K}_i$ est de présentation finie puisque $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_i(\alpha_i)$). Considérons

maintenant $\overline{\mathcal{M}}_i = \mathcal{M}/\mathcal{K}_i$. Dans $\overline{\mathcal{M}}_i$ qui est, toujours pour les mêmes raisons, un $\mathcal{O}_V[T_1,\ldots,T_m]$-Module gradué de présentation finie, la multiplication par T_i devient injective, et de plus, grâce à la commutativité, si la multiplication par un certain T_j était injective dans $\mathcal{M}$, elle le reste dans $\overline{\mathcal{M}}_i$. Ainsi, si $\mathcal{M}$ vérifie $P_{m,k-1}$, $\overline{\mathcal{M}}_i$ vérifie $P_{m,k}$ pour au moins un i ($1 \leq i \leq m$). (Sauf bien sûr si $k-1=m$, auquel cas $\mathcal{M}$ vérifie $P_{m,m}$, et le théorème est démontré, car nous avons montré $D_{m,m}$). Si nous considérons l'ouvert analytique O_1 de V, partout dense, sur lequel $\mathcal{K}_i$ est plat (grâce à $D_{m-1,0}$), et l'ouvert analytique O_2 de V, partout dense, sur lequel $\mathcal{M}/\mathcal{K}_i$ est plat (grâce à $D_{m,k}$), les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{i,\mu} \longrightarrow \mathcal{M}_\mu \longrightarrow \mathcal{M}_\mu/\mathcal{K}_{i,\mu} \longrightarrow 0$$

nous montrent que $\mathcal{M}$ sera plat sur l'ouvert analytique partout dense $O_1 \cap O_2$ de V, et donc que l'on a $D_{m,k-1}$.
Ainsi nous avons montré que localement, l'ensemble U contient un ouvert analytique partout dense. Nous pouvons en déduire :

8.1.6 <u>Proposition</u> : Soient Y un espace analytique réduit, G une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie et $\mathcal{M}$ un G-Module gradué de présentation finie. Soit $F_{\mathcal{M}} : Y \to \mathcal{S}$ (où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites dénombrables d'entiers) l'application qui à $y \in Y$ associe la suite $S \in \mathcal{S}$ définie par : $S_\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{\mu,y}/\mathfrak{m}_y . \mathcal{M}_{\mu,y}$. Tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert dans lequel l'application F ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

<u>Démonstration</u> : Le problème étant local, nous pouvons appliquer l'argument qui précède : nous savons que y possède un voisinage ouvert V tel que $\mathcal{M}|V$ soit plat sur un ouvert analytique partout dense de V. Soit V_1 le complémentaire dudit ouvert analytique. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de Y, en remarquant que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_\mu(y') = \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{M}_\mu|V_1)(y')$ si $y' \in V_1$ $(\mathcal{M}_\mu(y) = \mathcal{M}_{\mu,y}/\mathfrak{m}_y . \mathcal{M}_{\mu,y})$.
Or $\dim V_1 < \dim Y$.
Et d'après 8.1.4, l'application $F_{\mathcal{M}}$ est constante sur chaque composante connexe de $V - V_1$. Localement, ces composantes sont en nombre fini, et ne fournissent donc qu'un nombre fini de valeurs différentes pour $F_{\mathcal{M}}$.

D'autre part, par hypothèse de récurrence, V_1 ne peut fournir qu'un nombre fini de valeurs différentes pour $F_{\mathcal{M}}$ (et la proposition est bien vraie si $\dim Y = 0$!).

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant préparés à démontrer le théorème 8.1.3, grâce au résultat suivant :

8.1.7 <u>Proposition</u> : Avec les hypothèses et notations de 8.1.6, tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert V tel qu'il existe un degré $\mu_o \in \Lambda$ tel que, pour y', y" dans V,

$$F_{\mathcal{M}}(y')_\mu = F_{\mathcal{M}}(y")_\mu \quad \text{pour} \quad \mu \leq \mu_o \quad \text{entraîne} \quad F_{\mathcal{M}}(y') = F_{\mathcal{M}}(y") \ .$$

Soit en effet $y' \in Y$. F(y') n'est autre que la "fonction caractéristique de Hilbert anisotrope" du $\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_m]$-module gradué de type fini $\mathcal{M}(y')$. Si nous étions dans le cas isotrope, le théorème classique de Hilbert nous dirait que F(y') coïncide pour μ assez grand avec les valeurs d'un polynôme de degré au plus m. Disons que cela se produit pour $\mu \geq \mu_o(y')$. Comme localement il n'apparaît qu'un nombre fini de $F_{\mathcal{M}}(y')$, il n'y a qu'un nombre fini de $\mu_o(y')$ à considérer ; posons

$$M_o = \sup_{y' \in V} \mu_o(y') \quad \text{et} \quad M = M_o + m + 1 \ .$$

Il est alors bien clair, puisqu'un polynôme de degré au plus m est déterminé par la connaissance de m+1 de ses valeurs, que si

$$F_{\mathcal{M}}(y')_\mu = F_{\mathcal{M}}(y")_\mu \quad \text{pour} \quad \mu < M \ , \quad F_{\mathcal{M}}(y') = F_{\mathcal{M}}(y") \ .$$

Dans le cas anisotrope, le théorème de Hilbert n'est plus aussi simple, mais on peut encore montrer que la fonction caractéristique d'un $\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_m]$-module gradué est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un intervalle fini (voir Appendice), et cela suffit à démontrer 8.1.7 en utilisant l'argument qui précède. On remarque que 8.1.6 joue un rôle essentiel : on ne sait pas a priori borner l'ordre à partir

duquel $F(y')$ coïncide avec les valeurs d'un polynôme.

8.1.8 Fin de la démonstration de 8.1.3 :
Il suffit maintenant de choisir autour de chaque point $y \in Y$ un voisinage ouvert V assez petit pour que l'on puisse appliquer 8.1.7. Soit μ_0 le degré que nous donne 8.1.7, et rappelons que U désigne l'ensemble des points de Y où $\mathcal{M}$ est plat. Nous affirmons que :

$$U \cap V = \{y' \in V / \mathcal{M}_\mu | V \text{ soit plat en } y',\ 0 \leq \mu \leq \mu_0\} \quad .$$

En effet pour montrer l'inclusion non triviale, remarquons que si U_μ est l'ouvert analytique partout dense de V formé des points où $\mathcal{M}_\mu | V$ est plat, l'ensemble de droite n'est autre que $\bigcap_{\mu=0}^{\mu_0} U_\mu$, intersection qui est finie puisque Λ est discret. Cet ensemble est donc un ouvert analytique partout dense de V. Ainsi, si $y \in \bigcap_{\mu=0}^{\mu_0} U_\mu$, tout un voisinage de y' est contenu dans $\bigcap_{\mu=0}^{\mu_0} U_\mu$. Mais d'après 8.1.4, $F(y")_\mu$ sera indépendante de $y"$ sur un voisinage de y', pour $0 \leq \mu \leq \mu_0$, et d'après 8.1.7, grâce au choix de μ_0, cela entraînenra que $F(y")$ sera indépendante de $y"$ sur un voisinage de y', donc que tous les $\mathcal{M}_y$ y seront plats (encore 8.1.4) et donc finalement que $y' \in U \cap V$. Ainsi nous avons montré que tout $y \in Y$ possède un voisinage V tel que $U \cap V$ soit un ouvert analytique partout dense de V, ce qui achève la démonstration de 8.1.3.

8.1.9 <u>Remarque</u> : Nous aurions pu, bien sûr, appliquer le théorème de platitude générique de Frisch [Points de platitude d'un morphisme analytique, Inventiones Math., vol. 4, fasc. 2, 1967] à $\mathrm{Specan}_Y G$ (cf.).
Le lecteur que la démonstration précédente n'aurait pas amusé peut s'y reporter.

Nous allons maintenant nous intéresser à la stratification d'une installation par la longueur des faisceaux de jets anisotropes.

8.2.1 <u>Proposition</u> : Soient $\Delta/S = (X,Z,W,r)$ une S-installation, et $d \in]0,\infty[$. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{N}^{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble des suites d'entiers indexées par $\mathbb{R}^+$ muni de l'ordre produit. L'application $H_{\Delta/S}(d) : X \cap W \to \mathcal{S}$ qui à $x \in X \cap W$ associe la d-fonction de Samuel $H_{\Delta/S,x}(d) \in \mathcal{S}$ (définie par

$H_{\Delta/S,x}(\mu;d) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}(x)$) est analytiquement semi-continue supérieurement. C'est -à-dire que si $s = (s_\mu) \in \mathcal{S}$, l'ensemble des points $x \in W \cap X$ tels que :

$$H_{\Delta/S,x}(\mu,d) \geq s_\mu \quad \text{pour tout} \quad \mu \in \mathbb{R}^+$$

est un sous-espace analytique fermé de $W \cap X$.

Pour la démonstration, nous utilisons le complément suivant de 8.1.4 ([

8.2.2 <u>Rappel</u> : Soient Y un espace analytique et $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{F}(y) \geq s$ est un sous-espace analytique fermé de Y. Nous utiliserons aussi le résultat suivant, corollaire de 8.1.3.

8.2.3 <u>Proposition</u> : Tout point $x \in W \cap X$ possède un voisinage ouvert dans lequel l'application $H_{\Delta/S}(d)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

<u>Démonstration</u> : Nous ne pouvons pas appliquer directement 8.1.3 et le raisonnement de 8.1.6 parce que les $\mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}$ ne sont pas les composantes homogènes d'un $\mathcal{O}_Y[T_1,\ldots,T_m]$-Module gradué de présentation finie. Mais nous savons que les $\mathrm{gr}^\mu \mathcal{P}^\mu_{\Delta/S}$ sont les composantes homogènes de la $\mathcal{O}_{X\cap W}$-Algèbre graduée de présentation finie $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^d_{\Delta/S}$ (1,1.40) et nous remarquons :

8.2.4 <u>Lemme</u> : Soit Y un sous-espace analytique réduit de $X \cap W$.
Pour un point $x \in Y$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) tous les $\mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}$ sont plats en x ($\mu \in \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$) ;

ii) $gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ est plat en x.

En effet, si nous regardons les suites exactes de définition (cf. § 1, 1.11 et 1.12),

$$0 \longrightarrow gr^{\mu}\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S} \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu^-,d}_{\Delta/S}(Y) \longrightarrow 0$$

nous voyons que, si en $x \in Y$ tous les $\mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}(Y)$ sont $\mathcal{O}_Y$-plats, c'est-à-dire localement libres (8.1.4), il en est de même des $gr^{\mu}\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}$, c'est-à-dire de $gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ (appliquer par exemple 8.1.4 et la formule des longueurs dans une suite exacte). Réciproquement, puisque $\mathcal{P}^{o,d}_{\Delta/S}(Y) = \mathcal{O}_Y$, si $gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en x, on voit tout de suite par récurrence sur μ que les $\mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}(Y)$ sont $\mathcal{O}_Y$-plats en x. Nous pouvons appliquer le théorème 8.1.3 à la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie $gr\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ pour $Y = (X \cap W)_{red}$. Puisque $rang_{\mathbb{C}}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)(x) = rang_{\mathbb{C}}\,\mathcal{P}^{\mu}_{\Delta/S}(x)$ pour $x \in (X \cap W)_{red}$, ceci nous montre que $H_{\Delta/S}(d)$ est constante sur un ouvert analytique partout dense de $(X \cap W)_{red}$ (d'après 8.1.4). On recommence en prenant pour Y le complémentaire de cet ouvert analytique, disons Y_1, et puisque $\dim Y_1 < \dim X \cap W$, on doit s'arrêtéer au bout d'un nombre fini de pas, et l'on aura trouvé qu'un nombre fini de valeurs pour $H_{\Delta/S}(d)$, comme en 8.1.6.

Pour achever la démonstration de 8.2.1, remarquons que l'ensemble F des points de $W \cap X$ où $H_{\Delta/S}(d) \geq s$ est fermé, comme intersection des fermés donnés par 8.2.2. Pour montrer que cet ensemble est un sous-espace analytique fermé, il suffit de le montrer au voisinage de tout point $x \in X \cap W$. Soit donc $x \in W \cap X$ et soit V un voisinage ouvert de x dans lequel $H_{\Delta/S}(d)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, (8.2.3). Numétons ces valeurs $H_1, \ldots, H_k$ de telle sorte que les l premières $H_1, \ldots, H_l$ $(0 \leq l \leq k)$ soient celles qui vérifient $H_i \not\geq s$. Soit ν_i le plus petit élément μ de $\mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ tel que $H_i(\mu) < s_{\mu}$ $(0 \leq i \leq l)$ et considérons le sous-espace analytique fermé (8.2.2) de V

$$\widetilde{F} = \{x \in V / H_{\Delta/S,x}(\nu_i, d) \geq s_{\nu_i} \ ; \ 0 \leq i \leq l\}$$

il est clair que $F \cap V \subseteq \widetilde{F}$. Mais l'inclusion inverse est vraie, puisque $H_{\Delta/S,x}(\nu_i ; d) \geq s_{\nu_i}$ implique que $H_{\Delta/S,x}(d)$ est différente des H_i $(0 \leq i \leq l)$, donc vérifie $H_{\Delta/S,x}(d) \geq s$. Ainsi $F \cap V$ est un sous-espace analytique fermé de V, ce qui achève la démonstration de 8.2.1.

8.2.5 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta/S = (X, Z, W, r)$ une S-installation et $d \in]0, \infty[$; il existe une partition localement finie $X \cap W = \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha,d}$ de $X \cap W$ en sous-espaces analytiques possédant les propriétés suivantes :

1) pour tout $\alpha \in A$, il existe une application $H_\alpha : \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$x \in X_{\alpha,d} \Leftrightarrow H_{\Delta/S,x}(d) = H_\alpha \ ;$$

2) $\overline{X}_{\alpha,d}$ et $\overline{X}_{\alpha,d} - X_{\alpha,d}$ sont des sous-espaces analytiques fermés de $X \cap W$, et $\dim(\overline{X}_{\alpha,d} - X_{\alpha,d}) < \dim(X_{\alpha,d})$.

<u>Démonstration</u> : Notons $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui apparaissent comme fonction de Samuel anisotrope $H_{\Delta/S,x}(d)$ pour au moins un point $x \in X \cap W$. Nous allons montrer que les sous-ensembles

$$X_{\alpha,d} = \{x \in X \cap W / H_{\Delta/S,x}(d) = H_\alpha\} \ ,$$

qui constituent évidemment une partition de $W \cap W$, localement finie d'après 8.2.3, possédant les propriétés requises. Remarquons tout d'abord que si $x \in \overline{X}_{\alpha,d}$, $H_{\Delta/S,x}(d) \geq H_\alpha$ (toujours pour l'ordre produit). En effet, sinon il existe un plus petit élément $\nu_o \in \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$ tel que $H_{\Delta/S,x}(\nu_o ; d) < H_\alpha(\nu_o)$. Mais d'après 8.2.2, une telle inégalité subsiste dans un voisinage de x, qui rencontre nécessairement X_α , d'où la contradiction.

Considérons maintenant les sous-espaces analytiques fermés de $X \cap W$ (8.2.1)

$$X^*_{\alpha,d} = \{x \in X \cap W / H_{\Delta/S,x}(d) \geq H_\alpha\} \quad .$$

D'après la remarque précédente et 8.2.3, tout point $x \in X \cap W$ possède un voisinage ouvert V tel que

$$X_{\alpha,d} \cap V = (X^*_{\alpha,d} - \bigcup_{\beta \in B(x)} X^*_{\beta,d}) \cap V$$

où B(x) est l'ensemble fini des indices β tels que $H_\beta > H_\alpha$ et que H_β apparaisse dans V, qui a été choisi suffisamment petit pour que 8.2.3 soit vraie.
Ainsi, nous avons fait apparaître localement $X_{\alpha,d}$ comme différence de deux sous-espaces analytiques fermés, ce qui, d'après ([ ]), suffit à prouver le théorème.

8.2.6 <u>Définition</u> : Les sous-espaces analytiques $X_{\alpha,d}$ de $X \cap W$ sont appelés les d-strates de Samuel relatives de l'installation Δ/S.

8.2.7 <u>Remarque</u> : La définition précédente constitue un abus de langage, puisque la partition que nous avons construite ne vérifie pas en général la propriété de frontière, c'est-à-dire que $X_{\alpha,d} \cap \overline{X}_{\beta,d} \neq \emptyset$ n'entraîne pas que $X_{\alpha,d} \subset \overline{X}_{\beta,d}$, ou si l'on préfère, $\overline{X}_{\beta,d} - X_{\beta,d}$ n'est pas une union de strates. Cependant, nous avons vu dans la démonstration de 8.2.5 que $H_\alpha \not\geq H_\beta$ entraîne que $X_{\alpha,d} \cap \overline{X}_{\beta,d} = \emptyset$. L'on peut démontrer que ceci entraîne le résultat en apparence plus précis, et bien intuitif d'après la locale finitude de la partition, que voici :

8.2.8 Dans la situation de 8.2.5 tout point $x \in X \cap W$ possède un voisinage ouvert V' tel que pour tout $x' \in V'$ on ait :

$$H_{\Delta/S,x'}(d) \leq H_{\Delta/S,x}(d) \quad .$$

Choisissons en effet un voisinage V' de x dans $X \cap W$ dans lequel n'apparaît qu'un nombre fini de fonctions de Samuel anisotropes $H_{\Delta/S,x}(d)$, disons $H_1,\ldots,H_k$, et supposons que les l premières, $H_1,\ldots,H_l$ $(0 \leq l < k)$

sont celles qui vérifient $H_i \not\leq H_{\Delta/S,x}(d)$. Il existe alors un plus petit élément ν_i de $\mathbb{N}+\frac{1}{d}\mathbb{N}$ tel que $H_i(\nu_i) > H_{\Delta/S,x}(d)$ $(0 \leq i \leq l)$ et considérons le fermé analytique G de V' (8.2.2)

$$G = \{x' \in V' / H_{\Delta/S,x'}(\nu_1, d) \geq H_1(\nu_1) \text{ ou}, \ldots, \text{ou } H_{\Delta/S,x'}(\nu_l, d) \geq H_l(\nu_l)\} .$$

Il est clair que si $x' \in V'$ est tel que $H_{\Delta/S,x'}(d) \not\leq H_{\Delta/S,x}(d)$, $x' \in G$ puisque alors $H_{\Delta/S,x'}(d)$ doit être une des H_i $(0 \leq i \leq l)$. Mais la réciproque est vraie puisque, si $x' \in G$, $H_{\Delta/S,x'}(\nu_i, d) \geq H_i(\nu_i) > H_{\Delta/S,x}(\nu_i, d)$ pour au moins un indice i (ou bien $l = 0$ et l'on a bien 8.2.8), et donc $H_{\Delta/S,x'}(d) \not\leq H_{\Delta/S,x}(d)$. Enfin, $x \notin G$, et il existe donc un voisinage ouvert de x dans V' qui ne rencontre pas
$G = \{x' \in V' / H_{\Delta/S,x'}(d) \not\leq H_{\Delta/S,x}(d)\}$.

8.2.9 Nous énonçons ici un cas particulier important du théorème 8.2.5.

<u>Théorème</u> : Soit $F : X \to S$ un espace analytique relatif. Il existe une partition localement finie $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que :

1) pour tout $\alpha \in A$, il existe une application $H_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$x \in X_\alpha \Leftrightarrow H_{X/S,x} = H_\alpha$$

où $H_{X/S,x} = H_{F^{-1}(F(x)),x}$ est la fonction de Samuel ordinaire (isotrope) de la fibre de F passant par x, en x ;

2) $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-espaces analytiques fermés de X, et $\dim(\overline{X}_\alpha - X_\alpha) < \dim X_\alpha$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'appliquer le théorème 8.2.5 à l'installation $\Delta/S = (X, X, X, id_X)$ pour $d = 1$ (cf. 1, 1.20).

***

APPENDICE AU § 8

LA FONCTION CARACTERISTIQUE DE HILBERT D'UN $\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_m]$-MODULE GRADUE DE TYPE FINI

Dans ce qui suit, pour simplifier l'exposé, nous allons nous restreindre au cas où l'ensemble des degrés de la graduation est $\Lambda = \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$, et où $\mathbb{C}[T_1,\ldots,T_m]$ est engendré comme $\mathbb{C}$-algèbre par ses éléments de degré 1 et $\frac{1}{d}$. C'est la cas où nous nous trouvons pour les applications que nous faisons du théorème 8.1.3 à l'existence des stratifications de Samuel anisotropes. Le passage au cas général ne présente aucune difficulté.

Soit donc $R = \mathbb{C}[T_1,\ldots,T_m]$. Nous allons donner des noms différents aux variables suivant leur poids. Ecrivons Z_i, $1 \leq i \leq r$, les T_i qui ont le poids 1, et W_j, $1 \leq j \leq s$, les T_i qui ont le poids $\frac{1}{d}$ $(m = r+s)$. Soit M un $\mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_r, W_1,\ldots,W_s]$-module gradué de type fini ; $M = \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu$. Nous voulons obtenir de l'information sur l'application $F_M : \Lambda \to \mathbb{N}$ définie par $F_M(\mu) = \dim_{\mathbb{C}} M_\mu$. (Rappelons que par hypothèse, les composantes homogènes de A sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, et M étant de type fini sur A, il en est de même des M_μ).

A8.1 <u>Réduction</u> : Remarquons tout d'abord que nous pouvons construire une résolution libre graduée du R-module M. En effet, puisque M est de type fini, nous avons une surjection graduée de degré 0

$$\bigoplus_{i=o}^{r} R(-\nu_{i,1}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

dont le noyau est encore un R-module gradué de type fini, et donc nous construisons une suite exacte graduée de degré 0

$$\bigoplus_{i=1}^{r_2} R(-\nu_{i,2}) \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_{i=1}^{\nu_1} R(-\nu_{i,1}) \xrightarrow{\varphi_o} M \longrightarrow 0$$

et le noyau de φ_1 est encore de type fini.
On peut continuer ainsi, et construire pas à pas une résolution graduée de degré 0 de M par des R-modules gradués libres. (En effet, les $R(-\nu)$ sont isomorphes à R comme R-modules). Mais le théorème des Syzygies de Hilbert nous dit qu'une telle résolution s'arrête au bout du m-ième pas au plus, c'est-à-dire que l'on a une suite exacte de R-modules gradués :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_m} R(-\nu_{i,m}) \xrightarrow{\varphi_{m-1}} \bigoplus_{i=1}^{r_{m-1}} R(-\nu_{i,m-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_1} R(-\nu_{i,1}) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Ceci permet de présenter F_M comme une combinaison linéaire finie de fonctions $F_{R(-\nu)}$. Ainsi, si nous voulons montrer un certain caractère polynômial de F_M, il suffit de la montrer pour F_R, ce que nous allons faire maintenant.

A8.2 Remarquons que $F_R(\mu)$ n'est autre que le nombre de monômes $Z^A W^B$ $(Z = (Z_1,\dots,Z_r),\ W = (W_1,\dots,W_s),\ A = (a_1,\dots,a_r),\ B = (b_1,\dots,b_s))$ tels que $|A| + \frac{|B|}{d} = \mu$. Auterment dit, si nous notons $H^o_{\mathbb{C}^r}$ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $H^o_{\mathbb{C}^r,0}(n) = \dim_{\mathbb{C}} gr^n_o \mathbb{C}^r$, c'est-à-dire le nombre de multi-exposants $A = (a_1,\dots,a_r)$ tels que $|A| = n$, nous avons :

$$F_R(\mu) = \sum_{|A|+\frac{|B|}{d}=\mu} H^o_{\mathbb{C}^r,0}(|A|) \cdot H^o_{\mathbb{C}^s,0}(|B|) .$$

Or, l'on sait bien que :

$$H^o_{\mathbb{C}^r,0} = \binom{n+r-1}{r-1} .$$

Le problème est donc dans la connaissance des solutions en nombres entiers de $a + \frac{b}{d} = \mu$. Deux cas se présentent :

a) d est rationnel. Posons $d = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) = 1$.

Soit $\mu \in \Lambda$, nous noterons $a_o(\mu)$ le plus petit entier a tel que μ puisse s'écrire $a + \frac{b}{d}$. Alors, $d(\mu - a_o(\mu))$ est entier, et nous pouvons définir les sous-ensembles de Λ :

$$\Lambda_{a_o,r} = \{\mu \in \Lambda / a_o(\mu) = a_o \quad \text{et} \quad d(\mu - a_o) \equiv r \text{ modulo } p\} .$$

Remarquons que ces sous-ensembles sont en nombre fini : en effet, pour tout $\mu \in \Lambda$, $0 \leq a_o(\mu) < q$ puisque si l'on a $\mu = a + b \cdot \frac{q}{p}$ avec $a \geq q$, on a aussi $\mu = a - q + (b + p)\frac{q}{p}$, et évidemment, $0 \leq r < p$.

A8.3 Pour tout (a_o, r) comme ci-dessus, l'application $F_R|\Lambda_{a_o,r}$ coïncide pour $\mu \in \Lambda_{a_o,r}$ avec un polynôme en μ à coefficients rationnels. En effet, si $\mu \in \Lambda_{a_o,r}$ on peut poser $d(\mu - a_o) = k(\mu)p + r$ où $k(\mu) = \dfrac{d(\mu - a_o) - r}{p}$ (remarquer que $k(\mu)$ est linéaire). Cherchons maintenant les entiers a tels que l'on puisse écrire $a + \frac{b}{d} = \mu$, c'est-à-dire tels que $d(\mu - a)$ soit entier. $d(\mu - a) = d(\mu - a_o) - d(a - a_o)$. Il faut donc que $d(a - a_o)$ soit entier, c'est-à-dire que q divise $a - a_o$, et d'autre part, $0 \leq d(a - a_o) \leq d(\mu - a_o)$. Les entiers a que nous cherchons sont donc les entiers $a_o + l \cdot q$ tels que $d \cdot lq \leq k(\mu)p + r$ $(r < p)$, c'est-à-dire $lp \leq k(\mu)p + r$ $(r < p)$, ou enfin $l \leq k(\mu)$. Les valeurs de b correspodantes sont les $(k(\mu) - l)p + r$ $(0 \leq l \leq k(\mu))$. Finalement, pour $\mu \in \Lambda_{a_o,r}$, nous avons

$$F_R(\mu)|\Lambda_{a_o,r} = \sum_{0 \leq l \leq k(\mu)} H^o_{\mathbb{C}^r,0}(a_o + lq) \cdot H^o_{\mathbb{C}^s,0}((k(\mu) - l)p + r)$$

où $k(\mu) = \dfrac{d(\mu - a_o) - r}{p}$ $\quad (d = \frac{p}{q})$,

c'est-à-dire que nous sommons des polynômes sur des progressions

arithmétiques, le nombre de termes choisis étant lui-même une fonction linéaire de μ. Les propriétés élémentaires des combinaisons rendent maintenant bien clair le fait que $F_R(\mu)|\Lambda_{a_o,r}$ est un polynôme en μ de degré au plus $r+s-1$, et donc que pour $\mu > \sup_{i,j}(\nu_{i,j})$ (les $\nu_{i,j}$ étant ceux de la présentation de A8.1) il en sera de même de $F_M(\mu)$. Remarquons aussi que si $\mu \in \Lambda_{a_o,r}$, $\mu + q = \mu + \frac{p}{q} \in \Lambda_{a_o,r}$, mais le successeur μ^+ de μ n'est pas dans $\Lambda_{a_o,r}$, sauf bien sûr si $d=1$. Ceci montre qu'il existe $\mu_o \in \Lambda$, tel que la connaissance de $F_M(\mu)$ pour $\mu \leq \mu_o$ nous permette de déterminer complètement F_M. En effet, Λ détermine les $\Lambda_{a_o,r}$, qui sont en nombre fini, et si $\mu_{a_o,r}$ est le degré à partir duquel $F_M|\Lambda_{a_o,r}$ coïncide avec un polynôme (de degré au plus $r+s-1$), on peut prendre $\mu_o = \sup_{(a_o,r)}(\mu_{a_o,r}) + r + s$.

b) d est irrationnel.

Alors, pour $\mu \in \Lambda = \mathbb{N} + \frac{1}{d}\mathbb{N}$, l'égalité $a + \frac{b}{d} = \mu$ détermine un unique couple d'entiers (a,b). Notons $a(\mu)$ l'entier a ainsi déterminé. On aura alors

$$F_R(\mu) = H^o_{\mathbb{C}^r,0}(a(\mu)) \cdot H^o_{\mathbb{C}^s,0}(d(\mu - a(\mu))$$

ce qui montre que $F_R(\mu)$ (et donc $F_M(\mu)$ pour μ assez grand) coïncide avec un polynôme en μ (de degré $s-1$) dont les coefficients sont des polynômes en $a(\mu)$ (de degré $r-1$). Or, nous pouvons faire deux remarques :

1) $a(\mu)$ prend une infinité de fois la même valeur puisque $a(\mu + \frac{1}{d}) = a(\mu)$ (d'après l'unicité) ;

2) $a(\mu)$ prend une infinité de valeurs distinctes puisque $a(\mu+1) = a(\mu) + 1$ (toujours l'unicité).

Ainsi, si nous écrivons, pour $\mu > \mu_1$

$$F_M(\mu) = \sum_{i=o}^{s-1} P_i(a(\mu))\mu^i \quad \text{où} \quad P_i \in \mathbb{Q}[T]$$

et sont de degré $r-1$.

Nous pouvons choisir d'après 1) un nombre fini de $\mu \in \Lambda$ qui donnent le même $a(\mu)$ et ainsi déterminer les $P_i(a(\mu))$ (prenons s valeurs $a(\mu)$ distinctes, et ainsi déterminer les polynômes P_i. Au total, nous nous apercevons qu'il existe encore $\mu_o \in \Lambda$ tel que la connaissance de $F_M(\mu)$ pour $\mu < \mu_o$ détermine F_M (prendre $\mu_o = \tilde{\mu}_o + r + s$ où $\tilde{\mu}_o$ est le degré à partir duquel $F_M(\mu)$ coïncide avec un polynôme comme ci-dessus).

***

§ 9. LA SUITE EXACTE DE CÔNES

9.1.1 <u>Définition</u> : Soit : $(0) \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow (0)$ une suite de Y-morphismes de Y-cônes.

On dit que cette suite est exacte s'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de Y par des ouverts tel que, si C_i (resp. C'_i) (resp. C''_i) désigne la restriction de C (resp. C') (resp. C") au-dessus de U_i, il existe un diagramme commutatif de $Y|U_i$-cônes :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C'_i \arrow[r] & V_i \arrow[r] & V''_i \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C'_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[u, "Id"] & C_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[u] & C''_i \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

où :

1) les flèches verticales sont des immersions fermées ;

2) la suite : $(0) \longrightarrow C'_i \longrightarrow V_i \longrightarrow V''_i \longrightarrow (0)$ est une suite exacte et scindée de $Y|U_i$-fibrés vectoriels triviaux, le scindage étant un morphisme gradué pour les structures graduées choisies sur les $\mathcal{O}_{Y|U_i}$-Algèbres associées à C'_i, V_i, V''_i ;

3) l'action de C'_i par translation sur V_i induit une action sur C_i et β_i induit un $Y|U_i$-isomorphisme de $C_i/\alpha(C'_i)$ sur C''_i.

On laisse au lecteur le soin de montrer que 3) est équivalent à 3') ou 3")

3') $C_i = V_i \underset{V''_i}{\times} C''_i$

3") Le scindage de la suite exacte de fibrés vectoriels triviaux induit un inverse à gauche pour α_i et le morphisme $C_i \longrightarrow C''_i \underset{Y|U_i}{\times} C'_i$ qu'on en déduit est un isomorphisme.

9.1.2 <u>Lemme</u> : Soit :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C' \arrow[r] & C \arrow[r] & C'' \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[u, "Id"] & D \arrow[r] \arrow[u] & D'' \arrow[r] \arrow[u, "I"] & (0)
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de Y-cônes où les flèches verticales sont des immersions fermées.

Si la suite supérieure est une suite exacte, et si I est un carré cartésien, la suite inférieure est aussi exacte.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence triviale de 9.1.1, 3').

9.1.3 <u>Lemme</u> : Soit $d \in]0,\infty[$. Soit $\underline{\tilde{\Delta}}/S = (\tilde{Z},\tilde{Z},\tilde{W}\,;\,\tilde{r})$ une S-installation lisse. Soit $W \to \tilde{W}$ une S-immersion.

Soit $\underline{\Delta}/S = (W \underset{\tilde{W}}{\times} \tilde{Z}\,,\, W \underset{\tilde{W}}{\times} \tilde{Z}\,,\, W \underset{\tilde{W}}{\times} \tilde{W}\,;\, Id\, W \times \tilde{r}) = (Z,Z,W\,;\,r)$ la S-installation ambiante image réciproque de $\underline{\tilde{\Delta}}$ au-dessous de W. Enfin, soit X un sous-espace analytique de Z, $\Delta/S = (X,Z,W\,;\,r)$, $\tilde{\Delta}/S = (X,\tilde{Z},\tilde{W}\,;\,\tilde{r})$.

Pour tout sous-espace analytique Y de $W \cap X$ lisse au-dessus de S, le diagramme canonique (de Y-cônes) :

$$\begin{tikzcd}
C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \arrow[r] & C^{d}_{\underline{\tilde{\Delta}},Y} \\
C^{d}_{\Delta,Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{\tilde{\Delta},Y} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

<u>Démonstration</u> : Nous allons vérifier, pour tout point y de Y, que le diagramme correspondant des germes d'Algèbre est co-cartésien. Pour ce faire, il suffit de montrer le même lemme dans la situation géométrique algébroïde au point y correspondante. Pour simplifier l'écriture, nous ne changerons pas les notations.

Soit s l'image de y dans S et soit $A = \mathcal{O}_{S,s}$. $\mathcal{O}_{\tilde{Z},y}$ s'identifie alors à l'anneau de séries formelles $A[[y_1,\dots,y_q;w_1,\dots,w_k;z_1,\dots,z_t]] = A[[y;w;z]]$,

$\mathcal{O}_{\widetilde{W},y}$ à $A[[y;w]]$, $\mathcal{O}_{Y,y}$ à $A[[y]]$; les immersions $W \to Z$, $Y \to W$ étant associées aux surjections canoniques $A[[y;w;z]] \to A[[y;w]]$ et $A[[y;w]] \to A[[y]]$ respectivement.
Soit K l'idéal de $A[[y;w]]$ définissant W dans $\widetilde{W}$; $H = K.A[[y;w;z]]$ est celui définissant Z dans $\widetilde{Z}$.

On sait que, pour $d \in [0,\infty]$, $gr_Y \underline{\widetilde{\Delta}};d$ et $gr_Y \underline{\Delta};d$ s'identifient respectivement à $gr_Y \widetilde{W}[Z]$ et $gr_Y W[Z]$. Les choix de coordonnées précédents permettent de plus d'identifier $gr_Y \widetilde{W}[Z]$ à $A[[y]][W,Z]$ où $W = in_Y w$, $Z = in_Y z$. D'autre part, l'immersion fermée de $C^d_{\underline{\Delta},Y}$ dans $C^d_{\underline{\widetilde{\Delta}},Y}$ est définie par l'idéal $\mathfrak{in}_Y(W,\widetilde{W}) . A[[y]][W,Z]$ où $\mathfrak{in}_Y(W,\widetilde{W})$ désigne le noyau de la surjection canonique $gr_Y \widetilde{W} \to gr_Y W$ et est engendré dans $A[[y]][W]$ par les formes initiales pour la filtration (w)-adique des éléments de K (3.0.2, 3.0.3).

D'autre part, $\widetilde{J}$ étant l'$\mathfrak{J}$déal définissant X dans $\widetilde{Z}$, l'immersion de $C^d_{\underline{\widetilde{\Delta}},Y}$ dans $C^d_{\underline{\Delta},Y}$ est définie par l'$\mathfrak{J}$déal $\mathfrak{in}_Y(\widetilde{\Delta},\underline{\widetilde{\Delta}},d)$ de $A[[y]][W,Z]$, qui est engendré par les $in_Y(\widetilde{f};\underline{\widetilde{\Delta}},d)$ où $\widetilde{f}$ parcourt $\widetilde{J}$.
On se souvient que si $\widetilde{f} = \sum_{A,B} C_{BA} w^B z^A$, où $C_{BA} \in A[[y]]$,

$$\nu_Y(\widetilde{f};\underline{\widetilde{\Delta}},d) = \inf\{|A| + |B|/d,\ C_{BA} \neq 0\}$$

$$in_Y(\widetilde{f};\underline{\Delta},d) = \sum_{A,B:\,|A|+|B|/d=\nu_Y(f;\underline{\widetilde{\Delta}},d)} C_{BA} W^B Z^A .$$

De même, soit $J = \widetilde{J}/H$ l'$\mathfrak{J}$déal définissant X dans Z, l'immersion de $C^d_{\Delta,Y}$ dans $C^d_{\underline{\Delta},Y}$ est définie par l'$\mathfrak{J}$déal $\mathfrak{in}_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ de $A[[y]][W,Z]/\mathfrak{in}_Y(W,\widetilde{W}) . A[[y]][W,Z]$ qui est engendré par les $in_Y(f;\underline{\Delta},d)$ où f parcourt J.
Si $f = \sum_A f_A z^A$, $f_A \in \mathcal{O}_{W,y} \simeq A[[y,w]]/K$,

$$\nu_Y(f;\underline{\Delta},d) = \inf\{|A| + \nu_Y(f_A)/d\}$$

$$in_Y(f;\underline{\Delta},d) = \sum_{A:\,\nu_Y(f_A)=d(\nu_Y(f;\underline{\Delta},d)-|A|)} in_Y f_A Z^A .$$

Il s'agit de voir comment se relève cet idéal dans $A[[y]][W,Z]$.
Soit $P = \sum d_{BA} W^B Z^A \in A[[y]][W,Z]$ un polynôme d-homogène de degré ν. Il

s'envoie dans $\mathfrak{Jn}_Y(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d)$ sur un élément non nul si et seulement si il existe $f=\sum_A f_A z^A \in J$ tel que

$$\nu_Y(f;\underline{\Delta},d) = \nu$$

et

$$\mathrm{in}_Y f_A \equiv \sum_B d_{BA} W^B \quad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Jn}_Y(W,\tilde{W})) \text{ pour tout } A$$

tel que

$$\nu_Y(f_A) = d(\nu - |A|) \ .$$

Relevons f_A par $\tilde{f}_A$ dans $A[[y,w]]$ pour tout A, de telle sorte que $\nu_Y(f_A)=\nu_Y(\tilde{f}_A)$. On a alors $\mathrm{in}_Y f_A = \mathrm{Cl}[\mathrm{in}_Y \tilde{f}_A] \bmod \mathrm{in}_Y(W,\tilde{W})$. Soit $\tilde{f}=\sum_A \tilde{f}_A z^A$. La surjection de $\mathcal{O}_{\tilde{Z},y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,y}$ étant continue, $\tilde{f}$ s'envoie sur f par cette surjection et appartient donc à $\tilde{J}$. On a

$$\nu_Y(f;\underline{\Delta},d) = \nu_Y(\tilde{f};\underline{\Delta},d) = \nu$$

$$\mathrm{in}_Y(\tilde{f};\tilde{\underline{\Delta}},d) = \sum_{A:\nu_Y(\tilde{f}_A)=d(\nu_Y(\tilde{f};\tilde{\underline{\Delta}},d)-|A|)} \mathrm{in}_Y \tilde{f}_A Z^A \ .$$

On en déduit immédiatement que :

$$\mathrm{in}_Y(\tilde{f};\tilde{\underline{\Delta}},d) \bmod \mathfrak{Jn}_Y(W,\tilde{W}) \,.\, A[[y]][W,Z] = \mathrm{in}_Y(f;\underline{\Delta},d) \ .$$

Autrement dit :

$$P \in \mathfrak{Jn}_Y(\tilde{\Delta},\tilde{\underline{\Delta}},d) + \mathfrak{Jn}_Y(W,\tilde{W}) \,.\, A[[y]][W,Z] \ .$$

Ceci montre que $C^d_{\Delta,Y} \supset C^d_{\tilde{\Delta},Y} \cap C^d_{\underline{\Delta},Y}$. L'inclusion inverse étant claire on a l'égalité.

9.1.4 <u>Proposition</u> : Soit $\Delta/S=(X,Z,W\,;\,r)$ une S-installation lisse (2.0.4). Soit Y un sous-espace analytique de $W\cap X$, lisse au-dessus de S. Soit $Y\times_S \Delta = (Y\times_S X,\ Y\times_S Z,\ Y\times_S W\,;\,\mathrm{Id}\,Y\times r)$ l'installation image réciproque

au-dessus de Y. Soit enfin $(Y \underset{S}{\times} Y) = (Y \underset{S}{\times} Y,\ Y \underset{S}{\times} Y,\ Y \underset{S}{\times} Y\ ;\ \mathrm{Id}\, Y \underset{S}{\times} Y)$ l'installation triviale. On considère Y comme sous-espace de $Y \underset{S}{\times} X$, $Y \underset{S}{\times} W$, $Y \underset{S}{\times} Y$ par l'immersion diagonale. Alors, pour $d \in]0,\infty[$, la suite de Y-cônes :

$$(0) \longrightarrow C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \longrightarrow C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \longrightarrow C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \longrightarrow (0)$$

est exacte. (Les morphismes sont obtenus fonctoriellement par 1.36).

<u>Démonstration</u> : On peut tout d'abord construire un diagramme commutatif de Y-cônes (1.36)

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \arrow[r] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \arrow[r] & C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{\underline{\Delta},Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

et les flèches verticales sont des immersions.
Comme dans 9.1.3, pour tout point y de Y, il suffit de montrer la proposition pour l'installation algébroïde en y correspondante. Pour simplifier, nous ne changerons pas les notations.
Soit s l'image de y dans S, et soit $A = \mathcal{O}_{S,s}$. Les hypothèses de lissité permettent d'identifier $\mathcal{O}_{Z,y}$ (resp. $\mathcal{O}_{W,y}$) (resp. $\mathcal{O}_{Y,y}$) à l'anneau de séries formelles $A[[y_1,\dots,y_q\ ;\ w_1,\dots,w_s\ ;\ z_1,\dots,z_t]] = A[[y,w,z]]$ (resp. $A[[y,w]]$) (resp. $A[[y]]$) ; les immersions de Y dans W et de W dans Z étant associées aux surjections canoniques. Dans ces conditions, $\mathcal{O}_{Y \underset{S}{\times} Z,y}$ s'identifie à $A[[y',y,w,z]]$ où $y' = (y'_1,\dots,y'_q)$, et les diagrammes de A-algèbre :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Z,y} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y \underset{S}{\times} Z,y} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_{Y \underset{S}{\times} Y,y} \arrow[d, "\wr"] \\
A[[y,w,z]] \arrow[r, "\varphi_1"'] & A[[y',y,w,z]] \arrow[r, "\varphi_2"'] & A[[y',y]]
\end{tikzcd}$$

où φ_1 est l'injection canonique, et φ_2 la surjection canonique, sont commutatifs.

Considérons maintenant le diagramme commutatif (de A-algèbres)

$$\begin{tikzcd} A[[y',y,w,z]] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\sigma"'] & A[[y',y]] \arrow[d, "\sigma_o"] \\ A[[y'',y,w,z]] \arrow[r, "\varphi_2^\sigma"] & A[[y'',y]] \end{tikzcd}$$

où $\sigma(y) = y$, $\sigma(w) = w$, $\sigma(z) = z$, $\sigma(y') = y - y''$, $\sigma_o(y) = y$, $\sigma_o(y') = y - y''$, $\varphi_2^\sigma(y) = y$, $\varphi_2^\sigma(w) = 0$, $\varphi_2^\sigma(z) = 0$, $\varphi_2^\sigma(y'') = y''$.

On constate que σ et σ_o sont des A-isomorphismes et $\sigma(y - y') = y''$.

Nous pouvons maintenant identifier la suite :

$$gr_Y \underline{\Delta};d \xrightarrow{\tilde{\alpha}} gr_Y Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta};d \xrightarrow{\tilde{\beta}} gr_Y(Y \underset{S}{\times} Y);d$$

à :

$$A[[y]][W,Z] \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A[[y]][Y'',W,Z] \xrightarrow{\tilde{\beta}} A[[y]][Y'']$$

où $\tilde{\alpha} = gr(\sigma \circ \varphi_1)$ envoie y sur y, W sur W, Z sur Z et $\tilde{\beta} = gr(\varphi_2^\sigma)$ envoie y sur y, Y'' sur Y'' et W et Z sur 0. De plus, la structure graduée sur $A[[y]][W,Z]$ est celle qui donne à Z le poids 1, à W le poids 1/d; celle sur $A[[y]][Y'',W,Z]$ donne à Y'' et W le poids 1/d et à Z le poids 1; celle sur $A[[y]][Y'']$ donne à Y'' le poids 1/d. On obtient ainsi la condition 2) de 9.1.1.

Nous allons maintenant montrer que 3') est aussi satisfait. Il s'agit de voir que

$$\begin{tikzcd} gr_Y \underline{\Delta};d \arrow[r] & gr_Y Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta};d \\ gr_Y \underline{\Delta};d \arrow[r] \arrow[u] & gr_Y Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta};d \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est un diagramme cocartésien dans la catégorie des A-algèbres. Ceci revient à dire que l'idéal engendré dans $gr_Y Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta};d$ par le noyau de la flèche de gauche (i.e. $in_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$) est le noyau de la flèche de droite (i.e. $in_Y(Y \underset{S}{\times} \Delta,\ Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d)$).

Si J est l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,y} = A[[y,w,z]]$ définissant X dans Z, on se souvient (3.0.3) que $in_Y(\Delta,\underline{\Delta},d)$ est engendré par les $in_Y(f,\underline{\Delta},d)$ quand f parcourt J. De même, I étant l'idéal de $\mathcal{O}_{Y \underset{S}{\times} Z,y} = A[[y',y,w,z]]$ définissant $Y \underset{S}{\times} X$ dans $Y \underset{S}{\times} Z$, $in_Y(Y \underset{S}{\times} \Delta,\ Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d)$ est engendré par les $in_Y(g;Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d)$ quand g parcourt I. Or I est l'idéal de $A[[y',y,w,z]]$ engendré par $\varphi_1(J)$.

Comme ci-dessus, nous allons effectuer tous les calculs après transformation par σ.

Soit $g \in \sigma(I)$. Il existe alors $f_i(y,w,z) \in \sigma \circ \varphi_1(J)$ et $Q_i(y'',y,w,z) \in A[[y'',y,w,z]]$, pour $1 \leq i \leq m$, tels que :

$$g = \sum_{1 \leq i \leq m} Q_i(y'',y,w,z)\, f_i \ .$$

Soit $\nu = \nu_Y(g;Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d)$ et écrivons :

$$1 \leq i \leq m \qquad Q_i = \sum_{A \in \mathbf{N}^q;\ |A| \leq [d\nu]} y''^A\, Q_{iA}(y,w,z) + R_i$$

avec

$$R_i \in (y'')^{[d\nu]+1} A[[y'',y,w,z]] \ ,$$

où $[d\nu]$ est la partie entière de $d\nu$. On a alors :

$$in_Y(g;Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d) = in_Y\Big(\sum_{A \in \mathbf{N}^q;\ |A| \leq [d\nu]} y''^A \Big(\sum_{1 \leq i \leq m} Q_{iA}\, f_i \Big) ;\ Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},d\Big) \ .$$

Soit :

$$g_A = \sum_{1 \leq i \leq m} Q_{iA}\, f_i \ , \quad g_A \in \sigma \circ \varphi_1(J) \ .$$

Nous allons montrer que, considérant g_A comme un élément de J, $\forall\, A \in \mathbb{N}^q$, $|A| \leq [d\nu]$, $\nu_Y(g_A\,;\,\underline{\Delta},d) \geq \nu - |A|/d$.
Sinon, on aurait :

$$\mu = \inf_{A\in\mathbb{N}^q,\,|A|\leq[d\nu]} \nu_Y(g_A\,;\,\underline{\Delta},d) + |A|/d < \nu$$

et

$$0 = \sum_{A;\,|A|\leq[d\nu]} Y''^A \tilde{\alpha}\left[\mathrm{cl}\, g_A \bmod \sum_{i\in\mathbb{N},\,j\in\mathbb{N};\,i+j/d>\mu-|A|/d} (z)^i \,.\, (z,w)^j\right] .$$

Mais $\tilde{\alpha}\left[\mathrm{cl}\, g_A \bmod \sum_{i+j/d>\mu-|A|/d} (z)^i \,.\, (z,w)^j\right] \in A[[y]][W,Z]$.
Il est donc nul et $\nu_Y(g_A\,;\,\underline{\Delta},d) > \mu - |A|/d$, ce qui est contradictoire.
On obtient donc ainsi que :

$$\mathrm{in}_Y(\,;Y\times_S\underline{\Delta},d) = \sum_{A,\,|A|\leq[d\nu]} Y''^A \tilde{\alpha}\left[\mathrm{cl}\, g_A \bmod \sum_{i\in\mathbb{N},\,j\in\mathbb{N};\,i+j/d>\nu-|A|/d} (z)^i . (z,w)^j\right].$$

Ainsi, il existe des A pour lesquels cette classe est non nulle et restreignant la sommation à ceux-là :

$$\mathrm{in}_Y(g;Y\times_S\underline{\Delta},d) = \sum^*_{A\in\mathbb{N}^q} Y''^A \tilde{\alpha}\left[\mathrm{in}_Y(g_A\,;\,\underline{\Delta},d)\right] .$$

Ceci achève la démonstration.

9.1.5 <u>Corollaire</u> : Soit X/S un espace analytique au-dessus de S. Soit Y un sous-espace analytique de X lisse au-dessus de S. On considère Y comme sous-espace de $Y\times_S X$ et $Y\times_S Y$ par l'immersion diagonale. Alors la suite de Y-cônes :

$$(0) \longrightarrow C_{Y\times_S Y,Y} \longrightarrow C_{Y\times_S X,Y} \longrightarrow C_{X,Y} \longrightarrow (0)$$

est exacte.

<u>Démonstration</u> : La question étant locale sur Y, on choisit au voisinage de tout point y de Y un plongement local de X dans un espace Z lisse au-dessus de S. Soit $\Delta = (X, Z, Z\,;\, \mathrm{Id}\, Z)$. Il suffit alors d'appliquer 9.1.4 avec $d = 1$. En effet, $C^{1}_{\Delta,Y} = C_{X,Y}$, $C^{1}_{Y \underset{S}{\times} \Delta, Y} = C_{Y \underset{S}{\times} X, Y}$ (1.29).

9.1.6 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta/S = (X, Z, W\,;\, r)$ une bonne installation. Soit Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, lisse au-dessus de S. Soit $Y \underset{S}{\times} \Delta = (Y \underset{S}{\times} X,\ Y \underset{S}{\times} Z,\ Y \underset{S}{\times} W\,;\, \mathrm{Id}\, Y \times r)$ l'installation image réciproque au-dessus de Y. Soit enfin $(Y \underset{S}{\times} Y) = (Y \underset{S}{\times} Y,\ Y \underset{S}{\times} Y,\ Y \underset{S}{\times} Y\,;\, \mathrm{Id}\, Y \underset{S}{\times} Y)$ l'installation triviale. On considère Y comme sous-espace de $Y \underset{S}{\times} X$, $Y \underset{S}{\times} W$, $Y \underset{S}{\times} Y$ par l'immersion diagonale. Alors, pour $d \in]0, \infty[$, la suite de Y-cônes :

$$(0) \longrightarrow C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y), Y} \longrightarrow C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \Delta, Y} \longrightarrow C^{d}_{\Delta, d} \longrightarrow (0)$$

est exacte.

<u>Démonstration</u> : La question est locale sur Y ; soit donc y un point de Y. Plongeons, localement en y, W dans un espace $\tilde{W}$ lisse au-dessus de S et écrivons $Z = W \times \mathbb{C}^t$. Choisissons alors $\tilde{Z} = \tilde{W} \times \mathbb{C}^t$. On obtient ainsi une S-installation lisse $\tilde{\Delta} = (\tilde{Z}, \tilde{Z}, \tilde{W}\,;\, \tilde{r})$ où $\tilde{r}$ est la 1ère projection, dont Δ/S est la restriction au-dessus de W. Soit enfin $\tilde{\Delta}/S = (X, \tilde{Z}, \tilde{W}\,;\, \tilde{r})$. Nous sommes alors dans les conditions d'applications de 9.1.3. Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} C^{d}_{\Delta, Y} & \longrightarrow & C^{d}_{\tilde{\Delta}, Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C^{d}_{\Delta, Y} & \longrightarrow & C^{d}_{\tilde{\Delta}, Y} \end{array}$$

est cartésien.

Mais nous pouvons aussi appliquer 9.1.3 avec $Y \underset{S}{\times} \tilde{\Delta}$, $Y \underset{S}{\times} \Delta$, $Y \underset{S}{\times} \tilde{\Delta}$, $Y \underset{S}{\times} \Delta$ et ainsi :

$$\begin{tikzcd}
C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta}, Y} \arrow[r] & C^{d}_{Y \times \underline{\tilde{\Delta}}, Y} \\
C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta}, Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

D'autre part, d'après la proposition 9.1.4, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y), Y} \arrow[r] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] & C^{d}_{\underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y), Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & C^{d}_{\underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

les suites sont exactes et I est cartésien.

Enfin, le corollaire 9.1.5 entraîne que dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y), Y} \arrow[r] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] & C^{d}_{\underline{\tilde{\Delta}}, Y} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y), Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{d}_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta}, Y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{II}"] & C^{d}_{\underline{\Delta}, Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

les suites sont exactes et II est cartésien. En effet, toutes les installations qui y figurent étant ambiantes, d'après 2.1.7, ce diagramme s'identifie au suivant :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \arrow[r] & C_{Y \underset{S}{\times} \tilde{W}, Y \underset{Y}{\times} \left[C_{\tilde{Z}, \tilde{W} \underset{\tilde{W}}{\times} Y} \right]} \arrow[r] & C_{\tilde{W}, Y \underset{Y}{\times} \left[C_{\tilde{Z}, \tilde{W} \underset{\tilde{W}}{\times} Y} \right]} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \arrow[r] \arrow[u] & C_{Y \underset{S}{\times} W, Y \underset{Y}{\times} \left[C_{Z, W \underset{W}{\times} Y} \right]} \arrow[r] \arrow[u] & C_{W, Y \underset{Y}{\times} \left[C_{Z, W \underset{W}{\times} Y} \right]} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

et on sait que $C_{\tilde{Z},\tilde{W}} \underset{W}{\times} Y = C_{Z,W} \underset{W}{\times} Y \simeq Y \times \mathbb{C}^t$.

Il suffit maintenant d'assembler tous ces diagrammes dans un cube. On obtient ainsi que dans :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \arrow[r] & C^d_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \arrow[r] & C^d_{\underline{\Delta},Y} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^d_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{III}"] & C^d_{\underline{\Delta},Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

les suites sont exactes et III est cartésien.

9.1.7 <u>Corollaire</u> : Les hypothèses et notations sont celles de 9.1.6. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C^d_{\underline{\Delta},Y} \longrightarrow Y$ est plat en $y \in Y$;
2) $C^d_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \longrightarrow Y$ est plat en $y \in Y$.

<u>Démonstration</u> : En restreignant au besoin Y, on peut supposer qu'on a un scindage qui permet d'écrire :

$$C^d_{Y \underset{S}{\times} \underline{\Delta},Y} \simeq C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \underset{Y}{\times} C^d_{\underline{\Delta},Y}$$

$C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y}$ étant un fibré vectoriel localement libre, c'est évident.

(En termes d'algèbre, il suffit de se convaincre que, si $A[T_1,\ldots,T_q]$ est un anneau de polynômes et M un A-module, M est A-plat si et seulement si $M \underset{A}{\otimes} A[T_1,\ldots,T_q]$ l'est. Or $\mathrm{Tor}_1^A(\ ,?)$ commute aux sommes directes.

9.2.1 <u>Proposition</u> : Soit $\underline{\Delta}/S = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation. Soit $d \in]0,\infty[$. Soit $(W \cap X)_{red} = \bigcup_{\alpha \in A_d} X^d_\alpha$ la d-stratification de Samuel relative de $\underline{\Delta}/S$.

Pour tout $\alpha \in A_d$, $C^d_{X^d_\alpha \underset{S}{\times} \underline{\Delta},X^d_\alpha} \longrightarrow X^d_\alpha$ est plat.

Pour tout sous-espace analytique Y (non nécessairement réduit) de X_α^d, le morphisme canonique :

$$C^{d}_{Y \times_S \Delta, Y} \longrightarrow C^{d}_{X_\alpha^d \times_S \Delta, X_\alpha^d \times_{X_\alpha^d} Y}$$

est un isomorphisme.

En particulier, pour tout point x de X_α^d, si s désigne son image dans S et $\Delta(s) = s \times_S \Delta = (s \times_S X,\ s \times_S Z,\ s \times_S W\ ;\ \mathrm{Id}\ s \times r)$, le morphisme canonique :

$$C^{d}_{\Delta(s), x} \longrightarrow C^{d}_{X_\alpha^d \times_S \Delta, X_\alpha^d \times_{X_\alpha^d} x}$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : On a montré (1.40) que les $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ et $\mathrm{gr}_Y\, Y \times_S \Delta; d$ sont canoniquement isomorphes. Or on a déjà remarqué que $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en y si et seulement si, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en y. Or par définition, si $x \in W \cap X$,

$$H_{\Delta/S,x}(\mu, d) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(x) \quad .$$

Ce rang est donc constant sur X_α^d.

On a maintenant, pour $\mu \in \mathbb{N} + 1/d\,\mathbb{N}$, $\mu \neq 0$, une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ d-Modules :

$$(0) \longrightarrow \mathrm{gr}^{\mu}\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(X_\alpha^d) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(X_\alpha^d) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu^-;d}_{\Delta/S}(X_\alpha^d) \longrightarrow (0) \quad .$$

Tous les Modules étant plats, elle reste exacte après tensorisation.

$$(0) \longrightarrow \mathrm{gr}^{\mu}\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(X_\alpha^d) \underset{\mathcal{O}_{X_\alpha^d}}{\otimes} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu;d}_{\Delta/S}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}^{\mu^-;d}_{\Delta/S}(Y) \longrightarrow (0)$$

est aussi exacte. Or par définition, le noyau de la flèche de droite est $\mathrm{gr}^{\mu}\mathcal{P}^{d}_{\Delta/S}(Y)$. Ceci fournit l'isomorphisme annoncé.

9.2.2 Le X_α^d-cône $C^d_{X_\alpha^d \times_S \Delta, X_\alpha^d}$ est une généralisation du fibré tangent relatif à une famille lisse $X \to S$. Il recolle les cônes tangents d-anisotropes aux installations fibres en tout point d'une d-strate de Samuel relative.

9.2.3 <u>Corollaire</u> : Soit $X \to S$ un morphisme d'espace analytique.
Soit $X_{red} = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ la stratification de Samuel relative de $X \to S$.
Pour tout $\alpha \in A$, $C_{X_\alpha \times_S X, X_\alpha} \longrightarrow X_\alpha$ est plat.

Pour tout sous-espace analytique Y de X_α, le morphisme canonique

$$C_{Y \times_S X, Y} \longrightarrow C_{X_\alpha \times_S X, X_\alpha} \times_{X_\alpha} Y$$

est un isomorphisme.
En particulier, pour tout x de X_α, si s désigne son image dans S et X(s) la fibre de X au-dessus de s, le morphisme canonique

$$C_{X(s), x} \longrightarrow C_{X_\alpha \times_S X, X_\alpha} \times_{X_\alpha} x$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : On plonge localement X dans Z lisse sur S. On obtient le résultat en considérant l'installation $\Delta/S = (X, Z, Z\,;\, \mathrm{Id}\, Z)$ et le réel 1.

9.2.4 <u>Proposition</u> : Soit Δ/S une bonne installation. Soit Y un sous-espace analytique de $W \cap X$, lisse au-dessus de S et réduit. Soit y un point de Y. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall\, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\rho^{\mu;d}_{\Delta/S}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en y ;

2) $C^d_{Y \times_S \Delta, d} \longrightarrow Y$ est plat en y ;

3) $C^d_{\Delta, Y} \longrightarrow Y$ est plat en y ;

4) il existe un voisinage U de y dans Y en tout point duquel l'une des conditions 1), 2) ou 3) a lieu ;

5) soit X_0^d la d-strate de Samuel relative de Δ/S contenant y. Il existe un voisinage Ω de y dans Z tel que

$$Y \cap \Omega \subset X_0^d \cap \Omega .$$

<u>Démonstration</u> : L'équivalence de 1) et 2) a été montrée en 8.2.4, celle de 2) et 3) en 9.1.7. On a montré que la condition 2) est ouverte sur Y en 8.1.3. Il en est donc de même des conditions 1) et 3). Finalement, Y étant réduit, si, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{P}^{\mu,d}_{\Delta/S}(Y)$ est O_Y-plat en tout point d'un voisinage connexe $U = \Omega \cap Y$ de y dans Y, $H_{\Delta/S,z}(d)$ est contante sur U. D'où l'équivalence de 4) et 5).

9.2.5 <u>Proposition</u> : Les hypothèses et notations sont celles de 9.2.4. Si l'une des conditions équivalentes 1) à 5) a lieu en $y \in Y$, la suite

$$(0) \longrightarrow C^d_{(Y(s)),y} \longrightarrow C^d_{\Delta(s),y} \longrightarrow C^d_{\Delta, Y \underset{Y}{\times} y} \longrightarrow (0)$$

est exacte (où $\Delta(s) = (s \underset{S}{\times} X,\ s \underset{S}{\times} Z,\ s \underset{S}{\times} W ;\ \mathrm{Id}\, s \times r), Y(s) = s \underset{S}{\times} Y$). De plus, le morphisme canonique :

$$C^d_{\Delta(s),Y(s)} \underset{Y(s)}{\times} y \longrightarrow C^d_{\Delta, Y \underset{Y}{\times} y}$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : D'après 9.1.6, la suite :

$$(0) \longrightarrow C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} \longrightarrow C^d_{Y \underset{S}{\times} \Delta, Y} \longrightarrow C^d_{\Delta,Y} \longrightarrow (0)$$

est exacte. Elle le reste par restriction au-dessus de y.
Or, en se restreignant au besoin de 9.2.4, 5) et 9.2.3, on déduit que :

$$C^d_{\Delta(s),y} \longrightarrow C^d_{Y \underset{S}{\times} \Delta, Y \underset{Y}{\times} y}$$

est un isomorphisme.
De même, Y étant lisse sur S, $C^d_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y} = C^d_{Y \underset{S}{\times} (Y),y}$ est un fibré vectoriel localement trivial, en particulier, c'est un Y-cône plat en y.
Les résultats précédents montrent alors que :

$$C^{d}_{Y(s),y} \longrightarrow C^{d}_{(Y \underset{S}{\times} Y),Y \underset{Y}{\times} y}$$

est un isomorphisme.

Ceci fournit la suite exacte annoncée.

Considérons maintenant la s-installation $\Delta(s)$. Y étant lisse sur S, Y(s) est lisse au-dessus de s (i.e. est une variété analytique lisse). La d-stratification de Samuel relative de Δ/S induit la d-stratification de Samuel de $\Delta(s)$. La condition 5) de 9.2.4 est donc satisfaite pour $\Delta(s)$ et Y(s). Nous venons de montrer que la suite :

$$(0) \longrightarrow C^{d}_{(Y(s)),y} \longrightarrow C^{d}_{\Delta(s),y} \longrightarrow C^{d}_{\Delta(s),Y(s) \underset{Y(s)}{\times} y} \longrightarrow (0)$$

est exacte. Le morphisme canonique :

$$C^{d}_{\Delta(s),Y(s) \underset{Y(s)}{\times} y} \longrightarrow C^{d}_{\Delta,Y \underset{Y}{\times} y}$$

est donc un isomorphisme.

9.2.6 <u>Corollaire</u> : Soit $X \to S$ un morphisme d'espace analytique. Soit Y un sous-espace analytique de X lisse au-dessus de S et réduit. Soit y un point de Y. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall\, \mu \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^{\mu}_{X/S}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en y ;

2) $C_{Y \underset{S}{\times} X,Y} \longrightarrow Y$ est plat en y ;

3) $C_{X,Y} \longrightarrow Y$ est plat en y ;

4) il existe un voisinage U de y dans Y en tout point duquel l'une des conditions 1), 2) ou 3) est satisifaite ;

5) soit X_o la strate de Samuel relative de X/S contenant y. Il existe un voisnage Ω de y dans X tel que :

$$Y \cap \Omega \subset X_o \cap \Omega \quad .$$

En un point où l'une de ces conditions est satisfaite, la suite :

$$(0) \longrightarrow C_{Y(s),y} \longrightarrow C_{X(s),y} \longrightarrow C_{X,Y} \underset{Y}{\times} y \longrightarrow (0)$$

est exacte et le morphisme canonique :

$$C_{X(s),Y(s)} \underset{Y(s)}{\times} y \longrightarrow C_{X,Y} \underset{Y}{\times} y$$

est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u> : On utilise la même méthode qu'en 9.2.3.

9.2.7 Le lecteur est invité à comparer ces résultats avec ceux du § 2 de l'Appendice.

***

§ 10. d-PLATITUDE NORMALE

10.1 <u>Définition</u> : Soient $\underline{\Delta} = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique de $X \cap W$, x un point de Y et $d \in [0, \infty]$. Nous dirons que $\underline{\Delta}$ est d-normalement plate le long de Y en x si

1) Y est lisse en x ;
2) le morphisme canonique $C_{W,Y} \to Y$ est plat en x ;
3) les morphismes canoniques $C^{\delta}_{\underline{\Delta},Y} \longrightarrow Y$ sont plats en x pour tout $\delta \in [0, d]$.

10.2 <u>Remarque</u> : Si Y est lisse en x, on peut interpréter la condition 2) comme suit :

2') pour tout $\delta \in [0, \infty]$, l'installation ambiante $\underline{\Delta} = (Z, Z, W, r)$ est δ-normalement plate le long de Y en x (ou encore elle est ∞-normalement plate).

En effet, 2.1.5 nous fournit, pour tout $\delta \in [0, \infty]$ un isomorphisme

$$C^{\delta}_{\underline{\Delta},Y} \xrightarrow{\sim} C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y} \underset{Y}{\times} \left[C^{\delta}_{\underline{\Delta},W} \underset{W}{\times} Y \right]$$

et nous savons, grâce à 2.1.7, que la platitude de $C^{\delta}_{\underline{\Delta}|W,Y}$ pour tout $\delta \in [0, \infty]$ est équivalente à celle de $C^{1}_{\underline{\Delta}|W,Y} = C_{W,Y}$. D'autre part, puisque r est lisse, les $C^{\delta}_{\underline{\Delta},W} \underset{W}{\times} Y$ sont tous lisses au-dessus de Y (appliquer encore 2.1.7) et l'argument de 9.1.7 nous montre alors que la platitude de $C_{W,Y}$ est équivalente à la platitude de $C^{\delta}_{\underline{\Delta},Y}$ pour tout $\delta \in [0, \infty]$.

10.3 <u>Théorème</u> : Soient $\underline{\Delta} = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique de $X \cap W$, x un point de Y et $d \in [0, \infty]$. Si Y satisfait en x les conditions 1) et 2) de 10.1, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\underline{\Delta}$ est d-normalement plate le long de Y en x. (Ou : Y satisfait 3) de 10.1) ;

2) pour tout $\delta \in [0,d]$ et tout $\mu \in \mathbb{R}^+$, les faisceaux de jets $\mathcal{P}^{\mu,\delta}_{\underline{\Delta}}(Y)$ sont $\mathcal{O}_Y$-plats en x (cf. 1.32) ;

3) pour tout $\delta \in [0,d]$, la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}^{\delta}_{\underline{\Delta}}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plate en x ;

4) on a l'inclusion de germes

$$(Y \cap U)_x \subset \bigcap_{\delta \in [0,d]} (X_{o,\delta})_x$$

où $X_{o,\delta}$ désigne la δ-strate de Samuel de Δ contenant x (cf. 8.2.6);

5) pour tout $\delta \in [0,d]$, la suite

$$(0) \longrightarrow C^{\delta}_{Y,x} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,x} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,Y \times_Y \{x\}} \longrightarrow (0)$$

est exacte (cf. § 9) ;

6) pour tout $\delta \in [0,d]$, il existe une δ-base standard $(f_1,\ldots,f_m)$ de $\underline{\Delta}$ en x, au sens de 7.1.1 telle que, pour tout i $(1 \leq i \leq m)$,

$$\nu_Y(f_i,\underline{\Delta},\delta) = \nu_x(f_i,\underline{\Delta},\delta) \ .$$

(La δ-base standard peut dépendre de δ ; sans abus d'écriture, on devrait noter : $(f_1^{(\delta)},\ldots,f_{m(\delta)}^{(\delta)})$);

7) il existe un voisinage ouvert V de x dans Y en tout point duquel $\underline{\Delta}$ est d-normalement plate le long de Y.

<u>Démonstration</u> : L'équivalence de 1), 2) et 3) résulte immédiatement de 9.2.4, au vu de 1.40. L'équivalence de 2) et 4) est exactement la définition des δ-strates de Samuel de $\underline{\Delta}$ (8.2.6) puisque $H_{\underline{\Delta},x}(\mu,\delta) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}^{\mu,\delta}_{\underline{\Delta}}(Y)(x)$, jointe au critère numérique de platitude 8.1.4, qu'il est licite d'appliquer puisque Y étant lisse en x le restera dans un voisinage de x, où il sera donc en particulier réduit. D'autre part, la proposition 9.2.5 nous dit que l'une quelconque des

conditions 1) à 3) entraîne 5). Nous allons maintenant montrer que 5) est équivalent à 6). Pour cela, nous allons utiliser le fait (10.2) que l'installation ambiante $\underline{\Delta}$ est δ-normalement plate le long de Y en x, ce qui, comme nous venons de le montrer, entraîne que la suite :

$$(0) \longrightarrow C^{\delta}_{Y,x} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\Delta},x} \longrightarrow C^{\delta}_{\underline{\Delta},Y} \underset{Y}{\times} \{x\} \longrightarrow (0)$$

est exacte. Un retour aux définitions (9.1.1) et un lemme élémentaire sur les carrés cartésiens permettent de dire que la suite

$$(0) \longrightarrow C^{\delta}_{Y,x} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,x} \longrightarrow C^{\delta}_{\Delta,Y} \underset{Y}{\times} \{x\} \longrightarrow (0)$$

est exacte si et seulement si, dans le diagramme naturel :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C^{\delta}_{Y,x} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^{\delta}_{\underline{\Delta},x} \arrow[r] & C^{\delta}_{\underline{\Delta},Y} \underset{Y}{\times} \{x\} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C^{\delta}_{Y,x} \arrow[r] & C^{\delta}_{\Delta,x} \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\square"] & C^{\delta}_{\Delta,Y} \underset{Y}{\times} \{x\} \arrow[r] \arrow[u, hook] & (0)
\end{tikzcd}$$

le carré de droite est cartésien. Or, nous pouvons traduire ceci en termes d'algèbres graduées :

$$(*') \qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{in}_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \arrow[d] & \mathrm{in}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \arrow[l] \arrow[d, "i"'] & \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathbb{C} \\
\mathrm{gr}_x(Y);\delta & \mathrm{gr}_x\,\underline{\Delta};\delta \arrow[l] \arrow[d] & (\mathrm{gr}_Y\,\underline{\Delta},\delta)_x \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d] & \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathbb{C} \\
\mathrm{gr}_x(Y);\delta \arrow[u, equal] & \mathrm{gr}_x\,\Delta;\delta \arrow[l] \arrow[d] & (\mathrm{gr}_Y\,\Delta;\delta)_x \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d] & \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \mathbb{C} \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où (Y) est l'installation (Y,Y,Y,id Y). Les morphismes sont de degré 0, et dire que le carré de droite dans (*) est cartésien revient à dire

que le carré correspondant dans (*') est cocartésien (dans la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres), ou encore que l'image de $\underline{\alpha} \circ i$ engendre l'idéal $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$. Or, si nous prenons un élément f dans l'idéal définissant X dans Z en x, l'image de $in_Y(f,\underline{\Delta},\delta) \underset{\mathcal{O}_{Y,x}}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $gr_x \underline{\Delta},\delta$ est non nulle si et seulement si $\nu_Y(f_i,\underline{\Delta},\delta) = \nu_x(f\,;\underline{\Delta},\delta)$. Ainsi, notre suite de morphismes de cônes (en degré δ) est exacte si et seulement si on peut trouver des éléments $(f_1^{(\delta)},\ldots,f_{m(\delta)}^{(\delta)})$ dans l'idéal définissant X dans Z en x, tels que

a) $\nu_Y(f_i^{(\delta)};\delta) = \nu_x(f_i^{(\delta)};\delta)$, $1 \le i \le m(\delta)$;

b) les $in_x(f_i^{(\delta)},\underline{\Delta};\delta)$ $(1 \le i \le m(\delta)$ engendrent $in_x(\Delta,\underline{\Delta};\delta)$.

C'est-à-dire, quitte changer l'ordre des $f_i^{(\delta)}$, une δ-base standard pour Δ en x vérifiant la condition de 6). Nous avons bien montré l'équivalence de 5) et 6).

Nous allons maintenant montrer que 6) entraîne 1). Pour cela, nous allons d'abord montrer :

10.4 <u>Lemme</u> : Etant donné δ satisfaisant les hypothèses de 10.3, 6) et $f_1,\ldots,f_m$ étant des éléments correspondants de l'idéal définissant X dans Z en x, si H désigne l'idéal de $(gr_y \underline{\Delta};\delta)_x$ engendré par les $in_Y(f_i,\underline{\Delta},\delta)_x$, $1 \le i \le m$, et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{Y,x}$, on a l'égalité de germes :

$$\underline{in_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta)_x \cap \mathfrak{m}^n(gr_Y \underline{\Delta},\delta)_x = H\,.\,(\mathfrak{m}^n\,.\,gr_Y \underline{\Delta},\delta)_x}$$

pour tout $n \ge 0$.

<u>Démonstration</u> : Nous raisonnons dans les germes, mais supprimons l'indice x pour alléger l'écriture.

Le terme de droite étant évidemment inclus dans celui de gauche, il suffit de démontrer l'inclusion inverse. Pour cela, nous allons utiliser le fait que $C_{W,Y}$ est plat sur Y, ce qui nous donne, d'après 9.2.5, un isomorphisme

$$\mathrm{gr}_x W \xrightarrow[\sim]{k_1} (\mathrm{gr}_Y W|x) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{gr}_x Y$$

où, pour abréger, on a noté $\mathrm{gr}_Y W|x$ pour $(\mathrm{gr}_Y W)_x \underset{\mathcal{O}_{Y,x}}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,x}/m_{Y,x}$.

D'autre part, puisque $\mathrm{gr}_Y W$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module plat en x, nous avons un isomorphisme

$$(\mathrm{gr}_Y W|x) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{gr}_x Y \xrightarrow[\sim]{k_2} \mathrm{gr}_m \mathrm{gr}_Y W \quad .$$

Supposons maintenant $\delta \geq 1$, choisissons un système de coordonnées locales $z_1,\ldots,z_r$ pour $r^{-1}(x)$ en x (resp. $y_1,\ldots,y_t$ pour Y en x) : d'après le § 2 (2.1.5) ceci nous permet d'identifier $\mathrm{gr}_Y \underline{\Delta};\delta$ à $\mathrm{gr}_Y W[Z_1,\ldots,Z_r]$, et d'autre part, nous pouvons écrire $\mathrm{gr}_x Y = \mathbb{C}[Y_1,\ldots,Y_t]$. Choisissons maintenant $\psi \in \mathrm{in}_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \cap m^n \mathrm{gr}_Y \underline{\Delta},\delta$. Nous pouvons bien sûr supposer ψ homogène, et que n est le plus grand entier tel que $\psi \in m^n . \mathrm{gr}_Y \underline{\Delta},\delta$. Soit $\nu = \deg \psi$. Soit f un élément de l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ définissant X dans Z en x, tel que $\mathrm{in}_Y(f,\underline{\Delta},\delta) = \psi$. En utilisant la platitude normale de W le long de Y en x, nous allons tout d'abord montrer

10.4.1 $$\nu \leq \nu_x(f,\underline{\Delta},\delta) \leq \nu + \frac{n}{\delta} \qquad (\nu = \nu_Y(f,\underline{\Delta},\delta)) \quad .$$

La première inégalité est évidente. Pour montrer la seconde, écrivons ψ dans $\mathrm{gr}_Y \underline{\Delta},\delta = \mathrm{gr}_Y W[\underline{Z}]$

$$\psi = \sum_A \psi_A Z^A \quad \text{où} \quad \psi_A \in \mathrm{gr}_Y^{\delta(\nu-|A|)} W$$

et $\psi_A \in m^n \mathrm{gr}_Y^{\delta(\nu-|A|)} W$ puisque $\psi \in m^n \mathrm{gr}_Y \underline{\Delta},\delta$.
Soit $\bar{\psi}_A = \text{classe } \psi_A \bmod m^{n+1} \mathrm{gr}_Y W$, $\bar{\psi}_A \in \mathrm{gr}_m^n \mathrm{gr}_Y^{\delta(\nu-|A|)} W$ et puisque n a été choisi le plus grand possible, nous sommes sûrs que les $\bar{\psi}_A$ ne sont pas tous nuls. Choisissons A_o tel que $\bar{\psi}_{A_o} \neq 0$.
L'isomorphisme k_2 nous dit qu'il existe des éléments $\bar{a}_i \in \mathrm{gr}_Y^{\delta(\nu-|A_o|)} W|x$ et $\bar{b}_i \in \mathrm{gr}_x^n Y$ tels que

$$\bar{\psi}_{A_o} = k_2(\Sigma\, \bar{a}_i \otimes \bar{b}_i)$$

et l'isomorphisme k_1^{-1} nous donne un élément

$$\tilde{\psi}_{A_o} = k_1^{-1}(\Sigma\, \bar{a}_i \otimes \bar{b}_i) \in gr_x^{n+\delta(\nu-|A_o|)} W .$$

Si nous remontons $\bar{a}_i$ en un élément $a_i \in Q^{\delta(\nu-|A_o|)} . \mathcal{O}_{W,x}$ où Q est l'idéal définissant Y dans Z en x, et $\bar{b}_i$ en $b_i \in F^n . \mathcal{O}_{W,x}$ où $F = (\eta_1, \ldots, \eta_t)\mathcal{O}_{Z,x}$, les $\eta_i \in \mathcal{O}_{Z,x}$ étant tels que leur image dans $\mathcal{O}_{Y,x}$ soit y_i , et si nous considérons $g_{A_o} \in m_{W,x}^{n+\delta(\nu-|A_o|)}$ défini par $g_{A_o} = \sum_i a_i\, b_i$, il est facile de vérifier que $in_x\, g_{A_o} = \tilde{\psi}_{A_o}$

et que $\qquad in_Y\, g_{A_o} = \psi_{A_o}$

enfin $\qquad in_{\mathfrak{m}}(in_Y\, g_{A_o}) = \bar{\psi}_{A_o}$.

Remarquons que nous aurions pu faire la même construction avec un ψ_A quelconque à condition de remplacer n par le plus grand entier i tel que $\psi_A \in \mathfrak{m}^i\, gr_Y^{\delta(\nu-|A|)} W$.
Soit E_1 l'ensemble des multiexposants A tels que $\bar{\psi}_A \neq 0$, E_2 l'ensemble de ceux tels que $\bar{\psi}_A = 0$.
Nous pouvons écrire

$$f = \sum_{A \in E_1} g_A Z^A + \sum_{A \in E_2} g_A Z^A + k$$

où $g_A \in \mathcal{O}_{W,x}$ est obtenu à partir de ψ_A par la construction qui précède. Ainsi, si $A \in E_1$,

$$in_Y\, g_A = \psi_A \in \mathfrak{m}^n\, gr_Y^{\delta(\nu-|A|)} W,$$

si $A \in E_2$,

$$in_Y\, g_A = \psi_A \in \mathfrak{m}^{n+1}\, gr_Y^{\delta(\nu-|A|)} W$$

et $\nu_Y(k,\underline{\Delta},\delta) > \nu$, c'est-à-dire que si nous écrivons $k = \sum_A k_A Z^A$ avec $k_A \in \mathcal{O}_{W,x}$, on a $\nu_Y(k_A) > \delta(\nu - |A|)$. Or, si $A \in E_1$,

$$\nu_x(g_A Z^A, \underline{\Delta}, \delta) = |A| + \frac{\delta(\nu - |A|) + n}{\delta} = \nu + \frac{n}{\delta} .$$

De plus $in_x(g_A Z^A, \underline{\Delta}, \delta)$ ne peut être annulée par aucune combinaison des formes initiales des autres $g_A Z^A$ ou des $k_A Z^A$ (les premiers ont des exposants A différents, et les seconds ne sauraient donner des termes ayant un degré convenable dans $gr_Y W|x)[\underline{Z}]$. Ceci nous montre bien que

$$\mu \leq \nu + \frac{n}{\delta} .$$

10.4.2 Le pas suivant est de montrer que l'on peut choisir f dans l'idéal I définissant X dans Z en x telle que

$$in_Y(f,\underline{\Delta},\delta) = \psi$$

$$\nu_x(f,\underline{\Delta},\delta) = \nu + \frac{n}{\delta} .$$

C'est ici que nous allons utiliser l'hypothèse de 10.3, 6), c'est-à-dire l'existence de $f_1,\ldots,f_m$ dans I telles que

1) $\nu_Y(f_i,\underline{\Delta},\delta) = \nu_x(f_i,\underline{\Delta},\delta) = \nu_i$

2) les $\varphi_i = in_x(f_i,\underline{\Delta},\delta)$ engendrent $in_x(\Delta,\underline{\Delta},\delta)$.

D'après ce que nous avons vu en démontrant l'équivalence de 5) et 6) de 10.3, la condition 1) signifie que dans $gr_x \underline{\Delta},\delta$ identifié à $gr_x W[Z]$, ou encore via l'isomorphisme k_1, à $(gr_Y W|x)[Y,Z]$, les φ_i s'écrivent dans $(gr_Y W|x)[Z]$, c'est-à-dire ne dépendent pas des variables Y.
Soit $\varphi = in_x(f,\underline{\Delta},\delta) \in gr_x W[Z]$. Ecrivons le transporté de φ par k_1 dans $(gr_Y W|x)[Y,Z]$ (noté φ par abus d'écriture) $\varphi = \sum Q_B Y^B$ où $Q_B \in (gr_Y W|x)[Z]$ est δ-homogène de degré $\mu - \frac{|B|}{\delta}$, si $\mu = \nu_x(f,\underline{\Delta},\delta)$ (et $\mu - \frac{|B|}{\delta} \geq \nu_Y(f,\underline{\Delta},\delta) = \nu$).
D'après la remarque que nous venons de faire, puisque φ appartient à l'idéal engendré par les φ_i $(1 \leq i \leq m)$ on peut écrire

$$Q_B = \Sigma \lambda_{B,i} \varphi_i$$

où $\lambda_{B,i} \in (gr_Y W|x)[Z]$ est δ-homogène de degré $\mu - \frac{|B|}{\delta} - \nu_i$.
On peut choisir des éléments $\Lambda_{B,i} \in \mathcal{O}_{Z,x}$ tels que

$$\nu_x(\Lambda_{B,i}, \underline{\Delta}, \delta) = \nu_Y(\Lambda_{B,i}, \underline{\Delta}, \delta) = \mu - \frac{|B|}{\delta} - \nu_i$$

$$in_x(\Lambda_{B,i}, \underline{\Delta}, \delta) = \lambda_{B,i}$$

et considérer l'élément

$$h = \Sigma \Lambda_{B,i} f_i \eta^B \in I .$$

Il est facile de vérifier que $in_x(h, \underline{\Delta}, \delta) = \varphi$, c'est-à-dire que $\nu_x(f - h, \underline{\Delta}, \delta) > \mu$.
D'autre part, si $\mu > \nu + \frac{n}{\delta}$, $in_x(f, \underline{\Delta}, \delta) = in_x(\Sigma k_A Z^A)$ où $\Sigma k_A Z^A$ est celui que nous avons trouvé en 10.4.1 et, puisque $\nu_Y(k_A) > \delta(\nu - |A|)$, en regardant les degrés dans $(gr_Y W|x)[Z]$, on voit que l'on doit avoir

$$\mu - \frac{|B|}{\delta} > \nu$$

c'est-à-dire

$$\nu_Y(h, \underline{\Delta}, \delta) > \nu$$

et donc

$$in_Y(f - h, \underline{\Delta}, \delta) = \psi .$$

Ainsi, en remplaçant f par f - h, on n'a pas changé ψ, mais on a fait strictement augmenter l'ordre en x. Au bout d'un nombre fini de tels pas, on aura bien construit $f \in I$ telle que

$$in_Y(f, \underline{\Delta}, \delta) = \psi$$

$$\nu_x(f, \underline{\Delta}, \delta) = \nu + \frac{n}{\delta} .$$

10.4.3 Choisissons pour représenter ψ l'élément f que nous venons de construire, et recommençons avec $\varphi = in_x(f,\underline{\Delta},\delta)$ la construction de 10.4.2. Nous construisons un élément $h \in I$ tel que $in_x(h,\underline{\Delta},\delta) = \varphi$. Mais maintenant, puisque $\nu_x(f,\underline{\Delta},\delta) = \nu + \frac{n}{\delta}$, dans l'écriture $\varphi = \Sigma\, Q_B\, Y^B$, il y a certainement un terme tel que $\nu + \frac{n}{\delta} - \frac{|B|}{\delta} = \nu$, c'est-à-dire $|B| = n$, d'où l'on tire $\nu_Y(h,\underline{\Delta},\delta) = \nu$, et le fait que $in_Y(h,\underline{\Delta},\delta) = \sum_{|B|=n} y^B\, in_Y \Lambda_{B,i} \cdot in_Y f_i$, d'où :

$$in_Y(h,\underline{\Delta},\delta) \in \mathfrak{m}^n \cdot H \ .$$

D'autre part, si nous faisons pour f et pour h la construction de 10.4.1, nous nous apercevons que, puisque $in_x(f,\underline{\Delta},\delta) = in_x(h,\underline{\Delta},\delta)$, nous devons avoir :

$$in_{\mathfrak{m}}(in_Y(f,\underline{\Delta},\delta)) = in_{\mathfrak{m}}(in_Y(h,\underline{\Delta},\delta)),$$

("$in_{\mathfrak{m}}$" représente la forme initiale pour la filtration $\mathfrak{m}$-adique de $gr_Y \underline{\Delta},\delta$), c'est-à-dire que

$$in_Y(f,\underline{\Delta},\delta) - in_Y(h,\underline{\Delta},\delta) \in \mathfrak{m}^{n+1}\, gr_Y \underline{\Delta},\delta \ .$$

Nous avons ainsi montré que

$$\psi \in \mathfrak{m}^n \cdot H + \mathfrak{m}^{n+1}\, gr_Y \underline{\Delta},\delta \ ,$$

c'est-à-dire

$$in_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \cap \mathfrak{m}^n\, gr_Y \underline{\Delta};\delta \subseteq \mathfrak{m}^n \cdot H + \mathfrak{m}^{n+1}\, gr_Y \underline{\Delta};\delta$$

et, puisque $\mathfrak{m}^n H$ est inclus dans le membre de gauche, nous pouvons répéter le même argument, ce qui montre que

$$in_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \cap \mathfrak{m}^n\, gr_Y \underline{\Delta};\delta \subseteq \mathfrak{m}^n \cdot H + \mathfrak{m}^{n+k}\, gr_Y \underline{\Delta},\delta$$

pour tout $k \geq 1$, et en regardant dans chaque composante homogène de

$gr_Y \underline{\Delta},\delta$, qui est un $\mathcal{O}_{Y,x}$-module de type fini, on voit que cela entraîne bien :

$$in_Y(\Delta,\underline{\Delta},\delta) \cap m^n \, gr_Y \underline{\Delta},\delta \subseteq m^n H$$

et donc l'égalité du lemme.

10.5 Le lemme 10.4 nous montre que dans les hypothèses de 10.3, si la condition 6) est satisfaite, d'une part les $in_Y(f_i , \underline{\Delta},\delta)$ engendrent $in_Y(\Delta,\underline{\Delta};\delta)$ en x (faire $n = 0$ dans 10.4), et d'autre part que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y,x}}((gr_Y \Delta;\delta)_x , \mathcal{O}_{Y,x}/m_{Y,x}) = 0$$

(faire $n = 1$ dans 10.4 et appliquer 5.1.2.3)

et puisque $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y,x}}(?,\mathcal{O}_{Y,x}/m_{Y,x})$ commute aux sommes directes, on en déduit (0.) la platitude de chaque composante homogène de $(gr_Y \Delta;\delta)_x$ donc de $(gr_Y \Delta;\delta)_x$, c'est-à-dire la platitude de $C^{\delta}_{\Delta,Y} \to Y$ en x. Nous avons bien montré que 6) $\Rightarrow$ 1).

10.6 Nous allons enfin montrer que 1) $\Rightarrow$ 7), la réciproque étant évidente.

Pour cela, choisissons d'abord un ouvert V de Y contenant x tel que

i) V soit lisse ;

ii) $C_{X,Y}|V \longrightarrow V$ soit plat.

Ceci est possible, puisque par hypothèse Y est lisse en x, donc le reste dans un voisinage, et grâce au théorème 8.1.3. D'autre part, pour $y \in Y$, notons $d^*_{\Delta,Y,y}$ la suite finie des tropismes critiques de Δ le long de Y en y (définition 3.2.2). D'après le corollaire 3.3.3, quitte à restreindre V, nous pouvons supposer que $d^*_{\Delta,Y,y}$ ne dépend pas de $y \in V$. Choisissons maintenant un ensemble fini de réels $\delta_j \in [0,d]$ $(j \in J)$ tel que :

a) il contienne tous les tropismes critiques de $d^*_{\Delta,Y,x}$ qui sont dans $[0,d]$,

b) il contienne exactement un élément compris entre 0 et le plus petit tropisme critique $d_{\Delta,Y,x}$ (par exemple 0), et exactement un élément compris entre d_i et d_{i+1}, si d_i et d_{i+1} sont deux tropismes critiques qui sont dans $[0,d]$, enfin, exactement un élément compris entre d_k et d, si d_k est le plus grand tropisme critique qui soit dans $[0,d]$ (par exemple d).

Si Δ est d-normalement plate le long de Y en x, tous les $C^{\delta_j}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ sont plats en x ($j \in J$) ($0 \leq \delta_j \leq d$ d'après le choix des δ_j) et d'après le théorème 8.1.3, il existe un voisinage U_j ($j \in J$) de x dans V tel que $C^{\delta_j}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ soit plat en tout $y \in U_j$. Si nous considérons l'ouvert $U = \bigcap_{j \in J} U_j$, tous les $C^{\delta_j}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ seront plats en $y \in U$, mais puisque les tropismes critiques de Δ le long de Y sont constants sur U, pour tout $\delta \in [0,d]$, $C^{\delta}_{\Delta,Y,y}$ devra être isomorphe à un de $C^{\delta_j}_{\Delta,Y,y}$, d'après notre choix des δ_j, donc sera aussi plat. Nous avons bien montré que Δ restait normalement plate le long de Y en tout point $y \in U$. Ceci achève la démonstration de 10.3.

10.7 <u>Remarque</u> : Nous venons de montrer aussi que dans 10.3, on pouvait remplacer la condition 4) par

4') il existe un voisinage ouvert U de x dans $X \cap W$ tel que

$$Y \cap U \subset \bigcap_{\delta \in [0,d]} X_{o,\delta} \quad .$$

En fait, l'intersection de droite est localement finie.

10.8 <u>Corollaire</u> (Théorème de d-platitude normale générique) : Soient $\Delta = (X,Z,W,r)$ une bonne installation, Y un sous-espace analytique réduit de $X \cap W$ et $d \in [0,\infty]$. L'ensemble des points de Y où Δ est d-normalement

plate le long de Y est un ouvert analytique partout dense de Y.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, Y étant réduit, l'ensemble des points où Y est lisse est un ouvert analytique partout dense U_0 de Y. D'après 8.1.3, l'ensemble des points où $C_{W,Y} \longrightarrow Y$ est plat est un ouvert analytique partout dense U_2 de Y. D'autre part, les résultats du § 3 sur lesquels nous nous sommes appuyés en 10.6 pour montrer que l'intersection des strates de Samuel $X_{o,\delta}$ était en fait localement finie étaient indépendants de toute hypothèse sur la lissité de Y ou la platitude de $C_{W,Y} \longrightarrow Y$. Or, pour tout $\delta \in [0,\infty]$, le théorème 8.3 nous dit que l'ensemble des points où $C^{\delta}_{\Delta;Y} \longrightarrow Y$ est plat est un ouvert analytique partout dense de Y. La démonstration de 10.6 nous dit que l'intersection des U_δ est en fait localement finie sur Y. $U_3 = \bigcap_{\delta\in[0,d]} U_\delta$ est donc encore un ouvert analytique partout dense de Y. Ainsi, Δ sera d-normalement plate sur l'ouvert analytique partout dense de Y, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

10.9 <u>Définition</u> : Soient X un espace analytique complexe, et Y un sous-espace analytique de X. On dira que X est normalement plat le long de Y en $x \in Y$ si l'installation $\Delta = (X, X, X, \mathrm{id}\, X)$ est d-normalement plate le long de Y en x pour un (et donc pour tout) d (cf. 10.2). Ceci équivaut à :

1) Y est lisse en x ;

2) $C_{X,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x.

10.10 <u>Remarque</u> : Nous obtenons comme cas particulier de 10.8, le "théorème de platitude générique" pour X le long de Y (supposé réduit).

***

§ 11. LA SEMI-CONTINUITE DU 1er TROPISME CRITIQUE

11.1.1 Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation. Considérons X comme un espace analytique relatif au-dessus de W par le morphisme $r|X : X \longrightarrow W$. Au § 8, nous avons construit une partition localement finie de X en sous-espaces analytiques, $X = \bigcup_{\alpha \in A'} X_\alpha$ ayant les propriétés suivantes :

1') $\forall\, \alpha \in A'$, il existe une application $H_\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que $x \in X_\alpha$ si et seulement si $H_{X/W, x} = H_{X \cap r^{-1}(x), x} = H_\alpha$;

2') $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-espaces analytiques fermés de X.

On en déduit, en considérant les traces de ces strates sur W, une partition localement finie de $W \cap X$ par des sous-espaces analytiques, $W \cap X = \bigcup_{\alpha \in A} \Delta_\alpha(0)$ (où $A = \{\alpha \in A',\ X_\alpha \cap W \neq \emptyset\}$ et $\Delta_\alpha(0) = X_\alpha \cap W$) ayant les propriétés suivantes :

1) $\forall\, \alpha \in A$, il existe une application $H_\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que $x \in \Delta_\alpha(0)$ si et seulement si $x \in W$ et $H_{X \cap r^{-1}(x), x} = H_\alpha$;

2) $\overline{\Delta_\alpha(0)}$ et $\overline{\Delta_\alpha(0)} - \Delta_\alpha(0)$ sont des sous-espaces analytiques fermés de $W \cap X$.

En effet, on a montré que pour tout $x \in \overline{X}_\alpha$, il existe un voisinage V de x dans X et des espaces analytiques fermés dans V, X^*_α et Y^*_α tels que

$$X_\alpha \cap V = X^*_\alpha - Y^*_\alpha .$$

Cette propriété s'induit bien sur W et entraîne 2).
Les $\Delta_\alpha(0)$ sont les 0-strates de Samuel de Δ.

11.1.2 <u>Proposition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation. Soit $x \in X \cap W$ et soit $\Delta_0(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x. Si $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x, il existe un voisinage Ω de x dans Z tel que, pour tout $y \in \Delta_0(0) \cap \Omega$, $r|X$ soit plat en y.

<u>Démonstration</u> : D'après 5.1.3, $d_{\Delta,\Delta_0(0),x} > 0$. Ceci signifie que l'immersion :

$$C^{d}_{\Delta,\Delta_0(0)} \longrightarrow C_{W,\Delta_0(0)} \times_{\Delta_0(0)} C_{X\cap r^{-1}(\Delta_0(0)),\Delta_0(0)}$$

est un isomorphisme au voisinage de x. Il existe donc Ω_1 , voisinage de x dans Z tel que, si $y \in \Omega_1 \cap \Delta_0(0)$, $d_{\Delta,\Delta(0),y} > 0$.
D'autre part, considérons le morphisme induit par $r : X \cap r^{-1}(\Delta_0(0)) \longrightarrow \Delta_0(0)$, $\Delta_0(0)$ étant lisse sur lui-même et réduit, la consition 5) de 9.2.6 est satisfaite en x. Il existe donc Ω_2 , voisinage de x dans Z, tel que : $C_{X\cap r^{-1}(\Delta_0(0)),\Delta_0(0)} \longrightarrow \Delta_0(0)$ soit plat en $y \in \Omega_2 \cap \Delta_0(0)$. Le morphisme $X \cap r^{-1}(\Delta_0(0)) \longrightarrow \Delta_0(0)$ est donc aussi plat aux mêmes points et, d'après 5.1.3, $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en $y \in \Delta_0(0) \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$.

11.1.3 <u>Proposition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ et soit $\Delta_0(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x. On suppose que $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x.
Soit $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$ (où $(z_1, \ldots, z_t)$ est un système de coordonnées adapté à Δ en x). On pose $\nu^*_x(\Delta, 0) = (\nu_1, \ldots, \nu_m, \infty, \ldots)$.
Alors il existe un voisinage Ω de x dans Z tel qu'en tout point $y \in \Delta_0(0) \cap \Omega$:

1) pour $1 \leq i \leq m$, $\nu_y(f_i \bmod M_{W,y} \cdot \mathcal{O}_{Z,y}) = \nu_i$;

2) soit $\Delta(y) = (X \cap r^{-1}(y), r^{-1}(y), y ; r|r^{-1}(y))$

$$in_y(X \cap r^{-1}(y), r^{-1}(y)) = (\ldots, in_y(f_i \bmod M_{W,y} \cdot \mathcal{O}_{Z,y} ; \underline{\Delta}(y), 1), \ldots) \quad ;$$

3) on peut extraire de $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en y.

<u>Démonstration</u> : Pour simplifier, posons $H = \Delta_0(0)$. On sait (5.1.8) qu'il existe un voisinage Ω_1 de y dans Z tel que si $y \in H \cap \Omega_1$, le mor-

phisme :

$$\mathfrak{Jn}_H(X\cap r^{-1}(H),r^{-1}(H)) \underset{\mathcal{O}_{H,y}}{\otimes} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha_y} in_y(X\cap r^{-1}(y),r^{-1}(y))$$

est un isomorphisme. En effet, $C_{X\cap r^{-1}(H),H} \longrightarrow H$ plat en x, l'est dans un voisinage.

De plus, désignant par $\mathcal{Q}$ l'$\mathfrak{J}$déal de $\mathcal{O}_W$ définissant H dans W et Q son germe en x, d'après 7.3.2 :

$1\leq i\leq m$, $\qquad \nu_x(f_i \bmod M_{W,x}\cdot\mathcal{O}_{Z,x}) = \nu_Y(f_i \bmod Q\cdot\mathcal{O}_{Z,x}) = \nu_i$

et

$$\alpha_x(in_Y f_i \bmod Q\cdot\mathcal{O}_{Z,x}\otimes 1) = in_x(f_i \bmod M_{W,x}\cdot\mathcal{O}_{Z,x})$$

f_i , germe de section en x de $\mathcal{J}$, l'$\mathfrak{J}$déal de $\mathcal{O}_Z$ définissant X, se prolonge en une section globale de $\mathcal{J}$ sur un voisinage de x dans Z et puisque : $f_i \bmod Q\cdot\mathcal{O}_{Z,x}\in(z_1,\dots,z_t)^{\nu_i}\cdot\mathcal{O}_{Y,x}\{z_1,\dots,z_t\}$, l'analogue en y reste vrai dans un voisinage de x sur H. Soit f_i' l'image de f_i dans $\mathcal{O}_{r^{-1}(H)}$ et soit $\mathfrak{Jn}_H f_i'$ la classe de f_i' modulo la puissance (ν_i+1)-ième de l'$\mathfrak{J}$déal définissant H dans $r^{-1}(H)$. C'est une section globale de $gr_H r^{-1}(H)$ sur un ouvert U de $H\times\mathbb{C}^t$. En fait, $\mathfrak{Jn}_H f_i'\in\Gamma(V,\mathcal{O}_H)[Z_1,\dots,Z_t]$ et est homogène de degré ν_i . Cette section ayant une fibre non nulle au-dessus de x, il en est de même dans un voisinage de x sur H. Son image par α_y est donc aussi non nulle, ce qui signifie que $\nu_y(f_i \bmod M_{W,y}\cdot\mathcal{O}_{Z,y}) = \nu_i$, sur ce même voisinage.

D'autre part, en appliquant le lemme de Nakayama, à chaque composante homogène de $\mathfrak{Jn}_H(X\cap r^{-1}(H),r^{-1}(H))$, on montre que $(\dots,\mathfrak{Jn}_H f_i',\dots)$ engendre $\mathfrak{Jn}_H(X\cap r^{-1}(H),r^{-1}(H))$ si on se restreint à un voisinage convenable de x dans H. Comme on vient de voir que

$\alpha_y(\mathfrak{Jn}_H f_i' \underset{\mathcal{O}_{H,y}}{\otimes} 1) = in_y(f_i \bmod M_{W,y}\cdot\mathcal{O}_{Z,y})$, on obtient 2).

Enfin, on peut extraire du système $(\dots,in_y f_i \bmod M_{W,y}\cdot\mathcal{O}_{Z,y}\dots)$ un système minimal de générateurs de $in_y(X\cap r^{-1}(y),r^{-1}(y))$. Comme 0 n'est pas

tropisme critique en y, $C_{\Delta,y}(1) = C_{W,y} \times C_{X\cap r^{-1}(y),y}$. Mais pour ε assez petit,

$$in_y(f_i\,;\,\underline{\Delta},\varepsilon) = in_y(f_i \bmod M_{W,y}\cdot\mathcal{O}_{Z,y})\ .$$

Le système extrait des $(f_1,\dots,f_m)$ est donc une ε-base standard de Δ en y.

11.1.4 <u>Corollaire</u> : Hypothèses et notations de 11.1.3.
Il existe un voisinage Ω de x dans Z tel qu'en tout point $y\in\Delta_0(0)\cap\Omega$, $\nu^*_y(\Delta,0)\geq\nu^*_x(\Delta,0)$ pour l'ordre lexicographique.

<u>Démonstration</u> : $\nu^*_y(\Delta,0)$ est une suite extraite de $\nu^*_x(\Delta,0)$.

11.1.5 <u>Remarque</u> : L'inégalité de 11.1.4 peut être stricte. Mais même si $\nu^*_y(\Delta,0)=\nu^*_x(\Delta,0)$, la 0-base-standard $(f_1,\dots,f_m)$ peut ne plus être normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,y}\,;\,z_1,\dots,z_t)$.

Z Dans la section suivante, nous allons préciser quelques propriétés de l'ordre d'une section globale d'une $\mathbb{C}$-Algèbre analytique.

11.2.1 <u>Proposition</u> : Soient W un espace analytique complexe, $\mathcal{O}_W$ son faisceau structural. Soit $W=\bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha$ la stratification de Samuel de W. Soit f une section globale de $\mathcal{O}_W$.
Soit f_x le germe de f en $x\in W$ et $\nu_x(f)=\sup\{\nu : f_x\in M^\nu_{W,x}\}$ $(\nu_x(f)\in\mathbb{N}\cup\infty)$.
Soient $\mathrm{Sing}^\nu f=\{y\in W,\ \nu_y(f)\geq\nu\}$, $\mathrm{Sing}^\nu_+ f=\{y\in W,\ \nu_y(f)>\nu\}$.
Pour tout $\alpha\in A$, $\mathrm{Sing}^\nu f\cap W_\alpha$ et $\mathrm{Sing}^\nu_+ f\cap W_\alpha$ sont des sous-espaces analytiques fermés de W_α.
Pour tout $x\in W$, il existe un voisinage U de x sur la strate de Samuel de W contenant x tel que, si $y\in U$, $\nu_y(f)\leq\nu_x(f)$.

<u>Démonstration</u> : Soit X le sous-espace analytique de W défini par l'$\mathfrak{J}$déal engendré par f. On remarque d'abord que :

$$\nu_x(f) - 1 = \sup\{\nu : \text{pour tout } \mu = 0,\dots,\nu : H_{X,x}(\mu) = H_{W,x}(\mu)\} .$$

En effet, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow in_x(X,W) \longrightarrow gr_x W \longrightarrow gr_x X \longrightarrow 0$$

$in_x^{\nu_x(f)}(X,W) \neq 0$ puisque $in_x f_x$ y appartient. Pour $\mu < \nu_x(f)$, $in_x^{\mu}(X,W) = 0$ puisque tous les éléments de l'idéal engendré par f_x dans $\mathcal{O}_{W,x}$ ont un ordre supérieur ou égal à $\nu_x(f)$.
Par suite

$$\mathrm{Sing}^{\nu} f = \{y \in W \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq \nu-1 \ , \ H_{X,y}(\mu) = H_{W,y}(\mu)\}$$

$$\mathrm{Sing}_+^{\nu} f = \{y \in W \quad \text{pour } 0 \leq \mu \leq \nu \ , \ H_{X,y}(\mu) = H_{W,y}(\mu)\} .$$

Mais on a toujours $H_{X,y} \leq H_{W,y}$. D'où

$$\mathrm{Sing}^{\nu} f = \{y \in W : \text{pour } 0 \leq \mu \leq \nu-1 \ , \ H_{X,y}(\mu) \geq H_{W,y}(\mu)\}$$

$$\mathrm{Sing}_+^{\nu} f = \{y \in W : \text{pour } 0 \leq \mu \leq \nu \ , \ H_{X,y}(\mu) \geq H_{W,y}(\mu)\} .$$

Or $H_{X,y}(\mu) = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{P}_X^{\mu}(y)$.
Donc

$$\mathrm{Sing}^{\nu} f \cap W_\alpha = \{y \in W_\alpha : \text{pour } 0 \leq \mu \leq \nu-1 \quad \mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{P}_X^{\mu}(W_\alpha)(y) \geq H_{W,y}(\mu)\}.$$

$\mathcal{P}_X^{\mu}(W_\alpha)$ étant un $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Module cohérent et $H_{W,y}$ étant constant sur W_α, on obtient le résultat.

11.2.2 <u>Proposition</u> : Soient W un espace analytique complexe, $\mathcal{O}_W$ son faisceau structural, f une section globale de $\mathcal{O}_W$.
Soit Y un sous-espace analytique fermé réduit de W, $\mathcal{P}$ l'$\mathfrak{J}$déal cohérent qui le définit.

Soient $\mathcal{P}_x$ le germe de $\mathcal{P}$ en x, f_x celui de f. On pose :

$$\nu_Y^x(f) = \sup\{\nu : f_x \in \mathcal{P}_x^\nu\} .$$

Si $\nu_Y^x(f) \geq 1$ et si W est normalement plat le long de Y en x, il existe un voisinage U de x dans W tel que, si $y \in Y \cap U$,

$$\nu_Y^x(f) = \nu_Y^y(f) .$$

De plus, il existe une base $\mathcal{B}$ de voisinages de x dans W inclus dans U telle que, pour tout $V \in \mathcal{B}$,

$$\nu_Y^x(f) = \inf_{y \in Y \cap V} \nu_y(f) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit X le sous-espace analytique de W défini par l'$\mathfrak{J}$déal engendré par f. Puisque $f_x \in \mathcal{P}_x$, il existe un voisinage U de x dans W tel que $Y \cap U \subset X \cap U$. Soit $\nu = \nu_Y^x(f)$. On a alors $f_x \in \mathcal{P}_x^\nu$. En restreignant encore au besoin U, on peut supposer que :

$$f|U \in \Gamma(U,\mathcal{P})^\nu .$$

Soit $\mathfrak{J}n_Y f$ la section globale de $gr_Y^\nu W$ qu'on en déduit. Le germe en $y \in Y \cap U$ de cette section est la classe de $f_y \bmod \mathcal{P}_y^{\nu+1}$. Il est donc nul en x et nul en $y \in Y \cap U$ différent de x, si et seulement si $\nu_Y^y(f) > \nu$. On sait d'autre part que le support du sous $\mathcal{O}_{Y|U}$-Module de $gr_Y^\nu W$ engendré par $\mathfrak{J}n_Y f$ est un fermé analytique F de $Y \cap U$ contenant x. Il s'agit de montrer que $F = Y \cap U$. Sinon, Y étant lisse en x est irréductible et F est nulle part dense [Ab] 44.32.6). Soit $\Omega = Y \cap U - F$. C'est un ouvert analytique partout dense.
Soit C le sous $Y \cap U$-cône de $C_{W,Y} \underset{Y}{\times} Y \cap U$ défini par l'$\mathfrak{J}$déal de $gr_Y W$ engendré par $\mathfrak{J}n_Y f$. Si $y \in \Omega$, les fibres respectives $C(y)$ et $C_{W,Y}(y)$ de C et $C_{W,Y}$ au-dessus de y coïncident. Considérons les fonctions de Samuel relatives de ces deux $Y \cap U$-espaces. Y étant lisse sur lui-même et $C_{W,Y} \longrightarrow Y$ étant plat en x, donc sur un voisinage de x, qu'on peut

supposer, quitte à restreindre U, égal à $Y \cap U$, on a pour tout $y \in \Omega$:

$$H_{C_{W,Y}(y),y} = H_{C(y),y} = H_{C_{W,Y}(x),x} \quad .$$

Mais on sait aussi que la fonction de Samuel relative est semi-continue supérieurement. Ω étant partout dense dans $Y \cap U$, pour tout $z \in Y \cap U$

$$H_{C(z),z} \geq H_{C_{W,Y}(x),x} = H_{C_{W,Y}(z),z} \quad .$$

Mais puisque $C(z)$ est un sous-cône de $C_{W,Y}(z)$, ceci signifie qu'on a en fait l'égalité. Donc C est $Y \cap U$-plat et a mêmes fibres au-dessus de $Y \cap U$ que $C_{W,Y}$. Donc $\mathfrak{In}_Y f \equiv 0$ et $F = \emptyset$. C'est impossible puisque $x \in F$.

Passons à la deuxième partie ; l'assertion étant locale, on peut, pour simplifier, supposer que $U = W$. Il existe alors un ouvert analytique partout dense de Y sur lequel W et X sont normalement plats. Soit Ω cet ouvert. Pour tout $y \in \Omega$, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & T_{Y,y} \arrow[r] & C_{W,y} \arrow[r] & C_{W,Y} \times_Y y \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & T_{Y,y} \arrow[r] \arrow[u, equal] & C_{X,y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & C_{X,Y} \times_Y y \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

les suites de cônes sont exactes et I est cartésien. Dans le diagramme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \mathfrak{In}_Y(X,W) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{gr}_Y W \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \mathrm{gr}_Y X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] & (0) \\
(0) \arrow[r] & \mathrm{in}_y(X,W) \arrow[r] & \mathrm{gr}_y W \arrow[r] & \mathrm{gr}_y W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

II est donc cocartésien, ce qui signifie que l'idéal engendré dans $\mathrm{gr}_y W$ par l'image de $\mathfrak{In}_Y(X,W) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y,y}$ est $\mathrm{in}_y(X,W)$. Autrement dit, il

existe $(f_1,\dots,f_m) \in (f_y)\,\mathcal{O}_{W,y}$ tels que pour $1 \le i \le m$, $\nu_Y^y(f_i) = \nu_y(f_i)$ et que $\mathrm{in}_y(X,W) = (\mathrm{in}_y f_1,\dots,\mathrm{in}_y f_m)$. On peut supposer que de plus ce système est un système minimal de générateurs. Alors parmi les f_i, il en existe un et seul tel que

$$\nu_y(f_i) = \nu_y(f) .$$

En effet, il en existe au moins un, puisque, pour tout i, $\nu_y(f_i) \ge \nu_y(f)$ et que $\mathrm{in}_y f$ s'exprime en fonction des $\mathrm{in}_y(f_i)$. Supposons que ce soit f_1. On a $f_1 = h\,f$ où $h \in \mathcal{O}_{W,y}$ et nécessairement $\nu_y(h) = 0$. h est donc une unité. Les autres f_i possédant la même propriété seraient donc redondants. On a aussi, puisque h est une unité,

$$\nu_Y^y(f_1) = \nu_Y^y(f) .$$

On obtient donc que $\nu_Y^y(f) = \nu_y(f)$.
Remarquons d'autre part que :

$$H_{X,y}(\mu) = H_{W,y}(\mu) \quad \text{si } \mu < \nu_y(f)$$

$$H_{X,y}(\mu) = H_{W,y}(\mu)-1 \quad \text{si } \mu = \nu_y(f) .$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de voisinages de x dans Y telle que, pour tout voisinage V de x dans $\mathcal{B}$, $V \cap \Omega$ soit connexe [Ab] 44.32.6). Choisissons $U \in \mathcal{B}$. Sur $V \cap \Omega$, les fonctions de Samuel de X et de W sont constantes, $\nu_y(f)$ est aussi constant. Posons :

$$\mu = \nu_y(f) \qquad y \in U \cap \Omega .$$

- On a pour tout $V \in \mathcal{B}$, $V \subset U$, $\mu = \inf_{y \in V} \nu_y(f)$.

En effet $U \cap \Omega$ est partout dense dans $Y \cap U$ ([Ab] 44.32.6)). Il existe donc $z \in V$ tel que $\mu = \nu_z(f)$. Soit maintenant y quelconque dans V, Y étant contenu dans une strate de Samuel de W, d'après 11.2.1, il existe un voisinage V_1 de y dans Y inclus dans V tel que, si $y_1 \in V_1$,

$\nu_{y_1}(f_1) \leq \nu_y(f)$. $\Omega \cap V'$ étant partout dense dans $Y \cap V$, V_1 rencontre $\Omega \cap V$. On a donc pour un y_1, $\nu_{y_1}(f) = \mu$ et $\nu_y(f) \geq \mu$.

- Il reste à voir maintenant que $\nu_Y^x(f) = \mu$.

Or il existe un voisinage de x sur Y tel que si y appartient à ce voisinage, $\nu_Y^x(f) = \nu_Y^y(f)$. Ω étant partout dense dans Y, ce voisinage contient des $y \in \Omega \cap U$. Pour un tel y, $\nu_Y^y(f) = \nu_y(f) = \mu$.

11.2.3 <u>Exemples</u> : Nous allons maintenant donner quelques exemples montrant l'importance de l'hypothèse concernant les strates de Samuel dans 11.2.1 et 11.2.2. Soit W l'espace analytique défini dans $\mathbb{C}^3$ par $y^2 - x^2 t$. Soit f la fonction induite sur W par t. L'ordre de f à l'origine est 1, en un point ξ quelconque de l'axe des x différent de l'origine, 2. On n'a pas semi-continuité de $\nu_\xi(f)$ quand ξ parcourt l'axe des x.

Soit Y l'axe des x. $\nu_Y^{\underline{0}}(f) = 1$. Si $\xi \in Y$, $\xi \in \underline{0}$, $\nu_Y^{\xi}(f) = 2$. L'ordre le long de Y peut donc croître strictement si W n'est pas normalement plat le long de Y.

Pour finir, nous allons, comme promis, illustrer la proposition 3.3.3. Soit $\underline{\Delta} = (W \times \mathbb{C}, W \times \mathbb{C}, W ; p_1)$. Soit z la coordonnée sur $\mathbb{C}$ et soit X le sous-espace de $W \times \mathbb{C}$ défini par $z - f$. On considère $\Delta = (X, W \times \mathbb{C}, W ; p_1)$. Les tropismes critiques de Δ le long de l'axe des x à l'origine sont 1 et 2, le germe en $\underline{0}$ de $C^d_{\Delta,Y}$ correspond à l'algèbre analytique :

$$d \in [0,1[\qquad \mathbb{C}\{x\}[Y,T]/(x^2 T)$$

$$d = 1 \qquad \left(\mathbb{C}\{x\}[Y,T]/(x^2 T)\right)[Z]/Z - T = \mathbb{C}\{x\}[Y,T,Z]/(x^2 T, Z - T)$$

$$d \in]1,2[\qquad \left(\mathbb{C}\{x\}[Y,T]/(x^2 T)\right)[Z]/(T, x^2 Z) = \mathbb{C}\{x\}[Y,Z]/(x^2 Z)$$

$$d = 2 \qquad \left(\mathbb{C}\{x\}[Y,T]/(x^2 T)\right)[Z]/(T, x^2 Z - Y^2) = \mathbb{C}\{x\}[Y,Z]/(x^2 Z - Y^2)$$

$$d \in]2,\infty] \qquad \left(\mathbb{C}\{x\}[Y,T]/(x^2 T)\right)[Z]/(T, Y^2) = \mathbb{C}\{x\}[Y,Z]/(Y^2) \ .$$

En un point $\xi \in Y$ différent de 0, Δ a un seul tropisme critique 2.

Nous allons maintenant étudier les relations entre la d-transversalité et la d-platitude normale.

11.3.1 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $d \in]0, d_{\Delta,x}]$.
Soit $\Delta_0(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x, $\Delta_0(\delta)$ la δ-strate de Samuel de Δ contenant x, W_0 la strate de Samuel de W contenant x.
Pour un sous-espace analytique fermé, réduit Y de $\Delta_0(0)$ contenant x, les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $Y \subset \Delta_0(d)$ au voisinage de x ;

2) $Y \subset W_0$ au voisinage de x et Δ est d-transverse en tout point y de Y dans un voisinage de x ;

3) $Y \subset W_0$ au voisinage de x et $d_{\Delta,y} \geq d$ en tout point y de Y dans un voisinage de x ;

4) il existe un voisinage U de x dans Z, tel que, pour tout $\delta \in]0, d]$,

$$Y \cap U \subset \Delta_0(\delta) \cap U .$$

<u>Démonstration</u> : L'équivalence entre 2) et 3) est rappelée pour mémoire et a été vue en 5.1.1.

■ Supposons maintenant qu'il existe un voisinage U de x dans Z tel que $Y \cap U \subset \Delta_0(d) \cap U$. Pour tout $y \in Y \cap U$, on a

$$H_{\Delta,y}(d) = H_{\Delta,x}(d) .$$

Puisque $d \in]0, d_{\Delta,x}]$, Δ est d-transverse en x (5.1.1). Toujours d'après 5.1.1, 12), on a :

$$H_{\Delta,x}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) * G_{X \cap r^{-1}(x),x} .$$

On sait, 4.2.4, qu'on a en général :

$$H_{\Delta,y}(d) \leq H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X\cap r^{-1}(y),y} .$$

D'autre part, Y étant un sous-espace de $\Delta_0(0)$, pour $y \in Y \cap U$, on a

$$H_{X\cap r^{-1}(y),y} = H_{X\cap r^{-1}(x),x} \text{ et aussi } G_{X\cap r^{-1}(y),y} = G_{X\cap r^{-1}(x),x} .$$

Enfin, quitte à restreindre U, on peut supposer que, si $y \in Y \cap U$,

$$H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) \leq H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) .$$

De cette suite d'égalités et d'inégalités, il vient que :

$$H_{\Delta,y}(d) \leq H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X\cap r^{-1}(y),y} = H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x} \cdots$$

$$\leq H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x} = H_{\Delta,x}(d) = H_{\Delta,y}(d) .$$

Toutes les inégalités ci-dessus sont donc en fait des égalités. D'après 5.1.1,12), Δ est donc transverse en $y \in Y \cap U$. De plus

$$H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x} = H_{\underline{\Delta}|W,x}(d) * G_{X\cap r^{-1}(x),x} .$$

Par récurrence sur μ, on en déduit que $H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(d)$, ce qui entraîne que $H_{W,y} = H_{W,x}$.

■ Réciproquement, si 2) est satisfaite en $y \in Y \cap U$, on a

$$H_{\Delta,y}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X\cap r^{-1}(y),y}$$

$$H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,x}(d)$$

$$G_{X\cap r^{-1}(y),y} = G_{X\cap r^{-1}(x),x} .$$

D'où :

$$H_{\Delta,y}(d) = H_{\Delta,x}(d) \text{ et } Y \cap U \subset \Delta_0(d) \cap U .$$

■ Montrons maintenant que 1) entraîne 4). On sait qu'il existe un voisinage U de x dans Z tel que $Y \cap U \subset W_0 \cap U$ et $d_{\Delta,y} \geq d$ si $y \in Y \cap U$. Pour tout $\delta \leq d$, on a aussi $d_{\Delta,y} \geq \delta$ si $y \in Y \cap U$. On vient de voir que ceci entraîne que

$$Y \cap U \subset \Delta_0(\delta) \cap U .$$

11.3.2 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $d \in]0, d_{\Delta,x}]$.
Pour une sous-variété lisse Y de $W \cap X$, contenue au voisinage de x dans la strate de Samuel, W_0, de W contenant x, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C^d_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x ;

2) Δ est d-transverse le long de Y en x ;

3) pour tout $\delta \in [0,d]$, $C^\delta_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x ;

4) Δ est d-normalement plate le long de Y en x.

<u>Démonstration</u> : 1) ⇒ 2). Il s'agit de voir que :

$$C^d_{\Delta,Y} \longrightarrow C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}$$

est plat en x. Or $C^d_{\underline{\Delta}|W,Y}$ est l'espace analytique $C_{W,Y}$ et, puisque Y est contenu dans W_0 au voisinage de x, $C_{W,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x. Nous allons alors appliquer le critère de platitude par fibres rappelé en (0.4.2). Il suffit de montrer que :

$$C^d_{\Delta,Y} \underset{Y}{\times} x \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} x$$

est plat en x. Mais d'après 9.2.5 et 9.2.6, les suites :

$$(0) \longrightarrow C^d_{(Y),x} \longrightarrow C^d_{\Delta,x} \longrightarrow C^d_{\Delta,Y} \underset{Y}{\times} x \longrightarrow (0)$$

$$(0) \longrightarrow C_{Y,x} \longrightarrow C_{W,x} \longrightarrow C_{W,Y} \underset{Y}{\times} x \longrightarrow (0)$$

sont exactes, et puisque $d \in]0, d_{\Delta,x}]$, Δ est d-transverse en x et (5.1.1), $C^{d}_{\Delta,x} \longrightarrow C_{W,x}$ est plat en x. On obtient donc la platitude cherchée.

2) $\Rightarrow$ 1) est évident puisque $C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow C_{W,Y}$ est plat en x et que $C_{W,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x.

1) $\Rightarrow$ 3) vient du fait que si Δ est d-transverse le long de Y en x, il est δ-transverse pour $\delta \in]0,d]$. Donc $C^{\delta}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x d'après ce qu'on vient de voir. Il en est de même pour $\delta = 0$, car $C^{o}_{\Delta,Y}$ et $C^{\delta}_{\Delta,Y}$ ont mêmes germes en x si δ est assez petit (cf. 5.1.1 et 3.2.1).

3) $\Leftrightarrow$ 4) est rappelé pour mémoire (voir définition (10.1)).

11.3.3 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $d \in]0, d_{\Delta,x}]$. Soit $\Delta_o(0)$ (resp. $\Delta_o(\delta)$) la 0-(resp. δ-)strate de Samuel de Δ contenant x, soit W_o la strate de Samuel de W contenant x.
Pour une sous-variété lisse Y de $W \cap X$ contenant x, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $C_{W,Y} \longrightarrow Y$ et $C^{d}_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ sont plats en x ;

2) Δ est d-normalement plat le long de Y en x ;

3) $Y \subset W_o$ au voisinage de x et Δ est d-transverse le long de Y en x ;

4) $Y \subset W_o \cap \Delta_o(0)$ au voisinage de x et $d_{\Delta,Y,x} \geq d$;

5) $Y \subset \Delta_o(0) \cap \Delta_o(d)$ au voisinage de x ;

6) il existe un voisinage U de x dans Z tel que, pour tout $\delta \in [0,d]$,

$$Y \cap U \subset \Delta_o(\delta) \cap U \quad ;$$

7) il existe un voisinage U de x dans Z tel que :

$$Y \cap U \subset \Delta_o(0) \cap W_o \cap U$$

et que, si $y \in Y \cap U$, Δ est d-transverse en y ;

8) il existe un voisinage U de x dans Z tel que :

$$Y \cap U \subset \Delta_o(0) \cap W_o \cap U$$

et que, si $y \in Y \cap U$, $d_{\Delta,y} \geq d$;

9) une quelconque des conditions 1) à 8) est satisfaite au voisinage de x sur Y.

<u>Démonstration</u> : C'est essentiellement une récapitulation des résultats précédents. 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) a été montré en 11.3.2.

3) $\Leftrightarrow$ 4) résulte de 2) et 4) du théorème 5.1.1.

1) $\Rightarrow$ 5). En effet, on vient de voir que 1) entraîne que Y est contenu dans $\Delta_o(0)$ au voisinage de x et puisque $C^d_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x, Y est aussi contenu dans $\Delta_o(d)$ au voisinage de x.

5) $\Rightarrow$ 1). D'après 11.3.1, $Y \subset W_o$ au voisinage de x et évidemment $C^d_{\Delta,Y} \longrightarrow Y$ est plat en x.

5) $\Leftrightarrow$ 6) $\Leftrightarrow$ 7) $\Leftrightarrow$ 8). C'est le théorème 11.3.1.

1) $\Leftrightarrow$ 9). Si 1) est satisfait en x, alors d'après 8) dans un voisinage de x $d_{\Delta,y} \geq d$; par conséquent, les conditions 1) à 8) restent équivalentes en y. Or 8) par exemple est une condition ouverte.

11.3.4 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, soit x un point de $W \cap X$, tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x.
Soient $\Delta_o(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x, W_o la strate de Samuel de W contenant x. Soit Y une sous-variété lisse de $W \cap X$, contenue au voisinage de x dans $\Delta_o(0) \cap W_o$. Alors, Δ est $d_{\Delta,Y,x}$-normalement plate le long de Y en x.

<u>Démonstration</u> : On a montré que si $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en x, $d_{\Delta,Y,x} > 0$ (5.1.3). D'autre part, $d_{\Delta,Y,x} \leq d_{\Delta,x}$. (C'est une conséquence immédiate de 7.2.14 et 7.3.4). On peut donc appliquer 11.3.3 avec $d_{\Delta,Y,x}$, en particulier 4) $\Rightarrow$ 2).

11.3.5 <u>Corollaire</u> : Mêmes hypothèses qu'en 11.3.4. Il existe un voisinage U de x dans Z tel que, pour tout voisinage V de x dans Z inclus dans U,

$$d_{\Delta,Y,x} = \inf_{y\in Y\cap V} d_{\Delta,y} .$$

<u>Démonstration</u> : Comme on a déjà remarqué, on peut appliquer 11.3.3 avec $d_{\Delta,Y,x}$, en particulier 4) $\Rightarrow$ 8). On détermine donc un voisinage U de x dans Z tel que, si $y \in Y \cap U$, $d_{\Delta,y} \geq d_{\Delta,Y,x}$.
Pour tout voisinage V de x dans Z inclus dans U, on a donc

$$d_{\Delta,Y,x} \leq \inf_{y\in Y\cap V} d_{\Delta,y} .$$

Soit $d = \inf_{y\in Y\cap V} d_{\Delta,y}$. Alors $0 < d_{\Delta,Y,x} \leq d \leq d_{\Delta,x}$. On peut donc aussi appliquer 11.3.3 avec d, en particulier 8) $\Rightarrow$ 4). Ceci montre que $d_{\Delta,Y,x} \geq d$. On a donc finalement l'égalité.

11.3.6 <u>Corollaire</u> : Mêmes hypothèses qu'en 11.3.4. Δ est d-transverse le long de Y en x si et seulement si il existe un voisinage U de x dans Z tel que Δ soit d-transverse en y pour tout $y \in Y \cap U$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de voir qu'on peut appliquer l'équivalence de 3) et 7) dans 11.3.3. Si Δ est d-transverse le long de Y en x, alors $0 < d \leq d_{\Delta,Y,x} \leq d_{\Delta,x}$. Réciproquement, si Δ est d-transverse en $y \in Y \cap U$, il l'est en x et $0 < d \leq d_{\Delta,x}$.

11.4.1 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x.
Soit $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x, soit $(f) = (f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x, normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. Soit $\nu^*_x(\Delta, 0) = (\nu_1, \ldots, \nu_m, \infty, \ldots)$ et on pose :

$$f_i = \sum_{A\in \mathbf{N}^t} f_{iA} z^A \qquad f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x} \qquad i = 1, \ldots, m .$$

Soit U un voisinage de x dans Z tel que pour $i = 1,\dots,m$ et $A \in \mathbb{N}^t$ tel que $|A| < \nu_i$, f_{iA} se prolonge en une section de $\mathcal{O}_W$ sur $U \cap W$.

■ L'ensemble des $y \in U \cap W$ tels que $\nu_y(f_{iA}) > 0$, pour $1 \leq i \leq m$ et $|A| < \nu_i$ est un sous-ensemble analytique fermé de $W \cap U$ dont on désignera le germe en x par $\mathrm{Sing}^0(f)$.

■ Soient W_0 la strate de Samuel de W contenant x, d un nombre réel strictement positif. L'ensemble des $y \in W_0 \cap U$! tels que $\nu_y(f_{iA}) \geq d(\nu_i - |A|)$ pour $1 \leq i \leq m$, $|A| < \nu_i$ est un sous-ensemble analytique fermé de $W_0 \cap U$ dont on désignera le germe en x par $\mathrm{Sing}^d(f)$. (Il peut être $\emptyset$).
Cette définition a un sens grâce à 11.2.1.

11.4.2 <u>Proposition</u> : Dans la situation de la définition 11.4.1, $\mathrm{Sing}^0(f)$ est le germe en x de la 0-strate de Samuel de Δ contenant x.

<u>Démonstration</u> : Restreignons Δ au-dessus de $\Delta_0(0)$; alors

$$C_{X \cap r^{-1}(\Delta_0(0)), \Delta_0(0)} \longrightarrow \Delta_0(0)$$

étant plat en x, d'après 5.1.8, $d_{\Delta \times_W \Delta_0(0), x} = \infty$.

Or d'après 7.2.13, une 0-base standard normalisée le reste après changement de base et, d'après 7.2.14, elle mesure le 1er tropisme critique. Soit I l'idéal (égal à sa racine) de $\mathcal{O}_{W,x}$ associé au germe de $\Delta_0(0)$ en x, on a donc :

$$\infty = \inf_{i=1,\dots,m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu_x(f_{iA} \bmod I)}{\nu_i - |A|} ,$$

i.e. pour $i = 1,\dots,m$, $|A| < \nu_i$, $f_{iA} \in I$ et $\Delta_0(0) \subset \mathrm{Sing}^0(f)$. Réciproquement, désignons, par abus de langage, par $\mathrm{Sing}^0(f)$ un représentant du germe en x et restreignons Δ au-dessus de $\mathrm{Sing}^0(f)$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, si H est l'idéal de $\mathcal{O}_{W,x}$ associé à $\mathrm{Sing}^0(f)$, on a

$$d_{\underline{\Delta}\times_W \mathrm{Sing}^o(f),x} = \inf_{i=1,\dots,m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu_x(f_{iA} \bmod H)}{\nu_i-|A|} = \infty \quad .$$

Donc, (5.1.8), $C_{X\cap r^{-1}(\mathrm{Sing}^o(f)),\mathrm{Sing}^o(f)} \longrightarrow \mathrm{Sing}^o(f)$ est plat en x et $\mathrm{Sing}^o(f) \subset \underline{\Delta}_o(0)$.

11.4.3 <u>Proposition</u> : Soient $\underline{\Delta} = (X,Z,W\,;\,r)$ une bonne installation , x un point de $W\cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $d \in]0,d_{\underline{\Delta},x}]$ et soit $(f) = (f_1,\dots,f_m)$ une 0-base standard de $\underline{\Delta}$ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}\,;\,z_1,\dots,z_t)$. Si W_o et $\underline{\Delta}_o(0)$ désignent respectivement la strate et la 0-strate de Samuel de W et $\underline{\Delta}$ contenant x, pour une sous-variété lisse Y de $W\cap X$ contenant x, les conditions 1) à 9) de 11.3.3 sont encore équivalentes aux suivantes :

10) $Y \subset W_o \cap \underline{\Delta}_o(0)$ au voisinage de x et

$1\le i\le m$ $$\nu_Y(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) = \nu_x(f_i\,;\,\underline{\Delta},d)$$

$$\mathrm{in}_x(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d) = (\mathrm{in}_x(f_1\,;\,\underline{\Delta},d),\dots,\mathrm{in}_x(f_m\,;\,\underline{\Delta},d)\ ;$$

11) $Y \subset \mathrm{Sing}^d(f)$.

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer que chacune de ces conditions est équivalente à 4). Puisque f est une 0-base standard normalisée $d_{\underline{\Delta},x} = d_{(f),x}$ et d'après 3.1.6$_*$, $\mathrm{in}_x(f_1\,;\,\underline{\Delta},d),\dots,\mathrm{in}_x(f_m\,;\,\underline{\Delta},d)$ est un système de générateurs de $\mathrm{in}_x(\underline{\Delta},\underline{\Delta},d)$; c'en est même un système de générateurs minimal puisque $\nu^*_x(\underline{\Delta},0) = \nu^*_x(\underline{\Delta},d)$ (7.1.5). D'autre part, pour $Y\subset \underline{\Delta}_o(0)$, $d_{\underline{\Delta},Y,x} = d_{(f),Y,x}$ et posant $\nu^*_x(\underline{\Delta},0) = (\nu_1,\dots,\nu_m,\infty\dots)$, nous avons défini en 7.3.3 $d_{(f),Y,x} = \mathrm{Sup}\{\delta/\mathrm{in}_Y(f_i\,,\,\underline{\Delta},\delta)$ soit de δ-degré $\nu_i\}$. Or $\nu_x(f_i\,;\,\underline{\Delta},d) = \nu_i$. Ceci montre que 4) $\Leftrightarrow$ 10).

11) $\Rightarrow$ 4). On sait déjà que $Y\subset W_o$ au voisinage de x. Mais Y est aussi inclus dans $\underline{\Delta}_o(0)$ au voisinage de x, puisque $\mathrm{Sing}^o(f) \supset \mathrm{Sing}^d(f)$ et que le germe en x de $\underline{\Delta}_o(0)$ est $\mathrm{Sing}^o(f)$ (11.4.2). Alors (7.3.4),

$$d_{\underline{\Delta},Y,x} = d_{(f),Y,x} = \inf_{i=1,\dots,m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu_Y(f_{iA})}{\nu_i-|A|} \quad .$$

Or, par hypothèse, il existe un voisinage U de x dans Z tel que, si $y \in Y \cap U$, $\nu_y(f_{iA}) \geq d(\nu_i - |A|)$ pour $1 \leq i \leq m$, $|A| < \nu_i$. D'après 11.2.2, on peut le supposer assez petit pour que :

$$1 \leq i \leq m,\ |A| < \nu_i \qquad \nu_Y(f_{iA}) = \inf_{y \in Y \cap U} \nu_y(f_{iA}) \quad .$$

Donc $d_{\Delta,Y,x} \geq d$.

4) $\Rightarrow$ 11). En effet, $Y \subset W_o \cap \Delta_o(0)$ au voisinage de x. Alors $d_{\Delta,Y,x} = d_{(f),Y,x}$. Pour tout i, $1 \leq i \leq m$, A, $|A| < \nu_i$, $\nu_Y(f_{iA}) \geq d(\nu_i - |A|)$. Mais, toujours d'après 11.2.2, si $y \in Y \cap U$, $\nu_y(f_{iA}) \geq \nu_Y(f_{iA})$.

11.4.4 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $d \in]0, d_{\Delta,x}]$ et soit $(f) = (f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. On désigne pour $\delta \in [0,d]$ la δ-strate de Samuel de Δ contenant x par $\Delta(\delta)$.
Alors $\Delta_o(0) \cap \Delta_o(d)$ et $\bigcap_{\delta \in [0,d]} \Delta_o(\delta)$ ont même germe en x. C'est $\mathrm{Sing}^d(f)$.

<u>Démonstration</u> : Appliquons 11.3.1 avec $Y = \Delta_o(0) \cap \Delta_o(d)$. Il existe un voisinage U de x dans Z tel que, pour tout $\delta \in]0,d]$,

$$\Delta_o(0) \cap \Delta_o(d) \cap U \subset \Delta_o(\delta) \cap U \ .$$

Ceci montre la 1ère partie de l'assertion.
D'autre part, considérons un représentant du germe $\mathrm{Sing}^d(f)$. Il est inclus au voisinage de x dans $W_o \cap \Delta_o(0)$, (11.4.2). Quitte à restreindre l'ouvert sur lequel il est défini, on peut supposer qu'en tout point y de $\mathrm{Sing}^d(f)$ on peut extraire de $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en y et que pour $1 \leq i \leq m$

$$\nu_y(f_i \bmod M_{W,y} \cdot \mathcal{O}_{Z,y}) = \nu_i \quad .$$

D'après 7.1.9, $$d_{\Delta,y} \geq \inf_{i=1,\ldots,m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu_y(f_{iA})}{\nu_i - |A|} \quad .$$

Pour $y \in \mathrm{Sing}^d(f)$, on a donc $d_{\Delta,y} \geq d$. Appliquant maintenant 11.3.1 avec $\mathrm{Sing}^d(f)$, ceci montre que :

$$\mathrm{Sing}^d(f) \subset \Delta_0(0) \cap \Delta_0(d) \ .$$

Si ces deux ensembles analytiques n'avaient pas même germe en x, il existerait un germe de courbe irréductible contenu dans l'un et pas dans l'autre. Soit Γ un représentant de ce germe dans un ouvert assez petit. Soient $p_1 : W_1 \longrightarrow W$ la modification de W de centre x, Γ_1 la transformée stricte de Γ, x_1 l'unique point de Γ_1 au-dessus de x. Si Γ_1 est lisse en x, on arrête ici les modifications de W. Sinon, on considère $p_2 : W_2 \longrightarrow W_1$ la modification de W_1 de centre x_1, Γ_2 la transformée stricte de Γ_1 et x_2 l'unique point de Γ_2 qui s'envoie sur x_1 et ainsi de suite. Comme on peut désingulariser Γ au bout d'un nombre fini de telles opérations, on détermine finalement un morphisme $h : W' \longrightarrow W$, une courbe lisse Γ' dans W', un point x' de W' tel que x' soit l'unique point de Γ' tel que $h(x') = x$ et h est un isomorphisme local au voisinage de tout point de Γ' autre que x'.

Considérons l'image réciproque de Δ par h. Soit $\Delta' = (X', Z', W' ; r') = \left(X \times_W W', Z \times_W W', W \times_W W' ; r \times \mathrm{Id}\, W'\right)$. Pour $\delta \in [0,d]$ désignons par $\Delta'_0(\delta)$ la δ-strate de Samuel de Δ' contenant x'. Tout d'abord, il est clair que $\Gamma' \subset \Delta'_0(0)$ puisque ceci ne dépend que des fibres des rétractions r et r'.

Puisque $d \in]0, d_{\Delta,x}]$, Δ est d-transverse en x et

$$H_{\Delta,x}(d) = H_{\Delta|W,x}(d) * G_{X \cap r^{-1}(x),x} \ .$$

Δ' reste d-transverse en x' (6.5), donc on a aussi $d \leq d_{\Delta',x'}$ et

$$H_{\Delta',x'}(d) = H_{\Delta|W',x'}(d) * G_{X' \cap r'^{-1}(x'),x'} \ .$$

Or $X \cap r^{-1}(x)$ est isomorphe à $X' \cap r'^{-1}(x')$, ce qui nous donne

$$G_{X \cap r^{-1}(x),x} = G_{X' \cap r'^{-1}(x'),x'} \ .$$

Soit W_o la strate de Samuel de W contenant x. On sait également que $\Gamma \subset W_o$ au voisinage de x (11.3.1). Pour tout $y \in \Gamma$ différent de x, on a

$$H_{W,y} = H_{W,x} \quad .$$

Soit $y' \in \Gamma'$ différent de x', alors $h(y') = y \neq x$ et puisque h est un isomorphisme au voisinage de y', $H_{W',y'} = H_{W,y}$. $\Gamma' - \{x'\}$ est donc contenu dans la strate de Samuel de W' correspondant à $H_{W,x}$. D'après la semi-continuité de la fonction de Samuel (8.2.1), $H_{W',x'} \geq H_{W,x}$. Mais par modification permise la fonction de Samuel ne peut que baisser. Ce fait est montré au chapitre II, 1.2.8, indépendamment des considérations qui vont suivre. Ainsi $H_{W',x'} = H_{W,x}$.
Compte-tenu des égalités précédentes, ceci montre que

$$H_{\Delta,x}(d) = H_{\Delta',x'}(d) \quad .$$

D'autre part, pour $y' \in \Gamma'$, $y' \neq x'$, on a pour la même raison que ci-dessus :

$$H_{\Delta,y}(d) = H_{\Delta',y'}(d) \quad .$$

Comme $\Gamma \subset \Delta_o(d)$, $\Gamma' \subset \Delta'_o(d)$.
Enfin, soit f'_i l'image de f_i par le morphisme canonique $\mathcal{O}_{Z',x'} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,x}$. 7.2.13 assure que $f' = (f'_1,\ldots,f'_m)$ est une 0-base standard de Δ' en x' normalisée.
On peut alors appliquer 11.4.3 à Γ'. On obtient

$$\Gamma' \subset \mathrm{Sing}^d(f')$$

h étant un isomorphisme au voisinage de tout $y' \in \Gamma'$, $y' \neq x'$, ceci montre que :

$$\Gamma - \{x\} \subset \mathrm{Sing}^d(f) \quad .$$

Mais d'après 10.2.1, Γ étant contenu dans W_o , pour y dans un voisinage de x sur Γ, on a :

$1 \leq i \leq m, \ |A| < \nu_i \qquad \nu_x(f_{iA}) \geq \nu_y(f_{iA})$.

Donc : $\Gamma \subset \mathrm{Sing}^d(f)$.

Comme on a supposé le contraire, c'est que $\mathrm{Sing}^d(f)$ est le germe en x de $\Delta_o(0) \cap \Delta_o(d)$.

Nous sommes maintenant bien préparés à montrer qu'une base standard normalisée en x permet le calcul des tropismes critiques d'une installation dans un voisinage de x sur sa 0-strate de Samuel.

11.5.1 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $(z_1, \ldots, z_t)$ un système de coordonnées adapté à Δ en x. Soit enfin $(f) = (f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapoort à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$. On pose $\nu_x^*(\Delta, 0) = (\nu_1, \ldots, \nu_m, \infty, \ldots)$. Soit $\Delta_o(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x et soit Ω un voisinage de x dans Z vérifiant les propriétés de 11.1.3.
Si $y \in \Omega \cap \Delta_o(0)$, on pose

$$d_{(f),y} = \inf_{1 \leq i \leq m} \sup\{d \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \mathrm{in}_y(f_i ; \underline{\Delta}, d) \text{ soit de d-degré } \nu_i\} .$$

On remarque que si $f_i \in \sum_{A \in \mathbb{N}^t} f_{iA} z^A$ où $f_{iA} \in \Gamma(\Omega \cap W, \mathcal{O}_W)$

$$d_{(f),y} = \inf_{1 \leq i \leq m, \ |A| < \nu_i} \frac{\nu_y(f_{iA})}{\nu_i - |A|} .$$

11.5.2 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. Soit x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $\Delta_o(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x, W_o la strate de Samuel de W contenant x. Il existe un voisinage Ω de x dans Z tel que, si $y \in \Omega \cap \Delta_o(0) \cap W_o$,

$$d_{\Delta,y} \leq d_{\Delta,x} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit F un sous-ensemble analytique fermé de $W_o \cap \Delta_o(0)$ dont le germe en x est irréductible. Nous allons montrer par récurrence sur $\dim_x F$ que la fonction $y \rightsquigarrow d_{\Delta,y}$ est semi-continue dans un voisinage de x sur F.

Choisissons Ω un voisinage de x dans Z et $f = (f_1,\dots,f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée comme dans 11.5.1. Posons $d = \inf_{y\in F\cap\Omega} d_{(f),y}$.

On sait (7.2.14) que $d_{(f),x} = d_{\Delta,x}$, et, quitte à restreindre une première fois Ω (ce qui ne change pas la valeur de d à choisir puisque d'après 11.2.2, F étant irréductible, $d_{(f),y}$ est constant sur un ouvert partout dense de F), d'après 11.2.1, $d_{(f),y} \le d_{(f),x}$. On a donc $d \le d_{\Delta,x}$.

D'autre part, puisque $F \subset \Delta_o(0)$, $d_{\Delta,F,x} > 0$ (5.1.3) et (7.3.4)

$$d_{\Delta,F,x} = \inf_{1\le i\le m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu_F^x(f_{iA})}{\nu_i - |A|}$$

. Or dans un voisinage de x sur F $\nu_F^x(f_{iA}) \le \nu_F^y(f_{iA}) \le \nu_y(f_{iA})$. Ceci montre que $d \in]0, d_{\Delta,x}]$.

- Considérons maintenant : $C^d = C^d_{F\times\Delta,F}$. Par définition de d, et puisque $F \subset W_o$ au voisinage de x, le germe en x de F est contenu dans $\mathrm{Sing}^d(f)$. D'après 11.4.4, F est donc contenu dans $\Delta_o(d)$ au voisinage de x. D'après 9.2.1, C^d est donc F-plat en x, et aussi dans un voisinage de x. Sa fibre en $y \in F\cap\Omega$ est $C^d_{\Delta,y}$. De même $C^o = C_{X\cap r^{-1}(F),F} \underset{F}{\times} C_{F\times W,F}$ est F-plat dans un voisinage de x, car $F \subset \Delta_o(0) \cap W_o$. Sa fibre en $y \in F\cap\Omega$ est $C_{X\cap r^{-1}(y),y} \times C_{W,y}$ (5.1.8) et (9.2.3). Comme $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en $y \in F\cap\Omega$, $d_{\Delta,y} > 0$. Par conséquent, la fibre au-dessus de y de C^o est $C^o_{\Delta,y}$.

Soit G l'ensemble des $y \in F\cap\Omega$ tels que $C^o_{\Delta,y} = C^d_{\Delta,y}$. C'est aussi l'ensemble des $y \in F\cap\Omega$ tels que $d_{\Delta,y} > d$. G étant l'ensemble des points de F où les fibres de deux espaces F-plats coïncident, est un sous-ensemble analytique fermé de $F\cap\Omega$.

Deux cas sont maintenant à considérer :

- ou $d_{\Delta,x} = d$. On a alors $x \notin G$ et F-G est un ouvert de $F \cap \Omega$ contenant x sur lequel on a, par définition, $d_{\Delta,y} \leq d$. Le théorème est donc vrai dans ce cas.

- ou $d_{\Delta,x} > d$. F et G ne peuvent avoir le même germe en x. En effet, d'après 11.1.3 et 7.1.9, $d_{(f),y} \leq d_{\Delta,y}$ si $y \in F \cap \Omega$. D'après 11.1.4 et 7.2.14, $(\prod_{i=1...m} \nu_i !) d_{\Delta,y}$ est un entier. Toutes les valeurs de $d_{\Delta,y}$ pour $y \in F \cap \Omega$ sont donc supérieures ou égales à d et il en existe un nombre fini qui soient inférieures ou égales à $d_{\Delta,x}$. Soient $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_k \leq d_{\Delta,x}$ ces différentes valeurs. Si $F \cap \Omega = G \cap \Omega$, alors $\delta_1 > d$. Si ε est un nombre strictement positif assez petit pour que $d + \varepsilon < \delta_1$, on a, pour tout $y \in F \cap \Omega$,

$$C^{d+\varepsilon}_{\Delta,y} = C^{o}_{\Delta,y}$$

$H_{\Delta,y}(d+\varepsilon)$ est donc constante et $C^{d+\varepsilon}_{F \times \Delta,F}$ est F-plat sur $F \cap \Omega$. Toujours d'après 11.4.4, $F \subset \mathrm{Sing}^{d+\varepsilon}(f)$. Pour tout $y \in F \cap \Omega$, on aurait $d_{(f),y} \geq d + \varepsilon$. C'est contradictoire.

Par suite l'inclusion de G dans F est stricte au voisinage de x. Soient $G_1, \ldots, G_s$ les composantes irréductibles de $G \cap \Omega$. On peut supposer Ω assez petit pour que le germe en x de chacun des G_i soit aussi irréductible et alors $\dim_x G_i < \dim_x F$. Par hypothèse de récurrence on détermine Ω_i voisinage de x dans Z tel que, si $y \in \Omega_i \cap G_i$,

$$d_{\Delta,y} \leq d_{\Delta,x} \quad .$$

Si $y \in F - G$, on a, par définition, $d_{\Delta,y} \leq d < d_{\Delta,x}$.
Le voisinage $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_s$ convient donc.

11.5.3 <u>Corollaire</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $\Delta_0(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ. Il existe un voisinage Ω de x dans Z, tel que l'ensemble des valeurs de $d_{\Delta,y}$ quand y parcourt $\Omega \cap \Delta_0(0)$ soit fini.

<u>Démonstration</u> : Choisissons d'abord Ω comme dans 11.5.1. Comme on l'a déjà remarqué, si $y \in \Omega \cap \Delta_o(0)$, $(\prod_{i=1\ldots m} \nu_i!)d_{\Delta,y}$ est un entier. Il suffit donc de trouver un voisinage sur lequel la valeur des $d_{\Delta,y}$ est bornée. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait déterminer une base de voisinages emboîtés de x dans Z, $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et de points $y_j \in \Delta_o(0) \cap \Omega_j$ tels que d_{Δ,y_j} soit strictement croissante. La stratification de Samuel de W étant localement finie, Ω_1 ne rencontre qu'un nombre fini de strates W_α. D'après le principe des tiroirs, quitte à extraire des y_j une sous-suite infinie, on peut supposer qu'ils sont tous dans le même W_α. Soit Δ_j la d_{Δ,y_j}-strate de Samuel de Δ contenant y_j.

$$\Delta_j \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha = \{z \in \Delta_o(0) \cap W_\alpha \ : \ d_{\Delta,z} \geq d_{\Delta,y_j}\} .$$

Posons pour simplifier $d_j = d_{\Delta,y_j}$.

En effet, si $z \in \Delta_j \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha$,

$$H_{\Delta,z}(d_j) = H_{\Delta,y_j}(d_j) = H_{\underline{\Delta}|W,y_j}(d_j) * G_{X\cap r^{-1}(y_j),y_j}$$

$$= H_{\underline{\Delta}|W,z}(d_j) * G_{X\cap r^{-1}(z),z} .$$

D'après 5.1.1, $d_{\Delta,z} \geq d_j$.

Réciproquement, si $d_{\Delta,z} \geq d_j$ et que $z \in \Delta_o(0) \cap W_\alpha$, alors,

$$H_{\Delta,z}(d_j) = H_{\underline{\Delta}|W,z}(d_j) * G_{X\cap r^{-1}(z),z} =$$

$$= H_{\underline{\Delta}|W,y_j}(d_j) * G_{X\cap r^{-1}(y_j),y_j} = H_{\Delta,y_j}(d_j) .$$

Ceci montre que : $\Delta_{j+1} \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha \subset \Delta_j \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha$.

Soit F_j l'adhérence de $\Delta_j \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha$ dans $\Delta_o(0)$. Δ_j étant différence de deux fermés analytiques dans $W \cap X \cap \Omega_1$ et W_α étant différence de deux fermés analytiques dans $W \cap \Omega_1$, il en est de même de $\Delta_j \cap W_\alpha \cap \Delta_o(0)$ dans

$\Delta_o(0) \cap \Omega_1$. F_j est donc un sous-ensemble analytique de $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$, et

$$F_{j+1} \subset F_j .$$

De plus, il est clair que $x \in F_j$ pour tout j.
D'autre part, $y_j \notin F_{j+1}$. En effet, d'après 11.5.2, il existe un voisinage U de y_j dans Z tel que, si $z \in U \cap W_\alpha \cap \Delta_o(0)$, $d_{\Delta,z} \leq d_j$. Ce voisinage ne peut rencontrer $\Delta_{j+1} \cap \Delta_o(0) \cap W_\alpha$, puisqu'on aurait $d_{\Delta,z} \geq d_{j+1} > d_j$.
Mais d'après le théorème de Cartan, la suite décroissante de fermés analytiques F_j de $\Delta_o(0)$ stationne localement. En particulier, il existe U ouvert de Z contenant x et N tel que, si $j \geq N$,

$$F_j \cap U \cap \Delta_o(0) = F_N \cap U \cap \Delta_o(0) .$$

Puisque la suite (y_j) tend vers x, il existe M tel que si $j \geq M$, $y_j \in U \cap \Delta_o(0)$. Pour $j \geq \sup(N,M)$, $y_j \in \bigcap_{k \geq j} F_j \cap U \cap \Delta_o(0)$. Or $y_j \notin F_{j+1}$. On obtient la contradiction cherchée.

11.5.4 <u>Théorème</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation, x un point de $W \cap X$ tel que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en x. Soit $(f) = (f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard de Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; z_1, \ldots, z_t)$
Soit $\Delta_o(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ contenant x. Il existe un voisinage U de x dans Z tel que, si $y \in U \cap \Delta_o(0)$,

$$d_{\Delta,y} = d_{(f),y} .$$

<u>Démonstration</u> : Choisissons d'abord un voisinage Ω_1 de x dans Z comme dans 11.5.1 et tel qu'en plus l'ensemble des valeurs de $d_{\Delta,y}$ quand y parcourt $\Omega_1 \cap \Delta_o(0)$ soit fini. Soit E cet ensemble. La stratification de Samuel de W étant localement finie, et pour chaque d, la d-stratification de Samuel de Δ étant localement finie, on peut supposer de plus que Ω_1 ne rencontre qu'un nombre fini de strates de Samuel de W et de d-strates de Samuel de Δ quand $d \in E$. Si $y \in \Omega_1 \cap \Delta_o(0)$, (7.1.9, 11.1.2, 11.1.3)

$$d_{\Delta,y} \geq d_{(f),y} .$$

Supposons qu'il existe un point $y_1 \in \Omega_1 \cap \Delta_o(0)$ où cette inégalité soit stricte. Soit $d_1 = d_{\Delta, y_1}$. Soit W_1 la strate de Samuel de W contenant y_1, $\Delta_1(d_1)$ la d_1-strate de Samuel de Δ contenant y_1. Soit F_1 l'adhérence de $W_1 \cap \Delta_1(d_1) \cap \Delta_1(0) \cap \Omega_1$ dans $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$. C'est un sous-espace analytique fermé de $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$. En effet, à la fois $W_1 \cap \Delta_o(0) \cap \Omega_1$ et $\Delta_1(d_1) \cap \Delta_o(0) \cap \Omega_1$ est différence dans $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$ de deux sous-ensembles analytiques fermés de $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$. Il en est de même de $W_1 \cap \Delta_1(d_1) \cap \Delta_o(0) \cap \Omega_1$.

- ou bien il existe $z_1 \in W_1 \cap \Delta_1(d_1) \cap \Delta_o(0) \cap \Omega_1$ tel que $d_{\Delta, z_1} = d_{\Delta, y_1} = d_1 > d_{(f), z_1}$ et que la composante irréductible de F_1 contenant z_1 contienne aussi x ;

- ou bien il existe Ω_2 ouvert de Z contenant x, tel que $\Omega_2 \subset \Omega_1$ et tel que :

$$\{z \in W_1 \cap \Delta_1(d_1) \cap \Delta_o(0) \cap \Omega_2 : d_{\Delta, z} = d_1 > d_{(f), z}\} = \emptyset .$$

Dans ce cas, ou bien tout $z \in \Omega_2 \cap \Delta_o(0)$ est tel que $d_{\Delta, z} = d_{(f), z}$ et le théorème est démontré, ou bien il existe $y_2 \in \Omega_2 \cap \Delta_o(0)$ tel que $d_{\Delta, y_2} > d_{(d), y_2}$. Comme ci-dessus, on construit W_2, d_2, $\Delta_2(d_2)$ et F_2, et les deux mêmes possibilités peuvent se présenter.
Si ce processus ne s'arrêtait pas, on déterminerait une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de $\Delta_o(0) \cap \Omega_1$ tous distincts. D'après le principe des tiroirs, d_i doit prendre une infinité de fois la même valeur $d \in E$ et on peut extraire de la suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie $(y_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad d_{\Delta, y_{i_j}} = d$$

et qu'il existe une strate de Samuel de W, W_α, et une d-strate de Samuel de Δ, $\Delta_\beta(d)$, les contenant tous.
Soient y_p et y_{p+q} deux termes consécutifs dans cette suite.
$y_{p+q} \in \Omega_{p+q} \cap \Delta_o(0) \subset \Omega_{p+1} \cap \Delta_o(0)$. Mais aussi $y_{p+q} \in W_p \cap \Delta_p(d_p)$, $d_{\Delta, y_{p+q}} = d_p > d_{(f), y_{p+q}}$. C'est contradictoire.

■ A ce stade, ou bien le théorème est démontré, ou bien on a déterminé un voisinage Ω de x dans Z, $y \in \Omega \cap \Delta_0(0)$ tel que $d_{\Delta,y} > d_{(f),y}$ et que, si on pose $d = d_{\Delta,y}$ et si on désigne par W_1 et $\Delta_1(d)$ la strate de Samuel de W et la d-strate de Samuel de Δ contenant y, par F_1 l'adhérence de $W_1 \cap \Delta_1(d) \cap \Delta_0(0) \cap \Omega$ dans $\Delta_0(0) \cap \Omega$, par F la composante irréductible de F_1 contenant y, $x \in F$.

- Remarquons maintenant que, si $z \in W_1 \cap \Delta_1(d) \cap \Delta_0(0)$, alors

$$H_{\Delta,z}(d) = H_{\Delta,y}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,y}(d) * G_{X \cap r^{-1}(y),y}$$

et donc :

$$H_{\Delta,z}(d) = H_{\underline{\Delta}|W,z}(d) * G_{X \cap r^{-1}(z),z} .$$

D'après 5.1.1, Δ est d-transverse en z et $d_{\Delta,z} \geq d$.

- Soit maintenant (avec les notations de 11.5.1), pour $i = 1,\ldots,m$, $|A| < \nu_i$, W_{iA} le sous-espace de $W \cap \Omega$ défini par l'idéal engendré par $f_{iA} \in \Gamma(\Omega \cap W, \mathcal{O}_W)$. Soit $G_{iA} = \{z \in W_{iA}, \forall \mu = 0,\ldots,\nu_y(f_{iA}), H_{W_{iA},z}(\mu) \geq H_{W,y}(\mu)\}$. G_{iA} est un sous-ensemble analytique fermé dans W_{iA}, lui-même fermé dans $W \cap \Omega$. Soit enfin

$$G_1 = (\bigcup_{i=1,\ldots,m,\ |A|<\nu_i} G_{iA}) \cap \Delta_0(0) \cap \Omega .$$

C'est encore un sous-ensemble analytique fermé de $\Delta_0(0) \cap \Omega$, et posons :

$$G = F \cap G_1 .$$

C'est un sous-ensemble analytique fermé de F strict puisque $y \in F$ et $y \notin G_1$. (Pour tout $i = 1,\ldots,m$, $|A| < \nu_i$, $H_{W_{iA},y}(\nu_y(f_{iA})) < H_{W,y}(\nu_y(f_{iA}))$).

- Pour finir, soit $H = F \cap (F_1 - W_1 \cap \Delta_1(d) \cap \Delta_0(0) \cap \Omega)$. C'est encore un fermé analytique de F strict puisque $y \in W_1 \cap \Delta_1(d) \cap \Delta_0(0) \cap \Omega$. F étant irréductible, $G \cup H$ est un fermé analytique strict de F. Si

$z \in F - G \cup H$, alors $z \in W_1 \cap \Delta_1(d) \cap \Delta_0(0) \cap \Omega$ et $d_{\Delta,z} \geq d = d_{\Delta,y}$. Mais aussi, pour tout $i = 1,\ldots,m$, $|A| < \nu_i$, il existe $\mu \leq \nu_y(f_{iA})$ (dépendant de i et de A) tel que $H_{W_{iA},z}(\mu) < H_{W_{iA},y}(\mu) = H_{W_{iA},z}(\mu)$ puisque $z \in W_1$. Ceci signifie que :

$$\nu_z(f_{iA}) \leq \mu \leq \nu_y(f_{iA})$$

et donc :

$$d_{(f),z} \leq d_{(f),y} .$$

Par conséquent, si $z \in F - G \cup H$, $d_{(f),z} \leq d_{(f),y} < d_{\Delta,y} \leq d_{\Delta,z}$ et

$$d_{(f),z} < d_{\Delta,z} .$$

Or, $G \cup H$ étant un sous-espace analytique fermé strict de F irréductible, il n'est nulle part dense, ([Ab] 44.32.6). Le germe de $G \cup H$ en x est donc strictement inclus dans le germe de F en x. Il existe donc un germe de courbe analytique Γ irréductible en x, contenu dans F et pas contenu dans $G \cup H$. La trace de $G \cup H$ sur Γ étant un fermé analytique strict de Γ est l'origine dans un voisinage assez petit de x.
On a donc déterminé un ouvert U de x dans Z, un réel d, et une courbe analytique Γ dans $\Delta_0(0) \cap U$ contenant x, tels que, pour tout $z \in \Gamma - \{x\}$,

$$d_{(f),z} < d \leq d_{\Delta,z} .$$

■ Nous allons voir que nous pouvons nous ramener au cas où W est normalement plat le long de Γ en x. S'il n'en est pas ainsi, soit $p_1 : W_1 \longrightarrow W$ la modification de W de centre x, soit Γ_1 la transformée stricte de Γ, x_1 l'unique point de Γ_1 au-dessus de x. Si W_1 est normalement plat le long de Γ_1 en x_1, on arrête ici les modifications de W. Sinon, on considère $p_2 : W_2 \longrightarrow W_1$ la modification de W_1 de centre x_1, Γ_2 la transformée stricte de Γ_1 et x_2 l'unique point de Γ_2 s'envoyant sur x_1. Au bout d'un nombre fini de telles opérations, on sait qu'on obtiendra Γ_n lisse. On montrera au chapitre II (2.13) qu'on peut aussi obtenir $W_{n'}$ normalement plat le long de $\Gamma_{n'}$ en $x_{n'}$. Ceci se fera

évidemment indépendamment des résultats du § 11. Ce résultat se trouve dans [ ]. Finalement, on détermine un morphisme $h : W' \longrightarrow W$, une courbe lisse Γ' dans W', un point x' de W' tel que x' soit l'unique point de Γ' au-dessus de x et tel que W' soit normalement plat le long de Γ' en x' et h est un isomorphisme local au voisinage de tout point de Γ' autre que x'.

Considérons l'image réciproque de Δ par h. Soit $\Delta' = (X', Z', W' ; r') = (X \times_W W', Z \times_W W', W \times_W W' ; r \times \mathrm{Id}\, W')$. $r' | X' : X' \longrightarrow W'$ est plat en x'.

Soit $\Delta'_0(0)$ la 0-strate de Samuel de Δ' contenant x'. Alors

$$\Gamma' \cap h'^{-1}(U') \subset \Delta'_0(0) \cap h'^{-1}(U')$$

où $h' : Z' \longrightarrow Z$ est le morphisme canonique.

Soit f'_i l'image de f_i par le morphisme $\mathcal{O}_{Z,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z',x'}$. 7.2.13 assure que $(f') = (f'_1, \ldots, f'_m)$ est une 0-base standard de Δ' en x' normalisée et h étant un isomorphisme au voisinage de tout $z' \in \Gamma'$, $z' \neq x'$, on a à la fois avec $z = h(z')$:

$$d_{(f'),z'} = d_{(f),z} \quad \text{et} \quad d_{\Delta',z'} = d_{\Delta,z}$$

de sorte que :

$$d_{(f'),z'} < d \leq d_{\Delta',z'} \quad .$$

Or (11.3.5) pour tout voisinage V' de x' dans Z' assez petit

$$d_{\Delta',\Gamma',x'} = \inf_{z' \in \Gamma' \cap V'} d_{\Delta',z'} \quad .$$

D'après 11.5.2, si V' est assez petit,

$$d_{\Delta',x'} \geq d_{\Delta',z'} \quad \text{pour tout } z' \in \Gamma' \cap V' \ .$$

Alors :

$$\inf_{z' \in \Gamma' \cap V'} d_{\Delta',z'} = \inf_{z' \in \Gamma' \cap V' - \{x'\}} d_{\Delta',z'} \ .$$

Ainsi : $$d_{\Delta',\Gamma',x'} \geq d .$$

Mais d'autre part, si $f'_{iA} = f_{iA} \circ h$, d'après 7.3.4,

$$d_{\Delta',\Gamma',x'} = d_{(f'),\Gamma',x'} = \inf_{1\leq i\leq m,\ |A|<\nu_i} \frac{\nu^{x'}_{\Gamma'}(f'_{iA})}{\nu_i - |A|} ,$$

et d'après 11.2.1 et 11.2.2, pour tout voisinage V' de z' assez petit,

$$\nu^{x'}_{\Gamma'}(f'_{iA}) = \inf_{z'\in\Gamma'\cap V'} \nu_{z'}(f'_{iA}) = \inf_{z'\in\Gamma'\cap V'-\{x'\}} \nu_{z'}(f'_{iA})$$

$$d_{\Delta',\Gamma',x'} = \inf_{z'\in\Gamma'\cap V'-\{x'\}} d_{(f),z'} < d .$$

Ceci est contradictoire. Ceci prouve qu'au bout d'un nombre fini d'opérations, dans le processus de la page 198, on détermine un ouvert U sur lequel le théorème est vrai.

Q. E. D.

Nous en arrivons maintenant au théorème de stratification d'une installation par le 1er tropisme critique.

11.6.1 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation. On suppose que $r|X : X \longrightarrow W$ est plat en tout point de $W \cap X$. Soit $d \in]0,\infty[$. Soient $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ la stratification de Samuel de W, $(\Delta_\beta(0))_{\beta\in B}$, $(\Delta_\gamma(d))_{\gamma\in C_d}$ les 0- et d-stratifications de Samuel de Δ.
Pour tout $(\alpha,\beta) \in A\times B$, l'ensemble des points z de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$ où $d_{\Delta,z} \geq d$ (i.e. Δ est d-transverse en z) est un fermé analytique de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$. S'il est non vide, il existe $\gamma \in C_d$ tel que cet ensemble soit la trace de $\Delta_\gamma(d)$ sur $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $T_{\alpha,\beta}(d)$ cet ensemble. C'est un fermé topologique de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$. En effet, si $x \notin T_{\alpha,\beta}(d)$, $d_{\Delta,x} < d$. D'après 11.5.2, il existe un voisinage U de x dans Z, tel que, si $y \in U \cap W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$,

$d_{\Delta,y} \leq d_{\Delta,x} < d$.
D'autre part, $z \in T_{\alpha,\beta}(d)$, si et seulement si $z \in W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$ et :

$$H_{\Delta,z}(d) = H_{\Delta|W,z}(d) * G_{X\cap r^{-1}(z),z} .$$

Le 2ème membre de cette égalité ne dépend pas de z dans $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$. Soit $H_\gamma(d)$ sa valeur. $T_{\alpha,\beta}(d) = W_\alpha \cap \Delta_\beta(0) \cap \Delta_\gamma(d)$. C'est donc un sous-espace analytique de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$.

11.6.2 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une bonne installation telle que $r|X : X \longrightarrow W$ soit plat en tout point de $W \cap X$. Soient $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ la stratification de Samuel de W, $\Delta_\beta(0)$ la 0-stratification de Δ, $(X_\gamma)_{\gamma\in C}$ la stratification de Samuel de X.
Pour tout $(\alpha,\beta) \in A \times B$, l'ensemble des points de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$ où Δ est transverse est un fermé analytique de $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$. S'il est non vide, c'est la trace sur $W_\alpha \cap \Delta_\beta(0)$ d'une strate X_γ.

***

C H A P I T R E II

MODIFICATIONS D'INSTALLATIONS

§ 1. MODIFICATIONS ET FONCTIONS DE SAMUEL

1.1.1 Définition : Soient X un espace analytique, et Y un sous-espace analytique fermé de X. Nous dirons que Y est un centre de modification♦ permis pour X en $x \in Y$, ou que la modification♦ $f : X' \to X$ de centre Y est permise pour X en x si :

1) Y est lisse en x ;

2) $gr_Y X$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module plat en x, ou si l'on préfère la flèche canonique $C_{X,Y} \to Y$ est plate en x.

Ceci revient à dire que X est normalement plat le long de Y en x (cf. ch. I, 10.9), c'est-à-dire encore que Y est lisse en x et contenu au voisinage de x dans une strate de Samuel de X (cf. ch. I, 8.2.9).

1.1.2 Remarque : Le résultat (ch. I, 10.10) nous dit que si Y est un sous-espace analytique fermé réduit de X, l'ensemble des points de Y où Y est un centre de modification permis pour X est un ouvert analytique partout dense de Y.

1.2.1 Nous allons maintenant nous intéresser à l'effet d'une modification sur la fonction de Samuel. Tout d'abord deux lemmes :

1.2.2 Lemme : Soit $C \subset \mathbb{C}^n$ un cône isotrope dont le sommet est l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$. Soit $p : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ la projection canonique et soit $X = p(C - \{0\})$ l'espace analytique projectif correspondant à C. Soit $x \in X$, et notons $l_x \subset C$ la droite correspondante, i.e. $p^{-1}(x) \cup \{0\}$.

♦ Soit $\mathfrak{J}$ le $\mathcal{O}_X$-Idéal cohérent définissant Y. $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{J}^n$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée de présentation finie (appliquer par exemple (ch. I, 1.4)). La modification (ou éclatement, ou transformation monoïdale, ou dilatation) de centre Y est le morphisme (cf. $\mathrm{Projan}_X \mathcal{R}(\mathfrak{J}) \longrightarrow X$.

a) $H^i_{C,0} \geq H^{i+1}_{X,x}$ pour tout entier $i \geq 1$ (pour l'ordre produit) ;

b) les conditions suivantes sont équivalentes :

α) $H^i_{C,0} = H^{i+1}_{X,x}$ pour un entier $i \geq 0$;

β) C est normalement plat le long de l_x ;

γ) $l_x \subseteq T_{C,0}$, faîte de C.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, remarquons que puisque p est simple, à fibre de dimension 1, en tout point $t \in l_x - \{0\}$, on a $H^1_{C,t} = H^2_{X,x}$ pour tout $t \in l_x - \{0\}$. Ainsi, $p^{-1}(x)$ est contenu dans la strate de Samuel de C correspondant à $H^2_{X,x}$, à laquelle 0 est donc adhérent. D'après la semi-continuité de la fonction de Samuel (voir ch. I, § 8), ceci entraîne que $H^1_{C,0} \geq H^2_{X,x}$ et donc a).
D'autre part, l'égalité α) de b) entraîne, d'après ce que nous venons de voir, que l_x est contenu dans une strate de Samuel de C, et donc, d'après ch. I § 10, l'assertion β), et donc aussi γ) (toujours ch. I, § 10). Montrons maintenant que γ) entraîne α) : en effet, par définition de $T_{C,0}$, la translation par $t \in l_x$ est un automorphisme de C, et donc $H^1_{C,t} = H^1_{C,0}$ pour tout $t \in l_x$, ce qui, d'après ce que nous venons de voir, entraîne α).

1.2.3 <u>Lemme</u> : Avec les notations de 1.2.2, si l'une des conditions équivalentes de b) est vérifiée, il existe un isomorphisme

$$\alpha_{X,x} : \operatorname{Proj} C_{X,x} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} C/l_x \quad .$$

En effet, si l'une des conditions de b) est vérifiée, l_x est un centre de modification permis pour C en 0, et il résulte de ch. I, § 9 et [6] que l'on a une surjection de cônes

$$C \longrightarrow C/l_x$$

et par conséquent un morphisme

$$X - x \xrightarrow{\tau} \operatorname{Proj} C/l_x \quad ,$$

mais on voit facilement, par exemple en prenant des coordonnées, que ce morphisme est celui que l'on doit considérer pour décrire la modification de X de centre x. C'est-à-dire que si X' désigne la fermeture dans $X \times \operatorname{Proj} C/l_x$ du graphe $\Gamma(\tau) \subset (X - x) \times \operatorname{Proj} C/l_x$, la restriction $f : X' \to X$ de la première projection à X' est la modification de X de centre x. Ceci nous fournit un isomorphisme : $\operatorname{Proj} C_{X,x} \longrightarrow \operatorname{Proj} C/l_x$ qui est l'isomorphisme cherché.

1.2.4 <u>Remarque</u> : Puisque X' n'est autre que la transformée stricte de X dans la modification de $Z = \operatorname{Proj} \mathbb{C}^n = \mathbb{P}^{n-1}$ (cf. [5], [9]), il est immédiat de constater que $\alpha_{X,x}$ est induit par $\alpha_{Z,x}$, c'est-à-dire que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Proj}(C_{X,x}) \arrow[r, "\alpha_{X,x}"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Proj}(C/l_x) \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Proj}(T_{Z,x}) \arrow[r, "\alpha_{Z,x}"] & \operatorname{Proj}(\mathbb{C}^n/l_x)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, les flèches verticales étant les inclusions naturelles. De plus, $\alpha_{Z,x}$ est caractérisé par cette propriété : $\alpha_{Z,x}$ est l'unique isomorphisme tel que pour tout sous-cône K de $\mathbb{C}^{n+1}$ contenant l_x dans son espace tangent strict, on ait, si $Y = \operatorname{Proj} K$,

$$\alpha_{Z,x}(\operatorname{Proj} C_{Y,x}) = \operatorname{Proj} K/l_x \quad .$$

1.2.5 <u>Définition</u> : Nous appellerons naturel tout isomorphisme $\beta_{Z,x} : T_{Z,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n/l_x$ tel que $\operatorname{Proj} \beta_{Z,x} = \alpha_{Z,x}$. Il est clair qu'un isomorphisme naturel est uniquement déterminé, à homothétie près, par la propriété que pour tout sous-cône K de $\mathbb{C}^n$ contenant l_x dans son espace tangent strict, on ait, si $Y = \operatorname{Proj} K$,

$$\beta_{Z,x}(C_{Y,x}) = K/l_x \quad .$$

Nous continuerons d'appeler naturel l'isomorphisme induit

$\beta_{Z,x}|C_{Y,x} : C_{Y,x} \xrightarrow{\sim} K/l_x$.

1.2.6 Soient maintenant X un espace analytique, et Y un centre de modification permis pour X en $x \in Y$. Nous pouvons plonger, localement autour de x, X dans un espace analytique lisse Z, (nous continuerons comme toujours de noter X le voisinage de x dans X qui nous intéresse), et effectuer la modification de centre Y sur X et sur Z :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[d, "F"] \\ X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

Puisque, par hypothèse (cf. 1.1.1) Y est lisse en X, Z' est lisse, et X' n'est autre que la transformée stricte de X par F. D'autre part, remarquons que puisque $F^{-1}(Y)$ est un diviseur de Z', $F^{-1}(x)$ est un sous-espace analytique lisse de codimension $d+1$ (où $d = \dim_x Y$) de Z'. Notons pour simplifier C pour $C_{X,x}$, T_Y pour $T_{Y,x}$ et T_X pour $T_{X,x}$ (espace tangent strict à X en x). On a alors :

1.2.7 <u>Lemme</u> : Pour tout point $x' \in f^{-1}(x) = F^{-1}(x) \cap X'$, on a la suite d'égalités et d'inégalités suivante :

$$H^1_{X,x} = H^1_{C,0} = H^{1+d}_{C/T_Y,0} \geq H^{1+d+1}_{F^{-1}(x)\cap X',x'} \geq H^1_{X',x'} .$$

<u>Démonstration</u> : La première égalité vient de ce que $H^1_{X,x}$ ne dépend d'après sa définition que du cône tangent, la seconde vient de (ch. I, 10.3 et 4.1.5) (puisque Y est un centre de modification permis pour X). La première inégalité n'est autre que l'inégalité a) de 1.2.2 puisque $F^{-1}(x) \cap X' = f^{-1}(x) = \mathrm{Proj}\, C_{X,Y}(x)$ (cf. [5],[6],[9]) et que $C_{X,Y}(x)$ est isomorphe à $C_{X,x}/T_{Y,x}$ i.e. à C/T_Y : nous noterons $l_{x'} \subset C/T_Y$ la droite correspondant au point $x' \in f^{-1}(x)$. La seconde inégalité n'est autre que l'inégalité de la transversalité (ch. I, 5.1.1, 11)) appliquée à l'intersection de $F^{-1}(x)$ avec X' en x' dans Z'.

1.2.8 <u>Théorème</u> : Soit $f : X' \to X$ une modification permise en $x \in X$ d'un espace analytique X. En tout point $x' \in f^{-1}(x)$, on a l'inégalité♦ :

$$H^1_{X',x'} \leq H^1_{X,x} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Lire de droite à gauche les égalités et inégalités de 1.2.7.

1.2.9 <u>Remarque</u> : Ce théorème a été démontré en géométrie algébrique par B. Bennett [Be].

1.2.10 L'avantage de la démonstration ici donnée de 1.2.8 est qu'elle permet de décider facilement ce qui se passe en un point $x' \in f^{-1}(x)$ tel que $H^1_{X',x} = H^1_{X,x}$.

1.2.11 <u>Théorème</u> (Hironaka [7]) : Soit $f : X' \to X$ une modification permise en $x \in F$. Soit $x' \in f^{-1}(x)$ tel que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$. Alors $x' \in \operatorname{Proj} T_{X,x}/T_{Y,x}$.

<u>Démonstration</u> : Ceci revient à montrer que si $l_{x'} \subset C_{X,x}/T_{Y,x}$ est la droite correspondant à $x' \in f^{-1}(x) = \operatorname{Proj} C_{X,x}/T_{Y,x}$ (cf. 1.2.7), alors $l_{x'}$ est contenue dans l'espace tangent strict à $C_{X,x}/T_{Y,x}$, puisque ce dernier n'est autre que $T_{X,x}/T_{Y,x}$. Or, le lemme 1.2.7 nous dit que si $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$, on a certainement $H^{1+d}_{C/T_Y,0} = H^{1+d+1}_{f^{-1}(x),x'}$ i.e. $H^{1+d}_{C/T_Y,0} = H^{1+d+1}_{\operatorname{Proj} C/T_Y,x'}$. Le résultat cherché est donné par l'implication $\alpha) \Rightarrow \gamma)$ du lemme 1.2.2.

1.2.12 Soit $f : X' \to X$ une modification de X permise en $x \in X$. Appelons Y son centre, et plongeons X au voisinage de x dans un espace analytique lisse Z, obtenant un diagramme commutatif

---

♦ (Remarquer que l'inégalité est vraie en tout point de X', puisque f est un isomorphisme à l'extérieur de $f^{-1}(Y)$).

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[d, "F"] \\ X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

où F est la modification de Z de centre Y.
Si $x' \in f^{-1}(x) = F^{-1}(x) \cap X'$ est tel que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$, nous venons de voir en 1.2.11 que la suite $l_{x'} \subset C_{X,x}/T_{Y,x}$ correspondant à x' est en fait dans $T_{X,x}/T_{Y,x}$. Ceci signifie que si nous notons $L_{x'}$ l'image réciproque de $l_{x'}$ par la surjection canonique $C_{X,x} \longrightarrow C_{X,x}/T_{Y,x}$, $L_{x'}$ est contenu dans $T_{X,x}$. Pour voir cela, nous avons seulement utilisé le fait que si $H^1_{X',x} = H^1_{X,x}$, la première inégalité de 1.2.7 devenait une égalité. Le fait que la seconde inégalité doive aussi devenir une égalité nous donne le :

1.2.13 <u>Théorème</u> : Dans la situation de 1.2.12, si $x' \in f^{-1}(x)$ est tel que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$,

1°) $F^{-1}(x)$ est transverse à X' en x' (au sens de ch. I, 5.1) et en particulier, $C_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} = C_{X' \cap F^{-1}(x),x'}$ $\left(= C_{f^{-1}(x),x'}\right)$, ce qui signifie que le carré des inclusions canoniques :

$$\begin{tikzcd} C_{f^{-1}(x),x'} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C_{X',x'} \arrow[d, hook] \\ T_{F^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] & T_{Z',x'} \end{tikzcd}$$

est cartésien ;

2°) il existe un isomorphisme naturel

$$C_{f^{-1}(x),x'} \longrightarrow C_{X,x}/L_{x'} .$$

<u>Démonstration</u> : Le premier point n'est autre que la traduction directe du fait qu'en vertu du lemme 1.2.7, si $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$, on doit avoir $H^{1+d+1}_{F^{-1}(x)\cap X',x} = H^1_{X',x'}$ (voir ch. I, § 5). Le deuxième point résulte du fait que la première inégalité de 1.2.7 devient une égalité, et du lemme 1.2.3

1.2.14 <u>Corollaire</u> : Soit $f : X' \to X$ une modification d'un espace analytique X permise en $x \in X$. En tout point $x' \in f^{-1}(x)$ tel que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$, on a :

1) $\dim T_{X',x'} \leq \dim T_{X,x}$;

2) si de plus x' est tel que

$$\dim T_{X',x'} = \dim T_{X,x} ,$$

il existe un isomorphisme $T_{Z',x'} \xrightarrow{\sim} T_{Z,x}$ qui envoie $C_{X',x'}$ sur $C_{X,x}$, i.e. $C_{X',x'}$ est isomorphe à $C_{X,x}$.

<u>Démonstration</u> : Notons $\tau = \dim T_{X,x}$, $\tau' = \dim T_{X',x'}$, et remarquons que d'après 1.2.13, 1°), on a $C_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} = C_{X'\cap F^{-1}(x),x'}$, d'où évidemment une inclusion : $T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \subseteq T_{F^{-1}(x)\cap X',x'}$. Or, l'isomorphisme naturel de $C_{F^{-1}(x)\cap X',x'}$ avec $C_{X,x}/L_{x'}$ (1.2.13, 2°)) nous dit que $\dim T_{F^{-1}(x)\cap X',x'} = \tau - (d+1)$ (puisque $\dim L_{x'} = d+1$). En appliquant d'autre part l'inégalité des dimensions dans une intersection à $T_{X',x'}$ et $T_{F^{-1}(x),x'}$ dans $T_{Z',x'}$, on obtient

$$\tau' - (d+1) \leq \dim T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \leq \tau - (d+1)$$

d'où l'inégalité cherchée, $\tau' \leq \tau$.

D'autre part, ce qui précède montre que si $\tau' = \tau$, $T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} = T_{X'\cap F^{-1}(x),x'}$ et que dans ce cas, $T_{X',x'}$ et

$T_{F^{-1}(x),x'}$ sont transverses au sens ordinaire, c'est-à-dire que $T_{X',x'} + T_{F^{-1}(x),x'} = T_{Z',x'}$. En utilisant le diagramme cartésien de 1.2.13, ceci nous montre que l'homomorphisme canonique

$$\varphi : C_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} / T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \longrightarrow C_{X',x'} / T_{X',x'}$$

est un isomorphisme. Mais en vertu de l'isomorphisme naturel de 1.2.13, 2°), et du fait que si $\tau' = \tau$, $T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} = T_{X' \cap F^{-1}(x),x'}$, le terme de gauche n'est autre que $(C_{X,x} / L_{x'}) / (T_{X,x} / L_{x'}) \simeq C_{X,x} / T_{X,x}$.

Nous avons ainsi montré que si $\tau' = \tau$, il existe un isomorphisme $\varphi_x : C_{X',x'} / T_{X',x'} \longrightarrow C_{X,x} / T_{X,x}$ uniquement déterminé à l'homothétie près. De plus, d'après la naturalité de l'isomorphisme 1.1.13, 2°), cet isomorphisme est induit par un isomorphisme $\varphi_Z : T_{Z',x'} / T_{X',x'} \quad T_{Z,x} / T_{X,x}$. Il suffit maintenant de choisir un isomorphisme quelconque de $T_{X',x'}$ sur $T_{X,x}$, ce qui est possible puisque $\tau' = \tau$, pour obtenir l'isomorphisme cherché.

1.2.15 <u>Remarque</u> : A part des cas triviaux, l'isomorphisme $C_{X',x'} \xrightarrow{\sim} C_{X,x}$ de 2.1.14 n'est jamais induit par le morphisme tangent à la modification (les cas triviaux sont ceux où la modification est l'identité).

1.2.16 Nous aurons besoin d'une version un peu raffinée de ce qui précède pour démontrer le théorème de stabilisation de la fonction de Samuel sans l'utilisation du caractère $\nu^*(X,Z)$ d'Hironaka ([ ]) ni des résultats de la thèse de B. Bennett. Dans ce qui suit, si C est un cône isotrope de $\mathbb{C}^n$, de sommet l'origine, nous noterons $C^{(m)}$ le cône dont les équations sont les éléments de degré $\leq m$ d'une base standard de l'idéal de C en son sommet. Noter $C \subseteq C^{(m)}$. On notera $T^{(m)}$ l'espace tangent strict de $C^{(m)}$.

1.2.17 <u>Théorème</u> : Soit $f : X' \to X$ une modification d'un espace analytique permise en $x \in X$. Plongeons localement X dans un espace analytique lisse

Z, obtenant un diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc} X' & \hookrightarrow & Z' \\ \downarrow f & & \downarrow F \\ X & \hookrightarrow & Z \end{array}$$

En tout point $x' \in f^{-1}(x)$ tel que :

$$H^1_{X',x'}(\nu) = H^1_{X,x}(\nu)$$

pour $0 \leq \nu \leq m$, on a

1°) $L_{x'} \subseteq T^{(m)}_{X,x}$;

2°) un isomorphisme naturel :

$$C^{(m)}_{F^{-1}(x)\cap X',x'} \xrightarrow{\sim} C^{(m)}_{X,x} \Big/ L_{x'} \quad ;$$

3°) $C_{F^{-1}(x)\cap X',x'} = C^{(m)}_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'}$.

<u>Démonstration</u> : Posons $C = C_{X,x} \big/ T_{Y,x}$; $\mathfrak{X} = \operatorname{Proj} C$ et $\mathfrak{X}^{(m)} = \operatorname{Proj} C^{(m)}$ (notation introduite en 1.2.16). (Remarquons que $\mathfrak{X} = F^{-1}(x) \cap X'$ comme en 1.2.7, et que $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^{(m)}$). On a alors, pour tout $m \geq 0$ et tout point $x' \in \mathfrak{X}$, les égalités et inégalités suivantes :

$$H^1_{C,0}(\nu) = H^1_{C^{(m)},0}(\nu) \geq H^2_{\mathfrak{X}^{(m)},x'}(\nu) \geq H^2_{\mathfrak{X},x'}(\nu) \quad \text{pour } 0 \leq \nu \leq m .$$

En effet, la première égalité vaut pour $0 \leq \nu \leq m$ puisque les algèbres graduées de C et $C^{(m)}$ sont isomorphes jusqu'en degré m. La première inégalité vaut pout pour tout $\nu \geq 0$ puisque c'est l'inégalité a) du lemme 1.2.2 appliquée à $C^{(m)}$. La seconde inégalité vaut aussi pour tout $\nu \geq 0$, puisqu'elle provient de l'inclusion $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^{(m)}$.
Si nous supposons que $H^1_{X',x'}(\nu) = H^1_{X,x}(\nu)$ pour $0 \leq \nu \leq m$, cela entraîne, comme dans la démonstration de 1.2.8, que $H^1_{C,0}(\nu) = H^2_{\mathfrak{X},x'}(\nu)$ pour $0 \leq \nu \leq m$, et donc deux égalités :

$$(*) \qquad H^1_{C^{(m)},0}(\nu) = H^2_{\mathfrak{X}^{(m)},x'}(\nu) \qquad \text{pour } 0 \leq \nu \leq m$$

$$(**) \qquad H^2_{\mathfrak{X}^{(m)},x'}(\nu) = H^2_{\mathfrak{X},x'}(\nu) \qquad \text{pour } 0 \leq \nu \leq m \ .$$

Montrons tout d'abord que si $l_{x'} \subset C$ est la droite correspondant à $x' \in \mathfrak{X}$, l'égalité (*) entraîne que $l_{x'} \subset T^{(m)}$, faîte de $C^{(m)}$. Nous allons faire ici une démonstration directe : $C^{(m)}$ est un cône dans un certain $\mathbb{C}^k$. Choisissons des coordonnées $T_1,\ldots,T_k$ de $\mathbb{C}^k$ telles que $l_{x'}$ soit la droite d'équations $T_2 = \ldots = T_k = 0$. Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_j)$ une base standard de l'idéal homogène définissant $C^{(m)}$ dans $\mathbb{C}^k$. Posons $\nu_i = \deg \varphi_j$ (remarquons que par hypothèse, $\nu_i \leq m$ pour $1 \leq i \leq j$). Considérons l'ouvert affine de $\mathbb{P}^{k-1}$ déterminé par $T_1 \neq 0$, et l'ideal I définissant $\mathfrak{X}^{(m)}$ dans cat ouvert affine : cet idéal est engendré dans l'anneau $\mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right]$ de cet ouvert affine par les $\psi_i = \frac{\varphi_i}{T_1^{\nu_i}}$. Soit $p \leq j$ le plus grand entier pour lequel il existe une base standard $(\varphi_1,\ldots,\varphi_j)$ de l'idéal définissant $C^{(m)}$ dans $\mathbb{C}^k$ telle que $\varphi_i \in \mathbb{C}[T_2,\ldots,T_k]$ pour $1 \leq i \leq p$. Si nous parvenons à montrer que $p = j$, nous aurons montré que $l_{x'}$ appartient au faîte de $C^{(m)}$. Supposons donc $p < j$, et écrivons $\varphi_{p+1} = \xi + \eta$, où $\xi \in \mathbb{C}[T_2,\ldots,T_k]$ et $\eta \in T_1 \cdot \mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right]$. Considérons l'espace vectoriel $G = \{\gamma \in (\psi_1,\ldots,\psi_p)\,\mathbb{C}\left[\frac{T_1}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right] \Big/ \deg\gamma < \nu_{p+1}\}$.

Si $\nu = \nu_{p+1} - 1$, on a, en posant $\eta' = \frac{\eta}{T_1^{\nu_{p+1}}}$,

$$H^1_{\mathfrak{X}^{(m)},x'}(\nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right] \Big/ I + \left(\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right)^{\nu+1} =$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right] \Big/ \left(\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right)^{\nu+1} - \dim_{\mathbb{C}} \{\gamma \in I / \deg\gamma \leq \nu\} \leq$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right] \Big/ \left(\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right)^{\nu+1} - \dim_{\mathbb{C}} (G + \mathbb{C}\cdot\eta') \leq$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\left[\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right] \Big/ \left(\frac{T_2}{T_1},\ldots,\frac{T_k}{T_1}\right)^{\nu+1} - \dim_{\mathbb{C}} G = H^0_{C^{(m)},0}(\nu) \ ,$$

où la première inégalité provient de ce que l'on a une inclusion de $G + \mathbb{C} \cdot \eta'$ dans $\{\gamma \in I / \deg \cdot \gamma \leq \nu\}$, et la dernière égalité provient de ce que puisque $\nu = \nu_{p+1} - 1$, le terme de gauche n'est rien d'autre que $H^1_{\mathfrak{X}^{(\nu)}, x'}(\nu)$, qui est égal à $H^0_{C^{(\nu)}, 0}(\nu) = H^0_{C^{(m)}, 0}(\nu)$ puisque d'après la définition de p, $l_{x'} \subset T^{(\nu)}$ (cf. lemme 1.2.3). Mais par hypothèse, puisque $\nu < m$, les termes extrêmes sont égaux, donc $\eta' \in G$, et $\eta = T_1^{\nu_{p+1}} \cdot \eta' \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\, \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_k]$. On peut donc remplacer φ_{p+1} par ξ et obtenir une nouvelle base standard pour l'idéal de $C^{(m)}$ dans C^k. Mais ceci contredit la maximalité de p. Ceci nous démontre que $l_{x'} \subset T^{(m)}$, c'est-à-dire que $L_{x'} \subset T^{(m)}_{X,x}$, ce qui est le point 1) du théorème. De plus, le lemme 1.2.3 nous donne immédiatement l'isomorphisme naturel du point 2°), si nous remarquons que la démonstration ci-dessus nous dit aussi que $C_{\mathfrak{X}^{(m)}, x'} = C^{(m)}_{\mathfrak{X}, x'}$. Le lemme 1.2.3 nous fournit en effet un isomorphisme naturel

$$C_{\mathfrak{X}^{(m)}, x'} \simeq C^{(m)}_{X,x} \Big/ L_{x'}$$

(rappelons encore que $X = F^{-1}(x) \cap X'$).
Enfin, le lemme 1.2.7 nous apprend que nous devons avoir

$$H^{1+d+1}_{F^{-1}(X) \cap X', x'}(\nu) = H^1_{X', x'}(\nu) \qquad \text{pour } 0 \leq \nu \leq m,$$

d'où le point 3°) en appliquant (ch. I, § 5, 5.1.1) à $C^{(m)}_{\mathfrak{X}, x'}$.

1.2.18 <u>Corollaire</u> : Dans la situation du théorème 1.2.17

a) $\dim T^{(m)}_{X', x'} \leq \dim T^{(m)}_{X, x}$;

b) si $\dim T^{(m)}_{X', x'} = \dim T^{(m)}_{X, x}$, il existe un isomorphisme de $T_{Z', x'}$ sur $T_{Z, x}$ qui envoie $C^{(m)}_{X', x'}$ sur $C^{(m)}_{X, x}$.

<u>Démonstration</u> : Exactement comme celle de 1.2.14.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le :

1.2.19 <u>Théorème de stabilisation</u> (Hironaka) : Soient X un espace analytique et x un point de X. Pour toute suite de modifications $\{f_\alpha : X_\alpha \to X_{\alpha-1}\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ telle que :

a) $X_0 = X$ et $x_0 = x$;

b) $f_\alpha(x_\alpha) = x_{\alpha-1}$ et f_α soit permise pour $X_{\alpha-1}$ en $x_{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{N})$

on a

1) il existe $A \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha \geq A$ on ait :

$$H^1_{X_\alpha, x_\alpha} = H^1_{X_{\alpha-1}, x_{\alpha-1}} \quad ;$$

2) il existe $B \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\alpha \geq B$, il existe un isomorphisme de C_{X_α, x_α} sur $C_{X_{\alpha-1}, x_{\alpha-1}}$.

<u>Démonstration</u> : Plongeons localement autour de x l'espace X dans un espace analytique lisse Z, obtenant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_{\alpha+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{\alpha+1}"] & Z_{\alpha+1} \arrow[d, "F_{\alpha+1}"] \\ X_\alpha \arrow[r, hook] & Z_\alpha \end{tikzcd}$$

où F_α est la modification de Z_α de centre celui de X_α . Remarquons tout d'abord que 1) entraîne 2). En effet, posons pour $\alpha \geq 0$ $\tau_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} T_{X_\alpha, x_\alpha}$. D'après 1.2.14, 1°) la suite des τ_α sera décroissante pour $\alpha \geq A$, ce qui montre l'existence d'un entier B tel que $\tau_{\alpha+1} = \tau_\alpha$ pour tout $\alpha \geq B$. Le point 2) résulte alors de 1.2.14, 2°). Démontrons donc le point 1). D'après le théorème 1.2.8, pour tout $\nu \geq 0$, la suite $\{H^1_{X_\alpha, x_\alpha}(\nu)\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens large. Posons $H(\nu) = \inf_{\alpha\in\mathbb{N}} H^1_{X_\alpha, x_\alpha}(\nu)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier $\alpha(m)$ tel que, pour tout $0 \leq \nu \leq m$ et $\alpha \geq \alpha(m)$, on ait $H^1_{X_\alpha, x_\alpha}(\nu) = H(\nu)$. Soit $\tau_\alpha(m)$ la dimension de $T^{(m)}_{X_\alpha, x_\alpha}$ (notation de 1.2.16). Il résulte du corollaire 1.2.18 que, pour $\alpha \geq \alpha(m)$, la suite des $\tau_\alpha(m)$ est décroissante. Ainsi, au besoin en augmentant $\alpha(m)$, on peut supposer que pour $\alpha \geq \alpha(m)$, pour tout $0 \leq \nu \leq m$, on a :

$$(*) \qquad H^1_{X_\alpha, x_\alpha}(\nu) = H^1_{X_{\alpha(m)}, x_{\alpha(m)}}(\nu) = H(\nu)$$

$$(**) \qquad \tau_\alpha(m) = \tau_{\alpha(m)}(m) \ .$$

On peut bien sûr supposer que la suite $\alpha(m)$ est croissante. D'autre part, les égalités (*) et (**) nous disent que, pour $\alpha \geq \alpha(m) + 1$, nous pouvons construire des isomorphismes

$$\sigma_{\alpha-1} \ T_{Z_\alpha, x_\alpha} \xrightarrow{\sim} T_{Z_{\alpha-1}, x_{\alpha-1}}$$

tels que
$$\sigma_{\alpha-1}(C^{(m)}_{X_\alpha, x_\alpha} = C^{(m)}_{X_{\alpha-1}, x_{\alpha-1}} \ .$$

Nous pouvons bien sûr choisir, pour tout $\alpha \geq \alpha(m)$, des isomorphismes $\lambda_\alpha : T_{Z_\alpha, x_\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^r$ où $r = \dim_{x_\alpha} Z_\alpha = \dim_{x_o} Z_o$ tels que $\lambda_\alpha \circ \sigma_\alpha = \lambda_{\alpha+1}$.
Ceci nous donne (la suite des $\alpha(m)$ étant croissante)

$$\lambda_{\alpha(m+1)}\left(C^{(m)}_{X_{\alpha(m+1)}, x_{\alpha(m+1)}}\right) = \lambda_{\alpha(m)}\left(C^{(m)}_{X_{\alpha(m)}, x_{\alpha(m)}}\right) \ .$$

Or,
$$C^{(m+1)}_{X_{\alpha(m+1)}, x_{\alpha(m+1)}} \subseteq C^{(m)}_{X_{\alpha(m+1)}, x_{\alpha(m+1)}} \ ,$$

et donc, pour $m \geq 1$,

$$\lambda_{\alpha(m+1)}\left(C^{(m+1)}_{X_{\alpha(m+1)}, x_{\alpha(m+1)}}\right) = \lambda_{\alpha(m)}\left(C^{(m)}_{X_{\alpha(m)}, x_{\alpha(m)}}\right) \ .$$

L'anneau de polynômes à r variables étant nœthérien , cette suite décroissante de cônes est stationnaire : il existe un entier $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geq N$,

$$\lambda_{\alpha(m)}\left(C^{(m)}_{X_{\alpha(m)},x_{\alpha(m)}}\right) = \lambda_{\alpha(N)}\left(C_{X_{\alpha(N)},x_{\alpha(N)}}(N)\right) .$$

Considérons maintenant un entier $n \geq N$ et un entier $p \geq 0$, l'inclusion

$$C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} \subseteq C^{(n)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}$$

est claire. On en déduit l'inclusion :

$$\lambda_{\alpha(n)}\left(C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}\right) \subseteq \lambda_{\alpha(n+p)}\left(C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n+p)},x_{\alpha(n+p)}}\right)$$

d'où, pour $0 \leq \nu \leq n+p$, l'inégalité :

$$H^1_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}(\nu) \leq H^1_{X_{\alpha(n+p)},x_{\alpha(n+p)}}(\nu) .$$

Mais d'autre part, d'après 1.2.8, on a, pour tout $\nu \geq 0$,

$$H^1_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}(\nu) \geq H^1_{X_{\alpha(n+p)},x_{\alpha(n+p)}}(\nu) .$$

On en déduit, pour $0 \leq \nu \leq n+p$,

$$H^1_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}(\nu) = H^1_{X_{\alpha(n+p)},x_{\alpha(n+p)}}(\nu)$$

et donc aussi

$$H^1_{C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}}(\nu) = H^1_{C^{(n)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}}(\nu) \qquad (0 \leq \nu \leq n+p)$$

ce qui entraîne, au vu de l'inclusion canonique

$$C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} \subseteq C^{(n)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}$$

l'égalité

$$C^{(n+p)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} = C^{(n)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} \qquad \text{pour tout } p,$$

et donc l'égalité

$$C_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} = C^{(n)}_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}$$

qui montre que pour $n \geq N$ et pour tout $\nu \geq 0$ on a l'égalité :

$$H^1_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}}(\nu) = H^1_{X_{\alpha(N)},x_{\alpha}(N)}(\nu) \quad .$$

Mais si l'on prend $\alpha(n) \leq \alpha \leq \alpha(n+1)$, on a pour tout $\nu \geq 0$,

$$H^1_{X_{\alpha(n)},x_{\alpha(n)}} \geq H^1_{X_\alpha,x_\alpha} \geq H^1_{X_{\alpha(n+1)},x_{\alpha(n+1)}} \quad ,$$

ce qui montre bien que pour tout $\alpha \geq \alpha(N)$, on a

$$H^1_{X_\alpha,x_\alpha} = H^1_{X_{\alpha(N)},x_{\alpha(N)}} \qquad \text{Q. E. D.}$$

1.2.20 <u>Une conjecture</u> : Nous venons de voir que dans une suite $f_\alpha : (X_\alpha , x_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha-1} , x_{\alpha-1})$ de modifications permises, la fonction de Samuel se stabilise à un cran fini. Ceci signifie que les $H^1_{X_\alpha,x_\alpha}$ ne fournissent qu'un nombre fini de fonctions de Samuel distinctes. On peut se demander si, étant donné un espace analytique X et un point $x \in X$, si l'on regarde la <u>totalité</u> de toutes les suites $f_\alpha : (X_\alpha , x_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha-1} , x_{\alpha-1})$ de modifications permises (telles que $X_o = X$, $x_o = x$, bien sûr), il n'est pas encore vrai que les $H^1_{X_\alpha,x_\alpha}$ ne fournissent qu'un nombre fini de fonctions de Samuel distinctes. Le résultat est vrai dans deux cas pour des raisons bien différentes : si X est une courbe, parce que les seules modifications permises sont celles de centre ponctuel, et si X est une hypersurface, puisque dans ce cas la fonction de Samuel est déterminée par la multiplicité, et que celle-ci ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes, devant décroître au sens large d'après 1.2.8.

1.2.21 <u>Théorème</u> : Soient X un espace analytique, Y un sous-espace analytique de X et V un sous-espace analytique de Y. Soit x un point de V. On suppose que Y et V sont lisses en x et que X est normalement plat le long de Y en x. Il en résulte immédiatement que X est normalement plat le long de V en x (puisque Y étant, d'après 1.1.3, contenu au voisinage de x dans la strate de Samuel de x dans X, il en sera de même de V). Considérons un plongement local au voisinage de X dans Z lisse, et le diagramme des modifications de Z, X et Y de centre V

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[r, hook] \arrow[d, "G"] & X' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & Z' \arrow[d, "F"] \\ x \in V \subset & Y \arrow[r, hook] & X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

Si Y - V est dense dans Y au voisinage de x,

a) en tout point $x' \in G^{-1}(x)$, $H^1_{X',x'} = H_{X,x}$;

b) X' est normalement plat le long de Y' en tout point $x' \in G^{-1}(x)$;

c) $\dim T_{X',x'} = \dim T_{X,x}$ en tout point $x' \in G^{-1}(x)$;

d) il existe un isomorphisme $C_{X',x'} \simeq C_{X,x}$ pour tout $x' \in G^{-1}(x)$.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord (1.1.1) que la modification de centre V est permise pour Y, (et Z) en x puisque V est lisse en x. Ainsi Y' est lisse en tout point $x' \in G^{-1}(x)$. D'autre part f induit un isomorphisme de $X' - f^{-1}(V)$ sur X - V, et donc en tout point $y' \in Y' - G^{-1}(V)$ on a $H_{X',y'} = H_{X,f(y')} = H_{X,x}$ puisque $f(y') \in Y$ qui est contenu dans la strate de Samuel de x dans X. Mais ceci montre que $Y' - G^{-1}(V)$ est contenu dans la strate de Samuel de X' correspondant à $H^1_{X,x}$. D'autre part, puisque Y - V est dense dans Y, Y' n'est autre que l'adhérence dans X' de $f^{-1}(Y - V) = Y' - G^{-1}(V)$, ce qui montre que Y' (et en particulier tout point $x' \in G^{-1}(x)$) est contenu dans l'adhérence de la strate de Samuel de X' correspondant à $H^1_{X,x}$. D'après la semi-continuité de la fonction de Samuel (ch. I, § 8) on a :

$$H^1_{X',x'} \geq H^1_{X,x} \qquad \text{en tout } x' \in G^{-1}(x) \quad .$$

Mais d'autre part, f étant permise pour X en x, on a d'après 1.2.8,

$$H^1_{X',x'} \leq H^1_{X,x} \qquad \text{en tout } x' \in f^{-1}(x) . (\subseteq G^{-1}(x))$$

et l'on doit donc avoir

$$H^1_{X',x'} = H^1_{X,x} \qquad \text{en tout point } x' \in g^{-1}(x), \text{ ie. a).}$$

Le même argument fonctionne en tout point d'un voisinage de x dans V, ce qui nous montre que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$ en tout point $x' \in G^{-1}(V)$. Ceci entraîne que $H^1_{X',y'}$ est constante le long de Y', et puisque Y' est lisse, que X' est normalement plat le long de Y' (remarque 1.1.3) ie. b). Maintenant remarquons que puisque Y' est la transformée stricte de Y par F, et que $H^1_{Y',x'} = H^1_{Y,x}$ en tout point $x' \in G^{-1}(x)$ (cf. ch. II, § 1), d'après 1.2.13, Y' est transverse à $F^{-1}(x)$ en tout point $x' \in G^{-1}(x)$, c'est-à-dire que $T_{Y',x'}$ est transverse à $T_{F^{-1}(x),x'}$ dans $T_{Z',x'}$. Mais puisque d'après b), X' est normalement plat le long de Y' en x', $T_{Y',x'} \subseteq T_{X',x'}$ (cf. 1.1.1) et donc $T_{X',x'}$ est aussi transverse à $T_{F^{-1}(x),x'}$ dans $T_{Z',x'}$, c'est-à-dire $T_{Z',x'} = T_{X',x'} + T_{F^{-1}(x),x'}$. Comme dans la démonstration de 1.2.14, ceci entraîne que l'on a un isomorphisme

$$\varphi : C_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \Big/ T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \xrightarrow{\sim} C_{X',x'} \Big/ T_{X',x'}$$

et comme le cône de droite a son espace tangent strict réduit à (0), il en est de même de celui de gauche, ce qui montre que $T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'}$ est l'espace tangent strict de $C_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'}$ $(= C_{X' \cap F^{-1}(x),x'}$ puisque $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$ cf. 1.2.13). D'après le point 2°) de 2.1.13, ceci montre que l'on a un isomorphisme naturel $T_{X',x'} \cap T_{F^{-1}(x),x'} \simeq T_{X,x}/L_{x'}$. Mais le calcul des dimensions montre en utilisant le fait que $T_{X',x'}$ est

transverse à $T_{F^{-1}(x),x'}$ que l'on doit avoir

$$\dim T_{X',x'} - (d+1) = \dim T_{X,x} - (d+1)$$

($d = \dim_x V$), d'où c).
Enfin, d) est conséquence de a) et c) au vu de 1.2.14, 2).

1.3 Nous avons fait grand usage de l'espace tangent strict. Nous allons montrer pour terminer que la dimension de l'espace tangent strict $T_{X,x}$ à un espace analytique X est semi-continue le long d'une strate de Samuel de X. (On voit sur des exemples qu'il est vain d'espérer la semi-continuité sur X).

1.3.1 <u>Lemme</u> : Soit $C \subset \mathbb{C}^n$ un cône algébrique (isotrope). La strate de Samuel du sommet de C est le faîte de C.

Ce lemme est conséquence immédiate de 1.2.2 : si $t \in T_{C,0}$, faîte de C, la droite l qui joint le sommet à t est contenue dans $T_{C,0}$, et donc C est normalement plat le long de l, et t est dans la strate de Samuel du sommet. Réciproquement, si t est dans la strate de Samuel du sommet, il en est de même de l, donc C est normalement plat le long de l, et $l \subset T_{C,0}$.

1.3.2 <u>Théorème</u> : Soient X un espace analytique complexe et Y un sous-espace analytique réduit de X tel que chaque composante connexe de Y soit contenue dans une strate de Samuel de X. Il existe un espace vectoriel relatif $p : T \to Y$ tel que, pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(y) = T_{X,y}$, espace tangent strict de X en y.

<u>Démonstration</u> : On se ramène immédiatement au cas où Y est connexe. D'après (ch. I, 9.2.3), il existe un cône relatif $\pi : \mathcal{C} \to Y$ tel que, pour tout $y \in Y$, $\pi^{-1}(y) = C_{X,y}$ ($\mathcal{C} = \mathrm{Specan\,gr}\,\mathcal{P}_X(Y)$).
Notons $\sigma(Y) \subset \mathcal{C}$ le sommet de $\mathcal{C}$ ($\pi|\sigma(Y) : \sigma(Y) \to Y$ est un isomorphisme). En utilisant la suite exacte de cônes (ch. I, § 9), on voit que $\sigma(Y)$ est

contenu dans une unique strate de Samuel relative de $\mathcal{C}/Y$ (en fait $\mathcal{C}/Y$ est relativement normalement plat le long de $\sigma(Y)$, cf. Appendice). Soit donc T l'unique strate de Samuel relative de $\mathcal{C}/Y$ contenant $\sigma(Y)$, et $p = \pi|T : T \quad Y$. Par définition d'une strate de Samuel relative, $p^{-1}(y)$ est la strate de Samuel du sommet de $\pi^{-1}(y) = C_{X,y}$, c'est-à-dire $T_{X,y}$ d'après 1.3.1.

1.3.3 <u>Remarque</u> : Si Y n'était pas contenu dans une strate de Samuel de X, on ne saurait pas recoller en un cône relatif les cônes tangents $C_{X,y}$.

1.3.4 <u>Corollaire</u> : Soit Y un sous-espace analytique réduit contenu dans une strate de Samuel d'un espace analytique X. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{y \in Y / \dim_l T_{X,y} \geq l\}$ est un sous-espace analytique fermé de Y. Ceci n'est autre d'après 1.3.2 que la semi-continuité analytique de la dimension des fibres d'un espace vectoriel relatif, cas particulier très simple de la semi-continuité de la fonction de Samuel relative (ch. I, 8.2.1) et par ailleurs bien connu, (ch. I, 8.1.4).

***

§ 2. INSTALLATIONS ET MODIFICATIONS

2.0 Dans ce paragraphe, toutes les installations sont supposées absolues, i.e. au-dessus du point, et toutes les immersions qui interviennent dans la définition d'une installation sont supposées fermées.

2.1 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, et $x \in W \cap X$. Un sous-espace Y, fermé, de Z sera appelé centre de modification permis pour Δ en x si

a) Y est lisse en x ;

b) $Y \subset W_0 \cap X_0$ où W_0 (resp. X_0) est la strate de Samuel de x dans W (resp. X).

2.2 <u>Remarque</u> : Ceci signifie que Y est contenu dans $W \cap X$ et est un centre de modification permis au sens de ch. II, 1.1.1 pour W et X en x. En particulier, X et W sont normalement plats le long de Y.

2.3. <u>Définition</u> : On dira que Y est permis pour Δ si Y est permis pour Δ en tout point $x \in Y$.

2.4 <u>Proposition</u> : Soit Y un centre de modification permis pour une bonne installation $\Delta = (X, Z, W, r)$. (On suppose $Y \neq W$, cas sans intérêt). Soit $\tilde{F} : Z'' \to Z$ (resp. $\tilde{f} : X'' \to X$, resp. $\tilde{G} : W'' \to W$) la modification de Z (resp. X, resp. W) de centre Y. On a des inclusions naturelles $X'' \hookrightarrow Z''$, $W'' \hookrightarrow Z''$, et X'' (resp. W'') n'est autre que la transformée stricte de X (resp. W) par $\tilde{F}$. (Cf. [5] ou [9]). Posons $T = r^{-1}(Y)$, et soit $T'' \subset Z''$ la transformée stricte de T par $\tilde{F}$. (i.e. $T'' \to T$ est la modification de T de centre Y). Il existe un voisinage ouvert Z' de W'' dans $Z'' - T''$ (et nous écrirons dorénavant W' à la place de W'') et une unique rétraction $r' : Z' \to W'$ de l'immersion $W' \hookrightarrow Z'$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "r'"] & Z \arrow[d, "r"] \\ W' \arrow[r, "G"] & W \end{tikzcd}$$

où $F = \tilde{F}|Z'$. De plus r' est lisse.

<u>Démonstration</u> : Commençons par montrer que $W'' \cap T'' = \emptyset$: ceci est clair, puisque $C_{W,Y} \cap C_{T,Y} = \{Y\}$ (la modification de centre Y sépare W de T). Choisissons maintenant un système de générateurs $(g_1,\dots,g_k)$ pour l'idéal $\mathfrak{J}_{Y,x}$ définissant Y dans W au voisinage de $x \in W$, et des coordonnées $(z_1,\dots,r_z)$ sur $r^{-1}(x)$, qui est lisse par hypothèse. Ainsi Y est défini dans Z, au voisinage de x par l'idéal $(g_1,\dots,g_k, z_1,\dots,z_r)\mathcal{O}_{Z,x}$ et T par $(g_1,\dots,g_k)\mathcal{O}_{Z,x}$.
Nous allons montrer qu'au voisinage de tout point $x' \in G^{-1}(x)$, $\mathfrak{J}_Y \mathcal{O}_{Z''}$ est engendré par un des $g_i \cdot \mathcal{O}_{Z''}$ $(1 \le i \le k)$. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Plaçons-nous en un point $x' \in G^{-1}(x)$ où $\mathfrak{J}_Y \mathcal{O}_{Z'',x'}$ ne peut être engendré par aucun des $g_i \mathcal{O}_{Z'',x'}$: $\mathfrak{J}_Y \cdot \mathcal{O}_{Z'',x'}$ doit être engendré par un des $z_i \mathcal{O}_{Z'',x'}$, disons $z_1 \mathcal{O}_{Z'',x'}$, et $g_i \mathcal{O}_{Z'',x'} = \lambda_i z_1 \mathcal{O}_{Z'',x'}$ $(1 \le i \le k)$ avec $\lambda_i \in \mathfrak{M}_{Z'',x'}$ $(1 \le i \le k)$. Mais $\mathfrak{J}_Y \mathcal{O}_{Z'',x'} \underset{\mathcal{O}_{Z'',x'}}{\otimes} \mathcal{O}_{W'',x'}$ doit être engendré par des $g_i \cdot \mathcal{O}_{W'',x''}$ $(1 \le i \le k)$ puisque $\mathfrak{J}_Y \mathcal{O}_{Z'',x''} \underset{\mathcal{O}_{Z'',x''}}{\otimes} \mathcal{O}_{W'',x'} = \mathfrak{J}_Y \cdot \mathcal{O}_{W'',x'}$, donc un des $\lambda_i \underset{\mathcal{O}_{Z'',x'}}{\otimes} \mathcal{O}_{W'',x'}$ doit être une unité : contradiction. (On rappelle qu'il résulte immédiatement du lemme de Nakayama que si A est un anneau local, et $I = (\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ est un idéal inversible de A, on a $I = \varphi_i \cdot A$ pour au moins un i, $1 \le i \le s$). Il résulte de ce qui précède qu'il existe un voisinage Z' de W'' dans Z'', ouvert, tel que $\mathfrak{J}_Y \cdot \mathcal{O}_{Z'} = \mathfrak{J}_T \mathcal{O}_{Z'}$. De plus, il existe clairement un voisinage maximal pour cette propriété : c'est lui que nous prendrons. Mais puisque $\mathfrak{J}_T \mathcal{O}_{Z'} = F^*(r^* \mathfrak{J}_Y \mathcal{O}_W)$, la propriété universelle des modifications nous dit qu'il existe un unique morphisme $r' : Z' \to W'$ rendant commutatif le diagramme déjà décrit. D'autre part, si nous notons $i' : W' \hookrightarrow Z'$ l'inclu-

sion, on a $i'^{-1}(r'^{-1}(G^{-1}(Y)) = G^{-1}(Y)$, et donc, à nouveau d'après la propriété universelle de la modification, $r' \circ i' = id_{W'}$, c'est-à-dire que r' est une rétraction de i'. Pour montrer que r' est lisse, remarquons que nous venons de montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(Y) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r'|F^{-1}(Y)"'] & Z' \arrow[d, "r'"] \\ G^{-1}(Y) \arrow[r, hook] & W' \end{tikzcd}$$

est cartésien. Mais $r'|f^{-1}(Y)$ n'est autre que Proj de l'application $C_{Z,Y} \longrightarrow C_{W,Y}$ qui est lisse puisque r l'est. Ainsi, la fibre de r' est lisse, et il s'agit de montrer que r' est plat. Mais $r'|F^{-1}(Y)$ l'est, et les immersions horizontales sont régulières : on peut donc appliquer (ch. I, 5.1.2.4).

2.5 <u>Définition</u> : (Hypothèses et notations de 2.4). Posons $X' = X'' \cap Z''$. Nous obtenons une bonne installation $\mathbb{A}' = X', Z', W', r')$ et un morphisme d'installations

$$\Phi : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$$

qui sera appelé la modification de $\mathbb{A}$ de centre Y.

2.6 <u>Proposition</u> : Soient $\mathbb{A} = (X, Z, W, r)$ une bonne installation et $x \in W \cap X$. Soit $\Phi : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$ une modification de $\mathbb{A}$ permise en x. Si $\mathbb{A}$ est transverse en x (ch. I, 5.1.2), pour tout point $x' \in G^{-1}(x) \cap X'$ tel que

a) $H_{X',x'} = H_{X,x}$;

b) $H_{W',x'} = H_{W,x}$.

$\mathbb{A}'$ est une bonne installation transverse en x'.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, si Y est un centre de modification permis pour $\mathbb{A}$ en x, il résulte de (ch. II, 1.1.4) que, quitte à nous restreindre à un voisinage de x dans Z, nous pouvons supposer que Y est

permis pour Δ. Δ' est donc une bonne installation en tout point $x' \in G^{-1}(x)$. Montrons donc la transversalité de r' à X' en tout point x' vérifiant a) et b).

Pour cela, écrivons localement en x $Z = W \times \mathbb{C}^r$, et plongeons localement W dans un $\tilde{W}$ lisse. Si nous posons $\tilde{Z} = \tilde{W} = \mathbb{C}^r$, nous obtenons un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{Z} \arrow[d, "\tilde{r}"] \\ W \arrow[r, hook] & \tilde{W} \end{tikzcd}$$

(où $r = pr_1$, $\tilde{r} = pr_1$), où $\tilde{W}$ et $\tilde{Z}$ sont maintenant lisses ainsi que $\tilde{r}$. Si nous posons $\tilde{\Delta} = (X, \tilde{Z}, \tilde{W}, \tilde{r})$, nous dirons que nous avons plongé localement la bonne installation $\Delta = (X, Z, W, r)$ dans l'installation lisse $\tilde{\Delta}$. Il est clair que Y est un centre de modification permis pour $\tilde{\Delta}$. Soit donc

$$\tilde{\Phi} : \tilde{\Delta}' \longrightarrow \tilde{\Delta}$$

la modification de centre Y. $\tilde{\Delta}'$ est une installation lisse et nous obtenons un plongement

$$\begin{tikzcd} \Delta' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Phi"'] & \Delta' \arrow[d, "\tilde{\Phi}"] \\ \Delta \arrow[r, hook] & \Delta \end{tikzcd}$$

(en fait $Z' \hookrightarrow \tilde{Z}'$, et $W' \hookrightarrow \tilde{W}'$, et X' est le même pour les deux).

Mais nous pouvons maintenant appliquer le théorème 1.2.13 à X' et W', considérés comme transformés strictes de X et W respectivement dans la modification $\tilde{F} : \tilde{Z}' \longrightarrow \tilde{Z}$ de centre Y.

Rappelons que $f^{-1}(x) \simeq \operatorname{Proj} C_{X,x} / T_{Y,x}$ (resp. $G^{-1}(x) \simeq \operatorname{Proj} C_{W,x} / T_{Y,x}$) .

Soit $l_{x'} \subset C_{X,x} / T_{Y,x}$ (resp. $l^1_{x'} \subset C_{W,x} / T_{Y,x}$) la droite correspondant au point $x' \in f^{-1}(x) \cap G^{-1}(x)$, (i.e. $l_{x'} = l'_{x'} \subset \left(C_{X,x} / T_{Y,x}\right) \cap \left(C_{W,x} / T_{Y,x'}\right)$

l'intersection étant prise dans $T_{\tilde{Z},x}/T_{Y,x}$), et soit $L_{x'}$ l'image réciproque de $l_{x'}$ par la projection $T_{\tilde{Z},x} \longrightarrow T_{\tilde{Z},x}/T_{Y,x}$. Le théorème 1.2.13 nous dit que, sous les hypothèses a) et b),

$$L_{x'} \subset T_{X,x} \cap T_{W,x} ,$$

que nous avons des isomorphismes naturels

$$C_{X'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} \xrightarrow{\sim} C_{X,x}/L_{x'}$$

$$C_{W'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} \xrightarrow{\sim} C_{W,x}/L_{x'} ,$$

et enfin que $\tilde{F}^{-1}(x)$ est transverse (cf. ch.II, § 1) à X' et à W' en x'. Nous avons donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_{X',x'} \arrow[d, "dr'"'] & C_{X'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "dr'|C_{X'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'}"] \arrow[dl, phantom, "(1)"] & C_{X,x}/L_{x'} \arrow[d, "dr/L_{x'}"] \\
C_{W',x'} & C_{W'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[r, "\sim"] & C_{W,x}/L_{x'}
\end{tikzcd}$$

grâce à la naturalité des isomorphismes cités plus haut. $dr/L_{x'}$ est la flèche déduite de $dr : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ de la manière évidente. Pour montrer que r' est transverse à X' en x', il faut montrer que dr' est plat. Mais la transversalité de $\tilde{F}^{-1}(x)$ avec x' et W' nous dit que i et j sont des immersions régulières (cf. ch. I, 5.1.1 et 5.1.2), et de plus que le carré (1) est cartésien. En effet, on peut écrire grâce à la transversalité :

$$C_{X'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} = C_{X',x} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'}$$

et

$$C_{W'\cap\tilde{F}^{-1}(x),x'} = C_{W',x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'} = T_{\tilde{G}^{-1}(x),x'}$$

enfin $\tilde{G} : \tilde{W}' \longrightarrow \tilde{W}$ est la modification de $\tilde{W}$ de centre Y. Enfin, $T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'} = d\tilde{r}^{-1}\left(T_{\tilde{G}^{-1}(x),x'}\right)$ et $\tilde{r}|Z' = r'$. Ceci nous permet de déduire la platitude de dr' de celle de $dr'|C_{X',x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'}$ grâce au lemme déjà utilisé (ch. I, 5.1.2.4).

2.7 <u>Remarque</u> : Avec les notations et hypothèses de la proposition 2.6

a) le carré

$$\begin{tikzcd} C_{f^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C_{F^{-1}(x),x'} \arrow[d, hook] \\ C_{X',x'} \arrow[r, hook] & C_{Z',x'} \end{tikzcd}$$

est cartésien;

b) $\mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}Z'}(gr_{x'}F^{-1}(x), gr_{x'}X') = 0$.

En effet, remarquons que comme r est lisse, dire que $Y \subset W_o$ équivaut à dire que $Y \subset Z_o$, strate de Samuel de x dans W, et dire que $H_{W',x'} = H_{W,x}$ équivaut à dire que $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$ puisque r' est lisse. Le théorème 1.2.3 appliqué d'une part à $f : X' \longrightarrow X$ et d'autre part à $F : Z' \longrightarrow Z$, transformés stricts de X et Z respectivement par $\tilde{F} : \tilde{Z}' \to \tilde{Z}$ nous fournit deux carrés cartésiens : le carré de droite, et le carré composé dans :

$$\begin{tikzcd} C_{f^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_{F^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C_{\tilde{F}^{-1}(x),x'} \arrow[d] \\ C_{X',x'} \arrow[r, hook] & C_{Z',x'} \arrow[r, hook] & C_{\tilde{Z}',x'} \end{tikzcd}$$

d'après un lemme classique, le carré de gauche est cartésien d'où le point a).

Pour montrer b), souvenons-nous que nous avons vu (ch. I, 5.1.1) que la transversalité de $\tilde{F}^{-1}(x)$ avec X' (resp. avec Z') en x' s'exprimait par la nullité de $\mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}\tilde{Z}'}\left(gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x),\, gr_{x'}\,X'\right)$

(resp. $\mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}\tilde{Z}'}\left(gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x),\, gr_{x'}\,Z'\right)$). Les hypothèses $H_{X',x'} = H_{X,x}$ $H_{W',x'} = H_{W,x}$ (i.e. $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$) nous assurent ces transversalités d'après le théorème 1.2.13. Or nous avons la suite exacte de définition :

$$0 \longrightarrow in_{x'}(X',Z') \longrightarrow gr_{x'}\,Z' \longrightarrow gr_{x'}\,X' \longrightarrow 0$$

et donc, puisque $\mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}Z'}\left(gr_{x'}\,F^{-1}(x),\, gr_{x'}\,Z'\right) = 0$, la suite exacte :

$$(*)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}Z'}\left(gr_{x'}\,F^{-1}(x), gr_{x'}\,X'\right) \longrightarrow gr_{x'}\,F^{-1}(x) \underset{gr_{x'}Z'}{\otimes} in_{x'}(X',Z')$$

$$\longrightarrow gr_{x'}\,F^{-1}(x) \underset{gr_{x'}Z'}{\otimes} gr_{x'}\,Z' \longrightarrow \dots \longrightarrow gr_{x'}F^{-1}(x) \underset{gr_{x'}Z'}{\otimes} gr_{x'}X' \longrightarrow 0 .$$

Mais puisque, $C_{F^{-1}(x),x'} = C_{Z',x'} \cap T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'}$ (1.2 .13), cette suite exacte coïncide avec

$$(**)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}\tilde{Z}'}\left(gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x), gr_{x'}\,X'\right) \longrightarrow gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} in_{x'}(X',Z')$$

$$\longrightarrow gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} gr_{x'}\,Z' \longrightarrow \dots \longrightarrow gr_{x'}\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} gr_{x'}X' \longrightarrow 0 .$$

Mais on a aussi la suite exacte :

$$(***)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}\tilde{Z}'}\left(gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x), gr_{x'}\,Z'\right) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{gr_{x'}\tilde{Z}'}\left(gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x), gr_{x'}\,X'\right) \longrightarrow$$

$$\dots \longrightarrow gr_{x'}\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} in_{x'}(X',Z') \longrightarrow gr_{x'}\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} gr_{x'}\,Z'$$

$$\longrightarrow gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} gr_{x'}\,Z' \longrightarrow gr_{x'}\,\tilde{F}^{-1}(x) \underset{gr_{x'}\tilde{Z}'}{\otimes} gr_{x'}\,X' \longrightarrow 0 ,$$

et puisque $H_{X',x'} = H_{X,x}$; $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$, $\tilde{F}^{-1}(x)$ est transverse à Z' et X', et donc les deux Tor_1 qui figurent dans (***) sont nuls. On doit donc, d'après la nullité du premier, avoir

$$0 = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_{x'}\tilde{Z}'}\left(\mathrm{gr}_{x'}\tilde{F}^{-1}(x), \mathrm{gr}_{x'} X'\right) = \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_{x'}Z'}\left(\mathrm{gr}_{x'} F^{-1}(x), \mathrm{gr}_{x'} X'\right) ,$$

Q. E. D.

Bien que Z' ne soit plus lisse, nous avons envie de dire que nous venons de montrer que $F^{-1}(x)$ est transverse à X' dans Z' en x'.

2.8 <u>Proposition</u> Soient $\Delta = (X,Z,W,r)$ une bonne installation et $x \in W \cap X$. Soit $\Phi : \Delta' \longrightarrow \Delta$ une modification permise d'installation et $x' \in W' \cap X'$ tel que $G(x') = x$ et $H_{X',x'} = H_{X,x}$, $H_{W',x'} = H_{W,x}$. Alors, si Δ est transverse en x et si $(f_1,\ldots,f_m)$ est une 0-base standard de Δ normalisée en x (ch. I, 7.2.10), les transformés $(f'_1,\ldots,f'_m)$ forment une 0-base standard de Δ' normalisée en x' [où, si $\nu_i = \nu_x(f_i) = \nu_Y(f_i)$ (cf. 11.1 et 11.3.3), si w est un générateur de l'Idéal inversible définissant $F^{-1}(Y)$ dans Z' au voisinage de x', on a posé

$$f'_i = \frac{f_i \circ F}{w^{\nu_i}} \quad \text{(transformée de } f_i\text{)} \ ] .$$

<u>Démonstration</u> : Nous allons d'abord démontrer que puisque $H_{X',x'} = H_{X,x}$ et $H_{W',x'} = H_{W,x}$, on a

$$\nu^*_{\Delta',x'} = \nu^*_{\Delta,x} .$$

Pour cela remarquons que puisque Δ est transverse en x, $d_{\Delta,x} \geq 1$, et il résulte alors de (ch. I, 3.1.4 seq. et 3.2.2) que toute 0-base standard normalisée de Δ en x est une 1-base standard de Δ en x, et souvenons-nous que $H_{W',x'} = H_{W,x}$ équivaut à $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$ et que le théorème 1.2.13 nous fournit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_{f^{-1}(x),x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{X,x}/L_{x'} \\ \downarrow & 0 & \downarrow \\ C_{F^{-1}(x),x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{Z,x}/L_{x'} \end{array}$$

qui implique que $\nu_x^*(f^{-1}(x),F^{-1}(x)) = \nu_x^*(C_{X,x}/L_{x'}, C_{Z,x}/L_{x'}) = \nu_x^*(C_{X,x}, C_{Z,x}) = \nu_x^*(X,Z)$.
Or la partie a) de la remarque 2.7 nous dit que si $(g_1',\ldots,g_{m'}')$ est une base standard pour l'idéal de X' dans Z' en x', et si nous posons $\varphi' = \mathrm{in}_{x'}\, g_i'$, $\bar{\varphi}_i' =$ classe de φ_i modulo $\mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z')$, les $\bar{\varphi}_i'$ engendrent $\mathrm{in}_{x'}(f^{-1}(x),F^{-1}(x))$. La partie b) de cette même remarque nous dit que les $\bar{\varphi}_i'$ forment un système minimal de générateurs de $\mathrm{in}_{x'}(f^{-1}(x),F^{-1}(x))$. En effet, si nous avions une relation :

$$\bar{\varphi}_i' = \sum_{j=1}^{m'} \bar{Q}_j\, \bar{\varphi}_j' \quad \text{où } \bar{Q}_j \in \mathrm{gr}_{x'}\, F^{-1}(x)$$

nous en déduirions une relation :

$$(+) \qquad \varphi_i' - \sum_{j=1}^{m'} Q_j\, \varphi_j' = \psi$$

avec $Q_j \in \mathrm{gr}_{x'}\, Z'$ tels que $\bar{Q}_j = Q_j \bmod \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z')$ et $\psi \in \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z')$, et donc $\psi \in \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z') \cap \mathrm{in}_{x'}(X',Z')$. Mais il est équivalent de dire que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{gr}_{x'} Z'}(\mathrm{gr}_{x'}\, F^{-1}(x), \mathrm{gr}_{x'}\, X') = 0$ et que $\mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z') \cap \mathrm{in}_{x'}(X',Z) = \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z') \,.\, \mathrm{in}_{x'}(X',Z')$. Ainsi $\psi \in \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z') \,.\, \mathrm{in}_{x'}(X',Z')$. Si nous regardons seulement les termes de degré ν_i dans l'égalité (+) nous trouvons, puisque par hypothèse les ordres des φ_i' vont croissant avec i, une égalité :

$$\varphi_i' - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j\, \varphi_j' = \psi_{\nu_i}$$

où $\psi_{\nu_i} \in \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z') \,.\, \mathrm{in}_{x'}(X',Z')$. Mais puisque les éléments de

$\mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z')$ sont au moins de degré 1, nous devrions avoir

$\psi_{\nu_i} = \sum_{j=1}^{i-1} R_j \varphi'_j$. D'où une relation $\varphi'_i = \sum_{j=1}^{i-1} (Q_j + R_j)\varphi'_j$ qui contredirait la minimalité du système de générateurs $(\varphi'_1,\ldots,\varphi'_{m'})$. En particulier, $\bar{\varphi}'_i \neq 0$, et donc le degré de φ'_i est égal à celui de φ_i . Ceci nous démontre que $\nu^*_{x'}(X',Z') = \nu^*_{x'}(f^{-1}(x),F^{-1}(x))$ et comme nous avons montré plus haut que $\nu^*_x(f^{-1}(x),F^{-1}(x)) = \nu^*_{x'}(X,Z)$ nous avons bien montré $\nu^*_{\Delta',x'} = \nu^*_{\Delta,x}$.

Nous allons maintenant montrer que $\nu_{x'}(f'_i) = \nu_x(f_i)$ pour tout i, $1 \leq i \leq m$.

Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que la modification de Z de centre Y est permise pour "l'hypersurface" X_i d'équation $f_i = 0$ dans Z. Or, si $(f_1,\ldots,f_m)$ est une 0-base standard Δ-normalisée, nous savons (grâce à ch. I, 1.1.1, 11.3.3) que $\nu_Y(f_i) = \nu_x(f_i) = \nu_i$ $(1 \leq i \leq m)$ un voisinage de x, puisque Y est un centre de modification permis pour X et Z. Nous allons maintenant utiliser le fait que Δ est transverse en x. Si nous désignons par $\bar{N}$ l'idéal de $\mathrm{gr}_x Z$ engendré par $\bigoplus_{i\geq 1} \mathrm{gr}^i_x W$, la transversalité nous dit (ch. I, 5.1.2) que $\mathrm{in}_{\bar{N}}(\mathrm{in}_x f_i) = \lambda_i(\underline{Z}) \in \mathbb{C}[\underline{Z}]$ où $\lambda_i(\underline{Z})$ est un polynôme en Z homogène de degré ν_i et donc en particulier non nul. Donc $\mathrm{in}_{\bar{N}}(\mathrm{in}_x f_i)$ est non diviseur de zéro dans $\mathrm{gr}_{\bar{N}}(\mathrm{gr}_x Z)$ ce qui entraîne que $\mathrm{in}_x f_i$ est non diviseur de zéro dans $\mathrm{gr}_x Z$. De même, si nous désignons par $\bar{\mathcal{J}}$ l'idéal de $\mathrm{gr}_Y Z$ engendré par $\bigoplus_{i\geq 1} \mathrm{gr}^i_Y W$, nous trouvons $\mathrm{in}_{\bar{\mathcal{J}}}(\mathrm{in}_Y f_i) = \Lambda_i(\underline{Z}) \in \mathcal{O}_Y[\underline{Z}]$ et λ_i est l'image de Λ_i par la surjection canonique $\mathcal{O}_Y[\underline{Z}]$ $\mathbb{C}[Z]$, Y étant lisse, $\mathrm{in}_{\bar{\mathcal{J}}}(\mathrm{in}_Y f_i)$ est non diviseur de zéro dans $\mathrm{gr}_{\bar{\mathcal{J}}}(\mathrm{gr}_Y Z)$, donc $\mathrm{in}_Y f_i$ est non diviseur de zéro dans $\mathrm{gr}_Y Z$. Ceci nous montre que $\mathrm{gr}_x X_i = \mathrm{gr}_x Z/(\mathrm{in}_x f_i)$ et $\mathrm{gr}_Y X_i = \mathrm{gr}_Y Z/(\mathrm{in}_Y f_i)$, mais aussi que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C_{X_i,x} \arrow[r] \arrow[d, hook] & C_{X_i,Y}(x) \arrow[d, hook] \\
C_{Z,x} \arrow[r] & C_{Z,Y}(x)
\end{tikzcd}$$

est cartésien, (encore une fois parce que $\nu_Y(f_i) = \nu_x(f_i) = \nu_i$). Mais puisque Z est normalement plat le long de Y, ceci nous montre que la suite

$$0 \longrightarrow T_{Y,x} \longrightarrow C_{X_i,x} \longrightarrow C_{X_i,Y}(x) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de cônes (ch. I, § 9), c'est-à-dire que X_i est normalement plat le long de Y. En appliquant le théorème 1.2.8 à X_i, on obtient, en notant X_i' la transformée stricte de X_i, définie par $f_i' = 0$ au voisinage de $x' \in Z'$,

$$H_{X_i',x'} \leq H_{X_i,x}$$

ce qui implique, si nous notons $\mathfrak{M}_x(X)$ la multiplicité :

$$\mathfrak{M}_{x'}(X_i') \leq \mathfrak{M}_x(X_i) \quad .$$

Or, on vérifie facilement que puisque X_i (resp. X_i') est une hypersurface de Z (resp. Z') on a (puisque $in_x f_i$ n'est pas diviseur de zéro)

$$\mathfrak{M}_x(X_i) = \nu_i \cdot \mathfrak{M}_x(Z) \quad (\text{resp. } \mathfrak{M}_{x'}(X_i') \geq \nu_{x'}(f_i')\mathfrak{M}_{x'}(Z')) \ .$$

Or, puisque $H_{W',x'} = H_{W,x}$ et que r et r' sont lisses, on a $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$ et donc en particulier $\mathfrak{M}_x(Z) = \mathfrak{M}_{x'}(Z')$. On déduit de tout cela l'inégalité :

$$\nu_{x'}(f_i') \leq \nu_i = \nu_x(f_i) \qquad 1 \leq i \leq m \ .$$

Et nous allons utiliser cette inégalité, ainsi que le fait que $(f_1,\ldots,f_m)$ est Δ-normalisée, pour montrer que l'on a $\nu_{x'}(f_i') = \nu_i$, $1 \leq i \leq m$.

Soit k le plus grand indice i tel que

$$\nu_{x'}(f_i') = \nu_i \quad .$$

Notons que $k \geq 1$ puisque si l'on avait $\nu_{x'}(f'_1) < \nu_1$, certainement $\nu^*_{\Delta',x'} < \nu^*_{\Delta,x}$ pour l'ordre lexicographique ce qui est contradictoire. De plus, encore une fois parce que $\nu^*_{\Delta',x'} = \nu^*_{\Delta,x}$ et $\nu_{x'}(f'_i) \leq \nu_x(f_i)$, $in_{x'} f'_1, \ldots, in_{x'} f'_k$ doivent former un système minimal de générateurs pour l'idéal engendré par les éléments de degré $< \nu_{k+1}$ de $in_{x'}(X',Z')$ (utiliser la réduction à $f^{-1}(x)$ et la transversalité). Ainsi, puisque par définition de k, $\nu_{x'}(f'_{k+1}) < \nu_{k+1}$ (rappelons-nous que nous voulons montrer que $k = m$. Nous supposons donc $k < m$ et fabriquons une contradiction), on doit avoir une relation

$$in_{x'} f'_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} Q_j \, in_{x'} f'_j \quad \text{où } Q_j \in gr_{x'} Z' \ ,$$

d'où, par restriction à $r'^{-1}(x')$, une relation que l'on peut écrire :

$$\overline{in_{x'} f'_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \overline{Q}_j \lambda'_i$$

où $\lambda'_i \in gr_{x'} r'^{-1}(x')$ est la "partie en Z " de $in_{x'} f'_i$ (cf.) qui existe puisque nous savons, grâce à la proposition 2.6 que r' est transverse à X' en x'.

Or, rappelons-nous que nous avons construit en 2.6 un diagramme (qui appliqué à Z donne :)

$$\begin{tikzcd}
C_{Z',x'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "dr'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C_{F^{-1}(x),x'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & C_{Z,x}/L_{x'} \arrow[d, "dr/L_{x'}"] \\
C_{W',x'} & C_{G^{-1}(x),x'} \arrow[l, hook'] & C_{W,x}/L_{x'} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes de droite sont naturels.

Ceci nous montre, en considérant simultanément le même diagramme pour X', que nous pouvons écrire $gr_{x'} r'^{-1}(x') = \mathbb{C}[Z'_1, \ldots, Z'_n]$ où Z_i est le transporté par l'isomorphisme $C_{F^{-1}(x),x'} \xrightarrow{\sim} C_{Z,x}/L_{x'}$ de $Z_i = in_x Z_i$ et que alors on a

$$(*) \qquad \lambda'_i(Z'_1, \ldots, Z'_r) \equiv \lambda_i(Z'_1, \ldots, Z'_r)$$

où λ_i est la partie en Z de $in_x f_i$.
Souvenons-nous d'autre part que nous avions en 2.4 un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(Y) & \hookrightarrow & Z' \\ {\scriptstyle r'|F^{-1}(Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\ G^{-1}(Y) & \hookrightarrow & W' \end{array}$$

où $F^{-1}(Y) = \mathrm{Projan}_Y C_{Z,Y}$ et $G^{-1}(Y) = \mathrm{Projan}_Y C_{W,Y}$.
En utilisant les identifications $C_{Z,Y}(x) = C_{Z,x} / T_{Y,x}$; $C_{W,Y}(x) = C_{W,x} / T_{Y,x}$ ceci nous permet, si nous avons choisi des coordonnées $z_1,\dots,z_r$ sur $r^{-1}(x)$ telles que $in_x z_i = Z_i$, de leur faire correspondre des coordonnées $z'_1,\dots,z'_r$ sur $r'^{-1}(x')$ telles que $in_{x'} z'_i = Z'_i$, et que, si nous écrivons $f_i = \Sigma f_{i,A} z^A$, $f_{i,A} \in \mathcal{O}_{W,x}$, on ait $f'_i = \Sigma f'_{i,A} z'^A$ avec

$$f'_{i,A} = \frac{f_{i,A} \circ G}{W^{\nu_i - |A|}}$$

où $W \in \mathcal{O}_{W',x'}$ est un générateur de l'idéal inversible de $G^{-1}(Y)$ en x' dans W'.
Ainsi, puisque par hypothèse la base $(f_1,\dots,f_m)$ est Δ-normalisée, la relation (*) nous dit qu'une égalité

$$\overline{in_{x'} f'_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \overline{Q}_i \lambda'_i$$

entraîne

$$\overline{in_{x'} f'_{k+1}} = 0 \quad .$$

C'est-à-dire que si nous notons $\overline{N}'$ l'idéal de $gr_{x'} Z4$ engendré par $\bigoplus_{i\geq 1} gr^i_{x'} W'$,

$$in_{x'} f'_{k+1} \in \overline{N}' \cap in_{x'}(X',Z') \quad .$$

Mais comme nous l'avons déjà remarqué, par la transversalité de r' à X' en x', $\overline{N}' \cap in_{x'}(X',Z') = \overline{N}' \cdot in_{x'}(X',Z')$, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$in_{x'} f'_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} Q_i \, in_{x'} f'_i \quad \text{avec } Q_i \in \overline{N}' \quad .$$

En regardant cette relation modulo $\overline{N}'^2$, on en déduirait de même une relation analogue avec $Q_i \in \overline{N}'^2$, etc.... puisque $\bigcap_{n=o}^{\infty} \overline{N}^n = (0)$, on en déduirait $in_{x'} f'_{k+1} = 0$, ce qui est absurde. Donc $k = m$. D'autre part, l'identité (*) nous montre immédiatement que $(f'_1,\ldots,f'_m)$ est $(\mathcal{O}_{W',x'}, Z')$-normalisée.

Q. E. D.

2.9 <u>Remarque</u> : Soient $\Delta = (X,Z,W,r)$ une bonne installation, transverse en $x \in X \cap W$, et Y un centre de modification permis en x pour Δ.
Soit $\Phi : \Delta' \longrightarrow \Delta$ la modification de centre Y, et soit x' un point de $W' \cap X'$ tel que si $\Phi(x') = x$ et si $l_{x'}$ est la droite de $C_{Z,x}/T_{Y,x}$ correspondant à x' (cf. 2.6), $L_{x'} \subset C_{Z,x}$ l'image réciproque de $l_{x'}$ par la projection canonique $C_{Z,x} \longrightarrow C_{Z,x}/T_{Y,x}$, on ait : $L_{x'} \subset T_{X,x} \cap T_{W,x}$.
Alors Δ' est 0-transverse en x', c'est-à-dire que $d_{\Delta',x'} > 0$, ou encore $r'|X' \longrightarrow W'$ est plat en x'.

<u>Démonstration</u> : Rappelons-nous que, d'après la construction de r', le carré

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(Y) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r'|F^{-1}(Y)"'] & Z' \arrow[d, "r'"] \\ G^{-1}(Y) \arrow[r, hook] & W' \end{tikzcd}$$

est cartésien, et donc aussi le carré :

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(x) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\ G^{-1}(x) \arrow[r, hook] & W' \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que $F^{-1}(x) \cap X' = r'^{-1}(G^{-1}(x)) \cap X'$, ou encore que le carré

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(x) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r'|f^{-1}(x)"'] & X' \arrow[d, "r'|X'"] \\ G^{-1}(x) \arrow[r, hook] & W' \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Les cônes normaux $C_{X,Y}$ et $C_{W,Y}$ étant plats sur Y, et Y étant lisse en x, les flèches horizontales sont des immersions régulières de même codimension. D'après (ch.I, 5.1.2.4), pour montrer que $r'|X'$ est plat en x', il suffit de montrer que $r'|f^{-1}(x)$ l'est. Or, puisque $L_{x'} \subset T_{X,x} \cap T_{W,x}$, il résulte de (ch. II, 1.2.2 seq.) que nous avons un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_{f^{-1}(x),x'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "d(r'|f^{-1}(x))"'] & C_{X,x}/L_{x'} \arrow[d, "dr/L_{x'}"] \\ C_{G^{-1}(x),x'} \arrow[r, "\sim"] & C_{W,x}/L_{x'} \end{tikzcd}$$

et puisque Δ est transverse en x, $dr : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,x}$ est plat, donc aussi $dr/L_{x'}$. Ceci montre que l'installation $\Phi^{-1}(x) = (f^{-1}(x), F^{-1}(x), G^{-1}(x), r'|F^{-1}(x))$ est 1-transverse, donc aussi 0-transverse, ce qui achève la démonstration.

2.10 <u>Proposition</u> : Soient $\mathbb{A} = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, transverse en $x \in X \cap W$, et Y un centre de modification permis pour $\mathbb{A}$ en x.
Soient $\Phi : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$ la modification de centre Y, et x' un point de $W' \cap X'$ tel que $\Phi(x') = x$ et $H_{W',x'} = H_{W,x}$.
Si il existe une base standard $(f_1, \ldots, f_m)$ pour X dans Z en x telle que $\nu_Y(f_i) = \nu_x(f_i) = \nu_i$ $(1 \leq i \leq m)$, que $\nu_{x'}(f'_i) = \nu_i$ et que $(f'_1, \ldots, f'_m)$ soit une base standard pour X' dans Z' en x', on l'égalité :

$$H_{X',x'} = H_{X,x} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Reprenons les notations de 2.8. Soit X_i l'"hypersurface" de Z définie par $f_i = 0$, et X'_i sa transformée stricte par Φ. Puisque par hypothèse $\mathfrak{M}_{x'}(X'_i) = \nu_i = \mathfrak{M}_x(X_i)$, et que $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$ (car $H_{W',x'} = H_{W,x}$) nous avons $H_{X'_i,x'} = H_{X_i,x}$. En particulier, nous avons donc que $F^{-1}(x)$ est transverse à X'_i, i.e. $C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'} = C_{F^{-1}(x),x'} \cap C_{X'_i,x'}$ (cf. 2.7) et nous avons un isomorphisme naturel

$$C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'} \xrightarrow{\sim} C_{X_i,x} / L_{x'}$$

avec les notations habituelles de ce paragraphe.
(Il est clair que $L_{x'} \subset T_{X_i,x}$, la modification de centre Y étant permise pour X_i, puisque $\nu_Y(f_i) = \nu_x(f_i)$ et que Y est permis pour Δ). Mais $C_{X_i,x} / L_{x'}$ est défini dans $C_{Z,x} / L_{x'}$ par l'équation $\mathrm{in}_x f_i = 0$ (et $\mathrm{in}_x f_i$ ne dépend pas des variables correspondant à $L_{x'}$). La naturalité des isomorphismes nous donne un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{X_i,x} / L_{X'} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ C_{F^{-1}(x),x'} & \xrightarrow{\sim} & C_{Z,x} / L_{x'} \end{array}$$

qui montre que $C_{F^{-1}(x) \cap X'_i, x'}$ est défini dans $C_{F^{-1}(x),x'}$ par l'annulation

d'un élément homogène de degré ν_i. Avec l'écriture de 2.8 :

$$\mathrm{in}_{x'} f'_i = \varphi' + \varepsilon'$$

où φ' est un élément homogène de degré ν_i de $\mathbb{C}[Z'_1,\dots,Z'_r]$ et $\varepsilon' \in \mathrm{in}_{x'}(F^{-1}(x),Z')$. (Rappelons-nous que $F^{-1}(x) = r'^{-1}(G^{-1}(x))$). Ceci montre que $\delta_i = \mathrm{Sup}\{\delta \,/\, \mathrm{in}_{x'}(f'_i, \underline{\Delta}', \delta)$ soit de degré $\nu_i\}$ est au moins égal à 1. Or, puisque par hypothèse les f'_i forment une base standard par Δ' en x', d'après (ch. I, 7.1.8 et 7.1.9) si nous savons montrer que $d_{\Delta',x'} > 0$, nous aurons $d_{\Delta',x'} \geq \inf \delta_i \geq 1$ et donc r' sera transverse en x' (ch. I, 5.1.1).

D'après 2.9, puisque nous savons déjà que $L_{x'} \subset T_{W,x}$ (parce que $H_{W',x'} = H_{W,x}$) il nous suffit de montrer que $L_{x'} \subset T_{X,x}$,mais comme $(f_1,\dots,f_m)$ est une base standard, $C_{X,x} = \bigcap_{i=1}^{m} C_{X_i,x}$, donc $T_{X,x} \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} T_{X_i,x}$.

Nous avons donc montré que r' est transverse à X' en x'. Pour terminer la démonstration, remarquons que d'après 5.1.1, puisque r est transverse en x, et r' en x', nous avons :

$$H_{X,x} = H_{W,x} * G_{X\cap r^{-1}(x),x}$$

$$H_{X',x'} = H_{W',x'} * G_{X'\cap r'^{-1}(x),x'} .$$

Or, grâce à la transversalité de r', nous savons de plus que

$$C_{X'\cap r'^{-1}(x),x'} = C_{X',x'} \cap T_{r'^{-1}(x',x'}$$

$$= \text{fibre de } C_{f^{-1}(x),x'} \longrightarrow C_{G^{-1}(x),x'}$$

$$= \text{fibre de } C_{X,x} / L_{X'} \longrightarrow C_{W,x} / L_{x'} = C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x'} = C_{X\cap r^{-1}(x),x}$$

donc $H_{X\cap r^{-1}(x),x'} = H_{X'\cap r'^{-1}(x),x'}$, et puisque $H_{W',x'} = H_{W,x}$, nous avons bien $H_{X',x'} = H_{X,x}$.

2.11 <u>Remarque</u> : Soient Δ une bonne installation transverse en $x \in X \cap W$, $\Phi : \Delta' \to \Delta$ une modification permise en x. Si $x' \in \Phi^{-1}(x)$ est tel que

1) $H_{X',x'} = H_{X,x}$;

2) $L_{x'} \subset T_{W,x}$

alors $x' \in W'$ et $H_{W',x'} = H_{W,x}$.

<u>Démonstration</u> : Puisque $L_{x'} \subset T_{W,x}$, $L_{x'} \subset C_{W,Y}(x)$ puisque Δ (de centre Y) est permise en x, donc $x' \in W'$. D'autre part, remarquons que, avec les notations de 2.6, nous avons

$$C_{f^{-1}(x),x'} \subset C_{F^{-1}(x),x'} \cap C_{X',x'} \subset T_{\tilde{F}^{-1}(x),x'} \cap C_{X',x'}$$

et puisque $H_{X',x'} = H_{X,x}$, nous avons d'après (ch. II, 1.2) égalité des extrémités, donc

$$C_{f^{-1}(x),x'} = C_{F^{-1}(x),x'} \cap C_{X',x'} ,$$

ce qui entraîne que le carré

$$\begin{tikzcd} C_{f^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_{Z',x'} \arrow[d] \\ G_{G^{-1}(x),x'} \arrow[r, hook] & C_{W',x'} \end{tikzcd}$$

est cartésien. On conclut par les mêmes égalités que dans 2.10 .

2.12 <u>Remarque</u> : Soient Z un espace analytique lisse, W un sous-espace lisse de Z, X un sous-espace analytique de Z, x un point de $X \cap W$. Si $T_{W,x} \subseteq T_{X,x}$, il existe une rétraction lisse $r : Z \to W$ transverse à X en x. En effet, puisque $T_{W,x} \subseteq T_{X,x}$, on peut écrire $C_{X,x} = C_{X,x} / T_{W,x} \times T_{W,x}$. Si l'on écrit $W \times \mathbb{C}^1$ de telle sorte que la projection de $C_{Z,x}$ sur $T_{W,x}$ induise la projection de $C_{X,x}$ sur $T_{W,x}$, il est bien clair que $C_{X,x} \to T_{W,x}$ sera plat, et donc r transverse.

2.13 <u>Théorème</u> : Soient X un espace analytique, et $\Gamma \subset X$ une courbe (i.e. espace analytique de dimension pure 1) irréductible en $x \in \Gamma$. Alors, il existe une succession finie de modifications de centres ponctuels [c'est-à-dire un diagramme :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} \dots \longrightarrow & X^{(k)} & \xrightarrow{f_{k-1}} & X^{(k-1)} & \longrightarrow \dots \longrightarrow & X^{(o)} & = X \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \longrightarrow & \Gamma^{(k)} & \longrightarrow & \Gamma^{(k-1)} & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \Gamma^{(o)} & = \Gamma \\ & \uparrow & & & & & \\ \dots \longrightarrow & x^{(k)} & \longrightarrow & x^{(k-1)} & \longrightarrow & x^{(o)} & = x \end{array}$$

où : f_{i-1} est la modification de X^{i-1} de centre $x^{(i-1)}$;
$\Gamma^{(i)}$ est la transformée stricte de $\Gamma^{(i-1)}$ par f_{i-1} c'est-à-dire que $f_{i-1}|\Gamma^{(i)} \to \Gamma^{(i-1)}$ est la modification de $\Gamma^{(i-1)}$ de centre $x^{(i-1)}$;

enfin, $x^{(i)}$ est l'unique point de $\Gamma^{(i)}$ dont l'image soit $x^{(i-1)}$].
Succession de modifications telle que :

$$X^{(k)} \text{ soit normalement plat le long de } \Gamma^{(k)} \text{ en } x^{(k)} .$$

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, nous savons (ou bien démontrons par récurrence sur $\dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}_{\Gamma,x}/\mathcal{O}_{\Gamma,x}$) que l'on peut résoudre les singularités de Γ par un nombre fini de modifications de centre ponctuel. Rappelons que dans une modification $\Gamma' \to \Gamma$ de centre $x \in \Gamma$ d'une courbe, réduite et irréductible en x, il y a un seul point de Γ' au-dessus de x. En effet, $\mathcal{O}_{\Gamma,x}$ est un anneau local intègre, donc il en est de même de $\overline{\mathcal{O}}_{\Gamma,x}$, et donc il y a un seul point du normalisé $\overline{\Gamma}$ de Γ au-dessus de x, et $\overline{\Gamma}$ domine toutes les modifications de Γ de centre ponctuel. Nous pouvons donc supposer Γ lisse en x. D'après ce qui précède, nous définissons par induction un diagramme (*). Or le théorème de stabilisation (ch. II, 1.2.19) nous apprend qu'il existe k tel que

$$H_{X^{(k+N)},x^{(k+N)}} = H_{X^{(k)},x^{(k)}} \quad \text{pour tout } N \geq 0 .$$

Nous allons montrer que certainement $X^{(k)}$ est normalement plat le long de $\Gamma^{(k)}$ en $x^{(k)}$. Tout d'abord $\Gamma^{(k)}$ est lisse en $x^{(k)}$, puisque Γ est lisse en x. D'autre part, nous pouvons plonger (localement en $x^{(k)}$) $X^{(k)}$ dans un espaca lisse $Z^{(k)}$, et bien sûr nous avons des rétractioons $r^{(k)} : Z^{(k)} \longrightarrow \Gamma^{(k)}$ et donc une installation

$$\Delta^{(k)} = (X^{(k)}, Z^{(k)}, \Gamma^{(k)}, r^{(k)}) \quad .$$

Mais la modification de centre $x^{(k)}$ est bien sûr parmise pour $\Delta^{(k)}$, et $x^{(k+1)}$ étant l'unique point au-dessus de $x^{(k)}$, nous avons, avec les notations habituelles, $L_{x^{(k+1)}} \subset T_{\Gamma^{(k)}, x^{(k)}}$ et en fait

$$L_{x^{(k+1)}} = T_{\Gamma^{(k)}, x^{(k)}} \text{ , donc } T_{\Gamma^{(k)}, x^{(k)}} \hookrightarrow T_{X^{(k)}, x^{(k)}}$$

puisque $H_{X^{(k+1)}, x^{(k+1)}} = H_{X^{(k)}, x^{(k)}}$. Nous pouvons donc appliquer 2.12, et supposer la rétraction $r^{(k)}$ transverse à $X^{(k)}$ en $x^{(k)}$.
Si maintenant nous choisissons une base standard normalisée $(f_1, \ldots, f_m)$ pour $\Delta^{(k)}$ en $x^{(k)}$, nous pouvons d'une part appliquer 2.8 qui nous dit que les transformés $(f'_1, \ldots, f'_m)$ forment une base standard normalisée pour $\Delta^{(k+1)}$ en $x^{(k+1)}$, et d'autre part écrire explicitement les transformations :

$$f_i = \Sigma f_{i,A} Z^A \qquad f_{i,A} \in \mathcal{O}_{\Gamma^{(k)}, x^{(k)}}$$

$$f'_i = \Sigma \frac{f_{i,A} \circ G^{(k)}}{W^{\nu_i - |A|}} \qquad \text{où } G^{(k)} : \Gamma^{(k+1)} \longrightarrow \Gamma^{(k)} \text{ est la}$$

modification de centre $x^{(k)}$, qui nous montrent que $d_{\Delta^{(k+1)}, x^{(k+1)}} = d_{\Delta^{(k)}, x^{(k)}} - 1$. Ceci montre que, si $d_{\Delta^{(k)}, x^{(k)}} < +\infty$, au bout d'un nombre fini de pas, on aura une installation non transverse (ch. I, 5.1.1), alors que $H_{X^{(k+N)}, x^{(k+N)}}$ et $H_{\Gamma^{(k+N)}, x^{(k+N)}}$ ne peuvent plus changer : ceci contredit 2.6, donc

$$d_{\Delta^{(k)}, x^{(k)}} = +\infty \quad ,$$

ce qui entraîne d'après (ch. I, 5.1.5) que $X^{(k)}$ est normalement plat le long de $\Gamma^{(k)}$.

*
* *
*

C H A P I T R E III

CONTACT MAXIMAL

§ 1. CONTACT MAXIMAL : DEFINITION, EXISTENCE

1.1 <u>Définition</u> : Soient Z un espace analytique réduit, X un sous-espace analytique de Z, et $x \in X$. On considère l'ensemble des germes en x d'installations définies par la donnée d'un germe en x de sous-espace analytique W de Z tel que $T_{W,x} = T_{X,x}$, et d'un germe en x de rétraction lisse $r : Z \longrightarrow W$ transverse à X en x. On notera $T_x(X,Z)$ cet ensemble. Un représentant d'un élément de $T_x(X,Z)$ est donc une bonne installation $\Delta = (X \cap U, U, W, r)$ transverse à $X \cap U$ en x, où U est un voisinage ouvert de x dans Z. Par abus de notation, et puisque nous ne ferons que des considérations locales, nous continuerons de noter (X,Z,W,r) un élément de $T_x(X,Z)$.

1.2 <u>Définition</u> : On posera

$$d_x^\tau(X,Z) = \sup_{\Delta \in T_x(X,Z)} d_{\Delta,x} \qquad \text{si } T_x(X,Z) \neq \emptyset$$

$$d_x^\tau(X,Z) = 1 \qquad \text{si } T_x(X,Z) = \emptyset$$

$d_x^\tau(X,Z)$ est un invariant de l'immersion de X dans Z en x, que nous appellerons "exposant caractéristique strict" de l'immersion de X dans Z en x. "Exposant caractéristique" a été choisi pour rappeler que si $X \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ est l'immersion d'une courbe plane irréductible en x dans $\mathbb{C}^2$, le nombre $d_x^\tau(X,\mathbb{C}^2)$ n'est autre que le premier exposant caractéristique de Puiseux de X en x, cf. [12]. Le mot "strict" et l'exposant τ sont là pour rappeler la condition sur les espaces tangents stricts. Si l'on n'avait pas imposé cette condition, le supremum considéré aurait été trop souvent infini pour la notion soit intéressante.

1.3 <u>Remarque</u> : Puisque toutes les installations considérées sont tranverses, tous les $d_{\Delta,x}$ sont ≥ 1, et donc

$$d_x^\tau(X,Z) \in [1, +\infty] .$$

1.4 <u>Rappels et notations</u> : Rappelons que si $\Delta = (X, Z, W, r)$ est une bonne installation en x, nous avons au ch. I (2.1.9) identifié tous les $gr_x \Delta; d$ à $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$ où $Z_i = in_x z_i$, $(z_1, \ldots, z_r)$ étant un système de coordonnées locales autour de x pour la fibre lisse $r^{-1}(x)$. Dans la suite, nous considérons, comme en (ch. I, 3.0.6) les idéaux définissant les différents $C^d_{\Delta,x}$ dans $C^d_{Z,x}$ comme des idéaux de $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$. D'autre part, rappelons que les tropismes critiques d'une installation qui sont strictement plus grands que 1 ne dépendent pas de la rétraction (ch. I, 3.2.3).

1.5 <u>Théorème</u> : Si $d^\tau_x(X, Z) > 1$, pour $\Delta \in T_x(X, Z)$ les conditions suivantes sont équivalentes : (avec les notations de 1.4)

1) $d_{\Delta,x} < d^\tau_x(X, Z)$;

2) il existe un unique $gr_x W$-automorphisme σ de $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$ tel que

   a) $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W \quad (1 \leq i \leq r)$;

   b) $\sigma(In_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)) = In_x(\Delta, \underline{\Delta}, 1)$;

3) si $(f_1, \ldots, f_m)$ est une 0-base standard normalisée de Δ en (ch. I, 7.2.11), il existe un unique $gr_x W$-automorphisme σ de $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$ tel que

   a) $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W \quad (1 \leq i \leq r)$;

   b) $\sigma(in_x(f_j, \underline{\Delta}, d)) = in_x(f_j, \underline{\Delta}, 1) \quad (1 \leq j \leq m)$, où $d = d_{\Delta,x}$.

<u>Démonstration</u> : Nous allons tout d'abord démontrer deux lemmes :

<u>Lemme 1</u> : Soit σ un $gr_x W$-automorphisme de $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$ tel que $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W$ $(1 \leq i \leq r)$. Soit V^σ (resp. V^σ_1) l'ensemble des éléments de $gr^0_x W[Z_1, \ldots, Z_r] = \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_r]$ qui sont invariants par σ (resp. homogènes de degré 1 et invariants par σ). Alors

$$V^\sigma = \mathbb{C}[V^\sigma_1] \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Au prix d'un changement linéaire sur les variables $Z_1,\dots,Z_r$, on peut supposer $V_1^\sigma = \mathbb{C}\,.\,Z_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\,.\,Z_k$ $(0 \le k \le r)$. Si nous posons $Z' = (Z_1,\dots,Z_k)$; $Z'' = (Z_{k+1},\dots,Z_r)$ un élément $f \in \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$ peut s'écrire

$$f = \sum_{A \in \mathbb{Z}_o^k} f_A Z'^A \quad \text{avec } f_A \in \mathbb{C}[Z_{k+1},\dots,Z_r] \quad ,$$

or, $\sigma(f) = f$ si et seulement si $\sigma(f_A) = f_A$ pour tout A, et il nous faut montrer que cela entraîne que $f_A \in \mathbb{C}$. Nous sommes donc ramenés à montrer le lemme dans le cas où $V_1^\sigma = 0$, c'est-à-dire à montrer que $V^\sigma \neq \mathbb{C}$ entraîne $V_1^\sigma \neq 0$. Soit donc $g \in V^\sigma$, les termes homogènes de plus bas degré de g étant de degré ≥ 1. Puisque $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W$, chaque composante homogène de g doit être dans V^σ. Supposons donc g homogène de degré $d \ge 1$. Si $d = 1$, $g \in V_1^\sigma$ et donc $V_1^\sigma \neq (0)$. Sinon, posons $\sigma Z_i - Z_i = S_i \in gr_x W$, et écrivons que ${}^\sigma g = g$, c'est-à-dire

$$g(Z_1 + S_1,\dots,Z_r + S_r) = g(Z_1,\dots,Z_r) \ .$$

En dérivant par rapport à Z_i , nous obtenons

$$\frac{\partial g}{\partial Z_i}(Z_1 + S_1,\dots,Z_r + S_r) = \frac{\partial g}{\partial Z_i}(Z_1,\dots,Z_r)$$

mais l'identité d'Euler, applicable puisque nous sommes en caractéristique 0, nous assure qu'au moins un des $\frac{\partial g}{\partial Z_i}$ sera non nul. Son degré étant inférieur d'une unité à d, nous avons construit un élément homogène de degré d-1 de V^σ. En itérant, nous obtiendrons un élément non nul de V_1^σ. Nous avons ainsi montré que $V^\sigma \subset \mathbb{C}[V_1^\sigma]$. L'inclusion inverse étant évidente, le lemme 1 est démontré.
Le rôle du lemme 1 est d'aider à démontrer le :

<u>Lemme 2</u> : Soit σ un $gr_x W$-automorphisme de $gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$, tel que $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W$ $(1 \le i \le r)$. Soient I_o un idéal homogène de $gr_x^o W[Z_1,\dots,Z_r] = \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$ et $I = I_o \,.\, gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$. On suppose

qu'il n'existe pas de sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]_1$ $(=\mathbb{C}\,.\,Z_1\oplus\dots\oplus\mathbb{C}\,.\,Z_r)$ tel que

$$(I_o\cap\mathbb{C}[E])\,.\,\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r] = I_o$$

alors, si $\sigma(I)=I$, σ est l'identité.

<u>Démonstration</u> : Considérons la situation géométrique associée :

$$\begin{tikzcd} C_o \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^r \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{C}^r\times C_{W,x} \arrow[d, "p_2"] \\ & \{0\} \arrow[r, hook] & C_{W,x} \end{tikzcd}$$

I_o définit un cône $C_o\subset p_2^{-1}(0)=\mathbb{C}^r$; I définit $C=C_o\times C_{W,x}$ dans $\mathbb{C}^r\times C_{W,x}$; π est une rétraction lisse transverse à C_o. Si nous posons $\Delta_o=(C_o,\mathbb{C}^r,\{0\},\pi)$ c'est une bonne installation transverse, et si $\Delta=(C,\mathbb{C}^r\times C_{W,x},C_{W,x},p_2)$, nous avons $\Delta=\Delta_o\times C_{W,x}$. D'après (ch. I, 7.2.12), nous pouvons choisir une 0-base standard $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ normalisée pour Δ_o (c'est-à-dire par rapport à $(\mathbb{C},Z_1,\dots,Z_r)$) $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ nous fournira encore une 0-base standard normalisée pour Δ. De plus, nous pouvous supposer que les φ_i sont homogènes, puisque C_o est un cône. Posons $\sigma Z_i - Z_i = S_i\in gr_x W$. Nous allons montrer par "récurrence" sur j que $\varphi_j(Z_1+S_1,\dots,Z_r+S_r)=\sigma_j(Z_1,\dots,Z_r)$. Supposons donc avoir cette égalité pour $0\le j\le k-1$. Puisque $S_i\in gr_x W$, $\varphi_k(Z_1+S_1,\dots,Z_r+S_r)-\varphi_k(Z_1,\dots,Z_r)$ a un degré en $\underline{Z}=(Z_1,\dots,Z_r)$ strictement inférieur à $\deg\varphi_k$. Comme c'est un élément de I (puisque par hypothèse $\sigma(I)=I$), et que les φ_i forment une base standard de I, on peut écrire

$$\varphi_k(Z_1+S_1,\dots,Z_r+S_r)-\varphi_k(Z_1,\dots,Z_r) = \sum_{j=1}^{k-1} h_j\,\varphi_j$$

avec $h_j\in gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$.

(notons que si $k=1$, nous montrons aussi l'égalité cherchée, ce qui permet de démarrer la "récurrence"). Nous pouvons décomposer les h_j en éléments homogènes (en Z) de $gr_x W[Z]$

$$h_j = \sum_\nu h_{j,\nu}$$

et par conséquent la somme en $\sum_{j=1}^{k-1} h_{j,\nu}\varphi_j$, $h_{j,\nu}\cdot\varphi_j$ étant homogène de degré $\nu+\nu_j$ ($\nu_j = \deg\varphi_j$). C'est le moment d'utiliser le lemme (ch. I, 7.2.5), qui nous dit que l'ensemble des exposants privilégiés par rapport à $(gr_x W; Z_1,\dots,Z_r)$ de $(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1})\cdot gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$ est égal à l'ensemble des exposants privilégiés par rapport à $(\mathbb{C}; Z_1,\dots,Z_r)$ de $(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1})\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$. Ceci nous montre que $\mathrm{Exp}(h_{j,\nu}\varphi_j)$ appartient à l'ensemble des privilégiés de $(\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1})\, gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$. Or, la règle du binôme nous dit qu'il doit exister $A\in\mathbb{Z}_o^r$, et j,ν tel que $A\in \mathrm{Exp}(h_{j,\nu}\varphi_j)+\mathbb{Z}_o^r\subset \mathrm{Exp}^r((\varphi_1,\dots,\varphi_{k-1})\,\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r])$ et que Z^A ait un coefficient non nul dans φ_k. C'est impossible par hypothèse. Donc φ_k est invariant par σ. Ainsi, pour tout $1\le j\le m$, $\varphi_j\in V^\sigma$ (notations du lemme 1). D'après le lemme 1, cela entraîne que $\varphi_j\in\mathbb{C}[V_1^\sigma]$, ou encore que :

$$(I_o\cap\mathbb{C}[V_1^\sigma])\,\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r] = I_o \quad .$$

D'après notre hypothèse, cela entraîne que $V_1^\sigma = \mathbb{C}Z_1\oplus\dots\oplus\mathbb{C}Z_r$, c'est-à-dire que $\sigma Z_i = Z_i$, c'est-à-dire $\sigma=$ Identité. Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 1.5.

Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2).

Par définition de $d_x^\tau(X,Z)$, si $d_{\Delta,x}<d_x^\tau(X,Z)$, il existe $W'\hookrightarrow Z$ tel que $T_{W',x}=T_{X,x}=T_{W,x}$ et une rétraction lisse $r' : Z'\longrightarrow W'$, tels que, si l'on note $\Delta'=(X,Z,W',r')$, on ait : $d_{\Delta',x}>d_{\Delta,x}$.

Remarquons tout de suite que puisque $d_{\Delta,x}\ge 1$, $d_{\Delta',x}>1$, et par conséquent $d_{\Delta',x}$ ne dépend pas de la rétraction r' choisie. D'autre part, puisque r' est lisse, on doit avoir $T_{Z,x} = T_{W',x}\times T_{r'^{-1}(x),x}$ et puisque

$T_{W',x} = T_{W,x}$, $\dim T_{r'^{-1}(x),x} = \dim T_{r^{-1}(x),x}$, et donc $\dim W' = \dim W$. Choisissons une base standard $(z'_1,\dots,z'_{r'})$ pour W' dans Z en x. On doit avoir $C_{Z,x} = C_{W',x} \times \mathbb{C}^r$ et $C_{W',x}$ est défini dans $C_{Z,x}$ par $\mathrm{in}_x z'_i = 0$. On en déduit que $r' = r$, et que $\nu_x Z'_i = 1$ $(1 \le i \le r)$. Soient d'autre part $\eta_1,\dots,\eta_k \in \mathrm{gr}_x W$ une base de l'idéal définissant $T_{W,x}$ dans $C_{W,x}$. $(\eta_1,\dots,\eta_k)\mathrm{gr}_x Z$ définit $T_{Z,x}$ dans $C_{Z,x}$ (puisque r est lisse). Si nous écrivons en terme d'algèbres l'égalité $T_{W,x} = T_{W',x}$ dans $C_{Z,x}$, il vient :

$$\mathrm{gr}_x Z/(\mathrm{in}_x z'_1,\dots,\mathrm{in}_x z'_r,\eta_1,\dots,\eta_k) = \mathrm{gr}_x Z/(\mathrm{in}_x z_1,\dots,\mathrm{in}_x z_r,\eta_1,\dots,\eta_k)$$

$$= \mathrm{gr}_x W/(\eta_1,\dots,\eta_k)$$

d'où, après considération de degrés, le fait que l'on doive avoir posant $Z'_i = \mathrm{in}_x Z'_i$, et $Z_i = \mathrm{in}_x Z_i$

$$Z'_i = \sum_{j=1}^{r} C_{ij} Z_j + \sum_{e=1}^{k}{}^{*} e_{i,e}\,\eta_e \quad \text{avec } C_{ij},\ e_{i,e} \text{ dans } \mathbb{C} .$$

La somme Σ^* étant restreinte à ceux des η_e qui sont de degré 1 dans $\mathrm{gr}_x W$ ♦. Or, si nous nous restreignons à $T_{Z,x}$, les Z'_i doivent être des équations pour $T_{W',x}$, ce qui entraîne que la matrice des $C_{i,j}$ doit être inversible. Ainsi, au prix d'un changement linéaire sur les coordonnées Z_i , nous pouvons supposer que $Z'_i = Z_i - \varepsilon_i$, où $\varepsilon_i \in \mathrm{gr}^1_x W$ appartient à l'idéal qui définit $T_{W,x}$ dans $C_{Z,x}$ $(1 \le i \le m)$.
Nous allons d'abord montrer que l'on doit avoir $\varepsilon_i = 0$ $(1 \le i \le m)$ ♦♦.
Commençons par appliquer le théorème de préparation de Weierstrass (ch. I, 7.2.6) qui nous montre que quitte à multiplier Z'_i par une unité, nous pouvons écrire :

$$Z'_i = Z_i - e_i \quad , \text{ où } e_i \in \mathfrak{M}_{W,x} \quad (\mathrm{in}_x e_i = \varepsilon_i)$$

♦ On peut montrer que les η_i sont tous de degré 1.

♦♦ Si W était lisse, on aurait $T_{W,x} = C_{W,x}$, et le résultat serait démontré.

et considérons la rétraction $r'' : Z \longrightarrow W'$ définie par l'injection :

$$\mathcal{O}_{W,x}\{z_1,\dots,z_r\}/(z_1-e_1,\dots,z_r-e_r) \xrightarrow{j} \mathcal{O}_{W,x}\{z_1,\dots,z_r\}$$

donnée par : $j|\mathcal{O}_{W,x}$ = identité, $j(z_i) = e_i \in \mathcal{O}_{W,x}$ $(1 \le i \le r)$. Ceci nous fournit bien une injection de $\mathcal{O}_{W',x} = \mathcal{O}_{W,x}\{z_1,\dots,z_r\}/(z_1-e_1,\dots,z_r-e_r\}$ dans $\mathcal{O}_{Z,x}$, donc un germe en x de rétraction $r'' : Z \longrightarrow W'$, dont on vérifie tout de suite qu'elle est lisse et transverse à X en x. Nous remplacerons dorénavant r' par r", mais continuerons de noter r'. Or, un tout petit calcul de changement de variables nous montre que puisque $d_{\Delta',x'}>1$, si nous considérons le $gr_x W$-isomorphisme
$\tilde{\sigma}_1 : gr_x W[Z_1,\dots,Z_r] \xrightarrow{\sim} gr_x W[Z'_1,\dots,Z'_r]$ défini par $\tilde{\sigma}_1 Z_i = Z'_i + e_i$, nous avons l'égalité

$$(*) \qquad \tilde{\sigma}_1(In_x(\Delta,\underline{\Delta},1)) = In_x(\Delta',\underline{\Delta}',1)$$

remarquons que, si nous choisissons une 0-base standard de Δ normalisée en x $(f_1,\dots,f_m)$, d'après ch. I (5.1 et 7.2)

$$\varphi_i = in_x(f_i,\underline{\Delta},1) \in \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r] \qquad (1 \le i \le m)$$

et les φ_i engendrent $in_x(\Delta,\underline{\Delta},1)$.
De plus, nous pouvons traduire l'égalité (*) comme suit : si nous considérons le $gr_x W$-automorphisme σ_1 de $gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$ défini par $\sigma_1 Z_i = Z_i + \varepsilon_i$, posant $I = (\varphi_1,\dots,\varphi_m) gr_x W[Z_1,\dots,Z_r] = in_x(\Delta,\underline{\Delta},1)$, nous avons $\sigma_1(I) = I$. Mais si nous posons $I_o = (\varphi_1,\dots,\varphi_m)\mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$, nous nous apercevrons que nous sommes exactement dans la situation du lemme 2; en effet, la seconde hypothèse du lemme 2 revient à dire que les φ_i $(1 \le i \le m)$ peuvent ne s'écrire qu'avec certaines des variables Z_i.
Or, si cela était possible, nous aurions $T_{W,x} \subsetneq T_{X,x}$ (cf. ch. I, § 5) et nous avons supposé $T_{W,x} = T_{X,x}$. Ainsi, d'après le lemme 2, σ_1 = identité, ce qui signifie $\varepsilon_i = 0$ $(1 \le i \le m)$. Le pas suivant est de montrer que, si nous considérons l'installation $\Delta_1 = (W,Z,W',r')$, nous avons

$$d_{\Delta,x} \le d_{\Delta_1,x}.$$

Posons $d = d_{\Delta,x}$, $d_1 = d_{\Delta_1,x}$, et remarquons que Δ_1 est une bonne installation transverse en x, dont $(z_1,\ldots,z_r)$ est une 0-base standard normalisée. Considérons $in_x(z_i , \Delta_1 , d_1)$ qui peut s'écrire :

$$in_x(z_i , \Delta_1 , d_1) = Z'_i + T_i \quad ,$$

où $T_i \in gr_x^{d_1} W$. (Puisque $\nu_x(z_i , \Delta_1 , 1) = 1$, d_1 est certainement entier. De plus, puisque $in_x(z_i , \Delta_1 , 1) = Z_i$, $d_1 \geq 2$).
Soit $\tilde{\tau} : gr_x W[Z_1,\ldots,Z_r] \quad gr_x W[Z'_1,\ldots,Z'_r]$ le $gr_x W$-isomorphisme défini par $\tilde{\tau} Z_i = Z'_i + T_i$. Remarquons que par définition de d_1 , l'un au moins des T_i est différent de 0.
Remarquons aussi qu'une 0-base standard normalisée pour Δ en x reste une base standard pour Δ' en x. Nous allons supposer $d_1 < d$ et fabriquer une contradiction. Notons comme plus haut $I = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) gr_x W[Z_1,\ldots,Z_r]$ où $\varphi_i = in_x(f_i , \underline{\Delta},1)$ et $(f_1,\ldots,f_m)$ étant une base standard, $I = in_x(\Delta,\underline{\Delta},1)$.
Le même petit calcul de changement de variables que plus haut nous montre que si $d_1 < d$,

$$\tilde{\tau}(\varphi_i) = in_x(f_i , \underline{\Delta}',d_1) \in gr_x W[Z'_1,\ldots,Z'_r]$$

et même que pour tout $1 < \delta \leq d_1$,

$$\tilde{\tau}(\varphi_i) = in_x(f_i , \underline{\Delta}',\delta) \quad .$$

Grâce à (ch. I, 3.1.6), on en déduit :

$$\tilde{\tau}(I) = in_x(\Delta',\underline{\Delta}',d_1) gr_x W[Z'_1,\ldots,Z'_r] \quad .$$

Mais puisque $d_1 < d$, par définition de d,

$$in_x(\Delta',\underline{\Delta}',d_1) = in_x(\Delta',\underline{\Delta}',1)$$

ce qui nous montre que

$$\tilde{\tau}(I) = in_x(\Delta', \underline{\Delta}', 1) \ .$$

Comme plus haut, on en déduit que si l'on considère le $gr_x W$-automorphisme τ de $gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r]$ défini par $\tau Z_i = Z_i + T_i$, on a

$$\tau(I) = I, \quad \text{et donc } \tau = id \quad \text{d'après le lemme 2.}$$

Mais ceci est une contradiction, puisque l'un au moins des T_i est non nul.

Nous avons donc montré : $d_1 \geq d$.

La raison pour laquelle nous avons besoin de ce résultat est la suivante : puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, $(z_1, \ldots, z_r)$ est une 0-base standard normalisée de Δ_1 en x, $d_{\Delta_1, x} = d_{(z), x}$ (cf. ch. I, 7.2.14). C'est-à-dire que si nous écrivons $z_i = z_i' + e_i$ avec $e_i \in \mathfrak{M}_{W,x}$ (en fait même $\mathfrak{m}^2_{W,x}$ puisque nous avons montré que $\varepsilon_i = 0$, $1 \leq i \leq m$), nous avons :

$$\nu_x(e_i) \geq d_{\Delta_1, x} \geq d \ .$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$in_x(z_i, \underline{\Delta}', d) = Z_i' + S_i \qquad \text{où } S_i \in gr_x^d W$$

(pour la même raison que plus haut, d est entier).

C'est ceci qui nous permet de recommencer le raisonnement que nous avons déjà fait deux fois :

Soit $\tilde{\sigma} : gr_x W[Z_1, \ldots, Z_r] \longrightarrow gr_x W[Z_1', \ldots, Z_r']$ le $gr_x W$-isomorphisme défini par : $\sigma Z_i = Z_i' + S_i$. Puisque $d_{\Delta, x} < d_{\Delta', x}$, toujours en contemplant le changement de variables, on voit que

$$\tilde{\sigma}(In_x(\Delta, \underline{\Delta}, d)) = in_x(\Delta', \underline{\Delta}', d) gr_x W[Z_1', \ldots, Z_r']$$

mais, par définition de $d_{\Delta', x}$, puisque $d = d_{\Delta, x} < d_{\Delta', x}$ par hypothèse, $in_x(\Delta', \underline{\Delta}', d) = in_x(\Delta', \underline{\Delta}', 1)$. Toujours comme plus haut, en considérant

le $gr_x W$-automorphisme σ de $gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$ défini par $\sigma Z_i = Z_i + S_i$, on voit que

$$\sigma(In_x(\Delta,\underline{\Delta},d)) = In_x(\Delta,\underline{\Delta},1) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.
L'unicité de σ se voit ainsi : si il existait σ' donnant l'égalité précédente, on devrait avoir $\sigma' \circ \sigma^{-1}(In_x(\Delta,\underline{\Delta},1) = In_x(\Delta,\underline{\Delta},1)$, et donc, en appliquant encore une fois le lemme 2, $\sigma' \circ \sigma^{-1} =$ identité, c'est-à-dire $\sigma' = \sigma$.
Remarquons que par définition de $d_{\underline{\Delta},x}$, $\sigma \neq$ identité. Or, si l'on avait $d_{(z),x} > d$, certainement les S_i devraient être nuls. Ceci montre que $d_{\Delta_1,x} = d_{\Delta,x}$.

Montrons maintenant que 1) + 2) $\Rightarrow$ 3).
Il s'agit en fait de montrer que :

$$\sigma(in_x(f_i , \underline{\Delta},d)) = in_x(f_i , \underline{\Delta},1) \qquad (1\leq i\leq m) .$$

Or, si nous notons $\pi_o = gr_x W \longrightarrow \mathbb{C}$ le morphisme dont le noyau est $\bigoplus_{i\geq 1} gr_x^i W$, et $\pi : gr_x W[Z_1,\dots,Z_r] \longrightarrow \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$ le morphisme défini par $\pi|gr_x W = \pi_o$, $\pi Z_i = Z_i$, nous avons déjà remarqué que puisque $(f_1,\dots,f_m)$ est une 0-base standard normalisée, $\varphi_i = in_x(f_i , \underline{\Delta},1) \in \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$ et qu'en fait, si nous posons $\lambda_i = \pi(in_x(f_i , \underline{\Delta},1))$ nous avons $\lambda_i = \varphi_i$. De plus, $\pi(in_x(f_i , \underline{\Delta},d)) = \lambda_i$ (cf. ch. I, 7.2). Si nous écrivons $in_x(f_i , \underline{\Delta},d) = \sum_{A\in\mathbb{Z}_o^r} \psi_A Z^A \in gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$ et, posant $\bar{\psi}_A = \pi_o(\psi_A)$, ce que nous avons à démontrer est que

$$\Sigma \psi_A(Z_1 + S_1 ,\dots, Z_r + S_r)^A - \Sigma \bar{\psi}_A Z^A \equiv 0 .$$

Ceci se démontre exactement par la méthode utilisée dans la démonstration du lemme 2.

Il nous reste donc à montrer que 3) $\Rightarrow$ 1).
Nous nous sommes donc donnés un $gr_x W$-automorphisme σ de $gr_x W[Z_1,\dots,Z_r]$ tel que :

a) $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x W$;

b) $\sigma(in_x(f_j, \underline{\Delta}, d)) = in_x(f_j, \underline{\Delta}, 1)$, $1 \le i \le m$, où $d = d_{\Delta,x}$.

Remarquons que les conditions a) et b) entraînent $\sigma Z_i - Z_i \in gr_x^d W$, et que d doit être entier. Si $d = 1$, d'après le lemme 2, σ = identité. Mais puisque nous avons supposé $d_x^\tau(X,Z) > 1$, nous avons bien 1) dans ce cas. Supposons donc $d > 1$, c'est-à-dire $d \ge 2$, et posons $\sigma Z_i - Z_i = S_i \in gr_x^d W$ $(1 \le i \le r)$. Choisissons des éléments $e_i \in \mathfrak{M}_{W,x}^d$ tels que classe$(e_i, \mathrm{mod}\, \mathfrak{M}_{W,x}^{d+1}) = S_i$ $(1 \le i \le r)$. Posons $z_i' = z_i - e_i$ $(1 \le i \le r)$ et considérons le sous-espace W' de Z défini par $(z_1',\dots,z_r')\mathcal{O}_{Z,x}$, et l'installation $\Delta' = (X,Z,W',r')$, où $r' : Z \to W'$ est la rétraction que nous avons définie dans la démonstration de 1) $\Rightarrow$ 2). Il s'agit de montrer que $T_{W',x} = T_{W,x}$ $(= T_{X,x})$ et que $d_{\Delta',x} > d_{\Delta,x}$. Puisque $d \ge 2$, nous avons $in_x z_i' = Z_i$, et puisque, d'après sa définition, W' a même dimension que W, $(z_r',\dots,z_r')$ ne peut manquer d'être une base standard de $\Delta_2 = (W',Z,W,r)$. Ceci montre que $C_{W',x} = C_{W,x}$ et donc $T_{W',x} = T_{W,x}$. Mais si nous reprenons notre 0-base standard normalisée $(f_1,\dots,f_m)$ pour Δ en x, qui reste une base standard pour Δ' en x, l'égalité

$$\sigma(in_x(f_i, \underline{\Delta}, d)) = in_x(f_i, \underline{\Delta}, 1)$$

peut se lire

$$in_x(f_i, \underline{\Delta}', d) = in_x(f_i, \underline{\Delta}, 1) = in_x(f_i, \underline{\Delta}', 1)$$

ce qui nous montre qu'avec les notations de (ch. I, 7.2.14), pour l'installation Δ',

$$d_{(f),x} > d$$

par définition de $d_{(f),x}$. Mais d'après (ch. I, 7.1.9), on a $d_{\Delta',x} \ge d_{(f),x}$, donc $d_{\Delta',x} > d_{\Delta,x}$, ce qui entraîne $d_{\Delta,x} < d_x^\tau(X,Z)$.

1.6 <u>Remarque</u> : Si Z est lisse, il résulte de (ch. I, 5.1.7), puisque l'on peut toujours choisir un germe en x de sous-espace lisse W de Z tel que $T_{W,x} = T_{X,x}$, que $T_x(X,Z) \neq \emptyset$ et que de plus on a toujours :

$$d_x^{\tau}(X,Z) > 1 .$$

1.7 <u>Corollaire</u> : Soient Z un espace analytique réduit, X un sous-espace analytique de Z, et $x \in X$. Si $d_x^{\tau}(X,Z) > 1$, il existe $\Delta \in T_x(X,Z)$ tel que

$$d_{\Delta,x} = d_x^{\tau}(X,Z) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons que $d_x^{\tau}(X,Z) < \infty$. Si nous avons $\Delta \in T_x(X,Z)$ tel que $d_{\Delta,x} < d_x^{\tau}(X,Z)$, nous avons construit, pour démontrer le théorème 1.5, une installation $\Delta' \in T_x(X,Z)$ telle que $d_{\Delta',x} > d_{\Delta,x}$. Au bout d'un nombre fini de tels pas, nous arriverons certainement à une installation Δ telle que $d_{\Delta,x} = d_x^{\tau}(X,Z)$.
Si $d_x^{\tau}(X,Z) = \infty$, nous devons regarder d'un peu plus près la construction pour remarquer que nous avons construit des $Z_i' = z_i - e_i$ où $e_i \in \mathfrak{M}_{W,x}^{d}$.
En itérant cette construction, nous obtiendrons des
$Z_i' = z_i - \sum_{k=o}^{\infty} e_i^{(k)}$ où $e_i^{(k)} \in \mathfrak{M}_{W,x}^{d_k}$, la suite des d_k étant une suite d'entiers strictement croissante. Si nous savions montrer que la série $\sum_{i=o}^{\infty} e_i^{(k)} \in \mathcal{O}_{W,x}$, le sous-espace W^{∞} de Z défini par $z_i - \sum_{k=o}^{\infty} e_i^{(k)}$ nous donnerait une installation $\Delta^{\infty} \in T_x(X,Z)$ telle que $d_{\Delta^{\infty},x} = +\infty$.
L'augmentation persistante de degrés que nous avons remarquée plus haut nous montre en tous cas que $\sum_{k=o}^{\infty} e_i^{(k)} \in \mathcal{O}_{W,x}^{\wedge}$ $(1 \leq i \leq r)$. Plutôt que d'utiliser un argument de normes pour montrer que m'on peut choisir des relèvements $e_i^{(k)} \in \mathcal{O}_{W,x}$ de telle façon que $\sum_{k=o}^{\infty} e_i^{(k)} \in \mathcal{O}_{W,x}$, $(1 \leq i \leq r)$, nous préférons procéder comme suit :
Remarquons tout d'abord que nous venons en fait de construire une installation algébroïde $(\Delta^{\wedge})^{\infty}$ telle que $d_{(\Delta^{\wedge})^{\infty},x} = +\infty$. Or on a le lemme :

<u>Lemme</u> : Soient $z_1^\infty,\dots,z_r^\infty$ dans $\mathcal{O}_{Z,x}^\wedge$ tels que si l'on pose $I^\wedge = (z_1^\infty,\dots,z_r^\infty)$, $\mathcal{O}_{W^\infty,x}^\wedge = \mathcal{O}_{Z,x}^\wedge / I^\wedge$, on ait : $\mathcal{O}_{Z,x}^\wedge = \mathcal{O}_{W^\infty,x}^\wedge[[z_1^\infty,\dots,z_r^\infty]]$.
Alors, $I = I^\wedge \cap \mathcal{O}_{Z,x} = (\tilde{z}_1^\infty,\dots,\tilde{z}_r^\infty)\mathcal{O}_{Z,x}$, et $\mathcal{O}_{Z,x}/I\{\tilde{z}_1^\infty,\dots,\tilde{z}_r^\infty\}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'interpréter les données en termes de champs de vecteurs, de remarquer qu'elles nous donnent r champs de vecteurs algébroïdes linéairement indépendants modulo $\mathfrak{M}_{Z,x}^\wedge$, et donc r germes en x de champs de vecteurs sur Z linéairement indépendants modulo $\mathfrak{M}_{Z,x}$, grâce au lemme de Nakayama et au fait que $\Omega^1_{Z,x}$ est un $\mathcal{O}_{Z,x}$-module de type fini. Si l'on note $D_1,\dots,D_r$ les $\mathbb{C}$-dérivations de $\mathcal{O}_{Z,x}$ correspondantes, il est bien connu que l'on peut trouver des éléments $\tilde{z}_i^\infty$ tels que $D_i\tilde{z}_j^\infty = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) et que si l'on pose $I = (\tilde{z}_1^\infty,\dots,\tilde{z}_r^\infty)$, $\mathcal{O}_{W,x} = \mathcal{O}_{Z,x}/I$, on a alors $\mathcal{O}_{Z,x} = \mathcal{O}_{W,x}\{\tilde{z}_1^\infty,\dots,\tilde{z}_r^\infty\}$.
De plus, I est l'idéal engendré par les éléments $a \in \mathcal{O}_{Z,x}$ tels que $(D_1 a,\dots,D_r a)\mathcal{O}_{Z,x} = \mathcal{O}_{Z,x}$, en prenant une écriture analogue pour $I^\wedge$, le fait que $I = I^\wedge \cap \mathcal{O}_{Z,x}$ est immédiat.
Ce lemme nous fournit une installation Δ^∞ telle que $(\Delta^\infty)^\wedge = (\Delta^\wedge)^\infty$.
Si nous prenons maintenant une 0-base standard normalisée $(f_1,\dots,f_m)$ pour Δ^∞, elle en fournira évidemment une pour $(\Delta^\infty)^\wedge$ donc pour $(\Delta^\wedge)^\infty$.
D'après (ch. I, 3.2.6), puisque $d_{(\Delta^\wedge)^\infty,x} = +\infty$, $f_i\mathcal{O}_{Z,x}^\wedge \in (\underline{z}^\infty)^{\nu_k}\mathcal{O}_{Z,x}^\wedge$ où $\nu_k = \nu(f_i, (\Delta^\wedge)^\infty, 1)$, donc $f_i \in (\tilde{\underline{z}})^{\nu_k}\mathcal{O}_{Z,x}$, ce qui entraîne $d_{\Delta^\infty,x} = +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

1.8 <u>Définition</u> : Soit $\Delta = (X,Z,W,r)$ une bonne installation. On dira que Δ est perpendiculaire en un point $x \in W \cap X$ si :

a) Δ est transverse en x ;

b) $T_{X\cap r^{-1}(x),x} = 0$ (nullité de l'espace tangent strict à la fibre de $r|X : X \to W$).

1.9 <u>Remarque</u> : La transversalité de Δ en x nous dit (ch. I, 5.1.1) que $C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X,x} \cap dr^{-1}(x) = C_{X\cap r^{-1}(x),x}$, d'où l'on tire immédia-

tement que $T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} \subseteq T_{X\cap r^{-1}(x),x}$. La condition b) nous donne donc aussi : $T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = (0)$.

1.10 <u>Définition</u> : Soient W un espace analytique complexe et $x \in W$. On appellera disque d'épreuve de centre x tout morphisme $h : \mathbb{D} \to W$ tel que $h(0) = x$, où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |t| < 1\}$ est le disque unité du plan complexe. Par abus de langage, on continuera d'appeler disque d'épreuve le germe d'un tel morphisme. On notera $\mathfrak{D}_x$ l'ensemble des disques d'épreuve de centre x, (ou $\mathfrak{D}_{W,x}$ s'il y a risque de confusion sur l'espace analytique dans lequel on lance le disque).

1.11 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une installation, et $x \in X \cap W$. Pour tout disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W$ de centre x, on notera Δ^h l'installation obtenue par changement de base par h, c'est-à-dire (cf. ch. I, 1.2.5 avec $S = W$)

$$\Delta^h = \left(X \times_W \mathbb{D},\ Z \times_W \mathbb{D},\ W \times_W \mathbb{D},\ r \times_W \mathrm{id}_{\mathbb{D}} \right) ,$$

noter que $W \times_W \mathbb{D}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{D}$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \times_W \mathbb{D} \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z \arrow[dd, "r"] \\
X \times_W \mathbb{D} \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "r^h"] & & X \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & \\
 & \mathbb{D} \arrow[rr, "h"] & & W
\end{tikzcd}$$

On notera pour abréger $X^h = X \times_W \mathbb{D}$, $Z^h = Z \times_W \mathbb{D}$, et x^h ou 0 suivant qu'il y a ou non risque de confusion le point $0 \in \mathbb{D}$, (qui n'est autre que $x \times_W \mathbb{D}$ sauf dans le cas où $h(\mathbb{D}) = x$, cas dont nous verrons qu'il ne présente pas grand intérêt).

1.12 <u>Définition</u> : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, et $x \in X \cap W$. Nous dirons que Δ a le contact maximal en x si :

1) Δ est perpendiculaire ;

2) pour tout disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W$ de centre x on a :

$$d_{\Delta^h, x^h} = d^{\tau}_{x^h}(X^h, Z^h) \quad .$$

1.13 <u>Remarque</u> : La définition précédente a bien un sens, puisque Δ étant transverse en x le reste par changement de base (ch. I, 6.2) et Δ^h est même perpendiculaire, puisque le changement de base par h ne change pas la fibre $X \cap r^{-1}(x)$, donc ne change pas son espace tangent strict. Remarquons aussi que si $h(\mathbb{D}) = x$, $\Delta^h = (X \cap r^{-1}(x), r^{-1}(x), W, r|r^{-1}(x)) \times \mathbb{D}$ et donc (ch. I, 5.1.8), $d_{\Delta^h, 0} = +\infty$, auquel cas on a certainement $d_{\Delta^h, 0} = d^{\tau}_{0}(X^h, Z^h) = +\infty$. C'est pour cela que le cas où $h(\mathbb{D}) = x$ ne présente pas grand intérêt.

1.14 <u>Remarque</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation. Si Δ a le contact maximal en $x \in X \cap W$, pour tout morphisme $g : W' \to W$, l'installation $\Delta \times_W W' = \Delta^g$ a le contact maximal en tout point $x' \in g^{-1}(x)$. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, $\Delta \times_W W'$ va rester perpendiculaire en tout point $x' \in g^{-1}(x)$ (ch. I, 6.2). D'autre part, tout disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W'$ de centre $x' \in g^{-1}(x)$ fournit par composition un disque d'épreuve $h_1 = g \circ h : \mathbb{D} \to W$ de centre x, et $(\Delta^g)^h = \Delta^{h_1}$. Puisque Δ a le contact maximal Δ^g va vérifier la condition numérique de 1.12.

1.15 <u>Remarque</u> : L'expression "contact maximal" rappelle que la condition porte sur le contact de W avec X en x dans Z, auquel on demande d'être le plus grand possible du point de vue du plus petit tropisme critique après changement de base par un disque d'épreuve. Ainsi, une fois vérifiée la perpendicularité, on est ramené à vérifier l'égalité $d_{\Delta, x} = d^{\tau}_{x}(X, Z)$ pour des installations Δ relativement simples, où W est le disque unité de la droite complexe.

1.16 <u>Théorème</u> (Hironaka, cf. [6] ou [9]) : Soient X un espace analytique complexe, et $x \in X$. Pour tout plongement local en x de X dans un espace lisse Z, il existe un germe en x de sous-espace lisse W de Z tel que $T_{W,x} = T_{X,x}$ et une rétraction lisse $r : W \longrightarrow Z$ telle que l'installation $\Delta = (X, Z, W, r)$ ait le contact maximal en x.

1.17 <u>Remarque</u> : Par des changements de base $W' \longrightarrow W$ où W' n'est plus nécessairement lisse, nous obtiendrons d'après 1.14 des installations ayant le contact maximal, mais où Z n'est plus nécessairement lisse.

***

§ 2. PROPRIETES DU CONTACT MAXIMAL

2.1 Propriétés des installations perpendiculaires.

2.1.1 Proposition : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation, et $x \in X \cap W$ tel que Δ soit transverse en x. On a l'inclusion :

$$T_{X,x} \subseteq T_{Z,x} .$$

Démonstration : Soit $v \in T_{X,x}$. Notons $v_1 = dr(v) \in C_{W,x} \subseteq E_{W,x}$. Considérant la translation par v dans $E_{Z,x}$ et par v_1 dans $E_{W,x}$, nous obtenons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_{X,x} \arrow[r, "+v"] \arrow[d, "dr"'] & C_{X,x} + v \arrow[d] \\ C_{W,x} \arrow[r, "+v_1"] & C_{W,x} + v_1 \end{tikzcd}$$

puisque $v \in T_{X,x}$, $C_{X,x} + v = C_{X,x}$, et le diagramme montre que $dr(C_{X,x}) \subseteq C_{W,x} \cap (C_{W,x} + v_1)$. Mais puisque r est transverse, dr est plat (ch. I, 5.1.1), et ne saurait donc se factoriser par un sous-espace strict de $C_{W,x}$. Ceci montre que $C_{W,x} \subseteq C_{W,x} + v_1$, et la considération de la translation opposée montre que $C_{W,x} = C_{W,x} + v_1$, c'est-à-dire que $v_1 \in T_{W,x}$. Ainsi, $v \in dr^{-1}(T_{W,x}) = T_{Z,x}$.

2.1.2 Si de plus Δ est perpendiculaire en x, puisque d'après (ch. III, 1.9), cette condition entraîne $T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = 0$, on obtient en écrivant l'inégalité de dimension pour les intersections dans $T_{Z,z}$, ce qui est licite d'après 2.1.1 :

$$\dim T_{X,x} \leq \dim T_{W,x} .$$

2.1.3 Remarque : Soit X un sous-espace analytique d'un espace analytique lisse Z, et soit W un sous-espace analytique lisse de Z. Nous avons vu (ch. I, 5.1.7) qu'étant donné $x \in W \cap X$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une rétraction $r : Z \longrightarrow W$ en x telle que si $\Delta = (X, Z, W, r)$ on ait $d_{\Delta, x} > 1$, était l'inclusion :

$$T_{W,x} \subseteq T_{X,x} \quad .$$

Si nous avons l'égalité : $T_{W,x} = T_{X,x}$, une telle rétraction sera même perpendiculaire. En effet, on déduit facilement de l'égalité $T_{W,x} = T_{X,x}$ et de (ch. I, 5.1.5) que l'on a l'égalité :

$$C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X,x} / T_{X,x}$$

puisque r est en particulier transverse

$$C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X \cap r^{-1}(x),x}$$

mais l'espace tangent strict de $C_{X,x} / T_{X,x}$ est bien sûr réduit à 0, donc $T_{X \cap r^{-1}(x),x} = 0$, c'est-à-dire que $\Delta = (X, Z, W, r)$ est perpendiculaire en x. En résumé, si l'on se donne un sous-espace lisse W de Z tel que $T_{W,x} = T_{X,x}$, il existera $r : Z \longrightarrow W$ telle que $\Delta = (X, Z, W, r)$ soit perpendiculaire en x. De plus, pour toute rétraction $r' : Z \longrightarrow W$, $\Delta' = (X, Z, W, r')$ sera aussi perpendiculaire en x.

2.2 Propriétés tangentielles du contact maximal.

2.2.1 Proposition : Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation ayant le contact maximal en $x \in X \cap W$. On a l'inclusion :

$$T_{X,x} \subseteq T_{W,x} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $v \in T_{X,x}$, $v \neq 0$. Nous allons supposer que $v \notin T_{W,x}$ et fabriquer une contradiction . Posons $v_1 = dr(v)$. Puisque r est transverse, d'après 2.1.1, $v_1 \in T_{W,x}$. D'autre part, $v_1 \neq (0)$ puisque sinon, on aurait : $v \in T_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = (0)$ (ch. III, 1.9).

Le premier pas est la construction d'un sous-espace Y_1 de W contenant x et tel que $T_{Y_1,x} = \mathbb{C} \cdot v_1$. Pour cela , on plonge localement autour de x W dans un espace lisse $\tilde{W}$, on prend un sous-espace lisse $\tilde{W}_1$ de $\tilde{W}$ tel que $T_{\tilde{W}_1,x} = T_{W,x}$. D'après 2.1.3, il existe une rétraction lisse $R : \tilde{W} \longrightarrow \tilde{W}_1$ au voisinage de x, telle que l'installation $\tilde{\Delta}_1 = (W, \tilde{W}, \tilde{W}_1, R)$ soit perpendiculaire en x. De plus, $v_1 \in T_{\tilde{W}_1,x}$, et nous pouvons donc trouver un germe en x de courbe lisse $\Gamma \subset \tilde{W}_1$, telle que $T_{\Gamma,x} = \mathbb{C} \cdot v_1$. On pose $Y_1 = R^{-1}(\Gamma) \cap W$. La transversalité de R implique que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} C_{Y_1,x} \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_{W,x} \arrow[d, "dR|C_{W,x}"] \\ T_{\Gamma,x} \arrow[r, hook] & T_{W,x} \end{tikzcd}$$

est cartésien (ch. I, 6.2), et donc

$$C_{Y_1,x} = C_{W,x} \cap dR^{-1}(T_{\Gamma,x})$$

ce qui donne une inclusion des espaces tangents stricts

$$T_{Y_1,x} \supseteq T_{W,x} \cap dR^{-1}(T_{\Gamma,x})$$

et donc $v_1 \in T_{Y_1,x}$.

Mais d'autre part, puisque $\tilde{\Delta}_1 = (W, \tilde{W}, \tilde{W}_1, R)$ est perpendiculaire, il en est de même pour l'installation obtenue par changement de base :

$$\tilde{\Delta}_1 | \Gamma = (Y_1, R^{-1}(\Gamma), \Gamma, R|Y_1)$$

ce qui, d'après 2.1.2, entraîne

$$\dim T_{Y_1,x} \leq \dim T_{\Gamma,x} = 1 ,$$

donc $\dim T_{Y_1,x} = 1$, et $T_{Y_1,x} = \mathbb{C} . v_1$.

Nous avons donc bien construit un sous-espace $Y_1 \subset W$ tel que $T_{Y_1,x} = \mathbb{C} . v_1$.

Le pas suivant est la construction d'un sous-espace $Y \subset Z$ contenant x et tel que :

a) $T_{Y,x} = \mathbb{C} . v$;

b) $r(Y) = Y_1$, et $r|Y : Y \longrightarrow Y_1$ est un isomorphisme local en x.

Pour cela, plongeons localement en x W dans un espace lisse $\tilde{W}$, muni de coordonnées locales $(w_1,\ldots,w_s)$, et Z dans un espace lisse $\tilde{Z}$, muni de coordonnées locales $(z_1,\ldots,z_r, w_1,\ldots,w_s)$, de telle façon que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "\tilde{r}"] \\ W \arrow[r, hook] & \tilde{W} \end{tikzcd}$$

soit cartésien ($\tilde{r}$ étant définie par le choix des coordonnées locales sur $\tilde{Z}$.

Posons $Z_i = in_x z_i$, $W_j = in_x w_j$ et identifions $gr_x \tilde{Z}$ à $\mathbb{C}[Z_1,\ldots,Z_r, W_1,\ldots,W_s]$. Nous supposerons de plus que le choix des coordonnées $w_1,\ldots,w_s$ a été fait de telle façon que le vecteur $v_1 \in T_{W,x} \subseteq T_{\tilde{W},x}$ ait pour composantes

$$W_1 = 1 , \quad W_2 = \ldots = W_s = 0 .$$

Le vecteur $v \in T_{Z,x} \subseteq T_{\tilde{Z},x}$ a alors pour composantes $W_1 = 1$, $W_2 = \ldots = W_s = 0$, $Z_i = C_i$ $(1 \leq i \leq r)$, $C_i \in \mathbb{C}$. Les C_i n'étant pas tous nuls, puisque par hypothèse $v \neq v_1$.

Soit H le sous-espace de $\tilde{Z}$ défini par les équations $z_i - C_i W_1 = 0$ $(1 \leq i \leq r)$. Posons $Y = H \cap \tilde{r}^{-1}(Y_1)$ et montrons que Y satisfait les conditions

demandées. Tout d'abord $Y \subset Z$ puisque $Y_1 \subset W$. De plus, la restriction de $\tilde{r}$ à Y est un isomorphisme local de Y sur Y_1, puisque si I est l'idéal définissant Y_1 dans $\mathcal{O}_{\tilde{W},x} = \mathbb{C}\{w_1,\ldots,w_s\}$, $\tilde{r}|Y$ correspond à l'homomorphisme d'algèbres analytiques :

$$\mathbb{C}\{w_1,\ldots,w_s\}/I \longrightarrow \mathbb{C}\{w_1,\ldots,w_s\,,\,z_1,\ldots,z_r\}/(I,(z_i - C_i\,w_1))$$

qui est clairement un isomorphisme.
Ceci entraîne en particulier que $\dim T_{Y,x} = 1$.
Comme par construction, $v \in T_{Y,x}$, on a bien $T_{Y,x} = \mathbb{C}\,.\,v$.
Considérons maintenant l'installation Δ_1 obtenue par changement de base par l'inclusion $Y_1 \hookrightarrow W$. C'est-à-dire que nous posons : $Z_1 = r^{-1}(Y_1)$, $X_1 = X \cap r^{-1}(Y_1)$, $r_1 = r|Z_1$; $\Delta_1 = (X_1\,,\,Z_1\,,\,Y_1\,,\,r_1)$.
Δ_1 est une bonne installation perpendiculaire en x, qui a même le contact maximal en x, puisqu'elle est déduite de Δ par changement de base. En particulier, $\dim T_{X_1,x} \leq \dim T_{Y_1,x} = 1$. Nous allons montrer que $v \in T_{X_1,x}$.
D'après (ch. I, 6.2), le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{X_1,x} & \longrightarrow & C_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{Y_1,x} & \longrightarrow & C_{W,x} \end{array}$$

est cartésien, puisque Δ est transverse en x. Ceci implique que $C_{X_1,x} = C_{X,x} \cap dr^{-1}(C_{Y_1,x})$ et donc une inclusion d'espaces tangents stricts : $T_{X,x} \cap dr^{-1}(T_{Y_1,x}) \subseteq T_{X_1,x}$, mais puisque $v_1 \in T_{X,x}$ et $dr(v) = v_1 \in T_{Y_1,x}$, ceci montre bien que $v \in T_{X_1,x}$, et par raison de dimension $T_{X_1,x} = \mathbb{C}\,.\,v$.
Arrivés ici, nous nous sommes ramenés à démontrer 2.2.1 pour l'installation Δ_1, c'est-à-dire dans le cas où $\dim T_{X_1,x} = \dim T_{Y_1,x} = 1$. C'est ce que nous allons faire. Remarquons que nous avons de plus construit un sous-espace Y de Z_1 tel que $r|Y_1 : Y \longrightarrow Y_1$ soit un isomorphisme local, et que $T_{Y,x} = \mathbb{C}\,.\,v$. La composition de $r_1 : Z_1 \longrightarrow Y_1$ avec l'isomorphisme $Y_1 \xrightarrow{\sim} Y$ nous fournit une rétraction $r_1' : Z_1 \longrightarrow Y$ et l'installation

$\Delta_1' = (X_1, Z_1, Y, r_1')$ est encore perpendiculaire en x. Considérons maintenant un disque d'épreuve $h_1 : \mathbb{D} \to Y_1$ tel que le cône tangent à l'image de h_1 en x ait pour ensemble sous-jacent $\mathbb{C} . v_1$. L'existence de tels disques se vérifie ainsi : soit $\varphi : Y_1' \to Y_1$ la modification de centre x. A la direction $v \in T_{Y_1,x} \subset C_{Y,x}$ correspond un point $x' = \mathrm{Proj}\, v \in \varphi^{-1}(x) = \mathrm{Proj}\, C_{Y_1,x}$. N'importe quel disque d'épreuve $h_1' : \mathbb{D} \to Y_1'$ de centre x' et dont l'image n'est pas contenue dans $\varphi^{-1}(x)$ fournira par composition avec φ un disque d'épreuve h_1 satisfaisant.
Si l'on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0} = \mathbb{C}\{t\}$, on obtient un morphisme $\mathcal{O}_{Y_1,x} \to \mathbb{C}\{t\}$, et puisque $h_1(\mathbb{D}) \neq \{x\}$, un entier e tel que $\mathfrak{M}_{Y_1,x}\, \mathbb{C}\{t\} = t^e . \mathbb{C}\{t\}$.
Choisissons maintenant une 0-base standard normalisée en x $(f_1, \ldots, f_m)$ pour Δ_1. Notons $\Delta_1^{h_1}$ l'installation obtenue après le changement de base par h_1, et $f_i^{h_1} = f_i \circ h_1$ $(1 \leq i \leq m)$. D'après (ch. I, 7.2.13), $(f_1^{h_1}, \ldots, f_m^{h_1})$ est une 0-base standard normalisée pour $\Delta_1^{h_1}$ en x^{h_1}. Si nous écrivons $f_i = \Sigma f_{i,A} Z^A$ avec $f_{i,A} \in \mathcal{O}_{Y,x}$ et $Z = (z_1, \ldots, z_r)$ coordonnées sur $r_1^{-1}(x)$, nous pouvons écrire $f_i^{h_1} = \Sigma (f_{i,A} \circ h_1) Z^A$ et d'après (ch. I, 7.3.4)

$$d_{\Delta_1^{h_1}, x^{h_1}} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < \nu_i}} \frac{\nu_o(f_{i,A} \circ h_1)}{\nu_i - |A|}$$

où $\nu_i = \nu_x(f_i) = \nu_{x^{h_1}}(f_i^{h_1})$ puisque Δ_1 est transverse et ν_o désigne l'ordre en t d'un élément de $\mathbb{C}\{t\}$.
Puisque $\nu_x(f_{i,A}) \geq \nu_i - |A|$, $\nu_x(f_{i,A} \circ h_1) \geq e . (\nu_i - |A|)$, ce qui nous montre que :

$$d_{\Delta_1^{h_1}, x^{h_1}} \geq e .$$

Nous allons maintenant montrer l'équivalence :

$$d_{\Delta_1^{h_1}, x^{h_1}} > e \Leftrightarrow T_{Y_1,x} = T_{X_1,x} .$$

Pour ce faire, souvenons-nous d'abord que puisque Δ_1 est transverse en x, nous pouvons écrire : (cf. ch. I, § 5)

$$\mathrm{in}_x f_i = \lambda_i(Z_1,\dots,Z_r) + \sum_{\nu_x(f_{i,A})=\nu_i-|A|} \mathrm{in}_x f_{i,A}\, Z^A$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_r]$ est un polynôme homogène de degré ν_i.
Nous allons montrer les équivalences suivantes :

a) $T_{Y_1,x} = T_{X_1,x} \Leftrightarrow C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x} = C_{X_1 \cap r_1^{-1}(x)} \times T_{Y_1,x}$;

b) $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x} = C_{X_1 \cap r_1^{-1}(x)} \times T_{Y_1,x} \Leftrightarrow$ les $\mathrm{in}_x f_{i,A}$ tels que $\nu_x(f_{i,A}) = \nu_i - |A|$ appartiennent à l'idéal définissant $T_{Y_1,x}$ dans $C_{Y_1,x}$;

c) les $\mathrm{in}_x(f_{i,A})$ tels que $\nu_x(f_{i,A}) = \nu_i - |A|$ appartiennent à l'idéal définissant $T_{Y_1,x}$ dans $C_{Y_1,x}$ si et seulement si $\nu_o(f_{i,A} \circ h_1) > e(\nu_i - |A|)$ (pour les indices (i,A) tels que $\nu_x(f_{i,A}) = \nu_i - |A|$) ;

d) $(\nu_o(f_{i,A} \circ h_1) > e(\nu_i - |A|)$ pour les indices (i,A) tels que $\nu_x(f_{i,A}) = \nu_i - |A|) \Leftrightarrow d_{\Delta_1^{h_1},x}^{h_1} > e$.

<u>Démonstration de a)</u> : Montrons d'abord que $T_{X_1,x}$ n'est autre que le faîte de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$: puisque Δ_1 est transverse, $T_{X_1,x} \subseteq T_{Z_1,x}$ (2.1.1) et donc $T_{X_1,x}$ est contenu dans le faîte de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$. Mais ce faîte est de dimension ≤ 1, puisqu'il existe une rétraction perpendiculaire de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$ sur $T_{Y_1,x}$, obtenue à partie de l'installation $(C_{X_1,x}, C_{Z_1,x}, C_{Y_1,x}, dr_1)$ par le changement de base donné par l'inclusion $T_{Y_1,x} \hookrightarrow C_{Y_1,x}$ (cf. 2.1.2).
Si $T_{Y_1,x} = T_{X_1,x}$, dr_1 fournit une rétraction de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$ sur son faîte $T_{Y_1,x}$. Ceci nous donne (cf. ch. I, § 9, et ch. II, § 1) une

décomposition en produit $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x} = C_{X_1 \cap r_1^{-1}(x),x} \times T_{Y_1,x}$.

Réciproquement, l'égalité précédente nous assure par raison de dimension que $T_{Y_1,x}$ est le faîte de $C_{X_1,x} \cap T_{Z_1,x}$, donc que $T_{X_1,x} = T_{Y_1,x}$.

<u>Démonstration de b)</u> : Le cône $C_{X_1 \cap r_1^{-1}(x)} \times T_{Y_1,x}$ est défini dans $T_{Z_1,x} = T_{r_1^{-1}(x)} \times T_{Y_1,x}$ par les équations $\lambda_i(Z_1,\ldots,Z_r) = 0$.

L'égalité $C_{X_1 \cap r_1^{-1}(x)} \times T_{Y_1,x} = C_{X_1} \cap T_{Z_1,x}$ revient à dire que

$in_x(f_i) \equiv \lambda_i(Z_1,\ldots,Z_r)$ modulo l'idéal définissant $T_{Z_1,x}$ dans $C_{Z_1,x}$, c'est-à-dire encore que les $in_x(f_{i,A})$, tels que $\nu_x(f_{i,A}) = \nu_i - |A|$ appartiennent à l'idéal définissant $T_{Y_1,x}$ dans $C_{Y_1,x}$, au vu de l'écriture donnée plus haut pour les $in_x(f_i)$ $(1 \leq i \leq m)$, et du fait que $(f_1,\ldots,f_m)$ est normalisée par $(\mathcal{O}_{Y_1,x}, Z_1,\ldots,Z_r)$, qui interdit que des termes de $\sum_{\nu_x(f_{i,A})=\nu_i-|A|} in_x f_{i,A} Z^A$ soient compensés par des termes de $\lambda_i(Z_1,\ldots,Z_r)$.

<u>Démonstration de c)</u> : Il suffit de plonger localement Y_1 dans un espace lisse $\tilde{Y}_1$ sur lequel on choisit des coordonnées locales $y_1,\ldots,y_s$ de telle manière que $T_{Y,x}$ soit défini dans $C_{\tilde{Y}_1,x}$ par $in_x y_2 = \ldots = in_x y_s = 0$. On peut supposer que le disque d'épreuve $\tilde{h}_1 : \mathbb{D} \to \tilde{Y}_1$ de centre x, composé de h_1 et de l'inclusion $Y_1 \subset \tilde{Y}_1$, est donné par :

$$\begin{cases} y_1 = t^e \\ y_i = \varphi_i(t) \qquad 2 \leq i \leq s \end{cases}$$

(au prix de la multiplication de t par une unité de $\mathbb{C}\{t\}$),avec $\nu_o(\varphi_i(t)) > e$ puisque $T_{Y_1,x}$ est le support du cône tangent à l'image de h_1 .

On peut choisir des relèvements $\tilde{f}_i$ des f_i $(1 \leq i \leq m)$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{Z},x}$, où $\tilde{Z}_1 = \tilde{Y}_1 \times r_1^{-1}(x)$, tels que $\nu_x(\tilde{f}_i) = \nu_x(f_i)$.
Ecrivant $\tilde{f}_i = \Sigma \tilde{f}_{i,A} Z^A$ avec $\tilde{f}_{i,A} \in \mathcal{O}_{\tilde{Y}_1,x} = \mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_s\}$ l'assertion de c) est claire, puisque $\tilde{f}_{i,A} \circ \tilde{h}_1 = f_{i,A} \circ h_1$ et au vu de l'écriture explicite de $\tilde{h}_1$ donnée plus haut.
Enfin, l'assertion d) résulte immédiatement de l'égalité que nous avons vue plus haut :

$$d_{\Delta_1, x}^{h_1, h_1} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ |A| < \nu_i}} \left\{ \frac{\nu_o(f_{i,A} \circ h_1)}{\nu_i - |A|} \right\} .$$

Arrivés ici, nous avons d'une part en partant de notre installation $\Delta = (X, Z, W, r)$ et d'un élément $v \in T_{X,x} - T_{W,x}$, construit une installation $\Delta_1 = (X_1, Z_1, Y_1, r_1)$, obtenue par changement de base à partir de Δ, telle que $T_{X_1,x} = \mathbb{C} \cdot v$ et $T_{Y_1,x} = \mathbb{C} \cdot v_1$, où $v_1 = dr(v) = dr_1(v)$. Nous avons de plus contruit un sous-espace Y de Z_1 tel que $T_{Y,x} = \mathbb{C} \cdot v$, et que $r_1 : Y \to Y_1$ soit un isomorphisme local en x. La composition de r_1 avec l'isomorphisme inverse $Y_1 \xrightarrow{\sim} Y$ nous a fourni une rétraction $r_1' : Z_1 \to Y$ telle que l'installation $\Delta_1' = (X_1, Z_1, Y, r_1')$ soit encore perpendiculaire en x.
Nous avons d'autre part montré que pour n'importe quelle installation perpendiculaire $\Delta_1'' = (X_1, Z_1, W_1, r_1'')$ telle que $\dim T_{X_1,x} = \dim T_{W_1,x} = 1$, et n'importe quel disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W_1$ (de centre le point qui nous intéresse) tel que $T_{W_1,x}$ soit le support du cône tangent à l'image de h, en posant $e = \nu_o(\mathfrak{M}_{W_1,x} \circ \mathcal{O}_{\mathbb{D},0})$ on avait :

$$d_{\Delta_1'', x}^{h, h} > e \Leftrightarrow T_{X_1,x_1} = T_{W_1,x_1} .$$

Or, nous avons supposé que Δ avait le contact maximal en x. Il en est donc de même de Δ_1, obtenue par changement de base. Si nous reprenons le disque d'épreuve $h_1 : \mathbb{D} \to Y_1$ considéré plus haut, il nous donne par composition avec l'isomorphisme $Y_1 \xrightarrow{\sim} Y$ un disque d'épreuve $h_1' : \mathbb{D} \to Y$ tel que $X_1^{h_1'} = X_1^{h_1}$, $Z_1^{h_1'} = Z_1^{h_1}$. Or, puisque par hypothèse $T_{X_1,x} \neq T_{Y_1,x}$,

$$d_{\Delta_1, x}^{h_1, h_1} = e$$

et comme par construction $T_{X_1, x} = T_{Y, x}$

$$d_{\Delta_1', x}^{h_1', h_1} > e$$

ce qui montre que

$$d_{\Delta_1, x}^{h_1, h_1} < d_{x}^{\tau}{}_{h_1}(X^{h_1}, Z^{h_1})$$

ce qui contredit le fait que Δ_1 a le contact maximal en x. Cette contradiction montre que l'on doit avoir $v = v_1$, ce qui achève la démonstration de 2.2.1.

2.3 Stabilité du contact maximal.

2.3.1 Définition : Soient W un espace analytique complexe, x un point de W et $\mathfrak{D}_x$ l'ensemble des disques d'épreuve $h : \mathbb{D} \longrightarrow W$ de centre x.
On définit un ordre de différence dans $\mathfrak{D}_x$ ainsi : pour un système de générateurs $(w_1, \ldots, w_s)$ de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{W,x}$ de $\mathcal{O}_{W,x}$, on pose

$$i(h_1, h_2) = \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu_o(w_i \circ h_1 - w_i \circ h_2)\} .$$

Cette quantité est clairement indépendante du choix de $(w_1, \ldots, w_s)$.
En fait

$$i(h_1, h_2) = \inf_{w \in \mathfrak{M}_{W,x}} \{\nu_o(w \circ h_1 - w \circ h_2)\} .$$

2.3.2 Lemme : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation transverse en $x \in X \cap W$, et $(f_1, \ldots, f_m)$ une 0-base standard pour Δ en x, normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; Z_1, \ldots, Z_r)$ où $Z_i = in_x z_i$ $(1 \leq i \leq r)$ et $(z_1, \ldots, z_r)$ est un choix de coordonnées locales en x sur $r^{-1}(x)$. Posons $\nu_i = \nu_x(f_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ et fixons un disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \longrightarrow W$ de centre x tel que

$d_{\Delta^h,0} = \delta < \infty$.

Alors, pour tout disque d'épreuve $h' : \mathbb{D} \to W$ de centre x tel que $i(h,h') > \delta . \sup_{1 \le i \le m} \nu_i$,

a) $d_{\Delta^{h'},0} = d_{\Delta^h,0}$ $(= \delta)$;

b) il existe un $gr_o\mathbb{D}$-isomorphisme canonique σ_o de $gr_o\mathbb{D}[Z_1^h, \dots, Z_n^h]$ sur $gr_o\mathbb{D}[Z_1^{h'}, \dots, Z_1^{h'}]$ tel que

$$\sigma_o(in_o(\Delta^h, \underline{\Delta}^h, \delta)) = in_o(\Delta^{h'}, \underline{\Delta}^{h'}, \delta)$$

- et donc un $T_{\mathbb{D},0}$-isomorphisme canonique $C^{\delta}_{\Delta^h,0} \xrightarrow{\sim} C^{\delta}_{\Delta^{h'},0}$.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que l'on a un $T_{\mathbb{D},0}$-isomorphisme canonique de $T_{Z^h,0}$ sur $T_{Z^{h'},0}$ (celui qui correspond à envoyer Z_i^h sur $Z_i^{h'}$). Nous allons montrer qu'il induit un isomorphisme de $C_{X^h,0}$ sur $C_{X^{h'},0}$. Il suffit de montrer que le $gr_o\mathbb{D}$-isomorphisme $\sigma_o : gr_o\mathbb{D}[Z_1^h, \dots, Z_r^h] \quad gr_o\mathbb{D}[Z_1^{h'}, \dots, Z_r^{h'}]$ défini par $\sigma_o(Z_i^h) = Z_i^{h'}$ envoie $in_o(f_i^h)$ sur $in_o(f_i^{h'})$. En effet $(f_1^h, \dots, f_m^h)$ et $(f_1^{h'}, \dots, f_m^{h'})$ vont rester des 0-bases standard normalisées pour Δ^h et $\Delta^{h'}$ respectivement, en 0. De plus, puisque Δ est transverse en x, il en sera de même pour Δ^h et $\Delta^{h'}$, et $\nu_o(f_i^h) = \nu_o(f_i^{h'}) = \nu_i$.

Ainsi, si nous écrivons $f_i = \sum f_{i,A} z^A$ $(1 \le i \le m)$ avec $f_{i,A} \in \mathcal{O}_{W,x}$,

$$in_o(f_i^h) = \sum_{\nu_o(f_{i,A} \circ h) = \nu_i - |A|} in_o(f_{i,A} \circ h)(Z^h)^A$$

$$in_o(f_i^{h'}) = \sum_{\nu_o(f_{i,A} \circ h') = \nu_i - |A|} in_o(f_{i,A} \circ h')(Z^{h'})^A \quad .$$

Mais puisque $i(h,h')$ est en particulier supérieur à tous les $\nu_i - |A|$, puisqu'il est par hypothèse supérieur à $\delta \sup \nu_i$, il est clair que $in_o(f_{i,A} \circ h) = in_o(f_{i,A} \circ h')$ si $\nu_o(f_{i,A} \circ h)$ ou $\nu_o(f_{i,A} \circ h')$ est égal à $\nu_i - |A|$. Ce sont donc les mêmes $f_{i,A}$ qui vont contribuer aux formes ini-

tiales, et ils vont contribuer la même forme initiale. Ceci montre bien que $\sigma_o(\mathrm{in}_o f_i^h) = \mathrm{in}_o f_i^{h'}$.

Montrons maintenant que $d_{\Delta^h,0} = d_{\Delta^{h'},0}$.

Grâce à la permanence des bases standard normalisées par changement de base :

$$d_{\Delta^h,0} = \min_{\substack{1\le i\le m \\ |A|<\nu_i}} \frac{\nu_o(f_{i,A}\circ h)}{\nu_i - |A|}$$

$$d_{\Delta^{h'},0} = \min_{\substack{1\le i\le m \\ |A|<\nu_i}} \frac{\nu_o(f_{i,A}\circ h')}{\nu_i - |A|} \quad .$$

Pour cela, remarquons que

$$\nu_o(f_{i,A}\circ h - f_{i,A}\circ h') \ge i(h,h') > \delta \sup \nu_i$$

entraîne que :

- ou $\qquad \nu_o(f_{i,A}\circ h) = \nu_o(f_{i,A}\circ h')$

- ou $\qquad \min(\nu_o(f_{i,A}\circ h), \nu_o(f_{i,A}\circ h')) > \delta \sup \nu_i$.

Dans les deux cas, $\nu_o(f_{i,A}\circ h') \ge \delta(\nu_i - |A|)$, ce qui nous montre que $d_{\Delta^{h'},0} \ge \delta$.

Mais il existe (i_o, A_o) tel que

$$\nu_o(f_{i_o,A_o}\circ h) = \delta(\nu_{i_o} - |A_o|) < \delta \sup \nu_i$$

et l'on doit alors avoir

$$\nu_o(f_{i_o,A_o}\circ h') = \nu_o(f_{i_o,A_o}\circ h) = \delta(\nu_{i_o} - |A_o|)$$

ce qui montre que $d_{\Delta^{h'},0} = \delta$.

Il suffit de vérifier que

$$\sigma_i(\mathrm{in}_o(f_i^h, \underline{\Delta}^h, \delta)) = \mathrm{in}_o(f_i^{h'}, \underline{\Delta}^{h'}, \delta)$$

(d'après l'identification habituelle (ch. I, § 2)).
Mais ceci est bien clair si l'on écrit

$$\mathrm{in}_o(f_i^h, \underline{\Delta}^h, \delta) = \sum_{|A| + \frac{\nu_o(f_{i,A} \circ h)}{\delta} = \nu_i} \mathrm{cl.}\left(f_{i,A} \circ h \bmod \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{\delta(\nu_i - |A|)+1} \right) (Z^h)^A$$

$$\mathrm{in}_o(f_i^{h'}, \underline{\Delta}^{h'}, \delta) = \sum_{|A| + \frac{\nu_o(f_{i,A} \circ h')}{\delta} = \nu_i} \mathrm{cl.}\left(f_{i,A} \circ h' \bmod \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{\delta(\nu_i - |A|)+1} \right) (Z^{h'})^A$$

puisque nous venons de voir que $\nu_o(f_{i,A} \circ h) = \delta(\nu_i - |A|)$ $(< \delta \sup \nu_i)$ implique que $\mathrm{cl}\left(f_{i,A} \circ h \bmod \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{\delta(\nu_i - |A|)} \right) = \mathrm{cl}(f_{i,A} \circ h') \bmod . \mathfrak{M}_{\mathbb{D},0}^{\delta(\nu_i - |A|)+1}$.

2.3.3 <u>Proposition</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation perpendiculaire en $x \in X \cap W$. Soit $H \subset W$ un sous-espace analytique strict ($\dim H < \dim W$) contenant x. Pour que Δ ait le contact maximal en x, il faut et il suffit que pour tout disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W$ de centre x tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - H$, on ait

$$d_{\Delta^h, x^h} = d^{\tau}_{x^h}(X^h, Z^h) .$$

<u>Démonstration</u> : La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de vérifier qu'elle entraîne que pour tout disque d'épreuve $h' : \mathbb{D} \to W$ de centre x tel que $h'(\mathbb{D}) \subset H$, on a encore $d_{\Delta^{h'}, x^{h'}} = d^{\tau}_{x^{h'}}(X^{h'}, Z^{h'})$. Si $d_{\Delta^{h'}, x^{h'}} = +\infty$, l'égalité doit être vérifiée.
Posons donc $d_{\Delta^{h'}, x^{h'}} = \delta < \infty$.
Choisissons une 0-base standard normalisée $(f_1, \ldots, f_m)$ pour Δ en x, posons $\nu_i = \nu_x(f_i)$ et choisissons un disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W$ de centre x tel que $i(h, h') > \delta \cdot \sup \nu_i$, et tel que $h(\mathbb{D} - 0) \subset W - H$. D'après le

lemme 2.3.2, nous avons $d_{\Delta^h,x^h} = d_{\Delta^{h'},x^{h'}} = \delta$, un $T_{\mathbb{D},0}$-isomorphisme canonique $C^{\delta}_{\Delta^h,x^h} \simeq C^{\delta}_{\Delta^{h'},x^{h'}}$, et un $T_{\mathbb{D},0}$-isomorphisme canonique $C_{X^h,x^h} \simeq C_{X^{h'},x^{h'}}$.

D'autre part, puisque Δ est perpendiculaire en x, il en est de même de Δ^h et $\Delta^{h'}$. Nous avons donc (2.1.2) $\dim T_{X^h,x^h} \leq 1$ et $\dim T_{X^{h'},x^{h'}} \leq 1$.

D'après l'hypothèse, $d_{\Delta^h,x^h} = d^{\tau}_{x^h}(X^h)$. Il y a alors deux possibilités :

si $T_{X^h,x^h} = (0)$, $d^{\tau}_{x^h}(X^h) = 1$ (2.1.3) et donc $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} = 1$. Mais puisque nous avons un isomorphisme entre C_{X^h,x^h} et $C_{X^{h'},x^{h'}}$, nous avons aussi $T_{X^{h'},x^{h'}} = (0)$, donc $d^{\tau}_{x^{h'}}(X^{h'},Z^{h'}) = 1$ (2.1.3) et donc dans ce cas l'égalité voulue : $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} = d^{\tau}_{x^{h'}}(X^{h'},Z^{h'})$. Si $T_{X^h,x^h} \neq (0)$, toujours d'après 2.3.1, $d^{\tau}_{x^h}(X^h,Z^h) > 1$, donc $d_{\Delta^h,x^h} > 1$, donc $T_{X^h,x^h} = T_{\mathbb{D},0}$. Mais dans ce cas, on doit avoir $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} > 1$ puisque $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} = d_{\Delta^h,x^h}$, et donc $T_{X^{h'},x^{h'}} = T_{\mathbb{D},0}$. Nous pouvons maintenant appliquer (ch. III, § 1) :

Si nous avions $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} < d^{\tau}_{x^{h'}}(X^{h'},Z^{h'})$, il existerait un $T_{\mathbb{D},0}$-automorphisme, distinct de l'identité, de $T_{Z^{h'},x^{h'}}$ envoyant $C^{\delta}_{\Delta^{h'},x^{h'}}$ sur $C^{1}_{\Delta^{h'},x^{h'}} = C_{X^{h'},x^{h'}}$. Mais d'après les isomorphismes que nous avons construits, ceci entraînerait l'existence d'un $T_{\mathbb{D},0}$-automorphisme, distinct de l'identité, de T_{Z^h,x^h} envoyant $C^{\delta}_{\Delta^h,x^h}$ sur C_{X^h,x^h} et ceci impliquerait $d_{\Delta^h,x^h} < d^{\tau}_{x^h}(X^h,Z^h)$, qui est contraire à l'hypothèse. Ceci montre que l'on doit toujours avoir $d_{\Delta^{h'},x^{h'}} = d^{\tau}_{x^{h'}}(X^{h'},Z^{h'})$, et donc la proposition.

2.3.4 <u>Théorème</u> : Soit $\Delta = (X,Z,W,r)$ une bonne installation ayant le contact maximal en $x \in X \cap W$. Soit $\Phi : \Delta' \longrightarrow \Delta$ une modification permise de centre $Y \subset W \cap X$. Nous notons $\Delta' = (X',Z',W',r')$ et $f : X' \longrightarrow X$ la modification de centre Y. Pour tout point $x' \in f^{-1}(x)$ tel que $H^1_{X',x'} = H^1_{X,x}$

a) $x' \in W'$;

b) $H_{W',x'} = H_{W,x}$;

c) Δ' a le contact maximal en x'.

<u>Démonstration</u> : Les points a) et b) résultent de (ch. II, 2.11) puisque Δ ayant le contact maximal en x, nous avons l'inclusion : $T_{X,x} \subseteq T_{W,x}$ (2.1.3). Pour démontrer c), remarquons tout d'abord que Δ' est transverse en x' d'après (ch. II, 2.6) puisque Δ est transverse en x. Nous avons donc les égalités (ch. I, § 1)

$$C_{X,x} \cap T_{r^{-1}(x),x} = C_{X \cap r^{-1}(x),x}$$

$$C_{X',x'} \cap T_{r'^{-1}(x'),x'} = C_{X' \cap r'^{-1}(x'),x'}$$

et nous avons vu en (ch. II, 2.10) que les cônes de gauche étaient isomorphes. Il en est donc de même de ceux de droite, et la perpendicularité de Δ implique celle de Δ'.

Fixons maintenant quelques notations : soit $(z_1,\dots,z_r)$ un système de coordonnées locales sur $r^{-1}(x)$. Posons $Z_i = in_x z_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Soit $(f_1,\dots,f_m)$ une 0-base standard pour Δ en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1,\dots,Z_r)$. Notons $G : W' \longrightarrow W$ la modification de centre Y, et w' un générateur en x' de l'Idéal inversible définissant $G^{-1}(Y)$. Soit enfin $F : Z' \longrightarrow Z$ la modification de centre Y.

Si nous écrivons $f_i = \Sigma f_{i,A} z^A$ avec $f_{i,A} \in \mathcal{O}_{W,x}$ et si $(f'_1,\dots,f'_m)$ est la transformée de $(f_1,\dots,f_m)$, c'est-à-dire que

$f'_i = \dfrac{f_i \circ F}{w'^{\nu_i}}$, on a

$$f'_i = \Sigma f'_{i,A} z'^A$$

où $f'_{i,A} = \dfrac{f_{i,A} \circ G}{w'^{\nu_i - |A|}}$ et $(z'_1,\dots,z'_r)$ est le système de coordonnées locales sur $r'^{-1}(x')$ transformée de $(z_1,\dots,z_r)$. D'après (ch. II, 2.8), $(f'_1,\dots,f'_m)$ forment une 0-base standard pour Δ' en x' normalisée par

rapport à $(\mathcal{O}_{W',x'} ; Z'_1,\dots,Z'_r)$. Puisque Δ' est perpendiculaire en x', pour montrer que Δ' a le contact maximal en x', il nous suffit d'après 2.3.3 de montrer que pour tout disque d'épreuve $h' : \mathbb{D} \to W'$ de centre x', tel que $h'(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W' - G^{-1}(Y)$, on a l'égalité :

$$d_{\Delta'^{h'},x'^{h'}} = d^{\tau}_{x'^{h'}}(X'^{h'}, Z'^{h'}) .$$

La composition $G \circ h'$ nous donne un disque d'épreuve $h : \mathbb{D} \to W$ de centre x tel que $h(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W - Y$.

Si $d_{\Delta'^{h'},x'^{h'}} = +\infty$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc $d_{\Delta'^{h'},x'^{h'}} = d' < +\infty$ et posons $d = d_{\Delta^h,x^h}$. Puisque $h'(\mathbb{D} - \{0\}) \subset W' - G^{-1}(Y)$, $\nu_o(w' \circ h')$ est fini. Posons $\nu_o(w' \circ h') = k$. Puisque une base standard normalisée le reste par changement de base, (ch. I, 7.2.13) nous pouvons écrire, grâce à (ch. I, 7.3.4) :

$$\begin{aligned} d &= \min_{1\le i\le m} \min_{|A|<\nu_i} \left(\frac{\nu_o(f_{i,A} \circ h)}{\nu_i - |A|} \right) \\ &= \min_{1\le i\le m} \min_{|A|<\nu_i} \left(\frac{\nu_o((f'_{i,A} \cdot w'^{\nu_i - |A|}) \circ h')}{\nu_i - |A|} \right) \\ &= k + \min_{1\le i\le m} \min_{|A|<\nu_i} \left(\frac{\nu_o(f'_{i,A} \circ h')}{\nu_i - |A|} \right) \\ &= k + d' . \end{aligned}$$

Choisissons une coordonnée locale t sur W^h, et une coordonnée locale t' sur $W'^{h'}$, de telle façon que t et t' fournissent la même coordonnée locale sur $\mathbb{D}$ à traverse les isomorphismes $\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} W^h$ et $\mathbb{D} \xrightarrow{\sim} W'^{h'}$ respectivement. Après les identification habituelles de $\mathrm{gr}_{x^h} \underline{\Delta}^h ; d$ à $\mathbb{C}[T, Z_1^h,\dots,Z_r^h]$ et de $\mathrm{gr}_{x'^{h'}} \underline{\Delta}^{h'} ; d'$ à $\mathbb{C}[T', Z_1'^{h'},\dots,Z_r'^{h'}]$, où $T = \mathrm{in}_o\, t$, $T' = \mathrm{in}_o\, t'$, écrivons

$$f_i^* = in_o(f_i \circ h \,;\, \underline{\Delta}^h, d) = \sum_{d.|A|+\nu_o(f_{i,A}\circ h)=d.\nu_i} in_o(f_{i,A} \circ h)(Z^h)^A$$

$$f_i'^* = in_o(f_i' \circ h' \,;\, \underline{\Delta}'^{h'}, d') = \sum_{d'.|A|+\nu_o(f'_{i,A}\circ h')=d.\nu_i} in_o(f'_{i,A} \circ h')(Z'^{h'})^A$$

notons que puisque $\nu_o(w' \circ h') = k$, à un élément inversible de $\mathbb{C}\{t'\}$ près, nous avons $w' \circ h' = t'^k$. Puisque $f_{i,A} \circ h = (w'^{\nu_i - |A|} . f'_{i,A}) \circ h'$, nous avons

$$in_o(f_{i,A} \circ h) = T^{k(\nu_i - |A|)} in_o(f'_{i,A} \circ h') .$$

De plus, $\nu_o(f_{i,A} \circ h) = k(\nu_i - |A|) + \nu_o(f'_{i,A} \circ h')$ et donc l'égalité

$$d|A| + \nu_o(f_{i,A} \circ h) = d . \nu_i$$

équivaut à

$$d|A| + k(\nu_i - |A|) + \nu_o(f'_{i,A} \circ h') = d\,\nu_i$$

c'est-à-dire, puisque $d = k + d'$, à

$$d'|A| + \nu_o(f'_{i,A} \circ h') = d' . \nu_i .$$

Si pour comparer f_i^* et $f_i'^*$ nous substituons formellement $Z'^{h'}$ à Z^h et T' à T dans f_i^*, nous obtenons l'identité :

$$(*) \qquad f_i^*(T', T'^k . Z_1'^{h'}, \ldots, T'^k . Z_r'^{h'}) \equiv T'^{k.\nu_i} f_i'^*(T', Z_1', \ldots, Z_r')$$

$(1 \leq i \leq m)$.

Nous allons utiliser ces identités pour montrer qu'il est impossible d'avoir $d_{\Delta'^{h'}, x'^{h'}} < d^{\tau}_{x'^{h'}}(X'^{h'}, Z'^{h'})$.

Puisque $d = k + d'$, nous avons certainement $d > 1$, et donc $T_{X^h, x^h} = T_{W^h, x^h}$. (Puisque r^h est perpendiculaire). D'autre part, les égalités $f_i \circ F = f_i' . w'^{\nu_i}$ nous montrent que $f_i \circ h = (f_i' . w'^{\nu_i}) \circ h'$, ce qui nous

montre qu'au voisinage de $x'^{h'}$, $\Delta'^{h'}$ coïncide avec le résultat de k modifications successives de Δ^h de centres ponctuels, c'est-à-dire que l'on a une suite de modifications d'installations de centres ponctuels

$$\Delta'^{h'} = \Delta^{h^{(k)}} \longrightarrow \Delta^{h^{(k-1)}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \Delta^{h^{(0)}} = \Delta \quad .$$

Le centre de chaque modification étant l'unique point de $W^{h^{(i)}}$ dont l'image soit l'origine de $W^{h^{(i-1)}}$. (En fait comme les $W^{h^{(i)}}$ sont des disques, et que donc l'origine en est un diviseur, on a des isomorphismes

$$W^{h^{(k)}} \xrightarrow{\sim} W^{h^{(k-1)}} \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} W^h \quad).$$

Or, $(f'_1 \circ h', \dots, f'_m \circ h')$ est une 0-base standard normalisée pour $\Delta'^{h'}$, et $\nu_{x'^{h'}}(f'_i \circ h') = \nu_i = \nu_{x^h}(f_i \circ h)$ (grâce à la transversalité). D'après (ch. II, 2.10), nous avons donc $H_{X'^{h'},x'^{h'}} = H_{X^h,x^h}$.

Si $T_{X'^{h'},x'^{h'}} = (0)$,

$$d^{\tau}_{x'^{h'}}(X'^{h'}, Z'^{h'}) = 1 \quad \text{(cf. § 1)}$$

et il n'y a rien à démontrer. Si $\dim T_{X'^{h'},x'^{h'}} = 1$, (rappelons que $\dim T_{X'^{h'},x'^{h'}} \leq \dim T_{\mathbb{D},0}$ 1 grâce à la perpendicularité), nous avons grâce à (ch. II, 1.2.14) un isomorphisme (non canonique) entre $C_{X'^{h'},x'^{h'}}$ et C_{X^h,x^h}.

Or, si $d_{\Delta'^{h'},x'^{h'}} < d^{\tau}_{x'^{h'}}(X'^{h'}, Z'^{h'})$, d'après (ch. III, 1.2), il existe un $T_{W'^{h'},x'^{h'}}$ - automorphisme σ' de $T_{Z'^{h'},x'^{h'}}$ qui envoie $C^{d'}_{\Delta'^{h'},x'^{h'}}$ sur $C_{X'^{h'},x'^{h'}}$, c'est-à-dire (loco citato) des polynômes homogènes $S'_i(T')$ de degré d', tels que

$$f'^*_i(T', Z'^{h'}_1 + S'_1(T'), \dots, Z'^{h'}_r + S'_r(T')) \equiv \mathrm{in}_{x'^{h'}}(f'_i \circ h') \equiv \lambda_i(Z'_1, \dots, Z'_r)$$

où $\lambda_i(Z'_1,\ldots,Z'_r)$ est un polynôme homogène de degré ν_i. Les identités de (*) nous montrent que l'on devrait alors avoir :

$$f_i^*(T, Z_1^h + T^k S'_1(T), \ldots, Z_r^h + T^k \cdot S'_r(T)) \equiv \lambda_i(Z_1, \ldots, Z_r)$$

c'est-à-dire un T_{W^h,x^h} - automorphisme σ de T_{Z^h,x^h} tel que σ envoie $C^d_{\Delta^h,x^h}$ sur C_{X^h,x^h}.

Toujours d'après (ch. III, 1.2) ceci implique $d_{\Delta^h,x^h} < d_{x^h}(X^h, Z^h)$. Mais ceci contredit l'hypothèse que Δ a le contact maximal en x. Ceci montre que Δ' a le contact maximal en x', et achève la démonstration de 2.3.4.

2.3.5 <u>Corollaire</u> : Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une bonne installation ayant le contact maximal en $x \in X \cap W$. Si X_o (resp. W_o) désigne la strate de Samuel de x dans X (resp. W), on a l'inclusion des germes en x :

$$X_o \subset W_o \ .$$

<u>Démonstration</u> : Nous allons d'abord montrer que $X_o \subset Z_o$, strate de Samuel de x dans Z. Pour cela, il suffit de montrer que si Γ est un germe de courbe irréductible contenu dans X_o, on a l'inclusion de germes : $\Gamma \subset Z_o$. Considérons la modification $\Phi : \Delta' \longrightarrow \Delta$ de centre x (évidemment permise), et soit $\Gamma' \subset Z'$ la transformée stricte de Γ. Soit x' l'unique point de Γ' qui se projette sur x (Γ étant irréductible, $\mathrm{Proj}\, C_{\Gamma,x}$ est réduit à un point, non nécessairement réduit !). Soit X'_o la strate de Samuel de la transformée stricte X' de X correspondant à la fonction de Samuel $H_{X,x}$ (cf. ch. I, § 8) et soit Z'_o la strate de Samuel de Z' correspondant à $H_{Z,x}$. Puisque les strates de Samuel sont localement fermées, nous avons les équivalences suivantes :

$$\Gamma \subset X_o \Leftrightarrow \Gamma - \{x\} \subset X_o \Leftrightarrow \Gamma' - \{x'\} \subset X'_o \Leftrightarrow \Gamma' \subset X'_o$$

$$\Gamma \subset Z_o \Leftrightarrow \Gamma - \{x\} \subset Z_o \Leftrightarrow \Gamma' - \{x'\} \subset Z'_o \Leftrightarrow \Gamma' \subset Z'_o \ .$$

Il est donc équivalent de montrer que $\Gamma \subset Z_o$ ou que $\Gamma' \subset Z'_o$. Mais puisque $\Gamma \subset X_o$, $\Gamma' \subset X'_o$, donc $x' \in X'_o$, c'est-à-dire $H_{X',x'} = H_{X,x}$. Ceci entraîne, comme nous l'avons vu en 2.3.4, que $H_{W',x'} = H_{W,x}$, donc $H_{Z',x'} = H_{Z,x}$ puisque r et r' sont lisses, donc $x' \in Z'_o$.
Or, 2.3.4 nous dit que Δ' a le contact maximal en x'. Toutes les hypothèses sont donc conservées après modification de centre x. Mais d'après (ch. II, 2.13), au bout d'un nombre fini de telles modifications, nous rendrons $Z^{(r)}$ normalement plat le long de $\Gamma^{(r)}$: nous aurons alors $\Gamma^{(r)} \subset Z_o^{(r)}$, ce qui montre que $\Gamma \subset Z_o$ et donc $X_o \subset Z_o$. Ceci nous montre en tous cas que $X_o \cap W \subset W_o$ (inclusion de germes) puisque r étant lisse, nous avons $Z_o = W_o \times r^{-1}(x)$.
Or, si nous supposons que $\Gamma \not\subset W$, au bout d'un nombre fini de modifications de centre ponctuel, comme plus haut, nous séparerons $\Gamma^{(r)}$ de $W^{(r)}$. En effet, d'après (ch. II, 2.13) nous rendrons $(W \cup \Gamma)^r$ normalement plat lo long de $\Gamma^{(r)}$, ce qui est clairement absurde sauf si $\Gamma^{(r)} \subset W^{(r)}$, ce qui entraîne $\Gamma \subset W$, ou si $\Gamma^{(r)} \cap W^{(r)} = \emptyset$. Mais les hypothèses sont conservées à chaque pas, et séparer $\Gamma^{(r)}$ de W^r revient à dire que $x^{(r)} \notin W^{(r)}$, ce qui contredit l'assertion a) de 2.3.4.
Nous avons ainsi montré que $\Gamma \subset X_o \Rightarrow \Gamma \subset Z_o \cap W = W_o$, donc l'inclusion $X_o \subset W_o$.

***

C H A P I T R E IV

APPLICATIONS DE LA THEORIE DES INSTALLATIONS

IV.1 Rappelons que si $f : X \longrightarrow W$ est un morphisme d'espaces analytiques, et si $x \in X$, posant $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_{X,x} / \mathfrak{M}^2_{X,x} = \operatorname{im} \dim_x X$, nous pouvons plonger un voisinage de x dans X (noté X par l'abus de notation habituel) dans $\mathbb{C}^N$. Soit $i : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ un tel plongement ($i(x) = 0$). Il lui est associé un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "f \times i"] \arrow[dr, "f"'] & & W \times \mathbb{C}^N \arrow[dl, "r"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

où $f \times i$ est une immersion, et $r = pr_1$.
Le choix d'un autre plongement i' donne une situation isomorphe.
A tout choix d'une section σ de r au voisinage de $w = f(r)$, telle que $\sigma(w) = w \times \{0\}$ est alors associée une installation

$$\Delta(\sigma) = (X,\ W \times \mathbb{C}^N,\ W,\ r)$$

où W est plongé dans $W \times \mathbb{C}^N$ grâce à σ.
Ceci nous permet d'appliquer la théorie des installations à l'étude locale des morphismes.

IV.2 <u>Définition</u> : Soit $f : X \longrightarrow W$ un morphisme d'espaces analytiques. Nous dirons que f est tangentiellement plat en $x \in X$ si le morphisme tangent $df : C_{X,x} \longrightarrow C_{W,w}$ est plat (où $w = f(x)$).

IV.3 <u>Théorème</u> (critère numérique de platitude tangentielle) : $f : X \longrightarrow W$ est tangentiellement plat en $x \in X$ si et seulement si

$$H^1_{X,x} = H^1_{W,w} * G_{f^{-1}(w),x}$$

(notations de ch. I, § 4, en fait $G_{f^{-1}(w),x} = H^0_{f^{-1}(w),x}$).

<u>Démonstration</u> : Appliquons (ch. I, 5.1.1) à l'une quelconque des installations $\Delta(\sigma)$ définies en IV.1.

IV.4 <u>Corollaire</u> : Si $f : X \longrightarrow W$ est tangentiellement plat en x, on a l'inégalité

$$H^1_{X,x} \geq H^{1+d}_{W,x} = H^1_{W,w} * H^0_{\mathbb{C}^d,0}$$

où $d = \dim_x f^{-1}(w)$.

<u>Démonstration</u> : $H^0_{f^{-1}(w),x} \geq H^0_{\mathbb{C}^d,0}$ d'après la semi-continuité de la fonction de Samuel (ch. I, § 8). Ceci fournit une réponse partielle à un problème posé par Hironaka dans [8].

IV.5 <u>Théorème</u> : La platitude tangentielle est stable par changement de base. C'est-à-dire que si $g : W' \longrightarrow W$ est un morphisme quelconque, et $f' : X' \quad W'$ le morphisme obtenue par changement de base

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

Si f est tangentiellement plat en $x \in X$, f' est tangentiellement plat en tout point $x' \in X'$ tel que $g'(x') = x$.

<u>Démonstration</u> : Appliquer (ch. I, 6.2) à l'une quelconque des installations $\Delta(\sigma)$ définies en IV.1.

IV.6 <u>Définition</u> : Soient $f : X \longrightarrow W$ un morphisme d'espaces analytique, et $x \in X$. Nous appellerons taux de section de f en x le nombre

$$S_{f,x} = \sup_{\Delta(\sigma)} d_{\Delta(\sigma),x}$$

le sup étant pris sur l'ensemble des installations $\Delta(\sigma)$ définies en IV.1.

Ce nombre est indépendant du choix de l'immersion i de X dans $\mathbb{C}^N$ au voisinage de x : il ne dépend que du germe de morphisme $f : (X,x) \longrightarrow (W,x)$.

Le terme de "taux de section" est justifié par le :

IV.7 <u>Théorème</u> : Pour un morphisme $f : (X,x) \longrightarrow (W,w)$ tel que $T_{f^{-1}(w),x} = (0)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $S_{f,x} = +\infty$;

b) il existe un germe de section $\sigma : (W,w) \longrightarrow (X,x)$ de f, tel que

1) $\sigma(W) \subset X$;

2) $C_{X,\sigma(W)}$ est plat sur $\sigma(W)$ en x (i.e., X est relativement normalement plat le long de $\sigma(W)$ en x, dans la terminologie de l'Appendice).

<u>Démonstration</u> : Si $\Delta(\sigma)$ est telle que $d_{\Delta(\sigma),x} > 1$, on a un isomorphisme (ch. I, 5.1.5)

$$C_{X,x} \simeq C_{\sigma(W),x} \times C_{f^{-1}(w),x}$$

et la condition $T_{f^{-1}(w),x} = (0)$ entraîne l'égalité :

$$T_{X,x} = T_{\sigma(W),x} \quad .$$

Ainsi, a) équivaut à $d_x^{\tau}(X, W \times \mathbb{C}^N) = +\infty$ (cf. ch. III, § 1) et donc à b) (cf. loc. cit. et ch. I, 5.1.8). En particulier, $S_{f,x}$ est effectivement atteint par l'installation $\Delta(\sigma)$ où σ est celui de b).

IV.8 <u>Définition</u> : Soit $f : (X,x) \longrightarrow (W,w)$. On appelle taux de platitude de f en x, et l'on note $P_{f,x}$ le nombre

$$P_{f,x} = \inf_{\Delta(\sigma)} d_{\Delta(\sigma),x}$$

l'inf. étant pris sur l'ensemble des installations $\Delta(\sigma)$ définies en IV.1.

Le terme "taux de platitude" est justifié par le :

IV.9 <u>Théorème</u> : f est plat en x si et seulement si $P_{f,x} > 0$; f est tangentiellement plat en x si et seulement si $P_{f,x} = 1$.

<u>Démonstration</u> : Evident d'après (ch. I, 5.1.3 et 5.1.1).

IV.10 <u>Corollaire</u> : Si $f : X \longrightarrow W$ est tangentiellement plat en $x \in X$, f est plat en x.

IV.11 <u>Remarque</u> : $P_{f,x}$ est un nombre rationnel compris entre 0 et 1. En effet, si $d_{\Delta(\sigma),x}$ est < 1, il ne dépend en fait pas du choix de σ, donc $P_{f,x}$ est atteint. D'autre part, on peut, par la méthode exposée dans (ch. III, § 1) choisir σ de telle façon que $d_{\Delta(\sigma),x} = 1$. En fait

$$P_{f,x} = \min(S_{f,x}, 1) .$$

***

B I B L I O G R A P H I E

[Ab] S. S. Abhyankar : Local Analytic Geometry, Academic Press, 1964.

[Be] B. Bennet : On the characteristic function of a local ring, Annals of Math., Vol. 91, No 1, (1970)

[1] J. Briançon : Weierstrass préparé à la Hironaka, in "Singularités à Cargèse", à paraître dans Astérisque.

[2] H. Cartan : Faisceaux analytique cohérents, in "Funzioni e varieta complesse", CIME, Varenna 1953, Edizioni Cremonese, Roma.

[3] H. Cartan : Séminaire 1960-61, exposés de C. Houzel.

[4] J. Frisch : Points de platitude ..., Inventiones Math., 4, (1967), 118-138.
Voir aussi Séminaire Cartan 1953-54.

[5] H. Hironaka : Resolution of singularities, Ann. of Math., Vol. 79, No 1 et 2, (1964).

[6] H. Hironaka : Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint, Université de Warwick, 1971.

[7] H. Hironaka : Characteristic polyhedra of singularities, Journal of Math. Kyoto University, Vol. 7, No 3, (1968).

[8] H. Hironaka : Some numerical characters of singularities, Journal of Math. Kyoto University, Vol. 10, (1970).

[9] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier : Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire Ecole Polytechnique 1972.

[10] (Citée "Appendice") M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier : Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint, Université de Warwick, 1971.

***

A P P E N D I C E

NORMAL CONES AND SHEAVES OF RELATIVE JETS

This research was supported by the C. N. R. S., Paris and NSF GP 9152. This work was first printed by the Department of Mathematics, Warwick University, Coventry, Warwickshire.

<u>Introduction</u> Given a subscheme, (or analytic subspace) Y of a relative scheme (or analytic space) X/S, one may wish to link the tangent cones of the fibers of X/S at points of Y with the normal cone of X along Y. (which generalises the normal bundle; see (1.8)). The main result of this work (see th.2.3 and its avatar th.3.6) is that if we imbed Y in $Y \underset{S}{\times} Y$ and $X \underset{S}{\times} Y$ diagonally, there exists a canonical sequence of morphisms of normal cones

$$(o) \to C_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \to C_{X \underset{S}{\times} Y, Y} \to C_{X,Y} \to (o)$$

which is "exact" in the sense that $C_{X,Y}$ is a quotient of $C_{X \underset{S}{\times} Y, Y}$ by a natural action of $C_{Y \underset{S}{\times} Y, Y}$, if Y is smooth over the base S. Hence, in that case, $C_{X,Y}$ is flat over Y if and only if $C_{X \underset{S}{\times} Y, Y}$ is, and then the fiber of this last space above a point of Y is nothing but the tangent cone at this point to the fiber of X/S. The geometric meaning is that the various tangent cones to the fibers of X/S at points of Y glue up into a nice flat family parametered by Y if and only if $C_{X,Y}$ is flat over Y.

This "exact sequence of normal cones" gives rise locally to a split sequence of graded Algebras, looking only at the terms of degree 1, we must get an exact sequence of modules and this is nothing but the well-known sequence

$$o \to N_{X,Y} \to i^*\Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{Y/S} \to o.$$

The main result enables us to give , for a notion of relative normal flatness which we introduce in §3, a numerical criterion similar to Bennett's in[1], and to prove the existence of a relative Samuel stratification, i.e. a partition of X into subschemes (or subspaces) such that two joints belong to the same subscheme (or subspace) if and only if the Samuel function of the fibers of X/S through these points are equal. (See §4)

Notations:

Throughout this paper we work either in the category of schemes or in the category of analytic spaces defined over a valued, complete, non discrete, algebraically closed field. By scheme, we mean a non necessarily separated one.

If X is a scheme (resp. analytic space), we note $\mathcal{O}_X$ the structural sheaf of rings on X. If x is a point in X, $\mathcal{O}_{X,x}$ (resp. $\mathfrak{M}_{X,x}$) (resp. $\kappa(x)$) is the local ring of X at x (resp. its maximal ideal) (resp. its residue field).

Let $\mathcal{F}$ be an $\mathcal{O}_X$-module, $\mathcal{F}_x$ is the stalk of $\mathcal{F}$ at x, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$ is the fiber of $\mathcal{F}$ at x.

§0. Smooth morphisms and regular immersions:

We recall here some basic properties we shall use in the later sections. For more details (maybe not strictly necessary at the first reading) one may refer to [4] exposé 2 or [5] Ch. IV, §16 and 17, Ch. 0, §15 and 19, and [2] exposé 13.

From now on the topological structure on a noetherian local ring O will always be that defined by its maximal ideal and completion will mean with respect to this topology.

(0.1) Let us recall A being a topological ring, B,A' topological A-algebras, if B is formally smooth over A, $B \hat{\otimes}_A A'$ is formally

smooth over A'. (In particular, if P is a prime ideal in A, A_P the localization of A at P, $B_P = B \otimes_A A_P$ is formally smooth over A_P).

(0.2) If B is formally smooth over A, C formally smooth over B, C viewed as an A-topological algebra is smooth over A.

(0.3) B is formally smooth over A, if and only if $\hat{B}$ is formally smooth over $\hat{A}$.

(0.4) If $A \longrightarrow B$ is a local morphism of noetherian local rings, m (resp. K) the maximal ideal (resp. residue field) of A, B is formally smooth over A if and only if B is A-flat and $B/mB = B \otimes_A K$ is formally smooth over K ([5], 0.19.7.1).

(0.5) If A is a local noetherian k-algebra where k is a field, K its residue field, if K is an extension of finite type of k, A is formally smooth over k if and only if A is geometrically regular (i.e., for every finite extension k' of k, the semi-local ring $A \otimes_k k'$ is regular).

(0.6) Assumptions as in (0.5). Moreover assume k = K. Then A is formally smooth over k if and only if $\hat{A}$ is k-isomorphic with some ring of power series $k[[T_1,\cdots,T_n]]$ ([5], 0.19.6.4).

(0.7) From (0.4) and (0.6), one may easily deduce that if $A \longrightarrow B$ is a local morphism of noetherian local rings residually trivial, B is formally smooth over A if and only if $\hat{B}$ is $\hat{A}$-isomorphic with some ring of power series $\hat{A}[[T_1,\cdots,T_n]]$ ([5], 0.19.7.1.5).

(0.8) Let k be a field, K an extension of k. K is formally smooth over k if and only if K is a separable extension of k ([5],0.19.6.1).

(0.9) Let S be a locally noetherian scheme (resp. analytic space), $f: X \longrightarrow S$ a morphism of schemes locally of finite type (resp. of analytic spaces). Let x be a point in X, $s = f(x)$. The following conditions are equivalent:

1) f is smooth at x.

2) $\mathcal{O}_{X,x}$ is formally smooth over $\mathcal{O}_{S,s}$.

3) f is flat at x and the canonical morphism $f_s: X_s = f^{-1}(s) \longrightarrow \operatorname{Spec} k(s)$ is smooth at x.

4) f is flat at x and $\mathcal{O}_{X_s,x}$ is geometrically regular.

If $\kappa(x) = \kappa(s)$ (automatically satisfied in the analytic case), then the conditions 1) to 4) are also equivalent to the following one.

5) $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ is $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ isomorphic to some ring of power series $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[T_1,\cdots,T_n]]$.

(0.10) A smooth morphism remains smooth after base extension.

(0.11) The composition of smooth morphisms is a smooth morphism.

(0.12) Assumptions as in (0.9). If f is smooth at x, $\mathcal{O}_{X,x}$ is a reduced ring if and only if $\mathcal{O}_{S,s}$ is reduced.

(0.13) Assumptions as in (0.9). The set of points where f is smooth is open in X (perhaps empty).

(0.14) Let k be a field, X an algebraic scheme over k. Assume X is integral. X is smooth over k at its generic point if and only if its function field is a separable extension of k.

Let us now come to regular immersions:

(0.15) Let $i: Y \longrightarrow X$ be an immersion of noetherian local schemes (resp. germs of analytic spaces). Let y be the closed point of Y (resp. the picked point on the germ Y), the following conditions are equivalent:

1) i is a regular immersion.

2) $I_y = \mathrm{Ker}\ \mathcal{O}_{X,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ is generated by a regular sequence of elements for $\mathcal{O}_{X,y}$.

3) The canonical morphism $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{Y,y}} [I_y/I_y^2] \longrightarrow \mathrm{gr}_{I_y} \mathcal{O}_{X,y}$ is an isomorphism and I_y/I_y^2 is a free $\mathcal{O}_{Y,y}$-module.

4) Let $\hat{X} = \mathrm{Spec}\ \hat{\mathcal{O}}_{X,y}$, $\hat{Y} = \mathrm{Spec}\ \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, $\hat{i}: \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}$ is a regular immersion.

(0.16) Assumptions as in (0.15). Let S be a noetherian local scheme (resp. germ of analytic space), s its closed point (resp. picked point). Assume that X and Y are S-schemes (resp. analytic spaces), i is an S-immersion and Y is flat over S. The condition 1) to 4) are equivalent to the following one:

5) X is flat over S and $i_s: Y_s \longrightarrow X_s$ where Y_s (resp. X_s) is the fiber of Y (resp. X) over s is a regular immersion.

(0.17) Assumptions as in (0.16). Assume that Y and X are smooth over S. Then i is a regular immersion.

(0.18) Assumptions as in (0.17). If the residual extension $\varkappa(s) \longrightarrow \varkappa(x)$ is trivial then there exist $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$-isomorphisms $\epsilon_1: \hat{\mathcal{O}}_{X,y} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[Z_1,\cdots,Z_r,Y_1,\cdots,Y_s]]$, $\epsilon_2: \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[Y_1,\cdots,Y_s]]$, such that the diagram (of $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$-algebras):

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{O}}_{X,y} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"'] & \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \arrow[d] \\
\hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[Z,Y]] \arrow[r, "\omega"] & \hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[Y]]
\end{tikzcd}$$

where ω is the canonical projection, is commutative.

(0.19) Let $i: Y \longrightarrow X$ be an immersion of schemes (resp. analytic spaces). i is a regular immersion at $y \in Y$ if the immersion i_y induced on the local schemes (resp. germs of analytic space) at y is a regular immersion. i is a regular immersion if it is at every point $y \in Y$.

(0.20) If i is a regular immersion at y, there exists an open neighborhood U of y in X such that $i|U \cap Y: U \cap Y \longrightarrow U$ is a regular immersion.

(0.21) $i: Y \longrightarrow X$ is a regular closed immersion if and only if: I being the ideal defining Y in X, I/I^2 is a locally free $\mathcal{O}_Y$-Module and the canonical morphism $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y}[I/I^2] \longrightarrow \mathrm{gr}_I \mathcal{O}_X$ as an isomorphism.

(0.22) Let $f: X \longrightarrow S$ be a morphism of schemes locally of finite type (resp. of analytic spaces). Assume the scheme S is locally noetherian. Let $i: Y \longrightarrow X$ be an S-immersion. Let y be a point in Y. If X is smooth over S at $i(y)$ and Y smooth over S at y, i is a regular immersion at y.

(0.23) Let $f: X \longrightarrow S$ as in (0.22). Let $\Delta_f: X \longrightarrow X \underset{S}{\times} X$ be the diagonal immersion. If f is smooth at x, Δ_f is a regular immersion at x. (Apply 0.22 + 0.10 + 0.11).

(0.24) Conversely if Δ_f is a regular immersion at x and f is flat at x, f is smooth at x.

§1. Some functorial properties of $P_{X/S}$, $gr_Y X$ and a nice commutative diagram:

We recall here some definitions and properties of the differential invariants used in the categories of schemes and analytic spaces. The reader is referred in the algebraic case to [5], Chap. IV, §16, in the analytic case to [2], exposé n°. 14.

(1.1) Let $f: X \longrightarrow S$ be a morphism of schemes (resp. analytic spaces), $\Delta_f: X \longrightarrow X \underset{S}{\times} X$ the diagonal immersion, $i = 1,2$: $p_i: X \underset{S}{\times} X \longrightarrow X$ the canonical projections. There exists a projective system of $\mathcal{O}_X$-algebras $(P^n_{X/S})_{n\geq 0}$ called the system of relative jets of X/S. (One calls it also the system of relative principal parts.)

For simplicity, assume Δ_f is a closed immersion and let D be the associated $\mathcal{O}_{X\underset{S}{\times}X}$-ideal. $P^n_{X/S} = p_{1*}(\mathcal{O}_{X\underset{S}{\times}X}/D^{n+1})$. Let $P_{X/S} = \bigoplus_{n\geq 0} P^n_{X/S}$.

(1.2) If S is a locally noetherian scheme and f is locally of finite type or if f is a morphism of analytic spaces, $n \geq 0$, $P^n_{X/S}$ is a coherent $\mathcal{O}_X$-module.

(1.3) Let $i: Y \longrightarrow X$ be an immersion. Let us define $P_{X/S}(Y) = i^*(P)_{X/S}$.

(1.4) Let $gr^{o}P_{X/S}(Y) = \mathcal{O}_Y$, $n \geq 1$, $gr^{n}P_{X/S}(Y) = \mathrm{Ker}\left(P^{n}_{X/S}(Y) \longrightarrow P^{n-1}_{X/S}(Y)\right)$; $\bigoplus_{n\geq 0} gr^{n}P_{X/S}(Y)$ has a canonical structure of $\mathcal{O}_Y$-algebra called $gr\ P_{X/S}(Y)$. If $i = id_X$, we write simply $gr\ P_{X/S}$ instead of $gr\ P_{X/S}(X)$.

Note that by definition $gr^{1}P_{X/S} = \Omega^{1}_{X/S}$ and $\mathcal{O}_X$ being $\mathcal{O}_X$-flat, $gr^{1}P_{X/S}(Y) = i^{*}(\Omega^{1}_{X/S})$.

(1.5) Let us recall that the nth infinitesimal neighborhood of Y for i is (if i is a closed immersion and I denotes the associated $\mathcal{O}_X$-ideal) the subscheme (resp. analytic subspace) of X defined by I^{n+1}.

(1.6) Finally, let us denote by $gr_Y X$ the graded $\mathcal{O}_Y$-algebra associated with i. Again if i is closed, $gr_Y X$ is $gr_I \mathcal{O}_X = \bigoplus_{n\geq 0} I^{n}/I^{n+1}$.

(1.7) If S is a locally noetherian scheme and f is locally of finite type, or if f is a morphism of analytic spaces, $gr_Y X$ is an $\mathcal{O}_Y$-algebra of finite presentation.

(1.8) If $C_{X,Y}$ is Spec $gr_Y X$ (resp. Specan $gr_Y X$) the canonical morphism $C_{X,Y} \longrightarrow Y$ is the normal cone of X along Y.

Given a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] & X \arrow[r] & S \\ Y' \arrow[u, "k"] \arrow[r] & X' \arrow[u, "h"'] \arrow[r] & S' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

where i and i' are immersions, one gets canonical maps:

(1.9) $\quad h^*(P_{X/S}) \longrightarrow P_{X'/S'}$

(1.10) $\quad k^*(\mathrm{gr}\ P_{X/S}(Y)) \longrightarrow \mathrm{gr}\ P_{X'/S'}(Y')$

(1.11) $\quad k^*(\mathrm{gr}_Y X) \longrightarrow \mathrm{gr}_{Y'} X'$

(1.12) If the diagram on the right hand side is cartesian, then (1.9) is an isomorphism.

(1.13) If h is flat and the diagram on the left hand side is cartesian, then (1.10) is an isomorphism.

(1.14) Let y be a point in Y, s its image in S, X_x, Y_x, S_s the local scheme,(resp. germ of analytic space) of X at x, Y at x, S at s. The stalk of $P_{X/S}(Y)$, $\mathrm{gr}\ P_{X/S}(Y)$, $\mathrm{gr}_Y X$ at y is $P_{X_y/S_s}(Y_y)$, $\mathrm{gr}\ P_{X_y/S_s}(Y_y)$, $\mathrm{gr}_{Y_y} X_y$.

(1.15) Given an immersion $i: Y \longrightarrow X$ of S-schemes (resp. S-analytic spaces), we get canonically immersions of S-schemes (resp. S-analytic spaces)

$$\delta(i): Y \longrightarrow X \underset{S}{\times} Y, \qquad \delta'(i): Y \underset{S}{\times} Y \longrightarrow X \underset{S}{\times} Y \quad \text{such that}$$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\delta(\mathrm{Id}\ Y)"'] \arrow[dr, "\delta(i)"'] & Y \underset{S}{\times} Y \arrow[d, "\delta'(i)"] \\
& X \underset{S}{\times} Y
\end{tikzcd}$$

is commutative, hence graded $\mathcal{O}_Y$-algebras $\mathrm{gr}_Y Y \underset{S}{\times} Y$ and $\mathrm{gr}_Y X \underset{S}{\times} Y$ and normal cones $C_{Y \underset{S}{\times} Y, Y}$ and $C_{X \underset{S}{\times} Y, Y}$.

(1.16) Let us note that, if X and S are Spec of complete noetherian local rings and if the associated residual extension is trivial, $Y \times_S Y$, $X \times_S X$, $X \times_S Y$ are local schemes. Denote by $Y \hat{\times}_S Y$, $X \hat{\times}_S X$, $X \hat{\times}_S Y$ the Spec of the completion of their respective local rings. We obtain commutative diagrams:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\hat{\Delta}_f"] \arrow[dr, "\Delta_f"'] & X \hat{\times}_S X \arrow[r, "\hat{p}_1"] \arrow[d] & X \\ & X \times_S X \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "Id\ Y"'] & Y \hat{\times}_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_S Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \hat{\times}_S Y \arrow[r] & X \times_S Y \end{tikzcd}$$

The canonical morphisms $gr_Y X \times_S Y \longrightarrow gr_Y X \hat{\times}_S Y$ and $gr_Y Y \times_S Y \longrightarrow gr_Y Y \hat{\times}_S Y$ are isomorphisms. If $\hat{D}$ is the ideal defining X in $X \hat{\times}_S X$, $P^n_{X/S}$ is canonically isomorphic to $\hat{p}_{1*}(\mathcal{O}_{X \hat{\times}_S X}/\hat{D}^{n+1})$.

(1.17) Let us consider the following commutative diagram of graded $\mathcal{O}_Y$-algebras:

$$\begin{tikzcd} gr_Y X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Id"] & gr_Y X \times_S Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\lambda"] & gr_Y Y \times_S Y \arrow[d, "\mu"] \\ gr_Y X \arrow[r, "\alpha'"] & gr\ P_{X/S}(Y) \arrow[r, "\beta'"] & gr\ P_{Y/S} \end{tikzcd}$$

where α and β arise from the functoriality property (1.11) and the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} Y \times_S Y \arrow[r, "\delta'(i)"] & X \times_S Y \arrow[r, "p_1"] & X \\ Y \arrow[u, "\delta(Id)"] \arrow[r, "Id"] & Y \arrow[u, "\delta(i)"] \arrow[r, "Id"] & Y \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

where β' arises from the functoriality property (1.10) and the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & X \\ Y \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "Id"] & Y \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

where α'_n, λ_n, μ_n, the homogeneous component of degree n of α', λ, μ are induced respectively by:

$$d^n_{X/S} : \mathcal{O}_X \longrightarrow P^n_{X/S}$$

the $\mathcal{O}_S$-linear map obtained from the action of $\mathcal{O}_X$ on $\mathcal{O}_{X \times_S X} / D^{n+1}$ by p_2.

$$\Lambda^n(i) : \mathcal{O}_{X \times_S Y} = p_1^*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow p_1^*(P^n_{X/S}) \longrightarrow \delta(i)_*(P^n_{X/S}(Y))$$

$$M^n : \mathcal{O}_{Y \times_S Y} \longrightarrow \delta(Id)_*(P^n_{Y/S})$$

Note that $M^n = \Lambda^n(Id\ Y)$.

<u>Lemma (1.18)</u>. The $\mathcal{O}_Y$-algebra $P^n_{X/S}(Y)$ is canonically $\mathcal{O}_Y$-isomorphic to the structural sheaf of nth infinitesimal neighborhood of Y for the immersion $\delta(i)$, $\mathcal{O}_{Y_{\delta(i)}}[n]$ endowed with the structure of $\mathcal{O}_Y$-algebra from the projection $X \times_S Y$ on Y.

From the commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & S \\ X \times_S Y \arrow[u, "p_1"] \arrow[r] & Y \arrow[u, "f \circ i"'] \end{tikzcd}$$

and property (1.12) we get an isomorphism of $\mathcal{O}_Y$-algebras:

$$p_1^*(P^n_{X/S}) \longrightarrow P^n_{X\times_S Y/Y} .$$

Applying now [5] Chap. IV.16.4.11, resp. [2], with the section $\delta(i)$, we have now an isomorphism of $\mathcal{O}_Y$-algebra:

$$\delta(i)^*(P^n_{X\times_S Y/Y}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{\delta(i)}}[n].$$

But $i = p_1 \circ \delta(i)$, so finally the isomorphism of $\mathcal{O}_Y$-algebras:

$$i^*(P^n_{X/S}) = P^n_{X/S}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{\delta(i)}}[n].$$

<u>Lemma (1.19)</u>: λ and μ of diagram 1.17 are isomorphisms.

It is enough to prove that λ is an isomorphism. From Lemma (1.18), we get a canonical isomorphism: $gr^n P_{X/S}(Y) \longrightarrow gr^n_Y X\times_S Y$. It is easy to see that it is reciprocal of λ.

<u>Remark (1.20)</u>: If S is a locally noetherian scheme and f is locally of finite type, or f is a morphism of analytic space, gr $P_{X/S}(Y)$ is an $\mathcal{O}_Y$-algebra of finite presentation.

Immediate from (1.7) and (1.19).

<u>Remark (1.21)</u>: If $f: Y \longrightarrow S$ is smooth over S at x, the stalk at x of $\Omega^1_{Y/S}$ is an $\mathcal{O}_{Y,y}$-module locally free and its symmetric algebra is canonically isomorphic to the stalk at x of gr $P_{Y/S}$.

Immediate from (1.19) and (0.23), (0.21).

§2. The key exact sequence of cones:

Given Y a scheme (resp. analytic space), we say that C is a Y-cone if C is Y-isomorphic to the Spec (resp. Specan) of an $\mathcal{O}_Y$-positively graded, augmented algebra of finite presentation generated by its degree 1 elements. It is equivalent to saying that there exists on C an action of the multiplicative group $G_{m,Y}$ induced by a Y-immersion of C in a locally trivial Y-vector bundle. We note (0) = Spec $\mathcal{O}_Y$ (resp. Specan $\mathcal{O}_Y$).

Remark that we have canonical Y-morphisms, $p: C \longrightarrow (0)$, $v: (0) \longrightarrow C$. p is the structural morphism, v is the vertex.

<u>Definition (2.1)</u>: Let $(0) \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow (0)$ be a sequence of Y-morphisms of Y-cones. We say that it is exact if there exists a covering $(Y_i)_{i\in I}$ of Y by open sets such that if $C_i = C\times_Y Y_i$, $C_i' = C\times_Y Y_i$, $C_i'' = C\times_Y Y_i$ there exists a commutative diagram of Y_i-cones

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C_i' \arrow[r] & V_i \arrow[r] & V_i'' \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C_i' \arrow[r, "\alpha_i"'] \arrow[u, "Id"] & C_i \arrow[r, "\beta_i"'] \arrow[u] & C_i'' \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

where:

i) the vertical arrows are closed immersions

ii) the upper horizontal sequence is an exact and split sequence of trivial vector bundles (i.e., Spec(resp. Specan) of the symmetric algebra of a free $\mathcal{O}_{Y_i}$-module)

iii) the action of C_i' by translation on V_i induces an action on C_i and β_i induces a Y_i-isomorphism of $C_i/\alpha_i(C_i')$ on C_i''.

We leave to the reader as an exercise to check that iii) may be changed to:

iii') $C_i \simeq V_i \times_{V_i''} C_i''$

or

iii") A splitting of the upper exact sequence induces a left inverse of α_i, so that the induced morphism $C_i \longrightarrow C_i' \times_{Y_i} C_i''$ is a Y_i-isomorphism.

<u>Remark (2.2)</u>: Note that if $(0) \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow (0)$ is exact, α is an immersion and β is surjective.

<u>Theorem (2.3)</u>: Let X be an S-scheme, $i: Y \longrightarrow X$ an S-immersion. Assume:

1) X and S are local schemes, Spec of noetherian complete local rings

2) x (resp. s) being the closed points of X (resp. S), the residual extension $\varkappa(s) \longrightarrow \varkappa(x)$ is trivial

3) Y is formally smooth over S at x.

Then the canonical sequence:

$$(0) \longrightarrow C_{Y\underset{S}{\times}Y,Y} \longrightarrow C_{X\underset{S}{\times}Y,Y} \longrightarrow C_{X,Y} \longrightarrow (0)$$

is an exact sequence of Y-cones.

<u>Proof</u>: Let O (resp. A)(resp. S) be the local ring of X (resp. Y) at x, (resp. S) at s. Let M be the maximal ideal of O and choose $\tau = (\tau_1,\cdots,\tau_n)$ to be a system of generators of M. Let ψ: $S[[t]] \longrightarrow O$ be the S-morphism, such that $1 \leq i \leq n$, $\psi(t_i) = \tau_i$. ψ is surjective. From 2) it follows that $O = S+M$. Take $f \in O$. Thus there exists $f_o \in S$, $h_i \in O$, such that:

$$f = f_o + \sum_{i=1}^{n} h_i \tau_i \ .$$

Now, applying to each h_i the same process, and so on, we get for $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $f_\alpha \in S$, such that: $f = \sum_{\alpha:|\alpha|\leq n} f_\alpha \tau^\alpha \bmod M^{n+1}$

where $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\tau^\alpha = \tau_1^{\alpha_1} \cdots \tau_n^{\alpha_n}$.

O being complete $f = \sum_\alpha f_\alpha \tau^\alpha$ and ψ being continuous

$f = \psi(\sum_\alpha f_\alpha t^\alpha)$. Let $R = S[[t]]$, $Z = \operatorname{Spec} S[[t]]$; then, we have an S-immersion of X in Z formally smooth over S at x.

From [5] (0.19.6.4 and 0.19.7.1), the S-algebra A is S-isomorphic to a ring of formal power series over S, $S[[y]]$. Hence, we have a surjective S-morphism $\overline{\psi}$: $S[[t]] \longrightarrow S[[y]]$. We can find

(cf. 0.18) an S-isomorphism λ: $S[[y,z]] \longrightarrow S[[t]]$ such that

$$\bar{\psi}\circ\lambda(y) = y, \qquad \bar{\psi}\circ\lambda(z) = 0 .$$

So, up to S-isomorphisms, the S-immersion of Y in Z corresponds to the canonical projection $S[[y,z]] \longrightarrow S[[y]]$.

By functoriality, we get a commutative diagram (of Y-cones)

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & C_{Y\hat{\times}_S Y,Y} \arrow[r] & C_{Z\hat{\times}_S Y,Y} \arrow[r] & C_{Z,Y} \arrow[r] & (0) \\
(0) \arrow[r] & C_{Y\hat{\times}_S Y,Y} \arrow[r] \arrow[u, "Id"] & C_{X\hat{\times}_S Y,Y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(I)"] & C_{X,Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0)
\end{tikzcd}$$

corresponding to the following one (of A-algebras)

$$\begin{tikzcd}
gr_Y Z \arrow[r] \arrow[d] & gr_Y Z\hat{\times}_S Y \arrow[r] \arrow[d] & gr_Y Y\hat{\times}_S Y \arrow[d] \\
gr_Y X \arrow[r] & gr_Y X\hat{\times}_S Y \arrow[r] & gr_Y Y\hat{\times}_S Y
\end{tikzcd}$$

Condition i) appears to be trivially satisfied.

Look now at condition ii). As already observed in §1, one does not change the normal cones by replacing the usual tensor product by the completed one. For simplicity, call x the closed point of Z, $Y\hat{\times}_S Y$, $X\hat{\times}_S Y$, $Z\hat{\times}_S Y$; we have a commutative diagram of S-algebras:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Z,x} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Z\hat{\times}_S Y,x} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y\hat{\times}_S Y,x} \arrow[d] \\
S[[y,z]] \arrow[r, "\varphi_1"] & S[[y,z,y']] \arrow[r, "\varphi_2"] & S[[y,y']]
\end{tikzcd}$$

where vertical arrows are S-isomorphisms, $\varphi_1(y) = y$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(y) = y$, $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_2(y') = y'$. So the ideal of $\mathcal{O}_{Z\hat{\times}_S Y,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y\hat{\times}_S Y,x}$) defining Y in $Z\hat{\times}_S Y$ (resp. $Y\hat{\times}_S Y$) appears to be generated by $(z,y-y')$ (resp. $(y-y')$). Consider now the commutative diagram (of S-algebras)

$$\begin{tikzcd}
S[[y,z,y']] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\sigma"] & S[[y,y']] \arrow[d, "\sigma_o"] \\
S[[y,z,y'']] \arrow[r, "\varphi_2^\sigma"] & S[[y,y'']]
\end{tikzcd}$$

where $\sigma(y) = y$, $\sigma(z) = z$, $\sigma(y') = y-y''$, $\sigma_o(y) = y$, $\sigma_o(y') = y-y''$

$$\varphi_2^\sigma(y) = y, \quad \varphi_2^\sigma(z) = 0, \quad \varphi_2^\sigma(y'') = y''$$

σ and σ_o are S-isomorphisms and $\sigma(y-y') = y''$.

Now we can identify $gr_Y Z$ (resp. $gr_Y Z\hat{\times}_S Y$)(resp. $gr_Y\ Y\hat{\times}_S Y$) with $gr_{(z)}S[[y,z]]$, (resp. $gr_{(z,y'')}S[[y,z,y'']]$),(resp. $gr_{(y'')}S[[y,y'']]$), $\tilde{\alpha}$ with $gr(\sigma\cdot\varphi_1)$, $\tilde{\beta}$ with $gr(\varphi_2^\sigma)$. Finally, by letting: $Z = \mathrm{cl}\ z \bmod (z)^2$ or $\bmod (z,y'')^2$, $Y'' = \mathrm{cl}\ y'' \bmod (y'')^2$ or $(z,y'')^2$ (as no confusion may possibly happen), it turns out that:

$\tilde{\alpha}$: $S[[y]][Z] \longrightarrow S[[y]][Z,Y'']$ is simply the canonical injection,

$\tilde{\beta}$: $S[[y]][Z,Y''] \longrightarrow S[[y]][Y'']$ is simply the canonical projection,

so that ii) holds clearly.

We shall prove now that iii') is satisfied, i.e., that:

$$\begin{array}{ccc} gr_Y Z & \longrightarrow & gr_Y\, Z\hat{\times}_S Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ gr_Y X & \longrightarrow & gr_Y X\hat{\times}_S Y \end{array}$$

is a cocartesian diagram (in A-algebras). The vertical arrows being surjective, this amounts to saying that the ideal generated in $gr_Y\, Z\hat{\times}_S Y$ by the image of the kernel of the left hand side arrow is the kernel of the right hand side arrow.

Recall now ([7] II.2.Lemma 5) that, B being a noetherian ring, I,J ideals in B, by definition, the sequence $0 \longrightarrow in_J(B,I) \longrightarrow gr_J B \longrightarrow gr_J B/I \longrightarrow 0$ is exact. If, for $f \in B$, $f \neq 0$, we note $\nu_J(f) = \{\sup n: f \in J^n\}$ and $in_J f = cl\ f \bmod J^{\nu_J(f)+1}$, it is easily seen that $in_J(B,I)$ is generated by all $in_J f$ with $f \in I$, $f \neq 0$.

If I is the ideal in $S[[y,z]]$ defining X in Z, the ideal K generated by $\varphi_1(I)$ in $S[[y,z,y']]$ is that defining $X\hat{\times}_S Y$ in $Z\hat{\times}_S Y$.

So, after transformation by σ as above, what we have to check is that:

$\mathrm{in}_{(z,y'')}(S[[y,z,y'']],\ \sigma(K))$ is generated in

$\mathrm{gr}_{(z,y'')}S[[y,z,y'']]$ identified with $S[[y]][Z,Y'']$ by $\tilde{\alpha}(\mathrm{in}_{(z)}(S[[y,z]],I))$.

Take an element g in $\sigma(K) \neq 0$. There exists $f_i \in I$, $Q_i \in S[[y,z,y'']]$ such that:

$$g = \sum_{i=1}^{m} Q_i(y,z,y'')f_i(y,z).$$

Let $\nu = \nu_{(z,y'')}(g)$. Write $Q_i = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_0^s, |\alpha|\leq\nu} y''^{\alpha}Q_{i\alpha}(y,z) + R_i$ with $R_i \in (y'')^{\nu+1}$.

$$\mathrm{in}_{(z,y'')}(g) = \mathrm{in}_{(z,y'')}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_0^s,\ |\alpha|\leq\nu} y''^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{m} Q_{i\alpha}f_i\Big)\Big) .$$

Let $g_\alpha = \sum_{i=1}^{m} Q_{i\alpha}f_i$; $g_\alpha \in I$ and $\nu_{(z)}(g_\alpha) \geq \nu-|\alpha|$; if not, let $\mu = \inf_{\alpha,\ |\alpha|\leq\nu} \nu_{(z)}(g_\alpha) + |\alpha|$; $\mu < \nu$, and $0 = \sum_{\alpha:\ |\alpha|\leq\nu} Y''^{\alpha}\mathrm{cl}\ g_\alpha \bmod (z,y'')^{\mu-|\alpha|}$

But, $\mathrm{cl}\ g_\alpha \bmod (z,y'')^{\mu-|\alpha|+1}$ is in $S[[y]][Z]$, so it vanishes and for α: $|\alpha| \leq \nu$, $g_\alpha \in (z)^{\mu+1}$. So, finally,

$$\mathrm{in}_{(z,y'')}(g) = \sum_{\alpha:\ |\alpha|\leq\nu} Y''^{\alpha}(\mathrm{cl}\ g_\alpha \bmod (z,y'')^{\nu-|\alpha|+1}).$$

So there exists some α such that $g_\alpha \notin (z)^{\nu-|\alpha|+1}$, and restricting $\sum$ only to those α:

$$\mathrm{in}_{(z,y'')}(g) = \sum_{\alpha}^{*} Y''^{\alpha}\cdot\tilde{\alpha}[\mathrm{in}_{(z)}(g_\alpha)] .$$

<u>Remark (2.4)</u>. In fact, we proved that for every S-immersion of X in Z, a local scheme, Spec of a noetherian complete local ring, formally smooth over S

$$(0) \longrightarrow C_{Y \times_S Y, Y} \longrightarrow C_{Z \times_S Y, Y} \longrightarrow C_{Z,Y} \longrightarrow (0)$$

is an exact sequence of trivial vector bundles and diagram (I) is cartesian.

<u>Corollary (2.5)</u>: Let $f: X \longrightarrow S$ be a morphism of analytic spaces (over a complete, valued, non discrete, algebraically closed field k), $i: Y \longrightarrow X$ an S-immersion, x a point in Y, s its image in S.

i) If Y is smooth over S at x, there exists an open neighborhood U (resp. V) of x (resp. s) in X (resp. S) such that $f(U) = V$ and that, letting X_o (resp. Y_o)(resp. S_o) to be the restriction of X (resp. Y)(resp. S) on U (resp. $U \cap Y$) (resp. V), the canonical sequence of Y_o-cones:

$$(0) \longrightarrow C_{Y_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \longrightarrow C_{X_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \longrightarrow C_{X_o, Y_o} \longrightarrow (0)$$

is exact.

ii) If Y is smooth over S, then

$$(0) \longrightarrow C_{Y \times_S Y} \longrightarrow C_{X \times_S Y, Y} \longrightarrow C_{X,Y} \longrightarrow (0)$$

is exact.

<u>Proof</u>: The exactness of a sequence of cones being of local nature, ii) is an immediate consequence of i).

Now, things being local around x, we may assume that i is a closed immersion and f is a separated morphism. Let us choose an immersion of an open neighborhood U_1 of x in X in an open set Ω of some affine k-space E^n. Since Y is smooth over S at x, there exists an open neighborhood W (resp. V) of x (resp. s) on Y (resp. S) such that $f(W) = V$, $W \subset U_1$ and $f|W: W \longrightarrow V$ is smooth. Let U be any open set contained in $f^{-1}(V) \cap U_1$, whose intersection with Y is W. Clearly, $f(U) = V$. Now, by shrinking Ω if necessary, we may also assume that the immersion of U in Ω is closed, so that combining with $f|U$, we get a closed V-immersion $j_o: U \longrightarrow V \times \Omega$. Let $Z_o = V \times \Omega$; finally, Y_o is smooth over S_o, $i_o: Y_o \longrightarrow X_o$ is a closed S_o-immersion and $j_o: X_o \longrightarrow Z_o$ is a closed S_o-immersion in an analytic space Z_o smooth over S_o. By functoriality, we get a commutative diagram of Y_o-cones:

$$\begin{tikzcd}
(o) \arrow[r] & C_{Y_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \arrow[r] & C_{Z_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "{[I]}"] & C_{Z_o, Y_o} \arrow[r] & (o) \\
(o) \arrow[r] & C_{Y_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \arrow[r] \arrow[u] & C_{X_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \arrow[r] \arrow[u] & C_{X_o, Y_o} \arrow[r] \arrow[u] & (o) .
\end{tikzcd}$$

Condition i) holds clearly.

Y_o (resp. Z_o),(resp. $Y_o \times_{S_o} Y_o$)(resp. $Z_o \times_{S_o} Y_o$) being smooth over S_o, $j_o \cdot i_o$ (resp. δ (Id Y_o))(resp. $\delta(j_o \cdot i_o)$) is a regular immersion, so that $gr^1_{Y_o} Z_o$ (resp. $gr^1_{Y_o} Y_o \times_{S_o} Y_o$)(resp. $gr^1_{Y_o} Z_o \times_{S_o} Y_o$) is a locally free $\mathcal{O}_{Y_o}$-module and its symmetric algebra is canonically isomorphic to $gr_{Y_o} Z_o$ (resp. $gr_{Y_o} Y_o \times_{S_o} Y_o$)(resp. $gr_{Y_o} Z_o \times_{S_o} Y_o$) (see §0). As an exact sequence of free module splits, it is enough to show that the upper horizontal sequence is exact and diagram I is cartesian, or equivalently that:

$$0 \longrightarrow gr^1_{Y_o} Z_o \longrightarrow gr^1_{Y_o} Z_o \times_{S_o} Y_o \longrightarrow gr^1_{Y_o} Y_o \times_{S_o} Y_o \longrightarrow (0)$$

is exact and diagram

$$\begin{array}{ccc} gr_{Y_o} Z_o & \longrightarrow & gr_{Y_o} Z_o \times_{S_o} Y_o \\ \downarrow & & \downarrow \\ gr_{Y_o} X_o & \longrightarrow & gr_{Y_o} X_o \times_{S_o} Y_o \end{array}$$

is cocartesian. To do so, we have to prove the same with the induced sequence and diagram of stalks at every point y of Y_o, and $\hat{\mathcal{O}}_{Y_o,y}$,completion of $\mathcal{O}_{Y_o,y}$ with respect to the $M_{Y_o,y}$-adic topology,being a faithfully flat $\mathcal{O}_{Y_o,y}$-module, it is actually enough to do it after this base extension.

But, generally Y being an analytic subspace of some analytic space X and letting $Y_y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y}$, $\hat{Y}_y = \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, $X_y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,y}$, $\hat{X}_y = \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{X,y}$,

$$(gr_Y X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y,y} = gr_{\hat{Y}_y} \hat{X}_y$$

and X_1, X_2 being S-analytic spaces, x_1, x_2 points of X_1, X_2 whose image in S is s

$$\widehat{(X_1 \times_S X_2, x_1 \times x_2)} = \hat{X}_{1,x_1} \hat{\times}_{\hat{S}_s} \hat{X}_{2,x_2}$$

(where $\hat{\times}$ means that the usual tensor product has been replaced by the completed one). So, it follows immediately from the proof of Corollary (2.3) after noticing that all residual extensions being trivial in analytic geometry, and Y_o (resp. Z_o) being smooth over S_o, $\hat{Y}_{o,y}$ (resp. $\hat{Z}_{o,y}$) is formally smooth over $\hat{S}_{o,f_o(y)}$ and there is no residual extension.

<u>Corollary (2.6)</u>: Let $f: X \longrightarrow S$ be a morphism of schemes, locally of finite type, $i: Y \longrightarrow X$ an S-immersion, x a point of X, s its image in S. Assume S is locally noetherian.

i) If Y is smooth over S at x, there exists an open neighborhood U (resp. V) of x (resp. s) in X (resp. S) such that $f(U) = V$ and that, letting X_o (resp. Y_o) (resp. S_o) to be the restriction of X (resp. Y)(resp. S) on U (resp. $U \cap Y$)(resp. V), the canonical sequence of Y_o-cones:

$$(o) \longrightarrow C_{Y_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \longrightarrow C_{X_o \times_{S_o} Y_o, Y_o} \longrightarrow C_{X_o, Y_o} \longrightarrow (o)$$

is exact.

ii) If Y is smooth over S, then

$$(0) \longrightarrow C_{Y\times_S Y,Y} \longrightarrow C_{X\times_S Y,Y} \longrightarrow C_{X,Y} \longrightarrow (0)$$

is exact.

<u>Proof</u>: As above, ii) follows from i).

It is enough to prove i) under the following additional hypothesis: X is an affine scheme, S is a noetherian affine scheme, f is of finite type, i is a closed immersion, $f|Y: Y \longrightarrow S$ is surjective and smooth. X being affine and f of finite type, there exists Z smooth over S (one may choose some $S[T_1,\cdots,T_n]$) and a closed S-immersion $j: X \longrightarrow Z$. As in Corollary (2.5), $j\circ i$, $\delta(\mathrm{Id}\ Y)$, $\delta(j\circ i)$ are regular immersions and it is enough to show that, at every point y of Y, the sequence (resp. diagram) of stalks induced by

$$0 \longrightarrow gr^1_Y Z \longrightarrow gr^1_Y Z\times_S Y \longrightarrow gr^1_Y Y\times_S Y \longrightarrow 0$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{array}{ccc} gr^1_Y Z & \longrightarrow & gr^1_Y Z\times_S Y \\ | & & | \\ gr^1_Y X & \longrightarrow & gr^1_Y X\times_S Y \end{array}\right)$$

is exact (resp. cocartesian). Here, we use a trick to kill the nasty residual extension $\varkappa(f(y)) \longrightarrow \varkappa(y)$ which possibly may occur. $f|Y: Y \longrightarrow S$ is smooth, so it is flat and thus $\mathcal{O}_{S,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ and $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y\times_S Y,\delta(\mathrm{Id}\ Y)(y)}$ are faithfully flat. (We obtain the second arrow from the first one by base

change followed by localization at a suitable prime ideal and one knows that every flat morphism of noetherian local rings is faithfully flat). Apply this base extension. After easy functorial computation (§1) we reduce ourselves to prove the same replacing S (resp. Y)(resp. X)(resp. Z) by the local scheme of Y (resp. $Y\times_S Y$)(resp. $X\times_S Y$)(resp. $Z\times_S Y$) at y (resp. $\delta(Id)(y)$)(resp. $\delta(i)(y)$)(resp. $\delta(j\cdot i)(y)$). But now, all those local schemes have the same residue field $\varkappa(y)$ at their closed point and smoothness is preserved. So that, it is, in fact, enough to prove our statement with S,Y,X,Z local schemes and trivial residual extension $\varkappa(f(y)) \longrightarrow \varkappa(y)$. But (as in the analytic case) if Y is the Spec of the completion of the local ring of Y at its closed point, the canonical projection $\hat{Y} \longrightarrow Y$ is faithfully flat, so that after this base change, and usual functorial computation (see again §1) our proposition becomes an immediate consequence of Theorem (2.3) and Remark (2.4)

<u>Remark (2.7)</u>: Under the hypothesis of Theorem (2.3)(resp. i) of Corollary (2.5))(resp. i) of Corollary (2.6)) $gr_Y X\times_S Y$ being locally around x on Y a tensor product of $gr_Y X$ and $gr_Y Y\times_S Y$, from (1.19), we deduce that gr $P_{X/S}(Y)$ is locally around x on Y a tensor product of $gr_Y X$ and gr $P_{Y/S}$.

Remark (2.8): Assumptions as in Remark (2.7). $gr^1 P_{X/S}(Y)$ is locally around x on Y a direct sum of $gr^1_Y X$ and $gr^1 P_{Y/S}$. But by definition $gr^1_Y X = N_{X,Y}$ is the conormal sheaf of the immersion $i: Y \longrightarrow X$, $gr^1 P_{X/S} = \Omega^1_{X/S}$, $gr^1 P_{Y/S} = \Omega^1_{Y/S}$, and $\mathcal{O}_X$ being $\mathcal{O}_X$-flat, $gr^1 P_{X/S}(Y) = i^*(gr^1 P_{X/S}) = i^*(\Omega^1_{X/S})$. Thus we recover the well-known exact sequence of Jacobi-Zariski (see [5])

$$0 \longrightarrow N_{X,Y} \longrightarrow i^*(\Omega^1_{X/S}) \longrightarrow \Omega^1_{Y/S} \longrightarrow 0 .$$

Corollary (2.9): Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space) and Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X. At any point $y \in Y$ such that Y is smooth over S at y, the following conditions are equivalent:

(i) $(P_{X/S}(Y))_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-flat

(ii) $(gr\ P_{X/S}(Y))_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-flat

(iii) $(gr_Y X)_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-flat .

Proof: The equivalence of (i) and (ii) does not depend upon the smoothness of Y over S at y. Let us remark also that since we are dealing with sums of $\mathcal{O}_{Y,y}$-modules of finite type, we may replace flat by free in the assertion. Assume $(P_{X/S}(Y))_y$ $\mathcal{O}_{Y,y}$-free

i.e. each $(P^n_{X/S}(Y))_y$ $\mathcal{O}_{Y,y}$-free, $n \geq 0$. Then the exact sequences

$$0 \longrightarrow (gr^n P_{X/S}(Y))_y \longrightarrow (P^n_{X/S}(Y))_y \longrightarrow (P^{n-1}_{X/S}(Y))_y \longrightarrow 0$$

show that $(gr^n P_{X/S}(Y))_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-free for all $n \geq 0$, hence also $(gr\ P_{X/S}(Y))_y$. Conversely, assume that each $gr^n P_{X/S}(Y))_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-free. Since $(gr^o P_{X/S}(Y))_y = (P^o_{X/S}(Y))_y = \mathcal{O}_{Y,y}$, the same exact sequences show by induction on n that each $(P^n_{X/S}(Y))_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-free, hence also $(P_{X/S}(Y))_y$.

The equivalence of (ii) and (iii) comes from Corollary (2.6) (resp. (2.5)) which tells us that we have a (non-canonical) isomorphism (see Remark (2.7))

$$(gr\ P_{X/S}(Y))_y \simeq (gr_Y X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} (gr\ P_{Y/S})_y$$

and since Y is smooth over S, in view of Remark 1.21, $(gr\ P_{Y/S})_y$ is a direct sum of free $\mathcal{O}_{Y,y}$-modules. But $Tor_{\mathcal{O}_{Y,y}}$ commutes with direct sums.

<u>Corollary(2.10):</u> Assumptions as in Theorem (2.3) The following conditions are equivalent:

i) $P_{X/S}(Y)$ is $\mathcal{O}_Y$-flat

ii) $gr\ P_{X/S}(Y)$ is $\mathcal{O}_Y$-flat

iii) $gr_Y X$ is $\mathcal{O}_Y$-flat

It follows from Theorem (2.3) by the same arguments as those used in (2.9).

§3. Relative normal flatness and W-normal flatness

Definition (3.1). Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space) and Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X. We say that X/S is normally flat along Y/S (or that X is normally flat along Y over S) at a point $y \in Y$ if the following conditions are satisfied:

a) Y is smooth over S at y

b) $(gr_Y X)_y$ is $\mathcal{O}_{Y,y}$-flat, i.e., the equivalent conditions of Corollary (2.9) hold at y.

We say that X/S is normally flat along Y/S if it is so at every point $y \in Y$.

Proposition (3.2). If X/S is normally flat along Y/S, for any base extension $S' \longrightarrow S$, setting $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$, the canonical map of Y'-cones (1.11)

$$C_{X',Y'} \longrightarrow C_{X,Y} \times_Y Y'$$

is an isomorphism.

Proof: We may localize ourselves at $y' \in Y'$. Let y be the image of y' by the canonical projection $p: Y' \longrightarrow Y$. Since Y is smooth over S at y, and $gr_Y Y = \mathcal{O}_Y$ is $\mathcal{O}_Y$-flat, $P^n_{Y/S}$ is $\mathcal{O}_Y$-flat, for all $n \geq 0$. Hence the following sequences :

$$0 \longrightarrow (p^*gr^n P_{X/S}(Y))_{y'} \longrightarrow (p^* P^n_{X/S}(Y))_{y'} \longrightarrow (p^* P^{n-1}_{X/S}(Y))_{y'} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (p^*gr^n P_{Y/S})_{y'} \longrightarrow (p^* P^n_{Y/S})_{y'} \longrightarrow (p^* P^{n-1}_{Y/S})_{y'} \longrightarrow 0$$

are exact for all $n \geq 0$. But by the nice behaviour of P^n_X under base extension [§1], they coincide with the following:

$$0 \longrightarrow (gr^n P_{X'/S'}(Y'))_{y'} \longrightarrow (P^n_{X'/S'}(Y'))_{y'} \longrightarrow (P^{n-1}_{X'/S'}(Y'))_{y'} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (gr^n P_{Y'/S'})_{y'} \longrightarrow (P^n_{Y'/S'})_{y'} \longrightarrow (P^{n-1}_{Y'/S'})_{y'} \longrightarrow 0$$

respectively. So that we get canonical isomorphisms of graded $\mathcal{O}_{Y',y'}$-algebras:

$$(3.2.1) \qquad (p^*gr\ P_{X/S}(Y))_{y'} \simeq (gr\ P_{X'/S'}(Y'))_{y'}$$

$$(3.2.2) \qquad (p^*gr\ P_{Y/S})_{y'} \simeq (gr\ P_{Y'/S'})_{y'} \quad .$$

But on the other hand, from Corollary (2.6) (resp. (2.5)) we have the (non canonical) isomorphism (see remark (2.7))

$$(gr\ P_{X/S}(Y))_y \simeq (gr_Y X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} (gr\ P_{Y/S})_y$$

hence

$$(p^*\ gr\ P_{X/S}(Y))_{y'} \simeq (p^*gr_Y X)_{y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y',y'}} (p^*gr\ P_{Y/S})_{y'}$$

i.e., by (3.2.1) and (3.2.2).

$$(3.2.3) \qquad (gr\ P_{X'/S'}(Y'))_{y'} \simeq (p^*gr_Y X)_{y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y',y'}} (gr\ P_{Y'/S'})_{y'}$$

hence in the commutative diagram of graded $\mathcal{O}_{Y',y'}$-algebras

$$\begin{array}{ccccc}
(p^*gr_Y X)_{y'} & \longrightarrow & (gr\ P_{X'/S'}(Y'))_{y'} & \longrightarrow & (gr\ P_{Y'/S'})_{y'} \\
\downarrow & & \| & & \| \\
(gr_{Y'} X')_{y'} & \longrightarrow & (gr\ P_{X'/S'}(Y'))_{y'} & \longrightarrow & (gr\ P_{Y'/S'})_{y'}
\end{array}$$

both lines represent exact sequences of cones. The upper one by (3.2.3), and the lower one because by base extension Y' remains smooth over S' at y', (0.10) and Corollary (2.6) (resp. (2.5)). It follows that the vertical arrow must be an isomorphism.

<u>Corollary (3.3)</u>. If X is normally flat along Y over S, then after any base extension $S' \longrightarrow S$. $X' = X \times_S S'$ is normally flat along $Y' = Y \times_S S'$ over S'.

<u>Proof</u>: Y' remains smooth over S', and $gr_{Y'}X'$ is a flat $\mathcal{O}_{Y'}$-module as the inverse image of $gr_Y X$ by the canonical projection $p: Y' \longrightarrow Y$, in view of the above proposition. We remark that this Corollary is also a direct consequence of Corollary (2.9) and the nice behaviour of $P_{X/S}(Y)$ under base extension.

In particular, after any base extension $S' \longrightarrow S$ such that S' is regular, X' is normally flat along Y' (in the classical sense of ([7] Chap. II), i.e., Y' is now regular, and $gr_{Y'}X'$ $\mathcal{O}_{Y'}$-flat). One may ask whether the converse is true, and we have:

<u>Proposition (3.4)</u>. Let X be a scheme locally of finite type over a locally noetherian reduced scheme (resp. a relative complex analytic space with S reduced) and Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X, smooth over S. X is normally flat along Y <u>over</u> S if and only if, for any base extension $S' \longrightarrow S$ where S' is the spectrum of a discrete valuation ring (resp. the unit disk in $\mathbb{C}$), $X' = X \underset{S}{\times} S'$ is normally flat along $Y' = Y \underset{S}{\times} S'$.

<u>Proof</u>: It suffices to see the "if" part. To check that $gr_Y X$ is $\mathcal{O}_Y$-flat, we apply the valuative criterion for flatness [EGA IV 11.8 resp. [8] Chap. 0]: Let $h: S' \longrightarrow Y$ be any morphism such that S' is as in the Proposition. By composition we obtain a base extension $S' \longrightarrow S$, and Y'/S' is endowed with a section $s: S' \longrightarrow Y'$:

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right] & Y \arrow[d] \\ S' \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[r] \arrow[ur, "h"] & S \end{tikzcd}$$

Now again Y' is smooth over S', and our assumption that $gr_{Y'}X'$ is $\mathcal{O}_{Y'}$-flat gives us by Corollary (2.9) that $P_{X'/S'}(Y')$ is also $\mathcal{O}_{Y'}$-flat. Using once more the fact that $P_{X'/S'}(Y') = p^* P_{X/S}(Y)$, we see that this implies that $h^* P_{X/S}(Y) = s^* P_{X'/S'}(Y')$ is $\mathcal{O}_{S'}$-flat, and since Y, being smooth over S which is reduced, is itself reduced, and h is arbitrary, the valuative criterion tells us that $P_{X/S}(Y)$ is $\mathcal{O}_Y$-flat, Q.E.D. by Corollary (2.9).

Remark: If S is not reduced, the proposition is not true as is shown by the following example:

$$X = \operatorname{Spec} k[\epsilon][T]/\epsilon.T \qquad S = Y = \operatorname{Spec} k[\epsilon] \quad \text{where } \epsilon^2 = 0.$$

One can generalize the concept of normal flatness in another direction:

Definition (3.5) (Hironaka): Let X be a scheme (resp. analytic space), Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X, and W a subscheme (resp. analytic subspace) of Y. We say that X is W-normally flat along Y at a point $x \in W$ if the following conditions hold:

a) W is regularly imbedded in Y at x.

b) The canonical sequence of W-cones

$$(0) \longrightarrow C_{Y,W} \longrightarrow C_{X,W} \longrightarrow C_{X,Y} \times_Y W \longrightarrow (0)$$

is exact in a neighborhood of x in W.

We say that X is W-normally flat along Y if it is so at every point of W.

With this definition, we find that we can translate our main result as:

Theorem (3.6): Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space),

Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X flat over S. Consider the immersions (as in §1)

$$Y \xrightarrow{\delta(Id_Y)} Y \underset{S}{\times} Y \xrightarrow{\delta'(i)} X \underset{S}{\times} Y$$

$X \underset{S}{\times} Y$ is Y-normally flat along $Y \underset{S}{\times} Y$ at a point $y \in Y$ if and only if Y is smooth over S at y.

Indeed, if Y is smooth over S at y, the diagonal immersion $Y \longrightarrow Y \underset{S}{\times} Y$ is regular at y (0.23) and condition b) is exactly Corollary (2.3) (resp. (2.5)) since $C_{X\underset{S}{\times}Y, Y\underset{S}{\times}Y}\, Y\underset{S}{\times}Y = C_{X,Y}$. The converse follows only from a) in view of (0.4).

§4. Computation of $\dim_{\kappa(x)} P^n_{X/S}(x)$ and applications.

Definition (4.1). Let $\mathcal{O}$ be a noetherian local ring, $\mathfrak{M}$ its maximal ideal. The Samuel function of $\mathcal{O}$, $H^1_{\mathcal{O}}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ is defined by

$$H^1_{\mathcal{O}}(\nu) = \text{length}_{\mathcal{O}}\ \mathcal{O}/\mathfrak{M}^{\nu+1} .$$

For the purpose of comparing the Samuel functions of two noetherian local rings of different dimensions one is led to define by induction functions $H^i_{\mathcal{O}}$ by

$$H^i_{\mathcal{O}}(\nu) = \sum_{\mu=0}^{\nu} H^{i-1}_{\mathcal{O}}(\mu)$$

and it is easily checked that

$$H^{1+d}_{\mathcal{O}} = H^1_{\mathcal{O}[T_1,\cdots,T_d]_M} \quad \text{where} \quad M = \mathfrak{M}[T_1,\cdots,T_d] .$$

So if we want to compare $\mathcal{O},\mathcal{O}'$, say $\dim \mathcal{O}' - \dim \mathcal{O} = d$, the natural comparison is that of $H^1_{\mathcal{O}}$, and $H^{1+d}_{\mathcal{O}}$.

Definition (4.2). Let k be a field, and $\mathcal{O}$ a k-algebra which is local and noetherian, and such that the residual extension $k \longrightarrow \kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{M}$ is of finite type. The arithmetic Samuel function of the k-algebra $\mathcal{O}$ is by definition:

$$^{a}H_{\mathcal{O}} = H^{1+d}_{\mathcal{O}} \quad \text{where} \quad d = d_k(\mathcal{O}) = \text{tr.deg}_k \kappa.$$

<u>Lemma (4.3)</u>. Let k be a field and $\mathcal{O}$ a local noetherian k-algebra whose residue field is of finite type over k. Let k' be a finite radicial extension of k, so that $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \otimes_k k'$ is a local k'-algebra whose residue field is of finite type over k'. Then

$$^{a}H_{\mathcal{O}}(\nu) \leq {}^{a}H_{\mathcal{O}'}(\nu) \qquad \text{for all} \quad \nu \geq 0$$

and if $\mathcal{O}$ contains a prime ideal P such that

a) $\mathcal{O}/P$ is a formally smooth k-algebra

b) $gr_P\mathcal{O}$ is a flat $\mathcal{O}/P$-algebra

we have equality.

<u>Proof</u>: Clearly $d_{k'}(\mathcal{O}') = d_k(\mathcal{O})$ so we are reduced to proving that $H^1_{\mathcal{O}}(\nu) \leq H^1_{\mathcal{O}'}(\nu)$ for all $\nu \geq 0$. By induction on [k':k] it is enough to prove the lemma in the case where $k' = k[X]/X^p-u$ with $u \in k-k^p$. Now consider $\varkappa \otimes_k k'$. If it is not a field, u has a pth root in $\varkappa$. We choose an element U in $\mathcal{O}$ such that $U^p \bmod \mathfrak{M}$ is u, make the change of variables Y = X-U and apply Proposition 10 of [6]. If it is a field, in particular if $\varkappa$ is a separable extension of k, we have by the flatness of $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ that $\mathfrak{M}.\mathcal{O}' = \mathfrak{M}'$ and $gr_{\mathfrak{M}'}\mathcal{O}' = gr_{\mathfrak{M}}\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}/\mathfrak{M}} \mathcal{O}'/\mathfrak{M}'$, hence equality. Now the general equality case reduces to the preceding one in the following way: By the flatness of $\mathcal{O}'$ over $\mathcal{O}$, conditions a) and b) hold for $P\mathcal{O}'$ in $\mathcal{O}'$ with respect to k'. By [7, Remark to Cor. 3] we have that $H^1_{\mathcal{O}} = H^{1+d}_{\mathcal{O}_P}$, $H^1_{\mathcal{O}'} = H^{1+d}_{\mathcal{O}'_{P\mathcal{O}'}}$ where $d = \dim \mathcal{O}/P = \dim \mathcal{O}'/P\mathcal{O}'$.

Since $\mathcal{O}/P$ is formally smooth over k, the residual extension of the k-algebra $\mathcal{O}_P$ is now separable (0.14), and we apply the preceding equality case to $\mathcal{O}_P$, which gives us $H^1_{\mathcal{O}_P} = H^1_{\mathcal{O}'_{P\mathcal{O}'}}$, hence $H^1_{\mathcal{O}} = H^1_{\mathcal{O}'}$.

<u>Definition (4.4)</u>. Let k be a field and $\mathcal{O}$ a local noetherian k-algebra whose residue field is of finite type over k. The Samuel function $H_{\mathcal{O}/k}$ of $\mathcal{O}$ over k is defined by:

$$H_{\mathcal{O}/k}(\nu) = \sup_{k' \in R} {}^{a}H_{\mathcal{O}'}(\nu)$$

where k' runs through the set R of all finite radicial extensions of k, and $\mathcal{O}'$ is the k'-algebra $\mathcal{O} \otimes_k k'$.

<u>Proposition (4.5)</u>. $\mathcal{O}$ being as above, there exists a finite radicial extension k_o of k such that, if $\mathcal{O}_o = \mathcal{O} \otimes_k k_o$,

$$H_{\mathcal{O}/k} = {}^{a}H_{\mathcal{O}_o} .$$

If $\mathcal{O}$ contains a prime ideal P such that

a) $\mathcal{O}/P$ is a formally smooth k-algebra

b) $gr_P\mathcal{O}$ is a flat $\mathcal{O}/P$-module

we may choose $k_o = k$.

(This happens in particular if the residue field of $\mathcal{O}$ is a separable extension of k, since then the maximal ideal $\mathfrak{M}$ of $\mathcal{O}$ satisfies conditions a) and b).)

<u>Proof</u>: By [5, Chap IV, 4.7.4] the k-algebra $\mathcal{O}$ is of finite radicial multiplicity, i.e., there exists a finite radicial extension k_o of k such that the residue field $\varkappa_o$ of $\mathcal{O}_o = \mathcal{O} \otimes_k k_o$ is a separable extension of k_o. By Lemma (4.3) we have $H_{\mathcal{O}/k} = H_{\mathcal{O}_o/k_o}$ and $H_{\mathcal{O}_o/k_o} = {}^aH_{\mathcal{O}_o}$. The second part of the assertion follows immediately from the equality case in Lemma 4.3.

<u>Definition (4.6)</u>. Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space) and x a point of X. Let s be the image of x in S, X_s the fiber of X/S through x and $\varkappa(s)$ the residue field of S at s. We define the relative Samuel function of X over S at x:

$$H_{X/S,x} = H_{\mathcal{O}_{X_s,x}/\varkappa(s)}$$

We also define the arithmetic relative Samuel function

$${}^aH_{X/S,x} = {}^aH_{\mathcal{O}_{X_s,x}}$$

and remark that one always has ${}^aH_{X/S,x}(\nu) \leq H_{X/S,x}(\nu)$ for all $\nu \geq 0$ and equality holds in particular if the residual extensions are separable (e.g., analytic case).

<u>Proposition (4.7)</u>. Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space). One has

$$\dim_{\kappa(x)} P^n_{X/S}(x) = H_{X/S,x}(n) \quad \text{for all } n \geq 0 \text{ and any point } x \in X.$$

<u>Proof</u>: Let s be the image of x in S, X_s the fiber of X/S through x. We have $\dim_{\kappa(x)} P^n_{X_s/\kappa(s)}(x) = \dim_{\kappa(x)} P^n_{X/S}(x)$ (1.14) and moreover, if k' is a finite radicial extension of $\kappa(s)$ and if x' is the point of $X'_s = X_s \times_{\kappa(s)} k'$ mapped to x by the first projection, we have $\dim_{\kappa(x')} P^n_{X'_s/k'}(x') = \dim_{\kappa(x)} P^n_{X_s/\kappa(s)}(x)$ (1.12). Thanks to our definition of $H_{X/S,x}$ we also have $H_{X'_s/k',x'} = H_{X_s/k,x}$. Since $\mathcal{O}_{X_s,x}$ satisfies the conditions of Proposition (4.5), we may thus, to prove our equality, reduce to the case where $\kappa(x)$ is a separable extension of $\kappa(s)$. In this case, the closure $\overline{\{x\}}$ of x in X_s is smooth over $\kappa(s)$ at x (0.8;0.14). Applying now Lemma 1.19 and Corollary 2.6 (resp. 2.5) via remark 2.7, we find that we have isomorphisms:

$$\mathrm{gr}\, P_{X_s/\kappa(s)}(x) \cong (\mathrm{gr}\, P_{X_s/\kappa(s)}(\overline{x}))_x \simeq (\mathrm{gr}_{\overline{\{x\}}} X_s)_x \otimes_{\kappa(x)} (\mathrm{gr}\, P_{\overline{\{x\}}/\kappa(s)}$$

But on the one hand we have by (1.21) that

$(\mathrm{gr}\ P_{\{\overline{x}\}/\kappa(s)})_x \simeq \mathrm{sym}_{\kappa(x)}\Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(s)} \simeq \kappa(x)[T_1,\cdots,T_d]$ where

$d = d_{\kappa(s)}(\mathcal{O}_{X_s,x})$ and on the other hand we have

$$\dim_{\kappa(x)}(\mathrm{gr}^n_{\{\overline{x}\}}X_s)_x = \dim_{\kappa(x)} \mathfrak{m}^n_{X_s,x}/\mathfrak{m}^{n+1}_{X_s,s} = H^{\overline{0}}_{\mathcal{O}_{X_s,x}}(n)$$

so that we have $\dim_{\kappa(x)}\mathrm{gr}^n P_{X|S}(x) = H^{\overline{d}}_{\mathcal{O}_{X_s,x}}(n)$ and by the exact sequences

$$0 \longrightarrow (\mathrm{gr}^n P_{X_s/\kappa(s)}(\overline{x}))_x \longrightarrow (P^n_{X_s/\kappa(s)}(\overline{x}))_x \longrightarrow (P^{n-1}_{X_s/\kappa(s)}(\overline{x}))_x \longrightarrow 0$$

we get $\dim_{\kappa(x)}P^n_{X/S}(x) = H^{1+d}_{\mathcal{O}_{X_s,x}}(n) = H_{\mathcal{O}_{X_s/\kappa(s)}}(n) = H_{X/S,x}(n)$.

QED

Corollary (4.8). Let s/ν be an integer. Then $X_{s\nu} = \{x \in X / H_{X/S,x}(\nu) \geq s/\nu\}$ is a closed subscheme (resp. closed analytic subspace) of X.

This follows immediately from the above proposition and the semi-continuity of the dimension of the fibers of coherent sheaves.

Corollary (4.9). (A special case of Bennett's Theorem 3 in [1]).

Let $\mathcal{O}$ be a noetherian equicharacteristic local ring and P an ideal in $\mathcal{O}$ such that $\mathcal{O}/P$ is regular. Then $\mathrm{gr}_P\mathcal{O}$ is a flat $\mathcal{O}/P$-module if and only if

$$H^{1+d}_{\mathcal{O}_P} = H^1_{\mathcal{O}} \quad \text{where} \quad d = \dim \mathcal{O}/P.$$

<u>Proof:</u> First one can reduce to the complete case. Let $\mathcal{O} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ be the completion of $\mathcal{O}$. Then $\widehat{\mathcal{O}/P} = \hat{\mathcal{O}}/P\cdot\hat{\mathcal{O}}$ is regular, hence $P\cdot\hat{\mathcal{O}}$ is a prime ideal of $\hat{\mathcal{O}}$. Using the flatness of $\hat{\mathcal{O}}$ over $\mathcal{O}$, it is easily seen (1.13) that $H^{1+d}_{\mathcal{O}_P} = H^{1+d}_{\hat{\mathcal{O}}_{P\hat{\mathcal{O}}}}$, $H^1_{\mathcal{O}} = H^1_{\hat{\mathcal{O}}}$ and $gr_{P\hat{\mathcal{O}}}\hat{\mathcal{O}} = gr_P\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}/P} \widehat{\mathcal{O}/P}$. Since $\widehat{\mathcal{O}/P}$ is a faithfully flat $\mathcal{O}/P$-module, $gr_P\mathcal{O}$ is $\mathcal{O}/P$-flat if and only if $gr_{P\cdot\hat{\mathcal{O}}}\hat{\mathcal{O}}$ is $\widehat{\mathcal{O}/P}$-flat. Now we can use Cohen's structure theorem ([9], Theorem 27) which tells us that $\hat{\mathcal{O}}$ has a field of representatives, say κ. κ is also a field of representatives for $\hat{\mathcal{O}}/P\cdot\hat{\mathcal{O}}$ which, being regular, is then isomorphic to

$$\kappa[[T_1,\cdots,T_d]] \quad \text{where} \quad d = \dim \mathcal{O}/P = \dim \hat{\mathcal{O}}/P\cdot\hat{\mathcal{O}}.$$

Hence $\hat{\mathcal{O}}/P\hat{\mathcal{O}}$ is a formally smooth κ-algebra with trivial residual extension. By Corollary (2.10), all we have to prove is that, if $X = \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}$, $Y = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}/P}$, $P^n_{X/\kappa}(Y)$ is $\mathcal{O}_Y$-flat, for all $n \geq 0$. In view of the numerical criterion for flatness it is enough to check that if x is the closed point of Y and η its generic point, $\dim_{\kappa(x)} P^n_{X/\kappa}(x) = \dim_{\kappa(\eta)} P^n_{X/\kappa}(\eta)$. A straightforward computation shows that $\dim_{\kappa(x)} P^n_{X/\kappa}(x) = H^1_{\mathcal{O}}$; if we let K be the field of fractions of $\kappa[[T_1,\cdots,T_d]]$, we have by Theorem 2.3

$$(gr\ P_{X/\kappa}(Y))_\eta \approx (gr_Y X)_\eta \otimes_K (gr_Y\ Y\times_\kappa Y)_\eta \simeq gr_\eta X_\eta \otimes_K K[T_1,\cdots,T_d]$$

hence $\dim_{\kappa(\eta)}(gr^n P_{X/\kappa}(Y))_\eta = H^d_{\mathcal{O}_P}$, and since $P^n_{X/\kappa}(\eta) = (P^n_{X/\kappa}(Y))_\eta$ by the exact sequences $0 \longrightarrow (gr^n\ P_{X/\kappa}(Y))_\eta \longrightarrow (P^n_{X/\kappa}(Y))_\eta \longrightarrow P^{n-1}_{X/\kappa}(Y))_\eta \longrightarrow 0$ we find that $\dim_{\kappa(\eta)} P^n_{X/\kappa}(\eta) = H^{1+d}_{\mathcal{O}_P}$. This also proves the converse.

Remark (4.10). Since we have in fact used only the arithmetic Samuel function, Corollary (4.9) provides an independent proof of the equality of [7, remark to Cor. 3] which we used in the proof of the equality case in Proposition 4.5.

We are now ready to prove the numerical criterion for relative normal flatness:

Theorem (4.11). Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space) with S reduced, and Y a subscheme (resp. analytic subspace) of X. The following conditions are equivalent for a point $x \in Y$

i) X/S is normally flat along Y/S at x.

ii) Y is smooth over S at x and the application $y \rightsquigarrow H_{X/S,y}$ is constant in a neighborhood of x in Y.

iii) Y is smooth over S at x and the application $y \rightsquigarrow {}^{a}H_{X/S,y}$ is constant in a neighborhood of x in Y.

Furthermore, if these conditions are satisfied, there exists a neighborhood of x in Y at every point y of which X/S is normally flat along Y/S, and $H_{X/S,y} = {}^{a}H_{X/S,y}$.

Proof: By the openness of flatness (see [4] resp. [3]) and smoothness (see [4] resp. [2]) i) implies that X/S remains normally flat along Y/S in some neighborhood of x in Y. By

Corollary (2.9) and the numerical criterion for freeness of coherent sheaves on a reduced space ([4]) this in turn implies ii), thanks to Proposition (4.7). Conversely, using again the openness property of smoothness, the same numerical criterion shows that ii) implies that all the $P^n_{X/S}(Y)$ are free in a neighborhood of x in Y, hence i). Now Proposition (4.5) tells us that at any point y such that i) holds, we have $H_{X/S,y} = {}^aH_{X/S,y}$, hence we have shown that ii) $\Longrightarrow$ iii).

Let us now assume that iii) is fulfilled. Let s be the image of x in S and X_s (resp. Y_s) the fiber of X/S (resp. Y/S) through x. iii) tells us that ${}^aH_{X_s/\kappa(s)}$ is constant in a neighborhood of x in Y_s, and that Y_s is smooth over $\kappa(s)$ at x. Setting $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X_s,x}$ which is equicharacteristic since it is a $\kappa(s)$-algebra, and P to be the ideal of Y_s in X_s at x, we find by Corollary (4.10) that $gr_P\mathcal{O}$ is a flat $\mathcal{O}/P$ algebra, hence by Proposition 4.5 that we have ${}^aH_{X_s/\kappa(s),x} = H_{X_s/\kappa(s),x}$, i.e., ${}^aH_{X/S,x} = H_{X/S,x}$. Using again the openness of smoothness, this shows that iii) $\Longrightarrow$ ii).

We now prepare ourselves to prove the existence of a "relative Samuel stratification" which will enable us to state the above theorem in a more geometric way. From now on, analytic space will mean complex analytic space.

<u>Lemma (4.12)</u>. Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space) and Y a reduced subscheme (resp. analytic subspace) of X. The set of points $y \in Y$ at which $P_{X/S}(Y)$ is $\mathcal{O}_Y$-flat is the complement of a closed subscheme (resp. analytic subspace) Y_1 of Y and $\dim Y_1 < \dim Y$.

<u>Proof</u>: The result follows from the generic flatness theorem [4] (resp. [3]) in the following way: first, by Corollary (2.9), the flatness of $P_{X/S}(Y)$ is equivalent to that of $\operatorname{gr} P_{X/S}(Y)$, but by Remark (1.20) $\operatorname{gr} P_{X/S}(Y)$ is a graded $\mathcal{O}_Y$-algebra of finite presentation, corresponding to the Y-cone $C_{X \times_S Y, Y}$; By the generic flatness theorem, this cone is flat over Y outside of a closed subscheme (resp. analytic subset) C_1 and $\dim C_1 < \dim C_{X \times_S Y, Y}$. We are interested in flatness at points of the vertex (0). If no irreducible component of (0) is contained in C_1, we have our lemma. But this fact is also guaranteed by the generic flatness theorem, since otherwise the image of the non-flat locus of $C_{X \times_S Y, Y}$ would contain an irreducible component of Y.

<u>Lemma (4.13)</u>. Let X be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space). Every point $x \in X$ has a neighborhood in which the application $x \rightsquigarrow H_{X/S,x}$ takes only a finite number of values (i.e., only a finite number of distinct Samuel functions appear).

Proof: We use the fact that for any Y subscheme (resp. analytic subspace) containing x, $\dim_{\kappa(x)} P_{X/S}(x) = \dim_{\kappa(x)} P_{X/S}(Y)(x)$. Let us first choose $Y^o = X_{red}$. By Lemma 4.12, we find that there is a closed reduced subscheme (resp. analytic subspace) Y^1 of Y^o such that $\dim Y^1 < \dim Y^o$ and $\operatorname{gr} P_{X/S}(Y^o)$, hence also $P_{X/S}(Y^o)$ is $\mathcal{O}_{Y^o}$-flat on $Y^o - Y^1$, i.e., in view of Proposition 4.7, the application $x \rightsquigarrow H_{X/S,x}$ is constant on each connected component of $Y^o - Y^1$. These are locally in finite number. We now apply Lemma 4.12 to Y^1 and in the same way find a reduced closed subscheme Y^2 of Y^1 such that: $x \rightsquigarrow H_{X/S,x}$ is constant on each connected component of $Y^1 - Y^2$, and $\dim Y^2 < \dim Y^1$. Since the dimension strictly decreases at each step, this has to stop after a finite number of steps, and that is clearly enough to prove the lemma.

Lemma (4.14). Let S be the set of sequences of integers with the product order. The application $X \longrightarrow S$ (notations of Lemma 4.12, and same assumptions) given by $x \rightsquigarrow H_{X/S,x}$ is upper semi-continuous, i.e., if $s = (s_\nu) \in S$, $\{x \in X : H_{X/S,x}(\nu) \geq s_\nu \text{ for all } \nu \geq 0\}$ is a closed subscheme (resp. analytic subspace) of X.

Proof: First we remark that this is a closed subset of X: if x does not belong to it, there exists a smallest integer ν_o such that $H_{X/S,x}(\nu_o) < s_{\nu_o}$. But by Corollary 4.8, there exists then a neighborhood U of x such that for any $x' \in U$ we have

$H_{X/S,x'}(\nu_o) \leq H_{X/S,x}(\nu_o) < s_{\nu_o}$, i.e., no element of U belongs to the subset either. Let us now show that it is a locally closed subscheme (resp. analytic subspace): using Lemma 4.13, let us take a neighborhood V of x in which only a finite number of different Samuel functions appear, say $H_1,\cdots,H_r$. Assume that $H_1,\cdots,H_s$ $(0 \leq s \leq r)$ are those which satisfy: $H_i(\nu) < s_\nu$ for some $\nu \geq 0$. Let ν_i $(1 \leq i \leq s)$ be the smallest integer such that $H_i(\nu_i) < s_{\nu_i}$ $(1 \leq i \leq s)$ and consider the closed subscheme (resp. analytic subspace) (in view of Corollary 4.8)

$$F = \{x' \in V : H_{X/S,x'}(\nu_1) \geq s_{\nu_1} \text{ and } H_{X/S,x'}(\nu_2) \geq s_{\nu_2} \text{ and} \cdots \text{and } H_{X/S,x'}(\nu_s) \geq s_{\nu_s}\}.$$

It is clear that for $x' \in V$, if $H_{X/S,x'}(\nu) \geq s_\nu$ for all $\nu \geq 0$, $x' \in F$ but the converse is also true since $H_{X/S,x'}(\nu_i) \geq s_{\nu_i}$ implies that $H_{X/S,x'}$ is not one of the H_i for $0 \leq i \leq s$, hence we must have $H_{X/S,x'}(\nu) \geq s_\nu$ for all $\nu \geq 0$.

<u>Theorem (4.15)</u>. Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space). There exists a locally finite partition of X into subschemes (resp. analytic subspaces) $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ having the following properties:

i) given $\alpha \in A$ there exists an application $H_\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ such that $x \in X_\alpha \Longleftrightarrow H_{X/S,x} = H_\alpha$

ii) $\overline{X}_\alpha$ and $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ are closed subschemes (resp. analytic subspaces) of X and $\dim(\overline{X}_\alpha - X_\alpha) < \dim X_\alpha$.

<u>Proof</u>: Let $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be the set of those applications $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ which actually occur as Samuel functions of some point $x \in X$. Clearly what we have to prove is that the sets

$$X_\alpha = \{x \in X : H_{X/S,x} = H_\alpha\}$$

are subschemes of X.

First we observe that if $x \in \overline{X}_\alpha$, we must have $H_{X/S,x}(\nu) \geq H_\alpha(\nu)$ for all $\nu \geq 0$. Otherwise there exists a smallest integer ν_o such that $H_{X/S,x}(\nu_o) < s_{\nu_o}$ and by Corollary 4.8 the strict inequality must subsist in a neighborhood of x. But this neighborhood meets X_α, and we have our contradiction.

Let us now consider the closed subschemes (resp. analytic subspace) (see Lemma 4.14)

$$X^*_\alpha = \{x \in X : H_{X/S,x}(\nu) \geq H_\alpha(\nu) \text{ for all } \nu \geq 0\} .$$

In view of the above observation and Lemma 4.14 any $x \in \overline{X}_\alpha$ has an open neighborhood V such that

$$X_\alpha \cap V = (X^*_\alpha - \bigcup_{\beta\in B(x)} X^*_\beta) \cap V$$

where B(x) is the finite set of those Samuel functions appearing in V and such that $H_\beta(\nu) \geq H_\alpha(\nu)$ for all $\nu \geq 0$ with $H_\beta \neq H_\alpha$. This shows that X_α is a subscheme (resp. analytic subspace) of X and the assertion ii) is easy to obtain since $(\bigcup_{\beta\in B(x)} X^*_\beta) \cap X^*_\alpha \cap V$ is a strict closed subscheme (resp. analytic subspace) of $X^*_\alpha \cap V$.

Definition (4.16). The subschemes (resp. analytic subspaces) X_α of X are called the (relative) Samuel strata of X/S.

Proposition (4.17). Let X/S be a scheme locally of finite type over a locally noetherian scheme S (resp. a relative analytic space with S reduced) and Y a subscheme (resp. analytic subspace). The following conditions are equivalent at a point $y \in Y$.

i) X/S is normally flat along Y/S at y.

ii) Y is smooth over S at y and locally around y contained in a Samuel stratum of X/S.

Proof: This is nothing but Theorem 4.11.

Remark 4.18. The fibers of the Samuel strata of X/S at $s \in S$ are nothing but the Samuel strata of $X_s/\kappa(s)$.

References

[1] B. Bennett "On the characteristic function of a local ring" Annals of Math., Vol. 91, No. 1 (1970).

[2] Cartan Seminar 1960-61 Institut Henri Poincaré Secretariat Mathématique, 13e année.

[3] J. Frisch "Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes" Inventiones Mathematical Vol. 4, Fasc. 2 (1967).

[4] A. Grothendieck Seminaire de Geometrie Algébrique 1960-61 I.H.E.S. Bures sur Yvette.

[5] A. Grothendieck Elements de Geometrie Algébrique: Publications Mathematiques de l'I.H.E.S. Nos. 20 and 32.

[6] H. Hironaka "Certain numerical characters of singularities" Journal of Mathematics of Kyoto University Vol. 10 N° 1 (1970)

[7] H. Hironaka "Resolution of singularities of algebraic varieties (characteristic 0)" Annals of Math. vol. 79 No. 1 and 2 (1964).

[8] H. Hironaka Resolution of singularities of complex analytic spaces. Seminar Ecole Polytechnique 1970 (to appear)

[9] Samuel and Zariski Commutative Algebra vol. II Van Nostrand.

D E U X I E M E P A R T I E

CYCLES EVANOUISSANTS, PLIS EVANOUISSANTS ET

CONDITIONS DE WHITNEY

CHAPITRE I

DEFORMATIONS A TYPE TOPOLOGIQUE CONSTANT

Exposés faits au Séminaire Douady-Verdier
E. N. S. 45, rue d'Ulm - 1972

(I)

§ 1. Introduction.

1.1. On se propose d'étudier les petites déformations "à type topologique constant" ou "équisingulières" d'un germe d'hypersurface à singularité isolée. En particulier, on montrera l'existence d'une déformation équisingulière semi-universelle. Comme l'a montré Pham (voir [1] ou [13]) ce problème ne coïncide pas avec l'étude de la stratification de Thom d'un morphisme stable dont la fibre est une hypersurface, puisque cette étude est celle des petites déformations à "type topologique universel" constant. Néanmoins, ce problème est intéressant en soi, d'une part comme approximation du problème étudié par Pham, et d'autre part parce que c'est l'analogue local (dans la fibre) de l'étude de l'espace des modules locaux (dans la base !) (par exemple : espace des modules locaux des courbes projectives planes lisses de genre g ; puisque fixer le genre revient à fixer la topologie).

DEFINITION 1.2.- <u>On dit que deux germes d'hypersurfaces analytiques complexes</u> (X_1,x_1) <u>et</u> (X_2,x_2) , <u>de même dimension</u> n <u>ont même type topologique s'il existe des plongements de germes</u> $(X_i,x_i) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, $i = 1, 2$ <u>tels qu'il existe un germe en</u> 0 <u>d'homéomorphisme de paires</u> $(\mathbb{C}^{n+1},X_1) \approx (\mathbb{C}^{n+1},X_2)$.

1.3. <u>Remarque</u>.- Une telle définition n'a de sens que pour des hypersurfaces. On peut montrer facilement que si (Γ_1,x_1) (Γ_2,x_2) sont des germes de courbes irréductibles dans $(\mathbb{C}^3,0)$, il existe toujours un germe d'homéomorphisme de $(\mathbb{C}^3,0)$ dans lui-même qui envoie homéomorphiquement Γ_1 sur Γ_2 .

DEFINITION 1.4.- <u>On appelle déformation équisingulière d'un germe d'hypersurface à singularité isolée</u> (X_o,x_o) <u>un carré cartésien de germes d'espaces analytiques</u>

$$\begin{tikzcd} (X_o,x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X,x) \arrow[d, "G"] \\ \{s\} \arrow[r, hook] & (S,s) \end{tikzcd}$$

<u>où</u> G <u>est plat, tel que tout représentant suffisamment petit de</u> G <u>possède la propriété suivante : pour tout</u> $s' \in S$, <u>il existe un point</u> $x(s')$ <u>dans la fibre</u> $X_{s'}$ <u>tel que</u> $(X_{s'},x(s'))$ <u>ait même type topologique que</u> (X_o,x_o) .

1.5. <u>Remarque</u>.- Nous verrons que le point $x(s')$ est alors nécessairement l'unique point singulier de $X_{s'}$ (dans un voisinage suffisamment petit de x , bien sûr) et est même donné par une section analytique de G .

Avant d'étudier les déformations équisingulières, on va étudier des problèmes analogues mais un peu plus simples.

§ 2. <u>Déformations "à type analytique constant"</u>.

On se propose d'étudier les déformations $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ de (X_o,x_o) possédant la propriété suivante : pour tout représentant suffisamment petit de G , et tout $s' \in S$, il existe $x(s') \in X_{s'}$ tel que $(X_{s'},x(s'))$ soit un germe d'espace analytique isomorphe à (X_o,x_o) . La réponse est :

THEOREME 2.1.(Seidenberg [15] et [16]).- <u>Une telle déformation est analyti-</u>

quement triviale.

(Comparer à Grauert-Fischer [3]).

En fait, Seidenberg démontre le résultat en géométrie algébroïde. Nous allons esquisser une autre démonstration qui s'appuie sur les résultats de Mather ([10] et [11]). Plus précisément on a

PROPOSITION 2.2.- Soit $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ un représentant suffisamment petit d'un germe de morphisme stable d'espaces lisses. L'ensemble $E(G)$ des points de X en lesquels le germe de G a le même type analytique qu'en x est un sous-espace analytique lisse de X et $\dim_x E(G) = \dim_s S - \dim_{\mathbb{C}} T^1_{G^{-1}(s),x}$.

Le schéma de la démonstration est le suivant : (les ingrédients se trouvent dans les articles cités de Mather) le type analytique d'un morphisme stable en un point est déterminé par son jet à un ordre fini (borné sur X) en ce point. Ceci montre qu'il existe un entier l tel que $E' = j^l(G)^{-1}(V_x)$ où $V_x \subset J^l(X,S)$ est une certaine orbite, sans variété lisse de $J^l(X,S)$, à laquelle $J^l(G)$ est transverse (puisque G est stable). Ceci montre que E' est un sous-espace lisse de X. Comme de plus le symbole de Boardman est un invariant du type analytique de G, E' doit être contenu dans la variété de symbole de Boardman de G passant par x, ce qui montre que $G|E'$ est une immersion. Ceci permet de calculer $\dim_x E'$ en appliquant ([11], p. 247 (*)).

Il nous reste à remarquer que le type analytique d'un morphisme stable en un point est uniquement déterminé par le type analytique de sa fibre, et donc qu'en vertu de la proposition 2.2, la démonstration du théorème 2.1 se ramène à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.3.- <u>Soit</u> $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>un morphisme stable, déformation semi-universelle de</u> $(G^{-1}(s),x)$ (cf. [1] <u>et</u> [17]). <u>Alors</u> $E(G) = \{x\}$.

En effet, si $E(G) = \{x\}$, il est clair que toute petite déformation à type analytique constant de $(G^{-1}(s),x)$ sera analytiquement triviale, puisque par la semi-universalité de G , la base de notre déformation devra aller toute entière sur $\{s\}$. Réciproquement, le théorème 2.1 nous dit que la déformation $G^{-1}(G(E(G)) \longrightarrow G(E(G))$, étant à type analytique constant, doit être triviale, ce qui entraîne que l'on doit avoir $G(E(G)) = \{s\}$ par la semi-universalité, d'où certainement $E(G) = \{x\}$.

Mais si G est déformation semi-universelle de sa fibre, $\dim_s S = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{G^{-1}(s),x}$, donc $\dim_x E(G) = 0$ Q.E.D.

<u>Remarque</u> 1.- Le raisonnement précédent s'applique à toute singularité isolée d'intersection complète.

<u>Remarque</u> 2.- On peut trouver des déformations "à dimension de $T^1_{X_t,x_t}$ constant" qui ne sont pas analytiquement triviales. Par exemple la famille des quatre droites à birapport variable $x^4 + y^4 + tx^2y^2 = 0$.

<u>Remarque</u> 3.- La proposition 2.3 nous dit que la déformation semi-universelle de (X_o,x_o) est bien l'objet dans lequel on doit chercher l'espace des modules locaux de (X_o,x_o) .

§ 3. <u>Déformations équimultiples</u>.

Nous avons deux raisons de nous intéresser à la multiplicité : d'une part l'équimultiplicité est une version (très) faible de l'équisingularité : en fait

on a la

3.1. Conjecture (Zariski [22]). Soient (X_1,x_1) et (X_2,x_2) deux germes d'hypersurfaces ayant même type topologique. On a $m_{x_1}(X_1) = m_{x_2}(X_2)$.

3.2. Remarque.- La conjecture est démontrée si $\dim_{x_1} X_1 = \dim_{x_2} X_2 = 1$ (voir par exemple Zariski [19]).

D'autre part, Zariski a montré que l'équisingularité d'une famille de courbes planes (à base lisse) était équivalente à l'équimultiplicité de toutes les "familles infiniment voisines" i.e. obtenues par éclatements successifs des lieux singuliers (le lieu singulier de la famille est supposé isomorphe à la base par la projection) (cf. Zariski [19]).

3.3. Que faut-il entendre par déformation équimultiple : contrairement à ce qui se passe pour les déformations équisingulières (remarque 1.5) une même fibre d'une déformation peut contenir plusieurs points ayant même multiplicité que la fibre spéciale : considérons par exemple la famille de courbes définie par

$$f(x,y,t) = y^3 + (x - t)^2((x + t)^2y + (x - t)^3 (x + t)^3 = 0$$

la fibre spéciale X_o est la courbe réduite d'équation $y^3 + x^4y + x^6 = 0$ qui a l'origine pour singularité de multiplicité 3. Mais pour $t \neq 0$, la fibre X_t a deux points singuliers donnés par $y = 0$, $x = \pm t$, tous deux de multiplicité 3 . On a envie de dire que la famille est équimultiple de deux façons différentes.

D'autre part, l'expérience enseigne que la bonne généralisation, au cas non hypersurface de la multiplicité, est la fonction de Samuel.

DEFINITION 3.4.- Soit X un espace analytique. On appelle fonction de Samuel

<u>de</u> X <u>en un point</u> $x \in X$ <u>l'application</u> $H^1_{X,x} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ <u>définie par</u> :
$H^1_{X,x}(\nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}^{\nu+1}_{X,x}$.

3.5. Il existe un polynôme $P_{X,x}(T) \in \mathbb{Q}[T]$ de degré $d = \dim_x X$ tel que pour ν assez grand $H^1_{X,x}(\nu) = P_{X,x}(\nu)$.(Hilbert). Le coefficient du terme de plus haut degré T^d de ce polynôme peut s'écrire $\frac{\mathfrak{m}_x(X)}{d\,!}$ où $\mathfrak{m}_x(X) \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{m}_x(X)$ est (par définition) la multiplicité de X en x (Samuel).

3.6. Si (X,x) est un germe d'hypersurface de $\mathbb{C}^{n+1}$ défini par $f(z_o,\dots,z_n) = 0$, $H^1_{X,x}$ est complètement déterminée par $\dim_x X = n$ et $\mathfrak{m}_x(X)$. Dans ce cas $\mathfrak{m}_x(X)$ n'est autre que le degré du polynôme homogène de plus bas degré apparaissant dans le développement en série de f. Ceci est bien facile à voir : écrivons $f(z_o,\dots,z_n) = f_{\mathfrak{m}_o}(z_o,\dots,z_n) + \dots$ où $f_{\mathfrak{m}_o}(z_o,\dots,z_n)$ est un polynôme homogène de degré $\mathfrak{m}_o = \mathfrak{m}_x(X)$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (f_{\mathfrak{m}_o}(T_o,\dots,T_m)) \longrightarrow \mathbb{C}[\tau_o,\dots,\tau_n] \longrightarrow gr_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow (0)$$

de $\mathbb{C}[\tau_o,\dots,\tau_m]$ -modules gradués. Ceci permet de calculer facilement $\dim_{\mathbb{C}} gr^{\mu}_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}$ en fonction de $\mathfrak{m}_o$ et n et le résultat vient de ce que

$$H^1_{X,x}(\nu) = \sum_{\mu=o}^{\nu} \dim_{\mathbb{C}} gr^{\mu}_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \quad .$$

Ce qui précède motive la

DEFINITION 3.7.- <u>Une déformation</u> $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>de</u> (X_o,x_o) <u>est dite équimultiple, si pour tout représentant suffisamment petit de</u> G , <u>il existe une section</u> σ <u>de</u> G <u>telle que l'on ait, pour tout</u> $s' \in S$,

$$H^1_{X_{s'},\sigma(s')} = H^1_{X_o,x_o}$$

et le premier résultat de ce paragraphe est le

THEOREME 3.8.- Si (X_o, x_o) est un germe d'espace analytique à singularité isolée, il existe une déformation équimultiple semi-universelle de (X_o, x_o), c'est-à-dire une déformation équimultiple

$$G_M : (X_M, x_M) \xrightarrow{\Sigma_M} (S_M, s_M)$$

telle que toute autre déformation équimultiple s'en déduise par changement de base unique au second ordre près.

La démonstration repose sur le résultat suivant :

THEOREME 3.8. bis (Lejeune-Teissier cf. [7] ou [8]).- Soit $G : X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques. Il existe une partition localement finie $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ de X en sous-espaces analytiques et une famille $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

a) $x \in X_\alpha$ si et seulement si (posant $s = G(x)$), $H^1_{X_s, x} = H_\alpha$.

b) Pour tout $\alpha \in A$, $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-espaces analytiques fermés de X .

La partition $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ s'appelle, par abus de langage, la partition de X en strates de Samuel relatives. Cette partition ne vérifie pas la propriété de frontière en général (i.e. il est faux que $X_\beta \cap \overline{X}_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow X_\beta \subset \overline{X}_\alpha$) mais on a le résultat suivant :

Si $x \in X_\alpha$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X en tout point x' duquel on a (posant $s = G(x)$, $s' = G(x')$) $H^1_{X_{s'}, x'} \leq H^1_{X_s, x}$ (pour l'ordre total).

3.9. Remarque.- Il résulte du théorème 3.8 et de 3.5 que l'on peut, si l'on

y tient absolument, parler de la stratification par l'équimultiplicité relative : une strate d'équimultiplicité relative sera en effet une réunion localement finie de strates de Samuel relatives.

Pour achever la démonstration du théorème 3.9., il suffit d'appliquer le théorème 3.8 à la déformation semi-universelle de (X_o,x_o). Si nous notons $(X_U,x_U) \xrightarrow{G_U} (S_U,s_U)$ celle-ci, notons S_M l'unique strate de Samuel relative de G_U contenant x et faisons le changement de base par le morphisme composé de G_U et de l'inclusion de S_M dans X_o :

$$\begin{tikzcd}
(X_M,x_U) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "G_M"'] & (X_U,x_U) \arrow[d, "G_U"] \\
(S_M,x_U) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\Sigma_M"'] \arrow[ur, hook] & (S_U,s_U)
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons ainsi une section Σ_M, et il est immédiat de constater que (G_M, Σ_M) est la déformation équimultiple semi-universelle cherchée.

3.10. Ce qui précède est bien formel ! En particulier, on n'obtient aucun renseignement sur la lissité de S_M. Mais on le

THEOREME 3.11.- <u>Si</u> (X_o,x_o) <u>est un germe d'hypersurface analytique à singularité isolée,</u> S_M <u>est lisse, et sa dimension se calcule par une formule universelle à partir de</u> $\dim_{x_o} X_o$, $\mathcal{M}_{x_o}(X_o)$ <u>et</u> $\tau_{x_o}(X_o) = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{X_o,x_o}$.

3.12. <u>Remarque</u>.- La première partie du théorème 3.11 a été établie par J. Wahl (Berkeley) dans sa thèse [18] pour les courbes planes.

3.13. <u>Démonstration</u>.- La démonstration utilise la théorie du symbole de Boardman ([2], [9], [1], [12]) dont nous rappelons certains points (en

recopiant [14]) par souci d'être complet : soit I un idéal de $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$, disons $I = (f_1,\dots,f_m)$. On note $\Delta^k I$ l'idéal $I + \Delta^{(k)} I$, où $\Delta^{(k)} I$ désigne l'idéal engendré par tous les $(n-k+1)\times(n-k+1)$ mineurs de la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ o\leqslant i\leqslant n}}$. On pose de plus $\Delta^k I = I$ si $k \leqslant \mathrm{Sup}(0, n-m)$, et $\Delta^k I = \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ si $k > n$. Il est facile de vérifier que $\Delta^k I$ ne dépend que de k et de I, et que $k \leqslant k'$ entraîne $\Delta^k I \subset \Delta^{k'} I$. On note : $A = \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/I$ et $\nabla^k A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}/\Delta^k I$ obtenant ainsi une suite finie de surjections :

$$A \longrightarrow \nabla' A \longrightarrow \nabla^2 A \;\dots\dots\dots\; \nabla^{k_1} A \longrightarrow (0)$$

où k_1 est le plus grand entier k $(\leqslant n)$ tel que $\Delta^{k_o} I \neq \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$. On peut appliquer le même processus à l'un quelconque des $\nabla^j A$ et, pour toute suite $(j_1,\dots,j_s)$ d'entiers, obtenir un quotient jacobien de A : $\nabla^{j_s} \dots \nabla^{j_1} A$. En fait, bien souvent $\nabla^{j_s} \dots \nabla^{j_1} A$ sera (0). Mais ce qui nous intéresse est le résultat suivant :

THEOREME 3.14. (Boardman).- <u>Si</u> $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>est un morphisme "transverse à la stratification de Boardman de l'espace</u> $J(X,S)$ " (<u>en particulier un représentant suffisamment petit d'un germe de morphisme stable</u>), <u>si pour tout</u> $x' \in X$, $A(x')$ <u>désigne l'algèbre analytique correspondant au germe</u> $(G^{-1}(G(x')),x')$, <u>pour toute suite d'entiers</u> $(j_1,\dots,j_s)$, <u>l'ensemble</u> $\Sigma^{j_1,\dots,j_s}(G)$ <u>des points</u> $x' \in X'$ <u>tels que</u> $\nabla^{j_s} \dots \nabla^{j_1} A(x') \neq (0)$ <u>est un sous-espace analytique lisse de</u> X, <u>et</u> $\nabla^{j_s} \dots \nabla^{j_1} A(x')$ <u>est l'algèbre analytique correspondant à</u> $(G^{-1}(G(x')) \cap \Sigma^{j_1,\dots,j_s}(G), x')$.

3.15. Or, on peut remarquer que si $I = f(z_o,\dots,z_n).\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ on a :

$$\underbrace{\nabla^{n+1} \cdots \nabla^{n+1}}_{m-1} \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/(f) \neq 0$$

si et seulement si l'ordre de $f(z_o,\dots,z_n)$ à l'origine est au moins égal à m.

En effet, en appliquant les définitions, on voit que

$$\underbrace{\Delta^{n+1} \cdots \Delta^{n+1}}_{m-1}(f) \text{ est l'idéal de } \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \text{ engendré par}$$

$$f \text{ et les } \frac{\partial^\alpha f}{\partial z_o^{\alpha_o} \cdots \partial z^{\alpha_n}} \quad \text{pour } |\alpha| \leqslant n-1 ,$$

et que

$$\underbrace{\nabla^{n+1} \cdots \nabla^{n+1}}_{m-1} \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/(f) = \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/\underbrace{\Delta^{n+1} \cdots \Delta^{n+1}}_{m-1}(f) :$$

Pour achever la démonstration du théorème 3.11, on applique ce qui précède à la déformation semi-universelle $G_U : (X_U,x_U) \longrightarrow (S_U,s_U)$ du germe d'hypersurface à singularité isolée (X_o,x_o). On obtient immédiatement comme corollaire de 3.14 et 3.15 :

COROLLAIRE 3.16.- <u>L'ensemble</u> $X_U(m)$ <u>des points de</u> X_U <u>qui sont de multiplicité supérieure ou égale à un entier</u> m <u>dans leur fibre est</u>

$$\Sigma^{\overbrace{n+1,\dots,n+1}^{m-1}}(G_U)$$

<u>qui est un sous-espace analytique lisse de</u> X_U.

3.17. De plus, Boardman donne une formule pour la codimension de ses strates, qui, dans notre cas particulier, donne :

$$\dim X_U^{(m)} = n + \dim_{s_U} S_U - \mu(n+1 \,;\, m-1)$$

où $\mu(n+1 \,;\, m-1)$ désigne le nombre de suites d'entiers $(j_1 \geqslant j_2 \geqslant \dots \geqslant j_{m-1})$ telles que $1 \leqslant j_1 \leqslant n+1$.

3.18. Il résulte de la semi-continuité de la multiplicité relative (3.8) que si (X_o, x_o) est un germe d'hypersurface de multiplicité $m_o = m_{x_o}(X_o)$, la base de la déformation semi-universelle équimultiple est $S_M = X_U^{(m_o)}$ qui est donc lisse, et de dimension donnée par :

3.19. $$\dim S_M = \dim_{x_o} X_o + \tau_{x_o}(X_o) - \mu(\dim_{x_o} X_o + 1 \; ; \; m_o - 1) \; .$$

Mais d'autre part, d'après la remarque faite par Morin [12] du fait que "l'ensemble des symboles est égal à l'ensemble des multiindices" on peut calculer facilement $\mu(d\,;m) = \binom{d+m}{m} - 1$. Ainsi, si nous posons

$$d_o = \dim_{x_o} X_o + 1 = \operatorname{imdim}_{x_o} X_o \; ,$$

la formule "universelle" cherchée est

3.20. $$\dim S_M = \tau_{x_o}(X_o) + d_o - \binom{d_o + m_o - 1}{m_o - 1} \; .$$

3.21. <u>Exemples</u>.- Si l'on regarde les singularités de courbes planes données par $x^{m_o} + y^{m_o} = 1$, on trouve $\dim S_M = \dfrac{(m_o - 2)(m_o - 3)}{2}$, résultat qui est facile à vérifier directement (il s'agit de m_o points distincts de $\mathbb{P}^1$).

3.22. <u>Remarque</u>.- Si X_o est une hypersurface de multiplicité m_o , d'équation $f(z_o,\dots,z_n) = 0$, tous les monômes de $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ de degré au plus $m_o - 2$ sont certainement linéairement indépendants modulo $(f, \frac{\partial f}{\partial z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$. Comparer à 3.20.

3.23. <u>Remarque</u>.- Revenons au cas général. On peut démontrer (voir [7]) que X_M est normalement plat le long de l'image de la section Σ_M . C'est-à-dire que le cône normal $C_{X_M, \Sigma_M(S_M)}$ est plat sur $\Sigma_M(S_M)$.

REFERENCES

[1] P. BERTHELOT - Exposés sur les travaux de Pham, Séminaire Douady-Verdier à l'E.N.S., Publ. Secr. Math. E.N.S. 1972 (à paraître).

[2] J. M. BOARDMAN - Singularities of differentiable maps, Publ. Math. I.H.E.S., n° 33 (1967), pp. 21-57.

[3] FISCHER W. und GRAUERT H.- Lokal- riviale Familien kompacter komplexer mannigfaltigheiten, Nach. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. K I, II, 89-94 (1965).

[4] H. HIRONAKA - Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint, Warwick, England, 1971.

[5] LE DUNG TRANG - Thèse Paris VII, Déc. 1971.

[6] LE DUNG TRANG - C.P. RAMANUJAM - B. TEISSIER - Sur un critère d'équisingularité (à paraître).

[7] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint Warwick (1971) et Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques.

[8] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Paris 1972.

[9] J.N. MATHER - On Thom-Boardman singularities, Preprint 1971.

[10] J.N. MATHER - Stability of C^∞ mappings III, Publ. I.H.E.S., n° 35 (1968), pp. 127 - 156.

[11] J.N. MATHER - Stability of C^{∞} mappings IV, Publ. I.H.E.S., n° 37, (1969), pp. 223-248.

[12] B. MORIN - Thèse Orsay, Juin 1972.

[13] F. PHAM - Remarque sur l'équisingularité universelle, Preprint, Univ. de Nice, 1970.

[14] F. PHAM - Classification des singularités, Preprint, Univ. de Nice, 1971.

[15] SEIDENBERG - Report on analytic products, C.I.M.E. (1969), Editioni Cremonese, Roma 1970.

[16] SEIDENBERG - "Analytic products", Amer. Journ. of Math. 1969.

[17] G.N. TJURINA - Locally semiuniversal flat deformation, Transl. Amer. Math. Soc., 1971.

[18] Jonathan WAHL - Deformation of branched covers and equisingularity, Thesis Havard, 1971.

[19] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity I, Amer. Journ. Math., 87, (1965), pp. 507-536.

[20] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity II, Amer. Journ. Math., 87, (1965), pp. 972-1006.

[21] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity III, Amer. Journ. Math., 90 (1968), pp. 961-1023.

[22] Oscar ZARISKI - Some open question in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc., July 1971, 77, n° 4, pp. 481-491

(II)

§ 1. Introduction.

Nous allons maintenant exhiber dans le lieu discriminant de la déformation semi-universelle d'une hypersurface à singularité isolée, la base de la déformation semi-universelle à type topologique constant de ladite hypersurface. Après ce qui a été dit au paragraphe 2 de l'exposé précédent, cette base mérite le nom "d'espace des modules local" pour le type topologique.

§ 2. Rappels sur l'ouverture de la versalité.

Rappelons (cf. [19], [21]) que si (X_o,x_o) est un germe d'espace analytique à singularité isolée, à toute déformation $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ de (X_o,x_o) est associé un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$\theta_F : \Omega_S^{1\vee} \longrightarrow F_* T^1_{X/S}$$

où $F_* T^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent puisque le rapport de $T^1_{X/S}$ est le lieu critique de F, fini sur S d'après le théorème de préparation de Weierstrass parce que (X_o,x_o) est à singularité isolée. $T^1_{X/S}$ étant cohérent, il en est de même de $F_* T^1_{X/S}$ d'après le théorème des images directes de Grauert. De plus si $T^2_{X_o,x_o} = (0)$ (cf. [19], [21], F est une déformation verselle (resp. semi-universelle) pour (X_o,x_o) si et seulement si $\theta_F(S) : E_{S,s} \longrightarrow T^1_{X_o,x_o}$ est surjective (resp. un isomorphisme). Si nous

supposons F semi-universelle, il résulte de Nakayama que $\theta_{F,s} : \Omega^{\vee}_{S,s} \longrightarrow (F_* T^1_{X/S})_s$ sera surjective et donc que pour tout $s' \in S$ (i.e. d'un représentant suffisamment petit de (S,s) ...), $\theta_{G,s'}$ sera surjective.

C'est ainsi que l'on démontre l'ouverture de la versalité dans le cas où $T^2_{X_o,x_o} = (0)$ (qui est le seul où l'on sache le faire pour le moment cf. [2]). Mais remarquons que nous obtenons un résultat plus précis : soit $s' \in S'$ et supposons que la fibre $X_{s'}$ ait k points singuliers $x_i(s')$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Alors $(F_* T^1_{X/S})(s') = \bigoplus_{i=o}^{k} T^1_{X_{S'},x_i(s')}$ et cela nous donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \Omega^1_{S,s}(s') \longrightarrow \bigoplus_{i=o}^{k} T^1_{X_{s'},x_i(s')} \longrightarrow 0$$

où, si l'on a posé $\tau_o = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{X_o,x_o}$, $\tau_i = \dim_{\mathbb{C}} T_{X_{s'},x_i(s')}$, on a $\dim T = \tau_o - \sum_{i=1} \tau_i$ (rappelons que F est supposée semi-universelle en x) et ceci nous donne une décomposition de S au voisinage de s', c'est-à-dire la

2.1. <u>Remarque</u>.- Si $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ est semi-universelle, et si pour $s' \in S$, la fibre $X_{s'}$ a k points singuliers, on a au voisinage de s' une décomposition de S en produit (non canonique) $S = S_1 \times \dots \times S_k \times \mathbb{C}^{\tau - \Sigma \tau_i}$ qui a la propriété qu'au voisinage du point singulier $x_i(s') \in X_{s'}$, F est isomorphe au morphisme :

$$S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times X_i \times S_{i+1} \times \dots \times S_k \times \mathbb{C}^{\tau_o - \sum_{i=1}^{k} \tau_i} \longrightarrow S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_i \times S_{i+1} \times \dots \times S_{i-1} \times \mathbb{C}^{\tau_o - \sum_{i=1}^{k} \tau_i}$$

qui est

$$id_{S_1} \times \dots \times id_{S_{i-1}} \times F_i \times id_{S_{i+1}} \times \dots \times id_{S_k} \times id_{\mathbb{C}^{\tau - \Sigma \tau_i}}$$

où $F_i : X_i \longrightarrow S_i$ est la déformation semi-universelle de $(X_{s'}, x_i(s'))$ $((S_i,s) \simeq (\mathbb{C}^{\tau_i},0)$.

2.2. Soit $F_U : (X_U, x_U) \longrightarrow (S_U, s_U)$ déformation semi-universelle d'une hypersurface à singularité isolée (X_o, x_o). Alors le lieu critique (ou lieu de non-lissité) C de F est un sous-espace analytique lisse de X, et $\dim_x C = \tau_o - 1$ $(= \dim_s S - 1)$. En effet, avec les notations de l'exposé précédent (3.16) $C = X_U^{(2)}$. L'image directe est, d'après Grauert, un sous-espace analytique de S. C'est à la géométrie de D que nous allons nous intéresser.

2.3. D est une hypersurface réduite de S, analytiquement irréductible en S. En effet, D est sans composantes immérgées (puisque C est lisse et $F_U|C$ étant fini, $R^i(F_U|C)_* \mathcal{O}_C = (0)$ pour $i \geqslant 1$) et donc au pire $D = l \cdot D_{red}$ $(l \in \mathbb{N})$ où D_{red} est (par raison de dimension) une hypersurface réduite de S. Nous allons montrer que $l = 1$. Pour cela, considérons la strate de Boardman $\Sigma^{n+1,1}(F_U)$ où $n = \dim_{x_o} X_o$, et arrêtons-nous un moment pour écrire explicitement F_U. Soit $f(z_o,\dots,z_n) = 0$ une équation pour (X_o, x_o) dans $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Choisissons dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ des monômes pour (simplifier) $S_o = -1$, $S_1(\underline{z}),\dots,S_m(\underline{z})$ (où $m = \tau_o - 1$) dont les images modulo $(f(\underline{z}), \frac{\partial f}{\partial z_o}(\underline{z}),\dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\underline{z}))$ forment une base de

$$\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \Big/ \left(f(\underline{z}), \frac{\partial f}{\partial z_o}(\underline{z}),\dots, \frac{\partial f}{\partial_n}(\underline{z})\right) \cong T^1_{X_o, x_o}$$

. On peut décrire F_U comme le morphisme

$$F_U : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$$

où si $z_o,\dots,z_n$ sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^m$, et t_o la coordonnée sur $\mathbb{C}$.

2.3.1. $$\begin{cases} t_o \circ F_U = f(z_o,\dots,z_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i S_i(z_o,\dots,z_n) \\ t_i \circ F_U = t_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

Posons $f(\underline{z},\underline{t}) = f(z_o,\dots,z_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i s_i(z_o,\dots,z_n)$ d'après 3.14 de l'exposé I, $\Sigma^{n+1,1}(F_U)$ est l'ensemble des points de C où $\det(\frac{\partial^2 f(\underline{z},\underline{t})}{\partial z_i \partial z_j}) = 0$ c'est-à-dire l'ensemble des points de C où le hessien en $\underline{z}$ de $f(\underline{z},t)$ est nul. Ou encore, grâce à Morse, l'ensemble des points de C qui ne sont pas des points singuliers quadratiques ordinaires de leur fibre. Mais, d'après les formules de codimension de Boardman, $\dim \Sigma^{n+1,1}(F_U) < \dim C$ (on peut bien sûr le voir facilement à la main, mais nous devons essayer de préparer les généralisations). Ainsi, à l'extérieur d'un sous-espace analytique strict de C, les points de C sont des points quadratiques ordinaires de leur fibre. Mais d'après 2.1, pour nous assurer que $l = 1$, il suffit de le vérifier pour la déformation semi-universelle d'un point quadratique ordinaire, i.e. d'une singularité de la forme $\sum_{i=o}^{n} z_i^2 = 0$, et dans ce cas c'est évident.

L'irréductibilité de D en s vient de ce que D est l'image de C, qui est lisse, donc irréductible.

2.4. Il existe un sous-espace analytique fermé S de D, tel que $D - S$ soit dense dans D, et que F_U induise un isomorphisme $C - n^{-1}(S) \xrightarrow{\sim} D - S$ (on a noté $n = F_U|C$). Ceci résulte de 2.1 et 2.3. En effet, D étant réduite est lisse à l'extérieur de son lieu singulier S. Mais si au-dessus d'un point de $D - S$ il y avait plus d'un point de C, D ne saurait être lisse en ce point, en vertu de 2.1. (*)

2.5. $n : C \longrightarrow D$ est la normalisation de D. En effet, d'après 2.4 n est biméromorphe. D'autre part, n est fini et C étant lisse est normal. Cela suffit.

2.6. <u>Remarque</u>.- Le fait que le lieu critique C soit lisse est bien particulier au cas des hypersurfaces : considérons par exemple la déformation semi-universelle de la courbe de $\mathbb{C}^3(x,y,z)$ définie par $x^2 - y^2z = y^2 - z^3 = 0$. C'est le morphisme stable $F_U : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^9 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^9$ (coordonnées x,y,z sur $\mathbb{C}^3$, t_o, v_o sur $\mathbb{C}^2$, t_1, $t_2,\dots,t_5$, $u_1,\dots,u_4$ sur $\mathbb{C}^q$) donné par :

$$t_o \circ F_U = x^2 - y^2z + t_1z + t_2z^2 + t_3y + t_4yz + t_5yz^2$$
$$u_o \circ F_U = y^2 - z^3 + u_1z + u_2z^2 + u_3x + u_4x^2$$
$$t_i \circ F_U = t_i \quad , \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5$$
$$u_j \circ F_U = U_j \quad , \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4$$

et il est facile de voir que le lieu critique n'est pas lisse : il a pour équations :

$$0 = 4xy - t_3u_3 + 3e \text{ ordre}$$
$$0 = 2xu_1 - t_1u_3 + 3e \text{ ordre}$$
$$0 = t_3u_1 - 2t_1y + 3e \text{ ordre.}$$

Mais en général, C provenant de variétés déterminantielles dans l'espaces de jets, dans le cas des déformations semi-universelles de singularités isolées d'intersection complète, C sera Cohen-Macaulay, normal, et normalisation de son image.

2.7. La multiplicité de D en s est

$$\mathfrak{m}_s(D) = \mu_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right) .$$

<u>Démonstration</u> (Pham [16]).

On applique la formule de projection qui nous dit exactement que $\mathfrak{m}_s(D)$ est la multiplicité de l'idéal $(f, \frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n})$ dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$. Mais l'on dispose d'un critère valuatif de dépendance intégrale (voir par

exemple [12] ou [17]) qui nous dit que pour vérifier que f est entier sur l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$, il suffit de vérifier que pour tout morphisme $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ où $\mathbb{D}$ est le disque unité, tel que $h(0) = 0$, on a $\nu_o(f \circ h) \geqslant \min(\nu_o(\frac{\partial f}{\partial z_i} \circ h))$, or ce dernier point est clair ; si t est une coordonnée locale de $\mathbb{D}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ h) = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ h) \frac{(z_i \circ h)}{\partial t}$$

d'où

$$\nu_o(f \circ h) - 1 \geqslant \min(\nu_o(\frac{\partial h}{\partial z_i} \circ h) - 1 \quad .$$

Ainsi, l'idéal $(f, \frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n})$ a même fermeture intégrale dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ que l'idéal $(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n})$. Un théorème de Samuel nous dit qu'alors ces deux idéaux ont même multiplicité (ceci résulte de la caractérisation asymptotique de la relation de dépendance intégrale, que l'on peut trouver par exemple dans [12]), et un autre théorème de Samuel nous dit que puisque $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$ est une intersection complète dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$, sa multiplicité est exactement $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$. Q.E.D.

2.8. <u>Remarque</u>.- Le résultat 2.7 se visualise ainsi : Morse nous apprend qu'une petite déformation "générique" d'une application $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ aura $\mu_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$ points critiques quadratiques à valeurs critiques distinctes cf. [13]. Une telle déformation revient à restreindre F_U au-dessus de l'image réciproque d'une droite "générique" de S (ne passant pas par l'origine). Les valeurs critiques de l'application seront les points d'intersection de cette droite avec D. Or, une droite "générique" de S va couper D en $\mathcal{M}_s(D)$ points lisses de D, et nous avons vu en 2.3 et 2.4 que la fibre de F_U au-dessus d'un point lisse de D avait une (et

une seule) singularité quadratique. D'où $\mathfrak{M}_S(D) = \mu_o$.

2.9. <u>Remarque</u>.- On trouve dans Milnor [13] (**) le fait que μ_o est un invariant du type topologique de l'hypersurface. μ_o est le "nombre de cycles évanouissants" c'est-à-dire que si nous prenons une boule ouverte B_ε de rayon suffisamment petit de centre l'origine dans $\mathbb{C}^{m+1}$, et si nous désignons par X_t l'intersection de l'hypersurface définie par $f(z_o,\dots,z_n) = t$, pour t suffisamment petit et non nul, avec B_ε , X_t est non singulière, et l'on a $\dim_{\mathbb{C}} H_n(X_t) = \mu_o$ (cf. [9] et [13]).

2.10. Prenons sur $S \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ les coordonnées $(t_o, t_1,\dots,t_m)$ (cf. 2.3) et posons $T_o^{\mu_o} = in_o(t_o)$. Le cône tangent à D en 0 est l'hyperplan multiple défini par $T_o^{\mu_o} = 0$. Dans $gr_o\mathbb{C}\{t_o, t_1,\dots,t_m\} = \mathbb{C}[T_o, T_1,\dots,T_m]$.

En effet, $|C_{D,0}|$, (ensemble sous-jacent à $C_{D,0}$) , doit être contenu dans l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C . Mais, si nous prenons un point $c' \in C$ notant $s' = n(c)$, si s' a pour coordonnées $\bar{t}_o, \bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n$, l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C , en c , est l'hyperplan d'équation $T_o - \bar{t}_o = \sum_{i=1}^{m} S_i(\bar{z}_o,\dots,\bar{z}_n)(T_i - \bar{t}_i)$ (c' a pour coordonnées $\bar{z}_o,\dots,\bar{z}_n$, $\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_n$) . Or, $S_i(0,\dots,0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Puisque $C_{D,0}$ est de dimension $\mathfrak{M}$, on a certainement que $|C_{D,0}|$ est l'hyperplan $T_o = 0$. Mais $C_{D,0}$ doit être une hypersurface de $T_{S,S}$ de multiplicité μ_o . Q.E.D.

COROLLAIRE 2.11.- En un point quelconque $s' \in D$, $C_{D,s'}$ est la réunion de k hyperplans, où k est le nombre d'éléments de $n^{-1}(s')$, chaque hyperplan correspond à un point $x_i(s') \in n^{-1}(s')$, et est compté avec la

multiplicité $\mu_i = \mu_{x_i(s')}(X_{s'})$ - (on note $\mu_o = \mu_{x_o}(X_o)$) . Il suffit d'appliquer la remarque 2.1.

2.12. Signalons également qu'on lit sur la formule explicite pour l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C , donnée en 2.10, que pour $s' \in D$, $C_{D,s'}$ est comme réunion d'hyperplans, l'ensemble des positions limites des cônes tangents aux points de D voisins de s' . En particulier, $|C_{D,s'}|$ est l'ensemble des positions limites des hyperplans tangents à D en des points lisses de D voisins de s' . Nous laissons le lecteur donner une formulation précise de ce fait, que nous n'utiliserons pas ici.

DEFINITION (Hironaka) 2.13.- <u>Soit</u> C <u>un cône algébrique de</u> $\mathbb{C}^{m+1}$. <u>On appelle espace tangent strict, ou faîte de</u> C , <u>le sous-espace vectoriel de</u> C : $T_{C,0} = \{ v \in \mathbb{C}^{m+1} / C + v = C \}$. (Remarquer que ceci veut dire que la translation par v induit un automorphisme de C comme sous-espace de $\mathbb{C}^{m+1}$, i.e. avec tous ses nilpotents, composantes immergées, etc...).

DEFINITION 2.14.- <u>Soit</u> X <u>un espace analytique</u>. <u>On appelle espace tangent strict de</u> X <u>ou</u> $x \in X$ <u>le faîte</u> $T_{X,x}$ <u>de</u> $C_{X,x}$. ($T_{X,x} \subset E_{X,x}$, espace tangent de Zariski à X en x et on a égalité si et seulement si X est lisse en x).

2.15. <u>Remarque</u>.- Soit $s' \in D$. Soit k le nombre d'éléments de $n^{-1}(s')$. On a $\dim T_{D,s'} = m + 1 - k$.

Ceci résulte immédiatement de 2.11, puisqu'il est clair que le faîte

d'une réunion de k hyperplans, même multiples, est leur intersection.

2.16. Remarque.- Soit $s' \in D$. Soient $x_i(s')$, $1 \leq i \leq k$ les points de $n^{-1}(s')$. On a l'égalité

$$m_{s'}(D) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) .$$

Ceci résulte immédiatement de 2.1 et 2.7.

§ 3. Le nombre μ de Milnor et le type topologique.

Nous avons dit en 2.9 que $\mu_{x_o}(X_o)$ était un invariant du type topologique de la singularité isolée d'hypersurface (X_o, x_o). Mais bien mieux, on a le résultat suivant, qui fut conjecturé par Hironaka :

THEOREME (Hironaka, Lê Dung Trang, C.P. Ramanujam) voir [9] et [10]).- Soit $F : (X,s) \longrightarrow (S,s)$ un représentant suffisamment petit d'un germe de déformation d'hypersurface à singularité isolée (X_o, x_o), muni d'une section $\Sigma : (S,s) \longrightarrow (X,x)$ telle que $X - \Sigma(S)$ soit lisse sur S. On suppose que pour tout $s' \in S$, $\mu_{\Sigma(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o)$. Alors la déformation F est à type topologique constant.*

3.2. Remarque.- Les démonstrations connues sont topologiques et utilisent la lissité de la base S. On se ramène cependant au cas où S est lisse par résolution locale des singularités de (S,s) (***) ([7]) puisque si les fibres après un changement de base résolvant (S,s) ont toutes même type topologique, c'était sûrement vrai pour la famille donnée, grâce à la surjectivité des morphismes résolvants.

---

* Pour le moment, il faut supposer $\dim_{x_o} X_o \neq 2$.

3.3. Remarque.- Si l'on prend une singularité isolée d'hypersurface, $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, la section par un hyperplan générique de $\mathbb{C}^{n+1}$ fournit une nouvelle hypersurface à singularité isolée, dont le nombre de Milnor $\mu^{(1)}$ ne dépend pas de l'hyperplan générique choisi. On peut continuer et associer à (X_o,x_o) la suite

$$\mu^{(o)}_{x_o}(X_o) = \mu_{x_o}(X_o) \quad , \mu^{(1)}_{x_o}(X_o),\ldots, \mu^{(n)}_{x_o}(X_o)$$

où $\mu^{(j)}_{x_o}(X_o)$ est le nombre μ de Milnor de la section de (X_o , x_o) par un hyperplan de codimension j générique.

(Noter que $\mu^{(n)}_{x_o}(X_o) = \mathfrak{M}_{x_o}(X_o) - 1$) . Le narrateur publiera prochainement [20] une démonstration algébrique du résultat suivant :

THEOREME 3.4.- Si dans la situation du théorème 3.1, on suppose S lisse, et que pour tout $s' \in S$, $\mu^{(j)}_{\Sigma(s')}(X_{s'}) = \mu^{(j)}_{x_o}(X_o)$, $0 \leqslant j \leq n$, alors $(X - \Sigma(S) , \Sigma(S))$ satisfait les conditions a) et b) de Whitney en tout point de $\Sigma(S)$.

Ceci implique que $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ est topologiquement triviale d'après un théorème de Thom-Mather. Le fait qu'il suffise de vérifier l'égalité pour $j = 0$ correspond à une "vérité" concernant la géométrie des lieux discriminants de déformations semi-universelles, que l'on trouvera au même endroit.

3.5. Nous allons maintenant à la recherche, dans la base S_U , d'un représentant suffisamment petit de la déformation semi-universelle $F_U : (X_U,x_U) \to (S_U,s_U)$ de notre hypersurface (X_o,x_o) , des points $s' \in S_U$ tels que la fibre $X_{s'}$ ait un point singulier $x(s')$ tel que $(X_{s'},x(s'))$ ait même type topologique

que (X_o,x_o) . Remarquons tout d'abord qu'un tel point $x(s')$ s'il existe, est le seul point singulier de $X_{s'}$.

En effet, la semi-continuité de la multiplicité (qui résulte de la semi-continuité de la fonction de Samuel, cf. n° 3.8 de l'exposé précédent) nous dit que pour tout $s' \in S_U$, $\mathfrak{M}_{s'}(D) \leqslant \mathfrak{M}_s(D)$. Mais d'après 2.9, le nombre μ de Milnor étant un invariant topologique, on doit avoir

$$\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o)$$

et d'après 2.1,

$$\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mathfrak{M}_{s'}(D) \quad .$$

D'après 2.16 (et le fait évident que $\mu_x(X) \geqslant 1$ si et seulement si x est un point singulier de X), si $X_{s'}$ avait un autre point singulier que $x(s')$, on aurait $\mathfrak{M}_{s'}(D) > \mu_o$ - contradiction.

3.6. Soit $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ une petite déformation à type topologique constant de (X_o,x_o) . Puisque le nombre μ de Milnor est un invariant du type topologique, il résulte de 2.1 que dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} (X,x) & \longrightarrow & (X_U,x_U) \\ F \big\downarrow & & \big\downarrow F_U \\ (S,s) & \longrightarrow & (S_U,s_U) \end{array}$$

dû à la semi-universalité de F_U , l'image de S devra être contenue dans l'ensemble des points de multiplicité $\mu_o = \mu_{x_o}(X_o)$ de $D \subset S_U$. Mais ceci n'est autre que la strate de Samuel de s_U dans D (cf. 3.8 et 3.6 de l'exposé précédent), que nous noterons D_o . D'après 3.8 de l'exposé précédent, pour un représentant suffisamment petit de F_U , D_o sera un

sous-espace analytique fermé de D, donc de S_U. Si nous savions démontrer qu'au-dessus d'un point $s' \in D_o$ il y a un seul point de C, disons $x(s')$, on devrait certainement avoir, d'après 2.16 $\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mu_o = \mu_x(X_o)$, et d'après le théorème 3.1 la déformation obtenue par changement de base

$$\begin{array}{ccc} (X_{D_o}, x_U) & \hookrightarrow & (X_U, x_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D_o, S_U) & \hookrightarrow & (S_U, s_U) \end{array}$$

serait "à type topologique constant", et clairement semi-universelle pour cette propriété. Malheureusement, ce que nous savons jusqu'à maintenant ne permet pas de montrer cela. En effet, il se peut très bien a priori qu'étant donné $s' \in D_o$, la fibre $X_{s'}$ ait k points singuliers $x_i(s')$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) = \mu_o$. Cependant, nous allons montrer

PROPOSITION 3.7.- <u>L'ensemble</u> S_E <u>des points</u> $s' \in D_o$ <u>tels que</u> $X_{s'}$ <u>ait un seul point singulier est un sous-espace analytique fermé de</u> D_o.

<u>Démonstration</u>.

Remarquons que d'après 2.15 :

$$S_E = \{ s' \in D_o \,/\, \dim T_{D,s'} = m = \dim D \} .$$

On pourrait vérifier directement dans ce cas-ci, assez simple puisque D est une hypersurface, que cela fait de S_E un sous-espace analytique fermé de D_o. Nous allons cependant donner un argument valable pour n'importe quel espace analytique (remarquons en tous cas que l'argument ne marche que parce que nous avons déjà su nous restreindre à une strate de Samuel). Nous

allons en effet énoncer la

PROPOSITION 3.8.-(Lejeune-Teissier [11] et [12]).- Soient X un espace analytique, et Y un sous-espace analytique fermé de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Y est contenu dans une strate de Samuel de X.

b) Il existe un cône relatif $\mathcal{C}_Y \xrightarrow{p} Y$ plat, tel que pour tout $y \in Y$ on ait $p^{-1}(y) = C_{X,y}$.

Ceci signifie que les cônes tangents à X aux différents points de Y se recollent en une famille plate sur Y, si et seulement si Y est contenu dans une strate de Samuel de X.

Nous pouvons combiner ceci avec le

LEMME 3.9. (voir [12]).- Soit C un cône algébrique. Le faîte de C est la strate de Samuel du sommet de C (en caractéristique zéro)

pour obtenir

PROPOSITION 3.10.- Soient X un espace analytique, et Y un sous-espace analytique de X contenu dans une strate de Samuel de X. Il existe un espace vectoriel relatif $T \xrightarrow{\tau} Y$ tel que pour tout $y \in Y$ on ait $\tau^{-1}(y) = T_{X,y}$, espace tangent strict à X ou y.

Démonstration.

T n'est autre que l'unique strate de Samuel relative de $p : \mathcal{C}_Y \longrightarrow Y$ de 3.8 qui contient le sommet (i.e. l'image de la section canonique "sommet")

du cône relatif p (cf. [11]) . Mais par définition, la fibre d'une strate de Samuel relative est une strate de Samuel de la fibre, c'est-à-dire que $\mathcal{T}^{-1}(y)$ est la strate de Samuel du sommet de $p^{-1}(y) = C_{X,y}$, c'est-à-dire $T_{X,y}$ d'après 3.10.

COROLLAIRE 3.11.- <u>L'ensemble des points où</u> $\dim T_{X,y} \geqslant l$, <u>pour tout</u> l , <u>est un sous-espace analytique de</u> Y . (<u>Ceci n'est autre que la semi-continuité analytique supérieure de la dimension de la fibre d'un vectoriel relatif, cas particulier très simple de la semi-continuité de la fonction de Samuel, et par ailleurs bien connu</u>).

3.12. Le corollaire 3.11 nous montre que, pour un représentant suffisamment petit $F_U : (X_U, x_U) \longrightarrow (S_U, s_U)$, l'ensemble S_E des points de la strate de Samuel D_o de S_U dans D au-dessus desquels il y a un seul point de C est un sous-espace analytique fermé de D_o , donc de D , donc de S_U .

Il résulte de ce que nous avons dit en 3.6 que nous avons démontré le

THEOREME 3.13.- <u>Si nous regardons la déformation obtenue par changement de base par l'inclusion</u> $S_E \hookrightarrow S_U$

$$\begin{tikzcd}
(X_E, x_U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_E"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X_U, x_U) \arrow[d, "F_U"] \\
(S_E, s_U) \arrow[r, hook] & (S_U, s_U)
\end{tikzcd}$$

F_E est la déformation "à type topologique constant" semi-universelle de (X_o, x_o) .

3.14. Nous allons maintenant montrer l'existence d'une section analytique Σ_E de F_E qui pique l'unique point singulier de chaque fibre de F_E. Remarquons tout d'abord que cette question ne concerne que le morphisme $n : C \longrightarrow D$: il s'agit de construire $\Sigma_E : S_E \longrightarrow n^{-1}(S_E)$.

Ceci nous permet de supposer que notre germe d'hypersurface $(X_o, x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ est de multiplicité au moins 3, c'est-à-dire que s'il est défini par $f(z_o, \ldots, z_n) = 0$, on a $\tilde{f}(z_o, \ldots, z_n) \in (z_o, \ldots, z_n)^3$. En effet, un lemme classique ([14]) nous dit qu'au prix d'un changement de variables, on peut toujours supposer que

$$f(z_o, \ldots, z_n) = \sum_{i=o}^{p} z_i^2 + \tilde{f}(z_{p+1}, \ldots, z_n)$$

où :

$$f(z_{p+1}, \ldots, z_n) \in (z_{p+1}, \ldots, z_n)^3 .$$

Mais on constate immédiatement que le morphisme $n : C \longrightarrow D$ dans la déformation semi-universelle de l'hypersurface à singularité isolée déterminée par $\tilde{f}(z_{p+1}, \ldots, z_n) = 0$ est isomorphe à $\tilde{n} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{D}$. Nous supposerons donc dorénavant que $f(z_o, \ldots, z_n) \in (z_o, \ldots, z_n)^3$. Or dans ce cas, $z_o, \ldots, z_n$ sont linéairement indépendants modulo $(f, \frac{\partial f}{\partial z_o}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$. Nous pouvons donc choisir, dans 2.3.1, $S_1 = z_o, \ldots, S_{n+1} = z_n$.

D'autre part, il résulte de 2.7 et 2.10 que D est donné dans $(S_U, s_U) \approx (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ par une équation de la forme

3.14.1. $$t_o^{\mu_o} + a_{\mu_o - 1}(t_1, \ldots, t_m) t_o^{\mu_o - 1} + \ldots + a_o(t_1, \ldots, t_m) = 0$$

(grâce au théorème de préparation de Weierstrass)

avec $$a_{\mu_o - i}(t_1, \ldots, t_m) \in (t_1, \ldots, t_m)^{i+1} .$$

Or si W est l'hypersurface lisse de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ définie par

$$t_o + \frac{1}{\mu_o} a_{\mu_o - 1}(t_1, \ldots, t_m) = 0$$

d'une part, $D_o \subset W$ (en effet, en tout point de D_o, la $\mu_o - 1$ -ième dérivée partielle de 3.14.1 par rapport à t_o doit être nulle) ; et d'autre part, on doit avoir, en tout point $s' \in D_o$

3.14.2. $\quad T_{D,s'} \subsetneq T_{W,s'}$.

(ceci peut aussi se voir par un calcul simple, mais c'est un cas particulier d'un résultat général : dans la terminologie de [6] ou [12], W a le "contact maximal" avec D ou S_U, donc, d'après le théorème de continuité du contact maximal, ([6] ou [12]) aussi en tout point de D_o, et le contact maximal implique l'inclusion 3.14.2.

Mais si nous prenons $s' \in S_E$, on a $\dim T_{D,s'} = \mathfrak{M}$, et donc $T_{D,s'} = T_{W,s'}$. Si maintenant, l'unique point de C au-dessus de s' a pour coordonnées $\bar{z}_o, \ldots, \bar{z}_n, \bar{t}_o, \ldots, \bar{t}_m$, et il résulte de 2.10 que $T_{D,s'} = |C_{D,s'}|$ est donné par

$$T_o - \bar{t}_o = \bar{z}_o(T_1 - \bar{t}_1) + \ldots + \bar{z}_n(T_{n+1}) + \sum_{n+1}^{m} S_i(\bar{z}_o, \ldots, \bar{z}_n)(T_i - \bar{t}_i)$$

et d'autre part, $T_{W,s'}$ est donné par

$$T_o - t_o = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1} \frac{\partial a_{\mu - 1}}{\partial t_i}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m)(T_i - \bar{t}_i)$$

d'où les égalités

3.14.3. $\quad \bar{z}_i = \frac{1}{\mu} \frac{\partial a_{\mu - 1}}{\partial t_{i+1}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m) \quad , \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$

ce qui montre bien que l'unique point singulier de $X_{s'}$ au-dessus de $s' \in S_E$ est piqué par la section Σ_E donnée par 3.14.3.

Il est maintenant bien clair que toute déformation à type topologique constant, ou "à μ constant" au sens de 3.1, possède une section qui provient par changement de base de la "section universelle" Σ_E. Nous montrerons

ailleurs le lien entre ce résultat et le problème de la "déformation semi-universelle à section" posé par Hironaka [5] à propos de sa théorie du $(t - r)$-index ([5] et [6]).

§ 4. "Vérités" non démontrées.

Le premier problème qui se pose est celui de la lissité de S_E .

4.1. "Vérité" n° 1 : S_E est lisse.

Dans le cas où $\dim_{x_o} X_o = 1$, i.e. des courbes planes ceci (ainsi que l'existence de S_E , évidemment) a été démontré par J. Wahl (Berkeley) dans sa thèse [22] mais sa méthode ne lui permet pas de décrire explicitement S_E comme sous-espace de S_U , et ne se généralise pas en dimension supérieure à 1 .

4.2. "Vérité" n° 2 : $S_E = D_o$.

Ce qui revient à dire qu'au-dessus d'un point quelconque de D_o il y a un seul point de C , ou encore que D est irréductible en tout point de D_o , ou encore que $\dim T_{D,s'} = \dim D$ pour tout $s' \in D_o$, ou enfin : pour toute petite déformation $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ telle que, si pour $s' \in S$, $x_i(s')$ $1 \leqslant i \leqslant k$ sont les points singuliers de $X_{s'}$, on ait

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o) ,$$

on a $k = 1$ et la déformation F est à type topologique constant.

Cette vérité a pour corollaire (cf. [10]) :

"THEOREME" 4.3.- Soit $F : X \longrightarrow S$ un morphisme plat dont les fibres sont des hypersurfaces projectives à singularités isolées. On suppose que F est

localement cohomologiquement trivial c'est-à-dire que tout $s' \in S$ possède un voisinage U tel que $H^*(F^{-1}(U), \mathbb{Z}) \cong H^*(F^{-1}(s') \times U, \mathbb{Z})$. Alors F est localement topologiquement trivial, c'est-à-dire que tout $s' \in S$ possède un voisinage U', tel que l'on ait un homéomorphisme au-dessus de U' :

$$\begin{tikzcd} F^{-1}(s') \times U' \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & F^{-1}(U') \arrow[dl] \\ & U' \arrow[u, phantom, "\circ"] & \end{tikzcd}$$

La "vérité" n° 2 vient d'être démontrée par Cevdet Haş Bey dans le cas des courbes planes et par voie topologique ([3] et [4]).

La conjonction des deux premières vérités nous donne :

"Vérité" n° 3 : D_o est lisse, que l'on peut ausssi chercher à démontrer directement.

§ 5. Lien avec le problème de Pham.

Si nous reprenons l'exemple de Pham [15] exposé par Berthelot [1], du point de vue adopté ici, nous nous apercevons qu'il se laisse paraphraser ainsi : si (X_o, x_o) est la courbe plane d'équation $y^3 + x^9 = 0$, la strate de Samuel D_o du lieu discriminant D de la déformation semi-universelle de (X_o, x_o) est lisse de dimension 2 (c'est T^{**} dans les notations de [15]; T_1 dans [1]). Mais la stratification de Samuel de D ne vérifie pas la propriété de frontière. Il existe une strate de Samuel de D (T_2 dans les notations de [1]) telle que $T_1 \cap \overline{T}_2 \neq \emptyset$, mais $T_1 \not\subseteq \overline{T}_2$. Ainsi, si l'on prend

$s_1' \in T_1 - T_1 \cap \overline{T}_2$ et $s_2' \in T_1 \cap \overline{T}_2$, les fibres $X_{s_1'}$ et $X_{s_2'}$ auront même type topologique, mais certainement pas même type topologique universel. Mais on a le résultat suivant :

THEOREME 5.1. (Whitney [23]).- <u>Une partition localement finie</u> $X = \cup X_\alpha$ <u>en sous-espaces analytiques tels que</u> $\overline{X}_\alpha$ <u>et</u> $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ <u>soient des sous-espaces analytiques fermés, possède un raffinement qui vérifie la propriété de frontière, et est la moins fine possible pour cette propriété (parmi celles qui sont plus fines que la partition donnée)</u>.

Si nous notons T_o la strate de s dans D pour le raffinement de Whitney de la stratification de Samuel de D , nous voyons que nous ne pouvons plus appliquer la méthode de Pham pour trouver un contre-exemple au fait que les fibres de $F_U : (X_U, x_U) \longrightarrow (S_U, s_U)$ au-dessus des points de T_o ont toutes le même type topologique universel.

D'où

Conjecture 1 : T_o est lisse.

Conjecture 2 : T_o est la strate de s dans la stratification de Thom (i.e. par le type topologique universel) de F_U .

Question préliminaire : est-ce que les multiplicités jacobiennes critiques de Pham [16] sont constantes le long de T_o ?

(NOTES)

Page 17 (*) Remarque.- La même méthode permet de démontrer très facilement, grâce à 2.1, que pour toute strate de Boardman Σ^I de F_U, au-dessus de tout point d'un ouvert analytique partout dense de $F(\Sigma^I)$, il y a un seul point de Σ^I (et même de C) (sinon, on contredirait par 2.1 le fait que $F(\Sigma^I)$ doit être irréductible en tout point d'un ouvert analytique partout dense). Ainsi, $F_U|\Sigma^I : \Sigma^I \longrightarrow F(\Sigma^I)$ est biméromorphe (et c'est même le morphisme de normalisation de $F(\Sigma^I)$). La formule de projection des multiplicités donne alors immédiatement le théorème 4.3. de [1] (ou de Pham [16]). 2.1 est un résultat si géométrique et si utile qu'il mérite peut-être le nom de théorème.

Page 20 (**) "Entre les lignes" cf. "Singularités à Cargese" (à paraître).

Page 22 (***) Il faut cependant, bien sûr, supposer S réduit.

REFERENCES

[1] P. BERTHELOT - Exposés sur les travaux de Pham, Séminaire Douady-Verdier à l'E.N.S., publ. Secr. Math. E.N.S. 1972.

[2] H. GRAUERT - Deformationen isolierter singularitäten, Inventiones Math. Vol. 15, Fasc. 3 (1972).

[3] Cevdet HAS BEY - Irréductibilité de la monodromie locale, note aux C.R.A.S., 1972.

[4] Cevdet HAS BEY - Application à l'équisingularité, note aux C.R.A.S., 1972.

[5] H. HIRONAKA - Equivalence and deformations of isolated singularities, Woods Hole Seminar in Algebraic Geometry (1964).

[6] H. HIRONAKA - On the equivalence of singularities I, Arithmetical Algebraic Geometry, edited by O.F.G. Schilling Harper and Row, 1965.

[7] H. HIRONAKA - Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint. University of Warwick, 1971.

[8] LE DUNG TRANG - Singularités isolées des hypersurfaces complexes, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (1969).

[9] LE DUNG TRANG - Thèse, Paris VII, 1971.

[10] LE DUNG TRANG, C.P. RAMANUJAM, B. TEISSIER - Sur un critère d'équisingularité (à paraître).

[11] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint, University of Warwick, 1971.

[12] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Quelques calculs utiles pour la résolutions des singularités, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, (1972).

[13] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, (Princeton 1968).

[14] MEYER - GROMOLL - On differentiable functions with isolated critical points, Topology, Vol. 8 (1969).

[15] F. PHAM - Remarque sur l'équisingularité universelle, Université de Nice (1970).

[16] F. PHAM - Classification des singularités, Université de Nice (1971).

[17] P. SAMUEL, O. ZARISKI - Commutative Algebra, Vol. 2 (Van Nostrand).

[18] P. SAMUEL - Algèbre locale, Mémorial des Sciences Math., Fasc. CXXIII (1953).

[19] SCHLESSINGER - Thèse, Havard 1965.

[20] B. TEISSIER - Déformations à type topologique constant III, à paraître au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[21] G.N. TJURINA - Locally semi universal flat deformations... , Math. of the USSR Isvestija, Vol. 3, n° 5 , pp. 967-999 (1969).

[22] J. WAHL - "Deformations of branched covers and equisingularity", Thesis, Havard 1971.

[23] WHITNEY - Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. (1965), t. 81, n° 3 , pp. 496-549.

C H A P I T R E II

CYCLES EVANOUISSANTS, PLIS EVANOUISSANTS, ET CONDITIONS DE WHITNEY

"Θέσις δέ ἐστιν ὑπόληψις...."

d'après Aristote (Τοπικων α')

0. INTRODUCTION

Nous présentons ici un nouvel aspect du dictionnaire, esquissé dans [3] et [4], qui relie les propriétés topologiques des petites déformations d'un germe d'hypersurface à singularité isolée aux propriétés géométriques des lieux discriminants de morphismes stables dont la fibre est une hypersurface . Le but principal de ce travail est d'interpréter l'obstruction à ce qu'une petite déformation à base lisse, par exemple, satisfasse les conditions de Whitney le long de son lieu singulier, en termes de cycles et plis évanouissants. En particulier, nous donnons une condition numérique qui assure les conditions de Whitney,♦ et nous présentons une conjecture, de nature purement algébrique, sur les lieux discriminants mentionnés plus haut, conjecture dont la véracité permettrait de répondre à de nombreuses questions concernant les "petites déformations à type topologique constant" au sens de [3] et [4].

I.1 <u>Théorème 1</u> : Soit $f \in \mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{C}\{z_0,\dots,z_n\}$ une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_0,x_0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$. Posons

$$\mathcal{O}_{X_0,x_0} = \mathcal{O}_{n+1}/(f) \;;\quad j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{X_0,x_0} \;;\quad \mathfrak{M} = (z_0,\dots,z_n)\mathcal{O}_{X_0,x_0}\,.$$

Considérons l'application $K_{X_0,x_0} : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$K(r,s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_0,x_0} \Big/ \mathfrak{M}^r . j(f)^s \quad .$$

Il existe r_0 et s_0 tels que pour $r \geq r_0$, $s \geq s_0$, $K(r,s)$ prenne les mêmes valeurs qu'un polynôme en r et s de degré n, dont les termes de plus haut degré peuvent s'écrire :

♦ Voir théorème 3 + théorème 4.

$$\overline{K}_{X_o,x_o}(r,s) = \mu^{(o)}\frac{s^n}{n!} + \dots + \mu^{(i)}\frac{s^{n-i}r^i}{(n-i)!\,i!} + \dots + \mu^{(n)}\frac{r^n}{n!}$$

où $\mu^{(i)}$ $(=\mu^{(i)}_{x_o}(X_o))$ est le nombre de Milnor $\mu_{x_o}(X_o \cap H^{(i)})$ de l'intersection de (X_o,x_o) avec un plan de codimension i suffisamment général, c'est-à-dire appartenant à un ouvert analytique dense de la grassmannienne $G^{(i)}$ des plans de codimension i de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par l'origine $(\mu^{(i)} = \inf_{H^{(i)}\in G^{(i)}} \mu_{x_o}(X_o \cap H^{(i)}))$.

I.2 <u>Remarque</u> : En particulier, $\mu^{(o)}$ n'est autre que le nombre de Milnor $\mu_{x_o}(X_o)$ de (X_o,x_o), et $\mu^{(n)}_{x_o}(X_o) = \mathfrak{M}_{x_o}(X_o) - 1$, où $\mathfrak{M}_{x_o}(X_o)$ désigne la multiplicité en x_o de X_o (c'est-à-dire, l'ordre de f à l'origine). (Ces derniers faits avaient été montrés par J. J. Risler).

I.3 <u>Théorème 2</u> : Soit $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ un représentant d'un germe de déformation de (X_o,x_o). On suppose que F satisfait les conditions suivantes :

$$(E_\mu)\quad \begin{cases} 1) & S \text{ est réduit ;} \\ 2) & \text{pour tout } s' \in S, \text{ la fibre } F^{-1}(s') = X_{s'} \text{ possède un point} \\ & x(s') \text{ tel que } \mu_{x(s')} X_{s'} = \mu_{x_o}(X_o) \ . \end{cases}$$

Si l'on suppose que (X_o,x_o) a vraiment une singularité, hypothèse que nous ferons dorénavant, ceci entraîne que $x(s')$ est effectivement un point singulier de $X_{s'}$. Le théorème est : $x(s')$ est alors l'unique point singulier de $X_{s'}$ (quitte à rétrécir X et S, i.e. à prendre un représentant plus petit du germe de déformation qui nous intéresse), et il existe une section $\sigma : S \longrightarrow X$ de F telle que $\sigma(s') = x(s')$. En particulier $X - \sigma(S)$ est lisse sur S, ainsi que $\sigma(S)$ (cf. [4]) (et $\mu_{\sigma(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o)$ pour tout $s' \in S$).

I.4 <u>Théorème 3</u> : Soit $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ un représentant de germe de déformation satisfaisant les conclusions du théorème précédent, avec S réduit. Pour un plongement local au voisinage de x :

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & (S\times\mathbb{C}^{n+1}, s\times 0) \arrow[d, "pr_1"] \\ & (S,s) \end{tikzcd}$$

défini par une équation $G\in\mathcal{O}_{S,s}\{z_0,\dots,z_n\}$ (plongement qui existe pour un représentant suffisamment petit, puisque F est plat), on définit l'Idéal jacobien relatif $\mathfrak{J}(G)=\left(\frac{\partial G}{\partial z_0},\dots,\frac{\partial G}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_X$. Soit d'autre part $\mathfrak{I}$ l'Idéal définissant $\sigma(S)$ dans X. Si $\overline{K}_{X_{s'},\sigma(s')}$ ne dépend pas de $s'\in S$, dans la modification $\omega : X'\longrightarrow X$ définie par l'Idéal produit $\mathfrak{I}.\mathfrak{J}(G)$, on a : $\dim\omega^{-1}(x)=n-1$.
(et en fait cette condition ne dépend pas du plongement $X\rightarrow S\times\mathbb{C}^{n+1}$ choisi).

I.5 <u>Théorème 4</u> (Hironaka, cf. [2]. Nous utilisons ici une forme démontrée par Canuto et Speder dans [1]) :

Si, avec les hypothèses du théorème 3, nous supposons de plus S lisse, la conclusion du théorème 3 implique que $(X-\sigma(S),\sigma(S))$ satisfait les conditions a) et b) de Whitney en tout point d'un voisinage de x dans $\sigma(S)$.

I.6 Ainsi, si nous parvenons à montrer que dans la situation de la conclusion du théorème 2, la constance de $\mu_{\sigma(s')}(X_{s'})$ entraîne celle de tous les $\mu^{(i)}_{\sigma(s')}(X_{s'})$ $(1\leq i\leq m)$, c'est-à-dire celle de $\overline{K}_{X_{s'},\sigma(s')}$, nous avons montré que la constance du nombre des cycles évanouissants $\mu_{\sigma(s')}(X_{s'})$ entraîne, (si S est lisse) que la déformation satisfait les conditions de Whitney le long de son lieu critique $\sigma(S)$. Comme nous l'avons déjà remarqué, $\mu_{\sigma(s')}X_{s'}$ étant un invariant du type topologique au sens de [4], ceci impliquera en particulier qu'une déformation dans laquelle le type topologique des fibres est constant satisfait les conditions de Whitney le long de son lieu critique. Ceci impliquera d'autre part que les $\mu^{(i)}_{x_0}(X_0)$ sont des invariants du type topologique dans une petite déformation.

Zariski a demandé, d'autre part, (cf. [6]), si la multiplicité $\mathfrak{M}_{x_0}(X_0)$ était un invariant du type topologique de (X_0, x_0). Ce qui précède nous suggère la généralisation suivante :

<u>Conjecture 1</u> : Tous les $\mu^{(i)}_{x_0}(X_0)$ $0 \leq i \leq \dim_{x_0} X_0$ sont des invariants du type topologique de (X_0, x_0) (et nous savons que c'est vrai pour $i = 0$). La conjecture est vraie pour $\dim_{x_0} X_0 = 1$ puisque l'on sait dans ce cas que la multiplicité est un invariant du type topologique.

II.1 Ce qui suit est un programme pour montrer l'assertion énoncée en I.6. C'est-à-dire, en notant $(E_{\overline{K}})$ la condition analogue à (E_μ) obtenue en remplaçant le nombre de Milnor par le polynôme $\overline{K}_{X_0, x_0}$, pour montrer l'implication $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$. Nous allons formuler une conjecture ne portant que sur la géométrie des lieux discriminants de morphismes stables, et qui entraîne que $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$. Dans ce qui suit, on se restreindra au cas où $S = \mathbb{D}$, disque unité du plan complexe. Remarquons que pour montrer que $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$ il nous suffit de montrer que $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\mu^{(1)}})$ + le fait qu'il existe une section hyperplane de la famille (i.e. de l'espace total) X, disons $H \cap X$, telle que $\sigma(\mathbb{D}) \subset H \cap X$, et que

$$\mu_{\sigma(t)}(H_t \cap X_t) = \mu^{(1)}_{\sigma(t)} X_t \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{D}$$

$$\mu_{x_0}(H_0 \cap X_0) = \mu^{(1)}_{x_0}(X_0) \qquad (x_0 = \sigma(0)) .$$

En effet, on aura alors une déformation $H \cap X \to \mathbb{D}$ de $(X_0 \cap H_0, x_0)$ satisfaisant (E_μ), et l'on pourra recommencer pour montrer que $\mu^{(2)}_{\sigma(t)} X_t$ est constant, etc ....

II.2 <u>Remarque</u> : Si $(X_0, x_0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ est un germe d'hypersurface à singularité isolée, pour un hyperplan "assez général" H de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par l'origine, $(X_0 \cap H, x_0)$ est encore une hypersurface (de H) à singularité isolée. Nous pouvons choisir les coordonnées locales $(z_0, \ldots, z_n)$ sur

$\mathbb{C}^{n+1}$ de telle façon que H ait pour équation $z_o = 0$, et le développement d'une équation $f = 0$ pour (X_o, x_o)

$$f(z_o, z_1, \dots, z_n) = f(0, z_1, \dots, z_n) + \frac{z_o}{1!} \frac{\partial f}{\partial z_o}(0, z_1, \dots, z_n) + \dots$$
$$+ \frac{z_o^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z_o^k}(0, z_1, \dots, z_n) + \dots$$

nous montre que nous pouvons considérer (X_o, x_o) comme une déformation de $(X_o \cap H, x_o)$ paramétrée par z_o, c'est-à-dire que nous avons un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
(X_o \cap H, x_o) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X_o, x_o) \arrow[d, "f_H"] \\
\{0\} \arrow[r] & (\mathbb{D}, 0)
\end{tikzcd}$$

où f_H est plat.
Mais puisque nous avons choisi H tel que $(X_o \cap H, x_o)$ soit à singularité isolée, un tel diagramme provient de la déformation semi-universelle de $(X_o \cap H, x_o)$:

$$\begin{tikzcd}
(X_o \cap H, x_o) \arrow[r] \arrow[d] & (X_o, x_o) \arrow[r] \arrow[d, "f_H"] & (X_U(H), x_U) \arrow[d, "F_U(H)"] \\
\{0\} \arrow[r] & (\mathbb{D}, 0) \arrow[r, "h_o"] & (S_U(H), s_U)
\end{tikzcd}$$

En fait, la situation est décrite par h_o, qui nous décrit comment (X_o, x_o) est formée à partir de $(X_o \cap H, x_o)$. Remarquons que puisque (X_o, x_o) est à singularité isolée, $h_o(\mathbb{D})$ n'est pas contenu dans le lieu discrimant $D_U(H)$ de $F_U(H)$ (cf. [4] pour ce lieu discriminant). Ceci revient à dire que le discriminant de f_H est ensemblistement réduit à $\{0\} \in \mathbb{D}$. Le lieu discriminant de f_H n'est autre que l'image réciproque

de $D_U(H)$ par h_o. Si $\Delta = 0$ est une équation pour $D_U(H)$ dans $S_U(H)$, la multiplicité avec laquelle est comptée l'origine de $\mathbb{D}$ comme lieu discriminant de f_k est l'ordre en z de $\Delta \circ h_o \in \mathbb{C}\{z\} = \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$. Nous noterons cet ordre $(h_o \cdot D_U(H))_o$ ("nombre d'intersection" de h_o avec $D_U(H)$ en l'origine 0 (ou $\mathcal{J}_U$; quand cette notation sera commode) de $s_U(H)$).
Le fait que h_o nous décrit la morphogénèse de (X_o, x_o) à partir de $(X_o \cap H, x_o)$ est manifesté par le :

II.5 <u>Théorème 5</u> : On a l'égalité :

$$\mu_{x_o}(X_o) = (h_o \cdot D_U(H))_o - \mu_{x_o}(X_o \cap H) .$$

(rappelons que $\mu_{x_o}(X_o \cap H)$ n'est autre que la multiplicité de $D_U(H)$ à l'origine de S_U [4]). Le nombre de Milnor apparaît ici comme un "gain de multiplicité".

II.4 <u>Remarque</u> : De notre point de vue, un germe de courbe plane est construit à partir d'une singularité $y^m = 0$. C'est ce qu'écrit le théorème de préparation de Weierstrass. Si nous choisissons des coordonnées (x,y) dans $\mathbb{C}^2$ de telle sorte que l'axe des y ne soit pas contenu dans la courbe $(X_o, x_o) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, nous pouvons écrire une équation de notre courbe (après transformation pour éliminer le terme en y^{m-1}) :

$$f(x,y) = y^m + a_{n-2}(x)\, y^{m-2} + \ldots + a_o(x) = 0$$

et les $a_i(x)$ nous décrivent précisément un morphisme $h_o : \mathbb{D} \longrightarrow S_{m-1}$, S_{m-1} étant la base de la déformation semi-universelle de la singularité $y^m = 0$.
Le théorème 5, dans le cas des courbes planes, se ramène à une formule bien connue des géomètres italiens

$$\Delta = \mu + m - 1 \qquad (\mu = \mu_{x_o}(X_o))$$

où Δ est l'ordre en x du discriminant par rapport à y de $f(x,y)$. (Si l'axe des y n'est pas contenu dans le cône tangent à la courbe, m est

la multiplicité de (X_o, x_o)).

II.5 <u>Remarque</u> : Nous pouvons choisir des coordonnées locales $u_o, \ldots, u_{m_1}$ sur $S_U(H)$, de telle façon que le cône tangent à $D_U(H)$ à l'origine ait pour équation

$$U_o^{\mu_{x_o}(X_o \cap H)} = 0 \quad \text{où} \quad U_o = \mathrm{in}_o\, u_o \quad (\text{cf. } [4]) \quad .$$

D'autre part, un "chemin" $h_o : \mathbb{D} \longrightarrow S_U(H)$ est décrit par $m_1 + 1$ fonctions holomorphes à l'origine : $u_k = u_k(z) \quad 0 \leq k \leq m_1$.

II.5.1 <u>Définition</u> : Nous dirons que h_o est transverse à $D_U(H)$ si le cône tangent à l'image de h_o n'est pas contenu dans $U_o = 0$. C'est-à-dire, ν_o désignant l'ordre en z, si l'on a :

$$\nu_o(u_o(z)) = \nu_o(h_o) \overset{\text{def.}}{=} \min_{0 \leq k \leq m_1} \nu_o(u_k(z)) \quad .$$

Remarquons que si nous présentons une courbe plane comme en II.4, il est facile de vérifier que h_o est transverse au lieu discriminant $D_{m-1} \subset S_{m-1}$ si et seulement si, au prix d'un changement de coordonnées, la courbe peut avoir comme équation :

$$y^m - x^k = 0 \ .$$

II.6 <u>Remarque</u> : Si h_o est transverse à $D_U(H)$,

$$(h_o \circ D_U(H))_o = \nu_o(h_o) \cdot \mathfrak{M}_o(D_U(H))$$

et réciproquement.

II.6.1 <u>Définition</u> : Nous dirons que h_o est lisse si $\nu_o(h_o) = 1$.
Remarquons que h_o est lisse et transverse à $D_U(H)$ si et seulement si $(h_o \circ D_U(H))_o = \mu_{x_o}(X_o \cap H)$, c'est-à-dire si $\mu_{x_o}(X_o) = 0$. Mais dans ce cas X_o est non singulier en x_o , cas que nous avons exclu.

II.7 <u>Remarque</u> : Nous aurions pu considérer (X_o, x_o) comme déformation du $y^m = 0$ grâce au théorème de préparation de Weierstrass, c'est-à-dire considérer (X_o, x_o) comme donné dans un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} (X_o, x_o) \arrow[r] \arrow[d, "p"] & (X_{m-1}, 0) \arrow[d] \\ (\mathbb{C}^n, 0) \arrow[r, "h_o"] & (S_{m-1}, 0) \end{tikzcd}$$

(notations de II.4). Nous aurions gagné en simplicité du côté du but, mais perdu la vision de h_o comme "chemin". Nous avons préféré garder une source de dimension 1 au prix d'une complication du but, comme cela nous était suggéré par les résultats de I. On peut cependant, concernant le point de vue effleuré ici, mentionner l'outil numérique suivant : si Δ désigne la multiplicité à l'origine du lieu discriminant de p, on a l'égalité

$$\Delta = \mu_{x_o}^{(n-1)}(X_o) + \mu_{x_o}^{(n)}(X_o)$$

pourvu que la projection p soit "assez générale" et en particulier transverse, c'est-à-dire que $m = \mathfrak{M}_{x_o}(X_o)$. (Ceci se déduit de II.3 en considérant une droite "suffisamment générale" de $\mathbb{C}^n$ passant par l'origine).

III.1 <u>Définition</u> : Soit $h_o : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (S, 0)$ un morphisme analytique, où S est lisse. Dans des coordonnées locales $u_o, u_1, \ldots, u_m$ pour S, h_o est donné par m+1 fonctions holomorphes $u_i = u_i(z)$ $(0 \leq i \leq m)$. Nous appellerons déformation de h_o tout morphisme $h : (\mathbb{D} \times \mathbb{D}, 0) \longrightarrow (S, 0)$ donné par des fonctions holomorphes de deux variables (z et le paramètre de déformation t)

$$u_i = u_i(z) + \eta_i(z,t) \quad 0 \leq i \leq m \qquad \text{avec} \quad \eta_i(z,0) \equiv 0 \quad 0 \leq i \leq m \quad .$$

La clé de l'application des considérations précédentes au problème qui

nous intéresse est le :

III.2 <u>Théorème 6</u> : Soient $(X_o, x_o) \subset \mathbb{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée, et H_o un hyperplan de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ tel que $(H_o \cap X_o, x_o) \subseteq (H_o, 0)$ soit une hypersurface à singularité isolée. Soit $h_o : \mathbb{D} \to (S_U(H_o)$ un chemin tel que

$$\begin{tikzcd}
(X_o, x_o) \arrow[r] \arrow[d] & X_U(H_o) \arrow[d, "F_U(H_o)"] \\
\mathbb{D} \arrow[r, "h_o"] & S_U(H_o)
\end{tikzcd}$$

soit cartésien, où $F_U(H_o)$ est la déformation semi-universelle de $(X_o \cap H_o, x_o)$. Toute déformation de base $\mathbb{D}$ $F : (X, x) \longrightarrow (\mathbb{D}, 0)$ de (X_o, x_o) est représentée, à isomorphisme de déformation près, par une déformation de h_o. C'est-à-dire qu'il existe une déformation $h : (\mathbb{D} \times \mathbb{D}, 0) \longrightarrow (S_U(H_o), 0)$ de h_o telle que $F : (X, x) \longrightarrow (\mathbb{D}, 0)$ se factorise :

$$\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "F"'] & & (X_U(H_o), 0) \arrow[d, "F_U(H_o)"] \\
& (\mathbb{D} \times \mathbb{D}, 0) \arrow[r, "h"] \arrow[dl, "pr_2"] & (S_U(H_o), 0) \\
(\mathbb{D}, 0) & &
\end{tikzcd}$$

où le diagramme de droite est cartésien, $(\varphi^{-1}(\mathbb{D} \times 0), x) \simeq (X_o, x_o)$ et $(\varphi^{-1}(0), x) \simeq (X_o \cap H_o, x_o)$.

IV.1 Le résultat précédent nous permet de ramener l'étude des petites déformations de base $\mathbb{D}$ de (X_o, x_o) à celle des déformations de h_o.

IV.2 Soit $(D,0) \subset (S,0)$ une hypersurface (S lisse). Soit $h : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow S$ une déformation d'un morphisme $h_o : \mathbb{D} \times \{0\} = \mathbb{D} \longrightarrow S$, tel que $h(\{0\} \times \{0\}) = 0$, et $h_o(\mathbb{D}) \not\subset D$. Notons (z,t) des coordonnées locales sur $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. t est le paramètre de déformation. Pour t suffisamment petit mais non nul, le nombre des points d'intersection de l'image de $h_t : \mathbb{D} \times \{t\} \longrightarrow S$ avec D, qui tendent vers 0 avec le paramètre de déformation t, la multiplicité de D en ces points, la multiplicité d'intersection de h_t avec D en ces points et le nombre des points de $\mathbb{D} \times \{t\}$ dont l'image est un de ces points, sont indépendants de t. Numérotons-les de $i = 1$ à k. Soit $\mathfrak{M}_i(D)$ la multiplicité de D au i-ème point d'intersection, $(h_t \cdot D)_i$ la multiplicité d'intersection, n_i le nombre de points de $\mathbb{D} \times \{t\}$ dont l'image est le i-ème point d'intersection. D'après les propriétés élémentaires des nombres d'intersection, on a :

$$(h_o \cdot D)_o = \sum_{i=1}^{k} (h_t \cdot D)_i$$

(notons que nous entendons par $(h_t \cdot D)_i$ la somme des ordres de l'équation de $h_t^{-1}(D)$ aux n_i points dont l'image est le i-ème point d'intersection). Nous supposerons d'autre part toujours que $h_o(\mathbb{D}) \not\subset D$.

IV.3 <u>Définition</u> : Nous dirons que l'hypersurface D est harmonieuse en $0 \in D$ si pour tout chemin $h_o : (\mathbb{D},0) \longrightarrow (S,0)$ tel que $h_o(\mathbb{D}) \not\subset D$, et pour toute déformation $h : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow S$ de h_o, on a, avec les notations précédentes :

a) $$\mathfrak{M}_o(D) \leq \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \mathfrak{M}_i(D)$$

b) $$\mathfrak{M}_o(D) = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \mathfrak{M}_i(D)$$

dans deux cas seulement :

1) h_o est lisse et transverse à D en 0 (c'est-à-dire : $(h_o \cdot D)_o = \mathfrak{M}_o(D)$;

2) $k=1$ et $n_1 = 1$.

IV.3 <u>Exemples</u> : A) Si D est non singulier en 0, D est harmonieuse en 0. En effet, choisissons des coordonnées locales $u_o,\dots,u_m$ sur S telles que D soit donnée par $u_o = 0$. h peut s'écrire, au prix de la multiplication de z par une unité, par :

$$u_o = z^{a_o} + \eta_o(z,t)$$

$$u_i = u_i(z) + \eta_i(z,t) \qquad 1 \leq i \leq m \quad .$$

Mais grâce au théorème de préparation de Weierstrass, puisque $\eta_o(z,0) \equiv 0$, on peut écrire

$$u_o = V(z,t)(z^{a_o} + \beta_{a_o-1}(t)z^{a_o-1} + \dots + \beta_o(t))$$

avec $V(0,0) \neq 0$.
Les points d'intersection de h_t avec D qui tendent vers 0 avec t sont donc donnés par les racines du polynôme qui apparaît dans l'écriture de u_o; puisque $\mathfrak{M}_o(D) = 1$, l'inégalité a) est certainement vérifiée.
D'autre part, l'égalité de b) entraîne évidemment $k = 1$ et $n_1 = 1$.

B) Exemple d'hypersurface ne satisfaisant pas la condition a) : soit D l'hypersurface de $\mathbb{C}^3(u_o,u_1,u_2)$ définie par : $u_o^2 + u_1^2 u_2 = 0$. Prenons pour h le morphisme $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}^3$ donné par

$$\begin{cases} u_o = z^k & (k \geq 1) \\ u_1 = t \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

$\mathfrak{M}_o(D) = 2$, mais h_t coupe D en un seul point de coordonnées $u_o = 0$, $u_1 = t$, $u_2 = 0$, en lequel $\mathfrak{M}_1(D) = 1$.
a) n'est pas vérifiée.

C) Exemple d'hypersurface satisfaisant a) mais pas b). Prenons l'hypersurface de $\mathbb{C}^2(u_o,u_1)$ définie par $u_o.u_1 = 0$ (elle vérifiera a) au vu de A)), et h donné par :

$$u_o = (z-t)^k \qquad k \geq 2$$

$$u_1 = (z+t)^l \qquad l \geq 2$$

h_o est donné par $u_o = z^k$, $u_1 = z^l$, $\nu_o(h_o) \geq 2$. h_o n'est donc pas lisse. D'autre part, $\mathfrak{M}_o(D) = 2$, et h_t coupe D en deux points, de multiplicité 1 sur D correspondant à $z = \pm t$. a) est évidemment vérifiée, mais pas b) puisque l'on a $2 = \mathfrak{M}_1(D) + \mathfrak{M}_2(D)$.

IV.4 Remarquons que l'harmonie est une condition "d'incidence". L'harmonie d'une hypersurface D en un point $0 \in D$ signifie que D s'effile vers le point 0 d'une manière bien précise. L'harmonie est une condition sur le germe de D en 0.

V.1 <u>Proposition</u> : Si D est le lieu discriminant de la déformation semi-universelle d'un germe d'hypersurface à singularité isolée, D satisfait la condition a) de l'harmonie.

V.1 bis <u>Conjecture 2</u> : Un tel D est harmonieux.

V.2 <u>Définition</u> : Soit $f : X \longrightarrow S$ une déformation d'un germe d'hypersurface à singularité isolée (X_o,x_o), avec S réduite. Nous dirons que f satisfait la condition (Σ_μ) si pour tout $s' \in S$, notant $x_i(s')$ $1 \leq i \leq k$ les points singuliers de $X_{s'}$, on a l'égalité

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')} X_{s'} = \mu_{x_o}(X_o) \quad .$$

Nous avons énoncé comme "vérité non démontrée" dans [4] l'équivalence de (Σ_μ) et de (E_μ), c'est-à-dire que l'égalité (*) n'est possible que si $k = 1$.

Remarquons que d'après ce que nous avons montré dans [4] il suffit de vérifier l'équivalence de Σ_μ et E_μ quand $S = \mathbb{D}$. (En effet l'ensemble des points de la base de la déformation semi-universelle de (X_o, x_o) tels que la fibre correspondante vérifie (*) avec $k = 1$ est un sous-espace analytique fermé (localement) de l'ensemble des points où la fibre vérifie (*). Pour montrer que ces deux ensembles sont égaux, il suffit de montrer qu'ils contiennent les mêmes germes de courbes irréductibles, ce qui après normalisation de ces germes de courbes, nous ramène au cas $S = \mathbb{D}$). Si nous notons $(E_{\overline{K}})$ la condition analogue à (E_μ) obtenue en remplaçant $\mu_{x_o}(X_o)$ par $\overline{K}_{X_o, x_o}$ (ou la suite des $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$), nous avons posé au début (I.6) le problème de montrer que $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$. On peut de même se ramener, en utilisant la semi-continuité de $\sum_i^k \mu^{(i)}$, au cas où $S = \mathbb{D}$ pour montrer $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$, et l'on a le :

V.3 <u>Théorème 7</u> : Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(\Sigma_\mu) \Rightarrow (E_\mu)$ et $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$;

2) les lieux discriminants de déformations semi-universelles de germes d'hypersurfaces à singularité isolée sont harmonieux (c'est-à-dire la conjecture 2).

V.4 <u>Remarque</u> : D'après I.6, si la conjecture 2 est vraie, une déformation à base lisse satisfaisant (E_μ) satisfait les conditions de Whitney le long de son lieu singulier. D'après un théorème de Thom ceci entraîne que la déformation est topologiquement triviale, et donc en particulier que le type topologique des fibres est constant. Comme le nombre de Milnor est un invariant du type topologique, la conjecture 2 entraîne que les conditions de Whitney sont, dans le cas particulier où nous sommes, <u>équivalentes</u> à la constance du type topologique des fibres. C'est une réciproque forte, dans un cas particulier, du théorème de Thom.

Ceci répondrait partiellement à une question de Zariski ([6]).

V.5 <u>Terminologie</u> : Dans la situation de III.2, les points d'intersection de h_t avec le lieu discriminant de $F_U(H_o)$ où h_t est lisse et transverse à ce lieu discriminant, correspondent à des points lisses de la fibre X_t, mais en lesquels l'hyperplan tangent est parallèle à H_o. Nous dirons que de tels points correspondent à des <u>plis évanouissants</u> de la déformation. L'assertion $(E_\mu) \Rightarrow (E_{\overline{K}})$ revient à montrer, dans l'hypothèse (E_μ), qu'il ne peut y avoir de plis évanouissants.

VI <u>Démonstrations</u> : On renvoie le lecteur à [5] pour les démonstrations des théorèmes et propositions énoncés ici.

***

R E F E R E N C E S

[1] G. Canuto et J. P. Speder : Conditions d'éclatement et conditions de Whitney, Université de Nice, 1972.

[2] H. Hironaka : Equivalence and deformations of isolated singularities, Woods Hole Seminar on Algebraic Geometry, 1964.

[3], [4] B. Teissier : Déformations à type topologique constant, I et II, in Séminaire Douady-Verdier, Secrétariat mathématique, 45, rue d'Ulm, Paris V, (1972).

[5] B. Teissier, in Singularités à Cargèse, à paraître dans "Astérisque".

[6] O. Zariski : Some open questions in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc., July 1971, 77, n° 4, 481-491.

DEUXIEME THESE

LA PHYLOTAXIE

d'après un article de H. S. M. Coxeter,
J. of Algebra, 20, 167-175, (1972).

A